



**HAL**  
open science

# Morphologie microstructurale et comportement mécanique; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées.

Michel Bornert

► **To cite this version:**

Michel Bornert. Morphologie microstructurale et comportement mécanique; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées.. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT: . tel-00113078

**HAL Id: tel-00113078**

**<https://pastel.hal.science/tel-00113078v1>**

Submitted on 10 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

*présentée pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR**

**DE**

**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

**Spécialité Structures et Matériaux**

par

**Michel BORNERT**

*Sujet de thèse*

**Morphologie microstructurale et comportement mécanique ;  
caractérisations expérimentales, approches par bornes et  
estimations autocohérentes généralisées.**

*soutenue le 14 Novembre 1996*

*devant le jury composé de :*

*Président :* **M. Pierre SUQUET**

*Rapporteurs :* **M. Pedro PONTE CASTAÑEDA**  
**M. Dominique JEULIN**

*Examineurs :* **M. Graeme MILTON**  
**M. Bernard HALPHEN**  
**M. Claude STOLZ**

*Directeur de thèse :* **M. André ZAOUI**



# Remerciements

*Ce mémoire est l'aboutissement d'un parcours micromécanique à la fois personnel et collectif. S'il fallait en situer les origines, je citerais deux événements particuliers. Le premier est un certain cours intitulé « Matériaux Composites », dispensé par Pierre Suquet, qui m'a conduit à construire mon premier modèle micromécanique, certes bien modeste, mais qui a façonné mon goût pour cette science. Le second, quelques mois plus tard, est une rencontre avec André Zaoui et ses collaborateurs, qui allaient former le noyau central de la future équipe de « Micromécanique des Matériaux » du Laboratoire de Mécanique des Solides, au cours d'une présentation devant les chercheurs de ce dernier. J'y ai découvert pour la première fois des matériaux réels à l'échelle du micromètre, dont on observait les déformations avec des outils bien surprenants qu'on appelait « machines in situ » et « microgrilles ». Il me semblait qu'il y avait là des choses bien intéressantes à entreprendre...*

*Le fait de retrouver, bien des années après, Pierre Suquet et André Zaoui dans mon jury de thèse, l'un en tant que Président et l'autre en tant que Directeur, constitue pour moi un immense honneur et une grande joie. Mais j'y vois aussi le signe qu'une recherche fondamentale est avant tout une affaire de temps et de relations humaines. Je dois à André Zaoui de m'avoir accordé une confiance presque aveugle pendant ces longues années et de m'avoir soutenu et guidé, notamment aux moments où le découragement menaçait de l'emporter. Pierre Suquet a bien sûr suivi mon travail de plus loin. La lecture de ses travaux m'a toutefois apporté nombre de satisfactions intellectuelles et les échanges que nous avons eus ont toujours été pour moi une source de motivation. Je dois à tous deux ce que l'on doit aux grands hommes. Merci.*

*Mes vifs remerciements s'adressent ensuite à Dominique Jeulin qui a courageusement accepté d'être Rapporteur de ma thèse et a analysé ce mémoire en détail, ainsi qu'à Pedro Ponte Castañeda qui a relevé le même défi malgré la barrière de la langue. J'exprime aussi ma gratitude à Graeme Milton et Bernard Halphen pour avoir parcouru attentivement ces pages si lourdes.*

*Ce travail n'aurait jamais été entrepris sans les conditions favorables dont j'ai bénéficié. Merci d'abord à Pierre Bérest, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides, pour m'avoir accueilli dans son unité. Je tiens également à remercier l'Administration du Corps des Ingénieurs des Ponts et Chaussées et l'École Nationale des Ponts et Chaussées qui ont rendu possible mon projet de recherche.*

*Les résultats présentés ici sont le fruit d'un travail d'équipe. Merci d'abord à Daniel Caldemaison et Lucien Allais pour m'avoir initié aux joies et aux déboires de l'expérimentation. Merci ensuite à Éveline Hervé pour m'avoir initié aux joies et aux déboires de la modélisation analytique. Claude Stolz est à l'origine de bon nombre d'idées développées dans ce travail. Notre premier échange remonte à mon stage de DEA ; au cours de notre discussion, qui traitait de mesures locales et de transformation finie, il m'avait semblé qu'il y avait en son esprit des choses bien intéressantes à comprendre... Je ne m'étais pas trompé. Je le remercie chaleureusement pour son enthousiasme, sa disponibilité et sa bonne humeur.*

*Je tiens aussi à souligner le rôle essentiel des autres membres de l'équipe, du laboratoire, ou d'ailleurs, qui, sans avoir directement contribué à ce travail, ont, par leur accueil, leur bonne humeur, leurs compétences propres et leur disponibilité, fait en sorte que ces années soient une réussite. Merci à Jérôme, Thierry, Frédéric, Véronique, Yves, Sabine, Christophe, Jean-Christophe, Laurent, Renaud, Teddy, Pascal, Franck, Barbara, Pirouz, Rachel-Marie, Sylvie, Hubert, Marc, Andrei, Éric et tous les autres...*

*Enfin, je n'oublie pas mes parents, ma famille et Pascale, dont la patience a été rudement mise à l'épreuve. Merci du fond du cœur pour votre soutien.*

# Introduction

Pendant des siècles les règles de construction ont été des *règles de l'art*, savoir-faire transmis de génération en génération et issu de l'observation de la nature, des enseignements tirés des succès ou échecs antérieurs et de connaissances plus ou moins empiriques, subtils mélanges entre descriptions intuitives des lois de la physique et considérations esthétiques. Cette démarche a prouvé son efficacité en nous léguant nombre de chefs-d'œuvre architecturaux ayant résisté à l'épreuve du temps.

Mais les critères actuels d'efficacité et de sécurité ne sont plus compatibles avec une telle méthodologie, qui a ainsi cédé le pas à une approche plus rationnelle et prédictive, fondée sur des principes qui remontent au siècle des lumières et qui ont rendu possible l'avènement de l'ère industrielle. C'est ainsi qu'est né le *calcul des structures* qui, sans renier les connaissances du passé, a permis de les approfondir, de mieux les maîtriser, de les enrichir, et a ouvert la voie vers de nouvelles techniques, de nouveaux moyens et par voie de conséquence de nouveaux modes de vie. Si aujourd'hui les avions volent, les trains à grande vitesse roulent et les ponts portent de plus en plus loin, c'est aussi parce que les constructeurs sont devenus ingénieurs et en particulier mécaniciens.

Cette démarche semble à nouveau révéler ses limites. Le calcul des structures actuel n'est en effet pas complètement prédictif et repose lui-aussi sur des connaissances *a priori* utilisées comme hypothèses dans les modèles numériques. L'une d'entre elles concerne la description du comportement mécanique des matériaux constitutifs des structures, qui s'avère souvent soit trop pauvre et donc peu représentative de la réalité, soit trop riche mais dépendant de paramètres dont la signification est rarement claire et dont la valeur ne peut être déterminée qu'approximativement par des essais longs et coûteux, à moins qu'elle ne soit simplement laissée à l'appréciation intuitive de l'utilisateur du modèle. L'ingénieur se retrouve alors dans l'habit de l'homme de l'art, contraint à se fier à son intuition, à essayer, essayer à nouveau, pour, en fin de compte, souvent écarter les solutions audacieuses et novatrices. À la différence du bâtisseur de cathédrale, il ne dispose plus de l'atout temps et, la foi n'aidant plus, les contraintes budgétaires limitent cruellement ses ambitions...

C'est là qu'intervient la micromécanique, science dont les prémisses n'ont pas quarante ans, et qui prétend réintroduire des concepts plus cartésiens dans la description du comportement des matériaux : pourquoi ne pas tenter de prévoir ce dernier à partir de la connaissance de la structure fine des matériaux, accessible par l'observation, et de celle des mécanismes physiques plus simples qui gouvernent le comportement de la matière à cette échelle-là, au même titre que l'on sait prévoir la réponse d'une structure dont on connaît la géométrie et le comportement des matériaux qui la constituent ? Peut-être le *calcul des microstructures* permettra-t-il à l'ingénieur de franchir un nouveau pas, qui lui donnera accès à de nouveaux matériaux, qui rendront possibles de nouvelles structures...

Bien sûr, on n'en est pas encore là, mais le travail exposé dans ce mémoire est motivé par cet espoir et prétend apporter une nouvelle pierre, certes modeste, à l'édifice micromécanique. La question traitée est celle des relations entre la distribution spatiale des constituants d'un matériau hétérogène et ses propriétés mécaniques : comment caractériser cette « morphologie » microstructurale, quelle est son influence réelle, comment mieux la prendre en compte dans un modèle de prévision de la réponse d'un matériau dont on connaît la microstructure et comment enfin chercher à modifier cette dernière pour améliorer cette réponse et adapter le matériau à l'utilisation auquel on le destine. Précisons d'emblée que la réponse à ces questions ne se trouve pas dans les dernières pages de ce manuscrit... Mais peut-être l'écheveau de la complexité du problème en sort-il moins emmêlé et peut-être aussi les

outils proposés pour l'affronter permettront-ils dans un avenir proche d'en défaire d'autres nœuds.

L'éventail des matériaux abordés se limite principalement à ceux qui obéissent à une loi de comportement *élastique linéaire anisotrope* ou *élastique non-linéaire*, ce dernier cas permettant d'aborder certaines réponses en plasticité. Ce choix est délibéré et s'inscrit dans une logique générale selon laquelle il vaut mieux ne pas cumuler les difficultés si l'on veut les maîtriser. Il correspond aussi à une logique micromécanique : l'élasticité linéaire est l'archétype des lois de comportement qui permet ensuite au moyen d'extensions adéquates d'aborder, certes avec plus ou moins de rigueur et de bonheur, des gammes de comportement bien plus vastes. Le cadre général est aussi restreint aux *microstructures aléatoires macrohomogènes*, qui excluent en particulier les microstructures périodiques et les situations dites « de forts gradients ».

La démarche suivie est à la fois expérimentale, théorique et numérique. Elle commence par une confrontation détaillée entre les prévisions de modèles micromécaniques classiques, le modèle autocohérent et le modèle des trois phases, et des mesures expérimentales de réponses réelles. Les matériaux étudiés sont des biphasés fer/argent et fer/cuivre, élaborés par des techniques permettant de modifier la morphologie microstructurale tout en maintenant les autres paramètres aussi constants que possible. Les comparaisons sont menées de manière classique sur le comportement global, dans les domaines linéaire et non-linéaire, mais aussi, et c'est moins classique, au niveau de la réponse locale, caractérisée en termes de déformation moyenne par phase et de distributions de déformation au sein des phases. Une technique expérimentale originale a été développée dans ce but. Cette étude révèle une faible sensibilité de la *réponse globale* aux paramètres de distribution des phases et une prévision satisfaisante des modèles à cette échelle.

En revanche, les *hétérogénéités de la déformation locale* sont loin d'être les mêmes pour tous les matériaux testés. L'influence de la morphologie semble ainsi se manifester principalement à cette échelle. Les modèles prévoient également un tel effet, mais la confrontation quantitative de leurs prévisions aux mesures n'est guère satisfaisante : les hétérogénéités sont dans la plupart des situations amplement sous-estimées. Cette constatation nous amène à remettre en cause la pertinence de ces modèles pour décrire convenablement les microstructures étudiées. Si l'hétérogénéité locale n'a que peu d'effet sur la réponse purement élastique, il n'en va pas de même pour d'autres gammes de comportement, pour lesquelles l'apparition de certains phénomènes macroscopiques est gouvernée par des événements locaux, eux-mêmes induits par l'état de sollicitation local. C'est le cas de l'apparition et du développement de l'endommagement, de la réponse à la fatigue ou de certains aspects de la plasticité. L'utilisation de ces modèles simplifiés pour décrire ces phénomènes semble ainsi vouée à l'échec.

La suite du travail est consacrée au développement de nouveaux modèles permettant d'améliorer ces prévisions et surtout de prendre véritablement en compte des paramètres microstructuraux quantitatifs accessibles par l'observation d'une microstructure. Elle comporte deux étapes principales. La première est celle de l'enrichissement des modèles classiques cités plus haut, rendu possible par la solution analytique du problème de la sphère multicouche en milieu infini. Elle conduit à la définition d'un modèle autocohérent généralisé à «  $m$  motifs à  $n$  couches », susceptible de rendre compte de paramètres microstructuraux tels que les fluctuations locales de concentrations ou des « inversions de configurations » au sein de matériaux de type matrice/inclusions. Diverses extensions au comportement élasto-plastique non-linéaire sont proposées et comparées. Ce modèle s'avère pertinent pour décrire certains composites à particules présentant des gradients de propriétés mécaniques locales mais n'améliore pas notablement les prévisions de déformation locale au sein des biphasés étudiés. Une analyse plus précise des champs de déformation mesurés suggère que les hétérogénéités sont au moins partiellement liées à des détails morphologiques dont un modèle utilisant une représentation sphérique des domaines de phases ne peut rendre compte.

Cette idée conduit à la seconde étape de modélisation. Il s'agit d'une refonte globale de la démarche conduisant aux estimations telles que celles utilisées antérieurement. Elle s'inscrit dans une perspective plus vaste que la simple application aux matériaux biphasés cités plus haut. L'ambition est de concevoir dans une démarche aussi rigoureuse que possible toute une gamme de modèles permettant de décrire des situations morphologiques très variées et dans lesquels les informations disponibles sur

---

la distribution des phases interviennent comme des paramètres, dont l'effet sur la réponse locale et globale du matériau peut ainsi être testé. Le point de départ est la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman appliquée à un *volume élémentaire représentatif* d'un composite élastique soumis à un chargement *macrohomogène*. Elle conduit à des bornes rigoureuses ou à des estimations autocohérentes pour les tenseurs des modules. Cette démarche théorique générale est ensuite appliquée à des situations particulières conduisant à des solutions formelles plus explicites, dont on établit les propriétés. Le premier cas est celui où la seule information disponible porte sur les fonctions de corrélations statistiques des phases. Il n'autorise que très peu de variations sur les paramètres morphologiques pris en compte. La seconde situation plus riche repose sur la notion de *motif morphologique représentatif* proposée initialement par d'autres auteurs, précisée ici et étendue à des situations *anisotropes*. Elle permet par exemple de rendre compte de l'influence de la forme des renforts d'un composite, de modéliser des particules hétérogènes ou encore des amas de particules. Mais, le « contenu morphologique » des motifs étant totalement quelconque, bien d'autres situations peuvent être abordées. Un soin particulier est accordé à la définition précise des hypothèses permettant la simplification des équations et à l'explicitation de leur signification véritable vis-à-vis de la microstructure que l'on cherche à représenter. On vérifie aussi que les tenseurs associés aux bornes et estimations proposées ont toutes les propriétés requises pour un tenseur des modules d'élasticité.

La mise en œuvre pratique de ces approches requiert la solution d'un problème mécanique auxiliaire : celui de l'inclusion hétérogène de géométrie ellipsoïdale noyée en milieu infini. Une approche numérique utilisant la méthode des éléments finis est proposée pour traiter les cas n'admettant pas de solution analytique connue. Les principes d'un tel calcul et les précautions à prendre sont données. À titre d'exemple d'application, la réponse d'un composite à renforts non sphériques distribués de manière isotrope ou non est calculée. Les résultats permettent, entre autres, de comparer quantitativement l'anisotropie induite par la distribution spatiale des renforts à celle due à leur géométrie propre.

L'état d'avancement atteint pour cette nouvelle approche ne permet pas encore son application aux matériaux biphasés étudiés expérimentalement et ceci pour deux raisons principales. La première est que le traitement satisfaisant des non-linéarités reste pour l'essentiel une question ouverte. Les procédures proposées pour d'autres modèles plus simples peuvent en théorie aussi s'appliquer à ces nouveaux modèles, mais il faudra traiter certains aspects numériques avant d'envisager une mise en œuvre effective. La seconde difficulté est liée à la construction pertinente d'une description par motifs morphologiques à partir d'une microstructure réelle. Si l'opération peut sembler abordable pour des composites dont les renforts sont bien définis, il n'en va pas de même pour d'autres microstructures.

La démarche entreprise n'en est donc pas encore au stade de sa conclusion finale. Elle a toutefois abouti à la définition d'une méthodologie puissante pour la description des milieux hétérogènes aléatoires qui permet d'ores et déjà d'aborder des microstructures décrites par tout un ensemble de paramètres morphologiques. Le travail entrepris peut être considéré comme une première étape vers des modèles systématiques, pendant, pour les milieux aléatoires, des méthodes d'homogénéisation bien connues pour les milieux périodiques.

---





# Conseils de lecture

Ce mémoire est la synthèse de plusieurs années de recherche personnelles au Laboratoire de Mécanique des Solides mais reprend aussi les résultats d'études antérieures. Il a fait l'objet de quatre publications dans des revues scientifiques (références [27, 3, 28, 24]), de plusieurs présentations à des colloques [26, 23, 25, 31], qui ne rendent que partiellement compte des résultats. La rédaction a été entreprise avec le souci du détail et de la précision, dans l'espoir que ces pages puissent devenir un outil de travail pour qui souhaitera s'inspirer des résultats obtenus et les développer. Le volume en est la conséquence naturelle. La lecture linéaire de cette thèse est ainsi réservée aux seuls passionnés ; les autres pourront noter que les *cinq chapitres* sont pour l'essentiel *indépendants*. Seul le dernier repose sur les résultats théoriques du quatrième, mais on peut l'aborder sans en connaître toutes les finesses.

Le chapitre **1** est principalement bibliographique. Nous y proposons d'abord une synthèse de la démarche micromécanicienne, en focalisant le propos sur la manière dont elle s'intègre dans la perspective générale présentée au début de l'introduction. Nous présentons ensuite les modèles antérieurs d'homogénéisation pour les milieux aléatoires, en traitant d'abord le comportement élastique linéaire. Les modèles sont sensiblement classés suivant la rigueur avec laquelle ils abordent la description des microstructures, ainsi que par le type des morphologies qu'ils prétendent représenter, la distinction portant principalement sur la présence ou non d'une matrice. Les diverses extensions aux comportements non-linéaires sont ensuite présentées. L'attention est en particulier portée sur la pertinence de leurs hypothèses et sur l'interprétation des champs locaux invoqués. Le lecteur familier avec les modèles micromécaniques pourra se contenter d'une lecture rapide de ce chapitre ; les autres y trouveront peut-être une bonne introduction en la matière.

Le chapitre **2** est relativement court et de teneur principalement technique. Il présente la méthode de mesure de déformations locales utilisée. Nous insistons plus particulièrement sur la manière de calculer les déformations locales et de caractériser leurs hétérogénéités. Il est complété par l'annexe **D**. Sa lecture est facultative pour qui ne s'intéresse pas directement aux aspects expérimentaux.

Le chapitre **3** rend compte de toute la démarche expérimentale entreprise avec les biphasés fer/argent et fer/cuivre. Sa lecture pourra paraître par moments particulièrement ardue et austère. Ceci n'est que le reflet des difficultés auxquelles nous avons dû faire face. Rappelons que l'objectif était de mettre en évidence expérimentalement les effets de la morphologie par l'étude de matériaux dont ce paramètre pourrait être modifié tout en maintenant les autres constants. Ceci n'a presque jamais été le cas. Une grande partie des efforts a consisté à corriger ces dérives de façon à extraire la contribution de la morphologie seule. Ces corrections portent sur les concentrations des phases, le comportement local du fer et les niveaux de déformations macroscopiques pour lesquels on dispose de mesures locales. La première partie du chapitre décrit les procédures utilisées et donne les résultats des confrontations avec les modèles classiques. La seconde partie est consacrée aux diverses extensions proposées et aux nouvelles confrontations. Le modèle linéaire «  $m$  motifs à  $n$  couches » y est décrit et diverses extensions non-linéaires sont proposées. Enfin, la troisième partie est une discussion sur les origines possibles des hétérogénéités et les moyens envisageables pour les décrire. Le lecteur qui ne dispose que de peu de temps pourra se contenter d'un survol rapide et d'une lecture plus détaillée des conclusions partielles et finale. Notons toutefois que les principes des extensions non-linéaires éventuellement applicables aux modèles plus généraux proposés par la suite sont décrits et argumentés dans ce chapitre et plus précisément dans la seconde et la troisième partie. L'annexe **F** donne de manière exhaustive tous les résultats de mesures de déformations locales, dans l'optique d'une réutilisation par qui le souhaitera. L'annexe **A** fournit quelques éléments d'appréciation des diverses extensions aux

comportements élasto-plastiques envisagées, au travers du traitement complet du problème de la sphère creuse élasto-plastique. Sa lecture est facultative.

Le chapitre 4 est celui dont la portée est la plus large, c'est aussi le plus théorique et donc certainement le plus exigeant. En contrepartie, c'est aussi le plus riche à la fois en résultats nouveaux et en « mises au point » de résultats antérieurs. Il s'adresse d'abord aux théoriciens de la micromécanique qui se soucient véritablement des interactions au sein d'un volume élémentaire représentatif d'une microstructure complexe et ne se contentent pas d'une représentation simplifiée dont la signification est principalement intuitive et qui conduit à un résultat dont on ne connaît pas les tenants. Ils y trouveront tous les détails de l'approche que nous proposons, les démonstrations complètes de tous les résultats ainsi qu'un certain nombre de pistes pour des développements ultérieurs. Les autres pourront ignorer les calculs et se contenter des résultats. Ce chapitre comporte cinq parties. La première présente la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman appliquée à un volume élémentaire représentatif d'un composite élastique soumis à un chargement macrohomogène. Elle conduit à la définition des tenseurs de Hashin et Shtrikman dont les propriétés générales sont établies. L'approche est ensuite appliquée d'abord à une description classique utilisant des fonctions indicatrices de phases (seconde partie) puis à une description reposant sur l'implantation, selon une certaine statistique, de motifs morphologiques représentatifs dans une microstructure (troisième partie). Les propriétés des bornes et estimations ainsi construites sont étudiées en quatrième partie. L'attention est en particulier portée sur le caractère réaliste ou non des hypothèses adoptées pour aboutir à des expressions explicites. Enfin, la dernière partie est consacrée aux estimations de nature autocohérente construites sur la base des descriptions citées plus haut. Ce chapitre est complété par les annexes **B** et **C** qui apportent les éléments techniques nécessaires aux démonstrations.

Enfin, le chapitre 5 est consacré à la mise en œuvre effective des principes établis au chapitre précédent. La technique numérique utilisée pour aborder les problèmes auxiliaires à résoudre est présentée. Elle fait appel à des calculs par éléments finis bidimensionnels et tridimensionnels. À titre d'application, de nouvelles bornes pour des composites anisotropes à renforts particuliers sont présentées et comparées à des résultats antérieurs. L'intérêt de l'approche par motifs morphologiques représentatifs est mis en évidence : la prise en compte des interactions locales au sein des motifs conduit à des encadrements rigoureux des propriétés effectives de cinq à dix fois plus resserrés que les encadrements classiques correspondants. Le lecteur se souciant principalement de la mise en œuvre pratique des modèles proposés trouvera la plupart des éléments nécessaires dans ce chapitre relativement court et de lecture plus facile. L'annexe **E** décrit les divers outils informatiques développés pour la mise en œuvre de ces modèles.

---

# Notations

$\underline{x}$	: tenseur d'ordre un
$\underline{\underline{x}}$	: tenseur d'ordre deux
$\underline{\underline{\underline{X}}}$	: tenseur d'ordre quatre
$\underline{\underline{I}}$	: tenseur identité d'ordre deux
$\underline{\underline{\underline{I}}}$	: tenseur identité d'ordre quatre
$\otimes$	: produit tensoriel
. et	: produit contracté d'ordre un ou deux
$tr(\cdot)$	: trace d'un tenseur
$dev(\cdot)$	: déviateur d'un tenseur
$div(\cdot)$	: opérateur divergence
$\mathbb{T}_2^s$	: ensemble des tenseurs d'ordre deux symétriques
$\mathbb{T}_2^s(\Omega)$	: ensemble des champs de tenseurs d'ordre deux symétriques sur un domaine $\Omega$
$ \cdot $	: volume ou déterminant ou valeur absolue
$\ \cdot\ $	: norme
$\langle \cdot \rangle_\Omega$	: moyenne sur un domaine $\Omega$
$\langle \cdot \rangle_i$	: moyenne sur une phase $i$
$\langle \cdot \rangle_\alpha$	: espérance statistique
$\kappa_i$	: fonction indicatrice de la phase $i$
$\underline{u}$	: déplacement
$\underline{\underline{\epsilon}}$	: déformation linéarisée
$\underline{\underline{\sigma}}$	: contrainte de Cauchy
$\epsilon^{eq}$	: déformation équivalente de von Mises
$\sigma^{eq}$	: contrainte équivalente de von Mises
$\underline{\underline{\epsilon}}^p$	: déformation plastique
$\underline{\underline{\epsilon}}^{Lin}$	: déformation linéarisée
$\underline{\underline{\epsilon}}^{Log}$	: déformation logarithmique
$\underline{\underline{\epsilon}}^{GL}$	: déformation de Green-Lagrange
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$	: tenseurs des modules et des complaisances
$\{2\mu, 3k\}$	: tenseur isotrope d'ordre quatre, de modules de cisaillement $\mu$ et de compressibilité $k$
$\mathcal{C}^{sc}, \mu^{sc}$	: tenseur des modules et module de cisaillement sécants
$\mathcal{C}^{tg}, \mu^{tg}$	: tenseur des modules et module de cisaillement tangents
$\star$	: convolution
$\underline{\underline{G}}^0$	: opérateur de Green relatif à un milieu infini de référence $\mathcal{C}^0$
$\underline{\underline{\Gamma}}^0, \underline{\underline{\Delta}}^0$	: opérateurs de Green modifiés relatifs à un milieu de référence $\mathcal{C}^0$ infini
$\underline{\underline{G}}_\Omega^0, \underline{\underline{\Gamma}}_\Omega^0, \underline{\underline{\Delta}}_\Omega^0$	: opérateurs de Green relatifs à un milieu de référence $\mathcal{C}^0$ fini, de géométrie $\Omega$

---

$\mathcal{E}$	: ellipsoïde
$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^0$	: tenseur d'Eshelby relatif à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et à un milieu de référence $\mathcal{C}^0$
$\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0$	: tenseur de Hill relatif à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et à un milieu de référence $\mathcal{C}^0$
$\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{0*}$	: « constraint tensor » relatif à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et à un milieu de référence $\mathcal{C}^0$
$\mathcal{P}_{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}^0$	: tenseur d'influence relatif aux ellipsoïdes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et à un milieu de référence $\mathcal{C}^0$
$\mathbf{E}^0$ ou $\mathcal{P}^0$	: partie singulière de l'opérateur $\mathbf{\Gamma}^0$ , relative à une décomposition sphérique
$\mathbf{E}_{\Omega}^0$ ou $\mathcal{P}_{\Omega}^0$	: partie singulière de l'opérateur $\mathbf{\Gamma}^0$ , relative à une décomposition selon le domaine $\Omega$
$VP(f)$	: valeur principale d'une fonction $f$
$VP_{\Omega}(f)$	: « valeur principale » d'une fonction $f$ , calculée par rapport à une géométrie $\Omega$
${}^c\Omega$	: complémentaire d'un domaine $\Omega$
$\bar{\Omega}$	: symétrique d'un domaine $\Omega$
$\Omega \oplus \bar{B}$	: dilaté d'un domaine $\Omega$ par le domaine $B$
$\Omega \ominus \bar{B}$	: érodé d'un domaine $\Omega$ par le domaine $B$
VER	: volume élémentaire représentatif
MHE	: milieu homogène équivalent
$\bar{X}$	: grandeur homogène équivalente
MI	: morphologie matrice/inclusions
CC	: morphologie à phases co-continues
V	: bornes de Voigt ou borne généralisée de type Voigt
R	: bornes de Reuss ou borne généralisée de type Reuss
H	: bornes de Hashin
	H+ = borne supérieure et H- = borne inférieure
HS	: bornes de Hashin et Shtrikman ou bornes généralisées de type Hashin-Shtrikman
	HS+ = borne supérieure et HS- = borne inférieure
HSZ	: bornes de Hervé, Stolz et Zaoui
	HSZ+ = borne supérieure et HSZ- = borne inférieure
MT	: modèle de Mori et Tanaka ou estimation généralisée de type Mori-Tanaka
AC	: modèle autocohérent ou estimation autocohérente généralisée
3Ph	: modèle des trois phases
	3Pha = configuration « dur dans mou » et 3Phb = configuration « mou dans dur »
CL	: Approche « classique »
MMR	: Approche par « Motifs Morphologiques Représentatifs »
mnpPh	: Description par plusieurs motifs sphériques multicouches
AD	: modèle autocohérent différentiel
FC	: modèle aux faibles concentrations
MI3	: bornes d'ordre trois de Milton et Phan-Thien
Macao	: Méthodes AutoCohérentes Assistées par Ordinateur

---

Première partie

Morphologie et Hétérogénéités



# Chapitre 1

## Modélisations micromécaniques de matériaux multiphasés

La micromécanique des matériaux tente de décrire le comportement mécanique macroscopique d'un matériau hétérogène à partir d'informations sur les mécanismes élémentaires de déformation des phases constitutives et sur la répartition spatiale de ces derniers. Son but est une meilleure prévision du comportement en service des matériaux, permettant de réduire le nombre d'essais nécessaires à leur caractérisation macroscopique et une meilleure interprétation de ces derniers. Elle autorise également une optimisation des paramètres microstructuraux dans le but d'adapter les matériaux à l'usage auquel ils sont destinés.

Nous présentons dans ce chapitre la méthodologie et les concepts généraux des modèles de changement d'échelle en micromécanique, les conditions d'applicabilité et les cadres mathématiques usuellement invoqués pour la description des matériaux hétérogènes. Nous précisons également le type d'informations que l'on peut extraire de ces modèles à l'échelle macroscopique et à l'échelle microscopique.

Une revue, bien sûr non-exhaustive, des nombreux modèles proposés au cours des quelques décennies d'existence de l'approche micromécanicienne est ensuite proposée. Elle débute avec les modèles de description du comportement élastique linéaire avant d'aborder les comportements non-linéaires. Nous nous limitons principalement aux comportements élastiques non-linéaires et aux comportements élasto-plastiques répondant à certaines descriptions particulières. D'autres gammes de comportements sont simplement rappelées.

L'accent est mis sur les matériaux à microstructure aléatoire mais les méthodes relatives aux structures périodiques sont aussi mentionnées. Les modèles utilisés par la suite sont décrits plus en détail : il s'agit du modèle autocohérent classique, du modèle autocohérent généralisé ou « modèle trois phases » et de leurs extensions.

### 1.1 Généralités sur les modèles micromécaniques

#### 1.1.A Un problème de structure sur un matériau hétérogène

Le calcul de structure vise à déterminer l'état de sollicitation des pièces mécaniques sous les divers chargements qu'elles sont susceptibles de subir au cours de leur existence, dans le but de prévoir leur limites d'utilisation, ou inversement, d'adapter leurs caractéristiques, notamment géométriques, au cahier des charges qu'on souhaite qu'elles satisfassent. Un problème de structure classique est défini par la géométrie de la structure, le comportement des matériaux constitutifs, leur répartition spatiale et le chargement considéré.

Nous nous limitons dans tout ce travail aux situations où l'état mécanique en tout point de la structure peut être décrit par les concepts de la mécanique des milieux continus, et nous supposons de plus, sauf mention spéciale, que l'hypothèse des petites perturbations est applicable.



Notons  $\mathcal{S}$  le domaine occupé par la structure et  $\partial\mathcal{S}$  sa surface extérieure, de normale unitaire sortante  $\underline{n}$ . La loi de comportement mécanique en tout point  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  y détermine la relation fonctionnelle entre la contrainte réversible de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  et la déformation linéarisée  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$ . Dans la plupart des cas abordés au cours de ce travail, elle est définie par un potentiel thermodynamique de déformation  $\phi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{x})$  tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \frac{\partial\phi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}), \underline{x}) \quad \text{avec } \phi \text{ convexe en } \underline{\underline{\epsilon}}. \quad (1.1)$$

Pour un comportement élastique linéaire sans déformations ni contraintes initiales, il s'écrit :

$$\phi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{C}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (1.2)$$

$$\text{soit : } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) \quad (1.3)$$

où  $\underline{\underline{C}}(\underline{x})$  est le tenseur des modules d'élasticité, du quatrième ordre, symétrique et défini positif, déterminé par 21 composantes scalaires indépendantes. Si le comportement local est isotrope,  $\phi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{x})$  ne dépend que des trois invariants principaux de  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . Nous nous intéresserons en particulier au cas suivant, permettant de décrire en première approximation<sup>1</sup> le comportement élasto-plastique des matériaux réels testés dans cette étude :

$$\phi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{x}) = \Phi(\epsilon^{\text{eq}}, \underline{x}) + \frac{k(\underline{x})}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})^2, \quad (1.4)$$

$$\text{soit : } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \frac{2}{3\epsilon^{\text{eq}}} \frac{\partial\Phi}{\partial\epsilon^{\text{eq}}}(\epsilon^{\text{eq}}, \underline{x}) \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) + k(\underline{x}) \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} \quad (1.5)$$

où  $\underline{\underline{I}}$  et  $\underline{\underline{I}}$  sont respectivement les tenseurs identités d'ordre deux et quatre,  $\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}} = \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right] : \underline{\underline{\epsilon}}$  désignent respectivement la trace et le déviateur de  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\epsilon^{\text{eq}}$  est la déformation équivalente de Von Mises :

$$\epsilon^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) : \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}})}. \quad (1.6)$$

Dans cette écriture le comportement pour une déformation sphérique est linéaire et caractérisé par le module de compressibilité  $k(\underline{x})$ . S'il en est de même pour une déformation déviatorique,  $\Phi(\epsilon^{\text{eq}}, \underline{x})$  ne dépend que du module de cisaillement  $\mu(\underline{x})$  selon :

$$\Phi(\epsilon^{\text{eq}}, \underline{x}) = \frac{3\mu(\underline{x})}{2} \epsilon^{\text{eq}2} = \mu(\underline{x}) \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) : \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (1.7)$$

et le tenseur des modules d'élasticité est :

$$\underline{\underline{C}}(\underline{x}) = 2\mu(\underline{x}) \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right] + k(\underline{x}) \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}, \quad (1.8)$$

soit encore, selon une notation classique<sup>2</sup> que nous utiliserons par la suite,

$$\underline{\underline{C}}(\underline{x}) = \{2\mu(\underline{x}), 3k(\underline{x})\}. \quad (1.9)$$

L'inversion de la loi de comportement (1.1) par transformation de Legendre-Fenchel permet de définir le potentiel de contrainte  $\psi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{x})$ , dual de  $\phi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{x})$ , selon :

$$\psi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{x}) = \text{Sup}_{\underline{\underline{\epsilon}}} \left[ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \phi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{x}) \right], \quad (1.10)$$

assurant que :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}), \underline{x}) \quad \text{avec } \psi \text{ convexe en } \underline{\underline{\sigma}}. \quad (1.11)$$

<sup>1</sup>Les hypothèses nécessaires seront discutées plus précisément au paragraphe **1.3.A.b**.

<sup>2</sup>Cette décomposition des tenseurs isotropes d'ordre quatre sur leurs deux espaces propres clarifie les opérations algébriques, puisque les règles opératoires suivantes s'appliquent pour tous réels  $a, b, c, d$  et  $\lambda$  :  $\{a, b\} + \{c, d\} = \{a + c, b + d\}$ ,  $\lambda \{a, b\} = \{\lambda a, \lambda b\}$ ,  $\{a, b\} \cdot \{c, d\} = \{ac, bd\}$  et  $\{a, b\}^{-1} = \{a^{-1}, b^{-1}\}$ . De plus, la positivité de la forme quadratique associée au tenseur  $\{a, b\}$  est équivalente à la condition  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ .

Pour le comportement élastique linéaire, on obtient :

$$\phi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \mathbf{S}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.12)$$

$$\text{soit : } \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \mathbf{S}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}), \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{S}(\underline{x})$  est le tenseur des complaisances élastiques, inverse de  $\mathbf{C}(\underline{x})$ . En cas d'isotropie et d'incompressibilité plastique,  $\psi$  s'écrit :

$$\psi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{x}) = \Psi(\sigma^{\text{eq}}, \underline{x}) + \frac{1}{18k(\underline{x})} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})^2, \quad (1.14)$$

où  $\sigma^{\text{eq}}$  est la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}) : \text{dev}(\underline{\underline{\sigma}})}. \quad (1.15)$$

Si le comportement est linéaire, le tenseur des complaisances vaut :

$$\mathbf{S}(\underline{x}) = \left\{ \frac{1}{2\mu(\underline{x})}, \frac{1}{3k(\underline{x})} \right\}. \quad (1.16)$$

Le chargement mécanique de la structure est constitué de déplacements imposés  $\underline{u}^d$  sur une partie de sa surface  $\partial\mathcal{S}^u$ , de forces imposées  $\underline{F}^d$  sur la partie complémentaire  $\partial\mathcal{S}^F$  et de forces volumiques  $\underline{f}$  dans  $\mathcal{S}$ . Cette description n'est pas la plus générale envisageable, puisque il est possible d'imposer des conditions mixtes en un même point de la surface de la structure à condition qu'elles soient complémentaires. Nous excluons une telle situation pour des raisons de simplicité d'écriture, sachant que son traitement ne pose toutefois pas de difficultés particulières.

La résolution du problème de structure ainsi défini consiste à trouver les champs  $\underline{u}$ ,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sur  $\mathcal{S}$ , tels que  $\underline{u}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}$  soient cinématiquement admissibles (CA) avec les conditions aux limites cinématiques, que  $\underline{\underline{\sigma}}$  soit statiquement admissible (SA) avec les données statiques et que  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  vérifient la loi de comportement en tout point de  $\mathcal{S}$  :

$$\underline{u} \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}} \text{ sont CA avec } \underline{u}^d : \begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \right) + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \right)^T \right] & \text{dans } \mathcal{S} \\ \underline{u} \text{ continu dans } \mathcal{S} \\ \underline{u} = \underline{u}^d & \text{sur } \partial\mathcal{S}^u \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ est SA avec } \underline{F}^d \text{ et } \underline{f} : \begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = 0 & \text{dans } \mathcal{S} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d & \text{sur } \partial\mathcal{S}^F \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}} \text{ satisfont à la loi de comportement : } \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}), \underline{x}) \quad \text{dans } \mathcal{S}, \quad (1.19)$$

où l'exposant  $T$  désigne la transposition et  $\text{div}(\cdot)$  l'opérateur divergence.

La convexité du potentiel de déformation ou de celui des contraintes permet de réécrire les équations précédentes sous une forme faible équivalente, qui constitue la formulation variationnelle du problème de structure considéré :

$$-\Psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) \leq -\Psi(\underline{\underline{\sigma}}) = \Phi(\underline{u}) \leq \Phi(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ SA avec } \underline{F}^d \text{ et } \underline{f} \quad \text{et} \quad \forall \underline{u}^* \text{ CA avec } \underline{u}^d \quad (1.20)$$

avec :

$$\Psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int_{\mathcal{S}} \psi(\underline{\underline{\sigma}}^*, \underline{x}) dx - \int_{\partial\mathcal{S}^u} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{u}^d ds \quad (1.21)$$

$$\Phi(\underline{u}^*) = \int_{\mathcal{S}} \phi(\underline{\underline{\epsilon}}^*, \underline{x}) dx - \int_{\mathcal{S}} \underline{f} \cdot \underline{u}^* dx - \int_{\partial\mathcal{S}^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^* ds. \quad (1.22)$$

$\Phi$  et  $\Psi$  sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire du système. L'inégalité de gauche de (1.20) est traditionnellement appelée « théorème de l'énergie complémentaire » et celle

de droite « théorème de l'énergie potentielle ». L'égalité n'est atteinte que pour la solution exacte du problème de structure quand les potentiels sont strictement convexes.

Diverses techniques ont été développées pour résoudre des problèmes de ce type. Les formulations variationnelles faibles sont notamment à l'origine de méthodes numériques comme celles des éléments finis, dont l'usage est largement répandu.

La résolution complète de ces problèmes est toutefois limitée par la puissance des moyens de calculs dont on dispose : il n'est pas possible de traiter des structures présentant beaucoup de détails qui nécessitent une discrétisation très fine de l'espace, induisant un nombre de degrés de liberté énorme et donc un coût de calcul prohibitif. Dans une telle situation, il est indispensable de simplifier le problème et de se limiter à une description approchée de la structure, suffisamment fine pour que les grandeurs auxquelles on s'intéresse soient correctement décrites, mais pas trop fine pour que la résolution reste réalisable avec les moyens de calcul dont on dispose.

C'est notamment le cas lorsque la structure est constituée d'un matériau hétérogène, dont les propriétés mécaniques, c'est-à-dire les potentiels  $\phi(\underline{\epsilon}, \underline{x})$  ou  $\psi(\underline{\sigma}, \underline{x})$ , varient très rapidement avec la position et que les grandeurs auxquelles on s'intéresse varient en comparaison très lentement. On remplace alors le problème initial par un problème approché, fondé sur la même géométrie et avec le même chargement, mais dans lequel le comportement du matériau constitutif ne dépend plus du point. Pour garantir que les champs calculés dans ce second problème soient égaux aux grandeurs correspondantes dans le problème initial, il convient de choisir judicieusement les propriétés de ce « *Milieu Homogène Équivalent* » (MHE par la suite), appelé également « milieu effectif » ou « milieu macroscopique ».

### 1.1.B Échelle macroscopique et échelle microscopique (théorie de premier gradient)

Ce remplacement des propriétés locales par des propriétés équivalentes n'est envisageable qu'à certaines conditions. Il faut d'abord pouvoir distinguer deux *échelles* de variations bien séparées. La première, dite *microscopique*, est celle de la microstructure, c'est-à-dire des fluctuations locales des propriétés mécaniques ; c'est aussi à cette échelle que varient les champs de déformation et de contrainte réels  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ . Une taille caractéristique  $l$  en est donnée, par exemple, par la taille de grain si le matériau constitutif est un polycristal, ou par la distance moyenne entre deux inclusions s'il s'agit d'un matériau composite à particules.

La seconde est l'échelle *macroscopique*, dont une dimension caractéristique  $L$  est donnée par la géométrie de la structure  $\mathcal{S}$  et des chargements appliqués. On définit à cette seconde échelle des champs abstraits de contrainte et de déformation dits macroscopiques, décrivant l'effet moyen des champs microscopiques : la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est telle que le vecteur force  $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot d\underline{\underline{S}}$  sur toute surface plane élémentaire de dimensions macroscopiques  $d\underline{\underline{S}}$  est égal à la somme des vecteurs forces élémentaires microscopiques sur cette surface  $\int_{d\underline{\underline{S}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\underline{s}}$ . La déformation macroscopique est définie à partir du déplacement sur les bords d'un volume élémentaire macroscopique (*cf.* paragraphe 2.3). Dans le cadre des petites perturbations auquel on se limite dans cet exposé, les champs macroscopiques  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}$  sont les moyennes volumiques des champs locaux  $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  sur tout volume macroscopique.

La jonction entre les deux échelles est réalisée au moyen du « *Volume Élémentaire Représentatif* » (VER par la suite) : ses dimensions sont élémentaires pour l'échelle macroscopique mais très grandes pour l'échelle microscopique, de façon à inclure toutes les variations potentielles d'origine microstructurale.

Une grandeur  $f$  de déplacement, de force, de déformation ou de contrainte peut alors être décomposée en la somme de sa partie macroscopique  $F$ , variant à l'échelle macroscopique, et de ses fluctuations microscopiques  $f'$  :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad f(\underline{x}) = F(\underline{x}) + f'(\underline{x}) / \begin{cases} f' \text{ de moyenne nulle sur tout VER autour de } \underline{x} \\ F \text{ uniforme sur tout VER autour de } \underline{x} \end{cases} \quad (1.23)$$

Nous supposons de plus que les dérivées spatiales de ces grandeurs héritent de la même décomposition, c'est-à-dire que la composante macroscopique de la dérivée des fluctuations microscopiques d'une

grandeur est nulle, de même que la composante fluctuante de la dérivée de la composante macroscopique de cette même grandeur :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) + \frac{\partial f'}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) / \begin{cases} \frac{\partial f'}{\partial \underline{x}} \text{ de moyenne nulle sur tout VER autour de } \underline{x} \\ \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \text{ uniforme sur tout VER autour de } \underline{x} \end{cases} \quad (1.24)$$

En particulier, nous supposons que les grandeurs de chargement sont macroscopiques et qu'elles ne fluctuent donc pas à l'échelle microscopique.

### 1.1.C Notion de macrohomogénéité

Avec ces hypothèses, les formulations variationnelles sur le problème de structure initial peuvent être réécrites selon :

$$\Phi(\underline{u}) = \text{Inf}_{\underline{U}^*, \underline{u}'^*} \Phi(\underline{U}^* + \underline{u}'^*) \quad (1.25)$$

$$= -\Psi(\underline{\sigma}) = -\text{Inf}_{\underline{\Sigma}^*, \underline{\sigma}'^*} \Psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}'^*), \quad (1.26)$$

avec

$$\Phi(\underline{U}^* + \underline{u}'^*) = \int_{\mathcal{S}} \phi(\underline{E}^* + \underline{\epsilon}'^*, \underline{x}) dx - \int_{\mathcal{S}} \underline{f} \cdot \underline{U}^* dx - \int_{\partial \mathcal{S}^F} \underline{F}^d \cdot \underline{U}^* ds \quad (1.27)$$

$$\Psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}'^*) = \int_{\mathcal{S}} \psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}'^*, \underline{x}) dx - \int_{\partial \mathcal{S}^u} \underline{n} \cdot \underline{\Sigma}^* \cdot \underline{u}^d ds. \quad (1.28)$$

Les composantes fluctuantes ont disparu dans les termes de chargement car leur produit avec des grandeurs macroscopiques est identiquement nul. Les champs  $\underline{U}^*$  et  $\underline{u}'^*$  doivent être tels que leur somme soit CA avec les déplacements macroscopiques imposés et les champs  $\underline{\Sigma}^*$  et  $\underline{\sigma}'^*$  doivent être de somme SA avec les forces macroscopiques imposées. Comme les moyennes des fluctuations doivent de plus être nulles sur tout VER et que les chargements sont macroscopiques, l'optimisation de  $\Phi$  porte en fait sur des champs  $\underline{U}^*$  CA avec  $\underline{u}^d$  et des champs  $\underline{u}'^*$  CA avec 0 sur  $\partial \mathcal{S}^u$  et de moyenne nulle sur tout VER et celle sur  $\Psi$  sur des champs  $\underline{\Sigma}^*$  SA avec  $\underline{f}$  et  $\underline{F}^d$  et des champs  $\underline{\sigma}'^*$  auto-équilibrés, SA avec 0 sur  $\partial \mathcal{S}^F$  et de moyenne nulle sur tout VER.

Elle peut alors être effectuée en deux temps, en portant d'abord sur les champs fluctuants  $\underline{u}'^*$  et  $\underline{\sigma}'^*$  pour définir les fonctionnelles  $\text{Inf}_{\underline{u}'^*} \int_{\mathcal{S}} \phi(\underline{E}^* + \underline{\epsilon}'^*, \underline{x}) dx$  et  $\text{Inf}_{\underline{\sigma}'^*} \int_{\mathcal{S}} \psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}'^*, \underline{x}) dx$  pour tous champs macroscopiques  $\underline{E}^*$  CA avec les déplacements imposés et  $\underline{\Sigma}^*$  SA avec les forces appliquées, l'optimisation finale portant ensuite sur les champs macroscopiques. La mise en œuvre de la première étape, telle qu'elle apparaît à présent, est en fait bien plus compliquée que le problème initial, puisqu'il s'agit de résoudre un problème de structure sur tout  $\mathcal{S}$  pour tous les champs macroscopiques envisageables. Elle se simplifie avec l'hypothèse que le problème peut se décomposer en sous-problèmes parallèles, portant sur l'optimisation de champs locaux dans chaque VER. Les fonctionnelles ci-dessus s'écrivent alors :

$$\text{Inf}_{\underline{u}'^*} \int_{\mathcal{S}} \phi(\underline{E}^* + \underline{\epsilon}'^*, \underline{x}) dx = \sum_{\text{VER} \in \mathcal{S}} \text{Inf}_{\underline{u}'^*} \int_{\text{VER}} \phi(\underline{E}^* + \underline{\epsilon}'^*, \underline{x}) dx \quad (1.29)$$

$$\text{Inf}_{\underline{\sigma}'^*} \int_{\mathcal{S}} \psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}'^*, \underline{x}) dx = \sum_{\text{VER} \in \mathcal{S}} \text{Inf}_{\underline{\sigma}'^*} \int_{\text{VER}} \psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}'^*, \underline{x}) dx. \quad (1.30)$$

où l'on suppose schématiquement que la structure  $\mathcal{S}$  peut être décomposée en une infinité de VER juxtaposés, pavant tout le domaine qu'elle occupe.

Pour que l'optimisation sur les champs locaux dans chaque VER soit équivalente à l'optimisation globale sur la structure  $\mathcal{S}$ , il faut imposer des conditions aux limites aux champs d'essais locaux tels que le champ global obtenu par juxtaposition des champs locaux soit bien CA ou SA avec les données. Assurer de telles compatibilités est impossible en pratique et revient en fait à résoudre des problèmes de structure sur tout  $\mathcal{S}$ . Pour pouvoir effectivement simplifier le problème, on est amené à adopter une hypothèse supplémentaire, sous-jacente à toute théorie de changement d'échelle en mécanique, connue sous l'appellation « *macrohomogénéité* » et introduite initialement par Hill [82]. Elle consiste

à supposer que le résultat de l'optimisation sur chaque VER est *indépendant des conditions aux limites* imposées aux champs d'essais fluctuants locaux. La seule contrainte imposée à ces derniers est d'être de moyenne nulle sur le VER. Ils peuvent ainsi être choisis indépendamment des champs locaux voisins, ce qui découple les problèmes d'optimisation locaux, qui reviennent alors à trouver des fonctions  $\bar{\phi}(\underline{E}^*, \underline{x})$  et  $\bar{\psi}(\underline{\Sigma}^*, \underline{x})$  telles que :

$$\bar{\phi}(\underline{E}^*, \underline{x}) = \frac{1}{|\text{VER}|} \text{Inf}_{\underline{u}^* / \langle \underline{\epsilon}^* \rangle_{\text{VER}(\underline{x})} = 0} \int_{\text{VER}(\underline{x})} \phi(\underline{E}^* + \underline{\epsilon}^*, \underline{y}) dy \quad (1.31)$$

$$\bar{\psi}(\underline{\Sigma}^*, \underline{x}) = \frac{1}{|\text{VER}|} \text{Inf}_{\underline{\sigma}^* / \langle \underline{\sigma}^* \rangle_{\text{VER}(\underline{x})} = 0} \int_{\text{VER}(\underline{x})} \psi(\underline{\Sigma}^* + \underline{\sigma}^*, \underline{y}) dy, \quad (1.32)$$

où  $|\text{VER}|$  est le volume du VER. Dans ces problèmes, les champs d'essais sont CA ou SA et de moyenne nulle, mais sans restrictions particulières quant aux conditions aux limites aux bords du VER au point  $\underline{x}$ . Avec l'hypothèse de séparation des échelles décrite précédemment, les champs macroscopiques sont uniformes à l'échelle du VER et il suffit donc de considérer des champs  $\underline{E}$  et  $\underline{\Sigma}$  homogènes sur le VER. Ceci impose toutefois une restriction sur les chargements applicables à la structure. En effet, le champ macroscopique  $\underline{\Sigma}$  doit équilibrer les forces de volumes macroscopiques  $\underline{f}$  et donc satisfaire à l'équation  $\text{div}(\underline{\Sigma}) + \underline{f} = 0$ .  $\underline{f}$  étant uniforme à l'échelle du VER,  $\underline{\Sigma}$  devrait suivre une variation linéaire pour équilibrer des forces non nulles et  $\underline{\sigma}$  présenterait donc, au sein du VER, une composante non fluctuante différente de sa moyenne, ce qui est contraire à l'hypothèse de séparation des échelles. On ne peut donc envisager d'homogénéisation qu'avec des forces de volume n'induisant pas de gradients trop importants. Les problèmes locaux doivent être résolus pour toute position  $\underline{x}$  macroscopique dans la structure  $\mathcal{S}$  en fonction de l'information disponible sur le comportement local et la distribution spatiale des phases au sein du VER en  $\underline{x}$ . Lorsque cette information est indépendante du point  $\underline{x}$  considéré, ils sont tous identiques.

La seconde étape d'optimisation portant sur les champs macroscopiques s'écrit alors (avec des forces volumiques faibles) :

$$\bar{\Phi}(\underline{u}) = \text{Inf}_{\underline{U}^*} \bar{\Phi}(\underline{U}^*) \quad (1.33)$$

$$= -\bar{\Psi}(\underline{\sigma}) = -\text{Inf}_{\underline{\Sigma}^*} \bar{\Psi}(\underline{\Sigma}^*), \quad (1.34)$$

avec

$$\bar{\Phi}(\underline{U}^*) = \int_{\mathcal{S}} \bar{\phi}(\underline{E}^*) dx - \int_{\mathcal{S}} \underline{f} \cdot \underline{U}^* dx - \int_{\partial \mathcal{S}^F} \underline{F}^d \cdot \underline{U}^* ds \quad (1.35)$$

$$\bar{\Psi}(\underline{\Sigma}^*) = \int_{\mathcal{S}} \bar{\psi}(\underline{\Sigma}^*) dx - \int_{\partial \mathcal{S}^u} \underline{n} \cdot \underline{\Sigma}^* \cdot \underline{u}^d ds. \quad (1.36)$$

Elle porte sur des champs macroscopiques  $\underline{U}^*$  et  $\underline{\Sigma}^*$ , respectivement CA avec les données en déplacement macroscopiques et SA avec les données en force macroscopiques. On se ramène ainsi à un problème de structure sur un matériau homogène, dont  $\bar{\Phi}$  et  $\bar{\Psi}$  sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire.

Le comportement du MHE est déterminé par les potentiels de déformation  $\bar{\phi}(\underline{E}^*)$  et de contrainte  $\bar{\psi}(\underline{\Sigma}^*)$  macroscopiques. Les équations locales satisfaites par les champs macroscopiques sont obtenus par dérivation de la formulation variationnelle précédente. On montre facilement que la convexité des potentiels locaux induit la convexité des potentiels macroscopiques. Ainsi, si le comportement des phases constitutives est élastique, linéaire ou non linéaire, le comportement homogène équivalent est de même nature. L'hypothèse de macrohomogénéité permet aussi d'établir que les potentiels de déformation et de contrainte macroscopiques sont duaux l'un de l'autre, vis-à-vis de la transformation de Legendre-Fenchel sur les variables macroscopiques. La contrainte macroscopique s'obtient par dérivation du potentiel de déformation macroscopique et la déformation macroscopique par dérivation du potentiel de contrainte macroscopique [58] :

$$\underline{\Sigma} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \underline{E}}(\underline{E}) \quad \text{et} \quad \underline{E} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \underline{\Sigma}}(\underline{\Sigma}) \quad (1.37)$$

Ceci assure en particulier que, en cas de comportement élastique linéaire, le tenseur des modules macroscopiques  $\bar{\mathbf{C}}$  est l'inverse du tenseur des complaisances macroscopiques  $\bar{\mathbf{S}}$ .

La détermination des potentiels macroscopiques à partir des potentiels microscopiques nécessite de résoudre un problème de structure sur le VER (ou plus précisément un problème de microstructure) mal posé, car les conditions aux limites aux bords du VER ne sont pas précisées. L'hypothèse de macrohomogénéité garantit que l'optimisation sur les champs avec la seule contrainte sur les moyennes aboutit au même résultat qu'une optimisation sur des champs avec des conditions aux limites bien définies et compatibles avec la contrainte sur la moyenne. On peut ainsi se ramener à un problème de structure classique, dont l'énergie potentielle ou complémentaire est encadrée par les théorèmes du même nom, écrits pour les conditions aux limites en question. En particulier, on peut choisir des conditions aux limites homogènes :

$$\bar{\phi}(\underline{E}) = \inf_{\underline{u}^* \in \mathcal{D}_E(\underline{E})} \left[ \langle \phi(\underline{\epsilon}^*) \rangle_{\text{VER}} \right] \quad (1.38)$$

$$= \sup_{\underline{\sigma}^* \in \mathcal{C}_E} \left[ - \langle \psi(\underline{\sigma}^*) \rangle_{\text{VER}} + \langle \underline{\sigma}^* \rangle_{\text{VER}} : \underline{E} \right] \quad (1.39)$$

$$\bar{\psi}(\underline{\Sigma}) = \inf_{\underline{\sigma}^* \in \mathcal{C}_\Sigma(\underline{\Sigma})} \left[ \langle \psi(\underline{\sigma}^*) \rangle_{\text{VER}} \right] \quad (1.40)$$

$$= \sup_{\underline{u}^* \in \mathcal{D}_\Sigma} \left[ - \langle \phi(\underline{\epsilon}^*) \rangle_{\text{VER}} + \langle \underline{\epsilon}^* \rangle_{\text{VER}} : \underline{\Sigma} \right] \quad (1.41)$$

avec

$$\mathcal{D}_E(\underline{E}) = \left\{ \underline{u} / \underline{u} \text{ continu et } \underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial\text{VER} \right\} \quad (1.42)$$

$$\mathcal{D}_\Sigma = \left\{ \underline{u} / \underline{u} \text{ continu} \right\} \quad (1.43)$$

$$\mathcal{C}_\Sigma(\underline{\Sigma}) = \left\{ \underline{\sigma} / \text{div}(\underline{\sigma}) = 0 \text{ et } \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{x} \in \partial\text{VER} \right\} \quad (1.44)$$

$$\mathcal{C}_E = \left\{ \underline{\sigma} / \text{div}(\underline{\sigma}) = 0 \right\} \quad (1.45)$$

où  $\partial\text{VER}$  est la frontière du VER et  $\underline{n}$  sa normale.

Notons  $\underline{\epsilon}_E^\circ(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}_E^\circ(\underline{x})$  les champs solutions du problème avec des conditions aux limites en déformations homogènes et  $\underline{\epsilon}_\Sigma^\circ(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}_\Sigma^\circ(\underline{x})$  ceux du problème avec des conditions aux limites en contraintes homogènes. Ces champs sont uniques mais *a priori* distincts deux à deux et aussi distincts des champs réels  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  dans la structure  $\mathcal{S}$ . On a :

$$\bar{\phi}(\underline{E}) = \langle \phi(\underline{\epsilon}_E^\circ) \rangle_{\text{VER}} \quad (1.46)$$

$$= - \langle \psi(\underline{\sigma}_E^\circ) \rangle_{\text{VER}} + \langle \underline{\sigma}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} : \underline{E} \quad (1.47)$$

$$\bar{\psi}(\underline{\Sigma}) = \langle \psi(\underline{\sigma}_\Sigma^\circ) \rangle_{\text{VER}} \quad (1.48)$$

$$= - \langle \phi(\underline{\epsilon}_\Sigma^\circ) \rangle_{\text{VER}} + \langle \underline{\epsilon}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} : \underline{\Sigma}. \quad (1.49)$$

La différentiation de la première équation donne :

$$\underline{\Sigma} : \underline{dE} = \langle \underline{\sigma}_E^\circ : \underline{d\epsilon}_E^\circ \rangle_{\text{VER}}, \quad (1.50)$$

$\underline{\Sigma}$  étant la contrainte macroscopique associée à  $\underline{E}$  selon (1.37).  $\underline{d\epsilon}_E^\circ$  est la variation du champ  $\underline{\epsilon}_E^\circ$  lorsque le champ macroscopique varie de  $\underline{dE}$ . C'est un champ CA avec des conditions aux limites en déformations homogènes  $\underline{u}^d = \underline{dE} \cdot \underline{x}$  sur  $\partial\text{VER}$ . Comme  $\underline{\sigma}_E^\circ$  est SA, le lemme de Hill [82] assure que le second membre est égal à  $\langle \underline{\sigma}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} : \underline{dE}$ . L'égalité ci-dessus étant vraie pour toute variation  $\underline{dE}$ , la moyenne de  $\underline{\sigma}_E^\circ$  sur le VER apparaît comme la contrainte macroscopique. On montre facilement un résultat similaire pour  $\underline{\epsilon}_\Sigma^\circ$ . D'où les relations suivantes entre les champs macroscopiques et locaux :

$$\begin{cases} \underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\sigma}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\sigma}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} \\ \underline{E} = \langle \underline{\epsilon} \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\epsilon}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\epsilon}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} \end{cases} \quad (1.51)$$

Si le comportement est linéaire, elle fournissent de nouvelles définitions des tenseurs macroscopiques :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{E}} = \langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} = \langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} \\ \bar{\mathbf{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \mathbf{S} : \underline{\underline{\sigma}}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} = \langle \mathbf{S} : \underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} \end{cases} \quad \forall \underline{\underline{E}} \text{ ou } \underline{\underline{\Sigma}}. \quad (1.52)$$

Elles sont équivalentes aux définitions énergétiques mais sont exprimées en termes de contraintes et déformations moyennes. Notons que les mêmes relations sont valables lorsqu'on adopte des conditions aux limites périodiques, puisque le lemme de Hill s'applique aussi dans ce cas.

Deux nouvelles applications du lemme de Hill donnent les relations :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_E^\circ : \underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ : \underline{\underline{\epsilon}}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}. \quad (1.53)$$

Pour un comportement linéaire,  $\phi(\underline{\underline{\epsilon}})$  vaut  $\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}}) : \underline{\underline{\epsilon}}$  et l'hypothèse de macrohomogénéité telle que nous l'avons introduite garantit que  $\langle \underline{\underline{\sigma}}_E^\circ : \underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ \rangle_{\text{VER}}$  est égale à  $\langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ : \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle_{\text{VER}}$  pour tous les couples de champs locaux solutions  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  compatibles avec les valeurs moyennes imposées  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . On en déduit :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ : \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ \rangle_{\text{VER}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle_{\text{VER}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}. \quad (1.54)$$

Ceci constitue la condition de macrohomogénéité introduite par Hill [82], dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cette écriture permet une meilleure compréhension de la notion de macrohomogénéité. Considérons en effet de tels champs  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$ , compatibles avec des valeurs macroscopiques  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Le chargement effectif du VER est déterminé par ce champ moyen et par les fluctuations locales des conditions aux limites : le déplacement au bord est  $\underline{\underline{u}}^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{u}}'^\circ(\underline{\underline{x}})$  et le vecteur contrainte est  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{\sigma}}'^\circ(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}}$ , où  $\underline{\underline{u}}'^\circ$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'^\circ$  sont de moyenne nulle et varient rapidement autour de zéro. Par linéarité, les champs locaux résultants valent alors  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ(\underline{\underline{x}}) + \underline{\underline{\sigma}}'^\circ_\Sigma(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ(\underline{\underline{x}}) + \underline{\underline{\epsilon}}'^\circ_E(\underline{\underline{x}})$ , où  $\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ(\underline{\underline{x}})$  sont les champs introduits précédemment et  $\underline{\underline{\sigma}}'^\circ_\Sigma(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}'^\circ_E(\underline{\underline{x}})$  sont dues aux fluctuations au bord des contraintes et des déformations. Les moyennes de  $\underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ(\underline{\underline{x}})$  et de  $\underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ(\underline{\underline{x}})$  sont les valeurs macroscopiques, celles de  $\underline{\underline{\sigma}}'^\circ_\Sigma(\underline{\underline{x}})$  et de  $\underline{\underline{\epsilon}}'^\circ_E(\underline{\underline{x}})$  sont nulles. Le potentiel de déformation dans le VER vaut alors :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{\underline{x}}) \rangle_{\text{VER}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ \rangle_{\text{VER}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ \rangle_{\text{VER}} + \langle \underline{\underline{\sigma}}'^\circ_\Sigma(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\epsilon}}'^\circ_E(\underline{\underline{x}}) \rangle_{\text{VER}} \quad (1.55)$$

$$= \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{|\text{VER}|} \int_{\partial\text{VER}} \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}'^\circ \cdot \underline{\underline{u}}'^\circ ds, \quad (1.56)$$

par une triple application du lemme de Hill et l'utilisation du principe des puissances virtuelles. En cas de conditions aux limites homogènes en contraintes ou en déformations, le second terme est, par construction, identiquement nul. Il l'est aussi si les conditions aux limites sont périodiques. Dans le cas général, sa nullité est garantie par l'hypothèse de macrohomogénéité, qui apparaît donc comme une condition d'orthogonalité entre les fluctuations des champs de contrainte et de déformation vis-à-vis du produit scalaire donnant l'énergie élastique à l'échelle du VER.

Les fluctuations locales  $\underline{\underline{u}}'^\circ(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'^\circ(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}}$  sont de moyennes nulles et la longueur d'onde de leurs variations est de l'ordre de  $l$ , taille caractéristique de la microstructure. D'après le principe de Saint-Venant, les champs  $\underline{\underline{\sigma}}'^\circ_\Sigma(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}'^\circ_E(\underline{\underline{x}})$  qu'elles induisent restent localisés au voisinage des zones chargées, c'est-à-dire près du bord du VER. Le produit  $\underline{\underline{\sigma}}'^\circ_\Sigma(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\epsilon}}'^\circ_E(\underline{\underline{x}})$  est donc quasiment nul sauf dans une couche autour du VER où l'on peut estimer qu'il est au plus de l'ordre de grandeur de  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}$ , l'épaisseur de cette couche étant de l'ordre de la longueur d'onde  $l$  des fluctuations. Dans les relations ci-dessus, la seconde moyenne est donc négligeable par rapport à la première puisque leur rapport est sensiblement donné par les volumes d'intégration, soit  $l * L^2 / L^3 = l/L$ . On justifie ainsi intuitivement l'applicabilité du principe de Hill dans un matériau hétérogène : c'est une conséquence de la séparation des variations des champs en deux échelles bien distinctes. On établit aussi que les champs locaux calculés pour déterminer le potentiel macroscopique avec, par exemple, les conditions aux limites homogènes des problèmes (1.38) à (1.41), sont égaux aux champs effectifs, sauf dans cette fine couche autour du VER :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\sigma}}^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\sigma}}_E^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\sigma}}_\Sigma^\circ(\underline{\underline{x}}) \\ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\epsilon}}_E^\circ(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\epsilon}}_\Sigma^\circ(\underline{\underline{x}}) \end{cases} \quad \text{pour } \underline{\underline{x}} \in \text{VER} \ll \text{loin} \gg \text{ de } \partial\text{VER}. \quad (1.57)$$

Les définitions des tenseurs des modules et des complaisances macroscopiques (1.52) exprimées en terme de moyennes se généralisent alors à tous les champs  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$ , définis pour des conditions aux limites quelconques. La démonstration n'est toutefois pas rigoureuse dans la mesure où le principe de Saint-Venant n'est pas démontré dans le cas général : la condition de macrohomogénéité reste fondamentalement une hypothèse.

Les hypothèses ayant ainsi permis le changement d'échelles sont d'abord la possibilité de définir des échelles de variation bien distinctes pour les champs mécaniques locaux, et ensuite la propriété de macrohomogénéité. Nous avons appliqué la décomposition des champs en partie microscopique et partie macroscopique aux champs d'essai et avons donc supposé que pour les champs optimaux, c'est-à-dire pour la solution, cette décomposition s'applique également. Il existe toutefois des situations où une telle séparation n'est pas possible : on parle alors de problèmes de « forts gradients », pour lesquels la notion de MHE n'a plus de sens. Dans des cas intermédiaires, on peut encore parler de grandeurs macroscopiques, mais qu'on ne peut pas réduire à des déformations et des contraintes, moyennes des quantités locales correspondantes. Les théories des milieux de Cosserat ou des milieux à comportement non local ont été développées pour décrire ces situations que nous excluons délibérément dans le présent travail. Notons bien que l'applicabilité de la notion de MHE dépend non seulement du matériau hétérogène considéré, mais aussi de la nature des chargements auxquels on le soumet : une même structure peut être homogénéisée pour un certain chargement mais se trouver en situation de forts gradients pour un autre. Un cas simple dans lequel l'homogénéisation n'a pas cours est par exemple celui déjà évoquée d'un composite soumis à des forces volumiques importantes, induisant des gradients forts au sein du VER. Un autre est celui de l'équilibre d'un composite soumis à son poids propre, même faible, lorsque ses phases constitutives sont de densités différentes. Le chargement est alors fortement corrélé avec le comportement local et on ne peut pas le restreindre à sa composante macroscopique. Des développements spécifiques doivent être entrepris pour de telles situations.

Notons aussi que nous avons présenté ces principes dans l'hypothèse des petites perturbations et pour des comportements élastiques non linéaires, auxquels nous avons choisi de nous restreindre dans ce travail (sauf mention spéciale). Ils peuvent être étendus au formalisme en grande transformation, à condition de définir les grandeurs macroscopiques par un processus de moyenne adéquat, éventuellement distinct d'une moyenne volumique, ainsi qu'à d'autres gammes de comportement. Les problèmes viscoplastiques sont par exemple traités d'une manière totalement similaire, en raisonnant sur les incréments de déformation plutôt que sur les déformations elles-mêmes. Les comportements avec variables internes nécessitent une définition correcte des variables internes macroscopiques. Précisons que rien ne garantit *a priori* que le comportement macroscopique soit de même nature que le comportement local. C'est le cas pour l'élasticité, linéaire ou non, comme nous l'avons établi ci-dessus, mais il faut se garder de toute généralisation trop rapide.

Cette présentation des conditions permettant de remplacer un matériau hétérogène réel par un MHE est très approximative quant aux outils mathématiques invoqués. Nous avons voulu insister sur la signification mécanique intuitive des concepts et nous en remettons aux spécialistes pour les développements mathématiques rigoureux permettant d'établir la convergence de la solution approchée utilisant le MHE vers la moyenne de la solution réelle. En réalité, on peut établir que les notions de VER, de macrohomogénéité, ou de MHE n'ont de sens que lorsque le rapport des échelles macroscopiques et microscopiques  $L/l$  tend vers l'infini, ce qui ne se produit jamais dans les cas pratiques. Des théories spécifiques ont été développées pour tenir compte du caractère fini du VER dans des structures réelles [129]. Les approximations faites sont toutefois satisfaisantes aux yeux de l'ingénieur et ces notions sont d'ailleurs largement employées, consciemment ou inconsciemment, puisque tout matériau, même homogène en apparence, ne l'est plus à une échelle suffisamment fine.

Pour plus de détails concernant ces notions de changement d'échelle et de macrohomogénéité, nous renvoyons à la référence [98].

#### 1.1.D Description stochastique des matériaux hétérogènes aléatoires

Dans ce qui précède, nous avons implicitement supposé que la distribution des phases dans toute la structure, c'est-à-dire la fonction  $\underline{x} \in \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}(\underline{x})$ , est parfaitement connue. Une telle information



complète permettrait de résoudre exactement les problèmes (1.38) à (1.41), du moins en théorie. Dans certains cas, on en dispose effectivement : les microstructures parfaitement périodiques sont par exemple complètement décrites lorsqu'on connaît la nature du réseau périodique et la disposition des phases dans une maille élémentaire. Si de telles structures sont malheureusement très rarement observées dans la réalité, elles servent néanmoins de modèles pour des matériaux réels à structure presque périodique. Dans une telle situation, les problèmes d'optimisation peuvent être réellement traités en pratique, car il suffit de les résoudre sur une maille élémentaire en utilisant la périodicité des champs solutions. Le résultat fournit une bonne approximation du comportement homogène équivalent de tels matériaux réels quasi-périodiques et ce procédé est à l'origine des méthodes d'homogénéisation périodiques, amplement utilisées en sciences des matériaux.

Mais nous excluons délibérément cette situation de ce travail en nous consacrant aux matériaux à *microstructure aléatoire*, au sein desquels la disposition des phases n'est jamais parfaitement connue. Il s'agit alors de résoudre les problèmes d'optimisation en fonction de l'information disponible, qu'on exprime en général en termes statistiques : il s'agit par exemple de la probabilité de trouver une certaine phase en un certain point, sachant qu'une autre phase se trouve en un point voisin. . . Le cadre mathématique usuellement invoqué pour décrire cette situation consiste à présenter la microstructure réelle du matériau de la structure  $\mathcal{S}$  comme une *réalisation* particulière  $\alpha$ , choisie dans un ensemble de réalisations équiprobables  $\Omega_\alpha$  : le potentiel  $\phi(\cdot, \underline{x})$  est une *variable aléatoire* dont la valeur particulière prise dans la structure réelle est une réalisation particulière  $\phi(\cdot, \underline{x}, \alpha)$ . Toutes les grandeurs dépendant du comportement local apparaissent en conséquence aussi comme des variables aléatoires : c'est en particulier le cas des champs locaux réels de déplacement  $\underline{u}(\underline{x})$ , de déformation  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$  et de contrainte  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ , mais aussi des champs d'essais  $\underline{\epsilon}^*(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$  des problèmes (1.38) à (1.41), s'ils sont choisis en fonction de la microstructure. L'espérance de toute variable aléatoire  $v$  est définie par

$$\langle v \rangle_\alpha = \int_{\Omega_\alpha} v(\alpha) d\alpha, \quad (1.58)$$

où  $d\alpha$  est la mesure de l'espace des probabilités  $\Omega_\alpha$ .

Lorsqu'on s'intéresse à un matériau constitué de  $n$  phases clairement différenciées, référencées par un indice  $r \in [1, n]$  et occupant les volumes complémentaires  $\mathcal{S}_r$  de la structure, on fait souvent appel à leurs *fonctions indicatrices*  $\kappa_r$  définies sur  $\mathcal{S}$  et valant 1 dans  $\mathcal{S}_r$  et 0 ailleurs. Ces fonctions sont des variables aléatoires au même titre que les potentiels  $\phi(\cdot, \underline{x})$  et caractérisent complètement la microstructure. Toutes les autres variables aléatoires en découlent. Par exemple, les potentiels locaux sont donnés par  $\phi(\cdot, \underline{x}) = \sum_{r=1}^n \phi^r(\cdot) \kappa_r(\underline{x})$ , où  $\phi^r(\cdot)$  sont les potentiels déterministes des phases pures. Notons que  $\sum_{r=1}^n \kappa_r(\underline{x}) = 1$  puisque une et une seule phase occupe le point  $\underline{x}$  ; la microstructure est donc caractérisée par la donnée de  $n - 1$  variables aléatoires. Si elles sont rarement parfaitement connues, on dispose généralement d'informations partielles les caractérisant. Les plus simples sont leurs espérances  $\langle \kappa_r(\underline{x}) \rangle_\alpha$ , qui donnent la probabilité de trouver une certaine phase  $r$  au point  $\underline{x}$ . L'hypothèse de *stationnarité* stipule que les lois statistiques régissant la nature d'une phase en une certaine position ne dépendent pas de cette position et définit le concept de *matériau hétérogène statistiquement homogène*. Lorsqu'elle s'applique, les espérances  $\langle \kappa_r(\underline{x}) \rangle_\alpha$  sont indépendantes du point  $\underline{x}$ . La connaissance de ces probabilités constitue l'information « d'ordre un » de la microstructure, que l'on peut compléter par des informations « d'ordre  $p$  », données par les fonctions de corrélation  $\left\langle \kappa_{r_1}(\underline{x}) \kappa_{r_2}(\underline{x} + \underline{h}_2) \kappa_{r_3}(\underline{x} + \underline{h}_3) \dots \kappa_{r_p}(\underline{x} + \underline{h}_p) \right\rangle_\alpha$ , pour tout  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  et tous les  $\underline{h}_i, i \in [2, p]$  tels que  $\underline{x} + \underline{h}_i \in \mathcal{S}$ , qui donnent les probabilités de trouver simultanément la phase  $r_1$  au point  $\underline{x}$ , la phase  $r_2$  au point  $\underline{x} + \underline{h}_2, \dots$  et la phase  $r_p$  au point  $\underline{x} + \underline{h}_p$ . En cas de stationnarité, ces espérances ne dépendent pas de  $\underline{x}$ .

Les chargements macroscopiques sont appliqués à l'identique sur toutes les réalisations de la structure :  $\underline{u}^d, \underline{F}^d, \underline{f}$  et leurs domaines d'application sont déterministes. Le comportement macroscopique  $\bar{\phi}(\cdot)$  est supposé dépendre des seules lois statistiques régissant la microstructure et pas de la réalisation particulière  $\alpha$ . Il est donc aussi déterministe, de même que les champs macroscopiques  $\underline{U}(\underline{x}), \underline{E}(\underline{x})$  et  $\underline{\Sigma}(\underline{x})$  qui en découlent. Seules les fluctuations locales sont aléatoires. Il peut paraître surprenant de pouvoir définir des grandeurs déterministes sur une structure aléatoire. Ceci n'est en fait concevable qu'au moyen de l'hypothèse complémentaire d'« *ergodicité* », qui exprime que toute

l'information statistique de la microstructure est contenue dans une seule réalisation et, plus précisément, que l'espérance de toute variable aléatoire est égale à sa moyenne volumique sur un VER dans une réalisation particulière, cette moyenne n'étant alors plus aléatoire :

$$\begin{aligned}\langle v \rangle_\alpha &= \int_{\Omega_\alpha} v(\underline{x}, \alpha) d\alpha \quad \forall \underline{x} \in \text{VER} \\ &= \frac{1}{|\text{VER}|} \int_{\text{VER}} v(\underline{x}, \alpha) dx \quad \forall \alpha \in \Omega_\alpha\end{aligned}\quad (1.59)$$

En particulier, l'espérance  $\langle \kappa_r \rangle_\alpha$  est égale à la fraction volumique de la phase  $r$  et, plus généralement, toutes les fonctions de corrélation d'ordre  $p$  introduites précédemment peuvent être calculées à partir d'une réalisation particulière du matériau, observée par exemple au microscope. Cette hypothèse fournit ainsi une nouvelle définition du VER, à caractère statistique : son extension doit être suffisante pour contenir toute l'information statistique relative à la microstructure et toute grandeur définie à son échelle doit être déterministe. Pour plus de détails concernant la description de milieux aléatoires, nous renvoyons encore à la référence [98].

Notons  $\underline{\epsilon}_\alpha$  la solution du problème (1.31) pour une réalisation particulière  $\alpha$  de la microstructure, c'est-à-dire la valeur de la variable aléatoire  $\underline{\epsilon}$  pour cette microstructure. L'hypothèse d'ergodicité assure que :

$$\int_{\text{VER}} \underline{\epsilon}_\alpha(\underline{y}) dy = |\text{VER}| \langle \underline{\epsilon}(\underline{x}_0) \rangle_\alpha = |\text{VER}| \underline{E} \quad (1.60)$$

et

$$\int_{\text{VER}} \phi(\underline{\epsilon}_\alpha(\underline{y}), \underline{y}) dy = |\text{VER}| \langle \phi(\underline{\epsilon}(\underline{x}_0), \underline{x}_0) \rangle_\alpha, \quad (1.61)$$

où  $\underline{x}_0$  est un point quelconque du VER. Des relations similaires s'appliquent à la contrainte solution  $\underline{\sigma}$ . On en déduit une *définition statistique du comportement macroscopique* :

$$\bar{\phi}(\langle \underline{\epsilon} \rangle_\alpha) = \langle \phi(\underline{\epsilon}) \rangle_\alpha \quad \text{et} \quad \bar{\psi}(\langle \underline{\sigma} \rangle_\alpha) = \langle \psi(\underline{\sigma}) \rangle_\alpha, \quad (1.62)$$

où l'on a omis la dépendance en  $\underline{x}_0$  en cohérence avec l'hypothèse de stationnarité. Si le comportement est linéaire, ceci s'écrit :

$$\langle \underline{\epsilon} \rangle_\alpha : \bar{\mathbf{C}} : \langle \underline{\epsilon} \rangle_\alpha = \langle \underline{\epsilon} : \mathbf{C} : \underline{\epsilon} \rangle_\alpha \quad \text{et} \quad \langle \underline{\sigma} \rangle_\alpha : \bar{\mathbf{S}} : \langle \underline{\sigma} \rangle_\alpha = \langle \underline{\sigma} : \mathbf{S} : \underline{\sigma} \rangle_\alpha. \quad (1.63)$$

Avec l'hypothèse de macrohomogénéité, on a de manière équivalente :

$$\bar{\mathbf{C}} : \langle \underline{\epsilon} \rangle_\alpha = \langle \mathbf{C} : \underline{\epsilon} \rangle_\alpha \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{S}} : \langle \underline{\sigma} \rangle_\alpha = \langle \mathbf{S} : \underline{\sigma} \rangle_\alpha, \quad (1.64)$$

ces relations devant être vérifiées pour tout chargement macroscopique  $\underline{E} = \langle \underline{\epsilon} \rangle_\alpha$  ou  $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_\alpha$ .

### 1.1.E Détermination du comportement macroscopique

La résolution d'un problème de structure macroscopique nécessite de connaître la loi de comportement macroscopique du matériau constitutif.

#### 1.1.E.a Approche phénoménologique

Une première démarche possible pour la déterminer consiste à en postuler *a priori* sa forme et à en identifier les paramètres par divers essais macroscopiques sur le matériau, sans se soucier de la microstructure réelle. Cette approche « phénoménologique » s'avère suffisante dans beaucoup de cas usuels. Elle bénéficie notamment de l'avantage de la simplicité et est souvent entreprise pour déterminer les paramètres physiques usuels des matériaux de structure, tels les modules ou les limites d'élasticité.

Elle se révèle malheureusement insuffisante quand il s'agit de déterminer le comportement de matériaux répondant à des lois un peu plus complexes et de forme inconnue. Postuler une forme

arbitraire n'est alors pas sans risque : on peut trouver une loi et des paramètres adéquats décrivant parfaitement les essais macroscopiques entrepris et s'en satisfaire alors que cette loi est incapable de rendre compte du comportement dans des domaines de sollicitation mécanique non explorés lors des essais, voire inexplorables car hors de portée des moyens d'essais traditionnels. Les résultats des calculs effectués sur des structures dans lesquelles le matériau est sollicité dans ces domaines risquent donc d'être bien loin de la réalité.

L'approche phénoménologique est par nature incapable de spécifier les relations entre paramètres microstructuraux et propriétés macroscopiques. Une optimisation des premiers dans le but d'obtenir des valeurs particulières pour les secondes est donc impossible. On peut tout au plus tenter de corrélérer certaines observations microstructurales (qu'il faut donc entreprendre malgré tout) avec des résultats d'essais macroscopiques sur les matériaux correspondants par des outils adéquats d'analyse de données. Rien ne garantit toutefois que les paramètres microstructuraux retenus soient pertinents. De plus, le nombre d'essais risque d'être limité par les possibilités d'élaboration des matériaux ou, comme précédemment, par les moyens d'essais eux-mêmes. On peut donc craindre des interpolations voire des extrapolations hasardeuses.

### 1.1.E.b Approche micromécanique

A l'opposé, l'approche « micromécanique » vise à déduire la loi de comportement macroscopique du comportement des phases constitutives, ou plus généralement des mécanismes de déformation microscopiques, et de leur répartition spatiale, en résolvant le problème de changement d'échelle. Dans le cas du comportement élastique non-linéaire invoqué précédemment, il s'agit de résoudre explicitement les problèmes (1.31) et (1.32), en fonction d'informations sur la répartition des phases, obtenues par des observations microstructurales, et du potentiel des phases constitutives. Dans des cas plus généraux, la forme *a priori* des lois locales et macroscopiques n'est pas connue. La démarche micromécanique classique se décline alors en trois volets (figure 1.1). Le premier consiste à identifier les mécanismes de déformation locaux et les décrire quantitativement par des lois locales adaptées. Il faut ensuite acquérir des informations sur la distribution spatiale de ces phénomènes. La résolution du problème de changement d'échelle, tenant compte des interactions entre phénomènes locaux, permet enfin d'en déduire à la fois la forme et les paramètres constitutifs de la loi macroscopique. Les liens ainsi établis entre les grandeurs macroscopiques et microstructurales sont fondés sur les lois de la physique qui régit le matériau et n'ont rien d'une extrapolation. Leur domaine de validité est déterminé par les domaines des lois microscopiques et par les hypothèses explicites du changement d'échelles : s'il peut ne pas couvrir tout le domaine d'utilisation du matériau, il est au moins clairement déterminé. Enfin, après la mise en évidence des relations entre paramètres locaux et globaux par un modèle micromécanique et sa validation au travers de quelques confrontations expérimentales adaptées, une démarche d'optimisation de la microstructure peut être entreprise.

L'approche micromécanique présente malheureusement aussi de nombreux écueils, principalement liés à la difficulté de la démarche qui, en pratique, n'est jamais conforme à la description idéalisée précédente. Elle se décline aux diverses étapes de la mise en œuvre. La première étape de mise en évidence des mécanismes de déformation locaux est limitée par les moyens de caractérisation à l'échelle microscopique. Les moyens d'essais *in situ* développés au cours des dix dernières années permettent une observation des mécanismes microstructuraux au cours de la déformation des matériaux et se révèlent comme l'outil fondamental de toute approche micromécanique. Ils présentent malheureusement aussi des faiblesses : seuls les mécanismes apparaissant sous des sollicitations particulières (généralement sous traction simple monotone et quasi-statique et sous sollicitation biaxiale alternée depuis peu) peuvent être révélés. L'observation reste principalement surfacique et les mécanismes à cœur restent cachés. Elle reste également qualitative dans la plupart des cas, même si certaines techniques quantitatives voient peu à peu le jour ; nous en avons notamment développé une au cours de ce travail (*cf.* chapitre 2). La description exhaustive et quantitative des phénomènes locaux reste donc un problème ouvert. Cette difficulté apparaît même dans les cas simples comme celui concernant la détermination de la courbe de traction élasto-plastique d'une phase constitutive. En effet, une caractérisation macroscopique des constituants purs se révèle souvent insuffisante, car le comportement au sein du composite peut être

différent du fait de modifications chimiques ou microstructurales, résultant du processus d'élaboration ou de l'interaction avec les autres constituants. Dans le présent travail, nous avons mis en œuvre une démarche de type « problème inverse » pour faire face à cette difficulté (*cf.* chapitre 3).

L'information sur la répartition spatiale des phénomènes locaux peut être obtenue à partir de micrographies sur des domaines suffisamment étendus pour en garantir la représentativité statistique. Des techniques de traitement d'images peuvent par exemple être mises à profit pour déterminer certains paramètres simples, comme les fractions volumiques des constituants, des distributions de tailles de grains ou des rapports de formes moyens d'inclusions. D'autres paramètres ne peuvent malheureusement pas être déduits d'une simple coupe bidimensionnelle à travers le matériau ; il s'agit par exemple du nombre de connexité tridimensionnel dont la détermination requiert une information volumique. Des coupes sériées peuvent être utilisées pour déterminer de tels paramètres, mais leur mise en œuvre est particulièrement délicate. Des moyens détournés permettent de s'en affranchir : ils consistent à décrire la répartition spatiale au moyen d'un modèle statistique dépendant d'un certain nombre de paramètres, identifiables au travers d'informations surfaciques, et à en déduire ensuite par le calcul les caractéristiques tridimensionnelles recherchées. Les outils de la morphologie mathématique [89] ont notamment été développés dans ce but. Le modèle booléen s'avère par exemple pertinent pour décrire certains matériaux biphasés fer/argent testés dans la présente étude [32, 2]. La principale difficulté dans cette étape reste toutefois la détermination de la nature des paramètres pertinents à retenir pour décrire la répartition spatiale. En effet, si l'importance de certains paramètres comme la fraction volumique peut sembler évidente, il n'en est plus de même quand il s'agit de quantifier des propriétés relatives à l'« imbrication » des phases les unes dans les autres, à l'anisotropie de leur distribution, à la géométrie plus ou moins torturée d'une interface, aux relations de « voisinage », exprimant par exemple que telle situation apparaît préférentiellement à proximité de telle autre ou au contraire aux corrélations à plus longue portée. . .

Ces informations sur le comportement local et la distribution spatiale doivent ensuite être intégrées dans une modélisation permettant d'en déduire le comportement macroscopique. C'est en fait la principale difficulté de la démarche micromécanique : aucune procédure systématique n'est disponible à l'heure actuelle et il faut adapter la modélisation aux situations particulières étudiées. La résolution complète et rigoureuse du problème de changement d'échelle est d'une complexité telle qu'une étape de simplification visant à ramener le problème à une version idéalisée, n'intégrant que les paramètres jugés essentiels et faisant appel à des hypothèses complémentaires s'avère indispensable. Dans la situation évoquée au paragraphe 1.1.C, il s'agit de résoudre l'un des problèmes (1.38) à (1.41) qui, d'un point de vue théorique, sont des problèmes classiques et bien posés. On peut envisager de les résoudre directement au moyen de méthodes numériques adéquates, à condition de disposer d'une description complète du VER. Mais ceci est rarement le cas, notamment lorsqu'on s'intéresse à des matériaux à microstructure aléatoire : comme on l'a décrit au paragraphe 1.1.D, le VER n'admet alors pas de représentation géométrique unique mais apparaît plutôt comme l'ensemble de ses réalisations particulières au sein du matériau, satisfaisant aux lois statistiques spécifiques à la microstructure en question. Le but est d'intégrer ces lois statistiques au changement d'échelle. On peut alors envisager de résoudre les problèmes de microstructure sur une ou plusieurs réalisations particulières du VER, déterminées par exemple par des coupes sériées ou engendrées au moyen d'un modèle statistique adéquat intégrant les lois statistiques spécifiques au matériau. Ce travail est dans la plupart des cas fastidieux, voire impossible à réaliser : la complexité de ces problèmes de microstructure est telle qu'ils sont encore hors de portée des moyens de calculs actuels et risquent fort de le rester encore longtemps, malgré les progrès rapides de l'informatique, tant l'écart entre puissance de calcul requise et puissance disponible est grand. Dans ces conditions il est préférable de renoncer à une telle démarche fondée sur des *simulations* et au profit d'une démarche de *modélisation*, dans laquelle on ne résout pas les problèmes (1.38) à (1.41) directement. Il s'agit au contraire d'intégrer dès l'origine les informations statistiques jugées pertinentes pour rendre ces problèmes plus simples et ne calculer que les quantités effectivement importantes. En général, il faut en plus adopter des hypothèses complémentaires pour rendre les calculs abordables par les moyens dont on dispose, tout en préservant leur pertinence vis-à-vis de la situation initiale. Ce faisant, des choix sont indispensables et tout l'art du modélisateur est de faire les bons.

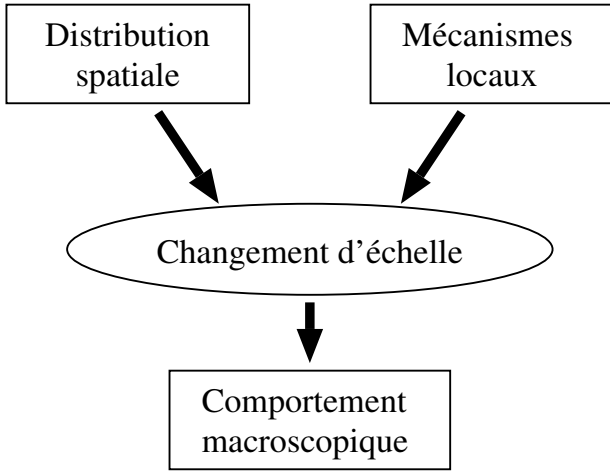


Figure 1.1 : Démarche micromécanique

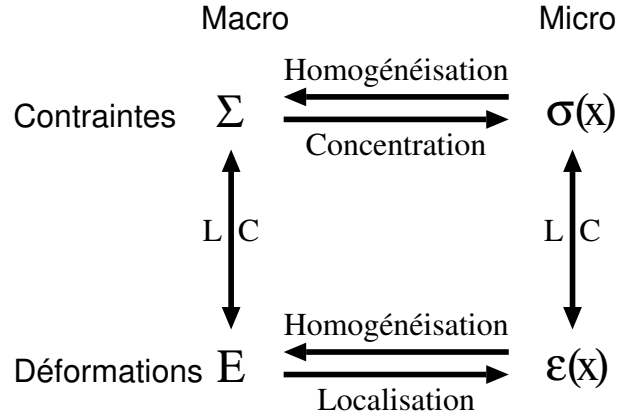


Figure 1.2 : Méthodologie des modèles de changement d'échelle

### 1.1.E.c Méthodologie des modèles micromécaniques

On distingue alors classiquement trois étapes dans la plupart des modélisations micromécaniques. La première est celle de *représentation* ; il s'agit de proposer une description mathématique du VER intégrant le mieux possible les informations issues de l'observation des mécanismes locaux et de leur répartition spatiale, mais malgré tout suffisamment simple pour permettre une résolution effective, qui est l'objet de la seconde étape, dite de *localisation*, qui consiste à résoudre les problèmes (1.31) et (1.32), ou plus précisément leurs variantes simplifiées issues de l'étape précédente. On calcule les champs locaux associés aux grandeurs macroscopiques imposées qui assurent la minimisation des fonctionnelles ; on ne s'intéresse qu'aux seules grandeurs locales vraiment nécessaires pour mener à bien le processus d'optimisation. Des hypothèses complémentaires simplifiant le calcul peuvent être adoptées à ce stade. Enfin la troisième étape d'*homogénéisation* vise à calculer la valeur macroscopique duale de celle imposée à l'étape précédente. Il s'agit principalement d'une application de la loi de comportement (LC) locale et d'un processus de moyenne adéquat, ou d'intégration des potentiels locaux. La figure 1.2 précise ces deux dernières étapes et le vocabulaire usuellement invoqué dans ce contexte. Lorsqu'on impose la déformation macroscopique  $\underline{E}$  et qu'on cherche la grandeur de déformation pertinente locale associée  $\underline{\tilde{\epsilon}}(\tilde{x})$ , on parle effectivement de localisation ; l'application de la loi de comportement locale donne ensuite la contrainte locale associée  $\underline{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})$ , qui, après homogénéisation, donne la contrainte macroscopique  $\underline{\Sigma}$ . Dans la démarche inverse où cette dernière est imposée, on préfère parler de concentration pour désigner l'opération permettant de déterminer les grandeurs de contrainte locales associées. Le signe  $\tilde{\sim}$  indique que les grandeurs sont relatives aux problèmes approchés simplifiant le problème de localisation ou de concentration initial sur le VER réel et qu'elles peuvent de plus être moyennées en un certain sens. Elles s'opposent aux grandeurs correspondantes sans signe  $\tilde{\sim}$ , qui sont celles apparaissant effectivement dans le VER mais qui ne sont jamais calculées en pratique, pour les raisons déjà évoquées plus haut, sauf dans des situations spécifiques telles la périodicité parfaite.

Rappelons que pour décrire complètement le comportement macroscopique, il faut effectuer ces opérations pour tous les tenseurs macroscopiques. Si le comportement est linéaire, la dépendance entre champs locaux et tenseurs macroscopiques est linéaire et il suffit de calculer les tenseurs de localisation  $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{x})$  ou de concentration  $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x})$ , spécifiques au problème étudié, tels que :

$$\underline{\tilde{\epsilon}}(\tilde{x}) = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{x}) : \underline{E} \quad \text{et} \quad \underline{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x}) : \underline{\Sigma} \quad (1.65)$$

et satisfaisant de plus :

$$\langle \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{x}) \rangle_{\text{VER}} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \langle \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x}) \rangle_{\text{VER}} = \mathbf{I}. \quad (1.66)$$

Ils sont complètement déterminés lorsqu'on est capable de résoudre les problèmes de localisation ou de concentration pour six valeurs linéairement indépendantes des tenseurs de déformation ou de contrainte

macroscopiques. Les tenseurs des modules ou des complaisances effectifs s'en déduisent par :

$$\bar{\mathbf{C}} = \left\langle \mathbf{C}(\underline{\tilde{x}}) : \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\tilde{x}}) \right\rangle_{\text{VER}} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{S}} = \left\langle \mathbf{S}(\underline{\tilde{x}}) : \tilde{\mathbf{B}}(\underline{\tilde{x}}) \right\rangle_{\text{VER}}. \quad (1.67)$$

Si le matériau est constitué de  $n$  phases clairement différenciées, il suffit de connaître les moyennes  $\mathbf{A}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  sur chaque phase  $i$  de ces tenseurs, le comportement effectif étant donné par :

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_i c_i \mathbf{C}_i : \mathbf{A}_i \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{S}} = \sum_i c_i \mathbf{S}_i : \mathbf{B}_i. \quad (1.68)$$

Comme les tenseurs de localisation et de concentration sont liés par les relations (1.66), la connaissance de  $n - 1$  tenseurs est suffisante :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1 + \sum_{i>1} c_i [\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_1] : \mathbf{A}_i \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_1 + \sum_{i>1} c_i [\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_1] : \mathbf{B}_i. \quad (1.69)$$

Si le comportement n'est pas linéaire, il faut en théorie résoudre les problèmes de localisation et de concentration pour toutes les valeurs possibles des grandeurs macroscopiques, pour pouvoir construire complètement le potentiel homogénéisé. Ce n'est pas toujours possible et on se contente parfois d'une caractérisation pour un chargement particulier, par exemple une traction ou un cisaillement simple ; il faut alors se garder d'utiliser la loi obtenue pour d'autres sollicitations, à moins de disposer d'informations complémentaires.

Le problème simplifié peut dépendre d'un choix de conditions aux limites particulières, et l'on peut opter pour des conditions en contraintes homogènes ou en déformations homogènes au bord, comme dans les problèmes (1.38) à (1.41). Le résultat ne devrait normalement pas dépendre de ce choix, mais il se peut que la condition de macrohomogénéité ne soit plus satisfaite. C'est en particulier ce qui se produit si l'on cherche à résoudre le problème de localisation directement sur le VER, mais en adoptant une extension trop faible pour ce dernier. On obtient alors deux estimations distinctes pour le comportement effectif. Comme nous l'avons déjà annoncé plus haut, les deux ne coïncident en théorie que pour une extension infinie du VER. On peut toutefois se contenter d'une valeur approchée et opter pour le résultat obtenu pour une extension du VER telle que la différence entre les deux résultats soit inférieure à la précision souhaitée. Cette remarque est d'un intérêt plus théorique que pratique, car de tels calculs sont rarement entrepris ; elle fournit en fait une définition précise d'une extension « suffisante » du VER. Mais on peut adopter une démarche similaire pour des modèles dépendant de conditions aux limites particulières : la comparaison des résultats obtenus avec des conditions homogènes en contrainte et en déformation donne une mesure de la pertinence du modèle. Les modèles indépendants d'un tel choix sont toutefois préférables.

Précisons enfin qu'il est rare de disposer de l'information suffisante pour résoudre complètement le problème de localisation et d'être capable d'en tirer pleinement profit. Deux démarches s'offrent alors au micromécanicien. La première consiste à se servir au mieux de l'information disponible et utilisable pour mener les problèmes d'optimisation (1.31) et (1.32) aussi loin que possible. Les potentiels macroscopiques restent inconnus, mais on dispose de *bornes* permettant de les encadrer rigoureusement. Si le comportement est linéaire, on obtient des tenseurs d'élasticité qui encadrent le tenseur effectif au sens des formes quadratiques associées. Dans certains cas, ces bornes sont suffisamment proches, si bien qu'elles fournissent une bonne approximation du comportement effectif sans qu'aucune information complémentaire ne soit nécessaire. Mais on peut ne pas se contenter d'une telle approche par bornes et préférer une *estimation* des propriétés effectives. Des *hypothèses* complémentaires sont alors nécessaires pour parfaire le processus d'optimisation. Si elles sont explicites et suffisamment simples, on peut éventuellement les vérifier expérimentalement sur le matériau étudié. En général, elles sont malheureusement implicites ou trop complexes et le domaine de validité des estimations obtenues n'est pas clairement établi. Seule la confrontation des résultats avec l'expérience permet alors la validation (ou l'invalidation) du modèle. Précisons que toute borne peut être considérée comme une estimation.

#### 1.1.E.d Pertinence macroscopique et microscopique des modèles

Si d'un point de vue méthodologique il convient de distinguer les trois volets de l'approche micromécanique décrits au paragraphe 1.1.E.b, il est bien évident qu'en pratique les interactions sont

nombreuses. Le flux naturel des données est celui décrit et vise à alimenter le modèle d'homogénéisation avec les paramètres de l'échelle locale. Toutefois il est clair que cette information se doit d'être pertinente et c'est le modélisateur qui précise en partie quels renseignements extraire à l'échelle locale. Le choix des paramètres statistiques est en particulier très délicat et c'est lors du processus de changement d'échelle que les phénomènes gouvernant les interactions sont révélés. C'est aussi la modélisation qui permet de comprendre comment les sollicitations macroscopiques se transmettent à l'échelle locale. Ce renseignement permet une meilleure interprétation, notamment quantitative, des mécanismes locaux. Les flèches de la figure 1.1 ont donc toutes une composante rétrograde. Cette composante est d'ailleurs prépondérante dans certaines situations, par exemple lorsqu'il s'agit de déterminer un comportement local à partir d'un comportement macroscopique, comme nous avons été amené à le faire au cours de ce travail (*cf.* chapitre 3).

Comme on aura pu le constater à la lecture des paragraphes précédents, la démarche micromécanicienne reste pleine d'incertitudes et d'approximations. Comme pour toute science consciencieuse, il est donc impensable de la concevoir sans confrontation expérimentale. Cette validation porte bien sûr sur les résultats des modèles, c'est à dire la prévision du *comportement macroscopique*. Les démarches à entreprendre dans ce sens sont celles qui s'appliqueraient à tous les modèles phénoménologiques prétendant décrire le même matériau. Mais à la différence de ces derniers, la validation d'un modèle micromécanique porte aussi sur la prévision de *l'état mécanique local*. En effet, les champs  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}})$  associés à une sollicitation macroscopique donnée ont une signification locale et leur valeur peut être confrontée aux champs réels  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}})$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}})$  se développant effectivement dans le matériau soumis à la même sollicitation. Si cette confrontation est négative, il est permis d'avoir des doutes quant à l'applicabilité du modèle, même si ses prévisions macroscopiques semblent bonnes pour certains essais particuliers. On peut craindre que la prévision pour d'autres chargements soit mauvaise. De plus, on peut être tenté d'utiliser les valeurs locales du modèle pour prédire l'évolution microstructurale du matériau (texture...) ou l'apparition de certains phénomènes locaux, tels l'endommagement ou la plasticité, dont la connaissance est primordiale pour la prévision de la déformation ultérieure du matériau, de sa tenue à la fatigue ou de sa ruine. Une mauvaise description de l'état local aboutit alors inévitablement à des prédictions en dehors de toute réalité. Certains modèles phénoménologiques intègrent des paramètres ou variables internes qui ont une interprétation locale. Mais comme aucune analyse n'est faite à cette échelle, ces paramètres sont difficiles à confronter à une observation objective. La validation locale du modèle ne peut donc être entreprise et il convient de se garder de toute utilisation abusive de tels paramètres locaux.

Ce critère sur l'état local est d'autant plus délicat à satisfaire qu'il n'y a *a priori* aucun théorème général d'« encadrement » des champs locaux. La formulation variationnelle (1.38) permet par exemple de majorer le potentiel macroscopique  $\bar{\phi}(\underline{\underline{E}})$  mais ne donne pas d'information sur la distance entre les champs locaux réels et les champs locaux d'essai utilisés : soit  $\underline{\underline{\epsilon}}$  la solution et  $\underline{\underline{\epsilon}}_1^*$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_2^*$  deux champs d'essais tels que  $\int_{\text{VER}} \phi(\underline{\underline{\epsilon}}_1^*, \underline{\underline{y}}) dy \leq \int_{\text{VER}} \phi(\underline{\underline{\epsilon}}_2^*, \underline{\underline{y}}) dy$  ; rien n'assure que  $\|\underline{\underline{\epsilon}}_1^* - \underline{\underline{\epsilon}}\| \leq \|\underline{\underline{\epsilon}}_2^* - \underline{\underline{\epsilon}}\|$ ,  $\|\cdot\|$  désignant une norme sur l'espace des champs de tenseurs de déformation sur le VER. Le seul résultat rigoureux pour un matériau quelconque dont on dispose est que si ces trois champs sont alignés et plus précisément tels que  $\underline{\underline{\epsilon}}_2^* = \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda(\underline{\underline{\epsilon}}_1^* - \underline{\underline{\epsilon}})$  avec  $\lambda \geq 0$ , alors l'inégalité sur les intégrales ci-dessus induit  $\lambda > 1$ , du fait de la convexité supposée des potentiels locaux qui induit celle des intégrales vis-à-vis des champs locaux. Cette propriété n'a malheureusement que peu d'intérêt pratique, car l'espace des champs locaux est de dimension infinie et de tels champs alignés sont rarement invoqués.

Dans le cas d'un matériau *biphasé linéaire*, les *moyennes par phases* des champs locaux peuvent en revanche être déterminées à partir du comportement macroscopique [75]. En effet, si  $c_i, i \in [1, 2]$  est la fraction volumique de la phase  $i$  et  $\langle \cdot \rangle_i$  désigne la moyenne sur le domaine occupé par la phase  $i$  dans le VER, on a dans ce cas pour tout  $\underline{\underline{E}}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{E}} &= \langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\text{VER}} \\ &= \left[ c_1 \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_1 + c_2 \mathbf{C}^2 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_2 \right] \quad (\text{par linéarité}) \\ &= \left[ c_1 \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_1 + \mathbf{C}^2 : \left( \underline{\underline{E}} - c_1 \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_1 \right) \right] \quad \text{car } \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\text{VER}}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_1 = \frac{1}{c_1} [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^2]^{-1} : [\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C}^2] : \underline{\underline{E}}. \quad (1.70)$$

$\underline{\underline{\epsilon}}_2$  s'obtient en échangeant les indices 1 et 2 et des relations analogues sur les contraintes peuvent facilement être établies :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_i = \frac{1}{c_i} [\mathbf{S}^i - \mathbf{S}^j]^{-1} : [\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}^j] : \underline{\underline{\Sigma}}. \quad (1.71)$$

Une estimation des modules effectifs fournit donc une estimation des déformations ou contraintes moyennes par phases, et une borne permet de cerner le domaine des valeurs qu'elles peuvent prendre. Malheureusement il n'y a pas de généralisation de cette propriété à des matériaux composés de  $n$  phases avec  $n \geq 3$  : les mêmes équations aboutissent à une relation entre  $n - 1$  déformations ou contraintes moyennes par phase et le comportement macroscopique, qui ne permettent pas de déterminer ou borner ces moyennes isolément.

Dans le cas de matériaux linéaires avec un nombre de phases quelconque, il est possible de calculer d'autres grandeurs de déformation ayant une signification à l'échelle des phases, par la relation exacte suivante proposée par divers auteurs [95, 36] :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \otimes \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_i = \frac{1}{c_i} \frac{\partial [\underline{\underline{E}} : \bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{E}}]}{\partial \mathbf{C}^i}, \quad (1.72)$$

dont l'expression en composantes est

$$\langle \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} \rangle_i = \frac{1}{c_i} \frac{\partial \bar{C}_{pqrs}}{\partial C_{klmn}^i} E_{pq} E_{rs}. \quad (1.73)$$

Des propriétés similaires sur les contraintes peuvent aussi être établies. On obtient ainsi les moments d'ordre deux sur une phase des composantes des tenseurs de déformation ou de contrainte locaux réels lorsqu'on connaît la dépendance des modules effectifs vis-à-vis des modules locaux de la phase en question. Lorsqu'on ne dispose que d'une estimation des modules effectifs ou d'une borne, les valeurs calculées sont relatives aux champs d'essai utilisés pour construire ces bornes ou estimations et rien ne permet d'affirmer en toute rigueur qu'ils sont plus ou moins proches des moments relatifs aux champs réels, pour la raison générale évoquée plus haut et parce que les inégalités ne se conservent pas par dérivation. En pratique, on *suppose* toutefois qu'il en est ainsi.

Nous ne connaissons pas de relation de ce type permettant d'extraire une information locale à partir d'une réponse macroscopique pour des comportements non-linéaires. En revanche, la plupart des modèles d'homogénéisation font intervenir plus ou moins explicitement des grandeurs locales, compatibles avec les relations précédentes lorsqu'elles s'appliquent. Dans le cas général, on utilise ces grandeurs pour décrire l'état local réel, ainsi que nous le suggérons plus haut.

### 1.1.E.e Objectif de la présente étude

L'approche micromécanique pour la caractérisation des matériaux est encore dans sa prime jeunesse. Les exemples intégrant la démarche complète sont rares et posent souvent autant de questions qu'ils apportent de réponses. Les informations fournies restent dans la plupart des cas qualitatives, s'expriment en termes de tendances générales et l'optimisation effective des microstructures reste un vœu pieux. L'une des raisons en est l'incapacité des modèles de changement d'échelle disponibles à intégrer pleinement les paramètres microstructuraux que l'on souhaite optimiser, notamment ceux de nature géométrique : la plupart des modèles opérationnels de description de milieux aléatoires concernent des microstructures idéalisées, souvent figées ou avec une très faible variabilité géométrique. En conséquence, leur utilisation pour déterminer le comportement effectif d'un matériau, impose d'abord de négliger l'effet des caractéristiques géométriques particulières de sa microstructure, et ensuite empêche *a fortiori* toute optimisation vis-à-vis de ces dernières. L'objectif général du présent travail est de lever un tant soit peu cette limitation.

L'étude s'intègre dans une démarche générale menée depuis plusieurs années au sein de l'équipe de « Micromécanique des Matériaux » au Laboratoire de Mécanique des Solides. Le but général est



de préciser l'effet des paramètres *géométriques et statistiques* de la répartition spatiale des phases sur le comportement mécanique d'un matériau hétérogène multiphasé et d'élaborer des modèles d'homogénéisation permettant de les prendre en compte. Nous désignons par « *morphologie* » l'ensemble de ces paramètres de distribution spatiale, par opposition aux aspects relatifs aux mécanismes locaux. Afin de focaliser les difficultés sur la prise en compte des effets morphologiques, le comportement local est dans un premier temps supposé répondre aux lois les plus simples : l'élasticité linéaire isotrope et anisotrope a principalement été étudiée. La relative simplicité des équations qui en découlent permet en effet de pousser les développements théoriques suffisamment loin ; de plus les lois linéaires constituent souvent les prototypes permettant de traiter ensuite d'autres gammes de comportements par des extensions adéquates. En particulier, le comportement élasto-plastique sous chargement monotone, qui s'apparente à de l'élasticité non-linéaire, a été abordé. Le formalisme des lois en question est donc celui présenté au paragraphe **1.1.A**. Les problèmes spécifiques aux transformations finies sont également exclus, comme déjà annoncé, pour la même raison.

Ce travail s'inscrit dans la suite immédiate de celui de L. Allais [2] dont nous résumons la démarche et les conclusions générales au chapitre **3**. Précisons toutefois dès maintenant qu'une de ses conclusions essentielles est que, pour les matériaux biphasés élasto-plastiques qu'il a étudiés, l'effet de la morphologie sur la courbe de traction macroscopique semble du second ordre, mais qu'il est bien plus important sur la réponse locale, exprimée en termes d'hétérogénéités de déformations moyennes au sein des phases. L'attention sera alors également portée sur cet aspect : les modèles à développer devront être capables de prédire l'effet de la morphologie sur les *hétérogénéités locales* au sein du matériau.

Précisons tout de suite que ce programme ambitieux n'a pas été mené à son terme. Les modèles que nous avons développés permettent toutefois d'aborder des situations morphologiques microstructurales de matériaux aléatoires bien plus variées que celles envisagées par les modèles existants. La description de ces derniers est l'objet de ce qui suit.

## 1.2 Modèles d'homogénéisation pour le comportement linéaire

Rappelons le problème général à résoudre dans le cadre de l'homogénéisation des milieux hétérogènes élastiques ; il consiste à trouver le tenseur des modules effectifs  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{S}^{-1}$  tel que :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} : \bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \mathbf{C} : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \rangle \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (1.74)$$

où  $\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$  est le champ de déformation local solution du problème élastique avec des déplacements  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}, \mathbf{x}$  imposés au bord du VER, caractérisé par la formulation variationnelle :

$$-\langle \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* : \mathbf{S} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* \rangle + 2 \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* \rangle : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \leq \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \leq \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^* : \mathbf{C} : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^* \rangle, \quad (1.75)$$

$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^*$  et  $\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^*$  étant respectivement SA et CA pour cette condition aux limites. Dans l'hypothèse de macro-homogénéité, cette définition énergétique est équivalente à celle sur les contraintes moyennes :

$$\bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \rangle \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (1.76)$$

et le résultat ne dépend pas des conditions aux limites particulières adoptées. Précisons que les moyennes ci-dessus peuvent être interprétés de manière équivalente au sens géométrique  $\langle \cdot \rangle_{\text{VER}}$  ou stochastique  $\langle \cdot \rangle_{\alpha}$ . Nous omettons également les indices VER et  $\alpha$  par la suite, sauf mention spéciale.

### 1.2.A Bornes ou estimations de Voigt et Reuss

Le champ d'essai uniforme  $\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$  est CA pour le problème ci-dessus et induit une borne supérieure pour les modules effectifs, donnée par la moyenne arithmétique des modules locaux. La nature de borne de cette moyenne initialement proposée par Voigt [166] a été établie par d'autres auteurs [79, 131] :

$$\bar{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}_V = \langle \mathbf{C} \rangle. \quad (1.77)$$

Tout champ d'essai uniforme  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\Sigma}}^*$  est SA pour le problème et induit donc une borne inférieure sur l'énergie :  $-\underline{\underline{\Sigma}}^* : \langle \mathbf{S} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}}^* + 2\underline{\underline{\Sigma}}^* : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \bar{\mathbf{C}} : \underline{\underline{E}}$ . Le choix optimal  $\underline{\underline{\Sigma}}^* = \langle \mathbf{S} \rangle^{-1} : \underline{\underline{E}}$  établit que l'inverse de la moyenne volumique des inverses des modules locaux minore  $\bar{\mathbf{C}}$ . Cette moyenne harmonique pour estimer les modules effectifs est due à Reuss [142] et sa nature de borne inférieure a été établie par les mêmes auteurs que ci-dessus [79, 131] :

$$\bar{\mathbf{C}} \geq \mathbf{C}^R = \left[ \langle \mathbf{C}^{-1} \rangle \right]^{-1}. \quad (1.78)$$

Les inégalités ci-dessus sont à prendre au sens des formes quadratiques associées.  $\mathbf{C}^V$  et  $\mathbf{C}^R$  héritent clairement des propriétés de définie positivité et de symétrie des modules locaux  $\mathbf{C}(\underline{\underline{x}})$ .

Si le comportement des phases constitutives est isotrope et caractérisé par les modules de cisaillement  $\mu(\underline{\underline{x}})$  et de compressibilité  $k(\underline{\underline{x}})$ , alors les tenseurs de Voigt et de Reuss sont aussi isotropes et caractérisés par les modules de cisaillement et de compressibilité  $\mu_V$ ,  $k_V$ ,  $\mu_R$  et  $k_R$ , tels que :

$$\begin{cases} \mu_V = \langle \mu \rangle \\ k_V = \langle k \rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_R = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} \\ k_R = \langle k^{-1} \rangle^{-1} \end{cases} \quad (1.79)$$

On peut caractériser ces tenseurs par d'autres modules classiques qui se déduisent de ces modules fondamentaux qui sont des valeurs propres des tenseurs. Le module d'Young  $E$  et le rapport de Poisson  $\nu$  sont par exemple donnés par :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left[ \frac{k}{\mu} + \frac{1}{3} \right]} \quad (1.80)$$

Précisons que le module d'Young associé à la borne de Reuss est bien la moyenne harmonique des modules d'Young locaux, mais que celui associé à la borne de Voigt n'en est pas la moyenne arithmétique, sauf lorsque les rapports de Poisson des phases sont les mêmes.

Pour calculer ces bornes, il faut connaître les comportements locaux et les fractions volumiques des phases, c'est-à-dire, en termes statistiques, les espérances des fonctions indicatrices, définies comme l'information d'ordre un sur la microstructure (*cf.* paragraphe 1.1.D). Aucune information sur des notions de disposition relative des phases n'est invoquée et ces bornes s'appliquent donc à tout matériau exhibant les fractions volumiques considérées.

Les tenseurs de Voigt et Reuss sont des bornes et les champs d'essai utilisés pour les établir n'ont pas de signification locale. En revanche, il est possible d'appliquer la relation (1.70) pour les biphasés. La borne de Voigt permet ainsi d'établir que la phase dure se « déforme moins » que la phase molle et la borne de Reuss que la contrainte moyenne dans la phase dure est plus élevée que dans la phase molle :

$$\forall \left( \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}} \right) \quad \begin{cases} \underline{\underline{E}} : \left[ \mathbf{C}^i - \mathbf{C}^j \right] : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_i \leq \underline{\underline{E}} : \left[ \mathbf{C}^i - \mathbf{C}^j \right] : \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\Sigma}} : \left[ \mathbf{S}^i - \mathbf{S}^j \right] : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_i \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \left[ \mathbf{S}^i - \mathbf{S}^j \right] : \underline{\underline{\Sigma}} \end{cases} \quad (1.81)$$

Si le comportement des phases est isotrope, on en déduit par exemple les encadrements suivants sur les déformations équivalentes de Von Mises  $\epsilon_i$  des composantes des déformations moyennes par phase parallèles au déviateur macroscopique, d'équivalent  $E$ , valables lorsque  $\mu_1 \geq \mu_2$  :

$$\frac{\mu_R}{\mu_1} E \leq \epsilon_1 \leq E \leq \epsilon_2 \leq \frac{\mu_R}{\mu_2} E. \quad (1.82)$$

Les inéquations centrales résultent de la borne de Voigt, les inégalités extrêmes de celle de Reuss. Des relations duales s'appliquent aux contraintes moyennes. Les figures 1.3 et 1.4 synthétisent ces résultats.

Il n'y a pas d'exemple connu de matériau composite réel dont les modules effectifs soient égaux aux modules de Voigt ou de Reuss. En revanche, il en est qui répondent de manière identique sous des sollicitations particulières. Un multicouche laminé à phases isotropes sollicité en cisaillement simple parallèlement aux couches répond par exemple comme un milieu de Reuss. Un composite unidirectionnel constitué de phases isotropes avec un même rapport de Poisson se comporte quand il est sollicité selon son axe comme un milieu de Voigt. Mais ces milieux sont anisotropes et ne peuvent donc être décrits par les tenseurs de Voigt ou Reuss.

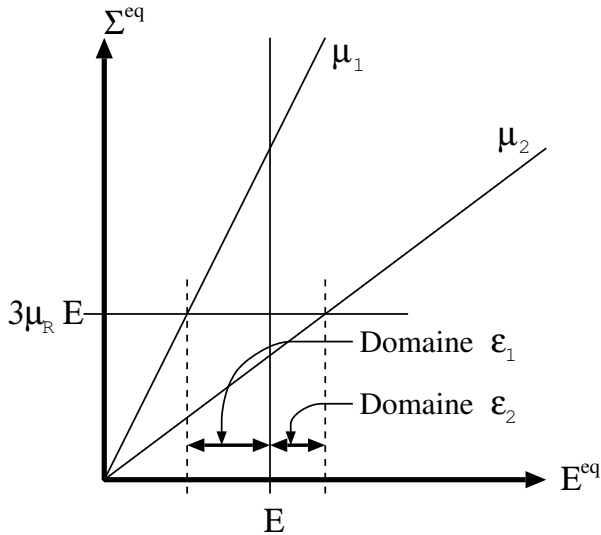


Figure 1.3 : Domaines possibles des déformations moyennes par phases dans un biphasé élastique à phases isotropes

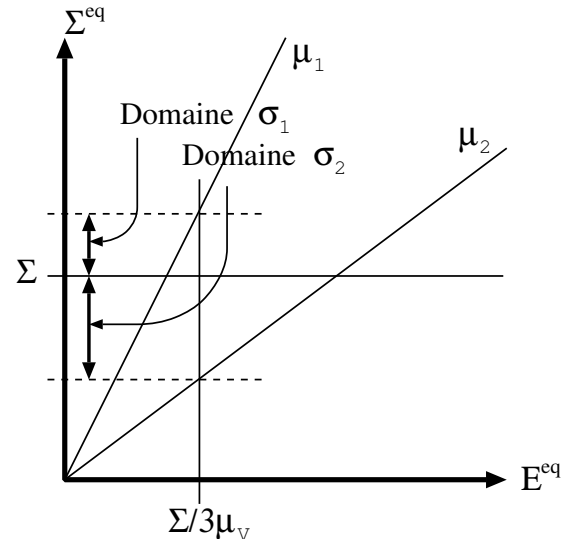


Figure 1.4 : Domaines possibles des contraintes moyennes par phases dans un biphasé élastique à phases isotropes

### 1.2.B Prise en compte de l'information d'ordre supérieur

Les deux bornes ou estimations précédentes ont l'avantage de la simplicité et de l'universalité mais sont exactement à l'opposé du but que nous nous sommes fixé : étant valables dans tous les cas, elles ne sont spécifiques d'aucune microstructure et ne permettent donc d'optimiser aucun paramètre (à l'exception des fractions volumiques). Étant de plus relativement éloignées l'une de l'autre dans la plupart des cas, elles donnent des estimations des modules effectifs qui ne sont pas satisfaisantes pour caractériser les matériaux et effectuer des calculs de structures. Les modèles plus élaborés que nous décrivons dans cette seconde partie prennent en compte des informations plus précises, d'ordre deux au moins, selon la définition donnée au paragraphe 1.1.D. Ils restent toutefois très généraux dans la mesure où ils s'appliquent à tout type de matériau, à condition qu'ils satisfassent les hypothèses faites sur les fonctions de corrélation, contrairement aux modèles abordés dans le paragraphe 1.2.C qui sont spécifiques à des classes de matériaux présentant des morphologies particulières.

Nous les avons séparés en deux catégories. La première regroupe les modèles dans lesquels la phase de représentation ne modifie pas la définition initiale du VER qui conserve sa richesse microstructurale. Comme la résolution complète du problème de localisation n'est pas possible, des hypothèses simplificatrices sur la distribution des phases sont nécessaires ; leur prise en compte permet par une démarche rigoureuse d'établir des bornes exactes de plus en plus resserrées sur les modules effectifs, voire une estimation exacte. Dans certains cas, l'analyse permet de ramener le problème de localisation à un problème beaucoup plus simple et formellement équivalent à celui d'Eshelby, que nous décrivons. Une telle démarche n'est pas toujours possible, surtout si l'on ne dispose pas des informations requises sur la distribution des phases. Une attitude possible consiste alors à généraliser les idées des cas simples. Les modèles correspondants sont ceux de la seconde catégorie et se caractérisent par une étape de représentation ramenant *a priori* le problème de localisation initial à un problème simplifié dérivé de celui d'Eshelby, par des arguments relevant essentiellement de l'intuition physique et parfois abusifs.

#### 1.2.B.a Bornes de Hashin et Shtrikman

Les relations (1.38) à (1.41) fournissent un encadrement des modules élastiques macroscopiques pour tout champ d'essai admissible pour les conditions aux limites choisies. Malheureusement, à l'exception des champs homogènes utilisés pour la dérivation des bornes de Voigt et Reuss, la génération de tels champs est difficile, du fait de la complexité des conditions de compatibilité à satisfaire. Cette

difficulté est partiellement levée en faisant appel à une autre formulation variationnelle, équivalente aux théorèmes classiques, introduite par Hashin et Shtrikman dans une publication fondamentale de 1962 [69]. Cette formulation sera amplement rappelée en seconde partie. Précisons simplement ici qu'elle consiste à remplacer le problème de localisation par un problème d'élasticité sur un milieu homogène « de référence » de modules  $\mathbf{C}^0$ , de même géométrie et soumis aux mêmes conditions aux limites, mais en plus à un champ de tenseurs de « polarisation »  $\underline{\underline{p}}^*$ , d'ordre deux et symétriques, tels que la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  dans ce nouveau problème soit liée à la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  par  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^* + \underline{\underline{p}}^*$ . Ces champs de déformation et de contrainte sont admissibles pour le problème initial. Si le choix de  $\mathbf{C}^0$  est adéquat, ils induisent des bornes supérieures ou inférieures pour le potentiel macroscopique, calculables explicitement si l'on connaît  $U = \int_{\text{VER}} \underline{\underline{\epsilon}}^* : \underline{\underline{p}}^* dx$ . Dans la formulation initiale,  $\mathbf{C}^0$  est supposé isotrope, mais cette hypothèse n'est pas fondamentale. La génération de champs de polarisation est plus simple que celle de champs CA ou SA, puisqu'il n'y a plus de conditions de compatibilité, et son optimisation est envisageable. La difficulté n'est en revanche pas complètement effacée puisque le calcul de l'intégrale  $U$  ci-dessus reste nécessaire.

Cette formulation variationnelle a été utilisée par ses auteurs avec des champs de polarisation *homogènes par phase*. Dans ces conditions, la détermination de  $U$  se ramène au calcul des moyennes  $\underline{\underline{\epsilon}}_r^*$  de la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  sur toutes les phases  $r$ . Il est alors clair que le résultat fait intervenir une information d'ordre deux sur la distribution des phases : le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  résulte de la polarisation dans tout le VER et sa moyenne sur une phase donnée dépend donc des valeurs des tenseurs de polarisation et de la position relative des autres phases par rapport à la phase en question. Le calcul et l'optimisation peuvent être menés formellement dans un cas quelconque, mais l'explicitation des résultats sous forme analytique n'est possible qu'avec une hypothèse complémentaire qui est celle de distribution *isotrope des phases*, hypothèse qui s'écrit en terme de fonctions de corrélation :

$$\langle \kappa_i(\underline{\underline{x}}) \kappa_j(\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{h}}) \rangle_\alpha = \kappa_{ij}(\|\underline{\underline{h}}\|), \quad (1.83)$$

où  $\kappa_{ij}$  est une fonction réelle quelconque et  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne.

Le cas du polycristal avec des grains à symétrie cubique [70] orientés de manière isotrope et celui d'un composite à phases isotropes [71] ont été traités exhaustivement, ce dernier résultat étant connu sous l'appellation de « bornes de Hashin et Shtrikman ». Même si l'hypothèse de distribution isotrope n'est pas explicitée sous la forme ci-dessus, elle est utilisée par ces auteurs dans le calcul par transformation de Fourier de l'intégrale  $U$  (cf. l'annexe de la référence [71]).

La nature de borne supérieure ou inférieure est conditionnée par le choix du milieu de référence  $\mathbf{C}^0$ : si  $\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}^r \forall r$ , au sens des formes quadratiques associées, on obtient une borne supérieure et une borne inférieure si  $\mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^r \forall r$ . Il s'avère que dans le cas des phases isotropes distribuées de manière isotrope, les variations de  $\mathbf{C}^{\text{HS}}$  en fonction des modules de cisaillement  $\mu_0$  et de compressibilité  $k_0$  sont monotones : les meilleures bornes sont obtenues lorsque  $\mathbf{C}^0$  est le plus petit des majorants des  $\mathbf{C}^r$  noté  $\mathbf{C}_r^+$  ou le plus grand des minorants  $\mathbf{C}_r^-$ . L'expression finale donnée dans [71] correspond au cas où  $\mathbf{C}_r^- = \mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{C}_r^+ = \mathbf{C}^n$ , soit plus précisément au cas où  $\text{Inf}_r \mu_r = \mu_1$ ,  $\text{Inf}_r k_r = k_1$ ,  $\text{Sup}_r \mu_r = \mu_n$  et  $\text{Sup}_r k_r = k_n$ . Une généralisation aux cas où les majorants ou minorants optimaux des modules de cisaillement et de compressibilité ne correspondant pas aux mêmes phases constitutives est due à Walpole [167]. La démarche fondamentale utilisée par cet auteur est identique à celle mise en œuvre dans [71], même si elle en diffère quelque peu dans ses aspects pratiques. Le calcul des déformations moyennes  $\underline{\underline{\epsilon}}_r^*$  est réalisé au moyen de l'opérateur de Green modifié associé au milieu infini de modules élastiques  $\mathbf{C}^0$ , dont une expression explicite est connue pour le comportement isotrope. Une autre différence concerne le choix des tenseurs de polarisation uniformes au sein des phases qui est fait *a priori* dans ce second travail, alors que les auteurs procèdent à une optimisation dans le premier (mais pour aboutir au même résultat). L'équivalence entre les approches en déformations imposées et en contraintes imposées est aussi précisée dans [167].

Diverses extensions ont fait suite à cette avancée majeure dans la description du comportement élastique des composites. Citons d'abord l'application aux composites dont les phases ne sont pas isotropes, mais toujours distribuées de manière isotrope. Le cas du comportement local à symétrie cubique a déjà été cité [70] et le cas général est traité dans la référence [168], où il est explicitement

fait appel à un matériau de référence anisotrope. Ce travail établit aussi la *similitude formelle* entre la détermination des déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}_r^*$  pour une distribution isotrope des phases et la résolution de problèmes d'inclusions en milieu infini dérivés de celui d'Eshelby [54] : les moyennes sur la phase  $r$  de la contrainte et de la déformation d'essai optimales,  $\underline{\underline{\sigma}}_r^*$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_r^*$ , sont égales à la contrainte et la déformation uniformes qui apparaissent dans une inclusion sphérique homogène de phase  $r$  noyée dans une matrice  $\mathbf{C}^0$  soumise à un champ homogène  $\underline{\underline{E}}^0$  à l'infini (cf. figures 1.7 et 1.8). La valeur de  $\underline{\underline{E}}^0$  est telle que  $\sum_r \underline{\underline{\epsilon}}_r^* = \underline{\underline{E}}$  si la condition de déformation homogène au bord du VER est choisie, ou telle que  $\sum_r \underline{\underline{\sigma}}_r^* = \underline{\underline{\Sigma}}$ , si c'est la condition de contrainte homogène. La borne  $\mathbf{C}^{\text{HS}}$  obtenue est déterminée par la relation  $\sum_r \underline{\underline{\sigma}}_r^* = \mathbf{C}^{\text{HS}} : \sum_r \underline{\underline{\epsilon}}_r^*$ . À ce propos, il est aussi intéressant de relever [71] que pour un choix de milieu de référence très mou ou très dur en comparaison du comportement des phases, la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman se ramène aux théorèmes énergétiques classiques. De plus, la procédure de calcul de borne engendre respectivement la borne de Reuss (figure 1.5) et celle de Voigt (figure 1.6) : un matériau très dur transforme la condition de déformation homogène à l'infini en une condition de déformation homogène aux bords de l'inclusion, alors qu'un matériau très mou ramène de la même manière la condition de contrainte homogène de l'infini sur le bord de l'inclusion.

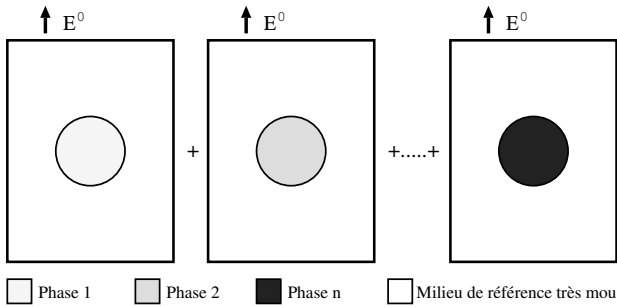


Figure 1.5 : Calcul de la borne de Reuss par la procédure de Hashin et Shtrikman

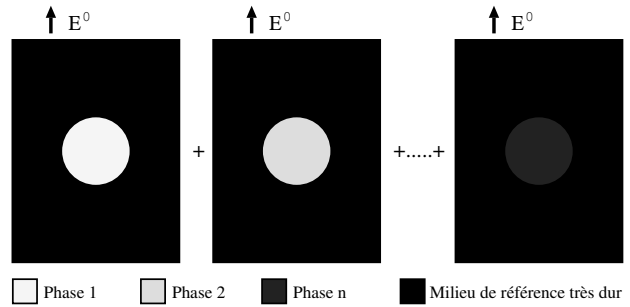


Figure 1.6 : Calcul de la borne de Voigt par la procédure de Hashin et Shtrikman

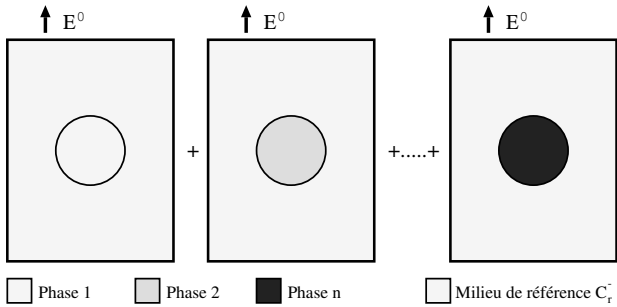


Figure 1.7 : Calcul de la borne inférieure de Hashin et Shtrikman

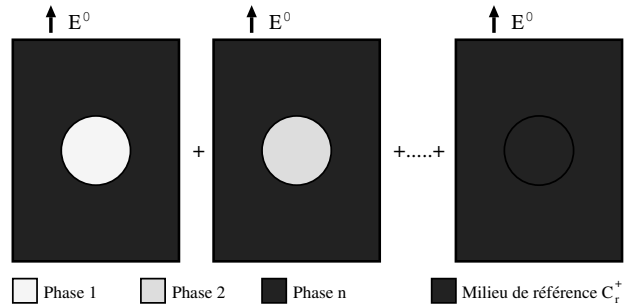


Figure 1.8 : Calcul de la borne supérieure de Hashin et Shtrikman

Le calcul des moyennes  $\underline{\underline{\epsilon}}_r^*$  peut être mené explicitement dans certains cas d'anisotropie de distribution des phases. Celui d'une distribution isotrope transverse de phases isotropes transverses de même axe de symétrie est abordé par Walpole [169]. Les résultats sont appliqués à des composites à fibres, mais ne sont pas spécifiques à cette classe de matériaux. Des distributions plus générales ont été introduites par Willis [173] sous l'appellation de « distributions ellipsoïdales » et sont définies à partir des fonctions de corrélation d'ordre deux par :

$$\langle \kappa_i(\underline{x}) \kappa_j(\underline{x} + \underline{h}) \rangle_\alpha = \kappa_{ij} \left( \left\| \underline{\underline{A}} \cdot \underline{h} \right\| \right), \quad (1.84)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est un tenseur d'ordre deux non singulier quelconque. Cette définition généralise la notion d'isotropie de distribution qui apparaît comme le cas particulier où  $\underline{\underline{A}}$  est l'identité. Il est assez facile de voir qu'un VER présentant une distribution ellipsoïdale de phase peut être construit à partir d'un VER ayant une distribution isotrope par la transformation  $\mathcal{T} : \underline{x} \rightarrow \underline{\underline{B}} \cdot \underline{x}$ , où  $\underline{\underline{B}}$  est le tenseur

symétrique d'ordre deux tel que  $\underline{\underline{B}}^{-1T} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}}$ , qui transforme la sphère unitaire en un ellipsoïde d'axes principaux orientés selon les directions principales de  $\underline{\underline{B}}$ , confondues avec celles de  $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}}$ , et de longueurs données par les valeurs propres correspondantes de  $\underline{\underline{B}}$ , égales aux inverses des racines carrées de celles de  $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}}$ . Une distribution isotrope transverse est obtenue comme cas limite, lorsque deux valeurs propres de  $\underline{\underline{B}}$  sont confondues et que la troisième devient très grande. Le calcul des déformations moyennes  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  est alors formellement identique à la résolution de problèmes d'inclusions en milieu infini tels que ceux introduits plus haut, mais avec des inclusions ellipsoïdales toutes identiques et déduites d'une sphère par la transformation  $\mathcal{T}$ . Le tenseur  $\mathbf{C}^{\text{HS}}$  peut être calculé explicitement, par exemple à partir du tenseur d'Eshelby associé au milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  et à cette forme ellipsoïdale d'inclusion. Il est suggéré dans la référence [173], mais sans argument précis, qu'une telle distribution soit satisfaite dans un composite à particules ellipsoïdales alignés. Le calcul n'est pas mené à terme, mais des résultats explicites correspondants sont donnés pour le problème de la conductivité thermique, au formalisme similaire mais plus simple.

Citons aussi l'approche due à Milton et Kohn [119], dans la lignée des précédentes, puisqu'il s'agit d'encadrer les modules de composites anisotropes, mais différente par la démarche entreprise, aucune hypothèse d'ordre supérieur à un n'étant faite à l'échelle des phases. La seule information prise en compte porte sur la symétrie du comportement macroscopique. Ces auteurs considèrent un biphasé dont les phases sont isotropes et de fractions volumiques connues et établissent deux encadrements scalaires portant l'un sur la réponse macroscopique sous un chargement déviatorique particulier et l'autre sur la réponse sous compression isostatique. Ces résultats ne sont pas suffisants pour encadrer l'énergie élastique pour tout chargement macroscopique, sauf dans l'hypothèse d'isotropie à l'échelle macroscopique ; dans ce cas, ils sont équivalents aux bornes de Hashin et Shtrikman classiques, mais sont obtenus sans l'hypothèse de distribution isotrope des phases. Les encadrements s'appliquent à tout type de symétrie, mais l'information correspondant à une situation d'isotropie est la plus riche envisageable puisqu'un matériau isotrope vérifie *a fortiori* des symétries moins élevées, comme l'isotropie transverse ou la symétrie cubique. Les encadrements obtenus pour d'autres classes de symétries anisotropes sont donc moins resserrés que ceux relatifs à l'isotropie et ne sont pas en concurrence avec ceux cités plus haut. Notons que ces résultats se généralisent à des matériaux multiphasés à phases anisotropes et qu'ils peuvent être retrouvés comme une application particulière d'une méthode plus générale, élaborée par divers auteurs à la fin des années 1980 et connue sous l'appellation de « méthode de translation » (voir par exemple [118]). Cette méthode permet en particulier d'établir facilement les inégalités de Hashin et Shtrikman classiques et de les resserrer dans certains cas, grâce à des conditions moins restrictives sur le choix du milieu de référence. Ces travaux présentent toutefois un intérêt principalement théorique, en répondant à la question : quel est le domaine des comportements macroscopiques réalisables par un composite dont la concentration et le comportement des phases sont connus et satisfaisant à une certaine symétrie macroscopique. En ce sens, ils vont à l'encontre du but annoncé de notre travail consistant justement à faire intervenir une information locale. Nous y reviendrons toutefois ultérieurement.

### 1.2.B.b Théorie systématique de Kröner

Les travaux décrits au paragraphe précédent permettent de resserrer l'encadrement des bornes de Voigt et Reuss pour des matériaux dont les fonctions de corrélation d'ordre deux satisfont certaines propriétés particulières. Il ne s'agit donc pas d'une véritable prise en compte de toute l'information d'ordre deux, puisque par exemple la forme de la fonction  $\kappa_{ij}$  dans l'équation (1.83) n'est pas utilisée, et que plus généralement on ne peut pas prendre en compte l'information d'ordre deux éventuellement disponible pour des composites ne satisfaisant pas les propriétés particulières invoquées. Il n'existe malheureusement pas de théorie générale simple et facile à mettre en œuvre donnant des bornes en fonction de toute l'information d'ordre deux, au même titre que les bornes de Voigt et Reuss fournissent des encadrements à partir de toute l'information d'ordre un (c'est-à-dire des concentrations). L'approche systématique développée par Kröner au cours des années 1970 [102, 99, 100, 101] à partir de travaux antérieurs [183], répond néanmoins partiellement à la question. Elle permet plus généralement de prendre en compte l'information d'ordre  $n$ , exprimée en termes de fonctions de corrélation sur les

variables aléatoires  $\mathbf{C}(\underline{x}) = \sum_{r=1}^n \mathbf{C}^r \kappa_r(\underline{x})$ .

**Cas général.** Le point de départ de la théorie est l'équation aux perturbations dite de Lippman-Schwinger-Dirichlet (LSD) caractérisant le champ de déformation réel  $\underline{\underline{\epsilon}}$  dans le VER en fonction du champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  apparaissant dans le même domaine, si le comportement était homogène de modules élastiques  $\mathbf{C}^0$  :

$$\underline{\underline{\epsilon}} + \mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^0, \quad (1.85)$$

où  $\delta\mathbf{C} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^0$ ,  $\mathbf{\Gamma}^0$  est l'opérateur de Green modifié associé aux modules  $\mathbf{C}^0$ , à la géométrie et aux conditions aux limites considérées (contraintes ou déformations homogènes au bord par exemple) et  $\star$  désigne la convolution. Dans cette écriture, les seules grandeurs fluctuantes sont  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\delta\mathbf{C}$ . En introduisant l'opérateur de projection  $\mathcal{P}$ , tel que  $\mathcal{P}x = x' = x - \langle x \rangle$ , on en déduit une expression des fluctuations  $\delta\mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}'$  :

$$\delta\mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}' = - \left[ \mathbf{I} + \delta\mathbf{C} : \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \right]^{-1} \delta\mathbf{C} : \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad (1.86)$$

qui permet à partir de la définition

$$\bar{\mathbf{C}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \langle \mathbf{C} \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \langle \delta\mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle \quad (1.87)$$

de construire une expression formelle des modules homogènes équivalents

$$\bar{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} \right]^{-1}, \quad (1.88)$$

développable en série :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} + \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} : \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} + \dots \quad (1.89)$$

Grâce aux propriétés de l'opérateur  $\mathcal{P}$ , cette série peut être réécrite sous la forme plus symétrique :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^0 &+ \langle \delta\mathbf{C} \rangle - \langle \mathbf{C}' : \mathbf{\Gamma}^0 \star \mathbf{C}' \rangle + \langle \mathbf{C}' : \mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} : \mathbf{\Gamma}^0 \star \mathbf{C}' \rangle \\ &- \langle (\mathbf{C}' : \mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C})' : \mathbf{\Gamma}^0 \star (\delta\mathbf{C} : \mathbf{\Gamma}^0 \star \mathbf{C}')' \rangle \\ &+ \langle (\mathbf{C}' : \mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C})' : \mathbf{\Gamma}^0 \star \delta\mathbf{C} : \mathbf{\Gamma}^0 \star (\delta\mathbf{C} : \mathbf{\Gamma}^0 \star \mathbf{C}')' \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.90)$$

Une utilisation judicieuse du théorème de l'énergie potentielle (voir ci-après) permet d'établir [183, 99] que la série précédente, tronquée en un terme d'ordre impair en  $\mathbf{C}'$  et  $\delta\mathbf{C}$ , constitue une borne supérieure au sens des formes quadratiques pour les modules effectifs<sup>3</sup>. Si de plus on choisit  $\mathbf{C}^0$  de telle sorte que  $\delta\mathbf{C}$  soit toujours négatif, selon une démarche similaire à celle invoquée pour la construction des bornes de Hashin et Shtrikman, les sommes tronquées à un ordre pair sont également des bornes supérieures [99]. Le théorème de l'énergie complémentaire permet de construire de la même manière des bornes supérieures pour le tenseur des complaisances effectif, dont les inverses sont des bornes inférieures pour les modules. On construit ainsi deux suites de bornes, supérieures  $\mathbf{C}^{(n')}$  et inférieures  $\mathbf{C}_{(n')}$ , invoquant des corrélations d'ordre de plus en plus élevé et convergeant vers le tenseur des modules du MHE. Pour  $n = 1$ , on obtient clairement les bornes de Voigt et Reuss, notées  $\mathbf{C}^{(1)}$  et  $\mathbf{C}_{(1)}$ . Pour  $n = 0$ , on obtient le milieu de référence lui-même. La borne supérieure optimale  $\mathbf{C}^{(0)}$  est le « plus petit » tenseur tel que  $\forall \underline{\underline{\epsilon}} \in \mathbf{C}^{(0)} : \underline{\underline{\epsilon}} \geq \sup_{\underline{\underline{\epsilon}} \in \mathbf{C}(\underline{x})} \underline{\underline{\epsilon}}$ ; elle s'identifie au tenseur  $\mathbf{C}_r^+$  invoqué dans la procédure de Hashin et Shtrikman. De même la borne inférieure optimale  $\mathbf{C}_{(0)}$  est le tenseur  $\mathbf{C}_r^-$ .

La technique pour établir que ces tenseurs ont le statut de borne résulte de la remarque que l'ensemble des tenseurs de la forme

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}\mathbf{\Gamma}^0 \star \mathbf{p} \right] : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle, \quad (1.91)$$

<sup>3</sup>En réalité, l'expression que l'on obtient est un opérateur non local qui ne se réduit *a priori* pas à un tenseur d'ordre quatre : il opère sur le champ  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  qui peut ne pas être homogène (les moyennes considérées ici sont à prendre au sens des espérances statistiques). Dans l'hypothèse de macrohomogénéité et d'ergodicité, il l'est effectivement et l'opérateur obtenu est bien local.

où  $\mathbf{p}$  est un tenseur d'ordre quatre aléatoire quelconque s'identifie à l'ensemble des tenseurs de déformation CA pour le problème considéré. De tels tenseurs peuvent être utilisés comme champs d'essai. Cette idée est similaire à celle de l'approche de Hashin et Shtrikman, puisqu'elle substitue à la construction fastidieuse de champs d'essais CA le choix de tenseurs de polarisation  $\mathbf{p}$  sans contraintes particulières. Le choix

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}^m = -\delta\mathbf{C} + \delta\mathbf{C} : \mathcal{P}\Gamma^0 \star \delta\mathbf{C} + \dots + (-1)^m \delta\mathbf{C} : [\mathcal{P}\Gamma^0 \star \delta\mathbf{C}]^{m-1} \quad (1.92)$$

permet en particulier de montrer que la série tronquée à l'ordre  $2m + 1$  est une borne supérieure. Rien n'indique en revanche que ce choix soit optimal vis-à-vis de l'information invoquée, c'est-à-dire les fonctions de corrélation de la forme  $\langle (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^p \rangle$  pour  $p \leq 2m + 1$ . La forme générale pour une borne invoquant ces quantités résulte d'un choix de tenseurs de polarisation de la forme :

$$\Gamma^0 \star \mathbf{p} = \Gamma^0 \star \mathbf{C} : \Lambda_1 + (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^2 : \Lambda_2 + \dots + (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^m : \Lambda_m, \quad (1.93)$$

où les  $\Lambda_i$  sont des opérateurs déterministes. Le choix optimal est celui garantissant la stationnarité de la borne obtenue par rapport à ces derniers, par une démarche analogue à celle conduisant au choix optimal de tenseurs de polarisation homogènes par phase dans l'approche de Hashin et Shtrikman. On peut ainsi obtenir une suite de bornes inférieures  $\mathbf{C}_{(n)}$  et une suite de bornes supérieures  $\mathbf{C}^{(n)}$ , optimales vis-à-vis des corrélations invoquées, clairement croissante ou décroissante respectivement, et convergeant vers  $\bar{\mathbf{C}}$ . Les bornes d'ordre zéro et un sont les mêmes que précédemment. La forme explicite des bornes d'ordre deux et trois est donnée par l'auteur de la théorie [102], mais l'établissement d'une relation générale pour un ordre quelconque semble particulièrement ardu d'un point de vue algébrique. Il s'avère que la borne d'ordre trois est indépendante du milieu de référence choisi. Pour les bornes supérieures d'ordre pair,  $\mathbf{C}^0$  doit garantir la négativité de  $\delta\mathbf{C}$  pour qu'un terme complémentaire négligé soit de signe connu. Kröner suggère de « minimiser »  $\mathbf{C}^0$  pour rendre ce terme complémentaire aussi petit que possible, et de choisir en conséquence la borne supérieure d'ordre zéro  $\mathbf{C}^{(0)}$ . L'optimalité de la borne obtenue vis-à-vis du choix de  $\mathbf{C}^0$  n'est toutefois pas clairement établie. Les bornes inférieures d'ordre pair sont obtenues avec  $\mathbf{C}_{(0)}$ .

Cette théorie générale ne répond que partiellement à la question posée en début de paragraphe. En effet, la forme générale de ces bornes supérieures d'ordre impair est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{2p+1} = \langle \mathbf{C} \rangle &+ \sum_{i=1}^p \Lambda_i^T \star \langle (\mathbf{C} \star \Gamma^{0i'} \star \mathbf{C}) \rangle + \sum_{j=1}^p \langle \mathbf{C} \star (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^{j'} \rangle \star \Lambda_j \\ &+ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \Lambda_i^T \star \langle (\mathbf{C} \star \Gamma^0)^{i'} \star \mathbf{C} \star (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^{j'} \rangle \star \Lambda_j. \end{aligned} \quad (1.94)$$

L'expression « développée » des termes de la deuxième somme est par exemple :

$$\begin{aligned} &\left[ \langle \mathbf{C} \star (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^{i'} \rangle \star \Lambda_i \right] (\underline{x}, \underline{y}) \\ = &\int_{\text{VER}^{\otimes i}} [\langle \mathbf{C}(\underline{x})\mathbf{C}(\underline{x}_i) \cdots \mathbf{C}(\underline{x}_1) \rangle - \langle \mathbf{C}(\underline{x}) \rangle \langle \mathbf{C}(\underline{x}_i) \cdots \mathbf{C}(\underline{x}_1) \rangle] \\ &\Gamma^0(\underline{x}, \underline{x}_i)\Gamma^0(\underline{x}_i, \underline{x}_{i-1}) \cdots \Gamma^0(\underline{x}_2, \underline{x}_1)\Lambda_i(\underline{x}_1, \underline{y})d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_{i-1} \cdots d\mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Il apparaît que l'information effectivement prise en compte est constituée de convolutions particulières des fonctions de corrélation de la forme  $\langle \mathbf{C}(\underline{x}_i) \cdots \mathbf{C}(\underline{x}_1) \rangle$ , elles-mêmes déduites des corrélations entre fonctions indicatrices des phases telles que nous les avons introduites au paragraphe 1.1.D, jusqu'à l'ordre  $2p + 1$ . Les bornes ainsi construites utilisent donc bien cette information, en revanche rien n'indique qu'elles l'utilisent pleinement. Elles ne sont donc pas optimales au sens le plus général, leur optimalité étant strictement limitée au cadre annoncé plus haut, c'est-à-dire à la connaissance des corrélations du type  $\langle (\Gamma^0 \star \mathbf{C})^p \rangle$ .

Le second reproche que l'on peut faire à cette théorie concerne la difficulté de sa mise en œuvre, principalement liée à la complexité de l'opérateur  $\Gamma^0$ . L'auteur de la théorie se limite au cas macro-isotrope qui permet de considérer des milieux de référence isotropes et suppose l'extension du VER



infinie. L'opérateur de Green modifié revêt alors une expression analytique bien connue, qui autorise en principe le calcul des corrélations ci-dessus. Les intégrations nécessaires sont toutefois lourdes, du fait de la non-localité de l'opérateur  $\mathbf{\Gamma}^0$ . Dans des situations anisotropes, des techniques numériques encore plus lourdes (transformées de Fourier, ...) seraient nécessaires.

**Désordre gradué et parfait.** L'opérateur  $\mathbf{\Gamma}^0$  peut se décomposer en la somme d'une partie locale  $\mathbf{E}^0$  et d'une partie à distance  $\mathbf{F}^0$  sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma}^0(\underline{x}, \underline{x}') = \mathbf{E}^0 \delta(\underline{x}, \underline{x}') + \mathbf{F}^0(\omega(\underline{x}' - \underline{x})) \frac{1}{\|\underline{x}' - \underline{x}\|^3} \quad (1.96)$$

où  $\delta(\underline{x}, \underline{x}')$  est la distribution de Dirac et  $\omega(\underline{y})$  désigne la direction du vecteur  $\underline{y}$ . La partie non locale satisfait de plus :

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}^0(\omega) d\omega = 0, \quad (1.97)$$

$\Omega$  étant l'espace des directions de vecteurs et  $d\omega$  un angle solide élémentaire. La difficulté du calcul des corrélations est due à la contribution non locale de  $\mathbf{\Gamma}^0$ . Dans un second volet de cette théorie systématique, l'auteur s'en soustrait en se plaçant dans des situations particulières dans lesquelles les termes correspondants sont identiquement nuls. Les hypothèses correspondantes définissent les notions de « désordre gradué » et de « désordre parfait » [100] : un milieu aléatoire est dit désordonné à l'ordre  $n$  si :

$$\langle \mathbf{C}' : [\mathbf{F}^0 \star \mathbf{C}'^p] \rangle = 0 \quad \forall p < n. \quad (1.98)$$

Une situation de désordre parfait correspond au cas où ces relations sont vérifiées pour tout entier  $p$ . Ces définitions sont *a priori* relatives au milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  utilisé pour construire  $\mathbf{F}^0$  mais cet aspect n'est pas clairement discuté par l'auteur de la théorie.

Le calcul des bornes  $\mathbf{C}^{(n')}$ ,  $\mathbf{C}_{(n')}$ ,  $\mathbf{C}^{(n)}$  et  $\mathbf{C}_{(n)}$  est alors grandement simplifié pour des matériaux satisfaisant ces conditions de désordre jusqu'à l'ordre  $n$  (pour le milieu de référence utilisé) : il suffit de remplacer  $\mathbf{\Gamma}^0$  par  $\mathbf{E}^0$  dans les expressions données plus haut et substituer ainsi de simples multiplications tensorielles aux convolutions multiples. Mais il est possible de faire beaucoup mieux : en introduisant dans les théorèmes énergétiques les champs d'essais construits avec les polarisations :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^m = -\delta\mathbf{C} + \delta\mathbf{C} : \mathcal{P}\mathbf{E}^0 \star \delta\mathbf{C} + \dots + (-1)^m \delta\mathbf{C} : [\mathcal{P}\mathbf{E}^0 \star \delta\mathbf{C}]^{m-1}, \quad (1.99)$$

on montre que le tenseur des modules effectifs est majoré par la somme d'une borne  $\mathbf{C}^{(n')}$  construite avec  $\mathbf{E}^0$ , de deux termes du type  $\langle f^{T'} : \mathbf{F}^0 \star f' \rangle$ , où  $f'(\underline{x})$  dépend linéairement de  $\mathbf{C}'(\underline{x})$ , et d'un terme dépendant de  $\delta\mathbf{C}$ , négatif si  $\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}^{(0)}$ . Avec la seule hypothèse de désordre gradué d'ordre deux et le choix  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}^{(0)}$ , les trois derniers termes peuvent être omis et l'on établit que  $\mathbf{C}^{(n')}$  majore  $\bar{\mathbf{C}}$  pour tout  $n$ . Avec  $n$  tendant vers l'infini et en refactorisant la série, on obtient :

$$\bar{\mathbf{C}} \leq \mathcal{F}(\mathbf{C}^{(0)}) \quad (1.100)$$

avec

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}^{(0)}) = \left\langle \mathbf{C} : [\mathbf{I} + \mathbf{E}^0 : \delta\mathbf{C}]^{-1} \right\rangle : \left\langle [\mathbf{I} + \mathbf{E}^0 : \delta\mathbf{C}]^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (1.101)$$

où  $\mathbf{E}^0$  et  $\delta\mathbf{C}$  sont construits à partir de  $\mathbf{C}^{(0)}$ . Ce résultat est exactement la borne supérieure de Hashin et Shtrikman. La borne inférieure est obtenue par la même procédure appliquée à l'énergie complémentaire. Ceci n'est pas surprenant : la propriété (1.97) permet d'établir facilement que l'hypothèse de distribution isotrope des phases induit celle de désordre d'ordre deux, et ceci quel que soit le milieu de référence invoqué. La notion physique intrinsèque invoquée par le concept de désordre d'ordre deux semble donc être celle de répartition isotrope des phases.

Lorsque le milieu est désordonné jusqu'à l'ordre trois, il est possible de choisir la borne de Voigt  $\mathbf{C}^{(1)}$  ou de Reuss  $\mathbf{C}_{(1)}$  pour milieu de référence (à condition que la notion de désordre se réfère à ces

milieux), tout en conservant le signe du terme en  $\delta\mathbf{C}$ . Kröner établit ainsi l'encadrement suivant pour les milieux désordonnés à l'ordre trois :

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}_{(1)}) \leq \bar{\mathbf{C}} \leq \mathcal{F}(\mathbf{C}^{(1)}). \quad (1.102)$$

Le calcul effectif de cette borne est formellement identique à la résolution de problèmes d'inclusions noyées dans un milieu infini de modules  $\mathbf{C}^{(1)}$  ou  $\mathbf{C}_{(1)}$  (figure 1.9).

Ce problème d'inclusions en milieu infini est également celui invoqué par la modélisation auto-cohérente des milieux aléatoires [73, 96]. Ces modèles (voir page 46) supposent que l'état mécanique moyen de chaque phase d'un milieu hétérogène est celui d'une inclusion sphérique de cette phase noyée dans un milieu infini ayant les propriétés du MHE (figure 1.10). L'équation satisfaite par le tenseur des modules  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  d'un tel milieu est :

$$\mathbf{C}^{\text{AC}} = \mathcal{F}(\mathbf{C}^{\text{AC}}). \quad (1.103)$$

Au moyen d'une réécriture judicieuse du développement (1.90) basée sur l'opérateur de Green modifié associé au tenseur  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$ , Kröner établit que le tenseur des modules effectifs est égal à la somme de  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  et de termes de la forme  $\langle f_n^{T'} : \dots \mathbf{F}^{\text{AC}} \star f_i' : \dots \mathbf{F}^{\text{AC}} \star f_1' \rangle$  où les  $f_i'(\underline{x})$  dépendent linéairement de  $\mathbf{C}'(\underline{x})$ . Si les conditions de désordre parfait (associées au tenseur des modules  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$ ) sont satisfaites, ces derniers sont nuls et  $\mathbf{C}^{\text{AC}} = \bar{\mathbf{C}}$  : le modèle autocohérent fournit le tenseur des modules effectifs d'un milieu « parfaitement désordonné ».

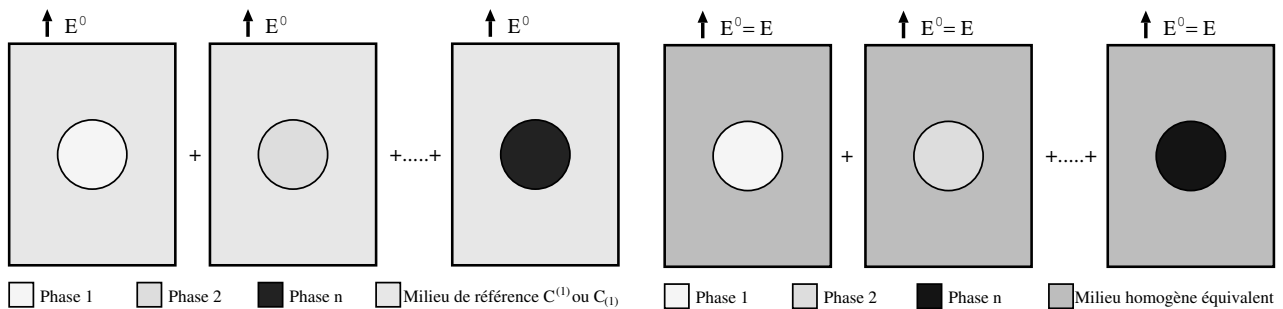


Figure 1.9 : Bornes d'ordre trois de Kröner

Figure 1.10 : Modèle autocohérent

Ces résultats suggèrent de construire par récurrence deux suites de tenseurs de modules  $\mathbf{C}^{(+n)}$  et  $\mathbf{C}^{(-n)}$  selon :

$$\mathbf{C}^{(+0)} = \mathbf{C}^{(0)} \quad , \quad \mathbf{C}^{(+1)} = \mathbf{C}^{(1)} \quad , \quad \mathbf{C}^{(+n+2)} = \mathcal{F}(\mathbf{C}^{(+n)}) \quad (1.104)$$

$$\mathbf{C}^{(-0)} = \mathbf{C}^{(0)} \quad , \quad \mathbf{C}^{(-1)} = \mathbf{C}^{(1)} \quad , \quad \mathbf{C}^{(-n+2)} = \mathcal{F}(\mathbf{C}^{(-n)}). \quad (1.105)$$

Les trois premiers termes de ces suites sont des bornes supérieures ou inférieures du tenseur des modules effectifs lorsque les hypothèses de désordre gradué à l'ordre correspondant sont satisfaites. En cas de convergence, leurs limites satisfont l'équation d'autocohérence (1.103). Tous les termes d'ordre  $n$  de ces suites approchent la solution autocohérente à l'ordre  $n+1$  en  $\mathbf{C}'$  et, d'après l'auteur de la théorie, sont des bornes pour le comportement effectif de milieux satisfaisant les conditions de désordre d'ordre  $n$  (figure 1.11), mais les arguments conduisant à ce dernier résultat sont quelque peu elliptiques [101]. L'optimalité de ces bornes pour des conditions de désordre de degré supérieur à deux n'est pas non plus établie.

La signification physique de la notion de désordre gradué à l'ordre  $n$  n'est pas très claire, à l'exception du cas  $n=2$  déjà mentionné. Cette théorie générale a été développée dans le but de décrire des polycristaux. Le modèle statistique utilisé consiste à décomposer d'abord l'espace en cellules juxtaposées, correspondant aux grains du polycristal, et à associer dans un second temps à chaque cellule une orientation cristalline, c'est-à-dire un tenseur  $\mathbf{C}$  défini dans un repère macroscopique fixe [115]. Kröner interprète les conditions de désordre d'ordre deux comme la combinaison d'une condition d'indépendance de l'orientation cristalline entre deux cellules distinctes et d'une condition d'isotropie sur l'ensemble des cellules, qui globalement revient à la condition de distribution isotrope des phases.

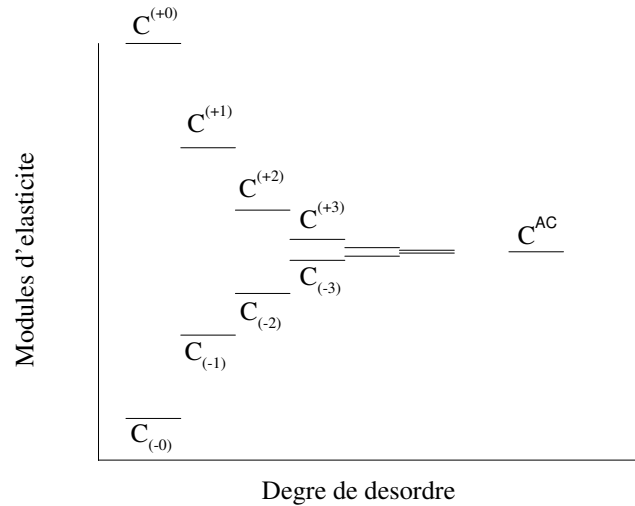


Figure 1.11 : Procédure du désordre gradué

L'ordre trois ferait référence à une condition d'indépendance entre l'orientation cristalline dans une cellule et sa forme, alors que l'ordre quatre concernerait des propriétés liées à la courbure des frontières des cellules. Le désordre parfait correspondrait à des distributions complètement désordonnées au sein desquelles aucune corrélation particulière ne pourrait être révélée. Mais les arguments invoqués sont plus intuitifs que précis.

La généralisation de ces résultats à des cas d'anisotropie macroscopique est suggérée par Kröner, qui ne donne toutefois aucun résultat à ce sujet [100]. La convergence des séries du type (1.90) et donc l'applicabilité de la théorie est garantie lorsque les hétérogénéités ne sont pas trop importantes [61].

Les résultats obtenus dans le cadre de la théorie du désordre gradué ne répondent donc pas à l'objectif fixé, puisque les bornes ou modèles proposés ne dépendent pas de paramètres microstructuraux bien identifiés, mais correspondent, à l'instar des bornes de Hashin et Shtrikman, à des conditions particulières figées, plus ou moins bien identifiées. Les bornes générales décrites auparavant satisfont partiellement au cahier de charges, puisqu'elles s'appliquent à toutes les situations en prenant en compte des informations spécifiques aux microstructures considérées, sous forme de fonctions de corrélation. Il semble malheureusement particulièrement difficile de rendre compte au travers de telles fonctions de certaines propriétés géométriques simples, telles que la nature inclusionnaire d'une phase, les rapports de forme moyens ou l'orientation moyenne d'inclusions. Il y a fort à craindre que les degrés des corrélations à considérer soient élevés. De plus, ainsi que nous l'avons déjà relevé, l'utilisation de cette information ne semble pas optimale dans le calcul des bornes proposées.

### 1.2.B.c Autres modèles invoquant des corrélations d'ordre supérieur à deux

D'autres bornes rigoureuses sur les modules de cisaillement ou de compressibilité de matériaux statistiquement homogènes et isotropes constitués de phases isotropes, invoquant des fonctions de corrélation d'ordre trois ou quatre, ont été proposées par plusieurs auteurs. Beran et Molyneux [13] déterminent un encadrement du module de compressibilité d'un multiphasé en utilisant dans les théorèmes classiques de l'élasticité des champs d'essais non homogènes, construit à partir d'une méthode de perturbations. Ces auteurs supposent que le champ de déformation réel dans le VER sous chargement isostatique admet un développement de la forme  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\alpha} + \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)}(\underline{x}) + \underline{\underline{\epsilon}}^{(2)}(\underline{x}) + \underline{\underline{\epsilon}}^{(3)}(\underline{x}) + \dots$ , où les  $\underline{\underline{\epsilon}}^{(i)}(\underline{x})$  sont CA et d'ordre  $i$  en  $\frac{k'}{\langle k \rangle_{\alpha}}$ , et utilisent dans le théorème de l'énergie potentielle des champs d'essai de la forme :  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})_{N}^{\star} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\alpha} + \alpha_1 \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)}(\underline{x}) + \alpha_2 \underline{\underline{\epsilon}}^{(2)}(\underline{x}) + \dots + \alpha_N \underline{\underline{\epsilon}}^{(3)}(\underline{x})$ , où les  $\alpha_i$  sont des scalaires à choisir de manière optimale. Seul le cas  $N = 1$  est traité exhaustivement et aboutit, dans

l'hypothèse d'isotropie statistique, à une borne supérieure sur  $\bar{k}$  dépendant d'un paramètre microstructural construit à partir de la corrélation d'ordre trois  $\langle \mu'(0)k'(\underline{x}_1)k'(\underline{x}_2) \rangle_\alpha$ . Le théorème de l'énergie complémentaire permet d'établir de manière similaire une borne inférieure invoquant la corrélation  $\langle k'(\underline{x}_1)k'(\underline{x}_2)/\mu'(0) \rangle_\alpha$ . Un encadrement des modules de cisaillement dépendant de telles grandeurs a été proposé quelques temps après [112]. Les paramètres invoqués sont difficiles à déterminer sur une microstructure réelle, sauf pour des microstructures biphasées pour lesquelles une réécriture en a été proposée par Milton [116, 117]. Dans ce cas, les bornes sur le module de compressibilité dépendent de façon simple de la fraction volumique  $c_1$  et d'un paramètre microstructural  $\zeta_1$ , celles sur le module de cisaillement dépendant en plus d'un troisième paramètre  $\eta_1$ .  $\zeta_1$  et  $\eta_1$  appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$  et sont calculés à partir de la probabilité  $Q_1(a, b, \theta)$  que les trois sommets d'un triangle de cotés  $a$  et  $b$  et d'angle au sommet  $\theta$  appartiennent à la phase 1.

Des encadrements sur le comportement élastique de tels matériaux biphasés invoquant des corrélations d'ordre quatre ont été proposés par Milton et Phan-Thien [120]. Ils sont obtenus au moyen de la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman dans la situation où  $(k_1 - k_2)(\mu_1 - \mu_2) > 0$ , en adoptant l'une des phases comme milieu de référence. Des polarisations non uniformes sur les phases sont construites dans l'espace de Fourier selon une forme *a priori*, inspirée d'une solution de perturbations et dépendant d'un certain nombre de scalaires  $\alpha_i$ , dont le choix est optimisé de façon à rendre le résultat stationnaire. Les bornes obtenues sont exactes à l'ordre quatre en  $k_1 - k_2$  et  $\mu_1 - \mu_2$  et invoquent huit paramètres microstructuraux  $A, A_1, B, C, C_1, D, D_1$  et  $E$ , calculables à partir des fonctions de corrélation d'ordre trois (pour  $A$  et  $A_1$ ) ou quatre (pour les autres). L'encadrement du module de compressibilité ne dépend que des paramètres  $A, B$  et  $C$ , mais celui du module de cisaillement les utilise tous.  $A$  dépend en fait de manière affine du paramètre  $\zeta_1$  mentionné plus haut et  $\eta_1$  est fonction affine de  $A$  et  $A_1$  : l'information sur la microstructure contenue dans le couple  $(A, A_1)$  est donc la même que celle du couple  $(\zeta_1, \eta_1)$ . Ces huit paramètres sont difficiles à déterminer, si bien que l'intérêt pratique de ces bornes est discutable. C'est pourquoi les mêmes auteurs proposent d'autres bornes pour le module de cisaillement, exactes à l'ordre trois seulement, mais n'invoquant que les deux paramètres  $\zeta_1$  et  $\eta_1$ . Elles sont obtenues pour des modules locaux quelconques à partir des théorèmes énergétiques classiques en invoquant des champs d'essai non uniformes, également construits à partir d'une forme *a priori* de leur transformée de Fourier inspirée de celle d'une solution de perturbation et dépendant de quelques paramètres à optimiser. L'expression de la condition d'admissibilité statique ou cinématique est en effet plus simple dans l'espace des phases, si bien que la construction de tels champs y est plus facile que dans l'espace réel. Notons aussi qu'un encadrement simplifié du module de cisaillement dépendant du seul paramètre  $\zeta_1$  est aussi proposé ; il est obtenu par la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman en annulant *a priori* certains coefficients  $\alpha_i$ . Même s'il n'est pas exact à l'ordre quatre, il améliore dans certaines situations les résultats d'ordre trois dépendant de deux paramètres.

Ces encadrements améliorent les résultats antérieurs invoquant les mêmes informations microstructurales, pour le module de compressibilité [13] comme pour celui de cisaillement [112]. Les bornes classiques de Hashin et Shtrikman peuvent aussi être retrouvées comme cas particuliers : il suffit par exemple, dans la procédure de calcul des bornes d'ordre quatre, d'annuler tous les  $\alpha_i$  à l'exception du terme induisant une polarisation homogène par phase. Elles apparaissent aussi comme les valeurs maximales ou minimales prises par les bornes d'ordre trois, lorsque les deux paramètres  $\zeta_1$  et  $\eta_1$  balayent l'ensemble des valeurs possibles, c'est-à-dire lorsqu'on n'inclut pas l'information qu'elles représentent. Ce dernier résultat vaut lorsque  $(k_1 - k_2)(\mu_1 - \mu_2) > 0$  ; dans le cas contraire, l'encadrement obtenu améliore le résultat antérieur de Walpole [167].

Précisons que toutes ces méthodes permettent aussi d'encadrer les propriétés diélectriques, magnétiques ou de conductivité électrique ou thermique de tels matériaux hétérogènes : les principes invoqués sont les mêmes, mais les calculs analytiques sont plus faciles à mener car l'ordre des tenseurs décrivant ces phénomènes physiques est plus petit (*cf.* par exemple [121]). Leur mise en œuvre pratique est assujettie à la connaissance des paramètres  $\zeta_1$  et  $\eta_1$ , dont la détermination expérimentale directe à partir de micrographies est possible mais délicate et fastidieuse. Leur dépendance vis à vis de paramètres microstructuraux plus immédiats et éventuellement ajustables, tels ceux cités à la fin du paragraphe précédent, n'est en conséquence pas facile à identifier.

La morphologie mathématique permet toutefois de calculer, analytiquement ou numériquement, les paramètres  $\zeta_1$  et  $\eta_1$  pour certaines microstructures répondant à des modèles statistiques bien définis [89, 90, 165], tel le modèle de cellules (ou modèle mosaïque) déjà cité [115], ou le modèle booléen [111]. On peut par exemple trouver dans la référence [90] des relations simples, exactes ou interpolées, donnant  $\zeta_1$  en fonction de la fraction volumique et d'autres paramètres, pour plusieurs modèles classiques. L'identification à partir de micrographies et par des techniques d'analyse d'images, d'un modèle adéquat et de ses paramètres pour représenter une microstructure réelle, permet d'établir indirectement les relations cherchées. Le succès de la démarche dans le but d'optimiser une microstructure dépend de la pertinence du modèle statistique invoqué, mais aussi de la finesse de l'encadrement obtenu. L'extension de ces bornes d'ordre trois à des matériaux avec plus de deux phases et à des situations anisotropes n'a, à notre connaissance, pas encore été entreprise.

### 1.2.B.d Problème d'Eshelby et modèles dérivés

Les calculs des bornes de Hashin et Shtrikman, des bornes d'ordre trois de Kröner et du modèle autocohérent correspondent formellement à la résolution de problèmes d'inclusions dérivés de celui d'Eshelby. D'autres approches décrites ci-après s'en inspirent également. Nous reportons ici quelques résultats classiques relatifs à ce problème.

La situation initialement considérée par Eshelby [54, 55] est celle d'un milieu infini élastique, isotrope et homogène de modules  $\mathbf{C}^0$ , dont un domaine  $\mathcal{E}$  d'extension finie, l'« inclusion », subit une transformation physique (dilatation thermique, transformation de phase, plasticité, ...) qui induirait une déformation homogène  $\underline{\underline{\epsilon}}^T$  si le domaine n'était pas imbriqué dans le milieu infini. La question est de déterminer l'état mécanique apparaissant dans toute la structure et le résultat principal est que, si l'inclusion est de forme ellipsoïdale, sa déformation est homogène et vaut :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^I = \mathbf{S}_{\mathcal{E}}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^T, \quad (1.106)$$

où  $\mathbf{S}_{\mathcal{E}}^0$  est le tenseur d'Eshelby, dépendant des rapports de forme de l'ellipsoïde, de son orientation et des propriétés élastiques du milieu. La propriété se généralise aux cas où  $\mathbf{C}^0$  présente une anisotropie quelconque [126].

Ce résultat permet d'aborder des situations légèrement différentes, comme celle d'une polarisation homogène  $\underline{\underline{p}}$  imposée dans l'inclusion : l'expression  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : [\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^T]$  de la loi de comportement dans  $\mathcal{E}$  est changée en  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{p}}$ . Si l'on impose de surcroît une déformation homogène  $\underline{\underline{E}}^0$  à tout le milieu infini, la déformation dans l'inclusion est encore homogène et vaut :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{S}_{\mathcal{E}}^0 : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}. \quad (1.107)$$

Ce problème peut être résolu au moyen de l'opérateur de Green modifié  $\mathbf{\Gamma}^0$  associé au milieu infini de modules  $\mathbf{C}^0$  :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}}^0 - \int_{\mathcal{E}} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) d\underline{\underline{y}} : \underline{\underline{p}}. \quad (1.108)$$

Le résultat d'Eshelby établit la stationnarité de l'intégrale ci-dessus lorsque  $\underline{\underline{x}}$  est dans  $\mathcal{E}$  :

$$\mathbf{S}_{\mathcal{E}}^0 : \mathbf{S}^0 = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) d\underline{\underline{y}} \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \mathcal{E} \quad (1.109)$$

Ce tenseur introduit par Hill [80] est classiquement noté  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0$ . Le tenseur (« constraint tensor » selon la dénomination de Hill)

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}}^{0*} = [\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0]^{-1} - \mathbf{C}^0 \quad (1.110)$$

est également souvent invoqué : il relie les forces  $\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{n}}$  à appliquer au bord (de normale unitaire  $\underline{\underline{n}}$ ) d'un trou de forme ellipsoïdale  $\mathcal{E}$  dans un milieu infini de modules  $\mathbf{C}^0$  non chargé à l'infini, pour induire des déplacements  $\underline{\underline{\epsilon}}^* \cdot \underline{\underline{x}}$  sur ce même bord, selon

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = -\mathbf{C}_{\mathcal{E}}^{0*} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^*, \quad (1.111)$$

et caractérise ainsi complètement l'action du milieu infini sur l'ellipsoïde. Comme annoncé, le problème de l'inclusion ellipsoïdale de comportement différent de celui du milieu infini est aussi résolu par cet outil. La loi de comportement dans  $\mathcal{E}$  s'écrit dans ce cas :  $\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}$  et la déformation  $\underline{\underline{E}}^0$  est encore imposée à l'infini. Les résultats précédents établissent clairement que la déformation est homogène dans l'inclusion et satisfait à :

$$[\mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0 : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0)] : \underline{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\underline{E}}^0. \quad (1.112)$$

Enfin, le cas le plus général est celui d'une inclusion  $\mathcal{E}$  de modules  $\mathbf{C}$  avec une déformation initiale homogène  $\underline{\underline{\epsilon}}^T$ , noyée dans un milieu infini de modules  $\mathbf{C}^0$ , présentant aussi une déformation initiale homogène  $\underline{\underline{E}}^T$ , et soumis à l'infini à une déformation homogène  $\underline{\underline{E}}^0$ . La déformation dans  $\mathcal{E}$  est homogène et vaut :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^I = [\mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0 : (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0)]^{-1} : [\underline{\underline{E}}^0 + \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0 : (\mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^T - \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}^T)]. \quad (1.113)$$

Si l'inclusion est sphérique, l'intégration de la composante non locale  $\mathbf{F}^0$  de  $\mathbf{\Gamma}^0$  s'annule du fait de la propriété (1.97) et l'on a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0 = \mathbf{E}^0. \quad (1.114)$$

Si  $\mathbf{C}^0$  est isotrope et ses modules de cisaillement et de compressibilité sont  $\mu_0$  et  $k_0$ ,  $\mathbf{E}^0$  est un tenseur isotrope donné par [101] :

$$\mathbf{E}^0 = \left\{ \frac{1}{2\mu_E^0}, \frac{1}{3k_E^0} \right\} \quad (1.115)$$

avec

$$3k_E^0 = 3k_0 + 4\mu_0 \quad \text{et} \quad 2\mu_E^0 = \frac{5\mu_0(3k_0 + 4\mu_0)}{3(k_0 + 2\mu_0)}. \quad (1.116)$$

L'expression analytique de  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0$  est connue pour quelques situations particulières d'anisotropie de  $\mathbf{C}^0$  ou de non sphéricité de  $\mathcal{E}$ . Dans le cas général, il faut recourir à une méthode numérique appropriée, telle que celle décrite dans la référence [126].

La similitude formelle entre ce dernier problème défini pour des inclusions sphériques et le calcul des bornes de Hashin et Shtrikman classique permet d'écrire ces dernières sous la forme :

$$\mathbf{C}^{\text{HS}} = \mathcal{F}(\mathbf{C}^0), \quad (1.117)$$

où  $\mathcal{F}$  est la fonction définie par (1.101) et  $\mathbf{C}^0$  vaut  $\mathbf{C}^{(0)}$  ou  $\mathbf{C}_{(0)}$  suivant que l'on calcule la borne supérieure ou la borne inférieure. On en déduit facilement l'expression analytique des bornes de Hashin et Shtrikman classiques relatives à des constituants isotropes.

Les bornes associées à des distributions ellipsoïdales proposées par Willis [173] et évoquées plus haut se calculent par la même relation, mais en remplaçant  $\mathbf{E}^0$  par  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0$  dans la définition de  $\mathcal{F}$ , l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  étant celui obtenu à partir d'une sphère par la transformation  $\mathcal{T}$ . Des expressions explicites pour  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^0$  sont connues pour un milieu de référence isotrope et dans certains cas d'anisotropie ; dans les autres cas, il faut encore avoir recours à des méthodes numériques adéquates [126]. Les propriétés générales du problème d'Eshelby et des grandeurs associées sont plus amplement décrites au paragraphe **B.2**. Divers modèles non encore évoqués ou généralisant ceux déjà cités utilisent ce résultat pour modéliser des matériaux hétérogènes, notamment des polycristaux et des composites à inclusions.

**Modèle de Mori et Tanaka.** Ce modèle qui porte le nom de ses auteurs [124] a été développé à l'origine pour estimer l'énergie élastique emmagasinée dans un matériau au comportement élastique homogène mais présentant des inhomogénéités de déformations initiales. Le problème est comparable à celui traité par Eshelby, mais avec un grand nombre d'inclusions. Les concepts invoqués ont par la suite été appliqués à des situations d'hétérogénéités de comportement, par une démarche similaire à celle présentée plus haut. De nombreux auteurs ont ainsi utilisé ce modèle pour représenter des composites à inclusions ellipsoïdales. Les références [11, 42] peuvent être consultées pour plus de

précisions. La description initiale de ce modèle est assez confuse et fait appel à des approximations mathématiques dont la signification physique n'est pas toujours claire. L'idée principale, telle qu'elle transparaît dans la référence [11], consiste à simplifier le problème de localisation en représentant (*cf.* figure 1.12) les inclusions de même forme, orientation et comportement élastique, par une inclusion ellipsoïdale unique équivalente, noyée dans un milieu infini ayant les modules d'élasticité  $\mathbf{C}^m$  de la matrice et soumis à l'infini à un champ homogène égal au champ moyen  $\underline{\underline{\epsilon}}^m$  dans la matrice, somme du champ macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  appliqué et d'un champ homogène  $\underline{\underline{E}}^1$  représentant « l'effet moyen » des autres inclusions :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^i = \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m) \right]^{-1} : \left[ \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}}^1 \right], \quad (1.118)$$

où  $\mathcal{E}_i$  définit la géométrie de la  $i^{\text{ième}}$  famille d'inclusions, de modules élastiques  $\mathbf{C}^i$ .  $\underline{\underline{E}}^1$  est déterminé par la condition  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}$ . Le module effectif  $\mathbf{C}^{\text{MT}}$  s'obtient ensuite par un processus d'homogénéisation classique :

$$\mathbf{C}^{\text{MT}} = \sum_i c_i \mathbf{C}_i : \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m) \right]^{-1} : \left[ \sum_i c_i \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m) \right]^{-1} \right]^{-1}. \quad (1.119)$$

Dans cette expression, les sommations incluent formellement des termes relatifs à la matrice, pour lesquels les expressions entre crochets se limitent à l'identité  $\mathbf{I}$ .

Lorsque toutes les inclusions sont sphériques et que la matrice est « plus dure » ou « plus molle » que toutes les autres phases, on montre facilement que le résultat est la borne de Hashin et Shtrikman supérieure ou inférieure ; lorsque les inclusions sont ellipsoïdales et de même forme, on obtient dans les mêmes conditions les bornes de Willis [173] correspondant à une distribution ellipsoïdale des phases. Dans ces deux situations, la signification physique du modèle est claire et il apparaît que le résultat n'est pas spécifique à la morphologie de type matrice/inclusions que ses auteurs lui attribuent. On peut tout au plus espérer que la borne de Hashin et Shtrikman obtenue lorsque la matrice est utilisée comme milieu de référence soit une approximation satisfaisante du comportement effectif pour de telles morphologies. Cette hypothèse est souvent adoptée, mais aucun argument bien établi n'est avancé (*cf.* par exemple la discussion à ce sujet dans la référence [135]). Lorsque la « matrice » n'est pas la phase la plus dure ou la plus molle, le résultat n'est plus une borne, mais la même hypothèse conduit à l'adopter comme une bonne approximation du comportement effectif.

Il n'y a en revanche pas de théorie ni d'argument plus ou moins bien établis permettant de relier le résultat à une microstructure réelle lorsque les inclusions sont de formes différentes. De plus, dans ce cas, le tenseur  $\mathbf{C}^{\text{MT}}$  obtenu après l'étape d'homogénéisation ne présente plus les propriétés de symétrie requises pour un tenseur d'élasticité [12] et il faut procéder à une symétrisation artificielle. Malgré ces lacunes théoriques, ce modèle a été amplement utilisé, la première cause de son succès étant probablement sa simplicité de mise en œuvre : le tenseur des modules du MHE est une fonction explicite des propriétés des phases, des concentrations et des tenseurs  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m$ , dont des expressions analytiques sont connues pour plusieurs géométries d'inclusions et plusieurs classes de symétries de comportement [126]. Les expressions sont particulièrement simples dans le cas assez courant où la matrice est isotrope. La seconde origine de cette faveur est la possibilité d'introduire facilement des paramètres morphologiques tels des rapports de forme d'inclusions et des distributions d'orientations. L'intérêt du modèle pour décrire des composites à inclusions allongées ou aplaties, ou des matériaux endommagés avec des microfissures assimilées à des cavités ellipsoïdales très élancées ou très aplaties, est ainsi évident [91]. Toutefois, comme nous l'avons annoncé, le modèle ne rend pas vraiment compte de la morphologie matrice/inclusions et sa signification réelle n'est pas clairement établie dans la plupart des cas. En particulier, les hypothèses sous-jacentes sur la distribution spatiale des « inclusions » ne sont pas explicites. Il se peut ainsi que les résultats obtenus ne soient pas du tout représentatifs des effets morphologiques que l'on cherche à décrire.

**Modèle autocohérent classique.** Ce modèle a déjà été évoqué dans le cadre de la théorie du désordre parfait qui lui confère une justification théorique dans des cas particuliers, mais ses origines sont plus anciennes. Initialement conçu pour décrire le comportement élastique de polycristaux [73,

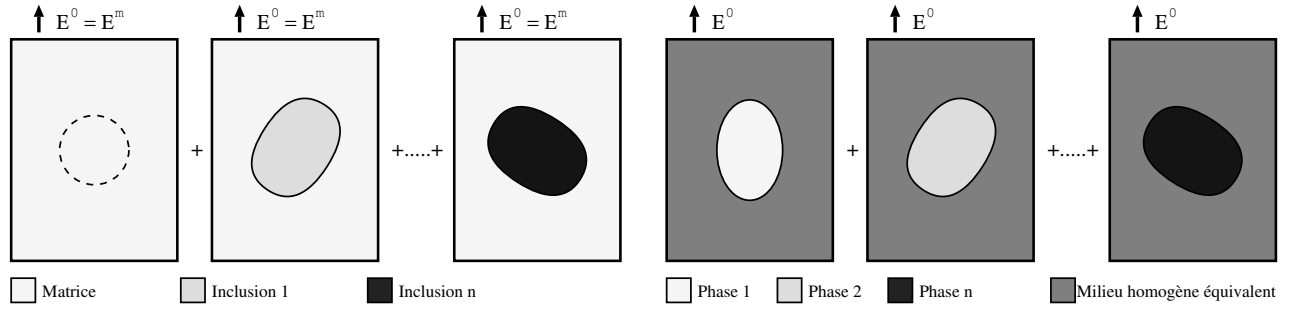


Figure 1.12 : Modèle de Mori et Tanaka

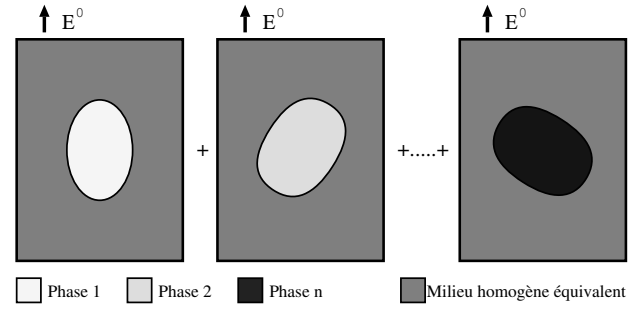


Figure 1.13 : Modèle autocohérent à inclusions non sphériques

96], il a aussi été utilisé pour modéliser des composites à inclusions sphériques [33] ou ellipsoïdales [81, 179, 173, 175]. Les formulations relatives à ces deux situations sont légèrement différentes.

Dans le cas du polycristal, l'idée générale (*cf.* figure 1.13) consiste à remplacer le problème de localisation relatif à une famille  $i$  de grains de même orientation, caractérisée par un tenseur des modules  $\mathbf{C}^i$ , et de même géométrie sensiblement ellipsoïdale, caractérisée par un ellipsoïde  $\mathcal{E}_i$ , par un problème d'inclusion dérivé de celui d'Eshelby : la déformation moyenne dans cette famille est supposée égale à la déformation homogène dans l'inclusion  $\mathcal{E}_i$  de modules  $\mathbf{C}^i$ , noyée dans un milieu infini ayant les propriétés élastiques du MHE et soumis à un chargement homogène à l'infini  $\underline{\underline{E}}^0$  :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^i = \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0. \quad (1.120)$$

La déformation à l'infini  $\underline{\underline{E}}^0$  est déterminée par la condition  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}$  et le processus d'homogénéisation fournit le tenseur des modules effectifs : on obtient une équation implicite déterminant  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  en fonction des propriétés des phases, des concentrations et des géométries d'inclusions :

$$\mathbf{C}^{\text{AC}} = \sum_i c_i \mathbf{C}^i : \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1} : \left[ \sum_i c_i \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1} \right]^{-1}. \quad (1.121)$$

Cette procédure s'applique également à des composites multiphasés, dans lesquels aucune phase ne joue le rôle de matrice. Les géométries d'inclusions à utiliser sont dans ce cas plus difficiles à déterminer. On peut intuitivement considérer qu'elles sont liées aux fonctions de corrélation des phases. En particulier, si les phases sont distribuées de manière isotrope, on a habituellement recours à des sphères ; si la distribution est ellipsoïdale, on peut retenir les ellipsoïdes caractérisant cette distribution.

Dans le cas de composites à inclusions, les géométries des phases inclusionnaires sont dictées par les formes des inclusions réelles dans le matériau. Il n'est en revanche pas facile d'associer une forme particulière à la matrice. On conserve alors la même procédure que précédemment pour les inclusions, mais en stipulant que la déformation  $\underline{\underline{E}}^0$  à l'infini est égale à la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$ . On écrit ainsi pour toutes les phases inclusionnaires :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^i = \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}. \quad (1.122)$$

La localisation dans la matrice s'en déduit par la relation  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}$ , mais sa connaissance n'est pas indispensable puisque l'on peut calculer le comportement effectif par :

$$\mathbf{C}^{\text{AC}} = \mathbf{C}^m + \sum_i c_i \left[ \mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m \right] : \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1}, \quad (1.123)$$

où la somme porte sur les seules phases inclusionnaires.

Dans le cas polycristallin avec des inclusions de même forme et de même orientation, l'équation caractérisant  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  se simplifie grâce au fait que  $\underline{\underline{E}}^0$  est alors égal à la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$ .



Cette propriété s'établit facilement. Soit en effet  $\underline{x}$  un système de coordonnées s'appliquant à tous les problèmes d'inclusions, tels que les dimensions des inclusions soient toutes les mêmes. Un tel système existe du fait de l'absence de dimension caractéristique dans ces problèmes. Notons  $\underline{\epsilon}_i(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}_i(\underline{x})$  les champs de déformation et de contrainte solutions du problème  $i$  et définissons  $\underline{\bar{\epsilon}}(\underline{x}) = \sum_i c_i \underline{\epsilon}_i(\underline{x})$  et  $\underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) = \sum_i c_i \underline{\sigma}_i(\underline{x})$ . Les champs  $\underline{\bar{\epsilon}}$  et  $\underline{\bar{\sigma}}$  sont clairement SA et CA avec la condition de déformation homogène à l'infini. Ils sont aussi homogènes et égaux aux champs macroscopiques dans l'inclusion :  $\langle \underline{\bar{\epsilon}} \rangle = \underline{\bar{\epsilon}}(\underline{x})$  et  $\langle \underline{\bar{\sigma}} \rangle = \underline{\bar{\sigma}}(\underline{x})$ . Par construction  $\underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbf{C}^{\text{AC}} : \underline{\bar{\epsilon}}(\underline{x})$  lorsque  $\underline{x}$  est en dehors des inclusions. Mais cette relation est aussi vraie lorsque  $\underline{x}$  est dans les inclusions, par définition de la condition d'autocohérence. Les champs  $\underline{\bar{\epsilon}}(\underline{x})$  et  $\underline{\bar{\sigma}}(\underline{x})$  sont donc solutions d'un problème d'élasticité sur un milieu homogène avec des conditions aux limites homogènes ; ils sont uniformes sur tout le milieu infini et égaux à leur valeur à l'infini. D'où :  $\langle \underline{\bar{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}^0$  et  $\langle \underline{\bar{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}^0 = \mathbf{C}^{\text{AC}} : \underline{\underline{E}}^0$ . On en tire :

$$\mathbf{I} = \sum_i c_i \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1} \quad (1.124)$$

et le tenseur  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  est aussi donné par :

$$\mathbf{C}^{\text{AC}} = \sum_i c_i \mathbf{C}^i : \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^{\text{AC}}) \right]^{-1}. \quad (1.125)$$

Il apparaît donc que dans cette situation, la formulation relative aux polycristaux et celle relative aux composites à inclusions sont parfaitement équivalentes et ceci suggère fortement que le modèle autocohérent, à l'instar du modèle de Mori et Tanaka, n'est en rien spécifique à la morphologie matrice/inclusions. Les rôles des différentes phases sont en particulier parfaitement symétriques. Lorsque les inclusions sont sphériques, on retrouve la définition annoncée au paragraphe **1.2.B.b** : le modèle donne le comportement d'un milieu « parfaitement désordonné », qui constitue une représentation satisfaisante d'un polycristal dont la géométrie moyenne des grains est sensiblement sphérique et dont les orientations des grains sont distribuées de façon isotrope et ne sont pas corrélées avec leur forme. Le cas d'inclusions ellipsoïdales, de même forme et de même orientation a été considéré par Willis [173]. On peut supposer que le résultat décrit exactement un matériau en situation de « désordre parfait anisotrope », dont l'existence est suggérée par Kröner [100], mais pour laquelle aucune théorie satisfaisante n'est disponible. Willis préfère considérer le résultat comme une bonne approximation du comportement de composites à inclusions ellipsoïdales, mais ne donne pas d'argument précis dans ce sens.

Les relations (1.121), (1.124) et (1.125) fournissent les trois définitions possibles de la condition d'autocohérence proposées par Willis [175] pour un matériau de type polycristallin. La première, introduite au début de ce paragraphe, définit le milieu autocohérent  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  comme étant le milieu infini utilisé dans les problèmes d'inclusions assurant que  $\langle \underline{\bar{\sigma}} \rangle = \mathbf{C}^{\text{AC}} : \langle \underline{\bar{\epsilon}} \rangle$ . La seconde le définit comme le milieu infini tel que  $\langle \underline{\bar{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}^0$  et la troisième comme le milieu infini tel que  $\langle \underline{\bar{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}^0$ . L'équivalence de ces trois définitions dans les situations où toutes les inclusions sont identiques résulte de l'identité des tenseurs  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}}$ , qui garantit aussi l'équivalence avec la définition (1.123). Il n'en est plus de même lorsque les inclusions sont de formes différentes : les quatre définitions fournissent alors quatre résultats distincts, dont la signification physique véritable est de surcroît encore beaucoup moins claire.

La nature implicite de l'équation caractérisant  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  rend ce modèle d'emploi plus difficile que le modèle de Mori et Tanaka. Le recours à des algorithmes itératifs, tels que la méthode du point fixe, est indispensable, sauf dans les cas les plus simples. D'autre part, si le comportement effectif est anisotrope, le tenseur  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}}$  est difficile à déterminer et n'admet d'expression analytique que dans des cas très particuliers. Des techniques numériques assez lourdes sont alors indispensables. Certains auteurs proposent une simplification consistant à remplacer les opérateurs  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{AC}}$  par des estimations construites à partir du tenseur d'élasticité isotrope approchant au mieux le tenseur autocohérent [16]. La symétrie du tenseur  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  résulte de ses définitions, mais ni l'existence d'un tenseur (symétrique) satisfaisant l'une des relations (1.121), (1.123), (1.124) ou (1.125), ni son unicité ne sont établies dans le cas général. La symétrie des relations de définition peut toutefois être établie dans le cas d'inclusions de même forme et de même orientation [12].

Pour clore ce paragraphe, précisons enfin que ces approches autocohérentes pour la description de matériaux composites et leur généralisation à des situations d'inclusions hétérogènes (décrites au paragraphe suivant) sont parfois désignées sous l'appellation de « théories de milieux effectifs », par opposition aux « théories de champs effectifs », qui font référence au modèle de Mori et Tanaka et à ses généralisations [93].

### 1.2.C Morphologies de type matrice/inclusions

Les modèles que nous abordons dans ce paragraphe se distinguent des précédents en ce qu'ils décrivent ou prétendent décrire des géométries microstructurales particulières et assez clairement identifiables : il s'agit de microstructures de type « matrice/inclusions » dans lesquelles une phase, la matrice, se distingue clairement des autres. Elle est entièrement connexe et renferme en son sein de petites composantes connexes isolées, constituées d'une des autres phases (éventuellement de plusieurs) et désignées par le terme générique d'« inclusions ».

#### 1.2.C.a Modèle aux faibles concentrations et modèle autocohérent différentiel

Le résultat d'Eshelby fournit la solution exacte du problème de localisation dans un composite à inclusions ellipsoïdales dans la limite des faibles concentrations : en effet, les inclusions étant très éloignées les unes des autres, le champ lointain auquel est soumis l'une d'entre elles n'est pas perturbé par les autres et est donc égal au champ macroscopique. Sa déformation est donc :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_i = \left[ \mathbf{I} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m) \right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (1.126)$$

et le tenseur des modules effectifs est donné par :

$$\mathbf{C}^{\text{FC}}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^i, c_i) = \mathbf{C}^m + c_i \left[ (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m)^{-1} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m \right]^{-1}, \quad (1.127)$$

où l'on a supposé pour simplifier qu'il n'y a qu'une famille d'inclusions de concentration  $c_i$ , la généralisation à plusieurs familles étant immédiate. Ce modèle aux faibles concentrations a été utilisé par plusieurs auteurs et résulte d'une idée initiale due à Einstein [52]. Tout modèle rendant compte d'une morphologie de type matrice/inclusions avec des inclusions ellipsoïdales doit satisfaire cette relation au premier ordre en  $c_i$  au voisinage de  $c_i = 0$ . C'est le cas en particulier des modèles de Mori et Tanaka et autocohérent décrits plus haut.

Le modèle autocohérent différentiel [113, 127] vise à décrire des composites avec des concentrations plus élevées, par une construction incrémentale utilisant la solution aux faibles concentrations et partant de la matrice pure : le composite de concentration  $c + \delta c$  est supposé avoir le comportement d'un composite dont la matrice a le comportement du composite de concentration  $c$  et dopé en inclusions de fraction volumique  $\frac{\delta c}{c + \delta c}$  assurant que la concentration globale soit bien  $c + \delta c$  :

$$\mathbf{C}^{\text{AD}}(c + \delta c) = \mathbf{C}^{\text{FC}} \left( \mathbf{C}^{\text{AD}}(c), \mathbf{C}^i, \frac{\delta c}{c + \delta c} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^{\text{AD}}(0) = \mathbf{C}^m. \quad (1.128)$$

L'intégration de ce système conduit à la valeur de  $\mathbf{C}^{\text{AD}}(c)$ . Le cas du composite à inclusions sphériques et à phase isotropes et celui du composite à inclusions ellipsoïdales alignées et à phases isotropes transverses par rapport à l'axe des inclusions est traité dans la référence [113]. Les résultats satisfont aux bornes de Hashin et Shtrikman correspondantes.

Le modèle rend compte d'une morphologie de type matrice/inclusions, avec des rôles des deux phases clairement différenciés. Mais la procédure utilisée repose sur la possibilité de définir un grand nombre d'échelles (en théorie une infinité) au sein du matériau : les inclusions introduites dans le composite de concentration  $c$  devraient être beaucoup plus grandes que celles déjà présentes, de façon à ce que le remplacement de la microstructure par son comportement équivalent soit légitime. Il semble assez difficile de concevoir un matériau réel avec une telle morphologie. Ce modèle est toutefois capable de tenir compte de paramètres microstructuraux relatifs aux inclusions, tels des rapports de forme ou

des orientations. Il peut être étendu au cas de plusieurs phases inclusionnaires [127], mais le résultat dépend alors du « chemin de remplissage » choisi pour passer d'une concentration nulle aux valeurs  $c_i$ . Le tenseur d'élasticité obtenu est symétrique [12], mais les hypothèses sous-jacentes sur la distribution spatiale des renforts ne sont pas claires.

### 1.2.C.b Modèles à inclusions composites

Les deux modèles décrits ici font appel à des « sphères composites », constituées (*cf.* figure 1.14) d'un noyau sphérique de phase inclusionnaire entouré d'une coquille sphérique concentrique de matrice, le rapport du rayon du noyau  $R_i$  à celui de la coquille  $R_m$  respectant la concentration en inclusions  $c$  du composite que l'on cherche à représenter :

$$\left(\frac{R_i}{R_m}\right)^3 = c. \quad (1.129)$$

L'idée d'une telle représentation est due à Kerner [94], qui ne l'a pas complètement exploitée.

**Assemblages et bornes de Hashin** La représentation d'un matériau composite à inclusions proposée par Hashin [67] consiste à décomposer un VER en des sous-domaines formés d'une inclusion entourée d'une gangue de matrice et à les assimiler à autant de sphères composites, de dimensions variables, mais de même concentration. Cette approximation de la microstructure est une représentation exacte pour une certaine classe de matériaux, connue sous l'appellation « assemblages des sphères composites de Hashin » et définie par la juxtaposition à caractère fractal de sphères composites pavant tout l'espace (*cf.* figure 1.15).

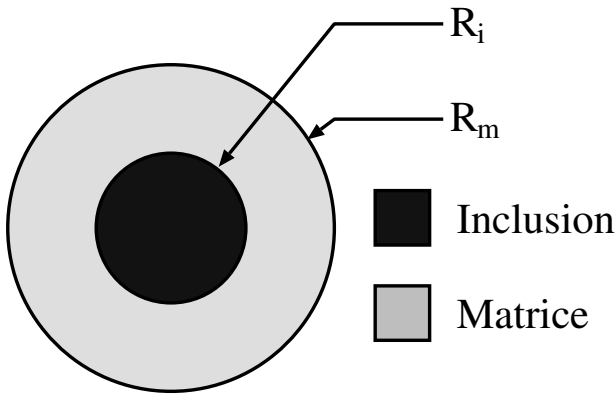


Figure 1.14 : Sphère composite

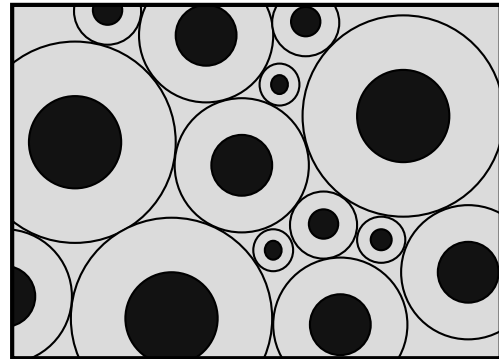


Figure 1.15 : Assemblage des sphères composites de Hashin

Une telle microstructure autorise la construction de champs de déformations CA et de contrainte SA non uniformes, induisant au travers des théorèmes énergétiques classiques un encadrement des modules effectifs plus resserré que les bornes de Voigt et Reuss classiques. Il suffit pour cela d'utiliser dans chaque sphère composite les champs solutions correspondant à des conditions aux limites aux bords de l'inclusion homogènes en déformation ou en contrainte et d'intensité égale au chargement macroscopique. Lorsque le comportement des phases est isotrope, ces champs admettent une expression analytique relativement simple pour un chargement sphérique, mais aussi pour un cisaillement pur. Hashin en déduit une borne supérieure  $C^{H+}$  et une borne inférieure  $C^{H-}$  pour les modules de compressibilité et de cisaillement homogènes équivalents [67], connues sous l'appellation de « bornes de Hashin ». Il s'avère que les bornes relatives au module de compressibilité sont confondues et donnent ainsi la valeur exacte de ce module pour un tel matériau. Précisons que le comportement macroscopique d'un assemblage de Hashin n'est pas nécessairement isotrope ; les bornes concernant le cisaillement

s'appliquent dans tous les cas et encadrent l'énergie élastique sous un cisaillement macroscopique quelconque. Si elles sont toujours plus resserrées que les bornes de Voigt et Reuss, il existe en revanche des situations où l'une d'entre-elles viole une des bornes de Hashin et Shtrikman classiques ; ceci n'est pas contradictoire car aucune hypothèse d'isotropie de distribution des phases n'est invoquée.

Ces bornes sont rigoureuses pour un assemblage de Hashin et devraient en première approximation aussi s'appliquer à tout composite présentant des inclusions quasi-sphériques, distribuées de manière sensiblement homogène. La seule information relative au caractère inclusionnaire d'une phase permet ainsi de resserrer considérablement le fuseau des valeurs possibles des modules effectifs, sans que des informations statistiques d'ordre élevé soient nécessaires. Mais cette approche n'autorise que peu de variabilité sur les paramètres morphologiques invoqués. Une généralisation à plusieurs phases inclusionnaires est certes proposée par Hashin, mais les effets liés à des formes d'inclusions non-sphériques ou l'influence de la distribution spatiale ne peuvent, entre autres, être étudiés.

Citons toutefois la mise en œuvre d'une démarche similaire pour des composites à fibres alignées, de phases constitutives isotropes, dont le comportement macroscopique est isotrope transverse. Les bornes obtenues, rigoureuses pour un « assemblage de cylindres composites », sont connues sous l'appellation de « bornes de Hashin et Rosen » [68]. Quatre des cinq paramètres caractérisant le comportement élastique macroscopique de tels matériaux sont confondus, seul le module de cisaillement transverse n'étant pas complètement déterminé. Ainsi, la connaissance de la nature fibreuse d'une des phases permet là encore de réduire considérablement le fuseau des valeurs de modules possibles. Mais, comme précédemment, l'approche utilisée n'introduit pas de paramètres microstructuraux variables autres que la fraction volumique des fibres.

**Modèles des trois phases** Le « modèle des trois phases » de Christensen et Lo [43], ou « modèle autocohérent généralisé », fournit une estimation des modules d'élasticité de composites isotropes à inclusions quasi-sphériques. Il utilise la solution analytique du problème d'une sphère composite à phases isotropes, noyée dans un milieu infini homogène et isotrope soumis à un chargement homogène à l'infini. À l'instar du modèle autocohérent classique, le milieu infini a les propriétés du MHE (*cf.* figure 1.16), mais la démarche entreprise à l'origine par les auteurs du modèle diffère quelque peu de la formulation décrite au paragraphe 1.1.E.c. Le critère retenu pour caractériser le comportement effectif utilise un principe « d'équivalence énergétique », qui stipule que l'énergie  $U$  contenue dans la structure complète, c'est-à-dire la sphère composite et le milieu infini, soumise à un chargement donné, est égale à l'énergie  $U_0$  contenue dans le milieu infini sans hétérogénéité soumis au même chargement (*cf.* figure 1.17). Ces énergies sont infinies, mais leur différence est finie et peut être calculée au moyen d'une relation due à Eshelby :

$$U = U_0 \pm \frac{1}{2} \int_S (\underline{T}^0 \cdot \underline{u} - \underline{T} \cdot \underline{u}^0) ds, \quad (1.130)$$

où  $\underline{T}$  et  $\underline{u}$  sont respectivement le vecteur contrainte et le vecteur déplacement dans le problème avec inclusion,  $\underline{T}^0$  et  $\underline{u}^0$  sont les mêmes quantités dans le problème sans inclusion et  $S$  est l'interface entre l'inclusion composite et le milieu infini ; le signe devant l'intégrale est négatif lorsque des conditions de déplacement sont imposées à l'infini, et positif lorsque ce sont des conditions de contraintes. L'annulation du terme intégral détermine les modules effectifs  $\mathcal{C}^{3Ph}$  du composite. Le module de compressibilité est celui trouvé par Hashin et le module de cisaillement est la solution d'une équation du second degré. Les auteurs constatent numériquement que le résultat satisfait aux bornes de Hashin et Shtrikman classiques et aux bornes de Hashin. Ils suggèrent de le considérer comme une estimation pertinente du module effectif d'un assemblage de sphères composites de Hashin. Ils traitent par ailleurs de manière similaire le problème d'un cylindre composite en milieu infini et proposent une estimation du module de cisaillement transverse effectif d'un assemblage de cylindres composites, complétant les résultats de Hashin et Rosen.

La condition d'équivalence énergétique a été reconsidérée par Hervé et Zaoui [75] et il s'avère qu'elle est équivalente à la condition d'égalité de la déformation moyenne sur la sphère composite  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{sc}$

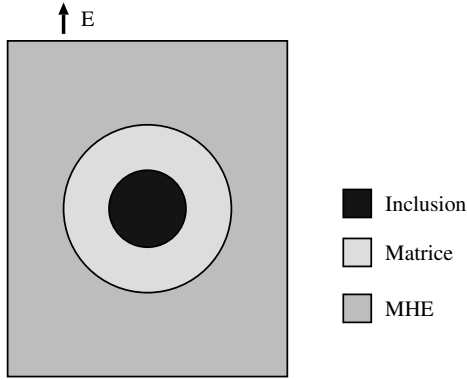


Figure 1.16 : Modèle des trois phases

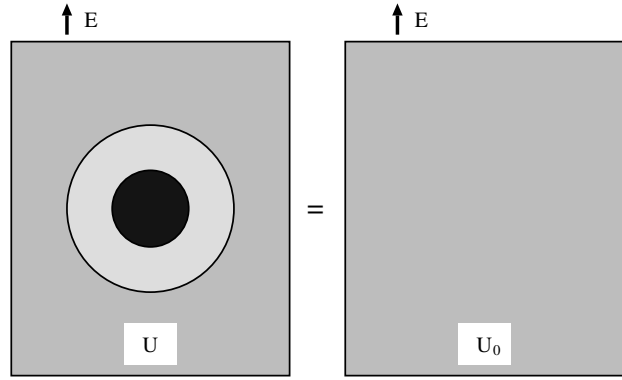


Figure 1.17 : Équivalence énergétique

avec<sup>4</sup> la déformation à l'infini  $\underline{E}^0$ . Leur démonstration établit aussi l'équivalence avec la condition  $\langle \underline{\sigma} \rangle_{sc} = \mathbf{C}^{3Ph} : \langle \underline{\epsilon} \rangle_{sc}$ ; l'équivalence avec la condition  $\underline{\Sigma}^0 = \langle \underline{\sigma} \rangle_{sc}$  s'en déduit facilement. Le problème de sphère composite considéré par Christensen et Lo apparaît ainsi comme un problème de localisation : les moyennes sur le noyau et la coquille des champs de contrainte et de déformation dans la sphère composite peuvent être considérées comme les moyennes sur les phases respectives des grandeurs locales correspondantes dans un VER du composite. Ces champs ne sont pas homogènes dans la sphère composite et l'on peut être tenté d'interpréter leurs valeurs locales comme des moyennes, en un sens qui reste à préciser, de grandeurs locales dans le VER.

### 1.2.C.c Motifs morphologiques représentatifs

La démarche proposée par Stolz et Zaoui [152] généralise celle de Hashin : l'idée consiste à décomposer un VER en des sous-domaines d'extension finie, pavant entièrement l'espace, et à les regrouper en familles de domaines identiques, caractéristiques de la microstructure, appelées « motifs morphologiques représentatifs ». L'assemblage des sphères composites de Hashin est un cas particulier de microstructure pouvant être avantageusement décrit de la sorte, les motifs correspondant aux sphères composites de même taille. Dans le cas général, ils ne sont pas nécessairement sphériques et leur contenu est quelconque. Une application judicieuse du principe variationnel de Hashin et Shtrikman, utilisant des champs de polarisation *non uniformes* permet de construire formellement des encadrements rigoureux du comportement effectif d'un composite ainsi représenté. Au moyen de l'hypothèse de *distribution isotrope des centres* des domaines d'un motif par rapport à ceux des autres motifs, les auteurs de la théorie établissent la similitude formelle entre le calcul des champs de polarisation optimaux et celui des champs de déformation et de contrainte dans des inclusions sphériques hétérogènes noyées dans un milieu infini ayant les propriétés du milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  et soumis à un chargement homogène à l'infini.

Le calcul peut être mené à terme si les motifs sont des sphères composites et fournit un encadrement [74] qui améliore celui de Hashin, mais spécifique à des assemblages dans lesquels les familles de sphères composites de même diamètre sont distribuées de manière isotrope les unes par rapport aux autres. La borne supérieure  $\mathbf{C}^{HSZ+}$  et la borne inférieure  $\mathbf{C}^{HSZ-}$ , sont telles que la contrainte moyenne dans l'inclusion composite est égale à la déformation moyenne multipliée par la borne, pour tout chargement à l'infini et pour un milieu de référence respectivement égal à  $\mathbf{C}^{(0)}$  et  $\mathbf{C}_{(0)}$  (notations du paragraphe 1.2.B.b). Elles s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{C}^{HSZ+} = \mathcal{F}_{sc}(\mathbf{C}^{(0)}) \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^{HSZ-} = \mathcal{F}_{sc}(\mathbf{C}_{(0)}), \quad (1.131)$$

où  $\mathcal{F}_{sc}$  est associée au problème d'inclusion hétérogène et dépend du comportement des phases constitutives et de la concentration de la sphère composite. Si l'on opte pour un milieu de référence très

<sup>4</sup>L'indice *sc* fait référence à la sphère composite.

dur ou très mou, les conditions aux limites sont transmises de l'infini aux bords de la sphère composite et l'on obtient les bornes de Hashin :

$$\mathbf{C}^{\text{H}^+} = \mathcal{F}_{sc}(+\infty) \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^{\text{H}^-} = \mathcal{F}_{sc}(0). \quad (1.132)$$

Enfin, le modèle des trois phases est caractérisé par :

$$\mathbf{C}^{\text{3Ph}} = \mathcal{F}_{sc}(\mathbf{C}^{\text{3Ph}}). \quad (1.133)$$

La similitude formelle avec les bornes de Voigt et Reuss, les bornes de Hashin et Shtrikman et le modèle autocohérent classiques est flagrante et illustrée par le parallélisme entre les figures 1.18, 1.19 et 1.16 et les figures 1.5 à 1.10. Elle suggère de construire par récurrence des suites de tenseurs de modules par la relation

$$\mathbf{C}_{sc}^{(n+2)} = \mathcal{F}_{sc}(\mathbf{C}_{sc}^{(n)}) \quad (1.134)$$

et en choisissant les modules  $\mathbf{C}^{(0)}$  et  $\mathbf{C}_{(0)}$  comme termes d'ordre zéro et les bornes de Hashin comme termes d'ordre un, selon un processus inspiré de celui de Kröner. Le modèle des trois phases apparaît ainsi comme le traitement autocohérent d'un assemblage de Hashin, correspondant à un tel milieu dont l'agencement des centres des motifs serait « parfaitement désordonné ». Mais aucune définition précise d'une notion de désordre associé à une distribution de motifs n'est proposée et sa signification physique reste floue.

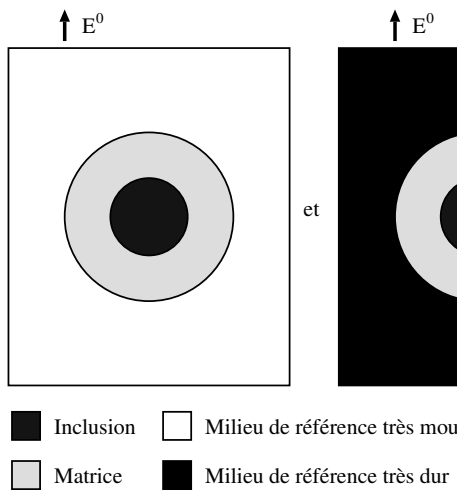


Figure 1.18 : Calcul des bornes de Hashin

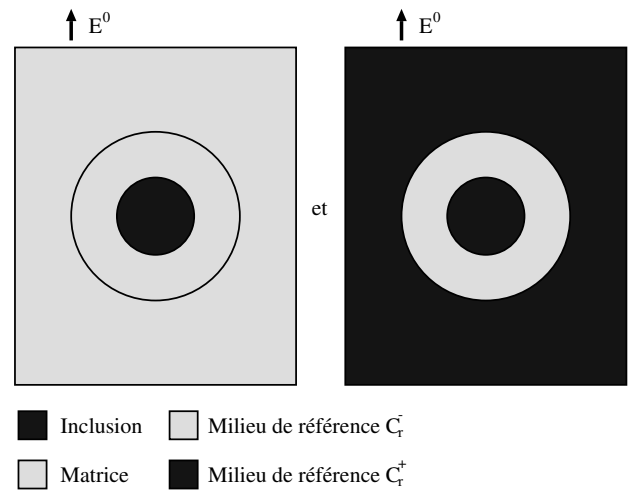


Figure 1.19 : Calcul des bornes de Hervé, Stolz et Zaoui

La démarche de Stolz et Zaoui établit en revanche clairement la signification physique des champs locaux calculés dans la sphère composite pour déterminer les bornes  $\mathbf{C}^{\text{HSZ}^+}$  et  $\mathbf{C}^{\text{HSZ}^-}$ . Il faut pour cela définir la notion de points homologues par rapport aux motifs. Soit  $\underline{C}_\lambda(\underline{\tilde{x}})$  la distribution des tenseurs des modules dans un motif  $\lambda$ , dans un repère dont l'origine est le centre du motif, et  $\underline{X}_\lambda^i$  les positions dans le VER des centres du  $i^{\text{ième}}$  domaine associé à ce motif. Les points de la forme  $\underline{X}_\lambda^i + \underline{\tilde{x}}$  sont dits homologues du point  $\underline{\tilde{x}}$  par rapport au motif  $\lambda$ . La valeur de la déformation au point  $\underline{\tilde{x}}$  de la sphère composite est la moyenne, prise pour tous les points  $\underline{x}$  du VER homologues de  $\underline{\tilde{x}}$ , des valeurs de la déformation d'essai dans le VER associée à la polarisation optimale dans la formulation de Hashin et Shtrikman. Il en est de même de la contrainte. Ce résultat exact est naturellement complété par l'hypothèse que le champ local calculé dans la sphère composite pour déterminer l'estimation de Christensen et Lo est égal à « la moyenne par points homologues » du champ réel local dans un assemblage de sphères composites parfaitement désordonné. La distribution des déformations ou des contraintes dans l'inclusion composite fournit ainsi une première estimation des hétérogénéités de déformations ou de contraintes réelles au sein d'une phase dans le matériau réel.

Ces résultats relatifs à la sphère composite ont été généralisés à des motifs sphériques multicouches [76, 93] grâce à la solution semi-analytique du problème de l'inclusion sphérique multicouche

à phases isotropes en milieu infini. Un « modèle autocohérent à  $n + 1$  phases » a ainsi été proposé et permet, par exemple, de décrire des matériaux présentant des gradients de propriétés élastiques le long du rayon de motifs sphériques (*cf.* figure 1.20). Nous décrivons dans ce mémoire sa généralisation à plusieurs motifs avec  $n$  couches concentriques <sup>5</sup>. Un modèle à fibres multicouche, avec un comportement local isotrope transverse par rapport à l'axe des fibres, a aussi été développé (*cf.* figure 1.21) et des encadrements rigoureux généralisant celui de Hashin et Rosen établis [77].

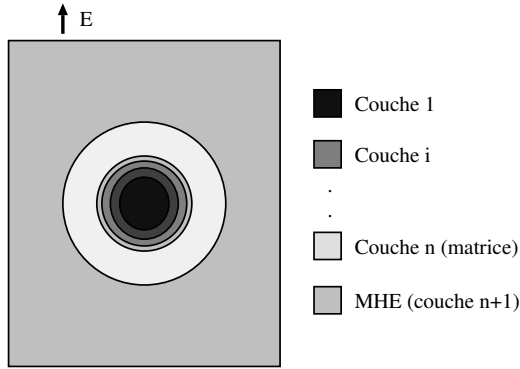


Figure 1.20 : Modèle autocohérent utilisant une sphère composite multicouche, ou modèle à  $n + 1$  phases

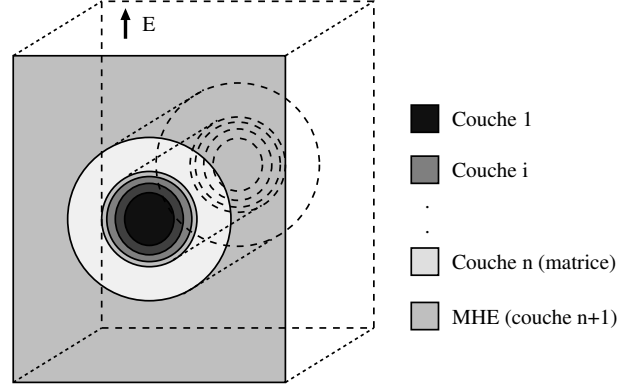


Figure 1.21 : Modèle autocohérent utilisant une fibre composite multicouche

La description des matériaux hétérogènes par motifs morphologiques représentatifs n'est pas spécifique à la morphologie matrice/inclusions, mais elle est particulièrement bien adaptée à une telle microstructure et autorise beaucoup plus de variabilité qu'un simple assemblage de Hashin. La généralisation et la mise en œuvre pratique pour des motifs sans symétrie sphérique ou cylindrique est présentée en seconde partie de ce mémoire.

#### 1.2.C.d Prise en compte de la répartition spatiale des renforts

Dans les approches spécifiques aux matériaux composites à inclusions décrites jusqu'ici, la seule prise en compte d'une information sur la distribution spatiale des renforts (ou, plus précisément, des motifs) concerne l'hypothèse d'isotropie de distribution des centres. Elle s'apparente à l'hypothèse de distribution isotrope des phases dans le calcul des bornes classiques de Hashin et Shtrikman, mais ne permet pas de décrire des composites quelconques ne satisfaisant pas *a priori* cette condition. D'autres modèles tentent de prendre en compte les positions relatives des inclusions dans un VER.

La méthode des amas (ou « cluster ») [53] repose sur l'équation LSD (1.85) dans laquelle la matrice a été choisie comme milieu de référence :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}}^0 - \sum_i \int_{V_i} \mathbf{\Gamma}^m(\underline{x} - \underline{x}') : [\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m] : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}') d\underline{x}' \forall \underline{x} \in \text{VER}, \quad (1.135)$$

où  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  est une déformation homogène, dépendant de la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  mais distincte de celle-ci,  $\mathbf{C}^m$  est le tenseur des modules élastiques de la matrice et  $\mathbf{C}^i$  celui de l'inclusion  $i$ , supposée homogène, de volume  $V_i$  et centrée en  $\underline{x}_i$  ; la somme infinie porte sur toutes les inclusions dans le VER d'extension infinie. L'hypothèse principale de l'approche revient à supposer la déformation homogène

<sup>5</sup>Notons que la définition d'autocohérence utilisés par Kanaun [93] diffère *a priori* de celle de [76] qui découle celle de Christensen et Lo [43]. Kanaun ne s'intéresse qu'à la déformation moyenne dans les  $n - 1$  couches internes de l'inclusion multicouche en imposant *a priori* la déformation macroscopique à l'infini et en déduit le comportement effectif par les relations (1.69). Il constate numériquement que dans le cas d'une inclusion composite classique son modèle donne le résultat de Christensen et Lo. Nous montrerons que l'équivalence entre les deux approches peut être établie rigoureusement. Kanaun constate aussi que le critère d'autocohérence de Christensen et Lo est plus stable dans une démarche numérique itérative. Nous avons fait la même constatation pour le modèle avec plusieurs motifs à couches concentriques.

dans chaque inclusion et à estimer sa valeur par sa moyenne  $\underline{\underline{\epsilon}}^i$ . Le problème de localisation se ramène ainsi à un système d'équations infini :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^i = \underline{\underline{\epsilon}}^0 - \sum_j \mathcal{P}_{V_i V_j}^m : [\mathbf{C}^j - \mathbf{C}^m] : \underline{\underline{\epsilon}}^j \quad (1.136)$$

où les tenseurs d'influence sont définis par :

$$\mathcal{P}_{V_i V_j}^m = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} dx \int_{V_j} dx' \mathbf{\Gamma}^m(\underline{x} - \underline{x}') \quad (1.137)$$

et peuvent être calculés par intégration classique ou par transformation de Fourier [14]. Ils rendent compte des positions relatives des inclusions et sont calculés par une méthode numérique adéquate. Une seconde hypothèse de périodicité à grande distance permet de limiter le nombre d'inconnues  $\underline{\underline{\epsilon}}^i$  au nombre  $N$  d'inclusions dans une cellule élémentaire. Une dernière simplification consiste à limiter la somme infinie aux inclusions  $j$  voisines, incluses dans une sphère de rayon  $R$  suffisamment grand centrée sur l'inclusion  $i$ , la convergence des sommes partielles lorsque ce rayon devient grand résultant des propriétés de l'opérateur  $\mathbf{\Gamma}^m$ . On peut ainsi calculer les déformations dans les  $N$  inclusions en fonction de  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$ , que l'on relie au chargement macroscopique par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}^0 &= \underline{\underline{E}} + \mathbf{E}^m : \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^m] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \\ &= \underline{\underline{E}} + \mathbf{E}^m : \sum_{j=1}^N c_j [\mathbf{C}^j - \mathbf{C}^m] : \underline{\underline{\epsilon}}^j, \end{aligned} \quad (1.138)$$

où  $\mathbf{E}^m$  est la partie locale de  $\mathbf{\Gamma}^m$  et  $c_j$  la concentration en inclusions  $j$ . Cette dernière relation permet de fermer le problème de localisation, mais induit implicitement une hypothèse complémentaire sur la distribution des centres. Nous y reviendrons. Lorsqu'on ne prend en compte que le premier terme des sommes partielles, c'est-à-dire celui relatif à l'inclusion  $i$  elle-même, le système n'est plus couplé et le résultat obtenu s'apparente à celui de Mori et Tanaka pour des inclusions sphériques, ou encore à l'une des bornes de Hashin et Shtrikman si la matrice est la phase la plus dure ou la plus molle. La convergence en fonction de  $R$  semble relativement rapide dans les cas traités par les auteurs du modèle et il est ainsi possible de prendre en compte des effets de voisinage. L'hypothèse de déformation homogène dans les renforts ne semble en revanche justifiée que pour des inclusions ellipsoïdales et pour des concentrations pas trop élevées, par analogie avec le problème d'Eshelby, et ne se généralise pas à des inclusions inhomogènes de forme quelconque.

Les théories de champs effectifs [92, 93, 38, 37] reposent aussi sur l'équation LSD mais diffèrent de l'approche précédente en ce qu'elles ne supposent plus la déformation homogène dans une inclusion, mais limitent cette hypothèse au « champ effectif » induit par le chargement et les autres inclusions sur une inclusion particulière. En isolant un terme  $i$  de la somme, l'équation (1.135) s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_i(\underline{x}) - \int_{V_i} \mathbf{\Gamma}^m(\underline{x} - \underline{x}') : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}') d\underline{x}' \forall \underline{x} \in \text{VER} \quad (1.139)$$

et apparaît comme l'équation d'une inclusion unique en milieu infini de modules  $\mathbf{C}^m$  et soumis au champ effectif  $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_i$ , a priori inhomogène. La solution  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$  est connue lorsque ce dernier est une fonction polynomiale des coordonnées d'espace [92], mais la complexité de son expression fait que les auteurs préfèrent approcher  $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_i$  par un champ uniforme d'intensité donnée par sa moyenne sur l'inclusion  $i$ . Si celle-ci est homogène et ellipsoïdale, la solution d'Eshelby peut être invoquée, mais plus généralement, la solution de tout problème d'inclusion en milieu infini peut être utilisée, comme par exemple celle de l'inclusion sphérique multicouche. La déformation moyenne et la contrainte moyenne sur l'inclusion  $i$  sont alors estimées par des relations de la forme :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_i = \mathbf{U}_i^m : \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_i \quad \text{et} \quad \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_i = \mathbf{V}_i^m : \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_i \quad (1.140)$$

avec

$$\mathbf{U}_i^m = \langle \mathbf{\Lambda}_i^m \rangle_i \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_i^m = \langle \mathbf{C}^i : \mathbf{\Lambda}_i^m \rangle_i, \quad (1.141)$$



où  $\mathbf{A}_i^m(\underline{x})$  caractérise la localisation dans le problème d'inclusion en milieu infini retenu. On utilise aussi les tenseurs  $\mathbf{T}_i^m$ , caractérisant la polarisation moyenne effective dans l'inclusion pour un tel problème, la matrice étant utilisée comme milieu de référence :

$$\mathbf{T}_i^m = \mathbf{V}_i^m - \mathbf{C}^m : \mathbf{U}_i^m. \quad (1.142)$$

Le problème est ensuite d'estimer les champs effectifs  $\underline{\underline{\epsilon}}$  en fonction des champs macroscopiques pour chaque inclusion en intégrant au besoin des informations sur son voisinage.

L'hypothèse la plus simple consiste à supposer ce champ uniforme et conduit à des résultats généralisant (et corrigeant au besoin) le modèle de Mori et Tanaka décrit plus haut. Les effets de voisinages entre inclusions adjacentes sont moyennés et n'apparaissent qu'au travers du champ effectif uniforme, qu'il convient de déterminer rigoureusement en fonction du chargement macroscopique et de la distribution spatiale des inclusions (et sans lui attribuer *a priori* la valeur de la déformation moyenne dans la matrice, comme dans la démarche quelque peu hâtive de Mori et Tanaka). Kanaun [93] aboutit ainsi à la relation suivante pour les modules effectifs d'un composite à renforts sphériques multicouches, avec l'hypothèse explicite d'isotropie de la distribution de leurs centres :

$$\mathbf{C}_1^{\text{Ka}} = \mathbf{C}^m + c\mathbf{T}^m : [\mathbf{I} - c\mathbf{E}^m : \mathbf{T}^m]^{-1}. \quad (1.143)$$

Les indices  $i$  ont disparu dans cette expression car on ne considère qu'un seul problème d'inclusion. Ce résultat s'identifie à une des bornes de Hashin et Shtrikman dans l'approche rigoureuse de Stolz et Zaoui pour des motifs multicouches si la matrice est la phase la plus dure ou la plus molle.

Dans une démarche plus riche, on peut considérer  $\underline{\underline{\epsilon}}$  comme une variable aléatoire, dont on cherche l'espérance en fonction du voisinage de l'inclusion. Le comportement effectif est obtenu en sommant sur toutes les configurations potentielles de ce dernier, et en observant la même rigueur quant à la détermination de  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$ . Dans la même référence, Kanaun propose ainsi l'estimation suivante, intégrant des interactions de paires d'inclusions, toujours avec l'hypothèse de distribution isotrope des centres :

$$\mathbf{C}_2^{\text{Ka}} = \mathbf{C}^m + c\mathbf{T}^m : [\mathbf{I} - c\mathbf{E}^m : \mathbf{T}^m + c\mathbf{K}^m]^{-1} \quad (1.144)$$

avec

$$\mathbf{K}^m = \int \mathbf{\Gamma}^m(\underline{x})\mathbf{T}^m \left[ (\mathbf{I} + c\mathbf{\Gamma}^m(\underline{x})\mathbf{T}^m)^{-1} - \mathbf{I} \right] \psi(\|\underline{x}\|)d\mathbf{x}, \quad (1.145)$$

où  $\psi(r)$  donne la probabilité de trouver deux inclusions distantes de  $r$ . Le résultat est explicité pour les expressions suivantes (également proposées dans les références [37] et [174]) de cette fonction de corrélation :

$$\psi(r) = H\left(\frac{r}{a} - 2\right) \quad (1.146)$$

et

$$\psi(r) = H\left(\frac{r}{a} - 2\right) \cdot \left[ 1 + \mu \cos\left(\pi\frac{r}{a}\right)e^{2\left(2-\frac{r}{a}\right)} \right], \quad (1.147)$$

où  $a$  est le rayon supposé uniforme des inclusions,  $H$  la fonction de Heaviside et  $\mu$  une constante telle que l'intégrale de la seconde expression soit compatible avec la concentration globale. La première fonction exprime simplement l'impénétrabilité des inclusions, alors que la seconde, issue de la théorie cinétique des gaz, accorde une probabilité élevée aux paires d'inclusions en contact et une probabilité plus faible à celles séparées d'un rayon. Plus généralement,  $\psi(r)$  peut être mesurée sur des micrographies réelles ou calculée à partir de modèles morphologiques adéquats.

La démarche peut être étendue aux interactions d'un nombre  $n \geq 2$  d'inclusions voisines [38, 37]. Les tenseurs  $\underline{\underline{\epsilon}}_j, j \in [1, n]$  satisfont au système d'équations :

$$|V_i|\underline{\underline{\epsilon}}_i = \int_{V_i} \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{x})d\mathbf{x} - \sum_{j \in [1, n], j \neq i} \int_{V_i} \int_{V_j} \mathbf{\Gamma}^m(\underline{x} - \underline{x}') : \mathbf{T}_j^m : \underline{\underline{\epsilon}}_j d\mathbf{x}d\mathbf{x}', \quad i \in [1, n], \quad (1.148)$$

où l'on a remplacé les champs réels de déformation et de contrainte dans l'inclusion  $j$  par une valeur homogène estimée par la solution du problème d'inclusion et où le champ  $\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{x})$  intègre tous les termes

non comptabilisés dans la somme partielle. La position relative des voisins est prise en compte au travers des tenseurs d'influence  $\mathcal{P}_{V_i V_j}^m$  définis plus haut, éventuellement estimés par  $|V_j| \mathbf{\Gamma}^m(\underline{x}_i - \underline{x}_j)$ . L'inversion du système donne les tenseurs  $\underline{\underline{\mathcal{E}}}(\underline{x}_i)$  en fonction des moyennes  $\langle \hat{\underline{\underline{\mathcal{E}}}}(\underline{x}) \rangle_{V_i}$ . Des hypothèses complémentaires, précisant les relations entre ces dernières et le champ macroscopique permettent de résoudre le problème de localisation. La complexité des relations obtenues rend malheureusement la mise en œuvre de cette méthode relativement difficile pour  $n > 2$  (les références citées sont aussi quelque peu elliptiques sur certains détails de la méthode...).

Mentionnons aussi l'existence de modèles autocohérents à «  $n$  sites », qui généralisent de la même manière les approches « à un site » présentées plus haut, en tentant de prendre en compte les interactions entre domaines voisins. L'idée consiste à substituer aux problèmes d'inclusions isolées noyées dans un milieu infini ayant les caractéristiques du MHE, des problèmes à  $n$  inclusions ou sites, dont la configuration est supposée rendre compte de relations de voisinage entre grains, particules ou domaines de phases. Les variantes polycristallines et inclusionnaires du modèle autocohérent et leurs diverses définitions peuvent être modifiées de la sorte. La solution d'Eshelby n'étant plus suffisante pour résoudre ces problèmes, il faut revenir à l'équation LSD (1.85). Afin de préserver une certaine simplicité au problème, on convient là aussi de remplacer les champs hétérogènes dans les inclusions par leurs moyennes. La résolution du problème de localisation fait intervenir des tenseurs d'interaction, de la forme (1.137), mais construits à partir du tenseur de Green modifié associé au milieu effectif. Des techniques numériques sont nécessaires si bien que la forme ellipsoïdale ne présente plus d'intérêt particulier pour le calcul : il est possible de traiter des géométries quelconques, à condition toutefois que la discrétisation du voisinage soit suffisamment fine pour que l'hypothèse d'homogénéité de la déformation soit pertinente. Le caractère implicite de l'équation caractérisant les modules effectifs impose, comme pour les modèles à un site, le recours à des algorithmes itératifs. Nous ne décrivons pas plus longuement ces approches et renvoyons aux références [16, 57, 39] pour plus de détails.

La pertinence de l'hypothèse d'homogénéité du champ de déformations dans les inclusions ou du champ effectif qu'elles subissent reste une incertitude majeure de ces modèles, qui fait que la signification véritable des résultats et leur domaine de validité sont flous. Une démarche plus précise, basée sur une description similaire d'une microstructure avec des inclusions homogènes ellipsoïdales, mais reposant sur une formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman rigoureuse, permet de clarifier cet aspect [174, 135]. Le milieu de référence retenu est encore la matrice, mais l'hypothèse d'homogénéité des champs de déformation réels est remplacée par un choix de champs de polarisation homogène dans les inclusions (et nul dans la matrice). Si la matrice est la phase la plus dure ou la plus molle, le résultat est une borne pour le comportement effectif. Les polarisations optimales, rendant stationnaire la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman et optimisant ainsi la borne, sont bien celles résultant d'un problème d'inclusion isolée noyée dans la matrice et soumis à un champ homogène à l'infini. Elles dépendent ainsi des tenseurs  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m$ , où  $\mathcal{E}_i$  caractérise la géométrie de l'inclusion  $i$ . La relation entre le champ à l'infini et le chargement macroscopique fait intervenir la distribution spatiale des centres des inclusions. Le calcul analytique peut être mené à terme en cas de distribution ellipsoïdale, c'est-à-dire lorsque la probabilité conditionnelle de trouver une inclusion de type  $i$  au point  $\underline{x}$ , sachant qu'une inclusion de type  $j$  se trouve au point  $\underline{y}$  est de la forme :

$$P^{ij}(\underline{x}, \underline{y}) = p^{ij} \left( \left\| \underline{\underline{A}}^{ij} \cdot (\underline{y} - \underline{x}) \right\| \right), \quad (1.149)$$

où  $p^{ij}$  est une fonction scalaire et  $\underline{\underline{A}}^{ij}$  une matrice inversible d'ordre deux, définissant un ellipsoïde  $\mathcal{E}_d^{ij}$  par :

$$\mathcal{E}_d^{ij} = \left\{ \underline{x} / \left\| \underline{\underline{A}}^{ij} \cdot \underline{x} \right\| \leq 1 \right\} \quad (1.150)$$

et un tenseur  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_d^{ij}}^m$  associé. La borne obtenue fait intervenir tous ces tenseurs  $\mathcal{P}$  et admet une expression relativement simple lorsque les  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i^{ij}}$  sont tous identiques et égaux à  $\mathcal{P}_d$  :

$$\mathbf{C}^{\text{PCW}} = \mathbf{C}^m + \left[ \mathbf{I} - \sum_i c_i \mathbf{T}_i^m \mathcal{P}_d \right]^{-1} \left[ \sum_i c_i \mathbf{T}_i^m \right], \quad (1.151)$$

où

$$\mathbf{T}_i^m = \left[ (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^m)^{-1} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^m \right]^{-1} \quad (1.152)$$

caractérise la polarisation moyenne dans le problème d'inclusion homogène  $i$ . La somme porte sur toutes les familles d'inclusions recensées. Le tenseur obtenu admet l'expression équivalente :

$$\mathbf{C}^{\text{PCW}} = \mathbf{C}^m + \left[ \left( \sum_i c_i \mathbf{T}_i^m \right)^{-1} - \mathcal{P}_d \right]^{-1} \quad (1.153)$$

qui met en évidence sa symétrie (les tenseurs  $\mathcal{P}$  sont symétriques).

On peut vérifier l'identité (à une transposition près) de cette relation avec le résultat de Kanaun (1.143) pour une seule famille d'inclusions sphériques homogènes, distribuées de manière isotrope. Cette similitude suggère une possibilité d'extension du résultat rigoureux de Ponte Castañeda et Willis : nous abordons en seconde partie de ce mémoire le cas de composites avec des inclusions hétérogènes de forme quelconque, distribuées selon une symétrie ellipsoïdale. En cas de distribution isotrope d'inclusions ellipsoïdales, le résultat est identique à celui obtenu avec la méthode de cluster lorsqu'on limite les sommes partielles à leur premier terme. La relation (1.138) induit donc une hypothèse implicite d'isotropie de distribution des centres d'inclusions. Lorsque les inclusions sont sphériques et la distribution isotrope, le résultat s'identifie au modèle de Mori et Tanaka, ou plus précisément à une des bornes de Hashin et Shtrikman classique. Lorsque la géométrie des inclusions s'apparente à l'ellipsoïde caractérisant la distribution, le résultat est la borne obtenue par Willis [173] pour des composites anisotropes, qui s'applique donc bien à des composites à inclusions ellipsoïdales, comme le supposait son auteur, mais à la condition que la distribution des centres d'inclusions satisfasse la bonne symétrie. La borne de Willis est valable pour tous les composites avec une distribution ellipsoïdale des phases, indépendamment de toute autre contrainte sur la morphologie. Ceci suggère que, même si le résultat (1.151) est rigoureux pour un composite à particules, il n'est probablement pas spécifique de la morphologie matrice/inclusions. En revanche, il généralise correctement à des situations anisotropes le modèle de Mori et Tanaka qui, ainsi que nous l'avons déjà précisé, n'est pas non plus spécifique d'une telle morphologie. Pour rendre véritablement compte de la nature inclusionnaire d'une des phases, il faudrait probablement tenir compte des interactions de paires d'inclusions, dans une démarche analogue à celle proposée par Kanaun pour établir la relation (1.144) ou inspirée de celle esquissée par Willis [174], mais dont la mise en œuvre effective et rigoureuse reste à entreprendre. Nous proposons en seconde partie une alternative à une telle approche, en substituant aux inclusions isolées des motifs composites intégrant un domaine de matrice. La qualité de borne du résultat (1.151) n'est plus garantie lorsque la matrice n'est plus la phase la plus dure ou la plus molle. On obtient alors une estimation du comportement effectif, mais dont la pertinence véritable n'est plus très claire. Une extension autocohérente des résultats est possible, dans la lignée de celle suggérée par Willis [173] ; nous la décrivons également en seconde partie. Notons enfin que la référence [135] précise les conditions d'existence de morphologies satisfaisant les hypothèses sur les formes d'inclusions, la distribution des centres et les fractions volumiques : la concentration maximale en inclusion  $i$  est la fraction volumique maximale d'un ellipsoïde  $\mathcal{E}_i$  inscrit dans un ellipsoïde  $\mathcal{E}_d^{ij}$ , pour tous les indices  $j$ . Ainsi, par exemple, les microstructures avec des inclusions très allongées et une distribution isotrope des centres ne peuvent exister que pour des fractions volumiques relativement faibles.

### 1.3 Extensions aux comportements non-linéaires

L'homogénéisation des matériaux hétérogènes présentant un comportement local des phases non linéaire vise à résoudre les problèmes de localisation (1.31) ou de concentration (1.32) pour tous les chargements macroscopiques potentiels, en adoptant au besoin des conditions aux limites particulières, homogènes en déformations (problèmes (1.38) ou (1.39)), en contraintes (problèmes (1.40) ou (1.41)) ou périodiques. L'utilisation de champs d'essai homogènes conduit facilement à des encadrements rigoureux des potentiels effectifs, qui généralisent à des situations non-linéaires les bornes de Voigt et Reuss. Une telle démarche est à l'origine des modèles de Sachs [145], de Taylor [162], du modèle statique

[181] et de leur extensions [18, 17, 104], qui ont pendant très longtemps été les seuls outils théoriques d'étude du comportement plastique des polycristaux. Si la nature de borne des résultats est bien établie, leur utilisation en tant qu'estimation du comportement effectif conduit à des approximations souvent encore bien plus grossières que dans le cas linéaire, car exacerbées par les non-linéarités. De plus, les hypothèses sous-jacentes sur les champs locaux rendent pratiquement illusoires les prévisions à l'échelle locale et les effets morphologiques ne peuvent en aucun cas être pris en compte.

D'autres méthodes plus élaborées ont été développées depuis. Nous les présentons dans ce paragraphe sous une classification en trois catégories. La première regroupe les techniques classiques consistant à représenter le comportement local par une loi linéaire l'approchant au mieux et à appliquer les méthodes développées dans le cadre de l'élasticité linéaire. Ce faisant, des approximations sont inévitables et la validité des résultats obtenus reste incertaine. La seconde regroupe d'autres démarches plus récentes qui abordent directement le problème non linéaire et permettent d'établir des encadrements rigoureux des potentiels macroscopiques, plus resserrés que ceux de Voigt ou Reuss et dépendant des caractéristiques morphologiques. Elles invoquent au besoin des résultats obtenus pour des comportements linéaires, mais précisent les rapports rigoureux avec le problème non linéaire. Enfin les méthodes d'homogénéisation périodique ont connu un essor important grâce au développement des moyens numériques de calcul des structures. Elles permettent de résoudre exactement les problèmes d'optimisation, mais ne s'appliquent en principe pas aux microstructures aléatoires considérées ici ; elles fournissent toutefois des indications sur l'effet de la morphologie de la cellule de base sur le comportement effectif.

### 1.3.A Extensions classiques des modèles élastiques

#### 1.3.A.a Approximations linéaires d'un comportement non linéaire

Toute loi de comportement de la forme (1.1) peut être linéarisée au voisinage d'une déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$  selon :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{tg}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 - \mathbf{C}^{\text{tg}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) : \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (1.154)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_0$  est la contrainte associée à  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$  et  $\mathbf{C}^{\text{tg}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^2}(\underline{\underline{\epsilon}}_0)$  est le tenseur des « modules tangents », défini positif du fait de la convexité du potentiel  $\phi$ .  $\mathbf{C}^{\text{tg}}$  est en règle générale anisotrope, même lorsque  $\phi$  est isotrope. En effet, pour un potentiel de la forme (1.4), on obtient :

$$\mathbf{C}^{\text{tg}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) = \{2\mu^{\text{sc}}(\epsilon_0^{\text{eq}}), 3k\} + \frac{4}{3\epsilon_0^{\text{eq}}} \frac{\partial \mu^{\text{sc}}}{\partial \epsilon^{\text{eq}}}(\epsilon_0^{\text{eq}}) \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) \otimes \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) \quad (1.155)$$

où

$$\mu^{\text{sc}}(\epsilon_0^{\text{eq}}) = \frac{1}{3\epsilon_0^{\text{eq}}} \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon^{\text{eq}}}(\epsilon_0^{\text{eq}}) \quad (1.156)$$

est le module de cisaillement sécant. L'anisotropie provient du terme proportionnel à  $\text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) \otimes \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}_0)$ . Lorsque la partie déviatorique de la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  est proportionnelle à celle de  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ , on peut le simplifier en utilisant l'égalité :

$$\text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) \otimes \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{3}{2} \epsilon_0^{\text{eq}2} \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (1.157)$$

et approcher le tenseur des modules tangents par un tenseur isotrope :

$$\mathbf{C}^{\text{tg}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) \approx \{2\mu^{\text{tg}}(\epsilon_0^{\text{eq}}), 3k\} \quad (1.158)$$

où  $\mu^{\text{tg}}(\epsilon_0^{\text{eq}})$  est le module de cisaillement tangent, donné par :

$$\mu^{\text{tg}}(\epsilon_0^{\text{eq}}) = \mu^{\text{sc}}(\epsilon_0^{\text{eq}}) + \epsilon_0^{\text{eq}} \frac{\partial \mu^{\text{sc}}}{\partial \epsilon^{\text{eq}}}(\epsilon_0^{\text{eq}}). \quad (1.159)$$

Plusieurs extensions non-linéaires ont recours aux tenseurs des modules tangents ou à leurs approximations isotropes. D'autres approches utilisent directement la relation (1.5) interprétée comme une loi de comportement linéaire avec un tenseur des modules dépendant de l'état mécanique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{sc}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (1.160)$$

où  $C^{sc}(\underline{\epsilon}_0)$  est le tenseur des « modules sécants » :

$$C^{sc}(\underline{\epsilon}_0) = \{2\mu^{sc}(\epsilon_0^{eq}), 3k\}, \quad (1.161)$$

isotrope par construction. Cette notion de comportement élastique sécant peut être étendue à des situations d'anisotropie particulières, nécessitant l'introduction de plusieurs modules sécants, dépendant de plusieurs grandeurs scalaires fonctions de la déformation  $\underline{\epsilon}_0$ , mais elle n'admet pas de définition unique dans le cas général, contrairement à la notion de comportement tangent. En pratique, elle n'est quasiment utilisée que dans le cas isotrope et avec l'hypothèse d'incompressibilité plastique : le comportement non linéaire du matériau est alors complètement déterminé par la fonction scalaire  $\mu^{sc}(\cdot)$  et le module de compressibilité  $k$ , le module de cisaillement élastique  $\mu$  étant égal à  $\mu^{sc}(0)$ .

Les figures 1.22 et 1.23 illustrent la construction des modules de cisaillement sécants et tangents dans un diagramme  $(\sigma^{eq}, \epsilon^{eq})$  pour un matériau isotrope. La courbe en trait mixte fin donne le comportement élastique utilisé pour approcher la courbe du comportement réel, en trait continu gras. Les deux coïncident au point  $\epsilon_0^{eq}$  et s'écartent d'autant plus l'une de l'autre que  $\epsilon^{eq}$  est loin de  $\epsilon_0^{eq}$ . L'écart est plus important pour l'approximation par le module sécant (dans un voisinage de  $\epsilon_0^{eq}$  excluant le domaine élastique du comportement réel). En revanche, l'isotropie du comportement n'est justifiée dans l'approche par le module tangent que pour des déformations dont la partie déviatorique est proportionnelle à celle de  $\underline{\epsilon}_0$  : la construction de la figure 1.23 ne s'applique que dans ce cas.

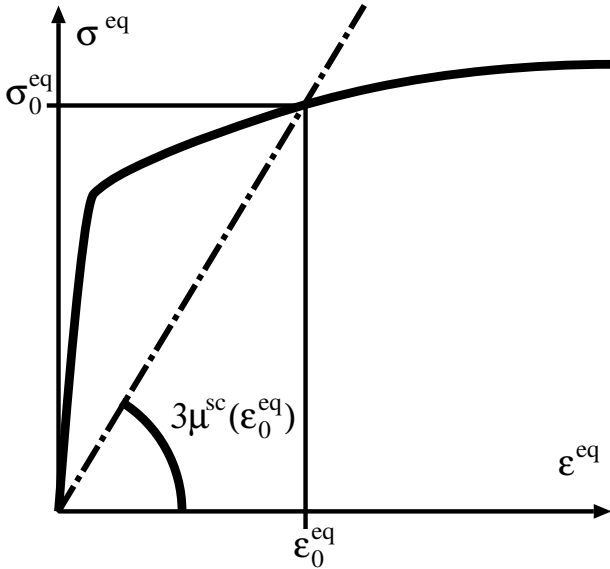


Figure 1.22 : Module de cisaillement sécant

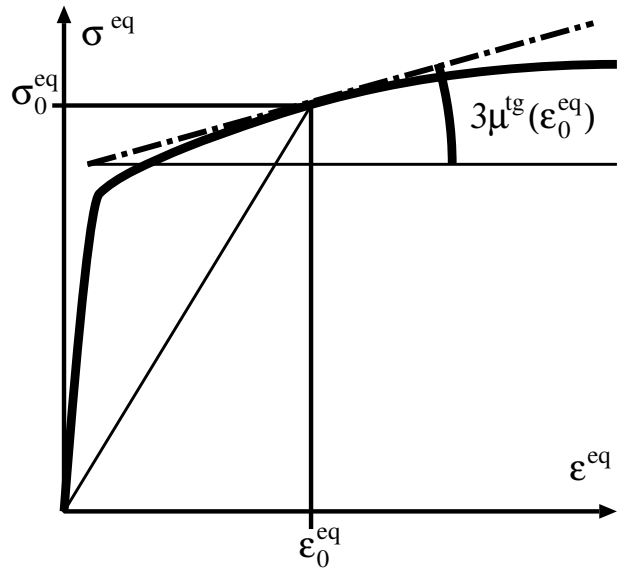


Figure 1.23 : Module de cisaillement tangent

### 1.3.A.b Comportements élasto-plastiques

La description classique d'un comportement élasto-plastique repose sur la décomposition de la déformation en sa partie plastique et sa partie élastique et nécessite la définition d'un critère de plasticité, d'une loi d'écoulement et d'une loi d'écrouissage.

Un tel comportement ne peut pas être complètement décrit par un potentiel de déformation de la forme (1.1). La loi (1.5) est pourtant souvent utilisée pour décrire le comportement élastique et plastique incompressible de matériaux isotropes. Il est bon de rappeler ici les hypothèses classiquement invoquées pour justifier cette approximation. Ces matériaux sont supposés obéir à un critère de von Mises  $f$ , une loi d'écoulement normale et une loi d'écrouissage isotrope. La loi de normalité et l'hypothèse d'isotropie permettent d'établir la relation de Prandtl et Reuss liant l'incrément de déformation plastique à l'incrément de contrainte :

$$\underline{d\epsilon}^p = g(\sigma^{eq}) \frac{3d\sigma^{eq}}{2\sigma^{eq}} dev(\underline{\sigma}) \quad \text{si} \quad f(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{d\sigma} \geq 0, \quad (1.162)$$

où  $g(\sigma^{\text{eq}})$  est positif. L'hypothèse essentielle est ensuite celle de *proportionnalité* du chargement, c'est-à-dire que la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  évolue au cours du temps selon :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \alpha(t)\underline{\underline{\sigma}}_0, \quad (1.163)$$

où  $\alpha(t)$  est une fonction réelle positive et croissante. La loi (1.162) devient alors :

$$\underline{\underline{d\epsilon}}^p = g(\sigma^{\text{eq}}) \frac{3d\sigma^{\text{eq}}}{2\sigma_0^{\text{eq}}} \text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}_0) \quad (1.164)$$

et s'intègre, en partant d'un état à contrainte et déformation plastique nuls, pour donner la loi de Hencky :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p(t) = \frac{3}{2\sigma_0^{\text{eq}}} h(\sigma^{\text{eq}}(t)) \text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}_0) = \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}(t)} h(\sigma^{\text{eq}}(t)) \text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}(t)), \quad (1.165)$$

où

$$h(\sigma^{\text{eq}}(t)) = \int_{\sigma_0}^{\sigma^{\text{eq}}(t)} g(\sigma^{\text{eq}}) d\sigma^{\text{eq}} \quad (1.166)$$

est strictement positif lorsque  $\sigma^{\text{eq}}(t)$  est supérieur à la limite d'élasticité initiale  $\sigma_0$  et nul sinon. La relation entre les déviateurs de la contrainte et de la déformation totale s'en déduit :

$$\text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \left( \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} h(\sigma^{\text{eq}}) \right) \text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}). \quad (1.167)$$

Elle établit la dépendance univoque entre  $\sigma^{\text{eq}}$  et  $\epsilon^{\text{eq}}$  et permet d'écrire la contrainte en fonction de la déformation selon :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left[ \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{eq}})} h(\sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{eq}})) \right]^{-1} \text{dev}(\underline{\underline{\epsilon}}) + k \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}}. \quad (1.168)$$

On retrouve la loi (1.5) avec un module sécant donné par :

$$\mu^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}}) = \left[ \frac{1}{\mu} + \frac{3}{\sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{eq}})} h(\sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{eq}})) \right]^{-1}. \quad (1.169)$$

La convexité du potentiel  $\phi$  associé résulte de la positivité de  $g$  qui garantit celle de  $\mu^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}})$  et celle de  $\mu^{\text{tg}}(\epsilon^{\text{eq}})$ , pour tout  $\epsilon^{\text{eq}}$ . Les résultats relatifs à l'élasticité non linéaire peuvent être légitimement appliqués si toutes ces hypothèses sont justifiées. Le comportement non linéaire d'un tel matériau, sous chargement proportionnel, est complètement déterminé par la fonction  $\mu^{\text{sc}}(\cdot)$ , que l'on peut facilement identifier par un essai de traction simple. Une telle description simplifiée du comportement plastique d'un matériau est désignée sous l'appellation de « théorie de déformation » de la plasticité, par opposition à la théorie incrémentale classique.

En cas de chargement non proportionnel ou de lois d'écoulement et d'écrouissage plus complexes, une telle démarche n'est plus possible. On peut en revanche toujours définir un tenseur des modules tangents, liant les incréments de la déformation à ceux de la contrainte. Il est fonction non seulement de la déformation plastique atteinte (ou plus généralement des paramètres d'écrouissage), mais aussi de l'incrément de contrainte appliqué, du fait de la nature multibranche d'une loi d'écoulement plastique. C'est le cas en particulier des lois d'écoulement plastique des monocristaux, dans lesquelles le tenseur des modules tangents dépend des systèmes de glissement actifs. Bien que ce type de comportement soit en-dehors du formalisme élastique non-linéaire adopté pour la présente étude, nous donnons ci-après quelques indications sur les modèles d'homogénéisation qui s'y rapportent, car les premières extensions non-linéaires de modèles linéaires ont été développées dans ce cadre, le but étant le calcul des propriétés des polycristaux à partir de celles des monocristaux constitutifs et de leur texture.

### 1.3.A.c Extension non-linéaire des modèles usuels

Le première tentative de prise en compte des interactions à l'échelle locale dans la détermination du comportement plastique macroscopique est due à Kröner [97]. L'idée, reprise ultérieurement par

d'autres auteurs [34], reprend celle du modèle autocohérent élastique et consiste à supposer qu'un grain du polycristal se comporte comme une inclusion noyée dans une matrice infinie ayant les propriétés du milieu homogène équivalent. La solution (1.113) du problème d'Eshelby avec des déformations initiales imposées dans l'inclusion et la matrice est utilisée pour déterminer la déformation plastique dans un grain en fonction du comportement élastique effectif du polycristal, de la déformation totale et de la déformation plastique macroscopiques. Cette modélisation suppose la déformation plastique uniforme dans le milieu infini et ignore ainsi par construction l'accommodation plastique entre grains voisins ; en conséquence, l'hétérogénéité de la déformation plastique est largement sous-estimée et les résultats s'avèrent très proches de ceux des modèles supposant la déformation homogène.

L'accommodation plastique est mieux prise en compte dans l'extension du modèle autocohérent proposée par Hill [80], basée sur une procédure incrémentale utilisant les tenseurs des *modules tangents* élasto-plastiques des grains et du milieu effectif. La solution (1.112) du problème d'Eshelby sans déformations initiales est appliquée à chaque incrément du chargement, en adoptant un tenseur des modules tangents uniforme dans le milieu infini malgré l'hétérogénéité de la déformation. Le « voisinage moyen » du grain, représenté par le milieu infini, est ainsi beaucoup plus souple que dans l'approche de Kröner et autorise des hétérogénéités de déformation de grain à grain plus importantes et plus conformes à la réalité. La mise en œuvre de ce modèle est en revanche beaucoup plus délicate. En effet, le tenseur des modules tangents effectifs  $\mathbf{C}^{\text{tgAC}}$  évolue au cours du chargement. Il satisfait une condition d'autocohérence portant sur les incréments de déformation ou de contrainte moyens, ou encore sur la moyenne des incréments de polarisation associés. Il est fonction des paramètres d'écroutissage de chaque grain et des quantités de glissement sur les systèmes actifs, qui dépendent eux-mêmes du chargement macroscopique par l'intermédiaire du milieu infini. Une double procédure d'itération est nécessaire à chaque pas de chargement pour, d'une part déterminer la localisation dans chaque grain et, d'autre part, satisfaire la condition d'autocohérence. De plus, comme  $\mathbf{C}^{\text{tgAC}}$  est par nature anisotrope, les tenseurs de Hill  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{tgAC}}$  associés aux grains ellipsoïdaux  $\mathcal{E}_i$  n'admettent en général pas d'expression simple. La première mise en œuvre numérique de la méthode pour une loi de comportement plastique cristalline est due à Hutchinson [85], dans une situation isotrope transverse où  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_i}^{\text{tgAC}}$  admet une expression analytique. Dans d'autres situations, un calcul numérique, par exemple par transformation de Fourier, est indispensable et rend la mise en œuvre délicate. Les calculs sont longs du fait des procédures itératives et du grand nombre d'inclusions à prendre en compte pour simuler des distributions réelles d'orientations des grains dans un polycristal. Des moyens informatiques relativement puissants sont nécessaires si bien que la méthode n'a connu de véritable essor que depuis peu. Le formalisme peut être étendu aux grandes transformations et la technique a prouvé son efficacité pour prévoir non seulement le comportement macroscopique de polycristaux texturés, mais aussi leurs évolutions microstructurales, sous des chargements macroscopiques quelconques [106, 105]. La même démarche peut être appliquée à tous les comportements admettant une formulation incrémentale linéaire, tels ceux dérivant d'un potentiel, comme l'élasticité non linéaire ou la visco-plasticité. La méthode est légèrement plus facile à mettre en œuvre dans ce cas, puisque les modules tangents, définis comme précisé au paragraphe 1.3.A.a, ne dépendent plus que de l'état de déformation atteint, le caractère multibranche du comportement plastique disparaissant. La double itération est en revanche toujours nécessaire pour déterminer les incréments de déformation et de contrainte dans chaque grain et satisfaire la condition d'autocohérence.

Le cas d'un comportement en loi puissance avec un exposant identique pour toutes les phases a été traité par Hutchinson [86] dans une situation isotrope transverse et pour un chargement macroscopique uniaxial et proportionnel. Il s'avère que les équations liant les grandeurs incrémentales peuvent alors être intégrées pour donner, sans approximation, des relations sur les grandeurs finies formellement identiques à celles du modèle autocohérent classique construit avec les tenseurs des *modules sécants* associés aux déformations homogènes de chaque inclusion et à la déformation à l'infini dans la matrice ; la mise en œuvre du modèle de Hill s'en trouve grandement simplifiée. Une démarche similaire a été proposée par Berveiller et Zaoui [15] dans le cadre de la plasticité polycristalline et pour un comportement macroscopique isotrope. L'interaction d'un grain avec son entourage est écrite sur les grandeurs finies et est caractérisée par un problème d'inclusion dans un milieu infini homogène ayant les propriétés sécantes du milieu effectif associées à la valeur du chargement macroscopique. Les

équations obtenues sont formellement identiques à celles du modèle de Kröner, mais avec une réduction des modules élastiques du milieu infini d'un facteur  $\alpha$ , caractérisant l'évolution du module sécant du milieu effectif et décroissant très rapidement de l'unité à des valeurs de l'ordre du pour-cent à mesure que la déformation plastique macroscopique croît. L'accommodation plastique est ainsi mieux décrite et les résultats sont proches des prévisions du modèle de Hill mais avec une mise en œuvre bien plus facile, grâce à la disparition de l'aspect incrémental et surtout à l'isotropie du comportement sécant qui permet d'utiliser le tenseur d'Eshelby isotrope. Le coefficient  $\alpha$  est calculé pour chaque valeur du chargement par une condition d'autocohérence, mais il peut en première approximation être pris constant : dans l'étude [78], il est par exemple choisi de telle sorte que le modèle rende au mieux compte des mesures expérimentales, la nature autocohérente de l'approche étant alors sacrifiée.

De nombreux auteurs ont par la suite eu recours aux modules sécants pour étendre aux comportements non-linéaires les modèles élaborés dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'approche de Mori et Tanaka a ainsi été utilisée pour décrire le comportement élasto-plastique de composites à matrice élasto-plastique et inclusions élastiques sphériques [161] ou ellipsoïdales et orientées de manière isotrope [140]. Le module sécant de la matrice est supposé uniforme et est associé à la valeur moyenne de sa déformation, telle que donnée par le modèle de Mori et Tanaka, c'est-à-dire la valeur à l'infini dans les problèmes d'inclusions. La nature explicite des relations rend le calcul de la courbe de traction macroscopique particulièrement simple. Lorsque les deux constituants ont un comportement non-linéaire [171], la résolution est légèrement plus délicate, car il faut déterminer la déformation moyenne de l'une des phases lorsque celle de l'autre phase est imposée, mais l'opération ne pose pas de difficulté particulière. Notons qu'une extension utilisant les tenseurs des modules tangents est possible, puisque le problème d'Eshelby admet une solution pour des milieux infinis anisotropes, mais n'a pas été entreprise pour des raisons liées à la complexité de sa mise en œuvre. Une extension de nature incrémentale du modèle des trois phases utilisant des tenseurs de modules tangents anisotropes n'est en revanche pas envisageable car aucune solution analytique du problème d'inclusion composite avec des phases anisotropes n'est connue. L'extension au moyen de modules sécants a été proposée par Hervé et Zaoui [75] et fait appel à une condition d'autocohérence portant sur la déformation moyenne, ou, de manière équivalente, sur la contrainte moyenne. Les modules de cisaillement sécants sont supposés uniformes dans le milieu infini, comme pour l'extension du modèle autocohérent classique, mais aussi dans les deux phases de l'inclusion composite, malgré l'hétérogénéité des champs mécaniques, et sont associés aux déformations moyennes des phases correspondantes.

D'autres extensions utilisent l'approximation tangente de la loi de comportement, mais dans une démarche invoquant les grandeurs finies et non pas les grandeurs incrémentales comme dans l'approche de Hill. Dans la référence [122], le comportement visco-plastique tangent d'un polycristal est ainsi calculé à partir du comportement tangent des grains dans une démarche autocohérente simplifiée, où le tenseur des modules tangents du milieu infini est approché par un tenseur isotrope. Une approche utilisant une approximation linéaire du comportement non-linéaire intermédiaire entre la courbe tangente et la courbe sécante a également été proposée [123].

Dans tous ces modèles, le milieu infini dans lequel sont plongées les inclusions ainsi que chacune des phases constitutives sont remplacés par des milieux élastiques homogènes de modules égaux aux modules sécants ou tangents associés à la déformation moyenne du milieu en question. Dans le cas d'une inclusion homogène, cette approximation peut sembler justifiée puisque le champ de déformation est bien uniforme, si bien que la contrainte associée à la déformation en tout point de l'inclusion dans le calcul élastique est celle que fournirait la loi de comportement non-linéaire. Il n'en est pas de même dans le milieu infini où le champ est hétérogène au voisinage de l'inclusion, ni dans l'inclusion composite du modèle des trois phases. Pour respecter l'idée intuitive sous-jacente du modèle autocohérent ou du modèle de Mori et Tanaka, consistant à remplacer le voisinage réel d'un grain, d'une inclusion ou d'une inclusion composite par un environnement « moyen » rencontré dans le matériau, défini comme le milieu effectif ou la matrice soumise à un certain champ lointain homogène, certains auteurs suggèrent d'attribuer au milieu infini le comportement non-linéaire de ces derniers. Ce faisant la solution d'Eshelby ne s'applique plus. Les champs mécaniques dans l'inclusion sont aussi hétérogènes [63] et l'approximation du comportement de l'inclusion par un comportement élastique homogène n'est plus justifiée. L'utilisation de lois non-linéaires dans les problèmes d'inclusions a été suggérée par



Hutchinson [86], mais l'impossibilité d'utiliser les solutions élastiques analytiques pour la résolution a conduit cet auteur à préférer les formulations simplifiées utilisant des modules homogènes, tangents ou sécants. Les moyens numériques de calcul des structures actuels suppriment peu à peu cette impossibilité et permettent de résoudre des problèmes d'inclusions en adoptant un comportement local non-linéaire, pour les phases constitutives comme pour le milieu infini. Ainsi la charge limite d'un biphasé constitué de deux phases parfaitement plastiques a été calculée par une approche autocohérente dérivée du modèle des trois phases, le problème d'inclusion composite étant résolu par la méthode des éléments finis [7]. Un maillage axisymétrique d'un quart de l'inclusion composite et d'une partie du milieu infini est utilisé et une déformation homogène est appliquée au bord de cette structure. Le comportement du milieu infini est également supposé parfaitement plastique, la charge limite ne dépendant pas de la transition élasto-plastique. La condition d'autocohérence ne porte alors que sur la valeur de la limite d'élasticité du milieu infini. Deux définitions sont proposées ; la première stipule l'égalité entre le taux de déformation moyen dans l'inclusion composite et le taux imposé à l'infini et la seconde porte sur la contrainte moyenne dans l'inclusion composite et la contrainte à l'infini. Une démarche itérative est nécessaire pour déterminer la bonne valeur de la charge limite. Contrairement au modèle élastique ou à l'extension utilisant des modules sécants, les deux définitions donnent des résultats qui diffèrent légèrement. Plus récemment [51], une approche similaire a été adoptée pour déterminer le comportement élasto-plastique sous sollicitation transverse de composites à fibres. Dans cette étude, la condition d'autocohérence porte sur la totalité de la courbe d'érouissage ( $\sigma^{eq}, \epsilon^{eq}$ ) du milieu infini, la forme de la loi de comportement plastique étant toutefois choisie arbitrairement. La définition retenue stipule l'identité de cette courbe d'érouissage avec celle déduite des déformations et contraintes moyennes sur l'inclusion au cours du chargement et un algorithme itératif portant sur la totalité de cette courbe est utilisé. Le recours à une méthode numérique permet aussi de modifier la géométrie de la fibre composite : l'influence de la forme de la fibre a été étudiée, ainsi que celle de la forme de la gaine de matrice qui l'entoure, mais la signification physique réelle de cette dernière n'est pas claire.

Notons enfin pour clore ce paragraphe que les modèles élastiques peuvent être étendus à d'autres gammes de comportement non encore cités. La visco-élasticité linéaire [143] est abordée par la transformation de Laplace-Carson et un principe de correspondance dû à Mandel [110]. Le cas de la visco-élasticité non-linéaire a été résolu récemment [144], par une approche incrémentale utilisant une transformation de Laplace-Carson à chaque étape du chargement.

### 1.3.B Résultats rigoureux sur les comportements non-linéaires

#### 1.3.B.a Approximations sous-jacentes aux extensions classiques

Les extensions présentées au paragraphe précédent simplifient le problème de localisation sur un VER avec un comportement non-linéaire, selon une démarche reposant plus sur l'intuition physique ou l'analogie que sur une véritable analyse des problèmes initiaux (1.31) et (1.32). Nous tentons ici de lister de dresser la liste des diverses hypothèses sous-jacentes à ces approches.

Les deux premières concernent respectivement l'adéquation du modèle linéaire invoqué à la morphologie du VER étudié, commentée aux paragraphes **1.2.B.d** et **1.2.C**, et la pertinence de la loi linéaire utilisée pour approcher au mieux le comportement non-linéaire en tout point  $\underline{x}$  du VER, discutée aux paragraphes **1.3.A.a** et **1.3.A.b**. La troisième approximation est relative au remplacement du champ hétérogène des modules sécants  $\mathbf{C}^{sc}(\underline{\epsilon}(\underline{x}))$  (ou tangents ou intermédiaires) par des champs uniformes sur chacune des phases, de la forme  $\sum_i \mathbf{C}^i \kappa_i(\underline{x})$ , qui permet de ramener le problème de localisation à celui relatif à un composite linéaire de même microstructure. La quatrième concerne les valeurs de ces tenseurs  $\mathbf{C}^i$ , associées *a priori* dans les extensions classiques aux déformations moyennes sur les phases correspondantes :  $\mathbf{C}^i = \mathbf{C}^{sc}(\langle \underline{\epsilon} \rangle_i)$ . Un tel choix conduit implicitement à l'application de relations de la forme :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_i = \langle \mathbf{C}^{sc}(\underline{\epsilon}) : \underline{\epsilon} \rangle_i \approx \mathbf{C}^{sc}(\langle \underline{\epsilon} \rangle_i) : \langle \underline{\epsilon} \rangle_i, \quad (1.170)$$

qui ne sont manifestement satisfaites qu'en cas de linéarité ou d'homogénéité de la déformation sur la phase  $i$ .

Le recours aux calculs par éléments finis pour résoudre les problèmes d'inclusions avec des phases non-linéaires ne permet pas de se soustraire à ces deux dernières approximations. En effet, les champs calculés en un point  $\tilde{\underline{x}}$  dans les problèmes d'inclusions sont des moyennes, en un certain sens, des champs réels en des points homologues  $\underline{x}$  au sein du VER. Le comportement en  $\tilde{\underline{x}}$  est une relation fonctionnelle liant ces moyennes de contraintes aux moyennes des déformations aux points  $\underline{x}$ . Comme les états de déformation en ces derniers sont *a priori* distincts, l'adoption du comportement non-linéaire local des phases constitue bien une approximation.

### 1.3.B.b Bornes exactes sur le potentiel effectif

Les techniques récentes présentées maintenant permettent d'établir des encadrements rigoureux sur le potentiel effectif et fournissent ainsi un moyen de juger de la pertinence des approximations faites en mettant en œuvre des extensions classiques, tout au moins du point de vue macroscopique.

La première, développée par Talbot et Willis [159] à partir d'une idée proposée par Willis [176], constitue une généralisation aux comportements non-linéaires de la démarche introduite par Hashin et Shtrikman dans le cas linéaire : le problème d'optimisation initial, par exemple de la forme (1.38), est modifié en invoquant un matériau de référence linéaire et homogène, de potentiel  $\phi^0(\underline{\epsilon}) = \frac{1}{2}\underline{\epsilon} : \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}$  et un champ de polarisation  $\underline{p}$ , homogène sur chaque phase. Lorsque  $\phi(\underline{x}, \cdot) - \phi^0(\cdot)$  est convexe, il est possible de minorer  $\bar{\phi}(\underline{E})$  par la somme de deux termes, le calcul du premier nécessitant la résolution d'un problème d'élasticité sur le milieu  $\underline{C}^0$  avec la polarisation  $\underline{p}$  imposée et le second étant l'intégrale sur le VER de la valeur pour cette polarisation de la transformée de Legendre-Fenchel de  $\phi(\underline{x}, \cdot) - \phi^0(\cdot)$ . Un choix optimal de  $\underline{p}$  et de  $\underline{C}^0$  conduit à une minoration pertinente du potentiel effectif. Lorsque, inversement,  $\phi^0(\cdot) - \phi(\underline{x}, \cdot)$  est convexe, on construit de la même manière une majoration. Si le comportement est élastique, on peut trouver des milieux de référence assurant chacune des deux conditions de convexité et construire ainsi un encadrement du potentiel effectif. Il suffit par exemple de prendre les milieux  $\underline{C}_r^-$  et  $\underline{C}_r^+$ , qui conduisent aux bornes de Hashin et Shtrikman classiques. Si le comportement est non-linéaire, on ne peut construire qu'une seule borne, inférieure si le potentiel croît plus vite qu'une forme quadratique ou supérieure s'il croît moins vite, le second cas étant celui usuellement rencontré lorsqu'on traite des matériaux plastiques par la théorie de déformation de la plasticité.

Une seconde procédure a été proposée par Ponte Castañeda [133, 134]. Elle fait également appel à un matériau de comparaison élastique, mais hétérogène, avec une distribution des phases identique à celle du matériau initial, c'est-à-dire avec un champ de tenseurs des modules de la forme  $\underline{C}^0(\underline{x}) = \sum_i \underline{C}^i \kappa_i(\underline{x})$  et un potentiel local  $\phi^0(\underline{x}, \cdot)$  associé ; en revanche, aucun champ de polarisation n'est invoqué. Le potentiel effectif est encore borné par deux termes : le premier n'est autre que le potentiel du milieu linéaire hétérogène de modules  $\underline{C}^0(\underline{x})$  pour la même valeur de chargement macroscopique et le second est l'intégrale sur le VER de la valeur en zéro de la transformée de Legendre-Fenchel de  $\phi(\underline{x}, \cdot) - \phi^0(\underline{x}, \cdot)$ . Toute borne pertinente sur le potentiel effectif du milieu de référence linéaire conduit alors à une borne sur le potentiel effectif du milieu non-linéaire. Un choix adéquat des tenseurs  $\underline{C}^i$  associés à chaque phase permet d'optimiser le résultat. Plus généralement, toute estimation du comportement effectif du milieu de référence élastique conduit par la même procédure à une estimation du potentiel effectif du milieu non-linéaire. A l'instar de l'approche de Talbot et Willis, cette démarche ne permet d'établir qu'une seule borne : un encadrement rigoureux en élasticité linéaire permet ainsi de construire une majoration ou une minoration rigoureuses du potentiel effectif non-linéaire, basées sur l'une des bornes, et une estimation, basée sur l'autre.

Ces deux approches ont bénéficié de diverses extensions et aboutissent dans la plupart des cas courants au même résultat (voir les références [177, 178] pour une comparaison). Des encadrements similaires ont été obtenus parallèlement par Suquet [153], par une méthode plus directe, dans laquelle les inégalités générales de convexité sont remplacées par des inégalités de Hölder, mais spécifique à des composites dont les phases obéissent à un potentiel en loi puissance avec un exposant identique pour tous les constituants. Notons enfin que la démarche de Talbot et Willis a récemment été modifiée pour permettre le calcul d'une borne supérieure et d'une borne inférieure pour un même composite

non-linéaire : pour ce faire un matériau de référence non-linéaire est utilisé en combinaison avec des champs d'essai à « oscillations limitées » [160].

Nous nous intéressons dans la suite aux potentiels de déformation tels que ceux utilisés pour décrire les comportements élasto-plastiques usuels par la théorie de déformation de la plasticité, c'est-à-dire ceux pouvant être majorés par un potentiel élastique. Les procédures de Ponte Castañeda et de Talbot et Willis engendrent alors des bornes supérieures<sup>6</sup>.

### 1.3.B.c Extension modifiée des modèles élastiques

Toutes ces techniques permettent de calculer une fonction  $\tilde{\Phi}(\cdot)$  majorant rigoureusement le potentiel effectif  $\Phi(\cdot)$  d'un composite non-linéaire. On convient généralement que les courbes contrainte-déformation dérivées de  $\tilde{\Phi}(\cdot)$  pour des sollicitations particulières, une traction simple par exemple, bornent la réponse réelle du matériau, bien que ceci ne soit vrai en toute rigueur que dans des situations particulières.

C'est le cas par exemple des matériaux isotropes incompressibles avec un potentiel en loi puissance et un exposant identique pour tous les constituants, le comportement effectif étant alors simplement caractérisé par un scalaire unique. Une comparaison récente due à Gilormini [62], effectuée sur des biphasés de ce type, révèle la violation de la borne supérieure de type Hashin-Shtrikman, s'appliquant rigoureusement à tout matériau avec une distribution isotrope des phases, par toutes les extensions classiques du modèle autocohérent décrites au paragraphe 1.3.A.c, dans une gamme de concentration des constituants plus ou moins large. Ce résultat invite à la plus grande prudence quant à l'utilisation de ces extensions, y compris celles de Hill ou celles utilisant des calculs numériques et dont le contenu physique semble intuitivement très riche.

Il convient ainsi de préférer les extensions moins immédiates, telles celles dérivées du travail de Ponte Castañeda, mais dont la validité dans le cas non-linéaire découle directement de celle du cas linéaire, et ceci d'autant plus qu'un résultat récent dû à Suquet [154] permet de clarifier la signification du matériau linéaire de comparaison optimal, de modules  $\sum_i \mathbf{C}^{i\circ} \kappa_i(\underline{\underline{x}})$ , invoqué dans la procédure mathématique de comparaison. Dans une situation isotrope et incompressible, avec  $\mathbf{C}^{i\circ} = \{2\mu_i^\circ, \infty\}$ , les modules de cisaillement de comparaison optimaux  $\mu_i^\circ$  sont les modules de cisaillement sécants associés par la loi de comportement non linéaire de la phase  $i$  en question, au moment d'ordre deux de la déformation locale  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{\underline{x}})$  qui existerait dans cette phase au sein du matériau linéaire de comparaison s'il était soumis au même chargement macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  :

$$\mu_i^\circ(\underline{\underline{E}}) = \mu^{\text{sc}}(\sqrt{\langle \epsilon^{\circ\text{eq}2}(\underline{\underline{E}}) \rangle_i}). \quad (1.171)$$

De plus, la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  associée à  $\underline{\underline{E}}$  par le potentiel bornant le potentiel effectif s'identifie à celle du matériau de comparaison sous ce chargement, c'est-à-dire  $\bar{\mathbf{C}}^\circ : \underline{\underline{E}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}^\circ$  étant le tenseur des modules effectifs de ce milieu de comparaison, qui s'apparente ainsi au tenseur des modules sécants du milieu bornant le milieu effectif. Les moments d'ordre deux sur chaque phase peuvent être calculés exactement à partir des relations (1.72), dont on déduit :

$$\langle \epsilon^{\circ\text{eq}2}(\underline{\underline{E}}) \rangle_i = \frac{1}{3c_i} \underline{\underline{E}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^\circ}{\partial \mu_i^\circ} : \underline{\underline{E}}. \quad (1.172)$$

La procédure de Ponte Castañeda apparaît ainsi comme une extension non-linéaire utilisant des modules sécants, totalement identique à l'extension classique, à l'exception de la définition des déformations auxquelles les modules sécants sont associés. Le résultat se généralise facilement à des matériaux à phases compressibles de la forme (1.5). Nous donnons ici une présentation synthétique de ces deux extensions, que nous désignons par la suite par « extension classique » et « extension modifiée », en conformité avec la dénomination de Suquet.

<sup>6</sup>Les résultats sont aussi valables pour les potentiels plus « raides » que les potentiels quadratiques, à condition d'échanger les significations des mots « majorations » et « minoration »...

Soit donc  $\star$  un modèle donnant le tenseur  $\bar{\mathbf{C}}$  des modules effectifs d'un milieu à  $n$  phases de comportement élastique linéaire et isotrope, en fonction des modules de compressibilité  $k_i$  et de cisaillement  $\mu_i$ , de la concentration  $c_i$  de chaque phase  $i \in [1, n]$ , et d'éventuels paramètres morphologiques complémentaires symbolisés par  $\alpha$  :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\star \left( (k_i, \mu_i, c_i)_{i \in [1, n]}, \alpha \right). \quad (1.173)$$

Les extensions classiques et modifiées de ce modèle fournissent, de la manière suivante, le comportement d'un multiphasé avec la même microstructure mais avec un comportement non-linéaire des phases de la forme (1.5), caractérisé par des modules de compressibilité constants, également notés  $k_i$ , et des modules de cisaillement sécants  $\mu_i^{\text{sc}}(\cdot)$ . La contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  associée à la déformation  $\underline{\underline{E}}$  est calculée selon :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^\star \left( (k_i, \mu_i^\circ, c_i)_{i \in [1, n]}, \alpha \right) : \underline{\underline{E}}, \quad (1.174)$$

où  $\mu_i^\circ$  est le module sécant associé à un paramètre d'écrouissage  $P_i$ , caractérisant l'état de déformation de la phase  $i$  :

$$\mu_i^\circ = \mu_i^{\text{sc}}(P_i). \quad (1.175)$$

Dans l'approche classique,  $P_i$  est l'équivalent de la moyenne sur la phase  $i$  de la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  associée selon le modèle linéaire  $\star$  à la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  :

$$P_i = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \right\rangle_i^{\text{eq}}. \quad (1.176)$$

Dans le cas d'un biphasé,  $\left\langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \right\rangle_i$  peut être calculé par les relations générales (1.70) et (1.71) ; lorsque  $n > 2$ , des relations explicites de localisation sont nécessaires et sont données par la modélisation linéaire  $\star$ . Dans l'approche modifiée,  $P_i$  est le moment d'ordre deux sur la phase  $i$  de l'équivalent de la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  :

$$P_i = \sqrt{\left\langle \epsilon^{\text{eq}2} \right\rangle_i}. \quad (1.177)$$

On le calcule par dérivation de  $\mathbf{C}^\star$  par rapport au module de cisaillement de la phase  $i$ , selon (1.172). Les équations permettant de calculer  $\underline{\underline{\Sigma}}$  sont couplées et un algorithme itératif est généralement nécessaire pour résoudre le système.

On construit ainsi la contrainte macroscopique pour toute déformation appliquée. L'intégrabilité de la fonction obtenue est garantie pour l'extension modifiée grâce à son interprétation par rapport à la démarche de Ponte Castañeda et permet de calculer un potentiel macroscopique  $\phi^\star$ . Il n'en est pas de même pour l'extension classique. En pratique, on se contente toutefois de la relation univoque entre  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  obtenue. Rappelons que le potentiel macroscopique  $\phi^\star$  ainsi obtenu avec l'extension modifiée est une borne pour le potentiel effectif si le modèle  $\star$  a un statut extrémal. Dans le cas contraire, on obtient simplement une estimation. L'extension classique ne fournit jamais qu'une estimation.

La démarche ne se limite nullement aux comportements macroscopiques isotropes,  $\mathbf{C}^\star$  pouvant parfaitement être anisotrope. Notons toutefois que si le modèle  $\star$  prévoit un comportement isotrope de la forme :

$$\mathbf{C}^\star \left( (k_i, \mu_i, c_i)_{i \in [1, n]}, \alpha \right) = \left\{ 2\mu^\star \left( (k_i, \mu_i, c_i)_{i \in [1, n]}, \alpha \right), 3k^\star \left( (k_i, \mu_i, c_i)_{i \in [1, n]}, \alpha \right) \right\}, \quad (1.178)$$

le comportement non-linéaire prévu par l'extension modifiée est aussi isotrope. En effet, les  $P_i$  ne dépendent alors du chargement macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  qu'au travers de son équivalent et de sa trace, puisque :

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^\star : \underline{\underline{E}} = \frac{3}{2} \mu^\star E^{\text{eq}2} + \frac{1}{2} k^\star \text{tr}(\underline{\underline{E}})^2 \quad (1.179)$$

et donc :

$$P_i^2 = \frac{1}{c_i} \frac{\partial \mu^\star}{\partial \mu_i} E^{\text{eq}2} + \frac{1}{3c_i} \frac{\partial k^\star}{\partial \mu_i} \text{tr}(\underline{\underline{E}})^2. \quad (1.180)$$

Le tenseur des modules sécants macroscopiques est donc isotrope et ne dépend que des deux premiers invariants de  $\underline{\underline{E}}$  : la relation fonctionnelle entre  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  est indépendante de l'orientation.

Il en est de même de l'extension classique à condition que les déformations moyennes dépendent de manière isotrope de la déformation macroscopique. C'est le cas pour un biphasé d'après les relations (1.70) et (1.71), qui garantissent la proportionnalité entre les déviateurs des déformations moyennes par phase et le déviateur de la déformation macroscopique :

$$\text{dev}(\langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle_i) = a_i^* \text{dev}(\underline{\underline{E}}) \quad \text{et} \quad \text{tr}(\langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle_i) = b_i^* \text{tr}(\underline{\underline{E}}), \quad (1.181)$$

où les scalaires  $a_i^*$  et  $b_i^*$  caractérisant la localisation sont spécifiques du modèle  $\star$  utilisé. Il est naturel de supposer que de telles relations s'appliquent aussi lorsque le composite comporte plus de deux phases. Les paramètres  $P_i$  se calculent alors selon :

$$P_i = |a_i^*| E^{\text{eq}} \quad (1.182)$$

ce qui établit l'isotropie du comportement macroscopique comme pour l'extension modifiée.

Les deux extensions prévoient que la réponse macroscopique sous chargement sphérique dépend de l'état d'érouissage des phases, lorsque le modèle linéaire présente une dépendance de  $k^\star$  vis-à-vis des modules de cisaillement des phases, et ceci bien que le comportement des phases sous chargement sphérique soit linéaire : l'incompressibilité plastique des constituants ne garantit pas celle du composite. En revanche, la formulation présentée plus haut met en évidence une différence essentielle entre les deux approches : l'érouissage des phases ne dépend que du déviateur macroscopique dans le cas classique, si bien que le comportement macroscopique sous chargement purement sphérique ( $\text{dev}(\underline{\underline{E}}) = 0$ ) est linéaire. L'extension classique est ainsi, par exemple, parfaitement incapable de décrire la plastification des milieux poreux sous un tel chargement. Ceci résulte de ce qu'elle ne retient que la déformation moyenne des phases pour caractériser leur état et ignore complètement l'hétérogénéité du champ local. De telles considérations ont conduit plusieurs auteurs à préférer l'extension modifiée, mais sans que sa signification réelle et son lien avec la théorie de Ponte Castañeda ne soient précisés [36]. Nous présentons au chapitre 3 une autre extension allant dans ce sens, proposée avant que le résultat de Suquet n'ait été établi.

Notons enfin que les deux extensions aux comportements non-linéaires, présentées ici dans une approche en déformation imposée et avec un érouissage caractérisé par la déformation, admettent une représentation similaire en termes de contraintes. On obtient des résultats identiques avec l'approche classique, puisque le module sécant associé à la déformation moyenne sur une phase est, par construction, identique à celui associé à la contrainte moyenne. Le cas de l'extension modifiée mérite en revanche une investigation complémentaire que nous n'aborderons pas ici.

### 1.3.B.d Signification des champs locaux

L'interprétation des champs locaux a déjà été discutée dans le cas général au paragraphe 1.1.E.d, mais il convient de la préciser ici. Les deux extensions aux comportements non-linéaires décrites plus haut présentent en effet une double approximation : la première est relative au remplacement du milieu non-linéaire réel par un « milieu linéaire sécant » et la seconde concerne la description de ce dernier par un modèle linéaire particulier. Il faut distinguer le champ local  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}})$  dans le matériau réel sous le chargement  $\underline{\underline{E}}$ , du champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{\underline{x}})$  dans le matériau linéaire de comparaison dans les mêmes conditions, lui-même distinct du champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^\star(\underline{\underline{x}})$  invoqué par le modèle linéaire, dont on peut calculer certaines caractéristiques, telles les moyennes par phases  $\langle \underline{\underline{\epsilon}}^\star \rangle_i$ , les moyennes en des points homologues  $\underline{\underline{\epsilon}}^\star(\underline{\underline{x}})$ , ou les moments d'ordre deux. . .

Lorsque le modèle linéaire produit une borne pour le comportement linéaire effectif, les champs  $\underline{\underline{\epsilon}}^\star(\underline{\underline{x}})$  sont des champs d'essai, dont on peut tout au plus espérer qu'ils soient proches des champs effectifs  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{\underline{x}})$  dans le matériau linéaire, sans que rien ne permette de justifier cette propriété. La probabilité que l'information fournie par le modèle sur ces champs soit pertinente vis-à-vis des champs réels  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}})$  dans le matériau non-linéaire est encore plus faible. Toutefois, dans le cas d'un biphasé, on peut préciser le domaine possible des déformations moyennes par phases dans le matériau linéaire, ainsi que nous l'avons fait pour les bornes de Voigt et Reuss au paragraphe 1.2.A. Rien ne garantit en revanche la validité de cette information pour le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}})$ .

Lorsque le modèle linéaire fournit une estimation supposée pertinente du comportement effectif linéaire, il est possible d'extraire des informations exactes sur le champ local au travers de relations de la forme (1.70), (1.71) ou (1.72), mais aussi des informations approchées puisque le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x})$  est supposé être une bonne approximation de  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ(\underline{x})$ . Mais, comme précédemment, leur pertinence vis-à-vis du champ réel  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$  n'est pas assurée.

L'utilisation de l'information locale extraite des modèles usuels étendus aux comportements non-linéaires pour caractériser le champ local réel est donc dans tous les cas une approximation, dont la validité ne peut être jugée que par l'expérience : une telle confrontation est entreprise au chapitre 3. Dans l'attente, nous admettons la pertinence de cette information locale et la précisons dans ce qui suit.

Remarquons d'abord que l'extension classique semble préserver la signification physique intuitive des modèles linéaires usuels alors que l'extension modifiée les utilise plutôt comme des « boîtes noires ». En particulier, le milieu infini dans les problèmes d'inclusions du modèle autocohérent ou du modèle des trois phases conserve dans l'extension classique son rôle « d'interface moyenne » entre le chargement macroscopique et un domaine de phase ou une inclusion composite, et « s'assouplit » progressivement selon l'évolution du module sécant au cours du chargement pour rendre compte de l'accommodation plastique. Il semble au contraire avoir totalement disparu dans l'extension modifiée, en tous cas dans la formulation mathématique donnée plus haut. En réalité, il n'en est rien, puisque le modèle élastique invoqué fait toujours référence aux mêmes problèmes d'inclusions que dans le cas linéaire. Dans le modèle autocohérent ou le modèle des trois phases, le milieu infini a les propriétés élastiques sécantes du milieu non-linéaire macroscopique, associées à la déformation macroscopique ; la condition d'autocohérence choisie parmi les diverses possibilités présentées au paragraphe 1.2.B.d est inchangée.

En revanche, le comportement local des phases au sein des problèmes d'inclusions diffère suivant l'extension retenue. Dans le cas classique, le « comportement moyen » d'une phase  $i$  dans ces problèmes, c'est-à-dire la relation entre déformation et contrainte moyennes sur cette phase, est identique à son comportement non-linéaire réel :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle_i = \left\{ 2\mu_i^\circ \left( \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle_i^{\text{eq}} \right), 3k_i \right\} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}^* \rangle_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \left( \langle \underline{\underline{\epsilon}}^* \rangle_i \right). \quad (1.183)$$

Lorsque les champs sont homogènes dans les inclusions, comme par exemple dans le cas du modèle autocohérent classique, du modèle de Mori et Tanaka et de ses variantes, la loi de comportement non-linéaire est de surcroît respectée localement. Il n'en est rien pour l'extension modifiée puisque, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\sqrt{\langle \epsilon^{*\text{eq}2} \rangle_i} \geq \langle \underline{\underline{\epsilon}}^* \rangle_i^{\text{eq}}, \quad (1.184)$$

si bien que l'équivalent de la contrainte moyenne sur la phase  $i$  calculée dans le problème linéaire de comparaison est *inférieure* à celui associé à l'équivalent de la déformation moyenne par la loi de comportement non-linéaire et qu'il en est de même pour les grandeurs locales lorsque les champs sont homogènes : le comportement local des constituants dans les problèmes d'inclusions ne s'identifie pas à leur comportement réel au sein du composite.

Ceci peut sembler incohérent dans une interprétation quelque peu simpliste des modèles usuels, mais se conçoit mieux lorsqu'on se souvient que les milieux sécants utilisés sont supposés représenter un certain comportement moyen d'une phase au sein du matériau réel, c'est-à-dire la relation entre des grandeurs caractérisant les moyennes sur cette phase des champs locaux hétérogènes de contrainte et de déformation. Comme le comportement local est non-linéaire, avec une courbe  $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}})$  concave, il n'est pas surprenant que ce comportement moyen soit plus souple que le comportement local. La figure 1.24 illustre ce fait dans un cas unidimensionnel où la déformation dans l'une des phases prend deux valeurs distinctes  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , de moyenne  $\epsilon$ . La contrainte moyenne sur cette phase,  $\sigma$ , s'obtient en moyennant les contraintes locales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  associées aux déformations locales. Le module sécant judicieux pour cette phase est le module  $\mu$  liant  $\sigma$  et  $\epsilon$  ; il est inférieur au module  $\mu^*$  associé à  $\epsilon$  par la loi de comportement. L'extension classique fait appel à ce dernier module et « raidit » donc le comportement moyen, alors que l'extension modifiée utilise un module plus faible et donc plus proche

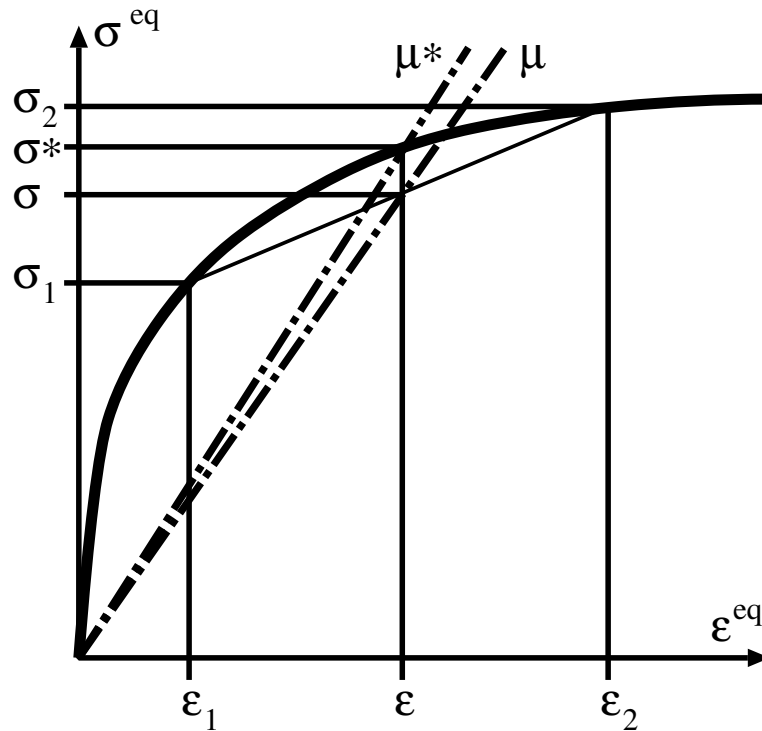


Figure 1.24 : Module de cisaillement sécant « moyen »

du module  $\mu$ . Cette représentation simplifiée ne s'applique bien sûr pas à une situation réelle, mais permet de mieux comprendre le contenu physique de l'extension modifiée. L'application aux cas réels nécessite le recours aux analyses plus complètes et rigoureuses de Ponte Castañeda et de Suquet, le maître mot restant toutefois la *concavité* de la courbe  $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}})$  caractérisant le comportement de chacune des phases, utilisée explicitement dans la démarche de Suquet [154] et permettent de borner le potentiel local par un potentiel quadratique dans l'approche de Ponte Castañeda.

Ces remarques justifient que la signification physique des modèles linéaires en termes de problèmes d'inclusions soit préservée au travers de l'extension classique comme de l'extension modifiée. En particulier, les informations extraites sur les champs locaux ont la même interprétation vis-à-vis des champs dans le matériau de comparaison que dans le cas linéaire : les champs homogènes dans des inclusions homogènes sont des valeurs moyennes par phases, les champs hétérogènes dans des inclusions composites sont des champs moyens calculés en des points homologues d'un même motif et les moments d'ordre deux s'obtiennent avec les relations (1.72)... Dans la mesure où l'on admet que le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x})$  peut être utilisé pour caractériser le champ réel  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$ , ces mêmes informations s'appliquent aussi à ce dernier.

Précisons enfin, pour bien clarifier les choses, que les moments d'ordre deux utilisés dans l'extension modifiée sont distincts des moments d'ordre deux que l'on peut calculer par intégration sur les phases de l'inclusion composite du modèle trois phases. Les premiers sont relatifs aux champs locaux aux points  $\underline{x}$  dans le VER du milieu de comparaison linéaire, alors que les seconds sont relatifs aux points  $\tilde{\underline{x}}$  dans l'inclusion composite noyée en milieu infini<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Dans l'interprétation du modèle des trois phases en termes de motifs morphologiques [74], les champs aux points  $\tilde{\underline{x}}$  sont les moyennes en des points homologues  $\underline{x}$  des champs au sein du VER, si bien que l'on aurait :

$$\langle \epsilon^{*\text{eq}2}(\underline{x}) \rangle_i \geq \langle \epsilon^{*\text{eq}2}(\tilde{\underline{x}}) \rangle_i, \quad (1.185)$$

mais ceci mérite une vérification.

### 1.3.C Homogénéisation périodique et méthodes dérivées

Les méthodes d'homogénéisation périodique visent à résoudre exactement les problèmes de localisation sur un VER d'un matériau hétérogène à microstructure périodique en tirant profit de la périodicité des champs locaux. Les moyens actuels de calcul des structures permettent de réaliser cette opération pour des gammes de comportement des constituants très variées et des géométries des cellules de base en théorie quelconques. La principale limitation de ces méthodes est la taille des modèles numériques à mettre en œuvre. L'interprétation des résultats et en particulier des champs locaux calculés est claire, en tous cas vis-à-vis de microstructures exactement périodiques. Elle l'est en revanche nettement moins lorsque ces mêmes méthodes sont utilisées pour décrire des microstructures aléatoires.

Le développement rapide de l'informatique au cours des vingt dernières années a induit un essor considérable de l'utilisation de ces méthodes comme moyen d'investigation micromécanique. La technique des éléments finis est l'outil mathématique presque universellement retenu pour résoudre les équations aux dérivées partielles sous-jacentes aux problèmes de localisation, son succès étant dû à sa facilité de mise en œuvre, sa grande souplesse et l'offre de plus en plus large en logiciels. Il est hors de propos de brosser ici un tableau exhaustif du domaine, mais nous mentionnons toutefois quelques études visant à mettre en évidence les relations entre morphologie et comportement mécanique et tentons de préciser les limitations et les tendances actuelles de ces approches.

De nombreux calculs ont été effectués pour déterminer le comportement de matériaux composites à particules. Certaines études [44, 139, 163, 114] ont recours à une cellule de base constituée d'une particule de forme variable, entourée d'une gaine de matrice cylindrique à base circulaire soumise à des conditions aux limites axisymétriques appliquées aux bords. Cette structure est supposée être une bonne représentation d'une microstructure périodique à symétrie hexagonale dans le plan (*cf.* figure 1.25) ; son intérêt est de simplifier les conditions aux limites périodiques et d'autoriser des modèles numériques axisymétriques bidimensionnels, compatibles avec la puissance des stations de travail actuelles. La matrice présente un comportement élasto-plastique [44, 139], endommageable dans certains modèles [114]. La particule est rigide ou élastique linéaire ; elle est éventuellement rompue. Des non-linéarités fortes, telles la décohérence de l'interface, peuvent être prise en compte [114]. Cette cellule de base permet de tester l'effet de divers paramètres morphologiques. La forme de l'inclusion peut être modifiée, à condition de respecter sa symétrie axiale : les géométries ellipsoïdales, cylindriques et coniques ont été testées. Le rapport de forme de la cellule rend compte de l'écartement relatif des particules dans un plan de l'empilement et de la distance entre deux plans et caractérise ainsi la distribution spatiale des renforts.

Ces approches ne permettent pas de calculer la réponse macroscopique sous des chargements ne respectant pas la symétrie axiale : le comportement macroscopique n'est donc caractérisé que très partiellement. Des modèles numériques tridimensionnels sont nécessaires pour d'autres sollicitations, mais un maillage complet de la cellule de base reste hors de portée des moyens de calcul conventionnels actuels, en tous cas pour des problèmes non-linéaires et avec des temps de calculs raisonnables. L'utilisation des symétries de la cellule de base pour réduire la taille du maillage limite d'autant le type de sollicitations calculables. La réponse sous sollicitation transverse à l'axe des particules a toutefois été calculée dans l'étude [84]. L'utilisation de conditions aux limites particulières dans cette même étude permet aussi de simuler des distributions de particules légèrement plus générales que celles décrites par un modèle axisymétrique, une disposition en quinconce des particules de deux plans adjacents étant possible.

Ces modèles sont toutefois incapables de rendre compte de la véritable microstructure observée expérimentalement sur les composites qu'ils sont susceptibles de représenter. L'agglomération des particules en paquets, la désorientation relative des unes par rapport aux autres, ou la présence de plusieurs géométries d'inclusions ne peuvent par exemple pas être décrites. Pour rendre compte de ces phénomènes, des cellules de base contenant plusieurs particules sont nécessaires. Plus généralement, la description de l'agencement complexe des phases dans un matériau multiphasé par homogénéisation périodique nécessite des cellules de base de grande extension, assimilables à un VER entier. Comme les calculs numériques avec de tels modèles tridimensionnels sont encore hors de portée des ordin-



ateurs actuels, de nombreux auteurs ont eu recours à des modèles bidimensionnels en déformations ou contraintes planes pour étudier ces effets. Si de telles approches semblent licites pour l'étude de structures manifestement planes, tels des composites à fibres alignées [19, 20] ou éventuellement des polycristaux biphasés à grains très allongés et alignés [172], leur application à des structures tridimensionnelles mérite des justifications précises qui ne sont pas toujours fournies et la pertinence des champs locaux calculés vis-à-vis des champs réels est discutable. L'effet de la position relative de deux particules dans un composite a été étudié de la sorte [44], au moyen d'un maillage relativement simple ne comportant qu'une inclusion mais avec des conditions aux limites judicieuses. Plus récemment, l'augmentation de puissance des ordinateurs aidant, des calculs ont pu être menés avec des maillages contenant une cinquantaine de particules ou de cavités dans une disposition plus ou moins aléatoire, représentative d'une microstructure réelle [8] ; des conditions aux limites homogènes facilitent la mise en œuvre numérique. La même référence présente un calcul similaire donnant la réponse d'un domaine polycristallin contenant une quarantaine de grains de géométries et d'orientations différentes. Des moyens utilisant l'analyse d'images ont été développés pour construire automatiquement des maillages à partir de micrographies réelles [87]. D'autres techniques font appel à des éléments dont les divers points de Gauss présentent des propriétés mécaniques différentes et facilitent la discrétisation d'une microstructure réelle [147].

Ces méthodes butent actuellement sur la limite intrinsèque de la méthode des éléments finis implicites, à savoir la croissance très rapide de l'encombrement de la matrice de rigidité en fonction du nombre de degrés de liberté. L'augmentation de la puissance des moyens de calcul et la parallélisation des algorithmes ne permettront de la repousser que très lentement, si bien que l'utilisation systématique de ces méthodes pour calculer la réponse d'un VER tridimensionnel entier n'appartient pas à un avenir immédiat. Une nouvelle méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, susceptibles de repousser les limites de ce type de simulations, a toutefois été proposée récemment [125]. Elle utilise les propriétés de la transformation de Fourier : le problème mécanique est résolu dans l'espace des phases, où il se ramène à une simple multiplication tensorielle, et le passage à l'espace réel est effectué par transformée de Fourier rapide. Les performances de cette dernière rendent cette méthode beaucoup plus efficace que la méthode des éléments finis : alors qu'il est de l'ordre de la dizaine de milliers pour cette dernière, le nombre de degrés de liberté autorisé par les moyens de calcul actuels passe à plusieurs millions. Les calculs bidimensionnels sont réalisés directement à partir d'une image numérisée de la microstructure, sans qu'aucun maillage ne soit nécessaire, la discrétisation des champs mécaniques étant assurée au niveau du pixel. Des images de résolution  $1024 \times 1024$  pixels représentant une maille élémentaire d'une structure périodique, contenant 64 fibres élastiques distribuées de manière aléatoire dans une matrice élasto-plastique ont par exemple été traitées. La localisation de la déformation en bandes d'épaisseur plus ou moins large est mise en évidence. La méthode peut être utilisée pour calculer des structures en trois dimensions, mais le nombre de degrés de liberté augmente d'autant. À titre d'exemple, notons qu'un calcul bidimensionnel sur une image de  $1024 \times 1024$  pixels comporte environ autant de degrés de liberté qu'un problème tridimensionnel de taille  $64 \times 64 \times 64$  pixels. Représenter une microstructure réelle avec une telle résolution semble illusoire et il ne faut donc pas encore espérer une précision très élevée avec cette technique, qui n'en est toutefois qu'à ses débuts.

Le but final de ces méthodes est de calculer complètement les champs de déformation locaux dans un VER du composite. Or, comme nous l'avons annoncé en début de chapitre, une telle information est largement superflue puisqu'en fin de compte seules les grandeurs macroscopiques, moyennes des grandeurs locales, sont nécessaires. Leur calcul exact nécessite de connaître un certain nombre de grandeurs pertinentes pour caractériser l'état local associé à une microstructure donnée. Un modèle micromécanique performant doit être capable de les fournir au moindre coût. Les modèles visant à calculer toutes les variations locales sont de ce point de vue trop « luxueux » et inefficaces, car trop lourds à mettre en œuvre de manière systématique, et ceci probablement pour longtemps encore. À l'opposé, les modèles utilisant des mailles élémentaires trop petites, tels ceux ne considérant qu'une seule inclusion, ignorent trop d'aspects de la microstructure pour être véritablement représentatifs : les effets de la distribution spatiale des renforts sont négligés, les variations des propriétés physiques et géométriques d'une inclusion à l'autre sont nivelées, tout comme les variations des champs locaux au cours du chargement. Par exemple, un tel modèle prévoit la rupture simultanée de tous les ren-

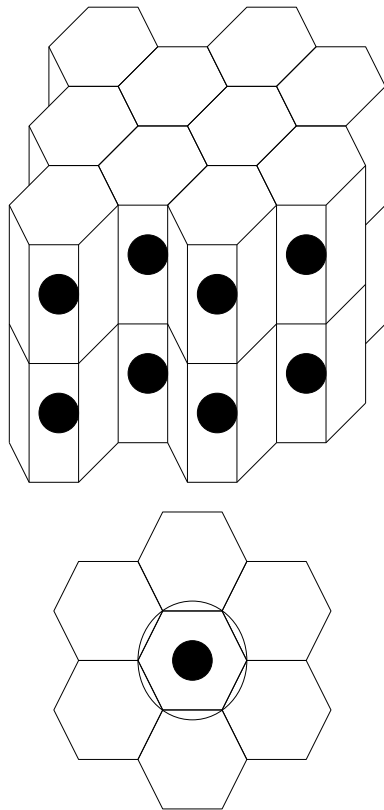


Figure 1.25 : Modèles axisymétriques d'un composite périodique à particules

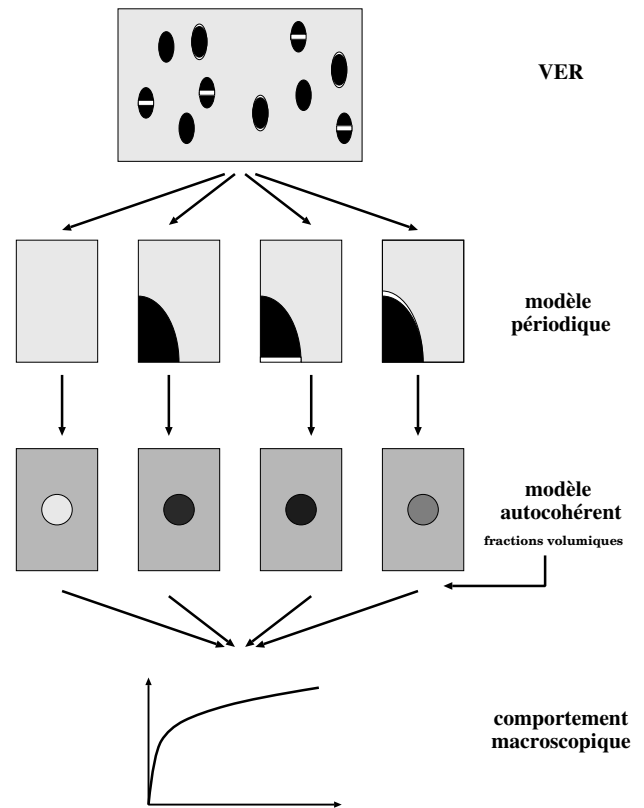


Figure 1.26 : Homogénéisation en deux étapes selon [163]

forts et ne permet pas de prédire l'endommagement progressif du composite que l'on peut observer dans un matériau réel, où les inclusions cèdent les unes après les autres, en fonction de leur résistance propre, qui obéit à une certaine distribution statistique, et de l'état de charge local, dépendant du chargement macroscopique et mais aussi du voisinage particulier de chaque renfort. De telles considérations ont conduit F. Thébaud [163] à proposer une démarche intermédiaire en deux étapes, combinant les principes de l'homogénéisation périodique à ceux de l'approche autocohérente classique. L'idée, schématisée en figure 1.26, consiste à isoler dans un matériau composite à matrice métallique un certain nombre de configurations locales représentatives des phénomènes physiques susceptibles d'apparaître et d'influencer le comportement global, à déterminer leur comportement effectif à une échelle intermédiaire par homogénéisation périodique, et à en déduire le comportement macroscopique par une seconde étape d'homogénéisation, fondée sur le schéma autocohérent classique étendu aux comportements non-linéaires par l'extension classique, en prenant en compte des paramètres de distribution statistique de ces phases intermédiaires. Dans le cas particulier considéré, quatre phases intermédiaires sont recensées : la matrice pure, les zones composites non endommagées, les zones à particules cassées et celles où elles sont décollées. La seconde étape d'homogénéisation suppose une répartition isotrope de ces phases, mais introduit un paramètre de distribution supplémentaire, la « fraction volumique de composite endommagé »  $c_e$ . Cette démarche est certes critiquable : elle suppose l'existence au sein du composite de deux échelles microscopiques bien séparées et introduit un paramètre  $c_e$  qui évolue en fonction du chargement selon une loi qui n'est pas bien claire<sup>8</sup>. En revanche, elle a le mérite de combiner, dans une procédure raisonnablement facile à mettre en œuvre, une description assez précise des micromécanismes locaux qui gouvernent manifestement le comportement du composite et la prise en compte des paramètres de distribution géométriques et statistiques, qui régissent la manière dont ces événements locaux transmettent leurs effets à l'échelle macroscopique. Cette idée est l'une de celles qui soutiennent les modélisations que nous avons tenté de développer au cours de ce travail.

<sup>8</sup>Dans la démarche de F. Thébaud, il est d'ailleurs considéré comme une inconnue à déterminer et à comparer à l'expérience et non comme une donnée microstructurale.



## Chapitre 2

# Mesures de déformations locales

Nous présentons dans ce chapitre la technique expérimentale que nous avons utilisée pour caractériser le champ de déformation local dans un matériau hétérogène sur un domaine représentatif de sa microstructure. Elle utilise la microscopie électronique à balayage, la microélectrolithographie, l'analyse d'image et des moyens d'essais mécaniques *in situ*. Si l'utilisation de grilles d'or déposées à la surface d'éprouvettes par microélectrolithographie pour le suivi qualitatif des mécanismes locaux de déformations est relativement ancienne [6], le traitement quantitatif des déformations de ces grilles est plus récent ; les prémices en sont décrits dans [21] et [2]. La technique comporte principalement trois étapes : d'abord l'essai lui-même et l'acquisition des images de la zone étudiée, avant et après déformation de l'éprouvette, ensuite le traitement des images pour déterminer les coordonnées de chacun des points d'or de la grille et enfin le traitement numérique de ces coordonnées permettant d'en extraire les quantités pertinentes pour le micromécanicien. Les deux premières étapes n'ont que peu évolué depuis les premières tentatives ; nous les présentons toutefois dans leur intégralité afin de préserver la cohérence de cet exposé. La troisième étape a en revanche été entièrement revue, tant du point de vue des informations extraites que de l'estimation rigoureuse des incertitudes de mesures. La description de la technique donnée ici est adaptée aux matériaux biphasés modèles fer/argent et fer/cuivre que nous avons testés sous traction uniaxiale pour confronter les prévisions des modèles de changement d'échelle aux réalités physiques de tels matériaux. Rien n'empêche toutefois d'appliquer la technique à d'autres matériaux, notamment polycristallins [40], sous des sollicitations différentes.

Après une rapide revue des techniques existantes de mesure de champs de déformation, nous décrivons la procédure expérimentale d'acquisition et de traitement des images. Le calcul des déformations locales et moyennes fait ensuite l'objet de la troisième partie. Nous tentons enfin une critique de la technique et suggérons quelques extensions possibles. Notons que l'essentiel de la technique est également décrit dans la référence [3].

## 2.1 Revue des techniques existantes

### 2.1.A Cahier des charges

L'approche micromécanicienne pour décrire le comportement des matériaux consiste à déceler les mécanismes élémentaires pertinents qui opèrent à l'échelle de la microstructure et à en déduire les conséquences macroscopiques à l'échelle du volume élémentaire représentatif. Le micromécanicien expérimentateur se doit donc de regarder de suffisamment près pour voir précisément les mécanismes locaux, mais aussi de suffisamment loin pour avoir une vision statistiquement représentative de l'ensemble des phénomènes en jeu. Il en est de même de toute caractérisation micromécanicienne de champs de déformation.

Ces tailles caractéristiques dépendent bien évidemment des matériaux considérés et des mécanismes effectivement pertinents. Mais pour bon nombre de matériaux d'intérêt industriel, l'échelle locale pertinente est de l'ordre du micromètre ou de quelques micromètres : pour les métaux polycristallins usuels, cette échelle est par exemple celle du grain et dans les matériaux composites à renforts

particulaires, c'est la taille des renforts. La taille caractéristique des hétérogénéités des domaines de phases dans les matériaux biphasés testés ici est de l'ordre de la dizaine de micromètres. La mesure d'une déformation élasto-plastique locale avec une précision de l'ordre du pour-cent sur une telle base de mesure suppose donc de pouvoir mesurer des déplacements au dixième de micromètres près.

Pour des matériaux à microstructure périodique, la cellule élémentaire contient en général toutes les informations requises. L'étendue du volume élémentaire représentatif n'est en revanche pas facile à déterminer dans des matériaux à microstructure aléatoire. Nous proposons dans ce chapitre une méthode relativement simple pour en déterminer une dimension minimale sur des matériaux biphasés. Il s'avère que sur les matériaux étudiés ici, elle est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètres. La méthode de mesure doit donc être capable de positionner un point au dixième de micromètre près sur une zone d'une étendue de quelques centaines de micromètres.

### 2.1.B Méthodes de moiré

Les méthodes de moiré [130] analysent les interférences entre un réseau régulier de lignes parallèles et un autre réseau de pas comparable mais déformé. Les franges obtenues sont en fait des lignes d'isovaleurs de la composante perpendiculaire aux lignes non déformées du déplacement du réseau déformé. La précision de la mesure est donnée par le pas du réseau. Les techniques classiques [35, 48] autorisent environ 40 lignes/mm. La déformation ne peut donc être mesurée avec une précision suffisante que sur des plages de plusieurs millimètres.

Des techniques de lithographie plus récentes [141] permettent des pas de  $4 \mu\text{m}$ , alors que la limite théorique de telles méthodes optiques, liée à la longueur d'onde de la lumière utilisée, est atteinte par la technique du moiré interférométrique [137, 138]. Les réseaux d'environ 2000 lignes/mm autorisent des mesures de déplacements de l'ordre du micromètre voire inférieurs [66]. Malheureusement le dépôt de telles grilles s'avère particulièrement délicat.

Des systèmes d'analyse automatique des franges d'interférence ont été mis au point pour mesurer le déplacement sur de grands domaines. Le champ de déformation dans un composite lors d'un essai de flexion à quatre points a par exemple été mesuré [136] sur un domaine de  $2 \times 3 \text{ mm}^2$  pour une taille caractéristique des variations du champ de l'ordre de 0,2 mm. Des techniques d'interpolation autorisent des précisions légèrement supérieures [65], mais toujours inférieures aux valeurs souhaitées.

### 2.1.C Méthodes de corrélations

D'autres techniques comparent les images d'une configuration de référence et d'une configuration déformée. Elles nécessitent l'existence d'un grand nombre de détails locaux à la surface des éprouvettes permettant de reconnaître clairement deux points homologues. De plus, ces détails ne doivent pas être transformés autrement que géométriquement par la déformation du matériau. Lorsque la surface des éprouvettes est trop régulière, des motifs aléatoires peuvent être imprimés.

La stéréophotogrammétrie [10, 50] analyse en terme de déplacement le faux relief engendré par la déformation et mesuré manuellement avec des stéréocomparateurs. Des méthodes plus récentes utilisent l'imagerie numérique et associent des points homologues en maximisant une fonction de corrélation entre deux images enregistrées par une caméra vidéo [132, 158, 45, 155, 180]. Le déplacement peut être mesuré en tout point de l'éprouvette recouverte du motif aléatoire et la précision de mesure est bonne (jusqu'à  $0,1 \mu\text{m}$  d'après ces auteurs à condition d'utiliser une caméra de bonne résolution). Il est toutefois indispensable que la déformation soit quasiment homogène sur des domaines plus grands que la dimension caractéristique des motifs aléatoires imprimés, soit environ 0,1 mm lorsque des méthodes optiques sont utilisées. Ces techniques ne peuvent donc pas être utilisées pour mesurer des champs qui varient à une échelle plus fine. Le champ de déformation au voisinage d'un fond de fissure [157] a pu être mesuré de la sorte, sur un domaine d'environ  $2 \times 2 \text{ mm}^2$  sur lequel il varie de manière relativement douce.

---

### 2.1.D Méthodes de grilles

Le microscope électronique à balayage (MEB) est en fait l'outil approprié pour caractériser des champs de déformation à une échelle plus fine. Les méthodes de corrélation peuvent bien sûr aussi s'appliquer aux images numériques obtenues au MEB, à la condition que les surfaces observées présentent des détails suffisamment fins et contrastés n'évoluant pas avec la déformation. C'est rarement le cas et c'est pourquoi des microgrilles sont classiquement déposées à la surface des éprouvettes. Diverses techniques d'impression de grilles ont été proposées [128, 72], mais la microélectrolithographie s'avère être la plus facile de mise en œuvre. Ses premières applications en micromécanique sont relativement anciennes [6], et elle a depuis été utilisée par plusieurs auteurs [60, 30]. Le pas des grilles obtenues varie de 2 à 10  $\mu\text{m}$  ou plus et permet de visualiser des déformations à cette échelle. Elle présente aussi l'avantage d'offrir des images bien contrastées et de ne pas occulter la microstructure du matériau sous-jacent, contrairement à la technique utilisant des motifs aléatoires mentionnée précédemment.

De telles microgrilles sont utilisées principalement pour l'information qualitative qu'elles permettent de révéler sur les mécanismes locaux : glissement, maclage, décohesion ou glissement d'interface sont ainsi facilement mis en évidence. Les quelques tentatives d'analyse quantitative des déformées des grilles sont restées sans suite du fait de la lourdeur des traitements manuels employés et de la faible précision obtenue. Notons également l'existence d'une technique de moiré associée à ces grilles, utilisant les interférences entre la grille et le balayage du MEB à faible grossissement. On obtient des lignes d'isovaleurs de déplacement, mais, comme mentionné plus haut, la précision obtenue est donnée par le pas de la grille et s'avère donc insuffisante. L'utilisation qualitative de ces moirés est toutefois possible [47].

### 2.1.E Techniques quantitatives d'analyse de grilles

Des techniques de traitement automatique de grilles de points ou de lignes ont été développées dans d'autres contextes et s'appliquent toutes à des images de caméras optiques. Certaines ont recours à des opérations morphologiques sur des images binaires obtenues par seuillage d'images en niveaux de gris [59] ; d'autres, plus récentes [56, 148, 150, 149, 4], utilisent directement l'information fournie par ces dernières, au prix d'un traitement informatique plus lourd mais parfaitement accessible aux ordinateurs actuels. Tous ces travaux utilisent des grilles de pas supérieurs à 0,1 mm et s'intéressent aux champs de déformation s'établissant dans des structures macroscopiques comme des éprouvettes perforées ou fissurées. Moins de quelques centaines de points visibles simultanément dans le champ de la caméra sont en général pris en compte ; toutefois dans l'étude décrite dans la référence [4], les déplacements de plusieurs milliers de points sont mesurés, le domaine étudié étant observé par plusieurs prises de vues.

Le traitement d'image vise à déterminer les coordonnées de chaque point de la grille, dans les deux configurations de l'éprouvette. Les déformations locales sont ensuite obtenues par dérivation de cette information discrète sur le champ de déplacement [45]. Un formalisme de transformation finie peut éventuellement être employé [56, 4]. Des techniques de lissage ont aussi été développées [156].

Nous proposons dans ce travail d'utiliser ces techniques quantitatives pour traiter les images de grilles obtenues au MEB. Le traitement d'image proprement dit ne fait pas appel à l'analyse en niveaux de gris mentionnée précédemment : en l'absence de système d'analyse d'images suffisamment performant, le traitement binaire est resté la règle. Nous donnons toutefois quelques idées d'évolutions possibles. Le calcul des déformations a en revanche considérablement évolué depuis les débuts de la technique ; le formalisme complet est décrit et généralise les méthodes citées ci-avant.

## 2.2 Procédure expérimentale

### 2.2.A Préparation des éprouvettes

Les éprouvettes utilisées sont plates ; leur section est d'environ  $6 \times 2 \text{ mm}^2$  pour une longueur de partie utile supérieure à 10 mm. Elles sont préparées selon une procédure classique pour une

---

observation sous MEB : un polissage mécanique avec des papiers abrasifs de granulométrie décroissante de  $200\ \mu\text{m}$  à  $8\ \mu\text{m}$ , suivi d'un polissage à la pâte diamantée de granulométrie  $6\ \mu\text{m}$ ,  $3\ \mu\text{m}$  et  $1\ \mu\text{m}$ .

La grille d'or est ensuite déposée par microélectrolithographie, le tracé souhaité étant obtenu par l'irradiation d'une résine électrosensible par le faisceau d'électrons du MEB. Le lecteur peut trouver une description complète de cette technique maintenant classique dans la référence [3]. Le pas doit être petit en comparaison des dimensions caractéristiques des variations du champ de déformation à mesurer. Une valeur de  $3$  à  $5\ \mu\text{m}$  est satisfaisante pour les biphasés fer/argent ; une valeur légèrement plus élevée peut être adoptée pour les biphasés fer/cuivre dont la microstructure est plus grossière. Pour faciliter le traitement d'image, une grille de points est utilisée. Notons que les possibilités de balayage du microscope font que la grille obtenue est rectangulaire avec un rapport de forme d'environ  $3/2$ . Environ  $500$  lignes de  $500$  points sont tracées, mais en pratique seule une zone centrale d'environ  $1,5 \times 2,2\ \text{mm}^2$  est de qualité suffisante pour pouvoir être analysée. Plusieurs grilles peuvent bien sûr être tracées sur une même éprouvette.

## 2.2.B Montage expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé en figure 2.1. L'éprouvette est montée sur la machine de traction *in situ* placée dans la chambre du MEB (JEOL 845). L'essai de traction simple quasi-statique est contrôlé par le déplacement du mors mobile ; des vitesses de déformation macroscopique de l'ordre de  $10^{-4}\text{s}^{-1}$  sont en général utilisées. La surface de l'éprouvette est perpendiculaire à l'axe optique du MEB et les dispositifs de translation de la machine permettent d'observer toute la partie utile.

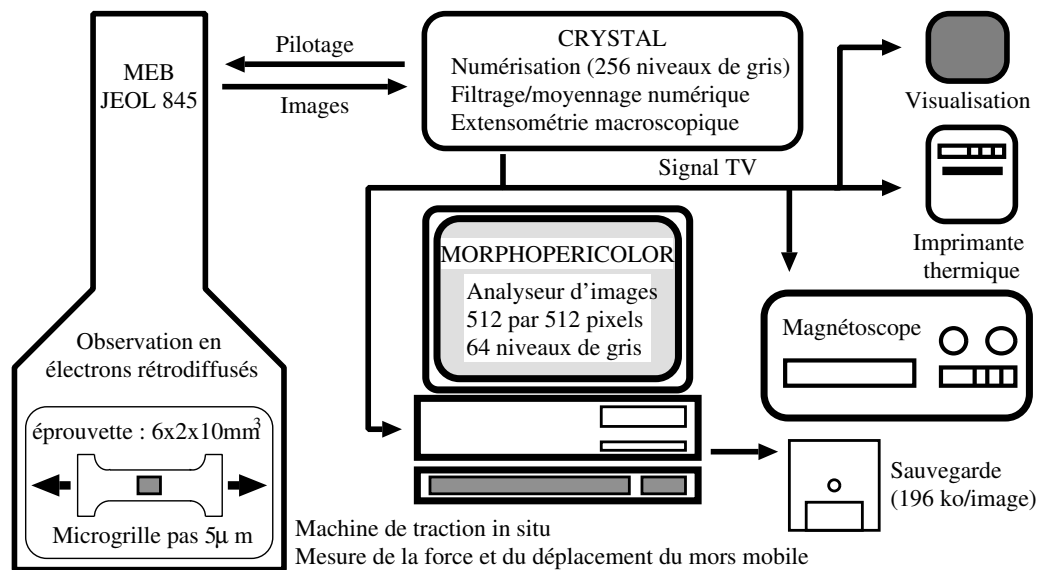


Figure 2.1 : Dispositif expérimental

L'observation en électrons rétrodiffusés garantit un bon contraste chimique aux images destinées à être traitées numériquement : les points d'or sont facilement repérables sur le substrat de fer, de cuivre ou d'argent. Le contraste topographique dû à la déformation plastique, néfaste au traitement numérique, est aussi réduit. Un dispositif électronique (CRYSTAL) émet les rampes de balayage du MEB et numérise le signal issu des détecteurs. Des images numériques de  $520 \times 576$  pixels sur 8 bits (256 niveaux de gris) sont ainsi obtenues. Divers filtres numériques ou procédures de moyennes permettent d'en améliorer la qualité. Cet appareil délivre ensuite un signal vidéo analogique de ces images que l'on renvoie sur divers périphériques : moniteur de contrôle, imprimante vidéo thermique, magnétoscope U-Matic et analyseur d'image MORPHOPERICOLOR. À ce stade de l'expérience, ce dernier ne sert qu'à la re-numérisation du signal vidéo en une image numérique de  $512 \times 512$  pixels en réseau hexagonal et 6 bits de profondeur et à la sauvegarde des images sur support magnétique.

Le CRYSTAL offre également des possibilités de mesure sur les images acquises. On peut ainsi estimer la déformation macroscopique atteinte au cours de l'essai en comparant la distance selon l'axe

de traction, exprimée en pixels pour un grandissement fixe, entre deux détails reconnaissables de la microstructure et suffisamment éloignés l'un de l'autre. Cette procédure présente l'avantage de ne pas être perturbée par le glissement des mors et sa précision s'avère suffisante. Notons qu'une telle mesure n'est valable que si les grandissements affichés par le microscope sont stables au cours du temps. Pour s'en assurer, on peut par exemple mesurer régulièrement de la sorte la dimension d'un objet introduit dans la chambre du microscope et vérifier que le résultat ne change pas. Il s'avère qu'à l'échelle de temps d'un tel essai, soit environ un jour pour l'acquisition de toutes les images, les gains du microscope sont constants.

### 2.2.C Détermination d'un domaine représentatif

Comme annoncé au paragraphe 2.1.A, une des difficultés d'un tel essai est la détermination de l'extension minimale d'un domaine représentatif de la microstructure. Nous proposons ici une méthode systématique donnant une borne inférieure pour cette dimension. Elle repose sur les propriétés de convergence des fonctions de covariance statistique ou covariogrammes [41], définies pour des matériaux multiphasés statistiquement homogènes.

La valeur  $C_{ij}(\underline{h})$  du covariogramme phase  $i$ /phase  $j$  est la probabilité, indépendante de  $\underline{x}$ , que deux points,  $\underline{x}$  et  $\underline{x} + \underline{h}$ , appartiennent respectivement à la phase  $i$  et à la phase  $j$ . Dans les matériaux considérés dans cette étude, la distribution des phases est isotrope, si bien que ces fonctions ne dépendent que de la distance entre ces deux points :

$$C_{ij}(\underline{h}) = C_{ij}(\|\underline{h}\|) = C_{ij}(h). \quad (2.1)$$

$C_{ii}(0)$  est la fraction volumique  $c_i$  de la phase  $i$  alors que  $C_{ij}(0)$ , pour  $i \neq j$ , est nul. Lorsque  $h$  tend vers l'infini,  $C_{ij}(h)$  tend vers  $c_i c_j$ , car les variables aléatoires donnant les phases auxquelles appartiennent les points  $\underline{x}$  et  $\underline{x} + \underline{h}$  ne sont plus corrélées dans de tels matériaux. En fait,  $C_{ij}(h)$  est quasiment égal à  $c_i c_j$  pour  $h$  plus grand qu'une certaine valeur  $h_0$ , caractéristique de la microstructure étudiée : l'appartenance à une certaine phase d'un point quelconque est indépendante de la nature de la phase en des points distants de plus de  $h_0$ .

$C_{ij}(\underline{h})$  est facile à calculer à partir d'images numérisées de la microstructure : c'est le nombre de pixels appartenant à fois à la phase  $i$  dans une telle image et à la phase  $j$  dans cette même image translatée de  $-\underline{h}$ , divisé par le nombre total de pixels communs à cette image et à sa translatée. Les opérations de dénombrement de pixels, de translation selon une direction principale du réseau utilisé et de reconnaissance des phases par seuillage d'images en niveaux de gris sont classiques en analyse d'images [41]. Lorsque l'image utilisée pour effectuer cette opération est représentative de la microstructure, le résultat obtenu est bien  $C_{ij}(\underline{h})$ . Si en revanche elle est trop petite, on obtient un covariogramme relatif à l'information statistique contenue dans cette image, différent du covariogramme réel de la microstructure.

La procédure proposée pour déterminer le grandissement maximal autorisé pour embrasser un domaine représentatif dans le champ du microscope est alors la suivante. On commence par sélectionner un grandissement suffisamment faible, tel que l'image acquise soit assurément représentative de la microstructure, mais toutefois pas trop faible pour que les détails de l'interface entre les phases soient bien discrétisés. L'un des covariogrammes réels  $C(h)$  de la microstructure peut être calculé avec cette image et  $h_0$  peut en particulier être estimé. La seconde opération consiste à extraire des sous-images de cette image (figure 2.2), correspondant à des champs du microscope obtenus pour des grandissements plus importants et à calculer ce même covariogramme à partir de l'information contenues dans cette sous-image. On peut vérifier que le champ initial est largement représentatif en constatant que ces « sous-covariogrammes » sont quasiment identiques au premier pour des grandissement simulés pas trop élevés, notamment du point de vue de la valeur de  $h_0$ . Pour des grandissements plus élevés, ils s'en écartent considérablement du fait du manque d'information statistique contenue dans ces champs. Le plus petit grandissement simulé permettant de retrouver le covariogramme réel détermine une taille minimale de domaine représentatif. Notons bien que le fait de retrouver le covariogramme réel n'est qu'une condition nécessaire de représentativité ; il n'est pas absolument certain qu'un tel champ soit représentatif, mais il est sûr qu'un champ plus petit ne le sera pas. De plus, il s'agit



ici de représentativité statistique de la distribution des phases qui ne garantit pas nécessairement la représentativité des champs mécaniques qui apparaissent sous charge dans un tel domaine.

La figure 2.3 donne les divers covariogrammes fer/fer obtenus à partir d'une image de la microstructure de l'une des éprouvettes fer/argent testées et des sous-images extraites. Les valeurs de  $h_0$  sont bien cohérentes pour les faibles grandissements, mais on peut regretter que les covariogrammes correspondants ne convergent pas tous vers la même limite. Ceci est dû aux légères fluctuations de concentrations d'une sous-image à l'autre. On peut s'en affranchir en adimensionnant les covariogrammes par rapport à  $C(0)$  et  $C(0)^2$ . C'est ce qui est fait en figure 2.5. Notons que ces légères fluctuations ne sont pas contradictoires avec la représentativité des plages. On pourrait éventuellement s'en affranchir en moyennant des covariogrammes obtenus avec un même grandissement mais des zones différentes.

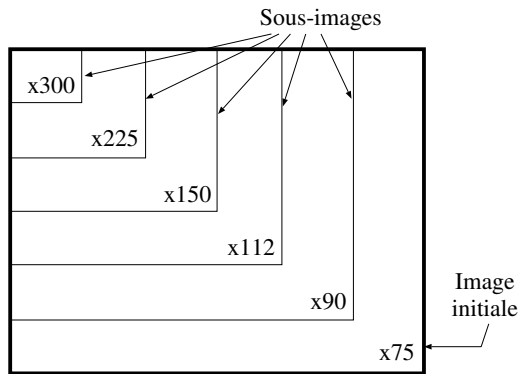


Figure 2.2 : Simulation de grandissements

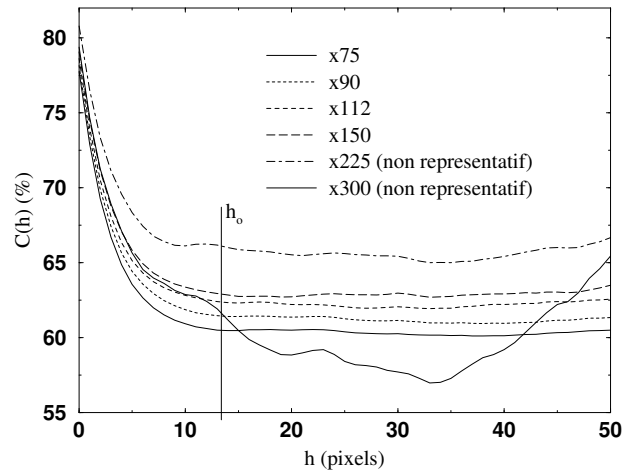


Figure 2.3 : Covariogrammes

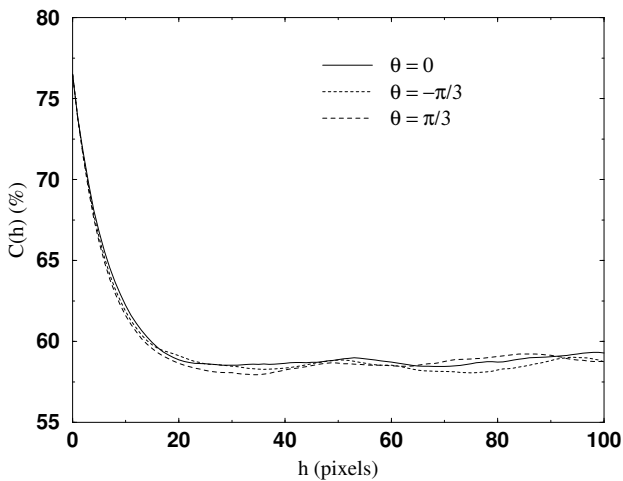


Figure 2.4 : Vérification de l'isotropie

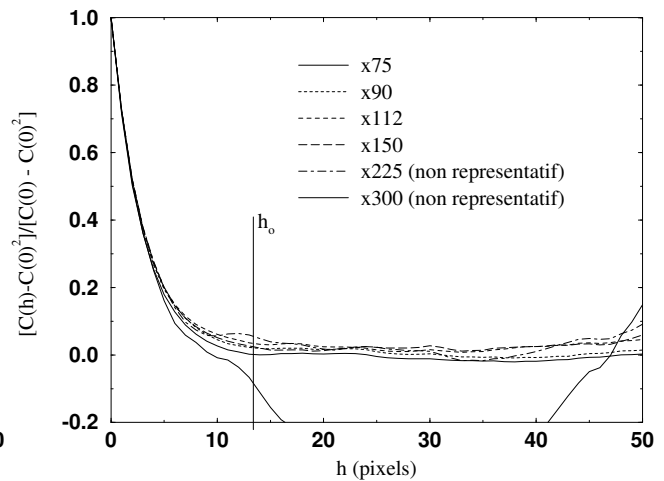


Figure 2.5 : Covariogrammes adimensionnés

Cette méthode est plus rigoureuse que l'argumentaire exposé dans [2], qui consiste simplement à vérifier que les zones testées sont de dimensions largement supérieures à  $h_0$ . Pour les biphasés fer/argent étudiés dans ce travail, le grandissement maximal pour garantir la représentativité d'une image est de 200 environ et correspond à une surface d'environ  $0,45 \times 0,6 \text{ mm}^2$  (les grandissements sont relatifs à une éprouvette finale de l'image sur papier Polaroid standard  $9 \times 11,5 \text{ cm}^2$ ). Notons aussi que la taille ainsi déterminée confirme généralement ce que l'intuition suggère.

La figure 2.4 donne enfin le covariogramme fer/fer réel pour une autre éprouvette, calculé selon les trois directions principales du réseau hexagonal. On vérifie que les trois courbes se superposent, ce qui confirme l'isotropie de distribution des phases dans ces matériaux.

### 2.2.D Décomposition du domaine étudié

Au grandissement de 200, les points d'or ne sont quasiment pas visibles sur l'image de résolution  $512 \times 512$  pixels, ce qui empêche leur localisation précise. Il faut donc acquérir les images à un grandissement supérieur et décomposer le domaine étudié en plusieurs champs. La procédure de traitement d'images utilisée échoue souvent dans la localisation de points d'or de diamètre inférieur à 3 pixels et fonctionne d'autant mieux que ce diamètre est plus grand. Il est toutefois préférable de limiter le grandissement pour éviter d'avoir à traiter un trop grand nombre d'images. De plus, la précision de localisation ne s'améliore quasiment plus pour des diamètres de points supérieurs à 5 pixels. Le diamètre réel des points d'or, imposé par les lois physiques régissant la technique de dépôt des grilles, est légèrement inférieur à  $1 \mu\text{m}$ . Le grandissement optimal pour une taille de points de 4 pixels est donc environ de 800 ou 1000. L'enregistrement des positions des points d'or sur un domaine représentatif impose donc de décomposer celui-ci en au moins  $4 \times 4$  images au grandissement suffisant (figure 2.6) ; un nombre plus élevé est souvent indispensable.

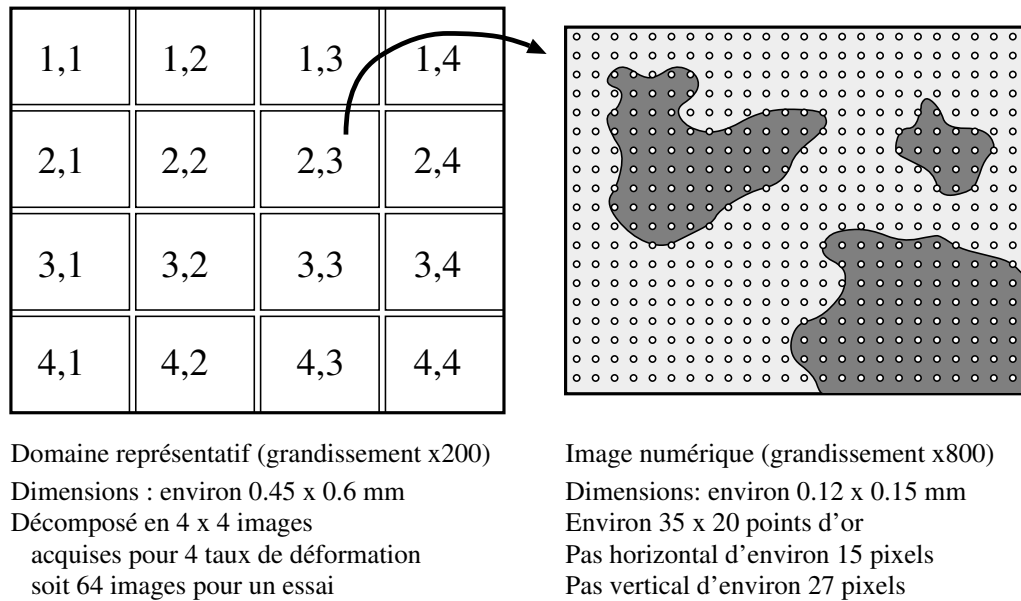


Figure 2.6 : Décomposition du domaine représentatif

Notons que pour faciliter le traitement des points et notamment leur repérage tel qu'il est décrit ci-après, il est souhaitable d'aligner approximativement les axes des images avec ceux de la grille. Cet alignement est effectué une bonne fois pour toute en début d'expérience, avant toute acquisition d'image et traction sur l'éprouvette, par rotation électronique du balayage du microscope. Ce réglage n'est plus modifié par la suite pour ne pas introduire des rotations artificielles de corps solide.

Les images sont acquises avant déformation de l'éprouvette et pour plusieurs taux de déformation macroscopique : classiquement 5, 10 et 15%. L'acquisition de cette soixantaine, voire centaine d'images représente un à deux jours de travail, la lenteur étant liée à l'acquisition des images (faible sensibilité du détecteur d'électrons rétrodiffusés et sommation de plusieurs images) et aux nécessaires ajustements de champs garantissant un repérage précis des points d'or, comme il est décrit dans le paragraphe qui suit.

### 2.2.E Repérage des points d'or

Le calcul des déformations locales à un taux de déformation global donné nécessite les coordonnées des points d'or avant et après déformation. Un repérage précis des points est donc indispensable afin d'associer correctement les points des deux configurations. La procédure employée associe à chaque point un indice de colonne et de ligne, décompté à partir d'un point de référence. Deux variantes sont possibles.

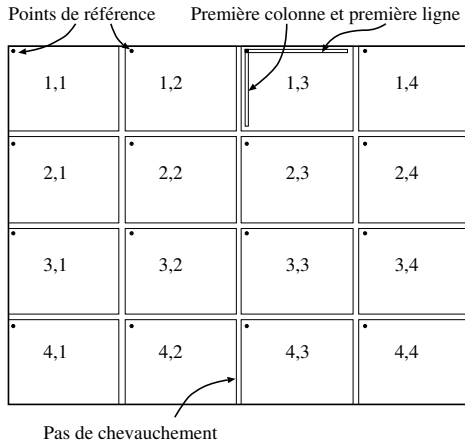


Figure 2.7 : Première procédure de repérage

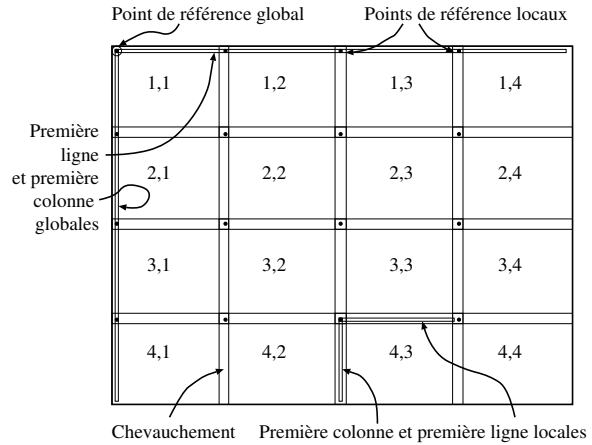


Figure 2.8 : Seconde procédure de repérage

- La première, proposée initialement [2], utilise un point de référence pour chaque image du domaine étudié, situé en haut et à gauche (figure 2.7), identique pour tous les taux de déformation et qu'il convient de repérer précisément à l'aide de la microstructure sous-jacente. Les coordonnées en pixels des points d'or sont relatifs à un système de coordonnées propre à chaque image. Les images peuvent alors être traitées indépendamment, mais il faut éviter les recouvrements pour ne pas comptabiliser deux fois un même point sur deux images distinctes et ainsi fausser les calculs statistiques. Les points d'une image sont ordonnés en un tableau de  $l$  lignes et  $c$  colonnes, limitées par la taille de l'image. Après déformation, le nombre de lignes est en général inférieur au nombre de lignes dans l'image correspondante de la configuration de référence, et le nombre de colonnes supérieur (la direction de traction est verticale). La déformation ne peut alors plus être calculée dans la partie inférieure de l'image initiale, ce qui peut être gênant, notamment pour le tracé de cartes de déformations (cf. paragraphe 2.3.G).
- La seconde (figure 2.8), plus élaborée et mieux adaptée au tracé de cartes de déformations, fait appel à un système de numérotation global se référant à un point origine unique situé en haut et à gauche du domaine étudié. Au sein d'une image, les points sont toujours repérés par rapport à un point de référence en haut et à gauche, qui peut varier d'un taux de déformation à l'autre, et qui doit lui-même être soigneusement repéré manuellement par rapport au point de référence global. Les points de toutes les images d'une configuration sont ordonnés en un tableau unique. Leurs coordonnées en pixels sont globales et calculées à partir des coordonnées locales dans une image par la transformation liant les deux systèmes. Cette dernière, que l'on assimile à une simple translation, est estimée grâce à un léger chevauchement des images, indispensable dans cette procédure.

## 2.2.F Traitement des images

Le traitement des images numériques enregistrées au cours de l'essai mécanique *in situ* vise à construire une ou plusieurs matrices, suivant le système de repérage choisi, contenant les coordonnées en pixels des points d'or et indiquant la phase à laquelle ils appartiennent. Cette opération semi-automatique requiert la surveillance d'un opérateur qui en vérifie le bon déroulement et intervient pour traiter manuellement les points d'or non repérés ou mal localisés par l'analyseur d'images. C'est la phase la plus fastidieuse du processus global puisque trois à quatre jours sont nécessaires pour traiter toutes les images d'un essai.

La méthode utilise principalement des opérations binaires ; les techniques plus récentes mentionnées au paragraphe 2.1.E n'ont pas été mises en œuvre pour des raisons d'insuffisance de puissance de calcul de l'appareil d'analyse utilisé. La première étape est un seuillage des images en niveaux de gris pour isoler les points d'or ; il est complété par quelques érosions ou dilatations morphologiques [41], qui permettent de supprimer des taches parasites qui ne correspondent pas à des points ou de régulariser

la géométrie des points d'or. Les seuils sont choisis manuellement car la luminosité et le contraste varient d'une image à l'autre. Le traitement morphologique optimal varie suivant les éprouvettes ; il est déterminé par essais successifs jusqu'à ce qu'un compromis soit trouvé entre le nombre de points perdus et le nombre de taches parasites subsistantes. Ce traitement est ensuite appliqué à l'identique sur toutes les images de l'essai pour réduire les fluctuations introduites par cette phase de traitement.

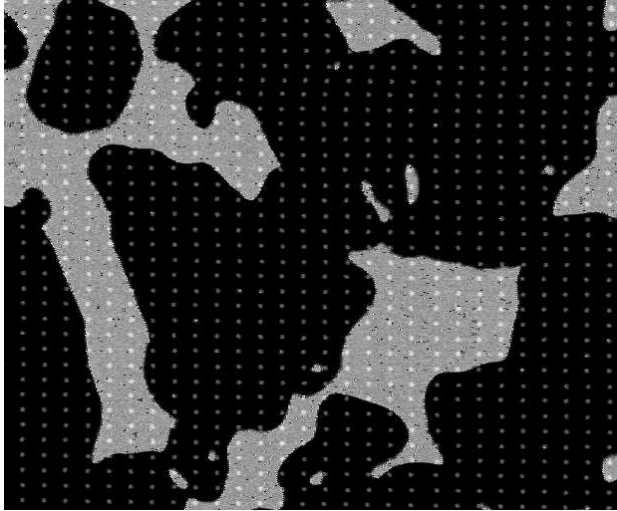


Figure 2.9 : Image numérique d'un biphase fer/argent

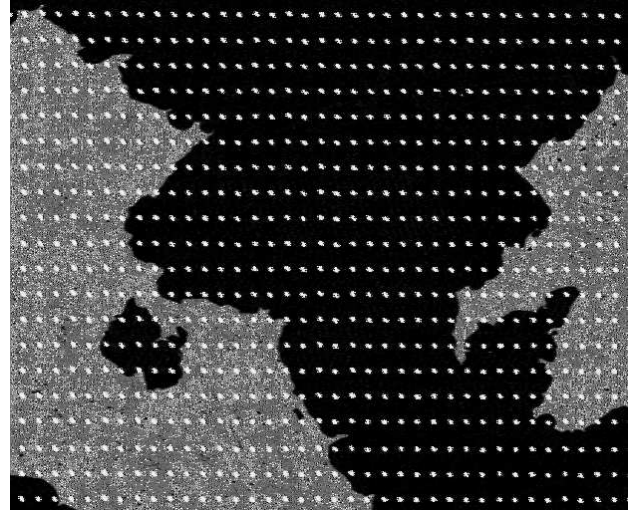


Figure 2.10 : Image numérique d'un biphase fer/cuivre

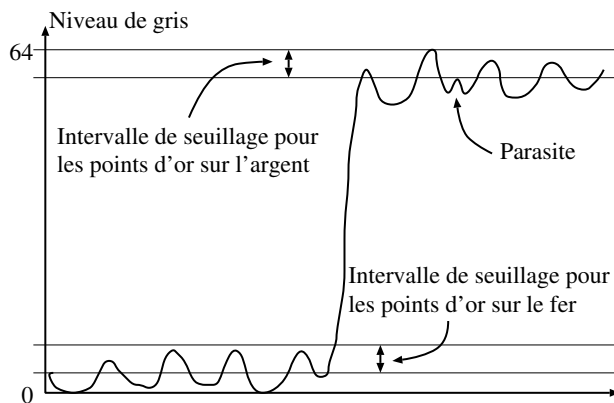


Figure 2.11 : Profil des niveaux de gris selon une ligne de points d'or dans un biphase fer/argent

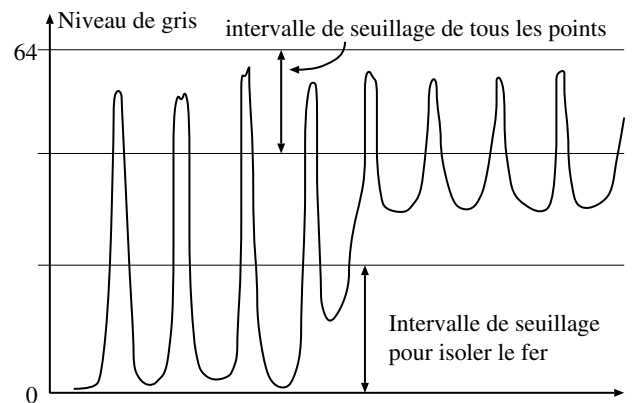


Figure 2.12 : Profil des niveaux de gris selon une ligne de points d'or dans un biphase fer/cuivre

La séparation des points d'or sur l'argent dans des biphases fer/argent s'obtient par exemple avec un seuillage très serré qui élimine d'entrée la plupart des parasites (figures 2.9 et 2.11). Une dilatation permet d'arrondir les taches et de souder les deux (ou plusieurs) taches éventuellement induites par un même point d'or. Pour isoler les points sur le fer, une érosion est nécessaire pour éliminer l'interface qui présente un niveau de gris identique ; elle est suivie d'une dilatation dont le but est le même que précédemment.

Le niveau de gris des points d'or sur un biphase fer/cuivre étant quasiment identique sur les deux phases (figures 2.10 et 2.12), il n'est pas possible de séparer les points sur le fer de ceux sur l'argent en une opération unique. Un premier seuillage permet d'abord d'isoler les points ; un second, complété par des dilations en nombre suffisant pour fermer les trous aux emplacements des points, permet d'isoler la phase fer. Deux opérations logiques entre les deux images binaires ainsi obtenues permettent alors de distinguer les points. Le tout peut éventuellement être complété par une ouverture

morphologique pour supprimer les parasites.

Dans la seconde étape du traitement, les deux images binaires contenant des taches à l'emplacement des points d'or sur une phase donnée sont traitées pour remplacer ces dernières par des pixels isolés dont les positions sont retenues comme coordonnées des points d'or. Le pixel choisi est le pixel central, défini comme indiqué en figure 2.13. Ce choix importe en fait très peu, puisque la même procédure est utilisée pour les divers taux de déformation et sélectionne le même pixel, aux incertitudes près. Cette opération est entièrement automatique. Elle produit deux images binaires ne comportant plus que des pixels isolés, correspondant pour la plupart à des points d'or, mais éventuellement aussi à des parasites ; de plus, certains points d'or peuvent avoir été perdus au cours du traitement.

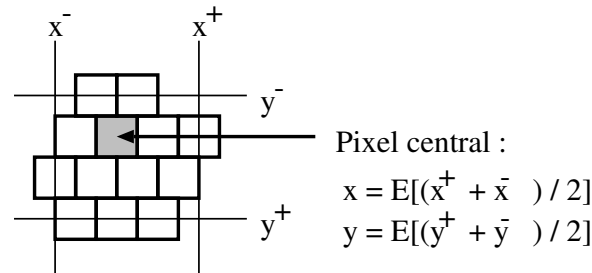


Figure 2.13 : Coordonnées d'un point d'or

La dernière étape permet de construire la matrice des coordonnées locales des pixels de l'image. Elle est semi-automatique et est réalisée avec un logiciel spécifique. L'opérateur visualise l'image initiale en niveaux de gris avec en surimpression les deux images binaires obtenues précédemment, chacune avec une couleur spécifique. Il indique le point de référence supérieur gauche et le nombre de points dans chaque ligne. L'ordinateur recherche alors automatiquement le pixel voisin à droite du pixel précédemment trouvé et enregistre sa position et sa phase. L'opérateur est amené à intervenir manuellement lorsqu'un pixel manque, ou qu'un pixel parasite est enregistré, ou encore lorsque la déformation locale est trop importante pour que le logiciel trouve le pixel suivant. Le nombre d'interventions est faible lorsque l'image est de bonne qualité ; lorsqu'elle est peu contrastée ou que l'éprouvette est très déformée, ce travail peut devenir fastidieux. Le traitement complet d'une image d'environ 800 points dure de trois à vingt minutes suivant sa qualité. Une acquisition initiale d'images bien contrastées le facilite grandement.

Si le premier système de repérage est utilisé, la phase d'acquisition des coordonnées de points est achevée. Avec le second système, il reste à construire la matrice globale à partir des matrices locales. Pour cela, il faut d'abord déterminer les indices de lignes et de colonnes globaux des points de référence locaux de chaque image, par un décompte manuel sur des micrographies. Les vecteurs de translation permettant de convertir les coordonnées locales en coordonnées globales sont ensuite déterminés grâce aux positions des points apparaissant sur plusieurs images. Soit  $(T_X^1, T_Y^1)$  et  $(T_X^2, T_Y^2)$  les vecteurs de deux images adjacentes 1 et 2 et soit  $(X^1, Y^1)$  et  $(X^2, Y^2)$  les coordonnées locales dans ces deux images d'un même point d'or, reconnu par ses indices de lignes et de colonnes globaux. Les coordonnées globales de ce point sont donc  $(T_X^1 + X^1, T_Y^1 + Y^1)$  ou  $(T_X^2 + X^2, T_Y^2 + Y^2)$ . Du fait des erreurs de mesure, la quantité  $(T_X^1 + X^1 - T_X^2 - X^2)^2 + (T_Y^1 + Y^1 - T_Y^2 - Y^2)^2$  n'est pas nécessairement nulle. Les vecteurs de translation de toutes les images sont déterminés en minimisant la somme de tous les écarts de ce type pour tous les points apparaissant sur deux images ou plus. Cette minimisation aboutit à un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les  $T_X^i$  et  $T_Y^i$  ; il est inversible si toutes les images sont « en contact » avec l'image supérieure gauche. Les coordonnées globales sont ensuite faciles à calculer et la matrice globale aisée à construire. En particulier, les coordonnées des points communs à plusieurs images sont calculées comme les moyennes des coordonnées obtenues à partir des coordonnées locales dans ces images. Notons qu'une image ne doit pas nécessairement avoir des points communs avec toutes ses voisines, mais que cela est préférable et écarte le risque d'oublier des points à l'intérieur du domaine étudié, ce qui peut être fâcheux pour le traitement ultérieur de ces mesures. Notons aussi que l'on aurait pu tenir compte dans cette même procédure de la rotation

relative d'une image par rapport aux autres, en introduisant des inconnues supplémentaires dans le calcul. La machine de traction étant bloquée en rotation et la rotation électronique sur le MEB n'étant plus utilisée après l'alignement initial des axes de l'image sur la grille non déformée, cette sophistication nous a paru inutile.

## 2.3 Calcul des déformations

### 2.3.A Définitions

#### 2.3.A.a Déformation locale

Le gradient d'une transformation déplaçant un point matériel à la position  $\underline{X}$  dans une configuration de référence à la position  $\underline{x}$  dans la configuration actuelle est donné par (*cf.* annexe **D**) :

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}. \quad (2.2)$$

La déformation au point  $\underline{X}$ , exprimée dans l'échelle souhaitée, s'en déduit. En particulier, la déformation de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}^{\text{GL}}$  est donnée par,  $^T$  désignant la transposition et  $\underline{\underline{1}}$  étant le tenseur unitaire d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{E}}^{\text{GL}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}]. \quad (2.3)$$

$\underline{\underline{E}}^{\text{GL}}$  dépend de manière non linéaire de  $\underline{\underline{F}}$ , mais en cas de petites déformations, elle peut être approchée par la déformation linéarisée  $\underline{\underline{E}}^{\text{Lin}}$  :

$$\underline{\underline{E}}^{\text{Lin}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{F}}] - \underline{\underline{1}}. \quad (2.4)$$

#### 2.3.A.b Déformation moyenne

Soit  $\Omega$  un domaine localement continu (mais pas nécessairement connexe) de la configuration initiale,  $\partial\Omega$  sa frontière régulière sauf éventuellement en certains points anguleux, et  $\underline{\nu}$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$  en ses points réguliers. Le gradient moyen sur  $\Omega$  de la transformation est la moyenne du gradient local :

$$\langle \underline{\underline{F}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{F}} d\omega \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes \underline{\nu} da, \quad (2.6)$$

où l'on a fait appel à la formule de Green et où  $|\Omega|$  est le volume du domaine  $\Omega$ .

Ce gradient moyen permet de définir la déformation moyenne dans l'échelle souhaitée. En particulier, la déformation moyenne de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{\text{GL}}$  et la déformation moyenne linéarisée  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{\text{Lin}}$  s'écrivent :

$$\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{\text{GL}} = \frac{1}{2} \left[ \langle \underline{\underline{F}} \rangle_{\Omega}^T \cdot \langle \underline{\underline{F}} \rangle_{\Omega} - \underline{\underline{1}} \right] \quad (2.7)$$

$$\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{\text{Lin}} = \frac{1}{2} \left[ \langle \underline{\underline{F}} \rangle_{\Omega}^T + \langle \underline{\underline{F}} \rangle_{\Omega} \right] - \underline{\underline{1}}. \quad (2.8)$$

La déformation linéarisée moyenne est bien la moyenne volumique de la déformation linéarisée locale, mais il n'en est pas de même de la déformation de Green-Lagrange. Lorsque  $\Omega$  est un volume élémentaire représentatif, ces déformations moyennes sont les déformations macroscopiques ; lorsque  $\Omega$  est le domaine  $\Omega_i$  occupé par une phase  $i$  dans un tel volume élémentaire représentatif, on obtient les déformations moyennes dans cette phase.

Pour plus de précisions sur les relations entre grandeurs de déformations locales et moyennes, nous renvoyons à la référence [83].

Nous décrivons ci-après les procédures de calcul des gradients de transformation locaux et moyens à partir des coordonnées des points d'or dans la configuration initiale et après déformation, ainsi que de leurs incertitudes expérimentales, avant d'aborder le calcul des diverses grandeurs de déformation qui en découlent.

### 2.3.B Calcul du gradient local

Le calcul direct de  $\underline{\underline{F}}$  selon (2.2) n'est pas possible pour diverses raisons. Certaines simplifications ou approximations sont nécessaires ; nous les précisons ci-après.

La première difficulté est liée au fait que les coordonnées des points d'or sont en fait des positions  $(X, Y)$  de pixels dans des images en réseau hexagonal dont une des directions principales est l'axe des abscisses. Ceci n'est pas un système de coordonnées orthonormées : il est nécessaire de multiplier les ordonnées par un facteur constant  $k_y$ , dont on détermine la valeur en comparant les distances en pixels entre deux détails sur l'image d'un même objet, mesurées avant et après rotation de  $90^\circ$ . On obtient  $k_y = 0,83$ , valeur proche du rapport théorique de  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$  qui s'applique à un réseau hexagonal régulier. Il faudrait de plus corriger le décalage d'un demi-pixel d'une ligne sur deux par rapport à ses voisines. Les incertitudes finales sur la localisation des pixels étant élevées, nous ne le faisons pas mais nous en tenons compte dans le calcul d'erreur global.

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, les gains du microscope s'avèrent stables à l'échelle de temps de l'expérience. Si tel n'était pas le cas, il faudrait corriger les distances en pixels dans les configurations déformées d'un facteur multiplicatif que l'on pourrait par exemple déterminer en introduisant une jauge dans la chambre du microscope et en mesurant régulièrement ses dimensions en pixels. Les possibles distorsions du microscope dues à un balayage non régulier du faisceau d'électrons à la surface de l'éprouvette sont négligées. La géométrie de la machine d'essai induit une distance de travail élevée ( $WD = 30\text{mm}$ ) qui devrait minimiser ces phénomènes.

Mais la principale difficulté est liée au fait que le champ de déplacement est connu de manière discrète en des points isolés et seulement à la surface de l'éprouvette, et que seules les composantes dans le plan perpendiculaire à l'axe optique sont mesurées. Le *gradient local* en un point d'or  $p$  est alors estimé par le *gradient moyen sur un petit volume* de la configuration initiale autour de ce point. Une variante discrète et surfacique de (2.6) est utilisée pour calculer les composantes  $XX$ ,  $XY$ ,  $YX$  et  $YY$  de ce gradient moyen.

Le petit volume  $\Omega_p$  considéré est un cylindre d'axe perpendiculaire à la surface de l'éprouvette, d'épaisseur  $e$  petite et avec une base polygonale  $\Sigma^p$  dont les sommets sont des points d'or voisins du point  $p$  (cf. figure 2.14). Notons  $\partial\Sigma^p$  la frontière de  $\Sigma^p$ ,  $S_{\Sigma^p}$  sa surface,  $\underline{\nu}_{\Sigma^p}$  sa normale sortante et  $\Sigma^{p-}$  l'autre face du cylindre. Le gradient au point  $p$  est alors estimé par :

$$\underline{\underline{F}}^p \approx \langle \underline{\underline{F}} \rangle_{\Omega^p} = \frac{1}{|\Omega^p|} \int_{\partial\Omega^p} \underline{x} \otimes \underline{\nu} ds \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{S_{\Sigma^p}} \left[ \int_{\partial\Sigma^p} \frac{\int_e \underline{x} de}{e} \otimes \underline{\nu} dl + \frac{\int_{\Sigma^p} \underline{x} ds - \int_{\Sigma^{p-}} \underline{x} ds}{e} \otimes \underline{\nu}_{\Sigma^p} \right]. \quad (2.10)$$

$\underline{x}$  étant continu, la limite de cette expression lorsque  $e$  tend vers 0 s'écrit :

$$\underline{\underline{F}}^p = \frac{1}{S_{\Sigma^p}} \left[ \int_{\partial\Sigma^p} \underline{x} \otimes \underline{\nu} dl + \frac{\partial \int_{\Sigma^p} \underline{x} ds}{\partial \underline{\nu}_{\Sigma^p}} \otimes \underline{\nu}_{\Sigma^p} \right]. \quad (2.11)$$

Si la *surface de l'éprouvette avant déformation est parfaitement perpendiculaire à l'axe optique  $Z$* , les composante de ce tenseur sont :

$$F_{ij}^p = \frac{1}{S_{\Sigma^p}} \left[ \int_{\partial\Sigma^p} x_i \nu_j dl + \frac{\partial \int_{\Sigma^p} x_i ds}{\partial Z} (e_Z)_j \right]. \quad (2.12)$$

L'estimation de  $\frac{\partial \int_{\Sigma^p} x_i ds}{\partial Z}$  nécessite une mesure dans la profondeur de l'éprouvette, impossible pour des raisons évidentes. Toutefois, comme  $(e_Z)_X = (e_Z)_Y = 0$ , le second terme du second membre de

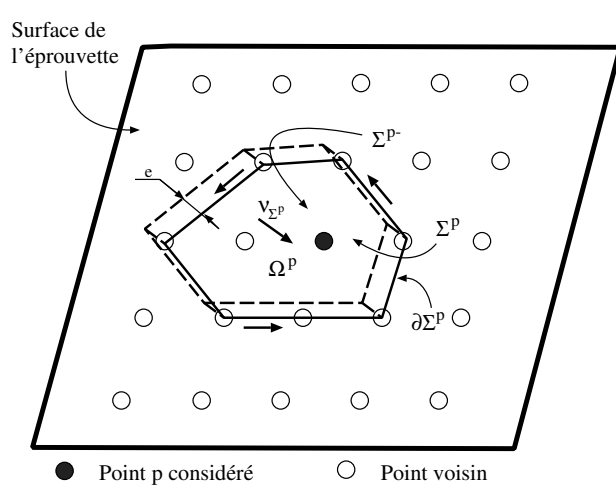


Figure 2.14 : Volume élémentaire d'intégration du gradient local

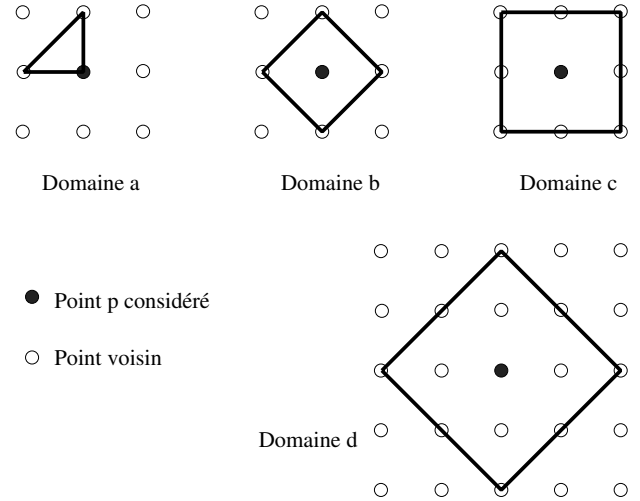


Figure 2.15 : Domaines d'intégration envisagés

l'équation précédente disparaît pour  $j \neq Z$ . Le déplacement selon  $Z$  n'est pas non plus connu : les composantes  $F_{Zj}^p$  ne peuvent donc pas être estimées. Il subsiste donc finalement la variante surfacique de (2.6), qui permet de calculer les composantes dans le plan  $XY$  du gradient :

$$\underline{\underline{F}}^p = \frac{1}{S_{\Sigma^p}} \int_{\partial\Sigma^p} \underline{x} \otimes \underline{\nu} dl, \quad (2.13)$$

où  $\underline{\nu}$  est pris dans le plan  $XY$ . Avec la forme polygonale adoptée pour le domaine d'intégration, ce vecteur normal est constant sur chaque arête. En supposant que le déplacement varie linéairement entre deux points d'or adjacents, cette équation prend la forme discrète annoncée :

$$\underline{\underline{F}}^p = \frac{1}{2S_{\Sigma^p}} \sum_{n=1}^N [\underline{x}^n + \underline{x}^{n+1}] \otimes \underline{\nu}^n dl^n, \quad (2.14)$$

où  $N$  est le nombre de points d'or sur  $\partial\Sigma^p$ ,  $\underline{x}^n$  la position du  $n^{\text{ème}}$  point dans la configuration déformée (avec la convention  $\underline{x}^{N+1} = \underline{x}^1$ ),  $\underline{\nu}^n$  la normale sortante au segment reliant les points  $n$  et  $n+1$  et  $dl^n$  la longueur de ce segment. En choisissant de numérotter les points dans le sens trigonométrique, les composantes de  $\underline{\nu}^n dl^n$  sont :

$$[\underline{\nu}^n dl^n] = \begin{bmatrix} X_Y^{n+1} - X_Y^n \\ -X_X^{n+1} + X_X^n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

si bien que l'expression finale des quatre composantes calculables du gradient devient, après simplification et avec les conventions  $\underline{X}^0 = \underline{X}^N$  et  $\underline{X}^{N+1} = \underline{X}^1$  :

$$\begin{cases} F_{XX} = \frac{1}{2S_{\Sigma^p}} \sum_{n=1}^N +x_X^n (X_Y^{n+1} - X_Y^{n-1}) \\ F_{XY} = \frac{1}{2S_{\Sigma^p}} \sum_{n=1}^N -x_X^n (X_X^{n+1} - X_X^{n-1}) \\ F_{YX} = \frac{1}{2S_{\Sigma^p}} \sum_{n=1}^N +x_Y^n (X_Y^{n+1} - X_Y^{n-1}) \\ F_{YY} = \frac{1}{2S_{\Sigma^p}} \sum_{n=1}^N -x_Y^n (X_X^{n+1} - X_X^{n-1}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad S_{\Sigma^p} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \begin{vmatrix} X_X^n & X_X^{n+1} \\ X_Y^n & X_Y^{n+1} \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

La figure 2.15 donne les divers domaines d'intégration polygonaux utilisés. Le domaine  $a$  et ses symétriques sont les plus petits envisageables ; le domaine  $b$  est le plus petit domaine symétrique par rapport au point considéré. Les domaines  $c$  et  $d$  sont aussi symétriques mais plus grands ; s'ils tendent à gommer certaines hétérogénéités de déformation très locales, ils sont moins sensibles aux incertitudes expérimentales de localisation des points. Ces divers schémas d'intégration sont comparés par la suite. Précisons que pour le calcul du gradient en des points proches des premières ou dernières lignes ou colonnes, il convient de tronquer ces domaines d'intégration aux points disponibles.



### 2.3.C Incertitude expérimentale sur le gradient local

Dans les relations (2.16), les coordonnées des points d'or dans la configuration initiale sont connues exactement puisqu'elles sont prises comme références. Le grandissement des images a été choisi de telle sorte que les points d'or aient un diamètre de l'ordre de 4 pixels. La procédure de détermination des coordonnées repose sur un traitement d'images binaires : la précision de la localisation des points dans la configuration déformée ne peut donc pas être supérieure au demi-pixel. En réalité, du fait des diverses imperfections du traitement, nous adoptons pour l'écart-type sur la détermination des coordonnées une valeur de l'ordre du pixel. Elle est en fait quelque peu pessimiste, mais permet d'établir une borne supérieure pour les incertitudes sur le gradient et donc sur les valeurs de déformation. Cette incertitude exprimée en pixels doit être corrigée du rapport  $k_y$  pour la composante  $Y$  et complétée par l'erreur induite en négligeant le décalage relatif de deux lignes de pixels adjacentes. Sachant que cette dernière se produit en moyenne un point sur deux, son écart-type est de  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Comme elle est de plus indépendante de l'erreur de localisation elle-même, l'erreur globale sur la détermination de l'abscisse d'un point dans la configuration déformée est  $\sigma_X = \sqrt{1^2 + 1/8} \approx 1,06$ , alors que celle sur l'ordonnée est environ  $\sigma_Y = 1 \times k_y = 0,83$ . Les erreurs sur la localisation de deux points différents étant des variables aléatoires indépendantes, les écart-types sur les composantes  $F$  qui en résultent valent :

$$\sigma(F_{ij}) = \frac{1}{2S_{\Sigma^p}} \sqrt{\sum_{n=1}^N \sigma(x_i^n)^2 (X_j^{n+1} - X_j^{n-1})^2} = \frac{\sigma_i}{2S_{\Sigma^p}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (X_j^{n+1} - X_j^{n-1})^2}, \quad (2.17)$$

soit plus précisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(F_{XX}) = \frac{\sigma_X}{2S_{\Sigma^p}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (X_Y^{n+1} - X_Y^{n-1})^2} \\ \sigma(F_{XY}) = \frac{\sigma_X}{2S_{\Sigma^p}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (X_X^{n+1} - X_X^{n-1})^2} \\ \sigma(F_{YX}) = \frac{\sigma_Y}{2S_{\Sigma^p}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (X_Y^{n+1} - X_Y^{n-1})^2} \\ \sigma(F_{YY}) = \frac{\sigma_Y}{2S_{\Sigma^p}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (X_X^{n+1} - X_X^{n-1})^2} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

L'incertitude sur les dérivées par rapport à  $Y$  dépend de l'espacement horizontal entre deux points d'or adjacents et celui sur les dérivées par rapport à  $X$  de l'espacement vertical. Le rapport entre ces deux espacements est  $2/3$ . Dans la procédure habituelle de dépôt des grilles, l'espacement horizontal est plus faible (voir la figure 2.10). La précision sur  $F_{YY}$  est alors meilleure que celle sur  $F_{XX}$ , d'autant plus que  $\sigma_Y$  est plus petit que  $\sigma_X$ . Pour rétablir un certain équilibre, il peut être préférable de déposer les grilles dans l'autre direction (comme sur la figure 2.9).

Schéma d'intégration	a	b	c	d
$\sigma(F_{XX})$	12,5	6,3	3,8	2,7
$\sigma(F_{YY})$	6,5	3,3	2,0	1,4

Tableau 2.1 : Incertitude absolue en % sur les composantes du gradient local - Grille verticale

Schéma d'intégration	a	b	c	d
$\sigma(F_{XX})$	8,3	4,2	2,6	1,8
$\sigma(F_{YY})$	9,8	4,9	3,0	2,1

Tableau 2.2 : Incertitude absolue en % sur les composantes du gradient local - Grille horizontale

Ces incertitudes ont été calculées pour des valeurs typiques des espacements entre pixels avec les divers domaines d'intégration proposés. Le tableau 2.1 donne le résultat lorsque les points sont séparés de 12 pixels horizontalement et 18 pixels verticalement (situation habituelle) et le tableau 2.2 donne les mêmes résultats dans la situation inverse. Seuls les résultats relatifs aux composantes diagonales ont été reportés, puisque par exemple les incertitudes sur  $F_{XY}$  dans la première situation sont celles sur  $F_{XX}$  dans la seconde.

Il s'avère que le calcul du gradient local avec les deux premiers schémas d'intégration est assez peu précis. Les schémas  $c$  et  $d$  donnent une information principalement qualitative pour des déformations locales de l'ordre de 5%. Leur précision est satisfaisante pour des déformations plus élevées (10% et plus). Le cahier des charges décrit au paragraphe 2.1.A n'est donc pas parfaitement rempli puisque

la précision du pour-cent sur une base de mesure de  $10 \mu\text{m}$  n'est pas tout à fait atteinte. En fait, les précisions obtenues en pratique sont meilleures : les hypothèses utilisées dans les estimations d'incertitudes ci-dessus sont pessimistes et les espacements en pixels entre points d'or sont souvent plus grands. La qualité des mesures locales est en fait compatible avec les besoins de la présente étude. Des justifications complémentaires en sont données par la suite.

### 2.3.D Calcul de gradients moyens

La technique de calcul du gradient moyen dans un petit domaine autour d'un point d'or permet bien évidemment aussi de calculer des gradients moyens sur des domaines plus grands : les relations (2.16) et (2.18) sont valables pour n'importe quel domaine polygonal délimité par des points d'or, connexe ou non connexe.

#### 2.3.D.a Gradient macroscopique

Le gradient macroscopique est obtenu par intégration sur le domaine représentatif entier. La précision est cette fois-ci bien meilleure. Considérons par exemple un domaine découpé en 16 images de  $29 \times 36$  points d'or, correspondant à un espacement entre points d'environ 18 pixels horizontalement et de 12 pixels verticalement. Avec la première procédure de repérage des points, le domaine d'intégration comporte 16 zones rectangulaires délimitées par les premières et dernières lignes et colonnes de chaque image. L'application de (2.18) donne alors :

$$\sigma(F_{YY}) = 0.83 \times \frac{\sqrt{16(4 \times 18^2 + 2 \times 27 \times 36^2)}}{2 \times 16 \times 28 \times 35 \times 18 \times 12} = 1,3 \cdot 10^{-4} \quad (2.19)$$

Avec la seconde procédure, le domaine d'intégration est un rectangle de  $113 \times 141$  points et l'incertitude vaut alors :

$$\sigma(F_{YY}) = 0.83 \times \frac{\sqrt{4 \times 18^2 + 2 \times 111 \times 36^2}}{2 \times 112 \times 140 \times 18 \times 12} = 0,66 \cdot 10^{-4} \quad (2.20)$$

La précision est cette fois-ci tout à fait satisfaisante.

Remarquons que, de manière générale, la précision de la mesure du gradient sur un domaine quelconque est liée à deux paramètres. Le premier est la surface du domaine d'intégration, c'est-à-dire la dimension de la base de mesure : la précision croît avec la taille du domaine, mais en revanche l'information obtenue sur le champ de déformation est de moins en moins riche, car de plus en plus moyennée. Le second est le nombre de points sur le contour extérieur du domaine : l'indépendance statistique des erreurs sur la localisation de points différents tend à compenser dans l'erreur globale les fluctuations locales. À contour fixé, la précision est donc meilleure quand plus de points sont utilisés. Si, dans l'exemple précédent avec la seconde procédure de repérage, on n'avait pris en compte que les quatre points aux sommets du rectangle, l'incertitude aurait été bien moins bonne :

$$\sigma(F_{YY}) = 0.83 \times \frac{\sqrt{4 \times 112^2 \times 18^2}}{2 \times 112 \times 140 \times 18 \times 12} = 0,60 \cdot 10^{-3} \quad (2.21)$$

La prise en compte de points à l'intérieur du domaine d'intégration n'apporte en revanche aucune amélioration, puisque le contour d'intégration est alors plus long pour une surface fixe du domaine. La comparaison des calculs avec les deux procédures de repérage en atteste.

#### 2.3.D.b Gradient moyen sur une phase

Le gradient moyen au sein d'une phase peut également être calculé : le contour d'intégration est alors une ligne polygonale séparant les points d'or d'une phase de ceux de l'autre. En fait, une telle ligne n'est qu'une approximation de l'interface. Deux lignes polygonales assurant une telle séparation peuvent être définies (*cf.* figure 2.16) : la première, dont les sommets appartiennent tous à la phase considérée, exclut un petit domaine de la phase en question proche de l'interface ; la seconde relie les points de l'autre phase ayant un voisin dans la phase considérée et éventuellement des points de la

phase considérée situés dans les premières et dernières lignes ou colonnes ; elle inclut donc un petit domaine de l'autre phase. Les arêtes de ces deux lignes sont prises dans le graphe octogonal associé au réseau cubique de la grille de points. Elles sont construites à partir des matrices de points avec un algorithme spécifique.

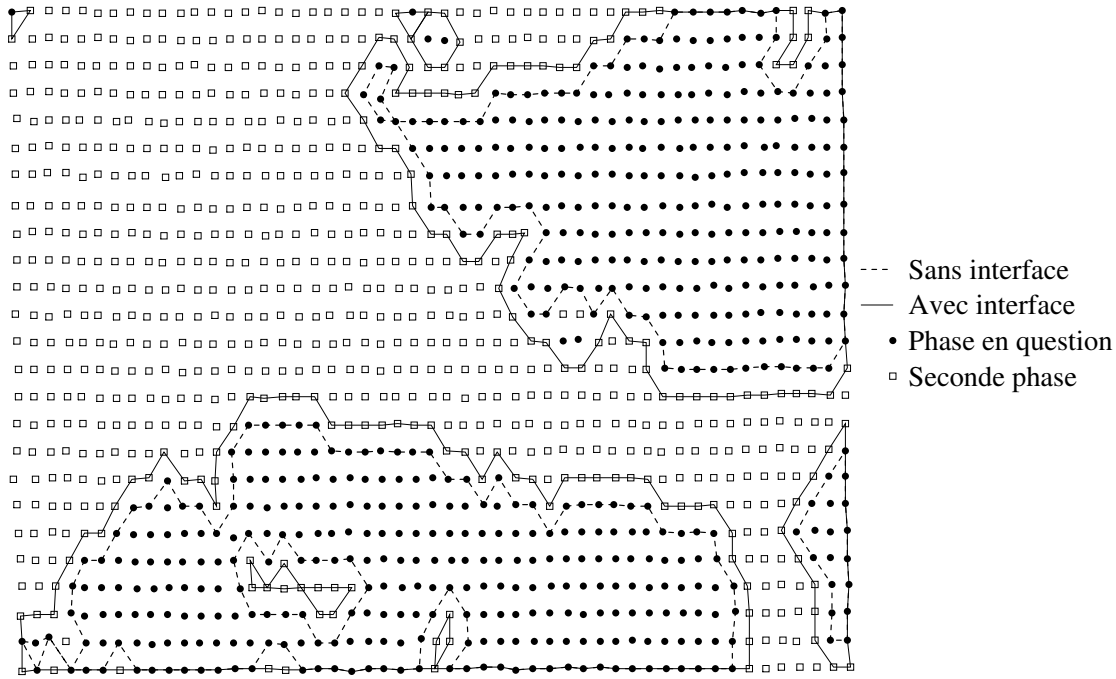


Figure 2.16 : Domaines d'intégration pour le calcul de gradients moyens par phase

	surface	$F_{XX} - 1$	$F_{XY}$	$F_{YX}$	$F_{YY} - 1$
macroscopique	1	$-3,297 \pm 0,0052$	$-0,674 \pm 0,0072$	$0,626 \pm 0,0041$	$8,593 \pm 0,0056$
Fe sans interf.	0,6347	$-2,895 \pm 0,027$	$-0,710 \pm 0,032$	$0,533 \pm 0,021$	$7,414 \pm 0,025$
Fe avec interf.	0,8325	$-3,104 \pm 0,018$	$-0,690 \pm 0,021$	$0,608 \pm 0,014$	$7,847 \pm 0,016$
Ag sans interf.	0,1675	$-4,256 \pm 0,082$	$-0,592 \pm 0,095$	$0,715 \pm 0,064$	$12,30 \pm 0,075$
Ag avec interf.	0,3653	$-3,995 \pm 0,046$	$-0,611 \pm 0,054$	$0,786 \pm 0,036$	$10,64 \pm 0,083$

Tableau 2.3 : Composantes (en %) du gradient macroscopique et des gradients moyens par phases, calculés avec et sans l'interface dans un biphasé fer/argent et incertitudes absolues associées

La comparaison des résultats obtenus avec ces deux domaines permet d'apprécier l'erreur liée à la mauvaise approximation de l'interface. L'erreur due à la mauvaise localisation des points dans la configuration déformée se calcule comme précédemment ; elle est faible car, comme pour le calcul du gradient macroscopique, le domaine d'intégration est grand et le nombre de points utilisés élevé. Le tableau 2.3 donne par exemple les résultats obtenus avec un biphasé fer/argent avec environ 20000 points d'or et une fraction volumique de fer de 74%, après environ 8,5% de déformation macroscopique. On vérifie que l'incertitude sur les composantes du gradient à domaine fixé est largement inférieure à 0,1% et que l'essentiel de l'erreur sur le calcul d'un gradient moyen sur une phase provient de la mauvaise approximation du domaine de phase : l'écart entre les résultats des deux procédures d'intégration vaut en général quelques pour-mille mais peut atteindre 1,7% pour une moyenne des deux valeurs de 11,5% (composante  $F_{YY} - 1$  dans l'argent). La qualité de l'approximation de l'interface est indiquée par la différence des aires des domaines d'intégration, de l'ordre de 20% de l'aire totale, la moyenne des deux aires étant pratiquement égale à la fraction volumique réelle de la phase considérée.

On peut aussi vérifier que, pour la phase dure (fer), le calcul sans interface aboutit à un résultat plus petit en valeur absolue que le calcul avec interface, et réciproquement pour l'autre phase. Ceci se

justifie intuitivement puisque, par exemple dans le cas de la phase dure, le calcul avec interface inclut un domaine de l'autre phase beaucoup plus déformé et d'environ 10% en fraction volumique, alors que le calcul sans interface exclut une zone de la phase considérée proche de l'autre phase et donc *a priori* plus déformée que les zones centrales : les résultats des deux calculs peuvent alors être considérés en première approximation comme des bornes supérieures et inférieures de la valeur réelle du gradient moyen sur la phase. On adopte alors pour ce dernier la demi-somme des valeurs obtenues, avec une incertitude donnée par la demi-différence majorée des incertitudes propres des deux valeurs.

### 2.3.E Calcul des déformations locales et moyennes

La connaissance de toutes les composantes du gradient de la transformation, local ou moyen, permet le calcul de ses éléments de réduction et du tenseur de déformation dans une échelle appropriée, par les relations générales données en annexe **D**, paragraphe **D.1**. Malheureusement, l'analyse du déplacement des points d'or à la surface de l'éprouvette ne permet que la mesure des seules composantes dans le plan  $XY$  du gradient. Cette information partielle suffit pour estimer les mêmes composantes du tenseur de déformation linéarisé, mais l'estimation de toutes les autres grandeurs nécessite la connaissance de toutes les composantes du gradient. Des hypothèses complémentaires sur les composantes sont donc indispensables.

La première considère que l'axe  $Z$  est une direction principale de distorsion de la transformation et la seconde que la rotation de corps solide est d'axe  $Z$ . Dans ces conditions, les composantes non diagonales inconnues du gradient sont identiquement nulles. Pour les calculs nécessitant la valeur de la troisième distorsion principale, égale à la composante  $ZZ$  du gradient, on la prendra égale à la plus petite des deux autres distorsions principales, calculées à partir des autres composantes connues : la distorsion est supposée axisymétrique. Les relations explicites pour calculer toutes les grandeurs de déformations à partir de ces quatre composantes ainsi que les incertitudes associées sont donnés en annexe **D**, paragraphe **D.2**.

Ces hypothèses sont parfaitement justifiées pour le gradient macroscopique, puisqu'il s'agit d'une traction simple sur un matériau isotrope et que cette traction est perpendiculaire à l'axe optique du microscope, par construction de la machine d'essai *in situ*, à la précision de l'ajustement près. La rotation de corps solide est normalement nulle dans ce cas. Il se peut qu'elle ne le soit pas parfaitement, en particulier du fait de possibles glissements de l'éprouvette dans les mors ou de petites imperfections géométriques des éprouvettes. On mesure en général des rotations de quelques dixièmes de degré. Il se peut en revanche que la direction de traction simple ne soit pas la direction  $Y$  à cause d'un alignement approximatif des grilles (et donc des axes des images) sur l'axe de l'éprouvette : des écarts de l'ordre du degré sont classiquement observés. Ces hypothèses sont aussi justifiées pour les gradients moyens par phase, car les matériaux constitutifs et leur distribution étant isotropes, leur état mécanique moyen reste une traction simple, de même direction que la traction macroscopique. La rotation de corps solide moyenne de chaque phase est aussi identique à la rotation macroscopique : on peut vérifier que l'écart entre les angles macroscopiques et moyens par phase calculés par les relations données en annexe **D** est effectivement toujours inférieur aux incertitudes sur cet angle.

En revanche ces propriétés de symétrie ne s'appliquent plus à l'échelle locale : la transformation locale autour d'un point d'or n'a aucune raison d'être liée à une traction simple. On adopte toutefois les mêmes hypothèses sur la forme du gradient local de façon à pouvoir appliquer les relations de l'annexe **D**, mais les résultats n'ont plus dans l'absolu qu'une valeur qualitative. En particulier, rien ne permet d'exclure la possibilité de rotations de corps solide hors du plan  $XY$ , qui sont faussement interprétées comme des distorsions dans ce plan. En pratique, les approximations faites sont quand même satisfaisantes car les déformations en jeu restent en général faibles, inférieures à 30%, et on peut légitimement espérer que les résultats obtenus soient bons au premier ordre.

Les grandeurs de déformation moyenne sur une phase sont estimées en calculant d'abord les gradients moyens sur cette phase, avec et sans interface, puis les déformations associées et en retenant enfin la demi-somme des valeurs obtenues, l'incertitude étant égale à la demi-différence, majorée des incertitudes propres des deux valeurs.

Enfin, notons que certaines grandeurs de déformation ayant un sens à l'échelle macroscopique ou à celle d'un domaine de phase ne se déduisent pas du gradient moyen à cette échelle, mais se calculent par intégration des grandeurs locales correspondantes. Il s'agit en particulier du moment d'ordre deux de la déformation locale, invoqué par certains modèles d'homogénéisation non-linéaires (*cf.* paragraphe **1.3.B.c**). Il est défini comme l'intégrale sur la phase  $i$  considérée du carré de la déformation équivalente locale et peut se calculer de manière discrète à partir de la déformation locale calculée en chaque point d'or :

$$\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \epsilon^{\text{eq}2} dx \quad (2.22)$$

$$\approx \frac{\sum_p \epsilon^{\text{eq}2}(p) S_{\Sigma^p}}{\sum_p S_{\Sigma^p}}. \quad (2.23)$$

Les sommes portent sur les points inclus dans la phase  $i$  considérée. Deux définitions sont envisageables et permettent d'estimer comme précédemment l'effet d'une mauvaise discrétisation de l'interface. Dans la première, on limite la somme aux points tels que tous les points du contour  $\partial\Sigma^p$  appartiennent à la phase considérée (calcul « sans interface ») et dans la seconde on étend la sommation à tous les points inclus dans la phase, indépendamment de leurs voisins (calcul « avec interface »). L'incertitude sur le résultat pour un nombre de points donné s'obtient à partir des incertitudes locales en supposant encore que les variables statistiques donnant les erreurs locales sont indépendantes les unes des autres :

$$d \langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_i = \frac{\sqrt{\sum_p (2\epsilon^{\text{eq}}(p) d\epsilon^{\text{eq}}(p) S_{\Sigma^p})^2}}{\sum_p S_{\Sigma^p}} \quad (2.24)$$

L'incertitude locale sur la déformation équivalente  $d\epsilon^{\text{eq}}(p)$  résulte de l'incertitude sur les composantes dans le plan du gradient, mais aussi de l'approximation faite en supposant que la transformation locale a les mêmes symétries que la transformation macroscopique. Comme précédemment, nous supposons cette contribution négligeable par rapport à la première. La valeur finalement retenue pour le moment d'ordre deux est la demi-somme des résultats des calculs avec et sans interface, l'incertitude étant la demi-différence corrigée de l'incertitude intrinsèque de chaque résultat. Notons que cette incertitude intrinsèque pour un nombre de points fixé est plus élevée que celle associée au gradient moyen : ici, la base de mesure de déformation reste celle du schéma d'intégration local et la précision obtenue est essentiellement d'origine statistique et dépend du nombre de points dans la phase (elle varie sensiblement comme l'inverse de la racine carrée du nombre de points). Mais comme l'écart entre les calculs avec et sans interface reste malgré tout plus important, la précision finale sur les moments moyens par phase découle principalement de la qualité de la discrétisation de l'interface.

### 2.3.F Caractérisation d'hétérogénéités

La connaissance de la déformation locale en plusieurs milliers de points n'est intéressante que si l'on dispose de moyens de représenter cette information sous une forme facilement interprétable et éventuellement opposable à des résultats de modélisation. Une première possibilité est de tracer des fonctions de distribution donnant la probabilité qu'une certaine grandeur locale prenne une valeur donnée. Ces fonctions sont construites en déterminant d'abord les valeurs extrémales de la grandeur considérée, puis en discrétisant l'intervalle obtenu en un nombre de classes adéquat (suffisamment élevé pour garantir une bonne approximation de la fonction, mais néanmoins petit par rapport au nombre de points pris en compte) ; chaque classe est ensuite pondérée par les aires  $S_{\Sigma^p}$  associées aux points  $p$  où la grandeur considérée prend une valeur appartenant à cette classe ; enfin, la valeur de la fonction de distribution au point central de la classe est donnée par le poids total de cette classe après normalisation.

Les figures 2.17 et 2.18 donnent par exemple les fonctions de distribution globales de la déformation équivalente logarithmique dans l'éprouvette avec 74% de fer déjà évoquée précédemment, après respectivement environ 3,8% et 8,5% de déformation macroscopique. Les trois schémas d'intégration  $b$ ,  $c$  et  $d$  ont été testés et 25 classes ont systématiquement été utilisées. On constate de légères différences

entre les courbes. Ceci s'explique par le fait que ces courbes rendent compte de la dispersion réelle de la déformation dans l'éprouvette mais aussi de la dispersion introduite par les erreurs de mesures. Les deux étant *a priori* indépendantes, la variance  $\Sigma_m^2$  des courbes mesurées est en fait la somme de la variance de la distribution réelle  $\Sigma^2$  et de la variance de l'erreur expérimentale  $\sigma^2$ . Lorsque  $\sigma$  est petit par rapport  $\Sigma$ , l'écart entre  $\Sigma_m$  et  $\Sigma$  est faible et la distribution mesurée est bien représentative de la distribution réelle. C'est le cas pour les schémas d'intégration *c* et *d* au faible taux de déformation macroscopique, qui donnent quasiment le même résultat ; le schéma *b* donne une distribution plus large et décalée vers les valeurs élevées, car il intègre une part non-négligeable d'erreur expérimentale. Au second taux de déformation, les trois schémas donnent des courbes très proches, en tous cas du point de vue de la position moyenne et de la largeur de la distribution : la distribution macroscopique est ici plus large et les erreurs expérimentales sont négligeables pour tous les schémas. Le schéma *d* a une base de mesure plus large et tend donc *a priori* à lisser certaines hétérogénéités locales. Or on constate un très faible écart entre les schémas *c* et *d*, ce qui suggère qu'en fait la perte d'information du schéma *d* est faible et que le pas de la grille est effectivement suffisamment fin pour enregistrer l'essentiel des fluctuations locales de déformations. On peut enfin remarquer que les distributions données par le schéma *b* sont plus irrégulières que les deux autres. Ce phénomène est dû à la nature discrète des déplacements enregistrés, donnés au pixel près : seules certaines valeurs discrètes de déformation peuvent être obtenues expérimentalement. Le nombre de ces valeurs est d'autant plus faible que le nombre de points utilisés par le schéma d'intégration local est petit et que la distance entre ces points est faible. Il est en particulier plus faible pour le schéma *b* que pour les deux autres : certaines classes de la distribution en contiennent plus que leurs voisines et cette allure irrégulière de la courbe en résulte. Ce phénomène est une autre limitation au nombre de classes utilisables pour calculer les fonctions de distribution. Pour la suite on adoptera le schéma *c* pour calculer les valeurs locales de déformations car il semble présenter un bon compromis entre précision de mesure et lissage des hétérogénéités pour les matériaux étudiés et les gammes de déformation considérées dans cette étude.

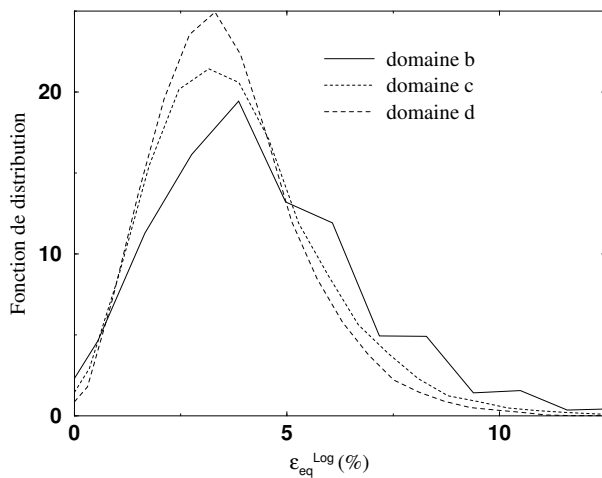


Figure 2.17 : Fonction de distribution globale de la déformation logarithmique équivalente - Calculs avec trois schémas d'intégration - Déformation macroscopique  $\approx 3,8\%$

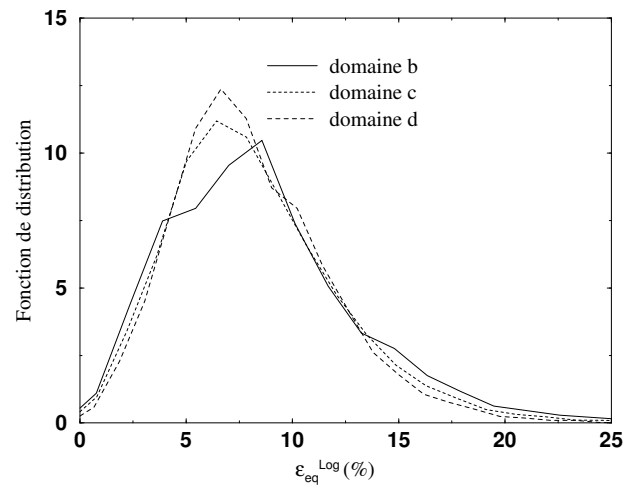


Figure 2.18 : Fonction de distribution globale de la déformation logarithmique équivalente - Calculs avec trois schémas d'intégration - Déformation macroscopique  $\approx 8,5\%$

On peut également caractériser les hétérogénéités de déformation « intraphases » par des fonctions de distribution des déformations relatives à une phase. Elles sont obtenues comme précédemment, mais en ne prenant en compte que les points appartenant à la phase considérée. Le problème de la discrétisation de l'interface se pose à nouveau et il est résolu par une procédure identique à celle mise en œuvre pour calculer des moments d'ordre deux sur les phases et consistant à calculer des fonctions de distribution « avec interface » ou « sans interface ». Les figures 2.19 et 2.20 donnent les résultats correspondants, pour la même éprouvette que précédemment, à 3,8% de déformation macroscopique. Dans la première, les courbes ont été normalisées de façon à ce que leur intégrale soit égale à la fraction volumique du domaine pris en compte dans le calcul ; on constate des différences assez importantes

entre les courbes, mais presque exclusivement liées aux différences de domaines d'intégration, de l'ordre de 20% de la surface totale, comme il a été indiqué précédemment. En particulier, la courbe avec interface pour l'argent utilise environ 25% des points, alors que celle sans interface n'en utilise plus que 5%. En termes de position moyenne et de largeur de distribution, les calculs avec ou sans interface donnent en revanche quasiment les mêmes informations, comme en atteste la **figure 2.19** où les courbes ont été normalisées de façon à ce que leur intégrale soit égale à l'unité : les courbes avec et sans interface sont pratiquement identiques. On peut éventuellement regretter l'aspect irrégulier de la courbe sans interface de l'argent, mais il est clairement lié au nombre trop faible de points pris en compte qui n'assure pas une représentativité statistique suffisante. Pour la suite on adopte le calcul avec interface. Remarquons qu'en normalisant par rapport à l'aire du domaine pris en compte, la somme des courbes relatives aux deux phases redonne la distribution globale.

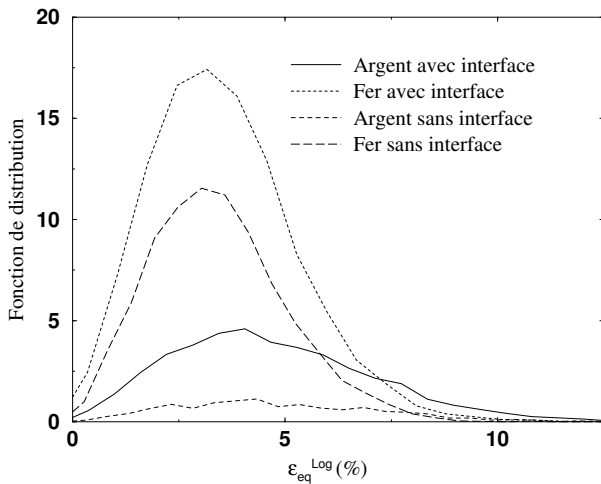


Figure 2.19 : Fonction de distribution par phase de la déformation logarithmique équivalente - Calculs avec et sans interface - Normalisation à la fraction volumique de phase prise en compte

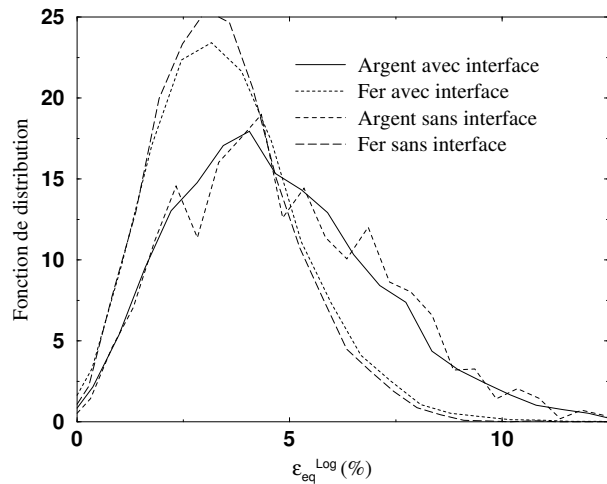


Figure 2.20 : Fonction de distribution par phase de la déformation logarithmique équivalente - Calculs avec et sans interface - Normalisation à l'unité

### 2.3.G Cartes de déformations

La seconde possibilité pour représenter l'information statistique locale consiste à tracer des cartes de déformations qui révèlent graphiquement les modes réels de localisation de la déformation dans un domaine représentatif entier du matériau étudié. Il suffit pour cela de retranscrire cette information locale en chaque point sous une forme lisible par un logiciel de traitement graphique capable de représenter des champs scalaires définis sur une surface par des lignes d'isovaleurs ou des couleurs. Les logiciels de post-traitement de calculs par éléments finis savent parfaitement s'acquitter d'une telle tâche. En l'occurrence, le logiciel AVS a été utilisé. Le maillage sous-jacent nécessaire à ce type de logiciel est facile à construire à partir des grilles de points : c'est un maillage rectangulaire d'éléments à quatre nœuds dont les nœuds sont les points d'or dans la configuration non-déformée. Les valeurs à représenter sont données en ces nœuds et sont calculées par les procédures déjà évoquées. En général on retient les composantes du tenseur de déformation dans les axes propres de la déformation macroscopique, la déformation équivalente, la dilatation volumique  $\Theta$ , l'angle de rotation de corps solide  $\phi$  et l'angle  $\theta$  entre l'axe de traction macroscopique de la première direction propre de distorsion locale (*cf.* annexe **D**). Pour être vraiment exploitables ces cartes doivent aussi indiquer l'interface entre phases pour permettre de corrélérer le champ de déformation aux domaines de phases. Pour ce faire, on ajoute au maillage des éléments linéiques construits à partir des segments des frontières entre phases utilisées pour le calcul des déformations moyennes par phases et on trace ces éléments en sur-impression. En général il est préférable d'utiliser la frontière avec interface de la phase dont la fraction volumique est la plus faible.

Pour que l'information traduite soit complète, ces cartes doivent couvrir tout le domaine repré-

sentatif. Avec la première procédure de numérotation des points, on place côte à côte les résultats de toutes les images utilisées pour couvrir la plage. Le positionnement est effectué approximativement en mesurant la position relative de chaque image par rapport à l'image en haut à gauche sur une micrographie prise à faible grandissement. Comme les images ne sont pas jointives, il reste des zones non représentées entre les images, dont la taille s'accroît à mesure que la déformation augmente, car le nombre de points présents à la fois dans l'image initiale et l'image déformée devient de plus en plus faible. La lecture de telles cartes n'est en conséquence pas très facile. C'est pourquoi il est préférable d'avoir recours au second mode de numérotation, qui produit naturellement des cartes complètes puisque les images jointives ont déjà été réassemblées à l'issue de la phase de construction des tableaux de points, même si la mise en œuvre en est plus pénible pendant la phase d'acquisition des images. Notons que, pour manipuler de manière interactive les données ainsi représentées, un ordinateur puissant est indispensable (un maillage bidimensionnel d'environ 20000 nœuds avec 7 données en chaque nœud représente environ 1.5 mégaoctets de données, à retraiter à chaque modification des paramètres de la représentation graphique).

Des cartes complètes de la déformation équivalente des diverses éprouvettes testées sont reportées en annexe F. Nous donnons ici à titre d'exemple des extraits de cartes indiquant toutes les données aux nœuds généralement calculées, pour une même zone (non représentative) de  $40 \times 50$  points d'or (figures 2.22 à 2.28). Il s'agit toujours de l'éprouvette évoquée précédemment après 8,5% de déformation macroscopique ; la figure 2.21 donne une micrographie de la zone en question. Les grandeurs de déformation sont exprimées dans l'échelle logarithmique. Rappelons que l'axe de traction macroscopique est vertical. Les composantes sont données dans le repère propre de la traction macroscopique,  $Y$  étant la direction de traction.



Figure 2.21 : Micrographie de la zone étudiée

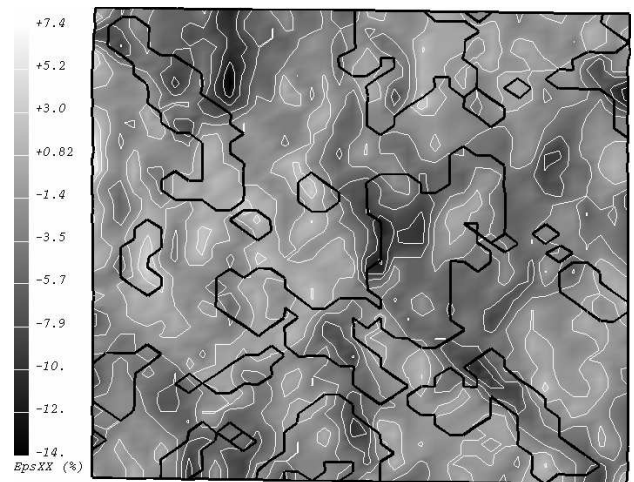
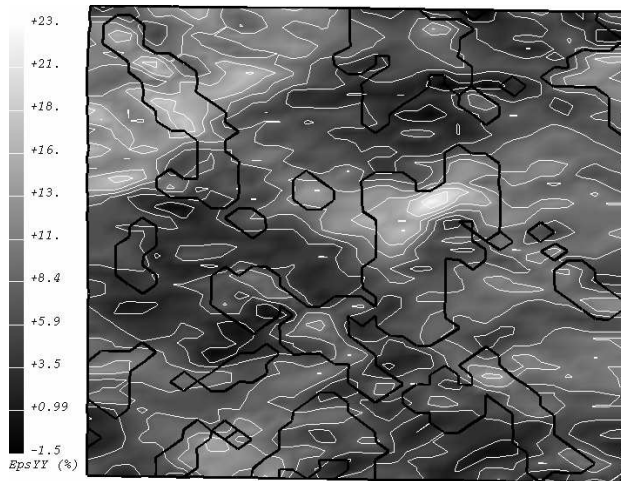
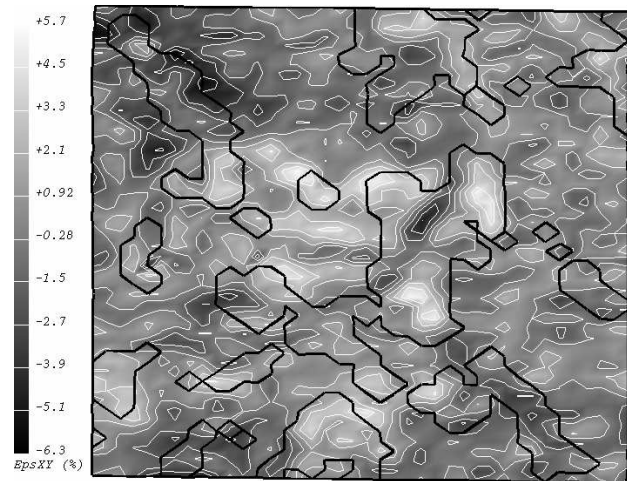
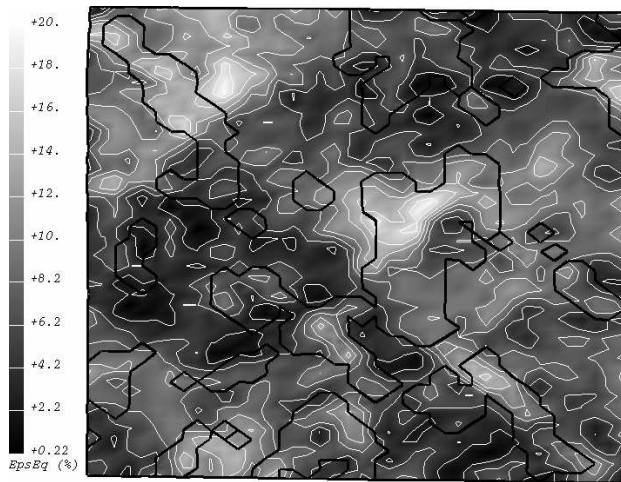
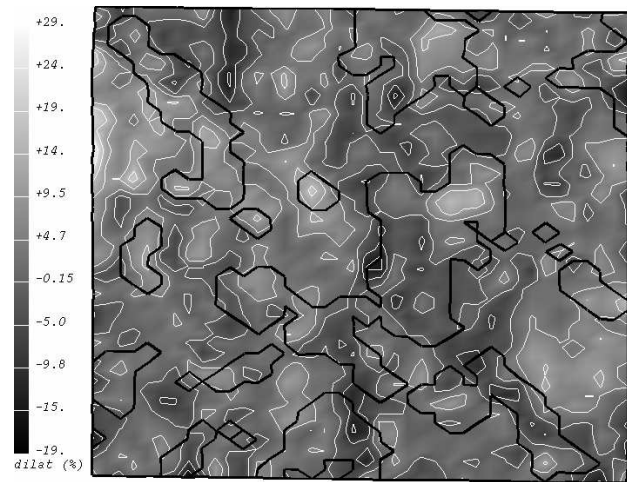
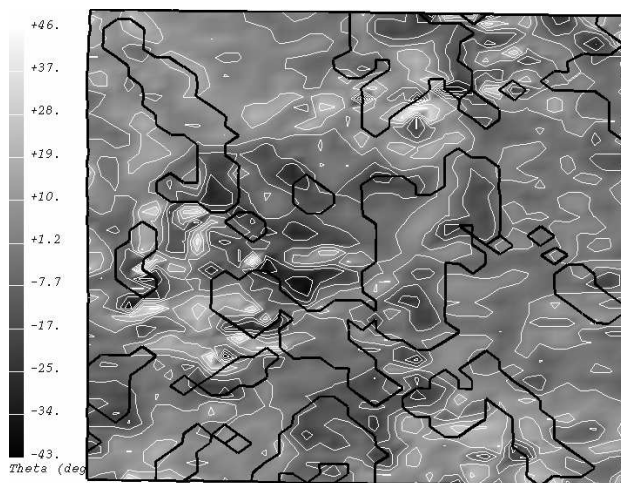
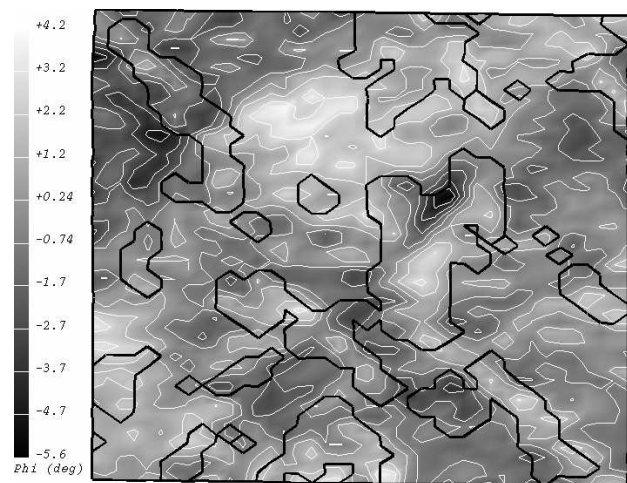


Figure 2.22 : Déformation  $\epsilon_{XX}$  (axe de traction vertical)

L'interface est représentée en trait noir épais ; la comparaison avec la micrographie réelle donne une idée de la qualité de la discrétisation, qui n'est pas très précise mais suffit pour repérer les domaines de phases. Les cartes mettent en évidence la complexité du champ local de déformation et son hétérogénéité : la déformation équivalente varie par exemple de 0 à 20%. L'amplitude des valeurs de dilatation volumique est en contradiction avec l'incompressibilité plastique de ces matériaux. En fait, ceci met en évidence les limites de l'hypothèse considérant que la troisième valeur principale de déformation est égale à la seconde. Ce n'est manifestement pas vrai à l'échelle locale et ces valeurs de dilatation volumique sont sujettes à caution. En revanche, les valeurs de déformation équivalente semblent plus fiables, car elles ne dépendent en fait que des valeurs extrêmes des distorsions principales et il est fort probable que cet intervalle soit déjà suffisamment bien estimé par les deux déformations principales calculées comme décrit en annexe D. Le fait que le champ de déformation équivalente soit moins perturbé en atteste : il présente des zones sombres et des zones claires assez grandes et avec des transitions relativement régulières. Le champ de dilatation volumique semble en comparaison plus



Figure 2.23 : Déformation  $\epsilon_{YY}$ Figure 2.24 : Déformation  $\epsilon_{XY}$ Figure 2.25 : Déformation équivalente  $\epsilon^{eq}$ Figure 2.26 : Dilatation volumique  $\Theta$ Figure 2.27 : Orientation des distorsions principales  $\theta$ Figure 2.28 : Rotation de corps solide  $\phi$

aléatoire. Les trois composantes connues du tenseur de déformation présentent des caractéristiques de régularité similaires : le calcul approché mis en œuvre pour les estimer, exact au premier ordre, semble encore satisfaisant pour les valeurs de déformation abordées ici. Le champ des orientations des directions principales de distorsion (en fait l'angle entre l'axe  $Y$  et la direction principale locale la plus proche de  $Y$ ) semble plus perturbé. Il y a deux raisons à cela. La première est que les valeurs  $-45^\circ$  et  $+45^\circ$  sont équivalentes : une faible variation d'orientation peut produire des changements de valeur très rapides (il est difficile de construire un algorithme garantissant une certaine continuité locale à ce paramètre). La seconde est que l'incertitude sur cet angle est élevée dans les zones où les deux distorsions principales ont des valeurs proches. Enfin notons que l'angle de rotation de corps rigide semble assez bien estimé, puisqu'on peut clairement mettre en évidence des zones de grande étendue où le mouvement de corps rigide est presque uniforme.

Signalons enfin que ces cartes sont très utiles pour vérifier la qualité du traitement d'image. Les mauvais appariements et les mauvaises localisations de points sont facilement décelés par les valeurs aberrantes de déformation qu'ils induisent.

## 2.4 Critiques et extensions possibles

La technique présentée ici ouvre de vastes perspectives d'application en micromécanique, mais il convient d'être prudent dans son utilisation et dans l'interprétation des valeurs mesurées. Le premier reproche qu'on peut lui faire concerne la nature surfacique des mesures : l'information extraite de l'observation des déplacements à la surface des éprouvettes est-elle représentative des champs tridimensionnels au cœur des matériaux ; comment la condition de surface libre modifie-t-elle l'état mécanique local et comment corriger le cas échéant l'information surfacique pour lui donner une signification volumique ? Ces questions restent malheureusement sans réponse à l'heure actuelle.

Elles se posent en fait de manière plus générale pour toute observation micromécanique qualitative ou quantitative à la surface d'éprouvettes. Dans certains cas, il est possible de donner une réponse partielle. Par exemple, pour des mesures d'endommagement en termes de fractions volumiques de porosités, il est possible de comparer les mesures surfaciques en cours d'essai à des mesures volumiques *post mortem* réalisées à cœur en découpant les éprouvettes. Une telle démarche n'est cependant pas possible pour des mesures de déformation, qui nécessitent la connaissance d'une configuration de référence et d'une configuration déformée. Des mesures macroscopiques de déplacements à cœur ont été réalisées dans des matériaux transparents [46], mais l'application d'une telle démarche aux matériaux usuels et aux échelles considérées ici semble illusoire. Peut-être des simulations numériques pourraient-elles apporter des éléments de réponse. La question reste largement ouverte.

Quoi qu'il en soit, la connaissance quantitative du champ surfacique est intrinsèquement déjà très intéressante. Dans son état actuel, la technique souffre encore de gros problèmes d'imprécision qui résultent de la localisation approximative des points, de la méconnaissance de certaines composantes du gradient, et d'une mauvaise discrétisation des interfaces lorsque l'on souhaite mesurer des quantités relatives à une phase particulière. Diverses extensions sont envisageables pour améliorer ces aspects<sup>1</sup>.

La première limitation provient de la procédure de traitement des images qui ne permet de localiser les points d'or dans la configuration déformée qu'au pixel près et qui rend illusoire la mesure de champs de déplacement locaux pour des déformations macroscopiques inférieures à quelques pour-cent. Le recours à des techniques traitant directement les images en niveaux de gris s'avère indispensable pour accéder à des précisions plus importantes. On peut en effet concevoir facilement, sans entrer dans des considérations théoriques plus poussées sur la notion d'information, qu'une image ayant 256 niveaux de gris contient 128 fois plus d'informations qu'une image binaire avec deux niveaux de gris ; la seconde permet de localiser un point ayant un niveau de gris réel  $n \in [0, 1]$  au mieux à  $1/2^1$  pixel près, alors que la seconde permet de localiser un pixel de niveau  $n \in [0, 255]$  au mieux à  $1/2^8$  pixel près, par exemple par interpolation linéaire des niveaux de gris entre points adjacents. Si donc une

---

<sup>1</sup>Parmi les extensions évoquées dans ce qui suit, certaines ont d'ores et déjà été mises en œuvre dans le laps de temps qui a séparé le travail expérimental décrit dans ce manuscrit et la rédaction finale de ce dernier. Le lecteur pourra trouver plus de précisions dans les références [31, 9].

procédure utilisant des images binaires est précise au pixel près, l'utilisation d'images de 8 bits de profondeur devrait permettre d'atteindre le centième de pixel. Avec de telles précisions le cahier des charges décrit au paragraphe **2.1.A** serait complètement rempli.

Diverses techniques de ce type, déjà évoquées en paragraphe **2.1.E**, ont été proposées. Une première approche proposée par plusieurs auteurs [56, 150, 149] est en fait une démarche mixte entre l'approche binaire et l'approche en niveaux de gris. Elle consiste à isoler les taches correspondant aux points d'or par une technique similaire à celle utilisée ici, mais à définir ensuite la position de cette tache par le barycentre des pixels qui la composent, pondérés par leur niveaux de gris. Cet algorithme dit du « centroïde » autorise d'après ces auteurs des précisions de l'ordre de 0,02 pixels dans des conditions optimales. Elle a été mise en œuvre sur des matériaux homogènes, avec un niveau de gris du substrat quasi uniforme. Son application aux matériaux biphasés présentant des contrastes divers et des modifications de l'état de surface nécessiterait probablement quelques adaptations.

D'autres techniques cherchent à maximiser des fonctions de corrélation de niveaux de gris entre une image de la configuration actuelle et un motif de référence. Dans le cas de grilles de lignes ce motif est par exemple l'intersection de deux lignes [4]. La procédure générale consiste d'abord à effectuer un produit de convolution entre l'image étudiée et ce motif, puis à repérer la position des maxima locaux de l'image obtenue. Le recours à des polynômes d'interpolation permet une localisation à des fractions de pixels près. Des précisions de l'ordre de 0,1 à 0,02 pixel sont là aussi annoncées. Cette technique impose que le motif de référence s'applique à tous les points de la grille. Or il s'avère que la forme des points d'or varie en fonction de la position : bien circulaires au centre de la grille, ils ont souvent une forme elliptique sur les bords, qui résulte de l'inclinaison du faisceau d'électrons lors de l'irradiation de la résine électrosensible. De plus, les variations locales de niveaux de gris du substrat non homogène peuvent être gênantes.

Une dernière méthode semble plus adaptée aux images enregistrées en micromécanique. Elle consiste à maximiser une fonction de corrélation entre l'image actuelle et une petite image autour du point considéré extraite d'une image de la même zone dans la configuration de référence. Les algorithmes sont ceux décrits par divers auteurs déjà cités ([132, 158, 45, 155]), qui annoncent des précisions de l'ordre de 0,01 pixel. Cette méthode est de mise en œuvre plus lourde que les précédentes, mais parfaitement abordable avec les moyens informatiques actuels. On peut éventuellement gagner en rapidité en effectuant une première localisation grossière des points par une approche similaire à celle décrite ici et en affinant le résultat par une telle méthode de corrélation. Des techniques plus sophistiquées sont discutées dans la référence [180]. La mesure de déformations élastiques dans des matériaux hétérogènes devient possible par une telle démarche.

Une telle précision est peu probable sur des configurations déjà très déformées, à cause de la dégradation de l'état de surface consécutive à la plasticité et à l'endommagement. Ceci n'est toutefois pas gênant puisqu'une telle précision n'est plus nécessaire pour garantir une incertitude relative suffisante. On peut espérer diminuer les effets de ces dégradations en utilisant la configuration précédente comme référence plutôt que la configuration initiale et en ajoutant les déplacements ainsi mesurés à ceux de la configuration précédente. Mais le principal défaut de la technique pour mesurer des grandes déformations reste l'approximation faite en négligeant les composantes hors plan du gradient local, de moins en moins justifiée à mesure que la déformation augmente. On peut envisager une mesure des déplacements selon  $Z$  par une technique d'imagerie stéréo [107] : deux images de la configuration déformée prises pour deux orientations différentes mais bien connues de l'éprouvette permettent, grâce là encore à des procédures de comparaison d'images, d'accéder à la troisième composante du déplacement. La précision de localisation risque en revanche d'être bien moins bonne que celle sur les autres composantes. Par ailleurs, l'estimation des dérivées selon  $Z$  semble hors de portée. La mesure précise de champs locaux en grandes déformations est donc un problème encore largement ouvert.

En revanche, la mesure de champs moyens, macroscopiques ou relatifs à une phase, est possible même en grandes déformations, à condition que les propriétés de symétrie déjà évoquées soient applicables. Le principal problème de la mesure de gradients moyens par phase reste la localisation de l'interface : l'incertitude de ces mesures résulte principalement des écarts entre les calculs « avec » et « sans interface ». Une première façon de contrer cette limitation serait de réduire le pas des grilles,

mais au prix d'un fort accroissement de la lourdeur de traitement et avec un gain en performances probablement faible. Une autre démarche serait de localiser l'interface directement sur les images en niveaux de gris, de la discrétiser en segments, de mesurer les déplacements des sommets de ces segments par les techniques de corrélation mentionnées précédemment et à calculer le gradient moyen par les relations données plus haut. Mais l'automatisation d'une telle procédure risque d'être assez lourde d'un point de vue algorithmique. De plus, la mesure de déplacements sans grille risque d'être peu précise, à cause de contrastes insuffisants, notamment pour la mesure du déplacement le long de l'interface. Il serait donc souhaitable de combiner une telle approche avec une technique de grille et de retenir par exemple les points de l'interface qui appartiennent aussi à une ligne ou une colonne de la grille.

Notons aussi que certaines techniques de corrélation permettent de mesurer non seulement les déplacements locaux mais aussi leurs dérivées premières, c'est-à-dire les composantes planes du gradient moyen de la transformation dans une petite zone autour du point considéré. Toutefois, elles ne fonctionnent correctement que si les contrastes sont suffisants pour apparier correctement tous les points de cette petite zone, et pas seulement le point central. On peut craindre qu'un motif constitué d'un point d'or unique n'ait pas les propriétés requises. Un motif constitué d'une intersection de lignes fonctionnera mieux mais échouera probablement dans la détermination d'un gradient avec des directions principales de distorsion alignées avec les lignes du motif. Les grilles de points ou de lignes classiques ne sont donc probablement pas optimales vis-à-vis de ces techniques. Il serait judicieux d'avoir recours à des grilles classiquement utilisées par les « macromécaniciens », constituées de lignes et de petits cercles centrés sur les intersections des lignes, qui permettent de repérer les distorsions principales par les axes principaux des quasi-ellipsoïdes que deviennent les cercles après déformation (*cf.* figure 2.29). Le dépôt de telles grilles est possible par microélectrolithographie à condition de pouvoir piloter complètement le faisceau du microscope comme dans les masqueurs utilisés en microélectronique. De telles techniques sont aujourd'hui accessibles au monde micromécanicien et devraient induire un renouveau de la technique des microgrilles. Un calcul du gradient local de déformation plus précis est alors possible, avec de plus une signification plus locale puisque la zone d'intégration sera limitée au voisinage immédiat du point d'intersection de la grille considéré.

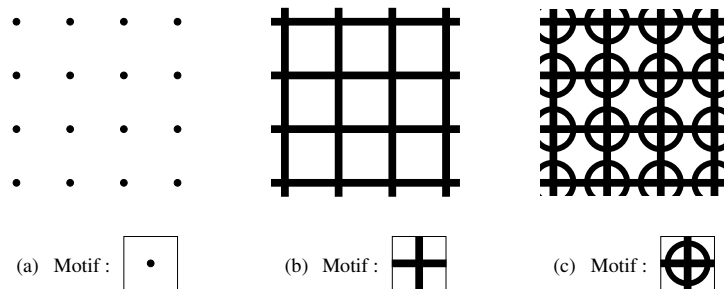


Figure 2.29 : Grilles pour la mesure du gradient local : grilles de points (a), de lignes (b), de lignes cerclées (c)

Le dernier reproche que l'on peut faire à la technique dans son état actuel est la lourdeur de sa mise en œuvre pratique. L'opération la plus longue est le traitement d'images mais l'on peut espérer que le recours aux techniques de corrélation permette une meilleure automatisation. L'acquisition des images est aussi fastidieuse, principalement à cause de la décomposition de la zone étudiée en 16 ou 25 images, voire plus, et des ajustements manuels du champ du microscope indispensables pour garantir un repérage correct des points. Cette étape pourrait être considérablement simplifiée avec des techniques d'imagerie en haute résolution : 16 images de  $512 \times 512$  pixels contiennent autant d'information que quatre images de  $1024 \times 1024$  pixels ou qu'une seule image de  $2048 \times 2048$  pixels. Avec cette dernière résolution, il n'y a plus de problème d'ajustement de champ et la longueur de l'expérience *in situ* ne dépend quasiment plus que de la vitesse d'acquisition des images, c'est-à-dire de la sensibilité du détecteur d'électrons rétrodiffusés. Les moyens actuels de microscopie électronique autorisent des résolutions de l'ordre de  $4096 \times 4096$  pixels à des coûts raisonnables. Ils permettent

donc d'étudier des domaines légèrement plus grands que les domaines juste représentatifs couverts par la technique utilisant des moyens traditionnels présentée ici, et ceci avec une définition locale meilleure, facilitant la localisation des points d'or. De manière plus générale, ces moyens résolvent en quelque sorte l'équation micromécanicienne évoquée au paragraphe **2.1.A**, en donnant accès à la fois à l'information locale et à l'information statistique.

---

## Chapitre 3

# Confrontation modèles-expériences et premières extensions

La confrontation entre prévisions théoriques et mesures expérimentales sur des matériaux modèles fer/argent et fer/cuivre est l'objet de la première partie de ce chapitre. Elle porte sur le comportement élastique et le comportement élasto-plastique à l'échelle globale et locale. Les résultats présentés reprennent pour une part ceux de L. Allais qui ont constitué le point de départ du présent travail. Les mesures de modules d'élasticité ont simplement été reportées, alors que les résultats relatifs à la plasticité ont été complétés par de nouveaux essais et de nouvelles analyses, en mettant en particulier en œuvre les procédures décrites au paragraphe **2.3**. Afin de préserver la cohérence globale de l'étude expérimentale, nous présentons l'ensemble de la démarche et des résultats, en insistant sur les nouveautés par rapport au travail antérieur ; nous renvoyons à la référence [2] pour toute précision complémentaire sur les aspects que nous n'avons pas directement abordés.

Les matériaux testés ont été élaborés par différents procédés de métallurgie des poudres de façon à induire des morphologies microstructurales différentes pour une même fraction volumique des constituants et un même comportement local des phases (du moins, en théorie). Dans une première approche, les matériaux obtenus peuvent sensiblement être répartis en deux groupes : ceux à microstructure de type matrice/inclusion (MI par la suite) et ceux à phases co-continues (CC par la suite). Les résultats expérimentaux ont été comparés aux bornes universelles de Hashin et Shtrikman et à des bornes intégrant une information de nature morphologique, ainsi qu'aux prévisions du modèle autocohérent classique et du modèle des trois phases, décrits au chapitre **1**. Rappelons que le premier est invoqué pour décrire des composites avec une répartition des phases parfaitement désordonnée, alors que le second, spécifique aux morphologies MI, est estimé représenter un assemblage de sphères composites de Hashin parfaitement désordonné. L'« extension classique » (*cf.* paragraphes **1.3.A.b** et **1.3.B.c**) est utilisée pour aborder la plasticité.

Cette confrontation soulève un certain nombre de questions, relatives à certaines incohérences entre les mesures de modules d'élasticité et les encadrements théoriques, et à l'incapacité des modèles à rendre compte des hétérogénéités de déformations inter-phases et intra-phases observées. En seconde partie du chapitre, nous présentons diverses extensions du modèle des trois phases élaborées pour tenter de rendre compte de ces écarts entre expérience et modèles. Elles aboutissent à la définition du « modèle à  $m$  motifs de type  $n$  phases », qui combine les idées sous-jacentes à la notion de motif morphologique représentatif à la résolution analytique du problème de l'inclusion multicouche en milieu infini (*cf.* paragraphe **1.2.C.c**) et permet d'enrichir la description morphologique de la microstructure. Les incohérences constatées sur les modules d'élasticité sont partiellement expliquées en invoquant une porosité résiduelle dans les matériaux testés.

Ce modèle est ensuite appliqué aux comportements non-linéaires par l'« extension classique », l'« extension modifiée » et diverses variantes. Mais les modèles obtenus sont également insuffisants pour rendre compte des hétérogénéités mesurées. En revanche, ils révèlent leur supériorité sur les modèles usuels pour d'autres applications : un exemple relatif à des composites dont la matrice élasto-plastique présente un gradient de propriétés au voisinage des inclusions est présenté.

Enfin, l'origine des hétérogénéités est discutée en dernière partie. L'effet des corrélations à grande distance, révélées par des cartographies de déformations, est en particulier commenté.

Les résultats présentés ici peuvent en grande partie être retrouvés dans les références [26, 27, 25].

## 3.1 Résultats expérimentaux

### 3.1.A Matériaux

Les matériaux biphasés étudiés sont ceux élaborés par L. Allais au cours de son travail de thèse. L'objectif était d'obtenir des microstructures variées tout en préservant un comportement intrinsèque des phases pures identique, de façon à étudier expérimentalement l'effet des paramètres morphologiques sur le comportement effectif. Divers arguments conduisent à préférer des mélanges de constituants purs plutôt que d'alliages, et à choisir en conséquence des métaux non miscibles. Le couple fer/argent, déjà utilisé lors d'études antérieures [29, 32], a été retenu. Des matériaux fer/cuivre, éléments faiblement miscibles, ont également été élaborés par L. Allais et testés au cours du présent travail.

#### 3.1.A.a Procédés d'élaboration

La métallurgie des poudres permet d'obtenir diverses morphologies pour une gamme de concentrations des phases suffisamment vaste. Les deux procédés mis en œuvre sont décrits précisément dans [2] ; nous en rappelons simplement les principes essentiels. La première étape du *compactage isostatique à chaud* (CIC par la suite) consiste à mélanger des poudres des deux constituants en proportions choisies selon un procédé garantissant l'homogénéité du mélange : la poudre présentant les grains les plus gros, en l'occurrence le fer, est d'abord imbibée d'éthanol et agitée pendant un temps suffisant pour bien humecter tous les grains ; l'autre poudre est ensuite ajoutée progressivement et enrobe les grains de la première pour former un mélange homogène. Ce dernier est introduit dans une gaine mise sous vide pour faire évaporer l'alcool. Après fermeture hermétique, le compactage proprement-dit consiste à maintenir le tout sous haute température et haute pression pendant un temps suffisamment long pour créer des liens chimiques entre les grains (figure 3.1) et densifier le mélange jusqu'à sa densité théorique. Après refroidissement, la gaine est retirée, les éprouvettes sont usinées et subissent un nouveau cycle de compactage pour supprimer l'écroûissage consécutif à l'usinage et améliorer la tenue mécanique des interfaces. Deux à trois éprouvettes peuvent en général être extraites de la même gaine et présentent ainsi en pratique des caractéristiques mécaniques locales et globales identiques, en tous cas lorsque le mélange est bien homogène.

Le second procédé (figure 3.2) est l'infiltration d'un barreau poreux éventuellement fritté au préalable ; il n'a été mis œuvre que pour le couple fer/argent. Une poudre de fer subit une compression uniaxiale dans une chambre de remplissage sous l'effet d'un poinçon coulissant. La quantité de poudre introduite et la pression appliquée déterminent la taille du barreau obtenu et sa porosité, cette dernière étant limitée inférieurement par l'effort maximal supportable par l'outillage et supérieurement par la « tenue à vert » du barreau, c'est-à-dire sa cohésion après extraction de l'outil, qui doit être suffisante pour permettre une manipulation ultérieure. Sur toute l'étendue de la gamme ainsi réalisable, qui va de 5 à 45%, la porosité est ouverte. La seconde étape d'élaboration, facultative, est un frittage sous vide à  $1120^{\circ}\text{C}$ , au cours duquel des phénomènes de diffusion en phase solide établissent des liens chimiques entre les grains de fer : l'on passe ainsi d'un état d'agglomérat friable à celui d'un matériau poreux avec une véritable tenue mécanique. La dernière étape est le remplissage des porosités par infiltration d'argent liquide (figure 3.2) : une quantité suffisante d'argent massif très pur, disponible sous forme de fils (origine : Comptoir Lyon Allemand), est comprimé en plaque et placé sous le barreau poreux. Le tout est porté à  $1035^{\circ}\text{C}$  sous atmosphère réductrice : l'argent liquide remonte dans le barreau par capillarité et remplit toutes les porosités. Les deux types de matériaux ainsi obtenus sont dits *infiltrés après frittage* et *infiltrés sans frittage* respectivement (IAF et ISF par la suite). Leurs morphologies se distinguent par la cohésion du squelette de fer, plus ou moins forte suivant que le frittage est mis en œuvre ou non. La continuité de la phase argent est garantie par le procédé d'élaboration dans les deux cas, alors que celle du fer n'est assurée que pour les matériaux IAF, dans lesquels le squelette de fer

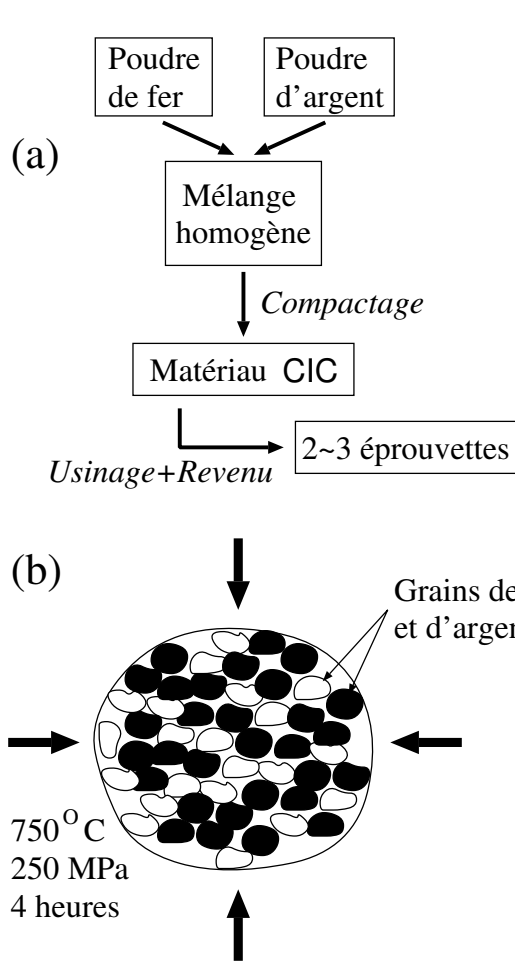


Figure 3.1 : Compactage isostatique à chaud. (a) : procédure ; (b) : compactage

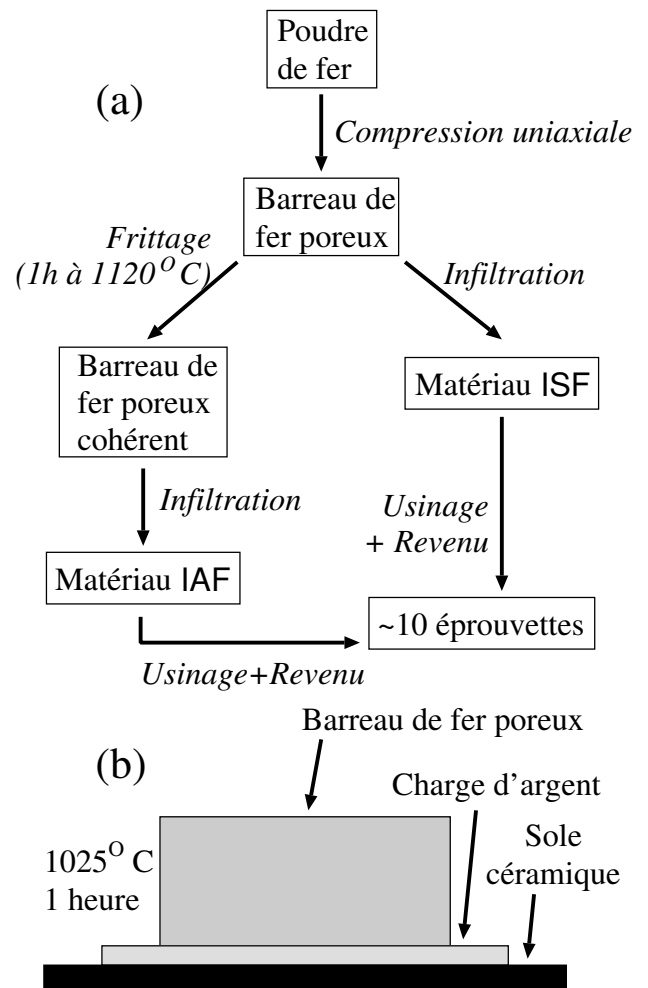


Figure 3.2 : Infiltration. (a) : procédures ; (b) : infiltration

conserve les liens chimiques liant un grain à l'autre puisque l'infiltration est effectuée à une température bien inférieure à la température de fusion du fer. Une dizaine d'éprouvettes jumelles peuvent en général être usinées à partir du même barreau infiltré. Un traitement de revenu supprime l'écaillage dû à l'usinage. Par la suite, ces éprouvettes issues du même barreau seront dites « de la même famille ».

Ces procédés d'élaboration engendrent trois types de morphologies, qui peuvent être modulées par la granulométrie des poudres utilisées. Dans le cas de l'infiltration, il est clair que seule la granulométrie du fer importe. Il en est de même pour les biphasés fer/argent CIC, pour une double raison : d'une part, la poudre d'argent utilisée étant beaucoup plus fine, elle a tendance à enrober les grains d'argent (cette propriété étant mise à profit dans le processus de mélange des poudres décrit plus haut), et d'autre part, l'argent étant plus mou, il s'accommode pour remplir les porosités entre les grains de fer. La poudre de fer commerciale utilisée présente un *spectre gaussien* centré sur 100  $\mu\text{m}$  et d'écart-type 30  $\mu\text{m}$ . Elle a été utilisée telle quelle avec les trois procédés de fabrication. Une seconde série de matériaux a été élaborée avec une distribution bimodale obtenue par tamisage : on ne retient que les grains les plus petits, de diamètre 50 à 70  $\mu\text{m}$ , et les plus gros, de diamètre 160 à 180  $\mu\text{m}$ , en respectant soit une proportion massique de 25% de petits grains, qui garantit une compacité maximale d'un mélange de sphères, soit une proportion massique égale de petits et gros grains.

Un autre moyen d'obtenir des morphologies différentes est d'utiliser des poudres dont la forme des grains, dépendant de leur procédé de fabrication, varie. Une seule poudre de fer (référence Höganäs ABC 100.30) a toutefois été retenue pour des raisons de pureté chimique et en particulier de taux de carbone. Obtenue par atomisation à l'eau, elle présente des grains de forme sensiblement sphérique. La poudre d'argent (référence Comptoir Lyon Allemand NAGB300) présente des grains très fins, de diamètre



inférieur à 20  $\mu\text{m}$  ; elle a été utilisée avec sa granulométrie d'origine.

Les grains de la poudre de cuivre (référence Poudmet GS) sont légèrement plus gros que ceux du fer et ont aussi une forme granulaire équiaxe. Le spectre complet a été utilisé. Notons qu'une autre poudre de cuivre commerciale, élaborée par atomisation à l'air et présentant des grains sphériques, n'a pu être retenue pour des raisons de teneur en phosphore trop élevée, cet élément diffusant dans le fer et modifiant ses propriétés.

### 3.1.A.b Propriétés des phases

Les phases pures sont des agrégats polycristallins de structure cubique à faces centrées pour l'argent et le cuivre, et cubique centrée pour le fer, à la température des essais mécaniques. Une observation au microscope des éprouvettes préparées de manière adéquate, révèle une taille de grains allant de quelques micromètres à quelques dizaines de micromètres, légèrement inférieure à la taille caractéristique des domaines de phases.

Dans tous les calculs ultérieurs, les phases sont assimilées en première approximation à des matériaux homogènes isotropes obéissant à une loi élastique non-linéaire avec un potentiel de la forme (1.5), caractérisé par un module de compressibilité élastique  $k$ , un module de cisaillement élastique  $\mu$  et une courbe d'érouissage  $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}})$  permettant de calculer le module de cisaillement sécant selon :

$$\mu^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}}) = \frac{\sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{eq}})}{3\epsilon^{\text{eq}}}. \quad (3.1)$$

Les modules d'élasticité utilisés pour le fer et l'argent ont été déterminés par L. Allais à partir de mesures de vitesses de propagation d'ondes ultrasonores dans des éprouvettes monophasées élaborées par CIC à partir des mêmes poudres que les biphasés. Les valeurs pour le cuivre sont des valeurs moyennes trouvées dans la littérature et sont *a priori* légèrement moins précises. Les valeurs de  $k$ , de  $\mu$ , du module d'Young  $E$  et du rapport de Poisson  $\nu$  correspondants sont données dans le tableau 3.1. Les incertitudes sur  $\mu$ ,  $E$  et  $\nu$  sont celles données dans [2] et celle sur  $k$  en est déduite.

Phase	Fe	Ag	Cu
$k$	165( $\pm 9$ )	106( $\pm 9$ )	126
$\mu$	82,0( $\pm 0,5$ )	29,7( $\pm 0,1$ )	45,0
$E$	211( $\pm 0,5$ )	81,5( $\pm 0,3$ )	121
$\nu$	0,28( $\pm 0,03$ )	0,4( $\pm 0,1$ )	0,34

Tableau 3.1 : Constantes d'élasticité des phases ( $k$ ,  $\mu$  et  $E$  en GPa)

La courbe d'érouissage  $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}})$  est déduite de la courbe de traction simple  $(\sigma_{11}, \epsilon_{11})$ , enregistrée expérimentalement avec une machine INSTRON dans des conditions quasi-statiques ( $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ), par les relations :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma_{11} \quad \text{et} \quad \epsilon^{\text{eq}} = \epsilon_{11} - \frac{1}{9k} \sigma_{11}. \quad (3.2)$$

Une hypothèse d'incompressibilité plastique est utilisée pour établir la deuxième relation. L'extensomètre utilisé a une base de mesure  $l_0 = 10 \text{ mm}$  et fournit une déformation linéarisée  $\epsilon_{11}^{\text{Lin}} = (l - l_0)/l_0$ , où  $l$  est l'écartement actuel. La contrainte apparente  $\sigma_{11}^{\text{Lin}}$  est le rapport de la force mesurée par la cellule de la machine à la section initiale de l'éprouvette. Toutes les courbes données ici et par la suite (sauf mention spéciale) sont exprimées en déformation logarithmique  $\epsilon_{11}^{\text{Log}}$  et contrainte de Cauchy  $\sigma_{11}$ , déduites des précédentes par :

$$\epsilon_{11}^{\text{Log}} = \ln(1 + \epsilon_{11}^{\text{Lin}}) \quad \text{et} \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}^{\text{Lin}}(1 + \epsilon_{11}^{\text{Lin}}). \quad (3.3)$$

La compressibilité élastique est négligée dans la seconde relation. Notons que l'extensomètre est limité à une déformation de 10% et que pour enregistrer une déformation supérieure, il est indispensable d'interrompre l'essai pour le repositionner. La déformation logarithmique totale s'obtient simplement

en additionnant la déformation logarithmique enregistrée après repositionnement à la déformation logarithmique atteinte au moment du repositionnement ; la déformation linéarisée totale se calcule en revanche par la relation  $\epsilon_{11}^{\text{Lin}} = \epsilon_{11}^{\text{Lin}} + (1 + \epsilon_{11}^{\text{Lin}}) \cdot \epsilon_{11}^{\text{Lin}}$ , où  $\epsilon_{11}^{\text{Lin}}$  est la déformation linéarisée atteinte au moment du repositionnement et  $\epsilon_{11}^{\text{Lin}}$  celle enregistrée par la suite. Ces relations se généralisent à plusieurs repositionnements.

Les courbes de traction simple de l'argent et du cuivre données en figure 3.3 ont été mesurées de la sorte avec des éprouvettes monophasées élaborées par CIC à partir des mêmes poudres que les biphasés. Nous supposons que ces courbes caractérisent également le comportement de ces constituants au sein des éprouvettes biphasées (bien que le principal argument permettant d'étayer cette hypothèse soit l'absence d'argument contraire...)

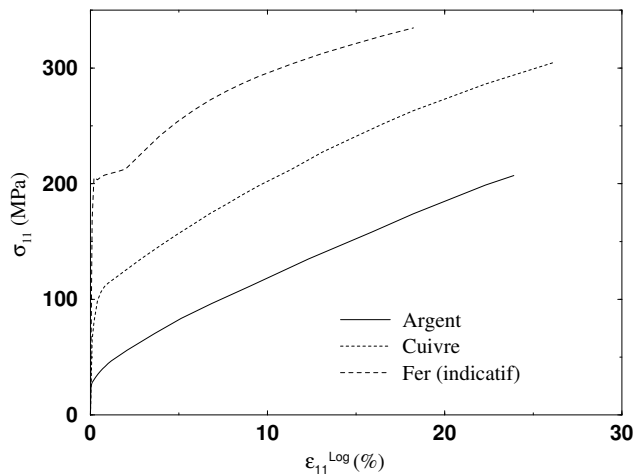


Figure 3.3 : Courbes de traction simple des phases pures (celle du fer est donnée à titre indicatif)

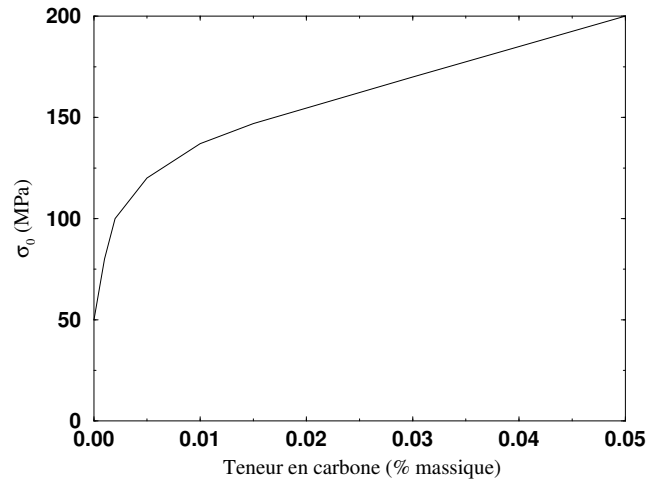


Figure 3.4 : Évolution de la limite d'élasticité du fer polycristallin Armco en fonction du taux de carbone (d'après [88])

En revanche, il s'est avéré impossible d'utiliser la courbe de traction du fer pur, déterminée de la même manière et également reportée (à titre indicatif et pour quelques applications ultérieures) en figure 3.3, et ceci pour les deux raisons suivantes. La première, relevée par L. Allais, est liée à un phénomène de pollution du fer, dans les éprouvettes élaborées par CIC, par du carbone provenant probablement de l'éthanol utilisé pour homogénéiser le mélange des poudres. Le fer utilisé est en effet très pur, ainsi que l'indique le tableau 3.2 donnant quelques teneurs garanties par le fournisseur. Or il s'avère que le comportement d'un fer contenant très peu de carbone (moins de 0,01%) est très sensible à cet élément d'addition, comme en atteste la courbe en figure 3.4 issue de la référence [88] et donnant l'évolution de la limite d'élasticité de polycristaux de fer Armco en fonction de ce paramètre. Des mesures de microdureté dans le fer des matériaux CIC révèlent en effet des différences considérables d'une éprouvette à l'autre, qui pourraient être liées au taux de carbone.

Élément	C	S	P	Ni	Mn	Cr	Cu	Si	Co	Al
Teneur	0,002	0,004	0,003	0,014	0,03	0,012	0,001	0,01	0,016	< 0,001

Tableau 3.2 : Composition de la poudre de fer Höganäs ABC 100.30 (% massique)

Un autre indicateur de la présence de cet élément est une déformation non homogène en début de plastification, détectée par un palier de force au début de l'essai, éventuellement précédé d'un pic, ou encore par l'apparition, à l'échelle de l'éprouvette, de « bandes de Piobert-Lüders » se propageant d'une extrémité de la partie utile à l'autre et facilement visibles à l'œil nu. Un tel palier de contrainte est visible sur la courbe en figure 3.3, même s'il n'est pas horizontal du fait de l'utilisation de contraintes vraies. Ce phénomène est connu dans le fer à bas taux de carbone et s'interprète par un désancrage de dislocations. Le choix d'un fer très pur était d'ailleurs motivé par la volonté d'éviter cette plastification

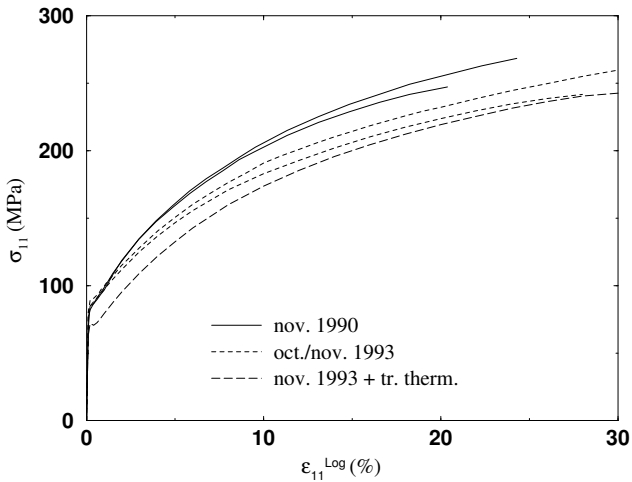


Figure 3.5 : Vieillessement des matériaux IAF avec environ 60% de fer

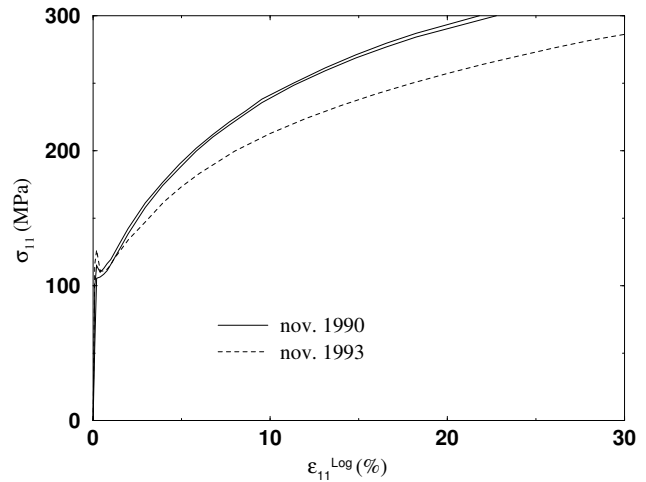


Figure 3.6 : Vieillessement des matériaux IAF avec environ 75% de fer

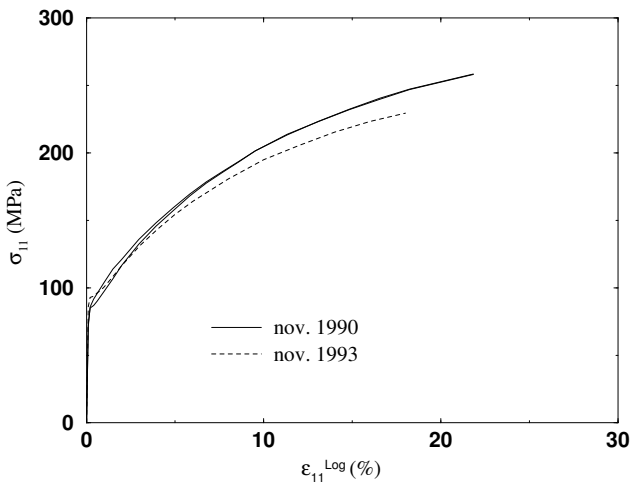


Figure 3.7 : Vieillessement des matériaux ISF avec environ 60% de fer

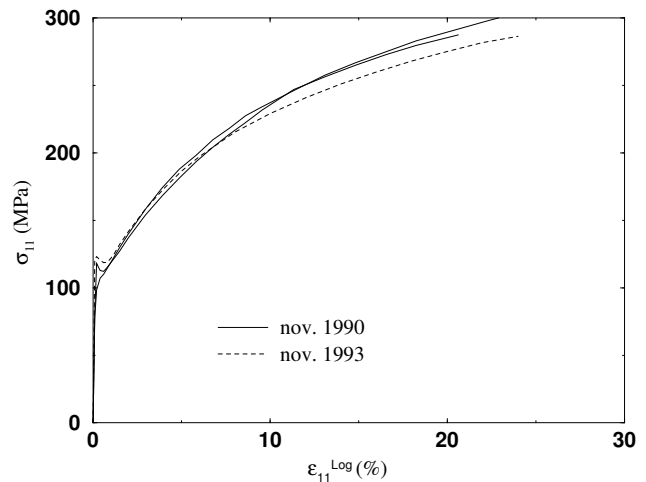


Figure 3.8 : Vieillessement des matériaux ISF avec environ 75% de fer

hétérogène dont il n'est pas possible de rendre compte par une approche d'homogénéisation puisqu'elle est liée à la géométrie de l'éprouvette ; cette précaution a donc été vaine, par suite de cette pollution probable par le solvant. Le palier de force apparaît également avec des biphasés, notamment ceux contenant beaucoup de fer. Le début de la courbe de traction de ces matériaux ne peut donc pas être utilisé pour caractériser leur comportement intrinsèque ; au delà du palier qui s'étend en général sur moins de 3% de déformation, le champ macroscopique redevient homogène dans la partie utile de l'éprouvette et la courbe est bien spécifique du matériau. La référence [32] peut être consultée pour plus de détails.

Ce premier phénomène induit une différence de comportement local du fer dans les matériaux CIC d'une éprouvette à l'autre. Le comportement dans les matériaux infiltrés semble en revanche plus homogène, comme en attestent des essais de microdureté. Une pollution par le carbone est également possible, mais la procédure suivie par L. Allais garantit que toutes les éprouvettes ont subi le même cycle d'élaboration, et que, si pollution il y a, elle est certainement relativement homogène, si bien qu'il en est de même du comportement local des phases dans ces éprouvettes. En revanche, le comportement du fer  $\gamma$  est probablement différent de celui de l'éprouvette de fer pur élaborée par CIC et reste donc inconnu. Nous reviendrons sur cet aspect ultérieurement.

Un second problème relatif au comportement local des phases est un phénomène de vieillissement de ces matériaux, que nous avons découvert lorsque, fin 1993, nous avons voulu compléter les résultats

de mesures de déformation locale obtenus par L. Allais sur les biphasés fer/argent à partir d'essais réalisés fin 1990 : les courbes de traction simple ne correspondaient plus du tout à celles enregistrées antérieurement. Les résultats obtenus aux deux dates pour des éprouvettes ISF et IAF avec deux concentrations en fer sont reportés sur les figures 3.5 à 3.8. Les courbes d'une même figure correspondent à des éprouvettes jumelles, c'est-à-dire issues du même barreau et donc pratiquement identiques<sup>1</sup>.

La différence de comportement du matériau entre les deux dates est nette : la limite d'écoulement est pratiquement inchangée mais l'érouissage est beaucoup plus faible dans la seconde série d'essais. L'effet est plus marqué sur les matériaux ayant subi un frittage, mais ne peut en aucun cas être attribué aux fluctuations expérimentales, dont l'ordre de grandeur est indiqué par les écarts entre les courbes de traction obtenues avec des éprouvettes jumelles en 1990. De plus ce vieillissement semble varier d'une éprouvette à l'autre, même au sein d'une même série, comme en attestent les deux courbes obtenues en 1993 reportées en figure 3.5.

Cette évolution du comportement révèle une probable instabilité microstructurale de ces matériaux : divers phénomènes physico-chimiques, tels que des précipitations ou des mises en solution d'éléments, ont dû se produire durant l'intervalle de trois années au cours duquel les éprouvettes étaient conservées à l'air libre et à température ambiante. Une tentative de remise à l'état initial, consistant à imposer au matériau un nouveau cycle thermique analogue à celui de l'infiltration, a été entreprise. La courbe de traction obtenue est aussi reportée en figure 3.5 : l'érouissage est plus proche des résultats initiaux, mais la limite d'élasticité est cette fois-ci nettement plus faible<sup>2</sup>...

Un tel phénomène de vieillissement est connu sur des aciers et pourrait être attribué à la présence d'azote dans le fer. En l'absence de moyens d'analyse performants et compte tenu des incertitudes associées à une telle investigation, nous avons préféré ne pas chercher à « réinitialiser » le comportement de ces biphasés et les avons utilisés tels quels, en supposant que seul le fer est affecté par le vieillissement. Ceci n'est qu'une hypothèse, car on ne peut pas totalement exclure une évolution de l'autre phase ou une modification des caractéristiques des interfaces ou des joints de grains qui induirait un endommagement précoce du matériau. Nous n'avons toutefois rien observé de tel.

Le comportement plastique du fer reste donc inconnu pour toutes les éprouvettes et varie d'un spécimen à l'autre, sauf dans les matériaux infiltrés testés en 1993 où on le suppose uniforme. Pour le déterminer, une démarche de type « problème inverse », décrite plus loin, a été adoptée.

Précisons enfin que des essais effectués sur des éprouvettes jumelles de fer pur (c'est-à-dire à pollution identique) à différentes vitesses de déformation ( $10^{-5}s^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^{-2}s^{-1}$ ) ne font pas apparaître de dépendance significative vis-à-vis la vitesse.

### 3.1.A.c Éprouvettes biphasées testées

Les onze résultats de mesures de constantes d'élasticité relatifs aux biphasés fer/argent élaborés selon les trois modes sont extraits de [2]. Quatre résultats relatifs à des biphasés fer/cuivre, également dus à L. Allais, sont aussi utilisés. Tous ces matériaux ont été obtenus avec le spectre complet de la poudre de fer.

Onze essais de mesure de déformation locale ont été exploités. Huit d'entre-eux sont dus à L. Allais et les résultats reportés dans [2] en sont issus. Nous avons réutilisé et au besoin corrigé les fichiers de coordonnées de points d'or relatifs à ces essais : les erreurs d'acquisition sont en effet faciles à repérer sur une carte de déformations. Toute la phase de calcul et de caractérisation des champs locaux, des valeurs moyennes par phases et macroscopiques a en revanche été totalement refaite, selon les principes décrits au chapitre 2. Nous avons complété ces résultats par un neuvième essai sur un biphasé fer/argent<sup>3</sup>, qui s'avérait indispensable pour mieux asseoir les conclusions partielles données dans [2].

<sup>1</sup>Les données des quatre figures correspondent respectivement aux séries IA, IB, ID et IE dans la dénomination précisée plus loin.

<sup>2</sup>Cet essai est toutefois sujet à caution dans la mesure où une partie de l'argent liquide a pu s'échapper du squelette de fer au cours du traitement : le matériau testé présente probablement une porosité non négligeable.

<sup>3</sup>Avec l'aide de D. Poquillon

Référence	composition	Spectre	Const. élast.	traction macro	essai <i>in situ</i>
Hxxx	Fe/Ag	entier	7 essais*	non	non
H168	Fe/Ag	Bim. 25/75	non	oui*	oui*
H169	Fe/Ag	Bim. 25/75	non	oui*	oui*
H171	Fe/Ag	Bim. 25/75	non	oui*	oui*
H172	Fe/Ag	Bim. 50/50	non	oui*	oui*
H174	Fe/Ag	Bim. 50/50	non	oui*	oui*
IA	Fe/Ag	entier	oui*	oui (1990* et 1993)	oui* (IA11)
IB	Fe/Ag	entier	oui*	oui (1990* et 1993)	oui* (IB10)
ID	Fe/Ag	entier	oui*	oui (1990* et 1993)	oui* (ID03)
IE	Fe/Ag	entier	oui*	oui (1990* et 1993)	oui (IE05)
IC	Fe/Ag	entier	non	oui	non
IF	Fe/Ag	entier	non	oui	non
H326	Fe/Cu	entier	oui*	oui	non
H327	Fe/Cu	entier	oui*	oui	oui
H328	Fe/Cu	entier	oui*	oui	non
H329	Fe/Cu	entier	oui*	oui	oui

Tableau 3.3 : Essais entrepris et/ou utilisés (le signe \* signifie que L. Allais en est l'auteur)

	IAF			ISF		
% Fe	60	75	90	60	75	90
Spectre entier	A	B	C	D	E	F
Mél. bim. 25/75	G	H	I	J	K	L

Tableau 3.4 : Dénomination des séries d'éprouvettes infiltrées

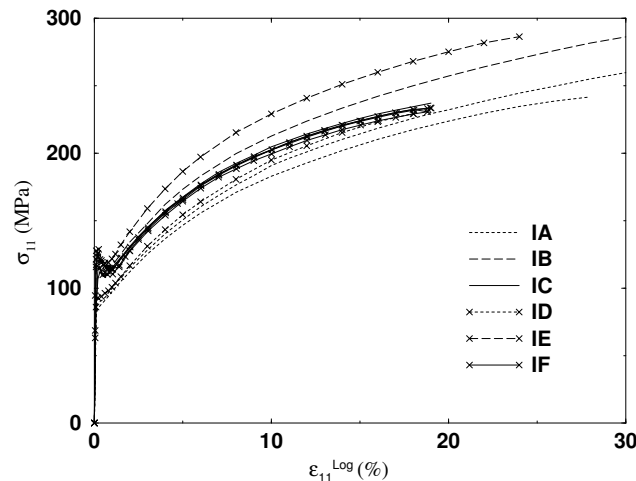


Figure 3.9 : Courbes de traction des matériaux infiltrés de concentration en fer élevée (courbes IC et IF)

Par ailleurs, nous disposons des quatre barreaux de biphasés fer/cuivre qui avaient servi pour la mesure des constantes d'élasticité. Des éprouvettes de traction en ont été extraites et ont été utilisées pour effectuer des essais de traction macroscopiques et deux essais *in situ*<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Avec l'aide de G. Counio pour le premier, S. Héroux et O. Nesnas pour le second

Le **tableau 3.3** résume les essais mentionnés dans le présent travail. Les références d'éprouvettes sont à interpréter dans le sens suivant. Les matériaux CIC sont désignés par la lettre H<sup>5</sup> et par un numéro à trois chiffres permettant de repérer l'éprouvette. Les biphasés infiltrés sont désignés par la lettre I, suivie d'une seconde lettre faisant référence au barreau dont l'éprouvette est extraite et d'un numéro terminal donnant son indice dans la série. Le **tableau 3.4** précise les procédés, les granulométries et les concentrations visées pour chaque lettre. Nous n'avons pas précisé dans le **tableau 3.3** les numéros des éprouvettes infiltrées utilisées pour les mesures de constantes d'élasticité ou les essais de traction macroscopique ; nous l'avons indiqué pour l'essai *in situ*, car il y sera fait référence ultérieurement. Notons aussi que les essais de traction macroscopique sur les éprouvettes compactées sont effectués sur des éprouvettes jumelles de celles utilisées pour les essais *in situ*, c'est-à-dire issues du même barreau obtenu après compactage et donc avec une composition et une histoire pratiquement identiques.

Les essais de traction simple macroscopique entrepris sur des éprouvettes des séries IC et IF (*cf.* **figure 3.9**) révèlent une tenue mécanique bien inférieure à celle qu'on aurait pu attendre compte tenu de leur teneur en fer et du comportement des autres éprouvettes infiltrées. Ce résultat s'explique par une porosité trop élevée de ces matériaux, visible au microscope électronique, due à une infiltration imparfaite ou à l'existence de porosités non ouvertes dans le barreau de fer poreux et qui induit un endommagement précoce. L'utilisation de ces matériaux pour tester des modèles n'intégrant pas cette porosité n'a pas de sens ; ils n'ont donc pas été testés *in situ*. Par suite de la mise en évidence du phénomène de vieillissement et compte tenu des incertitudes qu'il induit et de la lourdeur des essais, nous avons également renoncé à poursuivre les essais sur les matériaux infiltrés élaborés avec la granulométrie bimodale et sur les deux matériaux fer/cuivre restants.

### 3.1.A.d Concentrations

Un paramètre indispensable pour mettre en œuvre les modèles d'homogénéisation est la fraction volumique. Différentes techniques ont été mises en œuvre et le **tableau 3.5** en donne les résultats. La méthode la plus précise utilise une dissolution chimique dans un acide d'une petite partie de l'éprouvette suivie d'un dosage par spectrométrie de flamme. Le résultat a une signification tridimensionnelle et est insensible à l'éventuelle porosité résiduelle de l'éprouvette. En revanche, il n'est représentatif que de la partie dissoute et ne permet pas de vérifier l'homogénéité de l'éprouvette. Dans le cas particulier des matériaux infiltrés, une seule mesure est faite pour tout le barreau et néglige donc l'hétérogénéité probable entre éprouvettes de la série extraite. Les résultats sont donnés dans la seconde colonne du **tableau 3.5** et sont dus à L. Allais.

La seconde méthode utilise l'analyse d'images. Des micrographies de la surface des éprouvettes sont obtenues avec la chaîne d'acquisition présentée en **figure 2.1** ; on utilise des grossissements garantissant la représentativité du domaine, en général inférieurs à 100, et on détermine la fraction volumique par seuillage. Le seuil maximisant la variance interclasse des niveaux de gris est retenu pour caractériser la concentration de la plage en question ; son incertitude expérimentale est estimée en déterminant les fractions volumiques qui seraient obtenues avec des seuils légèrement plus faibles ou plus élevés (en général deux à trois niveaux en plus ou en moins sur une échelle de 64 niveaux de gris). Le résultat obtenu a également une signification locale. Cette opération est ensuite effectuée pour plusieurs plages d'une même éprouvette, de façon à tester l'homogénéité de la concentration. La moyenne des mesures et les écarts d'une plage à l'autre sont donnés en troisième colonne : le résultat obtenu a une signification globale relative à la partie utile des éprouvettes et peut être comparé aux résultats de l'analyse chimique. Les résultats pour différentes éprouvettes infiltrées d'une même famille sont reportés dans la même colonne, les références étant indiquées entre parenthèses.

Le même procédé de seuillage est mis en œuvre sur les images des plages sur lesquelles la mesure de déformation locale est effectuée : le résultat en est donné en quatrième colonne du **tableau 3.5**. Le grossissement utilisé est généralement légèrement plus élevé que dans le cas précédent (150) de façon à n'englober qu'une zone très proche de celle effectivement testée. La représentativité n'est alors pas toujours parfaitement assurée et le résultat a une signification très locale.

---

<sup>5</sup> par référence à la dénomination anglaise : Hot Isostatic Pressed

Matériau	Anal. chimique	Anal. d'image - global	Anal. d'image - local	Anal. grilles
H168	82,0( $\pm 0,7$ )	79,5( $\pm 1,8$ )	92,0( $\pm 3,0$ )	92,1( $\pm 5,4$ )
H169	73,3( $\pm 1,0$ )	71,6( $\pm 1,7$ )	85,0( $\pm 2,0$ )	82,0( $\pm 6,3$ )
H171	68,1( $\pm 0,5$ )	?	?	70,8( $\pm 6,8$ )
H172	57,6( $\pm 2,3$ )	57,4( $\pm 2,5$ )	54,0( $\pm 2,0$ )	52,3( $\pm 7,2$ )
H174	75,1( $\pm 1,3$ )	76,0( $\pm 2,0$ )	80,0( $\pm 4,0$ )	78,0( $\pm 8,6$ )
IA11	57,6(?)	57,8( $\pm 0,8$ )	52,0( $\pm 2,0$ )	52,3( $\pm 10,7$ )
		62,5( $\pm 3,8$ ) (IA04)	-	-
		58,4( $\pm 1,3$ ) (IA08)	-	-
		56,8( $\pm 0,8$ ) (IA02)	-	-
		56,5( $\pm 1,2$ ) (IA05)	-	-
IB10	74,1(?)	83,7( $\pm 1,4$ )	84,0( $\pm 4,0$ )	83,1( $\pm 8,5$ )
		76,8( $\pm 2,0$ ) (IB03)	-	-
		79,0( $\pm 1,5$ ) (IB09)	-	-
ID03	57,9(?)	67,4( $\pm 3,5$ )	65,0( $\pm 3,0$ )	61,1( $\pm 10,2$ )
		58,0( $\pm 0,6$ ) (ID04)	-	-
		69,9( $\pm 1,9$ ) (ID07)	-	-
IE05	74,5(?)	75,2( $\pm 1,0$ )	74,0( $\pm 2,0$ )	74,4( $\pm 9,8$ )
		75,8( $\pm 1,5$ ) (IE02)	-	-
		77,4( $\pm 1,2$ ) (IE07)	-	-
H326	80,9(?)	88,1( $\pm 1,5$ )	-	-
H327	61,7(?)	?	?	58,0( $\pm 6,6$ )
H328	44,4(?)	42,4( $\pm 0,5$ )	-	-
H329	14,8(?)	?	?	19,6( $\pm 3,6$ )

Tableau 3.5 : Mesures des concentrations en fer des éprouvettes testées (en %)

Référence	Conc. globale	Conc. locale
H168	80	92
H169	73	82
H171	68	71
H172	57	53
H174	75	79
IA11	58 (IA09)	52
IB10	79 (IB08)	83
ID03	58 (ID08)	61
IE05	76 (IE02)	74
H327	62	58
H329	15	20

Tableau 3.6 : Concentrations globales et locales utilisées dans les calculs relatifs aux essais *in situ* (en %)

Enfin, la dernière méthode exploite les informations de l'analyse quantitative des grilles décrites au chapitre 2. La moyenne des aires des surfaces « avec » ou « sans interface » (*cf.* paragraphe 2.3.D.b) est utilisée pour estimer la fraction volumique, et la demi-différence donne une borne (largement) supérieure pour l'incertitude. Les résultats, donnés en dernière colonne, ont une signification locale relative aux plages étudiées et sont comparables à ceux de la colonne voisine.

On observe d'abord un bon accord entre les résultats des deux dernières colonnes, ce qui justifie l'emploi des résultats de l'analyse des grilles pour caractériser la concentration locale de la zone étudiée pour les essais où l'analyse d'images n'a pas été faite. La mesure chimique est en règle générale cohérente

avec les résultats globaux d'analyse d'images. On peut toutefois relever quelques incompatibilités, notamment sur les éprouvettes IB et ID, qui présentent des écarts allant jusqu'à plus de 10%, ce qui laisse soupçonner des gradients de concentrations au sein des barreaux dont ces éprouvettes sont issues. On peut enfin noter quelques écarts entre mesures locales et mesures globales, en particulier sur les éprouvettes H168 et H169 et, dans une moindre mesure, IA11 et H329. Leur origine probable est une fluctuation de concentration locale au niveau de la zone étudiée, ou éventuellement une sous-représentativité de cette dernière<sup>6</sup>.

La concentration locale sera utilisée pour calculer les caractéristiques des champs locaux avec les modèles d'homogénéisation, alors que pour déterminer le comportement du fer par la démarche inverse décrite plus loin, on aura recours à la concentration globale relative à l'éprouvette testée sous traction simple macroscopique. Les valeurs retenues sont données dans le **tableau 3.6**. On y précise entre parenthèses la référence de l'éprouvette dont on utilise la courbe de traction. Lorsque sa concentration est connue (cas du matériau IE), c'est cette valeur qui est retenue comme concentration globale ; dans le cas contraire (IB et ID) on opte pour une valeur probable combinant les divers résultats. Les incertitudes associées à ces concentrations sont de l'ordre de  $\pm 2\%$ .

### 3.1.A.e Caractérisation morphologique des biphasés

Les figures 3.10 à 3.19 donnent l'allure de la microstructure des divers matériaux étudiés. Il s'agit d'images binaires obtenues par seuillage à partir de micrographies numériques enregistrées avec la chaîne d'acquisition présentée en **figure 2.1**. La phase fer est en noir. Les grossissements retenus assurent la représentativité des plages. Celui utilisé pour les biphasés fer/cuivre est plus faible car la taille caractéristique des domaines de phase dans ces matériaux est plus grande.

L'isotropie de la distribution des phases peut être vérifiée par la comparaison des fonctions de corrélation dans diverses directions comme décrit au paragraphe **2.2.C**. Le processus d'élaboration par CIC n'a pas de direction privilégiée et les matériaux obtenus sont bien isotropes. La compression uniaxiale de la poudre de fer est susceptible d'induire une symétrie isotrope transverse, mais des comparaisons entre coupes parallèles et coupes perpendiculaires à l'axe de compression montrent qu'il n'en est rien.

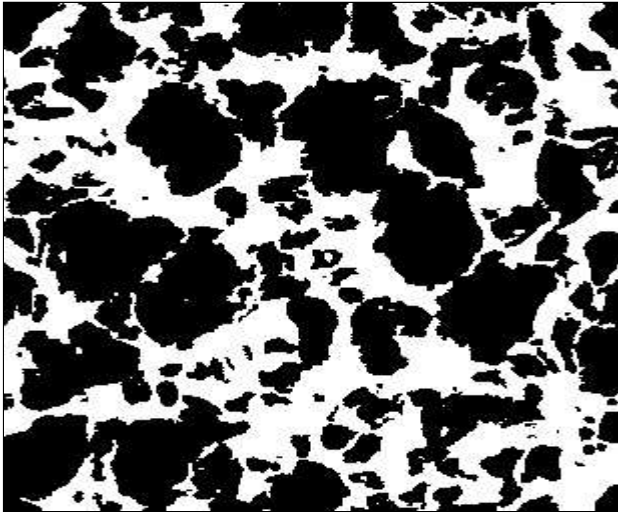
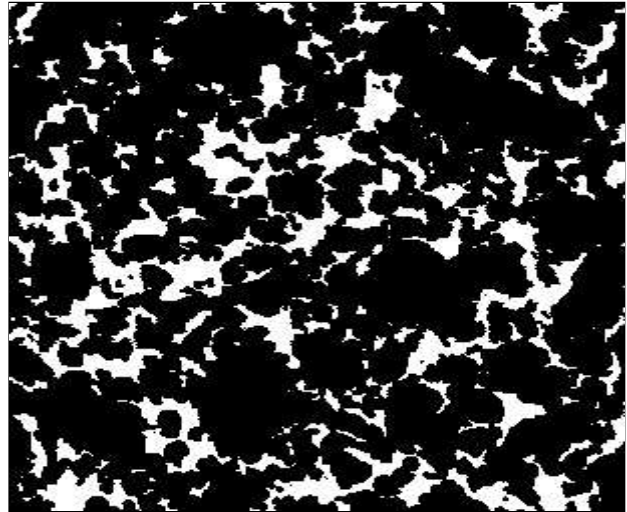
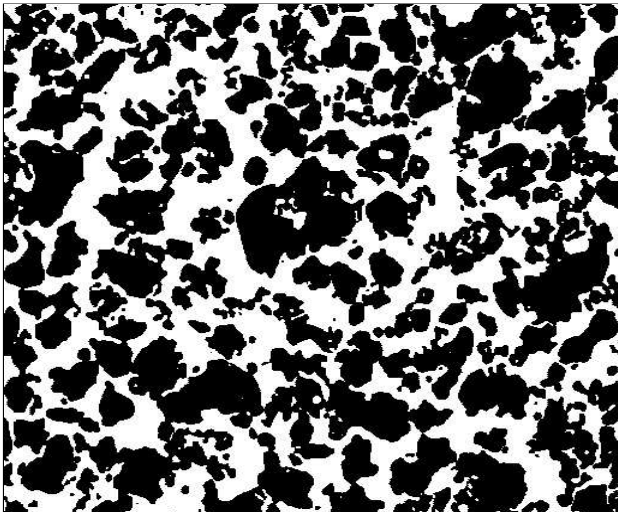
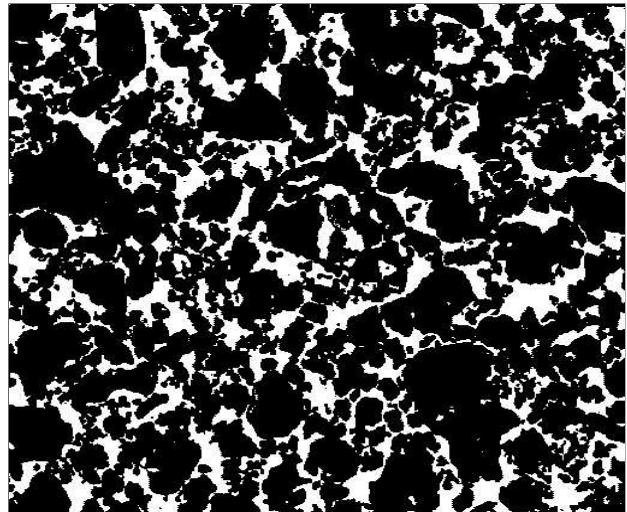
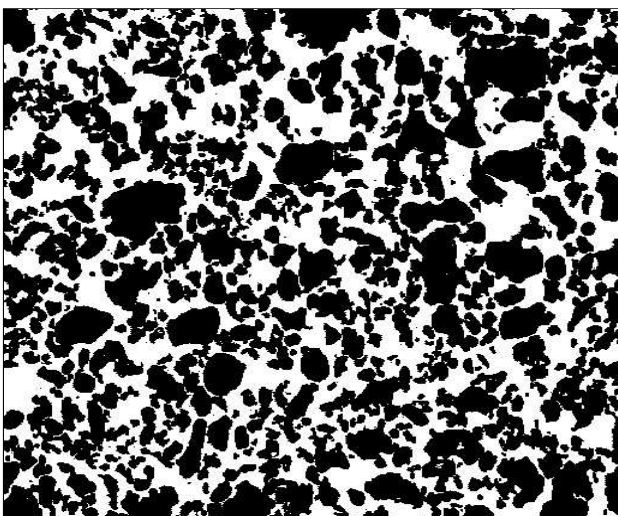
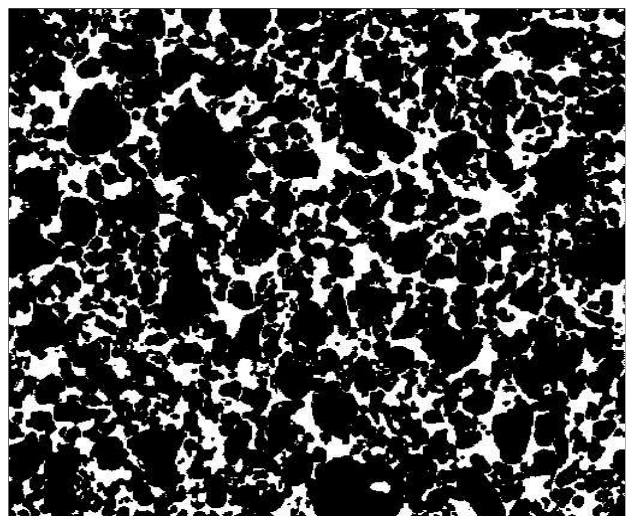
La caractérisation morphologique des biphasés fer/argent a été entreprise par L. Allais à partir d'images de ce type. Nous en rappelons les principales conclusions ici. Le point de départ est la connaissance *a priori* de la microstructure des matériaux IAF, dont la morphologie de type CC résulte clairement du processus d'élaboration. Les matériaux CIC et ISF sont classés par rapport à cette référence en comparant certaines caractéristiques morphologiques.

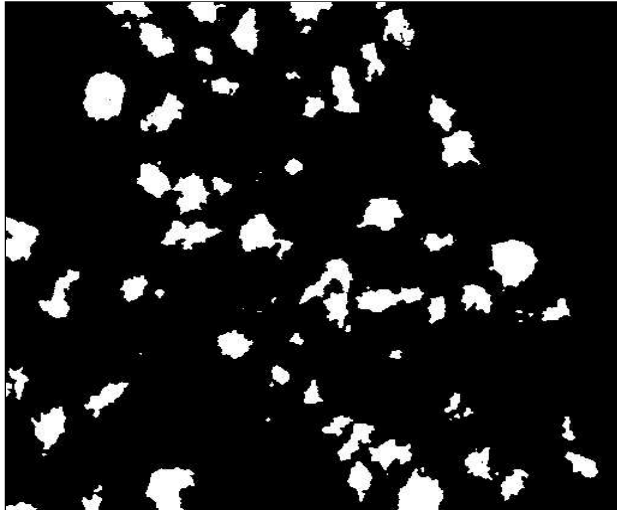
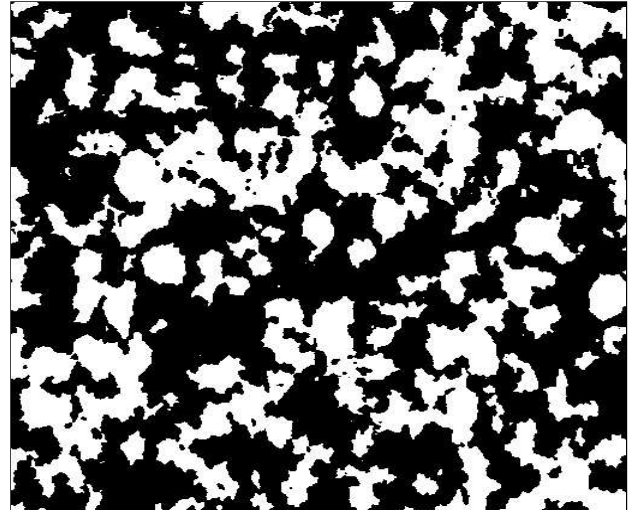
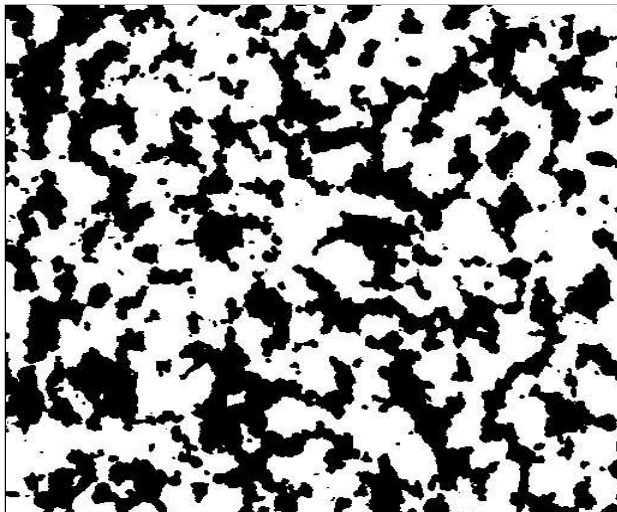
Trois des quatre paramètres de base de l'analyse stéréologique locale dans l'espace tridimensionnel [41] sont mesurables directement à partir de coupes à travers l'ensemble  $X$  considéré, une seule coupe étant suffisante dans le cas de matériaux isotropes tels ceux considérés dans la présente étude. Il s'agit de la fraction volumique  $V_v(X)$ , de la surface spécifique d'interface  $S_v(X)$  et de l'intégrale de courbure moyenne (demi-somme des courbures principales) par unité de volume  $M_v(X)$ . Les figures 3.20 et 3.21 donnent l'évolution des deux derniers paramètres relatifs au domaine occupé par le fer en fonction du premier dans les matériaux IAF et ISF, d'après des données extraites de [2].  $S_v$  et  $M_v$  présentent des valeurs similaires dans les deux familles de matériaux pour les faibles concentrations ( $\approx 60\%$ ), mais divergent sensiblement lorsque la teneur en fer croît.  $S_v$  semble constante dans les matériaux ISF, alors qu'elle décroît dans les matériaux IAF. Ceci traduit un enrobage plus important du fer par l'argent dans les premiers et la présence d'un plus grand nombre de « ponts » entre les grains de fer ou de ponts plus épais dans les seconds. Par ailleurs, bien que cela soit moins net, on peut observer que  $M_v$  décroît plus vite dans les matériaux ISF que dans les matériaux IAF : la convexité de la phase fer est plus marquée dans les matériaux ISF, ce qui s'interprète encore par un enrobage plus prononcé de cette phase. Ces tendances sont confirmées lorsque l'on s'intéresse au libre parcours moyen dans le fer<sup>7</sup> ou à la fonction étoile [2, 41]. Il apparaît ainsi que la phase fer est beaucoup moins connectée

<sup>6</sup>La technique de vérification de la représentativité décrite au paragraphe **2.2.C** n'a été mise en œuvre que sur l'essai IE05.

<sup>7</sup>qui n'est autre que le rapport  $\frac{4V_v}{S_v}$



Figure 3.10 :  $Fe/Ag$  CIC H172 -  $c_{Fe} = 58,7\%$  -  $\times 100$ Figure 3.11 :  $Fe/Ag$  CIC H174 -  $c_{Fe} = 77,3\%$  -  $\times 100$ Figure 3.12 :  $Fe/Ag$  IAF IA05 -  $c_{Fe} = 57,1\%$  -  $\times 100$ Figure 3.13 :  $Fe/Ag$  IAF IB03 -  $c_{Fe} = 75,1\%$  -  $\times 100$ Figure 3.14 :  $Fe/Ag$  ISF ID04 -  $c_{Fe} = 57,4\%$  -  $\times 100$ Figure 3.15 :  $Fe/Ag$  ISF IE02 -  $c_{Fe} = 75,5\%$  -  $\times 100$

Figure 3.16 :  $Fe/Cu$  CIC H326 -  $c_{Fe} = 89,4\%$  -  $\times 60$ Figure 3.17 :  $Fe/Cu$  CIC H327 -  $c_{Fe} = 60,8\%$  -  $\times 60$ Figure 3.18 :  $Fe/Cu$  CIC H328 -  $c_{Fe} = 42,7\%$  -  $\times 60$ Figure 3.19 :  $Fe/Cu$  CIC H329 -  $c_{Fe} = 16,1\%$  -  $\times 60$ 

dans les matériaux ISF, dont la morphologie peut donc être assimilée dans un premier temps au type MI, dans la configuration « fer dans argent ». Cette conclusion confirme l'impression visuelle donnée par les micrographies et s'explique assez bien par les phénomènes physiques qui régissent le processus d'élaboration : la pression de l'argent liquide a tendance à séparer les grains de fer du barreau poreux qui ne sont pas soudés les uns aux autres par le frittage comme dans les matériaux IAF.

Une comparaison similaire entre matériaux IAF et matériaux CIC conduit également à considérer que la morphologie de ces derniers est plutôt du type MI dans la configuration « fer dans argent ». Toutefois, pour aboutir à cette conclusion, il est indispensable de tenir compte de la différence de taille caractéristique dans ces deux microstructures, qui apparaît clairement lorsque l'on compare la figure 3.10 à la figure 3.12. Elle est due au spectre bimodal utilisé dans les matériaux CIC et à une probable coalescence des grains de poudre lors du frittage, qui tend à agrandir les domaines de phase. Cette classification morphologique est confirmée par l'impression visuelle donnée par les micrographies et s'explique aussi par le processus d'élaboration : les grains d'argent très fins enrobent les grains de fer et occupent les interstices laissés vacants par ces derniers.

Le dernier paramètre morphologique fondamental est le nombre de connexité tridimensionnel par unité de volume  $N_v$ . Il est égal au nombre de surfaces distinctes délimitant l'objet considéré auquel on soustrait le nombre maximal de coupes que l'on peut faire sans modifier sa connexité, c'est-à-dire son

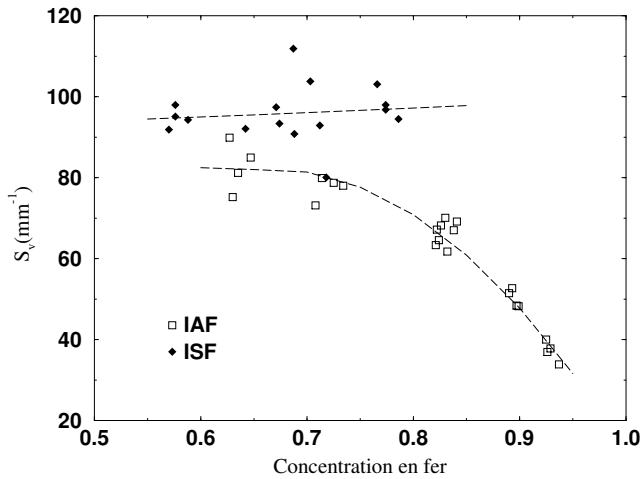


Figure 3.20 : Surface spécifique d'interface dans les matériaux IAF et ISF

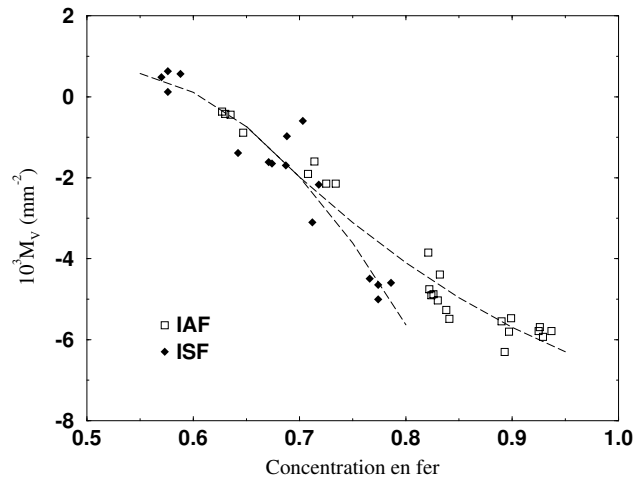


Figure 3.21 : Intégrale de courbure moyenne par unité de volume dans les matériaux IAF et ISF

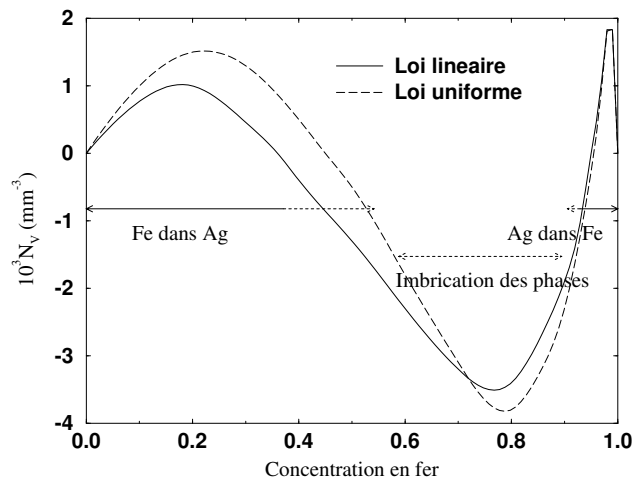


Figure 3.22 : Nombre de connexité tridimensionnel par unité de volume dans les biphasés fer/argent CIC (d'après [32])

« genre »<sup>8</sup>. La mesure de cette grandeur nécessite la connaissance de la structure tridimensionnelle de l'objet, qui n'est accessible directement qu'au moyen de coupes sériées. Une estimation indirecte est toutefois possible à partir d'une simple coupe bidimensionnelle en ayant recours à un modèle stéréologique adéquat, identifiable à partir d'une coupe et permettant le calcul de  $N_v$  en fonction des paramètres du modèle. Une telle démarche a été entreprise sur les matériaux CIC [32], le modèle booléen [89] construit avec des grains primaires sphériques de divers diamètres étant utilisé. La figure 3.22 donne l'évolution ainsi obtenue de ce paramètre en fonction de la concentration en fer, le modèle ayant été calé sur des mesures correspondant à une concentration de 80% ; deux distributions de diamètres de sphères ont été utilisées, obéissant respectivement à une loi linéaire et une loi uniforme.

Cette courbe s'interprète de la manière suivante. Pour des teneurs faibles,  $N_v$  est positif et croît : le fer est présent sous forme de particules isolées noyées dans l'argent, en nombre d'autant plus grand que la concentration est élevée. Mais à mesure que cette dernière augmente, l'agglomération des grains primaires réduit le nombre de particules. De plus, ces amas prennent des formes de plus en plus compliquées, de genre de plus en plus élevé, si bien que  $N_v$  se met à décroître, pour des teneurs d'environ 20%, et finit par devenir négatif, pour environ 40% de fer. La courbe atteint un minimum

<sup>8</sup>Le genre de la sphère est nul, tout comme celui de la sphère creuse ; celui du tore est égal à l'unité, alors que ces objets présentent respectivement une, deux et une surfaces distinctes.

vers 80% de fer, qui correspond à une situation d'« imbrication mutuelle » des phases maximale. Au delà, la courbe suit une évolution symétrique de celle du début, les rôles de l'argent et du fer étant inversés<sup>9</sup>. En particulier, pour des concentrations de plus de 96%,  $N_v$  redevient positif, le matériau retrouvant un caractère MI assez net, l'argent étant majoritairement présent sous forme de domaines isolés dans le fer.

Dans la zone intermédiaire, les phases sont imbriquées mais cette situation est différente de celle des matériaux IAF, la continuité complète des deux squelettes n'étant pas garantie. De plus la qualité mécanique des liens entre grains de fer ne semble pas la même, comme le suggère la comparaison des évolutions de  $S_v$  et  $M_v$  : les liens sont plus forts dans les matériaux IAF et transmettent *a priori* mieux la charge. Selon cette analyse, les matériaux CIC s'apparentent également plutôt à la famille MI pour l'essentiel de la gamme de concentration.

L'analyse morphologique n'a pas été entreprise sur les biphasés fer/cuivre. Ils ont été élaborés selon le procédé CIC mais avec des poudres de cuivre et de fer de granulométries très voisines. Les rôles des deux constituants sont de ce fait beaucoup plus symétriques. Le nombre de connexité tridimensionnel par unité de volume associé à ces microstructures suit *a priori* une courbe proche de celles de la figure 3.22, mais avec un « axe de symétrie » (correspondant au minimum) plus central. On s'attend donc à ce que ces matériaux présentent, dans la gamme des concentrations testées, une évolution continue de la configuration MI « fer dans cuivre » à la configuration inverse, ainsi que le suggèrent les micrographies des figures 3.16 à 3.19 : aux forts taux de fer, le cuivre est noyé dans une matrice de fer, alors que le contraire prévaut pour les taux faibles ; les concentrations proches de l'équirépartition présentent des configurations intermédiaires.

### 3.1.B Confrontation à l'échelle globale

Le comportement mécanique de ces biphasés a été déterminé expérimentalement et comparé aux prévisions des bornes ou estimations théoriques. Nous nous intéressons d'abord aux propriétés élastiques et élasto-plastiques macroscopiques.

#### 3.1.B.a Comportement élastique

Les modules de cisaillement ont été déterminés par L. Allais à partir de la mesure de la vitesse de propagation d'ondes ultrasonores. Pour plus de détails sur la méthode, nous renvoyons à la référence [2]. Les résultats ont été comparés aux bornes universelles de Voigt (V) et de Reuss (R), de Hashin et Shtrikman (HS) qui s'appliquent aussi rigoureusement à tous ces matériaux dont la répartition des phases est isotrope et aux nouvelles bornes de Hervé, Stolz et Zaoui (HSZ), spécifiques des assemblages de Hashin avec une distribution isotrope des sphères composites, mais qui devraient s'appliquer en première approximation aux matériaux à microstructure MI. Les deux configurations envisageables pour cette morphologie induisent des encadrements différents, qui seront désignés dans ce qui suit par HSZa et HSZb, la lettre a se référant systématiquement à la situation où la phase inclusionnaire est la phase la plus raide (c'est-à-dire le fer). Nous utiliserons également les signes + et – pour désigner les bornes supérieures et inférieures respectivement.

**Bornes du troisième ordre** Nous avons complété cette comparaison en y adjoignant des bornes dues à Milton et Phan-Thien [120], qui s'appliquent aussi aux matériaux isotropes et utilisent une information d'ordre trois sur la microstructure, à savoir les paramètres  $\zeta_i$  et  $\eta_i$  relatifs aux deux phases  $i$  (*cf.* paragraphe 1.2.B.c), dont des valeurs approchées sont connues pour divers modèles morphologiques. Le modèle booléen est en particulier retenu comme une description satisfaisante de certaines microstructures étudiées. Les variations de ces paramètres en fonction de la concentration pour un tel modèle utilisant des sphères de mêmes diamètres comme grains primaires sont connues numériquement [165]. Les fonctions suivantes fournissent une très bonne approximation des paramètres

---

<sup>9</sup>Les nombres de connexité des deux phases sont égaux.

relatifs à la phase des grains primaires notée  $p$  :

$$\zeta_p \approx 0,5615c_p + 0,08c_p^3 \quad \text{et} \quad \eta_p \approx 0,7369c_p. \quad (3.4)$$

Les paramètres relatifs à l'autre phase s'en déduisent par :

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 1 \quad \text{et} \quad \eta_1 + \eta_2 = 1. \quad (3.5)$$

Notons que la partie linéaire de  $\zeta_p$  est celle proposée dans la référence [90].

Les bornes d'ordre trois de Milton (MI3) sont données par<sup>10</sup> :

$$\mu^{\text{MI3}+} = \langle \mu \rangle - \frac{6(\mu_1 - \mu_2)^2 c_1 c_2}{6 \langle \bar{\mu} \rangle + \Theta} \quad (3.6)$$

$$\text{avec} \quad \Theta = \frac{\langle \mu \rangle_\eta \langle 6k + 7\mu \rangle_\zeta - 5 \langle \mu \rangle_\zeta^2}{\langle (2k - \mu) \rangle_\zeta + 5 \langle \mu \rangle_\eta}$$

$$\text{et} \quad \mu^{\text{MI3}-} = \langle \mu \rangle - \frac{6(\mu_1 - \mu_2)^2 c_1 c_2}{6 \langle \bar{\mu} \rangle + \Xi^{-1}} \quad (3.7)$$

$$\text{avec} \quad \Xi = \frac{5 \langle \mu^{-1} \rangle_\zeta \langle 6k^{-1} - \mu^{-1} \rangle_\zeta + \langle \mu^{-1} \rangle_\eta \langle 2k^{-1} + 21\mu^{-1} \rangle_\zeta}{\langle 128k^{-1} + 99\mu^{-1} \rangle_\zeta + 45 \langle \mu^{-1} \rangle_\eta}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \langle x \rangle_\zeta = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 \\ \langle x \rangle_\eta = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 \\ \langle \bar{x} \rangle = c_2 x_1 + c_1 x_2. \end{cases}$$

Les deux configurations non symétriques décrites par ces bornes sont également repérées par **a** et **b**, suivant que les grains primaires renferment la phase la plus raide ou la plus souple.

**Confrontation des modèles** La figure 3.23 donne les domaines délimités par les bornes de Voigt et de Reuss et par celles de Hashin et Shtrikman pour un mélange de fer et d'argent. Tous les autres encadrements considérés respectent les bornes HS, dont le fuseau est déjà relativement étroit, du fait de l'écart relativement faible entre les propriétés élastiques de ces deux phases. Pour préserver la lisibilité des courbes, nous adoptons une représentation adimensionnée, dans laquelle les valeurs 0 et 1 correspondent à la borne de Reuss et celle de Voigt respectivement, les autres valeurs étant interpolées linéairement. Cette règle vaut pour une concentration  $c \in ]0, 1[$ , les valeurs en  $c = 0$  et  $c = 1$  étant obtenues par prolongement continu. La figure 3.24 donne dans ce nouveau diagramme les mêmes résultats que la précédente, complétés à titre indicatif par les prévisions du modèle autocohérent (AC). Notons bien qu'aux extrémités du diagramme toutes les bornes et estimations donnent le même résultat : les écarts entre les courbes en  $c = 0$  et  $c = 1$  indiquent des valeurs différentes des pentes des diverses courbes dans le diagramme non normalisé. En particulier, le modèle AC présente le même comportement que l'une ou l'autre des bornes HS aux valeurs de concentration très faibles ou très élevés, les pentes correspondantes étant aussi celle prévues par le modèle aux faibles ou aux fortes concentrations (*cf.* paragraphe 1.2.C.a).

La figure 3.25 donne dans ce « diagramme de Hill normalisé » les fuseaux des bornes de HSZ, les prévisions du modèle 3Ph et les domaines délimités par les bornes MI3, pour les configurations **a** et **b**. Notons que les courbes extrêmes, c'est-à-dire HSZa- et HSZb+, s'identifient aux bornes HS. Ce diagramme appelle plusieurs commentaires. Le premier est que la prise en compte d'informations morphologiques induit un resserrement notoire de l'intervalle des valeurs possibles en comparaison du résultat classique de Hashin et Shtrikman. Son ampleur est comparable pour les deux familles de bornes, HSZ et MI3, même s'il est légèrement plus prononcé pour la seconde, surtout pour les faibles taux de grains primaires. Le second commentaire concerne la nette séparation des fuseaux pour les deux configuration **a** et **b**, en particulier dans le cas des bornes HSZ. Cette propriété établit

<sup>10</sup>Nous reportons les expressions que nous avons utilisées car celles proposées dans [120] et [165] présentent quelques erreurs typographiques.

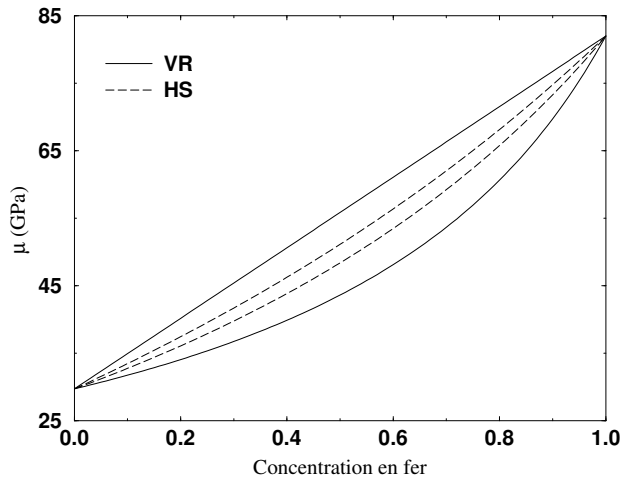


Figure 3.23 : Bornes  $V$ ,  $R$  et  $HS$  pour des biphasés fer/argent dans le diagramme de Hill

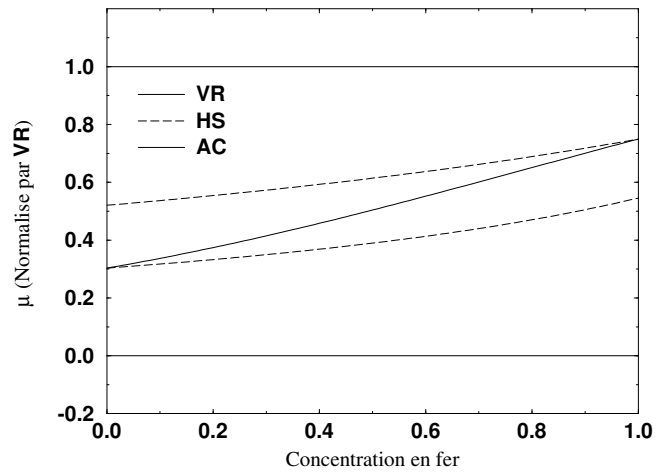


Figure 3.24 : Mêmes bornes et modèle  $AC$  dans le « diagramme de Hill normalisé » (biphasés fer/argent)

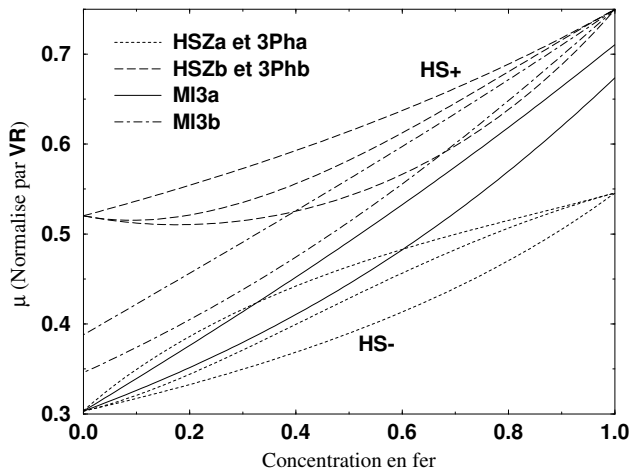


Figure 3.25 : Comparaison entre bornes  $HSZ$ , modèle  $3Ph$  et bornes  $MI3$  (biphasés fer/argent)

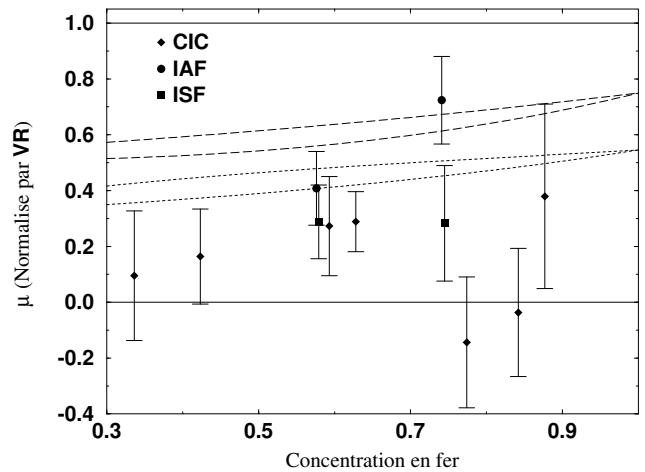


Figure 3.26 : Comparaison entre mesures expérimentales et prévisions théoriques (biphasés fer/argent)

l'influence de la morphologie sur le comportement macroscopique et permet, du moins en théorie, de distinguer les microstructures de matériaux distincts par une mesure de leurs modules d'élasticité. On observe ensuite une concordance satisfaisante entre les bornes  $HSZ$  et  $MI3$ , pour les taux d'inclusions ou de grains primaires peu élevés. Ce résultat est cohérent avec l'évolution de  $N_v$  en fonction de la concentration, donnée en figure 3.22, même si les modèles booléens invoqués pour estimer  $N_v$  et celui utilisé pour déterminer les bornes  $MI3$  diffèrent par les distributions des diamètres des sphères primaires utilisées. On constate en effet que les bornes  $MI3$  s'écartent du fuseau des bornes  $HSZ$  relatives à la même configuration pour des taux de phase inclusionnaire de l'ordre de 40%, correspondant justement au changement de signe de  $N_v$  et donc à la perte du caractère net de morphologie  $MI$  de la microstructure engendrée par le modèle booléen. À l'autre extrémité du diagramme, le fuseau des bornes  $MI3$  tend à rejoindre celui de la configuration inverse des bornes  $HSZ$  : les rôles des deux phases semblent avoir été échangés. Il ne le rejoint toutefois pas complètement, ce qui suggère que la microstructure obtenue ne soit malgré tout pas exactement du type  $MI$ . La dernière remarque concerne le modèle  $3Ph$  qui respecte bien le fuseau des bornes  $HSZ$  de la configuration correspondante, mais se révèle légèrement en dehors du fuseau des bornes  $MI3$ . Ceci ne discrédite pas ce modèle, dans la mesure où la morphologie décrite par les bornes  $MI3$  diffère de celle qu'il cherche à représenter : le modèle booléen autorise un chevauchement des grains primaires alors que la matrice sépare toujours les inclusions dans l'assemblage

de Hashin. Si la phase inclusionnaire est la plus raide, ceci induit *a priori* une cohésion supérieure dans la morphologie du modèle booléen et donc une raideur macroscopique accrue.

**Comparaison avec l'expérience** Les résultats de la confrontation de ces modèles aux mesures expérimentales obtenues avec les biphasés fer/argent sont enfin donnés en figure 3.26 et ils se révèlent au premier abord quelque peu décevants. En effet, la plupart des points expérimentaux ne respectent pas le fuseau des bornes HS, certains violant même la borne de Reuss. Ces écarts ne peuvent être justifiés par les incertitudes expérimentales estimées dans [2] et reportées ici. On peut néanmoins se risquer à extraire quelques tendances relatives, en oubliant cette translation globale de tous les points expérimentaux vers des valeurs trop faibles. On observe ainsi une certaine homogénéité de comportement des matériaux CIC et ISF, à l'exception de deux valeurs assurément trop faibles, alors que les deux matériaux IAF présentent un module plus élevé. Cette observation est cohérente avec l'analyse morphologique, classant ces derniers parmi les matériaux à morphologie CC, de raideur plus élevée. La plus grande prudence reste toutefois de mise et cette observation ne peut en aucun cas être érigée en conclusion.

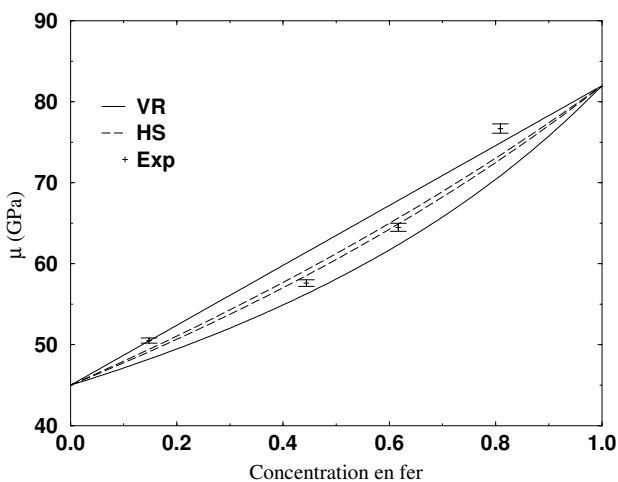


Figure 3.27 : Comparaison entre mesures expérimentales relatives aux biphasés fer/cuivre et bornes classiques

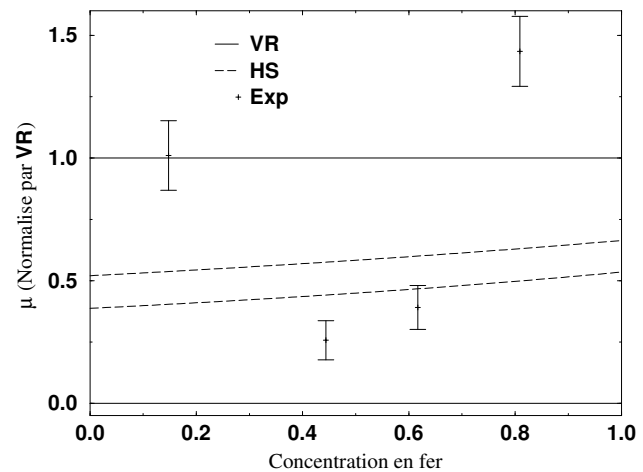


Figure 3.28 : Comparaison entre mesures expérimentales relatives aux biphasés fer/cuivre et bornes classiques (diagramme normalisé)

Les mesures des modules des matériaux fer/cuivre, dues à L. Allais mais non reportées dans [2], sont confrontées aux bornes V, R et HS de la même manière (figures 3.27 et 3.28). Les barres d'erreur, estimées de la même manière qu'avec les biphasés fer/argent, sont plus petites, car les mesures ont été faites sur des barreaux de plus grande épaisseur, si bien que les incertitudes relatives sur les dimensions de ces derniers et les temps de propagation des impulsions ultrasonores sont plus faibles. Mais la comparaison n'est pas plus probante que pour les biphasés fer/argent : les bornes usuelles ne semblent pas non plus respectées...

Nous proposerons ultérieurement une interprétation possible de ces incohérences apparentes.

### 3.1.B.b Comportement élasto-plastique

Le comportement élasto-plastique des matériaux testés a été comparé aux prévisions du modèle autocohérent classique (AC) et du modèle des trois phases dans ses deux configurations, 3Pha et 3Phb, étendus aux comportements non-linéaires selon l'« extension classique ».

**Effets de la morphologie selon les modèles** Les trois modèles étudiés prévoient quasiment la même courbe de traction macroscopique, sur l'ensemble de la gamme de concentration, ainsi qu'on peut le vérifier en figure 3.29. Les seuls écarts notoires sont relatifs à la transition élasto-plastique, lorsque la phase la plus dure n'est pas encore plastifiée alors que l'autre l'est. Ce résultat, déjà noté par L. Allais,

est dû au quasi-parallélisme des courbes d'érouissage des deux phases et à leur quasi-linéarité et n'est pas lié aux modèles invoqués. Sa justification théorique, donnée dans [2], n'utilise que les relations d'homogénéisation et s'applique quelles que soient les hypothèses de localisation ou de concentration, à condition toutefois que ces dernières garantissent que les deux phases soient plastifiées en tout point du VER. Il faut bien sûr aussi que la loi élastique non linéaire invoquée pour décrire le comportement local des phases soit pertinente.

Pour mettre en évidence l'importance de la condition de parallélisme de l'érouissage, nous donnons en figure 3.30 les résultats des divers modèles lorsqu'une phase est plastique et l'autre élastique non plastique. Cette situation est par exemple celle des composites à matrice métallique : les prévisions diffèrent notablement et établissent l'importance de la morphologie sur le comportement effectif, en tous cas selon ces modèles.

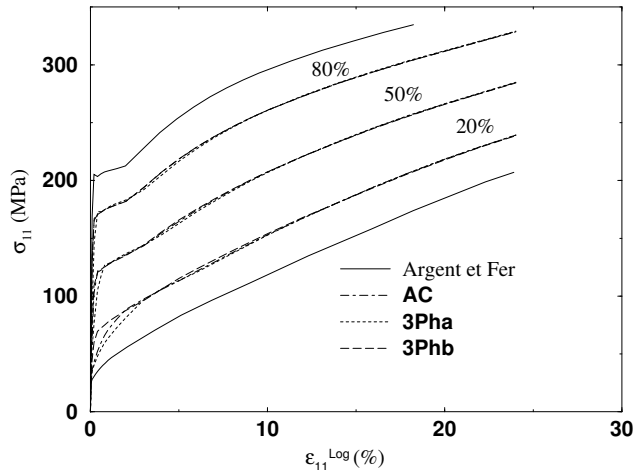


Figure 3.29 : Comportement global des biphasés fer/argent d'après les modèles AC, 3Pha et 3Phb, pour trois teneurs en fer

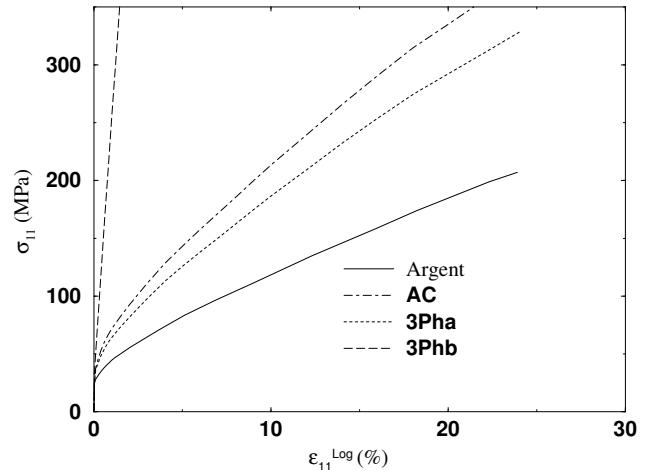


Figure 3.30 : Comportement global d'un composite constitué d'argent et de 20% d'une phase élastique non plastique, d'après les modèles AC, 3Pha et 3Phb

**Vérification expérimentale partielle** La vérification expérimentale de cette propriété ne peut être que très partielle puisque, ainsi que nous l'avons noté au paragraphe 3.1.A.b, le comportement du fer varie d'une éprouvette à l'autre, sauf pour les matériaux infiltrés testés en 1990, qui présentent deux morphologies différentes. Les courbes d'érouissage des matériaux ISF et IAF, données en figure 3.31<sup>11</sup>, sont identiques pour une même concentration, aux incertitudes près, ce qui confirme expérimentalement la quasi-indépendance du comportement global vis à vis de la morphologie, en tous cas pour ces matériaux.

**Détermination du comportement du fer** Il reste à vérifier la pertinence des courbes d'érouissage prévues par les modèles. Le comportement du fer étant inconnu, on adopte la démarche annoncée plus haut, qui consiste à calculer la courbe d'érouissage du fer en fonction de celle de l'argent et de la concentration, en utilisant les modèles de manière inverse, ce qui ne pose pas de problème mathématique particulier. Les résultats de cette opération effectuée sur les courbes de la figure 3.31, avec le modèle AC et en adoptant les concentrations données dans le tableau 3.6, sont données en figure 3.32. On constate une bonne similitude des courbes pour des déformations inférieures à 10%, les écarts restant inférieurs à environ 10MPa, ce qui constitue une valeur acceptable compte tenu de la précision usuelle sur ce type de données. Au delà de 10% de déformation, les résultats divergent petit à petit, les courbes obtenues à partir des matériaux avec peu de fer présentant des contraintes inférieures aux autres. Ce phénomène peut être attribué à un endommagement différent d'une éprouvette à l'autre, non pris en compte dans le modèle AC et qui se traduit par une sous-estimation des contraintes dans le fer. Ceci n'est pas très gênant pour les calculs ultérieurs, puisque l'on s'intéressera principalement au comportement pour

<sup>11</sup>Les courbes de cette figure sont les mêmes que celles des figures 3.5 à 3.8, relatives aux matériaux testés en 1990.



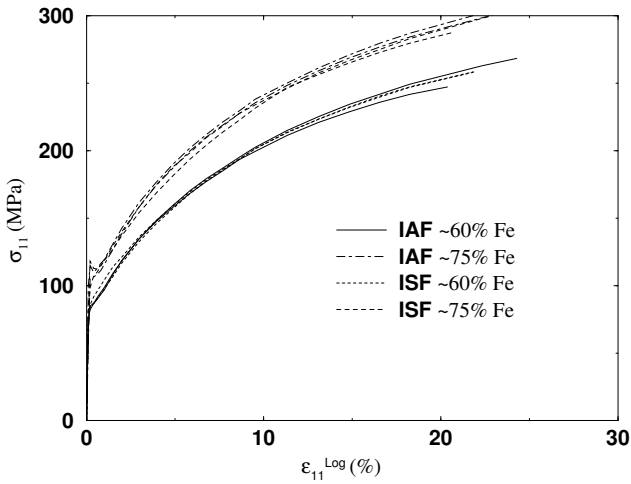


Figure 3.31 : Courbes de traction macroscopiques des matériaux IAF et ISF testés en 1990 (familles IA, IB, ID et IE - 2 courbes pour chacune)

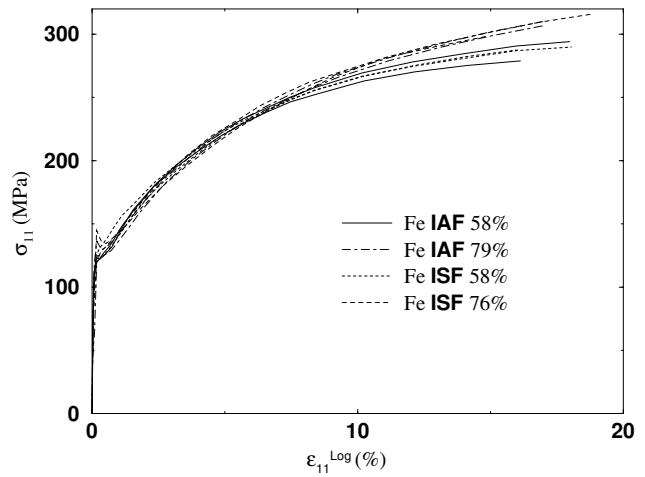


Figure 3.32 : Écrouissage du fer des matériaux infiltrés d'après le modèle AC inverse

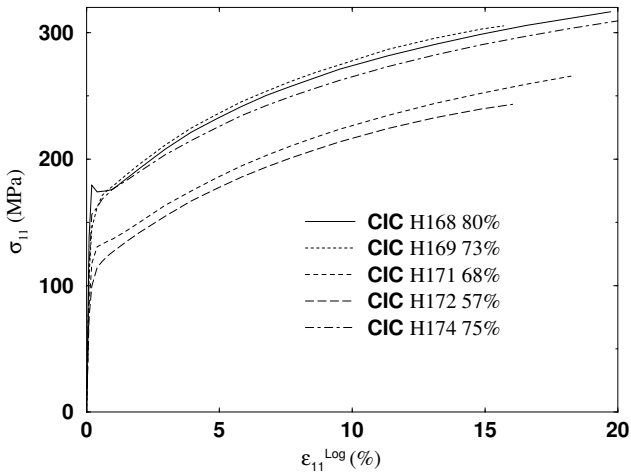


Figure 3.33 : Courbes de traction des biphasés CIC fer/argent

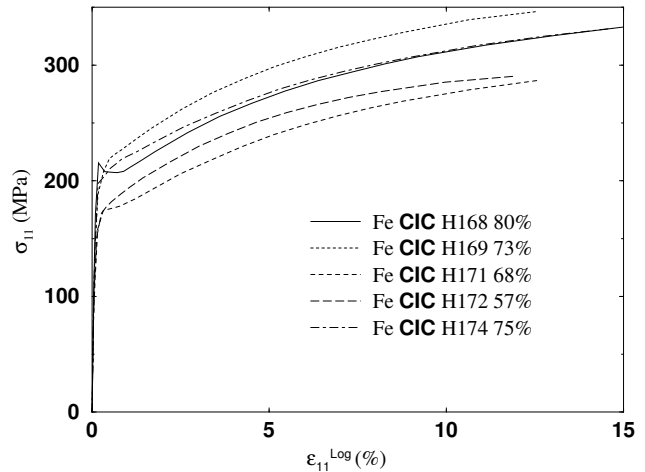


Figure 3.34 : Écrouissage du fer dans les biphasés fer/argent CIC d'après le modèle AC inverse

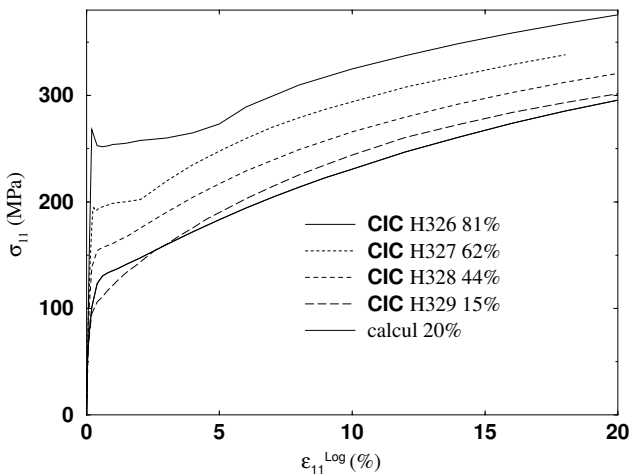


Figure 3.35 : Courbes de traction des biphasés CIC fer/cuivre et courbe recalculée (voir texte)

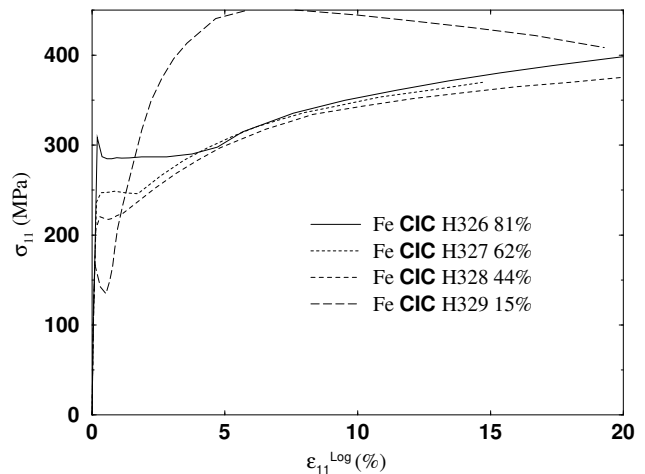


Figure 3.36 : Écrouissage du fer dans les biphasés fer/cuivre CIC d'après le modèle AC inverse

moins de 15% de déformation totale des biphasés, correspondant à des déformations moyennes dans le fer guère supérieures à 10%.

On peut effectuer le même calcul inverse pour les éprouvettes CIC afin d'estimer l'importance des fluctuations de comportement d'une éprouvette à l'autre liées à la pollution par le carbone. La figure 3.34 donne quelques courbes relatives aux biphasés fer/argent et la figure 3.36 donne celles obtenues avec les biphasés fer/cuivre. Les courbes de traction des biphasés correspondantes sont celles des figures 3.33 et 3.35. On observe bien des écarts importants entre les courbes d'écroutissage estimées pour le fer dans les biphasés fer/argent, d'amplitude d'environ 50MPa ; les pentes d'écroutissage sont en revanche comparables. La limite d'écoulement est systématiquement plus élevée que dans les matériaux infiltrés, mais l'écroutissage est plus faible.

Les courbes obtenues avec les trois biphasés fer/cuivre de concentration en fer élevée sont bien cohérentes, à l'exception du début des courbes qui présente des paliers plus ou moins longs, correspondant à la propagation plus ou moins rapide de bandes de Piobert-Lüders à travers les éprouvettes. Le modèle AC ne prend pas en compte ce phénomène et les parties correspondantes des courbes de traction ne sont pas représentatives du comportement intrinsèque des matériaux. Il semble donc que la pollution par le carbone ait été relativement homogène dans ces éprouvettes et suffisamment importante pour faire apparaître une plastification hétérogène. La courbe obtenue avec la dernière éprouvette, de concentration en fer très faible ne semble en revanche pas réaliste. Ceci peut s'expliquer par l'incertitude très grande sur ce résultat, consécutive à la faible teneur en fer : le résultat est en effet très sensible à la concentration et aux erreurs de mesure de la courbe d'écroutissage du biphasé et du cuivre. À titre de comparaison, nous donnons la courbe de traction d'un biphasé avec 20% de fer, calculée avec la courbe d'écroutissage du fer obtenue à partir du comportement du matériau avec 44% de fer : les écarts avec la courbe H329 n'excèdent jamais 15MPa. Précisons enfin que cette dernière courbe est suspecte du fait d'un probable glissement de l'extensomètre<sup>12</sup>.

Par la suite, le comportement du fer sera déterminé par une démarche inverse pour tous les matériaux testés *in situ*, à l'exception de l'essai H329 pour lequel nous adopterons la courbe d'écroutissage déduite des autres biphasés fer/cuivre.

### 3.1.C Confrontation à l'échelle locale

#### 3.1.C.a Hétérogénéités inter-phases

Les hétérogénéités de déformation « inter-phases » sont caractérisées par les écarts entre grandeurs moyennes sur les phases pour un chargement macroscopique donné. Nous nous intéressons dans un premier temps aux équivalents des tenseurs de déformation moyens relatifs à chaque phase. Les mesures expérimentales obtenues par la technique décrite au chapitre 2 sont comparées aux prévisions des trois modèles invoqués.

**Prévisions des modèles** Les modes de localisation prévus par ces derniers diffèrent bien plus que ne le faisaient les courbes de comportement effectif, ainsi qu'en attestent les figures 3.37 et 3.38, qui donnent les équivalents des déformations moyennes  $\epsilon^{eq}_i$  sur chaque phase  $i$  en fonction de l'équivalent de la déformation macroscopique  $E^{eq}$  et à concentration fixée pour la première, et les mêmes quantités en fonction de la concentration mais à déformation macroscopique fixée pour la seconde. Les courbes d'écroutissage du fer et de l'argent utilisées pour calculer ces diagrammes sont celles de la figure 3.3. Les divergences entre les trois modèles sont d'autant plus prononcées que la concentration est éloignée de l'équirépartition. Plus précisément, les écarts les plus importants sont relevés pour la déformation de la phase inclusionnaire de la configuration du modèle 3Ph qui présente une concentration élevée en inclusions. Notons aussi qu'en début de sollicitation les différences entre les modèles semblent sensiblement proportionnelles au chargement, alors qu'à partir d'une certaine déformation, de l'ordre de 5%, elles se stabilisent, les courbes devenant quasiment parallèles.

---

<sup>12</sup>La partie utile était encombrée par des jauges collées à la surface dans le but de tenter de vérifier les mesures de modules d'élasticité ; cette tentative n'a pas été réitérée lors des autres essais.

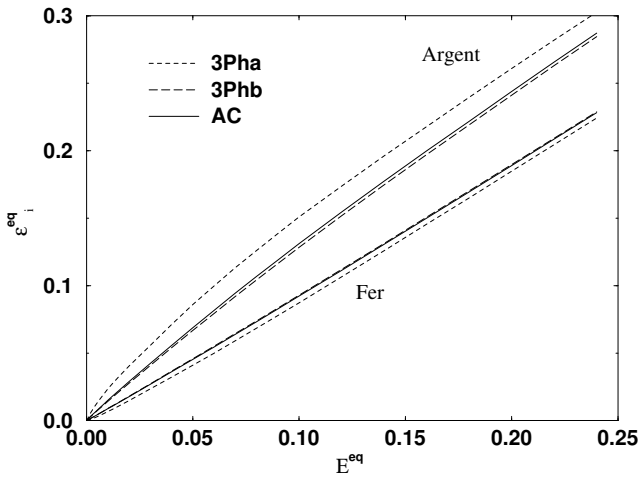


Figure 3.37 : Évolution de la déformation moyenne dans chaque phase en fonction du chargement d'après les modèles AC, 3Pha et 3Phb -  $c_{Fe} = 80\%$

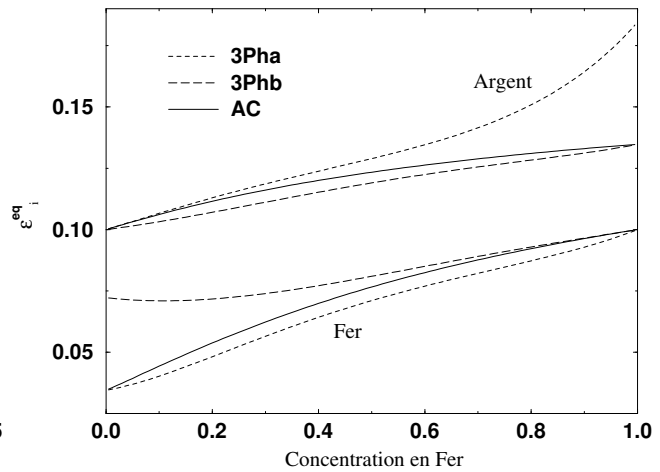


Figure 3.38 : Évolution de la déformation moyenne dans chaque phase en fonction de la concentration d'après les modèles AC, 3Pha et 3Phb -  $E^{eq} = 10\%$

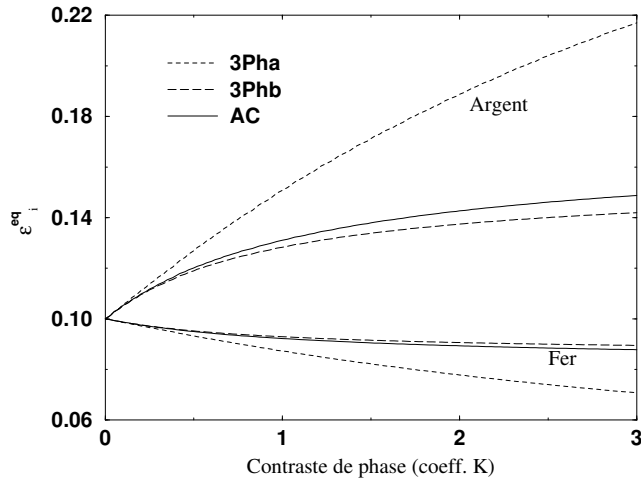


Figure 3.39 : Évolution de la déformation moyenne dans chaque phase en fonction du contraste de phase d'après les modèles AC, 3Pha et 3Phb -  $E^{eq} = 10\%$ ,  $c_{Fe} = 80\%$

On peut par ailleurs vérifier que les divergences sont d'autant plus prononcées que le contraste de comportement, caractérisé par exemple par le rapport des limites d'écoulement, est plus important. Cet aspect est illustré en figure 3.39, qui donne la déformation moyenne dans chaque phase en fonction d'un coefficient  $K$  qui caractérise la différence de comportement des deux phases. Plus précisément, les points d'abscisse  $K$  sur ce diagramme ont été calculés avec la courbe d'écrouissage de l'argent donnée en figure 3.3 et la courbe d'un fer fictif, déduite de la courbe du fer et de l'argent de cette même figure en calculant la contrainte associée à une certaine déformation  $\epsilon$  par  $\sigma(\epsilon) = \sigma_{Ag}(\epsilon) + K \times (\sigma_{Fe}(\epsilon) - \sigma_{Ag}(\epsilon))$ . Ainsi  $K = 0$  correspond à un matériau homogène et  $K = 1$  fait référence au contraste des courbes de la figure 3.3.

Comme les déviateurs des tenseurs de déformations moyens par phase sont, pour des raisons d'isotropie, proportionnels au déviateur macroscopique et d'après la relation  $c_i \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_i = \underline{\underline{E}}$ , les équivalents de ces tenseurs obéissent également à une telle relation de moyenne :  $c_i \epsilon_i^{eq} = E^{eq}$ . On peut donc limiter l'étude des hétérogénéités inter-phases à une seule phase.

**Résultats expérimentaux bruts** Les équivalents des déformations moyennes par phase mesurées lors des onze essais *in situ* sont reportés dans le **tableau 3.7**. Les incertitudes sont principalement liées aux écarts entre calculs « avec » ou « sans interface », comme décrit au chapitre 2. Celles associées à la déformation macroscopique ne sont pas données car elles sont négligeables. Les résultats sont exprimés sur l'échelle logarithmique.

Référence	$c_{Fe}(\%)$	$E^{eq}$	$\epsilon^{eq}_{Fe}$	$\epsilon^{eq}_{Ag}$ ou $\epsilon^{eq}_{Cu}$
H168	92	4,87	4,52( $\pm 0,22$ )	9,34( $\pm 0,98$ )
		9,84	9,14( $\pm 0,41$ )	18,7( $\pm 1,85$ )
H169	82	4,31	3,47( $\pm 0,34$ )	8,01( $\pm 0,25$ )
		9,90	7,96( $\pm 0,75$ )	18,2( $\pm 0,34$ )
		13,65	10,9( $\pm 1,0$ )	25,3( $\pm 0,46$ )
H171	71	9,18	7,24( $\pm 0,43$ )	13,8( $\pm 0,49$ )
H172	53	5,49	3,41( $\pm 0,45$ )	7,70( $\pm 0,19$ )
		8,92	5,59( $\pm 0,76$ )	12,4( $\pm 0,22$ )
		13,19	8,20( $\pm 1,1$ )	18,2( $\pm 0,33$ )
H174	79	4,66	3,95( $\pm 0,29$ )	7,17( $\pm 0,34$ )
		9,50	8,13( $\pm 0,53$ )	14,3( $\pm 0,61$ )
		14,05	12,1( $\pm 0,74$ )	20,9( $\pm 0,88$ )
IA11	52	5,27	3,94( $\pm 0,38$ )	6,68( $\pm 0,24$ )
		8,31	6,16( $\pm 0,59$ )	10,6( $\pm 0,37$ )
		15,21	11,5( $\pm 1,0$ )	19,0( $\pm 0,62$ )
IB10	83	4,85	4,26( $\pm 0,31$ )	7,70( $\pm 0,40$ )
		9,50	8,35( $\pm 0,59$ )	15,0( $\pm 0,58$ )
		13,55	12,0( $\pm 0,79$ )	21,2( $\pm 0,85$ )
ID03	61	4,20	2,89( $\pm 0,49$ )	6,13( $\pm 0,17$ )
		9,62	6,75( $\pm 1,0$ )	13,8( $\pm 0,31$ )
		14,26	10,1( $\pm 1,5$ )	20,3( $\pm 0,41$ )
IE05	74	3,30	2,97( $\pm 0,11$ )	4,30( $\pm 0,29$ )
		7,73	6,93( $\pm 0,21$ )	10,1( $\pm 0,61$ )
		12,39	11,3( $\pm 0,32$ )	15,8( $\pm 0,82$ )
H327	58	3,46	2,83( $\pm 0,12$ )	4,34( $\pm 0,17$ )
		8,73	7,31( $\pm 0,16$ )	10,7( $\pm 0,37$ )
		12,81	10,8( $\pm 0,23$ )	15,6( $\pm 0,48$ )
H329	20	2,20	1,29( $\pm 0,15$ )	2,42( $\pm 0,055$ )
		5,72	3,41( $\pm 0,19$ )	6,27( $\pm 0,10$ )
		9,77	5,78( $\pm 0,29$ )	10,7( $\pm 0,16$ )

Tableau 3.7 : Résultats des essais *in situ* ; déformations équivalentes exprimées sur l'échelle logarithmique (en %)

Les données de ce tableau peuvent être portées sur un diagramme du type de celui de la **figure 3.37** et comparées aux prévisions des modèles. Toutefois, afin d'obtenir une vision globale des résultats de tous les essais, il est plus judicieux d'opter pour une représentation analogue à celle utilisée en **figure 3.38**, mais ceci se heurte à deux difficultés. La première est que les déformations macroscopiques mesurées ne sont pas identiques pour tous les essais, même si elles sont souvent proches des valeurs visées, soit 5%, 10% et 15%. La seconde est liée aux écarts de contraste de phases d'une éprouvette à l'autre, dus aux différences de comportement du fer et au fait que l'argent est nettement plus « mou » que le cuivre : les courbes de la **figure 3.38** sont spécifiques d'un matériau particulier. Les données expérimentales du **tableau 3.7** nécessitent donc encore quelques traitements complémentaires, précisés dans ce qui suit.

**Représentation adimensionnée** La première manipulation consiste à calculer les déformations au sein des phases pour 5%, 10% et 15% de déformation macroscopique par interpolation ou extrapolation linéaire des valeurs expérimentales correspondant aux deux déformations macroscopiques les plus proches de celle considérée. Elle est justifiée dans la mesure où l'on constate pour pratiquement tous les essais une dépendance quasi-linéaire des déformations locales en fonction de la déformation macroscopique. La figure 3.40 permet de vérifier ce fait pour l'essai H172 et illustre la procédure d'interpolation ou d'extrapolation, que l'on applique tant aux valeurs elle-mêmes qu'à leurs incertitudes.

Le second traitement consiste à exprimer les hétérogénéités inter-phase dans une échelle normalisée dans laquelle 0 et 1 correspondent respectivement à l'homogénéité (c'est-à-dire  $\epsilon_i^{\text{eq}} = E^{\text{eq}}$ ) et aux prévisions de 3Pha. Dans un tel diagramme, les résultats des modèles 3Phb et AC dépendent encore du comportement du fer, mais beaucoup moins que dans celui de la figure 3.38. On le vérifie en figure 3.41, qui donne les courbes obtenues avec le comportement du fer calculé par inversion pour quatre éprouvettes différentes (H171, H169, IA11 et H327). Les courbes extrêmes correspondent aux matériaux présentant le contraste de phase le plus élevé (H169) et le plus faible (H327), qui conduisent respectivement aux écarts entre modèles les plus prononcés ou les plus ténus. Cette représentation présente aussi l'avantage d'inclure les mêmes courbes pour les deux phases constitutives, du fait de la propriété  $c_i \epsilon_i^{\text{eq}} = E^{\text{eq}}$ . Les domaines relatifs aux trois modèles sont toujours bien séparés et la confrontation avec l'ensemble des résultats expérimentaux est possible.

**Confrontation globale** La procédure mise en œuvre pour les trois déformations macroscopiques  $E^{\text{eq}} = 5\%$ , 10% et 15% comprend les étapes suivantes et conduit aux figures 3.42 à 3.44.

- Calcul des diagrammes normalisés pour les matériaux présentant les contrastes extrêmes, afin de délimiter les domaines associés aux modèles 3Phb et AC.
- Calcul des déformations au sein des phases par interpolation ou extrapolation linéaire des données expérimentales.
- Pour chaque essai, calcul des prévisions d'hétérogénéité du modèle 3Pha, en utilisant le comportement du fer déduit du comportement global du matériau biphasé par inversion avec le modèle AC (sauf pour H329 pour laquelle on calcule le fer par inversion de H327) ; la concentration utilisée pour l'inversion est la concentration globale donnée dans le tableau 3.6, alors qu'on fait appel à la concentration locale pour le calcul des hétérogénéités.
- Normalisation des résultats expérimentaux à partir des résultats des calculs précédents, pour les deux phases.
- Report dans le diagramme normalisé du résultat correspondant à la phase pour laquelle l'incertitude expérimentale est la plus faible, soit, en général, l'argent dans les biphasés fer/argent et le fer dans les biphasés fer/cuivre.

Relevons d'abord la grande fluctuation des résultats d'une éprouvette à l'autre, qui établit l'importance de la microstructure sur les modes de localisation de la déformation au sein des phases. La concordance des données expérimentales avec les prévisions théoriques est en revanche loin d'être parfaite : à 5% de déformation macroscopique, la plupart des points de mesure se situent entre les domaines délimités par le modèle AC et le modèle 3Pha, mais, pour les sollicitations plus importantes, les *hétérogénéités sont amplement sous-estimées*, d'un facteur proche de deux pour certaines éprouvettes à  $E^{\text{eq}} = 15\%$ . Le résultat est prévisible si l'on se souvient que les déformations mesurées au sein des phases varient presque linéairement avec  $E^{\text{eq}}$ , alors que l'hétérogénéité prévue par les modèles tend à saturer pour des déformations supérieures à 5%. La confrontation directe modèle/expérience n'est donc pas concluante et il faut se contenter, à l'instar de ce qui a été fait pour le comportement élastique, de comparaisons qualitatives portant sur des tendances.

On peut alors noter une certaine homogénéité de comportement pour six matériaux parmi les huit dont la morphologie a été identifiée comme étant de type MI (biphasés fer/cuivre H329, fer/argent ISF ID03 et CIC H172, H171, H169 et H168), qui se placent sensiblement à une même ordonnée pour une gamme de concentration pourtant assez large, et ceci plus particulièrement pour  $E^{\text{eq}} = 10\%$  et  $E^{\text{eq}} = 15\%$ . La dépendance des hétérogénéités de déformation inter-phase par rapport à la concentration semble donc bien décrite par le modèle 3Pha pour les morphologies MI, même si les valeurs prévues

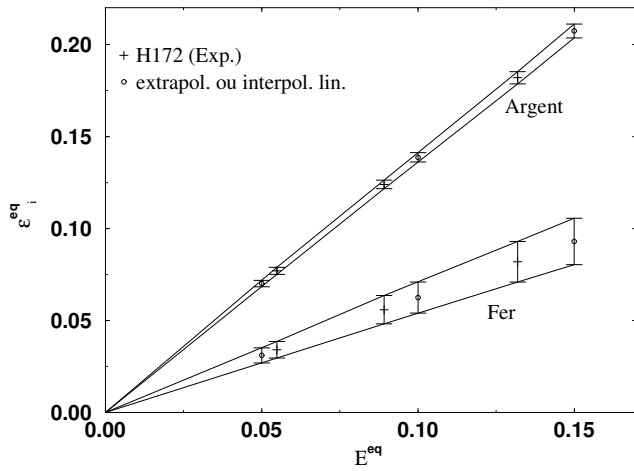


Figure 3.40 : Interpolation des résultats expérimentaux (données de l'essai H172)

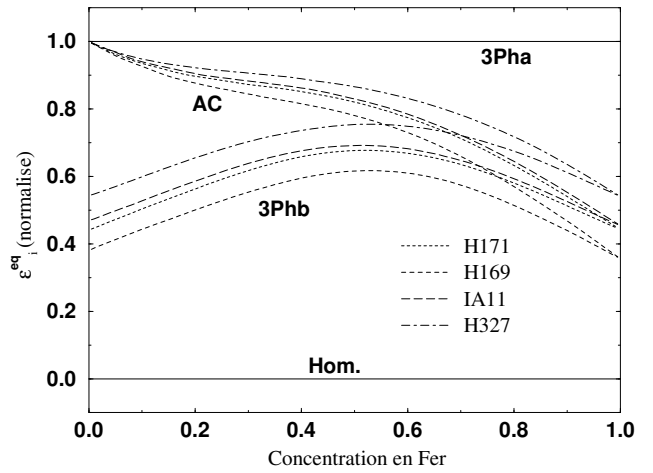


Figure 3.41 : Représentation normalisée des déformations moyennes par phase ( $E^{eq} = 10\%$ )

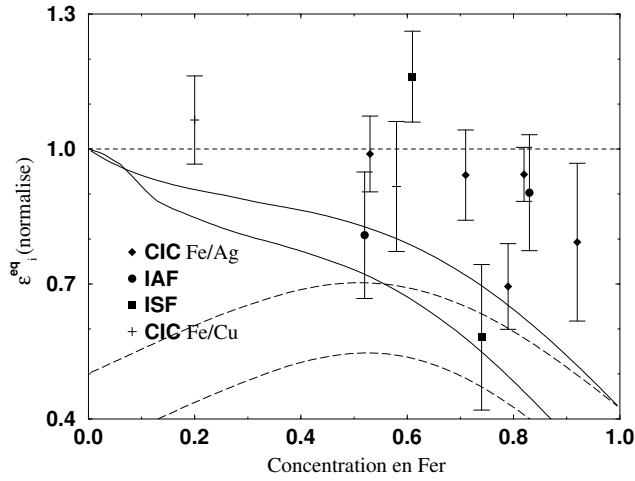


Figure 3.42 : Résultats pour  $E^{eq} = 5\%$

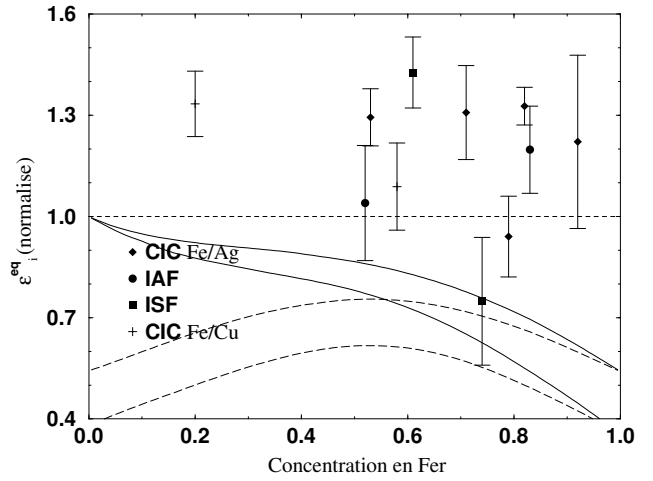


Figure 3.43 : Résultats pour  $E^{eq} = 10\%$

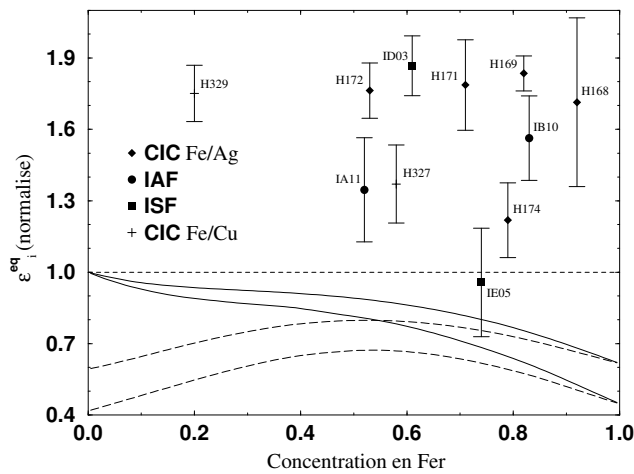


Figure 3.44 : Résultats pour  $E^{eq} = 15\%$

sous-estiment en valeur absolue les hétérogénéités réelles. Par ailleurs, on vérifie aussi que l'éprouvette IA11 de morphologie CC et l'éprouvette H327, dont la microstructure se rapproche d'une morphologie MI, mais dans la configuration cuivre dans fer, présentent un niveau d'hétérogénéité nettement plus faible que les précédentes. Ceci est conforme aux tendances prévues par les modèles, c'est-à-dire une réduction des hétérogénéités lorsqu'on passe de la configuration **a** à la configuration inverse **b**. Cet effet est aussi visible pour l'essai IB10, également de morphologie CC, mais à un degré moindre.

Enfin, les niveaux d'hétérogénéité les plus faibles sont enregistrés avec les matériaux IE05 et H174, dont la morphologie a pourtant été identifiée comme étant de type MI, et contredisent la conclusion que l'on aurait pu tirer à partir des seules observations précédentes<sup>13</sup>. Ces deux matériaux présentent une concentration voisine, proche du seuil de 80% pour lequel l'imbrication des phases est maximal d'après le modèle booléen. On peut alors être tenté de corrélérer l'hétérogénéité au nombre de connexité tridimensionnel par unité de volume, mais l'analyse n'est pas très convaincante, dans la mesure où d'autres éprouvettes de concentration très voisine ne présentent pas du tout le même comportement, et où celles de concentration plus élevée ne laissent pas entrevoir l'inversion de configuration et donc la diminution d'hétérogénéité que l'évolution de  $N_v$  suggère.

### 3.1.C.b Hétérogénéités intra-phases

Nous achevons cette première confrontation entre mesures expérimentales et prévisions des modèles en considérant les hétérogénéités de déformation « intra-phases », que nous caractérisons par des fonctions de distribution de la déformation équivalente locale. Les procédures décrites au chapitre 2 permettent d'accéder à cette information à partir des mesures expérimentales de déplacement des points d'or déposés à la surface de l'éprouvette. Les modèles n'y donnent pas directement accès. Le modèle AC ne fait en particulier intervenir que des grandeurs moyennes par phase et ne décrit pas les hétérogénéités locales. L'interprétation du modèle 3Ph en termes de motifs morphologiques représentatifs (cf. paragraphe 1.2.C.c) fournit en revanche la signification des champs locaux hétérogènes qui apparaissent au sein de la sphère composite : ce sont les moyennes des champs de même nature apparaissant en des points homologues au sein d'un VER sous le même chargement. Sous réserve de l'applicabilité de cette hypothèse, discutée au paragraphe 1.3.B.d, les fonctions de distribution calculées à partir des champs locaux dans la sphère composite sont donc comparables aux mesures expérimentales. Les champs théoriques étant en un certain sens des moyennes des champs réels, il faut s'attendre à des largeurs de distribution prévues par les modèles inférieures aux largeurs des distributions mesurées. Toutefois, si l'on souhaite utiliser cette information locale des modèles pour caractériser l'hétérogénéité au sein des matériaux, en particulier pour prévoir l'apparition de phénomènes locaux tels la première plasticité ou l'initiation d'endommagement, l'écart entre distributions prévues et distributions réelles ne doit pas être trop important. Un résultat contraire signifierait que le modèle nivelle trop les fluctuations locales et ne peut être retenu pour caractériser les événements locaux ; une description plus fine de la microstructure et des champs qui s'y développent serait alors indispensable.

Notons qu'il existe un autre moyen de caractériser les hétérogénéités locales, qui consiste à s'intéresser à l'écart-type  $e(\epsilon^{eq})$  de la distribution des déformations équivalentes locales, calculé par  $e^2(\epsilon^{eq}) = \langle \epsilon^{eq2} \rangle - \langle \epsilon^{eq} \rangle^2$ . Les valeurs expérimentales des deux dernières quantités sont connues puisque l'on connaît la distribution expérimentale de  $\epsilon^{eq}$ .  $\langle \epsilon^{eq2} \rangle$  est le moment d'ordre deux de la déformation locale que l'on peut calculer de manière exacte pour tout modèle d'homogénéisation par la relation (1.172). Le moment d'ordre un  $\langle \epsilon^{eq} \rangle$  n'est *a priori* pas connu, mais on peut l'estimer en première approximation par l'équivalent de la déformation moyenne  $\langle \underline{\epsilon} \rangle^{eq}$ , qui est connue, puisqu'elle est utilisée par l'extension non-linéaire classique. Dans le cas du modèle 3Ph et plus généralement pour tout modèle faisant intervenir des champs locaux hétérogènes interprétables en termes de moyennes par points homologues, on peut estimer plus judicieusement  $\langle \epsilon^{eq} \rangle$  à partir de ces champs locaux.

Nous n'avons pas entrepris de comparaison de cette nature, mais les valeurs expérimentales précises pour le faire sont données en annexe F pour les onze essais *in situ*. Nous nous sommes toutefois attachés à comparer les moments d'ordre deux expérimentaux à ceux prévus par les modèles.

<sup>13</sup>Rappelons que l'essai IE05 a justement été entrepris pour tenter d'asseoir une telle conclusion. . .

Les résultats de cette confrontation seront donnés ultérieurement, pour les trois modèles considérés ici. Nous nous limitons dans un premier temps aux hétérogénéités estimées au travers des champs locaux dans la sphère composite du modèle 3Ph.

**Prévisions du modèle 3Ph** Le calcul des fonctions de distributions théoriques associées au modèle 3Ph utilise la solution analytique associée aux modules sécants utilisés pour chaque phase. Les champs de déplacement pour un cisaillement pur macroscopique ou une compression sont données dans les références [43, 76] et ceux associés à une traction simple s'en déduisent par superposition. L'expression analytique des champs de déformation ou de contrainte s'obtient par dérivation<sup>14</sup>.

En pratique, les distributions sont déterminées en discrétisant la sphère composite en petits domaines, en calculant les valeurs du champ étudié en leur centre et en pondérant ces valeurs par leurs volumes. Nous ne nous intéressons dans ce qui suit qu'aux distributions sous traction simple. Dans ce cas, les champs locaux sont axisymétriques et admettent le plan équatorial comme plan de symétrie ; il suffit donc de les calculer dans un quart de section diamétrale de la sphère composite et de les pondérer par les volumes des couronnes construites sur la base de petits domaines autour des points de calcul. Comme les champs admettent une expression analytique facile à calculer, il est possible de faire appel à des discrétisations très fines : usuellement 200 000 points de calcul sont utilisés pour construire les distributions. Les figures 3.45 et 3.46 donnent les résultats des deux configurations du modèle 3Ph, pour un biphasé fer/argent avec 80% de fer. Les courbes d'écrouissage des phases utilisées sont celles de la figure 3.3. Les figures 3.47 et 3.48 donnent l'allure des champs locaux dans les sphères composites correspondantes, sous forme de lignes d'isovaleurs.

On constate des différences importantes entre les deux configurations, qui traduisent un effet de la morphologie sur l'état mécanique local, selon le modèle 3Ph. Pour une déformation macroscopique identique de 5%, la configuration **a** présente des déformations locales allant d'environ 3% à plus de 14%, alors que dans la structure inverse les déformations maximales atteignent à peine 7%. L'hétérogénéité est nettement plus prononcée dans la matrice que dans l'inclusion qui subit une déformation presque homogène, notamment lorsque sa fraction volumique est faible. En traçant de telles fonctions de distribution pour plusieurs valeurs de concentration et des contrastes de phases variés, on observe que, à l'instar de l'hétérogénéité inter-phase, l'hétérogénéité intra-phase est d'autant plus importante que la concentration de la matrice est plus faible et que le contraste est plus élevé. Les cartes de déformation en figures 3.47 et 3.48 révèlent par ailleurs que l'allure des champs locaux est également très différente d'une morphologie à l'autre. Dans la configuration **a**, les zones les plus déformées sont situées à environ 45° de l'axe de traction, alors que dans l'autre configuration (outre l'inclusion, très déformée mais de manière presque homogène), ce sont les régions équatoriales et les zones polaires à proximité de l'interface.

Dans ce qui suit, toutes les fonctions de distribution présentées sont exprimées dans une échelle de déformation normalisée, dans laquelle 1 correspond à la déformation macroscopique, et leurs intégrales sont égales à l'unité. Cette représentation permet de comparer des distributions à différentes sollicitations macroscopiques. Elle met notamment en évidence un phénomène de resserrement des distributions théoriques pour des intensités croissantes de chargement, illustré par les figures 3.49 et 3.50 qui reprennent dans un tel diagramme les résultats des figures 3.45 et 3.46 et les complètent avec des distributions obtenues à des taux de déformation macroscopiques plus élevés. L'effet est particulièrement sensible pour la matrice dans la configuration **a**. On peut rapprocher ce résultat de l'observation similaire faite au sujet de l'hétérogénéité inter-phase, qui semble se stabiliser en valeurs absolues, et donc diminuer en valeurs relatives, pour des déformations macroscopiques supérieures à environ 5%.

Ces fonctions de distribution théoriques ont été calculées pour tous les essais *in situ*, en suivant la même procédure que pour le calcul des déformations moyennes par phase : la courbe d'écrouissage du fer utilisée est celle déduite du comportement du biphasé par l'utilisation inverse du modèle AC en prenant en compte la concentration globale de l'éprouvette biphasé testée macroscopiquement. La concentration locale de la zone testée est utilisée dans les modèles 3Pha et 3Phb pour calculer les distributions théoriques, pour les divers taux de déformation macroscopique mesurés.

---

<sup>14</sup>Le calcul analytique complet de ces champs est dû à E. Hervé



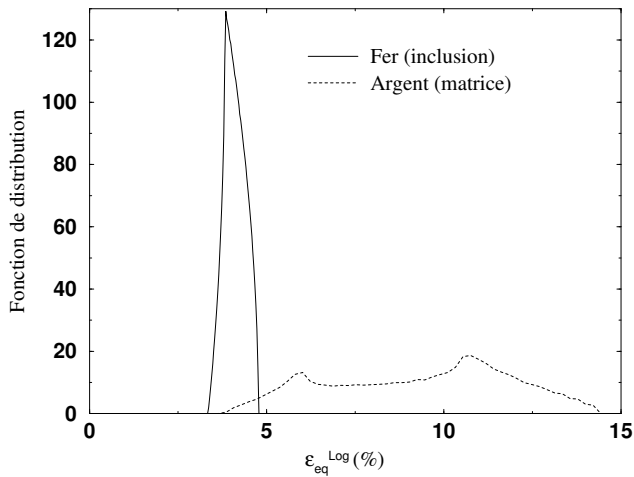


Figure 3.45 : Distribution des déformations équivalentes selon le modèle 3Pha (fer/argent,  $c_{Fe} = 80\%$ ,  $E^{eq} = 5\%$ )

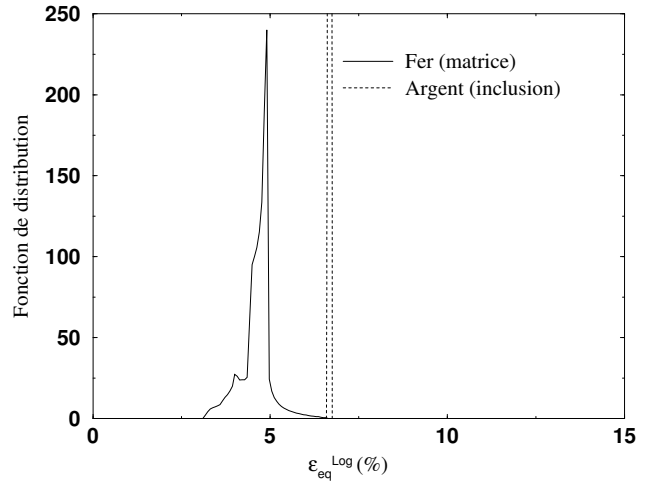


Figure 3.46 : Distribution des déformations équivalentes selon le modèle 3Phb (fer/argent,  $c_{Fe} = 80\%$ ,  $E^{eq} = 5\%$ )

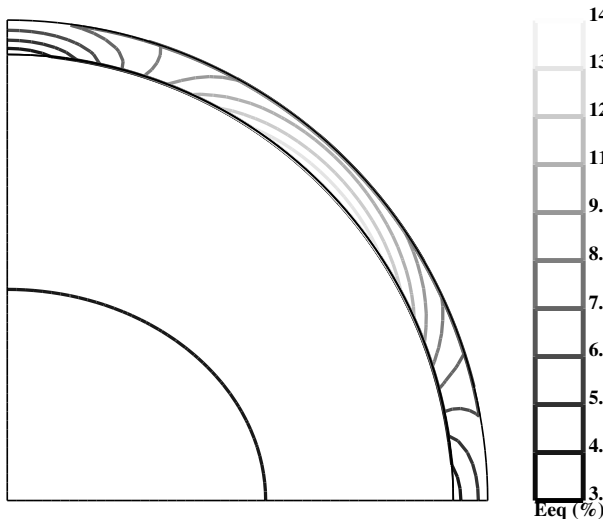


Figure 3.47 : Déformation équivalente locale dans la sphère composite du modèle 3Pha (fer/argent,  $c_{Fe} = 80\%$ ,  $E^{eq} = 5\%$ , axe de traction vertical)

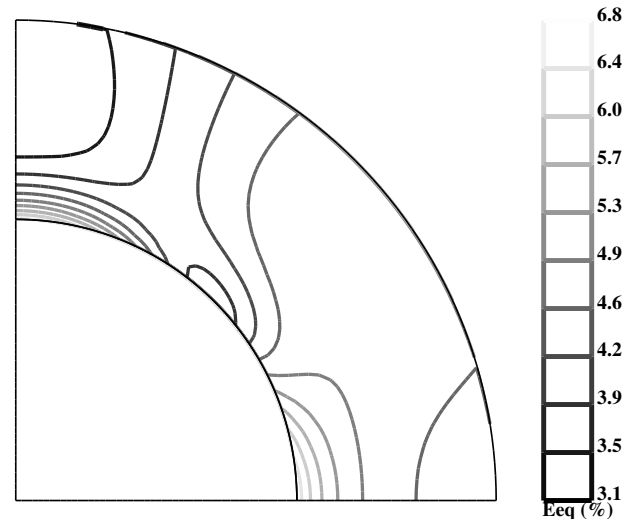


Figure 3.48 : Déformation équivalente locale dans la sphère composite du modèle 3Phb (fer/argent,  $c_{Fe} = 80\%$ ,  $E^{eq} = 5\%$ , axe de traction vertical)

**Comparaison avec l'expérience** Toutes les distributions expérimentales, obtenues en appliquant les procédures décrites au chapitre 2 sont données en annexe F.

La comparaison des résultats précédents avec ces mesures impose quelques remarques immédiates. La première est que l'expérience ne révèle pas l'effet de resserrement observé pour le modèle 3Ph. Même si les courbes aux faibles taux de déformations semblent légèrement plus étalées que les autres, l'écart est de l'ordre de grandeur des incertitudes expérimentales, qui tendent à élargir les distributions et sont plus importantes en valeurs relatives pour les déformations faibles, et ce resserrement apparent n'a en aucun cas l'ampleur de celui révélé par les modèles. Les courbes expérimentales aux divers taux de déformation pour une même éprouvette se superposent ainsi relativement bien. Ce résultat est à rapprocher de l'évolution linéaire des déformations moyennes en fonction de la déformation macroscopique (*cf.* figure 3.40) et semble indiquer que l'état local évolue en fonction du chargement de façon presque proportionnelle.

La seconde remarque est que les distributions mesurées sont systématiquement plus étalées que celles prévues par le modèle 3Ph, quelle que soit la configuration retenue. Ce fait est vérifié dès les

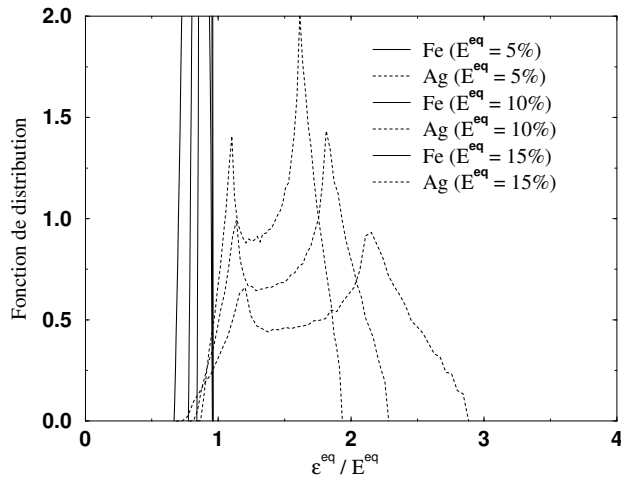


Figure 3.49 : Distribution du rapport  $\epsilon^{eq}/E^{eq}$  selon le modèle 3Pha (fer/argent,  $c_{Fe} = 80\%$ )

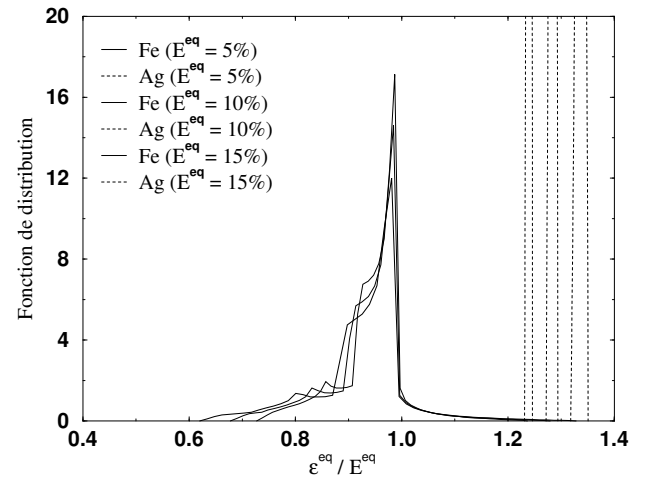


Figure 3.50 : Distribution du rapport  $\epsilon^{eq}/E^{eq}$  selon le modèle 3Phb (fer/argent,  $c_{Fe} = 80\%$ )

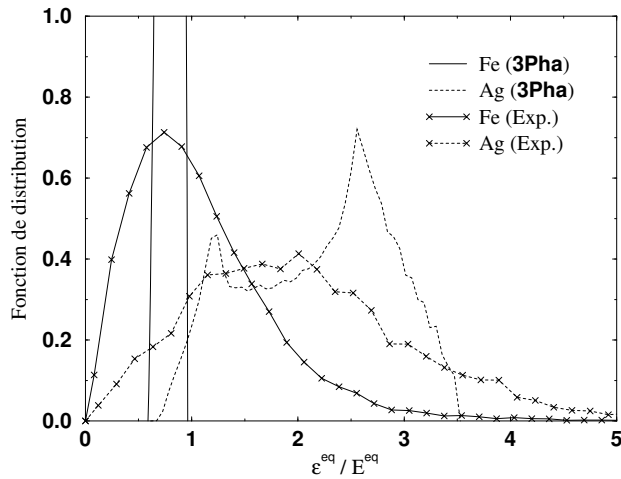


Figure 3.51 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha - H169, CIC,  $c_{Fe} = 82\%$ ,  $E^{eq} = 4,3\%$

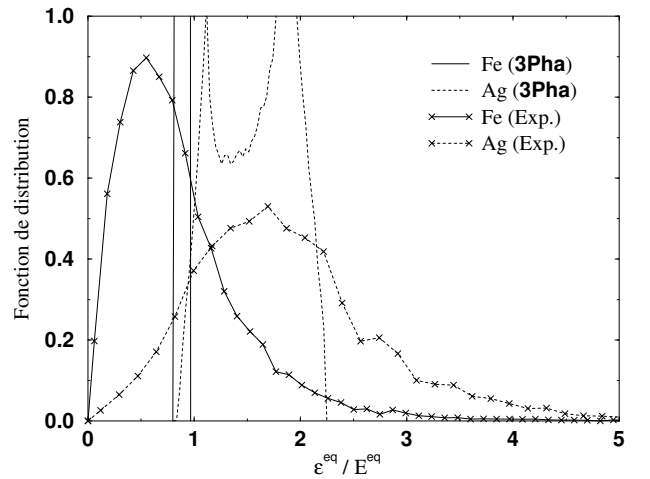


Figure 3.52 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha - H169, CIC,  $c_{Fe} = 82\%$ ,  $E^{eq} = 13,6\%$

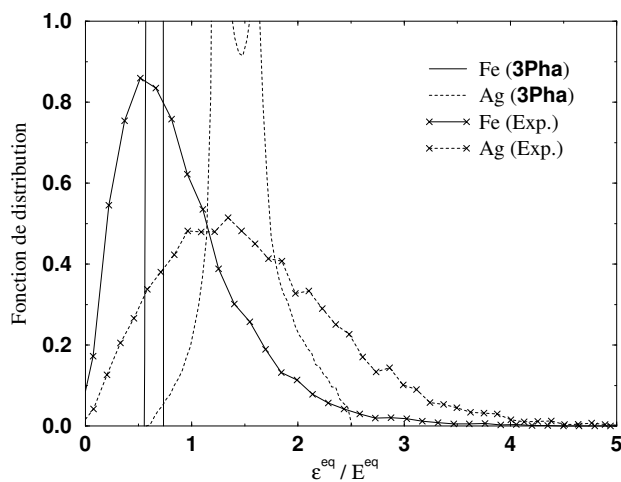


Figure 3.53 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha - H172, CIC,  $c_{Fe} = 53\%$ ,  $E^{eq} = 5,5\%$

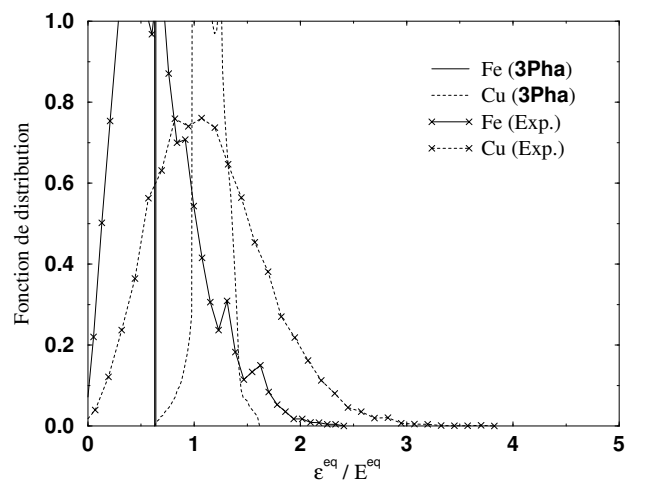


Figure 3.54 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha - H329, CIC,  $c_{Fe} = 20\%$ ,  $E^{eq} = 5,7\%$

faibles taux de déformation et, compte tenu des remarques précédentes relatives au phénomène de resserrement prévu par les modèles mais non observé, tend à s'accroître à mesure que le chargement croît. Cette sous-estimation des hétérogénéités est nettement plus accentuée pour le fer que pour l'argent. Par ailleurs, les prévisions du modèle 3Phb sont toujours moins pertinentes que celles de 3Pha, y compris pour les matériaux de morphologie CC ou ceux pour lesquels les mesures de déformations moyennes révèlent un comportement se rapprochant des prévisions de 3Phb (IA11, IE05 et H174).

En revanche, l'hétérogénéité dans l'argent des matériaux CIC dont la concentration en fer est élevée (supérieure à environ 75%) est relativement bien décrite par le modèle 3Pha, en tous cas pour des taux de déformation macroscopiques faibles. Ceci est vérifié par exemple pour l'essai H169 (figure 3.51), mais aussi pour H168 et H174. Le modèle ne rend pas compte des déformations faibles, inférieures aux deux tiers de la déformation macroscopique, ni des déformations très élevées, supérieures à 3,5 fois la déformation macroscopique. Mais le résultat peut néanmoins être considéré comme satisfaisant dans la mesure où les champs dans l'inclusion composite s'interprètent comme des moyennes, au sens des points homologues, des champs réels. La comparaison est moins flatteuse pour les déformations plus élevées (figure 3.52) ou pour les matériaux dont la concentration en fer est plus faible et qui présentent pourtant une même morphologie MI et exhibent un comportement similaire en termes d'hétérogénéités inter-phases : les figures 3.53 et 3.54 présentent les résultats relatifs à une déformation macroscopique proche de 5% pour, respectivement, le matériau H172, proche de l'équirépartition, et le matériau fer/cuivre H329, dont la concentration en inclusions est faible. Ce dernier résultat va à l'encontre de l'idée souvent avancée selon laquelle le modèle 3Ph est pertinent pour des composites dont la concentration en inclusions n'est pas trop grande. L'adéquation entre modèle et expérience semble au contraire s'améliorer à mesure que la teneur en inclusions augmente. Elle reste toutefois très imparfaite en ce qui concerne la déformation dans la phase inclusionnaire.

**Distributions expérimentales pour différentes morphologies** On peut enfin s'intéresser à l'influence de la morphologie sur l'hétérogénéité intra-phase révélée par l'expérience, indépendamment de toute comparaison absolue avec un modèle. L'exercice est délicat car les champs locaux dépendent à la fois de la morphologie, de la concentration et du contraste de phase. Pour éliminer l'incertitude liée au troisième facteur, il est préférable de limiter les comparaisons aux matériaux présentant des comportements locaux identiques, c'est-à-dire les deux biphasés fer/cuivre et les trois matériaux infiltrés testés en 1990. Ces matériaux ne présentent pas les mêmes concentrations. Pour corriger l'effet de ce paramètre, on peut utiliser les prévisions du modèle 3Pha comme référence et interpréter les évolutions des écarts à ces prévisions comme l'effet de la morphologie seule. Inversement, on peut choisir des

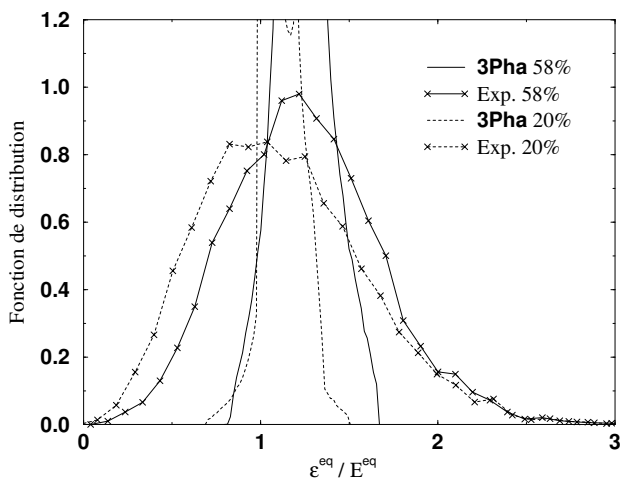


Figure 3.55 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha dans le cuivre pour les matériaux H327 (phases imbriquées,  $c_{Fe} = 58\%$ ,  $E^{eq} = 8,7\%$ ) et H329 (MI,  $c_{Fe} = 20\%$ ,  $E^{eq} = 9,8\%$ )

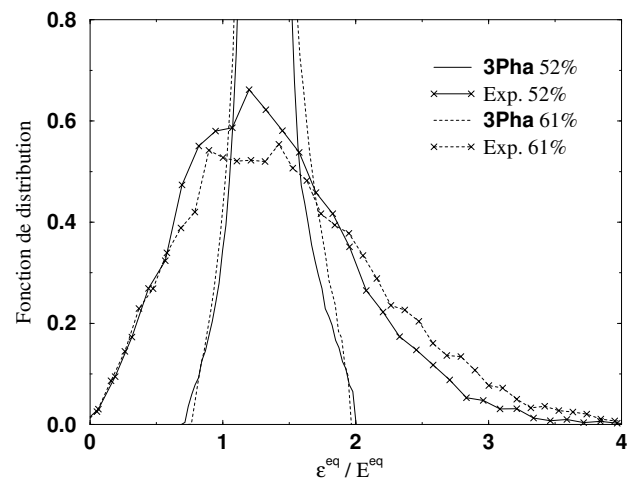


Figure 3.56 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha dans l'argent pour les matériaux IA11 (IAF,  $c_{Fe} = 52\%$ ,  $E^{eq} = 8,3\%$ ) et ID03 (ISF,  $c_{Fe} = 61\%$ ,  $E^{eq} = 9,6\%$ )

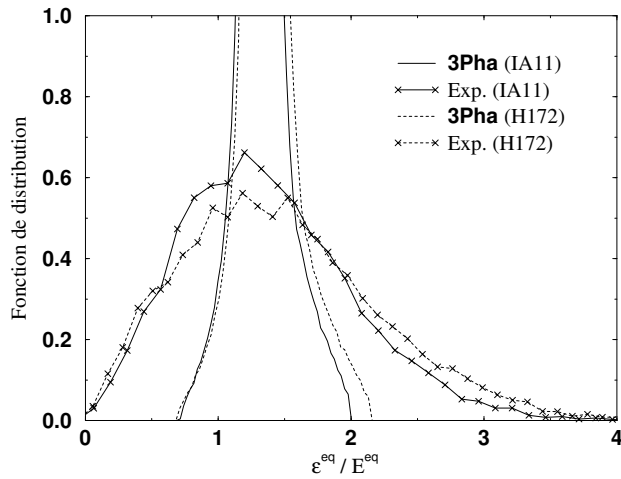


Figure 3.57 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha dans l'argent pour les matériaux IA11 (IAF,  $c_{Fe} = 52\%$ ,  $E^{eq} = 8,3\%$ ) et H172 (CIC,  $c_{Fe} = 53\%$ ,  $E^{eq} = 8,9\%$ )

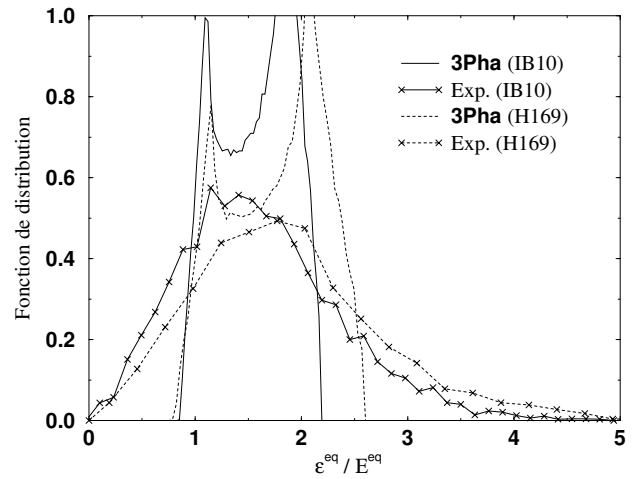


Figure 3.58 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha dans l'argent pour les matériaux IB10 (IAF,  $c_{Fe} = 83\%$ ,  $E^{eq} = 9,5\%$ ) et H169 (CIC,  $c_{Fe} = 82\%$ ,  $E^{eq} = 9,9\%$ )

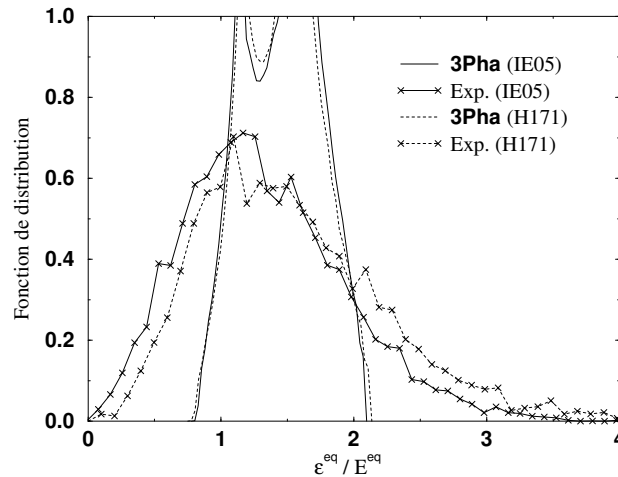


Figure 3.59 : Distributions mesurées et théoriques selon 3Pha dans l'argent pour les matériaux IE05 (ISF,  $c_{Fe} = 74\%$ ,  $E^{eq} = 7,7\%$ ) et H171 (CIC,  $c_{Fe} = 71\%$ ,  $E^{eq} = 9,2\%$ )

matériaux présentant la même concentration, mais un contraste de phases différent et utiliser de la même manière les prévisions du modèle 3Pha comme référence. Cette comparaison est envisageable pour les essais IA11 et H172 (52% et 53% de fer) et les essais IB10 et H169 (82% et 83% de fer).

La figure 3.55 donne les résultats relatifs aux matériaux fer/cuivre : les écarts entre distributions théoriques et expérimentales dans le cuivre sont plus élevés pour le matériau H329, de morphologie MI, « fer dans cuivre », que pour le matériau H327, dont les phases sont plus imbriquées, ce qui traduit, selon le critère avancé plus haut, une hétérogénéité moins grande pour le premier. Mais compte tenu des incertitudes liées à la pertinence du modèle 3Pha pour décrire la morphologie MI sur toute la gamme de concentration, cette conclusion reste criticable. La même observation vaut pour les essais IA11 et ID03, de morphologie CC et MI respectivement, dont les résultats sont donnés en figure 3.56. Les concentrations de ces deux matériaux sont plus proches, ce qui rend la comparaison plus objective que dans le cas précédent, mais les écarts sont plus ténus. Les figures 3.57 et 3.58 donnent les comparaisons pour les paires de matériaux de concentrations identiques : on observe des distributions plus larges pour les morphologies MI, mais il semble que cet effet soit majoritairement dû à un contraste de phase

plus prononcé dans ces matériaux, comme en atteste la largeur des distributions théoriques. On peut enfin comparer les matériaux H171 et IE05 qui présentent tous deux selon l'analyse morphologique une microstructure de type M1 mais un comportement en termes de déformations moyennes par phase très différent : la figure 3.59 révèle une hétérogénéité intra-phase similaire pour les deux matériaux, mais une translation globale de la distribution vers les déformations élevées pour l'essai H171, qui ne peut être dû à des différences de comportement local ou de concentration puisque les distributions théoriques sont pratiquement identiques.

Ces comparaisons ne permettent donc pas de mettre en évidence une influence claire de la morphologie sur les largeurs de distributions intra-phase. Il semble que l'effet majoritaire concerne les déformations moyennes par phase.

### 3.1.D Conclusions partielles

Les principales conclusions de ces confrontations entre modèles et expérience sont, à ce stade, les suivantes.

- Les mesures de modules d'élasticité révèlent des comportements différents qu'il est possible de corrélérer en termes de *tendances* avec la morphologie microstructurale des matériaux testés. Toutefois, des incohérences notoires entre ces résultats et les bornes classiques rendent ces comparaisons sujettes à caution.
  - La morphologie n'a quasiment pas d'effet sur le comportement macroscopique élasto-plastique sous traction simple. Ce résultat est vérifié expérimentalement et peut s'établir de manière théorique dans un cadre relativement général ; c'est une conséquence de la similitude des pentes d'érouissage des matériaux constitutifs. Les prévisions quantitatives des modèles semblent cohérentes avec les mesures.
  - L'hétérogénéité de déformation, exprimée en termes de déformations moyennes par phase, est sensible à la morphologie d'après les modèles et ce fait est vérifié expérimentalement. On observe en effet une certaine cohérence entre les résultats expérimentaux, les prévisions qualitatives des modèles et l'analyse morphologique des microstructures, pour neuf matériaux parmi les onze testés. Les prévisions quantitatives ne sont en revanche satisfaisantes que pour les taux de déformation faibles, de l'ordre de 5% ; au delà, les hétérogénéités sont sous-estimées.
  - Les mesures de fonctions de distribution de déformations équivalentes locales révèlent des hétérogénéités intra-phase bien plus importantes que celles prévues par le modèle 3Ph, d'après son interprétation en termes de motifs morphologiques représentatifs, sauf pour la phase matrice, aux faibles taux de déformation macroscopique et pour une concentration élevée en inclusions. Dans les autres cas, un ordre de grandeur sépare les largeurs de distribution mesurée et théorique. On n'observe par ailleurs pas de différences notables entre les largeurs des distributions intra-phases pour différentes morphologies. L'effet des paramètres microstructuraux semble se cantonner à la déformation moyenne, en tous cas pour les matériaux testés dans cette étude.
  - L'expérience semble révéler une évolution presque proportionnelle des champs locaux avec le niveau de chargement, alors que les modèles montrent une saturation de l'hétérogénéité au delà d'environ 5% de déformation macroscopique.
-

## 3.2 Généralisations du modèle des trois phases

Les écarts importants révélés par la confrontation entre expérience et modèle 3Ph en termes de prévisions d'hétérogénéités de déformations locales, pour des matériaux dont la morphologie est pourtant clairement de type MI, suggèrent que la description de la microstructure proposée par ce modèle est trop sommaire et induit un processus de moyenne sur les champs locaux trop schématique, qui conduit à ignorer certaines interactions locales à l'origine des fluctuations observées expérimentalement. Ce diagnostic nous a conduit à chercher à enrichir le contenu morphologique de ce modèle.

L'analyse en termes de motifs morphologiques représentatifs et la solution analytique de l'inclusion composite multicouche en milieu infini conduit naturellement au modèle à «  $m$  motifs de type  $n$  phases » (mnPh par la suite), que nous décrivons ci-après. Il permet d'aborder des microstructures plus variées et peut être étendu aux comportements non linéaires par l'extension classique ou modifiée, dont il compense de surcroît partiellement certaines limitations.

Sa mise en œuvre ne permet toutefois pas d'expliquer les écarts entre modèles et expérience en termes d'hétérogénéités intra-phase, mais il s'avère pertinent pour décrire certains matériaux composites à particules présentant des gradients locaux de propriétés.

### 3.2.A Le modèle à plusieurs motifs n-phases

#### 3.2.A.a Formulation en élasticité linéaire

Le modèle mnPh repose sur une description du VER d'un milieu hétérogène par plusieurs motifs morphologiques constitués d'une sphère composite formée de couches concentriques homogènes, de comportement mécanique élastique linéaire et isotrope. L'approche développée par Stolz et Zaoui [152] permet de construire des bornes exactes pour le comportement linéaire effectif d'un tel matériau sous l'hypothèse de distribution isotrope des centres des motifs les uns par rapport aux autres. On les calcule en résolvant autant de problèmes d'inclusion sphérique multicouche en milieu infini (figure 3.60) que de motifs invoqués, le milieu infini ayant les modules d'élasticité  $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{C}_r^+$  ou  $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{C}_r^-$  (cf. paragraphes 1.2.B.a et 1.2.B.b), suivant que l'on détermine la borne supérieure  $\mathbf{C}_{mnPh}^{HS+}$  ou inférieure  $\mathbf{C}_{mnPh}^{HS-}$ . On peut construire une estimation autocohérente à partir de cette même description morphologique, par une démarche parfaitement parallèle à celle qui permet d'interpréter le modèle 3Ph comme le traitement autocohérent de l'assemblage des sphères composites de Hashin (cf. paragraphe 1.2.C.c) : il s'agit alors de résoudre ces mêmes problèmes d'inclusions multicouches, le milieu infini ayant les propriétés élastiques effectives du composite. Ces dernières, notées  $\mathbf{C}_{mnPh}^{AC}$ , sont solutions d'une équation implicite.

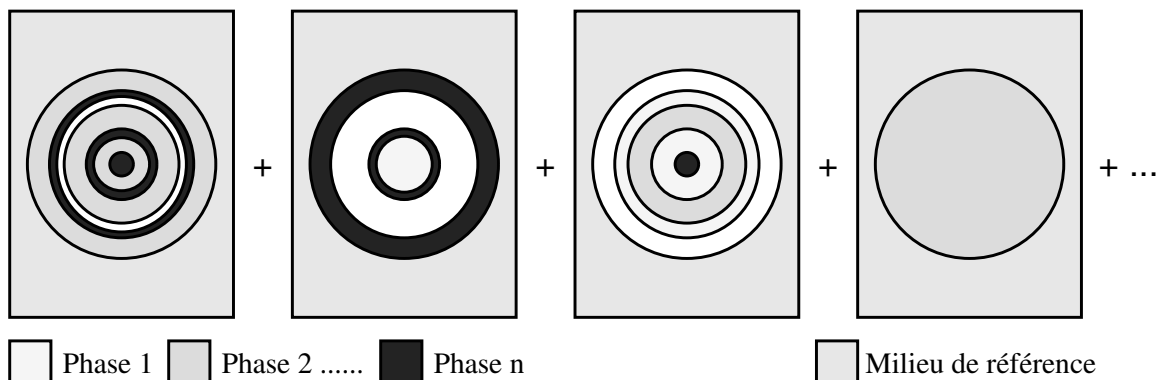


Figure 3.60 : Modèle ou encadrement utilisant  $m$  motifs de type  $n$  phases

Plus précisément, considérons une microstructure décrite par  $M$  motifs sphériques  $m$ ,  $m \in [1, M]$ , ayant chacun  $N_m$  couches concentriques  $n$ ,  $n \in [1, N_m]$ . Les couches sont numérotées en commençant par le noyau central, d'indice 1. Elles sont constituées de phases isotropes, référencées par un indice  $p$ ,  $p \in [1, P]$ , et caractérisées par des modules de cisaillement  $\mu_p$  et de compressibilité  $k_p$ . Le matériau de

la couche  $n$  du motif  $m$  est noté  $p_{mn}$  et rien n'interdit que deux couches distinctes soient constituées du même matériau. On désigne aussi par  $\mu_{mn}$  et  $k_{mn}$  les modules d'élasticité de cette couche, si bien que l'on a :  $\mu_{mn} = \mu_{p_{mn}}$  et  $k_{mn} = k_{p_{mn}}$ . Cette double écriture peut ici sembler superflue, mais elle présentera un intérêt pour l'extension non-linéaire du modèle. Les notations suivantes sont utilisées pour désigner les diverses concentrations considérées :

$C_m$	est la concentration du motif $m$ dans le matériau composite,
$c_{mn}^m$	est celle de la couche $n$ du motif $m$ dans ce même motif,
$c_{mn}$	est celle de cette même couche dans le matériau composite,
$\gamma_p$	est celle de la phase $p$ dans le matériau composite.

$R_{mn}$  désignant par ailleurs le rayon externe de la couche  $n$  du motif  $m$ , avec la convention  $R_{m0} = 0$ , les relations suivantes sont satisfaites :

$$c_{mn}^m = \frac{R_{mn}^3 - R_{m[n-1]}^3}{R_{mN_m}^3} \quad (3.8)$$

$$c_{mn} = C_m \cdot c_{mn}^m \quad (3.9)$$

$$\gamma_p = \sum_{m,n / p_{mn}=p} c_{mn} \quad (3.10)$$

Nous notons par ailleurs  $\langle \cdot \rangle_{mn}$ ,  $\langle \cdot \rangle_m$ ,  $\langle \cdot \rangle_p^\gamma$  et  $\langle \cdot \rangle$  les opérations de moyenne sur une couche, un motif, une phase et le matériau composite entier, liées par les relations suivantes :

$$\langle \cdot \rangle_m = \sum_{n=1}^{N_m} c_{mn}^m \langle \cdot \rangle_{mn} \quad (3.11)$$

$$\langle \cdot \rangle_p^\gamma = \frac{1}{\gamma_p} \sum_{n,m / p_{mn}=p} c_{mn} \langle \cdot \rangle_{mn} \quad (3.12)$$

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{m=1}^M C_m \langle \cdot \rangle_m = \sum_{m,n} c_{mn} \langle \cdot \rangle_{mn} = \sum_{p=1}^P \gamma_p \langle \cdot \rangle_p^\gamma \quad (3.13)$$

L'approche variationnelle de Stolz et Zaoui conduit à considérer les champs de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  qui se développent dans ces motifs lorsqu'ils sont noyés dans un milieu infini  $\mathbf{C}^\infty = \{2\mu_\infty, 3k_\infty\}$  et soumis à un même champ homogène à l'infini, d'intensité  $\underline{\underline{E}}^\infty = \mathbf{C}^\infty : \underline{\underline{E}}^\infty$ . Les bornes s'obtiennent en déterminant le tenseur  $\mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}^\infty)$  tel que :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}^\infty) : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad \forall \underline{\underline{E}}^\infty \quad (3.14)$$

Les bornes de type Hashin-Shtrikman qui s'appliquent à une distribution isotrope des centres de motifs sont données par :

$$\mathbf{C}_{mnPh}^{HS+} = \mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}^{(0)}) = \mathcal{F}_{mnPh}(\{2\text{Sup}_p \mu_p, 3\text{Sup}_p k_p\}) \quad (3.15)$$

$$\text{et } \mathbf{C}_{mnPh}^{HS-} = \mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}_{(0)}) = \mathcal{F}_{mnPh}(\{2\text{Inf}_p \mu_p, 3\text{Inf}_p k_p\}) \quad (3.16)$$

Les bornes de type Voigt et Reuss sont calculées en appliquant les conditions aux limites en contrainte ou en déformation directement aux bords des motifs, ou, de manière équivalente, en utilisant un milieu de référence très raide  $\mathbf{C}^{(-1)}$  ou très souple  $\mathbf{C}_{(-1)}$  par rapport aux phases constitutives :

$$\mathbf{C}_{mnPh}^V = \mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}^{(-1)}) \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{mnPh}^R = \mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}_{(-1)}) \quad (3.17)$$

Si  $p_m$  désigne une phase identifiée comme la « matrice », il est aussi possible de construire une estimation de type Mori et Tanaka selon :

$$\mathbf{C}_{mnPh}^{MT} = \mathcal{F}_{mnPh}(\{2\mu_{p_m}, 3k_{p_m}\}) \quad (3.18)$$

Enfin, l'estimation autocohérente est solution de l'équation implicite

$$\mathbf{C}_{mnPh}^{AC} = \mathcal{F}_{mnPh} \left( \mathbf{C}_{mnPh}^{AC} \right). \quad (3.19)$$

Le calcul analytique de la fonction  $\mathcal{F}_{mnPh}$  est possible et utilise la solution du problème de l'inclusion multicouche en milieu infini [76]. On peut tout d'abord remarquer que du fait de la symétrie sphérique du problème, les parties déviatoriques des champs moyens au sein des couches sont proportionnelles à la partie déviatorique du chargement à l'infini, ce qui s'écrit :

$$\langle \epsilon \rangle_{mn} = \{a_{mn}, b_{mn}\} : \underline{\underline{E}}^\infty, \quad (3.20)$$

où  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  sont deux scalaires de la forme :

$$a_{mn} = a_{mn}(\{c_{mn}^m, k_{mn}, \mu_{mn}, n \in [1, N_m]\}, \mu_\infty, k_\infty) \quad (3.21)$$

$$b_{mn} = b_{mn}(\{c_{mn}^m, k_{mn}, \mu_{mn}, n \in [1, N_m]\}, \mu_\infty, k_\infty). \quad (3.22)$$

La forme explicite de ces expressions est particulièrement lourde<sup>15</sup>. La référence [76] en propose une expression algébrique qu'il est difficile de développer mais relativement facile à programmer (*cf.* annexe **E**). Le calcul de  $\mathcal{F}_{mnPh}$  en découle :

$$\mathcal{F}_{mnPh}(\mathbf{C}^\infty) = \{2\mu^0, 3k^0\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum_{m,n} c_{mn} \mu_{mn} a_{mn} = \mu^0 \sum_{m,n} c_{mn} a_{mn} \\ \sum_{m,n} c_{mn} k_{mn} b_{mn} = k^0 \sum_{m,n} c_{mn} b_{mn} \end{cases} \quad (3.23)$$

où les sommes portent sur toutes les couches  $n$  de tous les motifs  $m$ . En regroupant tous les termes relatifs à la même phase  $p$ , on peut définir des coefficients  $a_p$  et  $b_p$  selon :

$$a_p = \frac{1}{\gamma_p} \sum_{m,n / p_{mn}=p} c_{mn} a_{mn} \quad \text{et} \quad b_p = \frac{1}{\gamma_p} \sum_{m,n / p_{mn}=p} c_{mn} b_{mn}. \quad (3.24)$$

En notant par ailleurs  $\gamma_0 = -1$ ,  $a_0 = \sum_p \gamma_p a_p$  et  $b_0 = \sum_p \gamma_p b_p$ , on obtient l'expression suivante, qui accorde formellement une signification identique aux phases constitutives et au milieu effectif (ou au milieu dont les modules bornent ceux du milieu effectif), référencé par l'indice 0 :

$$\sum_{p=0}^P \gamma_p \{\mu_p a_p, k_p b_p\} = 0. \quad (3.25)$$

Les modules  $\mu^0$  et  $k^0$  sont des bornes rigoureuses ou une estimation de type Mori et Tanaka pour les modules effectifs  $\bar{\mu}$  et  $\bar{k}$  lorsque les modules  $\mu^\infty$  et  $k^\infty$  sont choisis conformément aux indications données plus haut. L'estimation autocohérente est définie par :

$$k_\infty = k_0 \quad \text{et} \quad \mu_\infty = \mu_0. \quad (3.26)$$

Elle peut être construite par une démarche itérative inspirée de la théorie du désordre gradué et qui s'apparente à l'algorithme du point fixe. Il s'agit de construire la suite  $(\mu^{(2n)}, k^{(2n)})$  par :

$$\{2\mu^{(n+2)}, 3k^{(n+2)}\} = \mathcal{F}_{mnPh} \left( \{2\mu^{(n)}, 3k^{(n)}\} \right) \quad (3.27)$$

en partant du terme initial  $\{2\mu^{(0)}, 3k^{(0)}\}$ . On observe en pratique une convergence rapide de cette suite vers l'estimation  $\mathbf{C}_{mnPh}^{AC} = \{2\mu_{mnPh}^{AC}, 3k_{mnPh}^{AC}\}$ . Tout autre choix du premier terme conduit en pratique à la même limite, bien que cette propriété ne soit pas établie théoriquement.

La relation (3.25) suggère une utilisation « inverse » du modèle (ou plus précisément des modèles) **mnPh**, conduisant à une estimation du comportement d'une des phases constitutives à partir de la connaissance des modules effectifs, des modules de tous les autres constituants et le cas échéant, des

<sup>15</sup>Notons qu'en toute rigueur  $b_{mn}$  ne dépend pas du module de cisaillement  $\mu_{m1}$  du noyau interne.



modules du milieu de référence. Soit  $p_i \in [0, P]$  l'indice de ce matériau inconnu. L'idée la plus simple pour estimer ses modules consiste à appliquer un algorithme itératif inspiré de celui décrit plus haut, en partant d'une estimation *a priori* et en appliquant à chaque itération la relation :

$$\left\{ \mu_{p_i}^{(n+2)}, k_{p_i}^{(n+2)} \right\} = \frac{1}{\gamma_{p_i}} \left\{ \frac{1}{a_{p_i}}, \frac{1}{b_{p_i}} \right\} : \sum_{p \in [0, P], p \neq p_i} \gamma_p \{ \mu_p a_p, k_p b_p \}, \quad (3.28)$$

les coefficients  $a_p$  et  $b_p$  étant calculés en utilisant l'estimation  $\left\{ \mu_{p_i}^{(n)}, k_{p_i}^{(n)} \right\}$  pour le matériau  $p_i$ . Lorsque la condition d'autocohérence est utilisée, le milieu infini a les propriétés du milieu effectif ; sinon, ses propriétés sont déduites de celles des autres phases (bornes de type Hashin-Shtrikman), sont figées (cas des bornes de type Voigt et Reuss) ou égales à celle de la « matrice » (modèle de type Mori et Tanaka). Cet algorithme s'avère toutefois instable dans certains cas d'utilisation inverse ( $p \neq 0$ ). Pour résoudre malgré tout le système (3.25), il faut recourir à des techniques plus élaborées visant à minimiser l'écart entre  $\left\{ \mu_{p_i}^{(n+2)}, k_{p_i}^{(n+2)} \right\}$  et  $\left\{ \mu_{p_i}^{(n)}, k_{p_i}^{(n)} \right\}$ . L'algorithme d'optimisation que nous avons utilisé est décrit plus loin ; il s'agit d'une adaptation de la méthode du point fixe combinée à l'estimation d'une dérivée selon une certaine direction. Il conduit à une solution dans tous les cas que nous avons traités et qui en admettent effectivement une. Notons bien qu'il y a des situations où le problème inverse n'en admet pas : ce sont celles où les modules effectifs n'appartiennent pas au domaine balayé par le modèle considéré lorsque les modules de la phase inconnue prennent toutes les valeurs possibles dans l'espace des réels positifs.

La condition d'autocohérence (3.26) consiste à retenir comme estimation des modules effectifs les modules du milieu de référence qui annule la polarisation moyenne sur tous les motifs noyés en milieu infini. Nous montrerons en seconde partie que, du fait de la forme sphérique de tous les motifs, elle est équivalente à la condition d'égalité entre la déformation moyenne sur tous les motifs et la déformation à l'infini, qui s'écrit, en termes de coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  :

$$\sum_{m,n} c_{mn} a_{mn} = \sum_{p=1}^P \gamma_p a_p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{m,n} c_{mn} b_{mn} = \sum_{p=1}^P \gamma_p b_p = 1. \quad (3.29)$$

Elle est aussi équivalente à la condition d'égalité entre la contrainte moyenne sur tous les motifs et la contrainte à l'infini :

$$\sum_{m,n} c_{mn} \mu_{mn} a_{mn} = \sum_{p=1}^P \gamma_p \mu_p a_p = \mu_{mn}^{\text{ACPh}} \quad \text{et} \quad \sum_{m,n} c_{mn} k_{mn} b_{mn} = \sum_{p=1}^P \gamma_p k_p b_p = k_{mn}^{\text{Ph}}. \quad (3.30)$$

Dans ces relations, les coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  sont construits en utilisant  $C_{mn}^{\text{Ph}}$  comme modules du milieu infini. Ces définitions généralisent au cas de sphères multicouches à phases isotropes celles introduites au paragraphe **1.2.B.d** pour des inclusions homogènes.

Notons qu'un motif est défini par le rayon externe et le matériau constitutif de chacune de ses couches. Toutefois, compte-tenu de l'absence de toute dimension caractéristique dans les problèmes d'inclusions multicouches en milieu infini, les coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  sont les mêmes pour deux sphères multicouches déduites par homothétie l'une de l'autre. Dans le cas où tous les motifs sont homothétiques, cas abordé dans la référence [76], les bornes sur le module de compressibilité se confondent, quel que soit le milieu de référence utilisé. Ce résultat généralise celui de Hashin et s'explique par la proportionnalité des champs locaux dans les motifs sous chargement sphérique pour tous les milieux de référence. Par ailleurs, l'estimation autocohérente du module de cisaillement, dit « modèle  $n+1$ -phases », est la solution positive d'une équation du second degré, qui généralise celle de Christensen et Lo [43], valable pour un motif à deux couches. Ces propriétés ne s'appliquent plus pour des motifs non homothétiques : il y a toujours proportionnalité des champs locaux sous chargement sphérique mais le coefficient de proportionnalité évolue différemment pour deux motifs non homothétiques lorsque le milieu de référence change. Les modules autocohérents sont toujours les racines d'un système d'équations polynômiales, mais de degré élevé qui empêche toute résolution analytique directe, non itérative. Dans le cas le plus simple de deux motifs homogènes<sup>16</sup>, le système est par exemple déjà de degré 4.

<sup>16</sup> c'est-à-dire celui du modèle autocohérent classique à deux phases isotropes

Cette formulation générale admet comme cas particuliers de nombreuses bornes ou estimations mentionnées au chapitre 1.2. En optant pour des motifs homogènes, on obtient par exemple, suivant la définition retenue pour le milieu infini, les bornes de Voigt et Reuss, les bornes de Hashin et Shtrikman, l'estimation de Mori et Tanaka ou encore l'estimation autocohérente classiques relatives à un matériau multiphasé avec des phases linéaires et isotropes. Avec un motif unique à deux couches, on obtient de la même manière, les bornes de Hashin, les bornes HSZ ou encore l'estimation 3Ph pour l'assemblage des sphères composites de Hashin. Avec un motif unique à  $n$  couches, l'approche autocohérente conduit au modèle des  $n + 1$ -phases, déjà cité plus haut, et également proposé par Kanaun. Avec ce même motif, mais en utilisant le matériau de la couche externe comme milieu de référence, on obtient l'estimation en « champs effectifs » proposée par ce même auteur, qui généralise le modèle de Mori et Tanaka à des matériaux à inclusions multicouches (voir page 56). On l'obtient de manière équivalente avec deux motifs, l'un formé des  $n - 1$  couches internes et l'autre, homogène, constitué du matériau de la  $n^{\text{ème}}$  phase, et en utilisant aussi cette phase comme milieu infini. L'équivalence résulte du fait que la déformation moyenne sur tout sous-domaine du milieu infini, délimité par deux sphères centrées à l'origine est égale à la déformation imposée à l'infini. Cette propriété, qui sera démontrée ultérieurement dans un cas plus général, est aussi à l'origine de l'identité entre une borne HSZ et une borne HS, dans la situation où la matrice est la phase la plus raide ou la plus souple. Pour tous ces modèles, indépendamment de l'application ou non de la condition d'autocohérence, les propriétés effectives sont celles qui lient la contrainte moyenne  $\langle \underline{\sigma} \rangle$  sur tous les motifs à la déformation moyenne  $\langle \underline{\epsilon} \rangle$ , pour tous les chargements appliqués à l'infini.

### 3.2.A.b Extensions aux comportements non-linéaires

**Deux formulations** Le modèle mnPh et, plus précisément, toutes les bornes ou estimations élastiques linéaires dérivées de la formulation générale décrite plus haut, peuvent être étendus aux comportements non-linéaires selon les principes décrits au paragraphe 1.3.B.c. L'approche classique tout comme l'approche modifiée peuvent être mises en œuvre. L'application directe de ces théories conduit à faire appel à un module de cisaillement sécant pour chaque *phase*  $p$ , associé, selon sa loi de comportement non-linéaire, à un paramètre  $P_p$  caractérisant son état d'écrouissage moyen :

$$\mu_p = \mu_p^{\text{sc}}(P_p). \quad (3.31)$$

La définition de  $P_i$  varie selon l'extension retenue. Dans l'extension classique, il peut être calculé analytiquement à partir des coefficients  $a_p$ . Une dérivation est indispensable pour l'extension modifiée et il est préférable de l'entreprendre numériquement, compte-tenu de la complexité des relations gouvernant le modèle linéaire.

Nous avons opté pour une approche légèrement différente, qui consiste à utiliser un module de cisaillement sécant pour chaque *couche*  $n$  de chaque motif  $m$ , associé à un paramètre  $P_{mn}$  caractérisant l'état d'écrouissage moyen de cette couche, selon la loi de comportement du matériau constitutif :

$$\mu_{mn} = \mu_{p_{mn}}^{\text{sc}}(P_{mn}). \quad (3.32)$$

Contrairement à la formulation précédente, le comportement élastique sécant de deux couches constituées du même matériau peut être différent, du fait d'un état de sollicitation moyen différent. La notion de « phase » est ainsi modifiée : il s'agit non seulement d'un ensemble de propriétés mécaniques caractérisant un comportement sous une sollicitation homogène, mais aussi une position relative particulière dans un motif, ou plus généralement dans un VER, conditionnant une évolution particulière des variables internes sous une certaine sollicitation macroscopique. Le double jeu d'indices, superflu en élasticité linéaire, trouve ici son intérêt :  $p$  désigne la « phase mécanique » au sens classique alors que  $mn$  fait référence à cette notion plus complète.

Cette seconde approche fait appel à un plus grand nombre de variables internes, ce qui la rend plus riche que la première et donc plus apte à rendre compte d'hétérogénéités locales. Il y a bien sûr équivalence lorsque toutes les couches sont constituées de phases différentes.

« **Calcul d'état** » selon l'extension classique Dans l'hypothèse où le comportement non-linéaire de toutes les couches et du milieu infini est connu, le « calcul d'état » consiste à déterminer les paramètres  $P_{mn}$  et  $P_\infty$ , associés à une certaine sollicitation imposée. Dans le cadre de l'extension classique,  $P_{mn}$  est l'équivalent de la déformation moyenne sur la couche  $(m, n)$  et  $P_\infty$  celui de la déformation à l'infini. La proportionnalité des parties déviatoriques de ces déformations induit les relations suivantes sur les paramètres d'érouissage :

$$\forall(m, n) \quad P_{mn} = a_{mn}P_\infty, \quad (3.33)$$

valables quelle que soit la nature du chargement considéré : traction simple, cisaillement pur ou autre. Dans ces conditions, appliquer un chargement consiste à imposer une certaine valeur à l'un de ces paramètres d'érouissage, ou éventuellement à leur moyenne, qui détermine l'état d'érouissage macroscopique :

$$P_0 = \sum_{m,n} c_{mn}P_{mn} = a_0P_\infty. \quad (3.34)$$

Le paramètre dont on impose la valeur est le paramètre de « contrôle » ou de « pilotage » du chargement.

Résoudre le problème d'état consiste donc à satisfaire aux trois séries de relations suivantes :

- Les lois de comportement non-linéaires des phases constitutives et du milieu infini, qui fournissent les modules sécants de chaque couche et de ce dernier en fonction des paramètres d'érouissage respectifs.
- Les relations du modèle linéaire qui permettent de calculer les coefficients  $a_{mn}$  et  $a_0$  en fonction des modules d'élasticité et des paramètres géométriques (rayons et concentrations).
- Les relations de proportionnalité ci-dessus, déterminant les paramètres  $P_{mn}$  et  $P_\infty$  en fonction du paramètre de contrôle.

Le système d'équations obtenu est non-linéaire. Il peut être résolu par la méthode itérative du point fixe dans certains cas, mais celle-ci s'avère instable dans d'autres situations. L'algorithme utilisé pour la résolution inverse du problème linéaire, décrit ci-après, a également été appliqué pour ce problème.

Lorsque le système est résolu, on peut s'intéresser aux champs locaux au sein des motifs. Adoptant les hypothèses discutées au paragraphe **1.3.B.d**, on les assimile aux champs du problème linéaire calculés avec les modules sécants associés aux paramètres d'érouissage obtenus. Contrairement aux valeurs déviatoriques moyennes, les champs locaux dépendent de la forme du chargement. Les expressions analytiques du déplacement local pour un cisaillement pur et un chargement sphérique sont connues [76] ; leur combinaison linéaire permet de s'intéresser à d'autres sollicitations telles la traction simple. Les champs de déformation et de contrainte s'en déduisent par dérivation<sup>17</sup>. Des fonctions de distribution des déformations peuvent par exemple être déterminées de la sorte.

Lorsqu'on s'intéresse à un modèle linéaire ne faisant pas appel à la condition d'autocohérence, tel le modèle de Mori et Tanaka ou ses extensions, une telle solution permet de construire un point de la courbe  $(\sigma^{eq}, \epsilon^{eq})$  du MHE. La déformation équivalente est simplement donnée par le paramètre  $P_0$ . La contrainte est l'équivalent de Mises de la contrainte moyenne sur tous les motifs ; elle est aussi égale à  $3\mu_0P_0$ , où  $\mu_0$  est le module de cisaillement sécant macroscopique donné par le modèle linéaire en fonction des modules des phases. La courbe complète peut être déterminée point par point en effectuant plusieurs calculs d'état. Ces derniers sont, en toute rigueur, indépendants les uns des autres, mais il est bon de procéder par petits pas croissants et d'initialiser le processus itératif de recherche des paramètres d'érouissage d'une étape par la solution de la précédente.

Lorsque l'on s'intéresse au modèle autocohérent, le comportement du milieu infini n'est pas connu, ce qui empêche le calcul direct de son module de cisaillement sécant, qui doit en revanche satisfaire à la condition d'autocohérence avec les modules sécants des couches. La procédure que nous avons mise en œuvre pour le déterminer est itérative. Elle consiste à attribuer au milieu infini un comportement linéaire avec des modules arbitraires, à résoudre comme précédemment le problème d'état ainsi défini, pour le chargement considéré. La relation (3.25) appliquée aux modules sécants obtenus fournit ensuite une nouvelle estimation des modules sécants effectifs et donc du milieu infini. L'algorithme décrit plus

<sup>17</sup>Le calcul analytique explicite de ces champs est également du à E. Hervé.

loin a été mis en œuvre pour assurer la convergence du processus. Une double itération est donc invoquée pour étendre ces modèles autocohérents aux comportements non-linéaires. Précisons que le calcul d'état est légèrement facilité en cas d'autocohérence, car  $P_\infty$  et  $P_0$  se confondent. Une fois la solution trouvée, le module  $\mu_0^{\text{sc}}$  obtenu pour le milieu infini fournit le point  $(3\mu_0^{\text{sc}}P_0, P_0)$  de la courbe d'écroissage du MHE. Il est ensuite possible, comme précédemment, de calculer des champs locaux et de construire la courbe d'écroissage complète.

Cette procédure s'applique tout aussi bien en cas d'utilisation inverse d'un modèle, indépendamment du recours ou non à la condition d'autocohérence. L'itération porte alors sur les modules sécants de la couche contenant la phase  $p_i$  dont on détermine le comportement. Toutefois, contrairement au cas linéaire, ce matériau ne doit apparaître que dans une seule couche, à moins que l'on ne fasse appel à un module sécant unique pour toutes les couches, associé au paramètre  $P_{p_i} = a_{p_i}P_\infty$ .

Rappelons enfin que, du fait de la dépendance vis-à-vis des modules de cisaillement des champs induits par une sollicitation macroscopique sphérique dans le problème linéaire, le module de compressibilité de la phase inconnue dépend de la partie déviatorique du chargement : la propriété d'incompressibilité n'est plus satisfaite. Toutefois, dans tous les cas que nous avons considérés, cette dépendance est très ténue et nous l'avons négligée. La phase dont on détermine le comportement est donc aussi décrite par une loi de la forme (1.5), le module de compressibilité étant celui calculé avec les modules d'élasticité initiaux des autres phases. Cette hypothèse n'est plus satisfaisante lorsque le noyau central des motifs est beaucoup plus souple que les autres phases, comme par exemple pour la description de milieu poreux. Nous n'avons toutefois pas envisagé cette situation au cours de notre travail. Cette dernière remarque vaut aussi pour les autres extensions non-linéaires décrites ci-après.

**Variantes de l'extension classique** Parmi les défauts de l'extension classique, déjà évoqués au paragraphe 1.3.B.c, le plus important est l'ignorance des hétérogénéités locales pour la caractérisation de l'état d'écroissage moyen d'une couche. Nous avons donc fait appel à une autre définition pour les paramètres  $P_{mn}$ , inspirée de celles proposées dans la référence [164]. Il s'agit d'utiliser le moment d'ordre un de la déformation équivalente sur la couche :

$$P_{mn} = \langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{mn}. \quad (3.35)$$

Les paramètres relatifs au milieu infini ou au milieu effectif sont en revanche inchangés. Avec l'interprétation des champs locaux dans les motifs en termes de moyennes par points homologues,  $P_{mn}$  donne une estimation du moment d'ordre un de la déformation équivalente locale dans un VER, sans pour autant s'y identifier du fait du processus de moyenne qui relie les champs locaux dans ce dernier aux champs locaux dans les problèmes d'inclusions.

Les procédures développées dans le cadre de l'extension classique s'appliquent aussi avec cette nouvelle définition, mais trois nouvelles difficultés apparaissent :

- La première est que  $\epsilon^{\text{eq}}(\underline{x})$  dépend de la nature du chargement appliqué à l'infini. Le comportement effectif, ou plus généralement celui d'une phase inconnue, ne peut plus en toute rigueur être décrit par une loi de la forme (1.5). Nous avons contourné cette difficulté en nous limitant à la réponse à une traction simple.
- La seconde est l'absence de relation analytique permettant de calculer  $\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{mn}$  à partir de la solution du problème de l'inclusion multicouche en milieu infini. Une intégration numérique sur chaque couche  $n$  de chaque motif  $m$  du champ  $\epsilon^{\text{eq}}(\underline{x})$ , dont on connaît l'expression analytique en fonction de l'intensité de la traction simple appliquée à l'infini, s'avère indispensable. La symétrie axiale de ces champs permet de se limiter à un quart de section diamétrale des motifs et de réduire le nombre de points d'intégration. Quelques centaines de points sont toutefois nécessaires pour estimer correctement l'intégrale et la durée du calcul est augmentée d'autant<sup>18</sup>.
- La troisième difficulté est l'impossibilité de calculer le paramètre d'écroissage macroscopique ou celui du milieu infini à partir de celui d'une couche. Le calcul d'état doit de ce fait absolument être

---

<sup>18</sup>Usuellement, on décompose une couche fine en trois sous-couches et en une centaine de secteurs angulaires, ce qui fait 300 points d'intégration. Un calcul qui dure quelques secondes avec l'extension classique prend alors quelques dizaines de minutes avec cette nouvelle définition du paramètre d'écroissage.

piloté par la déformation appliquée à l'infini ou par la déformation macroscopique. Cette limitation n'est toutefois pas très gênante en pratique ; elle ne supprime pas la possibilité d'utiliser les modèles de manière inverse.

Cette variante de l'extension classique ne modifie pas les résultats obtenus avec des motifs homogènes, puisque la déformation y est uniforme. Elle améliore en revanche la prise en compte de la plasticité dans les motifs hétérogènes et en particulier dans celui du modèle 3Ph.

Elle peut aussi être appliquée à d'autres problèmes de plasticité, dont celui de la sphère creuse élasto-plastique homogène soumise à une pression interne et une pression externe. Ce problème de structure ne s'inscrit pas dans le cadre des théories d'homogénéisation des milieux hétérogènes non-linéaires, mais ressemble beaucoup aux problèmes d'inclusions en milieu infini que ces dernières invoquent. Il présente de surcroît l'avantage considérable d'admettre une solution analytique exacte que l'on peut comparer à diverses solutions approchées faisant appel à des modules sécants. De telles comparaisons, portant autant sur la réponse globale que sur la déformation moyenne et l'hétérogénéité locale, sont présentées en détails en annexe **A**. Il est assez facile de voir que cette première variante de l'extension classique améliore déjà considérablement la solution approchée obtenue avec sa formulation initiale, qui ignore complètement la plasticité, du fait de la nullité de la partie déviatorique de la déformation moyenne.

D'autres définitions pour les paramètres  $P_{mn}$  sont envisageables. On peut par exemple préférer le moment d'ordre deux sur la couche :

$$P_{mn} = \sqrt{\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_{mn}}. \quad (3.36)$$

Cette définition ressemble à celle utilisée par l'extension modifiée, mais elle s'en distingue pour la raison déjà invoquée plus haut : les moments relatifs à une couche ne sont pas des moments relatifs au VER à cause du processus de moyenne par points homologues<sup>19</sup>. Elle s'y identifie en revanche dans le cadre du problème de la sphère creuse, dans lequel ce processus de moyenne n'a pas cours, et dont la résolution approchée avec cette formulation est également détaillée en annexe **A**.

On peut aussi choisir de définir le module sécant  $\mu_{mn}$  d'une couche par l'une des relations suivantes :

$$\left( \left\langle \mu_{P_{mn}}^{\text{sc}} (\epsilon^{\text{eq}}(\cdot)) \underline{\underline{\epsilon}}(\cdot) \right\rangle_{mn} \right)^{\text{eq}} = \mu_{mn} \left( \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}(\cdot) \right\rangle_{mn} \right)^{\text{eq}} \quad (3.37)$$

$$\text{ou} \quad \left( \left\langle \frac{1}{\mu_{P_{mn}}^{\text{sc}} (\sigma^{\text{eq}}(\cdot))} \underline{\underline{\sigma}}(\cdot) \right\rangle_{mn} \right)^{\text{eq}} = \frac{1}{\mu_{mn}} \left( \left\langle \underline{\underline{\sigma}}(\cdot) \right\rangle_{mn} \right)^{\text{eq}}, \quad (3.38)$$

dans lesquelles  $\mu_{mn}$  apparaît comme un « module effectif » relatif à la couche considérée et à son comportement local non-linéaire, calculé pour un champ local de déformation ou de contrainte particulier. L'application de ces définitions aux modèles mnPh ne pose pas de difficultés théoriques particulières autres que celles évoquées plus haut. En pratique, nous nous sommes toutefois limité à l'implantation informatique de la première.

**Extension modifiée** L'extension modifiée peut également être appliquée aux modèles mnPh. Le paramètre  $P_{mn}$  est alors donné par :

$$P_{mn}^2 = \frac{1}{c_{mn}} \frac{\partial \mu_0}{\partial \mu_{mn}} \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle^{\text{eq}2} + \frac{1}{3c_{mn}} \frac{\partial k_0}{\partial \mu_{mn}} \text{tr}(\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle)^2 \quad (3.39)$$

et s'identifie au moment d'ordre deux de la déformation équivalente locale sur la « phase »  $mn$  dans un VER du milieu linéaire de comparaison du composite considéré. Comme déjà mentionné au paragraphe **1.3.B.c**, il ne dépend de la nature du chargement qu'au travers du rapport des deux premiers invariants de la déformation macroscopique. Nous nous intéresserons particulièrement aux chargements macroscopiques de traction simple selon l'axe 1, d'intensité  $E = \langle \epsilon_{11} \rangle$ , pour lesquels la relation devient :

$$P_{mn}^2 = \frac{1}{3c_{mn}} \frac{\partial E_0}{\partial \mu_{mn}} E^2, \quad (3.40)$$

<sup>19</sup>Voir à ce sujet la note au bas de la page 70

où  $E_0 = [(9k_0)^{-1} + (3\mu_0)^{-1}]^{-1}$  est le module de Young macroscopique. Cette relation découle directement de (1.172) puisque, sous un tel chargement,  $\underline{E} : \{2\mu_0, 3k_0\} : \underline{E} = E_0 E^2$ . Le cas d'un glissement simple d'intensité  $\gamma = 2 \langle \epsilon_{12} \rangle$  et celui d'une dilatation pure d'intensité  $\Theta = \text{tr}(\langle \underline{\epsilon} \rangle)$  conduiraient respectivement à :

$$P_{mn}^2 = \frac{1}{3c_{mn}} \frac{\partial \mu_0}{\partial \mu_{mn}} \gamma^2 \quad \text{et} \quad P_{mn}^2 = \frac{1}{3c_{mn}} \frac{\partial k_0}{\partial \mu_{mn}} \Theta^2. \quad (3.41)$$

Du fait de la complexité des relations donnant les modules  $\mu_0$  et  $k_0$  en fonction des modules de cisaillement des phases constitutives, une dérivation numérique semble la manière la plus simple d'accéder aux paramètres  $P_{mn}$ . Nous avons donc utilisé les relations :

$$P_{mn}^2 = \frac{1}{3c_{mn}} \frac{E_0((1 + \eta)\mu_{mn}) - E_0(\mu_{mn})}{\eta\mu_{mn}} E^2, \quad (3.42)$$

où  $\eta$  est un scalaire proche de zéro<sup>20</sup> et où seule la dépendance de  $E_0$  vis-à-vis de  $\mu_{mn}$  est indiquée, tous les autres modules et paramètres étant maintenus constants.

Une utilisation inverse des modèles dans ce cadre est également envisageable mais n'a pas été mise en œuvre en pratique. La démarche adoptée pour calculer la courbe de traction simple du composite à partir du comportement des phases diffère légèrement de celle utilisée dans le cadre de l'extension classique et de ses variantes. Il s'agit également de construire la courbe point par point en contrôlant le calcul par la déformation macroscopique  $E$ . Le « calcul d'état » consiste à trouver les paramètres  $P_{mn}$  associés à ce niveau de chargement. La méthode du point fixe s'avère suffisante dans ce cas. À chaque itération, les opérations suivantes sont entreprises :

- le calcul des modules sécants de toutes les couches en fonction du comportement de chaque phase et des paramètres  $P_{mn}$ .
- l'application du modèle d'homogénéisation linéaire pour déterminer les modules macroscopiques. Pour les modèles utilisant la condition d'autocohérence, le processus itératif du « désordre gradué » est mis en œuvre. Il est stable et converge rapidement. Pour les autres modèles, il s'agit simplement de calculer les coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  et d'appliquer la relation (3.25).
- le calcul des nouveaux paramètres  $P_{mn}$  par les relations (3.42). Pour chacun d'entre eux, il faut effectuer un calcul identique à celui de l'étape précédente. Pour les modèles autocohérents, la convergence est accélérée si l'on retient le résultat de cette dernière comme terme initial du processus itératif.

Après convergence, le point  $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}}) = (E_0 E, E - \frac{E_0}{9k_0} E)$  est ajouté à la courbe d'écrouissage sous traction simple du composite et les champs locaux dans les motifs associés aux modules sécants solutions peuvent être étudiés. Les paramètres  $P_{mn}$  trouvés peuvent être utilisés pour initialiser le processus itératif pour la détermination du point suivant.

Pour un modèle autocohérent, cette procédure de calcul d'état induit une double itération comme avec l'extension classique, mais l'ordre des deux processus itératifs est inversé. Notons que pour obtenir une précision numérique suffisante pour le calcul des dérivées, la précision  $\epsilon$  relative à la satisfaction de la condition d'autocohérence (selon le critère donné plus loin) doit être bien inférieure à l'écart relatif entre  $E_0((1 + \eta)\mu_{mn})$  et  $E_0(\mu_{mn})$ <sup>21</sup>.

Rappelons enfin que l'extension modifiée conduit à une borne supérieure rigoureuse pour le potentiel effectif si le modèle linéaire invoqué en est une. A ce sujet, on peut aussi préciser la différence entre les bornes de Hashin et Shtrikman classiques HS et le modèle de Mori et Tanaka MT. En élasticité linéaire, ce dernier se confond avec l'une des premières lorsque la « matrice » est la phase la plus raide ou la plus molle. Dans le cas non-linéaire, le milieu de référence est figé pour le modèle MT et résulte d'une analyse morphologique : son module sécant est toujours celui de la matrice. Pour les bornes HS, c'est le plus grand ou le plus petit des modules sécants des phases constitutives dont les rôles sont symétriques, et ce module n'est pas nécessairement associé à la même phase au cours du chargement, en particulier lorsque les courbes de traction simple des phases se recoupent.

<sup>20</sup>typiquement  $\eta = 0.001$ , ce choix étant conforté par une étude de sensibilité relative aux matériaux étudiés.

<sup>21</sup>le choix  $\eta = 0.001$  et  $\epsilon = 10^{-7}$  conduit en général à un résultat satisfaisant pour les matériaux considérés

**Discrétisation selon le rayon** Toutes les extensions présentées jusqu'à présent associent un module de cisaillement sécant homogène à la phase  $mn$ . Or, ainsi que nous l'avons précisé au paragraphe 1.3.B.a, ceci est une approximation, puisque, le champ local au sein du VER étant hétérogène, le champ des modules sécants locaux l'est tout autant. Pour améliorer la prise en compte de cette hétérogénéité, il est possible de discrétiser chaque phase en « sous-phases » de même comportement mécanique, mais ayant chacune son propre état de déformation moyen et donc son propre module sécant. La discrétisation la plus simple que l'on peut envisager et qui permet de conserver la nature analytique (ou plus précisément semi-analytique) des calculs est une décomposition des couches en sous-couches concentriques très fines, ce qui améliore la prise en compte de l'hétérogénéité du champ des modules sécants selon le rayon.

Une même description *morphologique* d'une microstructure par des motifs sphériques multicouches conduit ainsi à plusieurs descriptions *numériques*, suivant le nombre de sous-couches utilisées dans chaque couche morphologique. La figure 3.61 présente cette approche dans le cas de l'assemblage des sphères composites de Hashin : l'absence de discrétisation conduit au modèle des trois phases ou aux bornes HSZ alors qu'une décomposition en plusieurs couches du noyau et de l'enveloppe de la sphère composite permet de mieux aborder la plasticité locale, tout en correspondant à la même réalité morphologique. La notion de « phase »  $mn$  est alors encore plus précise : elle fait référence non seulement à des propriétés mécaniques et à une position particulière dans un motif morphologique, mais en plus à la distance par rapport au centre de ce motif.

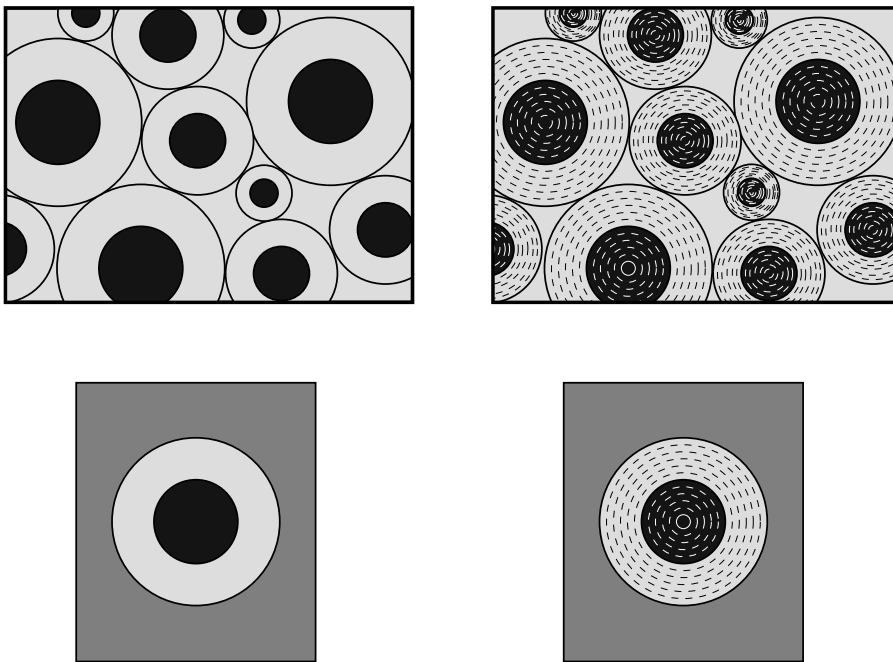


Figure 3.61 : Discretisation en couches de l'assemblage des sphères composites de Hashin

Cette discrétisation est compatible avec toutes les extensions abordées plus haut. Lorsqu'elle est suffisamment fine, elle permet de décrire une évolution quasi-continue des paramètres d'écroutissage en fonction du rayon  $r$ , sous la forme  $P_m(r)$ . Une telle approche conduit d'ailleurs à la solution élasto-plastique exacte dans le cas du problème de la sphère creuse sous pression.

### 3.2.A.c Algorithme de résolution des équations non-linéaires

Les équations non-linéaires auxquelles conduit le modèle mnPh peuvent être écrites sous la forme symbolique :

$$I = F(I), \quad (3.43)$$

où  $I = (I^1, \dots, I^q)$  désigne les inconnues du problème. Dans le cas de la recherche de modules d'élasticité,  $I$  s'identifie au couple  $(k, \mu)$  des modules d'élasticité du matériau inconnu. La fonction  $F$  renvoie au calcul des coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  et à l'application de la relation (3.28). Dans le cadre d'un « calcul d'état »,  $I$  désigne les paramètres d'écroutissage de toutes les couches,  $P_{mn}$ , et éventuellement du milieu infini,  $P_\infty$ . Appliquer  $F$  consiste à déterminer les modules sécants associés à tous ces paramètres, à résoudre le modèle élastique obtenu et à calculer les nouvelles valeurs des paramètres selon la définition retenue en fonction du chargement considéré.

L'algorithme du point fixe consiste à construire la suite  $I_n$  par la relation de récurrence  $I_{n+1} = F(I_n)$  et un choix adéquat du premier terme. L'itération est interrompue lorsque l'écart  $E(I_{n+1}, I_n)$  entre deux termes successifs est jugé suffisamment faible, c'est-à-dire inférieur à une certaine précision  $\epsilon$ . En pratique, nous avons mesuré l'écart par :

$$E(I, J) = \sqrt{\sum_{i=1}^q \left[ \frac{2|I^i - J^i|}{|I^i| + |J^i|} \right]^2}. \quad (3.44)$$

La nature analytique des calculs permet de retenir pour  $\epsilon$  des valeurs de l'ordre de  $10^{-7}$ , voire inférieures.

Cet algorithme classique s'avère suffisant pour l'application directe de la condition d'auto-cohérence élastique et pour l'extension non-linéaire modifiée, pour laquelle nous n'avons pas proposé de formulation inverse. Il est en revanche instable pour l'application inverse des modèles linéaires, ainsi que pour la détermination des paramètres d'écroutissage en cas d'utilisation inverse des modèles. Pour traiter ces cas, l'algorithme plus élaboré suivant a été mis en œuvre. Il consiste à construire à partir d'une estimation  $I_n$  une nouvelle valeur  $I_{n+1}$  située dans la « direction » suggérée par l'algorithme du point fixe, de la forme :

$$I_{n+1} = I_n + \lambda_n [F(I_n) - I_n]. \quad (3.45)$$

Le coefficient  $\lambda_n$  est choisi selon un principe dérivé de l'algorithme de Newton :

$$N(I_n) + \lambda_n \pi_n = 0, \quad (3.46)$$

où  $\pi_n$  caractérise la pente de la fonction  $N(I) = E(I, F(I))^2$  dans la direction  $[F(I_n) - I_n]$  :

$$\pi_n = \frac{dN(I)}{dI}(I_n) \cdot [F(I_n) - I_n]. \quad (3.47)$$

On peut l'estimer numériquement par :

$$\pi_n = \frac{N(I_n + \gamma [F(I_n) - I_n]) - N(I_n)}{\gamma}, \quad (3.48)$$

$\gamma$  étant un scalaire proche de zéro, une valeur de l'ordre de 0,01 donnant usuellement des résultats satisfaisants. Lorsque  $\pi_n = 0$ , on retient  $\lambda_n = 0,5$ . Pour limiter les risques de divergence, on interdit aussi les pas supérieurs à ceux qu'induirait l'algorithme du point fixe, c'est-à-dire que l'on prend  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$  chaque fois que les relations ci-dessus conduiraient à une valeur de  $\lambda$  respectivement supérieure à 1 ou inférieure à  $-1$ . Cet algorithme est par construction moins performant que le précédent, mais il est stable et a conduit à une solution dans tous les cas que nous avons traités.

### 3.2.B Application aux biphasés étudiés

Le modèle mnPh a été mis en œuvre pour tenter d'expliquer les résultats expérimentaux quelques peu surprenants obtenus avec les biphasés fer/argent et fer/cuivre.

#### 3.2.B.a Effets d'une probable porosité sur les modules d'élasticité

Les incohérences entre mesures de modules d'élasticité et bornes rigoureuses sont probablement liées à la présence d'une porosité résiduelle, révélées par la mesure à la balance à bain de mercure de la



densité  $d_{exp}$  de trois des quatre barreaux fer/cuivre qui avaient été utilisés pour déterminer les modules d'élasticité<sup>22</sup>. Le tableau 3.8 compare les valeurs obtenues aux densités théoriques  $d_{th}$  calculées à partir de la fraction volumique de phase mesurée par analyse chimique avec les densités tabulées des phases pures :  $d_{Fe} = 7,86$  et  $d_{Cu} = 8,92$ . Les modules de cisaillement reportés en figures 3.27 et 3.28 ont été calculés à partir de ces densités théoriques et des valeurs mesurées des vitesses de propagation d'ondes ultrasonores dans les biphases, selon :

$$\mu = \rho v_T^2, \quad (3.49)$$

$v$  étant la vitesse des ondes transversales et  $\rho$  la masse volumique. Or on constate que les densités calculées surestiment systématiquement les densités mesurées, ce qui induit également une surestimation des modules de cisaillement lorsqu'on les calcule avec les premières. Des valeurs plus proches de la réalité sont obtenues à partir des densités mesurées ; elles sont aussi reportées dans le tableau 3.8.

Réf.	$c_{Fe}$ %, $\pm 1\%$	$d^{th}$ $\pm 0,01$	$\mu(d^{th})$ GPa	$d^{exp}$ $\pm 0,03$	$\mu(d^{exp})$ GPa	$c_{por}(c_{Fe})$ %, $\pm 0,5\%$	$c_{Fe}^{AI}$ %	$d^{AI}$
H326	80,9	8,06	$76,7 \pm 0,58$	7,94	$75,5 \pm 0,76$	1,5%	$88,1 \pm 1,5$	7,95
H327	61,7	8,27	$64,5 \pm 0,49$	-	$(63,9 \pm 0,64)$	-	$58,0 \pm 6,6$	8,19
H328	44,4	8,45	$57,6 \pm 0,41$	8,29	$56,5 \pm 0,54$	1,9%	$42,4 \pm 0,5$	8,32
H329	14,8	8,76	$50,5 \pm 0,32$	8,48	$48,8 \pm 0,43$	3,2%	$19,6 \pm 3,6$	8,50

Tableau 3.8 : Concentrations mesurées chimiquement  $c_{Fe}$ , densités théoriques  $d^{th}$  et mesurées  $d^{exp}$ , modules de cisaillement et porosités déduits - Concentrations mesurées par analyse d'image  $c_{Fe}^{AI}$  et densités  $d^{AI}$  calculées selon (3.51) pour les biphases fer/cuivre

Ces écarts entre densités théoriques et densités mesurées sont fort probablement dus à la présence d'une troisième phase, beaucoup moins dense que les autres, et l'idée la plus simple consiste à supposer qu'il s'agit de pores, cette hypothèse étant vraisemblable compte tenu du mode d'élaboration des matériaux. Le taux de porosité est estimé selon :

$$c_{por} = 1 - \frac{d^{exp}}{d^{th}} \quad (3.50)$$

et l'on obtient des valeurs de l'ordre du pour-cent.

Ces biphases poreux présentent des raideurs élastiques plus faibles que celles de matériaux non poreux de même fraction volumique. Les incohérences relevées pour les biphases fer/argent et deux des biphases fer/cuivre pourraient être expliquées de la sorte. Toutefois, le module de cisaillement de l'éprouvette H326 calculé avec  $d_{exp}$  est toujours au-dessus de la borne de Voigt. Ce résultat contradictoire avec la remarque précédente peut s'expliquer par une incohérence sur la concentration : les mesures par analyse d'image (cf. tableau 3.5) donnent en effet une teneur en fer bien plus élevée que l'analyse chimique pour cette éprouvette riche en fer et, dans une moindre mesure, pour l'éprouvette H329 riche en cuivre, alors que les valeurs relatives aux deux autres sont plus proches. Lorsque l'on recalcule la borne de Voigt avec cette teneur, la contradiction est levée. Ceci suggère l'existence d'inhomogénéités de concentration dans ces éprouvettes et une probable non représentativité de la mesure chimique. Nous avons donc préféré utiliser les fractions volumiques  $c_{Fe}^{AI}$  déterminées par analyse d'image ou par décompte de points d'or.

Lorsque l'on trace les densités mesurées en fonction de ces concentrations, on observe une bonne linéarité et la droite d'interpolation permet d'en déduire des « densités expérimentales » des phases pures : on obtient pour le fer la valeur  $d_{Fe}^{exp} = 7,845$ , très proche de la valeur tabulée, mais pour le cuivre le résultat  $d_{Cu}^{exp} = 8,629$  est bien inférieur. La porosité semble donc majoritairement présente dans le cuivre et son taux peut être estimé par  $1 - \frac{d_{Cu}^{exp}}{d_{Cu}} = 0,0326 \approx 3\%$ . Elle provient probablement de la poudre elle-même, dont les grains sont peut-être poreux. Il se peut aussi qu'elle contienne des impuretés de faible densité que l'on retrouve dans les matériaux biphases sous forme d'inclusions sans

<sup>22</sup>Le quatrième avait auparavant déjà servi pour un essai *in situ*.

rigidité mécanique. En recalculant la densité théorique en prenant en compte cette porosité et les fractions volumiques  $c_{Fe}^{Al}$  selon :

$$d^{Al} \approx 0,97d_{Cu}c_{Cu}^{Al} + d_{Fe}c_{Fe}^{Al}, \quad (3.51)$$

on observe une bonne cohérence avec les trois valeurs mesurées, compatible avec les incertitudes de mesures (deux dernières colonnes du **tableau 3.8**). Le résultat obtenu pour l'éprouvette H327 dont la densité n'a pas été mesurée permet de calculer une valeur probable de son module de cisaillement (donné entre parenthèses).

Ces mesures corrigées de concentrations et de modules peuvent être comparées aux bornes classiques ; la **figure 3.62** donne le résultat dans le « diagramme de Hill normalisé ». Il n'y a plus de valeur mesurée plus élevée que la borne de Voigt ; les bornes HS sont en revanche toujours violées pour trois des matériaux, qui présentent un comportement trop souple, mais ceci est cohérent avec la présence de porosités. On peut aussi remarquer que les matériaux dont la morphologie est proche du type MI dans la configuration « fer dans cuivre », c'est-à-dire ceux avec une faible teneur en fer, sont plus souples que les autres et ceci est conforme aux tendances prévues par les bornes HSZ. Toutefois, comme ces matériaux présentent aussi la porosité la plus élevée, il se peut que cet effet soit simplement le reflet de la présence de cette dernière. Une analyse plus détaillée est indispensable avant de tirer toute conclusion. La généralisation du modèle 3Ph permet de l'entreprendre.

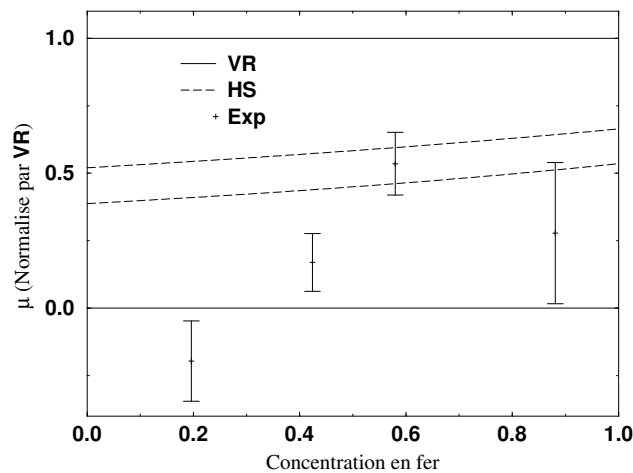


Figure 3.62 : Comparaison entre les mesures expérimentales corrigées relatives aux biphasés fer/cuivre et bornes classiques (diagramme normalisé)

Pour ce faire, nous considérons deux descriptions morphologiques du milieu à trois phases que constituent les matériaux testés. La première (**figure 3.63**) utilise deux motifs à deux phases dont la couche externe est constituée de cuivre ; le noyau du premier est formé de fer alors que celui du second présente des modules d'élasticité très faibles et représente les porosités dans le cuivre. La seconde description (**figure 3.64**) ne fait appel qu'à un seul motif constitué de trois phases : le noyau central représente les porosités, entourées d'une gaine de cuivre, lui-même noyé dans une matrice en fer. Ces deux géométries particulières de type mnPh permettent d'enrichir le modèle 3Ph ou les bornes associées en prenant en compte la présence de porosités dans la matrice, pour la première, ou dans le noyau pour la seconde.

Les concentrations des différentes couches et des motifs doivent être compatibles avec la teneur en pores du cuivre  $C_{Cu}^{Por} = 3\%$  et la concentration en fer  $C$ . Les rayons des trois couches du motif unique de la seconde description sont ainsi données par :

$$\begin{cases} R_{11} = \sqrt[3]{C_{Cu}^{Por} \cdot (1 - C)} \\ R_{12} = \sqrt[3]{(1 - C)} \\ R_{13} = 1 \end{cases} . \quad (3.52)$$

La première géométrie présente en revanche un degré de liberté supplémentaire, puisqu'il faut spécifier

les concentrations des deux noyaux,  $c_{11}^1$  et  $c_{21}^2$ , et la fraction volumique des motifs,  $C_1 = 1 - C_2$ . Pour la définir complètement, nous avons opté d'imposer une valeur constante pour la fraction volumique  $c_{21}^2$  pour toutes les concentrations  $C$ . Ceci conduit aux valeurs suivantes des divers paramètres :

$$\begin{cases} R_{11} = \sqrt[3]{\frac{C \cdot c_{21}^2}{c_{21}^2 - (1-C) \cdot C_{Cu}^{Por}}} \\ R_{12} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} R_{21} = \sqrt[3]{c_{21}^2} \\ R_{22} = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad C_1 = 1 - (1-C) \cdot \frac{C_{Cu}^{Por}}{c_{21}^2}. \quad (3.53)$$

Notons que l'on doit avoir  $c_{21}^2 \geq C_{Cu}^{Por}$ .

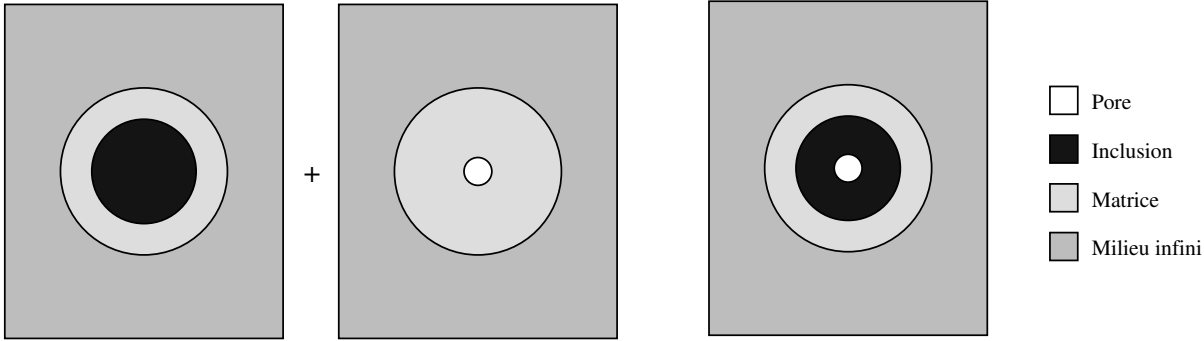


Figure 3.63 : Description possible d'un composite  $MI$  dont la matrice est poreuse

Figure 3.64 : Description possible d'un composite  $MI$  dont les inclusions sont poreuses

Les deux ensembles de motifs ainsi définis représentent des microstructures idéalisées de composites  $MI$  poreux, différentes des microstructures réelles puisque, par exemple, la distribution des pores y est très particulière : ils sont supposés sphériques et disposés au centre des inclusions pour la seconde description, et éloignés des inclusions de fer dans la première. Leurs prévisions constituent toutefois une première approximation quantitative de l'effet des porosités et de la morphologie, au même titre que l'assemblage des sphères composites de Hashin peut être utilisé pour décrire une morphologie  $MI$  plus générale.

La borne supérieure de type Hashin-Shtrikman résulte du choix du fer comme milieu de référence et améliore la majoration de type Voigt obtenue en imposant une déformation homogène aux bords des motifs. En revanche, la borne inférieure est construite en prenant les pores comme milieu de référence, c'est-à-dire un milieu très souple par rapport aux motifs : la condition de contrainte homogène à l'infini est ainsi appliquée aux bords des motifs et la borne obtenue s'identifie à la borne de type Reuss. Contrairement à la borne de Reuss classique ou à la borne de Hashin et Shtrikman classique, elle n'est toutefois pas nulle. On peut aussi construire une estimation en prenant le cuivre comme milieu de référence ainsi que, bien sûr, l'estimation autocohérente.

Les résultats, normalisés par les bornes de Voigt et Reuss classiques relatives à un biphasé non poreux, sont donnés en figures 3.65 et 3.66. Les courbes de la première ont été obtenues avec  $c_{21}^2 = 10\%$ , mais cette valeur a relativement peu d'influence. On constate que trois résultats expérimentaux ne violent plus les bornes et suivent relativement bien les prévisions des estimations autocohérentes. Seul le matériau H327 s'avère légèrement plus raide, mais cet écart peut être attribué à une densité mal estimée. En revanche, les fuseaux relatifs aux bornes de type HS ne sont plus disjoints : la nécessité d'utiliser les pores comme milieu de référence pour la borne inférieure induit un élargissement des fuseaux relatifs aux deux configurations morphologiques : la mesure des modules d'élasticité ne suffit plus pour reconnaître la morphologie. Les fuseaux obtenus en adoptant le fer et le cuivre comme milieu de référence sont toujours disjoints, mais les courbes inférieures ne sont pas des bornes rigoureuses. De plus, même si l'on admet malgré tout qu'il est fort probable que les matériaux respectent ces derniers fuseaux, les incertitudes expérimentales sont telles qu'il est impossible de distinguer les morphologies : les trois mesures sont compatibles avec les deux fuseaux.

On peut enfin tenter une troisième approche, consistant à effectuer l'homogénéisation en deux étapes invoquant les bornes HSZ : la première fournit des encadrements pour les modules du cuivre

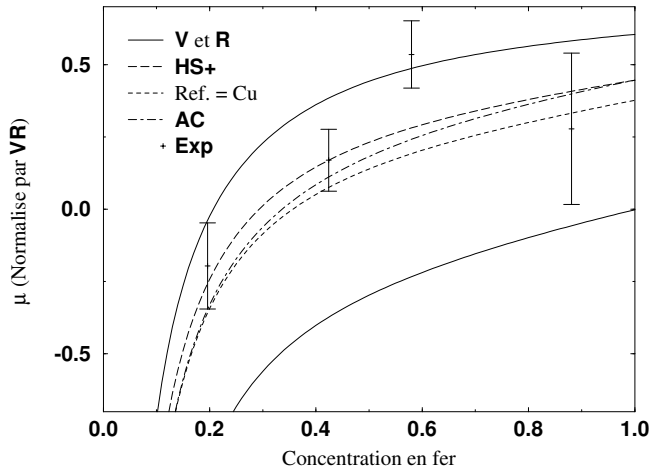


Figure 3.65 : Bornes  $R$ ,  $V$ ,  $HS+$ , estimation  $AC$  et estimation obtenue avec le cuivre comme milieu de référence, résultant de la description de la figure 3.63 - Comparaison avec l'expérience (diagramme normalisé par les bornes  $R$  et  $V$  classiques, sans porosités)

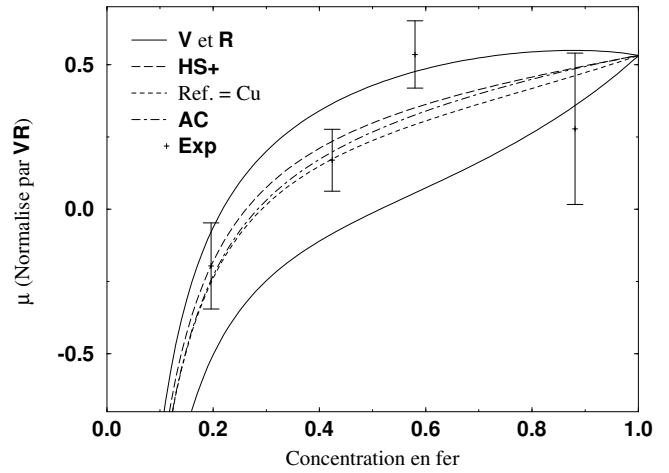


Figure 3.66 : Bornes  $R$ ,  $V$ ,  $HS+$ , estimation  $AC$  et estimation obtenue avec le cuivre comme milieu de référence, résultant de la description de la figure 3.64 - Comparaison avec l'expérience (diagramme normalisé par les bornes  $R$  et  $V$  classiques, sans porosités)

poroux avec un taux  $C_{Cu}^{Por}$  de porosités, que l'on utilise dans la seconde étape pour construire des bornes pour le matériau avec le taux de fer  $C$  (figure 3.67). Les bornes  $HSZ$  étant des fonctions croissantes des modules, les bornes supérieures et inférieures sont respectivement obtenues avec les bornes supérieures et inférieures relatives au cuivre poreux. Les fuseaux obtenus sont cette fois-ci plus resserrés et disjoints, mais l'approche peut être contestée car elle suppose l'existence de deux échelles suffisamment distinctes pour que le cuivre poreux puisse être considéré comme une phase homogène. Pour ce faire, les pores devraient être de taille infiniment plus faible que les domaines de phase du fer et du cuivre. Notons qu'il est possible d'inverser l'ordre des deux changements d'échelle, en construisant d'abord les bornes relatives au biphasé fer/cuivre et en ajoutant la porosité par la suite. Mais ceci suppose les pores beaucoup plus gros que les domaines de phase et semble bien moins réaliste que l'approche précédente.

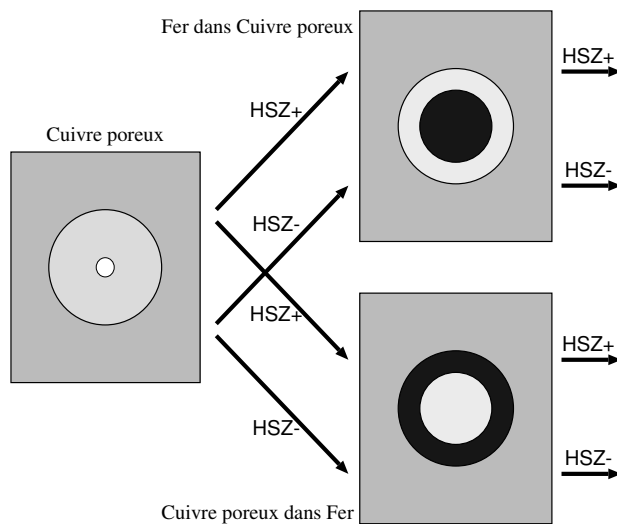


Figure 3.67 : Approche à deux échelles pour tenir compte de la porosité

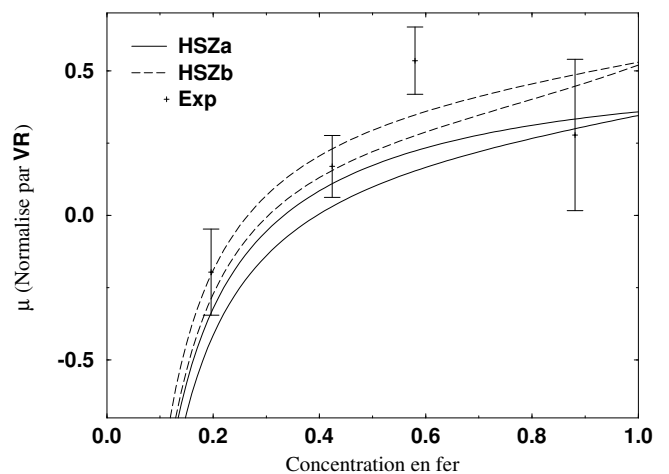


Figure 3.68 : Résultats de l'approche à deux échelles : bornes de type  $HS$  relatives aux configuration  $a$  et  $b$  - Comparaison avec l'expérience (diagramme normalisé par les bornes  $R$  et  $V$  classiques, sans porosités)

De toute façon, les courbes obtenues ne permettent toujours pas de conclure clairement, les incertitudes expérimentales étant trop importantes. Les barres d'incertitudes reportées sur les diagrammes ne font en effet référence qu'aux incertitudes sur la mesure du module de cisaillement. Il faudrait en toute rigueur les compléter par celles relatives à la concentration <sup>23</sup>.

Le même type d'analyse peut-être entrepris sur les matériaux fer/argent et aboutit aux mêmes conclusions : une porosité de l'ordre 3%, voire inférieure, permet de rendre compte des incohérences apparentes entre mesures et bornes sur les modules de cisaillement. Les incertitudes sur les modules d'élasticité, les densités, les concentrations et surtout sur les taux réels de porosité ne permettent pas de conclure expérimentalement sur l'influence de la morphologie sur le comportement élastique linéaire. Il est fort probable que les écarts entre bornes et mesures soient principalement la signature de la présence de porosités (ou plus généralement d'une troisième phase), qui masque l'effet morphologique, du second ordre.

### 3.2.B.b Hétérogénéités de déformations : description morphologique enrichie

Les écarts entre largeurs de distributions de déformations mesurées et prévues par le modèle 3Ph révèlent probablement une description morphologique trop sommaire : l'assemblage des sphères composites de Hashin ne peut pas rendre compte de la richesse des microstructures biphasées testées. Les modèles mnPh permettent d'introduire des paramètres nouveaux, dont on peut tester l'influence sur l'hétérogénéité. Nous en avons considéré deux : les *fluctuations de concentration* et les « *inversions locales de configuration* » (figure 3.69). Les premières traduisent une possible variabilité de l'épaisseur relative de l'enrobage de matrice autour des domaines de fer au sein d'un VER du composite<sup>24</sup>. Les secondes décrivent les zones où les domaines de phase inclusionnaire sont très proches les uns des autres, voire quasiment soudées les uns aux autres, de telle sorte que les domaines de matrice dans ces « amas » se trouvent isolés mécaniquement du reste de la matrice et ne contribuent à la réponse globale qu'au travers de la gaine de l'autre phase qui l'entoure : les rôles des deux phases au sein de la morphologie MI sont localement échangés.

Le recours à plusieurs motifs sphériques multicouches permet de rendre compte de ces configurations. Les modèles mnPh obtenus sont caractérisés par un certain nombre de paramètres géométriques : les concentrations de chaque motif et les rayons des couches de chacun d'entre eux. Leur identification sur une microstructure réelle étant une tâche relativement ardue, nous nous sommes limité à quantifier les effets pour des valeurs arbitraires mais réalistes et compatibles avec les concentrations globales des matériaux.

**Fluctuations de concentration** Pour rendre compte des variations de la quantité relative de matrice autour des inclusions de fer, on peut faire appel à deux ou plusieurs motifs à deux phases respectant la configuration inclusion/matrice retenue, mais dont la concentration locale  $c_{m1}^m$  varie (figure 3.70). Le respect de la concentration globale  $C$  en inclusions impose que  $\sum_m C_m c_{m1}^m = C$ .

La situation la plus simple est obtenue avec deux motifs, en proportions  $C_1$  et  $1 - C_1$  et avec des concentrations locales  $c_{11}^1$  et  $c_{21}^2 = \frac{1}{1-C_1} [C - C_1 c_{11}^1]$ . Les figures 3.72 et 3.74 donnent par exemple les distributions obtenues pour l'essai H169, avec  $C_1 = 40\%$ ,  $c_{11}^1 = 62,5\%$  et  $c_{21}^2 = 95\%$ , la procédure de calcul étant la même que celle mise en œuvre avec le modèle 3Ph<sup>25</sup>. On observe effectivement l'apparition de déformations plus importantes que dans le modèle 3Pha, à environ 5% de déformation macroscopique. Elles correspondent à l'argent se trouvant dans des zones riches en fer, de fraction volumique  $60\% \times 5\% = 3\%$ . En revanche, le reste de la matrice est moins déformé, ce qui induit finalement une hétérogénéité plus faible et donc moins représentative de la réalité expérimentale. Aux taux de déformation plus élevés, le résultat est encore plus décevant puisque, pour ces choix de concen-

<sup>23</sup>lesquelles induisent une incertitude non seulement sur l'abscisse des points expérimentaux, mais aussi sur l'ordonnée puisque les bornes de Voigt et Reuss classiques qui servent à calculer les modules adimensionnés en dépendent.

<sup>24</sup>Il ne faut pas confondre ces fluctuations au sein d'un VER avec les fluctuations de concentrations au sein d'une éprouvette, résultant d'une inhomogénéité du mélange de poudre, et qui se manifestent à l'échelle de la structure et non à celle de la microstructure.

<sup>25</sup>La condition d'autocohérence est adoptée pour tous les modèles évoqués ici.

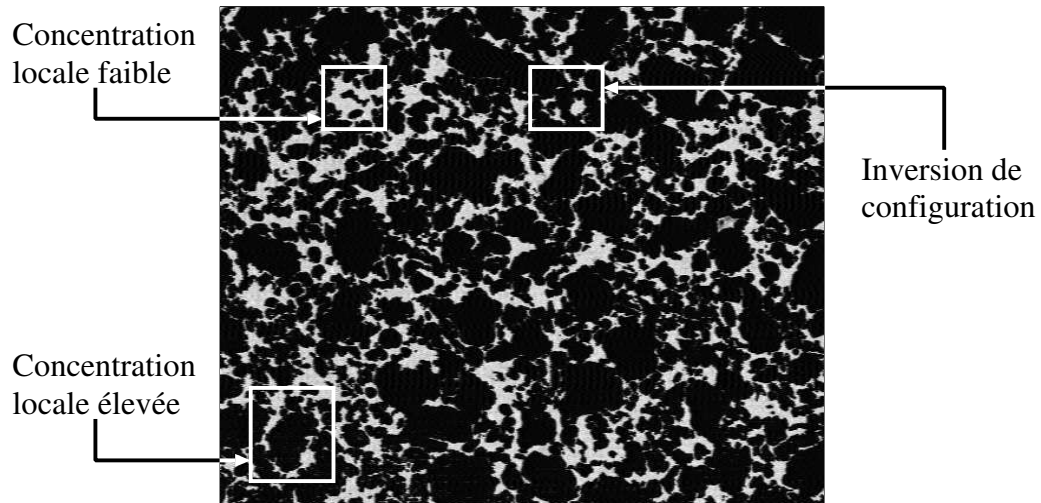


Figure 3.69 : Fluctuations de concentration du fer et inversions de configuration

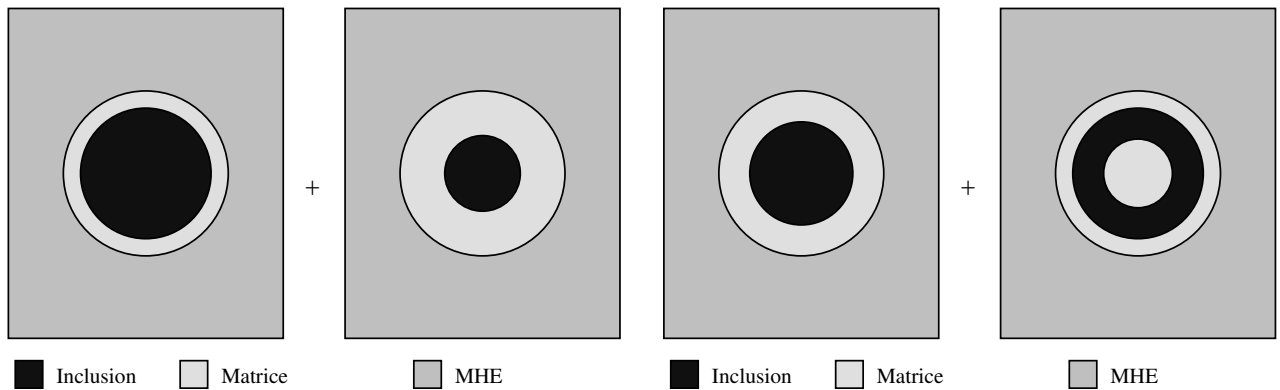


Figure 3.70 : Modélisation des fluctuations de concentration

Figure 3.71 : Modélisation des inversions de configuration locales

trations, la déformation maximale est la même que celle obtenue sans prise en compte des fluctuations de concentrations. Par ailleurs, la prévision relative au fer n'est guère modifiée qualitativement.

**Inversions locales de configuration** Parmi les descriptions possibles des inversions locales de configuration, celle que nous présentons ici fait également appel à deux motifs. Le premier n'est autre que la sphère composite de Hashin avec la concentration globale  $C$  du VER ; le second, proposé par d'autres auteurs [1], diffère du premier par la présence au sein de la phase inclusionnaire d'un noyau ayant les propriétés de la matrice et représentant les domaines de cette dernière en position inclusionnaire dans l'autre phase. Pour le calcul présenté ici, nous avons retenu  $C_1 = 50\%$ ,  $c_{21}^2 = (1 - C)/2$  et donc  $c_{22}^2 = C$  et  $c_{23}^2 = (1 - C)/2$ , ce qui correspond à la présence de 25% de phase matrice en position inverse. Les distributions obtenues pour l'essai H169 sont données en figures 3.73 et 3.75 et conduisent à des conclusions sensiblement similaires à celles du paragraphe précédent. On observe en effet un léger élargissement de la distribution relative à l'argent pour le faible taux de déformation, correspondant à la couche externe du second motif, mais au prix de l'apparition d'un pic dans la fonction de distribution, reflétant la déformation presque homogène dans le noyau. Pour  $E^{eq} \approx 15\%$ , l'hétérogénéité prévue dans l'argent est inférieure à celle du modèle 3Ph. Les prévisions relatives au fer améliorent légèrement celles de ce dernier, aux deux taux de déformation, du fait de la présence en situation « intermédiaire » de la moitié de la phase, mais cette amélioration est bien trop faible : un ordre de grandeur sépare toujours les largeurs de distributions théoriques et expérimentales.

Notons par ailleurs, que les prévisions en termes de déformation moyenne par phase ne sont pas

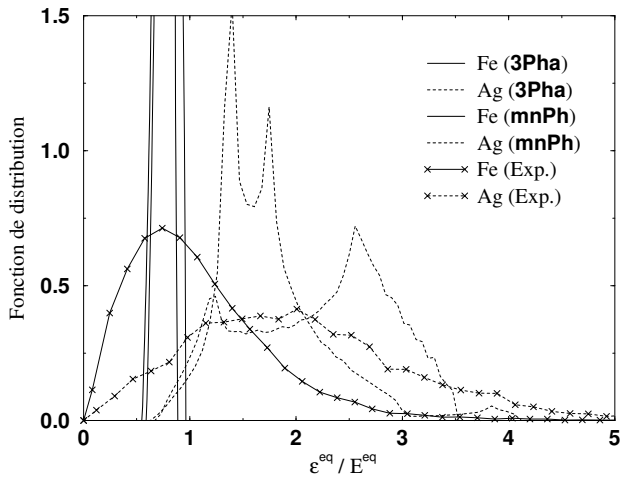


Figure 3.72 : Distributions obtenues en prenant en compte des fluctuations de concentration - Données de H169 -  $E^{eq} = 4,3\%$

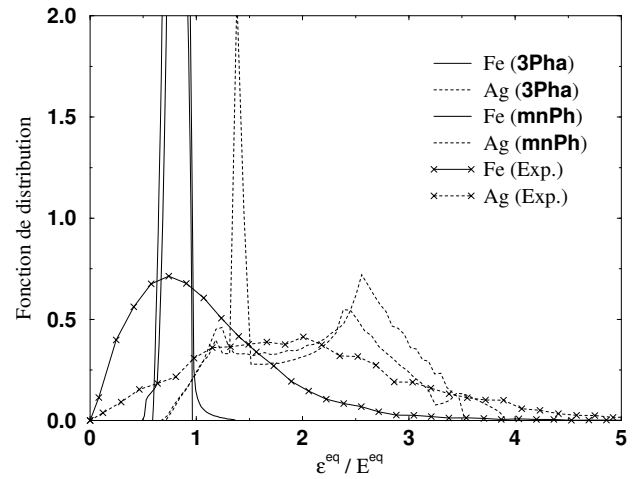


Figure 3.73 : Distributions obtenues en prenant en compte des inversions de configurations - Données de H169 -  $E^{eq} = 4,3\%$

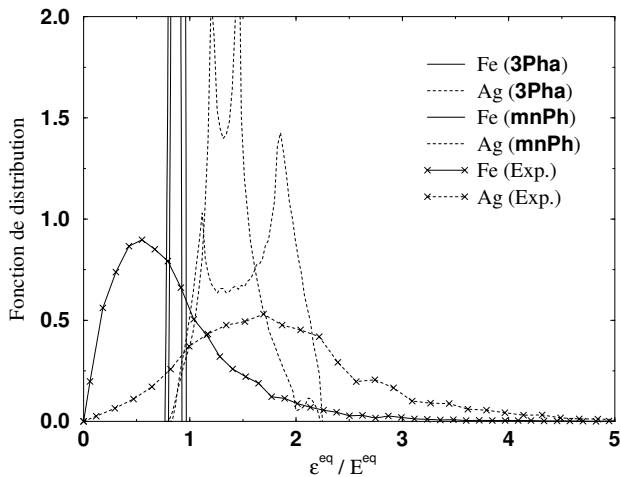


Figure 3.74 : Distributions obtenues en prenant en compte des fluctuations de concentration - Données de H169 -  $E^{eq} = 13,6\%$

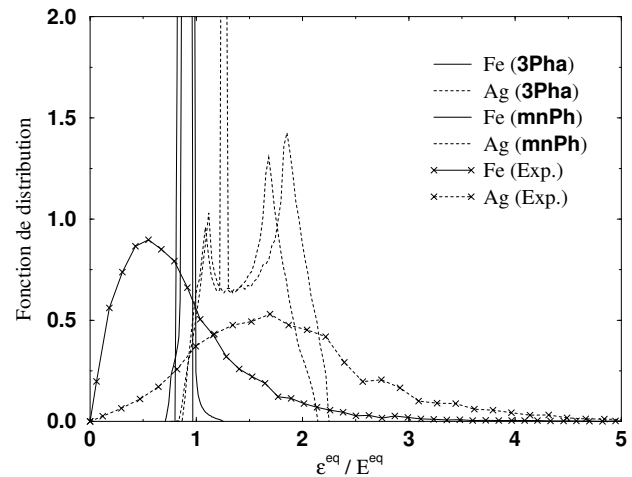


Figure 3.75 : Distributions obtenues en prenant en compte des inversions de configurations - Données de H169 -  $E^{eq} = 13,6\%$

non plus modifiées qualitativement : les hétérogénéités inter-phases sont sous-estimées aux taux de déformation élevés, comme en attestent les positions moyennes des distributions sur les figures 3.72 à 3.75.

### 3.2.B.c Hétérogénéités de déformations : nouvelles extensions non-linéaires

**Prise en compte d'un gradient selon le rayon** Pour tester l'influence de la discrétisation des couches en sous-couches, nous revenons à la configuration a du modèle 3Ph pour décrire la microstructure. En revanche, le calcul est effectué en adoptant un module de cisaillement sécant fonction de la distance  $r$  au centre de la sphère composite. Avec l'extension classique, ce module est déduit de l'équivalent de la déformation moyenne dans la couche à la distance  $r$ . Les calculs présentés ont été effectués avec une discrétisation du noyau en 25 domaines de même concentration  $C/25$  et également 25 couches équivolument dans la coquille, de concentration  $(1 - C)/25$ . Les résultats relatifs au même matériau et aux mêmes sollicitations que précédemment sont reportés en figures 3.76 et 3.77. On observe un léger étalement de la distribution dans l'argent, sensiblement identique aux deux taux de déformation, mais toujours insuffisant pour la déformation élevée. La prévision est nettement améliorée dans le fer,

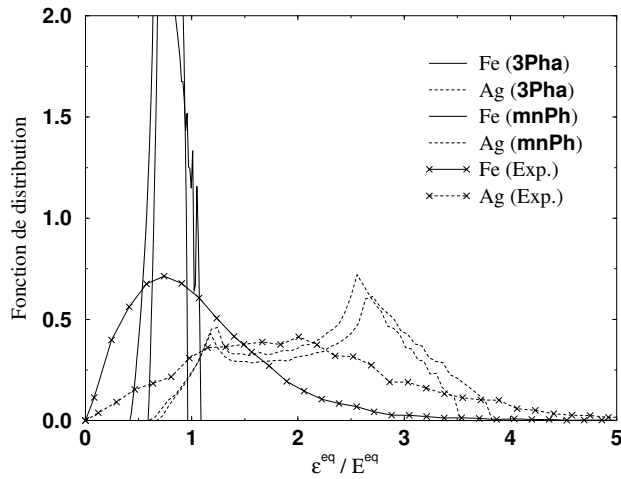


Figure 3.76 : Discretisation de la sphère composite en 50 couches ; extension classique - H169 -  $E^{eq} = 4, 3\%$

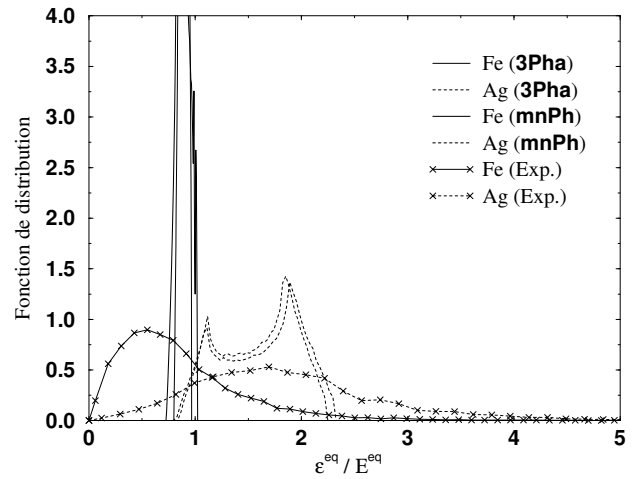


Figure 3.77 : Discretisation de la sphère composite en 50 couches ; extension classique - H169 -  $E^{eq} = 13, 6\%$

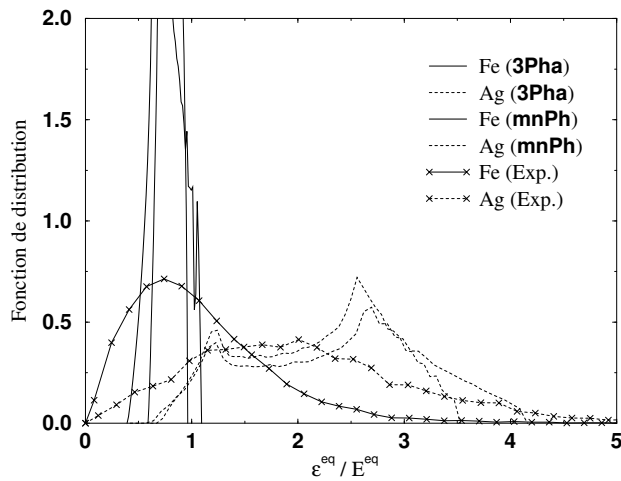


Figure 3.78 : Discretisation de la sphère composite en 50 couches ; extension utilisant  $\langle \epsilon^{eq} \rangle_{mn}$  - H169 -  $E^{eq} = 4, 3\%$

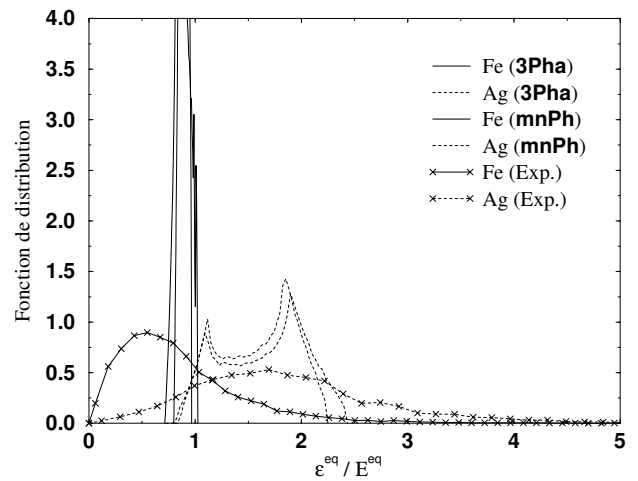


Figure 3.79 : Discretisation de la sphère composite en 50 couches ; extension utilisant  $\langle \epsilon^{eq} \rangle_{mn}$  - H169 -  $E^{eq} = 13, 6\%$

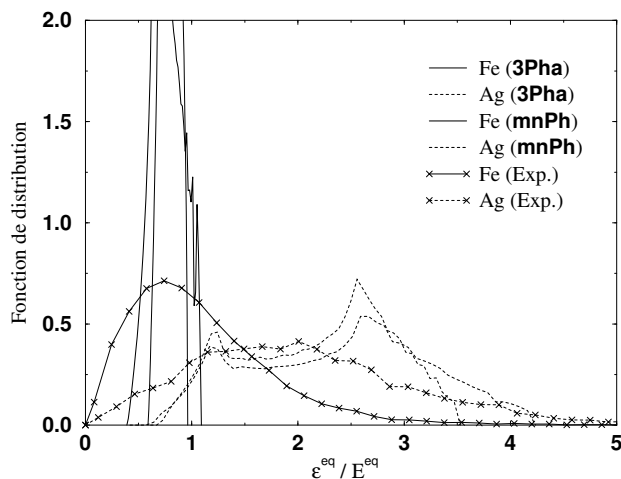


Figure 3.80 : Discretisation de la sphère composite en 50 couches ; extension modifiée - H169 -  $E^{eq} = 4, 3\%$

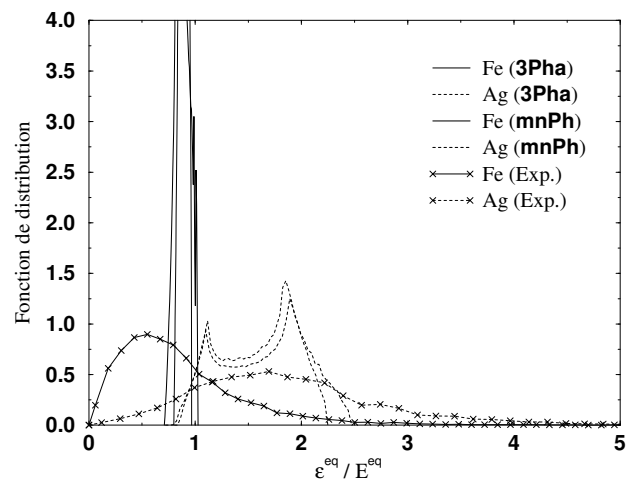


Figure 3.81 : Discretisation de la sphère composite en 50 couches ; extension modifiée - H169 -  $E^{eq} = 13, 6\%$



puisque la largeur de la distribution est pratiquement doublée : la quasi-homogénéité révélée dans le noyau par la solution élastique utilisant des modules sécants uniformes dans les deux phases semble donc le résultat d'une mauvaise description de la plasticité. L'élargissement est net aux deux taux de déformation macroscopique, mais s'avère toujours insuffisant pour que le modèle rende compte de l'hétérogénéité intra-phases mesurée.

**Modules sécants associés à  $\langle \epsilon^{eq} \rangle_{mn}$**  On peut effectuer les mêmes calculs en associant le module sécant de la couche à la distance  $r$  à la moyenne sur cette couche de l'équivalent de la déformation locale, calculé par intégration numérique. Les résultats présentés en figures 3.78 et 3.79 ont été obtenus avec 90 points d'intégration dans chaque couche. Le « calcul d'état » relatif au modèle invoquant la condition d'autocoherence est considérablement ralenti dans cette procédure : alors qu'il suffit de quelques secondes pour déterminer les paramètres  $P_{mn}$  avec l'extension classique<sup>26</sup>, quelques minutes sont nécessaires avec cette nouvelle définition. Les distributions obtenues sont plus étalées que les précédentes, notamment dans l'argent. Mais elles sont toujours trop étroites dans le fer et sous-estiment l'hétérogénéité dans l'argent au taux de déformation élevé.

**Extension modifiée** On peut enfin associer le module sécant de la couche à la distance  $r$  au moment d'ordre deux de la déformation locale dans la « phase  $mr$  » au sein du VER, conformément à l'extension modifiée. Ce moment est calculé par dérivation numérique de l'énergie macroscopique. Les temps de calcul sont comparables à ceux de l'extension classique et les résultats, donnés en figures 3.80 et 3.81, améliorent très légèrement ceux obtenus en utilisant  $P_{mn} = \langle \epsilon^{eq} \rangle_{mn}$ . Ceci justifie de préférer l'extension modifiée à la précédente, d'autant plus qu'elle bénéficie d'une interprétation théorique rigoureuse. Les prévisions d'hétérogénéités ne sont toutefois pas encore satisfaisantes, ni pour le fer, ni pour l'argent aux taux de déformation élevés.

Notons enfin qu'il est possible de combiner toutes ces approches, mais sans améliorer notablement les prévisions en termes d'hétérogénéités.

### 3.2.B.d Comparaison entre extension classique et extension modifiée

Ces derniers résultats suggèrent d'entreprendre une comparaison plus complète entre l'extension classique et l'extension modifiée appliquées au modèle 3Ph, portant tant sur les prévisions de comportement global que de réponses locales en termes d'hétérogénéités inter- et intra-phases.

**Comportement global** La figure 3.82 donne les courbes de traction simple prévues par les deux approches pour des biphasés fer/argent. On observe un faible écart entre les courbes, sauf en début de plastification. Ceci est cohérent avec la propriété générale d'indépendance de la courbe macroscopique vis-à-vis du mode de localisation, après plastification totale du composite, lorsque l'écroutissage est linéaire et que les pentes d'écroutissage des constituants sont identiques (*cf.* paragraphe 3.1.B.b). Les courbes prévues par l'extension modifiée sont toujours légèrement en-dessous des autres, même aux déformations élevées, du fait de la faible concavité des courbes d'écroutissage des constituants, qui fait que cette propriété générale ne s'applique qu'approximativement. Lorsque les constituants présentent des comportements bien différents, l'effet est plus net, comme en atteste la figure 3.83, qui donne les courbes de traction d'un composite à particules élastiques non plastiques et matrice élasto-plastique.

On pourra aussi noter que la discrétisation a un effet négligeable sur la courbe de comportement macroscopique.

Cette similitude des courbes de traction obtenues avec les deux extensions dans le cas des matériaux considérés dans cette étude autorise le recours à l'extension classique dans la démarche inverse mise en œuvre pour déterminer le comportement du fer au sein des biphasés, même pour une utilisation ultérieure de la courbe obtenue au travers d'un modèle recourant à l'extension modifiée.

---

<sup>26</sup> Les temps de calcul donnés dans ce mémoire font, bien sûr, tous référence au même ordinateur, utilisé dans des conditions similaires.

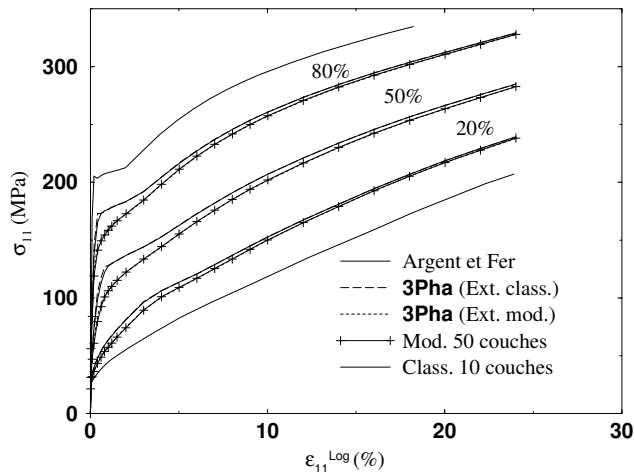


Figure 3.82 : Comportement global des biphasés fer/argent d'après le modèle 3Pha pour trois teneurs en fer - extension non-linéaire classique et extension modifiée, avec ou sans discrétisation

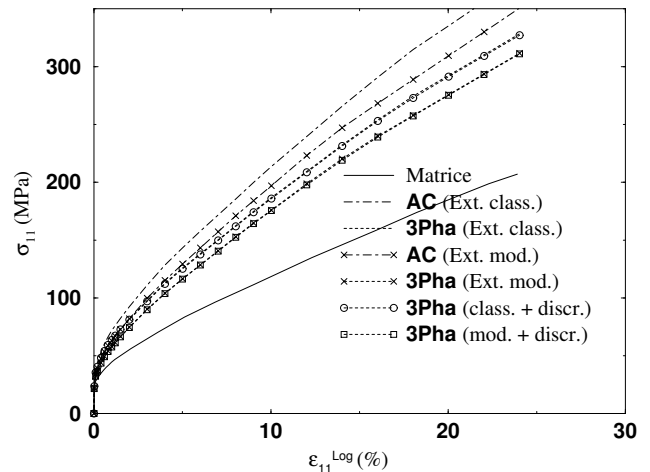


Figure 3.83 : Comportement global d'un composite constitué d'argent et de 20% d'une phase élastique non plastique, d'après les modèles AC et 3Pha - extension non-linéaire classique et extension modifiée

**Hétérogénéités locales** Les deux approches diffèrent par la définition des paramètres d'écroutissage  $P_{mn}$  associés aux phases. La figure 3.84 compare leurs valeurs en fonction de la déformation appliquée à l'infini, avec ou sans discrétisation des phases en 10 sous-couches de même volume ; la figure 3.85 donne l'évolution correspondante des modules sécants associés et la figure 3.86 donne enfin les variations de la déformation moyenne de chaque phase. Les courbes de traction utilisées pour le fer et l'argent sont celles de la figure 3.3 et la concentration en fer est de 85%. Les données reportées en cas de discrétisation en sous-couches font référence à la moyenne sur la phase correspondante, alors que la barre d'erreur indique l'étendue de la grandeur en question sur les différentes couches constitutives. Précisons que les couches internes sont les plus déformées, dans le noyau comme dans la matrice, comme l'indique le profil de  $P_{mn}$  le long du rayon, donné en figure 3.87.

La différence entre les paramètres  $P_{mn}$  invoqués par les deux extensions non-linéaires est assez nette dans la matrice d'argent, mais presque inexistante dans le fer. Par ailleurs, la discrétisation en sous-couches a pratiquement le même effet dans ce dernier pour les deux extensions, alors que l'hétérogénéité des paramètres d'écroutissage qu'elle introduit dans la matrice est bien plus accentuée pour l'extension modifiée que pour l'extension classique. Cette constatation peut s'expliquer par l'hétérogénéité du champ local dans l'inclusion composite, révélée par les surfaces d'isovaleurs de la figure 3.47. Le champ dans le noyau est presque homogène, si bien que le moment d'ordre deux n'est pas très éloigné de la déformation moyenne. De plus, son hétérogénéité est principalement radiale (les surfaces d'isovaleurs sont presque des sphères) : une discrétisation selon  $r$  permet d'améliorer nettement sa description, et ceci de manière identique pour les deux extensions, puisque la déformation au sein des sous-couches reste quasiment indépendante de l'angle polaire. En revanche, les gradients locaux de déformation dans la matrice sont élevés, selon aussi bien une direction radiale qu'orthoradiale : les moments d'ordre deux du champ de déformation sont ainsi beaucoup plus grands que l'équivalent de la moyenne. L'écart entre les deux extensions en résulte, aussi bien avec une que dix sous-couches. Dans ce dernier cas, il est d'ailleurs accentué, la variation selon le rayon étant lissée par l'extension classique dont le processus de moyenne est trop radical vis-à-vis des hétérogénéités orthoradiales.

La discrétisation n'a toutefois que peu d'effet sur la valeur moyenne des paramètres d'écroutissage, aussi bien pour l'extension classique que pour l'extension modifiée. Comme les courbes d'écroutissage sont quasiment affines au voisinage de cette valeur moyenne pour des valeurs supérieures à quelques pour-cent, le nombre de sous-couches n'a également que peu d'effet sur le module de cisaillement moyen des phases. De plus, la variation du module sécant avec la déformation devient de plus en plus faible à mesure que cette dernière augmente. En conséquence, l'écart entre les modules invoqués par les deux extensions devient assez rapidement négligeable, par rapport à la différence entre les modules moyens

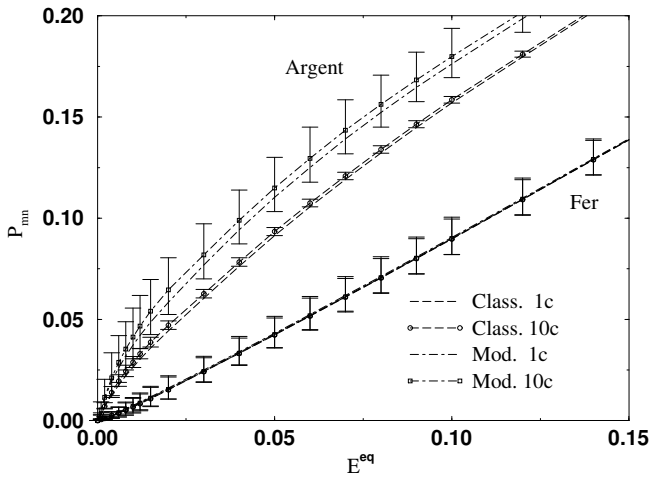


Figure 3.84 : Paramètres  $P_{mn}$  associés aux couches en fonction de la déformation macroscopique. Modèle 3Pha, extension classique et modifiée, avec ou sans discrétisation des phases en 10 couches équivolumentiques,  $c_{Fe} = 85\%$

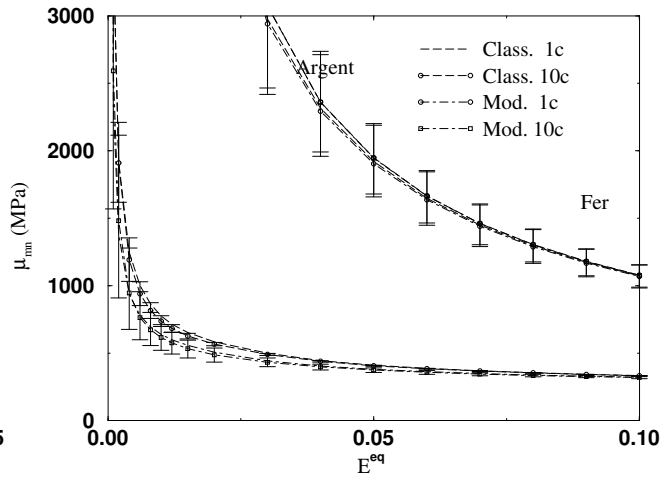


Figure 3.85 : Modules sécants  $\mu_{mn}^{sc}$  associées aux paramètres  $P_{mn}$  de la figure 3.84

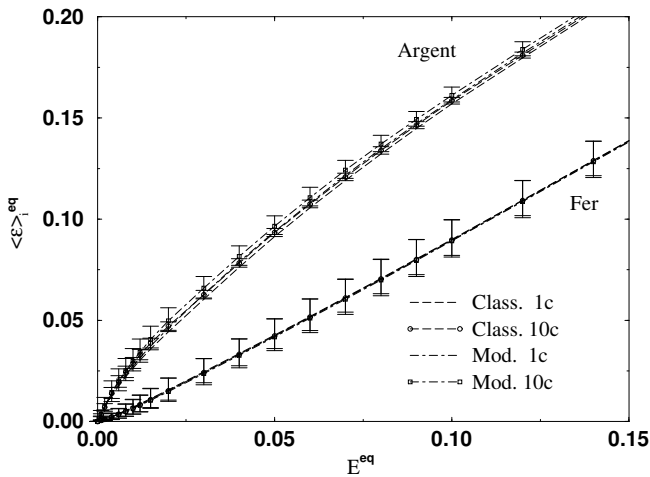


Figure 3.86 : Déformations moyennes par phase  $a_{mn}E^{eq}$  calculées à partir des paramètres  $P_{mn}$  de la figure 3.84

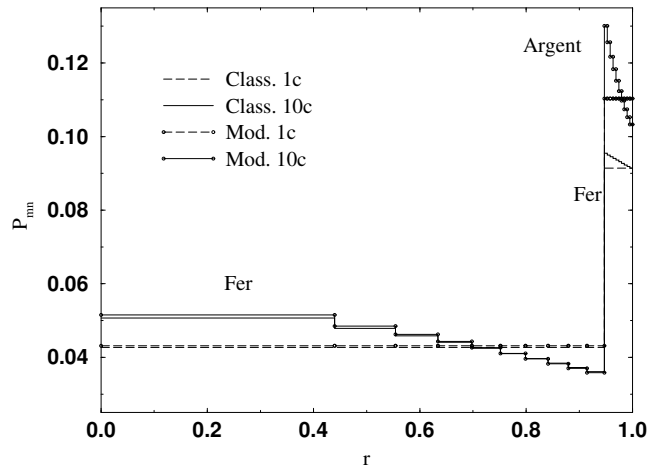


Figure 3.87 : Profil du paramètre  $P_{mn}$  le long du rayon  $r$  de la sphère composite, pour  $E^{eq} = 5\%$

des deux phases : les problèmes linéaires de comparaison sont quasiment identiques pour les deux approches, à quelques fluctuations de modules locaux près, si bien que toutes les grandeurs déduites de leur solution élastique linéaire le sont également. C'est le cas en particulier de la déformation moyenne par phase (figure 3.86), mais aussi des champs locaux au sein des motifs utilisés pour caractériser les distributions de déformation, ainsi que des moments d'ordre deux que l'on calcule par dérivation de l'énergie élastique du problème linéaire de comparaison par rapport à l'un des modules sécants.

La discrétisation semble avoir une influence assez importante sur les modules sécants au sein de l'inclusion, puisque, par exemple, pour  $E^{eq} \approx 5\%$  dans l'exemple considéré, l'écart entre les modules extrêmes dans le fer atteint près du tiers de l'écart entre les modules moyens des deux phases. Ceci n'a toutefois que peu d'effet sur les champs moyens par phase, mais introduit une hétérogénéité de déformation dans le noyau, déjà relevée au paragraphe précédent. L'amélioration apportée en termes de prévision des hétérogénéités au sein d'un VER est toutefois insuffisante.

Toutes les conclusions relatives à l'utilisation des modèles pour la prévision des réponses locales

au sein d'un composite tel que ceux que nous avons étudiés s'appliquent donc également en cas de mise en œuvre de l'extension modifiée ou d'une discrétisation des phases en couches concentriques.

### 3.2.B.e Confrontation portant sur $\langle \epsilon^{\text{eq2}} \rangle^{1/2}$

Nous proposons toutefois de compléter cette confrontation en nous intéressant aux moments d'ordre deux de la déformation locale sur les phases, que l'on mesure à partir des déplacements des points d'or selon les procédures décrites au chapitre 2 et que l'on calcule d'après les modèles par dérivation de l'énergie macroscopique. Les conclusions du paragraphe précédent font que les résultats théoriques sont relativement peu sensibles à l'extension non-linéaire invoquée et au recours ou non à une discrétisation. Comme annoncé au paragraphe 3.1.C.b, ce moment d'ordre deux intègre des informations sur l'état de déformation moyen au sein de la phase considérée, mais aussi sur le niveau d'hétérogénéité intra-phase.

Les résultats donnés ici ont été obtenus avec les modèles 3Pha, 3Phb et AC, étendus aux comportements non-linéaires par l'extension modifiée sans discrétisation. Les variations des moments d'ordre deux qu'ils prévoient sont sensiblement les mêmes que celles des déformations moyennes par phase. La figure 3.88 donne par exemple leur évolution en fonction de la concentration à sollicitation macroscopique figée. On notera que, comme pour les déformations moyennes, l'effet morphologique le plus important est noté pour la phase matrice du modèle 3Ph, lorsque la concentration en inclusions est importante, ce résultat étant cohérent avec le fait que le champ local dans cette phase est alors très hétérogène et présente des valeurs élevées.

Comme les comportements des phases varient d'une éprouvette à l'autre et que les déformations macroscopiques ne sont pas les mêmes pour tous les essais *in situ*, nous avons mis en œuvre la démarche décrite au paragraphe 3.1.C.a pour obtenir une représentation synthétique de la confrontation sur un unique diagramme. Elle repose sur une interpolation linéaire des résultats expérimentaux et une représentation normalisée des déformations moyennes par phase, dans laquelle l'unité fait référence au modèle 3Pha. Précisons toutefois que la détermination inverse du comportement local du fer a été entreprise avec le modèle AC et l'extension non-linéaire classique. Par ailleurs, il n'y a pas de relation de moyenne entre les moments relatifs aux phases et la déformation macroscopique. Les diagrammes normalisés donnés par les modèles pour les deux phases ne sont de ce fait plus exactement identiques ; les différences sont toutefois faibles. Les moments d'ordre deux mesurés ne satisfont pas non plus cette relation de moyenne, si bien que la phase la moins déformée peut présenter des moments d'ordre deux supérieurs à ceux de la déformation macroscopique. Dans ces conditions, la représentation adimensionnée n'est plus très intéressante. Nous avons donc limité les comparaisons à la phase la plus déformée, c'est-à-dire l'argent ou le cuivre.

Les figures 3.89 à 3.91 synthétisent les résultats de ces confrontations, les valeurs numériques des moments d'ordre deux mesurés expérimentalement étant par ailleurs données exhaustivement en annexe F. Elles révèlent un étalement assez important des valeurs expérimentales, même pour des matériaux de concentrations relativement proches, ce qui confirme la sensibilité de l'hétérogénéité locale aux paramètres microstructuraux. En revanche, alors qu'on observait une certaine cohérence qualitative entre les variations expérimentales et théoriques, selon le modèle 3Pha, des déformations moyennes par phase en fonction de la concentration, pour presque tous les matériaux MI, les points expérimentaux relatifs au moment d'ordre deux se situent sensiblement sur une droite décroissante : les prévisions relatives aux faibles concentrations sous-estiment amplement les mesures alors que celles relatives aux concentrations très élevées sont plus satisfaisantes, notamment pour les faibles déformations macroscopiques. Cette observation est à rapprocher des comparaisons entre fonctions de distributions théoriques et expérimentales dans la matrice, qui révèlent un accord satisfaisant pour les concentrations élevées en phase inclusionnaire, mais une nette sous-estimation des hétérogénéités pour les faibles concentrations. Les variations du moment d'ordre deux, qui rend partiellement compte de l'hétérogénéité intra-phase, ne font que traduire sous une autre forme cette tendance.

Lorsque l'on s'intéresse plus précisément à la position des points de mesure par rapport à cette droite moyenne, on peut établir une classification presque identique à celle obtenue avec la déformation moyenne par phase : toutes les éprouvettes MI sauf deux se situent plutôt au-dessus de la droite,

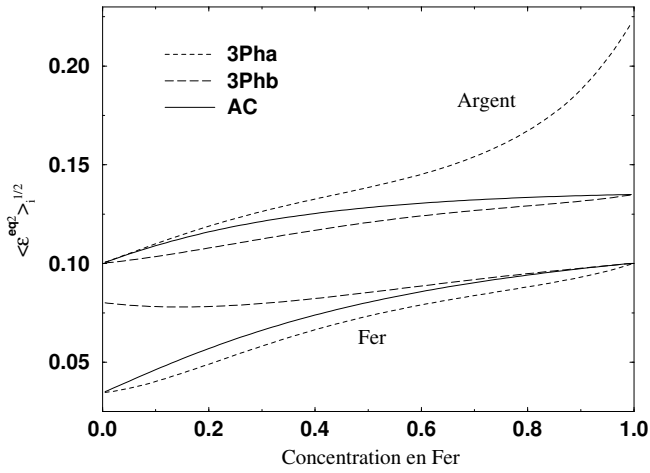


Figure 3.88 : Évolution du moment d'ordre deux de la déformation locale dans chaque phase en fonction de la concentration d'après les modèles AC, 3Pha et 3Phb - Extension non-linéaire modifiée -  $E^{eq} = 10\%$  - Fer/argent, courbes de traction de la figure 3.3

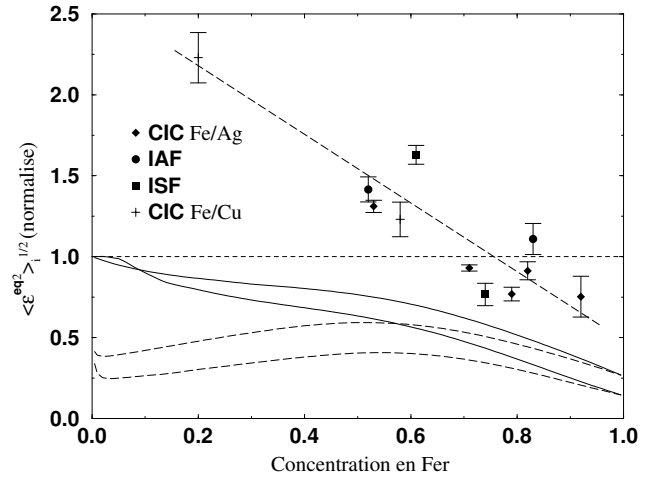


Figure 3.89 : Résultats pour  $E^{eq} = 5\%$

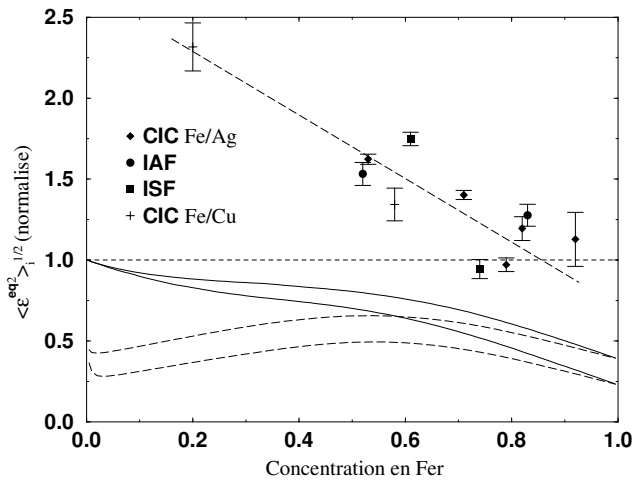


Figure 3.90 : Résultats pour  $E^{eq} = 10\%$

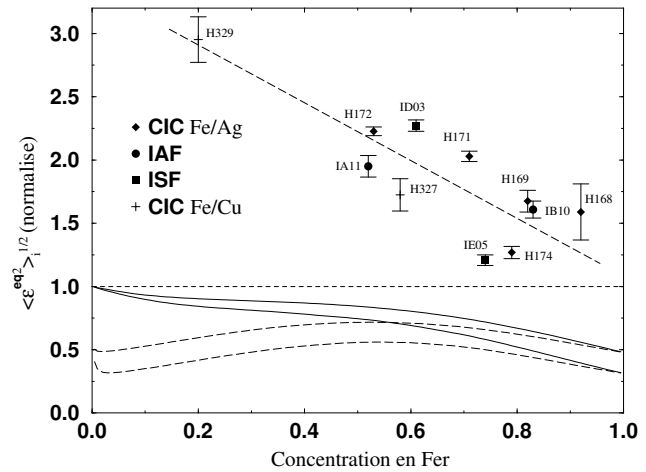


Figure 3.91 : Résultats pour  $E^{eq} = 15\%$

l'éprouvette CC IA11 et l'éprouvette H327 de « morphologie intermédiaire » présentent un degré d'hétérogénéité plus faible et les deux matériaux identifiés comme étant de structure MI mais qui présentent une hétérogénéité inter-phase plus faible sont également en-dessous de la droite ; seul le matériau IB10 présente un moment d'ordre deux élevé alors que la déformation moyenne dans la phase argent est légèrement inférieure à celle des matériaux MI. Ces positions relatives sont probablement principalement le reflet du niveau moyen de la déformation locale, comme le suggère la comparaison entre les fonctions de distribution des matériaux H171 et IE05 de la figure 3.59.

Cette dernière confrontation entre modèles et mesures expérimentales permet ainsi de conforter les conclusions antérieures.

### 3.2.C Application à des composites à matrice métallique

Si le modèle mnPh ne permet pas d'améliorer notablement les prévisions du modèle 3Ph relatives aux hétérogénéités de déformation locale, il existe toutefois des situations où il permet de prendre en compte des paramètres microstructuraux ayant une influence nette sur le comportement macroscopique.

C'est le cas par exemple des composites à matrice métallique et renforts céramiques particuliers, dont la matrice présente des gradients locaux de propriétés plastiques au voisinage des inclusions. Ce cas a été traité en collaboration avec Eric Maire du Laboratoire GEMPPM de l'*Institut National des Sciences Appliquées* de Lyon. Le problème et la démarche micromécanique entreprise pour l'aborder sont décrits exhaustivement dans les références [108, 109]. Nous donnons ici simplement quelques indications, mettant en évidence l'intérêt d'une discrétisation en couches de la sphère composite du modèle 3Ph.

Les matériaux en question sont des alliages d'aluminium de comportement élasto-plastique renforcés par des inclusions de carbure de silicium (SiC) élastiques non-plastiques. La dernière étape du procédé d'élaboration est un traitement thermique de mise en solution des éléments d'addition à  $530^{\circ}\text{C}$ , suivi d'une trempe à l'eau et d'un traitement de maturation, qui consiste à laisser le matériau à température ambiante pendant une quinzaine de jours au cours desquels des mécanismes de précipitation opèrent. A l'issue, un état stable dit T4 est atteint. Au cours du refroidissement, les incompatibilités de dilatation thermique entre matrice et renforts induisent une déformation plastique de la première au voisinage des seconds. Cela se traduit, à l'échelle du réseau cristallin, par des émissions de dislocations au niveau de l'interface et par leur propagation au sein de la matrice. Un modèle métallurgique adéquat [64] permet d'estimer leurs positions d'équilibre en fonction de la différence de température, de la taille des renforts, des coefficients de dilatation thermique, des modules d'élasticité des deux constituants et des propriétés métallurgiques de la matrice. On en déduit l'évolution de la densité de dislocations en fonction de la distance à l'interface, que l'on peut convertir en déformation plastique équivalente. La figure 3.92 donne par exemple le profil calculé pour un alliage 2618 et des inclusions de  $10\ \mu\text{m}$  de diamètre : on constate que la zone où la matrice est écrouie d'après ce modèle s'étend sur plusieurs micromètres. Le comportement de la matrice au sein du composite est ainsi différent de celui de l'alliage pur ayant subi le même traitement thermique et présente de surcroît des variations locales importantes suivant la distance aux particules.

Le modèle mnPh permet de rendre compte de cette hétérogénéité de comportement au sein de la matrice : le motif utilisé pour décrire cette microstructure est une sphère composite multicouche. Le noyau central représente les renforts de comportement élastique linéaire ( $k = 223\text{GPa}$ ,  $\mu = 210\text{GPa}$ ) et les autres couches concentriques d'épaisseur faible rendent compte du gradient de comportement plastique de la matrice. Leurs modules d'élasticité sont les mêmes ( $k = 73\text{GPa}$ ,  $\mu = 28\text{GPa}$ ) mais les courbes d'écrouissage diffèrent. On en construit une bonne estimation à partir de la courbe de traction de l'alliage pur en ne retenant que la partie postérieure à la déformation plastique atteinte à l'issue du traitement thermique et en translatant d'autant la courbe obtenue : la procédure est illustrée en figure 3.93.

Le modèle 3Ph non discrétisé ne permet pas de rendre compte de cette hétérogénéité de comportement mais il permet néanmoins de construire une estimation du comportement global : on suppose pour cela l'écrouissage initial uniforme dans la matrice et on construit sa courbe de traction par la même procédure que précédemment. La valeur de déformation plastique retenue est la moyenne  $\epsilon_p^{moy}$  des valeurs locales données par le profil d'écrouissage. Avec la courbe de la figure 3.92 et une fraction volumique de particules de 10%, on obtient par exemple  $\epsilon_p^{moy} \approx 0.5\%$  et la courbe de traction obtenue est en fait celle donnée en figure 3.93. On peut enfin utiliser le modèle 3Ph sans tenir compte de l'écrouissage induit par le traitement thermique, en utilisant telle quelle la courbe de l'alliage 2618T4.

Les courbes macroscopiques calculées par ces divers modèles sont données en figure 3.94. L'extension classique et l'extension modifiée ont été utilisées. La courbe calculée avec le modèle 3Ph avec écrouissage uniforme présente une limite d'élasticité très élevée, due au fait que la matrice ne se plastifie qu'au delà d'une contrainte moyenne élevée. En revanche, le modèle prenant en compte le gradient local prévoit un écoulement plastique très précoce, pratiquement comme s'il n'y avait pas d'écrouissage initial. L'écrouissage est ensuite progressif, mais plus intense que celui prévu par le modèle sans déformations initiales : la courbe rejoint petit à petit, à mesure de la plastification progressive des couches, celle prévue par le modèle avec écrouissage initial uniforme. Ces formes de courbes sont respectées par les modèles fondés sur l'extension classique comme par ceux utilisant l'extension modifiée. Ces derniers présentent toutefois des niveaux de contrainte plus faibles et des écarts légèrement plus tenus entre les trois approches. L'écrouissage progressif prévu par le modèle mnPh est qualitativement

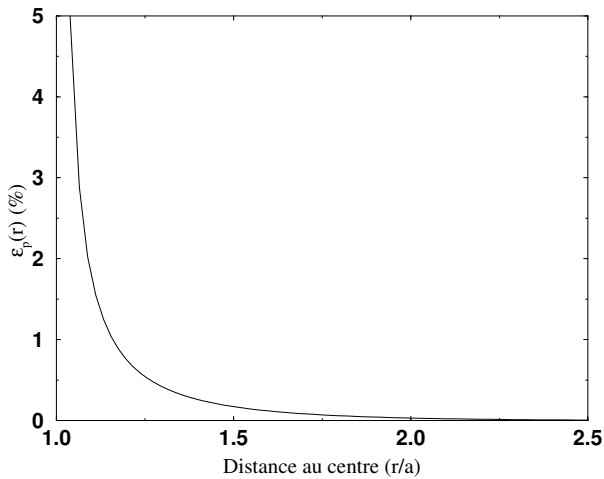


Figure 3.92 : Déformation plastique due aux incompatibilités de dilatation thermique en fonction de la distance normalisée au centre des renforts de rayon  $a$

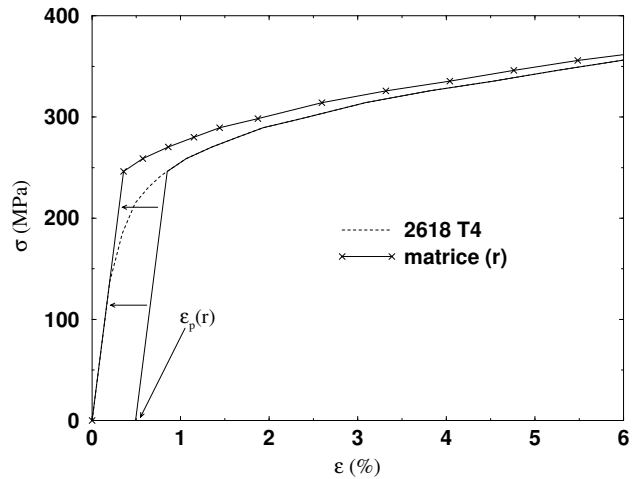


Figure 3.93 : Courbe de traction de l'alliage 2618 non écroui - Déduction du comportement de la matrice à la distance  $r$  du centre de la particule

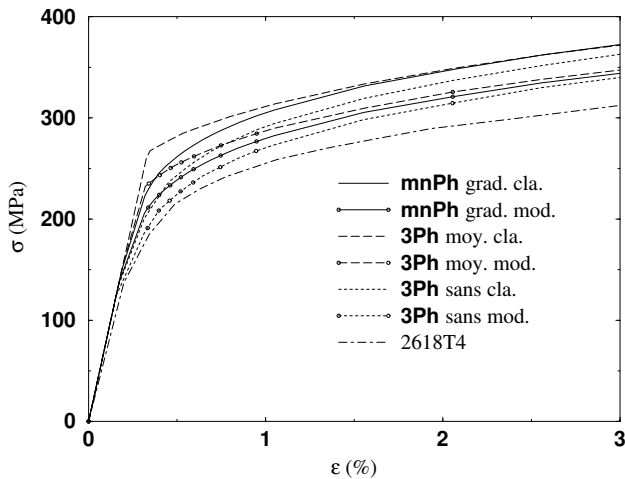


Figure 3.94 : Courbes de traction macroscopique calculées avec le modèle *mnPh* (40 couches) prenant en compte de gradient d'écroutissage initial et avec le modèle *3Ph* en supposant l'écroutissage uniforme ou en le négligeant - 10% de particules - extension non-linéaire classique et modifiée

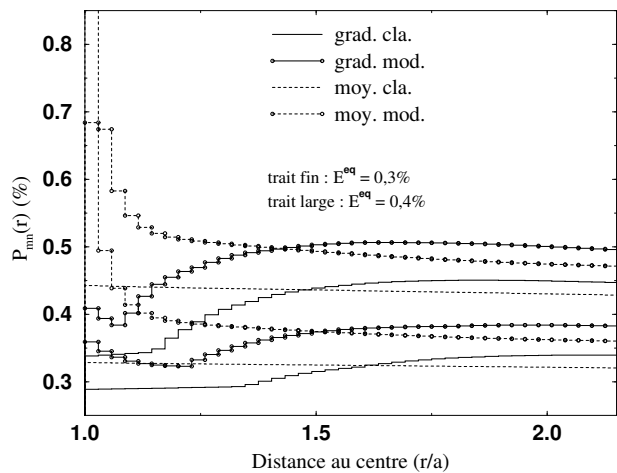


Figure 3.95 : Paramètres d'écroutissage en fonction du rayon, d'après le modèle *mnPh* (40 couches), en supposant l'écroutissage initial uniforme ou en tenant compte du gradient local - extension non-linéaire classique et modifiée - deux taux de déformation macroscopique

relativement proche des mesures expérimentales, même si, en valeurs absolues, des écarts subsistent. Précisons toutefois que ces modèles simplifiés ne prennent pas en compte tous les paramètres physiques du problème ; ils ignorent en particulier la présence de contraintes internes.

D'aucuns pourraient contester l'intérêt d'une telle modélisation compte tenu de la faiblesse des écarts entre les courbes macroscopiques prévues en comparaison des incertitudes expérimentales. On leur opposera que les prévisions à l'échelle locale des différentes approches sont complètement différentes, comme en attestent les profils des paramètres  $P_{mn}$  donnés en figure 3.95, pour deux niveaux de sollicitation en début de plastification. Les résultats donnés par le modèle *mnPh* prenant en compte le gradient et le même modèle, mais avec un comportement identique des couches de la matrice, sont reportés. Précisons que ce dernier modèle donne quasiment le même comportement macroscopique que le modèle *3Ph* utilisant la même courbe pour la matrice. On observe qu'en l'absence de prise en compte du gradient de comportement, la plastification est presque homogène, d'après l'extension classique, ou intense à proximité de l'interface, d'après l'extension modifiée. Quand il est pris en compte, c'est

exactement le contraire qui se passe : l'écoulement plastique survient d'abord dans des couches plus éloignées et moins écrouies. Les champs locaux de déformation ou de contrainte qui en résultent sont très différents, et les informations que l'on peut en extraire, notamment en termes d'apparition d'endommagement de la matrice ou de niveaux de sollicitation de l'interface, peuvent être opposées.

### 3.2.D Conclusions

Le modèle *mnPh* et ses diverses extensions non-linéaires s'avèrent ainsi insuffisants pour rendre compte de toutes les observations expérimentales relatives aux matériaux biphasés modèles testés au cours de cette étude. Ils ne modifient pas les conclusions générales formulées au sujet des prévisions d'hétérogénéités inter- et intra-phase par le modèle *3Ph*.

Ils reprennent toutefois dans un formalisme unique la plupart des modèles analytiques antérieurs de composites à microstructure aléatoire et phases isotropes, invoquant, explicitement ou non, une symétrie sphérique des domaines de phase ou de leur distribution au sein d'un VER. De plus, ils permettent d'aborder des situations morphologiques nouvelles, telles la présence d'une troisième phase, les fluctuations de concentration ou les inversions locales de configuration au sein d'une microstructure MI, ou encore l'existence d'un gradient local des propriétés mécaniques des phases.

Par ailleurs, la discrétisation en sous-couches permet d'améliorer la description des hétérogénéités locales selon la direction radiale des motifs sphériques. Les hétérogénéités selon la direction perpendiculaire sont toujours lissées par l'extension non-linéaire classique mais l'extension modifiée semble en rendre partiellement compte. Cette discrétisation n'a que peu d'effet sur la prévision du comportement global, mais elle permet de mieux décrire la plastification à l'échelle locale. Elle semble en particulier rendre compte de la plupart des hétérogénéités au sein du noyau central, où les surfaces d'isovaleurs de la déformation équivalente sont presque des sphères.

Enfin, notons que les résultats des mesures expérimentales ne permettent pas d'identifier quels paramètres morphologiques ont une influence prépondérante sur le comportement mécanique. Classer une microstructure parmi les morphologies de type MI et CC ne suffit probablement pas pour rendre compte de toute sa richesse, même si quelques tendances communes peuvent être relevées parmi les microstructures de même type, comme par exemple le niveau de déformation moyen par phase. Une telle description suffit pour le comportement élastique linéaire du fait de la proximité des bornes sur les modules qu'on en déduit, en tous cas pour les matériaux que nous avons étudiés, dont le contraste de phase est somme toute relativement faible. Les incertitudes de mesure rendent en revanche presque illusoire la vérification de l'effet de la morphologie sur les modules. Les incohérences apparentes que révèlent les premières confrontations peuvent en revanche être facilement levées lorsqu'on prend en compte la probable présence de porosités.



### 3.3 Origines des hétérogénéités

Les diverses extensions du modèles 3Ph étudiées au paragraphe précédent n'ont pas permis de modéliser de manière satisfaisante les hétérogénéités inter et intra-phases observées expérimentalement. Nous tentons dans la dernière partie de ce chapitre de faire la liste des origines possibles des écarts observés.

#### 3.3.A Insuffisance des extensions non-linéaires

Une des approximations essentielles des extensions non-linéaires, classique ou modifiée, consiste à remplacer le champ des modules sécants locaux par des champs uniformes par morceaux, afin de pouvoir appliquer les modèles linéaires relatifs à une telle distribution de modules. Dans les approches usuelles, les domaines où les modules sont choisis uniformes s'identifient aux domaines des phases « mécaniques » du matériau. Les variantes que nous avons proposées réduisent légèrement cette approximation, puisque les modules sécants au sein d'une même phase ne sont plus uniformes, mais dépendent des positions particulières dans les motifs et de la distance aux centres si l'on a recours à une discrétisation. La description de l'état du milieu hétérogène non-linéaire est alors plus riche, mais probablement toujours insuffisante pour rendre compte des champs réels de modules sécants.

Pour mettre en évidence cette insuffisance, on peut comparer les distributions réelles de modules de cisaillement sécants au sein des matériaux, déduites des distributions mesurées de déformations équivalentes locales et de la loi de comportement locale des phases, aux distributions de modules sécants utilisées dans les modèles d'homogénéisation. Les figures 3.96 et 3.97 fournissent les comparaisons relatives à l'essai H172 pour deux niveaux de déformation macroscopique. Les modules sont exprimés sur une échelle logarithmique, relative au module sécant macroscopique.

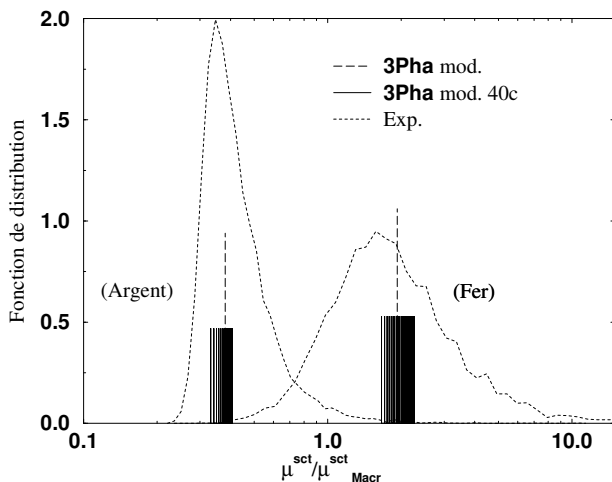


Figure 3.96 : Distribution expérimentales et théoriques des modules sécants locaux. Modèle 3Pha, avec ou sans discrétisation, extension modifiée - Données de H172 -  $E^{\text{eq}} = 5, 5\%$

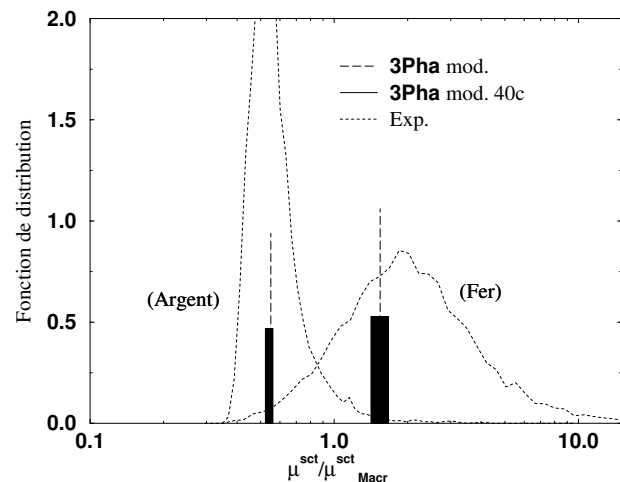


Figure 3.97 : Distribution expérimentales et théoriques des modules sécants locaux. Modèle 3Pha, avec ou sans discrétisation, extension modifiée - Données de H172 -  $E^{\text{eq}} = 13, 2\%$

Ces figures mettent en évidence une hétérogénéité de « comportement sécant » local très importante, puisque le rapport des modules de cisaillement extrêmes atteint près de 50, soit bien plus que le rapport des modules d'élasticité, proche de 3. De plus, la répartition spatiale des modules ne s'identifie plus à la seule distribution géométrique des phases constitutives. S'il est vrai que les distributions de modules font apparaître deux pics clairement différenciés correspondant aux deux phases, ces pics sont loin d'être des distributions de Dirac mais présentent des largeurs assez importantes, rendant compte d'hétérogénéités de modules intra-phases élevées : les rapports entre modules extrêmes d'une même phase atteignent, voire dépassent, des valeurs de l'ordre de 10. Notons aussi que certaines zones de la phase dure présentent des modules plus faibles que d'autres zones de la phase molle.

Les extensions non-linéaires qui associent un module unique à chaque phase ne rendent compte que de l'hétérogénéité inter-phases, caractérisée par un rapport de modules de l'ordre de 4. Elles ignorent ainsi une bonne part de la richesse de la distribution des modules sécants locaux. Lorsqu'on a recours à une discrétisation des phases du modèle 3Ph en sous-couches une certaine part de l'hétérogénéité de comportement sécant intra-phase est pris en compte, mais de manière bien insuffisante en comparaison de la réalité. De plus, cette part tend à s'amoindrir à mesure que la déformation macroscopique augmente : les distributions théoriques se resserrent alors que la largeur des distributions mesurées est constante, voire augmente dans le cas du fer.

### 3.3.B Discrétisation orthoradiale : calculs par éléments finis

Des considérations de ce type nous ont conduit à chercher à améliorer encore la discrétisation des phases au sein de la sphère composite et à prendre notamment en compte l'hétérogénéité des modules le long de l'angle polaire  $\theta$ , qui s'avère plus importante que l'hétérogénéité le long du rayon, en tous cas dans l'enveloppe de matrice. Aucune solution analytique généralisant celle de l'inclusion multicouche à des situations d'inhomogénéité de modules orthoradiale n'est toutefois disponible et le recours au calcul numérique s'impose.

Nous avons donc procédé à un calcul élasto-plastique par éléments finis d'une inclusion composite en milieu infini. Le maillage utilisé est décrit en figure 3.98. Les trois matériaux sont supposés obéir à une loi de comportement élasto-plastique de von Mises, avec écrouissage isotrope et écoulement normal. Les modules d'élasticité et les courbes d'écrouissage de l'inclusion et de la matrice sont celles des phases correspondantes<sup>27</sup>. Ceux du milieu infini sont déduits des précédents par le modèle 3Pha analytique, fondé sur l'extension modifiée. Les courbes de traction simple correspondantes sont données en figure 3.99. L'extension du maillage axisymétrique est limitée à trois fois le rayon de la sphère composite et des conditions de traction simple sont imposées à ses frontières.

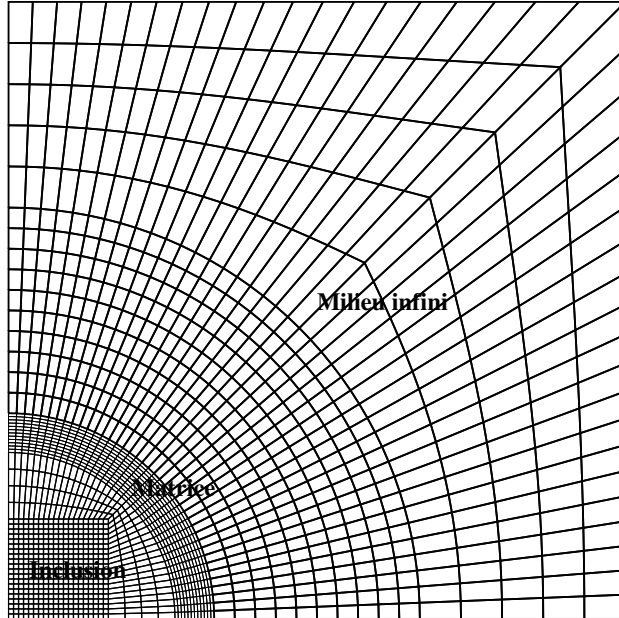


Figure 3.98 : Maillage axisymétrique utilisé pour le calcul par éléments finis - 1640 éléments bilinéaires avec 4 points de Gauss et 1712 nœuds -  $c_{Fe} = 53\%$

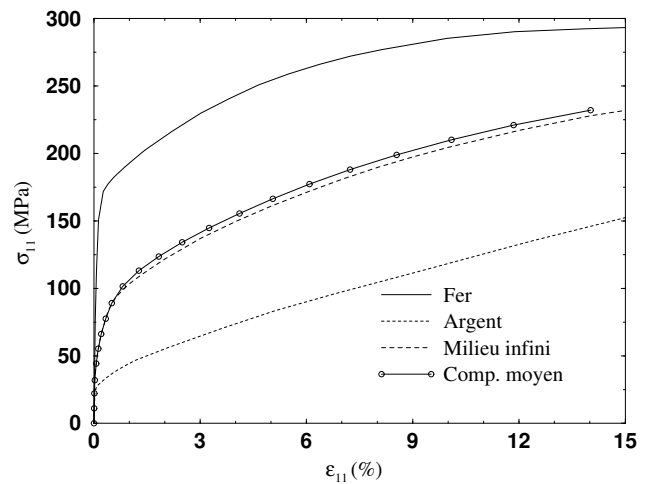


Figure 3.99 : Courbes de traction utilisées dans le calcul par éléments finis (données de H172, biphasé calculé par 3Ph, extension modifiée) et courbe de traction « moyenne », selon deux estimations

Aucune condition d'autocoherence n'est appliquée et ce calcul n'a aucune prétention à étendre rigoureusement à des comportements élasto-plastiques avec variables internes les modèles discutés

<sup>27</sup>Le comportement du fer est toujours obtenu par l'application inverse du modèle AC classique (cf. paragraphe 3.1.B.b).

jusqu'ici dans le cadre des comportements élastiques non-linéaires. Les champs calculés dans la sphère composite étant toutefois supposés représentatifs de la localisation au sein des motifs dans un VER, on peut malgré tout s'intéresser à la courbe de « comportement macroscopique » déduite de l'état moyen de contrainte et de déformation ( $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle, \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ ) dans la sphère composite. La courbe de traction peut ainsi être estimée par ( $\langle \sigma_{zz} \rangle, \langle \epsilon_{zz} \rangle$ ), ou mieux, cet état moyen n'étant pas tout à fait une traction simple, par ( $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle^{\text{eq}}, \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle^{\text{eq}} + \frac{1}{9k} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle^{\text{eq}}$ ), où  $k$  est le module de compressibilité linéaire calculé par le modèle 3Pha linéaire. Les courbes obtenues (figure 3.99) sont pratiquement confondues et très proches de la courbe utilisée pour le milieu infini. La démarche mise en œuvre s'avère ainsi très proche de celle entreprise par d'autres auteurs [51] et discutée à la fin du paragraphe 1.3.A.c : elle est en particulier sujette aux mêmes critiques mais devrait toutefois permettre de qualifier la pertinence des champs locaux calculés dans l'inclusion composite avec les approches analytiques ne prenant pas en compte les hétérogénéités orthoradiales.

Les résultats de ces calculs numériques ont été comparés aux résultats analytiques et aux mesures expérimentales aux différentes échelles déjà considérées jusqu'à présent.

- En termes de déformations moyennes par phase (figure 3.100), le calcul par éléments finis prévoit une hétérogénéité légèrement supérieure à celle donnée par le modèle 3Pha (extension modifiée). En particulier, on observe pour l'essai H172 un bon accord entre calcul et expérience pour environ 9% de déformation macroscopique, alors que l'hétérogénéité inter-phase est légèrement sur-estimée pour  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle^{\text{eq}} \approx 5\%$ . En revanche l'allure générale des courbes obtenues n'est pas modifiée qualitativement : elles présentent toujours une « saturation » de l'hétérogénéité, contrairement à l'observation expérimentale qui rend compte d'une évolution quasi-proportionnelle. Notons par ailleurs que dans le calcul numérique élasto-plastique, la déformation appliquée à l'« infini »  $E^0$  n'est plus égale à la déformation moyenne sur la sphère composite  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  mais s'avère supérieure : la condition d'auto-cohérence portant sur ces quantités n'est pas satisfaite. Il n'est donc pas certain que l'amélioration de la prévision d'hétérogénéité inter-phase soit uniquement liée à la prise en compte de l'inhomogénéité orthoradiale ; elle peut aussi être le reflet d'une modification intrinsèque de la notion d'auto-cohérence, qui reste à définir précisément pour les comportements non-linéaires.

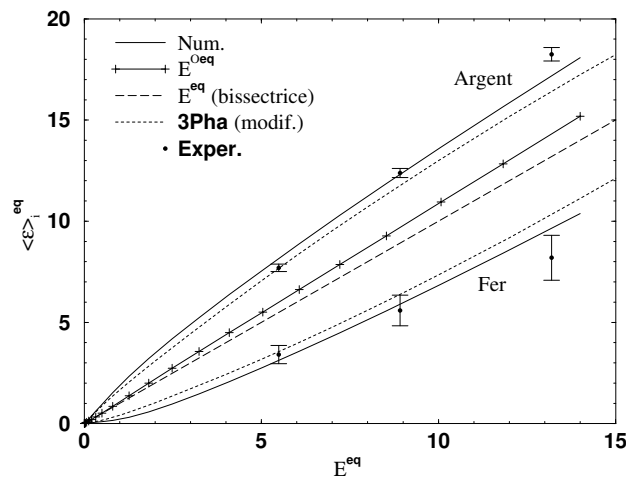


Figure 3.100 : Déformations moyennes par phase en fonction de la déformation macroscopique équivalente - 3Ph (extension modifiée) et calcul par éléments finis

- Le calcul par éléments finis présente par ailleurs un étalement des distributions de déformations équivalentes locales. L'élargissement apporté par la meilleure description des hétérogénéités orthoradiales par rapport au calcul analytique utilisant l'extension modifiée et une discrétisation est sensiblement du même ordre de grandeur que celui induit par ce dernier calcul par rapport au modèle utilisant l'extension classique sans discrétisation (figure 3.101). Il reste en revanche notoirement insuffisant pour rendre compte des distributions réelles, notamment dans le fer. L'évolution des largeurs rel-

atives des distributions en fonction du chargement macroscopique est qualitativement la même que celle prévue par les modèles analytiques : un resserrement d'amplitude comparable à celui prévu par ces derniers est révélé et s'oppose à l'observation expérimentale (figure 3.102, à comparer à la figure 3.49).

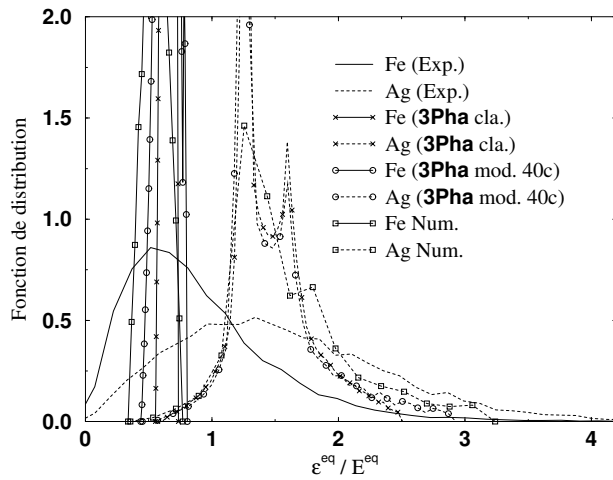


Figure 3.101 : Distribution des déformations équivalentes - 3Ph (extension modifiée), calcul par éléments finis et mesures expérimentales -  $E^{eq} \approx 5\%$

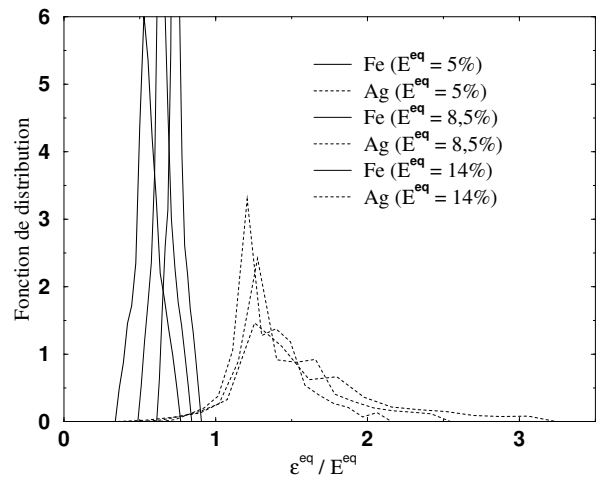


Figure 3.102 : Distribution des déformations équivalentes calculées par éléments finis pour divers taux de déformation macroscopique

- On peut enfin s'intéresser directement aux champs locaux dans les inclusions composites, utilisés pour construire les fonctions de distributions commentées précédemment. Les figures 3.103 et 3.104 donnent les lignes d'isovaleurs de la déformation équivalente locale d'après le calcul analytique utilisant l'extension modifiée et une discrétisation en 40 couches et le calcul numérique, pour une même déformation moyenne. On observe quelques différences quantitatives. La zone fortement déformée dans la matrice, à environ  $45^\circ$  par rapport à l'axe de traction, est par exemple plus étendue selon le calcul numérique et la déformation y atteint des valeurs plus élevées ; ceci est à l'origine de l'élargissement de la distribution de déformation. Par ailleurs, le champ dans l'inclusion perd sa quasi-symétrie sphérique. Toutefois, l'allure qualitative générale des champs locaux est la même, le champ dans l'inclusion sphérique restant presque homogène.

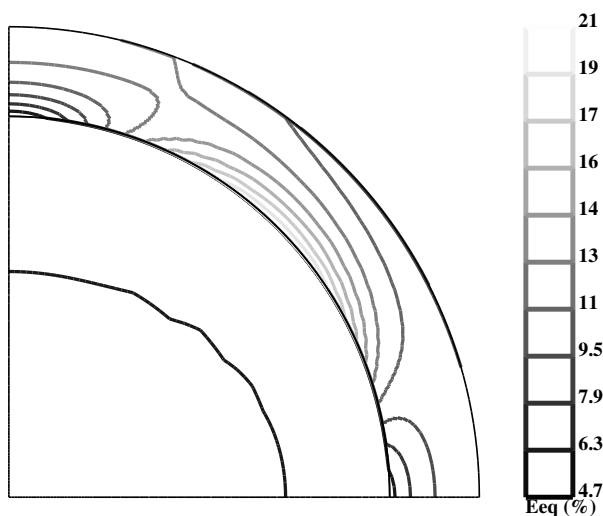


Figure 3.103 : Champ de déformation équivalente dans la sphère composite calculé par le modèle 3Ph - extension modifiée, 40 couches par phase -  $E^{eq} = 8,5\%$  - Axe de traction vertical

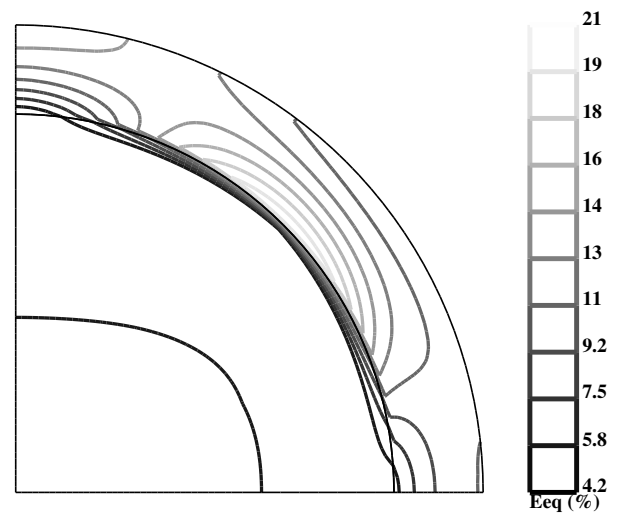


Figure 3.104 : Champ de déformation équivalente dans la sphère composite calculé par éléments finis -  $E^{eq} = 8,5\%$  - Axe de traction vertical

Ces résultats montrent que les calculs analytiques approchés, dans lesquels les inhomogénéités de comportement orthoradiales sont lissées et les champs locaux estimés par la solution d'un problème d'élasticité linéaire, s'avèrent en fin de compte pertinents. De plus, la nature analytique des relations utilisées garantit des temps de calcul très courts : quelques dizaines de secondes suffisent pour obtenir des résultats presque identiques à ceux fournis par le calcul par éléments finis qui dure plusieurs heures et requiert des capacités de mémoire interne bien plus importantes. Précisons aussi que les contraintes locales calculées numériquement évoluent de manière presque proportionnelle : les approximations faites en décrivant le comportement élasto-plastique local par une loi élastique non-linéaire sont ainsi partiellement justifiées<sup>28</sup>.

### 3.3.C Formalisme en grande transformation

Toutes les modélisations tentées dans ce travail, y compris les calculs par éléments finis présentés au paragraphe précédent, reposent sur l'« hypothèse des petites perturbations ». Or les déformations atteignent des valeurs relativement élevées, notamment à l'échelle locale : pour 15% de déformation macroscopique, des valeurs de l'ordre de 30% sont calculées localement dans les inclusions composites et des valeurs supérieures à 50% sont mesurées expérimentalement. Ces taux de déformation ne sont plus compatibles avec les hypothèses des modèles utilisés.

Une certaine part des écarts entre expériences et modèles est probablement liée à cette incompatibilité, surtout pour les déformations élevées. Le phénomène de saturation des hétérogénéités prévu par les modèles pourrait en particulier en être une conséquence. Nous n'avons toutefois pas entrepris de calculs en grande transformation, du fait de l'absence de théorie générale d'homogénéisation s'inscrivant dans un tel formalisme et utilisant des motifs hétérogènes<sup>29</sup>.

La seule tentative que nous ayons entreprise dans ce sens consiste à reprendre les mêmes calculs mais en utilisant des courbes de traction exprimées sur une autre échelle que celle des déformations logarithmiques  $\ln(1 + (l - l_0)/l_0)$  et des contraintes vraies de Cauchy  $F/S$ . Les modèles reposant sur l'hypothèse des petites perturbations, il pourrait sembler plus judicieux d'utiliser des contraintes apparentes  $F/S_0$  et des déformations linéarisées  $(l - l_0)/l_0$ . L'écroutissage apparent est alors plus faible et l'effet commence à être sensible pour des déformations supérieures à 5%, comme en atteste la comparaison des courbes relatives au matériau H172 reportées en figure 3.105.

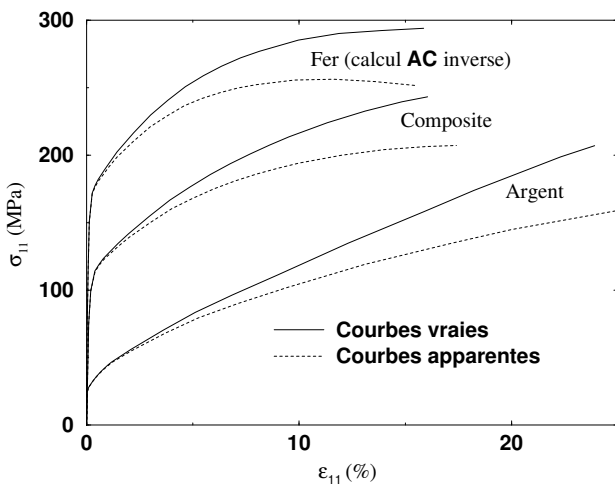


Figure 3.105 : Courbes de traction simple, apparentes et vraies - Matériau H172 -  $c_{Fe} = 57\%$

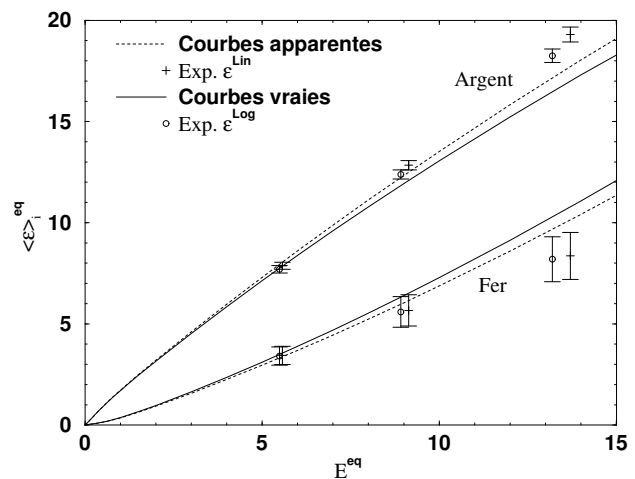


Figure 3.106 : Hétérogénéité inter-phase obtenue en utilisant des courbes d'écroutissage apparentes ou vraies - H172 - Modèle 3Pha, extension modifiée, 20 couches

<sup>28</sup>et seulement partiellement, puisque ce résultat ne garantit en aucun cas une évolution proportionnelle des contraintes locales au sein d'un VER.

<sup>29</sup>De telles approches ont été développées pour des inclusions homogènes [105].

Les prévisions d'hétérogénéité de déformation locale obtenues avec ces courbes apparentes diffèrent bien sûr en valeur absolue de celles obtenues avec les courbes vraies. Toutefois ces résultats de calculs doivent être comparés aux mesures expérimentales correspondantes, c'est-à-dire celles exprimées sur l'échelle des déformations linéarisées. Les comparaisons aboutissent alors aux mêmes conclusions qualitatives : les hétérogénéités inter-phase (voir figure 3.106) comme intra-phase restent sous-estimées dans les situations où elles le sont lorsqu'on utilise les contraintes et déformations vraies.

### 3.3.D Insuffisance de la description microstructurale : mécanismes locaux

Les modèles utilisés proposent une représentation simplifiée de la réalité microstructurale et ignorent certains phénomènes locaux qui contribuent à l'hétérogénéité des champs. Nous en recensons principalement trois.

- Les *géométries* des interfaces sont à l'échelle locale relativement *complexes*. Même si, dans certaines situations, la nature inclusionnaire de l'un des constituants est assez évidente, les inclusions sont très loin d'être des sphères. La quasi-homogénéité des champs locaux dans l'inclusion du modèle 3Ph et de ses diverses variantes résulte de la géométrie sphérique de l'inclusion et de son mode de chargement somme toute relativement proche de celui de l'inclusion d'Eshelby, alors que ces conditions sont loin d'être vérifiées au sein des matériaux réels. Certaines configurations locales des phases comportent des « cous » étroits, des concavités prononcées et des connectivités assez compliquées. La figure 3.107 présente un exemple d'une telle zone, où l'on a mesuré une déformation locale élevée.
- Dans les calculs, les phases sont supposées homogènes. Or leur *nature polycristalline* ne peut-être complètement ignorée. La taille moyenne des grains est, nous l'avons vu, inférieure à la dimension caractéristique des domaines de phases. L'écart est toutefois trop faible pour que l'on puisse assimiler les phases à des matériaux homogènes du point de vue du comportement plastique. Une part non négligeable de l'hétérogénéité intra-phase est probablement liée à cet aspect, et ce d'autant plus que l'extension des domaines d'intégration utilisés pour calculer les déformations locales à partir des déplacements des points de la grille (*cf.* paragraphe 2.3.B) est justement de l'ordre de grandeur de la taille des grains, voire légèrement inférieure. La figure 3.108 présente une zone où les différences d'orientation des grains dans l'argent conduisent à des niveaux de déformation différents, révélés par les points de la grille et les traces des systèmes de glissement.
- Le troisième mécanisme local totalement ignoré par les modèles est l'apparition d'*endommagement*, qui se manifeste sous diverses formes : germination et croissance de cavités autour de petites inclusions non plastiques, notamment dans le fer (figure 3.109), ruptures locales à l'interface entre les deux phases ou encore rupture aux joints de grains. Il devient assez important dès 10% de déformation macroscopique et conduit à la rupture, en général par striction, pour une déformation macroscopique variant, suivant les matériaux, entre 18 et plus de 30%. Il est indirectement pris en compte macroscopiquement par les modèles au travers des courbes d'écroutissage des phases, mais sa manifestation à l'échelle locale, fort probablement à l'origine d'une certaine part de l'hétérogénéité, n'est pas décrite.

Ces phénomènes locaux agissent de manière quasiment similaire dans tous les matériaux testés et dans les deux phases, indépendamment de la nature MI ou CC de la morphologie. La similitude des largeurs des fonctions de distribution entre matériaux de même concentration mais de morphologie différente (voir par exemple la figure 3.59) peut être expliquée de la sorte : cette largeur serait principalement le reflet des hétérogénéités induites par les phénomènes locaux, alors que seul l'état de sollicitation moyen dans chaque phase serait gouverné par la morphologie. On peut aussi expliquer de la sorte les prévisions d'hétérogénéité intra-phase du modèle 3Ph en fonction de la concentration. Aux teneurs élevées en inclusions, la couche de matrice entre les zones de fer est très fine et donc très sollicitée ; la représentation qu'en donne le modèle est satisfaisante et conduit à une prévision réaliste en termes de champs locaux. Au contraire aux teneurs faibles, le niveau d'hétérogénéité est contrôlé par ces mécanismes locaux non pris en compte par le modèle qui, de ce fait, ne peut le prévoir correctement.

Enfin, le fait que les mécanismes locaux agissent indifféremment dans les deux phases et y induisent des niveaux d'hétérogénéité comparables explique que les incertitudes sur les mesures de

moments d'ordre deux de la déformation sur chaque phase soient plus faibles que les incertitudes liées aux déformation moyennes (comparer par exemple les figures 3.42 et 3.89), alors qu'elles sont estimées par des procédures similaires, reposant sur une intégration « avec » ou « sans interface » (cf. paragraphe 2.3.E). Les moments d'ordre deux intègrent en effet une information à la fois sur la déformation moyenne et sur le niveau d'hétérogénéité intra-phase : le second étant sensiblement le même pour les deux phases, les écarts relatifs entre les calculs de moments d'ordre deux « avec » ou « sans interface » sont plus faibles que ceux entre les calculs de déformation moyenne seule.

### 3.3.E Interactions à grandes distances

Expliquer l'hétérogénéité intra-phase par ces seuls phénomènes locaux conduit toutefois à ignorer certaines interactions qui contribuent à la richesse du comportement local de ces matériaux biphasés. En effet, le tracé de cartes de déformations selon les procédures décrites au chapitre 2 permet de mettre en évidence l'existence de bandes de localisation de la déformation, orientées à environ  $45^\circ$  par rapport à l'axe de traction, c'est-à-dire sensiblement selon les directions de cisaillement maximal.

Dans certains matériaux, ces bandes ont une longueur qui excède largement la dimension cara-

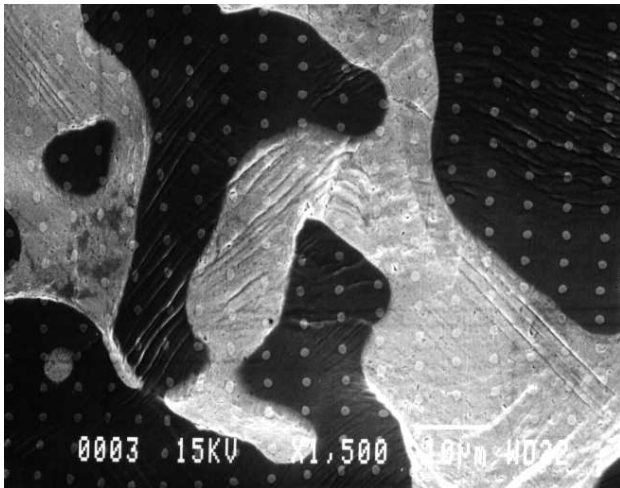


Figure 3.107 : « Microgéométries » complexes au sein des biphasés fer/argent - IE05,  $E^{eq} = 12,4\%$

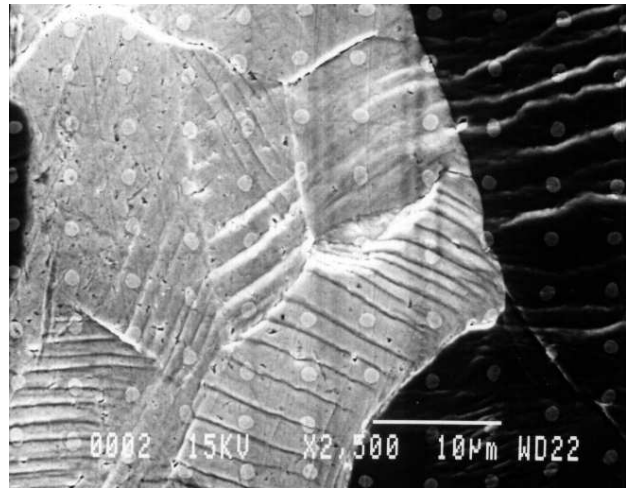


Figure 3.108 : Nature polycristalline des phases - IE05,  $E^{eq} = 12,4\%$

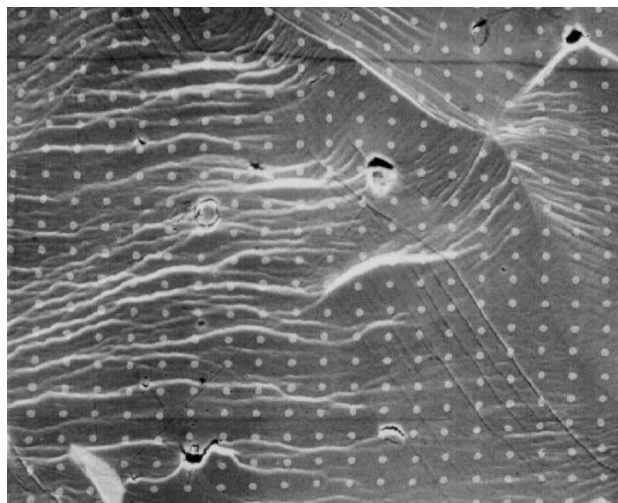


Figure 3.109 : Endommagement dans le fer - IE05,  $E^{eq} = 12,4\%$

ctéristique des domaines de phase, et révèlent l'existence d'interactions à longue portée. Un exemple relatif à l'essai H171, après environ 10% de déformation macroscopique, en est donné en **figure 3.110**. Les lignes d'isovaleurs de la déformation équivalente locale  $y$  sont reportées. Les bandes de localisation se développent au sein de la phase argent « molle » et sont presque rectilignes malgré la concentration élevée en fer qui fait que le degré d'imbrication des phases est important. Toutes les zones très sollicitées dans l'argent, c'est-à-dire là où la déformation dépasse environ trois fois la déformation macroscopique, appartiennent à de telles bandes. Les autres domaines dans l'argent sont à peine plus sollicités que les inclusions de fer, étant en quelque sorte protégées par ces dernières. À l'inverse, certaines zones dans le fer situées au travers des bandes de déformation subissent des déformations de même intensité que le reste des bandes.

Ces bandes sont le reflet d'un mode de déformation particulier qui régit ces matériaux : les blocs qu'elles délimitent « glissent » les uns par rapport aux autres, comme le révèlent les lignes d'isovaleurs de l'angle de rotation de corps solide selon un axe perpendiculaire à la surface de l'éprouvette (**figure 3.111**). Les bandes orientées à  $+45^\circ$  présentent systématiquement un angle positif (dans le sens trigonométrique) d'environ  $6^\circ$  alors que le matériau dans celles à  $-45^\circ$  subit une rotation de même amplitude dans le sens contraire. Les bandes fonctionnent en quelque sorte comme des « roulements linéaires » répartis au sein de la microstructure et permettant un mouvement relatif des blocs qu'elles délimitent. La déformation dans ces derniers est beaucoup moins intense, moins hétérogène et la rotation de corps solide  $y$  est presque nulle.

Ce mode de déformation est actif dans de nombreux matériaux testés *in situ* mais il n'est pas systématique. Les bandes sont observées dans toutes les microstructures, mais leur portée varie. Dans l'essai IE05 (**figures 3.112 et 3.113**), leur présence est beaucoup moins nette et leur longueur dépasse rarement la taille caractéristique des domaines de fer situés à leur proximité. De plus, la corrélation entre l'intensité de la déformation équivalente locale et l'angle de rotation de corps solide  $y$  est beaucoup moins net, si bien que les mécanismes de déplacement relatif de blocs sont plus difficiles à identifier, voire inexistant. On peut aussi noter que l'intensité de la déformation dans les bandes, exprimée relativement au chargement macroscopique,  $y$  est moins élevée, de même que l'angle de rotation. Dans un tel mode de déformation, les interactions semblent beaucoup plus locales et l'hétérogénéité de déformation est probablement principalement déterminée par les mécanismes locaux dont il a été question au paragraphe précédent.

L'apparition et l'intensité de ces bandes de localisation de la déformation est en revanche contrôlée par la morphologie globale de la microstructure. En effet, une observation détaillée de toutes les cartes de déformation, données en annexe **F**, permet de vérifier une corrélation assez nette entre l'existence d'un mécanisme de bandes et le niveau d'hétérogénéité inter-phase. La différence de mécanisme est nette entre les matériaux H171 et IE05 déjà présentés ; or ils présentent une concentration en fer de l'ordre de 75% et un comportement local des phases très proche, mais une hétérogénéité inter-phase très différente. On peut effectuer la même comparaison entre les matériaux H172 et IA11 de concentration voisine de 55%, même si les cartes obtenues avec les données correspondantes sont moins lisibles, car morcelées en petits domaines séparés. Précisons que les cartes données en annexe **F** donnent les lignes d'isovaleurs de la déformation équivalente locale rapportée à la déformation équivalente macroscopique ( $\epsilon^{eq}(x)/E^{eq}$ ) et que la même carte de couleurs a été utilisée pour toutes ces représentations, afin de faciliter les comparaisons. On peut ainsi vérifier que, de manière assez générale, les matériaux présentant le niveau d'hétérogénéité inter-phase le plus faible (*cf. figures 3.42 à 3.44*) sont ceux dont le réseau de bandes de localisation est le moins développé ou le plus diffus : il s'agit des biphasés IA11, H327, IE05 et, dans une moindre mesure, H174 et IB10. On note enfin que les bandes apparaissent aussi dans les matériaux très riches en fer (H168 et H169) mais qu'elles ne sont plus rectilignes et suivent au contraire un cheminement complexe entre les domaines de fer.

L'interprétation physique suivante peut être avancée pour expliquer ces résultats. Le développement de bandes de localisation est conditionné par l'existence de *plans* continus dans la phase molle permettant un glissement relatif des domaines adjacents (**figure 3.114**). Dans une microstructure clairement de type M1 de faible teneur en inclusions, la matrice molle est continue et aucun pont n'existe entre les inclusions, si bien que les plans de ce type sont nombreux. Pour une concentration plus élevée, il n'est plus possible de trouver des plans de ce type mais il existe toujours des *surfaces* continues à



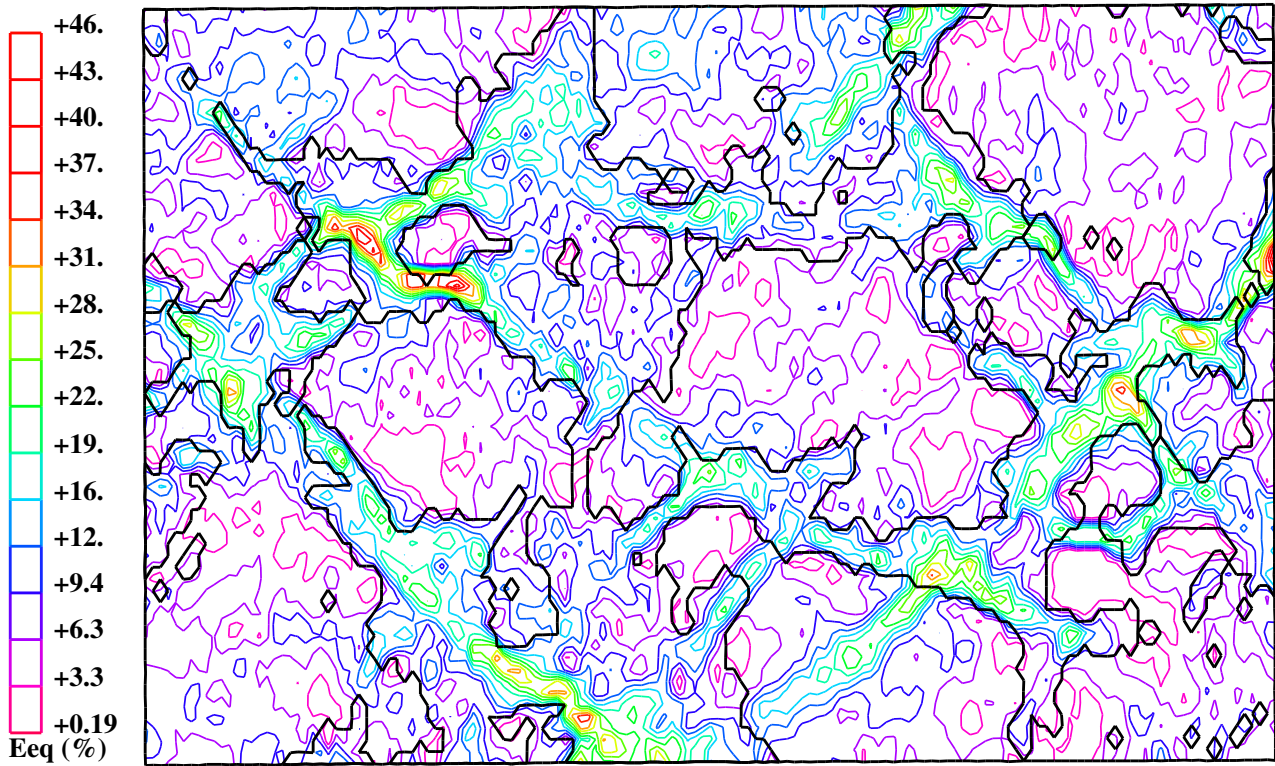


Figure 3.110 : Isovaleurs de la déformation équivalente locale - H171, CIC,  $c_{Fe} = 71\%$ ,  $E^{eq} = 9,2\%$  - Axe de traction verticale - L'interface est en trait noir gras

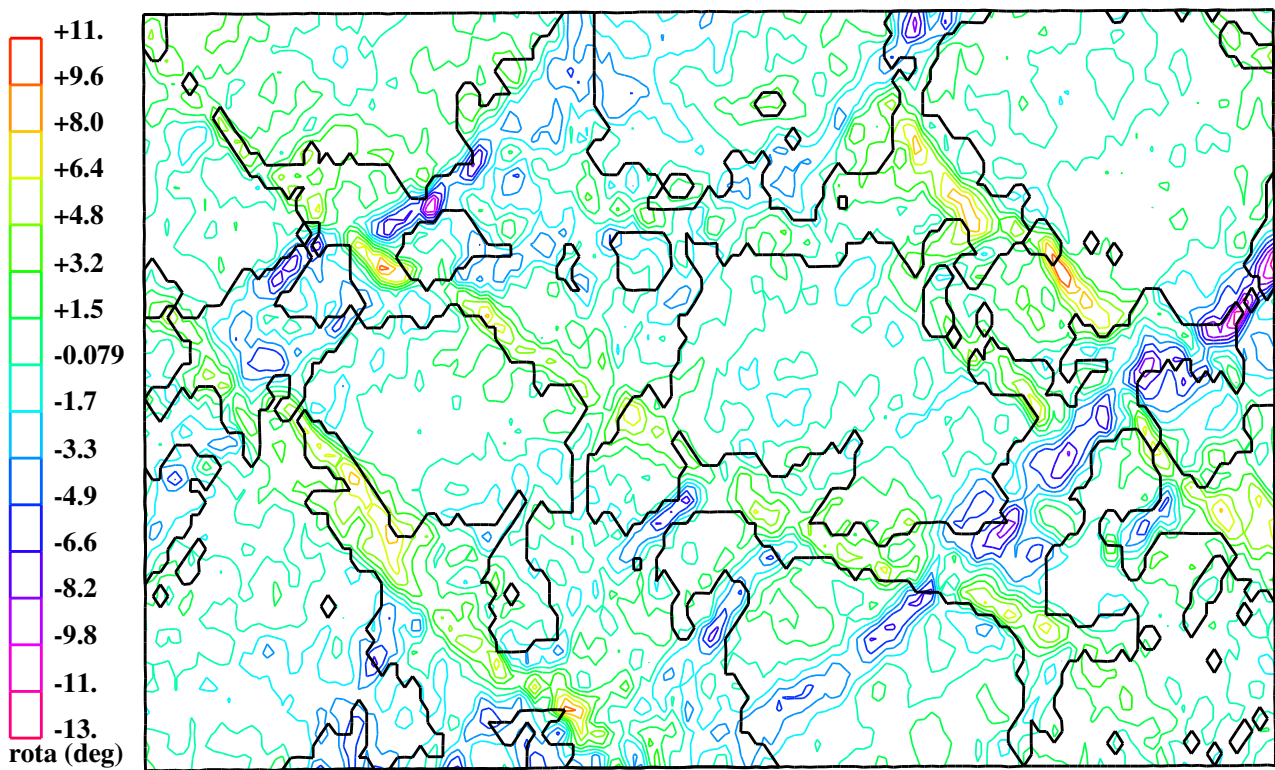


Figure 3.111 : Isovaleurs de l'angle de rotation de corps solide locale - H171, CIC,  $c_{Fe} = 71\%$ ,  $E^{eq} = 9,2\%$

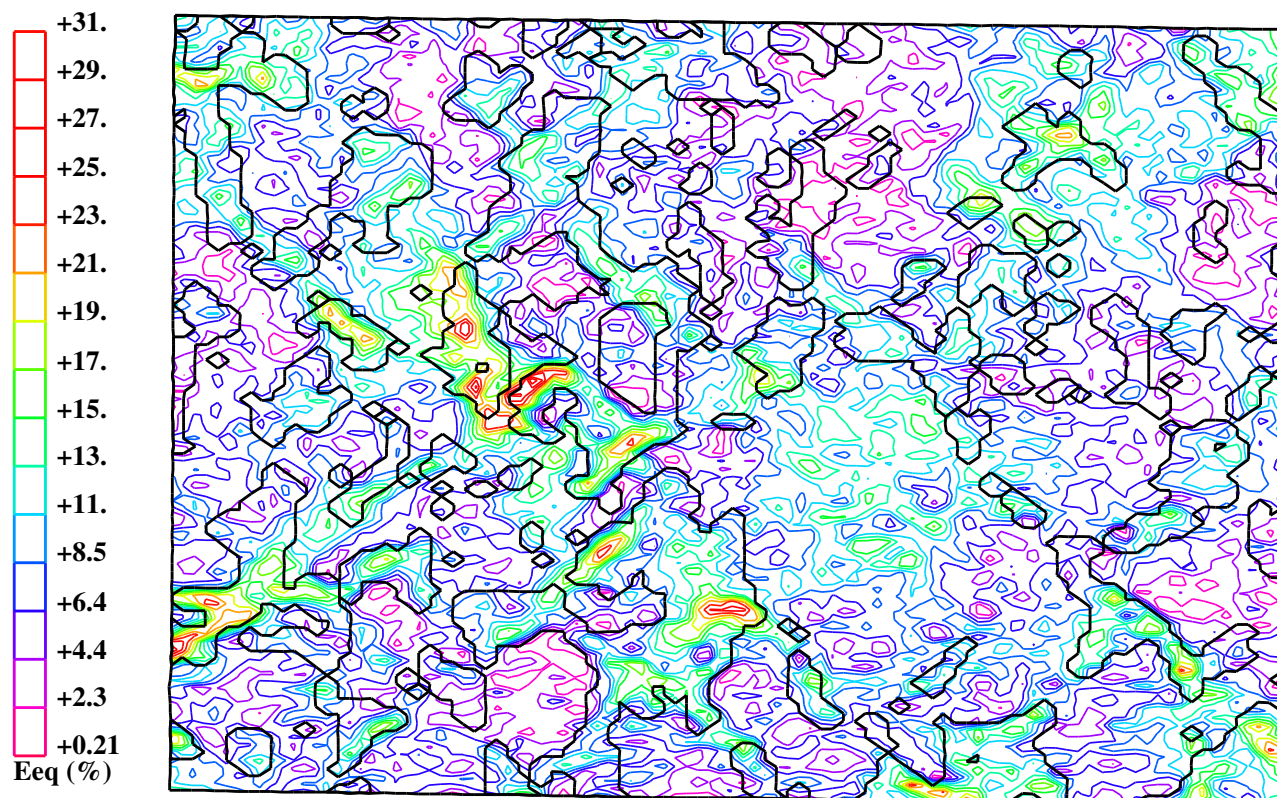


Figure 3.112 : Isovaleurs de la déformation équivalente locale - IE05, ISF,  $c_{Fe} = 74\%$ ,  $E^{eq} = 7,7\%$

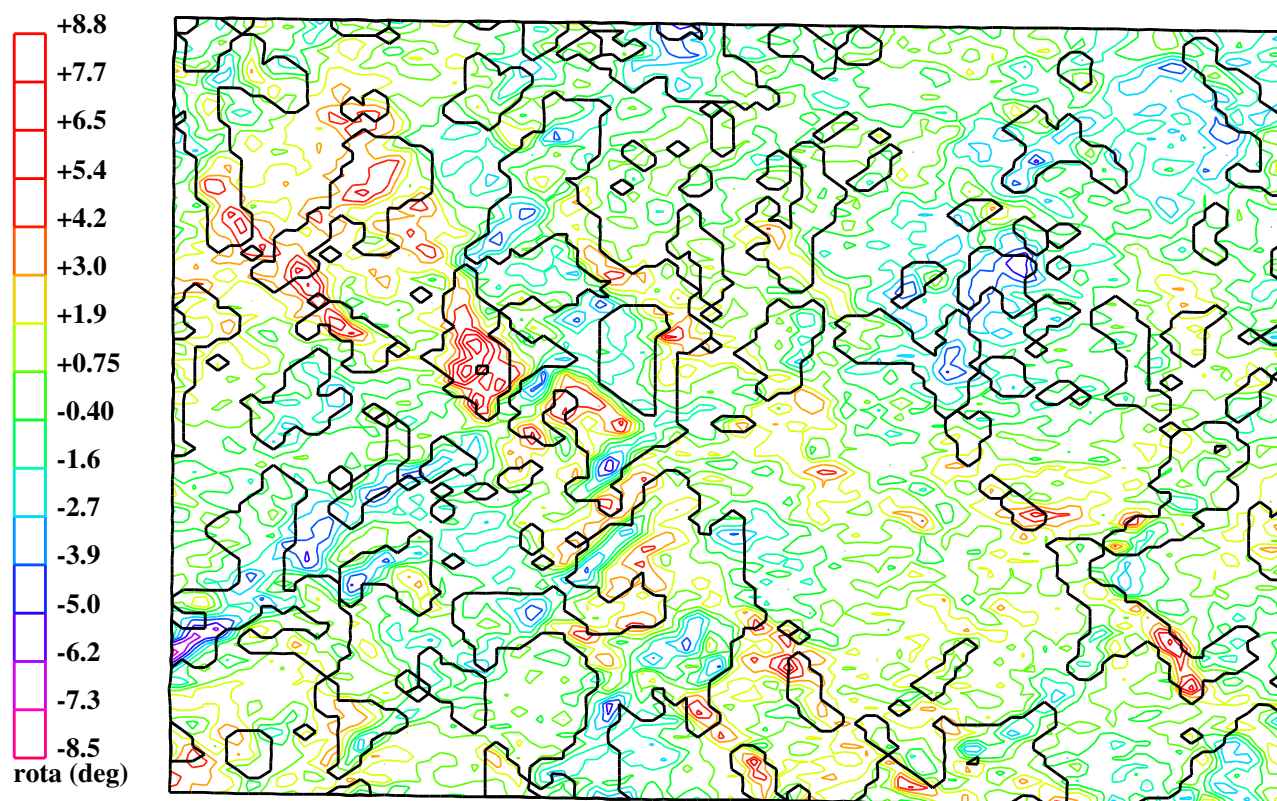


Figure 3.113 : Isovaleurs de l'angle de rotation de corps solide locale - IE05, ISF,  $c_{Fe} = 74\%$ ,  $E^{eq} = 7,7\%$

travers la phase molle, le long desquelles un glissement est encore possible, moyennant des déformations complémentaires dans les blocs pour accommoder les incompatibilités géométriques. En revanche, dans une microstructure « imbriquée », comme celles de morphologie CC, où les domaines de phase dure sont connectés entre-eux au travers de ponts plus ou moins nombreux et plus ou moins épais, de telles surfaces n'existent plus : elles sont très fréquemment interrompues par les ponts précités. L'activation du glissement par blocs nécessite alors une énergie plus élevée et conduit à des perturbations dans les blocs bien plus importantes. L'extension des mécanismes par blocs est ainsi limitée par la taille des plans continus dans la phase molle : les bandes sont plus courtes, le réseau est plus diffus et tend à se confondre dans les perturbations locales. Ces deux situations extrêmes induisent bien sûr des configurations intermédiaires dans lesquelles les bandes apparaissent plus ou moins facilement suivant la rigidité globale du squelette de phase dure.

L'existence de « surfaces faibles » de grande extension dans la phase molle fait que la déformation se localise majoritairement dans cette phase et que l'autre phase est moins sollicitée : il en résulte un niveau d'hétérogénéité inter-phase élevé. À l'opposé, la présence de ponts conduit à répartir mieux la sollicitation entre les deux phases. L'expérience semble en revanche indiquer que l'hétérogénéité intraphase est moins sensible à ce phénomène. On peut toutefois supposer que son origine est différente suivant le mécanisme en jeu : en cas de présence de bandes, les valeurs élevées de déformation sont enregistrées sur ces dernières et les valeurs faibles dans les zones « protégées » au sein des blocs, dans l'une comme dans l'autre phase. En l'absence de mécanismes par blocs, les forts écarts sur les valeurs de déformation sont dus à l'imbrication des phases qui induit des sollicitations locales complexes. Ces deux sources d'hétérogénéité sont, bien sûr, complétées par les mécanismes locaux mentionnés au paragraphe précédent, qui agissent de la même façon pour tous les matériaux testés.

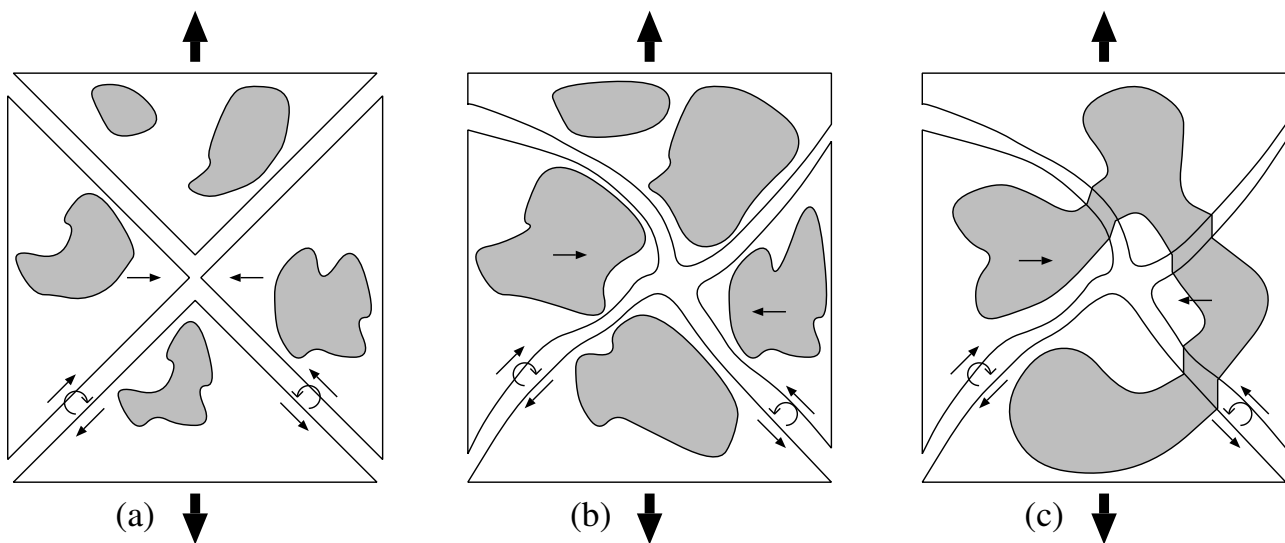


Figure 3.114 : Mécanismes de déformation par bloc dans une microstructure MI de faible concentration en inclusions (a), de concentration plus élevée (b) et dans une microstructure à phases imbriquées (c)

Si la corrélation entre hétérogénéités inter-phases et développement de bandes de localisation semble assez claire, le lien entre ces caractères et la nature de la morphologie l'est un peu moins, puisque deux essais (H174 et IE05) exhibent une réponse locale contraire à celle que l'analyse ci-dessus conduit à prévoir à partir de leur morphologie déduite du mode d'élaboration. On peut expliquer ces résultats par le fait que les morphologies particulières de ces matériaux ne suivent peut-être pas exactement les tendances moyennes révélées par les analyses morphologiques effectuées sur un grand nombre d'éprouvettes : les données expérimentales des figures 3.20 et 3.21 présentent en effet des fluctuations assez prononcées. En particulier, l'aspect visuel des micrographies de l'éprouvette IE05 semble bien plus proche de celui des matériaux IAF (IA11 et IB10) que de celui des matériaux CIC ; cette intuition devrait toutefois être complétée par une analyse morphologique quantitative.

Si l'explication qualitative de l'apparition des bandes de localisation donnée plus haut est relat-

ivement simple, sa modélisation quantitative est d'une toute autre difficulté : aucun modèle totalement satisfaisant n'est à l'heure actuelle, en tous cas à notre connaissance, capable de prévoir le mode exact de localisation de la déformation en fonction de la distribution géométrique des phases et plus précisément de leur degré d'interconnexion, ni de décrire la transition continue d'un mode avec une localisation prononcée en bandes à un mode avec une localisation diffuse. Les seules approches répondant partiellement à la question sont les simulations numériques, déjà mentionnées au paragraphe 1.3.C, de la réponse d'une réalisation particulière d'un VER sous une certaine sollicitation macroscopique. Elles utilisent les principes de l'homogénéisation périodique couplés à des calculs par éléments finis [8] ou par transformation de Fourier [125]. Les limitations des ordinateurs actuels font que ces simulations restent pour l'essentiel bidimensionnelles. Or le mécanisme proposé est intrinsèquement lié à la structure tridimensionnelle de la répartition des phases, puisque l'apparition des bandes dépend de l'extension de *surfaces* non interrompues au sein de la phase molle. Sa description quantitative complète reste donc une question ouverte.

L'existence de ces bandes n'est toutefois pas contradictoire avec une modélisation par motifs morphologiques dérivée du modèle 3Ph. Ces approches consistent à moyenniser les interactions à grande distance et ne sont donc pas capables de décrire quantitativement l'apparition et l'intensité de la localisation dans les bandes. En revanche, les interactions locales au sein d'un motif et les interactions d'un motif avec la sollicitation moyenne à grande distance sont prises en compte. Le fait que l'inclusion de phase dure dans le modèle 3Pha soit noyée dans la matrice et ne présente pas de « ponts » avec les inclusions voisines, dont les effets moyens sont représentés par la présence du milieu de référence infini, rend bien compte d'une situation où l'apparition de bandes est favorisée. Le niveau de déformation important relevé dans la matrice de l'inclusion composite à environ  $45^\circ$  par rapport à l'axe de traction (*cf.* figures 3.103 et 3.104) peut être considéré à ce titre comme la « trace moyenne » des bandes (ou plus précisément des plans) de cisaillement, orientées selon toutes les directions possibles et passant au voisinage des inclusions, comme le suggère la figure 3.115.

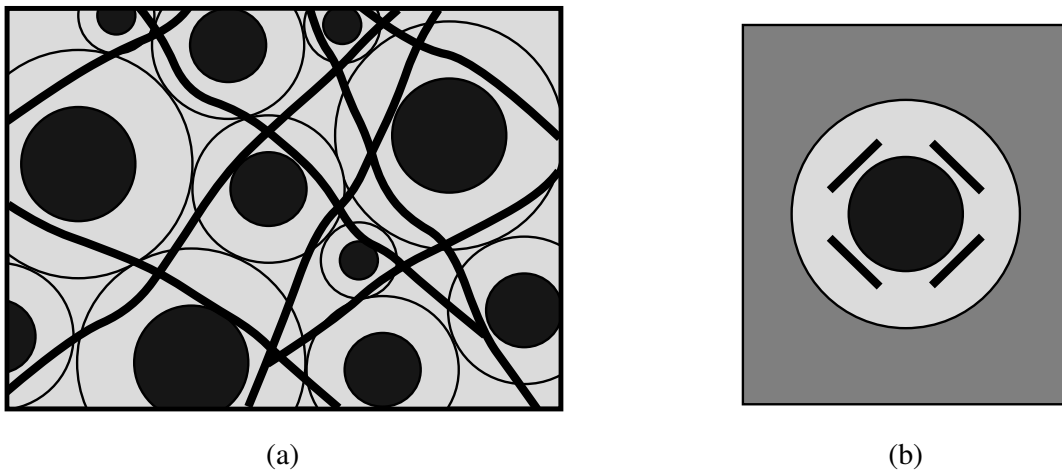


Figure 3.115 : Allure probable des bandes de cisaillement dans un assemblage de Hashin (a) et interprétation possible correspondante du champ local dans la sphère composite du modèle 3Pha (b)

Une telle interprétation des champs locaux semble satisfaisante pour les biphasés de type MI avec une concentration en fer élevée (comparer les cartes expérimentales relatives aux essais H168 et H169, figures F.18 et F.17, à la carte théorique dans l'inclusion composite pour une teneur comparable en fer, figure 3.47). En revanche, pour des teneurs plus faibles, l'intensité de la localisation dans la matrice au sein de l'inclusion composite n'est pas représentative de la réalité : la perturbation due à l'inclusion sphérique est trop faible pour provoquer des hétérogénéités prononcées dans la matrice. Les inclusions dans les matériaux réels sont loin d'être sphériques mais présentent des formes irrégulières avec en particulier des rapports d'allongement très variables. Les chemins potentiels pour des bandes

de cisaillement rectilignes sont de ce fait beaucoup moins nombreux qu'au sein d'une microstructure MI dans laquelle les inclusions seraient placées aux mêmes endroits mais auraient une forme parfaitement sphérique, comme l'illustre la figure 3.116. Les bandes apparaissant dans un matériau avec des inclusions irrégulières sont de ce fait beaucoup plus étroites, en comparaison de la taille des renforts, que celles susceptibles d'apparaître si elles étaient sphériques. Ce mécanisme est assez bien visible sur la carte relative à l'essai H329 (figure F.22), où les bandes n'occupent qu'une faible partie de la matrice de cuivre, et plus précisément celle correspondant aux surfaces planes évitant au mieux les renforts de fer.

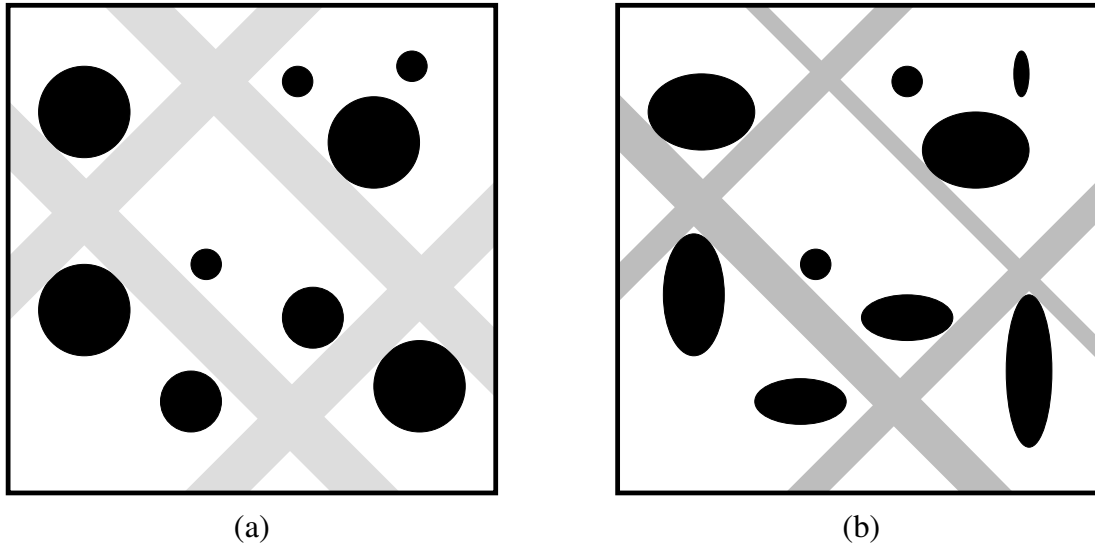


Figure 3.116 : Influence probable de la forme des particules sur la localisation de la déformation - (a) Inclusion sphériques, bandes larges ; (b) Inclusions allongées, bandes plus étroites et hétérogénéité plus prononcée

### 3.4 Conclusions et introduction à la seconde partie

Les observations qui précèdent semblent indiquer qu'une des origines essentielles des écarts entre niveaux d'hétérogénéités intra-phases mesurés et calculés est la mauvaise représentation de la géométrie des inclusions de fer dans les microstructures MI. Toutes les modélisations tentées font appel à des inclusions parfaitement sphériques, dont le mode de sollicitation et la réponse ressemblent beaucoup à ceux de l'inclusion d'Eshelby. La quasi-homogénéité de la déformation en son sein en résulte. Dans les microstructures réelles, les géométries sont très loin de présenter une telle régularité. Assimiler les domaines de fer à des inclusions sphériques conduit à ignorer une très grande partie de la richesse morphologique des microstructures étudiées. Les irrégularités des interfaces entre phases induisent des sollicitations locales complexes et très variables, mais aussi des modes de localisation plus globaux différents de ceux susceptibles d'apparaître dans des microstructures plus régulières. Les hétérogénéités de déformation locale en résultent, dans la phase inclusionnaire mais aussi dans la matrice.

Une modélisation quantitative de ces phénomènes impose l'abandon des symétries sphériques des modèles mis en œuvre jusqu'à présent. La démarche la plus simple d'un point de vue conceptuel pour aborder de telles microstructures consiste à résoudre explicitement les problèmes de localisation au sein d'un VER complet, par une technique numérique adéquate. Mais, comme nous l'avons vu, une telle approche est non seulement limitée par les puissance de calcul actuellement disponibles, mais bute aussi sur des problèmes de représentation tridimensionnelle des microstructures. On peut aussi se limiter au mode de localisation au voisinage d'une inclusion unique en utilisant les principes de l'homogénéisation périodique ; le résultat obtenu ne sera toutefois pas vraiment représentatif de la réalité microstructurale, puisqu'un tel calcul suppose une disposition régulière des inclusions, très loin du caractère aléatoire véritable. De plus, même s'il est possible de décrire des géométries d'inclusions très diverses, le modèle ne fait jamais appel qu'à une seule cellule élémentaire et ignore ainsi les

variations potentielles de la forme et de l'orientation des renforts, mais aussi de la concentration ou de la connectivité locales, d'un domaine de phase à l'autre.

La démarche que nous avons développée se situe à mi-chemin entre ces deux approches. Elle repose sur la notion de Motif Morphologique Représentatif, qui permet d'isoler une ou plusieurs configurations locales représentatives de la distribution des phases et d'en déduire l'effet sur le comportement global en tirant profit de propriétés particulières de leur distribution spatiale. La théorie générale d'une telle modélisation [152] a été développée pour les comportements élastiques linéaires dans un cadre assez général. Sa mise en œuvre explicite n'a toutefois été entreprise que dans deux cas. Le premier est celui d'une distribution isotrope de motifs, de géométries locales respectant la symétrie sphérique et de comportements isotropes, c'est-à-dire avec un champ de tenseurs de modules d'élasticité locaux au sein d'un motif de la forme  $\{2\mu(r), 3k(r)\}$ ,  $r$  étant la distance au centre du motif considéré. Le modèle 3Ph et ses généralisations de type mnPh en découlent. Le second cas concerne les distributions isotropes dans le plan de motifs à symétrie cylindrique avec un comportement local isotrope transverse de même axe. Nous avons complété la théorie à des situations de répartition anisotrope des motifs, ces derniers étant décrits par une distribution quelconque  $\mathbf{C}(\underline{x})$  des tenseurs des modules locaux, eux-mêmes de symétrie quelconque.

Cette définition générale de la notion de motif admet comme cas particuliers les situations de type MI avec des phases isotropes et une géométrie quelconque de l'inclusion. Le champ des modules au sein d'un motif est alors de la forme  $\mathbf{C}(\underline{x}) = \kappa_1(\underline{x}) \{2\mu_1, 3k_1\} + (1 - \kappa_1(\underline{x})) \{2\mu_2, 3k_2\}$ , où  $\kappa_1$  est la fonction indicatrice de la phase 1. L'extension aux comportements non-linéaires peut-être entreprise selon les principes déjà mis en œuvre. L'application directe de ces derniers consiste à attribuer un module sécant  $\mu_i^{sc}$  à chacune des phases. Il est toutefois possible de faire beaucoup mieux, en généralisant les idées ayant conduit à la discrétisation des phases du modèle 3Ph en sous-couches ayant chacune leur propre module sécant. On peut en effet faire appel à un *champ* de modules sécants  $\mu^{sc}(\underline{x})$  au sein de chaque motif, dont la valeur dépend de la sollicitation locale sous le chargement macroscopique appliqué et de la loi de comportement de la phase constitutive au point considéré. L'amélioration, certes insuffisante, des prévisions d'hétérogénéité intra-phase avec la représentation de la morphologie au moyen de la sphère composite, grâce à, d'abord, la discrétisation en couches, puis par le calcul par éléments finis qui, compte-tenu de la presque-proportionnalité des contraintes locales, revient quasiment à faire appel à un module sécant différent en chaque point de Gauss, suggère que le recours à un champ de modules sécants  $\mu^{sc}(\underline{x})$  au sein d'un motif avec une distribution des phases sans symétrie sphérique, devrait également améliorer les résultats, et ce d'autant plus que les champs locaux dans un tel motif avec une inclusion de forme irrégulière sont très certainement plus hétérogènes que celui au sein de la sphère composite. De plus, la non-linéarité du comportement local devrait probablement amplifier les hétérogénéités : les zones les plus sollicitées induisent des modules locaux faibles qui eux-mêmes induisent des déformations élevées en ces mêmes zones. On peut alors espérer que les distributions théoriques des modules locaux soient plus proches de celles enregistrées expérimentalement ; il est aussi permis de penser que ce mécanisme devrait retarder le phénomène de saturation des hétérogénéités que révèlent les modèles fondés sur la sphère composite, mais qui n'est pas observé expérimentalement.

Cette approche est capable de décrire des géométries d'inclusions non sphériques, c'est-à-dire la première « source locale » d'hétérogénéité ; elle permet aussi de prendre en compte la troisième, à savoir la présence de microcavités ou microfissures, que l'on peut représenter, comme nous l'avons déjà fait, au moyen d'une troisième phase de modules très petits, dont la géométrie peut, elle aussi, être quelconque, du moins en théorie. Les situations non-linéaires peuvent être abordées au moyen des extensions déjà amplement évoquées. La prévision de l'évolution de cet endommagement nécessite toutefois des lois complémentaires. Enfin, l'influence de la nature polycristalline des phases peut être étudiée dans le cas élastique linéaire, puisque les tenseurs des modules locaux peuvent être anisotropes, mais ceci ne présente *a priori* que peu d'intérêt, le degré d'anisotropie élastique des monocristaux en question étant faible. En l'absence de notion générale de « modules sécants anisotropes », l'extension aux comportements non-linéaires d'un tel modèle polycristallin selon les principes décrits n'est en revanche pas envisageable.

La suite de ce travail sera donc consacrée à la description d'une telle approche, généralisant les encadrements et estimations de type mnPh. Les comportements élastiques linéaires anisotropes sont

principalement abordés, les extensions aux comportements non-linéaires étant discutées plus brièvement par la suite. Les fondements théoriques sont d'abord exposés, mais l'application pratique est aussi décrite et mise en œuvre pour des composites anisotropes à particules non sphériques. Certaines questions restent toutefois en suspens, notamment celles liées à la lourdeur de la mise en œuvre numérique dans le cas non-linéaire. Les modèles ainsi construits n'ont donc pas été appliqués aux matériaux étudiés au cours de ce travail et c'est pourquoi il ne sera plus question de biphases fer/argent ou fer/cuivre. La démarche mise en œuvre se veut toutefois bien plus générale et est susceptible d'être appliquée à de nombreux matériaux composites à microstructure aléatoire, présentant des « microgéométries » complexes que les modèles existants ne permettent pas d'aborder.

Les développements ultérieurs de la méthode autoriseront peut-être le traitement des non-linéarités induites par les grandes transformations, ainsi que celui la plasticité anisotrope avec variables internes. Une formulation tangente incrémentale devra probablement être développée dans ce but, mais il est prématuré de pronostiquer un quelconque résultat allant dans ce sens. L'influence de ces effets sur l'hétérogénéité de déformation ne peut donc pas encore être étudiée.

Enfin, précisons que les modèles en question ne prétendent nullement prévoir efficacement l'apparition des bandes de localisation, du moins dans leur état actuel. Comme nous le suggérons à la fin du paragraphe **3.3.E**, il n'y a toutefois pas de contradiction entre la présence de ces corrélations à grande distance et les approches fondées sur la notion de motif morphologique représentatif, même si les interactions en question risquent d'être exagérément moyennées et donc insuffisamment décrites à l'échelle locale. La caractérisation de ces phénomènes reste ainsi une question ouverte qu'il conviendrait déjà d'aborder plus précisément d'un point de vue expérimental. La quantification du phénomène et de ses corrélations avec la morphologie doit en particulier être entreprise. De nouvelles techniques de micro-extensométrie, telles celles que nous suggérons à la fin du paragraphe **2.4**, combinées aux principes de la morphologie mathématique tridimensionnelle, devraient permettre d'y parvenir dans des conditions plus confortables que celles dont nous disposons.

---

Deuxième partie

Motifs Morphologiques Représentatifs





## Chapitre 4

# Encadrements et estimations du comportement élastique linéaire

Nous présentons ici la démarche générale permettant d'encadrer les propriétés élastiques macroscopiques d'un milieu hétérogène macrohomogène. Nous décrivons d'abord la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman permettant d'encadrer l'énergie potentielle de toute structure élastique soumise à un chargement quelconque. Les résultats sont ensuite appliqués à un volume élémentaire représentatif d'un milieu hétérogène macrohomogène. Des bornes sur les modules homogénéisés de type Hashin et Shtrikman en résultent.

Ces bornes sont ensuite explicitées dans le cadre d'une description classique du milieu hétérogène et dans celui d'une description par « motifs morphologiques représentatifs ». Nous montrons comment cette description permet de retrouver certains résultats classiques mais surtout comment elle les généralise. Ces bornes peuvent être calculées facilement lorsque certaines propriétés sur la distribution des phases constitutives sont satisfaites : les situations de « distributions ellipsoïdales », dont les distributions isotropes sont des cas particuliers, et celles des « distributions ellipsoïdales généralisées » seront en particulier abordées. La signification pratique de ces propriétés est notamment discutée.

On s'intéressera enfin aux estimations de nature autocohérente dérivées des bornes rigoureuses ainsi construites. Les diverses définitions possibles de ces « modèles autocohérents généralisés », leurs propriétés et leur signification seront discutées en dernière partie de ce chapitre.

### 4.1 Formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman

#### 4.1.A Formulations variationnelles classiques - Rappels

On considère un solide occupant un domaine compact  $\Omega$  de l'espace  $\mathcal{R}^3$ . Soit  $\partial\Omega$  sa frontière de normale unitaire sortante  $\underline{n}$ . Le comportement mécanique au point  $\underline{x} \in \Omega$  est caractérisé par un tenseur des modules d'élasticité  $\mathbf{C}(\underline{x})$  du quatrième ordre opérant sur l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux  $\mathbb{T}_2^s$ .  $\mathbf{C}(\underline{x})$  est symétrique et défini positif ; son inverse  $\mathbf{S}(\underline{x})$  a les mêmes propriétés. On note  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  l'espace des champs de tenseurs symétriques d'ordre 2 sur  $\Omega$ . Soit par ailleurs  $\underline{u}$  le champ continu des vecteurs de déplacement sur  $\Omega$ ,  $\underline{\epsilon} \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$  le champ de déformation et  $\underline{\sigma} \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$  le champ de contrainte.

Le solide est soumis à un chargement mécanique constitué de déplacements imposés  $\underline{u}^d$  sur une partie de sa surface  $\partial\Omega^u$ , de forces imposées  $\underline{F}^d$  sur la partie complémentaire  $\partial\Omega^F$  et de forces volumiques  $\underline{f}$  dans  $\Omega$ .

La résolution de ce problème d'élasticité consiste à trouver les champs  $\underline{u}$ ,  $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{\sigma}$ , tels que  $\underline{u}$  et  $\underline{\epsilon}$  soient cinématiquement admissibles (CA) avec les conditions aux limites cinématiques, que  $\underline{\sigma}$  soit statiquement admissible (SA) avec les données statiques et que  $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  vérifient la loi de comportement locale en tout point de  $\Omega$ .

La formulation faible de ce problème, déjà évoquée au paragraphe 1.1.A, permet d'encadrer

l'énergie élastique  $W$  du système :

$$-\Psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) \leq -\Psi(\underline{\underline{\sigma}}) = W = \Phi(\underline{\underline{u}}) \leq \Phi(\underline{\underline{u}}^*) \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ SA avec } \underline{\underline{F}}^d \text{ et } \underline{\underline{f}} \quad \text{et} \quad \forall \underline{\underline{u}}^* \text{ CA avec } \underline{\underline{u}}^d \quad (4.1)$$

avec :

$$\Psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^* d\omega - \int_{\partial\Omega^u} \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{u}}^d ds \quad (4.2)$$

$$\Phi(\underline{\underline{u}}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}^* : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}^* d\omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\omega - \int_{\partial\Omega^F} \underline{\underline{F}}^d \cdot \underline{\underline{u}}^* ds. \quad (4.3)$$

$\Phi$  et  $\Psi$  sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire du système.

Le choix de champs d'essai de contrainte SA et de déformation CA adéquats permet d'encadrer l'énergie  $W$  du système. Leur construction n'est toutefois en général pas très facile. C'est pourquoi la formulation de Hashin et Shtrikman s'avère souvent plus puissante.

#### 4.1.B Fonctionnelle de Hashin et Shtrikman

Dans cette approche, les champs d'essai admissibles sont construits par la résolution d'un problème d'élasticité auxiliaire défini à partir de la même géométrie que le problème initial, des mêmes charge-ments et conditions aux limites, mais sur un milieu homogène de référence arbitraire de tenseur des modules d'élasticité  $\underline{\underline{C}}^0$  et avec une polarisation en contrainte  $\underline{\underline{p}}^* \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$ , de la forme

$$\underline{\underline{p}}^* = [\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}^0] : \underline{\underline{\eta}}^* = -\underline{\underline{C}}^0 : [\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0] : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\eta}}^*, \quad (4.4)$$

où  $\underline{\underline{\eta}}^* \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$  est également arbitraire. Les champs (uniques)  $(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{\epsilon}}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*)$  tels que :

$$\begin{cases} \underline{\underline{u}}^* \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}}^* \text{ sont CA avec } \underline{\underline{u}}^d, \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ est SA avec } \underline{\underline{F}}^d \text{ et } \underline{\underline{f}}, \\ \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{C}}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^* + [\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}^0] : \underline{\underline{\eta}}^* \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

sont en effet clairement admissibles pour le problème initial. Si de plus

$$\underline{\underline{p}}^* = [\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}^*, \quad (4.6)$$

ils en sont les solutions uniques.

Notons  $(\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}})$  la solution de ce problème auxiliaire lorsque la polarisation est nulle :

$$\begin{cases} \underline{\underline{U}} \text{ et } \underline{\underline{E}} \text{ sont CA avec } \underline{\underline{u}}^d \\ \underline{\underline{\Sigma}} \text{ est SA avec } \underline{\underline{F}}^d \text{ et } \underline{\underline{f}} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^0 : \underline{\underline{E}} \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

L'énergie potentielle et l'énergie complémentaire associées à ce problème sont données par :

$$\Phi^0(\underline{\underline{U}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}}^0 : \underline{\underline{E}} d\omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{U}} d\omega - \int_{\partial\Omega^F} \underline{\underline{F}}^d \cdot \underline{\underline{U}} ds \quad (4.8)$$

$$\text{et} \quad \Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\Sigma}} d\omega - \int_{\partial\Omega^u} \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{u}}^d ds. \quad (4.9)$$

Soit par ailleurs  $(\underline{\underline{u}}^{*'}, \underline{\underline{\epsilon}}^{*'}, \underline{\underline{\sigma}}^{*'})$  l'écart à cette solution :

$$\begin{cases} \underline{\underline{u}}^{*'} = \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{u}}^{*'} \\ \underline{\underline{\epsilon}}^{*'} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{*'} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{*'} = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^{*'} \end{cases} \quad (4.10)$$

Par linéarité, ces champs sont déterminés par :

$$\begin{cases} \underline{u}^{*'} \text{ et } \underline{\epsilon}^{*'} \text{ sont CA avec des déplacements nuls sur } \partial\Omega^u \\ \underline{\sigma}^{*'} \text{ est SA avec des forces nulles dans } \Omega \text{ et sur } \partial\Omega^F \\ \underline{\sigma}^{*'} = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^{*'} + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^* \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (4.11)$$

et dépendent linéairement de la polarisation.

Les relations suivantes découlent du Principe des Travaux Virtuels :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^{*'} : \underline{\epsilon}^{*'} d\omega = \int_{\Omega} [\mathbf{C}^0 : (\underline{\epsilon}^* - \underline{E}) + (\mathbf{C} - \mathbf{C}^0) : \underline{\eta}^*] : [\underline{\epsilon}^* - \underline{E}] d\omega = 0, \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} \underline{\Sigma} : \underline{\epsilon}^{*'} d\omega = \int_{\Omega} \underline{E} : \mathbf{C}^0 : (\underline{\epsilon}^* - \underline{E}) d\omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{U}) d\omega + \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{U}) ds. \quad (4.13)$$

Quelques manipulations algébriques simples permettent d'en déduire l'expression de l'écart entre l'énergie potentielle du problème initial et celle du problème auxiliaire à polarisation nulle :

$$2 [\Phi(\underline{u}^*) - \Phi^0(\underline{U})] = \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\epsilon}^* d\omega - \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^{*'} : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^* d\omega \quad (4.14)$$

L'identité :

$$[\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*] : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*] = \underline{\epsilon}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\epsilon}^* - 2\underline{\eta}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\epsilon}^* + \underline{\eta}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^* \quad (4.15)$$

conduit enfin à l'expression suivante de l'énergie potentielle :

$$\Phi(\underline{u}^*) = \text{HS}^0(\underline{\eta}^*) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*] : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*] d\omega, \quad (4.16)$$

où  $\text{HS}^0(\underline{\eta}^*)$  est la *fonctionnelle de Hashin et Shtrikman* associée au milieu de référence  $\mathbf{C}^0$ , à la géométrie et au chargement considérés :

$$\text{HS}^0(\underline{\eta}^*) = \Phi^0(\underline{U}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\eta}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{E} + \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*) - \underline{\eta}^*] d\omega. \quad (4.17)$$

On peut établir une relation similaire pour l'énergie complémentaire. Les égalités

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^{*'} : \underline{\epsilon}^{*'} d\omega = \int_{\Omega} [\underline{\sigma}^* - \underline{\Sigma}] : [\mathbf{S}^0 : (\underline{\sigma}^* - \underline{\Sigma}) + (\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) : \mathbf{C} : \underline{\eta}^*] d\omega = 0 \quad (4.18)$$

$$\text{et } \int_{\Omega} \underline{E} : \underline{\sigma}^{*'} d\omega = \int_{\Omega} \underline{\Sigma} : \mathbf{S}^0 : [\underline{\sigma}^* - \underline{\Sigma}] d\omega = \int_{\partial\Omega^u} \underline{n} \cdot \underline{\sigma}^{*'} \cdot \underline{u}^d ds \quad (4.19)$$

qui résultent du Principe des Travaux Virtuels conduisent à l'écart entre  $\Psi(\underline{\sigma}^*)$  et l'énergie complémentaire  $\Psi^0(\underline{\Sigma})$  du problème auxiliaire à polarisation nulle :

$$2 [\Psi(\underline{\sigma}^*) - \Psi^0(\underline{\Sigma})] = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \underline{\sigma}^* d\omega - \int_{\Omega} \underline{\sigma}^{*'} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \mathbf{C} : \underline{\eta}^* d\omega. \quad (4.20)$$

Avec

$$\begin{aligned} [\mathbf{C} : \underline{\eta}^* - \underline{\sigma}^*] : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : [\mathbf{C} : \underline{\eta}^* - \underline{\sigma}^*] = \\ \underline{\sigma}^* : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \underline{\sigma}^* - 2\underline{\eta}^* : \mathbf{C} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \underline{\sigma}^* + \underline{\eta}^* : \mathbf{C} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \mathbf{C} : \underline{\eta}^*, \end{aligned} \quad (4.21)$$

on en tire :

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{\sigma}^*) = \Psi^0(\underline{\Sigma}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\eta}^* : \mathbf{C} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : [\underline{\Sigma} + \underline{\sigma}^* - \mathbf{C} : \underline{\eta}^*] d\omega \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{C} : \underline{\eta}^* - \underline{\sigma}^*] : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : [\mathbf{C} : \underline{\eta}^* - \underline{\sigma}^*] d\omega. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$(\underline{U}, \underline{E}, \underline{\Sigma})$  étant la solution du problème auxiliaire à polarisation nulle, on a  $\Psi^0(\underline{\Sigma}) = -\Phi^0(\underline{U})$ . De plus, on vérifie facilement que :

$$\underline{\eta}^* : \mathbf{C} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : [\underline{\Sigma} + \underline{\sigma}^* - \mathbf{C} : \underline{\eta}^*] = -\underline{\eta}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{E} + \underline{\epsilon}^* - \underline{\eta}^*]. \quad (4.23)$$

On montre ainsi que la première ligne du membre de droite de (4.22) est exactement égale à l'opposée de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman  $\text{HS}^0(\underline{\eta}^*)$  définie précédemment.

En résumé, on établit ainsi les inégalités suivantes, valables pour tout champ  $\underline{\eta}^* \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$  et pour tout milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  :

$$-\Delta_\psi^0(\underline{\eta}^*) + \text{HS}^0(\underline{\eta}^*) \leq -\Psi(\underline{\sigma}) = W = \Phi(\underline{u}) \leq \text{HS}^0(\underline{\eta}^*) + \Delta_\phi^0(\underline{\eta}^*) \quad (4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_\psi^0(\underline{\eta}^*) &= \frac{1}{2} \int_\Omega [\mathbf{C} : \underline{\eta}^* - \underline{\sigma}^*(\underline{\eta}^*)] : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : [\mathbf{C} : \underline{\eta}^* - \underline{\sigma}^*(\underline{\eta}^*)] d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)] : \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \mathbf{C}^0 : [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)] d\omega \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\text{et} \quad \Delta_\phi^0(\underline{\eta}^*) = \frac{1}{2} \int_\Omega [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)] : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)] d\omega \quad (4.26)$$

En général, il n'est pas possible de calculer explicitement tous les termes de ces expressions. C'est notamment le cas de  $\Delta_\psi^0$  et  $\Delta_\phi^0$ , qui présentent en revanche l'avantage d'être des formes quadratiques en  $\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)$ . En choisissant judicieusement le milieu de référence  $\mathbf{C}^0$ , on peut contrôler leur signe et ainsi préserver les inégalités tout en ne calculant pas ces termes. Plus précisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}(x) \forall x \in \Omega, \text{ alors } \text{HS}^0(\underline{\eta}^*) \geq W ; \\ \text{Si } \mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S}(x) \forall x \in \Omega, \text{ alors } \text{HS}^0(\underline{\eta}^*) \leq W. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Les inégalités sur les tenseurs des modules s'entendent bien sûr au sens des formes quadratiques associées. Précisons que les tenseurs  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}(x)$  et  $\mathbf{S}(x) - \mathbf{S}^0$  n'ont nullement besoin d'être définis et que les conditions de positivité ou de négativité de  $\mathbf{C} - \mathbf{C}^0$  et de  $\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}$  sont équivalentes<sup>1</sup>.

Le présent exposé diffère de la démarche classiquement adoptée [71, 152] pour établir les propriétés (4.27), par l'utilisation de la grandeur  $\underline{\eta}^*$  plutôt que de la polarisation  $\underline{p}^* = [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^*$ . On évite ainsi les difficultés techniques liées à d'éventuelles singularités du tenseur  $\mathbf{C} - \mathbf{C}^0$ , qui surviennent par exemple lorsqu'on utilise une des phases constitutives comme milieu de référence et qui imposent de limiter les choix de  $\underline{p}^*$  aux éléments de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  situés dans l'image de  $\mathbf{C} - \mathbf{C}^0$  (considéré comme opérateur sur cet ensemble). On évite également le recours aux opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G}$ , invoqués par les approches usuelles, dont les définitions «  $\mathbf{H} = [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0]^{-1}$  » et «  $\mathbf{G} = [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0]^{-1}$  » conduisent dans ces mêmes situations à des difficultés du même ordre. Ces problèmes sont ignorés dans la plupart des

<sup>1</sup> Les formes quadratiques sur  $\mathbb{T}_2^s c^0 : \underline{u} \rightarrow \underline{u} : \mathbf{C}^0 : \underline{u}$  et  $c : \underline{u} \rightarrow \underline{u} : \mathbf{C} : \underline{u}$  sont non dégénérées et strictement positives. Par le théorème de diagonalisation [5], il existe donc une base (non nécessairement orthonormale pour le produit scalaire usuel) de l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux dans laquelle  $c$  est orthogonale et  $c^0$  orthonormale (c'est à dire que la base est orthonormée pour le produit scalaire associé à  $c^0$ ). Soit  $\mathbf{B}$  la matrice du changement de base :  $\forall \underline{u}, \underline{v} : \mathbf{C}^0 : \underline{u} = (\mathbf{B} \cdot \underline{u})^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \underline{v})$  et  $\underline{u} : \mathbf{C} : \underline{v} = (\mathbf{B} \cdot \underline{u})^T \cdot \mathbf{D}(\lambda_i) \cdot (\mathbf{B} \cdot \underline{v})$  où  $\mathbf{D}(\lambda_i)$  est la matrice diagonale de termes diagonaux positifs non nuls  $\lambda_i, i \in [1, 6]$ . Par unicité des matrices symétriques associées aux formes quadratiques, on en déduit  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}(\lambda_i) \cdot \mathbf{B}$ .  $\mathbf{B}$  étant inversible, il vient  $\mathbf{C}^{0-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{T-1}$  et  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{D}(\frac{1}{\lambda_i}) \cdot \mathbf{B}^{T-1}$ . La forme quadratique  $s^0 : \underline{u} \rightarrow \underline{u} : \mathbf{S}^0 : \underline{u} = (\mathbf{B}^{T-1} \cdot \underline{u})^T \cdot (\mathbf{B}^{T-1} \cdot \underline{u})$  est donc orthonormale dans la base définie par la matrice de passage  $\mathbf{B}^{T-1}$  ( $\neq \mathbf{B}$ ) et la forme  $s : \underline{u} \rightarrow \underline{u} : \mathbf{S} : \underline{u} = (\mathbf{B}^{T-1} \cdot \underline{u})^T \cdot \mathbf{D}(\frac{1}{\lambda_i}) \cdot (\mathbf{B}^{T-1} \cdot \underline{u})$  est orthogonale dans cette même base. Donc, si au sens des formes quadratiques,  $\mathbf{C} \geq \mathbf{C}^0$ , c'est-à-dire  $\forall i \in [1, 6], \lambda_i \geq 1$ , alors  $\forall i \in [1, 6], \frac{1}{\lambda_i} \leq 1$  soit  $\mathbf{S} \leq \mathbf{S}^0$ . La réciproque est immédiate. On montre ainsi l'équivalence  $\mathbf{C} \geq \mathbf{C}^0 \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S} \geq 0$ . Précisons bien que la base qui diagonalise simultanément les formes quadratiques  $c$  et  $c^0$  ne diagonalise pas nécessairement les opérateurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^0$  associés. Elle est également différente de la base qui diagonalise simultanément les formes  $s$  et  $s^0$ .

ouvrages présentant cette approche. Nous montrons par la démarche adoptée ici que les résultats sont toutefois corrects. L'écriture de  $\text{HS}^0$  comme fonction de  $\underline{\underline{p}}^*$  conduit aux expressions classiques :

$$\text{HS}^0(\underline{\underline{p}}^*) = \Phi^0(\underline{\underline{U}}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{p}}^* : [\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{\underline{p}}^*)] d\omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{p}}^* : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{p}}^* d\omega \quad (4.28)$$

$$= -\Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{p}}^* : \underline{\underline{S}}^0 : [\underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{p}}^*)] d\omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{p}}^* : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{G}} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{p}}^* d\omega, \quad (4.29)$$

où  $\underline{\underline{H}}$  est nul sur le noyau de  $\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}^0$  et égal à l'inverse de cet opérateur sur son image et  $\underline{\underline{G}}$  est défini de la même manière à partir de  $\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0$ . Ces relations ne s'appliquent que lorsque  $\underline{\underline{p}}^*$  appartient à l'image de  $\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}^0$ .

Par la suite nous ferons appel aux deux familles de relations. Le terme de « polarisation » fera référence aux tenseurs  $\underline{\underline{p}}$  classiques, mais aussi, par abus de langage, aux tenseurs  $\underline{\underline{\eta}}$ .

Citons enfin la possibilité de construire des champs d'essai à partir d'une polarisation en déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  de la forme  $-\left[\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0\right] : \underline{\underline{\pi}}^*$  avec  $\underline{\underline{\pi}}^* \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$  pour en déduire un encadrement de l'énergie potentielle du système. Le problème auxiliaire à résoudre est alors le suivant :

$$\begin{cases} \underline{\underline{u}}^* \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}}^* \text{ sont CA avec } \underline{\underline{u}}^d, \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ est SA avec } \underline{\underline{F}}^d \text{ et } \underline{\underline{f}}, \\ \underline{\underline{\epsilon}}^* = \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^* + \left[\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0\right] : \underline{\underline{\pi}}^* \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.30)$$

En fait, cette démarche est identique à celle ayant recours à la polarisation en contrainte : on obtient les mêmes résultats en remplaçant  $\underline{\underline{\eta}}^*$  par  $\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\pi}}^*$ , ou  $\underline{\underline{p}}^*$  par  $\underline{\underline{C}}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^*$ .

#### 4.1.C Choix de champs de polarisation optimaux

La pertinence des encadrements obtenus avec la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman dépend du choix du milieu de référence  $\underline{\underline{C}}^0$ , dans les limites données précédemment pour garantir la nature de borne à la fonctionnelle  $\text{HS}^0$ , et de celui du champ  $\underline{\underline{\eta}}^*$ . Les termes complémentaires négligés apparaissent comme des formes quadratiques sur le champ  $\underline{\underline{\delta}}^* = \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}^*$  :

$$\Delta_{\psi}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\delta}}^* : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{G}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\delta}}^* d\omega \quad (4.31)$$

$$\Delta_{\phi}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\delta}}^* : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\delta}}^* d\omega, \quad (4.32)$$

les tenseurs  $\underline{\underline{G}}$  et  $\underline{\underline{H}}$  étant définis comme précisé plus haut. Ils rendent en quelque sorte compte de « l'écart en loi de comportement » entre les champs d'essai approchés  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  et les champs réels inconnus  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . On peut alors espérer que les meilleures approximations sont obtenues lorsque la « polarisation d'essai »  $\underline{\underline{p}}^*$  approche au mieux la « polarisation réelle »  $\underline{\underline{p}} = (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}^0) : \underline{\underline{\epsilon}}$ , ou encore, dans le cadre de la démarche adoptée ici, lorsque le champ  $\underline{\underline{\eta}}^*$  approche au mieux le champ de déformation réel  $\underline{\underline{\epsilon}}$ .

La recherche du champ de polarisation optimal dans  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  revient à la résolution explicite du problème d'élasticité initial. Lorsqu'elle est impossible, par manque d'informations sur la répartition des champs  $\underline{\underline{C}}(x)$  ou à cause de la trop grande complexité du problème, on limite le domaine de recherche d'un champ optimal à un sous-domaine de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$ , qui garantisse que tous les termes de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman puissent être calculés explicitement et qui soit « adapté » à l'information dont on dispose sur la structure. La pertinence de l'encadrement résultant dépendra de la qualité de cette adaptation. On suppose par la suite que ce domaine est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$ , noté  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$ , image de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  par le projecteur  $\mathcal{P}$ . Sans rien modifier à la généralité du propos, on peut de plus supposer que  $\mathcal{P}$  est une projection orthogonale pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$ , défini par  $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}} \rightarrow \int_{\Omega} \underline{\underline{u}} : \underline{\underline{v}} d\omega$ , c'est-à-dire que la direction de projection est le sous-espace  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))^{\perp}$  de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  orthogonal à  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$ . L'optimisation de l'encadrement est assurée par

une minimisation ou une maximisation de  $\text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*)$  suivant que  $\mathbf{C}^0$  est plus grand ou plus petit que les  $\mathbf{C}(x)$  et passe donc par une recherche des valeurs de  $\underline{\underline{\eta}}^*$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$  rendant stationnaire la fonctionnelle  $\text{HS}^0$ .

Pour ce faire considérons d'abord la fonctionnelle  $F^0$ , définie pour tout champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  CA avec un déplacement nul sur  $\partial\Omega^u$  et pour tout champ  $\underline{\underline{\eta}}^*$ , par :

$$\begin{aligned} F^0(\underline{\underline{\epsilon}}', \underline{\underline{\eta}}^*) &= \Phi^0(\underline{\underline{U}}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}' : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}' d\omega \\ &+ \int_{\Omega} \underline{\underline{\eta}}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}}'] d\omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\eta}}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^* d\omega \end{aligned} \quad (4.33)$$

La stationnarité de  $F^0$  par rapport à  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  à  $\underline{\underline{\eta}}^*$  fixé exprime que  $\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}}'$  est la solution (unique)  $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{\underline{\eta}}^*)$  du problème auxiliaire (4.5) pour la polarisation  $\underline{\underline{\eta}}^*$ . En effet :

$$\frac{\partial F^0}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}'} : \underline{\underline{d\epsilon}} = \int_{\Omega} [\mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}' + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^*] : \underline{\underline{d\epsilon}} d\omega \quad (4.34)$$

et la nullité de cette expression pour tout  $\underline{\underline{d\epsilon}}$  CA avec un déplacement nul sur  $\partial\Omega^u$  est équivalente à l'admissibilité statique de  $\mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}' + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^*$  avec des forces nulles dans  $\Omega$  et sur  $\partial\Omega^F$ , c'est-à-dire à l'admissibilité statique de  $\mathbf{C}^0 : [\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}}'] + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^*$  avec les forces  $\underline{\underline{f}}$  et  $\underline{\underline{F}}^d$ . En cette valeur  $\underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*)$ , on a, en prenant  $\underline{\underline{d\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*)$  :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*) : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*) d\omega = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\eta}}^* : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*) d\omega, \quad (4.35)$$

si bien que :

$$F^0(\underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*), \underline{\underline{\eta}}^*) = \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*) \quad (4.36)$$

La différentiation de  $\text{HS}^0$  par rapport à  $\underline{\underline{\eta}}^*$  est alors aisée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*)}{\partial \underline{\underline{\eta}}^*} : \underline{\underline{d\eta}} &= \left[ \frac{\partial F^0}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}'}(\underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*), \underline{\underline{\eta}}^*) : \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*)}{\partial \underline{\underline{\eta}}^*}(\underline{\underline{\eta}}^*) + \frac{\partial F^0}{\partial \underline{\underline{\eta}}^*}(\underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*), \underline{\underline{\eta}}^*) \right] : \underline{\underline{d\eta}} \\ &= \frac{\partial F^0}{\partial \underline{\underline{\eta}}^*}(\underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*), \underline{\underline{\eta}}^*) : \underline{\underline{d\eta}} \quad \text{car} \quad \frac{\partial F^0}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}'}(\underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{\eta}}^*), \underline{\underline{\eta}}^*) = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Soit  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$  un champ rendant stationnaire la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman et  $\underline{\underline{u}}^\circ$ ,  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  les grandeurs associées, solutions de (4.5) pour cette valeur de  $\underline{\underline{\eta}}^*$ . Le champ  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$  est caractérisé par :

$$\frac{\partial \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^*)}{\partial \underline{\underline{\eta}}^*}(\underline{\underline{\eta}}^\circ) : \underline{\underline{d\eta}} = \int_{\Omega} [\underline{\underline{\epsilon}}^\circ - \underline{\underline{\eta}}^\circ] : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{d\eta}} d\omega = 0, \quad (4.38)$$

pour toute variation  $\underline{\underline{d\eta}}$  de  $\underline{\underline{\eta}}^*$ . L'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$  étant un espace vectoriel, cette dernière varie dans ce même espace. Cette condition d'optimalité s'écrit donc aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\underline{\epsilon}}^\circ - \underline{\underline{\eta}}^\circ]) &= 0 \\ \text{soit encore} \quad \mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}^\circ - \mathbf{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^\circ) &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En prenant par ailleurs  $\underline{\underline{d\eta}} = \underline{\underline{\eta}}^\circ$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} [\underline{\underline{\epsilon}}^\circ - \underline{\underline{\eta}}^\circ] : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^\circ d\omega = 0, \quad (4.40)$$

si bien que la valeur stationnaire de la fonctionnelle vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_P^0 = \text{HS}^0(\underline{\underline{\eta}}^\circ) &= \Phi^0(\underline{U}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{E} : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^\circ d\omega \\ &= \Phi^0(\underline{U}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{E} : \underline{p}^\circ d\omega, \end{aligned} \quad (4.41)$$

soit aussi, en termes de contraintes :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_P^0 &= -\Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \underline{\underline{\pi}}^\circ d\omega \\ &= -\Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{e}}^\circ d\omega \end{aligned} \quad (4.42)$$

On a donc construit une borne de Hashin et Shtrikman optimale  $\mathcal{B}_P^0$  pour l'énergie élastique du système considéré, supérieure ou inférieure, suivant le choix (arbitraire) de  $\mathbf{C}^0$ . Sa valeur peut être calculée explicitement par les relations ci-dessus à condition que l'on puisse résoudre deux problèmes auxiliaires. Le premier est le problème sur le milieu homogène de référence, de solution  $(\underline{U}, \underline{E}, \underline{\underline{\Sigma}})$  ; c'est un problème d'élasticité classique, régi par les équations (4.7) et dépendant du chargement appliqué. Le second est un problème mécanique un peu particulier, d'inconnues  $(\underline{u}^{\circ'}, \underline{\underline{e}}^{\circ'}, \underline{\underline{\sigma}}^{\circ'}, \underline{\underline{\eta}}^\circ)$  satisfaisant à :

$$\begin{cases} \underline{u}^{\circ'} \text{ et } \underline{\underline{e}}^{\circ'} \text{ sont CA avec des déplacements nuls sur } \partial\Omega^u \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\circ'} \text{ est SA avec des forces nulles dans } \Omega \text{ et sur } \partial\Omega^F \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\circ'} = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{e}}^{\circ'} + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^\circ \text{ dans } \Omega \\ \mathcal{P}(\underline{\underline{\eta}}^\circ) = \underline{\underline{\eta}}^\circ \\ \mathcal{P}([\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{E} + \underline{\underline{e}}^{\circ'} - \underline{\underline{\eta}}^\circ]) = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Il ne dépend du chargement que par l'intermédiaire de  $\mathcal{P}([\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{E})$ , calculé à partir de la solution du premier problème. Sa solution, dont nous admettons l'existence et l'unicité<sup>2</sup> dans le cas général, dépend linéairement de  $\underline{E}$ . Elle conduit aux champs de déformation et de contrainte d'essai optimaux par  $\underline{\underline{e}}^\circ = \underline{E} + \underline{\underline{e}}^{\circ'}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^{\circ'}$  et permet le calcul de la borne  $\mathcal{B}_P^0$ , par exemple par (4.41).

En supposant que le

$$\text{projecteur } \mathcal{P} \text{ commute avec les multiplications par } \mathbf{C} \text{ et } \mathbf{C}^0 \quad (4.44)$$

(et donc aussi avec les multiplications par  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}^0$ ), la condition d'optimalité (4.39) s'écrit,  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$  appartenant à l'image de  $\mathcal{P}$  :

$$[\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\mathcal{P}(\underline{\underline{e}}^\circ) - \underline{\underline{\eta}}^\circ] = 0. \quad (4.45)$$

$\mathcal{P}(\underline{\underline{e}}^\circ) - \underline{\underline{\eta}}^\circ$  appartient donc au noyau de  $\mathbf{C} - \mathbf{C}^0$ . Or seule la polarisation  $\underline{\underline{p}}^\circ = [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^\circ$  importe pour la construction des champs d'essai  $\underline{\underline{e}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  au travers de la résolution du problème (4.5). Le choix

$$\underline{\underline{\eta}}^\circ = \mathcal{P}(\underline{\underline{e}}^\circ) \quad (4.46)$$

$$\text{soit aussi } \underline{\underline{\pi}}^\circ = \mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}^\circ) \quad (4.47)$$

conduit donc à la valeur optimale de la valeur stationnaire de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman, qui admet ainsi les expressions alternatives suivantes :

$$\mathcal{B}_P^0 = \Phi^0(\underline{U}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{E} : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \mathcal{P}(\underline{\underline{e}}^\circ) d\omega \quad (4.48)$$

$$\text{et } = -\Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : \mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}^\circ) d\omega. \quad (4.49)$$

---

<sup>2</sup>modulo le noyau de  $\mathbf{C} - \mathbf{C}^0$  en ce qui concerne  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$



Dans ces conditions, on peut éliminer le champ  $\underline{\eta}^\circ$  dans le système (4.43), qui devient :

$$\begin{cases} \underline{u}^{\circ'} \text{ et } \underline{\epsilon}^{\circ'} \text{ sont CA avec des déplacements nuls sur } \partial\Omega^u \\ \underline{\sigma}^{\circ'} \text{ est SA avec des forces nulles dans } \Omega \text{ et sur } \partial\Omega^F \\ \underline{\sigma}^{\circ'} = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^{\circ'} + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \mathcal{P}(\underline{E} + \underline{\epsilon}^{\circ'}) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.50)$$

Il n'est en fait pas nécessaire de calculer complètement  $\underline{\sigma}^\circ$  et  $\underline{\epsilon}^\circ$  : les champs  $\mathcal{P}(\underline{\epsilon}^\circ)$  et de  $\mathcal{P}(\underline{\sigma}^\circ)$  suffisent pour estimer  $\mathcal{B}_P^0$ . Notons que ces champs projetés vérifient la loi de comportement locale du problème initial :

$$\mathcal{P}(\underline{\sigma}^\circ) = \mathbf{C} : \mathcal{P}(\underline{\epsilon}^\circ) \quad (4.51)$$

mais qu'ils ne sont ni CA, ni SA avec le chargement.

Rappelons enfin que l'on peut se contenter d'une borne non optimale, donnée directement par la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman (4.17) pour tout choix arbitraire de champ de polarisation  $[\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^*$ . Dans ce cas la résolution du premier problème auxiliaire est toujours indispensable mais le second se réduit au système (4.11) et donne la valeur de  $\underline{\epsilon}^*(\underline{p}^*)$ . En revanche, il faut alors être capable d'estimer tous les termes de la fonctionnelle.

#### 4.1.D Résolution formelle des problèmes auxiliaires

Le premier problème auxiliaire est résolu par les moyens classiques de l'élasticité linéaire. En fait, dans les cas que nous considérons ultérieurement, les conditions aux limites sont homogènes et la solution est immédiate. Le second problème peut être abordé au moyen de l'opérateur de Green  $\underline{G}_\Omega^0$  associé au milieu  $\mathbf{C}^0$ , à la géométrie du solide  $\Omega$  et des surfaces  $\partial\Omega^u$  et  $\partial\Omega^F$  (cf. annexe B.1).

Les composantes, dans un repère orthonormé quelconque, du déplacement  $\underline{u}^{\star'}$  et de la déformation  $\underline{\epsilon}^{\star'}$  au point  $\underline{x}$  associées à la polarisation  $\underline{p}^*$  par (4.5) valent :

$$u^{\star'}_i(\underline{x}) = - \int_\Omega \frac{\partial G_{\Omega ik}^0}{\partial x_l^s}(\underline{x}, \underline{y}) p_{kl}^*(\underline{y}) d\underline{y} \quad (4.52)$$

$$\epsilon^{\star'}_{ij}(\underline{x}) = - \int_\Omega \Gamma_{\Omega ijkl}^0(\underline{x}, \underline{y}) p_{kl}^*(\underline{y}) d\underline{y}, \quad (4.53)$$

où  $\Gamma_\Omega^0$  est l'opérateur de Green modifié associé à ce même milieu et cette même géométrie, de composantes :

$$\Gamma_{\Omega ijkl}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \left[ \frac{\partial^2 G_{\Omega ik}^0}{\partial x_j^p \partial x_l^s} \right]^{(i,j)(k,l)}(\underline{x}, \underline{y}). \quad (4.54)$$

Dans les relations ci-dessus, les exposants  $p$  et  $s$  indiquent une dérivation par rapport aux composantes du premier et du second argument de l'opérateur respectivement et l'exposant  $(i,j)(k,l)$  signifie que l'opérateur a été symétrisé par rapport aux indices  $(i, j)$  et  $(k, l)$ .

Ces relations ne sont malheureusement pas exploitables directement, car  $\Gamma_\Omega^0$  n'admet pas d'expression simple. On peut préférer exprimer la solution de (4.5) par le tenseur de Green  $\mathbf{G}^0$  du milieu infini de caractéristiques élastiques  $\mathbf{C}^0$  et le tenseur de Green modifié correspondant  $\Gamma^0$ . Ils présentent en effet des propriétés particulières (annexe B.2) et admettent en particulier une expression explicite relativement simple lorsque  $\mathbf{C}^0$  est isotrope ou isotrope transverse, ainsi qu'une expression générale dans l'espace de Fourier. En revanche, il faut alors faire intervenir des termes de bord rendant compte des conditions aux limites particulières du problème mécanique considéré. Les expressions obtenues ne sont alors plus explicites et leur application directe n'est donc pas non plus possible sans quelques approximations. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} u^{\star'}_i(\underline{x}) = & - \int_\Omega \frac{\partial G_{ik}^0}{\partial x_l^s}(\underline{x}, \underline{y}) p_{kl}^*(\underline{y}) d\omega_y + \int_{\partial\Omega^u} G_{ik}^0(\underline{x}, \underline{y}) \left[ C_{klmn}^0(\underline{y}) \epsilon^{\star'}_{mn}(\underline{y}) + p_{kl}^*(\underline{y}) \right] n_l(\underline{y}) ds_y \\ & - \int_{\partial\Omega^F} \frac{\partial G_{ik}^0}{\partial x_l^s}(\underline{x}, \underline{y}) C_{klmn}^0(\underline{y}) u^{\star'}_n(\underline{y}) n_m(\underline{y}) ds_y \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\star'}_{ij}(\underline{x}) = & - \int_{\Omega} \Gamma^0_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) p^{\star}_{kl}(\underline{y}) d\omega_y + \int_{\partial\Omega^u} \left[ \frac{\partial G^0_{ik}}{\partial x^p_j} \right]^{(i,j)}(\underline{x}, \underline{y}) \left[ C^0_{klmn}(\underline{y}) \epsilon^{\star'}_{mn}(\underline{y}) + p^{\star}_{kl}(\underline{y}) \right] n_l(\underline{y}) ds_y \\ & - \int_{\partial\Omega^F} \Gamma^0_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) C^0_{klmn}(\underline{y}) u^{\star'}_n(\underline{y}) n_m(\underline{y}) ds_y \end{aligned} \quad (4.56)$$

L'utilisation de ces opérateurs pour le calcul de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0$  aboutit à des relations implicites satisfaites par  $\epsilon^{\circ'}_{ij}(\underline{x})$  qu'il s'agit d'inverser. Les composantes de  $\underline{\underline{\epsilon}}^{\circ'}$  satisfont par exemple, dans l'hypothèse où la propriété (4.44) s'applique :

$$\epsilon^{\circ'}_{ij}(\underline{x}) = - \int_{\Omega} \Gamma^0_{\Omega ijkl}(\underline{x}, \underline{x}') \left[ C_{klmn}(\underline{x}') - C^0_{klmn}(\underline{x}') \right] \left[ \mathcal{P}(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\circ'}) (\underline{x}') \right]_{mn} d\underline{x}'. \quad (4.57)$$

Le déplacement  $\underline{u}^{\circ'}$  admet une relation similaire. On peut aussi exprimer ces grandeurs en fonction de l'opérateur de Green associé au milieu infini, mais nous ne reportons pas ces expressions ici pour des raisons de concision.

Comme annoncé plus haut, on peut se contenter du calcul de  $\mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}^{\circ}) = \underline{\underline{\eta}}^{\circ}$  pour l'estimation de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0$ . Ce champ est solution d'équations intégrales faisant intervenir un opérateur  $\tilde{\Gamma}_{\Omega\mathcal{P}}^0$  combinant l'un des opérateurs de Green modifiés, les champs  $\mathbf{C}$  et la projection  $\mathcal{P}$ . La relation précédente en fournit par exemple l'expression suivante :

$$\tilde{\Gamma}_{\Omega\mathcal{P}}^0 \star \underline{\underline{\eta}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\eta}}(\underline{x}) + \mathcal{P} \int_{\Omega} \Gamma_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) : \mathcal{P} \left( \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C}^0 \right] : \underline{\underline{\eta}} \right) (\underline{y}) d\omega_y, \quad (4.58)$$

le problème intégral à résoudre étant :

$$\tilde{\Gamma}_{\Omega\mathcal{P}}^0 \star \underline{\underline{\eta}}^{\circ} = \mathcal{P}(\underline{\underline{E}}). \quad (4.59)$$

L'existence et l'unicité des champs  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ}$  et par suite le calcul de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0$  dépendent de la possibilité d'inverser cette équation. Nous ne connaissons pas de résultat général relatif à un tel problème mais sa résolution peut être entreprise par une voie analytique ou numérique dans des situations particulières, dont certaines sont abordées dans ce qui suit, et conduit à des valeurs explicites de  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0$ .

Notons enfin que dans les expressions donnant le déplacement au point  $\underline{x}$ , tous les intégrands sont localement sommables ; toutes les intégrales sont donc parfaitement définies. En revanche, l'opérateur de Green modifié présente une singularité au point  $\underline{y} = \underline{x}$  ; les intégrales doivent être interprétées au sens des valeurs principales. On pourra trouver plus de précisions en annexe **B**.

## 4.1.E Application au milieu macrohomogène

### 4.1.E.a Généralités

Les formulations variationnelles classiques et de Hashin et Shtrikman décrites précédemment s'appliquent à tout problème d'élasticité linéaire, avec une géométrie, des chargements et des distributions de propriétés élastiques totalement quelconques. La recherche de bornes sur l'énergie élastique d'un système est en revanche d'un intérêt assez moyen pour le calcul des *structures*, puisque dans ces cas la solution exacte peut souvent être calculée directement, au besoin avec des méthodes numériques adéquates (et donc aux approximations de calcul près). Cette solution fournit l'état mécanique complet sur toute la structure et est donc infiniment plus riche qu'un simple encadrement de l'énergie globale.

Il n'en est pas de même des problèmes de *changement d'échelle*, où l'on s'intéresse à une *microstructure*, dont la définition est souvent approximative et partielle, et dont la complexité est telle qu'une résolution complète reste dans la plupart des cas illusoire, en tous cas avec les moyens actuels de calcul, même dans les situations où tous les paramètres du problème sont parfaitement connus (cf. paragraphe 1.1). Les méthodes d'encadrement révèlent alors leur puissance, d'autant plus que l'information qu'elles fournissent est bien celle recherchée, à savoir l'énergie contenue dans un VER, lorsque celui-ci est soumis à un chargement macroscopique donné. Cette information permet de définir

les *propriétés macroscopiques homogènes équivalentes* qui peuvent avantageusement être utilisées en remplacement des propriétés locales pour la résolution des problèmes mécaniques sur des structures constituées des matériaux ayant une telle microstructure, ainsi que nous l'avons montré au paragraphe 1.1 : le calcul porte alors sur un matériau homogène bien défini et est ainsi grandement simplifié, tout en restant exact quant aux champs macroscopiques et aux énergies potentielles ou complémentaires du système.

Les résultats généraux établis au paragraphe précédent trouvent donc une application naturelle dans le cadre de la recherche des propriétés macroscopiques des milieux hétérogènes élastiques linéaires. Considérons donc à nouveau le problème général d'élasticité défini sur une structure hétérogène  $\mathcal{S}$ , introduit au paragraphe 1.1.A, régi par les relations (1.17) à (1.19). Les variations de tous les champs  $f$  associés à ce problème sont supposées obéir à une décomposition en deux échelles (*cf.* paragraphe 1.1.B), macroscopique et microscopique, par l'intermédiaire de la notion de VER, sous la forme suivante :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S}, \quad f(\underline{x}) = \langle f \rangle_{\Omega(\underline{x})} + f'(\underline{x}), \quad (4.60)$$

où  $\Omega(\underline{x})$  est un VER au point  $\underline{x}$ .  $\langle f \rangle_{\Omega(\underline{x})}$  est la grandeur macroscopique associée à  $f$  et  $f'(\underline{x})$  sont ses fluctuations locales, de moyenne nulle sur  $\Omega(\underline{x})$ . Il y a séparation des échelles de variation lorsque cette décomposition se transmet par dérivation (voir (1.24)), c'est-à-dire lorsque :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S}, \quad \left\langle \frac{df(\underline{x})}{d\underline{x}} \right\rangle_{\Omega(\underline{x})} = \frac{d\langle f \rangle_{\Omega(\underline{x})}}{d\underline{x}}. \quad (4.61)$$

L'extension de  $\Omega(\underline{x})$  doit d'une part être suffisante pour garantir la satisfaction de la condition de macrohomogénéité (*cf.* paragraphe 1.1.C), c'est-à-dire la dépendance des champs locaux de contrainte et de déformation au sein de ce volume vis-à-vis des grandeurs macroscopiques seules, et d'autre part, ne pas être trop importante pour ne pas lisser exagérément les variations des grandeurs macroscopiques calculées en considérant la structure homogène équivalente. La géométrie et les dimensions de  $\Omega(\underline{x})$  sont donc arbitraires, sitôt qu'elles satisfont ces deux conditions.

Dans ce qui suit nous supposons que  $\Omega(\underline{x})$  est le même en tout point de la structure, c'est-à-dire :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S}, \quad \underline{y} \in \Omega(\underline{x}) \Leftrightarrow \underline{y} - \underline{x} \in \Omega_0. \quad (4.62)$$

Cette simplification est principalement d'ordre technique. Les développements ultérieurs s'appliquent aussi à des situations où  $\Omega(\underline{x})$  évolue de manière macroscopique, mais au prix d'une lourdeur d'écriture accrue.

La résolution du problème de changement d'échelle consiste à estimer, d'une part, l'énergie potentielle moyenne dans un tel VER en fonction de la déformation macroscopique  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega(\underline{x})}$  à laquelle il est soumis (problème (1.31)) et, d'autre part, l'énergie complémentaire moyenne dans ce même domaine en fonction de la contrainte macroscopique  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega(\underline{x})}$  appliquée (problème (1.32)). L'hypothèse de macrohomogénéité (*cf.* paragraphe 1.1.C) garantit que les résultats de ces deux problèmes sont indépendants des fluctuations locales des conditions aux limites particulières appliquées aux bords du VER, à condition qu'elles soient compatibles avec les sollicitations macroscopiques imposées. Par la suite, nous allons considérer des conditions homogènes, en déformations ou en contraintes suivant le problème traité, sachant que des résultats identiques seraient obtenus avec d'autres conditions. Les formulations variationnelles classiques des problèmes mécaniques à traiter sont alors celles définies par les relations (1.38) et (1.39) pour la détermination de l'énergie potentielle macroscopique, et les relations (1.40) et (1.41) pour celle de l'énergie complémentaire. Rappelons que l'absence de forces de volume ne signifie pas qu'il n'y en a pas sur la structure considérée *in fine* mais qu'elles sont macroscopiques et « pas trop intenses ».

Le comportement local étant supposé linéaire, il en est de même du comportement macroscopique et les potentiels à déterminer sont donc de la forme :

$$2\bar{\Phi}(\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle) = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \bar{\mathbf{C}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad (4.63)$$

$$2\bar{\Psi}(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle) = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \bar{\mathbf{S}} : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle, \quad (4.64)$$

où, par définition,  $\bar{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{S}}$  sont respectivement le tenseur des modules effectifs et le tenseur des souplesses effectives. L'hypothèse de macrohomogénéité (voir paragraphe 1.1.C) assure qu'ils sont inverses l'un de l'autre.

#### 4.1.E.b Tenseurs des modules et souplesses de Hashin et Shtrikman

Le domaine  $\Omega$  désigne donc maintenant un tel VER, centré autour d'un point  $\underline{x}$  de la structure  $\mathcal{S}$ . L'intégration sur  $\Omega$  de la contrainte ou de la déformation s'identifie au processus d'homogénéisation :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot d\omega. \quad (4.65)$$

Considérons d'abord le cas des déplacements imposés à la frontière :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{y}) = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \cdot \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in \partial\Omega, \quad (4.66)$$

conduisant à une estimation de l'énergie potentielle macroscopique, à laquelle s'identifie maintenant l'énergie  $W$  :

$$W = |\Omega| \bar{\Phi}(\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle). \quad (4.67)$$

La résolution du problème à polarisation nulle (4.7) est immédiate et conduit à des champs homogènes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}}(\underline{y}) = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \\ \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{y}) = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}} \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \text{VER}, \quad (4.68)$$

les potentiels  $\Phi^0$  et  $\Psi^0$  valant :

$$\Phi^0(\underline{\underline{U}}) = -\Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{|\Omega|}{2} \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle. \quad (4.69)$$

$\underline{\underline{E}}$  s'apparente à la déformation macroscopique  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  du fait des conditions aux limites retenues ; pour la même raison, le champ de déformation d'essai satisfait  $\langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Il n'en est pas de même de  $\underline{\underline{\Sigma}}$  qui ne s'identifie systématiquement à la contrainte macroscopique  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  que lorsque  $\mathbf{C}^0$  est égal au tenseur  $\bar{\mathbf{C}}$ .

La valeur stationnaire de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman est alors donnée par :

$$\frac{2}{|\Omega|} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0 = \underline{\underline{E}} : [\mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle] \quad (4.70)$$

$$= \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ \rangle, \quad (4.71)$$

où l'on a utilisé  $\langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ \rangle - \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle$ . Le champ  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  solution du problème (4.43) relatif aux conditions aux limites considérées dépend linéairement de  $\underline{\underline{E}}$ . On peut donc définir un tenseur  $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{\text{HS}^0}$  d'ordre quatre, opérant dans  $\mathbb{T}_2^s$ , tel que :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ \rangle = \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{\text{HS}^0} : \underline{\underline{E}} \quad \forall \underline{\underline{E}} \in \mathbb{T}_2^s, \quad (4.72)$$

si bien que l'on a :

$$\frac{2}{|\Omega|} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{\text{HS}^0} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle. \quad (4.73)$$

$\mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{\text{HS}^0}$  est le tenseur des modules de Hashin et Shtrikman associé au milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  et au projecteur  $\mathcal{P}$ . Ses composantes  $\mathbf{C}_{\mathcal{P}ijkl}^{\text{HS}^0}$  sont symétriques vis-à-vis des indices  $(i, j)$  et  $(k, l)$  par construction ; la symétrie  $(ij, kl)$ , c'est-à-dire son caractère auto-adjoint, peut aussi être établie dans ce cadre général.

Considérons en effet deux chargements macroscopiques quelconques  $\underline{E}_1$  et  $\underline{E}_2$ , induisant des champs d'essai optimaux  $(\underline{\sigma}_i^\circ, \underline{\epsilon}_i^\circ, \underline{\eta}_i^\circ)$ ,  $i = 1, 2$ . Comme  $\underline{\sigma}_1^\circ = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}_1^\circ + [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}_1^\circ$  est SA et  $\underline{\epsilon}_2^\circ$  CA avec  $\underline{E}_2$ , on a :

$$\langle \underline{\sigma}_1^\circ : \underline{\epsilon}_2^\circ \rangle = \langle \underline{\sigma}_1^\circ \rangle : \underline{E}_2 \quad (4.74)$$

$$= \langle \underline{\epsilon}_1^\circ : \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}_2^\circ \rangle + \langle \underline{\eta}_1^\circ : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\epsilon}_2^\circ \rangle. \quad (4.75)$$

D'après (4.39), l'optimalité du champ  $\underline{\eta}_2^\circ$  garantit que :

$$\langle \underline{\eta}_1^\circ : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\epsilon}_2^\circ - \underline{\eta}_2^\circ] \rangle = 0. \quad (4.76)$$

Enfin, la définition  $\langle \underline{\sigma}_1^\circ \rangle = \mathbf{C}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}} : \underline{E}_1$  conduit à la relation :

$$\underline{E}_1 : \mathbf{C}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}} : \underline{E}_2 = \langle \underline{\epsilon}_1^\circ : \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}_2^\circ \rangle + \langle \underline{\eta}_1^\circ : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}_2^\circ \rangle, \quad (4.77)$$

dont le membre de droite est visiblement symétrique vis-à-vis des indices 1 et 2, ce qui établit la symétrie de  $\mathbf{C}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}}$ .

$\mathbf{C}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}}$  est une borne (au sens des formes quadratiques associées) pour le tenseur des modules effectifs  $\bar{\mathbf{C}}$  lorsque  $\mathbf{C}^0$  est choisi conformément aux règles (4.27). Ses propriétés de symétrie ne sont en revanche pas assujetties à un tel choix, ni aux relations de commutativité (4.44). Son existence est la conséquence de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (4.43) qui, rappelons-le, reste une hypothèse.

Considérons maintenant le cas des conditions aux limites homogènes en contraintes :

$$\underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n} = \langle \underline{\sigma} \rangle \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{y} \in \partial\Omega, \quad (4.78)$$

telles que l'énergie  $W$  soit égale à l'opposée de l'énergie complémentaire macroscopique :

$$W = -|\Omega| \bar{\Psi}(\langle \underline{\sigma} \rangle). \quad (4.79)$$

La résolution du problème à polarisation nulle (4.7) conduit également à des champs homogènes, mais différents des précédents :

$$\begin{cases} \underline{\Sigma}(\underline{y}) = \langle \underline{\sigma} \rangle \\ \underline{E}(\underline{y}) = \mathbf{S}^0 : \underline{\Sigma} \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \text{VER}, \quad (4.80)$$

les potentiels  $\Phi^0$  et  $\Psi^0$  valant :

$$\Phi^0(\underline{U}) = -\Psi^0(\underline{\Sigma}) = -\frac{|\Omega|}{2} \langle \underline{\sigma} \rangle : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\sigma} \rangle. \quad (4.81)$$

La valeur stationnaire de la fonctionnelle  $\text{HS}^0$  vaut alors :

$$\frac{2}{|\Omega|} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0 = \underline{\Sigma} : [-\mathbf{S}^0 : \underline{\Sigma} + \langle \underline{\epsilon}^\circ \rangle] \quad (4.82)$$

$$= -\langle \underline{\sigma} \rangle : \langle \underline{\epsilon}^\circ \rangle, \quad (4.83)$$

où l'on a utilisé  $\langle \underline{\epsilon}^\circ \rangle = -\langle \underline{\epsilon}^\circ \rangle + \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\sigma} \rangle$  et  $\langle \underline{\sigma} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle$ . Le champ  $\underline{\epsilon}^\circ$  solution du problème (4.43) relatif à des conditions homogènes en contraintes dépend aussi linéairement de  $\underline{\Sigma}$ , ce qui permet de définir un tenseur  $\mathbf{S}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}}$  tel que :

$$\langle \underline{\epsilon}^\circ \rangle = \mathbf{S}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}} : \underline{\Sigma} \quad \forall \underline{\Sigma} \in \mathbb{T}_2^s, \quad (4.84)$$

si bien que l'on a :

$$\frac{2}{|\Omega|} \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^0 = -\langle \underline{\sigma} \rangle : \mathbf{S}^{\text{HS}^0}_{\mathcal{P}} : \langle \underline{\sigma} \rangle. \quad (4.85)$$

On peut vérifier par la même démarche que plus haut que  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  est auto-adjoint : il suffit de noter qu'avec ces nouvelles conditions imposées  $\langle \underline{\underline{\sigma}}_1^\circ : \underline{\underline{\epsilon}}_2^\circ \rangle$  vaut  $\underline{\underline{\Sigma}}_1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}}_2^\circ \rangle$ , soit encore  $\underline{\underline{\Sigma}}_1 : \mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}} : \underline{\underline{\Sigma}}_2$ . Le tenseur  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  est le *tenseur des souplesses de Hashin et Shtrikman associé au milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  et au projecteur  $\mathcal{P}$* . C'est une borne, au sens des formes quadratiques associées, pour le tenseur des souplesses effectives  $\bar{\mathbf{S}}$  lorsque  $\mathbf{C}^0$  est choisi conformément aux règles (4.27).

Nous verrons au paragraphe qui suit que, grâce à l'hypothèse de macrohomogénéité, les tenseurs  $\mathbf{C}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  et  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  sont définis positifs et inverses l'un de l'autre, si bien qu'il est suffisant de traiter le cas, par exemple, de la déformation moyenne imposée.

Les projections  $\mathcal{P}$  qui seront étudiées par la suite présentent par ailleurs la propriété de ne pas modifier l'intégrale sur le VER des champs auxquels on les applique :

$$\forall \underline{\underline{f}} \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \quad \int_{\Omega} \mathcal{P}(\underline{\underline{f}}) d\omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} d\omega. \quad (4.86)$$

On dira plus précisément que  $\mathcal{P}$  ne modifie pas les grandeurs macroscopiques. Dans ces conditions, on a :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ \rangle = \langle \mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}^\circ) \rangle \quad \text{et} \quad \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle = \langle \mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}^\circ) \rangle = \langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle, \quad (4.87)$$

la dernière égalité étant satisfaite lorsque (4.44) est vérifiée. La connaissance de la *valeur moyenne* du champ  $\mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}^\circ)$  pour tout chargement  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  imposé, ou de celle de  $\mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}^\circ)$  pour tout chargement  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  imposé, est donc suffisante pour le calcul de  $\mathbf{C}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  ou de  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$ .

#### 4.1.E.c Équation intégrale

Comme nous l'avons annoncé plus haut, le calcul explicite de ces champs nécessite la résolution d'une équation intégrale de la forme (4.59). Pour l'aborder, il est préférable d'avoir recours à l'opérateur de Green modifié relatif au milieu infini  $\Gamma^0$  plutôt qu'à celui associé au milieu fini  $\Gamma^0_{\Omega}$ . Il présente en effet des propriétés de symétrie, présentées en annexe **B**, qui permettent de considérablement simplifier le problème d'élasticité dans certaines situations.

Dans le cas des conditions aux limites homogènes en déformation (4.66), la relation (4.56) s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\underline{y}} \in \Omega \quad \epsilon^*_{ij}(\underline{\underline{y}}) = E_{ij} & - \int_{\Omega} \Gamma^0_{ijkl}(\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{z}}) p^*_{kl}(\underline{\underline{z}}) d\omega_z \\ & + \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial G^0_{ik}}{\partial x^p_j} \right]^{(i,j)} (\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{z}}) \sigma^*_{kl}(\underline{\underline{z}}) n_l(\underline{\underline{y}}) ds_z. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Le terme intégral sur la surface  $\partial\Omega$  rend compte de l'effet des conditions aux limites (4.66). L'hypothèse de macrohomogénéité impose que  $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{\underline{x}})$  ne soit pas sensible aux fluctuations de ces dernières sitôt que  $\underline{\underline{x}}$  est suffisamment éloigné de  $\partial\Omega$  et suggère donc de supposer ce terme constant. Toutefois l'étude détaillée des propriétés de  $\Gamma^0$ , entreprise en annexe **B**, montre que ceci n'est assurément le cas que lorsque  $\Omega$  est de forme ellipsoïdale.

Considérons en revanche le champ  $\epsilon^1(\underline{\underline{y}})$  défini par :

$$\forall \underline{\underline{y}} \in \Omega \quad \epsilon^1_{ij}(\underline{\underline{y}}) = E_{ij} - \int_{\Omega(\underline{\underline{y}})} \Gamma^0_{ijkl}(\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{z}}) \left[ p^*_{kl}(\underline{\underline{z}}) - \langle p^*_{kl} \rangle_{\Omega(\underline{\underline{y}})} \right] d\omega_z, \quad (4.89)$$

où l'intégration porte maintenant sur le domaine  $\Omega(\underline{\underline{y}})$ , translaté de  $\Omega_0$  en  $\underline{\underline{y}}$ , qui diffère de  $\Omega = \Omega(\underline{\underline{x}})$ . Les résultats présentés en annexe **B** garantissent que ce champ est *CA*, que sa moyenne sur  $\Omega$  est égale à  $\underline{\underline{E}}$  et que  $\mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^1 + \underline{\underline{p}}^*$  est SA, à condition toutefois que  $\Omega_0$  soit sensiblement centré par rapport à l'origine, que les variations de  $\underline{\underline{p}}^*$  soient rapides en comparaison des dimensions de  $\Omega_0$  et que  $\langle p^*_{kl} \rangle_{\Omega(\underline{\underline{y}})}$  soit macroscopique. La première condition n'enlève rien à la généralité du propos ; pour satisfaire les suivantes, il convient de ne s'intéresser qu'aux polarisations admettant deux échelles de variations.

Le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^1$  ne satisfait pas la condition aux limites (4.66) et diffère donc de  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ . Mais l'hypothèse de macrohomogénéité assure qu'en dehors d'une couche périphérique les deux champs coïncident. De

plus, seules les grandeurs ayant une interprétation globale sur le VER sont significatives pour le problème d'homogénéisation, si bien que, dans l'hypothèse où l'épaisseur de cette zone périphérique est faible, la contribution des erreurs faites en assimilant  $\underline{\underline{\epsilon}}^1$  à  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  est négligeable. On écrira donc :

$$\forall \underline{y} \in \Omega \quad \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{y}) = \underline{\underline{E}}^0 - \int_{\Omega(\underline{y})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y} - \underline{z}) : \underline{\underline{p}}^*(\underline{z}) d\omega_z, \quad (4.90)$$

où  $\underline{\underline{E}}^0$  est un tenseur macroscopique et donc uniforme à l'échelle du VER  $\Omega$ , donné par :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \mathbf{E}_\Omega^0 : \langle \underline{\underline{p}}^* \rangle, \quad (4.91)$$

avec

$$\mathbf{E}_\Omega^0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) d\omega_y. \quad (4.92)$$

Cette écriture s'applique même si  $\Omega$  n'est pas de forme ellipsoïdale. La valeur de  $\underline{\underline{E}}^0$  dépend de la géométrie du domaine  $\Omega$ , mais est indépendante de son extension, qui doit toutefois être suffisante pour garantir l'hypothèse de macrohomogénéité.

La portée de cette simplification va bien au-delà du simple intérêt technique qu'elle présente. Elle est en effet intimement liée à la notion de changement d'échelle et plus précisément à celle de macrohomogénéité : c'est elle qui garantit l'indépendance du résultat final par rapport aux conditions aux limites particulières appliquées et l'on pourra remarquer à ce sujet la profonde similitude entre la présente discussion et celle abordée à la fin du paragraphe 1.1.C. L'interprétation de cette relation est la suivante : la déformation au point  $\underline{x}$  dans le problème auxiliaire se décompose en un champ macroscopique rendant compte des conditions aux limites sur le bord de  $\mathcal{S}$  et du champ de polarisation « au loin », et du champ microscopique induit par la polarisation dans un VER autour de  $\underline{x}$ .

Il est bien sûr possible d'invoquer le même type de relations pour le problème en contraintes imposées (4.78). La contrainte induite par le champ de polarisation  $\underline{\underline{p}}^*$  peut être calculée selon :

$$\forall \underline{y} \in \Omega \quad \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{y}) = \underline{\underline{\Sigma}}^0 + \int_{\Omega(\underline{y})} \mathbf{\Delta}^0(\underline{y} - \underline{z}) : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}^*(\underline{z}) d\omega_z, \quad (4.93)$$

le tenseur  $\underline{\underline{\Sigma}}^0$  étant donné par :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \mathbf{G}_\Omega^0 : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^* \rangle, \quad (4.94)$$

avec

$$\mathbf{G}_\Omega^0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{\Delta}^0(\underline{y}) d\omega_y. \quad (4.95)$$

Les variations de  $\underline{\underline{\Sigma}}^0$  sont macroscopiques. La déformation s'en déduit par  $\underline{\underline{\epsilon}}^* = \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^* - \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}^*$  ce qui conduit encore à la relation (4.90), mais avec une nouvelle valeur de  $\underline{\underline{E}}^0$  :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \mathbf{S}^0 : \mathbf{G}_\Omega^0 : \mathbf{S}^0 \langle \underline{\underline{p}} \rangle. \quad (4.96)$$

Rappelons que la validité des développements ultérieurs utilisant ces relations est limitée aux polarisations admettant deux échelles de variations, de la forme (4.60). Il faut en particulier supposer que le champ rendant stationnaire la fonctionnelle HS en fait partie. Une situation contraire n'est pas compatible avec les principes d'homogénéisation retenus dans le présent travail. Précisons aussi que la relation ci-dessus s'applique en tout point  $\underline{y}$  tel que  $\Omega(\underline{y})$  n'intersecte pas le bord de la structure  $\mathcal{S}$ . L'homogénéisation du comportement du matériau hétérogène à proximité de ce dernier nécessite des développements spécifiques que nous n'entreprenons pas dans le cadre de ce travail.

Dans ces conditions et avec l'hypothèse (4.44), l'équation intégrale (4.59) que satisfait le champ  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$  optimal, solution de (4.43), se transforme en :

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{\mathcal{P}}^0 \star \underline{\underline{\eta}}^\circ = \underline{\underline{E}}^0, \quad (4.97)$$

l'opérateur  $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{P}}^0$  étant défini par :

$$\begin{aligned} [\tilde{\Gamma}_{\mathcal{P}}^0 \star \underline{\underline{\eta}}](\underline{x}) &= \underline{\underline{\eta}}(\underline{x}) + \mathcal{P} \int_{\Omega(\underline{x})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \mathcal{P} \left( [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}} \right) (\underline{y}) d\omega_y \\ &= \underline{\underline{\eta}}(\underline{x}) + \mathcal{P} \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) : \mathcal{P} \left( [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}} \right) (\underline{x} + \underline{y}) d\omega_y. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Cette relation s'applique quelles que soient les conditions aux limites imposées. Seule la valeur de  $\underline{\underline{E}}^0$  dépend du chargement appliqué. Si l'on impose la déformation macroscopique (conditions (4.66)), le tenseur  $\underline{\underline{E}}^0$  dépend du champ macroscopique appliqué  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  selon :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \mathbf{E}_{\Omega}^0 : \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}} \rangle = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \mathbf{E}_{\Omega}^0 : \langle \underline{\underline{p}} \rangle ; \quad (4.99)$$

si c'est la contrainte que l'on impose,  $\underline{\underline{E}}^0$  vaut :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + [\mathbf{E}_{\Omega}^0 - \mathbf{S}^0] : \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}} \rangle = \mathbf{S}^0 : [\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \mathbf{G}_{\Omega}^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle]. \quad (4.100)$$

Il n'est toutefois pas indispensable d'expliciter ces relations pour calculer les tenseurs de Hashin et Shtrikman, à condition d'admettre l'existence et l'unicité de la solution  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ}$  de l'équation (4.97) pour  $\underline{\underline{E}}^0$  donné et d'adopter l'hypothèse (4.86). La solution  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ}$  conduit en effet directement à la sollicitation macroscopique par :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\epsilon}}^{\circ} \rangle = \langle \mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}^{\circ}) \rangle = \langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle \quad (4.101)$$

si l'on impose la déformation moyenne et

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}^{\circ} \rangle = \langle \mathcal{P}\underline{\underline{\sigma}}^{\circ} \rangle = \langle \mathbf{C} : \mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}^{\circ}) \rangle = \langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle \quad (4.102)$$

si c'est la contrainte moyenne que l'on impose. Dans le premier cas, le tenseur  $\mathbf{C}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  est ainsi caractérisé par :

$$\langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle = \mathbf{C}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}} : \langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle, \quad \tilde{\Gamma}_{\mathcal{P}}^0 \star \underline{\underline{\eta}}^{\circ} = \underline{\underline{E}}^0, \quad \forall \underline{\underline{E}}^0 \in \mathbb{T}_2^s. \quad (4.103)$$

et dans le second, le tenseur  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  satisfait :

$$\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}} : \langle \mathbf{C} : \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle = \langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle, \quad \tilde{\Gamma}_{\mathcal{P}}^0 \star \underline{\underline{\eta}}^{\circ} = \underline{\underline{E}}^0, \quad \forall \underline{\underline{E}}^0 \in \mathbb{T}_2^s. \quad (4.104)$$

L'opérateur  $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{P}}^0$  étant bien le même dans les deux cas, ceci assure que les tenseurs  $\mathbf{C}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  et  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  sont inverses l'un de l'autre, à condition toutefois que, par exemple, l'application  $\underline{\underline{E}}^0 \rightarrow \langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle$  soit surjective.

Pour le vérifier, il suffit de s'assurer de son injectivité, qui résulte de l'unicité de la solution du problème (4.43) que nous avons admise. Considérons en effet le cas des déplacements imposés, pour lequel  $\langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Comme  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ} = 0$  est bien solution de (4.43) lorsque  $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = 0$ , l'unicité assure que  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ} = 0$  est la seule situation telle que  $\langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ} \rangle = 0$ , ce qui implique, par (4.99), que  $\underline{\underline{E}}^0$  est également nul. Le tenseur  $\mathbf{S}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$  est donc l'inverse à gauche de  $\mathbf{C}^{\text{HS}_0}_{\mathcal{P}}$ , et donc aussi, par transposition, l'inverse à droite.

Ces tenseurs sont donc inversibles. Si le milieu de référence est choisi conformément aux règles (4.27), l'un d'entre-eux majore le tenseur effectif correspondant. Il est donc défini positif et son inverse l'est aussi. La démonstration de cette propriété pour un milieu de référence quelconque reste une question ouverte dans le cas général mais elle pourra être traitée dans les situations particulières abordées plus loin.

L'équivalence des encadrements résultant des problèmes en déformation moyenne imposée et de ceux en contrainte moyenne imposée apparaît ainsi comme une nouvelle conséquence de l'hypothèse de macrohomogénéité, qui est par ailleurs aussi à l'origine de la dualité des potentiels de déformation et de contrainte macroscopiques (*cf.* paragraphe 1.1.C).



#### 4.1.E.d Résumé des propriétés et mise en œuvre de la démarche

Nous avons donc établi l'existence de tenseurs symétriques  $\mathbf{C}^{\text{HS}_p^0}$  et  $\mathbf{S}^{\text{HS}_p^0}$ , inversibles et inverses l'un de l'autre. Ils encadrent, au sens des formes quadratiques associées, le tenseur des modules  $\bar{\mathbf{C}}$  ou des souplesses  $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}^{-1}$  effectifs, lorsque le milieu de référence est choisi conformément aux règles (4.27), ce qui assure, dans ce cas, leur positivité. Ces résultats s'appliquent quel que soit le sous-espace de champs de polarisation  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$  choisi, à condition que les propriétés de commutativité (4.44) et de conservation de la moyenne (4.86) soient satisfaites. La suite des développements sera consacrée à des choix particuliers d'espaces de polarisation d'essai de ce type.

Le calcul des tenseurs peut être entrepris selon deux procédures génériques. La première est celle décrite dans le paragraphe précédent et consiste à résoudre le problème (4.97) pour tout chargement  $\underline{\underline{E}}^0 = \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\Sigma}}^0$  imposé et à calculer les tenseurs de Hashin et Shtrikman par les relations (4.103) ou (4.104). La seconde procédure repose sur l'égalité déduite de (4.41) lorsque la déformation moyenne est imposée :

$$\frac{2}{|\Omega|} \mathcal{B}_p^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle_\Omega, \quad (4.105)$$

ou sur celle déduite de (4.42) lorsque la contrainte moyenne est imposée :

$$\begin{aligned} \frac{2}{|\Omega|} \mathcal{B}_p^0 &= -\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle_\Omega \\ &= -\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{e}}^\circ \rangle_\Omega. \end{aligned} \quad (4.106)$$

La relation linéaire entre la polarisation moyenne et le chargement imposé  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  ou  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  conduit aux tenseurs de Hashin et Shtrikman. Pour la déterminer il s'agit encore de résoudre le problème (4.97) mais cette fois-ci en fonction du chargement macroscopique, c'est-à-dire en spécifiant la valeur de  $\underline{\underline{E}}^0$  en fonction de ce dernier, ce qui revient à résoudre le problème (4.43) dans le cas du milieu macrohomogène. Suivant les situations particulières traitées, on mettra en œuvre l'une ou l'autre des procédures, éventuellement les deux.

Les propriétés des tenseurs de Hashin et Shtrikman ont été établies dans l'hypothèse d'existence et d'unicité de la solution des problèmes (4.43) et (4.97). Dans la plupart des cas que nous traiterons par la suite, cette propriété pourra être établie.

La situation générale ne conduit malheureusement pas à des solutions explicites : des hypothèses particulières sur la disposition des phases au sein du VER seront indispensables pour une résolution complète. Les propriétés des bornes de Hashin et Shtrikman établies dans le cadre général s'appliquent bien sûr aussi à ces cas particuliers, à condition que les hypothèses faites sur la microstructure soient réalistes, c'est-à-dire puissent être observées dans des matériaux réels, dans lesquels le tenseur des modules prend une et une seule valeur en tout point. Si l'on peut s'assurer de cette « condition de cohérence » des hypothèses sur la distribution des phases, il est inutile de vérifier les propriétés établies plus haut. Ceci n'est malheureusement pas une tâche facile : s'il est parfois possible de montrer que certaines hypothèses sont en contradiction avec elles-mêmes (des exemples seront présentés ultérieurement), montrer qu'un ensemble d'hypothèses est cohérent est d'une autre difficulté. En pratique, il faudra donc en toute rigueur vérifier malgré tout que les propriétés satisfaites par les bornes de Hashin et Shtrikman dans le cas général sont bien vérifiées par les expressions trouvées dans les divers cas abordés. Un résultat contraire serait un indice fort d'incohérence des hypothèses adoptées, et d'absence de signification physique du résultat en question. Plus généralement, une démarche visant à construire des bornes de type Hashin et Shtrikman en utilisant explicitement ou implicitement de telles hypothèses sur la distribution des phases et qui négligerait de vérifier ces propriétés serait incontestablement incomplète et ses résultats sujets à caution.

On veillera donc à s'assurer d'abord de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (4.43) et/ou (4.97), ensuite de la symétrie des tenseurs  $\mathbf{C}^{\text{HS}_p^0}$  et  $\mathbf{S}^{\text{HS}_p^0}$  et enfin de leur positivité et du fait qu'ils sont inverses l'un de l'autre. Notons que si la première procédure de calcul est adoptée, cette dernière propriété est une conséquence immédiate de la définition des tenseurs ; il faudra simplement s'assurer de la bijectivité des relations  $\underline{\underline{E}}^0 \leftrightarrow \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  ou  $\underline{\underline{\Sigma}}^0 \leftrightarrow \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ .

### 4.1.E.e Description stochastique

Dans ce qui précède, les champs  $\mathbf{C}(\underline{\mathbf{x}})$  et le projecteur  $\mathcal{P}$  sont supposés parfaitement déterminés. Si l'on adopte une description stochastique de la microstructure (cf. paragraphe 1.1.D), il est préférable de les considérer comme des réalisations particulières  $\alpha$  de variables aléatoires.

Plus précisément, les champs  $\underline{\underline{\eta}}^*$  considérés dans ce qui suit seront de la forme :

$$\underline{\underline{\eta}}^* = \sum_i p_i^* \phi_i, \quad (4.107)$$

où les  $p_i^*$  désignent formellement des paramètres généralisés (c'est-à-dire qui ne s'apparentent pas nécessairement à des scalaires en quantité dénombrable) non aléatoires et les  $\phi_i$  sont des variables aléatoires, génératrices du sous-espace  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$ . L'optimisation du choix de  $\underline{\underline{\eta}}$  dans une réalisation particulière fournit des valeurs  $p_{i\alpha}^\circ$  qui dépendent a priori de cette réalisation et conduisent à une borne pour  $\bar{\mathbf{C}}$ .

Toutefois, l'hypothèse d'ergodicité que nous adoptons garantit que le résultat est indépendant de cette réalisation. Elle permet en effet de remplacer certaines moyennes invoquant les  $\phi_i$ , par des fonctions de corrélation de ces dernières, caractéristiques du processus aléatoire qui régit la microstructure et indépendantes de la réalisation particulière.

## 4.2 Approches classiques : Polarisation uniforme par morceaux

### 4.2.A Relations générales

#### 4.2.A.a Description classique des milieux hétérogènes

La description classique d'un milieu hétérogène a déjà été présentée au paragraphe 1.1.D : elle distingue  $n$  phases mécaniques  $r \in [1, n]$ , caractérisées par leurs tenseurs des modules  $\mathbf{C}^r$  respectifs et occupant des domaines  $\Omega^r(\underline{\mathbf{x}})$  complémentaires de  $\Omega(\underline{\mathbf{x}})$ , caractérisés par des fonctions indicatrices  $\kappa_r$ , que l'on peut considérer comme des variables aléatoires si l'on adopte une approche stochastique. Les grandeurs macroscopiques non aléatoires associés à ces fonctions sont les fractions volumiques :

$$c_r(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{|\Omega^r(\underline{\mathbf{x}})|}{|\Omega(\underline{\mathbf{x}})|} = \langle \kappa_r(\underline{\mathbf{x}}) \rangle_\alpha. \quad (4.108)$$

Le champ des tenseurs des modules locaux est donné par :

$$\mathbf{C}(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_r \mathbf{C}^r \kappa_r(\underline{\mathbf{x}}). \quad (4.109)$$

Le calcul des moyennes se décompose en :

$$\langle f \rangle = \sum_r c_r f_r, \quad (4.110)$$

$f_r$  étant la valeur moyenne de  $f$  sur la phase  $r$ .

#### 4.2.A.b Bornes de type Hashin et Shtrikman

Dans l'approche classique de Hashin et Shtrikman les polarisations sont prises uniformes sur chacune des phases mécaniques au sein du VER  $\Omega$ , sous la forme :

$$\underline{\underline{\eta}}^* = \sum_r \underline{\underline{\eta}}^r \kappa_r(\underline{\mathbf{x}}) \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}. \quad (4.111)$$

Les tenseurs  $\underline{\underline{\eta}}^r$  sont des *variables macroscopiques* : elles dépendent éventuellement de  $\underline{\mathbf{x}}$  mais sont uniformes à l'échelle d'un VER. La projection  $\mathcal{P}$  consiste à remplacer un champ  $\underline{\underline{f}}$  de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  par un

champ uniforme sur chaque phase, dont la valeur est la moyenne du champ  $\underline{f}$  sur cette phase dans le VER autour du point considéré :

$$\mathcal{P}(\underline{f})(\underline{x}) = \sum_r \frac{1}{c_r |\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_r(\underline{y}) \underline{f}(\underline{y}) d\omega_y \kappa_r(\underline{x}). \quad (4.112)$$

Cette relation ne s'applique qu'aux champs  $f$  tels que le résultat obtenu soit bien macroscopique, propriété qu'il conviendra de vérifier. On vérifie aisément que la propriété de commutativité (4.44) et celle de conservation de la moyenne (4.86) sont satisfaites et que  $\underline{\eta}^*$  est de la forme (4.107). Les résultats obtenus avec cette projection seront désignés par l'indice CL, en référence à la nature « classique » de l'approche.

Avec un tel choix, l'équation (4.97) caractérisant le champ d'essai optimal s'écrit :

$$\sum_r \left[ \underline{\eta}^r + \frac{1}{c_r |\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_r(\underline{y}) \int_{\Omega(\underline{y})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y} - \underline{z}) : \sum_s [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^s \kappa_s(\underline{z}) d\omega_z d\omega_y \right] \kappa_r = \underline{E}^0. \quad (4.113)$$

Le tenseur  $\underline{\eta}^s$  est relatif au point  $\underline{z} \in \Omega(\underline{y})$  avec  $\underline{y} \in \Omega(\underline{x})$ , c'est-à-dire qu'il est à distance microscopique de  $\underline{x}$ . En conséquence,  $[\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\eta}^s$  est une constante vis-à-vis des intégrations. Un changement de variables adéquat et l'utilisation de la relation de Fubini, dont l'applicabilité ne pose pas de difficulté, toutes les intégrales étant parfaitement définies, conduit à réécrire ces dernières selon :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_r(\underline{y}) \left[ \int_{\Omega(\underline{y})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y} - \underline{z}) \kappa_s(\underline{z}) d\omega_z \right] d\omega_y &= \int_{\Omega(\underline{x})} \left[ \int_{\Omega_0} \kappa_r(\underline{y}) \kappa_s(\underline{y} + \underline{z}) \mathbf{\Gamma}^0(-\underline{z}) d\omega_z \right] d\omega_y \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_r(\underline{y}) \kappa_s(\underline{y} + \underline{z}) d\omega_y \right] \mathbf{\Gamma}^0(-\underline{z}) d\omega_z. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Or l'hypothèse d'ergodicité assure que :

$$\forall \underline{z} \in \Omega_0 \quad \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_r(\underline{y}) \kappa_s(\underline{y} + \underline{z}) d\omega_y = \langle \kappa_r(\underline{x}) \kappa_s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha = \phi_{rs}^{\underline{x}}(\underline{z}), \quad (4.115)$$

où  $\phi_{rs}^{\underline{x}}$  est la fonction de corrélation d'ordre deux, ou covariance, des phases  $r$  et  $s$  au point  $\underline{x}$  (cf. paragraphe 1.1.D).

Il est utile de rappeler quelques propriétés de ces fonctions et de noter tout d'abord que les covariances ne sont pas indépendantes les unes des autres. En effet, les variables aléatoires indicatrices satisfont la relation :

$$\forall \underline{x} \quad \sum_s \kappa_s(\underline{x}) = 1, \quad (4.116)$$

qui induit directement les relations suivantes sur les covariances :

$$\forall(\underline{x}, \underline{z}) \quad \forall r \in [1, n] \quad \sum_s \phi_{rs}^{\underline{x}}(\underline{z}) = c_r. \quad (4.117)$$

De plus, indépendamment de toute hypothèse sur la forme de ces fonctions, on a :

$$\forall(\underline{x}, \underline{z}) \quad \forall(r, s) \in [1, n] \quad \phi_{rs}^{\underline{x}}(\underline{z}) = \phi_{sr}^{\underline{x}+\underline{z}}(-\underline{z}). \quad (4.118)$$

La microstructure étant supposée stationnaire, on a  $\phi_{rs}^{\underline{x}} = \phi_{rs}^{\underline{x}+\underline{z}}$  et donc :

$$\forall \underline{z} \in \Omega_0 \quad \forall(r, s) \in [1, n] \quad \phi_{rs}(\underline{z}) = \phi_{sr}(-\underline{z}). \quad (4.119)$$

Les formes particulières des covariances auxquelles on s'intéressera par la suite induisent leur parité, si bien que l'on aura :

$$\forall(r, s) \in [1, n] \quad \phi_{rs} = \phi_{sr}. \quad (4.120)$$

Il y a donc au plus  $n(n+1)/2 - n = n(n-1)/2$  covariances indépendantes. Par ailleurs, les microstructures étudiées dans le cadre de ce présent travail ne présentent pas d'ordre à grande distance : deux

événements en deux points très distants l'un de l'autre sont indépendants. La fonction  $\phi_{rs}(\underline{z})$  tend donc vers  $c_r c_s$  lorsque  $\|\underline{z}\|$  tend vers l'infini. Enfin, un point donné étant occupé par une et une seule phase, la valeur en 0 des covariances est donnée par les fractions volumiques. Ces fonctions respectent donc les valeurs aux limites suivantes :

$$\forall (r, s) \in [1, n] \quad \begin{cases} \phi_{rs}(0) = c_r \delta_{rs} \\ \lim_{\|\underline{z}\| \rightarrow \infty} \phi_{rs}(\underline{z}) = c_r c_s, \end{cases} \quad (4.121)$$

$\delta_{rs}$  étant le symbole de Kronecker.

Les tenseurs  $\underline{\underline{\eta}}^r$  sont alors caractérisés par le système suivant :

$$\forall r \in [1, n] \quad \underline{\underline{\eta}}^r + \frac{1}{c_r} \sum_s \hat{\Gamma}_{rs}^0 : [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s = \underline{\underline{E}}^0 \quad (4.122)$$

avec

$$\hat{\Gamma}_{rs}^0 = \int_{\Omega_0} \phi_{rs}^x(\underline{z}) \Gamma^0(\underline{z}) d\omega_z. \quad (4.123)$$

Les tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  rendent compte de l'information d'ordre deux sur la microstructure au point  $\underline{x}$ . Dans l'hypothèse de stationnarité, les fonctions de corrélation sont des grandeurs macroscopiques et il en est de même des tenseurs  $\underline{\underline{p}}^s = [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s$ , optimaux obtenus par inversion du système, ce qui justifie *a posteriori* l'emploi de la relation (4.90) pour estimer la déformation induite par la polarisation et celui de la relation de projection (4.112).

Nous admettons que le système est inversible dans le cas général, au même titre que nous avons admis l'existence et l'unicité de la solution de (4.43) (au noyau de  $\mathbf{C} - \mathbf{C}^0$  près). La symétrie des tenseurs  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  que l'on calcule à partir des  $\underline{\underline{\eta}}^r$  solutions selon :

$$\forall \underline{\underline{E}}^0 \quad \langle \mathbf{C}^r : \underline{\underline{\eta}}^r \rangle = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} : \langle \underline{\underline{\eta}}^r \rangle \quad (4.124)$$

a déjà été établie dans un cadre général. On peut l'établir à nouveau à partir de la forme particulière du système et des propriétés suivantes des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  :

$$\begin{cases} \forall (r, s) \in [1, n] & \hat{\Gamma}_{rs}^0 = \hat{\Gamma}_{sr}^0 \\ \forall r \in [1, n] & \sum_s \hat{\Gamma}_{rs}^0 = c_r \mathbf{E}_{\Omega_0}^0. \end{cases} \quad (4.125)$$

La première découle de la propriété (4.119) combinée à la parité de  $\Gamma^0$  et à un choix de  $\Omega_0$  symétrique par rapport à l'origine, ou directement de (4.120) si cette relation s'applique, ce qui sera le cas pour les distributions considérées par la suite. La seconde provient des égalités (4.117). La symétrie résulte de ce que les  $\underline{\underline{\eta}}^r$  solutions de (4.122) rendent stationnaires la forme quadratique :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{W} &= 2\underline{\underline{E}}^0 : \langle [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r \rangle - \sum_r c_r \underline{\underline{\eta}}^r : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r \\ &\quad - \sum_r \sum_r \underline{\underline{\eta}}^s : [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \hat{\Gamma}_{rs}^0 : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r, \end{aligned}$$

qui est symétrique du fait de la symétrie  $(r, s)$  des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$ . On en déduit la relation de réciprocité :

$$\underline{\underline{E}}_1^0 : \langle [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}_2^r \rangle = \underline{\underline{E}}_2^0 : \langle [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}_1^r \rangle,$$

où les  $\underline{\underline{\eta}}_i^r$ ,  $i \in [1, 2]$ , sont les solutions associées aux chargements  $\underline{\underline{E}}_i^0$ . En sommant toutes les équations du système (4.122), pondérées par les fractions volumiques, on obtient<sup>3</sup>, par la seconde propriété satisfaite par tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  :

$$\langle \underline{\underline{\eta}}^r \rangle + \sum_s \left[ \sum_r \hat{\Gamma}_{rs}^0 \right] : [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s = \langle \underline{\underline{\eta}}^r \rangle + \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s \rangle = \underline{\underline{E}}^0.$$

<sup>3</sup>Ce résultat n'est autre que la relation  $\langle \underline{\underline{p}} \rangle + \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}} \rangle = \underline{\underline{E}}^0$  déjà écrite plus haut, mais alors qu'elle résultait de l'analyse du problème de localisation sur le VER macrohomogène soumis à une déformation macroscopique imposée, on l'établit ici à partir de la forme algébrique du système (4.122) et des propriétés des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  qui le définissent.

La combinaison de ces deux relations, la symétrie de  $\mathbf{E}_{\Omega_0}^0$  et la définition ci-dessus du tenseur  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  établissent alors la symétrie de ce dernier :

$$\langle \underline{\underline{\eta}}_1^r \rangle : \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} : \langle \underline{\underline{\eta}}_2^r \rangle = \langle \underline{\underline{\eta}}_2^r \rangle : \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} : \langle \underline{\underline{\eta}}_1^r \rangle. \quad (4.126)$$

#### 4.2.B Calcul effectif des bornes de Hashin et Shtrikman

Les fonctions  $\phi_{rs}$  (l'exposant  $\underline{\underline{x}}$  peut être omis) peuvent être mesurées à partir de coupes au travers du matériau et les tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  en découlent par intégration numérique. Les  $\eta^r$  peuvent alors être calculées comme des fonctions linéaires de  $\underline{\underline{E}}^0$  et les composantes du tenseur  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  en découlent.

Si  $\mathbf{C}^0$  est choisi conformément aux règles (4.27), on obtient ainsi une borne pour le tenseur des modules effectifs  $\bar{\mathbf{C}}$ , prenant en compte l'information d'ordre deux sur la microstructure, quelle que soit la nature de cette dernière. Une optimisation du résultat vis-à-vis du choix de  $\mathbf{C}^0$  conduit à un encadrement optimal des propriétés effectives. L'optimalité du résultat vis-à-vis de l'information microstructurale utilisée, c'est-à-dire les fonctions  $\phi_{rs}$ , n'est en revanche pas assurée.

Ce travail n'est en pratique que très rarement entrepris : l'estimation des valeurs de  $\phi_{rs}(\underline{\underline{z}})$  pour  $\underline{\underline{z}} \in \Omega_0$  est fastidieuse et le calcul des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  par intégration numérique est susceptible d'incertitudes assez élevées. Il est toutefois des situations où des propriétés particulières de la distribution des phases simplifient grandement le calcul des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$ . Nous décrivons deux situations classiques, déjà évoquées au paragraphe 1.2.B.a et en suggérons des extensions dont nous discutons la pertinence.

##### 4.2.B.a Distribution isotrope des phases

La situation la plus simple est celle considérée par les auteurs de l'approche (*cf.* paragraphe 1.2.B.a), qui consiste à supposer que la répartition des phases est isotrope, et donc que les fonctions de corrélation ne dépendent que de la distance et non de la direction :

$$\forall (r, s) \in [1, n]^2, \quad \forall \underline{\underline{z}} \in \Omega_0, \quad \phi_{rs}(\underline{\underline{z}}) = \Phi_{rs}(\|\underline{\underline{z}}\|), \quad (4.127)$$

les  $\Phi_{rs}$  étant des fonctions réelles. Les propriétés d'intégration de  $\mathbf{\Gamma}^0$ , établies en annexe B, paragraphe B.2.B.c, conduisent à la forme explicite suivante des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  :

$$\hat{\Gamma}_{rs}^0 = \mathbf{E}^0 \Phi_{rs}(0) = \mathbf{E}^0 c_r \delta_{rs}. \quad (4.128)$$

Pour l'établir, il suffit de décomposer  $\mathbf{\Gamma}^0$  en sa partie singulière sphérique  $\mathbf{E}^0 \delta$  et la valeur principale associée, d'effectuer l'intégration de cette dernière selon des sphères centrées en l'origine, et d'adopter de surcroît une *géométrie sphérique* pour  $\Omega_0$ .

**Calcul et premières expressions des tenseurs de Hashin et Shtrikman** Le système d'équations caractérisant les  $\underline{\underline{\eta}}^r$  n'est alors plus couplé :

$$\forall r \in [1, n] \quad \underline{\underline{\eta}}^r + \mathbf{E}^0 : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r = \underline{\underline{E}}^0 \quad (4.129)$$

et  $\underline{\underline{\eta}}^r$  apparaît comme la déformation au sein d'une inclusion sphérique de phase  $r$  noyée dans une matrice infinie de tenseurs des modules  $\mathbf{C}^0$ , soumise à l'infini à la déformation  $\underline{\underline{E}}^0$  (*cf.* paragraphe 1.2.B.d). Son existence et son unicité pour  $\underline{\underline{E}}^0$  donné ne posent plus de difficulté. Le tenseur  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  admet alors l'expression suivante, déjà annoncée au paragraphe 1.2.B.d :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} = \langle \mathbf{C}_r : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} \quad (4.130)$$

avec

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) = [\mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0]^{-1} = [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1}. \quad (4.131)$$

Ce tenseur est symétrique et défini positif puisque le « constraint tensor » introduit par Hill (*cf.* paragraphe 1.2.B.d)  $\mathbf{C}^{0\star} = \mathbf{E}^{0-1} - \mathbf{C}^0$  l'est (*cf.* annexe C) ; il en est donc de même de sa moyenne ce qui assure la bijectivité de  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 \leftrightarrow \langle \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle$  et donc l'inversibilité de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$ . Ceci s'applique d'ailleurs pour tout  $\mathbf{C}^r$  et  $\mathbf{C}^0$ , indépendamment du signe de leur différence. Les relations (C.60) établies en annexe C conduisent à l'expression équivalente :

$$\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} = \langle \mathbf{S}_r : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} \quad (4.132)$$

avec

$$\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) = [\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0]^{-1} = [\mathbf{S}^{0\star} + \mathbf{S}^r]^{-1}. \quad (4.133)$$

à laquelle une approche en contrainte imposée aurait conduit. Le tenseur  $\mathbf{G}^0$  désigne la partie singulière sphérique du tenseur de Green modifié en contraintes :  $\mathbf{G}^0 = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{E}^0] : \mathbf{C}^0$  et  $\mathbf{S}^{0\star} = \mathbf{G}^{0-1} - \mathbf{S}^0$  est l'inverse de  $\mathbf{C}^{0\star}$ .

**Tenseurs  $\mathbf{T}$**  Si l'on opte pour la seconde procédure de calcul des tenseurs de Hashin et Shtrikman, la condition d'optimalité des polarisations  $\underline{\underline{\mathbf{p}}}^r = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\mathbf{e}}}^r$  s'écrit, d'après (4.99) et dans le cas de la déformation imposée (4.105) :

$$\forall r \in [1, n] \quad \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)^{-1} : \mathbf{E}^0 : \underline{\underline{\mathbf{p}}}^r = [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : [\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle + \mathbf{E}^0 : \langle \underline{\underline{\mathbf{p}}} \rangle]. \quad (4.134)$$

Si l'on impose la contrainte macroscopique (relation (4.106)), cette condition devient :

$$\forall r \in [1, n] \quad \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)^{-1} : \mathbf{E}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\mathbf{e}}}^r = [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \mathbf{S}^0 : [\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle - \mathbf{G}_{\Omega}^0 : \langle \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle]. \quad (4.135)$$

Introduisons le tenseur

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) = \mathbf{E}^{0-1} : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0], \quad (4.136)$$

tel que :

$$\forall r \in [1, n] \quad \underline{\underline{\mathbf{p}}}^r = \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \underline{\underline{\mathbf{E}}}^0, \quad (4.137)$$

ou encore :

$$\forall r \in [1, n] \quad \underline{\underline{\mathbf{e}}}^r = \mathbf{S}^0 : \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\Sigma}}^0. \quad (4.138)$$

Ce tenseur sera invoqué à plusieurs reprises par la suite et il convient d'en préciser les propriétés dès à présent. Notons d'abord qu'il satisfait :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 : [\mathbf{E}^{0-1} - \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)] : \mathbf{E}^0 &= \mathbf{E}^0 - \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \mathbf{E}^0 \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)^{-1} - \mathbf{C}^r + \mathbf{C}^0] : \mathbf{E}^0 \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \end{aligned} \quad (4.139)$$

et donc aussi

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) = \mathbf{E}^{0-1} : [\mathbf{E}^0 - \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)] : \mathbf{E}^{0-1}, \quad (4.140)$$

ce qui met en évidence son caractère auto-adjoint et conduit à la propriété de commutativité :

$$\mathbf{E}^{0-1} : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] = [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{E}^{0-1}. \quad (4.141)$$

En remplaçant dans la dernière expression ci-dessus  $\mathbf{E}^{0-1}$  par  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)^{-1} - [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0]$ , on obtient une nouvelle expression de  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  :

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) = [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] - [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0]. \quad (4.142)$$

D'autres manipulations purement algébriques que nous ne détaillons pas conduisent à d'autres expressions équivalentes qui sont plus particulièrement adaptées pour traiter le problème en contrainte macroscopique imposée :

$$\begin{aligned} -\mathbf{S}^0 : \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{S}^0 &= [\mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0] : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{G}^{0-1} \\ &= \mathbf{G}^{0-1} - \mathbf{G}^{0-1} : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{G}^{0-1} \\ &= [\mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0] - [\mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0] : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0]. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Lorsque  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^r$  et donc  $\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^r$  sont définis, on peut enfin opter pour les expressions plus concises suivantes :

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) = \left[ \mathbf{E}^0 + [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0]^{-1} \right]^{-1} \quad (4.144)$$

et

$$\mathbf{S}^0 : \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{S}^0 = - \left[ \mathbf{G}^0 + [\mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0]^{-1} \right]^{-1}. \quad (4.145)$$

Il est facile de voir que  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  est une fonction strictement décroissante<sup>4</sup> de  $\mathbf{C}^r$ , au sens des formes quadratiques associées :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) \quad \mathbf{C}^1 < \mathbf{C}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1) > \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^2). \quad (4.146)$$

Par la relation (4.140), on en déduit la croissance stricte de  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  en fonction de  $\mathbf{C}^r$  :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) \quad \mathbf{C}^1 < \mathbf{C}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1) < \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^2). \quad (4.147)$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \quad \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, 0) = \mathbf{T}(+\infty, \mathbf{C}^r) = [\mathbf{E}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} < 0 \quad (4.148)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0) = 0 \quad (4.149)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, +\infty) = \mathbf{T}(0, \mathbf{C}^r) = [\mathbf{E}^0]^{-1} > 0, \quad (4.150)$$

où  $+\infty$  et  $0$  désignent des tenseurs des modules respectivement très raide ou très souple par rapport aux autres tenseurs en question ; les inégalités résultent de  $0 < \mathbf{E}^0 < \mathbf{S}^0$ . Ces résultats conduisent immédiatement à l'encadrement :

$$\forall r \quad [\mathbf{E}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} < \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) < \mathbf{E}^{0-1}, \quad (4.151)$$

et par sommation à la même propriété pour la moyenne :

$$[\mathbf{E}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} < \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle < \mathbf{E}^{0-1}. \quad (4.152)$$

D'autre part, comme  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  et  $\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  sont définis positifs, la relation (4.142) et la dernière expression de (4.143) assurent que :

$$\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^r] : \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \leq \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0. \quad (4.153)$$

Les inégalités ne se réduisent à des égalités que pour  $\mathbf{C}^r = \mathbf{C}^0$ , cas pour lequel les trois quantités sont nulles ; elles sont strictes dès que  $\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0$  est défini. Par sommation, il vient :

$$\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^R] : \mathbf{C}^0 \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle \leq \mathbf{C}^V - \mathbf{C}^0, \quad (4.154)$$

où  $\mathbf{C}^V$  et  $\mathbf{S}^R$  sont les bornes de Voigt et Reuss classiques relatives au matériau étudié. S'il existe une phase  $r_0$  telle que  $\mathbf{C}^{r_0} - \mathbf{C}^0$  soit défini, alors les inégalités sont strictes. Il en est de même s'il

---

<sup>4</sup>Voir la note au bas de la page 180 au sujet de la manipulation de ce type d'inégalités, dont il est fait plusieurs fois usage dans la suite.

existe deux phases  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $\mathbf{C}^{r_1} - \mathbf{C}^{r_2}$  soit défini. En effet, soit  $\underline{u} \in \mathbb{T}_2^s$  quelconque non nul. Si jamais  $\underline{u} : [\mathbf{C}^{r_1} - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^{r_1}) : [\mathbf{C}^{r_1} - \mathbf{C}^0] : \underline{u}$  était nul, comme  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  est défini positif,  $[\mathbf{C}^{r_1} - \mathbf{C}^0] : \underline{u}$  le serait aussi et  $[\mathbf{C}^{r_2} - \mathbf{C}^0] : \underline{u}$  qui vaudrait alors  $[\mathbf{C}^{r_2} - \mathbf{C}^{r_1}] : \underline{u}$ , ne le serait pas. Dans ce cas,  $\underline{u} : [\mathbf{C}^{r_2} - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^{r_2}) : [\mathbf{C}^{r_2} - \mathbf{C}^0] : \underline{u}$  serait donc strictement positif. La majoration dans (4.153) pour ce vecteur arbitraire est donc stricte pour au moins l'une de ces deux phases et il en est donc de même de la moyenne. La même démarche s'applique bien évidemment aussi pour la minoration.

Notons enfin que par (4.142) et d'après la croissance (cf. annexe C) de  $[\mathbf{E}^0]^{-1} = \mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^0$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$ , le tenseur  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  est une fonction strictement croissante de  $\mathbf{C}^0$  à  $[\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0]$  fixé, ce qui s'écrit :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1, \Delta\mathbf{C}) \quad \Delta\mathbf{C} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C}, \mathbf{C}^r + \Delta\mathbf{C}) > \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r). \quad (4.155)$$

De même, la décroissance de  $[\mathbf{G}^0]^{-1}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  et la dernière expression de (4.143) établissent la croissance de  $\mathbf{S}^0 : \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : \mathbf{S}^0$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  à  $[\mathbf{S}^r - \mathbf{S}^0]$  fixé.

**Nouvelles expressions des tenseurs de Hashin et Shtrikman** Suivant que l'on impose la déformation ou la contrainte macroscopique la polarisation moyenne est alors caractérisée par :

$$[\mathbf{E}^{0-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle] : \mathbf{E}^0 : \langle \underline{p} \rangle = \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \underline{e} \rangle. \quad (4.156)$$

ou par :

$$[\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0] : \mathbf{G}^0 : \langle \underline{e} \rangle = \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{p} \rangle. \quad (4.157)$$

L'inégalité de droite de (4.152) assure la définie positivité de  $\mathbf{E}^{0-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle$  et celle de gauche assure la définie négativité de  $[\mathbf{E}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle$  qui est équivalente à la définie positivité de  $\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0$ . Les opérateurs qui s'appliquent à  $\langle \underline{p} \rangle$  ou à  $\langle \underline{e} \rangle$  aux membres de gauche des équations ci-dessus sont donc bien inversibles. L'on obtient ainsi les nouvelles expressions du tenseur des modules et du tenseur des souplesses de Hashin et Shtrikman :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} &= \mathbf{C}^0 + \mathbf{E}^{0-1} : [\mathbf{E}^{0-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle]^{-1} : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle \\ &= \mathbf{C}^0 - \mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{E}^{0-1} : [\mathbf{E}^{0-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle]^{-1} : \mathbf{E}^{0-1} \\ &= -\mathbf{C}^{0*} + \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} = \left\langle [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} \right\rangle^{-1} - \mathbf{C}^{0*} \end{aligned} \quad (4.158)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} &= \mathbf{S}^0 - \mathbf{G}^{0-1} : [\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0]^{-1} : \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0 \\ &= \mathbf{S}^0 - \mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{G}^{0-1} : [\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0]^{-1} : \mathbf{G}^{0-1} \\ &= -\mathbf{S}^{0*} + \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} = \left\langle [\mathbf{S}^{0*} + \mathbf{S}^r]^{-1} \right\rangle^{-1} - \mathbf{S}^{0*}. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Lorsque  $\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle$  admet un inverse, on peut aussi utiliser les expressions suivantes :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} = \mathbf{C}^0 + \left[ \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} - \mathbf{E}^0 \right]^{-1} \quad (4.160)$$

$$\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} = \mathbf{S}^0 - \left[ \mathbf{C}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} : \mathbf{C}^0 + \mathbf{G}^0 \right]^{-1}. \quad (4.161)$$



**Propriétés des tenseurs de Hashin et Shtrikman** Les dernières égalités de (4.158) et de (4.159) mettent en évidence la symétrie de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  et  $\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  ainsi que leur définie positivité qui résulte des inégalités :

$$\forall r \mathbf{S}^{0*} > \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) > 0 \Rightarrow \mathbf{S}^{0*} > \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle > 0 \Rightarrow \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} > \mathbf{C}^{0*} > 0$$

et

$$\forall r \mathbf{C}^{0*} > \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) > 0 \Rightarrow \mathbf{C}^{0*} > \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle > 0 \Rightarrow \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} > \mathbf{S}^{0*} > 0.$$

On peut aussi vérifier algébriquement que les relations ci-dessus sont bien équivalentes à (4.130) et (4.132), ce qui prouve notamment l'équivalence des approches en déformation imposée et en contrainte imposée lorsque l'on met en œuvre la seconde procédure de calcul des tenseurs de Hashin et Shtrikman :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{C}_r : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} &= \mathbf{C}^0 + \langle [\mathbf{C}_r - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} \\ &= \mathbf{C}^0 + \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : [\mathbf{E}^{0-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle]^{-1} : \mathbf{E}^{0-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_r : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} &= \mathbf{S}^0 + \langle [\mathbf{S}_r - \mathbf{S}^0] : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} \\ &= \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0 : [\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^0]^{-1} : \mathbf{G}^{0-1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, les avant-dernières expressions de (4.158) et de (4.159) et l'encadrement (4.152) montrent la croissance du tenseur des modules de Hashin et Shtrikman en fonction de la moyenne des tenseurs  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  à  $\mathbf{C}^0$  fixé. La croissance dans ces mêmes conditions de ces derniers en fonction des  $\mathbf{C}^r$ , établie plus haut, conduit à celle de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  en fonction des tenseurs des modules des phases constitutives, à milieu de référence fixé, que l'on peut écrire formellement :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^r, \Delta \mathbf{C}^r, r \in [1, n]\}) \quad & \forall r \in [1, n] \Delta \mathbf{C}^r \geq 0 \quad \Rightarrow \\ \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^r + \Delta \mathbf{C}^r, r \in [1, n]\}) & \geq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^r, r \in [1, n]\}). \end{aligned} \quad (4.162)$$

Cette croissance est d'ailleurs stricte : une inégalité stricte pour un seul des incréments  $\Delta \mathbf{C}^r$  suffit pour garantir une inégalité stricte dans la conclusion.

Les propriétés de symétrie, de définie positivité, d'équivalence des résultats obtenus par les approches en déformation imposée et en contrainte imposée et de croissance de la borne en fonction des modules des constituants sont la conséquence de la symétrie du tenseur  $\mathbf{E}^0$  et des inégalités  $0 < \mathbf{E}^0 < \mathbf{S}^0$ , d'où découlent les propriétés de symétrie et les encadrements satisfaits par les tenseurs  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$ . Elles ne dépendent pas du signe des écarts  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^r$  et s'appliquent donc à toute estimation construite à partir d'un milieu de référence arbitraire. Lorsque ce dernier est choisi suffisamment raide ou suffisamment souple, on peut établir des propriétés complémentaires d'encadrement, qui s'appliquent notamment aux bornes que l'on obtient lorsque le milieu de référence est choisi conformément aux règles (4.27).

Ces propriétés résultent de la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  en fonction de  $\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle$ , déjà utilisée précédemment, et de l'encadrement (4.154). L'avant-dernière relation de (4.158) permet d'exploiter les bornes  $B$  obtenues pour  $\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) \rangle$  à condition qu'elles satisfassent  $\mathbf{E}^{0-1} - B > 0$ , alors que l'avant-dernière relation de (4.159) permet de tirer profit de celles qui satisfont  $[\mathbf{S}^0 - \mathbf{E}^0]^{-1} + B > 0$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{C}^0 / \mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{C}^0 > \mathbf{C}^V \\ \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} & \leq \mathbf{C}^0 - \mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{E}^{0-1} : [\mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^V]^{-1} : \mathbf{E}^{0-1} \\ & = \mathbf{C}^V + [\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^V] : [\mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^V]^{-1} : [\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^V] \end{aligned} \quad (4.163)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{C}^0 / \mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 > \mathbf{S}^R \\ \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} \leq \mathbf{S}^0 - \mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{G}^{0-1} : [\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^R]^{-1} : \mathbf{G}^{0-1} \\ = \mathbf{S}^R + [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^R] : [\mathbf{G}^{0-1} + \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^R]^{-1} : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^R]. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Il suffit qu'il existe deux phases dont l'écart des tenseurs des modules soit défini pour que les inégalités dans les conclusions soient strictes. Rappelons que  $\mathbf{E}^{0-1} > \mathbf{C}^0$  et  $\mathbf{G}^{0-1} > \mathbf{S}^0$  ; Tout milieu de référence plus raide que la « moitié » de la borne de Voigt conduit donc à la première inégalité et tout milieu de référence plus souple que le « double » de la borne de Reuss conduit à la première. Ces majorations ne sont toutefois intéressantes que lorsque le milieu de référence n'est pas trop proche des limites, puisqu'elles divergent en ces dernières. Il convient de se limiter à  $\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}^V$  pour la première et  $\mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S}^R$  pour la seconde ; les majorants ci-dessus sont alors plus petits que  $\mathbf{C}^0$  et  $\mathbf{S}^0$  respectivement. D'où :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}^V] \Rightarrow 0 < \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} \leq \mathbf{C}^0 \\ [\mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^R] \Rightarrow 0 < \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}}. \end{array} \right. \quad (4.165)$$

Une inégalité stricte dans les hypothèses induit une inégalité stricte dans les conclusions, mais comme plus haut la présence de deux phases dont l'écart des tenseurs des modules est défini suffit pour que les inégalités dans les conclusions soient toujours strictes. Ces propriétés s'appliquent en particulier lorsque l'on cherche à construire des bornes conformément aux règles (4.27) :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \left\{ \begin{array}{l} [\forall r \mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}^r] \Rightarrow 0 < \bar{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} \leq \mathbf{C}^0 \\ [\forall r \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^r] \Rightarrow 0 < \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} \leq \bar{\mathbf{C}}. \end{array} \right. \quad (4.166)$$

La remarque ci-dessus concernant la nature large ou stricte des inégalités vaut aussi ici.

Les majorations (4.163) et (4.164) ne sont toutefois pas suffisantes pour montrer que les bornes de Hashin et Shtrikman sont meilleures que les bornes de Voigt et Reuss. En effet, la propriété (4.163) ne s'applique si  $\mathbf{E}^{0-1} + \mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^V$  est défini positif ; la seconde expression du majorant établit donc que ce dernier est supérieur à  $\mathbf{C}^V$ , quel que soit le milieu de référence. Le minimum de ce majorant est atteint pour  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}^V$  et vaut justement  $\mathbf{C}^V$ , mais ce choix n'est pas compatible avec les règles (4.27). Il en est de même pour le majorant de (4.164), qui est supérieur à la borne de Reuss. En revanche, les inégalités (C.71) établies en annexe C et les expressions (4.158) et (4.159) des tenseurs de Hashin et Shtrikman conduisent immédiatement aux minoration :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} > -\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^R \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} > -\mathbf{S}^{0*} + \mathbf{S}^V. \quad (4.167)$$

Ces inégalités s'appliquent quel que soit le milieu de référence  $\mathbf{C}^0$ , mais elles sont particulièrement intéressantes lorsqu'il est très raide ou très souple en comparaisons des phases constitutives ; il en est en effet alors de même (*cf.* paragraphe C.2.A) du tenseur  $\mathbf{C}^{0*}$ . Dans le premier cas, on obtient une borne supérieure pour les modules effectifs et les inégalités ci-dessous s'appliquent :

$$0 < \bar{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} < [-\mathbf{S}^{0*} + \mathbf{S}^V]^{-1} \approx \mathbf{C}^V. \quad (4.168)$$

Dans le second cas, on obtient :

$$0 < \bar{\mathbf{S}} \leq \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} < [-\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^R]^{-1} \approx \mathbf{S}^R. \quad (4.169)$$

Les bornes de Hashin et Shtrikman optimales, c'est-à-dire obtenues avec le meilleur milieu de référence, sont au moins aussi restrictives que celles obtenues avec un milieu de référence très raide ou très souple. L'encadrement obtenu améliore donc nécessairement celui de Voigt et Reuss. Ce résultat peut être obtenu directement : en effet, lorsque le milieu de référence est très raide, la déformation au sein de l'inclusion de phase  $r$  noyée dans le milieu infini est donnée par

$$\underline{\underline{\eta}}^r = [\mathbf{C}^r + \mathbf{C}^{0*}]^{-1} : \mathbf{E}^{0-1} : \underline{\underline{E}}^0 \approx \mathbf{S}^{0*} : \mathbf{E}^{0-1} : \underline{\underline{E}}^0$$

et est pratiquement indépendante du comportement de la phase en question, ainsi que nous l'annonçons au paragraphe **1.2.B.a** : les moyennes par phase du champ de déformation d'essai sont les mêmes pour toutes les phases si bien que la borne de Hashin et Shtrikman obtenue est exactement la borne de Voigt. On montre de même qu'un milieu de référence très souple conduit à un champ de contrainte d'essai quasi homogène et donc à la borne de Reuss.

**Milieu de référence optimal** Il est connu que dans les situations usuelles, le meilleur encadrement est obtenu pour  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_r^-$  et  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_r^+$  (cf. paragraphe **1.2.B.a**). Nous allons montrer que ceci est toujours le cas, quel que soit la symétrie des tenseurs  $\mathbf{C}^r$  et pour cela étudier les variations de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  pour un comportement des phases fixé. La relation (4.158) montre que les tenseurs de Hashin et Shtrikman ne dépendent de ce dernier qu'au travers du « constraint tensor »  $\mathbf{C}^{0*}$ , qui est lui-même une fonction strictement croissante de  $\mathbf{C}^0$  (cf. annexe C).

La relation entre  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}}$  et  $\mathbf{C}^{0*}$  est de nature homographique et est donc différentiable. Rappelons l'expression de la variation de l'inverse d'un tenseur symétrique défini positif :

$$\forall \mathbf{A} > 0 \quad d[\mathbf{A}^{-1}] = -\mathbf{A}^{-1} : d\mathbf{A} : \mathbf{A}^{-1}. \quad (4.170)$$

Dans le cas présent, on obtient :

$$d\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}} = \left\langle [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} : d\mathbf{C}^{0*} : [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} \right\rangle \left\langle [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} \right\rangle^{-1} - d\mathbf{C}^{0*}. \quad (4.171)$$

Cette variation est positive sitôt que  $d\mathbf{C}^{0*}$  est positif (au sens des formes quadratique associées). Pour le montrer, il suffit d'appliquer l'inégalité de convexité :

$$\forall \mathbf{K}^r \quad r \in [1, n] \quad \forall \mathbf{A} \geq 0 \quad \langle \mathbf{K}^r : \mathbf{A} : \mathbf{K}^r \rangle \geq \langle \mathbf{K}^r \rangle : \mathbf{A} : \langle \mathbf{K}^r \rangle, \quad (4.172)$$

que l'on établit facilement à partir des propriétés :

$$\begin{aligned} \forall r \in [1, n] \quad & [\mathbf{K}^r - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \mathbf{A} : [\mathbf{K}^r - \langle \mathbf{K}^s \rangle] \geq 0 \\ \text{et} \quad & \langle [\mathbf{K}^r - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \mathbf{A} : \langle \mathbf{K}^s \rangle \rangle = 0. \end{aligned}$$

En prenant

$$\mathbf{K}^r = [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = d\mathbf{C}^{0*} \geq 0,$$

et en multipliant l'inégalité obtenue de part et d'autre par le tenseur défini positif  $\left\langle [\mathbf{C}^{0*} + \mathbf{C}^r]^{-1} \right\rangle^{-1}$ , on obtient le résultat souhaité. De plus, si  $d\mathbf{C}^{0*} > 0$  et s'il existe deux phases  $r_0$  et  $r_1$  telles que  $\mathbf{C}^{r_0} - \mathbf{C}^{r_1}$  soit défini alors  $d\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}}$  est strictement positif. En effet, l'écart  $\mathbf{K}^{r_0} - \mathbf{K}^{r_1}$  est alors aussi défini<sup>5</sup> et l'on procède selon une démarche déjà mise en œuvre plus haut : soit  $\underline{u} \in \mathbb{T}_2^s$  non nul. Si jamais  $\underline{u} : [\mathbf{K}^{r_0} - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \mathbf{A} : [\mathbf{K}^{r_0} - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \underline{u}$  était nul, on aurait  $[\mathbf{K}^{r_0} - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \underline{u} = 0$  et donc  $[\mathbf{K}^{r_1} - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \underline{u} = [\mathbf{K}^{r_1} - \mathbf{K}^{r_0}] : \underline{u} \neq 0$ , si bien que  $\underline{u} : [\mathbf{K}^{r_1} - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \mathbf{A} : [\mathbf{K}^{r_1} - \langle \mathbf{K}^s \rangle] : \underline{u}$  serait strictement positif.

On établit ainsi la *croissance du tenseur des modules de Hashin et Shtrikman en fonction du tenseur des modules du milieu de référence*, que l'on peut écrire formellement :

$$\begin{aligned} & \forall (\mathbf{C}^0, \Delta\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^r, r \in [1, n]\}) \\ & [\Delta\mathbf{C}^0 \geq 0] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}}(\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^r, r \in [1, n]\}) \geq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS0}}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^r, r \in [1, n]\}). \end{aligned} \quad (4.173)$$

La croissance est *stricte* s'il existe deux phases telles que l'écart entre leurs tenseurs des modules soit défini ; les inégalités larges dans la proposition ci-dessus peuvent alors être remplacées par des inégalités strictes.

<sup>5</sup>Il suffit d'appliquer la propriété

$$\forall \mathbf{A} > 0 \quad \forall \mathbf{B} > 0 \quad \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \text{ défini} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ défini},$$

que l'on peut par exemple établir en diagonalisant  $\mathbf{A}$  dans le produit scalaire défini par  $\mathbf{B}$ .

La meilleure borne supérieure est donc obtenue avec  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_r^+$  et la meilleure borne inférieure avec  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_r^-$ . En effet, tout milieu de référence satisfaisant les règles (4.27) est tel que l'écart avec la borne d'ordre 0 correspondante est, suivant le cas, positif ou négatif. L'écart entre la borne de Hashin et Shtrikman obtenue et celle construite avec cette borne d'ordre 0 est alors du même signe. Comme  $\mathbf{C}_r^+$  et  $\mathbf{C}_r^-$  sont des fonctions croissantes des  $\mathbf{C}^r$ , il en est de même de ces bornes de Hashin et Shtrikman optimales.

Cette propriété et les comparaisons faites plus haut entre les bornes de Hashin et Shtrikman et les bornes de Voigt et Reuss classiques conduit aussi à l'encadrement :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \mathbf{C}^R < \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0} < \mathbf{C}^V. \quad (4.174)$$

De plus, si le milieu de référence est choisi entre les bornes d'ordre zéro, l'estimation obtenue respecte les bornes de Hashin et Shtrikman optimales :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \mathbf{C}_r^- \leq \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}_r^+ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}_r^-) \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0) \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}_r^+). \quad (4.175)$$

C'est le cas par exemple de l'estimation de type « Mori et Tanaka », qui consiste à choisir pour milieu de référence, la phase identifiée comme étant la « matrice ».

Le calcul explicite de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  à partir de  $\mathbf{E}^0$ , des concentrations et des propriétés des phases est facile. Le tenseur  $\mathbf{E}^0$  admet une expression analytique dans certaines situations mais peut être estimé numériquement dans les autres cas. Les bornes ne dépendent pas des formes particulières des fonctions  $\Phi_{rs}$  : seul le fait que les covariances ne dépendent que de  $\|\underline{z}\|$  a été utilisé. Ceci suggère, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, que le résultat ne soit pas optimal en regard de l'information d'ordre deux utilisée.

#### 4.2.B.b Distribution ellipsoïdale des phases

La seconde situation permettant de simplifier le calcul de polarisations optimales est celle de la distribution ellipsoïdale des phases, proposée par Willis (*cf.* paragraphe 1.2.B.a), dans laquelle les fonctions de corrélation admettent l'expression suivante :

$$\forall (r, s) \in [1, n]^2, \quad \forall \underline{z} \in \Omega_0, \quad \phi_{rs}(\underline{z}) = \Phi_{rs}(\|\underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{z}\|), \quad (4.176)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est un tenseur symétrique d'ordre deux non singulier, normé selon une certaine norme, qui permet de définir un ellipsoïde unitaire  $\mathcal{E}_1$  par  $\underline{x} \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \|\underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{x}\| \leq 1$ . En adoptant pour  $\Omega_0$  une *géométrie ellipsoïdale* de même orientation et de même rapport de forme :

$$\underline{x} \in \Omega \Leftrightarrow \underline{x} \in \mathcal{E}_L \Leftrightarrow \|\underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{x}\| \leq L, \quad (4.177)$$

le calcul de  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  peut s'effectuer en décomposant  $\Gamma^0$  en sa partie singulière ellipsoïdale  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0 \delta$  et la valeur principale associée :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{rs}^0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{E}_L \setminus \mathcal{E}_\epsilon} \Gamma^0(\underline{y}) : \phi_{rs}(\underline{y}) d\omega_y + \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0 \phi_{rs}(0) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\underline{\underline{A}}| \int_{L \geq \|\underline{z}\| \geq \epsilon} \Gamma^0(\underline{\underline{A}} : \underline{z}) : \Phi_{rs}(\|\underline{z}\|) d\omega_z + \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0 \Phi_{rs}(0) \\ &= \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0 c_r \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (4.178)$$

La nullité du terme intégral résulte des propriétés de  $\Gamma^0$  établies en annexe B.

Les résultats obtenus pour une distribution isotrope se généralisent immédiatement et sans nouvelle démonstration à la situation présente : il suffit de remplacer la partie singulière sphérique  $\mathbf{E}^0$  par  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0$ , les propriétés utilisées au paragraphe précédent s'appliquant à l'identique à ce tenseur. Elles ont en effet été établies sans que l'hypothèse de sphéricité des domaines d'intégration n'ait jamais été formulée ; seule la nature ellipsoïdale importe. (*cf.* annexe C). Comme précédemment, les encadrements obtenus sont indépendants des formes particulières des fonctions  $\Phi_{rs}$ .

Rappelons qu'une microstructure présentant une distribution ellipsoïdale peut être construite à partir d'une microstructure isotrope par la transformation  $\mathcal{T} : \underline{x} \rightarrow \underline{A}\underline{x}$ . En effet, notons  $\kappa_r^{\text{iso}}$  les variables aléatoires indicatrices des domaines de phase de la microstructure isotrope et  $\kappa_r^{\text{ell}}$  celles de la microstructure à symétrie ellipsoïdale, déduites de la première par  $\kappa_r^{\text{ell}}(\underline{x}) = \kappa_r^{\text{iso}}(\underline{A}^{-1}\underline{x})$ . Il est clair que si

$$\forall(\underline{x}, \underline{z}) \quad \left\langle \kappa_r^{\text{iso}}(\underline{x}) \kappa_s^{\text{iso}}(\underline{x} + \underline{z}) \right\rangle_{\alpha} = \Phi_{rs}^{\text{iso}}(\underline{x}, \|\underline{z}\|),$$

alors

$$\begin{aligned} \forall(\underline{x}, \underline{z}) \quad \left\langle \kappa_r^{\text{ell}}(\underline{x}) \kappa_s^{\text{ell}}(\underline{x} + \underline{z}) \right\rangle_{\alpha} &= \left\langle \kappa_r^{\text{iso}}(\underline{A}^{-1}\underline{x}) \kappa_s^{\text{iso}}(\underline{A}^{-1}(\underline{x} + \underline{z})) \right\rangle_{\alpha} \\ &= \Phi_{rs}^{\text{iso}}(\underline{A}^{-1}\underline{x}, \|\underline{A}^{-1}\underline{z}\|) = \Phi_{rs}^{\text{ell}}(\underline{x}, \|\underline{A}^{-1}\underline{z}\|). \end{aligned}$$

#### 4.2.B.c Distribution « ellipsoïdale généralisée »

Une première généralisation de la situation précédente consiste à adopter une symétrie ellipsoïdale différente pour tous les couples de phases  $r, s$  et donc à supposer que les covariances admettent la représentation suivante :

$$\forall(r, s) \in [1, n]^2, \quad \forall \underline{z} \in \Omega_0, \quad \phi_{rs}(\underline{z}) = \Phi_{rs}(\|\underline{A}_{rs}^{-1} : \underline{z}\|), \quad (4.179)$$

où les tenseurs  $\underline{A}_{rs}$  ont les mêmes propriétés que le tenseur  $\underline{A}$  introduit plus haut, et permettent de définir des familles d'ellipsoïdes homothétiques  $\mathcal{E}_{\lambda}^{rs}$ . Cette hypothèse induit la parité des covariances, et donc, d'après les propriétés générales de ces fonctions présentées plus haut, leur symétrie par rapport aux indices  $(r, s)$ . On a donc  $\underline{A}_{rs} = \underline{A}_{sr}$  et  $\Phi_{rs} = \Phi_{sr}$  pour tout  $(r, s) \in [1, n]^2$ .

Le calcul des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  est légèrement plus délicat que dans la situation précédente. Les propriétés de symétrie de  $\Gamma^0$  induisent toujours l'annulation mutuelle des interactions non locales à courte portée, en revanche l'intégration sur  $\Omega_0 \setminus \mathcal{E}_{\epsilon}^{rs}$  ne peut être totalement décomposée en couronnes ellipsoïdales de type  $\mathcal{E}_{\lambda+d\lambda}^{rs} \setminus \mathcal{E}_{\lambda}^{rs}$  : il reste un terme complémentaire, de la forme

$$\int_{\Omega_0 \setminus \mathcal{E}_{\epsilon}^{rs}} \Gamma^0(\underline{y}) : \phi_{rs}(\underline{y}) d\omega_y, \quad (4.180)$$

où  $\mathcal{E}_{\epsilon}^{rs}$  est le plus grand ellipsoïde inscrit dans  $\Omega_0$  (cf. figure 4.1). Le choix de ce dernier est toujours arbitraire. On peut prendre  $\Omega_0 = \mathcal{E}_{\epsilon}^{r_0 s_0}$  ce qui supprime ce terme pour le couple  $(r_0, s_0)$ . Mais contrairement au cas de la distribution ellipsoïdale simple, il est impossible de les supprimer tous puisque les ellipsoïdes  $\mathcal{E}_1^{rs}$  sont supposés distincts.

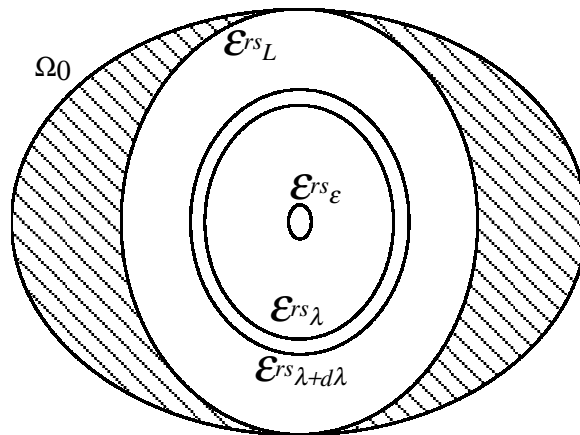


Figure 4.1 : Calcul de  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  pour une distribution ellipsoïdale généralisée

Dans le cadre des matériaux aléatoires que nous considérons, les fonctions indicatrices sont décorréliées à grande distance, si bien que pour  $\|\underline{y}\| \ll \text{grand}$ , c'est-à-dire de l'ordre de la taille caractéristique  $L$  du VER, on a :

$$\phi_{rs}(\underline{y}) = c_r c_s. \quad (4.181)$$

Les termes complémentaires peuvent donc être calculés par :

$$\int_{\Omega_0 \setminus \mathcal{E}_L^{rs}} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) : \phi_{rs}(\underline{y}) d\omega_y = c_r c_s \int_{\Omega_0 \setminus \mathcal{E}_L^{rs}} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) d\omega_y = c_r c_s [\mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \mathbf{E}_{\mathcal{E}_L^{rs}}^0], \quad (4.182)$$

où l'on a utilisé les propriétés de  $\mathbf{\Gamma}^0$ . Les tenseurs  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{rs}^0$  valent donc :

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{rs}^0 = c_r \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rr}}^0 \delta_{rs} + c_r c_s [\mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0], \quad (4.183)$$

si bien que le système d'équations caractérisant les polarisations optimales est toujours couplé et s'écrit :

$$\forall r \in [1, n] \quad \underline{\underline{\eta}}^r + \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rr}}^0 : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r = \underline{\underline{E}}_r^0 \quad (4.184)$$

avec, dans le cas d'une déformation macroscopique imposée :

$$\underline{\underline{E}}_r^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \sum_s c_s \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 : [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s, \quad (4.185)$$

ou, si c'est la contrainte que l'on impose :

$$\underline{\underline{E}}_r^0 = \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \sum_s c_s [\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 - \mathbf{S}^0] : [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s. \quad (4.186)$$

Les relations (4.99) et (4.100) entre  $\underline{\underline{E}}^0$  et le chargement macroscopique ont été utilisées explicitement. La déformation d'essai optimale moyenne dans la phase  $r$  s'interprète toujours comme la déformation dans une inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu infini de référence  $\mathbf{C}^0$ , mais soumis à l'infini à un champ  $\underline{\underline{E}}_r^0$  qui diffère suivant la phase considérée. Ce champ rend compte du chargement macroscopique mais aussi des interactions mutuelles entre phases qui dépendent de leurs dispositions relatives.

La résolution du système est formellement possible à condition de connaître les valeurs des tenseurs  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0$ . Les valeurs de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  et  $\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  s'ensuivent comme précédemment. En revanche, des développements complémentaires seraient nécessaires pour adapter les inégalités établies dans le cas isotrope ou ellipsoïdal classique au cas présent ; il n'est donc pas certain que le système admette une solution dans tous les cas, ni que cette solution satisfasse les propriétés requises. Le résultat ne dépend pas non plus des formes particulières des fonctions  $\Phi_{rs}$ .

Ce résultat appelle deux commentaires. Le premier concerne l'existence de telles distributions. Comme nous l'avons vu plus haut les covariances doivent satisfaire certaines propriétés précises qui interdisent de prendre n'importe quelles valeurs arbitraires pour les tenseurs  $\underline{\underline{A}}_{rs}$  et les fonctions  $\Phi_{rs}$ . En particulier, dans le cas d'un biphasé, les (au plus)  $n(n-1)/2$  covariances indépendantes se réduisent à une seule, si bien que les tenseurs  $\underline{\underline{A}}_{rs}$  sont nécessairement identiques et que les fonctions  $\Phi_{rs}$  satisfont  $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 1 - \Phi_{11}$  et  $\Phi_{22} = \Phi_{11}$ . De manière plus générale, il n'est pas certain qu'il existe des distributions de phases de la forme (4.179), avec des tenseurs  $\underline{\underline{A}}_{rs}$  non identiques, dont les covariances satisfassent les nécessaires relations linéaires et vérifient les valeurs aux limites requises. En tout cas, nous ne connaissons pas de transformation permettant d'en construire une à partir d'une distribution isotrope. Toutefois, s'il en existe, les tenseurs  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{rs}^0$  qu'on calcule à partir des covariances devront satisfaire les propriétés (4.125), ce qui induit les relations suivantes entre les tenseurs  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0$  :

$$\forall r \in [1, n] \quad \sum_{s \neq r} c_s \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 = 0. \quad (4.187)$$

Lorsqu'elles sont satisfaites, les tenseurs de Hashin et Shtrikman que l'on pourra éventuellement calculer seront bien symétriques, d'après les résultats du paragraphe **4.2.A.b**, puisque par ailleurs la symétrie en  $(r, s)$  des tenseurs  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0$  est bien satisfaite.

Le second commentaire, lié au précédent, concerne les extensions quelques peu hâtives du modèle de Mori et Tanaka à des géométries d'« inclusions » ellipsoïdales, qui conduit, comme déjà annoncé, à des estimations du tenseur des modules effectifs non symétriques lorsque les « inclusions » ne sont pas homothétiques les unes des autres. Ce modèle repose en effet sur les calculs ci-dessus avec le choix  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}^m$ ,  $m$  étant l'indice d'une phase identifiée comme la matrice, et avec l'hypothèse d'uniformité de la valeur de  $\underline{\underline{E}}_r^0$  pour toutes les phases. On obtient ainsi un résultat formellement identique aux bornes de Hashin et Shtrikman classiques lorsque les inclusions sont homothétiques, mais cette analogie ne s'applique pas dans le cas contraire : cette hypothèse revient en fait à négliger les seconds termes non diagonaux de l'expression (4.183) donnant les tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$ , qui de ce fait ne satisfont plus les propriétés (4.125). En conséquence, les tenseurs de Hashin et Shtrikman ne sont pas symétriques. Annuler ces termes non diagonaux revient à supposer que les ellipsoïdes  $\mathcal{E}_1^{rs}$  pour  $r \neq s$  ont la même forme que le domaine  $\Omega_0$ , différente de celle des ellipsoïdes  $\mathcal{E}_1^{rr}$ . Ces propriétés ne sont malheureusement satisfaites par aucune distribution réalisable. La pertinence de ce modèle a déjà été remise en cause quant à la prise en compte de la morphologie de type MI du matériau qu'il est supposé modéliser. La présente remarque suggère que ce modèle est dénué de tout fondement et ne décrit aucune réalité physique lorsque les « inclusions » ne sont pas homothétiques.

**4.2.B.d Distribution « homothétique »**

La seconde généralisation repose sur l'abandon de la forme ellipsoïdale. Les covariances sont maintenant supposées de la forme :

$$\forall (r, s) \in [1, n]^2, \quad \forall \underline{z} \neq 0 \in \Omega_0, \quad \phi_{rs}(\underline{z}) = \Phi_{rs} \left( \left\| \|\underline{z}\| f_{rs} \left( \frac{\underline{z}}{\|\underline{z}\|} \right) \right\| \right), \quad (4.188)$$

où les  $f_{rs}$  sont des fonctions quelconques sur l'espace des tenseurs d'ordre un, à valeur sur cet espace, normées selon une norme adéquate. Elles définissent des volumes  $V_1^{f_{rs}}$  unitaires, connexes et contenant l'origine, par

$$\underline{z} \in V_1^{f_{rs}} \Leftrightarrow \left\| \|\underline{z}\| f_{rs} \left( \frac{\underline{z}}{\|\underline{z}\|} \right) \right\| \leq 1, \quad (4.189)$$

et, par homothétie, une famille de volumes  $V_\lambda^{f_{rs}}$ , tels que  $\phi_{rs}(\underline{z})$  soit uniforme sur  $V_{\lambda+d\lambda}^{f_{rs}} \setminus V_\lambda^{f_{rs}}$  et égal à  $\Phi_{rs}(\lambda)$ . On vérifie facilement que cette situation inclut la précédente : il suffit de prendre

$$f_{rs}(\underline{e}) = \underline{\underline{A}}_{rs}^{-1} \cdot \underline{e}. \quad (4.190)$$

Cette hypothèse permet de simplifier le système (4.122) selon une procédure exactement parallèle à celle utilisée au paragraphe précédent, en tirant profit des mêmes propriétés de décomposition de  $\Gamma^0$ , qui s'appliquent indépendamment de la géométrie ellipsoïdale des volumes considérés (cf. annexe B). On obtient ainsi les mêmes résultats, en remplaçant simplement les tenseurs  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0$  par les tenseurs  $\mathbf{E}_{V_1^{f_{rs}}}^0$ .

Les commentaires sur le couplage du système obtenu ainsi que ceux sur l'existence de distributions de ce type s'appliquent à l'identique à cette situation plus générale, lorsque les fonctions  $f_{rs}$  ne sont pas toutes identiques.

Lorsqu'elles le sont,  $\forall r, s f_{rs} = f$ , les équations sont découplées à condition de prendre  $\Omega_0 = V_L^f$  et conduisent aux relations obtenues dans le cas d'une distribution isotrope dans lesquelles le tenseur  $\mathbf{E}^0$  est remplacé par le tenseur  $\mathbf{E}_{V_1^f}^0$ . Cette situation appelle toutefois deux nouveaux commentaires, qui suggèrent qu'elle ne se traite pas aussi simplement que celle de la distribution ellipsoïdale classique qu'elle généralise. Le premier est que, même si le système est toujours découplé, les tenseurs  $\mathbf{E}_{V_1^f}^0$  qui interviennent ne présentent pas les mêmes propriétés que les tenseurs  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0$ . En effet, les inégalités  $0 < \mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0 < \mathbf{S}^0$  utilisées pour établir que les expressions définissant  $\mathbf{C}_{CL}^{HS0}$  ont bien un sens et satisfont les propriétés requises découlent de celles vérifiées par les tenseurs  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0)$  donnant la déformation moyenne dans un domaine  $I$  noyé dans un milieu infini de tenseur des modules  $\mathbf{C}^0$ , lorsqu'une

polarisation uniforme  $\underline{\underline{p}}^I$  est appliquée sur ce domaine (voir annexe **C**, paragraphe **C.2.B**) :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I = -\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0) : \underline{\underline{p}}^I. \quad (4.191)$$

Or les tenseurs  $\mathbf{E}_I^0$  donnent la déformation à l'origine sous les mêmes conditions (voir annexe **B**) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(0) = \mathbf{E}_I^0 : \underline{\underline{p}}^I. \quad (4.192)$$

Lorsque  $I$  est un ellipsoïde, les résultats d'Eshelby assurent que la déformation est homogène dans  $I$  et que les deux tenseurs sont identiques, mais il n'en va pas de même dans le cas contraire. L'existence du tenseur  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  dans ce cas général n'est donc pas assurée et même dans les cas où il est possible de le calculer, il n'est pas certain qu'il satisfasse les propriétés requises.

La seconde difficulté est liée à l'existence d'une telle distribution, même dans la situation où les  $f_{rs}$  sont tous identiques. Il est toujours possible de définir, par analogie au cas ellipsoïdal, une transformation  $\mathcal{T}$  par  $\underline{z} \neq 0 \rightarrow \|\underline{z}\| \cdot f\left(\frac{\underline{z}}{\|\underline{z}\|}\right)$  et  $\mathcal{T}(0) = 0$ , que l'on peut supposer inversible, sans perte de généralité. Mais son inverse n'engendre pas de distribution homothétique à partir d'une distribution isotrope, puisque l'égalité :

$$\left\langle \kappa_r^{\text{iso}}(\mathcal{T}(\underline{x})) \kappa_s^{\text{iso}}(\mathcal{T}(\underline{x} + \underline{z})) \right\rangle_\alpha = \left\langle \kappa_r^{\text{iso}}(\mathcal{T}(\underline{x})) \kappa_s^{\text{iso}}(\mathcal{T}(\underline{x}) + \mathcal{T}(\underline{z})) \right\rangle_\alpha \quad (4.193)$$

n'est satisfaite qu'en  $\underline{x} = 0$  ou lorsque  $\mathcal{T}$  est linéaire, c'est-à-dire de la forme  $\underline{x} \rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}$ .

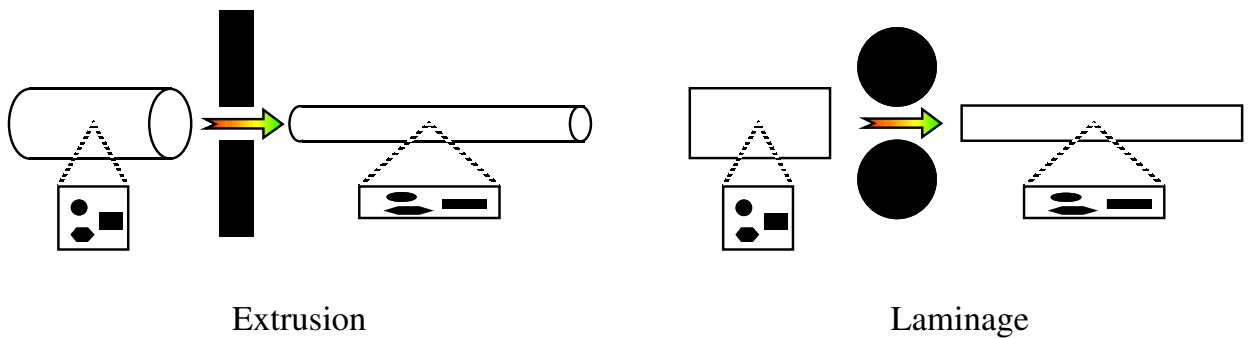


Figure 4.2 : Obtention de microstructures à distribution de phases ellipsoïdales par des procédés courants (première approximation)

Les distributions ellipsoïdales classiques nous semblent ainsi, jusqu'à preuve du contraire, les seules distributions homothétiques qu'il soit raisonnable d'envisager d'un point de vue pratique. Elles sont d'ailleurs d'autant plus intéressantes qu'elles permettent de décrire en première approximation les microstructures obtenues à partir de matériaux multiphasés isotropes par extrusion ou laminage, procédés couramment employés en métallurgie (figure 4.2).

### 4.2.C Bornes de Willis et Ponte Castañeda

Dans leur approche développée récemment, Willis et Ponte Castañeda [135] font également appel à des champs de polarisation uniformes par morceaux. Toutefois la description statistique du milieu qu'ils adoptent est plus riche que celle abordée plus haut. De ce fait les résultats qu'ils obtiennent prennent en compte une information microstructurale plus détaillée, mais, bien sûr, au prix d'une validité limitée à certaines classes de morphologies.

#### 4.2.C.a Description d'un milieu à renforts particuliers

Les matériaux abordés sont de type « matrice/inclusions », dans lesquels l'une des phases, la matrice, désignée par la suite par l'indice 1, est connexe et isole les autres phases, présentes sous forme



d'inclusions homogènes, les unes des autres. De plus, la géométrie de toutes les inclusions est supposée parfaitement connue. Les renforts présents dans la matrice peuvent ainsi être regroupés en familles, référencées par les indices 2 à  $n$  et caractérisées par une même géométrie, une même orientation et un même tenseur des modules d'élasticité. La notion de « phase » prend ainsi une signification plus riche que celle simplement associée au comportement élastique local et n'est pas sans rappeler celle déjà introduite au travers du modèle **mPh**, qui fait référence non seulement à un certain tenseur des modules mais aussi à une position particulière dans un motif à plusieurs couches.

On note  $\mathbf{C}^r$  le tenseur des modules de la famille  $r$  et  $I_r$  un domaine caractérisant la géométrie d'une telle inclusion, tel que la présence en  $\underline{x}$  d'une inclusion de cette famille se traduise sur le champ de tenseurs des modules par :

$$\forall \underline{y} \in I_r, \quad \mathbf{C}(\underline{x} + \underline{y}) = \mathbf{C}^r. \quad (4.194)$$

En pratique, on suppose que les domaines  $I_r$  sont connexes et contiennent un voisinage de l'origine, mais cette hypothèse n'est pas fondamentale et son intérêt sera rediscuté par la suite.

La microstructure est totalement décrite lorsque les positions  $\underline{X}_r^i$  de toutes les inclusions présentes dans la structure  $\mathcal{S}$ , en nombre  $N_r$ , sont connues pour toutes les familles  $r \in [2, n]$ . Dans le cadre de la description de milieux aléatoires, cette information n'est pas disponible. La position des inclusions peut en revanche être décrite par des variables aléatoires  $\zeta^r(\underline{x})$ , définies pour tout  $\underline{x} \in \mathcal{S}$ , de la forme :

$$\zeta^r(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_r} \delta(\underline{x} - \underline{X}_r^i), \quad (4.195)$$

qui déterminent « l'implantation » des inclusions dans le domaine occupé par la structure<sup>6</sup>. Toutes les autres variables aléatoires caractérisant la microstructure s'en déduisent. La fonction caractéristique de la phase  $r \in [2, n]$  s'obtient en particulier par :

$$\kappa_r(\underline{x}) = \int_{I_r} \zeta^r(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y, \quad (4.196)$$

si bien que le champ des tenseurs des modules locaux est donné par :

$$\mathbf{C}(\underline{x}) = \mathbf{C}^1 + \sum_{r=2}^n \int_{I_r} [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] \zeta^r(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y. \quad (4.197)$$

Le nombre d'inclusions de type  $r$  dans un domaine  $D$  grand par rapport à la taille des inclusions est calculé par :

$$N_r(D) = \int_D \zeta^r(\underline{x}) d\omega_x, \quad (4.198)$$

et la fraction volumique de phase  $r$  dans ce domaine est :

$$c_r(D) = N_r(D) \frac{|I_r|}{|D|}. \quad (4.199)$$

Lorsque  $D$  est le VER  $\Omega(\underline{x})$  au point  $\underline{x}$ , ces quantités sont respectivement le nombre moyen d'inclusions par unité de volume  $n_r$ , multiplié par  $|\Omega(\underline{x})|$ , et la fraction volumique de ces inclusions en  $\underline{x}$ . L'hypothèse d'ergodicité étant adoptée, ces quantités s'identifient respectivement à la densité de probabilité  $p_r(\underline{x})$  qu'une inclusion de type  $r$  soit placée en  $\underline{x}$  et à la probabilité que  $\mathbf{C}(\underline{x}) = \mathbf{C}^r$  :

$$p_r(\underline{x}) = \langle \zeta^r(\underline{x}) \rangle_\alpha = \frac{1}{|\Omega(\underline{x})|} \int_{\Omega(\underline{x})} \zeta^r(\underline{y}) d\omega_y \quad (4.200)$$

$$c_r(\underline{x}) = |I_r| p_r(\underline{x}). \quad (4.201)$$

Dans l'hypothèse de stationnarité, ces quantités varient de façon macroscopique et sont supposées connues ; la dépendance en  $\underline{x}$  sera omise par la suite, sauf cas particulier.

<sup>6</sup>Il s'agit plus précisément d'un « processus ponctuel ».

Comme dans les situations précédentes, le calcul des bornes de type Hashin-Shtrikman pour une telle microstructure fait appel à une information d'ordre deux sur la distribution des phases, qui, dans le cas présent, s'exprime en termes de fonctions de corrélation d'ordre deux des variables aléatoires  $\zeta^r$ , que l'on peut écrire sous la forme [135] :

$$\langle \zeta^r(\underline{x}) \zeta^s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha = \delta_{rs} p_r \delta(\underline{z}) + p_{rs}(\underline{z}), \quad (4.202)$$

où la fonction  $p_{rs}(\underline{z})$ , dont la dépendance en  $\underline{x}$  est de nature macroscopique en vertu de l'hypothèse de stationnarité, donne la densité de probabilité de trouver une inclusion  $r$  à la position  $\underline{x}$  et une inclusion  $s$  à la position  $\underline{x} + \underline{z}$ , pour  $\underline{z} \neq 0$ . L'impossibilité pour deux inclusions distinctes d'être superposées impose que  $p_{rs}(\underline{z})$  soit nul pour  $\underline{z}$  petit. Plus précisément,

$$\forall \underline{z} \in I_{rs} \quad p_{rs}(0) = 0, \quad (4.203)$$

où  $I_{rs}$  est le dilaté de  $I_r$  par  $I_s$

$$I_{rs} = I_r \oplus \overline{I_s}, \quad (4.204)$$

c'est-à-dire :

$$\underline{z} \in I_{rs} \Leftrightarrow [\exists \underline{u} \in I_r, \exists \underline{v} \in I_s / \underline{z} = \underline{u} - \underline{v}]. \quad (4.205)$$

Si les domaines  $I_r$  sont connexes et contiennent un voisinage de l'origine, il en est de même des ensembles  $I_{rs}$ . De plus, l'hypothèse d'absence d'ordre à grande distance dans la distribution des renforts assure que la présence d'une particule  $r$  en  $\underline{x}$  et celle d'une particule  $s$  en  $\underline{x} + \underline{z}$  sont deux événements indépendants lorsque  $\|\underline{z}\|$  est grand et donc que  $p_{rs}(\underline{z})$  vaut  $p_r p_s$  dans ces conditions. Enfin, la stationnarité de la microstructure garantit que  $p_{rs}^x(\underline{z}) = p_{sr}^{x+\underline{z}}(-\underline{z}) = p_{sr}^x(-\underline{z})$ .

#### 4.2.C.b Calcul de la polarisation optimale : distribution ellipsoïdale généralisée

Le calcul des  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  peut maintenant être entrepris pour les couples  $(r, s) \in [2, n]^2$ , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{rs}^0 &= \int_{\Omega_0} \langle \kappa_r(\underline{x}) \kappa_s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha \Gamma^0(\underline{z}) d\omega_z \\ &= \int_{\Omega_0} \int_{I_r} \int_{I_s} \langle \zeta^r(\underline{x} - \underline{u}) \zeta^r(\underline{x} + \underline{z} - \underline{v}) \rangle_\alpha d\omega_u d\omega_v \Gamma^0(\underline{z}) d\omega_z \\ &= \int_{\Omega_0} \int_{I_r} \int_{I_s} [\delta_{rs} p_r \delta(\underline{z} + \underline{u} - \underline{v}) + p_{rs}(\underline{z} + \underline{u} - \underline{v})] d\omega_u d\omega_v \Gamma^0(\underline{z}) d\omega_z \\ &= \delta_{rs} p_r \int_{I_r} \int_{I_r} \Gamma^0(\underline{v} - \underline{u}) d\omega_u d\omega_v + \int_{I_r} \int_{I_s} \int_{\Omega(\underline{u}-\underline{v})} p_{rs}(\underline{z}) \Gamma^0(\underline{z} - (\underline{u} - \underline{v})) d\omega_z d\omega_u d\omega_v \end{aligned} \quad (4.206)$$

Le premier terme de l'expression finale est un tenseur d'ordre quatre de la forme  $\delta_{rs} p_r |I_r| \mathbf{P}_r^0$ , dont la valeur peut être calculée numériquement pour toute géométrie d'inclusion  $I_r$ . Le tenseur

$$\mathbf{P}_r^0 = \frac{1}{|I_r|} \int_{I_r} \int_{I_r} \Gamma^0(\underline{v} - \underline{u}) d\omega_u d\omega_v \quad (4.207)$$

est égal au tenseur  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0)$  dont les propriétés ont été étudiées en annexe C, paragraphe C.2.B. Il est en particulier symétrique et défini positif, quelle que soit la géométrie de l'inclusion  $r$ . Lorsqu'il s'agit d'un ellipsoïde, les résultats d'Eshelby (cf. annexe B) garantissent que la valeur de l'intégration par rapport à  $\underline{u}$  est indépendante de  $\underline{v} \in I_r$  et égale au tenseur  $\mathbf{P}_{I_r}^0$ , introduit par Hill (cf. paragraphe 1.2.B.d) et auquel s'identifie alors  $\mathbf{P}_r^0$ . À ce tenseur  $\mathbf{P}_r^0$  est associé un tenseur  $\mathbf{Q}_r^0$ , donné par  $\mathbf{C}^0$  :  $[\mathbf{S}^0 - \mathbf{P}_r^0] : \mathbf{C}^0$  et égal à  $\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0)$  (cf. annexe C).

Le calcul explicite du second terme peut être entrepris moyennant une hypothèse complémentaire sur la forme de  $p_{rs}(\underline{z})$ , c'est-à-dire sur la distribution des positions des renforts. Celle retenue est une adaptation à la situation présente de l'hypothèse de distribution ellipsoïdale généralisée des phases introduite plus haut :  $p_{rs}(\underline{z})$  est supposé ne dépendre de  $\underline{z}$  qu'au travers de la quantité  $\|\underline{A}_{rs}^{-1} : \underline{z}\|$  :

$$p_{rs}(\underline{z}) = \Pi_{rs} \left( \|\underline{A}_{rs}^{-1} : \underline{z}\| \right), \quad (4.208)$$

où les tenseurs  $\underline{A}_{rs}^{-1}$  sont définis comme plus haut et engendrent des familles d'ellipsoïdes  $\mathcal{E}_\lambda^{rs}$  homothétiques, centrés à l'origine, et où les  $\Pi_{rs}$  sont des fonctions réelles. Comme précédemment, cette hypothèse implique en particulier la parité des fonctions  $p_{rs}$  et par suite, comme  $p_{rs}^x(\underline{z}) = p_{sr}^x(-\underline{z})$ , la symétrie vis-à-vis des indices  $r$  et  $s$  :  $\underline{A}_{rs} = \underline{A}_{sr}$  et  $\Pi_{rs} = \Pi_{sr}$ , pour  $(r, s) \in [2, n]^2$ . Il en est de même des covariances correspondantes.

L'intégrale sur  $\Omega(\underline{u} - \underline{v})$  peut être décomposée en trois domaines (figure 4.3). Le premier est l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_l^{rs}$  défini comme le plus petit des ellipsoïdes  $\mathcal{E}_\lambda^{rs}$  contenant  $I_{rs}$ . Comme  $p_{rs}$  est nul sur ce dernier, il s'annule aussi sur tout ce domaine et l'intégrale correspondante est nulle. Soit par ailleurs  $\mathcal{E}_L^{rs}$  le plus grand des ellipsoïdes de la famille contenu dans  $\Omega(\underline{u} - \underline{v})$ . Or  $L$  est une dimension macroscopique, supérieure à la distance de décorrélation :  $p_{rs}(\underline{z})$  vaut donc  $p_r p_s$  lorsque  $\underline{z}$  est en dehors de  $\mathcal{E}_L^{rs}$  et, avec les notations introduites plus haut, l'intégrale sur  $\Omega(\underline{u} - \underline{v}) \setminus \mathcal{E}_L^{rs}$  est égale à  $p_r p_s \left[ \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \mathcal{P}_{\mathcal{E}_L^{rs}}^0 \right]$ . Enfin, l'intégration sur  $\mathcal{E}_L^{rs} \setminus \mathcal{E}_l^{rs}$  peut être décomposée en couronnes  $\mathcal{E}_{\lambda+d\lambda}^{rs} \setminus \mathcal{E}_\lambda^{rs}$ , sur lesquelles  $p_{rs}(\underline{z})$  est uniforme et dont les contributions sont donc nulles, en vertu des propriétés de  $\mathbf{\Gamma}^0$  établies en annexe B et du fait de l'appartenance de  $(\underline{u} - \underline{v})$  à  $I_{rs} \subset \mathcal{E}_l^{rs}$ . Notons bien que la symétrie ellipsoïdale de la distribution est ici indispensable pour assurer la nullité de ces termes : une généralisation à une « distribution homothétique » des centres n'est pas envisageable.

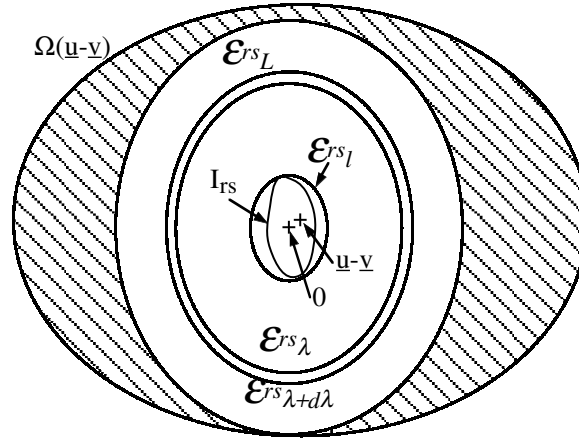


Figure 4.3 : Calcul de  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  pour une distribution ellipsoïdale généralisée d'inclusions

L'hypothèse de connexité des domaines  $I_r$  peut en revanche être levée : il est possible de traiter des situations d'amas d'inclusions. Il n'est pas non plus absolument indispensable que les domaines  $I_r$  contiennent l'origine : il suffit que la distance de ces domaines à l'origine reste microscopique. Dans ces cas, l'intégration peut toujours être entreprise comme ci-dessus à condition de *supposer que*  $p_{rs}(\underline{z})$  soit nul sur tout le domaine  $\mathcal{E}_l^{rs}$ . En pratique, cela revient à supposer que les amas ne peuvent pas « s'interpénétrer » et qu'un certain voisinage des inclusions n'est constitué que de matrice (voir plus loin).

Les tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$  pour  $(r, s) \in [2, n]^2$  sont donc en fin de compte donnés par :

$$\hat{\Gamma}_{rs}^0 = \delta_{rs} c_r \mathbf{P}_r^0 + c_r c_s \left[ \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \mathcal{P}_{\mathcal{E}_L^{rs}}^0 \right]. \quad (4.209)$$

La connaissance de ces tenseurs est suffisante pour déterminer les polarisations optimales lorsque le milieu de référence s'identifie à la matrice. En effet, dans ce cas,  $\underline{p}^1$  est identiquement nul et les polarisations sur les autres phases sont caractérisées par le système :

$$\forall r \in [2, n] \quad \underline{\eta}^r + \mathbf{P}_r^1 : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] : \underline{\eta}^r = \langle \underline{\epsilon} \rangle + \sum_{s=2}^n c_s \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^1 : [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^1] : \underline{\eta}^s, \quad (4.210)$$

où l'on a tenu compte de (4.91), pour le problème en déformation imposée<sup>7</sup>. Ce système est bien celui établi dans [135] par une démarche légèrement différente. Il est formellement très semblable à celui

<sup>7</sup>Il est bien sûr possible de traiter de même le cas de la contrainte imposée.

obtenu dans l'approche classique avec l'hypothèse de distribution ellipsoïdale généralisée lorsque l'on prend la phase 1 comme milieu de référence. Lorsque les inclusions sont de forme ellipsoïdale, les déformations  $\underline{\underline{\eta}}^r$  s'identifient encore à celles apparaissant dans ces mêmes inclusions lorsqu'elles sont isolées et noyées dans la matrice d'extension infinie et soumise à une déformation  $\underline{\underline{E}}_r^1$  à l'infini, différente pour chaque famille d'inclusions et prenant en compte le chargement macroscopique et l'« effet moyen » des autres inclusions, dépendant des positions relatives.

L'existence et l'unicité d'une solution satisfaisant toutes les propriétés requises dans ce cas général reste une question ouverte au même titre qu'elle l'était dans le cadre de l'hypothèse de distribution ellipsoïdale généralisée des phases. Il en est de même de l'existence d'une microstructure présentant une telle distribution de particules.

Il est toutefois certain que, si elle existe, la solution de ce problème assurera la symétrie des tenseurs de Hashin et Shtrikman qu'on pourra en déduire. En effet, les tenseurs  $\hat{\mathbf{T}}_{rs}^0$  sont symétriques en  $(r, s)$  pour  $(r, s) \in [2, n]^2$ . De plus, les tenseurs  $\hat{\mathbf{T}}_{r1}^0$  et  $\hat{\mathbf{T}}_{1r}^0$ ,  $r \in [1, n]$ , peuvent être construits à partir des premiers par les relations (4.125) (les formules explicites seront données au paragraphe 4.2.C.f) ; ils sont aussi symétriques en  $(r, s)$ . Le système obtenu satisfait alors par construction les propriétés suffisantes pour assurer la symétrie des tenseurs de Hashin et Shtrikman. Dans le cas présent, il est toutefois inutile d'explicitier l'équation caractérisant la polarisation  $\underline{\underline{p}}^1$  puisque l'on sait qu'elle est nulle.

#### 4.2.C.c Distribution ellipsoïdale simple des renforts

Le système s'inverse en revanche très facilement lorsque les ellipsoïdes  $\mathcal{E}_1^{rs}$  sont tous identiques et définissent un unique tenseur  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^1$ , noté  $\mathcal{P}_d^1$ . Il s'écrit en effet alors :

$$\forall r \in [2, n] \quad \left[ [\mathbf{P}_r^1]^{-1} + \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1 \right] : \mathbf{P}_r^1 : \underline{\underline{p}}^r = [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] : \left[ \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \mathcal{P}_d^1 : \langle \underline{\underline{p}} \rangle \right]. \quad (4.211)$$

Comme  $[\mathbf{P}_r^1]^{-1} - \mathbf{C}^1$  est défini positif (cf. annexe C), le premier tenseur du membre de gauche l'est aussi. Après inversion et sommation sur toutes les phases, y compris la matrice (avec  $\underline{\underline{p}}^1 = 0$ ), il vient :

$$\left[ [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right] : \mathcal{P}_d^1 : \langle \underline{\underline{p}} \rangle = \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle, \quad (4.212)$$

où le tenseur symétrique  $\mathbf{T}$  est construit comme au paragraphe 4.2.B.a mais en remplaçant  $\mathbf{E}^0$  par  $\mathbf{P}_r^1$  :

$$\begin{aligned} \forall r \in [1, n] \quad \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) &= [\mathbf{P}_r^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{P}_r^1]^{-1} + \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1 \right]^{-1} : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] \\ &= [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] - [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] : \left[ [\mathbf{P}_r^1]^{-1} + \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1 \right]^{-1} : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1] \\ &= [\mathbf{P}_r^1]^{-1} - [\mathbf{P}_r^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{P}_r^1]^{-1} + \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^1 \right]^{-1} : [\mathbf{P}_r^1]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.213)$$

Ces équations s'appliquent lorsque la déformation macroscopique  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  est imposée. Avec une contrainte  $\langle \underline{\underline{g}} \rangle$  imposée, on obtient (les relations sont parfaitement parallèles à celles écrites au paragraphe 4.2.B.a) :

$$\left[ [\mathcal{Q}_d^1]^{-1} + \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1 \right] : \mathcal{Q}_d^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1 : \langle \underline{\underline{g}} \rangle, \quad (4.214)$$

avec

$$\mathcal{Q}_d^1 = \mathbf{C}^1 : [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1] : \mathbf{C}^1. \quad (4.215)$$

La poursuite du calcul dépend de la non dégénérescence des tenseurs  $[\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  et  $[\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$ . Dans l'approche classique avec une distribution ellipsoïdale simple

des phases, ces propriétés étaient la conséquence de la croissance de  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r)$  en fonction de  $\mathbf{C}^r$  qui est encore vérifiée et des valeurs obtenues pour  $\mathbf{C}^r = 0$  et  $\mathbf{C}^r = +\infty$ . Dans la situation présente, on obtient :

$$\forall r \in [2, n] \quad [\mathbf{P}_r^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} < \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) < [\mathbf{P}_r^1]^{-1}, \quad (4.216)$$

puis, après sommation (avec  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^1) = 0$ ) :

$$\sum_{r \geq 2} c_r [\mathbf{P}_r^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} < \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle < \sum_{r \geq 2} c_r [\mathbf{P}_r^1]^{-1}. \quad (4.217)$$

Lorsque les géométries d'inclusions s'identifient toutes à celle définie par leur distribution, c'est-à-dire lorsque  $\forall r \in [2, n]$ ,  $\mathbf{P}_r^1 = \mathbf{P}_d^1$ , ces inégalités conduisent à l'encadrement cherché :

$$[\mathbf{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} \leq (1 - c_1) [\mathbf{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} < \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle < (1 - c_1) [\mathbf{P}_d^1]^{-1} \leq [\mathbf{P}_d^1]^{-1}, \quad (4.218)$$

puisque  $\sum_{r \geq 2} c_r = 1 - c_1 \leq 1$  et  $0 < \mathbf{P}_d^1 < \mathbf{S}^1$ . Les calculs peuvent alors être poursuivis comme dans le cas d'une distribution ellipsoïdale simple des phases, les tenseurs de Hashin et Shtrikman obtenus présentant exactement les mêmes propriétés. Ce cas est commenté plus longuement au paragraphe qui suit.

Dans le cas plus général où les  $\mathbf{P}_r^1$  et  $\mathbf{P}_d^1$  ne sont pas tous égaux, on ne peut pas conclure aussi rapidement. Remarquons d'abord que si, pour une distribution géométrique d'inclusions donnée, on remplace le comportement mécanique de leurs phases constitutives par celui d'un même matériau très raide par rapport à la matrice, les majorants des tenseurs  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r)$  sont atteints pour toutes les inclusions  $r \geq 2$  et il en est de même de la moyenne. Pour assurer la majoration souhaitée de  $\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$ , il est donc *nécessaire* que les divers tenseurs dépendant des caractéristiques géométriques de la microstructure satisfassent :

$$\sum_{r \geq 2} c_r [\mathbf{P}_r^1]^{-1} \leq [\mathbf{P}_d^1]^{-1}. \quad (4.219)$$

En adoptant de même un comportement des inclusions uniforme et très souple par rapport à la matrice, on sature les inégalités dans l'autre sens et on établit une autre condition nécessaire satisfaite par les tenseurs dépendant de la géométrie :

$$\sum_{r \geq 2} c_r [\mathbf{S}^1 - \mathbf{P}_r^1]^{-1} \leq [\mathbf{S}^1 - \mathbf{P}_d^1]^{-1}. \quad (4.220)$$

Notons que pour une distribution de phases données, on peut imaginer un matériau dont la matrice présente n'importe quel comportement mécanique. Les inégalités ci-dessus doivent donc être vérifiées quel que soit  $\mathbf{C}^1$ . Pour une symétrie de la distribution des centres et des formes d'inclusions données, ces relations s'interprètent comme des bornes supérieures pour les concentrations  $c_r$ ,  $r \geq 2$  ou encore comme une minoration de la fraction volumique de matrice  $c_1$ . En clair, *il faut une quantité de matrice suffisante pour occuper les espaces laissés vacants entre les inclusions*. Ce point sera à nouveau abordé sous un aspect plus géométrique dans un paragraphe qui suit.

Lorsque ces conditions sont remplies, on peut calculer les tenseurs de Hashin et Shtrikman selon les diverses expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} &= \mathbf{C}^1 + [\mathbf{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right]^{-1} : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \\ &= \mathbf{C}^1 - [\mathbf{P}_d^1]^{-1} + [\mathbf{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right]^{-1} : [\mathbf{P}_d^1]^{-1} \end{aligned} \quad (4.221)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} &= \mathbf{S}^1 - [\mathbf{Q}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{Q}_d^1]^{-1} + \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1 \right]^{-1} : \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1 \\ &= \mathbf{S}^1 - [\mathbf{Q}_d^1]^{-1} + [\mathbf{Q}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{Q}_d^1]^{-1} - \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1 \right]^{-1} : [\mathbf{Q}_d^1]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.222)$$

Les dernières expressions ci-dessus sont bien symétriques. On peut aussi vérifier que ces tenseurs sont inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} &= \mathbf{S}^1 : \left[ \mathbf{C}^1 - [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1]^{-1} + \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right]^{-1} : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right] : \mathbf{S}^1 \\
&= \mathbf{S}^1 : [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1]^{-1} + \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right]^{-1} : \\
&\quad \left[ [\mathbf{I} + \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle] : [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1] \right] : \mathbf{C}^1 - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1 \\
&= \left[ [\mathbf{I} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle] : \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} : [\mathbf{I} + \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle] : [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1] : \mathbf{C}^1 \right]^{-1} \\
&= \left[ \mathbf{C}^1 + [\mathbf{I} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle] : \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right]^{-1} = [\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}]^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui établit leur non-dégénérescence et montre l'équivalence des approches en déformation imposée et en contrainte imposée. Lorsque  $\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  admet un inverse, on peut préférer les écritures plus concises suivantes :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} = \mathbf{C}^1 + \left[ \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} - \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} \quad (4.223)$$

et

$$\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} = \mathbf{S}^1 - \left[ \mathbf{C}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle^{-1} : \mathbf{C}^1 + \mathcal{Q}_d^1 \right]^{-1}. \quad (4.224)$$

Les hypothèses (4.219) et (4.220) permettent aussi d'établir la positivité des tenseurs de Hashin et Shtrikman. Les conditions (4.219) et (4.220) qui conduisent respectivement aux inégalités  $[\mathcal{P}_d^1]^{-1} > \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  et  $[\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} < \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} < \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \\
\Rightarrow &[\mathcal{P}_d^1]^{-1} - [\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} > [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle > 0 \\
\Rightarrow &\left[ [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - [\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} \right]^{-1} < \left[ [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \right]^{-1} \\
\Rightarrow &\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} > \mathbf{C}^1 - [\mathcal{P}_d^1]^{-1} + [\mathcal{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - [\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} \right]^{-1} : [\mathcal{P}_d^1]^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

On établit de même la positivité de  $\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$ . Notons que pour établir le bien fondé de l'expression (4.221) il suffisait de s'assurer de la non dégénérescence du tenseur  $[\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$ , que pour montrer la non dégénérescence de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$  il faut en plus s'assurer de la non dégénérescence du tenseur  $[\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  et que pour s'assurer de la positivité de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$ , le signe de chacun de ces deux tenseurs est indispensable.

La propriété de croissance de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$  en fonction de  $\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  à  $\mathbf{C}^1$  fixé s'applique aussi dans le cas présent : la dernière relation de (4.221) permet par exemple de s'en convaincre. Comme précédemment, on en déduit d'abord que l'estimation de Willis et Ponte Castañeda est plus raide lorsque le comportement des renforts est plus raide à matrice figée :

$$\begin{aligned}
\forall (\mathbf{C}^1, \{\mathbf{C}^r, \Delta \mathbf{C}^r, r \in [2, n]\}) \quad &[\forall r \in [2, n] \Delta \mathbf{C}^r \geq 0] \quad \Rightarrow \\
&\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}(\mathbf{C}^1, \{\mathbf{C}^r + \Delta \mathbf{C}^r, r \in [2, n]\}) \geq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}(\mathbf{C}^1, \{\mathbf{C}^r, r \in [2, n]\}). \quad (4.225)
\end{aligned}$$

On peut ensuite étendre les propriétés (4.163) et (4.164) au cas présent. L'inégalité

$$\mathbf{C}^1 : [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^R] : \mathbf{C}^1 \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle \leq \mathbf{C}^V - \mathbf{C}^1, \quad (4.226)$$

est en effet encore vérifiée et conduit à des majorations de  $\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$  et  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$  lorsque le comportement de la matrice est suffisamment raide ou, respectivement, suffisamment souple :

$$\forall \mathbf{C}^1 / \left[ \mathbf{P}_d^1 \right]^{-1} + \mathbf{C}^1 > \mathbf{C}^V, \quad \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} \leq \mathbf{C}^1 - \left[ \mathbf{P}_d^1 \right]^{-1} + \left[ \mathbf{P}_d^1 \right]^{-1} : \left[ \left[ \mathbf{P}_d^1 \right]^{-1} + \mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^V \right]^{-1} : \left[ \mathbf{P}_d^1 \right]^{-1} \quad (4.227)$$

et

$$\forall \mathbf{C}^1 / \left[ \mathbf{Q}_d^1 \right]^{-1} + \mathbf{S}^1 > \mathbf{S}^R, \quad \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} \geq \mathbf{S}^1 - \left[ \mathbf{Q}_d^1 \right]^{-1} + \left[ \mathbf{Q}_d^1 \right]^{-1} : \left[ \left[ \mathbf{Q}_d^1 \right]^{-1} + \mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^R \right]^{-1} : \left[ \mathbf{Q}_d^1 \right]^{-1}. \quad (4.228)$$

En particulier, lorsque la matrice est plus raide (au sens large) que le milieu de Voigt associé au composite, ou, ce qui est équivalent, plus raide que le milieu de Voigt construit à partir des autres constituants, la première propriété s'applique avec un majorant plus souple que le comportement de la matrice :  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} \leq \mathbf{C}^1$ . De même lorsque la matrice est plus souple que le milieu de Reuss associé au composite, ou encore plus souple que le milieu de Reuss relatif aux autres constituants, on a  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}} \geq \mathbf{C}^1$ .

Remarquons que dans le premier cas, le tenseur  $\left[ \mathbf{P}_d^1 \right]^{-1} - \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle$  est défini positif et l'inégalité (4.219) n'est pas nécessaire pour établir l'existence de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$ . De même, dans le second cas, le tenseur  $\left[ \mathbf{Q}_d^1 \right]^{-1} + \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^r) \rangle : \mathbf{S}^1$  est défini positif et (4.220) n'est pas indispensable pour montrer l'existence de  $\mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS1}}$ . Ceci ne signifie pas pour autant que ces relations n'ont pas besoin d'être vérifiées, puisqu'il s'agit de contraintes sur la distribution géométrique des phases, indépendantes de la nature mécanique de ces dernières.

La plupart des propriétés satisfaites par les bornes de Hashin et Shtrikman relatives à un matériau avec une distribution ellipsoïdale simple des phases s'appliquent donc aussi au cas présent. Seule l'étude de leurs variations en fonction du tenseur  $\mathbf{C}^1$  n'est pas aussi simple : nous ne connaissons en effet pas d'équivalents aux dernières expressions des relations (4.158) et (4.159), sauf bien sûr dans le cas où les tenseurs  $\mathbf{P}_r^1$  sont tous égaux à  $\mathbf{P}_d^1$ . De ce fait, la démonstration du fait que les estimations ainsi construites ainsi en prenant la matrice comme milieu de référence, respectent les bornes de Voigt et Reuss classiques et les bornes de Hashin et Shtrikman que l'on pourrait construire en prenant un milieu de référence éventuellement distinct de la matrice mais respectant les règles (4.27), reste une question ouverte.

#### 4.2.C.d Comparaison avec une distribution ellipsoïdale simple des phases

Lorsque les inclusions sont toutes de même forme et de même orientation et que cette géométrie s'identifie à l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_1$ , d'équation  $\left\| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{x}} \right\| \leq 1$ , caractérisant la distribution des centres, le résultat est exactement identique à celui obtenu avec l'hypothèse de distribution ellipsoïdale des phases (équation (4.160)), avec  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{E}^0$  remplacé par  $\mathbf{E}_{\mathcal{E}_1}^0$ . Dans cette situation, la fonction de corrélation d'ordre deux des phases vérifie une propriété très proche de celle de symétrie ellipsoïdale des phases. En effet, soit  $\lambda_r$  la taille des inclusions de type  $r$ , tel que le domaine  $I_r$  soit défini par l'équation<sup>8</sup>  $\left\| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{u}}_r) \right\| \leq \lambda_r$ . La fonction de corrélation vaut alors :

$$\begin{aligned} & \langle \kappa_r(\underline{\mathbf{x}}) \kappa_s(\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{z}}) \rangle_\alpha \\ &= \int_{\underline{\mathbf{u}} \in I_r} \int_{\underline{\mathbf{v}} \in I_s} \left[ \delta_{rs} p_r \delta(\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}) + \Pi_{rs} \left( \left\| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} : (\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}) \right\| \right) \right] d\omega_u d\omega_v \\ &= \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right|^2 \int_{\left\| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot [\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{u}}_r - \underline{\mathbf{u}}_s] \right\| \leq \lambda_r} \int_{\left\| \underline{\mathbf{v}} \right\| \leq \lambda_s} \left[ \delta_{rs} \frac{p_r}{\left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right|} \delta(\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}) + \Pi_{rs}(\|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}\|) \right] d\omega_u d\omega_v, \quad (4.229) \end{aligned}$$

et ne dépend donc que de la norme de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot [\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{u}}_r - \underline{\mathbf{u}}_s]$ . Pour s'en convaincre, il suffit par exemple d'effectuer le changement de variables  $\underline{\mathbf{u}}' = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}$  et  $\underline{\mathbf{v}}' = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$ , où  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  est une matrice de rotation : le résultat est la même relation,  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot [\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{u}}_r - \underline{\mathbf{u}}_s]$  étant simplement changé en  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot [\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{u}}_r - \underline{\mathbf{u}}_s]$ .

<sup>8</sup>les ellipsoïdes  $I_r$  ne sont pas nécessairement centrés à l'origine

Lorsque les domaines  $I_r$  sont centrés au même point, la symétrie ellipsoïdale de la distribution des phases est bien satisfaite. Dans le cas contraire, le calcul des tenseurs  $\hat{\mathbf{T}}_{rs}^0$  est encore possible et conduit au même résultat, grâce à l'hypothèse de nullité de  $p_{rs}(\underline{z})$  pour  $\underline{z} \in I_{rs}$ . Nous ne développons pas ces calculs par souci de concision.

Cette constatation établit que la borne de Willis et Ponte Castañeda (dans l'hypothèse où  $\mathbf{C}^1$  est le « meilleur » milieu de référence  $\mathbf{C}^0$ ) doit être identique ou plus restrictive que la borne classique de Hashin et Shtrikman associée à une distribution ellipsoïdale des phases. Le fait que les deux bornes soient identiques suggère que l'information sur la nature inclusionnaire des phases  $r \geq 2$  n'ait pas été totalement exploitée. On peut d'ailleurs vérifier que, dans cette situation particulière, les hypothèses sur la microstructure n'interdisent en aucun cas à deux inclusions de se toucher (voir ci-après). En particulier, lorsque les ellipsoïdes  $I_r$  sont concentriques, deux renforts de même forme et même orientation peuvent entrer en contact en tout point de leur surface et l'existence d'un réseau continu de phase inclusionnaire n'est pas exclue. Cette continuité reste toutefois de nature principalement topologique, la tenue mécanique des points de contact étant faible.

#### 4.2.C.e Lien entre répartition des renforts et fraction volumique de matrice

Considérons à nouveau le cas le plus général de tenseurs  $\underline{\underline{A}}_{rs}$  distincts et d'inclusions de forme quelconque, éventuellement non connexes et décrits par des domaines  $I_r$  ne contenant pas nécessairement l'origine. Soit une inclusion de la famille  $r$  placée en  $\underline{x}$ . La nullité de  $p_{rs}(\underline{z})$  pour  $\underline{z} \in \mathcal{E}_l^{rs}$  assure que toutes les autres inclusions de type  $s$  ont leur centre dans le domaine  ${}^C\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x})$ , complémentaire du translaté de  $\mathcal{E}_l^{rs}$  au point  $\underline{x}$  (cf. figure 4.4). Il n'est donc pas possible qu'une telle inclusion  $s$  touche le complémentaire du dilaté de  ${}^C\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x})$  par le symétrique  $\overline{I_s}$  de  $I_s$ , c'est-à-dire l'érodé de  $\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x})$  par  $\overline{I_s}$ , noté  $\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x}) \ominus I_s$ . L'intersection de tous ces ensembles pour toutes les phases  $s \geq 2$  définit un domaine  $V_r(\underline{x})$  qui ne peut contenir que la matrice 1 et l'inclusion  $I_r(\underline{x})$  et qui de surcroît est convexe<sup>9</sup>.

Comme  $I_{rs}(\underline{x}) \subset \mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x})$ , il vient, l'érosion étant une opération croissante,  $I_{rs}(\underline{x}) \ominus I_s \subset \mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x}) \ominus I_s$ . Or  $I_{rs}(\underline{x}) \ominus I_s = (I_r(\underline{x}) \oplus \overline{I_s}) \ominus I_s$  est la fermeture morphologique de  $I_r(\underline{x})$  par  $I_s$ , qui contient  $I_r(\underline{x})$ . On a donc :

$$I_r(\underline{x}) \subset V_r(\underline{x}). \quad (4.230)$$

et le domaine de  $V_r(\underline{x})$  en dehors de l'inclusion est nécessairement constitué de matrice :

$$\forall \underline{y} \in V_r(\underline{x}) \setminus I_r(\underline{x}) \quad \mathbf{C}(\underline{y}) = \mathbf{C}^1. \quad (4.231)$$

Dans la situation abordé au paragraphe précédent (inclusions ellipsoïdales et distribution de même « forme »), avec des ellipsoïdes  $I_r$  centrés au même point, il est assez facile de voir que  $I_r(\underline{x})$  et  $V_r(\underline{x})$  sont confondus. Cette propriété résulte de ce qu'une famille d'ellipsoïdes homothétiques et concentriques  $\mathcal{E}_\lambda$  est un groupe pour l'érosion et la dilatation ( $\mathcal{E}_\lambda \oplus \overline{\mathcal{E}_{\lambda'}} = \mathcal{E}_{\lambda+\lambda'} \dots$ ), et de ce que, en conséquence,  $I_{rs} = \mathcal{E}_l^{rs}$ .

Il existe d'autres situations où  $\forall r, I_r = V_r$ . Considérons par exemple un ensemble  $I$  quelconque (dénombrable ou non, continu ou non...) de points dans l'espace. Soit  $R$  un réel tel que l'intersection de toutes les sphères de rayon  $R$  centrées en ces points soit non vide et définisse une inclusion  $I_1$  convexe et non sphérique (dans l'hypothèse où il y a plus d'un point dans  $I$ ).  $I_1$  est l'érodée de la sphère  $S_R$  par le complémentaire de  $I$  :  $I_1 = S_R \ominus I$ . Construisons ensuite de la même manière l'intersection  $I_2$  des sphères de rayon  $R$  dont le centre appartient à  $I_1$  :  $I_2 = S_R \ominus I_1$ . Cet ensemble est aussi convexe et contient par construction tous les points de  $I$ . Il est immédiat que  $V_2 = I_2$ . Mais l'on a aussi  $V_1 = I_1$  car  $I_1 = S_R \ominus I = S_R \ominus I_2$ . En effet, comme  $I \subset I_2$ , on a  $S_R \ominus I_2 \subset S_R \ominus I$ . Par ailleurs, soit  $\underline{u} \in I_1$  ; pour tout  $\underline{v} \in I_2$ , on a, par construction de  $I_2$ ,  $\|\underline{v} - \underline{u}\| \leq R$  et donc  $\underline{u} \in S_R \ominus I_2$ . En pratique, les inclusions ainsi définies sont telles que la distance des centres de deux d'entre-elles qui se touchent est

<sup>9</sup>En effet, on a :

$$\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x}) \ominus I_s = \bigcap_{\underline{y} \in I_s(\underline{x})} \mathcal{E}_l^{rs}(\underline{y}).$$

$V_r(\underline{x})$  est donc une intersection de domaines convexes.



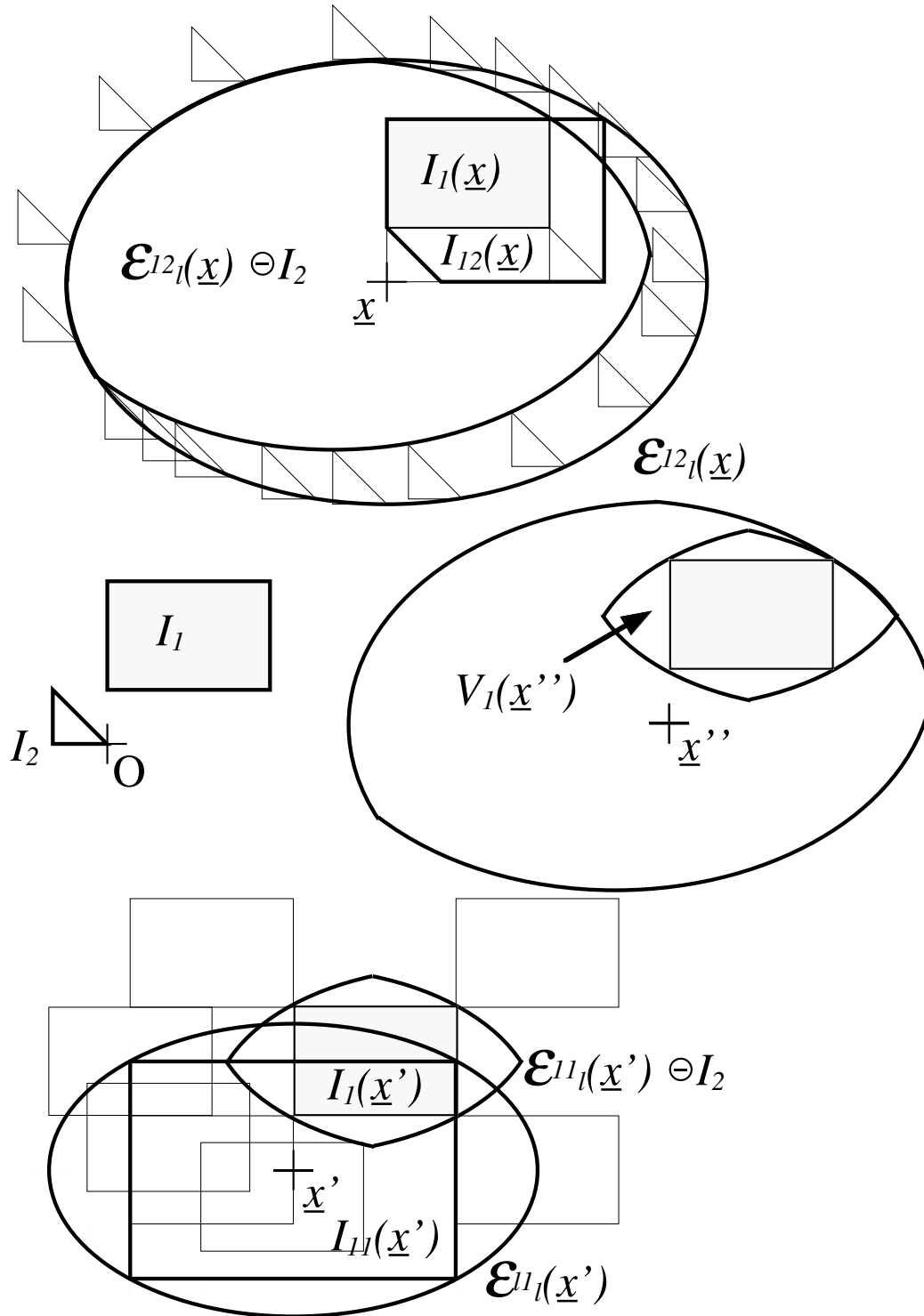


Figure 4.4 : Construction de  $I_{rs}$ ,  $E_l^{rs}$  et  $V_r$  dans le cas particulier de deux inclusions, l'une rectangulaire et l'autre triangulaire.

toujours égale à  $R$ . La figure 4.5 décrit leur construction dans le plan lorsque  $I$  est un triplet de points. Tout matériau contenant des paires d'inclusions de ce type en distribution isotrope satisfait  $\forall r, I_r = V_r$  et il est facile de généraliser cette construction à des situations de distribution ellipsoïdale, simple ou généralisée.

Ces situations sont toutefois très particulières et dans la plupart des autres cas pratiques, il y a bien inclusion stricte  $I_r \subset V_r$ . Un exemple très simple est la situation abordée plus haut avec des inclusions ellipsoïdales en distribution ellipsoïdale, mais non concentriques :  $I_{rs}$  est alors un ellipsoïde

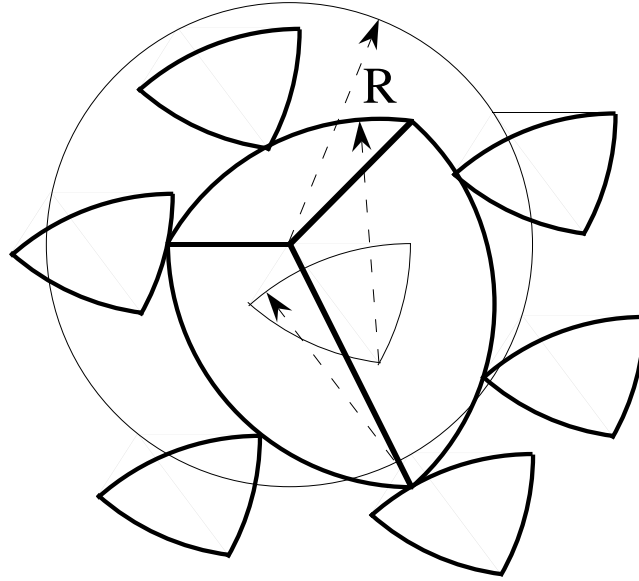


Figure 4.5 : Construction de paires de domaines  $I_r$  tels que  $I_r = V_r$ .

non centré à l'origine et  $\mathcal{E}_l^{rs}$  est le plus petit ellipsoïde de même forme centré à l'origine qui le contient. Un autre exemple est celui donné en figure 4.4. Un troisième exemple concerne les inclusions non convexes, voire non connexes :  $V_r$  étant convexe, il contient au moins l'enveloppe convexe de  $I_r$ . Il apparaît ainsi que les hypothèses faites sur les positions relatives des inclusions imposent que chaque renfort est entouré d'un certain domaine  $V_r \setminus I_r$  de matrice. Elles limitent aussi les zones de contact potentielles entre une inclusion de type  $r$  et une autre inclusion : elles correspondent aux frontières communes à  $V_r$  et  $I_r$ .

Le domaine  $V_r \setminus I_r$  peut toutefois avoir des parties communes à deux inclusions voisines, c'est-à-dire qu'il n'est pas impossible de trouver deux inclusions des familles  $r$  et  $s$  aux points  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , telles que  $V_r(\underline{x}) \cap V_s(\underline{y}) \neq \{\}$ . Le premier renseignement quantitatif sur la fraction volumique de matrice est donc de la forme :

$$c_1 \geq \text{Sup}_r p_r |V_r \setminus I_r|. \quad (4.232)$$

En revanche, il est certain que les enveloppes convexes des domaines  $I_r$ , notées  $E_r$ , incluses dans les domaines  $V_r$ , sont des espaces « propres » des inclusions, c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus, que l'on a toujours  $E_r(\underline{x}) \cap E_s(\underline{y}) = \{\}$ . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un point  $\underline{w}$  dans  $E_r(\underline{x}) \cap E_s(\underline{y}) \neq \{\}$ . Il serait de la forme  $\underline{w} = \underline{x} + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \underline{u}_i = \underline{y} + \sum_{i=1}^4 \mu_i \underline{v}_i$ , avec  $\forall i \in [1, 4] \lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \underline{u}_i \in I_r, \underline{v}_i \in I_s$  et  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \sum_{i=1}^4 \mu_i = 1$ . Par soustraction on en tire :  $\underline{y} - \underline{x} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \underline{u}_i - \sum_{i=1}^4 \mu_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mu_1 \lambda_j (\underline{u}_i - \underline{v}_j)$ , avec  $\forall (i, j) \in [1, 4]^2 \mu_1 \lambda_j \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mu_1 \lambda_j = 1$ . Le point  $\underline{y} - \underline{x}$  appartient donc à l'enveloppe convexe de  $I_{rs}$ , incluse dans  $\mathcal{E}_l^{rs}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la distribution des inclusions. Le second renseignement dont on dispose est donc le suivant :

$$c_1 \geq \sum_{r=2}^n p_r |E_r \setminus I_r|. \quad (4.233)$$

Dans certaines situations il est possible d'améliorer encore cette minoration. Considérons en effet à nouveau une inclusion  $r$  au point  $\underline{x}$  et définissons pour tout  $s$  le plus petit ellipsoïde  $\mathcal{E}_{\lambda^r}^{rs}(\underline{x})$  de la famille  $\mathcal{E}_{\lambda^s}^{rs}$ , centré en  $\underline{x}$  et contenant l'inclusion  $I_r(\underline{x})$ . Soit de même  $\mathcal{E}_{\lambda^s}^{rs}$  le plus petit ellipsoïde de cette même famille, centré à l'origine et contenant  $I_s$ . Le dilaté de  $\mathcal{E}_{\lambda^r}^{rs}(\underline{x})$  par  $\mathcal{E}_{\lambda^s}^{rs}$  est l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{\lambda^r + \lambda^s}^{rs}(\underline{x})$ . L'inclusion

$$\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x}) \subset \mathcal{E}_{\lambda^r + \lambda^s}^{rs}(\underline{x}) \quad (4.234)$$

est toujours vraie. En effet, soit  $\underline{y} = \underline{x} + \underline{u} - \underline{v} \in I_{rs}(\underline{x})$ , avec  $\underline{u} \in I_r$  et  $\underline{v} \in I_s$ . On a  $\left\| \underline{A}_{\lambda^r + \lambda^s}^{-1} \cdot \underline{u} \right\| \leq \lambda^r$

et  $\|\underline{A}_{rs}^{-1} \cdot \underline{v}\| \leq \lambda^s$  et donc  $\|\underline{A}_{rs}^{-1} \cdot (\underline{u} - \underline{v})\| \leq \lambda^r + \lambda^s$ , soit  $\underline{y} \in \mathcal{E}_{\lambda^r + \lambda^s}^{rs}(\underline{x})$ . D'où  $I_{rs}(\underline{x}) \subset \mathcal{E}_{\lambda^r + \lambda^s}^{rs}(\underline{x})$ . La relation ci-dessus en découle d'après la définition de  $\mathcal{E}_l^{rs}(\underline{x})$ . Dans le cas général, l'inclusion est stricte mais il existe des situations où il y a égalité : ce sont celles où il existe un point de tangence  $\underline{x} + \underline{u}$  entre  $\mathcal{E}_{\lambda^r}^{rs}(\underline{x})$  et un ellipsoïde  $\mathcal{E}_{\lambda^s}^{rs}(\underline{y})$ , qui appartient aussi à  $I_r(\underline{x})$  et à  $I_s(\underline{y})$ . Les points  $\underline{x}$ ,  $\underline{x} + \underline{u}$  et  $\underline{y}$  sont alors alignés et l'inégalité triangulaire précédente devient une égalité. Un exemple est celui d'inclusions ellipsoïdales centrées de même axes principaux que l'ellipsoïde caractérisant la distribution. Il est illustré en figure 4.6, qui donne aussi une situation où il n'y a pas égalité.

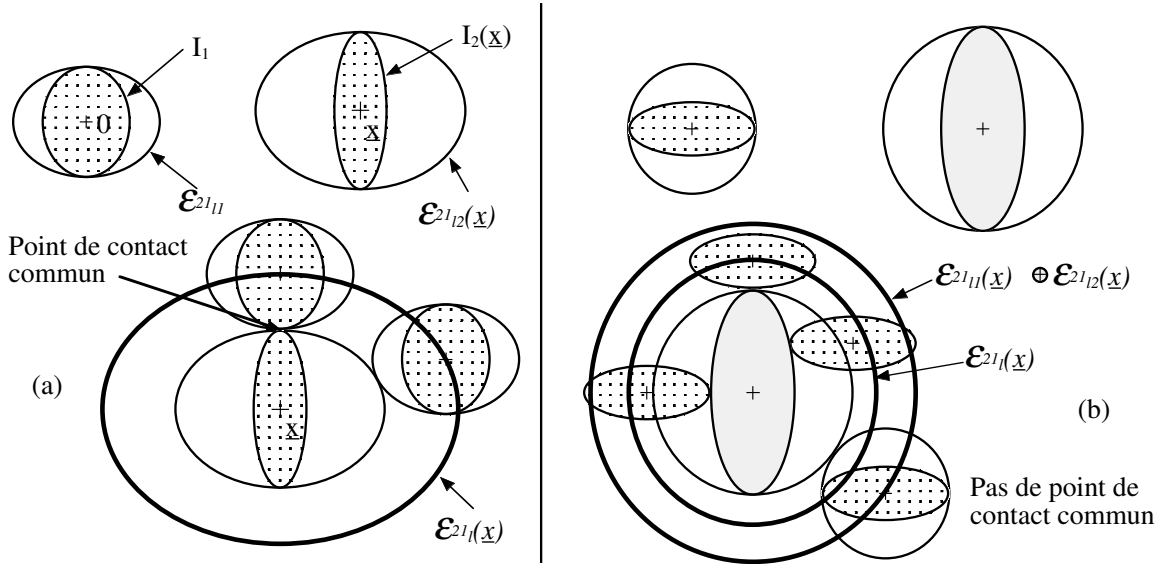


Figure 4.6 : Comparaison entre  $\mathcal{E}_l^{12}$  et  $\mathcal{E}_{\lambda^1 + \lambda^2}^{12}$  dans deux situations particulières.

Dans les cas où l'égalité  $\mathcal{E}_l^{rs} = \mathcal{E}_{\lambda^r + \lambda^s}^{rs}$  est vérifiée pour tous les couples  $(r, s)$ , il est intéressant de considérer l'intersection<sup>10</sup>  $M_r$  de tous les domaines  $\mathcal{E}_{\lambda^r}^{rs}$  pour  $s \in [2, n]$ . Cette intersection est en particulier très simple dans le cas où les tenseurs  $\underline{A}_{rs}$  sont identiques puisque les ellipsoïdes en question sont alors tous égaux. Contrairement aux domaines  $V_r$  introduits plus haut, les domaines  $M_r$  sont tous disjoints, c'est-à-dire que pour tout couple d'inclusions de type  $r$  et  $s$ , placées aux points  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , on a  $M_r(\underline{x}) \cap M_s(\underline{y}) = \{\}$ . La microstructure peut donc être construite en « implantant » aux points  $\underline{X}_r^i$  non seulement les inclusions  $I_r$ , mais aussi, selon le même processus stochastique, des domaines composites  $M_r$ . La concentration en matrice est alors minorée selon :

$$c_1 \geq \sum_{r=2}^n p_r |M_r \setminus I_r|. \tag{4.235}$$

L'égalité supposerait l'absence de matrice en dehors des domaines  $M_r(\underline{x})$ , c'est-à-dire le pavage complet de l'espace par ces domaines, qui n'est possible qu'au moyen d'une construction géométrique de nature fractale, dérivée de l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin (cf. paragraphe 1.2.C). Si la distribution des tailles d'inclusions est bornée inférieurement, une telle construction est exclue et l'inégalité est stricte.

Notons que ces domaines  $M_r$  ont été introduits implicitement par les auteurs de la présente approche [135], sous l'appellation de « sphéroïdes de sécurité », mais ils n'étaient ce concept par aucune justification précise. L'emploi qu'ils en font est correct pour les deux premiers exemples d'application qu'ils traitent (distributions sphéroïdales de sphéroïdes alignés), mais abusif pour le troisième qui aborde une situation (distribution isotrope de sphéroïdes d'orientation aléatoire) où l'égalité  $\mathcal{E}_l^{rs} = \mathcal{E}_{\lambda^r + \lambda^s}^{rs}$  n'est pas vérifiée. La représentation qu'ils donnent de cette situation, sous forme d'implantation dans la matrice de sphères impénétrables contenant une inclusion d'orientation quelconque, est bien compatible avec les hypothèses sur la distribution des centres de ces domaines, mais ne constitue qu'un cas particulier de telles distributions.

<sup>10</sup> $M$  pour « motif »...

#### 4.2.C.f Milieu de référence distinct de la matrice

Lorsque le tenseur des modules de la matrice n'est pas un majorant ou un minorant pour les tenseurs des modules des inclusions, le résultat obtenu n'a pas le statut de borne supérieure ou inférieure, mais simplement celui d'une estimation, qui généralise l'estimation de Mori et Tanaka et la corrige pour les situations où les inclusions sont de formes différentes. La pertinence de cette estimation peut être jugée par comparaison avec des bornes rigoureuses relatives au même matériau. Pour ce faire il peut être judicieux d'estimer les bornes de Hashin et Shtrikman avec les mêmes hypothèses sur la répartition spatiale des renforts, mais en optant pour un milieu de référence distinct de la matrice.

Il est alors indispensable de déterminer les tenseurs  $\hat{\Gamma}_{1s}^0$  et  $\hat{\Gamma}_{s1}^0$  pour  $s \in [1, n]$ , et donc de s'intéresser aux covariances  $\langle \kappa_1(\underline{x})\kappa_s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha$ , que l'on peut estimer à partir des autres covariances connues selon :

$$\forall r \geq 2 \quad \langle \kappa_1(\underline{x})\kappa_r(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha = c_r - \sum_{s=2}^n \langle \kappa_s(\underline{x})\kappa_r(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha \quad (4.236)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \kappa_1(\underline{x})\kappa_1(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha &= c_1 - \sum_{r=2}^n \langle \kappa_1(\underline{x})\kappa_r(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha \\ &= 2c_1 - 1 + \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n \langle \kappa_s(\underline{x})\kappa_r(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha. \end{aligned} \quad (4.237)$$

La symétrie vis-à-vis des indices  $r \geq 2$  et  $s \geq 2$  assure la même propriété pour l'indice 1. On a donc  $\hat{\Gamma}_{1s}^0 = \hat{\Gamma}_{s1}^0$  et on peut calculer ces tenseurs comme combinaisons linéaires des tenseurs  $\hat{\Gamma}_{rs}^0$ ,  $(r, s) \in [2, n]$ . Plus précisément, pour  $r \geq 2$ , on a :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{1r}^0 &= \int_{\Omega_0} \left[ c_r - \sum_{s=2}^n \langle \kappa_s(\underline{x})\kappa_r(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha \right] \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) d\omega_z \\ &= c_r \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \sum_{s=2}^n \left[ \delta_{rs} c_r \mathbf{P}_r^0 + c_r c_s \left[ \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 \right] \right] \\ &= c_r \left[ c_1 \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 + \sum_{s=2}^n c_s \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 - \mathbf{P}_r^0 \right], \end{aligned} \quad (4.238)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{11}^0 &= \int_{\Omega_0} \left[ 2c_1 - 1 + \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n \langle \kappa_s(\underline{x})\kappa_r(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha \right] \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) d\omega_z \\ &= (2c_1 - 1) \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 + \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n \left[ \delta_{rs} c_r \mathbf{P}_r^0 + c_r c_s \left[ \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 \right] \right] \\ &= c_1^2 \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 + \sum_{r=2}^n c_r \mathbf{P}_r^0 - \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n c_r c_s \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0. \end{aligned} \quad (4.239)$$

Les tenseurs ainsi obtenus satisfont par construction les propriétés (4.125), ce qui garantit la symétrie des tenseurs de Hashin et Shtrikman qu'on en déduit. Les polarisations optimales pour un milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  quelconque sont alors caractérisées, dans le cas de la déformation macroscopique imposée, par :

$$\forall r \in [2, n] \quad \underline{\underline{\eta}}^r + \mathbf{P}_r^0 : \left[ [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r - [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^1 \right] = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \sum_{s=2}^n c_s \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 : \left[ [\mathbf{C}^s - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^s - [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^1 \right] \quad (4.240)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \underline{\underline{\eta}}^1 + \frac{1}{c_1} \sum_{r=2}^n c_r \mathbf{P}_r^0 : \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^1 - [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r \right] &= \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \\ + \frac{1}{c_1} \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n c_r c_s \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{rs}}^0 : \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^1 - [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^r \right]. \end{aligned} \quad (4.241)$$

Notons que la dernière équation n'est autre que la relation  $\langle \underline{\underline{\eta}} \rangle = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Le système est quelque peu plus compliqué que dans la situation où la matrice est prise comme milieu de référence, mais sa structure est de même nature. Le traitement exhaustif de cette situation exigerait que l'on vérifie que sa solution satisfasse les propriétés requises mais, pour des raisons de concision, nous réservons ce travail à des développements ultérieurs. On peut néanmoins noter qu'il est possible de construire formellement des solutions explicites dans le cas de la distribution ellipsoïdale simple ( $\forall(r, s) \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{rs}}^0 = \mathbf{P}_d^0$ ). Nous ne reportons pas l'expression particulièrement lourde obtenue pour  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  dans le cas général et nous limitons au cas d'une seule famille d'inclusion, dont le matériau constitutif est choisi comme milieu de référence. Le système ci-dessus se simplifie alors selon :

$$\underline{\underline{\eta}}^2 + [\mathbf{P}_2^2 - c_2 \mathbf{P}_d^2] : [\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\eta}}^1 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad (4.242)$$

$$c_1 \underline{\underline{\eta}}^1 + c_2 \underline{\underline{\eta}}^2 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle. \quad (4.243)$$

Quelques manipulations algébriques conduisent, dans l'hypothèse où  $\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1$  est défini, au résultat :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}2} = \mathbf{C}^2 - c_1 \left[ [\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1]^{-1} - \frac{c_2}{c_1} [\mathbf{P}_2^2 - c_2 \mathbf{P}_d^2] \right]^{-1}. \quad (4.244)$$

Le cas où  $\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1$  est singulier peut aussi être traité à condition de prendre les précautions déjà précisées plus haut. Rappelons l'expression de l'autre borne, obtenue dans cette situation lorsque l'on choisit la matrice comme milieu de référence :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}1} = \mathbf{C}^1 + c_2 \left[ [\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1]^{-1} + [\mathbf{P}_2^2 - c_1 \mathbf{P}_d^2] \right]^{-1}. \quad (4.245)$$

On peut vérifier que lorsque  $\mathbf{P}_2^1 = \mathbf{P}_d^1$  et  $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_d^2$ , ces bornes coïncident avec les deux bornes de Hashin et Shtrikman classiques, relatives à une distribution ellipsoïdale simple des phases.

#### 4.2.D Champ de polarisation uniforme sur $\Omega$

Dans toutes les approches décrites précédemment, tout milieu de référence choisi conformément aux règles (4.27) conduit à une borne, supérieure ou inférieure, pour le tenseur des modules effectifs. Nous avons établi que, dans le cas d'une distribution ellipsoïdale simple des phases, les bornes de Hashin et Shtrikman optimales sont obtenues pour  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_r^-$  et  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_r^+$ , mais ceci n'est pas démontré dans le cas général.

On peut d'ailleurs exhiber des situations où ce n'est pas le cas. L'une d'elle correspond au choix d'une polarisation uniforme sur le VER, c'est-à-dire à la situation où la projection  $\mathcal{P}$  consiste à remplacer un champ par la grandeur macroscopique correspondante. Ce choix n'est pas tout à fait conforme à la définition initiale, puisque la condition (4.44) n'est pas satisfaite. Il est toutefois assez facile de reprendre la démarche générale dans cette situation, en tous cas lorsque  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_r$  est défini pour toutes les phases. La fonctionnelle de Hashin et Shtrikman, qui ne dépend plus que du tenseur de polarisation uniforme  $\underline{\underline{p}}^*$  retenu, s'écrit alors, d'après (4.28) :

$$\frac{2}{|\text{VER}|} \text{HS}^0(\underline{\underline{p}}^*) = \frac{2}{|\text{VER}|} \Phi^0(\underline{\underline{U}}) + \underline{\underline{p}}^* : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle - \underline{\underline{p}}^* : \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0]^{-1} \rangle : \underline{\underline{p}}^* \quad (4.246)$$

$$= -\frac{2}{|\text{VER}|} \Psi^0(\underline{\underline{\Sigma}}) + \underline{\underline{p}}^* : \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{g}} \rangle + \underline{\underline{p}}^* : \mathbf{S}^0 : \langle [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0]^{-1} \rangle : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}^* d\omega, \quad (4.247)$$

et sa valeur stationnaire conduit à la borne suivante pour le tenseur des modules effectifs :

$$\mathbf{C}_{\text{Uni}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0) = \mathbf{C}^0 + \left\langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0]^{-1} \right\rangle^{-1} = \left[ \mathbf{S}^0 + \left\langle [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0]^{-1} \right\rangle^{-1} \right]^{-1} \quad (4.248)$$

où l'indice Uni fait référence à la projection sur l'espace des champs uniformes utilisée.

Il est assez facile de voir que lorsque  $\mathbf{C}^0 \rightarrow 0$  ou  $\mathbf{C}^0 \rightarrow +\infty$ , le résultat tend respectivement vers la borne de Reuss classique et la borne de Voigt. En revanche, lorsque  $\mathbf{C}^0$  tend vers  $\mathbf{C}_r^-$  ou vers  $\mathbf{C}_r^+$ , il tend vers ces mêmes tenseurs et l'encadrement obtenu est moins fin que le précédent.

## 4.3 Approches par Motifs Morphologiques Représentatifs

### 4.3.A Notion de Motif

La description d'un milieu hétérogène aléatoire par « Motifs Morphologiques Représentatifs », proposée par Stolz et Zaoui [152], est une alternative à la description classique traitée au paragraphe précédent, qui permet de combiner une connaissance relativement certaine d'événements morphologiques locaux, caractéristiques d'une famille de microstructures particulières, à une connaissance partielle de leur statistique de répartition dans l'espace.

Cette description suppose qu'il existe dans le matériau considéré des domaines disjoints, d'extension finie et bornée, qu'il est possible de regrouper en familles, caractérisées par une géométrie et une distribution des propriétés mécaniques locales identiques, ces familles constituant les « Motifs Morphologiques Représentatifs » (MMR par la suite). Plus précisément (voir figure 4.7), un motif  $\lambda$  est défini par un domaine  $D_\lambda$  et une distribution locale des modules d'élasticité, caractérisé par un champ de tenseurs  $\mathbf{C}^\lambda$  tel que  $\mathbf{C}^\lambda(\underline{x}) = 0$  pour  $\underline{x} \notin D_\lambda$ . Le domaine  $D_\lambda$  est généralement choisi connexe et supposé contenir un voisinage de l'origine, mais cet aspect n'est pas essentiel et sera rediscuté par la suite. On note comme précédemment  $D_\lambda(\underline{X})$  le translaté de  $D_\lambda$  au point  $\underline{X}$ . Un grand nombre de motifs distincts peut être utilisé pour décrire un matériau. Dans la présentation qui suit, on supposera qu'il sont en nombre fini et on les référencera par l'indice  $\lambda$  variant dans  $[2, n]$ . Rien n'interdit toutefois de faire appel à un nombre infini ou une distribution continue de motifs : il suffit de remplacer dans les développements qui suivent les sommes finies par des séries ou des intégrales convergentes. L'hypothèse fondamentale consiste à supposer que l'on peut identifier dans le matériau des domaines de la forme  $D_\lambda(\underline{X}_\lambda^i)$ , tous disjoints, tels que les modules d'élasticité locaux dans ces domaines soient donnés par :

$$\forall \underline{x} \in D_\lambda(\underline{X}_\lambda^i) \quad \mathbf{C}(\underline{x}) = \mathbf{C}^\lambda(\underline{x} - \underline{X}_\lambda^i). \quad (4.249)$$

Tous les points de la forme  $\underline{X}_\lambda^i + \underline{x}$  avec  $\underline{x} \in D_\lambda$  sont dit « homologues » vis-à-vis du motif  $\lambda$  en question.

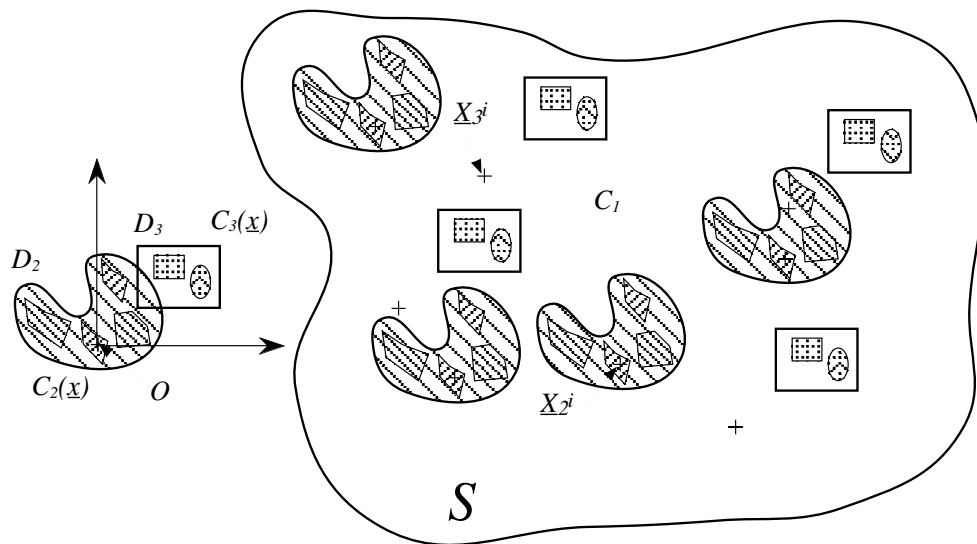


Figure 4.7 : Motifs Morphologiques Représentatifs

Dans l'approche la plus simple (développée par exemple dans [28]), le domaine complémentaire de la réunion de tous ces sous-domaines est supposé vide, c'est-à-dire que ces derniers définissent un pavage complet de l'espace occupé par le matériau. Dans la démarche légèrement plus riche que nous adoptons, cette hypothèse est levée et remplacée par celle d'homogénéité du comportement mécanique du domaine complémentaire, qui apparaît alors comme une « matrice », référencée par l'indice 1 et de modules  $\mathbf{C}^1$ , dans laquelle sont insérées les « inclusions hétérogènes » que constituent les divers représentants des MMR. Notons qu'il est possible de traiter formellement une situation encore plus générale, dans laquelle l'homogénéité du domaine complémentaire n'est pas indispensable (voir la

description originelle de l'approche dans [152]), mais qui ne conduit pas à des solutions explicites (du moins à l'heure actuelle).

L'approche par MMR permet d'enrichir encore la notion de phase : elle fait référence non seulement à la « phase mécanique », caractérisée par un tenseur des modules d'élasticité comme dans la description classique, à l'appartenance à une certaine famille d'inclusions comme dans l'approche de Willis et Ponte Castañeda, mais aussi à une position particulière dans cette « inclusion » hétérogène. Elle peut aussi être déclinée à une autre échelle, et l'on peut, à la suite de Stolz et Zaoui, définir la notion de « phase morphologique », qui renvoie à un motif complet, caractérisé par un *champ* de tenseurs des modules locaux et occupant un certain domaine hétérogène du matériau.

Une description d'une microstructure par MMR n'est pas unique. La manière la plus simple d'opérer est d'utiliser des motifs homogènes d'extension beaucoup plus petite que la taille des hétérogénéités du matériau, c'est-à-dire pratiquement réduits à des points et de paver totalement l'espace. Une telle description correspond à l'approche dite « ponctuelle » et conduit aux résultats obtenus avec les approches classiques traitées au paragraphe 4.2.B. Toute microstructure peut être décrite de la sorte. Mais il est des situations où elle n'est pas pertinente et ne permet pas d'exploiter totalement l'information microstructurale dont on dispose. C'est le cas par exemple de l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin pour lequel il est facile de construire une description non ponctuelle : il suffit de choisir comme motifs les sphères composites de même taille. La nature fractale de l'assemblage assure le pavage complet de l'espace et la concentration en « matrice » est nulle.

Un autre exemple est le composite à renfort particulaire tel que décrit par Willis et Ponte Castañeda (voir paragraphe précédent), qui n'est autre que le cas particulier de la présente approche dans lequel les motifs sont homogènes. Dans certaines situations, les matériaux abordés par ces auteurs peuvent être décrits de façon plus avantageuse par des motifs hétérogènes. En effet, comme nous l'avons établi au paragraphe 4.2.C.e, les hypothèses faites sur les distributions des centres des renforts permettent au minimum de remplacer les inclusions homogènes par les motifs, éventuellement hétérogènes, construits à partir de leur enveloppe convexe. Dans certains cas, il est de plus possible d'attribuer à chaque inclusion  $I_r(\underline{x})$  un domaine  $M_r(\underline{x})$  qui lui est « propre », c'est-à-dire qui ne rencontre aucun autre domaine  $M_s(\underline{y})$  tel que  $\underline{y}$  soit la position d'une inclusion  $s$ . Il est alors plus judicieux de choisir des motifs biphasés caractérisés par les domaines  $M_r$  et un champ de tenseurs des modules égal à  $\mathbf{C}^r$  dans  $I_r$  et à  $\mathbf{C}^1$  dans  $M_r \setminus I_r$ . Remarquons qu'en cas de distribution ellipsoïdale simple, les domaines  $M_r$  sont des ellipsoïdes.

Un dernier exemple est celui des microstructures parfaitement périodiques, pour lesquelles il suffit de faire appel à un motif unique ( $n = 2$ ), la cellule de base, qui permet de paver complètement l'espace ( $C_1 = 0$ ) grâce à une distribution régulière des points  $\underline{X}_2^i$ . Nous n'aborderons pas cette situation et nous limiterons aux microstructures aléatoires, ergodiques, stationnaires et sans ordre à grande distance. Des développements spécifiques pourraient toutefois être entrepris dans le cadre des microstructures périodiques et conduiraient aux principes de l'homogénéisation du même nom, qui, dans ce sens, n'est autre qu'un cas particulier de l'approche par MMR.

Comme dans le cas du matériau à particules classique abordé plus haut, la microstructure est totalement décrite lorsque les positions  $\underline{X}_\lambda^i$  des  $N_\lambda$  représentants du motif  $\lambda$  présents dans la structure  $\mathcal{S}$  sont connues pour tous les motifs  $\lambda \in [2, n]$ . Comme précédemment, cette information n'est pas totalement accessible, mais peut être représentée par des variables aléatoires de la forme

$$\zeta^\lambda(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \delta(\underline{x} - \underline{X}_\lambda^i), \quad (4.250)$$

qui déterminent « l'implantation » des motifs dans l'espace et dont on déduit toutes les autres variables aléatoires caractérisant la microstructure. Le champ des tenseurs de modules locaux dans toute la structure s'en déduit en effet selon :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \mathbf{C}(\underline{x}) = \mathbf{C}^1 + \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_\lambda} [\mathbf{C}^\lambda(\underline{y}) - \mathbf{C}^1] \zeta^\lambda(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y. \quad (4.251)$$

Remarquons qu'en vertu de l'hypothèse de non recouvrement des motifs, il y a au plus un terme non nul dans la somme du membre de droite de cette équation. Il est possible de définir une densité,

exprimée en nombre de centres de motifs par unité de volume, et une fraction volumique de motif :

$$p_\lambda(\underline{x}) = \frac{1}{|\Omega(\underline{x})|} \int_{\Omega(\underline{x})} \zeta^r(\underline{x}) d\omega_x \quad (4.252)$$

$$C_\lambda(\underline{x}) = |D_\lambda| p_\lambda(\underline{x}), \quad (4.253)$$

où  $\Omega(\underline{x})$  est un VER autour de  $\underline{x}$ . L'hypothèse d'ergodicité permet de remplacer la moyenne par l'espérance statistique de l'intégrant ; la stationnarité assure par ailleurs que les quantités obtenues sont macroscopiques. On note par ailleurs  $C_1 = 1 - \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda$  la fraction volumique de la matrice et, comme dans le cas classique,  $\kappa_1$  sa fonction caractéristique, liée aux grandeurs déjà introduites par :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \kappa_1(\underline{x}) = 1 - \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_\lambda} \zeta^\lambda(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y. \quad (4.254)$$

Il est également utile de faire appel aux fonctions de corrélation d'ordre deux des variables aléatoires  $\zeta^\lambda$  qui fournissent des informations sur les positions relatives des centres des représentants de deux motifs. De manière exactement parallèle à celle mise en œuvre par Willis et Ponte Castañeda, il est possible de les écrire sous la forme :

$$\langle \zeta^\lambda(\underline{x}) \zeta^\mu(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha = \delta_{\lambda\mu} p_\lambda \delta(\underline{z}) + p_{\lambda\mu}(\underline{z}). \quad (4.255)$$

En vertu de l'hypothèse de non recouvrement des domaines  $D_\lambda(\underline{X}_\lambda^i)$ , la fonction  $p_{\lambda\mu}$  est nulle sur le dilaté de  $D_\lambda$  par  $D_\mu$ , noté  $D_{\lambda\mu}$ . L'absence d'ordre à grande distance assure aussi qu'elle tend vers  $p_\lambda p_\mu$  lorsque  $\|\underline{z}\|$  tend vers l'infini.

### 4.3.B Bornes de type Voigt et Reuss

#### 4.3.B.a Construction

Ces informations statistiques sont inutiles pour construire un premier encadrement des modules effectifs, qui généralise celui de Hashin pour l'Assemblage des Sphères Composites. Un champ de déformation CA avec la condition (4.66) peut être facilement construit dans un VER  $\Omega(\underline{x})$  à partir des champs  $(\underline{u}_\lambda^V, \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V)$  définis au sein des motifs  $\lambda$  par les solutions des problèmes d'élasticité locaux obtenus lorsque l'on applique une condition de déformation homogène à leurs bords :

$$\underline{u}_\lambda^V(\underline{y}) = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \cdot \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in \partial D_\lambda \quad \forall \lambda \in [2, n], \quad (4.256)$$

et prolongés en dehors de  $D_\lambda$  par un champ de déformation homogène  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Le champ de déformation obtenu par juxtaposition de tous ces champs locaux et complété par un champ homogène sur le domaine  $D_1(\underline{x})$  occupé par la matrice, égal au champ macroscopique, de la forme :

$$\begin{aligned} \forall \underline{y} \in \Omega(\underline{x}) \quad \underline{u}^V(\underline{y}) &= \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \cdot \underline{y} + \sum_{\lambda=2}^n \int_{\Omega(\underline{x})} [\underline{u}_\lambda^V(\underline{y} - \underline{z}) - \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \cdot (\underline{y} - \underline{z})] \zeta^\lambda(\underline{z}) d\omega_z \\ \underline{\underline{\epsilon}}^V(\underline{y}) &= \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \sum_{\lambda=2}^n \int_{\Omega(\underline{x})} [\underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V(\underline{y} - \underline{z}) - \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle] \zeta^\lambda(\underline{z}) d\omega_z \end{aligned} \quad (4.257)$$

vérifie en effet les conditions requises.

Les champs  $\underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V$  et  $\mathbf{C}^\lambda : \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V$  sont respectivement CA avec la condition ci-dessus et SA. On a donc :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V : \mathbf{C}^\lambda : \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V \rangle_{D_\lambda} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \langle \mathbf{C}^\lambda : \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V \rangle_{D_\lambda}. \quad (4.258)$$

Cette propriété et la linéarité des problèmes locaux permettent de définir des tenseurs symétriques définis positifs  $\mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^V$  tels que

$$\forall \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad \langle \mathbf{C}^\lambda : \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V \rangle_{D_\lambda} = \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^V : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle. \quad (4.259)$$



La sommation de l'énergie potentielle sur tous les domaines  $D_\lambda(X_\lambda^i)$  et le domaine complémentaire conduit donc à la valeur suivante :

$$\frac{2}{|\Omega(\underline{x})|} \Phi(\underline{\underline{\sigma}}^*) = C_1 \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \langle \mathbf{C}^\lambda : \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^V \rangle_{D_\lambda} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \mathbf{C}_{\text{MMR}}^V : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle, \quad (4.260)$$

où :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^V = C_1 \mathbf{C}^1 + \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^V. \quad (4.261)$$

Le théorème de l'énergie potentielle établit que ce tenseur symétrique et défini positif est une borne supérieure pour le tenseur des modules effectifs. Il s'agit de la « borne de Voigt généralisée » au sens de l'approche par MMR :

$$\bar{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^V. \quad (4.262)$$

On peut de même construire une borne inférieure en appliquant le théorème de l'énergie complémentaire à des champs SA, construits à partir des solutions locales  $\underline{\underline{\sigma}}_\lambda^R$  des problèmes d'élasticité définis sur les motifs lorsqu'une condition de contrainte homogène est appliquée à leur bord :

$$\underline{\underline{\sigma}}^R(\underline{y}) \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{y} \in \partial D_\lambda \quad \forall \lambda \in [1, n], \quad (4.263)$$

prolongées par un champ homogène  $\underline{\underline{\Sigma}}$  en dehors des domaines  $D_\lambda$ . Le champ :

$$\forall \underline{y} \in \Omega(\underline{x}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^R(\underline{y}) = \underline{\underline{\Sigma}} + \sum_{\lambda=2}^n \int_{\Omega(\underline{x})} [\underline{\underline{\sigma}}_\lambda^R(\underline{y} - \underline{z}) - \underline{\underline{\Sigma}}] \zeta^\lambda(\underline{z}) d\omega_z \quad (4.264)$$

est en effet SA pour le problème de localisation défini pour une déformation macroscopique  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  imposée aux bords du VER  $\Omega(\underline{x})$ . Comme précédemment, on a :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_\lambda^R : \mathbf{S}^\lambda : \underline{\underline{\sigma}}_\lambda^R \rangle_{D_\lambda} = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \mathbf{S}^\lambda : \underline{\underline{\sigma}}_\lambda^R \rangle_{D_\lambda} = \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}_{\lambda\text{MMR}}^V : \underline{\underline{\Sigma}}, \quad (4.265)$$

où  $\mathbf{S}_{\lambda\text{MMR}}^R$  est le tenseur symétrique défini positif tel que

$$\forall \underline{\underline{\Sigma}} \quad \langle \mathbf{S}^\lambda : \underline{\underline{\sigma}}_\lambda^R \rangle_{D_\lambda} = \mathbf{S}_{\lambda\text{MMR}}^R : \underline{\underline{\Sigma}}. \quad (4.266)$$

L'énergie complémentaire vaut alors :

$$\frac{2}{|\Omega(\underline{x})|} \Psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) = -2 \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}_{\text{MMR}}^R : \underline{\underline{\Sigma}}, \quad (4.267)$$

avec

$$\mathbf{S}_{\text{MMR}}^R = [\mathbf{C}_{\text{MMR}}^R]^{-1} = C_1 \mathbf{S}^1 + \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda \mathbf{S}_{\lambda\text{MMR}}^R. \quad (4.268)$$

La valeur stationnaire est  $-\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \mathbf{C}_{\text{MMR}}^R : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Le théorème de l'énergie complémentaire assure que  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^R$  minore le tenseur des modules effectifs :

$$\bar{\mathbf{C}} \geq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^R. \quad (4.269)$$

Il s'agit de la « borne de Reuss généralisée » au sens de l'approche par MMR.

Il est bien sûr possible d'entreprendre la même démarche dans le cas de la contrainte macroscopique  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  imposée, de façon à obtenir un encadrement de  $\bar{\mathbf{S}}$ . Les problèmes auxiliaires à résoudre sur les motifs sont les mêmes que précédemment et l'on obtient le même encadrement.

Notons que ces bornes de Voigt et Reuss généralisées ne sont autres que les bornes de Voigt et Reuss classiques relatives à un matériau déduit du matériau étudié en remplaçant chaque phase morphologique par une phase homogène de tenseur des modules  $\mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^V$  ou, respectivement,  $\mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^R$ . Ces derniers tenseurs sont les bornes de Voigt et Reuss généralisées relatives à la phase morphologique en question.

### 4.3.B.b Commentaires et propriétés

Comme dans le cas des bornes classiques du même nom, aucune hypothèse particulière n'est indispensable quant à la disposition relative des « phases morphologiques », qui peut être totalement aléatoire ou parfaitement périodique. Seule la fraction volumique  $C_\lambda$  des motifs importe, c'est-à-dire l'information d'ordre un. Les bornes obtenues ne sont toutefois pas universelles dans la mesure où elles ne s'appliquent qu'à la description particulière des motifs pour lesquelles on les détermine. Elles constituent donc une première réponse à la question générale qui motive le présent travail. Leur calcul est par ailleurs beaucoup moins immédiat que celui des bornes classiques puisque pour déterminer la borne de type Voigt, il faut connaître la contrainte moyenne qui apparaît dans chaque motif lorsqu'on applique des déformations homogènes à ses bords, et que le calcul de celle de Reuss nécessite de connaître la déformation moyenne qui se développe lorsque l'on impose des contraintes homogènes. Il faut donc résoudre ces problèmes d'élasticité auxiliaires classiques avant d'en déduire par un processus de moyenne relativement simple les tenseurs  $C_{\text{MMR}}^{\text{V}}$  et  $C_{\text{MMR}}^{\text{R}}$ .

La situation la plus simple (en dehors de celle de motifs homogènes qui conduit aux bornes classiques du même nom) est celle de l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin. Les problèmes auxiliaires sont alors tous identiques et admettent une solution purement analytique. On obtient les bornes de Hashin, qui ne sont autres que l'archétype des bornes proposées ici. Une description de type mnPh généralise ces dernières et le traitement semi-analytique des problèmes auxiliaires est encore possible (*cf.* paragraphe 3.2.A). Mais dans le cas plus général de géométries des motifs et de distributions des modules en leur sein totalement quelconque, ainsi que d'un degré d'anisotropie des constituants quelconque, une démarche analytique est exclue. Il faut alors recourir à des techniques numériques appropriées, capables de fournir la déformation ou la contrainte moyenne au sein des motifs pour une valeur numérique particulière de la contrainte ou de la déformation imposée. Si l'on connaît le résultat pour 6 valeurs indépendantes de la grandeur imposée, le calcul des 21 composantes caractérisant les tenseurs recherchés se réduit à l'inversion d'un système linéaire. Une connaissance *a priori* des symétries des tenseurs  $C_{\text{MMR}}^{\text{V}}$  et  $C_{\text{MMR}}^{\text{R}}$  permet éventuellement de réduire le nombre des résolutions intermédiaires. Des précisions techniques seront données ultérieurement à ce sujet.

Il est assez facile d'établir que ces bornes généralisées améliorent systématiquement l'encadrement classique du même nom. Considérons pour cela les formulations variationnelles classiques associées aux problèmes auxiliaires à traiter. Le champ uniforme d'intensité égal au champ moyen  $\underline{E}$  imposé est clairement CA pour les problèmes à résoudre pour déterminer la borne de Voigt généralisée. Le théorème de l'énergie potentielle fournit alors :

$$\forall \lambda \in [2, n] \quad \forall \underline{E} \quad \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^{\text{V}} : \mathbf{C}^\lambda : \underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^{\text{V}} \right\rangle_{D_\lambda} = \underline{E} : \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{V}} : \underline{E} \leq \underline{E} : \left\langle \mathbf{C}^\lambda \right\rangle_{D_\lambda} : \underline{E}.$$

On établit de même, par le théorème de l'énergie complémentaire écrit pour les problèmes auxiliaires à résoudre pour déterminer la borne de Reuss généralisée, pour lesquels le champ uniforme égal au champ moyen  $\underline{\underline{\Sigma}}$  imposé est SA :

$$\forall \lambda \in [2, n] \quad \forall \underline{\underline{\Sigma}} \quad \left\langle \underline{\underline{\sigma}}_\lambda^{\text{R}} : \mathbf{S}^\lambda : \underline{\underline{\sigma}}_\lambda^{\text{R}} \right\rangle_{D_\lambda} = \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \left\langle \mathbf{S}^\lambda \right\rangle_{D_\lambda} : \underline{\underline{\Sigma}}.$$

Enfin, le champ  $\underline{\underline{\sigma}}_\lambda^{\text{R}}$  utilisé pour construire la borne de Reuss généralisée est SA pour le problème à traiter pour déterminer la borne de Voigt généralisée. D'où :

$$\forall \lambda \in [2, n] \quad \forall \underline{E} \quad \forall \underline{\underline{\Sigma}} \quad 2\underline{E} : \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \underline{E} : \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{V}} : \underline{E}.$$

En prenant  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}} : \underline{E}$ , il vient :

$$\forall \lambda \in [2, n] \quad \forall \underline{E} \quad \underline{E} : \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}} : \underline{E} \leq \underline{E} : \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{V}} : \underline{E}.$$

Les tenseurs des modules  $\left\langle \mathbf{C}^\lambda \right\rangle_{D_\lambda}$  et  $\left\langle \mathbf{S}^\lambda \right\rangle_{D_\lambda}^{-1}$ , notés respectivement par la suite  $\mathbf{C}_\lambda^{\text{V}} = \mathbf{S}_\lambda^{\text{V}-1}$  et  $\mathbf{C}_\lambda^{\text{R}} = \mathbf{S}_\lambda^{\text{R}-1}$ , caractérisent les milieux de Voigt et Reuss classiques associés à la phase morphologique

$\lambda$ . Contrairement aux tenseurs  $\mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{V}}$  et  $\mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}}$ , ils ne dépendent de la structure du motif  $\lambda$  qu'au travers des fractions volumiques des phases constitutives. Les résultats ci-dessus assurent que :

$$\forall \lambda \in [2, n] \quad \mathbf{C}_{\lambda}^{\text{R}} \leq \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}} \leq \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{V}} \leq \mathbf{C}_{\lambda}^{\text{V}}. \quad (4.270)$$

En sommant ces inégalités pour tous les motifs et la matrice (pour laquelle tous ces tenseurs sont égaux), il vient :

$$\mathbf{C}^{\text{R}} \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{R}} \leq \bar{\mathbf{C}} \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} \leq \mathbf{C}^{\text{V}}. \quad (4.271)$$

Les inégalités externes sont strictes sitôt que l'un des motifs est hétérogène, sauf dans des cas très particuliers<sup>11</sup>.

Notons enfin que ces bornes de Voigt et Reuss généralisées peuvent facilement être étendues aux situations où le domaine complémentaire de celui occupé par les motifs n'est pas homogène : il suffit de remplacer dans les définitions de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}}$  et  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{R}}$ , le tenseur  $\mathbf{C}^1$  par la borne de Voigt ou de Reuss classique relative à ce domaine.

### 4.3.C Bornes de type Hashin et Shtrikman

Les bornes de type Voigt et Reuss décrites au paragraphe précédent prennent en compte l'information morphologique contenue dans la description des motifs et permettent souvent de réduire considérablement le fuseau des modules effectifs potentiels. C'est le cas par exemple du module de compressibilité de l'Assemblage isotrope des Sphères Composites de Hashin, pour lequel les bornes sont confondues et correspondent donc à la valeur exacte du module effectif. Ceci n'est en revanche pas le cas du module de cisaillement pour lequel l'encadrement obtenu n'est guère meilleur, voir plus mauvais dans certains cas, que celui des bornes classiques de Hashin et Shtrikman. Une amélioration des prévisions n'est possible qu'en tirant profit d'informations supplémentaires. C'est ce que permet la démarche de Hashin et Shtrikman, qui prend en compte une information « d'ordre deux » sur la distribution des phases morphologiques, c'est-à-dire dans le cas présent les fonctions  $p_{\lambda\mu}$  introduites plus haut. La démarche doit toutefois être adaptée à la description par MMR dont on dispose : il faut donc choisir une famille de champs de polarisation adéquate, soit en d'autres termes, trouver une projection  $\mathcal{P}$  pertinente.

#### 4.3.C.a Choix des champs de polarisation

La solution, due à C. Stolz, consiste à prendre, comme dans le cas classique, des champs de polarisation « homogènes par phase morphologique », mais en un sens plus riche que dans l'approche classique : les phases morphologiques étant caractérisées par des champs locaux de tenseurs des modules  $\mathbf{C}^{\lambda}$  sur les domaines  $D_{\lambda}$ , les polarisations considérées sont de même caractérisées par des *champs de polarisation locaux*  $\underline{\underline{\eta}}^{\lambda}$  sur ces mêmes domaines, complétés par une polarisation uniforme  $\underline{\underline{\eta}}^1$  sur le domaine non couvert par les motifs. Plus précisément, ces champs sont de la forme :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \underline{\underline{\eta}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\eta}}^1 \kappa_1(\underline{x}) + \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_{\lambda}} \underline{\underline{\eta}}^{\lambda}(\underline{u}) \zeta^{\lambda}(\underline{x} - \underline{u}) d\omega_{\underline{u}}. \quad (4.272)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\eta}}^1$  et les champs  $\underline{\underline{\eta}}^{\lambda}$  peuvent varier en fonction du point  $\underline{x}$  mais de manière macroscopique. On vérifie facilement que ce choix est bien de la forme (4.107), la sommation étant continue et non discrète comme dans le cas classique.

La projection  $\mathcal{P}$  sur le sous-espace de  $\mathbb{T}_2^s(\mathcal{S})$  regroupant les champs de ce type, orthogonale au sens du produit scalaire usuel, est définie au point  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  par :

$$\forall \underline{\underline{\eta}} \in \mathbb{T}_2^s(\mathcal{S}), \quad \underline{\underline{\eta}}^1(\underline{\underline{\eta}}) = \frac{1}{C_1} \langle \kappa_1 \underline{\underline{\eta}} \rangle_{\Omega(\underline{x})}$$

$$\forall \lambda \in [2, n], \quad \underline{\underline{\eta}}^{\lambda}(\underline{\underline{\eta}}) = \underline{\underline{\eta}}_{\lambda}^M, \quad (4.273)$$

<sup>11</sup>Exemple : un assemblage de Hashin dont les phases ont même module de compressibilité ; les modules de compressibilité des divers tenseurs sont alors tous égaux.

où  $f_\lambda^M$  est la « moyenne au sens du motif  $\lambda$  », au point  $\underline{x}$ , d'un champ  $f$  quelconque sur  $\mathcal{S}$ , définie par :

$$\forall \underline{u} \in D_\lambda, \quad f_\lambda^M(\underline{u}) = \frac{1}{p_\lambda(\underline{x})} \left\langle \zeta^\lambda(\cdot) f(\cdot + \underline{u}) \right\rangle_{\Omega(\underline{x})} \quad (4.274)$$

ou, de manière équivalente mais formellement plus proche de la définition initiale des auteurs de la méthode :

$$f_\lambda^M(\underline{u}) = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{i=1}^{n_\lambda} f(\underline{X}_\lambda^i + \underline{u}), \quad (4.275)$$

la sommation portant sur les  $n_\lambda$  motifs dont le centre se trouve dans  $\Omega(\underline{x})$ . Ces relations ne s'appliquent qu'à des champs macrohomogènes, c'est-à-dire pour lesquels le tenseur  $\underline{\underline{\eta}}^1$  et les champs  $\underline{\underline{\eta}}^\lambda$  ainsi calculés évoluent bien de manière macroscopique.

Les résultats obtenus au moyen de cette projection seront référencés par l'indice MMR. Les propriétés de commutativité (4.44) et de conservation de la moyenne (4.86) sont satisfaites. Établir la seconde ne pose pas de difficulté, la projection retenue étant en quelque sorte une opération de « moyenne intermédiaire ». La première résulte de ce que le tenseur des modules locaux  $\mathbf{C}$  prend toujours la même valeur aux points homologues d'un même motif. Elle permet de faire appel de manière univoque, aux tenseurs de polarisations  $\underline{\underline{p}}^1 = (\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0) : \underline{\underline{\eta}}^1$  et aux champs locaux sur  $D_\lambda$ ,  $\underline{\underline{p}}^\lambda = (\mathbf{C}^\lambda - \mathbf{C}^0) : \underline{\underline{\eta}}^\lambda$ , caractérisant un champ de polarisation de  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\mathcal{S}))$ .

#### 4.3.C.b Optimisation des champs de polarisation

Le recours aux champs de polarisation d'essai de ce type permet d'écrire le système (4.97) caractérisant le champ d'essai optimal  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$  pour un milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  quelconque sous la forme :

$$\forall \underline{y} \in \mathcal{S} \quad \underline{\underline{\eta}}^\circ(\underline{y}) + \mathcal{P} \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \left[ \underline{\underline{p}}^1 \kappa_1(\underline{y} + \underline{z}) + \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_\lambda} \underline{\underline{p}}^{\circ\lambda}(\underline{u}) \zeta^\lambda(\underline{y} + \underline{z} - \underline{u}) d\omega_u \right] d\omega_z = \underline{\underline{E}}^0. \quad (4.276)$$

En explicitant la projection, on obtient les relations suivantes caractérisant le tenseur  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1}$  et les champs  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda}$  optimaux au point  $\underline{x}$  :

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} + \frac{1}{C_1 |\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_1(\underline{y}) \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \underline{\underline{p}}^{\circ 1} \kappa_1(\underline{y} + \underline{z}) d\omega_z d\omega_y \\ & + \frac{1}{C_1 |\Omega_0|} \sum_{\lambda=2}^n \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_1(\underline{y}) \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \int_{D_\lambda} \underline{\underline{p}}^{\circ\lambda}(\underline{u}) \zeta^\lambda(\underline{y} + \underline{z} - \underline{u}) d\omega_u d\omega_z d\omega_y = \underline{\underline{E}}^0 \end{aligned} \quad (4.277)$$

et  $\forall \mu \in [2, n], \forall \underline{v} \in D_\mu$ ,

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{v}) + \frac{|D_\mu|}{C_\mu |\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \zeta^\mu(\underline{y}) \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \underline{\underline{p}}^{\circ 1} \kappa_1(\underline{y} + \underline{v} + \underline{z}) d\omega_z d\omega_y \\ & + \frac{|D_\mu|}{C_\mu |\Omega_0|} \sum_{\lambda=2}^n \int_{\Omega(\underline{x})} \zeta^\mu(\underline{y}) \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \int_{D_\lambda} \underline{\underline{p}}^{\circ\lambda}(\underline{u}) \zeta^\lambda(\underline{y} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) d\omega_u d\omega_z d\omega_y = \underline{\underline{E}}^0. \end{aligned} \quad (4.278)$$

Les tenseurs  $\underline{\underline{p}}^{\circ 1}$  et les champs  $\underline{\underline{p}}^{\circ\lambda}$  dans les termes intégraux sont relatifs aux points  $\underline{y} + \underline{z}$  qui sont à distance microscopique du point  $\underline{x}$ . Il sont donc indépendants de ces points et peuvent être assimilés à leur valeur en  $\underline{x}$ . L'ordre des intégrations peut alors être inversé et le système réécrit au moyen d'opérateurs de quatre types différents, donnant respectivement « l'effet » du tenseur  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1}$  sur lui-même, son effet sur les champs  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda}$ , celui de ces derniers sur  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1}$  et enfin l'effet des champs  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda}$  sur les autres champs  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}$ . Plus précisément, pour  $(\lambda, \mu) \in [2, n]^2$  et  $(\underline{u}, \underline{v}) \in D_\lambda \times D_\mu$ , on définit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{11}^0 &= \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_1(\underline{y}) \kappa_1(\underline{y} + \underline{z}) d\omega_y d\omega_z \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \langle \kappa_1(\underline{x}) \kappa_1(\underline{x} + \underline{z}) \rangle_\alpha d\omega_z \end{aligned} \quad (4.279)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{1\lambda}^0(\underline{u}) &= |D_\lambda| \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \kappa_1(\underline{y}) : \zeta^\lambda(\underline{y} + \underline{z} - \underline{u}) d\omega_y d\omega_z \\ &= |D_\lambda| \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \left\langle \kappa_1(\underline{x}) : \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} - \underline{u}) \right\rangle_\alpha d\omega_z\end{aligned}\quad (4.280)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\mu 1}^0(\underline{v}) &= |D_\mu| \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \zeta^\mu(\underline{y}) \kappa_1(\underline{y} + \underline{v} + \underline{z}) d\omega_y d\omega_z \\ &= |D_\mu| \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \kappa_1(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v}) \right\rangle_\alpha d\omega_z\end{aligned}\quad (4.281)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) &= |D_\lambda| |D_\mu| \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega(\underline{x})} \zeta^\mu(\underline{y}) \zeta^\lambda(\underline{y} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) d\omega_y d\omega_z \\ &= |D_\lambda| |D_\mu| \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z}) : \left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) \right\rangle_\alpha d\omega_z.\end{aligned}\quad (4.282)$$

L'hypothèse d'ergodicité a été utilisée pour remplacer les moyennes sur le VER autour de  $\underline{x}$  par l'espérance de la grandeur en question en ce même point. Avec ces définitions, le système caractérisant les polarisations optimales devient :

$$C_1 \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} + \hat{\Gamma}_{11}^0 : [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} + \sum_{\lambda=2}^n \left\langle \hat{\Gamma}_{1\lambda}^0(\cdot) : [\mathbf{C}^\lambda(\cdot) - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda}(\cdot) \right\rangle_{D_\lambda} = C_1 \underline{\underline{E}}^0 \quad (4.283)$$

et  $\forall \mu \in [2, n], \forall \underline{v} \in D_\mu,$

$$C_\mu \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{v}) + \hat{\Gamma}_{\mu 1}^0 : [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} + \sum_{\lambda=2}^n \left\langle \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \cdot) : [\mathbf{C}^\lambda(\cdot) - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda}(\cdot) \right\rangle_{D_\lambda} = C_\mu \underline{\underline{E}}^0 \quad (4.284)$$

Nous admettons encore l'existence et l'unicité de la solution dans le cas général. L'hypothèse d'ergodicité et de stationnarité de la microstructure assure que les opérateurs définis plus haut sont macroscopiques. Il en est donc de même des solutions  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1}$  et  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda}$ , ce qui justifie *a posteriori* le recours aux relations (4.90) et (4.273) dans les calculs antérieurs.

La fonction caractéristique  $\kappa_1$  est liée aux variables aléatoires  $\zeta^\lambda$  caractérisant les positions des motifs par la relation (4.254). Il est possible de reformuler le système en n'invoquant que les secondes, et plus précisément leurs fonctions de corrélation d'ordre deux, qui contiennent l'information d'ordre un et deux sur la distribution spatiale des centres des motifs. La relation (4.254) conduit d'abord à :

$$\left\langle \kappa_1(\underline{x}) \kappa_1(\underline{x} + \underline{z}) \right\rangle_\alpha = 2C_1 - 1 + \sum_{\lambda=2}^n \sum_{\mu=2}^n \int_{D_\lambda} \int_{D_\mu} \left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) \right\rangle_\alpha d\omega_u d\omega_v \quad (4.285)$$

$$\left\langle \kappa_1(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z}) \right\rangle_\alpha = p_\lambda - \sum_{\mu=2}^n \int_{D_\mu} \left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v}) \right\rangle_\alpha d\omega_v \quad (4.286)$$

$$\left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \kappa_1(\underline{x} + \underline{z}) \right\rangle_\alpha = p_\mu - \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_\lambda} \left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} - \underline{u}) \right\rangle_\alpha d\omega_u. \quad (4.287)$$

Ces relations en induisent d'autres sur les opérateurs :

$$\hat{\Gamma}_{11}^0 = (2C_1 - 1) \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 + \sum_{\lambda=2}^n \sum_{\mu=2}^n \frac{1}{|D_\lambda| |D_\mu|} \int_{D_\lambda} \int_{D_\mu} \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) d\omega_u d\omega_v \quad (4.288)$$

$$\hat{\Gamma}_{1\lambda}^0(\underline{u}) = C_\lambda \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \sum_{\mu=2}^n \frac{1}{|D_\mu|} \int_{D_\mu} \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) d\omega_v \quad (4.289)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu 1}^0(\underline{v}) = C_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 - \sum_{\lambda=2}^n \frac{1}{|D_\lambda|} \int_{D_\lambda} \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) d\omega_u. \quad (4.290)$$

L'hypothèse de stationnarité assure l'égalité entre les espérances  $\left\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) \right\rangle_\alpha$  et  $\left\langle \zeta^\lambda(\underline{x}) \zeta^\mu(\underline{x} - \underline{z} - \underline{v} + \underline{u}) \right\rangle_\alpha$ . Un changement de variable  $\underline{z}' = -\underline{z}$  dans la relation (4.282) et une hypothèse de symétrie de  $\Omega_0$  par rapport à l'origine conduisent à la propriété :

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^0(\underline{u}, \underline{v}) = \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}), \quad (4.291)$$

puis à

$$\hat{\Gamma}_{\lambda 1}^0(\underline{u}) = \hat{\Gamma}_{1\lambda}^0(\underline{u}). \quad (4.292)$$

La symétrie des tenseurs de Hashin et Shtrikman, déjà établie dans un cadre général, peut être redémontrée à partir de ces propriétés et les relations ci-dessus entre les opérateurs  $\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0$ ,  $(\lambda, \mu) \in [1, n]^2$ , de la même manière que nous l'avons établie dans le cadre de l'approche classique (paragraphe 4.2.A.b). Nous ne reprenons pas cette démonstration, mais cette question sera à nouveau abordée ultérieurement, lorsque des hypothèses particulières sur la distribution des motifs auront été abordées<sup>12</sup>.

Le système caractérisant les polarisations optimales devient alors :

$$\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} - \frac{1}{C_1} \sum_{\lambda=2}^n \sum_{\mu=2}^n \frac{1}{|D_\lambda| |D_\mu|} \int_{D_\lambda} \int_{D_\mu} [\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) - C_\lambda C_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0] : [\underline{\underline{p}}^{\circ\lambda}(u) - \underline{\underline{p}}^{\circ 1}] d\omega_u d\omega_v = \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle \quad (4.294)$$

et  $\forall \mu \in [2, n], \forall \underline{v} \in D_\mu$ ,

$$\underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{v}) + \frac{1}{C_\mu} \sum_{\lambda=2}^n \frac{1}{|D_\lambda|} \int_{D_\lambda} [\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) - C_\lambda C_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0] : [\underline{\underline{p}}^{\circ\lambda}(u) - \underline{\underline{p}}^{\circ 1}] d\omega_u = \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle \quad (4.295)$$

Rappelons que d'après (4.99) et (4.100), les membres de droite sont égaux à la déformation macroscopique  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  si c'est cette dernière que l'on impose, ou à  $\mathbf{S}^0 : [\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle]$  si l'on impose la contrainte.

Remarquons que la première équation découle des suivantes et du fait que  $\langle \underline{\underline{\eta}} \rangle$  soit égal à la déformation moyenne. Ce système généralise celui obtenu dans l'approche de Willis et Ponte Castañeda, qui traite de motifs homogènes avec des polarisations uniformes : on vérifie facilement qu'en prenant  $\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) = \hat{\Gamma}_{rs}^0$ , donné par (4.209), on se ramène formellement au système (4.240).

La forme (4.255) des fonctions de corrélation d'ordre deux des centres de motifs permet d'exprimer  $\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) - C_\lambda C_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \mu) \in [2, n]^2, \quad \forall (\underline{u}, \underline{v}) \in D_\lambda \times D_\mu, \\ \frac{1}{|D_\lambda| |D_\mu|} [\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^0(\underline{v}, \underline{u}) - C_\lambda C_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0] &= \int_{\Omega(\underline{v}-\underline{u})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z} + \underline{u} - \underline{v}) : [\delta_{\lambda\mu} p_\lambda \delta(\underline{z}) + p_{\mu\lambda}(\underline{z})] d\omega_z - p_\lambda p_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 \\ &= p_\lambda \delta_{\mu\lambda} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{u} - \underline{v}) + \int_{\Omega(\underline{v}-\underline{u})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{z} + \underline{u} - \underline{v}) [p_{\mu\lambda}(\underline{z}) - p_\lambda p_\mu] d\omega_z. \end{aligned}$$

L'opérateur comporte donc deux parties. Le premier est un terme d'« auto-influence », qui rend compte de l'effet de la polarisation au sein d'un motif sur la déformation moyenne aux points homologues de ses représentants dans le VER. Il généralise l'opérateur  $\mathbf{P}_r^1$  que l'on obtient lorsque l'on considère des motifs homogènes soumis à des polarisations également homogènes. Il n'est pas à proprement parler « local », puisqu'il transforme un champ sur un domaine  $D_\mu$  en un autre champ sur ce domaine, mais sa portée ne va pas au delà de la taille du motif en question. Le second terme rend compte des interactions moyennes entre représentants de motifs distincts ; il s'agit d'un terme « à distance », mais sa portée est limitée par la distance de décorrélation de la fonction de corrélation d'ordre deux des centres de motifs. L'hypothèse d'absence d'ordre à grande distance assure en effet que  $p_{\lambda\mu}(\underline{z})$  tend  $p_\lambda p_\mu$  lorsque  $\underline{z}$  devient grand. Seules les interactions à courte portée sont donc importantes dans la détermination des polarisations optimales. Notons que l'intégration relative à  $p_{\mu\lambda}$  ne porte en fait que sur  $\Omega(\underline{v}-\underline{u}) \setminus D_{\mu\lambda}$  puisque l'hypothèse de non recouvrement des représentants des motifs assure que  $p_{\mu\lambda}$  est nul sur  $D_{\mu\lambda}$ .

La détermination quantitative de ces termes d'interaction à distance pour une microstructure quelconque, par exemple à partir de micrographies, nécessiterait des intégrations encore plus fastidieuses que dans l'approche classique puisqu'il s'agit de déterminer des champs de tenseurs sur  $D_\mu \times D_\lambda$

<sup>12</sup>Notons d'ores et déjà que les fonctions  $p_{\mu\lambda}(\underline{z})$  considérées par la suite seront paires. Dans ce cas, on a  $\langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) \rangle_\alpha = \langle \zeta^\mu(\underline{x}) \zeta^\lambda(\underline{x} - \underline{z} - \underline{v} + \underline{u}) \rangle_\alpha = \langle \zeta^\lambda(\underline{x}) \zeta^\mu(\underline{x} + \underline{z} + \underline{v} - \underline{u}) \rangle_\alpha$ , du fait de la stationnarité. Ceci conduit d'après (4.282) à

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^0(\underline{u}, \underline{v}) = \hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^0(-\underline{u}, -\underline{v}) = \hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^0(\underline{v}, \underline{u}). \quad (4.293)$$

Si de plus les domaines  $D_\lambda$  sont symétriques par rapport à l'origine, alors ceci établit aussi à la parité des fonctions  $\hat{\Gamma}_{\lambda 1}^0$  et  $\hat{\Gamma}_{1\lambda}^0$ .

et non seulement des tenseurs. La résolution explicite du problème d'optimisation des polarisations n'est donc guère envisageable sans hypothèse complémentaire. La suite de ce paragraphe est consacrée aux diverses situations particulières permettant de simplifier le problème, et plus précisément, d'annuler le terme d'interaction à distance. Comme dans l'approche classique, elles correspondent à des propriétés de la distribution spatiale des « phases morphologiques », c'est-à-dire des positions relatives des motifs, c'est-à-dire encore des fonctions  $p_{\lambda\mu}$ . On s'intéresse dans ce qui suit aux distributions isotropes, « ellipsoïdales simples » et « ellipsoïdales généralisées », dont les définitions sont adaptées de celles de leurs homonymes déjà introduites plus haut.

Ces situations peuvent par ailleurs toutes être traitées selon une quadruple optique. La première est analogue à celle de Willis et Ponte Castañeda et consiste à prendre la matrice 1 comme milieu de référence. Dans ce cas, on a  $\underline{\underline{p}}^{\circ 1} = 0$  et le système se simplifie considérablement. Si le tenseur des modules de la matrice majore ou minore ceux des autres constituants, on obtient bien une borne de type Hashin et Shtrikman. Dans le cas contraire, on construit une estimation de type Mori et Tanaka généralisée (et corrigée...) découlant de la description par MMR adoptée. Les hypothèses sur la distribution des motifs induisent des relations entre la fraction volumique  $C_1$  de matrice et les géométries externes des motifs, c'est-à-dire les domaines  $D_\lambda$  : comme dans l'approche de Willis et Ponte Castañeda,  $C_1$  doit être supérieur à une certaine valeur minimale.

Le second point de vue est celui où la concentration en matrice est nulle. C'est celui adopté dans la référence [28]. Les équations déterminant les polarisations optimales sont facilement déduites de celles du cas général en prenant  $C_1 = 0$ ,  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} = 0$  et  $\underline{\underline{p}}^{\circ 1} = 0$ . On vérifie facilement que l'on se ramène en fait au cas précédent en remplaçant simplement  $\mathbf{C}^1$  par un milieu de référence arbitraire  $\mathbf{C}^0$  et en imposant  $C_1 = 0$ . Les relations entre géométrie des motifs et fraction volumique de matrice sont toujours valables. Mais cette dernière étant nulle, les hypothèses sur la distribution des motifs se traduisent dans ce cas directement sur la géométrie des domaines  $D_\lambda$ . Les cas traités correspondent en fait à des « Assemblages de Hashin généralisés », construits à partir de motifs de géométrie extérieure ellipsoïdale, directement en rapport avec la « géométrie » de la distribution. Le choix du milieu de référence étant arbitraire les bornes supérieures et inférieures de type Hashin et Shtrikman peuvent être construites.

La troisième situation est celle d'un matériau dont la fraction volumique de matrice n'est pas nulle, mais dont la géométrie externe des motifs est identique à celle dont il a été question au paragraphe précédent. Il est alors possible de choisir un milieu de référence distinct de la matrice, sans pour autant rendre le système exagérément plus compliqué.

Enfin le dernier cas est le cas général d'un milieu de référence distinct de la matrice, de fraction volumique non nulle, et de motifs dont la géométrie extérieure est quelconque. Il ne conduit pas à des résultats explicites aussi facilement que les précédents (sans pour autant conduire à des situations totalement inextricables). Nous ne le traiterons donc pas de manière exhaustive et le confions à des développements ultérieurs de la présente démarche.

### 4.3.C.c Distribution ellipsoïdale simple

Une situation de distribution ellipsoïdale simple des positions des motifs est telle que la fonction  $p_{\lambda\mu}$  soit de la forme :

$$\forall (\lambda, \mu) \in [2, n]^2, \quad \forall \underline{z} \in \Omega_0, \quad p_{\lambda\mu}(\underline{z}) = \Pi_{\lambda\mu} \left( \left\| \underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{z} \right\| \right), \quad (4.296)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est un tenseur symétrique d'ordre deux non singulier, normé selon une certaine norme, qui permet de définir comme précédemment une famille d'ellipsoïdes  $\mathcal{E}_\delta$  homothétiques<sup>13</sup> et centrés par rapport à l'origine. Cette hypothèse induit en particulier que  $p_{\lambda\mu}$  est paire et par suite que  $p_{\lambda\mu} = p_{\mu\lambda}$ . Le cas  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$  correspond à une distribution isotrope, telle que la probabilité de trouver un motif  $\lambda$  à une certaine distance d'un motif  $\mu$  ne dépende pas de la direction. Il est immédiat qu'une distribution

<sup>13</sup>Nous remplaçons l'indice  $\lambda$  utilisé jusqu'à présent pour caractériser la taille des ellipsoïdes par l'indice  $\delta$  afin d'éviter toute confusion avec l'indice  $\lambda$  qui réfère aux motifs  $\lambda$ .

ellipsoïdale simple peut être construite à partir d'une distribution isotrope par une transformation ellipsoïdale  $\mathcal{T}$  appropriée.

Avec cette hypothèse, le terme intégral rendant compte des interactions à distance s'annule. En effet, comme on l'a vu plus haut  $p_{\mu\lambda}$  est nul sur  $D_{\mu\lambda}$ . Si les motifs sont connexes et contiennent l'origine, il en est de même de  $D_{\mu\lambda}$  ; la fonction  $p_{\mu\lambda}$  est alors aussi nulle sur le plus petit ellipsoïde  $\mathcal{E}_d$  centré à l'origine et incluant  $D_{\mu\lambda}$ . Soit par ailleurs  $\mathcal{E}_D$  le plus grand ellipsoïde de la famille inclus dans  $\Omega(\underline{v} - \underline{u})$ . L'hypothèse d'absence d'ordre à grande distance assure que  $p_{\lambda\mu}$  vaut  $p_{\lambda p_\mu}$  en dehors de  $\mathcal{E}_D$ . Enfin, l'intégration sur  $\mathcal{E}_D \setminus \mathcal{E}_d$  peut être décomposée en couronnes homothétiques, sur lesquelles  $p_{\lambda\mu}$  est uniforme, et dont la contribution est nulle, en vertu des propriétés de  $\mathbf{\Gamma}^0$  établies en annexe **B** et de l'appartenance du point  $\underline{v} - \underline{u}$  au domaine  $D_{\mu\lambda}$ . L'opérateur  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{\mu\lambda}^0$  est donc donné par :

$$\forall(\lambda, \mu) \in [2, n]^2, \quad \forall(\underline{u}, \underline{v}) \in D_\mu \times D_\lambda, \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\mu\lambda}^0(\underline{u}, \underline{v}) - C_\lambda C_\mu \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 = C_\lambda |D_\lambda| \delta_{\mu\lambda} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{u} - \underline{v}) - C_\lambda C_\mu \mathcal{P}_d^0, \quad (4.297)$$

où  $\mathcal{P}_d^0 = \mathcal{P}_{\mathcal{E}_d}^0$  est l'opérateur caractérisant la distribution, déjà introduit plus haut et qui permet aussi de définir  $\mathcal{Q}_d^0 = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathcal{P}_d^0] : \mathbf{C}^0$ . Cette écriture remet clairement en évidence les symétries de l'opérateur  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{\mu\lambda}^0 : \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\mu\lambda}^0(\underline{u}, \underline{v}) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\lambda\mu}^0(\underline{u}, \underline{v}) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\lambda\mu}^0(\underline{v}, \underline{u})$ . Notons que, comme dans l'approche de Willis et Ponte Castañeda, l'analyse peut être entreprise même si les motifs ne sont pas connexes ou ne contiennent pas l'origine ; dans ce cas il faut en revanche *supposer* que  $p_{\mu\lambda}$  est nul sur un ellipsoïde de la famille  $\mathcal{E}_\delta$  contenant  $D_{\mu\lambda}$ .

L'hypothèse de distribution ellipsoïdale simplifie le système (4.295) selon :

$$\forall \mu \in [2, n], \forall \underline{v} \in D_\mu, \\ \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{v}) + \int_{D_\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{v} - \underline{u}) : [\mathbf{C}^\mu(\underline{u}) - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{u}) d\omega_u = \underline{\underline{E}}^0 + [\mathcal{P}_d^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0] : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle \\ + \left[ \int_{D_\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{v} - \underline{u}) d\omega_u - \mathcal{P}_d^0 \right] : \underline{\underline{p}}^{\circ 1} \quad (4.298)$$

$$\text{et} \quad \langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle = \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle. \quad (4.299)$$

Le couplage du système entre les champs relatifs aux divers motifs a disparu. Seul subsiste celui entre le champ dans le motif considéré, le champ dans la matrice et le champ moyen, mais il disparaît également dans les trois cas particuliers annoncés plus haut.

Lorsque l'on choisit la matrice 1 comme milieu de référence,  $\underline{\underline{p}}^{\circ 1}$  est identiquement nul. L'équation (4.298) se réduit à sa première ligne, qui est formellement identique à celle obtenue lorsque l'on s'intéresse à un problème d'inclusion hétérogène en milieu infini :  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}$  s'identifie au champ de déformation qui apparaît dans le motif  $\mu$  lorsqu'il est noyé dans un milieu infini ayant les modules élastiques de la matrice et soumis à l'infini au champ homogène  $\underline{\underline{E}}^0 + [\mathcal{P}_d^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0] : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle$ . Lorsque l'on choisit le VER  $\Omega_0$  parmi la famille d'ellipsoïdes  $\mathcal{E}_\delta$ , ce champ s'identifie à  $\underline{\underline{E}}^0$ . Ce choix n'est pas indispensable, mais nous l'adoptons car il simplifie les écritures. Si l'on sait résoudre ces problèmes d'inclusions hétérogènes auxiliaires pour tous les motifs  $\mu \in [2, n]$ , l'on a accès à des tenseurs  $\mathbf{U}_\mu^1$  et  $\mathbf{V}_\mu^1$  donnant les déformations et contraintes moyennes dans les motifs en fonction de la sollicitation à l'infini :

$$\langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} = \mathbf{U}_\mu^1 : \underline{\underline{E}}^0 \quad (4.300)$$

$$\langle \mathbf{C}^\mu : \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} = \mathbf{V}_\mu^1 : \underline{\underline{E}}^0, \quad (4.301)$$

ainsi qu'aux tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^1 = \mathbf{V}_\mu^1 - \mathbf{C}^1 : \mathbf{U}_\mu^1$ , dont on vérifiera la symétrie ultérieurement, qui donnent la polarisation moyenne dans les motifs :

$$\langle \underline{\underline{p}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} = \mathbf{T}_\mu^1 : \underline{\underline{E}}^0, \quad (4.302)$$

ou encore :

$$\langle \underline{\underline{e}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} = \mathbf{S}^1 : \mathbf{T}_\mu^1 : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{e}}^0. \quad (4.303)$$



On définit par ailleurs  $\mathbf{T}_1^1 = 0$ , de façon à étendre ces relations à la matrice 1.

La suite du traitement est formellement identique à celui mis en œuvre dans le cadre de l'approche de Willis et Ponte Castañeda (paragraphe 4.2.C.c) et conduit à l'estimation de Mori et Tanaka généralisée relative à un milieu hétérogène décrit par MMR :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}} &= \mathbf{C}^1 + [\mathcal{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu \right]^{-1} : \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu \\ &= \mathbf{C}^1 - [\mathcal{P}_d^1]^{-1} + [\mathcal{P}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_d^1]^{-1} - \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu \right]^{-1} : [\mathcal{P}_d^1]^{-1} \end{aligned} \quad (4.304)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{MT}} &= \mathbf{S}^1 - [\mathcal{Q}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathcal{Q}_d^1]^{-1} + \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu : \mathbf{S}^1 \right]^{-1} : \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu : \mathbf{S}^1 \\ &= \mathbf{S}^1 - [\mathcal{Q}_d^1]^{-1} + [\mathcal{Q}_d^1]^{-1} : \left[ [\mathcal{Q}_d^1]^{-1} + \mathbf{S}^1 : \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu : \mathbf{S}^1 \right]^{-1} : [\mathcal{Q}_d^1]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.305)$$

Les moyennes  $\langle (\cdot) \rangle_\mu$  désignent la sommation  $\sum_{\mu=1}^n C_\mu(\cdot)$ , qui se limite à  $\sum_{\mu=2}^n C_\mu(\cdot)$  dans le cas présent. Cette estimation est la borne rigoureuse  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^1} = [\mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^1}]^{-1}$  si la matrice est plus « raide » ou plus « souple » que les autres constituants du matériau. La symétrie des tenseurs résulte de celle des tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^1$  qui sera vérifiée ultérieurement.

Le bien fondé de ces relations exige toutefois la satisfaction de l'encadrement :

$$[\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1]^{-1} < \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu < [\mathcal{P}_d^1]^{-1}, \quad (4.306)$$

qui apparaît à nouveau comme une contrainte entre les fractions volumiques et l'hypothèse de distribution spatiale. Nous y reviendrons. Dans l'hypothèse où cet encadrement est vérifié, les démonstrations de nature purement algébrique déjà décrites dans le cadre de l'approche de Willis et Ponte Castañeda montrent que les tenseurs  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}}$  et  $\mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{MT}}$ , respectivement obtenus en imposant la déformation macroscopique et en imposant la contrainte macroscopique, sont bien inverses l'un de l'autre et définis positifs.

Lorsque le tenseur  $\sum_{\mu=2}^n C_\mu \mathbf{T}_\mu^1$  n'est pas singulier, on peut préférer les écritures :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}} = \mathbf{C}^1 + \left[ \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu^{-1} - \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} \quad (4.307)$$

et

$$\mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{MT}} = \mathbf{S}^1 - \left[ \mathbf{C}^1 : \langle \mathbf{T}_\mu^1 \rangle_\mu^{-1} : \mathbf{C}^1 + \mathcal{Q}_d^1 \right]^{-1}. \quad (4.308)$$

L'identité formelle du résultat avec celui obtenu par l'approche de Willis et Ponte Castañeda qui aborde le cas particulier des motifs homogènes est ainsi évidente. Seule l'expression des tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^1$  est différente, mais on vérifie facilement qu'il y a identité lorsque les motifs sont homogènes et de forme ellipsoïdale. On pourra aussi noter l'identité formelle avec les résultats issus des « théories de champ effectif » (développées au second ordre) (cf. paragraphe 1.2.C.d et en particulier la relation (1.143)). La différence d'avec ces dernières réside dans la rigueur des développements présents, qui met en évidence le statut exact de borne du résultat et s'oppose aux approximations faites par ces approches concurrentes. Nous précisons ces comparaisons ultérieurement.

Lorsque la concentration en matrice est nulle,  $\underline{\underline{p}}^{\circ 1}$  est également identiquement nul. Le choix du milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  est en revanche libre. La même démarche que ci-dessus permet de construire des bornes rigoureuses, supérieures ou inférieures suivant le choix de  $\mathbf{C}^0$  conforme aux règles (4.27), données par exemple par :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0} = \mathbf{C}^0 + \left[ \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu^{-1} - \mathcal{P}_d^0 \right]^{-1}. \quad (4.309)$$

Dans l'hypothèse où l'encadrement

$$[\mathcal{P}_d^0 - \mathcal{S}^0]^{-1} < \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu < [\mathcal{P}_d^0]^{-1}, \quad (4.310)$$

est vérifié, elles satisfont les mêmes propriétés de symétrie, de définie positivité et d'équivalence des approches en contrainte et déformation imposée que l'estimation de type Mori et Tanaka généralisée. Rappelons que dans cette situation  $\sum_{\mu=2}^n C_\mu = 1$ . Ces bornes admettent une expression alternative, qui découle de celles des moyennes des contraintes et des déformations d'essai :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0} = \langle \mathbf{V}_\mu^0 \rangle_\mu : \langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu^{-1}. \quad (4.311)$$

Dans cette relation, la dépendance du résultat vis-à-vis des paramètres de distribution spatiale des motifs semble avoir disparue. En fait, il n'en est rien : les hypothèses de distribution imposent une géométrie des motifs particulière qui rend compte de manière univoque de la façon dont les motifs sont disposés dans le matériau. Cet aspect sera discuté au paragraphe suivant. Notons aussi que l'expression précédente n'est pertinente que lorsque  $\langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu$  est bien inversible, c'est-à-dire encore lorsque l'application  $\underline{\underline{E}}^0 \rightarrow \langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle$  est bien bijective. Nous montrerons que la forme particulière des motifs évoquée ci-dessus garantira ces propriétés et assurera que l'encadrement (4.310) sera toujours vérifiée.

La troisième situation intéressante est celle où tous les motifs sont de géométrie extérieure identique à celle donnée par leur distribution relative, c'est-à-dire quand tous les domaines  $D_\mu$  font partie de la famille  $\mathcal{E}_\delta$ , à une translation près. L'intégrale  $\int_{D_\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{u}}) d\omega_u$  est alors égale à  $\mathcal{P}_d^0$  et le dernier terme de l'équation (4.298) disparaît, indépendamment du choix du milieu de référence. Le calcul de la borne peut être entrepris comme dans le cas où  $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}^1$  mais il faut veiller à la contribution de la polarisation non nulle de la matrice dans le calcul de la polarisation moyenne. On a toujours, pour les motifs  $\mu \in [2, n]$  :

$$\langle \underline{\underline{p}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} = \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0. \quad (4.312)$$

Pour calculer la polarisation dans la matrice, il faut utiliser la relation  $\langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  ou  $\langle \underline{\underline{\sigma}}^\circ \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  et les relations entre  $\underline{\underline{E}}^0$  et le chargement macroscopique imposé, qui permettent de fermer le système. Mais une utilisation directe de ces relations conduit à des expressions difficilement exploitables en pratique. L'identité de la géométrie externe de tous les motifs et leur nature ellipsoïdale permettent toutefois de considérablement simplifier les équations. En moyennant l'équation (4.298) sur le domaine  $D_\mu$  et en inversant le sens de l'intégration, on obtient en effet, grâce aux propriétés de l'opérateur de Green modifié :

$$\langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} + \mathcal{P}_d^0 : \langle \underline{\underline{p}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} = \underline{\underline{E}}^0, \quad (4.313)$$

ce qui, après sommation pondérée par les fractions volumiques des motifs et mise en facteur du tenseur  $\mathcal{P}_d^0$ , conduit à :

$$\langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle - C_1 \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} + \mathcal{P}_d^0 : [\langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle - C_1 \underline{\underline{p}}^{\circ 1}] = (1 - C_1) \underline{\underline{E}}^0, \quad (4.314)$$

et donc, compte-tenu de la relation (4.299) entre  $\underline{\underline{E}}^0$  et  $\langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle$  :

$$\underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} + \mathcal{P}_d^0 : [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} = \underline{\underline{E}}^0. \quad (4.315)$$

La déformation et la contrainte d'essai optimales dans la matrice sont donc égales à celles qui apparaissent dans une inclusion homogène ayant les propriétés mécaniques de la matrice 1 et de géométrie ellipsoïdale identique à la forme externe des autres motifs, lorsqu'elle est noyée dans un milieu infini ayant les modules d'élasticité du milieu de référence, soumis à l'infini au champ homogène  $\underline{\underline{E}}^0$ . Cette situation est donc formellement *exactement équivalente* à la précédente à condition d'ajouter un motif homogène, de forme  $\mathcal{E}_1$ , constitué de matrice et auquel on affecte la fraction volumique de cette dernière ; l'hypothèse de distribution ellipsoïdale de ce motif vis-à-vis des autres n'est en revanche pas indispensable.

Enfin, le dernier cas concerne toutes les autres situations où aucune des hypothèses complémentaires traitées ci-avant ne s'applique. Sans développer en détail les calculs relatifs à ce cas, on peut malgré tout remarquer que l'équation (4.298) peut encore s'interpréter comme celle d'un problème d'inclusion en milieu infini  $C^0$ . Si les domaines  $D_\mu$  sont des ellipsoïdes, mais de formes éventuellement différentes, le membre de droite est encore une constante. L'interprétation de l'équation est la même que plus haut, à l'exception du fait que la déformation appliquée à l'infini n'est pas la même pour tous les motifs et plus précisément dépend de leur forme. Le couplage du système est alors plus complexe mais, une fois les problèmes d'inclusions résolus et les tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$  calculés, la résolution finale se ramène à un système linéaire classique. Une expression littérale de la borne peut en être déduite mais elle n'a pas la concision de celles données plus haut. Lorsque la géométrie des motifs n'est pas ellipsoïdale, le membre de droite est un champ hétérogène. Si l'on ramène le dernier terme dans le membre de gauche, l'équation s'interprète comme un *problème d'inclusion hétérogène avec une contrainte interne homogène*. Résoudre le système requiert alors de connaître la contrainte moyenne et la déformation moyenne dans les motifs non seulement pour tout chargement  $\underline{E}^0$  à l'infini, mais aussi pour toute contrainte interne  $\underline{p}^{\circ 1}$  : il ne s'agit plus de calculer simplement des tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$  mais il faut aussi déterminer des quantités plus générales, donnant la polarisation moyenne dans le motif  $\mu$  comme une expression linéaire de la forme  $\mathcal{T}_\mu^0(\underline{E}^0, \underline{p}^{\circ 1})$ . La résolution du système global n'est ensuite plus qu'un problème d'inversion matricielle classique. Nous ne développons pas plus longuement cette démarche.

#### 4.3.C.d Assemblage de Hashin généralisé

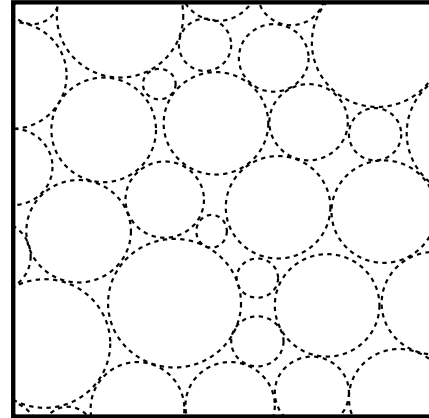
Ce paragraphe concerne la situation où la fraction volumique de matrice est nulle.

Considérons, pour chaque motif  $\mu$ , le plus petit ellipsoïde  $\mathcal{E}_{l_\mu}$  de la famille  $\mathcal{E}_\delta$ , centré à l'origine et contenant  $D_\mu$ . S'il existe pour chaque autre motif  $\lambda$ , un point de contact entre cet ellipsoïde et le domaine  $D_\mu$ , qui soit aussi un point de contact entre ce dernier et un domaine  $D_\lambda(\underline{x})$ , alors le raisonnement déjà mis en œuvre pour des inclusions homogènes (paragraphe 4.2.C.e), permet d'établir que le domaine occupé par l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{l_\mu}$  est « réservé » au motif  $\mu$ , c'est-à-dire qu'aucun représentant d'un autre motif ne peut l'empiéter. En l'absence de matrice, ceci montre que les domaines  $D_\mu$  et  $\mathcal{E}_{l_\mu}$  sont confondus : *les supports  $D_\mu$  des motifs sont des ellipsoïdes centrés à l'origine, de mêmes rapports de forme et orientation, associés aux propriétés de la distribution ellipsoïdale des positions des motifs dans le matériau.*

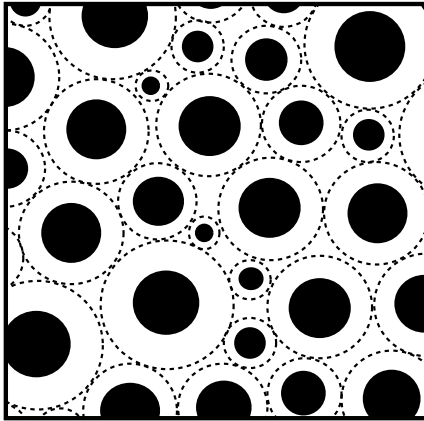
Cette condition nécessaire n'est pas encore suffisante pour assurer un pavage complet du domaine occupé par le matériau hétérogène. Un tel empilement utilisant des ellipsoïdes de taille finie ferait nécessairement apparaître des zones non couvertes par les motifs. Il faut donc faire appel à une construction d'inspiration fractale, permettant de couvrir tout l'espace avec des motifs de taille de plus en plus petite, en nombre  $n$  nécessairement infini (dénombrable ou non). On définit ainsi la notion d'« Assemblage de Hashin généralisé », qui étend celle d'Assemblage de Sphères Composites.

À chaque Assemblage de Sphères Composites (*cf.* figure 4.8) est associé un ensemble de supports sphériques de motifs, de diverses tailles et une distribution spatiale des centres de ces derniers. Cette géométrie n'est *a priori* pas incompatible avec une hypothèse de distribution isotrope des centres. Lorsque le « contenu » de ces motifs est une sphère composite, on obtient bien l'Assemblage des Sphères Composites introduite par Hashin, pour lequel de nouvelles bornes ont été proposées récemment [74], dans le cas d'une distribution isotrope des centres. Rien n'interdit toutefois d'adopter une autre « description interne » des motifs, qui conduit à la définition d'une nouvelle microstructure. Enfin, si l'on applique une transformation ellipsoïdale  $\mathcal{T} : \underline{x} \rightarrow \underline{A}\underline{x}$  à l'assemblage, on construit une distribution respectant la symétrie ellipsoïdale correspondante (*cf.* figure 4.9). Le contenu des motifs ellipsoïdaux obtenus est là encore arbitraire, ce qui permet de construire une vaste classe de microstructures fondées sur une même statistique de distribution des centres de motifs.

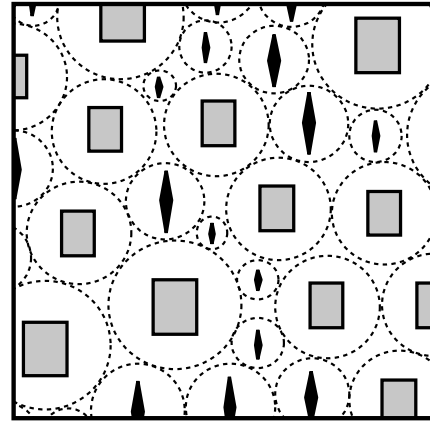
La justification de la forme ellipsoïdale des motifs donnée plus haut ne s'applique qu'à une situation particulière. La démonstration totalement rigoureuse de cette propriété dans le cas général reste une question ouverte, mais nous donnons quelques éléments de réponse dans ce qui suit. Notons



(a)



(b)



(c)

Figure 4.8 : Assemblage de Hashin généralisé utilisant des sphères ; (a) assemblage, (b) Assemblage des Sphères Composites de Hashin associé, (c) autre microstructure fondée sur le même assemblage, mais avec une autre description interne des motifs.

d'abord que, de manière parfaitement analogue à ce qui a déjà été fait dans le cadre de l'approche de Willis et Ponte Castañeda, l'on peut définir pour chaque motif  $\mu$  un domaine  $V_\mu$ , tel que si un représentant du motif  $\mu$  se trouve en  $\underline{x}$ , alors  $V_\mu(\underline{x}) \setminus D_\mu(\underline{x})$  n'est constitué que de matrice 1. Rappelons que  $V_\mu$  est l'intersection des ensembles  $\mathcal{E}_d^{\lambda\mu} \ominus D_\lambda$ , pour tout  $\lambda \in [2, n]$ ,  $\mathcal{E}_d^{\lambda\mu}$  étant le plus petit ellipsoïde de la famille  $\mathcal{E}_\delta$  contenant  $D_{\mu\lambda}$ . L'absence de matrice impose que  $V_\mu$  et  $D_\mu$  soient confondus pour tout  $\mu$ . Une première conséquence est la convexité de  $D_\mu$  qui découle de celle de  $V_\mu$ .

Considérons par ailleurs un point  $\underline{x} + \underline{u}$ ,  $\underline{u} \in D_\mu$ , de la frontière d'un représentant du motif  $\mu$  placé en  $\underline{x}$ . Comme  $D_\mu(\underline{x}) = V_\mu(\underline{x})$ , il existe au moins<sup>14</sup> un motif  $\lambda$  dont un représentant  $D_\lambda(\underline{y})$  placé en  $\underline{y} \in \mathcal{E}_d^{\mu\lambda}(\underline{x})$  touche  $D_\mu(\underline{x})$  en  $\underline{x} + \underline{u} = \underline{y} + \underline{v}$ ,  $\underline{v} \in D_\lambda$  ;  $D_\mu$  est alors nécessairement inclus dans  $\mathcal{E}_d^{\mu\lambda}(\underline{x} + \underline{v})$ , qui passe par  $\underline{x} + \underline{u}$ . En conséquence,  $D_\mu(\underline{x})$  est strictement convexe en  $\underline{u}$  : les points de tout segment  $]\underline{w}, \underline{u}[$  avec  $\underline{w} \in D_\mu$  ne peuvent être sur la frontière de  $D_\mu$ . Le point  $\underline{u}$  étant arbitraire,  $D_\mu$  est strictement convexe, c'est-à-dire que sa frontière ne peut pas contenir de segment de droite.

<sup>14</sup>Cette affirmation est claire s'il y a un nombre fini de motifs, mais son adaptation aux cas où  $V_\mu$  est une intersection infinie de convexes nécessiterait des développements plus précis.

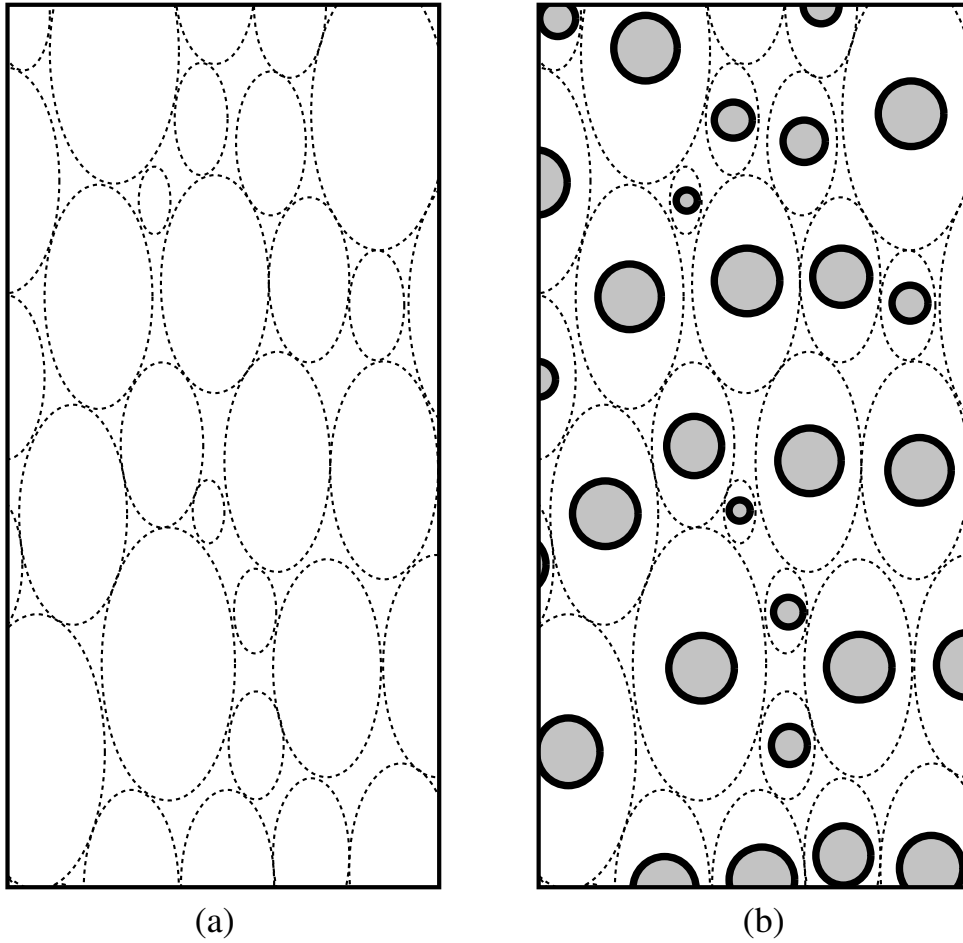


Figure 4.9 : Assemblage de Hashin généralisé utilisant des ellipsoïdes, déduit de celui de la figure 4.8 (a) par une transformation ellipsoïdale  $T$  ; (a) assemblage, (b) exemple de microstructure obtenue.

Deux représentants de motifs  $D_\mu(\underline{x})$  et  $D_\lambda(\underline{y})$  ne peuvent donc être en contact qu'en un point isolé. Le domaine au voisinage de ce point qu'ils n'occupent pas est délimité par des frontières concaves. On conçoit facilement que pour remplir cet espace avec d'autres motifs convexes, il faut encore faire appel à une construction de nature fractale. Plus précisément, pour tout  $\epsilon > 0$ , pour tout motif  $D_\mu$ , de taille caractéristique  $d_\mu$  (donnée par exemple par son diamètre maximal) et pour tout point  $\underline{u}$  de sa frontière, il existe au moins un autre motif  $D_{\mu^\epsilon}$ , de taille  $d_{\mu^\epsilon}$  inférieure à  $\epsilon d_\mu$ , pouvant toucher  $D_\mu$  en ce point.

Pour poursuivre la démonstration, nous allons supposer que l'intersection de tous les domaines  $D_\lambda$ ,  $\lambda \in [2, n]$ , est non vide. Moyennant une translation de l'origine du système de coordonnées qui ne modifie rien à la généralité du propos, on peut de plus supposer que l'origine appartient à cette intersection et appartient donc en particulier à  $D_{\mu^\epsilon}$ . Le même raisonnement que plus haut établit alors que  $D_\mu$  est inclus dans un ellipsoïde de la famille  $\mathcal{E}_\delta$  centré en un point distant de moins de  $\epsilon d_\mu$  de l'origine et dont la frontière passe par  $\underline{u}$ . Comme  $\epsilon$  est arbitrairement petit, on en déduit que  $D_\mu$  est inclus dans l'ellipsoïde de la famille  $\mathcal{E}_\delta$  centré à l'origine et dont la frontière passe par  $\underline{u}$ , ceci pour tout  $\underline{u}$  appartenant à la frontière de  $D_\mu$ . Ceci n'est possible que si  $D_\mu$  est lui-même un ellipsoïde de la famille  $\mathcal{E}_\delta$ , centré à l'origine.

Les résultats ci-dessus relatifs au second point de vue sont donc pertinents pour un matériau

décrit sous la forme d'un Assemblage de Hashin généralisé, dont les supports des motifs hétérogènes sont des ellipsoïdes de rapports de forme et d'orientation tous identiques et liés aux propriétés de leur distribution statistique.

#### 4.3.C.e Distribution ellipsoïdale généralisée

Il est facile de définir une situation de distribution ellipsoïdale généralisée de motifs qui étend celles introduites dans les approches classiques. Elle est telle que la fonction  $p_{\lambda\mu}$  soit de la forme :

$$\forall(\lambda, \mu) \in [2, n]^2, \quad \forall \underline{z} \in \Omega_0, \quad p_{\lambda\mu}(\underline{z}) = \Pi_{\lambda\mu} \left( \left\| \underline{\underline{A}}_{\lambda\mu}^{-1} : \underline{z} \right\| \right), \quad (4.316)$$

où  $\underline{\underline{A}}_{\lambda\mu}$  est un tenseur analogue à ceux introduits plus hauts et qui permet encore de définir une famille d'ellipsoïdes  $\mathcal{E}_\delta^{\lambda\mu}$  et des tenseurs  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{\lambda\mu}}^0$ . Cette hypothèse assure aussi que les  $p_{\lambda\mu}$  sont des fonctions paires. Du fait de la stationnarité de la microstructure, elles satisfont de plus  $p_{\lambda\mu}(\underline{z}) = p_{\mu\lambda}(-\underline{z})$ . Les tenseurs  $\underline{\underline{A}}_{\lambda\mu}$  et les fonctions  $\Pi_{\lambda\mu}$  sont donc nécessairement symétriques vis-à-vis des indices  $(\lambda, \mu)$ .

Dans l'hypothèse où les motifs sont connexes et contiennent l'origine, ou, si tel n'était pas le cas, dans l'hypothèse où  $p_{\lambda\mu}$  est nul sur un ellipsoïde de la famille  $\mathcal{E}_\delta^{\lambda\mu}$  contenant  $D_{\lambda\mu}$ , le calcul de l'opérateur  $\hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^0$  peut être entrepris selon une procédure que nous ne développons plus et conduit à :

$$\begin{aligned} \forall(\lambda, \mu) \in [2, n]^2, \quad \forall(\underline{u}, \underline{v}) \in D_\mu \times D_\lambda, \\ \hat{\Gamma}_{\lambda\mu}^0(\underline{u}, \underline{v}) - C_\mu C_\lambda \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 = C_\lambda |D_\lambda| \delta_{\lambda\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{u} - \underline{v}) - C_\mu C_\lambda \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{\lambda\mu}}^0. \end{aligned} \quad (4.317)$$

Le système (4.295) devient alors :

$$\begin{aligned} \forall \mu \in [2, n], \quad \forall \underline{v} \in D_\mu, \\ \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{v}) + \int_{D_\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{v} - \underline{u}) : \left[ [C^\mu(\underline{u}) - C^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}(\underline{u}) - [C^1 - C^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} \right] d\omega_u \\ = \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle + \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{\lambda\mu}}^0 : \left[ \langle [C^\lambda - C^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ\lambda} \rangle_{D_\lambda} - [C^1 - C^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1} \right] \quad (4.318) \\ \text{et} \quad \langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle = \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle. \end{aligned}$$

Il généralise celui obtenu avec des inclusions homogènes (4.240). Les champs locaux  $\underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu}$  solutions s'identifient encore à ceux qui apparaissent dans les motifs lorsqu'ils sont noyés dans un milieu infini de module  $C^0$  et soumis à un chargement homogène à l'infini et à une polarisation homogène dans l'inclusion. Mais comme dans le cas de la distribution ellipsoïdale généralisée des phases abordé dans le cadre de l'approche classique et contrairement au cas de la distribution ellipsoïdale simple, le champ à l'infini n'est pas le même pour tous ces problèmes.

Il est formellement possible de résoudre ce système si l'on connaît la solution de tous ces problèmes pour un chargement à l'infini  $\underline{\underline{E}}^\infty$  et une polarisation  $\underline{\underline{p}}$  quelconques, sous la forme de relations linéaires donnant la contrainte moyenne et la déformation moyenne dans les motifs :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{D_\lambda} &= \mathbf{u}_\lambda^0(\underline{\underline{E}}^\infty, \underline{\underline{p}}) \\ \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{D_\lambda} &= \mathbf{v}_\lambda^0(\underline{\underline{E}}^\infty, \underline{\underline{p}}), \end{aligned}$$

ce qui conduit également l'opérateur  $\mathcal{T}_\lambda^0$  qui donne la polarisation moyenne :

$$\mathcal{T}_\lambda^0 = \mathbf{v}_\lambda^0 - C^0 : \mathbf{u}_\lambda^0.$$

Le problème se résume alors à un système linéaire classique, dont les inconnues sont les contraintes et déformations moyennes dans les motifs et dans la matrice, à résoudre pour tout  $\underline{\underline{E}}^0$  avec des moyens

appropriés :

$$\begin{aligned}
\forall \mu \in [2, n] \quad \langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} &= \mathbf{U}_\lambda^0(\underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle + \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{\lambda\mu}}^0 : [\langle \underline{\underline{p}}^{\circ\lambda} \rangle_{D_\lambda} - \underline{\underline{p}}^{\circ 1}], -\underline{\underline{p}}^{\circ 1}) \\
\langle \underline{\underline{\sigma}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} &= \mathbf{V}_\lambda^0(\underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle + \sum_{\lambda=2}^n C_\lambda \mathcal{P}_{\mathcal{E}_1^{\lambda\mu}}^0 : [\langle \underline{\underline{p}}^{\circ\lambda} \rangle_{D_\lambda} - \underline{\underline{p}}^{\circ 1}], -\underline{\underline{p}}^{\circ 1}) \\
\langle \underline{\underline{p}}^{\circ\lambda} \rangle_{D_\lambda} &= \langle \underline{\underline{\sigma}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} - \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\underline{\eta}}^{\circ\mu} \rangle_{D_\mu} \\
\text{et} \quad \langle \underline{\underline{\eta}}^\circ \rangle &= \underline{\underline{E}}^0 - \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle \\
\underline{\underline{p}}^{\circ 1} &= [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\eta}}^{\circ 1}.
\end{aligned} \tag{4.319}$$

Comme pour la situation de distribution ellipsoïdale généralisée des phases abordée dans l'approche classique ou pour celle évoquée dans le cadre de la démarche de Willis et Ponte Castañeda, l'existence d'une solution reste une question ouverte. Vérifier que les tenseurs de Hashin et Shtrikman construits à partir de cette solution vérifient les propriétés requises en est une autre. Mais il est prévisible que l'étude de ces questions montre l'existence de conditions de compatibilité entre les fractions volumiques des motifs, leur géométrie externe et les tenseurs  $\underline{\underline{A}}_{\lambda\mu}$ , qui conduisent en particulier à une minoration de la fraction volumique  $C_1$  de matrice. Cette idée suggère, mais ceci reste à démontrer rigoureusement, qu'une situation de distribution ellipsoïdale généralisée avec une fraction volumique de matrice nulle ne soit pas concevable : la notion d'Assemblage de Hashin généralisée n'a probablement pas de sens dans ce cadre.

Nous ne développons pas cette situation plus longuement et nous cantonnerons donc dans ce qui suit à l'étude des matériaux décrits par MMR avec des motifs répartis selon une distribution ellipsoïdale simple.

## 4.4 Propriétés des bornes obtenues dans l'approche par Motifs Morphologiques Représentatifs

### 4.4.A Calcul

Le calcul des bornes ainsi proposées repose sur la solution du problème de l'inclusion hétérogène noyée en milieu infini homogène, amplement commentée en annexe C. Deux situations sont à envisager. La première (*cf.* figure 4.10) est celle d'inclusions de géométrie totalement quelconque et d'un milieu de référence ayant les propriétés de la matrice du composite considéré. La borne ou l'estimation de type Mori-Tanaka obtenue est donnée par la relation (4.304) ou les relations qui suivent. Le second cas est celui de motifs de supports ellipsoïdaux de rapports de forme et d'orientation identiques, mais avec un milieu de référence arbitraire. Les bornes obtenues, calculées par (4.309) ou (4.311), sont pertinentes pour un Assemblage de Hashin généralisé (figure 4.11), dont les motifs respectent une distribution ellipsoïdale. Lorsque l'une des inclusions est homogène (figure 4.12), le résultat est aussi pertinent pour un matériau construit à partir d'une matrice ayant les propriétés de cette inclusion, dans laquelle les autres motifs, hétérogènes ou non, sont implantés selon une distribution ellipsoïdale en rapport avec la forme des inclusions.

Il reste à vérifier que les propriétés des bornes de Hashin et Shtrikman établies dans le cadre général s'appliquent aux résultats particuliers obtenus dans le cadre d'une description par MMR et dans une situation de distribution ellipsoïdale des motifs. Rappelons qu'il s'agit d'une condition nécessaire de cohérence de ces hypothèses. Il est facile de voir que ceci n'est pas systématique : un premier exemple d'hypothèses en contradiction avec elles-mêmes est celui d'un composite à inclusions, décrit conformément à la démarche de Willis et Ponte Castañeda, mais dont la concentration en matrice 1 ne respecterait pas les inégalités (4.232), (4.233) ou, si elle s'applique, (4.235). Un autre exemple est celui d'un matériau biphasé à constituants isotropes décrit par deux motifs homogènes dont le support est une sphère creuse. L'intuition suggère qu'une telle description pourrait rendre compte

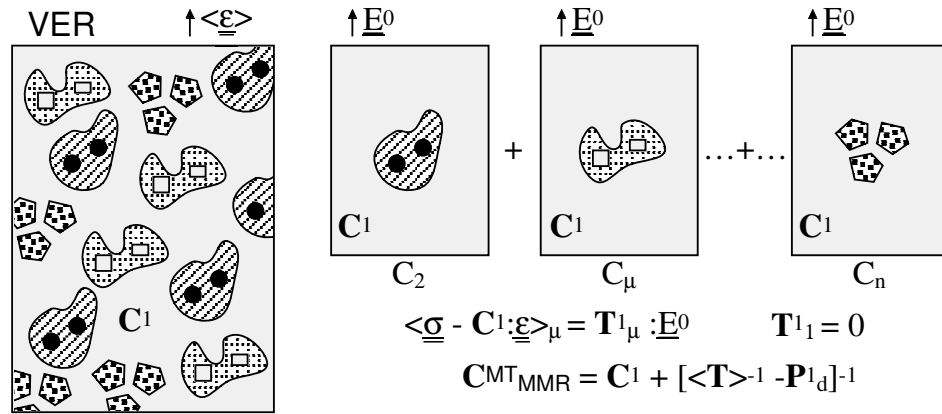


Figure 4.10 : Estimation de Mori et Tanaka généralisée ; géométries des motifs quelconques, milieu de référence = matrice

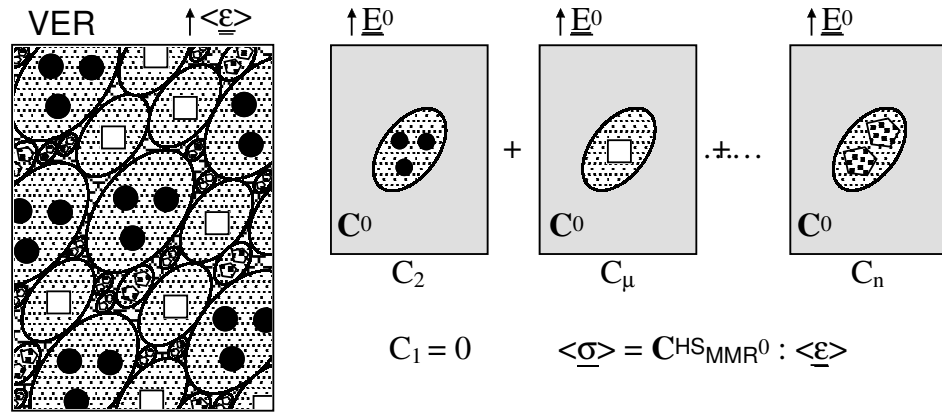


Figure 4.11 : Borne de Hashin et Shtrikman pour un Assemblage de Hashin généralisé ; pas de matrice

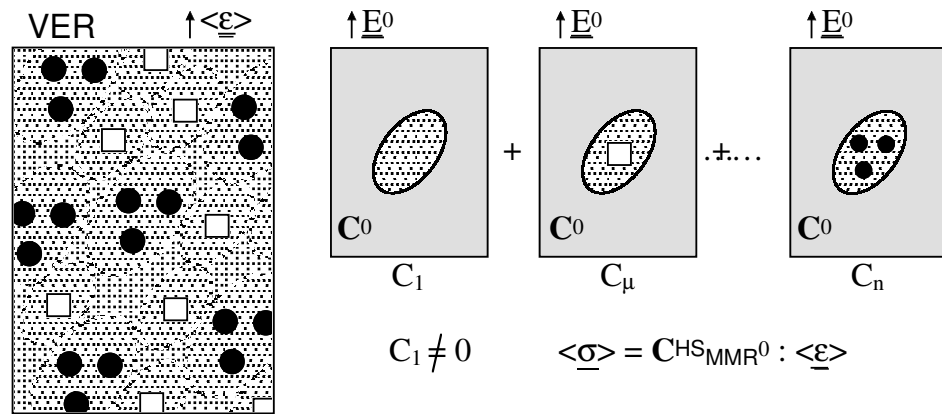


Figure 4.12 : Borne de Hashin et Shtrikman ; matrice de concentration non nulle représentée par un motif fictif homogène



d'une microstructure à phases co-continues. La résolution des problèmes d'inclusion associés peut être entreprise analytiquement, et s'avère très simple pour un chargement sphérique (voir annexe **A**). Les « bornes » que l'on obtient pour le module de compressibilité n'ont en revanche aucune réalité physique : suivant les valeurs retenues pour le rapport entre le rayon externe et le rayon interne des sphères creuses, elles varient entre les bornes classiques de Hashin et Shtrikman pour un biphasé isotrope et ces mêmes bornes, mais prises dans le sens inverse : la borne inférieure serait supérieure à la borne supérieure ! Cette absurdité est la conséquence de ce qu'un tel choix de motif n'est pas compatible avec les autres hypothèses de l'approche : il n'est pas possible de paver complètement l'espace avec ces géométries.

Pour vérifier les propriétés de symétrie des tenseurs, le bien-fondé de leurs définitions (existence des tenseurs inverses invoqués...) et leur positivité, les résultats relatifs au problème de l'inclusion hétérogène noyée en milieu infini homogène traité en annexe **C** seront amplement utilisés. Ils permettront aussi de comparer ces nouvelles bornes à d'autres encadrements connus.

#### 4.4.B Symétrie

Elle découle de celle des tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$ , que l'on établit facilement pour chaque problème d'inclusion  $\mu$ , quel que soit le milieu de référence retenu  $\mathbf{C}^0$  et quelle que soit la forme du domaine  $D_\mu$ . Soit en effet  $(\underline{\sigma}_i, \underline{\epsilon}_i)$ ,  $i \in [1, 2]$ , les champs de contrainte et de déformation solutions du problème considéré pour deux chargements à l'infini  $\underline{\Sigma}_i^0 = \mathbf{C}^0 : \underline{E}_i^0$ ,  $i \in [1, 2]$ . Les champs  $\underline{\sigma}_1 - \underline{\Sigma}_1^0$  et  $\underline{\epsilon}_2 - \underline{E}_2^0$  sont respectivement  $\text{SA}^\infty$  et  $\text{CA}^\infty$  (voir annexe **C**), si bien que par le principe des travaux virtuels, on a :

$$\int [\underline{\sigma}_1 - \underline{\Sigma}_1^0] : [\underline{\epsilon}_2 - \underline{E}_2^0] d\omega = 0. \quad (4.320)$$

La contrainte  $\underline{\sigma}_1 - \underline{\Sigma}_1^0$  peut être développée selon  $\underline{\sigma}_1 - \underline{\Sigma}_1^0 = \mathbf{C} : [\underline{\epsilon}_1 - \underline{E}_1^0] + \mathbf{C} : \underline{E}_1^0 - \underline{\Sigma}_1^0$ , où  $\mathbf{C}$  désigne le tenseur des modules dans tout l'espace, égal à  $\mathbf{C}^0$  ou  $\mathbf{C}^\mu$  suivant la position du point considéré. Les deux derniers termes s'annulant mutuellement en dehors de  $D_\mu$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{|D_\mu|} \int [\underline{\epsilon}_1 - \underline{E}_1^0] : \mathbf{C} : [\underline{\epsilon}_2 - \underline{E}_2^0] d\omega + \underline{E}_1^0 : \langle \mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^0 \rangle_{D_\mu} : \underline{E}_2^0 \\ = \underline{E}_1^0 : \left[ \langle \underline{\sigma}_2 \rangle_{D_\mu} - \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\epsilon}_2 \rangle_{D_\mu} \right]. \end{aligned}$$

La symétrie de  $\mathbf{C}$  assure celle du premier membre vis-à-vis des indices 1 et 2 ; le membre de droite n'étant autre que  $\underline{E}_1^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{E}_2^0$ , celle de  $\mathbf{T}_\mu^0$  en découle.

Toutes les bornes ou modèles proposés ici satisfont donc aux nécessaires exigences de symétrie.

#### 4.4.C Formulation variationnelle et intégrale

La formulation variationnelle générale caractérisant les perturbations  $(\underline{\epsilon}', \underline{\sigma}')$  induites sur un champ de déformation et de contrainte  $(\underline{\epsilon}^0, \underline{\sigma}^0 = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^0)$  dans un milieu infini par la présence d'une inclusion hétérogène soumise à un champ de polarisation est donnée en annexe **C**. Dans le cas présent où le champ initial est le champ homogène  $(\underline{E}^0, \underline{\Sigma}^0 = \mathbf{C}^0 : \underline{E}^0)$  et où la polarisation est nulle, cette formulation devient la suivante :

$$\forall \underline{\sigma}^{*'} \text{ SA}^\infty, \quad \forall \underline{\epsilon}^{*'} \text{ CA}^\infty, \quad -\psi'(\underline{\sigma}^{*'}) \leq -\psi'(\underline{\sigma}') = \Delta W = \phi'(\underline{\epsilon}') \leq \phi'(\underline{\epsilon}^{*'}), \quad (4.321)$$

avec

$$2\psi'(\underline{\sigma}^{*'}) = \int \underline{\sigma}^{*'} : \mathbf{S}^0 : \underline{\sigma}^{*'} d\omega + \int_{D_\mu} [\underline{\Sigma}^0 + \underline{\sigma}^{*'}] : [\mathbf{S}^\mu - \mathbf{S}^0] : [\underline{\Sigma}^0 + \underline{\sigma}^{*'}] d\omega \quad (4.322)$$

$$2\phi'(\underline{\epsilon}^{*'}) = \int \underline{\epsilon}^{*'} : \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^{*'} d\omega + \int_{D_\mu} [\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}^{*'}] : [\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^0] : [\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}^{*'}] d\omega. \quad (4.323)$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{|D_\mu|} \Delta W &= \underline{\underline{E}}^0 : \langle [C^\mu - C^0] : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}'] \rangle_{D_\mu} \\
 &= -\underline{\underline{\Sigma}}^0 : \langle [S^\mu - S^0] : [\underline{\underline{\Sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}'] \rangle_{D_\mu} \\
 &= \underline{\underline{E}}^0 : T_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0 = \underline{\underline{\Sigma}}^0 : S^0 : T_\mu^0 : S^0 : \underline{\underline{\Sigma}}^0.
 \end{aligned} \tag{4.324}$$

L'exploitation de cette formulation variationnelle permet d'établir des propriétés satisfaites par les tenseurs  $T_\mu^0$ , qui en induiront d'autres satisfaites par les tenseurs de Hashin et Shtrikman.

Rappelons par ailleurs les équations intégrales satisfaites par les champs solutions  $(\underline{\underline{\epsilon}}', \underline{\underline{\sigma}}')$  :

$$\forall \underline{\underline{x}} \quad \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{x}}) = - \int_{D_\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) : [C^\mu(\underline{\underline{y}}) - C^0] : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{\underline{y}})] d\omega_y \tag{4.325}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{\underline{x}}) = - \int_{D_\mu} \mathbf{\Delta}^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) : [S^\mu(\underline{\underline{y}}) - S^0] : [\underline{\underline{\Sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{\underline{y}})] d\omega_y. \tag{4.326}$$

Lorsque le domaine  $D_\mu$  est un ellipsoïde, les moyennes de ces champs sur ce dernier peuvent être calculée par la procédure déjà invoquée plus haut, fondée sur la relation de Fubini et la propriété d'Eshelby :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_{D_\mu} = -\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \langle [C^\mu(\underline{\underline{y}}) - C^0] : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}'] \rangle_{D_\mu} = -\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : T_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0 \tag{4.327}$$

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle_{D_\mu} = -\mathcal{Q}_{D_\mu}^0 : \langle [S^\mu(\underline{\underline{y}}) - S^0] : [\underline{\underline{\Sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}'] \rangle_{D_\mu} = \mathcal{Q}_{D_\mu}^0 : S^0 : T_\mu^0 : S^0 : \underline{\underline{\Sigma}}^0 \tag{4.328}$$

#### 4.4.D Encadrements des tenseurs $T_\mu^0$ et $\langle T_\mu^0 \rangle_\mu$

##### 4.4.D.a Cas général

L'application<sup>15</sup> des principes variationnels ci-dessus avec des champs  $(\underline{\underline{\epsilon}}', \underline{\underline{\sigma}}')$  nuls conduit aux inégalités suivantes sur les tenseurs  $T_\mu^0$ , à interpréter au sens des formes quadratiques associées :

$$\forall \mu \in [2, n] \quad C^0 : [S^0 - S_\mu^R] : C^0 \leq T_\mu^0 \leq C_\mu^V - C^0. \tag{4.329}$$

Les tenseurs  $C_\mu^V = \langle C^\mu \rangle_{D_\mu}$  et  $S_\mu^R = \langle S^\mu \rangle_{D_\mu}$ , déjà introduits au paragraphe 4.3.B, sont les bornes de Voigt et Reuss classiques associées à la phase morphologique  $\mu$ . En les sommant pour tous les motifs et l'éventuelle matrice, pour laquelle on a, suivant les trois cas traités, respectivement  $T_1^1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  et  $C^0 : [S^0 - S^1] : C^0 \leq T_1^0 \leq C^1 - C^0$ , on obtient :

$$C^0 : [S^0 - S^R] : C^0 \leq \langle T_\mu^0 \rangle_\mu \leq C^V - C^0, \tag{4.330}$$

où  $C^V$  et  $S^R$  sont les bornes de Voigt et Reuss classiques pour le composite étudié. Précisons que les inégalités de (4.329) ne sont pas strictes : il suffit par exemple de considérer un motif homogène, de choisir le milieu de référence tel que  $C^\mu - C^0$  ne soit pas défini et de prendre  $\underline{\underline{E}}^0$  dans le noyau de ce dernier : le champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  nul est alors solution. Il est difficile d'établir dans le cas général que cette situation est la seule où les inégalités ne sont pas strictes ; on conçoit toutefois que cela soit le cas en pratique.

On peut améliorer cet encadrement en utilisant comme champs d'essai ceux introduits pour la construction des bornes de Voigt et Reuss généralisées,  $C_{MMR}^V$  et  $C_{MMR}^R$  (cf. paragraphe 4.3.B), associées à la description par MMR retenue. Considérons d'abord la perturbation  $\underline{\underline{\epsilon}}_\mu^{V'}$  utilisée pour

---

<sup>15</sup>Ce paragraphe et les deux paragraphes suivants sont consacrés à diverses applications des principes variationnels ci-dessus dans le but d'établir des propriétés des tenseurs  $T_\mu^0$ . Leur teneur est principalement calculatoire et relativement technique. Les résultats présentés et en particulier ceux du dernier paragraphe ne sont pas utilisés exhaustivement par la suite. Nous avons malgré tout choisi de les présenter dans l'espoir d'une utilisation ultérieure par d'autres personnes.

calculer  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}$ . Elle est identiquement nulle en dehors de  $D_{\mu}$ , CA et de moyenne nulle sur  $D_{\mu}$  et la contrainte associée  $\mathbf{C}^{\mu} : [\underline{\mathbf{E}}^0 + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mu}^{\text{V}'}]$  est SA sur ce domaine :  $\langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{V}'} \rangle_{D_{\mu}} = 0$  et  $\langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{V}'} : \mathbf{C}^{\mu} : [\underline{\mathbf{E}}^0 + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mu}^{\text{V}'}] \rangle_{D_{\mu}} = 0$ . Le théorème de l'énergie potentielle conduit alors à :

$$\forall \mu \in [2, n] \quad \mathbf{T}_{\mu}^0 \leq \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0. \quad (4.331)$$

En utilisant de même le champ  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu}^{\text{R}'}$  introduit pour calculer  $\mathbf{S}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}$ , nul en dehors de  $D_{\mu}$  et tel que  $\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu}^{\text{R}'} \rangle_{D_{\mu}} = 0$  et  $\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu}^{\text{R}'} : \mathbf{S}^{\mu} : [\underline{\boldsymbol{\Sigma}}^0 + \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu}^{\text{R}'}] \rangle_{D_{\mu}} = 0$ , on obtient par le théorème de l'énergie complémentaire :

$$\forall \mu \in [2, n] \quad \mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_{\mu}^0 : \mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}} - \mathbf{S}^0. \quad (4.332)$$

Les inégalités obtenues sont larges : le cas particulier évoqué précédemment montre en effet encore que l'inégalité peut ne pas être stricte, mais l'intuition suggère que ce soit la seule situation. En sommant ces inégalités pour tous les motifs et en utilisant les propriétés de  $\mathbf{T}_1^0$  déjà invoquées plus haut et les définitions des tenseurs de Voigt et Reuss généralisés, on en tire :

$$\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}] : \mathbf{C}^0 \leq \langle \mathbf{T}_{\mu}^0 \rangle_{\mu} \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0. \quad (4.333)$$

Compte tenu des relations (4.271) entre les bornes de Voigt et Reuss classiques et généralisées déjà établies, on peut combiner ce résultat au précédent :

$$\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^{\text{R}}] : \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}] : \mathbf{C}^0 \leq \langle \mathbf{T}_{\mu}^0 \rangle_{\mu} \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0. \quad (4.334)$$

En pratique, les inégalités centrales sont strictes sauf dans des cas très particuliers ; il en est de même des inégalités externes sitôt que l'un des motifs est hétérogène.

On peut ensuite utiliser comme champ de déformation d'essai celui induit par une polarisation uniforme  $\underline{\mathbf{p}}$  dans un domaine  $I$  noyé dans d'un milieu infini homogène de tenseur des modules  $\mathbf{C}^0$ , le tenseur des modules valant  $\mathbf{C}^I$  dans  $I$ . Les propriétés de ce champ  $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}$  CA $^{\infty}$  sont abordées en annexe C, paragraphe C.2.B. Par définition, sa moyenne sur le domaine  $I$  est donnée par  $\langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} \rangle_I = -\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \underline{\mathbf{p}}$ . Il satisfait par ailleurs (voir la formulation variationnelle donné en annexe C) :

$$\frac{1}{|I|} \int \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} d\omega + \langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} : [\mathbf{C}^I - \mathbf{C}^0] : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} \rangle_I + \langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} \rangle_I : \underline{\mathbf{p}} = 0.$$

En prenant  $I = D_{\mu}$  et  $\mathbf{C}^I = \mathbf{C}_{\mu}^+$ , où  $\mathbf{C}_{\mu}^+$  est le plus petit des majorants<sup>16</sup> des  $\mathbf{C}^{\mu}(\underline{\mathbf{x}})$ ,  $\underline{\mathbf{x}} \in D_{\mu}$ , on en tire l'inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D_{\mu}|} \Delta W &\leq \frac{1}{|D_{\mu}|} \int \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} d\omega + \langle [\underline{\mathbf{E}}^0 + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}] : [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0] : [\underline{\mathbf{E}}^0 + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}] \rangle_{D_{\mu}} \\ &= \underline{\mathbf{E}}^0 : [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0] : \underline{\mathbf{E}}^0 - 2\underline{\mathbf{E}}^0 : [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu}^+) : \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}} : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu}^+) : \underline{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (4.335)$$

Le terme quadratique est positif puisque  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu}^+) > 0$ . En minimisant la majoration par le choix optimal  $\underline{\mathbf{p}} = [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0] : \underline{\mathbf{E}}^0$ , on en tire l'inégalité valable pour tout  $\mathbf{C}^0$  :

$$\mathbf{T}_{\mu}^0 \leq [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0] - [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu}^+) : [\mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0]. \quad (4.336)$$

Il y a égalité lorsque le motif est homogène ( $\mathbf{C}_{\mu}^+ = \mathbf{C}^{\mu}$ ). En effet, le champ  $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}$  est alors la solution du problème, puisque (cf. annexe C) le problème d'inclusion à polarisation  $\underline{\mathbf{p}} = [\mathbf{C}^I - \mathbf{C}^0] : \underline{\mathbf{E}}^0$  et chargement nul à l'infini est équivalent à celui avec polarisation nulle mais chargement à l'infini  $\underline{\mathbf{E}}^0$ . Comme  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu}^+)$  est défini positif, l'inégalité ci-dessus conduit aussi à :

$$\mathbf{T}_{\mu}^0 \leq \mathbf{C}_{\mu}^+ - \mathbf{C}^0, \quad (4.337)$$

<sup>16</sup>C'est-à-dire la « borne supérieure d'ordre 0 » relative au contenu du motif  $\mu$ .

l'inégalité étant stricte sitôt que  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_\mu^+$  est défini. Remarquons qu'on obtient le même résultat en prenant  $\underline{p} = 0$ , choix qui n'est jamais optimal lorsque  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_\mu^+$  est défini.

D'après (C.74), le tenseur défini positif  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)^{-1} - \mathbf{C}^I$  est une fonction croissante de ses arguments. Donc si  $\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}_\mu^+$ , alors  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+) \geq [\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0)^{-1} + \mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0]^{-1}$ . Le tenseur  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^0)$  s'identifiant au tenseur

$$\mathbf{P}_\mu^0 = \frac{1}{|D_\mu|} \int_{D_\mu} \int_{D_\mu} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{v} - \underline{u}) d\omega_u d\omega_v \quad (4.338)$$

introduit par Willis et Ponte Castañeda (paragraphe 4.2.C.b), on obtient finalement :

$$\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}_\mu(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in D_\mu \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+), \quad (4.339)$$

où le tenseur

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+) = [\mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0] - [\mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0] : \left[ [\mathbf{P}_\mu^0]^{-1} + \mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0 \right]^{-1} : [\mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0] \quad (4.340)$$

est bien le même que celui introduit lors des développements antérieurs (relations (4.213) par exemple).

On peut reprendre la même démarche en utilisant dans le théorème de l'énergie complémentaire le champ de contrainte  $\underline{\sigma}_\mu^p$  associé au champ  $\underline{\varepsilon}_\mu^p$ . Pour conserver les inégalités, il faut alors faire appel à  $\mathbf{C}_\mu^-$  qui est la « borne inférieure d'ordre 0 » relative au contenu du motif  $\mu$ . Sans développer les calculs, voici le résultat obtenu avec une polarisation optimale :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \mathbf{T}_\mu^0 \geq [\mathbf{C}_\mu^- - \mathbf{C}^0] - [\mathbf{C}_\mu^- - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^-) : [\mathbf{C}_\mu^- - \mathbf{C}^0], \quad (4.341)$$

inégalité valable quelque soit  $\mathbf{C}^0$  et qui devient une égalité lorsque le motif est homogène. Une polarisation nulle conduit à :

$$\mathbf{T}_\mu^0 \geq \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_\mu^-] : \mathbf{C}^0, \quad (4.342)$$

avec  $\mathbf{S}_\mu^- = [\mathbf{C}_\mu^-]^{-1}$ , l'inégalité étant stricte lorsque  $\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_\mu^-$  est défini. Si l'on suppose que  $\mathbf{C}^0$  est inférieur à  $\mathbf{C}_\mu^-$ , on aboutit de plus à :

$$\mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}_\mu(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in D_\mu \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\mu^0 \geq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^-). \quad (4.343)$$

En sommant ces résultats pour tous les motifs et la matrice (pour laquelle on a, suivant les cas considérés,  $\mathbf{T}_1^1 = 0$ ,  $\mathbf{C}_1 = 0$  et  $\mathbf{T}_1^0 = \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1)$ ), on obtient d'abord, quel que soit le milieu de référence :

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^-] : \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \langle \mathbf{S}_\mu^- \rangle_\mu] : \mathbf{C}^0 \\ & \leq \langle [\mathbf{C}_\mu^- - \mathbf{C}^0] - [\mathbf{C}_\mu^- - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^-) : [\mathbf{C}_\mu^- - \mathbf{C}^0] \rangle_\mu \\ & \leq \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq \langle [\mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0] - [\mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0] : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+) : [\mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0] \rangle_\mu \\ & \leq \langle \mathbf{C}_\mu^+ \rangle_\mu - \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^+ - \mathbf{C}^0, \end{aligned} \quad (4.344)$$

où  $\mathbf{C}^+$  et  $\mathbf{C}^- = \mathbf{S}^{-1}$  sont les bornes d'ordre 0 du matériau étudié, c'est-à-dire le plus petit majorant et le plus grand minorant des tenseurs  $\mathbf{C}(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in \mathcal{S}$ . Les inégalités centrales se réduisent à des égalités lorsque les motifs sont homogènes. Lorsque le milieu de référence est suffisamment raide ou souple, elles sont complétées par les résultats suivants :

$$\mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+) \rangle_\mu < \langle [\mathbf{P}_\mu^0]^{-1} \rangle_\mu \quad (4.345)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \geq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^-) \rangle_\mu > \langle [\mathbf{P}_\mu^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} \rangle_\mu. \quad (4.346)$$

Les inégalités extrêmes ne sont autres que celles (4.216) déjà établies antérieurement.

#### 4.4.D.b Cas de motifs ellipsoïdaux

Les encadrements obtenus plus haut s'appliquent quelle que soit la géométrie des motifs, mais on peut les compléter lorsque les motifs sont de géométrie externe ellipsoïdale. Notons d'abord que dans ce cas le tenseur  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+)$  s'écrit  $\left[ \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 \right]^{-1} + \mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^0 \right]^{-1}$  (cf. annexe C), si bien que le tenseur majorant  $\mathbf{T}_\mu^0$  dans (4.336) est identiquement égal à  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+)$ . Ceci vaut bien sûr aussi pour la minoration (4.341). Les inégalités (4.339) et (4.343) s'appliquent donc quel que soit le milieu de référence :

$$\forall \mu \in [2, n] \quad \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0 \right]^{-1} < \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^-) \leq \mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+) < \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 \right]^{-1}. \quad (4.347)$$

Les inégalités centrales sont des égalités pour les motifs homogènes<sup>17</sup>. Par sommation, il vient :

$$\left\langle \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0 \right]^{-1} \right\rangle_\mu < \left\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^-) \right\rangle_\mu \leq \left\langle \mathbf{T}_\mu^0 \right\rangle_\mu \leq \left\langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^+) \right\rangle_\mu < \left\langle \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 \right]^{-1} \right\rangle_\mu \quad (4.348)$$

Ces encadrements peuvent être améliorés en reprenant les inégalités variationnelles et en tirant profit de l'homogénéité du champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  et du champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  dans l'inclusion  $I = D_\mu$ . Pour cette nouvelle démonstration, on pourra se contenter de prendre  $\mathbf{C}^I = \mathbf{C}^0$ . La déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  est uniforme dans le domaine  $D_\mu$  et vaut  $-\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \underline{\underline{p}}$ . Les relations variationnelles étudiées en annexe C assurent par ailleurs que  $\int \underline{\underline{\epsilon}}^p : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^p d\omega = \underline{\underline{p}} : \int_{D_\mu} \underline{\underline{\epsilon}}^p d\omega$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\underline{p}}, \underline{\underline{E}}^0) \in \mathbb{T}_2^{s2} \quad \underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0 &\leq \underline{\underline{E}}^0 : \left[ \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] : \underline{\underline{E}}^0 - 2\underline{\underline{E}}^0 : \left[ \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \underline{\underline{p}} \\ &+ \underline{\underline{p}} : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} + \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \underline{\underline{p}}. \end{aligned} \quad (4.349)$$

Le terme quadratique en  $\underline{\underline{p}}$  est non nul car  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} + \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 > \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} - \mathbf{C}^0 > 0$  (cf. annexe C). La minimisation du membre de droite conduit à choisir :

$$\underline{\underline{p}} = \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} + \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right]^{-1} : \left[ \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] : \underline{\underline{E}}^0,$$

ce qui fournit la majoration, valable quel que soit  $\mathbf{C}^0$  :

$$\mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 - \left[ \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] : \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} + \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right]^{-1} : \left[ \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] = \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^V). \quad (4.350)$$

Le tenseur de  $\mathbf{T}_\mu^0$  est donc *majoré par le tenseur du même nom correspondant à un motif homogène ayant les caractéristiques du milieu de Voigt* (c'est-à-dire la borne supérieure d'ordre 1) *associé au motif hétérogène considéré*. Il y a égalité lorsque le motif est homogène puisque dans ce cas le champ d'essai utilisé est la solution. Cette inégalité permet de retrouver la majoration  $\mathbf{T}_\mu^0 < \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0$  déjà établie dans le cas général, mais montre de plus qu'elle est stricte lorsque  $\mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0$  est défini. Remarquons aussi que le choix  $\underline{\underline{p}} = \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} : \underline{\underline{E}}^0$  n'est jamais optimal<sup>18</sup> et permet donc de retrouver l'inégalité stricte  $\mathbf{T}_\mu^0 < \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1}$ .

Le champ de contrainte induit par la polarisation  $\underline{\underline{p}}$  sur le domaine ellipsoïdal  $D_\mu$  dans le milieu infini  $\mathbf{C}^0$  peut par ailleurs être utilisé dans le théorème de l'énergie complémentaire relatif au problème de l'inclusion ellipsoïdale hétérogène. Ce champ  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  est homogène dans  $D_\mu$  et y vaut  $\underline{\underline{\sigma}}^D = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{C}^0 : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 \right] : \underline{\underline{p}}$ . Il satisfait d'autre part  $\int \underline{\underline{\sigma}}^p : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^p d\omega = \underline{\underline{p}} : \mathbf{S}^0 : \int_{D_\mu} \underline{\underline{\sigma}}^p d\omega$ . Comme

<sup>17</sup>Notons bien que ce n'est pas le cas dans le cas général traité plus haut avec des géométries non ellipsoïdales, sauf bien sûr lorsque le milieu de référence a le même comportement que le motif homogène.

<sup>18</sup>L'égalité  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 = \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} + \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right]^{-1} : \left[ \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0 \right] : \underline{\underline{E}}^0$  n'est satisfaite que si  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0 = 0$ , ce qui est contraire aux propriétés de ce tenseur.

$\mathbf{S}^0 - \mathcal{P}_{D_\mu}^0 > 0$ , le choix d'une polarisation  $\underline{p}$  est équivalent à celui d'une contrainte  $\underline{\sigma}^D$ . Avec  $\underline{\Sigma}^0 = \mathbf{C}^0 : \underline{E}^0$ , ceci conduit à :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\sigma}^D, \underline{\Sigma}^0) \in \mathbb{T}_2^{s^2} \\ -\underline{\Sigma}^0 : \mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \mathbf{S}^0 : \underline{\Sigma}^0 \leq \underline{\Sigma}^0 : [\mathbf{S}_\mu^R - \mathbf{S}^0] : \underline{\Sigma}^0 + 2\underline{\Sigma}^0 : [\mathbf{S}_\mu^R - \mathbf{S}^0] : \underline{\sigma}^D \\ + \underline{\sigma}^D : \left[ \mathbf{S}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} : \mathbf{S}^0 + \mathbf{S}_\mu^R - \mathbf{S}^0 \right] : \underline{\sigma}^D. \end{aligned} \quad (4.351)$$

Comme précédemment le membre de droite peut être minimisé par le choix :

$$\underline{\sigma}^D = - \left[ \mathbf{S}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} : \mathbf{S}^0 + \mathbf{S}_\mu^R - \mathbf{S}^0 \right]^{-1} : [\mathbf{S}_\mu^R - \mathbf{S}^0] : \underline{\Sigma}^0, \quad (4.352)$$

qui donne, après quelques manipulations algébriques que nous ne détaillons pas :

$$\mathbf{T}_\mu^0 \geq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^R). \quad (4.353)$$

Le tenseur de  $\mathbf{T}_\mu^0$  est donc *minoré par le tenseur du même nom correspondant à un motif homogène ayant les caractéristiques du milieu de Reuss associé au motif hétérogène considéré*, l'égalité étant bien sûr assurée lorsque le motif est homogène. Le choix non optimal  $\underline{\sigma}^D = -\underline{\Sigma}^0$  conduit par ailleurs à l'inégalité stricte :  $\mathbf{T}_\mu^0 > [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1}$  et le choix  $\underline{\sigma}^D = 0$  redonne  $\mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_\mu^R$ , inégalité stricte lorsque  $\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_\mu^R$  est défini, puisque ce choix n'est alors pas optimal. Ceci conduit au nouvel encadrement :

$$\forall \mu \in [2, n] \quad \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_\mu^R] : \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^R) \leq \mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^V) \leq \mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0, \quad (4.354)$$

dont les inégalités centrales sont des égalités en cas d'homogénéité des motifs. Les inégalités extrêmes sont strictes lorsque, respectivement, le tenseur  $\mathbf{C}_\mu^V - \mathbf{C}^0$  ou  $\mathbf{C}_\mu^R - \mathbf{C}^0$  est défini. Elles ne se réduisent à des égalités que lorsque ces mêmes tenseurs sont nuls ; dans ce cas les termes correspondants sont eux-mêmes nuls. Une sommation conduit à :

$$\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^R] : \mathbf{C}^0 \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^R) \rangle_\mu \leq \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_\mu^V) \rangle_\mu \leq \mathbf{C}^V - \mathbf{C}^0. \quad (4.355)$$

Ce résultat peut encore être amélioré. En effet, les champs d'essai  $\underline{\epsilon}^p$  et  $\underline{\sigma}^p$  invoqués ci-dessus sont homogènes au sein du domaine ellipsoïdal  $D_\mu$ . On peut reprendre la même analyse en remplaçant ces champs homogènes par des champs hétérogènes satisfaisant les mêmes conditions au bord de  $D_\mu$ , et plus précisément par ceux utilisés pour le calcul des bornes de Voigt et Reuss généralisées. Soit donc  $\underline{\epsilon}^e$  un tel champ  $\text{CA}^\infty$ , qui coïncide en dehors de  $D_\mu$  avec le champ  $\underline{\epsilon}^p$  induit dans le milieu infini homogène de tenseur des modules  $\mathbf{C}^0$  par une polarisation uniforme  $\underline{p}$  dans  $D_\mu$  égale à  $\underline{p} = -[\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} : (\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0)$ , et qui s'identifie à l'intérieur de  $D_\mu$  au champ  $\underline{\epsilon}_\mu^{V'} = \underline{\epsilon}_\mu^V - \underline{E}^0$  associé à la déformation moyenne  $\underline{\epsilon}^I$ . L'intégration de l'énergie potentielle sur le domaine complémentaire à  $D_\mu$  conduit à :

$$\int_{C_{D_\mu}} \underline{\epsilon}^e : \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^e d\omega = \int_{\partial D_\mu} [(\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0) \cdot \underline{x}] \cdot [\underline{\sigma}^p \cdot (-\underline{n})] ds = -|D_\mu| (\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0) \langle \underline{\sigma}^p \rangle_{D_\mu}.$$

La contrainte  $\underline{\sigma}^p$  au sein de  $D_\mu$  dans le problème à polarisation imposée est uniforme et vaut  $\langle \underline{\sigma}^p \rangle_{D_\mu} = \mathbf{C}^0 : (\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0) + \underline{p} = -\mathbf{C}^{0*} : (\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0)$ . Les termes relatifs au domaine  $D_\mu$  peuvent d'autre part être réécrits sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{E}^0 : \int_{D_\mu} [\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^0] : [\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}_\mu^{V'}] d\omega + \int_{D_\mu} \underline{\epsilon}_\mu^{V'} : \mathbf{C}^\mu : [\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}_\mu^{V'}] d\omega - \int_{D_\mu} \underline{\epsilon}_\mu^{V'} : \mathbf{C}^0 : \underline{E}^0 d\omega \\ = |D_\mu| \left[ \underline{E}^0 : [\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^V - \mathbf{C}^0] : \underline{\epsilon}^I + [\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0] : \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^V : \underline{\epsilon}^I - [\underline{\epsilon}^I - \underline{E}^0] : \mathbf{C}^0 : \underline{E}^0 \right]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{\underline{\epsilon}}^I, \underline{\underline{E}}^0) \in \mathbb{T}_2^{s^2} \\ \underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0 \leq \underline{\underline{E}}^0 : [\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{E}}^0 + 2\underline{\underline{E}}^0 : [\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\underline{\epsilon}}^I - \underline{\underline{E}}^0] \\ + [\underline{\underline{\epsilon}}^I - \underline{\underline{E}}^0] : \left[ [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} + \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0 \right] : [\underline{\underline{\epsilon}}^I - \underline{\underline{E}}^0]. \end{aligned} \quad (4.356)$$

Comme précédemment, un choix optimal de  $\underline{\underline{\epsilon}}^I$  conduit à la nouvelle majoration :

$$\mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}). \quad (4.357)$$

Le champ d'essai  $\text{CA}^\infty$  optimal est exactement le champ solution si l'inclusion était homogène de modules  $\text{toq}\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}$ .

Les choix non optimaux  $\underline{\underline{\epsilon}}^I = 0$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\underline{E}}^0$  conduisent respectivement aux majorations  $\mathbf{T}_\mu^0 < \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1}$  et  $\mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0$  déjà établies par ailleurs. Lorsque  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0$  est défini, la seconde inégalité est stricte. Il est bien sûr possible d'appliquer la même démarche à l'énergie complémentaire : on complète pour cela le champ  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  en dehors de  $D_\mu$  par le champ interne  $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{R}}$  adéquat. Il est inutile de détailler les calculs qui sont exactement parallèles aux précédents. On conçoit aisément qu'un choix optimal de la contrainte moyenne sur l'inclusion conduit à :

$$\mathbf{T}_\mu^0 \geq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}), \quad (4.358)$$

alors que des choix non optimaux permettent de retrouver les inégalités  $\mathbf{T}_\mu^0 > [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1}$  et  $\mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \mu \in [2, n] \\ \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}] : \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}) \leq \mathbf{T}_\mu^0 \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}) \leq \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0. \end{aligned} \quad (4.359)$$

Comme plus haut, les inégalités centrales sont des égalités en cas d'homogénéité des motifs et les inégalités extrêmes sont strictes dès que respectivement  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0$  et  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}} - \mathbf{C}^0$  sont définis ; elles se réduisent à des égalités dans les seuls cas où le milieu de référence s'identifie à la borne de Voigt ou de Reuss généralisée relative au motif, les termes correspondants étant alors nuls. Par sommation, il vient :

$$\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}] : \mathbf{C}^0 \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}) \rangle_\mu \leq \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq \langle \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}) \rangle_\mu \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0. \quad (4.360)$$

La majoration (resp. minoration) extrême est stricte s'il existe un motif  $\mu$  tel que  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0$  (resp.  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}} - \mathbf{C}^0$ ) soit défini, ou encore s'il existe deux motifs  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{V}}$  (resp.  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}} - \mathbf{C}_{\lambda\text{MMR}}^{\text{R}}$ ) soit défini.

Comme on l'a vu les bornes de Voigt et Reuss généralisées sont systématiquement au moins aussi pertinentes que les bornes de Voigt et Reuss classiques, qui sont elles-mêmes plus restrictives que les bornes d'ordre 0. Par ailleurs, les tenseurs  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  sont strictement croissants en fonction de  $\mathbf{C}^r$ . Ces derniers encadrements améliorent donc les précédents obtenus avec les bornes de Voigt et Reuss classiques associées aux diverses phases morphologiques, qui eux-mêmes améliorent ceux obtenus avec les bornes d'ordre 0. Tous ces encadrements sont toutefois équivalents lorsque les motifs sont homogènes.

Rappelons enfin les inégalités

$$\left\langle [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} \right\rangle_\mu < \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu < \left\langle \mathcal{P}_{D_\mu}^0{}^{-1} \right\rangle_\mu. \quad (4.361)$$

Lorsque les géométries externes de tous les motifs sont identiques et compatibles avec l'hypothèse de distribution (seconde et troisième situations), les tenseurs  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0$  sont tous égaux à  $\mathcal{P}_d^0$  et il vient :

$$\left[ \mathcal{P}_d^0 - \mathbf{S}^0 \right]^{-1} < \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu < \left[ \mathcal{P}_d^0 \right]^{-1}. \quad (4.362)$$

Ces inégalités généralisent celles déjà obtenues dans le cas où les motifs sont homogènes (*cf.* paragraphe 4.2.B.a). Notons que ces dernières avaient été déduites des propriétés des tenseurs  $\mathbf{E}^0$  et plus généralement des tenseurs  $\mathcal{P}_\Omega^0$ , qui sont établies en annexe C à partir de la formulation variationnelle du problème de l'inclusion hétérogène en milieu infini. Les nouvelles propriétés, qui se réduisent aux précédentes lorsque les motifs sont homogènes, ont été obtenues directement à partir des théorèmes énergétiques.

#### 4.4.E Autres propriétés des tenseurs $\mathbf{T}_\mu^0$

Soient deux motifs  $\mu_i$ ,  $i \in [1, 2]$ , de même support  $D_\mu$  mais de structure interne  $\mathbf{C}_i^\mu(\cdot)$  éventuellement différente. Soit  $(\underline{\sigma}_i, \underline{\epsilon}_i)$  les champs  $\text{SA}^\infty$  et  $\text{CA}^\infty$  solutions des problèmes d'inclusions associés, définis pour des milieux de référence  $\mathbf{C}_i^0$  et des conditions à l'infini  $\underline{\Sigma}_i^0 = \mathbf{C}_i^0 : \underline{E}_i^0$ . Ils satisfont :

$$\begin{aligned} & - \int \underline{\sigma}_i : \mathbf{S}_i^0 : \underline{\sigma}_i d\omega - \int_{D_\mu} [\underline{\Sigma}_i^0 + \underline{\sigma}_i] : [\mathbf{S}_i^\mu - \mathbf{S}_i^0] : [\underline{\Sigma}_i^0 + \underline{\sigma}_i] d\omega \\ & = \int \underline{\epsilon}_i : \mathbf{C}_i^0 : \underline{\epsilon}_i d\omega + \int_{D_\mu} [\underline{E}_i^0 + \underline{\epsilon}_i] : [\mathbf{C}_i^\mu - \mathbf{C}_i^0] : [\underline{E}_i^0 + \underline{\epsilon}_i] d\omega \\ & = \underline{E}_i^0 : \int_{D_\mu} [\mathbf{C}_i^\mu - \mathbf{C}_i^0] : [\underline{E}_i^0 + \underline{\epsilon}_i] d\omega = |D_\mu| \underline{E}_i^0 : \mathbf{T}_\mu^i : \underline{E}_i^0 \\ & = -\underline{\Sigma}_i^0 : \int_{D_\mu} [\mathbf{S}_i^\mu - \mathbf{S}_i^0] : [\underline{\Sigma}_i^0 + \underline{\sigma}_i] d\omega = |D_\mu| \underline{\Sigma}_i^0 : \mathbf{S}_i^0 : \mathbf{T}_\mu^i : \mathbf{S}_i^0 : \underline{\Sigma}_i^0. \end{aligned}$$

La solution du problème 2 définit des champs admissibles pour le problème 1 et permet d'établir de nouvelles propriétés satisfaites par les tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$  :

$$\begin{aligned} & - \int \underline{\sigma}_2 : \mathbf{S}_1^0 : \underline{\sigma}_2 d\omega - \int_{D_\mu} [\underline{\Sigma}_1^0 + \underline{\sigma}_2] : [\mathbf{S}_1^\mu - \mathbf{S}_1^0] : [\underline{\Sigma}_1^0 + \underline{\sigma}_2] d\omega \\ & \leq |D_\mu| \underline{\Sigma}_1^0 : \mathbf{S}_1^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \mathbf{S}_1^0 : \underline{\Sigma}_1^0 = |D_\mu| \underline{E}_1^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \underline{E}_1^0 \\ & \leq \int \underline{\epsilon}_2 : \mathbf{C}_1^0 : \underline{\epsilon}_2 d\omega + \int_{D_\mu} [\underline{E}_1^0 + \underline{\epsilon}_2] : [\mathbf{C}_1^\mu - \mathbf{C}_1^0] : [\underline{E}_1^0 + \underline{\epsilon}_2] d\omega. \end{aligned} \quad (4.363)$$

L'exploitation complète de ces relations est quelque peu fastidieuse et il est préférable de traiter des cas particuliers. Le plus simple est celui où la seule différence réside dans la constitution interne des motifs ( $\mathbf{C}_1^0 = \mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}^0$  et  $\underline{\Sigma}_1^0 = \underline{\Sigma}_2^0 = \underline{\Sigma}^0$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \underline{E}^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \underline{E}^0 - \left\langle [\underline{\Sigma}^0 + \underline{\sigma}_2] : [\mathbf{S}_1^\mu - \mathbf{S}_2^\mu] : [\underline{\Sigma}^0 + \underline{\sigma}_2] \right\rangle_{D_\mu} \\ & \leq \underline{E}^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \underline{E}^0 \leq \underline{E}^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \underline{E}^0 + \left\langle [\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}_2] : [\mathbf{C}_1^\mu - \mathbf{C}_2^\mu] : [\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}_2] \right\rangle_{D_\mu}. \end{aligned}$$

Lorsque  $\mathbf{S}_2^\mu \geq \mathbf{S}_1^\mu$ , soit  $\mathbf{C}_1^\mu \geq \mathbf{C}_2^\mu$ , le premier terme intégral est positif et lorsque  $\mathbf{C}_2^\mu \geq \mathbf{C}_1^\mu$  le dernier est négatif, ce qui conduit respectivement à  $\mathbf{T}_\mu^2 \leq \mathbf{T}_\mu^1$  et  $\mathbf{T}_\mu^1 \leq \mathbf{T}_\mu^2$  et établit donc la croissance de  $\mathbf{T}_\mu^0$  en fonction de  $\mathbf{C}^\mu(\cdot)$ , que l'on peut écrire formellement :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^\mu, \Delta\mathbf{C}^\mu) \quad [\forall \underline{x} \in D_\mu \quad \Delta\mathbf{C}^\mu(\underline{x}) \geq 0] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\mu^0(\mathbf{C}^\mu + \Delta\mathbf{C}^\mu) \geq \mathbf{T}_\mu^0(\mathbf{C}^\mu). \quad (4.364)$$

Une inégalité stricte dans l'hypothèse induit une inégalité stricte dans la conclusion car  $\underline{E}^0 + \underline{\epsilon}_2$  ne peut pas être nul sur tout  $D_\mu$ . Ce résultat qui s'applique quelle que soit la géométrie de  $D_\mu$  généralise la propriété de croissance de  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  en fonction de  $\mathbf{C}^r$ . Il permet par exemple de retrouver les inégalités (4.344) (il suffit de prendre  $\Delta\mathbf{C}^\mu = \mathbf{C}_\mu^+ - \mathbf{C}^\mu$  ou  $\Delta\mathbf{C}^\mu = \mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}_\mu^-$ ) mais ne suffit pas pour établir les inégalités obtenues avec les bornes de Voigt et Reuss, classiques ou généralisées, associées aux phases morphologiques.

Le second cas intéressant est celui d'une translation globale de tous les tenseurs des modules :  $\mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}_1^0 + \Delta\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}_2^\mu = \mathbf{C}_1^\mu + \Delta\mathbf{C}$ . Si l'on conserve la déformation à l'infini  $\underline{E}_1^0 = \underline{E}_2^0 = \underline{E}^0$ , le théorème de l'énergie potentielle conduit à :

$$|D_\mu| \underline{E}^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \underline{E}^0 \leq |D_\mu| \underline{E}^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \underline{E}^0 - \int \underline{\epsilon}_2 : \Delta\mathbf{C} : \underline{\epsilon}_2 d\omega, \quad (4.365)$$



ce qui établit la croissance de  $\mathbf{T}_\mu^0$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  à  $\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^0$  fixé et généralise la propriété correspondante déjà obtenue pour  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^\mu, \Delta\mathbf{C}) \quad \Delta\mathbf{C} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\mu^0(\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C}, \mathbf{C}^\mu + \Delta\mathbf{C}) \geq \mathbf{T}_\mu^0(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^\mu). \quad (4.366)$$

Une inégalité stricte dans l'hypothèse induit là aussi une inégalité stricte dans la conclusion. Lorsque l'on translate globalement les tenseurs des souplesses de la quantité  $\Delta\mathbf{S}$  en conservant cette fois-ci la contrainte à l'infini, on obtient (en prenant  $\mathbf{S}_1^0 = \mathbf{S}^0 + \Delta\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}_2^0 = \mathbf{S}^0, \dots$ ) :

$$|D_\mu| \underline{\underline{\mathbf{S}}}^0 : \mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^0 - \int \underline{\underline{\mathbf{S}}}_2 : \Delta\mathbf{S} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_2 d\omega \leq |D_\mu| [\mathbf{S}^0 + \Delta\mathbf{S}] : \mathbf{T}_\mu^1 : [\mathbf{S}^0 + \Delta\mathbf{S}] : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^0 \quad (4.367)$$

ce qui montre la croissance de  $\mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \mathbf{S}^0$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  à  $\mathbf{S}^\mu - \mathbf{S}^0$  fixé, puisque  $\Delta\mathbf{C} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta\mathbf{S} = [\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C}]^{-1} - \mathbf{S}^0 \leq 0$  :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^\mu, \Delta\mathbf{C}) \quad \Delta\mathbf{C} \geq 0 \Rightarrow [\mathbf{S}^0 + \Delta\mathbf{S}] : \mathbf{T}_\mu^0(\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C}, [\mathbf{S}^\mu + \Delta\mathbf{S}]^{-1}) : [\mathbf{S}^0 + \Delta\mathbf{S}] \geq \mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^0(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^\mu) : \mathbf{S}^0. \quad (4.368)$$

Le dernier cas que nous abordons est celui de motifs identiques  $\mathbf{C}_2^\mu = \mathbf{C}_1^\mu = \mathbf{C}^\mu$  mais de milieux de références distincts. Ce cas est intrinsèquement le plus intéressant puisqu'il renseigne sur l'évolution des bornes ou estimations en fonction du choix du milieu de référence. Les résultats obtenus ne sont en revanche pas aussi faciles à interpréter que dans les cas précédents. Nous donnons toutefois les encadrements obtenus, bien qu'ils ne soient pas particulièrement concis. Considérons d'abord l'énergie potentielle relative au problème 1 avec  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0$  imposé, lorsqu'on choisit comme champ admissible la solution du problème 2 avec  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0$  imposé :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|D_\mu|} \int \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 : \mathbf{C}_1^0 : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 d\omega + \langle [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2] : [\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}_1^0] : [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2] \rangle_{D_\mu} \\ = & \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 d\omega \\ & \left[ \frac{1}{|D_\mu|} \int \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 : \mathbf{C}_2^0 : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 d\omega + \langle [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2] : [\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}_2^0] : [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2] \rangle_{D_\mu} \right] \\ & + 2 [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 - \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0] : \langle [\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}_2^0] : [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2] \rangle_{D_\mu} + 2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 : [\mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_1^0] : \langle \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 \rangle_{D_\mu} \\ & + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 : [\mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_1^0] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 + [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 - \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0] : [\mathbf{C}_\mu^\nu - \mathbf{C}_2^0] : [\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 - \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0]. \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse où le support du motif est un ellipsoïde, la moyenne  $\langle \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 \rangle_{D_\mu}$  est donné par (4.327).

On obtient alors la majoration :

$$\begin{aligned} & \forall(\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0, \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0) \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 : [\mathbf{T}_\mu^1 + \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_\mu^\nu] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 & \leq -\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 : [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^\nu] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 + 2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 : [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^\nu] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 \quad (4.369) \\ & - 2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 : [\mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_1^0] : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : \mathbf{T}_\mu^2 : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 d\omega. \end{aligned}$$

Les encadrements obtenus précédemment assurent que  $\mathbf{T}_\mu^i + \mathbf{C}_i^0 - \mathbf{C}_\mu^\nu \leq 0$ , l'inégalité étant stricte lorsque  $\mathbf{C}_i^0 - \mathbf{C}_\mu^\nu$  est défini, ce que nous allons supposer. La minimisation du majorant par rapport à  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0$  conduit à prendre :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2^0 = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 + [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^\nu]^{-1} : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0$$

et induit la majoration suivante, valable pour tout  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0$  :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0 : [\mathbf{T}_\mu^1 + \mathbf{C}_1^0] : \underline{\underline{\mathbf{E}}}_1^0$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \underline{E}_1^0 : [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0] : \underline{E}_1^0 + \underline{E}_1^0 : [[\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : \mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{T}_\mu^2 : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0]] : \underline{E}_1^0 \\
 &\quad + \underline{E}_1^0 : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : \mathbf{T}_\mu^2 : [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^V]^{-1} \mathbf{T}_\mu^2 : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \underline{E}_1^0 \\
 &\quad + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\epsilon}_2(\underline{E}_1^0) : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : \underline{\epsilon}_2(\underline{E}_1^0) d\omega.
 \end{aligned} \tag{4.370}$$

La même démarche appliquée au théorème de l'énergie complémentaire conduit d'abord à la majoration :

$$\begin{aligned}
 \forall(\underline{\Sigma}_1^0, \underline{\Sigma}_2^0) \quad \underline{\Sigma}_1^0 : [-\mathbf{S}_1^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \mathbf{S}_1^0 + \mathbf{S}_1^0 - \mathbf{S}_\mu^R] : \underline{\Sigma}_1^0 &\leq \\
 -\underline{\Sigma}_2^0 : [-\mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_\mu^R] : \underline{\Sigma}_2^0 + 2\underline{\Sigma}_1^0 : [-\mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_\mu^R] : \underline{\Sigma}_2^0 \\
 + 2\underline{\Sigma}_1^0 : [\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_1^0] : \mathcal{Q}_{D_\mu}^2 : \mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 : \underline{\Sigma}_2^0 + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\sigma}_2 : [\mathbf{S}_1^0 - \mathbf{S}_2^0] : \underline{\sigma}_2 d\omega.
 \end{aligned}$$

Le tenseur  $\mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_\mu^R$  est défini positif lorsque  $\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_\mu^R$  est défini. Le choix

$$\underline{\Sigma}_2^0 = \underline{\Sigma}_1^0 + [-\mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_\mu^R]^{-1} : \mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 : \mathcal{Q}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_1^0] : \underline{\Sigma}_1^0$$

minimise le membre de droite par rapport à  $\underline{\Sigma}_2^0$  et conduit, pour tout  $\underline{E}_1^0$ , à la majoration :

$$\begin{aligned}
 \underline{\Sigma}_1^0 : [-\mathbf{S}_1^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \mathbf{S}_1^0 + \mathbf{S}_1^0] : \underline{\Sigma}_1^0 &\leq \underline{\Sigma}_1^0 : [-\mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_2^0] : \underline{\Sigma}_1^0 \\
 + \underline{\Sigma}_1^0 : [[\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_1^0] : \mathcal{Q}_{D_\mu}^2 : \mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 : \mathcal{Q}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_1^0]] : \underline{\Sigma}_1^0 \\
 + \underline{\Sigma}_1^0 : [\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_1^0] : \mathcal{Q}_{D_\mu}^2 : \mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 : [-\mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 + \mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_\mu^R]^{-1} \\
 &\quad : \mathbf{S}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathbf{S}_2^0 : \mathcal{Q}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{S}_2^0 - \mathbf{S}_1^0] : \underline{\Sigma}_1^0 \\
 + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\sigma}_2(\underline{\Sigma}_1^0) : [\mathbf{S}_1^0 - \mathbf{S}_2^0] : \underline{\sigma}_2(\underline{\Sigma}_1^0) d\omega.
 \end{aligned} \tag{4.371}$$

Dans les majorations ci-dessus, l'intégrale sur le domaine complémentaire de  $D_\mu$  n'admet pas d'expression explicite. On peut l'ignorer dans la première inégalité si  $\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0$  est négatif et dans la seconde s'il est positif. Nous verrons par la suite que les encadrements obtenus ne sont malheureusement pas suffisants pour établir les propriétés auxquelles on s'intéressera. C'est pourquoi nous avons tenté de reprendre la démarche en choisissant des champs d'essai légèrement différents permettant d'estimer partiellement ces termes complémentaires. Les encadrements obtenus sont malheureusement encore insuffisants mais nous les présentons malgré tout. Le nouveau champ de déformation  $CA^\infty \underline{\epsilon}'$  coïncide, à l'intérieur du domaine  $D_\mu$ , avec le champ  $\underline{\epsilon}_2$  utilisé plus haut qui dérive du déplacement  $\underline{u}_2$ . La valeur de ce dernier sur la frontière de  $D_\mu$  peut s'écrire sous la forme  $\langle \underline{\epsilon}_2 \rangle \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \underline{u}_2'$ . On peut par ailleurs calculer la solution du problème mécanique défini sur le complémentaire de  $D_\mu$ , lorsque le tenseur des modules y vaut  $\mathbf{C}_i^0$ , qu'une déformation nulle est appliquée à l'infini et que le déplacement  $\langle \underline{\epsilon}_2 \rangle \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$  est imposé au bord de  $D_\mu$ . On note  $(\underline{\sigma}_2^i, \underline{\epsilon}_2^i)$  la solution. Lorsque  $D_\mu$  est un ellipsoïde, ce qui nous supposons, ce problème est celui qui détermine le « constraint tensor » introduit par Hill. La contrainte  $\underline{\sigma}_2^i$  est en effet alors homogène au bord et y vaut  $\langle \underline{\sigma}_2^i \rangle_{D_\mu} = -\mathbf{C}_i^{0*} : \langle \underline{\epsilon}_2 \rangle$ . De plus, cette solution satisfait :

$$\int_{C_{D_\mu}} \underline{\epsilon}_2^i : \mathbf{C}_i^0 : \underline{\epsilon}_2^i = |D_\mu| \langle \underline{\epsilon}_2 \rangle : \mathbf{C}_i^{0*} : \langle \underline{\epsilon}_2 \rangle$$

et pour tout champ  $\underline{\epsilon}^* \in CA^\infty$  et de moyenne nulle sur  $D_\mu$  :

$$\int_{C_{D_\mu}} \underline{\epsilon}_2^i : \mathbf{C}_i^0 : \underline{\epsilon}^* = 0,$$

puisque  $\mathbf{C}_i^0 : \underline{\epsilon}_2^i$  est  $SA^\infty$  et compatible avec des contraintes homogènes sur la frontière de  $D_\mu$ . On choisit alors comme champ d'essai sur le complémentaire de  $D_\mu$  le champ  $\underline{\epsilon}_2^1 + \underline{\epsilon}_2 - \underline{\epsilon}_2^2$  : ce choix est

licite puisque  $\underline{\underline{\epsilon}}_2^1$  est compatible avec le déplacement  $\langle \underline{\underline{\epsilon}}_2 \rangle \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$  sur le bord de  $D_\mu$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2$  est compatible avec  $\underline{u}_2'$ . Le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2$  est  $CA^\infty$  et de moyenne nulle sur  $D_\mu$ . Le théorème de l'énergie potentielle conduit alors à une inégalité que l'on déduit de (4.369) en ajoutant au majorant le terme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \left[ (\underline{\underline{\epsilon}}_2^1 + \underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) : \mathbf{C}_1^0 : (\underline{\underline{\epsilon}}_2^1 + \underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) - \underline{\underline{\epsilon}}_2 : \mathbf{C}_1^0 : \underline{\underline{\epsilon}}_2 \right] d\omega \\ &= \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \left[ \underline{\underline{\epsilon}}_2^1 : \mathbf{C}_1^0 : \underline{\underline{\epsilon}}_2^1 + (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) : \mathbf{C}_1^0 : (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) - \underline{\underline{\epsilon}}_2 : \mathbf{C}_1^0 : \underline{\underline{\epsilon}}_2 \right] d\omega \\ &= \langle \underline{\underline{\epsilon}}_2 \rangle : \mathbf{C}_1^{0*} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}_2 \rangle + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \left[ (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) : \mathbf{C}_1^0 : (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) - \underline{\underline{\epsilon}}_2 : \mathbf{C}_1^0 : \underline{\underline{\epsilon}}_2 \right] d\omega. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\epsilon}}_2 : \mathbf{C}_2^0 : \underline{\underline{\epsilon}}_2 d\omega &= \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} (\underline{\underline{\epsilon}}_2^2 + \underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) : \mathbf{C}_2^0 : (\underline{\underline{\epsilon}}_2^2 + \underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) d\omega \\ &= \langle \underline{\underline{\epsilon}}_2 \rangle : \mathbf{C}_2^{0*} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}_2 \rangle + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) : \mathbf{C}_2^0 : (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) d\omega. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\underline{E}}_1^0, \underline{\underline{E}}_2^0) \quad \underline{\underline{E}}_1^0 : [\mathbf{T}_\mu^1 + \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_\mu^V] : \underline{\underline{E}}_1^0 \leq -\underline{\underline{E}}_2^0 : [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^V] : \underline{\underline{E}}_2^0 + 2\underline{\underline{E}}_1^0 : [\mathbf{T}_\mu^2 + \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^V] : \underline{\underline{E}}_2^0 \\ - 2\underline{\underline{E}}_1^0 : [\mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_1^0] : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : \underline{\underline{E}}_2^0 + \underline{\underline{E}}_2^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : [\mathbf{C}_1^{0*} - \mathbf{C}_2^{0*}] : \mathcal{P}_{D_\mu}^2 : \underline{\underline{E}}_2^0 \\ + \frac{1}{|D_\mu|} \int_{C_{D_\mu}} (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) : [\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0] : (\underline{\underline{\epsilon}}_2 - \underline{\underline{\epsilon}}_2^2) d\omega. \end{aligned} \quad (4.372)$$

Notons que si le motif est homogène  $\underline{\underline{\epsilon}}_2 = \underline{\underline{\epsilon}}_2^2$  et le terme intégral est nul. L'optimisation du choix de  $\underline{\underline{E}}_2^0$  en fonction de  $\underline{\underline{E}}_1^0$  est quelque peu fastidieuse et nous ne la présentons pas. On peut appliquer le même principe au théorème de l'énergie complémentaire, mais nous ne développons pas ces calculs pour de raisons de concision.

#### 4.4.F Existence des bornes ou estimations ; premières propriétés

##### 4.4.F.a Géométries ellipsoïdales

Comme on l'a vu plus haut, le bien fondé des expressions définissant les tenseurs de Hashin et Shtrikman dépend de la satisfaction de l'encadrement (4.362). Les résultats du paragraphe 4.4.D.b établissent que, pour le second et le troisième cas envisagés, cette propriété est identiquement satisfaite. Les bornes et estimations construites dans ces cas ont donc les propriétés requises : les tenseurs en question sont symétriques, inversibles et positifs et les expressions obtenues par les approches en déformation macroscopique imposée et en contrainte macroscopique imposée sont équivalentes.

Ce résultat permet de proposer une nouvelle expression pour les tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$ , dérivée de celle des tenseurs  $\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  et qui s'applique à tout motif  $\mu$  de forme ellipsoïdale. En effet introduisons le tenseur  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  égal à la borne ou estimation de Hashin et Shtrikman construite à partir du milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  pour un matériau décrit avec des motifs tous homothétiques au motif  $\mu$ . Un tel matériau est une variante de l'Assemblage de Hashin où la sphère composite est remplacée par le motif  $\mu$  de contenu quelconque et a subi une éventuelle transformation ellipsoïdale ; il rentre dans la seconde catégorie traitée ici. D'après les résultats d'ores et déjà obtenus,  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} = [\mathbf{S}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}]^{-1}$  est symétrique et défini positif. Il est donné par :

$$\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} = \mathbf{C}^0 - [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} + [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} - \mathbf{T}_\mu^0 \right]^{-1} : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1},$$

ce qui conduit à l'expression suivante de  $\mathbf{T}_\mu^0$  :

$$\mathbf{T}_\mu^0 = [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} - [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1},$$

où  $P(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) = \left[ [\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} + C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} - C^0 \right]^{-1}$  est bien le tenseur introduit dans le cadre de l'approche classique (paragraphe 4.2.B.a) et étudié en annexe C. On reconnaît aussi dans le membre de droite une des expressions (4.140) de  $T(C^0, C^r)$ . Plus précisément :

$$\forall C^0 \quad \forall \mu / D_\mu \text{ ellipsoïdal} \quad T_\mu^0 = T(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}). \quad (4.373)$$

La relation intégrale (4.327) qui s'applique bien dans le cas présent conduit ensuite à l'expression suivante de la déformation moyenne dans le motif :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{D_\mu} = \left[ I - \mathcal{P}_{D_\mu}^0 : T_\mu^0 \right] : E^0 = P(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) : \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 \right]^{-1} : E^0 \quad (4.374)$$

qui montre que cette dernière est égale à la déformation homogène qui apparaîtrait si le motif était homogène de tenseur des modules  $C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$ . Il en est de même de la contrainte moyenne, puisque d'après (4.328), on a :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{D_\mu} = \left[ I + \mathcal{Q}_{D_\mu}^0 : S^0 : T_\mu^0 : S^0 \right] : \underline{\underline{\Sigma}}^0 = Q(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) : \left[ \mathcal{Q}_{D_\mu}^0 \right]^{-1} : \Sigma^0. \quad (4.375)$$

Le tenseur  $C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  satisfait donc :

$$\forall E^0 \quad \langle C^\mu : \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}' \right] \rangle_{D_\mu} = C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} : \langle \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_{D_\mu}. \quad (4.376)$$

Ce résultat est conforme à la première procédure de calcul des bornes de Hashin et Shtrikman et plus précisément à la relation (4.311). La démonstration qui précède établit le bien-fondé de cette dernière pour l'Assemblage de Hashin considéré ici. Elle montre en particulier que la moyenne  $\langle U_\mu^0 \rangle_\mu$  (qui se résume à un terme dans le cas présent) admet un inverse, puisque  $U_\mu^0$  vaut :

$$U_\mu^0 = P(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) : \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^0 \right]^{-1}, \quad (4.377)$$

les deux tenseurs dans le membre de droite étant inversibles. La bijectivité entre la sollicitation  $E^0$  à l'infini et le champ moyen sur le motif est alors bien vérifiée. On montre de même la non-dégénérescence de  $V_\mu^0$ , qui découle de la définie positivité de  $Q(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}})$  et  $\mathcal{Q}_{D_\mu}^0$ .

L'encadrement établi plus haut :

$$T(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^R) \leq T_\mu^0 = T(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \leq T(C^0, C_{\mu\text{MMR}}^V)$$

et l'expression suivante de l'inverse de la fonction  $C^r \rightarrow T(C^0, C^r)$  à  $C^0$  fixé :

$$\begin{aligned} C^r &= P(C^0, C^r)^{-1} + C^0 - \left[ \mathcal{P}_d^0 \right]^{-1} \\ &= \left[ \mathcal{P}_d^0 - \mathcal{P}_d^0 : T(C^0, C^r) : \mathcal{P}_d^0 \right]^{-1} + C^0 - \left[ \mathcal{P}_d^0 \right]^{-1} \end{aligned}$$

permettent d'encadrer le tenseur  $C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$ . En effet, le tenseur défini positif  $P(C^0, C^r)$  est une fonction décroissante de  $T$  ; son inverse, et donc aussi  $C^r$ , en sont donc des fonctions croissantes. D'où le résultat :

$$C_{\mu\text{MMR}}^R \leq C_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} \leq C_{\mu\text{MMR}}^V, \quad (4.378)$$

valable quel que soit le milieu de référence.

Ces résultats s'appliquent à tout motif de forme ellipsoïdale. Considérons d'abord le cas où les supports de tous les motifs de la description par MMR considérée sont des ellipsoïdes mais de rapports de forme et d'orientations éventuellement différents. Il s'agit d'un cas particulier de la première situation considérée, pour laquelle on s'intéresse à des estimations de type Mori et Tanaka généralisées. Les résultats précédents assurent qu'elles sont données par :

$$C_{\text{MMR}}^{\text{MT}1} = C^1 - \left[ \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} + \left[ \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} : \left[ \left[ \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1} - \langle T(C^1, C_{\mu\text{MMR}}^{1\text{HS}}) \rangle \right]^{-1} : \left[ \mathcal{P}_d^1 \right]^{-1}. \quad (4.379)$$

Ce tenseur s'identifie au tenseur de Hashin et Shtrikman classique calculé dans le cadre de la démarche de Willis et Ponte Castañeda, relatif au matériau déduit de celui étudié en *remplaçant chaque motif hétérogène par une inclusion homogène*, de tenseur des modules le tenseur de Hashin et Shtrikman pertinent pour l'Assemblage de Hashin construit à partir du motif en question en prenant pour milieu de référence la matrice  $\mathbf{C}^1$ , et en supposant que ces *inclusions homogènes respectent la même distribution ellipsoïdale simple que les motifs hétérogènes*. Formellement ceci peut s'écrire :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}^{-1}}(\mathbf{C}^1, \{\mathbf{C}^\mu(\cdot), \mu \in [2, n]\}) = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}1}(\mathbf{C}^1, \{\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{1\text{HS}}, \mu \in [2, n]\}). \quad (4.380)$$

Les propriétés établies dans le cadre de la démarche de Willis et Ponte Castañeda s'appliquent alors à l'identique au cas présent. En particulier, lorsque les conditions

$$\forall \mathbf{S}^1 \quad \sum_{r \geq 2} C_r [\mathcal{P}_\mu^1]^{-1} \leq [\mathcal{P}_d^1]^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{r \geq 2} C_r [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_\mu^1]^{-1} \leq [\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1]^{-1} \quad (4.381)$$

sont satisfaites (cf. paragraphe 4.2.C.c), le tenseur symétrique  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}^{-1}}$  a toutes les propriétés requises : il est défini positif et son inverse est bien le tenseur calculé dans l'approche en contrainte imposée. Les conditions ci-dessus s'interprètent encore comme des contraintes géométriques entre les fractions volumiques, les paramètres de la distribution des motifs et ceux définissant leur forme ellipsoïdale.

Lorsque de plus *tous les motifs ont la même forme* (seconde et troisième situations), le tenseur  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0$  est le même pour tous et vaut  $\mathcal{P}_d^0$ . L'encadrement (4.362) est alors identiquement satisfait et il n'y a pas de contrainte sur les fractions volumiques de motifs. Les résultats obtenus sont égaux à ceux obtenus dans le cadre de l'approche classique pour un matériau déduit de celui étudié en *remplaçant chaque phase morphologique par une phase homogène*, de tenseur des modules le tenseur de Hashin et Shtrikman pertinent pour l'Assemblage de Hashin construit à partir du motif en question avec le même milieu de référence, et en supposant que *ces phases homogènes respectent une distribution ellipsoïdale simple de mêmes paramètres que la distribution ellipsoïdale simple vérifiée par les motifs hétérogènes*. Formellement :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}^\mu(\cdot), \mu \in [1, n]\}) = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}, \mu \in [1, n]\}), \quad (4.382)$$

où, pour l'éventuelle matrice, on prend bien sûr  $\mathbf{C}_{1\text{MMR}}^{0\text{HS}} = \mathbf{C}^1$ . Dans ce cas, l'on peut aussi utiliser les relations

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0} = -\mathbf{C}_d^{0\star} + \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \rangle^{-1} = \left\langle [\mathbf{C}_d^{0\star} + \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}]^{-1} \right\rangle^{-1} - \mathbf{C}_d^{0\star} \quad (4.383)$$

et

$$\mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0} = -\mathbf{S}_d^{0\star} + \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \rangle^{-1} = \left\langle [\mathbf{S}_d^{0\star} + \mathbf{S}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}]^{-1} \right\rangle^{-1} - \mathbf{S}_d^{0\star} \quad (4.384)$$

avec  $\mathbf{C}_d^{0\star} = [\mathbf{S}_d^{0\star}]^{-1} = [\mathcal{P}_d^0]^{-1} - \mathbf{C}^0$ . Elles généralisent les dernières expressions des relations (4.158) et (4.159) qui s'appliquent dans le cas d'une distribution ellipsoïdale simple des phases mais pas dans le cadre de la description de Willis et Ponte Castañeda lorsque les inclusions ne sont pas de même forme. Notons aussi que les tenseurs  $\langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu$  et  $\langle \mathbf{V}_\mu^0 \rangle_\mu$ , qui s'écrivent :

$$\langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu = \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \rangle_\mu : [\mathcal{P}_d^0]^{-1} \quad (4.385)$$

$$\text{et} \quad \langle \mathbf{V}_\mu^0 \rangle_\mu = \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \rangle_\mu : [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} : \mathbf{C}^0, \quad (4.386)$$

sont bien inversibles puisque tous les tenseurs  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}})$  et  $\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}})$  sont définis positifs. La relation (4.311) est donc également pertinente dans le cas de plusieurs motifs.

#### 4.4.F.b Géométries quelconques

Dans le premier cas abordé, avec des supports de motifs de géométries quelconques, les choses ne sont pas aussi simples. L'encadrement

$$\left[\mathcal{P}_d^1 - \mathbf{S}^1\right]^{-1} < \left\langle \mathbf{T}_\mu^1 \right\rangle_\mu < \left[\mathcal{P}_d^1\right]^{-1}. \quad (4.387)$$

est une condition nécessaire qu'il faut *supposer* satisfaite pour assurer le bien fondé des expressions donnant les tenseurs de Hashin et Shtrikman et leur positivité. Comme plus haut, elle s'interprète comme une contrainte entre les fractions volumiques des différents motifs, leurs formes externes et les paramètres de l'hypothèse de distribution ellipsoïdale (*cf.* paragraphe 4.2.C.c). Il convient de préciser cette idée.

Notons d'abord que, pour des géométries externes de motifs et une distribution de leurs centres données, satisfaisant les conditions requises, il est possible de construire un grand nombre de matériaux différents, en modifiant simplement la structure interne des motifs et le comportement de la matrice. En particulier, il est permis de choisir des motifs homogènes de façon à se ramener à la situation abordée par Willis et Ponte Castañeda. Les *conditions nécessaires* d'existence de la microstructure établies dans ce cadre s'appliquent donc aussi au cas présent, leur formulation devenant :

$$\forall \mathbf{S}^1 \quad \sum_{r \geq 2} C_r \left[\mathbf{P}_\mu^1\right]^{-1} \leq \left[\mathcal{P}_d^1\right]^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{r \geq 2} C_r \left[\mathbf{S}^1 - \mathbf{P}_\mu^1\right]^{-1} \leq \left[\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1\right]^{-1}. \quad (4.388)$$

Ces conditions sont suffisantes pour assurer le bien fondé des expressions donnant les bornes relatives à la première situation envisagée, c'est-à-dire lorsque la matrice est la phase la plus raide ou la plus souple. En effet, lorsque  $\mathbf{C}^1 \geq \mathbf{C}(\underline{x})$ ,  $\forall \underline{x} \in \mathcal{S}$ , les résultats du paragraphe 4.4.D.a assurent que les inégalités suivantes s'appliquent :

$$\left[ \forall \mu \in [2, n] \quad \mathbf{T}_\mu^1 \leq \left[\mathbf{P}_\mu^1\right]^{-1} \right] \Rightarrow \left\langle \mathbf{T}_\mu^1 \right\rangle_\mu \leq \sum_{r \geq 2} C_r \left[\mathbf{P}_\mu^1\right]^{-1} \Rightarrow \left\langle \mathbf{T}_\mu^1 \right\rangle_\mu \leq \left[\mathcal{P}_d^1\right]^{-1};$$

l'expression du tenseur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}1}$  est alors bien construite. Si la matrice est la phase la plus souple, les hypothèses ci-dessus assurent de même que  $\left\langle \mathbf{T}_\mu^1 \right\rangle_\mu \geq \left[\mathbf{S}^1 - \mathcal{P}_d^1\right]^{-1}$ , ce qui garantit le bien fondé de l'expression donnant  $\mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{HS}1}$ . En revanche, elles ne sont pas suffisantes pour établir simultanément les deux inégalités requises et il n'est alors pas possible d'établir la positivité, ni même la non-dégénérescence des tenseurs de Hashin et Shtrikman. Lorsque la matrice n'est ni la phase la plus raide, ni la plus souple, on ne peut pas même pas s'assurer du bien fondé des expressions définissant les tenseurs. Ceci suggère (mais ceci n'est pas une démonstration) que les conditions (4.388) ne sont *pas suffisantes* pour garantir l'existence d'une microstructure décrite avec les géométries externes de motifs retenues et satisfaisant l'hypothèse faite sur la distribution de leurs centres. Mais quoi qu'il en soit, tous les commentaires relatifs à la nécessaire présence de matrice autour des motifs et à la minoration de la fraction volumique de matrice (paragraphe 4.2.C.e) s'appliquent à l'identique à la description par MMR : les conditions (4.232) et (4.233) nécessaires au bien fondé de l'approche de Willis et Ponte Castañeda, s'appliquent aussi dans le cas d'inclusions hétérogènes, quelle que soit leur géométrie et l'hypothèse de distribution et la condition (4.235) est nécessaire dans les cas particuliers où l'on peut associer un « sphéroïde de sécurité » à chaque représentant des motifs au sein de la microstructure. Nous montrerons ultérieurement que cette dernière condition est suffisante dans tous les cas.

Dans ce cas général, nous ne connaissons pas de résultat permettant de remplacer le contenu hétérogène d'un motif par une phase homogène équivalente. Il n'est en particulier pas possible de définir des tenseurs  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  lorsque les supports des motifs ne sont pas des ellipsoïdes, puisqu'alors il n'est pas possible de ne s'intéresser qu'à un motif isolé : il faut tenir compte de la matrice et des hypothèses de distributions qui n'apparaissent pas intrinsèquement dans la forme du support du motif.

#### 4.4.G Encadrements des bornes obtenues

Rappelons l'expression générale de la borne ou de l'estimation construites à partir du milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  (égal à  $\mathbf{C}^1$  dans le premier cas), qui s'applique aux diverses situations envisagées, dans

l'hypothèse (à vérifier éventuellement) où l'encadrement (4.362) est satisfait :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}^0} &= \mathbf{C}^0 - [\mathcal{P}_d^0]^{-1} + [\mathcal{P}_d^0]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_d^0]^{-1} - \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \right]^{-1} : [\mathcal{P}_d^0]^{-1} \\ &= \left[ \mathbf{S}^0 - [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} + [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} : \left[ [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu : \mathbf{S}^0 \right]^{-1} : [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.389)$$

C'est une fonction croissante de  $\langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu$  à  $\mathbf{C}^0$  fixé. La croissance dans les mêmes conditions de cette quantité en fonction des modules locaux des phases assure que toutes les bornes et estimations construites précédemment sont elles-mêmes des fonctions croissantes des modules des constituants à milieu de référence fixé (soit, pour la première situation, à matrice fixée).

Par ailleurs, les nombreux encadrements relatifs à cette quantité obtenus plus haut conduisent donc à des encadrements de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{MT}^0}$ , à condition que les bornes  $\mathcal{B}$  en question vérifient elles-aussi  $[\mathcal{P}_d^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} < \mathcal{B} < [\mathcal{P}_d^0]^{-1}$ . L'inégalité élémentaire (4.334) permet d'abord de généraliser les propriétés (4.163) et (4.164) :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{C}^0 / [\mathcal{P}_d^0]^{-1} + \mathbf{C}^0 > \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} \\ \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0} &\leq \mathbf{C}^0 - [\mathcal{P}_d^0]^{-1} + [\mathcal{P}_d^0]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_d^0]^{-1} + \mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} \right]^{-1} : [\mathcal{P}_d^0]^{-1} \\ &= \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} + [\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}}] : \left[ [\mathcal{P}_d^0]^{-1} + \mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} \right]^{-1} : [\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}}] \end{aligned} \quad (4.390)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{C}^0 / [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} + \mathbf{S}^0 > \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}} \\ \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0} &\leq \mathbf{S}^0 - [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} + [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} : \left[ [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} + \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}} \right]^{-1} : [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} \\ &= \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}} + [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}] : \left[ [\mathcal{Q}_d^0]^{-1} + \mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}} \right]^{-1} : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}]. \end{aligned} \quad (4.391)$$

Lorsque  $\mathbf{C}^0$  est plus raide que  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}}$  ou plus souple que  $\mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}$ , les majorants sont plus petits que  $\mathbf{C}^0$  et  $\mathbf{S}^0$  respectivement. Ceci implique en particulier que les bornes ainsi construites sont toujours plus restrictives que les milieux de référence qui servent à les construire : on généralise ainsi le résultat (4.166). On peut bien sûr aussi écrire les mêmes règles en invoquant les bornes de Voigt et Reuss classiques, mais les encadrements obtenus seront moins performants et les conditions d'application plus restrictives.

L'inégalité (4.339) assure ensuite que si le milieu de référence est plus raide que les phases constitutives, soit en cas de construction d'une borne supérieure, la moyenne  $\langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu$  et donc le tenseur de Hashin et Shtrikman sont inférieurs à leurs homologues relatifs au matériau déduit du matériau étudié en remplaçant les motifs morphologiques par des motifs homogènes de comportement donné par la borne d'ordre 0 correspondante :

$$\left[ \forall \underline{x} \mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}(\underline{x}) \right] \Rightarrow \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0}(\mathbf{C}^0, \{C_\mu(\cdot), \mu \in [1, n]\}) \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}^0}(\mathbf{C}^0, \{C_\mu^+, \mu \in [1, n]\}). \quad (4.392)$$

De même :

$$\left[ \forall \underline{x} \mathbf{S}^0 \geq \mathbf{S}(\underline{x}) \right] \Rightarrow \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0}(\mathbf{C}^0, \{C_\mu(\cdot), \mu \in [2, n]\}) \leq \mathbf{S}_{\text{CL}}^{\text{HS}^0}(\mathbf{C}^0, \{C_\mu^-, \mu \in [2, n]\}). \quad (4.393)$$

En particulier, lorsque les motifs sont homogènes, ceci établit que les bornes obtenues dans l'approche par MMR, avec des champs de polarisation non nécessairement uniformes dans les inclusions, sont toujours au moins aussi bonnes que celles obtenues dans l'approche classique avec des champs de polarisation uniformes par morceaux. On peut d'ailleurs vérifier qu'il n'y a inégalité que lorsque tous

les motifs sont ellipsoïdaux (mais de supports éventuellement différents) : les champs d'essai utilisés dans la formulation variationnelle ne coïncident en effet avec la solution exacte que dans cette situation.

Ces premiers résultats s'appliquent quelle que soit la géométrie des motifs. Lorsque leurs *supports sont des ellipsoïdes*, on peut tirer profit des encadrements obtenus aux paragraphes 4.4.D.b et 4.4.F pour les tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$ , dont le plus restrictif est :

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}) \leq \mathbf{T}_\mu^0 = \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \leq \mathbf{T}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}). \quad (4.394)$$

Il conduit à l'inégalité suivante, valable cette fois-ci pour tout milieu de référence :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}, \mu \in [1, n]\}) \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{C_\mu(\cdot), \mu \in [1, n]\}) \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}, \mu \in [1, n]\}). \quad (4.395)$$

On a bien sûr aussi :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}_\mu^{\text{R}}, \mu \in [1, n]\}) \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{C_\mu(\cdot), \mu \in [1, n]\}) \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}(\mathbf{C}^0, \{\mathbf{C}_\mu^{\text{V}}, \mu \in [1, n]\}). \quad (4.396)$$

Ce dernier encadrement est moins performant que le précédent. Il présente en revanche l'avantage d'être plus facile à utiliser puisque le calcul des bornes ne fait appel qu'aux outils de l'approche classique :  $n-1$  moyennes volumiques et un calcul de borne de Hashin et Shtrikman classique conduisent au résultat. Le calcul des bornes du premier encadrement exige la résolution de  $n-1$  problèmes de structure sur des motifs, qui nécessite en pratique quasiment les mêmes outils que ceux que l'on mettrait en œuvre pour calculer directement le tenseur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$ .

Enfin, si les supports des motifs sont tous de même forme, compatible avec les hypothèse de distribution, on peut utiliser le résultat (4.174). Les encadrements ci-dessus conduisent à :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{R}} < \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0} < \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}}. \quad (4.397)$$

Cet encadrement est une conséquence de la possibilité d'écrire les tenseurs de Hashin et Shtrikman sous la forme (4.158) soit encore dans le cas présent, sous la forme (4.383). Elle ne vaut que pour la seconde et la troisième situations étudiées. La propriété (4.174) conduit aussi à :

$$\forall \mathbf{C}^0 \quad \langle \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} \rangle_\mu < \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0} < \langle \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} \rangle_\mu. \quad (4.398)$$

Cet encadrement est plus restrictif que le précédent mais moins intéressant en pratique puisque calculer ses termes revient quasiment à calculer directement le tenseur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$ .

Il est possible de préciser l'encadrement (4.397). Nous avons déjà montré que dans le cas d'une distribution ellipsoïdale simple des phases, les bornes sont atteintes lorsque le milieu de référence est beaucoup plus raide ou beaucoup plus souple que les phases constitutives. Il en est de même lorsque les motifs sont hétérogènes, mais la démonstration est un peu plus longue. L'argument algébrique (voir la page 201) utilisé dans le cadre de l'approche classique s'applique aussi dans ce cas plus général : lorsque par exemple  $\mathbf{C}^0$  est très grand, il en est de même de  $\mathbf{C}^{0\star}$ . Comme le tenseur  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  est majoré par  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}$ , indépendant de  $\mathbf{C}^0$ , il est négligeable devant  $\mathbf{C}^{0\star}$ . La déformation moyenne est alors la même dans tous les motifs :  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  s'identifie à la moyenne  $\langle \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}} \rangle_\mu$ . Il reste à vérifier que dans ce cas d'un milieu de référence très raide,  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  est égal à  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}$ . Pour ce faire nous allons montrer que le champ  $\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}$  solution du problème d'inclusion hétérogène construit à partir du motif  $\mu$  et de ce milieu de référence, pour la déformation  $\underline{\underline{E}}^0$  à l'infini, est égal, en dehors du domaine occupé par le motif, au champ  $\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0$  qui apparaîtrait dans les mêmes conditions si les modules des constituants du motifs étaient tous nuls. Considérons la forme quadratique suivante sur l'écart entre ces deux champs :

$$\Delta = \int_{C_{D_\mu}} [\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^0] : \mathbf{C}^0 : [\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^0] d\omega = \int_{C_{D_\mu}} [\underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} - 2\underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0] d\omega.$$

Comme  $\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}$  est solution et  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  est  $\text{CA}^\infty$ , on a :

$$\int_{C_{D_\mu}} [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}] : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega + \int_{D_\mu} [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}] : \mathbf{C}^\mu : \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega = 0$$



D'où :

$$\int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega = \underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{C}^0 : \int_{D_\mu} \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega - \int_{D_\mu} [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}] : \mathbf{C}^\mu : \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega.$$

Par ailleurs, le théorème de l'énergie potentielle appliqué au problème relatif au motif  $\mu$  en utilisant le champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  comme champ admissible donne :

$$\begin{aligned} \int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} d\omega &\leq \int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega \\ &+ \int_{D_\mu} [\underline{\underline{\epsilon}}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 - \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} + [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] : [\mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^0] : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0]] d\omega. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  étant solution pour des modules nuls dans  $D_\mu$ , on a :

$$\int_{C_{D_\mu}} \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega = \underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{C}^0 : \int_{D_\mu} \underline{\underline{\epsilon}}^0 d\omega.$$

En combinant ces relations, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \int_{D_\mu} [\underline{\underline{\epsilon}}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 - [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] : \mathbf{C}^0 : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] - \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}] d\omega \\ &+ \int_{D_\mu} [[\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] : \mathbf{C}^\mu : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] + 2 [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}] : \mathbf{C}^\mu : \underline{\underline{\epsilon}}^0] d\omega. \end{aligned} \quad (4.399)$$

Le premier terme du majorant est négatif. En effet,  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  est uniforme sur  $D_\mu$  et donné par :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^0 = -\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0 = -\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0.$$

D'où :

$$\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0 = -\mathbf{S}^0 : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0$$

et

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{\epsilon}}^0 : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0 - [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] : \mathbf{C}^0 : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] \\ &= \underline{\underline{E}}^0 : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \mathbf{C}^0 : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0] : [\mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0. \end{aligned}$$

Comme  $[\mathcal{P}_{D_\mu}^0]^{-1} > \mathbf{C}^0$ , on a  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \mathbf{C}^0 : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 < \mathcal{P}_{D_\mu}^0$  et donc  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0 : \mathbf{C}^0 : \mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0 < \mathcal{P}_{D_\mu}^0 - \mathbf{S}^0 < 0$ . On a donc finalement :

$$\Delta \leq \int_{D_\mu} [[\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] : \mathbf{C}^\mu : [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^0] + 2 [\underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}] : \mathbf{C}^\mu : \underline{\underline{\epsilon}}^0] d\omega. \quad (4.400)$$

Lorsque  $\mathbf{C}^0$  devient grand, l'ordre de grandeur du majorant reste le même puisque  $\mathbf{C}^\mu$  et  $\underline{\underline{E}}^0$  sont maintenus constants et que  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}$  sont de l'ordre de  $\underline{\underline{E}}^0$ . En conséquence,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  tend vers  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$ . Le motif  $\mu$  est donc soumis à des conditions de déformation homogène à sa frontière et donc  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}} = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}$ . En résumé :

$$\lim_{\|\mathbf{C}^0\| \rightarrow +\infty} \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0) = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{V}}. \quad (4.401)$$

La propriété s'applique à tout motif ne comportant pas de phase rigide. On montre de même que lorsqu'il n'y a pas de pores, on a :

$$\lim_{\|\mathbf{C}^0\| \rightarrow 0} \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0) = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{R}}. \quad (4.402)$$

En conséquence, lorsque le matériau ne contient ni pore ni phase rigide :

$$\begin{cases} \lim_{\|\mathbf{C}^0\| \rightarrow +\infty} \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0) = \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} \\ \lim_{\|\mathbf{S}^0\| \rightarrow +\infty} \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0) = \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}} \end{cases} \quad (4.403)$$

Notons enfin que c'est aussi l'expression (4.158) qui permet de montrer la croissance du tenseur des modules de Hashin et Shtrikman en fonction de  $\mathbf{C}^0$  dans l'approche classique. De la même manière on peut établir celle de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$ , mais « à  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  fixé ». Ceci ne suffit pas pour assurer la croissance en fonction de  $\mathbf{C}^0$  à  $\mathbf{C}^\mu(\cdot)$  fixé, puisque  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  dépend de  $\mathbf{C}^0$ . Il suffirait toutefois de montrer la croissance de  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  pour établir la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  en fonction des modules du milieu de référence. Cette propriété est bien sûr satisfaite si les motifs sont homogènes, mais sa démonstration dans le cas général reste une question ouverte. Les majorations obtenues à la fin du paragraphe 4.4.E de  $\mathbf{T}_\mu^1$  construit à partir du milieu de référence  $\mathbf{C}^1$ , par des grandeurs définies à partir d'un milieu de référence  $\mathbf{C}^2 > \mathbf{C}^1$  et en particulier  $\mathbf{T}_\mu^2$ , conduisent certes à des majorations de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}1}$  du fait de la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  en fonction de  $\mathbf{T}_\mu^0$  à  $\mathbf{C}^0$  fixé. Mais les majorants en question, donnés par des expressions relativement compliquées que nous ne reportons pas, sont supérieurs<sup>19</sup> à  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}2}$ . Ces inégalités déduites de la formulation variationnelle du problème de l'inclusion hétérogène s'avèrent donc *insuffisantes pour démontrer la propriété de croissance stricte de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$* , qui a toutefois été constatée systématiquement dans tous les cas particuliers étudiés numériquement (cf. chapitre suivant).

## 4.4.H Commentaires

### 4.4.H.a Optimisation de la description morphologique

Rappelons qu'un même matériau admet un grand nombre de descriptions par MMR alors qu'il n'admet qu'une seule description classique. Pour un matériau de référence donné, l'approche classique ne conduit ainsi qu'à une seule borne. En revanche, l'approche par MMR permet une optimisation du résultat par un choix pertinent des motifs. Rappelons aussi que le résultat est d'autant plus performant que l'espace  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$  des polarisation d'essai est vaste : de deux projections  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  telles que  $\mathcal{P}_2(\mathbb{T}_2^s(\Omega)) \subset \mathcal{P}_1(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$ , la plus pertinente est clairement  $\mathcal{P}_1$ . Cette situation est notamment celle de deux descriptions par MMR de mêmes centres de motifs mais dont les supports  $D_\mu^2$  de la seconde sont inclus dans ceux  $D_\mu^1$  de la première. Les champs de polarisation d'essai de la seconde sont en effet des cas particuliers de la première : pour le montrer, il suffit de compléter les champs locaux  $\underline{\eta}^\mu$  sur  $D_\mu^2$  par des champs uniformes et égaux à  $\underline{\eta}^1$  sur  $D_\mu^1 \setminus D_\mu^2$ .

En particulier, les raisonnements développés au paragraphe 4.2.C.e montrent que si l'on dispose d'une description par MMR avec des motifs de géométrie quelconque, satisfaisant une hypothèse de distribution ellipsoïdale simple, la description déduite en remplaçant chaque motif de support  $D_\mu$  par son enveloppe convexe  $E_\mu$ , le domaine intermédiaire  $E_\mu \setminus D_\mu$  étant occupé par la matrice  $\mathbf{C}^1$ , est encore applicable à la microstructure considérée et conduit à des encadrements au moins aussi bons. Il est donc judicieux de choisir des motifs convexes.

Par ailleurs, ces mêmes raisonnements montrent que dans certaines situations particulières, déterminées par la similitude de certains points de contact entre les frontières des motifs et les frontières des plus petits ellipsoïdes de forme compatible avec les hypothèses de distribution qui les contiennent, on peut remplacer les motifs par ces derniers. Dans ce cas, une description par MMR quelconque (situation 1) se ramène à une description par motifs ellipsoïdaux (situation 3), qui conduit à des propriétés plus riches et autorise notamment le choix d'un milieu de référence quelconque. Il est donc judicieux, sitôt que cela est possible, d'opter pour de tels motifs ellipsoïdaux.

Enfin, il se peut que les représentants au sein de la microstructure des motifs, de géométrie quelconque, ne soient jamais ou rarement en contact, c'est-à-dire que le milieu  $\mathbf{C}^1$  joue vraiment un rôle de matrice. Pour tenir compte de cette information morphologique, on pourra chercher à compléter les motifs par une gaine plus ou moins épaisse de matrice, de façon à minimiser la fraction volumique de matrice résiduelle et donc de sorte qu'au moins l'un des représentants de chaque motif obtenu soient en contact avec un autre motif. Dans cette procédure, il est bien sûr judicieux de chercher à construire des motifs de supports ellipsoïdaux, compatibles avec les paramètres de la distribution.

<sup>19</sup>En tous cas dans des situations particulières qui permettent de simplifier les expressions des majorants et qui seront à nouveau abordées ultérieurement.

La figure 4.13 montre ces diverses constructions successives dans une situation de distribution isotrope, certes caricaturale mais bien démonstrative.

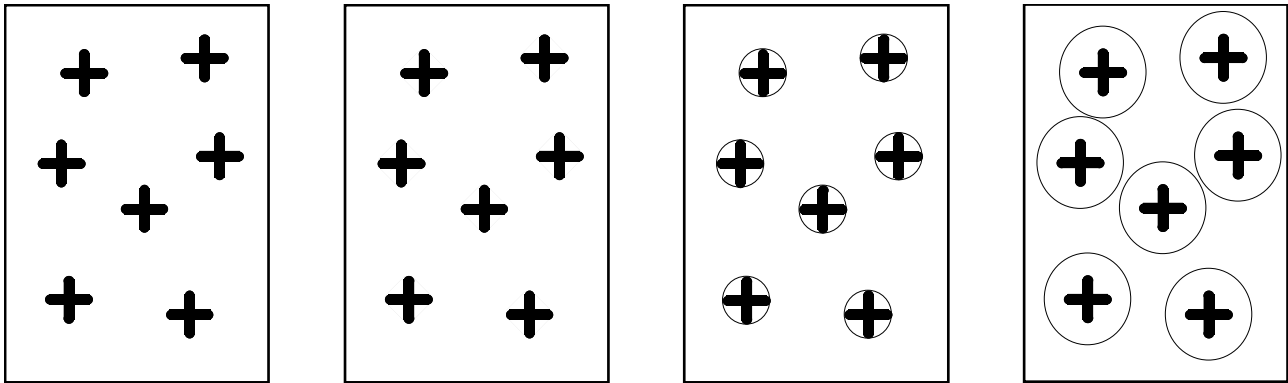


Figure 4.13 : Optimisation du choix des motifs

#### 4.4.H.b Conséquences

Précisons que ces procédures d'« agrandissement » des motifs n'ajoutent jamais que de la phase matrice autour des motifs initiaux. Lorsque l'on construit des bornes en prenant cette dernière comme milieu de référence (c'est-à-dire aussi des estimations de type « Mori et Tanaka »), le résultat final est le même que celui que l'on obtient avec les motifs initiaux. En effet, la polarisation sur les domaines ajoutés aux motifs est alors identiquement nulle et celle sur les supports des motifs initiaux est aussi la même que dans l'approche initiale, puisque les problèmes auxiliaires d'inclusions hétérogènes en milieu infini à résoudre sont les mêmes. Seule l'interprétation des domaines ajoutés autour des motifs change : dans l'approche initiale, il s'agit de milieu de référence, alors qu'avec les motifs agrandis, il s'agit de matrice. En revanche, lorsque l'on utilise un milieu de référence distinct de la matrice, les bornes obtenues avec les motifs de plus grande extension sont meilleures.

La remarque précédente implique aussi que dans le cas où il est possible d'inclure chaque motif dans un ellipsoïde de forme compatible avec les hypothèses de distribution, c'est-à-dire lorsque la notion de « sphéroïdes de sécurité » (*cf.* paragraphe 4.2.C.e) a bien un sens, les estimations de type « Mori et Tanaka » ou « Willis et Ponte Castañeda » ont toutes les propriétés des bornes ou estimations construites dans les seconde et troisième situations. Les conditions qui assurent l'existence et la positivité des tenseurs de Hashin et Shtrikman sont en particulier identiquement satisfaites. Mais rappelons que l'existence de ces sphéroïdes de sécurité n'est une conséquence des hypothèses de distribution que dans des cas très particuliers. Cette remarque montre en revanche que la condition (4.235) est une *condition suffisante* pour le bien-fondé de l'approche de Willis et Ponte Castañeda, qui complète les « conditions nécessaires » (4.232) et (4.233) qui s'appliquent quel que soit les géométries de motifs. En effet, si la fraction volumique de matrice satisfait (4.235), il est possible de construire un Assemblage de Hashin généralisé à partir des sphéroïdes de sécurité associés à chaque motif et d'un éventuel motif homogène constitué de matrice, rendant compte du possible excédent de cette dernière. L'estimation construite pour cet assemblage en prenant la matrice comme milieu de référence a toutes les propriétés requises. Or elle s'identifie à celle calculée par l'approche de Mori et Tanaka généralisée appliquée au matériau considéré au départ, mais pour lequel les sphéroïdes de sécurité ne sont pas nécessairement des domaines propres à chaque inclusion. Cette estimation a donc les mêmes propriétés et les inégalités (4.387) sont en particulier automatiquement satisfaites. Rappelons que la condition (4.235) est nécessaire lorsque l'on peut associer un sphéroïde de sécurité à chaque représentant des motifs au sein de la microstructure. Son caractère nécessaire n'est en revanche pas certain dans les autres cas.

Précisons bien que le résultat précédent ne vaut que pour les estimations construites en prenant la matrice comme milieu de référence. Dans les autres cas, les polarisations optimales que l'on pourrait calculer pour le matériau étudié si l'on développait la démarche dans ce sens, et celles qui s'appliquent à

Assemblage de Hashin généralisé introduit plus haut ne sont plus les mêmes, si bien que le raisonnement ne s'applique plus.

#### 4.4.H.c Prise en compte de la morphologie matrice/inclusion

Considérons le cas d'un composite à particules homogènes décrit conformément à la démarche de Willis et Ponte Castañeda. Nous avons déjà montré que les bornes MMR (ou plus précisément les estimations calculées lorsque la matrice est la phase la plus raide ou la plus souple) obtenues lorsque l'on adopte comme motifs les particules elles-mêmes sont au moins aussi bonnes que celles des auteurs ci-dessus, mais qu'il y a identité lorsque les inclusions sont des ellipsoïdes. La raison en est que le champ de polarisation optimal est alors effectivement homogène par morceaux et donc identique à celui calculé par Willis et Ponte Castañeda. À l'opposé, lorsque la géométrie est telle que le champ de polarisation optimal n'est pas homogène<sup>20</sup> les nouvelles bornes sont nécessairement meilleures.

Lorsqu'il est possible d'associer un sphéroïde de sécurité à chaque inclusion au sein de la microstructure, il est avantageux d'opter pour des motifs incluant une gaine de matrice la plus grande possible. D'après les conclusions du paragraphe précédent, les résultats ne sont pas modifiés lorsque l'on adopte la matrice comme milieu de référence. Dans le cas contraire, le champ de polarisation dans ces gaines de matrice n'est en revanche pas nul et n'a pas non plus de raison d'être homogène. Les bornes construites par l'approche MMR sont alors toujours meilleures que celles obtenues par l'approche classique, si bien que l'encadrement global des modules effectifs est meilleurs. La raison fondamentale en est que, lorsqu'on utilise des motifs comportant des gaines externes de matrice d'épaisseur non nulle, on rend véritablement compte de l'information morphologique qui stipule que deux inclusions ne peuvent jamais se toucher.

L'épaisseur de ces gaines rend compte de la nature inclusionnaire plus ou moins prononcé des renforts. Considérons en effet le cas le plus simple de renforts sphériques en distribution isotrope. Les sphéroïdes de sécurité s'identifient alors aux inclusions elles-mêmes et la fraction volumique de la gaine de matrice qu'il est possible d'ajouter autour de ces dernières varie de 0 à la concentration totale en matrice du composite. Lorsqu'elle est nulle, on obtient les bornes de Hashin et Shtrikman ou encore l'estimation de Mori et Tanaka classiques. Le caractère inclusion/matrice (MI) n'est guère pris en compte puisque les hypothèses invoquées n'interdisent nullement à deux inclusions de se toucher. À l'opposé lorsqu'elle est maximale, les résultats sont pertinents pour un Assemblage de Sphères Composites, qui constitue en quelque sorte le degré maximal de morphologie inclusion/matrice. On peut reprocher à cette construction sa nature fractale qui n'est guère représentative de microstructures réelles. Mais toute valeur intermédiaire de la fraction volumique de la gaine de matrice rend aussi compte du caractère MI à un degré plus ou moins fort. Rappelons que la compacité maximale d'un amas de sphères de même diamètre est de l'ordre de 65% alors que celle d'un mélange bimodal de sphères peut dépasser les 80% pour un rapport des rayons de l'ordre de 5 (voir par exemple les courbes données dans la référence [2]). On peut ainsi rendre compte de la nature inclusionnaire d'une phase de fraction volumique relativement élevée sans pour autant faire appel à une construction fractale. Par exemple, s'il y a 40% de renforts, on peut inclure les deux tiers de la matrice dans la gaine et considérer le restant comme phase 1, de fraction volumique  $C_1 = 20\%$ . Les bornes obtenues ne seront pas aussi resserrées que celles que l'on obtiendrait pour l'Assemblage de Sphères Composites, mais néanmoins beaucoup plus précises que les bornes de Hashin et Shtrikman classique. Cette situation très simple se généralise facilement aux cas de plusieurs inclusions de forme quelconque. On peut aussi adopter une démarche plus élaborée en faisant appel, pour une même famille d'inclusions, à plusieurs motifs dont la fraction volumique de la gaine varie. Le résultat rend alors compte des fluctuations de la distance entre particules voisines, soit en d'autres termes de fluctuations de concentrations locales, analogues à celles que l'on a cherché à décrire par le modèle mnPh. Ces remarques s'appliquent bien sûr à l'identique à des inclusions hétérogènes, par exemple les inclusions multicouches, décrites par le modèle mnPh mais aussi par d'autres auteurs [93].

---

<sup>20</sup>C'est-à-dire, en pratique, lorsque les renforts ne sont pas des ellipsoïdes. Mais ceci mérite une démonstration : la forme ellipsoïdale est-elle la seule qui conduit à des déformations homogènes dans le problème d'inclusion en milieu infini ?

Situation	1		2	3
Géométrie des supports	quelconque	ellipsoïdes	ellipsoïdes de même forme	
Concentration en matrice	minorée ; meilleur minorant connu dans certains cas		nulle	quelconque
Distribution des motifs	ellipsoïdale simple			
Microstructure décrite	Matrice et inclusions hétérogènes		Assemblage de Hashin généralisé	Matrice et inclusions hétérogènes
Conditions sur $\langle \mathbf{T} \rangle$	oui, à préciser	oui (nécessaires et suffisantes)	pas de conditions	
Milieu de référence $\mathbf{C}^0$	Matrice $\mathbf{C}^1$		quelconque	
Symétrie de $\mathbf{C}_{MMR}^{HS0}$	oui			
Positivité de $\mathbf{C}_{MMR}^{HS0}$	oui ( si conditions satisfaites)		oui	
Amélioration/respect des bornes de Voigt et Reuss	? (oui dans certains cas)		oui	
Croissance de $\mathbf{C}_{MMR}^{HS0}$ en fonction de $\mathbf{C}^0$	? (oui dans certains cas)		démonstration partielle	

Tableau 4.1 : Résumé des propriétés vérifiées par les bornes ou estimations MMR

Situation	« Willis et Ponte Castañeda »			Phases mécaniques
Géométrie des inclusions	quelconque	ellipsoïdes	ellipsoïdes de même forme, compatible avec la distribution	(pas d'inclusions)
Distribution	ellipsoïdale simple des inclusions			ellipsoïdale simple des phases
Microstructure décrite	Matrice et inclusions homogènes			Multiphasé
Conditions sur $\langle \mathbf{T} \rangle$	oui (nécessaires et suffisantes)		pas de conditions	
Milieu de référence $\mathbf{C}^0$	Matrice $\mathbf{C}^1$			quelconque
Symétrie de $\mathbf{C}_{CL}^{HS0}$	oui			
Positivité de $\mathbf{C}_{CL}^{HS0}$	oui ( si conditions satisfaites)		oui	
Amélioration/respect des bornes de Voigt et Reuss	? (oui dans certains cas)		oui	
Croissance de $\mathbf{C}_{CL}^{HS0}$ en fonction de $\mathbf{C}^0$	?		oui	

Tableau 4.2 : Rappel des propriétés vérifiées par les bornes ou estimations CL

#### 4.4.H.d Résumé des propriétés

Les bornes et estimations ainsi construites au travers de l'approche par MMR présentent donc la plupart des propriétés vérifiées par celles obtenues par l'approche classique. En particulier, les tenseurs caractérisant ces bornes ou estimations ont tous les attributs requis pour des tenseurs des modules ou des souplesses d'élasticité. Il faut toutefois s'assurer de la satisfaction de certaines propriétés de nature géométrique, qui sont automatiquement vérifiées lorsque les supports des motifs sont des ellipsoïdes, de même orientation et mêmes rapports de formes, compatibles avec les hypothèses de distribution. Le **tableau 4.1** résume les résultats établis dans le cadre de l'approche par MMR, que l'on peut comparer à ceux obtenus dans le cadre classique, donnés par le **tableau 4.2**.

Rappelons aussi la possibilité de définir des distributions ellipsoïdales généralisées, de phases, d'inclusions ou de motifs et de calculer formellement des tenseurs de Hashin et Shtrikman rendant compte de ces situations. La seule propriété clairement établie avec cette hypothèse est celle de symétrie. Elle est toutefois assujettie à certaines conditions en cas de distribution ellipsoïdale généralisée des phases, conditions automatiquement satisfaites dans les autres cas grâce à la présence d'une matrice.

### 4.5 Modèles autocohérents généralisés

Nous achevons ce chapitre théorique par la présentation des modèles autocohérents généralisés, qui dérivent formellement des bornes de Hashin et Shtrikman généralisées de la même manière que les modèles autocohérents classiques dérivent des bornes de Hashin et Shtrikman classiques (*cf.* paragraphe **1.2.B.b**). Précisons que certaines idées et certains résultats exposés dans ce qui suit sont aussi présentés dans la référence [23].

#### 4.5.A Principe, définitions et premières propriétés

Rappelons les principes généraux de la démarche faisant appel à la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman HS pour estimer l'énergie potentielle  $\Phi(\underline{u})$  ou complémentaire  $\Psi(\underline{\sigma})$  d'un VER  $\Omega$  d'un milieu macrohomogène (*cf.* paragraphe **4.1**) soumis à un chargement macroscopique  $\langle \underline{\epsilon} \rangle$  ou  $\langle \underline{\sigma} \rangle$ . Elle permet de reformuler les théorèmes variationnels de la façon suivante :

$$-\Delta_{\psi}^0(\underline{\pi}^*) + \text{HS}^0(\underline{\pi}^*) \leq -\Psi(\underline{\sigma}) = W = \Phi(\underline{u}) \leq \text{HS}^0(\underline{\eta}^*) + \Delta_{\phi}^0(\underline{\eta}^*) \quad (4.404)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi}^0(\underline{\pi}^*) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\underline{\pi}^* - \underline{\sigma}^*(\underline{\pi}^*)] : [\mathbf{S} - \mathbf{S}^0] : [\underline{\pi}^* - \underline{\sigma}^*(\underline{\pi}^*)] d\omega \\ \text{et} \quad \Delta_{\phi}^0(\underline{\eta}^*) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)] : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^0] : [\underline{\eta}^* - \underline{\epsilon}^*(\underline{\eta}^*)] d\omega. \end{aligned}$$

Le but est habituellement d'obtenir un encadrement de  $W$  aussi serré que possible en choisissant un milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  et un champ  $\underline{\eta}^* = \mathbf{S} : \underline{\pi}^*$  optimaux.

La méthodologie suivie jusqu'à présent consiste à choisir un milieu de référence (pour l'essentiel) arbitraire et à opérer principalement sur les champs de polarisation d'essai. Sachant qu'une optimisation du choix de  $\underline{\eta}^*$  parmi tous les champs de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  conduirait, si l'on connaissait parfaitement le champ  $\mathbf{C}(\underline{x})$  et si l'on pouvait la mener à terme, à la solution exacte du problème quel que soit  $\mathbf{C}^0$ , on a cherché à optimiser le choix de la polarisation dans un sous-espace  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$  de façon à s'en rapprocher au mieux. Ce sous-espace est choisi de telle sorte que cette opération conduise à des quantités calculables avec les informations disponibles sur  $\mathbf{C}(\underline{x})$ . Les champs CA et SA optimaux  $\underline{\epsilon}^{\circ}$  et  $\underline{\sigma}^{\circ}$  ainsi construits, que l'on connaît au travers de leurs projetés  $\mathcal{P}(\underline{\epsilon}^{\circ}) = \underline{\eta}^{\circ}$  et  $\mathcal{P}(\underline{\sigma}^{\circ}) = \underline{\pi}^{\circ}$ , sont « proches » des champs réels et devraient rendre « petits » les termes complémentaires  $\Delta_{\psi}^0$  et  $\Delta_{\phi}^0$ . Il n'y a toutefois aucune raison pour que ces derniers soient nuls.

La manière rigoureuse de poursuivre le raisonnement consiste à choisir correctement  $\mathbf{C}^0$  de façon à contrôler leur signe. Elle conduit aux règles (4.27) et à la notion de *bornes* de Hashin et Shtrikman. Pour celles-ci, il est certain que les termes complémentaires sont rigoureusement non nuls puisque  $\mathbf{C}^0$  est choisi de telle sorte que les intégrants aient un signe constant et que les champs d'essai  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  ne peuvent être systématiquement égaux à leurs projetés  $\underline{\underline{\eta}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\pi}}^\circ$ , sauf bien sûr lorsque  $\mathcal{P}$  est l'identité, mais ce cas est exclu en pratique. Il ne peut donc y avoir égalité entre les champs d'essai et les champs réels. On peut dans un second temps optimiser le choix de  $\mathbf{C}^0$  tout en respectant les règles (4.27) pour obtenir des bornes optimales, mais cela ne change rien à la remarque précédente.

La seconde attitude consiste à choisir un milieu de référence quelconque sans se soucier du signe des termes complémentaires, qui n'ont toutefois toujours aucune raison particulière d'être systématiquement nuls. Les champs  $\underline{\underline{\epsilon}}^\circ$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$  conservent leur statut de champ d'essai et les tenseurs de Hashin et Shtrikman calculés fournissent une *estimation* du comportement effectif. La pertinence de cette dernière ainsi que la « proximité » entre les champs d'essai et la solution dépend de la pertinence et de la richesse du sous-espace d'optimisation  $\mathcal{P}(\mathbb{T}_2^s(\Omega))$ . Cette démarche est en particulier celle des modèles de type Mori et Tanaka qui proposent de choisir pour milieu de référence une phase identifiée comme la matrice. Lorsque la fraction volumique de cette dernière est suffisamment importante, on peut espérer que les termes complémentaires soient petits puisque les intégrants sont alors nuls sur une grande partie du domaine  $\Omega$ . L'argument principal qui conduit à un tel choix reste toutefois, comme on a l'a déjà vu, la simplification des équations à résoudre.

La troisième attitude est enfin celle où l'on cherche à « optimiser » le choix de  $\mathbf{C}^0$  de façon à annuler les termes complémentaires. Cet objectif n'est guère réalisable en pratique mais cette idée conduit à la notion d'autocohérence, telle que nous la concevons dans le cadre de ce travail. Le principe en est de choisir un milieu de référence tel que les contributions positives dans les termes complémentaires  $\Delta_\psi^0$  et  $\Delta_\phi^0$  contrebalancent « au mieux » les contributions négatives. Cette idée est à l'opposé de celle qui conduit à la construction des bornes de Hashin et Shtrikman, mais l'analyse est à l'origine la même. *L'hypothèse d'autocohérence* consiste à supposer que la projection  $\mathcal{P}$  retenue est telle que si l'on choisit pour milieu de référence le milieu effectif lui-même, alors, pour tous les chargements macroscopiques, les termes complémentaires sont systématiquement nuls pour la polarisation optimale :

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \text{ autocohérente pour la microstructure} \\ & \Leftrightarrow \\ & \left[ \mathbf{C}^0 = \bar{\mathbf{C}} \quad \Rightarrow \quad \forall \left( \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle, \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \right) \quad \Delta_\psi^0(\underline{\underline{\pi}}^\circ) = \Delta_\phi^0(\underline{\underline{\eta}}^\circ) = 0 \right] . \end{aligned} \quad (4.405)$$

Cette définition résulte de l'idée que le comportement effectif est en quelque sorte la « moyenne » des comportements locaux, le terme de moyenne étant pris non pas au sens d'une quelconque moyenne volumique mais « au sens du comportement mécanique ». Il est clair que cette définition est principalement une hypothèse et, dans l'état actuel des choses, elle n'est justifiée que par des arguments intuitifs.

Notons bien que la définition ci-dessus associe le concept d'autocohérence à une certaine adéquation entre la projection  $\mathcal{P}$  et la microstructure étudiée. Pour une microstructure donnée, parmi les nombreuses projections envisageables, seules certaines pourront éventuellement garantir cette condition. Inversement, une projection  $\mathcal{P}$  donnée ne sera autocohérente que pour des microstructures satisfaisant certaines propriétés particulières. L'existence, pour une microstructure donnée, d'une ou plusieurs projections satisfaisant la condition, de même que l'existence, pour une projection donnée, d'une ou plusieurs microstructures satisfaisant la condition restent des questions pour l'essentiel ouvertes. Nous y reviendrons en fin de chapitre.

Si l'on admet que l'hypothèse d'autocohérence est pertinente, la première conséquence est l'égalité entre l'énergie  $W$  et la valeur stationnaire  $\mathcal{B}_\mathcal{P}^0$  de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman, puisque cette dernière est alors à la fois une borne supérieure et une borne inférieure pour la première. Ceci s'écrit en termes de tenseurs des modules :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_\mathcal{P}^{\text{HS}}(\bar{\mathbf{C}}). \quad (4.406)$$

Les modules effectifs peuvent alors être calculés exactement puisqu'ils sont solutions de l'équation implicite ci-dessus. Plus simplement, pour une projection  $\mathcal{P}$  donnée, on peut définir la ou les estimations

autocohérentes  $C_{\mathcal{P}}^{\text{AC}}$  associées comme solutions de l'équation :

$$C_{\mathcal{P}}^{\text{AC}} = C_{\mathcal{P}}^{\text{HS}} \left( C_{\mathcal{P}}^{\text{AC}} \right). \quad (4.407)$$

Cette relation est la *condition d'autocohérence* qu'il ne faut pas confondre avec l'hypothèse d'autocohérence introduite plus haut. Nous donnerons ultérieurement des indications sur l'existence et l'unicité de la solution de cette équation dans des situations particulières. En cas d'unicité, on peut invoquer « l'estimation autocohérente » ; c'est ce que nous ferons dans la suite. Le tenseur obtenu s'identifie à celui des modules effectifs de la microstructure étudiée si l'hypothèse d'autocohérence est satisfaite et en fournit simplement une « valeur probable » dans le cas contraire.

La seconde conséquence de l'identité entre  $W$  et  $B_{\mathcal{P}}^0$  qui s'applique lorsque  $\mathcal{P}$  est autocohérente pour la microstructure est *l'identité entre les champs d'essai* construits par la démarche de Hashin et Shtrikman et les *champs réels*. C'est une conséquence de l'unicité de la solution du problème d'élasticité. Comme on l'a vu au début de ce chapitre, les champs d'essai ne sont pas calculés explicitement : seules leurs projections sont connues. Ces dernières s'identifient donc aux projections des champs réels et l'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \mathcal{P}(\underline{\underline{\epsilon}}^\circ) = \underline{\underline{\eta}}^\circ \\ \mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}) = \mathcal{P}(\underline{\underline{\sigma}}^\circ) = \underline{\underline{\pi}}^\circ \end{cases} \quad (4.408)$$

Contrairement aux approches par bornes où seules les *grandeurs macroscopiques* données par les calculs étaient pertinentes vis-à-vis des grandeurs réelles, l'approche autocohérente fournit aussi des *grandeurs locales*. Ceci justifie *a posteriori* les comparaisons expérimentales effectuées à cette échelle au chapitre 3. Mais notons bien que cette propriété ne s'applique en toute rigueur que si l'hypothèse d'autocohérence est pertinente, ce qu'il est difficile de vérifier en pratique.

La remarque précédente ne vaut pas pour les estimations de nature non autocohérente, comme par exemple celle de Mori et Tanaka. En effet, même si l'on admet que  $C_{\mathcal{P}}^{\text{HS}}(C^1)$  constitue une bonne estimation de  $C$ , ceci ne suffit pas pour assurer la nullité des termes  $\Delta_{\psi}^0$  et  $\Delta_{\phi}^0$ , si bien que le raisonnement précédent ne s'applique pas. D'ailleurs lorsque  $C^1$  est la phase la plus raide ou la plus souple, il est certain que ces termes sont strictement positifs ou strictement négatifs.

#### 4.5.B Définitions équivalentes

Rappelons l'expression générale (*cf.* paragraphe 4.1.E.d) de la valeur stationnaire  $B_{\mathcal{P}}^0$  de la fonctionnelle HS lorsque la déformation macroscopique est imposée :

$$\begin{aligned} \frac{2}{|\Omega|} B_{\mathcal{P}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : C^{\text{HS}0}_{\mathcal{P}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle &= \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : C^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle \\ &= \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : C^0 : \left[ \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle \right] \end{aligned}$$

et lorsque la contrainte macroscopique est imposée :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{|\Omega|} B_{\mathcal{P}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : S^{\text{HS}0}_{\mathcal{P}} : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : S^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle \\ &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : S^0 : \left[ \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle \right]. \end{aligned}$$

La définition (4.407) a donc des corollaires immédiats :

$$C^0 \text{ autocohérent} \Leftrightarrow \left[ \forall \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \text{ ou } \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad \langle \underline{\underline{p}}^\circ \rangle = 0 \right] \quad (4.409)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \forall \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \text{ ou } \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad \langle \underline{\underline{\epsilon}}^\circ \rangle = 0 \right] \quad (4.410)$$

Rappelons aussi la relation entre le chargement macroscopique et les tenseurs  $\underline{\underline{\Sigma}}^0 = C^0 : \underline{\underline{E}}^0$  invoqués par la solution intégrale du problème de localisation ou de concentration associé à une polarisation  $\underline{\underline{p}}^* = C^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^*$  sur le VER (*cf.* paragraphe 4.1.E.c) :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + E_{\Omega}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^* \rangle$$



en cas de déformation imposée et

$$\underline{\underline{\Sigma}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle - \mathbf{G}_\Omega^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}}^* \rangle$$

en cas de contrainte imposée. Elle conduit à de nouvelles expressions de la condition d'autocohérence :

$$\mathbf{C}^0 \text{ autocohérent} \Leftrightarrow \left[ \forall \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad \underline{\underline{E}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \right] \quad \text{ou} \quad \left[ \forall \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad \underline{\underline{E}}^0 = \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \right] \quad (4.411)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \forall \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad \underline{\underline{\Sigma}}^0 = \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \right] \quad \text{ou} \quad \left[ \forall \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad \underline{\underline{\Sigma}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \right] \quad (4.412)$$

### 4.5.C Application aux microstructures décrites par MMR

La mise en œuvre effective des principes généraux ci-dessus ne peut être entreprise en pratique que pour des microstructures et des projections telles que la valeur stationnaire de la fonctionnelle HS puisse être calculée explicitement. En cohérence avec les paragraphes précédents de ce chapitre, nous allons donc nous restreindre aux projections classiques CL et aux projections MMR relatives à une description par motifs morphologiques représentatifs, associées aux microstructures correspondantes qui conduisent à des solutions explicites. Le tenseur  $\mathbf{C}_p^{AC}$  n'ayant *a priori* pas de propriété particulière autre que celle d'être un tenseur de modules d'élasticité, nous allons de plus nous limiter aux cas pour lesquels nous avons établi qu'un choix arbitraire de milieu de référence conduit toujours à un système d'équations dont la solution  $\mathbf{C}_p^{HS}$  est calculable et présente les caractéristiques requises pour un tenseur des modules d'élasticité.

Ces situations sont, pour la projection CL, la distribution ellipsoïdale simple des phases et pour la projection MMR, la distribution ellipsoïdale simple de motifs de support de forme ellipsoïdale compatible avec l'hypothèse de distribution. Comme on l'a vu plus haut, la première situation est formellement identique au cas particulier de la seconde où les motifs sont homogènes. On peut donc se limiter à cette dernière. Rappelons qu'elle est pertinente pour une microstructure décrite sous la forme d'un Assemblage de Hashin généralisé ou pour une morphologie de type matrice/inclusions hétérogènes.

Dans ces conditions, les tenseurs de Hashin et Shtrikman peuvent être déduits des champs locaux qui apparaissent au sein des motifs lorsqu'ils sont noyés dans un milieu infini et soumis à des conditions de chargement homogène à l'infini. Lorsque les modules d'élasticité ainsi calculés s'identifient à ceux du milieu infini utilisé, le résultat est justement *l'estimation autocohérente généralisée* recherchée (cf. figure 4.14).

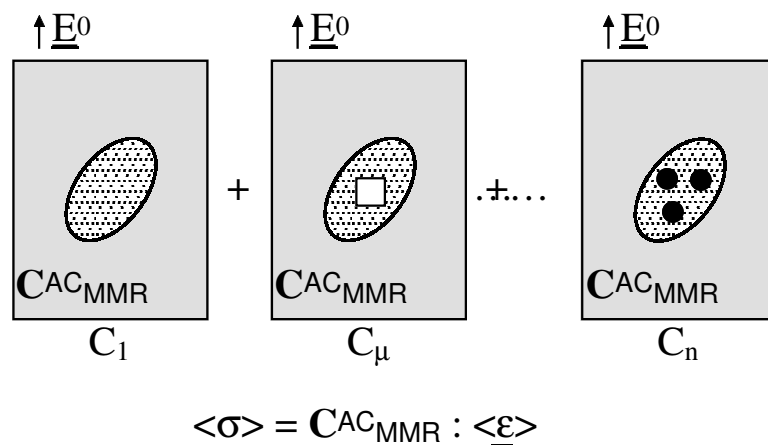


Figure 4.14 : Calcul de l'estimation autocohérente généralisée

Les différentes définitions générales données aux paragraphes précédents peuvent maintenant être explicitées au moyen des solutions des problèmes auxiliaires d'inclusions hétérogènes, caractérisées (cf. paragraphe 4.3.C.c) par les tenseurs  $\mathbf{U}_\mu^1$ ,  $\mathbf{V}_\mu^0$  et  $\mathbf{T}_\mu^0 = \mathbf{V}_\mu^0 - \mathbf{C}^0 : \mathbf{U}_\mu^0$ . Ils donnent respectivement la déformation moyenne, la contrainte moyenne et la polarisation moyenne sur le motif  $\mu$  noyé en milieu infini de module  $\mathbf{C}^0$  en fonction de la déformation homogène  $\underline{\underline{E}}^0$  appliquée à l'infini. La condition

d'autocohérence s'écrit alors :

$$\mathbf{C}^0 \text{ autocohérent} \Leftrightarrow \langle \mathbf{V}_\mu^0 \rangle_\mu = \mathbf{C}^0 : \langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu \quad (4.413)$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu = 0 \quad (4.414)$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu = \mathbf{I} \quad (4.415)$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{V}_\mu^0 \rangle_\mu = \mathbf{C}^0. \quad (4.416)$$

On peut aussi utiliser les relations (4.386) et (4.386) pour expliciter les deux dernières définitions invoquant les tenseurs  $\mathbf{U}_\mu^0$  et  $\mathbf{V}_\mu^0$  :

$$\mathbf{C}^0 \text{ autocohérent} \Leftrightarrow \langle \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \rangle_\mu = \mathcal{P}_d^0 \quad (4.417)$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}) \rangle_\mu = \mathcal{Q}_d^0 \quad (4.418)$$

On vérifie facilement que toutes ces relations sont bien équivalentes. L'identité entre (4.413) et (4.414) est immédiate. L'équivalence entre ces définitions et les suivantes est une conséquence d'abord de la forme ellipsoïdale des supports des motifs, qui permet d'écrire la déformation moyenne et la contrainte moyenne dans ces derniers sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{D_\mu} &= \mathcal{P}_{D_\mu}^0 : [\mathcal{P}_{D_\mu}^{0-1} - \mathbf{T}_\mu^0] : \underline{\underline{E}}^0 \\ \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{D_\mu} &= \mathcal{Q}_{D_\mu}^0 : [\mathcal{Q}_{D_\mu}^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \mathbf{S}^0] : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}^0, \end{aligned}$$

et ensuite du fait que les supports sont homothétiques, ce qui induit que les tenseurs  $\mathcal{P}_{D_\mu}^0$  et  $\mathcal{Q}_{D_\mu}^0$  sont respectivement tous égaux à  $\mathcal{P}_d^0$  et  $\mathcal{Q}_d^0$ . On a alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}_\mu^0 \rangle_\mu &= \mathcal{P}_d^0 : [\mathcal{P}_d^{0-1} - \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu] \\ \langle \mathbf{V}_\mu^0 \rangle_\mu &= \mathcal{Q}_d^0 : [\mathcal{Q}_d^{0-1} + \mathbf{S}^0 : \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu : \mathbf{S}^0] : \mathbf{C}^0 \end{aligned}$$

et les équivalences entre (4.414),(4.415) et (4.416) en résultent. Ce résultat étend aux cas de motifs hétérogènes celui déjà établi pour des inclusions homogènes dans le cadre de la définition du modèle autocohérent classique (*cf.* paragraphe 1.2.B.d).

Ces équivalences sont *indispensables* pour que le modèle ainsi construit soit *conforme aux principes généraux* du modèle autocohérent tels que nous les avons énoncés au paragraphe 4.5.A : en effet, d'après le paragraphe 4.5.B, elles s'appliquent quelle que soit la microstructure considérée. Or elles ne sont pas vérifiées par les « modèles autocohérents » construits en étendant ces définitions à des problèmes d'inclusions de *géométrie non ellipsoïdale* ou de supports *non homothétiques*, ce qui suggère fortement que ces modèles, à l'instar des extensions analogues du modèle de Mori et Tanaka, ne reposent pas sur une analyse suffisamment rigoureuse de la microstructure qu'ils prétendent représenter : il y a fort à craindre qu'ils *ne rendent pas compte d'une situation physique réelle*. Notons bien que cette remarque n'exclut pas la possibilité de construire des estimations autocohérentes fondés sur des motifs de forme quelconque. L'analyse devra en revanche être plus pertinente que la simple extension par analogie sur laquelle reposent les modèles dont il est question ci-dessus. En particulier, le champ «  $\underline{\underline{E}}^0$  » appliqué à l'infini dans les problèmes d'inclusions ne sera probablement pas le même pour tous les motifs et sera distinct du champ «  $\underline{\underline{E}}^0$  » invoqué par la solution intégrale sur le VER macrohomogène (voir par exemple le système (4.299)).

## 4.5.D Autres propriétés

### 4.5.D.a Équivalence énergétique

Considérons d'abord le cas de motifs tous homothétiques, pour lequel il n'y a qu'un seul problème d'inclusion hétérogène à traiter. La condition (4.414) a alors une interprétation physique relativement

précise. Rappelons que  $\mathbf{T}_\mu^0$  donne la valeur stationnaire  $\Delta W$  dans la formulation variationnelle (4.321) qui caractérise les perturbations  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'$  du problème d'inclusion relatif au motif  $\mu$ , sous la forme  $\underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0$ . Cette quantité  $\Delta W$  est formellement égale (*cf.* annexe C) à l'écart fini entre la valeur stationnaire infinie  $W^\mu$  de l'énergie potentielle du problème d'inclusion considéré et celle  $W^0$ , également infinie, du milieu infini homogène de modules  $\mathbf{C}^0$  soumis au même chargement à l'infini. Elle est bien sûr aussi égale à l'écart des opposées des valeurs stationnaires des énergies complémentaires correspondantes.

La condition d'autocohérence est équivalente à la nullité de ces écarts et s'interprète ainsi comme un critère « d'équivalence énergétique » entre le milieu homogène équivalent et ce même milieu présentant une hétérogénéité locale de structure définie par le motif en question. Cette définition est exactement celle utilisée initialement par Christensen et Lo pour construire le modèle des trois phases (*cf.* paragraphe 1.2.C.b). La quantité  $\underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0$  s'écrit d'ailleurs (*cf.* paragraphe 4.4.C) sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^0 : \underline{\underline{E}}^0 &= \underline{\underline{E}}^0 : \left\langle \mathbf{C}^\mu : \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}' \right] \right\rangle_{D_\mu} - \underline{\underline{\Sigma}}^0 : \left\langle \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}' \right] \right\rangle_{D_\mu} \\ &= \underline{\underline{E}}^0 : \left\langle \underline{\underline{\sigma}} \right\rangle_{D_\mu} - \underline{\underline{\Sigma}}^0 : \left\langle \underline{\underline{\epsilon}} \right\rangle_{D_\mu} \\ &= \frac{1}{|D_\mu|} \int_{\partial D_\mu} \left[ \underline{U}^0 \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^0 \cdot \underline{n} \right] d\omega, \end{aligned} \quad (4.419)$$

où  $\underline{U}^0$  est le déplacement dans le problème relatif au milieu homogène,  $\underline{u}$  celui dans le problème d'inclusion et  $\underline{n}$  la normale unitaire sortante à la frontière  $\partial D_\mu$  du motif. Pour établir la dernière égalité, on a utilisé l'homogénéité de la solution  $(\underline{\underline{E}}^0, \underline{\underline{\Sigma}}^0)$  du problème sur le milieu homogène et l'admissibilité statique de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et l'admissibilité cinématique de  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . La condition d'autocohérence s'écrit donc aussi :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^0 \text{ autocohérent} &\Leftrightarrow \forall \underline{\underline{E}}^0 \quad W^\mu = W^0 \\ &\Leftrightarrow \forall \underline{\underline{E}}^0 \quad \int_{\partial D_\mu} \left[ \underline{U}^0 \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \underline{u} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^0 \cdot \underline{n} \right] d\omega = 0, \end{aligned} \quad (4.420)$$

qui est bien la relation utilisée par Christensen et Lo.

Remarquons que ces derniers s'intéressent à « l'énergie mécanique » au sein du milieu infini homogène ou du problème de l'inclusion composite, définie comme l'intégrale de la densité d'énergie potentielle à la solution, c'est-à-dire  $\int \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} d\omega$ . Cette définition conduit à des expressions de l'écart entre cette quantité pour les deux problèmes dont le signe dépend des conditions aux limites appliquées. Cette quantité n'est pas la plus pertinente du point de vue du problème de structure, qui intègre également les conditions aux limites. Il nous semble plus judicieux de raisonner en termes d'énergie potentielle ou complémentaire. L'expression de l'écart ne dépend alors plus de la nature du chargement (qui pourrait d'ailleurs de surcroît conduire à des champs  $(\underline{\underline{E}}^0, \underline{\underline{\Sigma}}^0)$  hétérogènes ; voir le paragraphe C.1.A pour plus de détails à ce sujet). Notons aussi que l'équivalence entre cette condition énergétique et la relation (4.415) a été montrée par Hervé et Zaoui [75].

Les remarques ci-dessus se généralisent sans peine aux situations de motifs non homothétiques. La condition d'« équivalence énergétique généralisée » (*cf.* figure 4.15) porte alors sur la moyenne des énergies  $W^\mu$  relatives à chaque problème d'inclusion  $\mu$ , pondérées par les fractions volumiques des phases morphologiques correspondantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^0 \text{ autocohérent} &\Leftrightarrow \forall \underline{\underline{E}}^0 \quad \sum_\mu C_\mu W^\mu = W^0 \\ &\Leftrightarrow \forall \underline{\underline{E}}^0 \quad \sum_\mu C_\mu \int_{\partial D_\mu} \left[ \underline{U}^0 \cdot \underline{\underline{\sigma}}^\mu \cdot \underline{n} - \underline{u}^\mu \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^0 \cdot \underline{n} \right] d\omega = 0. \end{aligned} \quad (4.421)$$

Une telle sommation d'énergies pourrait étonner d'aucuns habitués à la présence de termes croisés dans les expressions rendant compte de l'énergie globale d'un système constitué de plusieurs sous-systèmes. L'absence de tels termes d'interaction faisant référence à des motifs distincts s'interprète par

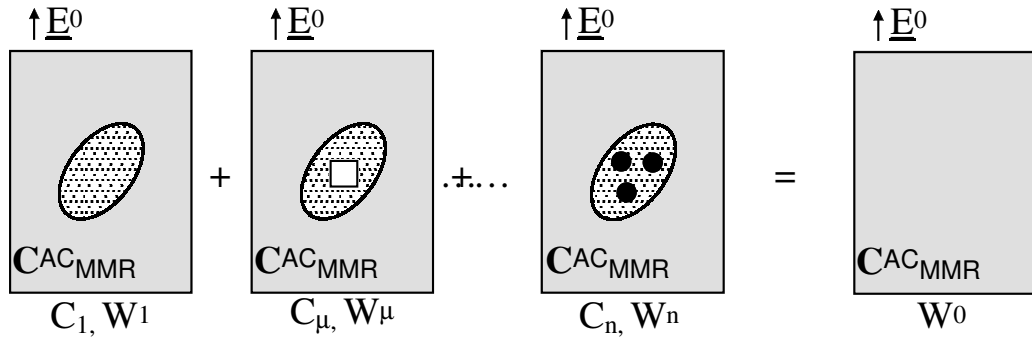


Figure 4.15 : Équivalence énergétique généralisée

le fait que « l'interaction moyenne » d'une phase morphologique avec son environnement est entièrement décrite par son interaction avec le milieu effectif au sein du problème d'inclusion hétérogène. Cette remarque fournit une nouvelle définition intuitive de la notion d'autocohérence : le milieu autocohérent est le milieu homogène qui rend compte au mieux de l'interaction moyenne de tous les constituants du matériau avec une phase particulière.

#### 4.5.D.b Comparaison avec le critère d'autocohérence de Kanaun

D'autres conditions d'autocohérence ont été proposées et utilisées par d'autres auteurs. En particulier, Kanaun [93] s'est aussi intéressé à la description de composites à particules hétérogènes formées de couches concentriques analogues à ceux étudiés par Hervé et Zaoui [76]. Mais, alors que ces derniers utilisent le critère d'équivalence énergétique de Christensen et Lo, Kanaun fait appel à une définition *a priori* différente (voir la note au bas de la page 54). Nous montrons ici que les deux démarches sont en réalité équivalentes.

Kanaun fonde sa démarche sur l'écriture générale suivante de la contrainte macroscopique :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \bar{\mathbf{C}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + c \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I,$$

où  $\mathbf{C}^1$  est le tenseur des modules de la matrice,  $c$  la concentration en inclusions hétérogènes et  $\langle \cdot \rangle_I$  désigne la moyenne sur le domaine occupé par ces dernières. Les modules effectifs sont complètement déterminés par une relation liant la polarisation moyenne  $\langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I$  sur les renforts au chargement macroscopique.

Kanaun suggère de construire l'estimation autocohérente  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  en faisant appel au problème auxiliaire de l'inclusion hétérogène enrobée d'une gaine de matrice noyée dans un milieu infini ayant le comportement du milieu effectif, soumis à l'infini à la déformation  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Ce problème est le même que celui traité par Hervé et Zaoui, mais l'utilisation des champs solutions est différente. Alors que ces derniers s'intéressent aux champs moyens sur tout le motif, c'est-à-dire l'inclusion hétérogène et la gaine de matrice, Kanaun n'utilise que les champs sur l'inclusion seule. De plus, ce dernier suppose *a priori* que la déformation à l'infini est la déformation macroscopique, alors que l'égalité entre ces deux quantités constitue le critère d'autocohérence caractérisant  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$  dans l'approche de Hervé et Zaoui, critère équivalent, comme nous l'avons vu, aux diverses définitions proposées ici.

L'équivalence des deux approches résulte des égalités suivantes qui s'appliquent à l'approche de Kanaun. Dans ces relations  $\langle \cdot \rangle_I$  désigne la moyenne sur l'inclusion hétérogène des champs calculés dans le problème auxiliaire et  $\langle \cdot \rangle_M$  désigne la moyenne sur tout le motif, c'est-à-dire l'inclusion et la gaine de matrice.

$$\begin{aligned} c \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I &= \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_M \\ &= \langle [\mathbf{C} - \mathbf{C}^{\text{AC}}] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_M + \langle [\mathbf{C}^{\text{AC}} - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_M \\ &= \mathbf{T}_M^{\text{AC}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + [\mathbf{C}^{\text{AC}} - \mathbf{C}^1] : [\mathbf{I} - \mathcal{P}_M^{\text{AC}} : \mathbf{T}_M^{\text{AC}}] : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle. \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence de la géométrie ellipsoïdale du motif. En utilisant la définition de Kanaun pour  $\mathbf{C}^{\text{AC}}$ , il vient alors :

$$\mathbf{C}^{\text{AC}} = \mathbf{C}^1 + \mathbf{T}_M^{\text{AC}} + [\mathbf{C}^{\text{AC}} - \mathbf{C}^1] : [\mathbf{I} - \mathcal{P}_M^{\text{AC}} : \mathbf{T}_M^{\text{AC}}].$$

D'où :

$$\left[ [\mathcal{P}_M^{\text{AC}}]^{-1} - \mathbf{C}^{\text{AC}} + \mathbf{C}^1 \right] : \mathcal{P}_M^{\text{AC}} : \mathbf{T}_M^{\text{AC}} = 0$$

et donc, compte tenu des propriétés de  $\mathcal{P}_M^{\text{AC}}$  :

$$\mathbf{T}_M^{\text{AC}} = 0.$$

On retrouve donc une des définitions proposées plus haut, ce qui établit le résultat annoncé. Notons que pour aboutir à cette conclusion, on n'a utilisé que la forme ellipsoïdale du motif : l'approche de Kanaun peut être étendue à des inclusions non sphériques, l'équivalence avec notre démarche n'en sera pas modifiée.

#### 4.5.D.c Encadrements

**Cas général** L'estimation autocohérente étant une estimation de type Hashin et Shtrikman particulière, elle satisfait notamment toutes les propriétés de ces dernières. Le tenseur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$  est donc symétrique et défini positif <sup>21</sup>. L'équation qui le caractérise est la même dans l'approche en contrainte macroscopique imposée et en déformation macroscopique imposée : sa valeur est donc indépendante des conditions retenues.

Par ailleurs, d'après (4.397) et (4.271), il respecte les bornes de Voigt et Reuss classiques et généralisées :

$$\mathbf{C}^{\text{R}} \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{R}} < \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}} < \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} \leq \mathbf{C}^{\text{V}}. \quad (4.422)$$

Remarquons que les mêmes inégalités (mais au sens large) peuvent aussi être établies à partir de l'encadrement  $\mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}_{\text{MMR}}^{\text{R}}] : \mathbf{C}^0 \leq \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}} - \mathbf{C}^0$  obtenu au paragraphe 4.4.D.b et de la définition  $\langle \mathbf{T}_\mu^{\text{AC}} \rangle_\mu = 0$ .

**Cas classique** L'encadrement précédent implique que l'estimation autocohérente respecte aussi les bornes d'ordre 0 :

$$\mathbf{C}_r^- < \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}} < \mathbf{C}_r^+. \quad (4.423)$$

Comme le tenseur de Hashin et Shtrikman est une fonction croissante du milieu de référence (*cf.* page 202) lorsque les motifs sont homogènes, on en déduit que  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}}$  respecte les bornes de Hashin et Shtrikman classiques optimales :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}_r^-) < \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}} < \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}_r^+). \quad (4.424)$$

Ceci assure que l'estimation autocohérente n'est pas « déraisonnable » puisqu'elle ne viole pas l'encadrement rigoureux que doit satisfaire le tenseur des modules effectifs.

Le même résultat relatif à l'approche par MMR serait un corollaire immédiat de la croissance de  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$ , mais rappelons que cette propriété n'est pas encore établie.

#### 4.5.E Existence et unicité

D'après les principes généraux exposés au paragraphe 4.5.A, si, pour une projection donnée, il existe un matériau satisfaisant l'hypothèse d'autocohérence, alors le tenseur des modules effectifs de ce matériau est solution de l'équation d'autocohérence. L'existence d'une solution à cette dernière

---

<sup>21</sup>Cette propriété peut aussi être considérée comme une conséquence de la définition (4.407), puisque  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$  est symétrique et défini positif en tant que milieu de référence.

est donc une condition nécessaire du bien-fondé de l'hypothèse d'autocohérence. L'unicité est de plus souhaitable pour que la condition d'autocohérence soit suffisante pour caractériser complètement les modules effectifs d'un tel matériau.

Le problème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation d'autocohérence est plus facile à aborder et admet des réponses plus complètes dans le cadre classique que dans le cadre généralisé.

#### 4.5.E.a Approche classique

**Existence** L'encadrement (4.397) et la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}0}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  permettent d'établir l'existence d'une solution à l'équation d'autocohérence, quels que soit le comportement des phases et les paramètres de distribution ellipsoïdale simple. En effet, considérons la suite de tenseurs  $\mathbf{C}^{(n)}$ , construite par récurrence par la relation  $\forall n \mathbf{C}^{(n+1)} = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^{(n)})$  à partir d'un premier terme  $\mathbf{C}^{(0)}$  supérieur à  $\mathbf{C}^{\text{V}}$ . Le second terme  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^{(0)})$  est inférieur à  $\mathbf{C}^{\text{V}}$  d'après (4.397) et donc  $\mathbf{C}^{(1)} \leq \mathbf{C}^{(0)}$ . On démontre ensuite facilement par récurrence que la suite est décroissante : si  $\mathbf{C}^{(n+1)} \leq \mathbf{C}^{(n)}$ , alors  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^{(n+1)}) \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^{(n)})$ , c'est-à-dire  $\mathbf{C}^{(n+2)} \leq \mathbf{C}^{(n+1)}$ . Par ailleurs, d'après (4.397), la suite est minorée :  $\forall n \mathbf{C}^{(n)} \geq \mathbf{C}^{\text{R}}$ . Ces propriétés sont suffisantes<sup>22</sup> pour garantir la convergence de la série vers un tenseur symétrique et défini positif  $\mathbf{C}^{(\infty)}$ , tel que  $\mathbf{C}^{(\infty)} = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^{(\infty)})$ , c'est-à-dire solution de l'équation d'autocohérence. On montre de même que si le terme initial de la suite est choisi plus petit que  $\mathbf{C}^{\text{R}}$  la suite est croissante et majorée et donc également convergente. Plus généralement, si  $\mathbf{C}^{(0)}$  est choisi de telle sorte que  $\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}$  soit positif (resp. négatif), la suite est croissante (resp. décroissante) et donc convergente. Si  $\mathbf{C}^{(0)}$  est quelconque, on constate en pratique que la suite converge aussi, mais elle n'est pas toujours monotone ; la démonstration de sa convergence est alors plus délicate et nous ne l'abordons pas ici.

Ces résultats établissent l'existence d'un milieu autocohérent associée à la projection CL dans le cas d'une distribution ellipsoïdale simple des phases et fournissent aussi un algorithme de construction de cette solution, qui n'est autre que l'algorithme du point fixe classique. Notons que cette procédure est aussi celle qui conduit aux bornes de Kröner associées à la notion de désordre gradué (cf. paragraphe 1.2.B.b), développée pour des situations de distributions isotropes des phases. Lorsque le premier terme est un milieu très rigide, la suite des tenseurs obtenus est celle des « bornes supérieures d'ordre impair », dont la première est la borne de Voigt classique. Si le premier terme est la borne supérieure d'ordre 0,  $\mathbf{C}_r^+$ , on engendre les bornes supérieures d'ordre pair, dont le chef de file est la borne de Hashin et Shtrikman optimale  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}_r^+)$ . De même, si l'on commence la suite par un tenseur très souple ou par la borne inférieure d'ordre 0, on obtient les bornes inférieures d'ordre respectivement impair et pair. Rappelons toutefois que la nature de « borne » de ces tenseurs n'est pas clairement établie ni précisée, sauf pour les deux premiers termes de ces suites.

**Unicité : résultat partiel dans le cas général** Il reste à montrer l'unicité de la solution, c'est-à-dire la convergence de toutes ces suites vers une même limite. Notons d'abord que si  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}}$  est un tenseur autocohérent, d'après les résultats du paragraphe 4.5.D.c, il satisfait l'encadrement :

$$\mathbf{C}^{\text{R}} \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}} \leq \mathbf{C}^{\text{V}}.$$

En appliquant récursivement l'algorithme de construction de la suite ( $\mathbf{C}^0 \rightarrow \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0)$ ) jusqu'à la convergence (certaine) des termes extrémaux, il vient :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-} \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}} \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}. \quad (4.425)$$

<sup>22</sup>Ce théorème est usuel pour les suites de réels, mais il est facile de l'étendre aux cas des tenseurs définis positifs. Il suffit de considérer d'abord pour chaque  $\underline{u} \in \mathbb{T}_2^s$  la suite  $\underline{u} : \mathbf{C}^{(n)} : \underline{u}$ , décroissante, minorée par  $\underline{u} : \mathbf{C}^{\text{R}} : \underline{u}$  et qui converge donc vers une limite  $q(\underline{u})$  strictement positive. Il reste à montrer que  $q(\underline{u})$  est une forme quadratique de  $\underline{u}$ . Pour cela on note classiquement que pour tout couple  $(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathbb{T}_2^{s2}$ , la suite  $\underline{u} : \mathbf{C}^{(n)} : \underline{v}$  converge aussi puisqu'elle vaut  $\frac{1}{4} [(\underline{u} + \underline{v}) : \mathbf{C}^{(n)} : (\underline{u} + \underline{v}) - (\underline{u} - \underline{v}) : \mathbf{C}^{(n)} : (\underline{u} - \underline{v})]$  ; sa limite est  $l(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{4} [q(\underline{u} + \underline{v}) - q(\underline{u} - \underline{v})]$ . La fonction  $l(\underline{u}, \underline{v})$  est clairement linéaire en ses deux arguments puisque les termes de la suite dont elle est la limite le sont. Or  $q(\underline{u}) = l(\underline{u}, \underline{u})$  et ceci montre que  $q(\underline{u})$  est de la forme  $\underline{u} : \mathbf{C}^{(\infty)} : \underline{u}$ , où  $\mathbf{C}^{(\infty)}$  est un tenseur symétrique défini positif.

où  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$  et  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$  sont respectivement les tenseurs autocohérents obtenus en prenant comme terme initial les tenseurs  $\mathbf{C}^{\text{R}}$  et  $\mathbf{C}^{\text{V}}$ . Ces deux valeurs constituent les solutions autocohérentes extrémales qui encadrent toute autre solution autocohérente. Prenons ensuite un tenseur  $\mathbf{C}^{(0)}$  initial supérieur à  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$ . Il existe un autre tenseur  $\mathbf{C}_+^{(0)}$  supérieur à  $\mathbf{C}^{\text{V}}$  qui le majore :

$$\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+} \leq \mathbf{C}^{(0)} \leq \mathbf{C}_+^{(0)}.$$

Les trois suites obtenues en prenant ces tenseurs comme premier terme convergent puisqu'il en est ainsi des suites extrémales. Elles tendent toutes vers une solution autocohérente qui doit satisfaire l'encadrement (4.425). Or la suite qui minore est constante est égale au majorant dans (4.425). Les trois suites convergent donc vers  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$ . On montre de même que toute suite de premier terme  $\mathbf{C}^{(0)} \leq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$  converge vers  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$ .

Pour achever la démonstration d'unicité, il suffirait d'établir l'égalité entre  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$  et  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$ , et pour cela de montrer par exemple qu'il ne peut pas y avoir deux solutions de l'équation d'autocohérence dont l'écart soit positif ou négatif. L'établissement de cette propriété dans le cas général reste une question ouverte, en tous cas à notre connaissance. L'encadrement (4.425) fournit toutefois un outil pour vérifier l'unicité dans une situation pratique : il suffit de calculer les limites des suites construites à partir des bornes de Voigt et Reuss classiques et de les comparer ; si elles sont égales, alors il est certain que l'équation d'autocohérence n'admet pas d'autre solution.

**Unicité : situation isotrope** On peut poursuivre la démonstration en cas d'isotropie complète, c'est-à-dire lorsqu'à la fois le comportement des constituants et leur distribution spatiale sont isotropes. Dans ce cas, le tenseur  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0)$  est un tenseur isotrope lorsque  $\mathbf{C}^0$  l'est, comme on peut le vérifier facilement à partir des relations (4.158) qui ne font appel qu'à des tenseurs isotropes. Dans ces conditions, les solutions autocohérentes extrémales sont des tenseurs isotropes puisque l'on peut commencer les séries dont ils sont les limites<sup>23</sup> par des tenseurs isotropes, par exemple par les bornes de Voigt et Reuss qui sont elles-mêmes isotropes. Il suffit alors de montrer l'existence et l'unicité d'une solution autocohérente isotrope, ce que l'on peut faire directement dans certaines conditions. Nous proposons ici deux approches distinctes qui établissent des résultats complémentaires et permettent de conclure à l'unicité dans la plupart des situations pratiques.

La première repose sur la définition (4.414) qui s'écrit :

$$\left\langle \mathbf{E}^{0-1} : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r) : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] \right\rangle = 0,$$

soit encore, en multipliant par  $\mathbf{E}^0 > 0$  et en explicitant  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^r)$  :

$$\left\langle [\mathbf{C}^r + \mathbf{C}^{0*}]^{-1} : [\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0] \right\rangle = 0.$$

Tous les tenseurs étant isotropes, il suffit de s'intéresser aux composantes isotrope et déviatorique :

$$\left\{ \left\langle \frac{\mu_r - \mu_0}{\mu_r + \mu_0^*} \right\rangle, \left\langle \frac{k_r - k_0}{k_r + k_0^*} \right\rangle \right\} = 0,$$

avec  $\{2\mu_r, 3k_r\} = \mathbf{C}^r$ ,  $\{2\mu_0, 3k_0\} = \mathbf{C}^0$  et  $\{2\mu_0^*, 3k_0^*\} = \mathbf{C}^{0*}$ . Les variations des fonctions

$$M : \mu_0 \rightarrow \frac{\mu_r - \mu_0}{\mu_r + \mu_0^*} \quad \text{et} \quad K : k_0 \rightarrow \frac{k_r - k_0}{k_r + k_0^*} \quad ,$$

à  $k_0$  fixé pour la première et  $\mu_0$  fixé pour la seconde, pour des valeurs (positives) de  $\mu_r$  et  $k_r$  quelconques, peuvent être étudiées au moyen de leurs dérivées partielles :

$$-(\mu_r + \mu_0^*)^2 \cdot \frac{\partial M}{\partial \mu_0} = \mu_r + \mu_0^* + \frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} \cdot (\mu_r - \mu_0) = \mu_r \cdot \left( 1 + \frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} \right) - \mu_0^2 \cdot \frac{\partial \left[ \frac{\mu_0^*}{\mu_0} \right]}{\partial \mu_0}$$

<sup>23</sup>D'un point de vue topologique, l'espace des tenseurs isotropes est un fermé.

et

$$-(k_r + k_0^*)^2 \cdot \frac{\partial K}{\partial k_0} = k_r \cdot \left(1 + \frac{\partial k_0^*}{\partial k_0}\right) - k_0^2 \cdot \frac{\partial \left[\frac{k_r^*}{k_0}\right]}{\partial k_0}.$$

Les valeurs des modules de  $\mathbf{C}^{0*}$  sont connues (voir la page 45 pour celles de  $\mathbf{E}^0$ ) dans la situation présente :

$$\mu_0^* = \frac{\mu_0}{6} \cdot \frac{9k_0 + 8\mu_0}{k_0 + 2\mu_0} \quad \text{et} \quad k_0^* = \frac{4}{3}\mu_0. \quad (4.426)$$

Un calcul simple montre que  $\frac{\mu_0^*}{\mu_0}$  est une fonction strictement décroissante de  $\mu_0$ . Les dérivées partielles ci-dessus sont donc strictement négatives. En conséquence, les fonctions  $M$  et  $K$  sont des fonctions strictement décroissantes de  $\mu_0$  à  $k_0$  fixé pour la première et de  $k_0$  à  $\mu_0$  fixé pour la seconde ; il en est de même de leur moyenne.

*Il ne peut donc y avoir deux solutions autocohérentes distinctes ayant même module de cisaillement ou même module de compressibilité.* Ceci établit en particulier l'unicité lorsque les constituants ont tous même module de compressibilité ou même module de cisaillement. Le premier cas est d'une grande importance pratique, puisqu'il est invoqué lorsqu'on étudie l'écoulement plastique incompressible d'un composite au moyen de certaines extensions aux comportements non-linéaires du modèle autocohérent classique (cf. paragraphe 1.3). L'unicité était déjà connue pour les matériaux biphasés, pour lesquels le module de cisaillement autocohérent admet une expression analytique simple. Nous établissons ici l'unicité pour un nombre quelconque de phases, et ceci quelles que soient les valeurs des modules de cisaillement des constituants.

Cette première approche ne permet toutefois pas de conclure lorsque à la fois les modules de cisaillement et les modules de compressibilité sont hétérogènes. Les variations de  $M$  en fonction de  $k_0$  et de  $K$  en fonction de  $\mu_0$  ne sont en effet pas monotones. Pour aborder ces situations plus générales, on peut mettre en œuvre un second procédé. Il consiste à montrer que la fonction  $\mathbf{C}^0 \rightarrow \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0)$  est contractante et plus précisément que :

$$\forall (\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) \quad \exists \alpha \in ]0, 1[ / \mathbf{C}^1 \leq \mathbf{C}^2 \quad \Rightarrow \quad \left\| \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^2) - \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^1) \right\| \leq \alpha \left\| \mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1 \right\|, \quad (4.427)$$

où  $\|\mathbf{A}\|$  est une norme sur l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 4. Cette propriété se conçoit intuitivement, puisque, par exemple, l'image par la fonction  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0)$  de l'espace des tenseurs de modules d'élasticité est le domaine beaucoup plus restreint des tenseurs  $\mathbf{C}^0$  tels que  $\mathbf{C}^{\text{R}} \leq \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}^{\text{V}}$ . Si elle est vraie, alors son application à  $\mathbf{C}^1 = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$  et  $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$  conduit à une absurdité lorsque  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-} \neq \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$ , ce qui établit l'unicité.

Nous allons montrer que (4.427) est vraie pour des phases isotropes en distribution isotrope dont les comportements ne sont pas trop contrastés. Pour cela nous considérons la fonction associant à tout  $s \in [0, 1]$  un tenseur  $\mathbf{C}_s^{\text{HS}}$  défini par :

$$\mathbf{C}_s^{\text{HS}} = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}} \left( \mathbf{C}^1 + s \left[ \mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1 \right] \right). \quad (4.428)$$

Elle détermine un chemin dans l'espace des tenseurs d'ordre quatre reliant  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^1)$  à  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^2)$ . Elle est croissante du fait de l'hypothèse  $\mathbf{C}^2 \geq \mathbf{C}^1$ . L'expression (4.158) de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0)$  s'explique en cas d'isotropie selon :

$$\left\{ 2\mu_{\text{CL}}^{\text{HS}}, 3k_{\text{CL}}^{\text{HS}} \right\} = \left\{ 2 \left[ \sum_r \frac{c_r}{\mu_0^* + \mu_r} \right]^{-1} - 2\mu_0^*, 3 \left[ \sum_r \frac{c_r}{k_0^* + k_r} \right]^{-1} - 3k_0^* \right\}. \quad (4.429)$$

On note  $\left\{ 2\mu_s^{\text{HS}}, 3k_s^{\text{HS}} \right\}$  les modules de  $\mathbf{C}_s^{\text{HS}}$ . Le principe est de majorer uniformément sur l'intervalle  $[0, 1]$  leurs dérivées par rapport à  $s$  et d'intégrer sur ce même intervalle les inégalités obtenues (ce qui revient aussi à appliquer le théorème de la « croissance limitée ») pour obtenir la majoration :

$$0 \leq \left\{ 2 \left( \mu_{\text{CL}}^{\text{HS}2} - \mu_{\text{CL}}^{\text{HS}1} \right), 3 \left( k_{\text{CL}}^{\text{HS}2} - k_{\text{CL}}^{\text{HS}1} \right) \right\} \leq \left\{ 2 \text{Sup}_{s \in [0,1]} \frac{d\mu_s^{\text{HS}}}{ds}, 3 \text{Sup}_{s \in [0,1]} \frac{dk_s^{\text{HS}}}{ds} \right\}. \quad (4.430)$$



Une première différentiation de  $C_{CL}^{HS}(C^0)$  donne :

$$\{2d\mu_{CL}^{HS}, 3dk_{CL}^{HS}\} = \{2.f(\mu_0^*, \mu_r, r \in [1, n]).d\mu_0^*, 3.f(k_0^*, k_r, r \in [1, n]).dk_0^*\} \tag{4.431}$$

avec

$$f(a^*, a_r, r \in [1, n]) = \frac{\sum_r \frac{c_r}{[a^*+a_r]^2}}{\left[\sum_r \frac{c_r}{a^*+a_r}\right]^2} - 1.$$

Puis :

$$\{2d\mu_0^*, 3dk_0^*\} = \left\{ \frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} . d\mu_0 + \frac{\partial \mu_0^*}{\partial k_0} . dk_0, \frac{4}{3} d\mu_0 \right\} \tag{4.432}$$

avec

$$\frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6 \left[1 + 2\frac{\mu_0}{k_0}\right]^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu_0^*}{\partial k_0} = \frac{5}{3 \cdot \left[2 + \frac{k_0}{\mu_0}\right]^2}. \tag{4.433}$$

On a donc :

$$\frac{d\mu_s^{HS}}{ds} = f(\mu_0^*, \mu_r, r \in [1, n]) \cdot \left[ \frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} \cdot [\mu_2 - \mu_1] + \frac{\partial \mu_0^*}{\partial k_0} \cdot [k_2 - k_1] \right] \tag{4.434}$$

$$\frac{dk_s^{HS}}{ds} = \frac{4}{3} \cdot f(k_0^*, k_r, r \in [1, n]) \cdot [\mu_2 - \mu_1], \tag{4.435}$$

avec  $C^0 = C^1 + s [C^2 - C^1]$ .

Il reste à majorer ces quantités. La fonction  $f$  est décroissante de  $a^*$ . En effet, sa dérivation conduit à :

$$- \left[ \sum_r \frac{c_r}{a^* + a_r} \right]^4 \frac{df}{da^*} = 2 \sum_r \frac{c_r}{[a^* + a_r]^3} \cdot \left[ \sum_r \frac{c_r}{a^* + a_r} \right]^2 - 2 \left[ \sum_r \frac{c_r}{[a^* + a_r]^2} \right]^2 \cdot \left[ \sum_r \frac{c_r}{a^* + a_r} \right]$$

qui est de la forme  $\langle X \rangle [\langle X^3 \rangle \langle X \rangle - \langle X^2 \rangle^2]$ , avec  $X = [a^* + a_r]^{-1}$ . L'inégalité de Hölder :

$$\forall(a, b) \ a > 0, b > 0, \quad \forall(r, s) \ r > 0, s > 0, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \quad \langle ab \rangle \leq \langle a^r \rangle^{\frac{1}{r}} \langle b^s \rangle^{\frac{1}{s}},$$

appliquée avec  $r = s = 2, a = X^{3/2}$  et  $b = X^{1/2}$  conduit à :

$$\langle X^2 \rangle^2 \leq \langle X^3 \rangle \langle X \rangle$$

et montre que  $\frac{df}{da^*}$  est négatif. On peut donc majorer  $f(\mu_0^*, \mu_r, r \in [1, n])$  et  $f(k_0^*, k_r, r \in [1, n])$  par  $f(\mu_-^*, \mu_r, r \in [1, n])$  et  $f(k_-^*, k_r, r \in [1, n])$ ,  $\mu_-^*$  et  $k_-^*$  sont des minorants de  $\mu_0^*$  et  $k_0^*$ , des candidats potentiels étant  $\mu_1^*$  et  $k_1^*$ , puisque  $C^0 \rightarrow C^{0*}$  est croissante.

Les dérivées partielles de  $\mu_0^*$  sont majorées par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} &\leq I = \frac{2}{3} + \frac{5}{6 [1 + 2\zeta^-]^2} < \frac{3}{2} \\ \frac{\partial \mu_0^*}{\partial k_0} &\leq I' = \frac{5}{3 \cdot \left[2 + \frac{1}{\zeta^+}\right]^2} < \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

où  $\zeta^+$  et  $\zeta^-$  encadrent les valeurs extrémales que peut prendre la fonction  $s \rightarrow \frac{\mu_1 + s \cdot (\mu_2 - \mu_1)}{k_1 + s \cdot (k_2 - k_1)}$  pour  $s \in [0, 1]$ , dont on vérifie facilement qu'elle varie de manière monotone de  $\frac{\mu_1}{k_1}$  à  $\frac{\mu_2}{k_2}$ .

En combinant ces résultats, il vient :

$$\begin{cases} \mu_{CL}^{HS2} - \mu_{CL}^{HS1} \leq f(\mu_-^*, \mu_r, r \in [1, n]) \cdot [I(\mu_2 - \mu_1) + I'(k_2 - k_1)] \\ k_{CL}^{HS2} - k_{CL}^{HS1} \leq f(k_-^*, k_r, r \in [1, n]) \cdot \frac{4}{3} \cdot [\mu_2 - \mu_1]. \end{cases} \tag{4.436}$$

Soient  $\lambda$  et  $\kappa$  deux scalaires strictement positifs dont les valeurs seront spécifiées plus tard. Notons  $A = \text{Sup} \{f(\mu_-^*, \mu_r, r \in [1, n]), \kappa f(k_-^*, k_r, r \in [1, n])\}$ . On a :

$$\begin{cases} \mu_{\text{CL}}^{\text{HS2}} - \mu_{\text{CL}}^{\text{HS1}} \leq A \cdot [I(\mu_2 - \mu_1) + I'(k_2 - k_1)] \\ k_{\text{CL}}^{\text{HS2}} - k_{\text{CL}}^{\text{HS1}} \leq A \cdot \frac{4}{3\kappa} \cdot (\mu_2 - \mu_1), \end{cases}$$

puis par sommation :

$$\left(\mu_{\text{CL}}^{\text{HS2}} - \mu_{\text{CL}}^{\text{HS1}}\right) + \lambda \cdot \left(k_{\text{CL}}^{\text{HS2}} - k_{\text{CL}}^{\text{HS1}}\right) \leq A \cdot \left[I + \frac{4\lambda}{3\kappa}\right] \cdot [(\mu_2 - \mu_1) + \lambda \cdot (k_2 - k_1)] + \left[I' - \lambda \left[I + \frac{4\lambda}{3\kappa}\right]\right] |k_2 - k_1|.$$

En choisissant  $\lambda$  tel que  $I' - \lambda \left[I + \frac{4\lambda}{3\kappa}\right] = 0$ , c'est-à-dire :

$$I + \frac{4\lambda}{3\kappa} = \frac{I}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16I'}{3\kappa I^2}}\right],$$

on obtient la relation :

$$\left|\mu_{\text{CL}}^{\text{HS2}} - \mu_{\text{CL}}^{\text{HS1}}\right| + \lambda \cdot \left|k_{\text{CL}}^{\text{HS2}} - k_{\text{CL}}^{\text{HS1}}\right| \leq \alpha \cdot [|\mu_2 - \mu_1| + \lambda \cdot |k_2 - k_1|] \quad (4.437)$$

avec

$$\alpha = \frac{I}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16I'}{3\kappa I^2}}\right] \text{Sup} \{f(\mu_-^*, \mu_r, r \in [1, n]), \kappa f(k_-^*, k_r, r \in [1, n])\}. \quad (4.438)$$

Il s'agit bien d'une majoration du type de celle recherchée puisque  $|\mu| + \lambda |k|$  est une norme sur les tenseurs isotropes,  $\lambda$  étant bien positif. La fonction  $f(a^0, a_r, r \in [1, n])$  varie de façon continue par rapport à toutes ses variables ; elle est clairement nulle lorsque les  $a_r$  sont tous égaux. Le scalaire  $\alpha$  est donc inférieur à 1 lorsque le contraste des phases n'est pas trop important. Notons d'autre part que sa valeur ne dépend des modules  $\mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{C}^2$  que par l'intermédiaire de  $\mu_-^*$ ,  $k_-^*$ ,  $\zeta^+$  et  $\zeta^-$  ; on a suggéré plus haut de prendre  $(\mu_-^*, k_-^*) = (\mu_1^*, k_1^*)$  et  $(\zeta^+, \zeta^-) \in [\frac{\mu_1}{k_1}, \frac{\mu_2}{k_2}]^2$ . Rien n'interdit toutefois de choisir des valeurs moins restrictives mais indépendantes des tenseurs  $\mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{C}^2$  : la majoration est alors uniforme lorsque ces derniers sont pris dans un domaine compatible avec les valeurs retenues. Par exemple, on peut prendre pour  $(\mu_-^*, k_-^*)$  les modules  $(\mu_{(0)}^*, k_{(0)}^*)$  du « constraint tensor » associé à la borne inférieure d'ordre 0 du matériau  $\mathbf{C}_r^-$  et pour  $(I, I')$  les valeurs extrémales  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{5}{12}$ . La majoration est alors uniforme pour des tenseurs  $\mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{C}^2$  plus grands que la borne inférieure d'ordre 0. Dans la démonstration ci-dessus on a supposé  $\mathbf{C}^1 \leq \mathbf{C}^2$  mais cette hypothèse n'est pas fondamentale. On peut reprendre la démarche en l'ignorant : il suffit d'ajouter des valeurs absolues aux endroits appropriés et de définir proprement les majorants. On obtient donc le résultat suivant :

$$\forall \mathbf{C}^- \quad \exists \alpha \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ \forall (\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2) \quad \left(\mathbf{C}^- \leq \mathbf{C}^1 \quad \mathbf{C}^- \leq \mathbf{C}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \left\| \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^2) - \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^1) \right\| \leq \alpha \left\| \mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1 \right\| \quad (4.439)$$

qui s'applique en cas d'isotropie et pour des contrastes de phases modérés.

Il reste à quantifier cette notion de « modération ». On a déjà montré que la fonction  $f(a^0, a_r, r \in [1, n])$  décroît en fonction de  $a^0$  à  $a_r$  fixé. Elle tend de plus vers 0 lorsque  $a^0$  est très grand. La propriété s'applique donc quelque soit le contraste des phases lorsque  $\mathbf{C}^-$  est suffisamment grand. Ce résultat n'est guère surprenant. Rappelons en effet que lorsque le milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  est très raide, la borne de Hashin et Shtrikman est pratiquement égale à celle de Voigt ; une grande variation de  $\mathbf{C}^0$  n'induit alors quasiment aucune variation sur le résultat. Il est donc normal que la coefficient  $\alpha$  soit très petit.

La situation intéressante est toutefois celle où  $\mathbf{C}^-$  est pris égal à  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$  : l'obtention d'un  $\alpha$  inférieur à 1 permet alors de conclure à l'unicité de la solution autocohérente. Soit donc  $\mathbf{C}^- = \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-} = \{2\mu_-, 3k_-\}$  et  $\{2\mu_-^*, 3k_-^*\}$  le « constraint tensor » associé. Avec un tel choix le calcul de  $f(\mu_-^*, \mu_r, r \in [1, n])$  se simplifie grandement puisque du fait de l'autocohérence on a :

$$\sum_r \frac{c_r}{\mu_-^* + \mu_r} = \frac{1}{\mu_-^* + \mu_-},$$

si bien que :

$$\begin{aligned}
 f(\mu_{-}^{*}, \mu_r, r \in [1, n]) &= \sum_r c_r \left[ \frac{\mu_{-}^{*} + \mu_{-}}{\mu_{-}^{*} + \mu_r} \right]^2 - 1 \\
 &\leq \frac{\mu_{-}^{*} + \mu_{-}}{\mu_{-}^{*} + \mu_r^{-}} \sum_r c_r \frac{\mu_{-}^{*} + \mu_{-}}{\mu_{-}^{*} + \mu_r} - 1 \leq \frac{\mu_{-} - \mu_r^{-}}{\mu_{-}^{*} + \mu_r^{-}},
 \end{aligned}
 \tag{4.440}$$

où  $\mu_r^{-}$  est le plus petit des  $\mu_r$ . On peut faire de même pour le module de compressibilité. On obtient ainsi

$$\alpha \leq \frac{I}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16I'}{3\kappa I^2}} \right] \cdot \text{Sup} \left\{ \frac{\mu_{-} - \mu_r^{-}}{\mu_{-}^{*} + \mu_r^{-}}, \kappa \cdot \frac{k_{-} - k_r^{-}}{k_{-}^{*} + k_r^{-}} \right\}.
 \tag{4.441}$$

Pour pouvoir estimer numériquement ces majorants on peut d'abord utiliser les valeurs  $I = \frac{3}{2}$  et  $I = \frac{5}{12}$ , exploiter la minoration  $\mu_{-}^{*} > \frac{2}{3}\mu_{-}$  et remplacer les termes relatifs à la solution autocohérente inférieure par ceux associés aux bornes d'ordre 0 (en tirant profit de la croissance en fonction de  $x$  de la quantité  $\frac{x+a}{x+b}$  lorsque  $a < b$ ). On obtient ainsi la majoration

$$\alpha \leq \frac{3}{4} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{80}{81\kappa}} \right] \cdot \text{Sup} \left\{ \frac{\mu_r^{+} - \mu_r^{-}}{\frac{2}{3}\mu_r^{+} + \mu_r^{-}}, \kappa \cdot \frac{k_r^{+} - k_r^{-}}{\frac{4}{3}\mu_r^{-} + k_r^{-}} \right\}
 \tag{4.442}$$

beaucoup plus grossière que la précédente mais qui permet une première quantification des rapports de modules assurant l'unicité. Dans le cas le plus général, on peut de plus minorer  $\mu_r^{-}$  par 0 dans la majoration relative au module de compressibilité. La condition  $\alpha = 1$  donne alors :

$$\text{Sup} \frac{\mu_r^{+}}{\mu_r^{-}} = 1 + \frac{20}{1 + 9\sqrt{1 + \frac{80}{81\kappa}}} < 3 \quad \text{et} \quad \text{Sup} \frac{k_r^{+}}{k_r^{-}} = 1 + \frac{4}{3\kappa \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{80}{81\kappa}} \right]}.
 \tag{4.443}$$

Le coefficient  $\kappa > 0$  est arbitraire ; on peut adapter son choix au matériau considéré. Remarquons que pour  $\kappa$  très petit le contraste relatif aux modules de cisaillement peut être très grand, mais en contrepartie les modules de cisaillement devront être presque identiques. Avec  $\kappa = 1$ , on obtient :

$$\text{Sup} \frac{\mu_r^{+}}{\mu_r^{-}} = 2,46 \quad \text{et} \quad \text{Sup} \frac{k_r^{+}}{k_r^{-}} = 1,55.$$

Ces valeurs restent modestes mais permettent d'ores et déjà d'affirmer l'unicité de la solution pour beaucoup de cas pratiques. À titre de comparaison, rappelons par exemple que le contraste des modules de cisaillement des biphasés fer/cuivre est d'environ 1,8 (cf. tableau 3.1), que celui des modules de compressibilité est de l'ordre de 1,3. En revanche, pour un biphasé fer/argent les valeurs sont respectivement 2,8 et 1,5 et pour un composite à matrice métallique en alliage d'aluminium avec des renforts en carbure de silicium, elles sont encore plus élevées : 5,3 et 2,6 (voir par exemple la référence [163] pour des valeurs typiques des modules).

Pour montrer l'unicité dans des situations de contrastes plus prononcés, il faut revenir à la majoration (4.441) et adapter ses termes aux circonstances particulières. Prenons par exemple le cas d'un composite avec 20% de renforts durs, avec des valeurs usuelles pour le coefficient de Poisson des constituants, de l'ordre de 0,3. Celui de la solution autocohérente  $C_{CL}^{AC-}$  est alors du même ordre de grandeur, et on peut le supposer compris entre 0,2 et 0,4 (une analyse plus poussée permettrait de déterminer précisément les limites). Ceci conduit à des valeurs de  $\frac{\mu}{k}$  comprises entre 0,25 et 0,75, donc à  $I = 1,04$  et  $I' = 0,15$  et à  $\mu_{-}^{*} > 0,8\mu_{-}$ . Connaissant la fraction volumique on peut majorer  $C_{CL}^{AC-}$  par les bornes d'ordre 1 plutôt que celle d'ordre 0. On obtient alors :

$$\alpha \leq 0,52 \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{0,74}{\kappa}} \right] \cdot \text{Sup} \left\{ \frac{(0,8\mu_r^{-} + 0,2\mu_r^{+}) - \mu_r^{-}}{0,8(0,8\mu_r^{-} + 0,2\mu_r^{+}) + \mu_r^{-}}, \kappa \cdot \frac{(0,8k_r^{-} + 0,2k_r^{+}) - k_r^{-}}{\frac{4}{3}0,75(0,8k_r^{-} + 0,2k_r^{+}) + k_r^{-}} \right\}.$$

Si l'on prend  $\kappa = 0,8$ , soit  $0,52\kappa \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{0,74}{\kappa}} \right] < 0,994$ , le coefficient relatif aux modules de compressibilité est toujours inférieur à 1 : il n'a plus de limitation au contraste de ces modules.

Le contraste maximal pour les modules de cisaillement correspondant est d'environ 21. Les valeurs obtenues sont donc cette fois-ci largement suffisantes pour englober la quasi-totalité des situations pratiques en élasticité. On pourrait encore améliorer les résultats en ayant recours à la borne de Hashin et Shtrikman pour majorer  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$ .

Il est vrai en revanche que la démarche présentée ne permettra pas d'établir l'unicité dans toutes les situations et cette propriété reste donc une question ouverte dans le cas de contrastes extrêmes comme ceux que l'on peut rencontrer pour des composites poreux ou à renforts rigides ou encore lorsqu'on étudie l'écoulement plastique de composites par les extensions aux comportements non-linéaires mentionnés plus haut, sans supposer l'uniformité des modules de compressibilité.

La propriété (4.439) permet de qualifier la convergence du processus itératif de calcul de la solution autocohérente. Si l'on choisit le premier terme plus grand que  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$  et de telle sorte que la suite soit monotone, alors on obtient la majoration :

$$\|\mathbf{C}^{(n+1)} - \mathbf{C}^{(n)}\| \leq \alpha^n \|\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}\|, \quad (4.444)$$

où  $\alpha$  est précisément donné par (4.441). La convergence est donc au moins géométrique. L'expression obtenue pour  $\alpha$  suggère (mais ceci n'est pas une démonstration) qu'elle est d'autant plus rapide que le contraste des phases est faible et que les rapports de Poisson des divers constituants sont proches. Lorsque  $\mathbf{C}^{(0)}$  est plus petit que  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}-}$ , on peut appliquer le même raisonnement aux tenseurs des souplesses, dont la convergence sera au moins géométrique de raison  $\beta$ , dont l'expression dépend cette fois-ci des modules de  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}+}$ .

Notons pour finir qu'il est tentant d'appliquer les deux démarches ci-dessus aux situations non isotropes. Pour ce faire, deux difficultés majeures devront être résolues. La première concerne la valeur de  $\mathbf{C}^{0*}$  qui n'admet pas d'expression analytique simple dans tous les cas. Les deux démonstrations ci-dessus reposent sur une majoration des variations de ce tenseur en fonction de  $\mathbf{C}^0$ . Or pour l'instant nous ne disposons que d'une propriété de minoration des variations, qui correspond à la croissance de  $\mathbf{C}^{0*}$ , et d'une propriété d'homogénéité de degré un (*cf.* annexe C), qu'il faudrait donc compléter pour parvenir au résultat souhaité. La seconde difficulté est liée aux comparaisons tensorielles à entreprendre pour majorer les variations  $d\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}$  et les intégrer. On peut utiliser comme dans le cas isotrope la fonction  $s \rightarrow \mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^1 + s[\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1])$  dont la différentielle est donnée par (4.171), avec

$$d\mathbf{C}^{0*} = \frac{d\mathbf{C}^{0*}}{d\mathbf{C}^0} : [\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1] ds. \quad (4.445)$$

L'idée est ensuite de majorer uniformément  $d\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{HS}}$ . Pour cela, il est tentant d'invoquer la propriété  $\forall(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \mathbf{A} \geq \mathbf{B} > 0, \mathbf{C} > 0 \Rightarrow \mathbf{A} : \mathbf{C} : \mathbf{A} \geq \mathbf{B} : \mathbf{C} : \mathbf{B}$  pour remplacer les tenseurs  $\mathbf{C}^{0*}$  dans (4.171) par des quantités uniformes pour  $s \in [0, 1]$ . Mais elle n'est pas vraie dans un cas général, ni même lorsque  $\mathbf{C}$  est isotrope. Nous confions donc la démonstration générale de l'unicité à des développements ultérieurs.

#### 4.5.E.b Approche par MMR

Nous avons établi dans ce qui précède l'existence d'une solution autocohérente dans toutes les situations et l'unicité pour un grand nombre de cas d'un intérêt pratique évident. La question est maintenant d'étendre ces résultats à l'approche par motifs morphologiques représentatifs, c'est-à-dire à des motifs hétérogènes.

Rappelons que l'existence est une conséquence de la croissance du tenseur des modules de l'estimation de Hashin et Shtrikman en fonction de celui du milieu de référence et du fait que cette estimation respecte les bornes de Voigt et Reuss. La seconde propriété s'applique aussi dans le cadre généralisé de l'approche par MMR. La première n'est en revanche pas encore établie mais rappelons qu'il suffirait de montrer que les tenseurs  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  sont eux-mêmes des fonctions croissantes de  $\mathbf{C}^0$  pour qu'il en soit ainsi. Si tel était le cas, on pourrait appliquer à l'identique le raisonnement mis en œuvre dans le cadre de l'approche classique pour obtenir les mêmes résultats : existence d'au moins une solution,

encadrement de toutes les solutions par celles construites en prenant comme terme initial la borne généralisée de Voigt ou celle de Reuss et convergence vers ces solutions de toute suite dont le terme initial est supérieur ou inférieur à ces solutions extrémales.

Les raisonnements pour établir l'unicité en cas d'isotropie de la distribution peuvent aussi être repris. La seule différence réside dans le fait que les tenseurs  $\mathbf{C}^r$  sont remplacés par  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$ . Si les structures des motifs sont telles que ces derniers sont isotropes, alors on peut reprendre les expressions du tenseur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  développées plus haut en remplaçant les modules  $\mu_r$  et  $k_r$  par  $\mu_r^0$  et  $k_r^0$ , tels que  $\{2\mu_r^0, 3k_r^0\} = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$ . Le calcul des variations est en revanche plus délicat puisqu'il faut tenir compte des variations de ces modules avec  $\mu^0$  et  $k^0$ .

Considérons par exemple la première approche qui consiste à s'intéresser aux racines de  $M = \frac{\mu_r^0 - \mu_0}{\mu_r^0 + \mu_0^*}$  à  $k_0$  fixé. La dérivée partielle de cette quantité par rapport à  $\mu^0$  vaut :

$$\left(\mu_r^0 + \mu_0^*\right)^2 \cdot \frac{\partial M}{\partial \mu_0} = \mu_0^E \cdot \frac{\partial \left[ \frac{\mu_r^0}{\mu_0^E} \right]}{\partial \mu_0} + \mu_0^2 \cdot \frac{\partial \left[ \frac{\mu_0^*}{\mu_0} \right]}{\partial \mu_0},$$

où  $\mu_0^E = \mu_0^* + \mu_0$  est le module de cisaillement de  $[\mathbf{E}^0]^{-1}$ . Si l'on pouvait montrer que le rapport  $\frac{\mu_r^0}{\mu_0^E}$  décroît lorsque  $\mu^0$  croît, alors la dérivée partielle ci-dessus serait négative, ce qui conduirait aux mêmes conclusions que dans le cas des motifs homogènes.

Une difficulté analogue se pose pour la seconde approche qui consiste à majorer uniformément la dérivée de  $\mu_s^{\text{HS}}$  par rapport à  $s$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_s^{\text{HS}}}{ds} &= f(\mu_0^*, \mu_r^0, r \in [1, n]) \cdot \left[ \frac{\partial \mu_0^*}{\partial \mu_0} : [\mu_2 - \mu_1] + \frac{\partial \mu_0^*}{\partial k_0} : [k_2 - k_1] \right] \\ &+ \frac{1}{\left[ \sum_r \frac{c_r}{\mu_0^* + \mu_r^0} \right]^2} \cdot \sum_r \frac{c_r}{[\mu_0^* + \mu_r^0]^2} \left[ \frac{\partial \mu_r^0}{\partial \mu_0} : [\mu_2 - \mu_1] + \frac{\partial \mu_r^0}{\partial k_0} : [k_2 - k_1] \right]. \end{aligned}$$

La majoration uniforme du second terme nécessite de connaître des majorants de  $\frac{\partial \mu_r^0}{\partial \mu_0}$  et  $\frac{\partial \mu_r^0}{\partial k_0}$ .

Il apparaît donc que la principale difficulté qui empêche d'étendre à l'approche par MMR les résultats obtenus pour des motifs homogènes est la caractérisation des variations de  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$ . Rappelons que ce problème a déjà été évoqué à la fin du paragraphe 4.4.G ; nous avons signalé la tentative infructueuse d'utiliser les majorations obtenues à la fin du paragraphe 4.4.E pour les tenseurs  $\mathbf{T}_\mu^0$  dans le but de comparer les tenseurs  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  associés à des milieux de référence dont l'écart aurait un signe identifié. Les expressions obtenues n'ont pas été reportées pour des raisons de concision.

On peut reprendre cette approche en se plaçant dans une situation où elles se simplifient particulièrement : il suffit de supposer que l'un des milieux de référence satisfait la condition d'auto-cohérence pour l'Assemblage de Hashin relatif au motif  $\mu$  considéré. La propriété (4.372), avec  $\mathbf{C}_1^0 \leq \mathbf{C}_2^0$  et  $\mathbf{C}_2^0$  autocohérent, conduit alors à :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{C}_1^0, \mathbf{C}_2^0) \quad \forall (\underline{\mathbf{E}}_1^0, \underline{\mathbf{E}}_2^0) \quad \left[ \mathbf{C}_1^0 \leq \mathbf{C}_2^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{2\text{HS}} \right] \\ \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{E}}_1^0 : \left[ \mathbf{T}_\mu^1 + \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_\mu^V \right] : \underline{\mathbf{E}}_1^0 \leq \left[ 2\underline{\mathbf{E}}_1^0 - \underline{\mathbf{E}}_2^0 \right] : \left[ \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_\mu^V \right] : \underline{\mathbf{E}}_2^0, \end{aligned}$$

puisque  $\mathbf{T}_\mu^2 = 0$ . Le membre de droite est minimisé par le choix  $\underline{\mathbf{E}}_2^0 = \underline{\mathbf{E}}_1^0$ , si bien que l'on obtient :

$$\forall (\mathbf{C}_1^0, \mathbf{C}_2^0) \quad \left[ \mathbf{C}_1^0 \leq \mathbf{C}_2^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{2\text{HS}} \right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\mu^1 \leq \mathbf{C}_2^0 - \mathbf{C}_1^0. \quad (4.446)$$

Le majorant de l'inégalité est positif si bien que cette propriété ne permet pas de montrer que  $\mathbf{T}_\mu^1$  ne peut pas être nul, c'est-à-dire que  $\mathbf{C}_1^0$  ne peut pas être autocohérent. En termes de tenseurs de Hashin et Shtrikman, ce résultat (voir par exemple (4.163) pour la manipulation de ce type d'inégalités)

devient :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{C}_1^0, \mathbf{C}_2^0) \quad & \left[ \mathbf{C}_1^0 \leq \mathbf{C}_2^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{2\text{HS}} \right] \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{1\text{HS}} \leq \mathbf{C}_2^0 + \left[ \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0 \right] \cdot \left[ \left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^2 \right]^{-1} + \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0 \right]^{-1} : \left[ \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0 \right]. \end{aligned} \quad (4.447)$$

Il n'est pas suffisamment puissant pour montrer la croissance de  $\mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  au voisinage de  $\mathbf{C}_2^0$  puisque  $\left[ \mathcal{P}_{D_\mu}^2 \right]^{-1} + \mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_2^0$  est défini positif.

Nous avons également tenté d'utiliser les résultats du paragraphe 4.4.E pour comparer deux termes successifs des suites  $\mathbf{C}^{(n)}$ , en prenant par exemple  $\mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}^{(n)}$  et  $\mathbf{C}_1^0 = \mathbf{C}^{(n+1)} = \mathbf{C}_{\mu\text{MMR}}^{0\text{HS}}(\mathbf{C}^{(n)})$ . Les expressions se simplifient aussi quelque peu avec un tel choix. Nous ne les reportons pas, mais un exemple en est donné dans la référence [23]. Les inégalités obtenues sont insuffisantes pour montrer que si  $\mathbf{C}^{(n+1)} \leq \mathbf{C}^{(n)}$  alors  $\mathbf{C}^{(n+2)} \leq \mathbf{C}^{(n+1)}$ , c'est-à-dire que la suite est monotone.

La question de l'existence et de l'unicité de l'estimation autocohérente généralisée reste donc pour l'essentiel ouverte. Pour conclure ce paragraphe sur une note un peu plus optimiste, nous proposons toutefois une démonstration qui établit que deux tenseurs des modules autocohérents ne peuvent pas être proportionnels. Soit donc  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2 = (1 + \alpha)\mathbf{C}_1$  deux milieux de référence dont les tenseurs des modules sont proportionnels et utilisons dans le théorème de l'énergie potentielle (4.321) relatif au problème d'inclusion hétérogène  $\mu$  dans le milieu infini  $\mathbf{C}_1$  avec un chargement  $\underline{\underline{E}}^0$  à l'infini, la solution  $\underline{\underline{\epsilon}}^2$  du même problème mais avec le milieu de référence  $\mathbf{C}_2$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^1 : \underline{\underline{E}}^0 & \leq \int \underline{\underline{\epsilon}}^2 : \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}^2 d\omega + \int_{D_\mu} \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^2 \right] : \left[ \mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^1 \right] : \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^2 \right] d\omega \\ & \leq \frac{1}{1 + \alpha} \left[ \int \underline{\underline{\epsilon}}^2 : \mathbf{C}^2 : \underline{\underline{\epsilon}}^2 d\omega + \int_{D_\mu} \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^2 \right] : \left[ \mathbf{C}^\mu - \mathbf{C}^2 \right] : \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^2 \right] d\omega \right] \\ & \quad + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \int_{D_\mu} \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^2 \right] : \mathbf{C}^\mu : \left[ \underline{\underline{E}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^2 \right] d\omega. \end{aligned}$$

Le premier terme n'est autre que  $\frac{1}{1+\alpha}\underline{\underline{E}}^0 : \mathbf{T}_\mu^2 : \underline{\underline{E}}^0$  et le second est non nul et du signe de  $\alpha$ . D'où :

$$\forall \alpha \in ] -1, 0[ \quad \forall \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{T}_\mu(\mathbf{C}_1) < \frac{1}{1 + \alpha} \mathbf{T}_\mu((1 + \alpha)\mathbf{C}_1). \quad (4.448)$$

La même démarche appliquée au théorème de l'énergie complémentaire conduit à :

$$\forall \alpha > 0 \quad \forall \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{S}_1 : \mathbf{T}_\mu(\mathbf{C}_1) : \mathbf{S}_1 > \frac{1}{1 + \alpha} \mathbf{S}_1 : \mathbf{T}_\mu((1 + \alpha)\mathbf{C}_1) : \mathbf{S}_1. \quad (4.449)$$

Supposons maintenant que  $\mathbf{C}_1$  soit autocohérent, c'est-à-dire  $\langle \mathbf{T}_\mu(\mathbf{C}_1) \rangle = 0$ . Alors pour tout  $\lambda \mathbf{C}_1$  avec  $\lambda = 1 + \alpha > 1$ , la dernière inégalité assure que  $\langle \mathbf{T}_\mu((1 + \alpha)\mathbf{C}_1) \rangle$  est défini négatif ; la précédente montre qu'au contraire cette quantité est définie positive lorsque  $\lambda$  est plus petit que 1. En conséquence  $\mathbf{C}_1$  est le seul tenseur autocohérent de la forme  $\lambda \mathbf{C}_1$ , résultat en conformité avec celui obtenu dans le cas isotrope incompressible avec la projection CL.

#### 4.5.E.c Propriétés déduites de l'unicité

Nous avons déjà noté la croissance stricte de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{0\text{HS}}$  en fonction de  $\langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu$  à  $\mathbf{C}^0$  fixé, qui permet de transformer toute inégalité disponible sur  $\langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu$  en inégalité sur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{0\text{HS}}$ . Les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \geq 0 \\ \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{0\text{HS}} \geq \mathbf{C}^0 \\ \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{0\text{HS}} \leq \mathbf{C}^0, \end{array} \right. \quad (4.450)$$

où les inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes, en découlent.

Si l'on admet l'unicité de la solution autocohérente et la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{OHS}}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$ , ces relations conduisent à de nouvelles propriétés de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$ , déduites des propriétés de  $\mathbf{T}_\mu^0$ . Nous avons établi au paragraphe 4.4.E que ce dernier tenseur est une fonction croissante des tenseurs des modules  $\mathbf{C}^\mu$ . Soit alors  $\mathbf{C}^i$ ,  $i \in [1, 2]$ , les solutions autocohérentes pour des motifs définis sur les mêmes supports  $D_\mu$ ,  $\mu \in [1, n]$ , par les champs de tenseurs de modules locaux  $\mathbf{C}_i^\mu$  et pour les mêmes concentrations  $C_\mu$ . Par définition, on a

$$\langle \mathbf{T}_\mu^1(\mathbf{C}_1^\mu) \rangle_\mu = 0.$$

Supposons qu'en tout point  $\underline{x}$  de tous les supports on ait  $\mathbf{C}_1^\mu(\underline{x}) \leq \mathbf{C}_2^\mu(\underline{x})$ . Alors, du fait de la croissance de  $\mathbf{T}_\mu^1$  rappelée ci-dessus, on a :

$$\langle \mathbf{T}_\mu^1(\mathbf{C}_2^\mu) \rangle_\mu \geq 0$$

et donc par les équivalences ci-dessus :

$$\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}_2^\mu) \geq \mathbf{C}^1.$$

Par unicité de la solution autocohérente,  $\mathbf{C}^2$  est en particulier la limite de la suite  $\mathbf{C}^{(n)}$  construite en prenant  $\mathbf{C}^1$  comme premier terme. Le résultat précédent montre que le second terme est supérieur au premier et donc, par la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{OHS}}$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$ , que la suite est croissante. Sa limite est donc aussi supérieure à  $\mathbf{C}^1$ .

On montre ainsi que l'estimation autocohérente est une fonction croissante des tenseurs des modules locaux, que l'on peut écrire formellement :

$$\forall(\mathbf{C}^\mu, \Delta\mathbf{C}^\mu) \quad [\forall\mu \forall\underline{x} \in D_\mu \Delta\mathbf{C}^\mu(\underline{x}) \geq 0] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}(\mathbf{C}^\mu + \Delta\mathbf{C}^\mu) \geq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}(\mathbf{C}^\mu). \quad (4.451)$$

On vérifie que les inégalités larges peuvent être troquées contre des inégalités strictes.

Une telle propriété de croissance est souhaitable. Il est en effet facile de montrer que les modules effectifs  $\bar{\mathbf{C}}$  d'un milieu hétérogène sont des fonctions croissantes des modules des constituants<sup>24</sup>. Il est donc normal qu'une estimation de ces modules effectifs vérifie la même propriété. Le contraire serait un critère irréfutable de discrédit du modèle.

Le même raisonnement que ci-dessus conduit aussi à la propriété :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \geq 0 & \Leftrightarrow & \mathbf{C}^0 \leq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}} \\ \langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu \leq 0 & \Leftrightarrow & \mathbf{C}^0 \geq \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}. \end{cases} \quad (4.452)$$

#### 4.5.F Interprétation de l'hypothèse d'autocohérence

Les propriétés établies dans ce qui précède s'appliquent aux solutions de l'équation d'autocohérence (4.407), dans les cas de distribution ellipsoïdale simple des phases ou des motifs qui conduisent à des expressions explicites des tenseurs de Hashin et Shtrikman. La validité des estimations obtenues est donc limitée aux matériaux qu'on peut décrire de la sorte. Il est en revanche évident que les matériaux répondant à une description particulière de ce type, c'est-à-dire admettant les mêmes motifs avec les mêmes fractions volumiques de phases morphologiques, n'ont pas tous le même comportement. L'estimation obtenue ne s'identifie aux modules effectifs que pour une certaine catégorie d'entre eux.

Nous avons déjà vu que si l'hypothèse d'autocohérence (4.405) est satisfaite, alors assurément le matériau étudié fait partie de cette catégorie. De plus, dans ce cas, les champs d'essai invoqués dans la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman s'identifient aux champs réels. Le modèle autocohérent est alors un outil de prévision à l'échelle globale mais aussi locale. Mais cette hypothèse

<sup>24</sup>Il suffit par exemple d'utiliser dans les formulations variationnelles sur le VER du milieu avec des modules plus raides les champs solutions pour la microstructure de même morphologie avec des modules plus souples : l'écart entre les énergies est une forme quadratique calculée par intégration des écarts des modules locaux.

d'autocohérence reste pour l'essentiel obscure. Il conviendrait de la préciser en termes de microstructure et non de champs mécaniques locaux, de façon à pouvoir reconnaître, à partir de certaines propriétés de la distribution des phases ou des motifs, les matériaux pour lesquels elle sera vérifiée. Le problème est difficile et reste pour l'essentiel ouvert.

#### 4.5.F.a Approche classique ; distribution isotrope des phases

Certains éléments de réponse sont toutefois fournis par la théorie du « désordre gradué » due à Kröner (voir paragraphe 1.2.B.b). Rappelons que le tenseur des modules effectifs de tout matériau hétérogène peut être écrit sous la forme d'une série de la forme (1.90), définie à partir de l'opérateur de Green modifiée  $\mathbf{\Gamma}^0$  associé à un milieu de référence  $\mathbf{C}^0$  quelconque. Les conditions de convergence d'une telle série sont étudiées dans la référence [61] pour un milieu  $\mathbf{C}^0$  isotrope. Rappelons aussi (cf. annexe B) que l'opérateur  $\mathbf{\Gamma}^0$  admet la décomposition suivante

$$\mathbf{\Gamma}^0 = VP(\mathbf{F}^0) + \mathbf{E}^0 \delta \quad (4.453)$$

où  $\mathbf{E}^0$  caractérise la partie locale de l'opérateur et  $VP(\mathbf{F}^0)$  est la valeur principale de  $\mathbf{F}^0 = -\nabla^s \nabla^s \underline{\underline{G}}^0$ , où  $\underline{\underline{G}}^0$  est le tenseur de Green.

En choisissant comme milieu de référence la solution autocohérente  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}}$  associée à une distribution isotrope des phases, Kröner parvient, au moyen de la décomposition ci-dessus et d'une réécriture astucieuse de la série (1.90), à établir<sup>25</sup> que cette dernière est la somme d'une série de la même forme mais dans laquelle  $\mathbf{\Gamma}^0$  est remplacé par  $\mathbf{E}^0$  et de termes complémentaires formés par combinaison linéaire de termes du type  $\langle \mathbf{C}' : [\mathbf{F}^0 \star \mathbf{C}']^p \rangle$ , avec  $\mathbf{C}' = \mathbf{C} - \langle \mathbf{C} \rangle$ . Après refactorisation, il apparaît que la série construite avec  $\mathbf{E}^0$  n'est autre que l'estimation de Hashin et Shtrikman construite à partir de  $\mathbf{C}^0$  pour le matériau en question, c'est-à-dire, compte tenu du choix adopté pour le milieu de référence, l'estimation autocohérente  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}}$ . En conséquence, si les termes complémentaires sont tous nuls, ce qui est le cas lorsque l'hypothèse (1.98) de « désordre gradué » est satisfaite à tous les ordres, alors les modules effectifs sont bien égaux à l'estimation autocohérente.

Les conditions de désordre parfait sont donc suffisantes pour garantir que les modules effectifs sont égaux aux modules autocohérents. D'après Kröner, ces conditions ne sont pas incompatibles, c'est-à-dire qu'il existe bien une ou des microstructures qui les satisfont. En conséquence, l'estimation autocohérente représente bien une certaine réalité. Dans l'état actuel des choses, il n'est en revanche pas encore établi qu'une situation de « désordre parfait » garantisse que l'hypothèse d'autocohérence (4.405) telle que nous l'avons introduite soit pertinente. Il reste à vérifier que les écarts  $\Delta_\psi^0$  et  $\Delta_\phi^0$  sont effectivement identiquement nuls. Pour ce faire, il suffirait de montrer qu'ils sont formés par combinaison linéaire de termes du type  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle : \langle \mathbf{C}' : [\mathbf{F}^0 \star \mathbf{C}']^p \rangle : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ . Nous confions une telle vérification à des développements ultérieurs et supposons dans l'immédiat qu'il en est bien ainsi. Dans ces conditions, l'hypothèse d'autocohérence est bien satisfaite en cas de « désordre parfait » des phases. L'objectif est donc formellement atteint puisque nous avons une traduction purement microstructurale de l'hypothèse d'autocohérence, qui s'applique en cas de distribution isotrope des phases. Ce résultat reste en revanche formel : une mise en œuvre pratique serait fastidieuse et donc illusoire ; de plus, comme nous l'avons déjà dit, la signification concrète de l'hypothèse de « désordre gradué à l'ordre  $p$  » reste obscure.

#### 4.5.F.b Approche classique ; distribution ellipsoïdale simple des phases

La démarche mise en œuvre par Kröner est purement formelle et algébrique : elle repose sur les développements en série du tenseur des modules effectifs  $\bar{\mathbf{C}}$  et de l'estimation autocohérente  $\mathbf{C}_{\text{CL}}^{\text{AC}}$  associée à une distribution isotrope des phases, ainsi que sur la décomposition (4.453) de l'opérateur de Green modifiée. Cette dernière n'est pas unique. La décomposition « ellipsoïdale »

$$\mathbf{\Gamma}^0 = VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0) + \mathbf{E}_{\mathcal{E}}^0 \delta \quad (4.454)$$

<sup>25</sup>La propriété n'a en réalité été vérifiée algébriquement que pour les premiers termes, mais l'auteur estime que ceci est suffisant pour qu'on puisse en pratique l'estimer satisfaite à tous les ordres.



peut également être utilisée. Dans cette écriture,  $VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0)$  est la valeur principale généralisée (cf. annexe **B**) de  $\mathbf{F}^0$  relative à l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$ . Il est formellement possible de reprendre la démarche algébrique de Kröner en optant pour cette décomposition et en choisissant pour milieu de référence l'estimation autocohérente classique associée à la distribution ellipsoïdale des phases de paramètres donnés par  $\mathcal{E}$ . On obtient ainsi, sans calcul, que cette estimation fournit les modules effectifs d'un matériau dont la distribution des phases satisfait les conditions de « désordre gradué ellipsoïdal »<sup>26</sup> d'ordre  $p$  :

$$\langle \mathbf{C}' : [VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0) \star \mathbf{C}']^q \rangle = 0 \quad \forall q < p, \quad (4.455)$$

à tous les ordres et pour un opérateur  $\mathbf{F}^0$  construit à partir du tenseur des modules de cette estimation autocohérente. On vérifie facilement que l'hypothèse de distribution ellipsoïdale simple des phases induit celle de « désordre gradué ellipsoïdal d'ordre deux ». En effet, soit  $\underline{\underline{A}}$  le tenseur caractérisant l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  qui définit les conditions de désordre ellipsoïdal considéré, c'est-à-dire que  $VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0) \star \mathbf{f}$  se calcule selon :

$$[VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0) \star \mathbf{f}] (\underline{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot (\underline{y} - \underline{x})\| \geq \lambda} \mathbf{F}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \mathbf{f}(\underline{y}) d\omega_y.$$

Si les phases constitutives sont en distribution ellipsoïdale simple de mêmes paramètres  $\underline{\underline{A}}$  on a :

$$\langle \mathbf{C}'(\underline{x}) \otimes \mathbf{C}'(\underline{x} + \underline{z}) \rangle = \sum_{r,s} \mathbf{C}^{r'f} \otimes \mathbf{C}^{s'f} \langle \kappa_r(\underline{x}) \kappa_s(\underline{x} + \underline{z}) \rangle = \sum_{r,s} \mathbf{C}^{r'f} \otimes \mathbf{C}^{s'f} \Phi_{rs} \left( \|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{z}\| \right)$$

et donc, d'après les propriétés de l'opérateur de Green modifié établies en annexe **B** et déjà amplement utilisées :

$$\langle \mathbf{C}' : VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0) \star \mathbf{C}' \rangle = \sum_{r,s} \mathbf{C}^{r'f} : \left[ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{z}\| \geq \lambda} \mathbf{F}^0(\underline{z}) \Phi_{rs} \left( \|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{z}\| \right) d\omega_y \right] : \mathbf{C}^{s'f} = 0$$

En revanche, alors qu'il est facile de construire une microstructure avec des phases en distribution ellipsoïdale simple à partir d'une microstructure avec des phases en distribution isotrope (cf. paragraphe **4.2.B.b**), l'opération n'est pas aussi simple pour les microstructures en situation de désordre à l'ordre  $p$  : la transformation  $\mathcal{T} : \underline{x} \rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$  ne suffit peut-être pas. En effet, soient  $\mathbf{C}^{\text{iso}}$  un champ de tenseurs de modules locaux satisfaisant les conditions de « désordre isotrope à l'ordre  $p$  » et  $\mathbf{C}^{\text{ell}}$  le champ déduit de  $\mathbf{C}^{\text{iso}}$  par  $\mathcal{T}$  :

$$\mathbf{C}^{\text{ell}}(\underline{x}) = \mathbf{C}^{\text{iso}}(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}).$$

Les écarts  $\mathbf{C}^{\text{iso}'}$  et  $\mathbf{C}^{\text{ell}'}$  vérifient aussi cette relation. On a alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{C}^{\text{ell}'} : [VP_{\mathcal{E}}(\mathbf{F}^0) \star \mathbf{C}^{\text{ell}'}]^p \rangle (\underline{x}) &= \lim_{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \rightarrow (0, \dots, 0)} \int_{\{\|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{z}_1\| \geq \lambda_1\} \times \dots \times \{\|\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{z}_p\| \geq \lambda_p\}} \mathbf{C}^{\text{ell}'}(\underline{x}) : \\ &\quad \mathbf{F}^0(\underline{z}_1) : \mathbf{C}^{\text{ell}'}(\underline{x} + \underline{z}_1) : \dots : \mathbf{F}^0(\underline{z}_p) : \mathbf{C}^{\text{ell}'}(\underline{x} + \underline{z}_1 + \dots + \underline{z}_p) d\omega_{z_1} \dots d\omega_{z_p} \\ &= \lim_{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{1}{|\det \underline{\underline{A}}|^p} \int_{\{\|\underline{z}_1\| \geq \lambda_1\} \times \dots \times \{\|\underline{z}_p\| \geq \lambda_p\}} \mathbf{C}^{\text{iso}'}(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}) : \\ &\quad \mathbf{F}^0(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{z}_1) : \mathbf{C}^{\text{iso}'}(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x} + \underline{z}_1) : \dots : \mathbf{F}^0(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{z}_p) : \mathbf{C}^{\text{iso}'}(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x} + \underline{z}_1 + \dots + \underline{z}_p) d\omega_{z_1} \dots d\omega_{z_p}. \end{aligned}$$

La dernière expression ne s'identifie pas à celle de la condition de désordre à l'ordre  $p$  pour  $\mathbf{C}^{\text{iso}}$  en  $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{x}$  du fait de la présence de  $\underline{\underline{A}}$  dans les arguments de  $\mathbf{F}^0$ . Ceci n'est pas vraiment surprenant puisque les conditions de « désordre à un ordre  $p$  » sont liées à un choix de milieu de référence particulier. Bien que cet aspect ne soit pas parfaitement cerné dans la théorie proposée par Kröner pour un ordre  $p$  quelconque, les choses semblent plus claires pour le « désordre parfait », puisque dans ce cas les conditions sont explicitement définies à partir du choix du milieu autocohérent comme milieu de référence. Or la solution autocohérente pour la distribution  $\mathbf{C}^{\text{ell}}$  n'est assurément pas la même que celle pour le milieu  $\mathbf{C}^{\text{iso}}$ . Il est donc normal qu'un simple changement de variables ne conduise pas au résultat souhaité. Des propriétés complémentaires de  $\mathbf{F}^0$  et des informations sur l'évolution de la solution autocohérente par transformation ellipsoïdale sont probablement nécessaires pour répondre plus amplement à cette question.

<sup>26</sup> Cette notion été proposée initialement dans la référence [151].

### 4.5.F.c Approche par motifs morphologiques

Les remarques ci-dessus relatives à des distributions isotropes ou ellipsoïdale simples des phases fournissent un début d'interprétation aux modèles autocohérents définis dans le cadre classique. Il est très tentant d'étendre ces idées à l'approche par MMR : peut-on considérer les prévisions des modèles autocohérents généralisés que nous avons proposés comme les modules effectifs exacts de microstructures où les motifs seraient dans une certaine situation de « désordre parfait » ?

Nous n'avons pas la réponse à cette question mais nous suggérons ici quelques pistes pouvant éventuellement y conduire. Notons d'abord que les généralisations aux descriptions par MMR des hypothèses sur la répartition statistique des constituants introduites dans les approches classiques portent sur la distribution des centres des motifs. Il semble donc naturel de s'attendre à des conditions portant aussi sur ces centres : la notion de désordre gradué ou parfait de motifs, si elle existe, est probablement une notion de désordre gradué ou parfait des centres des motifs, qui porte donc sur les variables aléatoires  $\zeta^\lambda$ .

Rappelons ensuite que l'approche classique n'est autre que le cas limite de l'approche par MMR où le support des motifs est « très petit ». La décomposition (4.454) est elle-même la limite, pour  $\lambda$  tendant vers 0, de la décomposition :

$$\begin{aligned} \Gamma^0(\underline{x} - \underline{y}) &= \mathbf{F}^0(\underline{x} - \underline{y})H\left(\left\|\mathbf{A}^{-1} \cdot (\underline{x} - \underline{y})\right\| - \lambda\right) \\ &\quad + \left[\Gamma^0(\underline{x} - \underline{y}) - \mathbf{F}^0(\underline{x} - \underline{y})H\left(\left\|\mathbf{A}^{-1} \cdot (\underline{x} - \underline{y})\right\| - \lambda\right)\right], \end{aligned}$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside. Le premier terme rend compte des interactions à une distance  $\left\|\mathbf{A}^{-1} \cdot (\underline{x} - \underline{y})\right\|$  plus grande que  $\lambda$  et le second rappelle celles opérant dans un voisinage immédiat. L'idée ayant conduit à l'approche par MMR repose sur une décomposition analogue, visant à séparer les interactions locales, faciles à calculer du fait de la parfaite connaissance du contenu interne des motifs, des interactions à distance pour lesquelles on ne dispose que d'informations partielles au travers des fonctions de corrélation des centres.

La première idée est donc d'opter pour la décomposition ci-dessus en remplaçant  $\lambda$  par une quantité finie correspondant à l'extension des motifs. Mais ce choix bute sur le problème de la diversité des tailles de motifs et surtout sur la prise en compte des positions relatives des points matériels dans les motifs : les interactions connues d'un point  $\underline{x}$  d'un motif  $\mu$  centré en  $\underline{X}_\mu^i$  sont celles opérant au sein du domaine  $D_\mu(\underline{X}_\mu^i)$  et non pas  $D_\mu(\underline{x})$ . Pour lever cette difficulté, on peut opter pour une décomposition conditionnelle, variant suivant la position au sein de la structure  $\mathcal{S}$ . Nous suggérons ainsi la relation :

$$\forall(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{S}^2 \quad \Gamma^0(\underline{x} - \underline{y}) = \mathbf{E}_{\text{MMR}}^0(\underline{x} - \underline{y}) + \mathbf{F}_{\text{MMR}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \quad (4.456)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{MMR}}^0(\underline{x} - \underline{y}) &= \mathbf{E}_D^0 \delta(\underline{x} - \underline{y}) \\ &\quad + \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_\lambda \times D_\lambda} \zeta^\lambda(\underline{x} - \underline{z}) \zeta^\lambda(\underline{y} - \underline{z}') \delta(\underline{x} - \underline{z} - \underline{y} + \underline{z}') d\omega_z d\omega_{z'} V P_D(\mathbf{F}^0)(\underline{x} - \underline{y}). \end{aligned} \quad (4.457)$$

L'intégrale double n'est non nulle que si  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  appartiennent au même représentant du même motif. Le domaine  $D$  est un ellipsoïde de même forme que les supports des motifs. Le terme  $\mathbf{E}_D^0 \delta(\underline{x} - \underline{y})$  concerne le domaine non occupé par les motifs. Lorsque la concentration en matrice 1 est nulle, on peut l'omettre et remplacer  $V P_D(\mathbf{F}^0)(\underline{x} - \underline{y})$  par  $\Gamma^0(\underline{x} - \underline{y})$ . Par soustraction, on a :

$$\mathbf{F}_{\text{MMR}}^0(\underline{x} - \underline{y}) = \sum_{\lambda=2}^n \left[ 1 - \int_{D_\lambda \times D_\lambda} \zeta^\lambda(\underline{x} - \underline{z}) \zeta^\lambda(\underline{y} - \underline{z}') \delta(\underline{x} - \underline{z} - \underline{y} + \underline{z}') d\omega_z d\omega_{z'} \right] V P_D(\mathbf{F}^0)(\underline{x} - \underline{y}). \quad (4.458)$$

On peut vérifier que lorsqu'on remplace dans la série (1.90) l'opérateur  $\Gamma^0$  par  $\mathbf{E}_{\text{MMR}}^0$  construit avec  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$  comme milieu de référence, le résultat est bien  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$ . Par ailleurs, la quantité  $\langle \mathbf{C}' : \mathbf{F}_{\text{MMR}}^0 \star \mathbf{C}' \rangle$  est bien nulle lorsque les centres des motifs respectent une distribution ellipsoïdale simple. Pour s'en

rendre compte, on peut d'abord remarquer que si le coefficient multiplicatif devant  $VP_D(\mathbf{F}^0)(\underline{x} - \underline{y})$  dans l'expression de  $\mathbf{F}_{\text{MMR}}^0(\underline{x} - \underline{y})$  était égal à l'unité, on aurait, en l'absence de matrice 1 :

$$\langle \mathbf{C}' : \mathbf{F}_{\text{MMR}}^0 \star \mathbf{C}' \rangle = \sum_{\lambda, \lambda'} \int_{D_\lambda \times D_{\lambda'}} \mathbf{C}^\lambda(\underline{z}) : \left[ \int \left[ \delta_{\lambda\lambda'} p_\lambda \delta(\underline{x} - \underline{y} - \underline{z} + \underline{z}') + p_{\lambda\lambda'}(\underline{x} - \underline{y} - \underline{z} + \underline{z}') \right] VP_D(\mathbf{F}^0)(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y \right] : \mathbf{C}^{\lambda'}(\underline{z}') d\omega_z d\omega_{z'}.$$

La présence du coefficient multiplicatif a pour effet de supprimer le terme  $\delta_{\lambda\lambda'} p_\lambda \delta(\underline{x} - \underline{y} - \underline{z} + \underline{z}')$  dans la corrélation. L'hypothèse de distribution ellipsoïdale des centres conduit aux propriétés déjà données de  $p_{\lambda\lambda'}$  et par suite à la nullité de l'expression ci-dessus.

On peut donc tenter la définition suivante pour la notion de désordre gradué d'ordre  $p$  relatif à une description par MMR d'une microstructure :

$$\langle \mathbf{C}' : \left[ \mathbf{F}_{\text{MMR}}^0 \star \mathbf{C}' \right]^q \rangle = 0 \quad \forall q < p. \quad (4.459)$$

#### 4.5.F.d Commentaires

Cette dernière définition et plus généralement les remarques ci-dessus sont principalement prospectives et ne prétendent à aucune rigueur mathématique. Elles n'apportent rien de fondamentalement neuf à la compréhension d'un point de vue microstructural des notions de désordre d'ordre  $p$  et de désordre parfait, qui restent à nos yeux, pour l'essentiel, formelles et obscures quant à leur véritable signification physique. Elles montrent toutefois que, si ces notions ont un sens et donnent une interprétation au modèle autocohérent dans le cadre de l'approche classique et dans l'hypothèse d'une distribution isotrope des phases, alors l'extension de ces concepts au cadre de l'approche par MMR avec une distribution ellipsoïdale simple des motifs selon les principes suggérés ci-dessus conduira fort probablement aussi à une interprétation analogue des modèles autocohérents généralisés. Mais ce travail reste à mener à bien.

Dans l'immédiat la signification de ces modèles reste limitée à celle que nous avons proposée initialement. Lorsque l'hypothèse d'autocohérence est pertinente, on obtient les valeurs exactes des modules effectifs et des projetés des champs locaux. Dans le cas contraire, qui est en fait le cas usuel puisque l'hypothèse d'autocohérence ne peut être exactement vérifiée en pratique, on obtient simplement l'estimation « la plus probable », dans le sens qu'elle tend à minimiser les écarts  $\Delta_\psi^0$  et  $\Delta_\phi^0$ . En l'absence d'argument contraire, les champs d'essai construits par la procédure variationnelle de Hahsin et Shtrikman fournissent aussi les estimations les plus probables des projetés des champs locaux. La pertinence des résultats dépendra du degré d'adéquation entre la projection  $\mathcal{P}$  retenue et l'information microstructurale disponible, qui détermine l'exploitation plus ou moins optimale de cette dernière.

## Chapitre 5

# Mise en œuvre numérique et applications

Ce dernier chapitre est consacré à la mise en œuvre des modèles présentés au chapitre précédent. Il débute par un rappel de la procédure générale conduisant aux bornes de type Voigt et Reuss, aux bornes de type Hashin et Shtrikman et aux estimations autocohérentes. Les relations de calcul des tenseurs des modules à partir des moyennes des champs locaux sont explicitées en cas d'isotropie, d'isotropie transverse et de symétrie cubique. Les problèmes auxiliaires d'inclusions hétérogènes peuvent être traités par des moyens numériques lorsqu'on ne connaît pas de solution analytique. Parmi les diverses techniques envisageables, nous retenons celle des éléments finis pour sa facilité de mise en œuvre. Les approximations inhérentes aux méthodes numériques doivent toutefois être contrôlées. Elles sont abordées en seconde partie du chapitre. L'influence de la finesse des maillages et l'effet de l'application de conditions aux limites homogènes à une distance finie de l'inclusion sont plus particulièrement discutés au travers de l'étude numérique de l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin, pour lequel les solutions analytiques sont connues. Cette étude est menée sur des modèles numériques d'abord bidimensionnels puis tridimensionnels. La faisabilité de la démarche est ainsi démontrée. La troisième partie du chapitre est consacrée à deux exemples d'application. De nouvelles bornes et estimations sont déterminées numériquement pour des composites à renforts particuliers décrits par des assemblages de Hashin généralisés. Les inclusions sont de forme cubique ou ellipsoïdale et sont alignées si bien que les comportements effectifs respectent la symétrie cubique ou isotrope transverse. Les résultats sont comparés à d'autres bornes. Ces études permettent en particulier de préciser quantitativement l'influence relative de la géométrie des renforts et de leur distribution statistique. Enfin, la dernière partie concerne les extensions aux comportements non linéaires. Diverses possibilités sont suggérées et commentées. La mise en œuvre de l'une d'entre elles montre que les difficultés numériques sont nettement plus grandes que dans une situation linéaire.

Les procédures décrites dans ce chapitre ne s'appliquent qu'aux bornes de type Hashin et Shtrikman et aux estimations autocohérentes fondées sur une description par MMR avec des motifs ellipsoïdaux dont les supports sont homothétiques. On ne traite pas les estimations de type « Mori et Tanaka généralisées » compatibles avec des géométries de motifs quelconques. Bien qu'elles ne soient pas les plus générales, les situations traitées sont toutefois les plus intéressantes puisque, comme on l'a vu au chapitre précédent, les encadrements obtenus avec des motifs ellipsoïdaux de supports homothétiques et d'extension aussi grande que possible sont toujours plus resserrés que ceux obtenus avec des motifs quelconques d'extension plus petite et que, dans beaucoup de situations pratiques, les hypothèses sur la distribution des renforts induisent l'existence d'une telle description par motifs ellipsoïdaux de supports homothétiques. Les procédures relatives aux bornes de type Voigt et Reuss s'appliquent quelle que soit la géométrie des motifs.

La plupart des résultats présentés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans les références [24] et [28].

## 5.1 Procédure générale

### 5.1.A Calcul des bornes et estimations

Les données supposées disponibles sont celles qui définissent complètement la description par MMR de la microstructure étudiée, c'est-à-dire plus précisément les champs de tenseurs  $\underline{C}^\lambda$  définis sur les domaines ellipsoïdaux homothétiques  $D_\lambda$  et les fractions volumiques de phases morphologiques  $C_\lambda$ , pour les  $n$  motifs  $\lambda$ , dont l'un est éventuellement homogène. La construction d'une telle description à partir d'une microstructure réelle a déjà été discutée pour quelques cas particulièrement simples mais reste pour l'essentiel une question ouverte qui n'est pas abordée dans ce chapitre.

Il se peut que certains des motifs soient homothétiques. C'est le cas pour l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin où tous les motifs le sont. En l'absence de dimension caractéristique, les problèmes auxiliaires associés à ces motifs sont tous identiques. Par extension de langage, on convient alors dans ce qui suit de considérer comme un même motif l'ensemble des ces motifs homothétiques. Avec cette convention, l'Assemblage des Sphères Composites est, par exemple, décrit par un motif unique : la sphère composite, dont la concentration est égale à l'unité. Rappelons toutefois que les hypothèses de distribution adoptées pour le calcul des bornes ou estimations de type Hashin et Shtrikman portent sur les positions relatives moyennes des motifs de même extension.

#### 5.1.A.a Bornes de type Voigt et Reuss

Le calcul de la borne de Voigt généralisée consiste à déterminer pour toute déformation  $\underline{E}^V$ , d'abord les contraintes moyennes  $\langle \underline{\sigma}_\lambda^V \rangle_{D_\lambda}$  qui apparaissent dans les motifs  $\lambda$  lorsque le déplacement  $\underline{E}^V \cdot \underline{x}$  est imposé à leur bord, puis leur moyenne pondérée par les fractions volumiques des phases morphologiques :  $\underline{\Sigma}^V = \sum_\lambda C_\lambda \langle \underline{\sigma}_\lambda^V \rangle_{D_\lambda}$ . La borne de Voigt est alors caractérisée par le tenseur liant  $\underline{\Sigma}$  à  $\underline{E}$  :

$$\forall \underline{E} \quad \underline{\Sigma}^V = \underline{C}_{\text{MMR}}^V : \underline{E}^V. \quad (5.1)$$

Le calcul de  $\underline{C}_{\text{MMR}}^V$  est entrepris selon les principes qui sont décrits ci-après.

La borne de Reuss est déterminée selon une procédure analogue, la seule différence étant que l'on impose une contrainte homogène au bord des motifs par  $\underline{\Sigma}^R \cdot \underline{n}$  et que l'on calcule les moyennes des déformations induites  $\langle \underline{\epsilon}_\lambda^R \rangle_{D_\lambda}$  et  $\underline{E}^R = \sum_\lambda C_\lambda \langle \underline{\epsilon}_\lambda^R \rangle_{D_\lambda}$ . Le tenseur  $\underline{C}_{\text{MMR}}^R$  est celui qui assure :

$$\forall \underline{\Sigma} \quad \underline{\Sigma}^R = \underline{C}_{\text{MMR}}^R : \underline{E}^R \quad (5.2)$$

et on le calcule aussi à partir des couples  $(\underline{\Sigma}^R, \underline{E}^R)$  par les techniques exposées plus loin.

#### 5.1.A.b Bornes de type Hashin et Shtrikman

Les problèmes auxiliaires à résoudre pour déterminer les tenseurs de Hashin et Shtrikman associés au milieu de référence  $\underline{C}^0$  consistent à trouver pour tout chargement homogène  $\underline{\Sigma}^0 = \underline{C}^0 : \underline{E}^0$  appliqué à l'infini, les moyennes  $\langle \underline{\sigma}_\lambda^{\text{HS}} \rangle_{D_\lambda}$  et  $\langle \underline{\epsilon}_\lambda^{\text{HS}} \rangle_{D_\lambda}$  des champs de contrainte et de déformation dans les motifs  $\lambda$  lorsque ces derniers sont noyés dans le milieu infini homogène  $\underline{C}^0$ . Le tenseur  $\underline{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0}$  est celui qui vérifie

$$\forall \underline{E}^0 \quad \underline{\Sigma}^{\text{HS}} = \underline{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}^0} : \underline{E}^{\text{HS}}, \quad (5.3)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{E}^{\text{HS}} = \sum_\lambda C_\lambda \langle \underline{\epsilon}_\lambda^{\text{HS}} \rangle_{D_\lambda} \\ \underline{\Sigma}^{\text{HS}} = \sum_\lambda C_\lambda \langle \underline{\sigma}_\lambda^{\text{HS}} \rangle_{D_\lambda} \end{cases} \quad (5.4)$$

On le calcule encore par la procédure décrite plus loin.

La nature de borne est déterminée par le choix de  $\mathbf{C}^0$  conformément aux règles (4.27). Nous avons montré que lorsque les motifs sont homogènes le meilleur encadrement est obtenu lorsque l'on choisit les bornes d'ordre 0,  $\mathbf{C}_r^-$  et  $\mathbf{C}_r^+$ . En pratique, c'est également le cas lorsque les motifs sont hétérogènes mais ceci n'est pas encore établi théoriquement.

Il est en revanche établi que lorsque l'on choisit un milieu de référence beaucoup plus raide ou beaucoup plus souple que toutes les phases constitutives  $\mathbf{C}^r$ , alors on obtient respectivement la borne de Voigt ou la borne de Reuss généralisées. Cette propriété fournit une méthode alternative pour le calcul des tenseurs  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{V}}$  et  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{R}}$ . Sa mise en œuvre est *a priori* plus lourde, mais c'est bien cette seconde procédure que nous avons utilisée en pratique pour la borne de Reuss, la première ne pouvant être appliquée pour des raisons liées à des limitations techniques des moyens numériques que nous avons utilisés qui seront précisées plus loin.

### 5.1.A.c Estimation autocohérente

L'estimation autocohérente  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$  est une estimation de Hashin et Shtrikman particulière qui satisfait la condition d'autocohérence. Cette dernière est une équation d'inconnue tensorielle  $x$  du type  $x = f(x)$  où la fonction  $f$  est connue et n'est autre que l'estimation de Hashin et Shtrikman, calculée selon les principes donnés ci-dessus. Toute procédure numérique de résolution d'une équation de ce type pourrait être utilisée pour la détermination de la (ou des) solution(s).

La plus simple est l'algorithme du point fixe, qui consiste à construire des approximations successives  $\mathbf{C}^{(n)}$  d'une solution à partir d'un terme initial  $\mathbf{C}^{(0)}$  par application de la relation de récurrence  $\mathbf{C}^{(n+1)} = \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^{(n)})$ . Nous avons établi que, lorsque les motifs sont homogènes, ces suites convergent, en tous cas lorsque le terme initial est suffisamment grand ou suffisamment petit au sens des formes quadratiques associées. Nous avons aussi montré qu'en cas d'isotropie des constituants, de sphéricité des motifs et de contraste modéré des phases constitutives, ces suites convergent toujours vers une même limite qui est l'estimation autocohérente, unique. De plus, la convergence de la suite est au moins géométrique.

Ces propriétés se sont avérées exactes dans tous les cas pratiques que nous avons testés, y compris pour des motifs hétérogènes. L'algorithme mis en œuvre est donc bien celui du point fixe. Le critère d'arrêt du processus itératif porte sur la norme de l'écart de deux termes successifs. Toute norme sur les tenseurs d'ordre quatre peut être utilisée. Pour limiter le nombre d'itérations, on peut opter pour un terme initial proche de la solution, par exemple la demi-somme des bornes de Voigt et Reuss classique, facile à déterminer.

En revanche, si l'on souhaite s'assurer de l'unicité de la solution, il est préférable de construire les deux suites obtenues en prenant les bornes de Voigt et Reuss comme premier terme. Lorsque les motifs sont homogènes, les estimations successives sont des bornes supérieures ou inférieures pour  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$  et si elles convergent vers la même limite, alors l'unicité est assurée. Dans ce cas, on peut préférer faire porter le critère d'arrêt sur la norme de l'écart entre les deux suites ; la précision sur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{AC}}$  sera alors assurément au moins aussi bonne que la valeur critique retenue. On peut adopter la même stratégie pour des motifs hétérogènes, en admettant la croissance de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}(\mathbf{C}^0)$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$ .

L'algorithme du point fixe n'est qu'une possibilité parmi d'autres. S'il s'avérait qu'il ne converge pas, on pourrait toujours opter pour des algorithmes plus complexes et plus stables, comme par exemple celui mis en œuvre pour l'utilisation « inverse » du modèle mnPh (*cf.* paragraphe 3.2.A.c). Cette éventualité nous semble toutefois improbable.

## 5.1.B Calcul des modules à partir des réponses

### 5.1.B.a Cas général

Le problème abordé ici est celui de la détermination des composantes du tenseur  $\mathbf{C}$  à partir de la connaissance d'un certain nombre de couples  $(\underline{E}, \underline{\Sigma})$  tels que  $\underline{\Sigma} = \mathbf{C} : \underline{E}$ .

Dans le cas le plus général, le tenseur  $\mathbf{C}$  est caractérisé par 36 composantes indépendantes qui se

réduisent à 21 lorsqu'il est symétrique. La façon la plus simple de déterminer les composantes relatives à une base  $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_6)$  orthonormée pour un produit scalaire  $p$  quelconque de l'espace  $\mathbb{T}_2^s$  des tenseurs symétrique d'ordre deux est de calculer les contraintes  $(\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_6)$  associées aux vecteurs de base. Les composantes  $C_{ij}$  de  $\mathbf{C}$  sont simplement  $C_{ij} = p(\underline{e}_i, \underline{s}_j)$ . Les relations de symétrie satisfaites par ces dernières sont la conséquence des relations de réciprocité que satisfont les vecteurs  $\underline{e}_i$  et  $\underline{s}_i$ .

La base la plus simple est la base usuelle suivante associée à la base orthonormée  $(\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z)$  de l'espace des tenseurs d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{u}_x \otimes \underline{u}_x \\ \underline{e}_2 = \underline{u}_y \otimes \underline{u}_y \\ \underline{e}_3 = \underline{u}_z \otimes \underline{u}_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sqrt{2}\underline{e}_4 = \underline{u}_y \otimes \underline{u}_z + \underline{u}_z \otimes \underline{u}_y \\ \sqrt{2}\underline{e}_5 = \underline{u}_x \otimes \underline{u}_z + \underline{u}_z \otimes \underline{u}_x \\ \sqrt{2}\underline{e}_6 = \underline{u}_x \otimes \underline{u}_y + \underline{u}_y \otimes \underline{u}_x. \end{cases} \quad (5.5)$$

Elle est orthonormée pour le produit scalaire canonique de l'espace des tenseurs d'ordre deux (non nécessairement symétriques), défini par  $p(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T : \underline{v}$ . Précisons que les composantes dans cette base s'identifient aux « notations de Voigt » usuelles, au facteur  $\sqrt{2}$  près, souvent remplacé selon ces conventions par l'unité lorsqu'il s'agit de déformations et par 2 lorsqu'il s'agit de contraintes.

Plus généralement, il suffit de connaître les contraintes associées à *six déformations linéairement indépendantes* pour caractériser complètement  $\mathbf{C}$ . Ses composantes dans la base ci-dessus ou dans toute autre base de  $\mathbb{T}_2^s$  sont solutions d'un système linéaire qu'il est inutile d'explicitier ici, mais dont la résolution revient à effectuer un changement de base.

Lorsque  $\mathbf{C}$  vérifie des propriétés de symétrie particulières, le nombre de composantes qui le caractérisent est plus faible. On peut alors se contenter d'un nombre plus restreint de couples  $(\underline{E}, \underline{\Sigma})$  pour les caractériser. Les cas de l'isotropie, de la symétrie cubique et de l'isotropie transverse sont détaillés dans ce qui suit.

### 5.1.B.b Isotropie

L'isotropie a le degré de symétrie le plus élevé. Comme on l'a déjà vu au paragraphe 1.1.A, deux coefficients suffisent pour déterminer complètement un tenseur des modules. Le couple le plus pertinent est formé par le module de cisaillement  $\mu$  et le module de compressibilité  $k$  :  $2\mu$  et  $3k$  sont en effet les deux valeurs propres de  $\mathbf{C}$ , de multiplicité respective 5 et 1. L'espace propre associé au module de compressibilité est celui des tenseurs isotropes, engendré par le tenseur identité  $\underline{I}$ , de norme  $\sqrt{3}$  ; on le note  $\mathcal{I}_2$ . L'espace propre associé au module de cisaillement est le sous-espace  $\mathcal{D}_2$  des tenseurs déviatoriques, de dimension 5 et orthogonal à  $\underline{I}$ . Cette décomposition de  $\mathbb{T}_2^s$  en espaces propres est indépendante du tenseur isotrope  $\mathbf{C}$  considéré. Les propriétés opératoires (cf. la note au bas de la page 16) de ces tenseurs déjà amplement mises à profit en résultent.

Les composantes isotropes et déviatoriques d'un tenseur  $\underline{p}$  quelconque de  $\mathbb{T}_2^s$  sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \frac{1}{3}\underline{I} : \underline{p} \underline{I} + \left[ \underline{p} - \frac{1}{3}\underline{I} : \underline{p} \underline{I} \right] \\ &= \left[ \frac{1}{3}\underline{I} \otimes \underline{I} \right] : \underline{p} + \left[ \underline{I} - \frac{1}{3}\underline{I} \otimes \underline{I} \right] : \underline{p} \end{aligned} \quad (5.6)$$

En appliquant cette décomposition à un couple  $(\underline{E}, \underline{\Sigma})$  tel que  $\underline{\Sigma} = \mathbf{C} : \underline{E}$ , il vient :

$$\begin{cases} \underline{I} : \underline{\Sigma} = 3k \underline{I} : \underline{E} \\ \underline{\Sigma} - \frac{1}{3}\underline{I} : \underline{\Sigma} \underline{I} = 2\mu \left[ \underline{E} - \frac{1}{3}\underline{I} : \underline{E} \underline{I} \right] \end{cases} \quad (5.7)$$

La première ligne est une relation scalaire qui conduit directement à la valeur de  $k$  lorsque  $\text{tr}(\underline{E}) = \underline{I} : \underline{E}$  n'est pas nul. La seconde est une relation de proportionnalité entre deux tenseurs. Pour calculer  $\mu$  on peut faire appel à une fonction scalaire  $f$  opérant sur ces tenseurs, homogène de degré 1, qui transforme cette équation en relation scalaire. On peut choisir pour  $f$  la composante des tenseurs selon une direction orthogonale à  $\underline{I}$ , par exemple  $f(\underline{p}) = \left| \underline{p} : \underline{e}_4 \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} |p_{yz} + p_{zy}|$ , où  $\underline{e}_4$  est défini comme plus haut. L'inconvénient est que, si  $\underline{p}$  est orthogonale à  $\underline{e}_4$ ,  $f(\underline{p})$  est nul et  $\mu$  ne peut être

déterminé. Il est donc préférable d'utiliser une fonction qui ne s'annule que pour les vecteurs nuls et le choix le plus immédiat est de faire appel à la norme canonique, qui, appliquée à la composante déviatorique d'un tenseur, n'est autre que l'équivalent de Von Mises pour les contraintes, au facteur  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  près, ou la « déformation équivalente » pour les déformations, au facteur  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  près. On obtient ainsi :

$$\left\| \underline{\underline{\Sigma}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{I}} \right\| = 2\mu \left\| \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{E}} \underline{\underline{I}} \right\|, \quad (5.8)$$

ou encore :

$$\Sigma^{\text{eq}} = 3\mu E^{\text{eq}}. \quad (5.9)$$

Les modules  $\mu$  et  $k$  de  $\mathbf{C}$  peuvent donc être déterminés à partir d'un seul couple  $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}})$ , à condition que les composantes isotrope et déviatorique de  $\underline{\underline{E}}$  soient toutes deux non nulles :

$$k = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}})}{3\text{tr}(\underline{\underline{E}})} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\Sigma^{\text{eq}}}{3E^{\text{eq}}} \quad (5.10)$$

### 5.1.B.c Symétrie cubique

Un tenseur des modules respectant la symétrie cubique est déterminé, d'une part, par les axes par rapport auxquels cette symétrie opère, et d'autre part, par deux modules de cisaillement  $\mu_a$  et  $\mu_d$  et un module de compressibilité  $k$ , qui sont eux aussi des valeurs propres (au coefficient 2 ou 3 près) de multiplicité respective 2, 3 et 1. Soit  $(\underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_z)$  une base orthonormée dont les vecteurs sont alignés sur les axes de la symétrie cubique. L'espace propre associé à  $k$  est le même que dans le cas isotrope. Le sous-espace des tenseurs déviatoriques est décomposé en la somme orthogonale du sous-espace propre associé à  $\mu_d$ , engendré par les tenseurs  $\underline{\underline{e}}_4$ ,  $\underline{\underline{e}}_5$  et  $\underline{\underline{e}}_6$ , orthogonaux et de norme 1, et du sous-espace propre associé à  $\mu_a$ , engendré par exemple par les tenseurs orthogonaux  $\underline{\underline{e}}_1 - \underline{\underline{e}}_2$  et  $\underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 - 2\underline{\underline{e}}_3$  de normes respectives  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{6}$  :

$$\mathbb{T}_2^s = \mathcal{I}_2 \oplus \mathcal{D}_2 = \mathcal{I}_2 \oplus \mathcal{D}_2^a(\underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_z) \oplus \mathcal{D}_2^d(\underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_z) \quad (5.11)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_2^a(\underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_z) = \text{Vect}(\underline{\underline{e}}_1 - \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 - 2\underline{\underline{e}}_3) \\ \quad = \text{Vect}(\underline{\underline{u}}_x \otimes \underline{\underline{u}}_x - \underline{\underline{u}}_y \otimes \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_x \otimes \underline{\underline{u}}_x + \underline{\underline{u}}_y \otimes \underline{\underline{u}}_y - 2\underline{\underline{u}}_z \otimes \underline{\underline{u}}_z) \\ \mathcal{D}_2^d(\underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_z) = \text{Vect}(\underline{\underline{e}}_4, \underline{\underline{e}}_5, \underline{\underline{e}}_6) \\ \quad = \text{Vect}(\underline{\underline{u}}_y \otimes \underline{\underline{u}}_z + \underline{\underline{u}}_z \otimes \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_x \otimes \underline{\underline{u}}_z + \underline{\underline{u}}_z \otimes \underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_x \otimes \underline{\underline{u}}_y + \underline{\underline{u}}_y \otimes \underline{\underline{u}}_x), \end{array} \right. \quad (5.12)$$

où  $\oplus$  désigne une somme orthogonale, et Vect le sous-espace vectoriel engendré par les tenseurs en argument. Ces espaces propres dépendent des axes de symétrie  $(\underline{\underline{u}}_x, \underline{\underline{u}}_y, \underline{\underline{u}}_z)$ , mais sont indépendants des valeurs particulières des modules caractérisant un tenseur respectant la symétrie cubique pour un système d'axes donné. L'ensemble des tenseurs de ce type définit un espace vectoriel de dimension 3 et un groupe. On peut représenter ses éléments par ses trois valeurs propres sous la forme  $\{2\mu_a, 2\mu_d, 3k\}$ , selon les principes déjà utilisés pour les tenseurs isotropes. Les règles opératoires qui s'appliquent pour ces derniers se généralisent sans peine au cas présent. Notons que les tenseurs isotropes sont des tenseurs à symétrie cubique tels que  $\mu_d = \mu_a$ .

La procédure pour déterminer à partir de couples  $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}})$  les modules  $\mu_a$ ,  $\mu_d$  et  $k$  d'un tenseur à symétrie cubique dont les axes sont connus est la même que dans le cas isotrope. Il suffit de décomposer ces tenseurs selon les trois sous-espaces propres  $\mathcal{I}_2$ ,  $\mathcal{D}_2^a$  et  $\mathcal{D}_2^d$ , de calculer la norme des composantes obtenues et d'effectuer les rapports adéquats. Les trois modules peuvent être calculés à partir d'un couple  $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}})$  unique : il suffit de choisir  $\underline{\underline{E}}$  de telle sorte que ses trois composantes propres soient toutes non nulles. Plus précisément :

$$k = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}})}{3\text{tr}(\underline{\underline{E}})}, \quad \mu_a = \frac{\Sigma^{\text{eq}}_a}{2E^{\text{eq}}_a} \quad \text{et} \quad \mu_d = \frac{\Sigma^{\text{eq}}_d}{2E^{\text{eq}}_d}, \quad (5.13)$$



où  $p^{\text{eq}}_a$  et  $p^{\text{eq}}_d$  sont les deux « équivalents cubiques » d'un tenseur  $\underline{\underline{p}}$  d'ordre deux<sup>1</sup>, associés aux axes  $(\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z)$  :

$$p^{\text{eq}}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + (p_{xx} - p_{zz})^2 + (p_{yy} - p_{zz})^2} \quad (5.14)$$

$$p^{\text{eq}}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(p_{xy} + p_{yx})^2 + (p_{yz} + p_{zy})^2 + (p_{zx} + p_{xz})^2}. \quad (5.15)$$

Précisons que ces relations supposent les axes  $(\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z)$  connus : elles ne donnent pas les composantes d'un tenseur respectant une symétrie cubique selon un système d'axe quelconque. En pratique, elles sont toutefois presque toujours suffisantes puisque, lorsque les propriétés du problème traités indiquent une symétrie cubique, elles indiquent en général aussi les axes selon lesquels cette symétrie opère.

### 5.1.B.d Isotropie transverse

Un tenseur des modules de symétrie isotrope transverse est caractérisé par l'axe d'isotropie et cinq constantes d'élasticité. Deux d'entre elles sont des valeurs propres (à un facteur 2 près), chacune de multiplicité 2. Il s'agit du module de cisaillement transverse  $\mu_t$  et du module de cisaillement longitudinal  $\mu_l$ . Les espaces propres associés, notés  $\mathcal{D}_2^t(\underline{u}_z)$  et  $\mathcal{D}_2^l(\underline{u}_z)$  où le vecteur normé  $\underline{u}_z$  donne la direction de l'axe d'isotropie, sont donnés par :

$$\mathcal{D}_2^t(\underline{u}_z) = \text{Vect}(\underline{u}_x \otimes \underline{u}_x - \underline{u}_y \otimes \underline{u}_y, \underline{u}_x \otimes \underline{u}_y + \underline{u}_y \otimes \underline{u}_x) \quad (5.16)$$

$$\mathcal{D}_2^l(\underline{u}_z) = \text{Vect}(\underline{u}_z \otimes \underline{u}_x + \underline{u}_x \otimes \underline{u}_z, \underline{u}_z \otimes \underline{u}_y + \underline{u}_y \otimes \underline{u}_z), \quad (5.17)$$

où les vecteurs  $(\underline{u}_x$  et  $\underline{u}_y)$  constituent une base orthonormée du plan orthogonal à  $\underline{u}_z$ . Les tenseurs générateurs dans les relations ci-dessus sont orthogonaux entre eux et de norme  $\sqrt{2}$ . La projection orthogonale sur ces sous-espaces conduit à la définition d'un « équivalent transverse » et d'un « équivalent longitudinal » d'un tenseur  $\underline{\underline{p}}$  d'ordre deux :

$$p^{\text{eq}}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + (p_{xy} + p_{yx})^2} \quad (5.18)$$

$$p^{\text{eq}}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(p_{yz} + p_{zy})^2 + (p_{zx} + p_{xz})^2}. \quad (5.19)$$

Les modules de cisaillement sont calculés à partir d'un couple  $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}})$  tel que les composantes de  $\underline{\underline{E}}$  dans ces deux sous-espaces propres ne soient pas nulles, par :

$$\mu_t = \frac{\Sigma^{\text{eq}}_t}{2E^{\text{eq}}_t} \quad \text{et} \quad \mu_l = \frac{\Sigma^{\text{eq}}_l}{2E^{\text{eq}}_l}. \quad (5.20)$$

Le sous-espace  $\mathcal{A}_2(\underline{u}_z)$  de dimension deux orthogonal à  $\mathcal{D}_2^t(\underline{u}_z) \oplus \mathcal{D}_2^l(\underline{u}_z)$  est donné par :

$$\mathcal{A}_2(\underline{u}_z) = \text{Vect} \left( \underline{u}_z \otimes \underline{u}_z, \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{u}_x \otimes \underline{u}_x + \underline{u}_y \otimes \underline{u}_y) \right). \quad (5.21)$$

Les vecteurs générateurs ci-dessus sont orthogonaux et normés, mais ce ne sont pas des vecteurs propres de  $\mathbf{C}$ . La relation  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C} : \underline{\underline{E}}$  projetée sur le sous-espace  $\mathcal{A}(\underline{u}_z)$  s'écrit, dans la base constituée des vecteurs générateurs ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{zz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{zz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{xx} + E_{yy}) \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les trois autres constantes qui caractérisent  $\mathbf{C}$ . La seule contrainte qui les lie est celle de garantir la définie positivité de  $\mathbf{C}$  :  $\alpha$ ,  $\beta$  et la quantité  $\alpha\beta - \gamma^2$  sont donc strictement

<sup>1</sup>Nous adoptons les mêmes définitions pour les déformations et les contraintes

positifs. Un opérateur linéaire quelconque sur un espace de dimension deux est déterminé par la connaissance de l'image de deux vecteurs linéairement indépendants. Contrairement aux situations traitées plus haut, il est donc impossible de calculer toutes les constantes de  $\mathbf{C}$  à partir d'un unique couple  $(\underline{E}, \underline{\Sigma})$ . Deux couples tels que les projetés des tenseurs  $\underline{E}$  sur le sous-espace  $\mathcal{A}(\underline{u}_z)$  forment un système libre sont nécessaires.

Soient donc  $(\underline{E}^i, \underline{\Sigma}^i)$ ,  $i \in [1, 2]$  deux tels couples. Notons  $p_{tt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{xx} + p_{yy})$  la composante selon le second vecteur de la base ci-dessus de  $\mathcal{A}_2(\underline{u}_z)$ . Les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont alors données par :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma_{zz}^1 & E_{tt}^1 \\ \Sigma_{zz}^2 & E_{tt}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{zz}^1 & E_{zz}^2 \\ E_{tt}^1 & E_{tt}^2 \end{vmatrix}}, \quad \beta = -\frac{\begin{vmatrix} \Sigma_{tt}^1 & E_{zz}^1 \\ \Sigma_{tt}^2 & E_{zz}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{zz}^1 & E_{zz}^2 \\ E_{tt}^1 & E_{tt}^2 \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma_{tt}^1 & E_{tt}^1 \\ \Sigma_{tt}^2 & E_{tt}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{zz}^1 & E_{zz}^2 \\ E_{tt}^1 & E_{tt}^2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \Sigma_{zz}^1 & E_{zz}^1 \\ \Sigma_{zz}^2 & E_{zz}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{zz}^1 & E_{zz}^2 \\ E_{tt}^1 & E_{tt}^2 \end{vmatrix}}. \quad (5.23)$$

Les dénominateurs ne sont pas nuls si les tenseurs  $\underline{E}^i$  ont été choisis conformément aux remarques ci-dessus ; la dernière égalité est une conséquence des relations de réciprocité.

Un tenseur  $\mathbf{C}$  isotrope transverse selon un axe de symétrie connu est ainsi totalement déterminé par la donnée de deux couples  $(\underline{E}, \underline{\Sigma})$ , tels que les composantes de  $\underline{E}$  dans  $\mathcal{D}_2^t(\underline{u}_z)$  et  $\mathcal{D}_2^l(\underline{u}_z)$  soient non nulles pour au moins l'un des couples et que les projetés des deux tenseurs  $\underline{E}$  sur le sous-espace  $\mathcal{A}_2(\underline{u}_z)$  forment un système libre. Les cinq constantes sont alors données par les relations ci-dessus. Comme pour la symétrie cubique, ces relations sont suffisantes pour traiter la plupart des cas pratiques puisque l'axe de symétrie est en général déterminé par d'autres propriétés du problème traité.

Précisons que les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  peuvent être exprimées en fonction du module de Young longitudinal  $E_l$ , du rapport de Poisson longitudinal  $\nu_l$  (qui caractérise la déformation transversale sous une traction simple longitudinale) et du module de compressibilité plane  $K_t$ , qui sont les constantes usuellement invoquées pour caractériser le comportement dans  $\mathcal{A}_2(\underline{u}_z)$  (voir par exemple la référence [169]). L'inversion de la relation (5.22) donne :

$$\begin{pmatrix} E_{zz} \\ E_{tt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2} \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{zz} \\ \Sigma_{tt} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Par définition, le module  $E_l$  et le rapport  $\nu_l$  sont caractérisés par la déformation induite par la contrainte  $(\Sigma_{zz}, \Sigma_{tt}) = (1, 0)$ . Le module  $K_t$  mesure la contrainte  $\frac{1}{2}(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_{tt}$  lorsque  $E_{zz} = 0$  et  $E_{xx} = E_{yy} = \frac{1}{2}$ , soit  $E_{tt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On a donc :

$$E_l = \alpha - \frac{\gamma^2}{\beta}, \quad \nu_l = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\beta} \quad \text{et} \quad K_t = \frac{\beta}{2} \quad (5.25)$$

et :

$$\alpha = E_l + 4\nu_l^2 K_t, \quad \gamma = 2\sqrt{2}\nu_l K_t \quad \text{et} \quad \beta = 2K_t. \quad (5.26)$$

Remarquons que ces grandeurs peuvent aussi être utilisées si le matériau est isotrope de modules  $\{2\mu, 3k\}$ . On a alors :

$$\mu_l = \mu_t = \mu, \quad E_l = E = \frac{9k\mu}{3k + \mu}, \quad \nu_l = \nu = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)} \quad \text{et} \quad K_t = k + \frac{\mu}{3}, \quad (5.27)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le rapport de Poisson. Inversement, on peut définir pour tout matériau de symétrie isotrope transverse, deux « modules de compressibilité équivalents », l'un, noté  $k_e$ , donnant la trace de la contrainte à imposer pour obtenir une dilatation pure  $(E_{zz}, E_{tt}) = (1, \sqrt{2})$  et l'autre,  $k_s$ , défini à partir de la variation de volume sous l'effet d'une pression pure. Il sont donnés par :

$$k_e = \frac{1}{9} [E_l + 4K_t(1 + \nu_l)^2] \quad \text{et} \quad k_s = \frac{E_l K_t}{E_l + (1 - 2\nu_l)^2 K_t}. \quad (5.28)$$

Ils sont distincts car  $\underline{I}$  n'est pas un vecteur propre de  $\mathbf{C}$ , sauf bien sûr dans le cas particulier de l'isotropie, pour lequel on vérifie que ces deux modules sont bien égaux à  $k$ .

### 5.1.C Choix des chargements à l'infini

Les remarques ci-dessus s'appliquent directement pour la construction de la borne de Voigt, puisque le choix de la déformation  $\underline{\underline{E}}^V$  est totalement libre et peut donc être entrepris selon les règles précisées plus haut. Il en est de même pour la borne de Reuss, pour laquelle on choisit la contrainte  $\underline{\underline{\Sigma}}^R$ . Mais on vérifie facilement que si les règles à respecter pour le choix de  $\underline{\underline{E}}$  sont appliquées au choix de  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , alors les relations donnant les souplesses sont bien fondées.

Les choses sont un peu plus délicates pour la procédure conduisant aux estimations de Hashin et Shtrikman. En effet, le choix porte alors sur le chargement à l'infini  $\underline{\underline{E}}^0$  et non sur la déformation  $\underline{\underline{E}}^{\text{HS}}$  ou la contrainte  $\underline{\underline{\Sigma}}^{\text{HS}}$ , qu'on déduit de la solution des problèmes auxiliaires. Rappelons que la déformation à l'infini est liée à la déformation moyenne sur les motifs par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}^{\text{HS}} &= \underline{\underline{E}}^0 - \mathcal{P}_d^0 : \langle \underline{\underline{p}} \rangle \\ &= \left[ [\mathcal{P}_d^0]^{-1} - \langle \mathbf{T} \rangle \right] : \mathcal{P}_d^0 : \underline{\underline{E}}^0 \\ &= [\mathcal{P}_d^0]^{-1} : \left[ [\mathcal{P}_d^0]^{-1} - \mathbf{C}^0 + \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0} \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Dans la plupart des cas pratiques, les arguments qui permettent d'établir les propriétés de symétrie de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  reposent sur les propriétés de symétrie de la géométrie des motifs, dont en particulier celles de leur support ellipsoïdal  $D_\mu$ , et sur les symétries du comportement local des constituants. Les bornes d'ordre 0 utilisées pour construire les bornes de Hashin et Shtrikman optimales respectent au moins les mêmes symétries que ces bornes optimales et il en est de même de l'estimation autocohérente. Dans les relations ci-dessus,  $\mathbf{C}^0$  respecte donc aussi ces symétries tout comme  $\mathcal{P}_d^0$  (voir l'annexe **B** pour plus de précisions). Le tenseur reliant  $\underline{\underline{E}}^{\text{HS}}$  à  $\underline{\underline{E}}^0$  appartient donc à la même classe de symétrie que  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$ . Les sous-espaces propres de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  sont aussi stables pour ce tenseur, qui de plus est inversible. En conséquence, si l'on applique pour le choix de  $\underline{\underline{E}}^0$  les règles énoncées plus haut pour celui de  $\underline{\underline{E}}^{\text{HS}}$ , alors les relations conduisant aux modules de  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}0}$  s'appliquent sans restriction et en particulier sans risque de division par zéro.

Plus précisément, en cas d'isotropie, si  $\underline{\underline{E}}^0$  a des composantes isotrope et déviatorique non nulles, alors il en est de même de  $\underline{\underline{E}}^{\text{HS}}$ . En cas de symétrie cubique, si  $\underline{\underline{E}}^0$  a des composantes non nulles dans  $\mathcal{I}_2$ ,  $\mathcal{D}_2^a$  et  $\mathcal{D}_2^d$ , alors il en est de même de  $\underline{\underline{E}}^{\text{HS}}$ . En cas d'isotropie transverse, si  $\underline{\underline{E}}^0$  a des composantes non nulles dans  $\mathcal{D}_2^t$ ,  $\mathcal{D}_2^l$  et  $\mathcal{A}_2$ , il en est de même de  $\underline{\underline{E}}^{\text{HS}}$  et si les composantes de deux tenseurs  $\underline{\underline{E}}_1^0$  et  $\underline{\underline{E}}_2^0$  dans  $\mathcal{A}_2$  forment un système libre, alors il en est de même des déformations  $\underline{\underline{E}}_1^{\text{HS}}$  et  $\underline{\underline{E}}_2^{\text{HS}}$  associées. Dans le cas général, si  $(\underline{\underline{E}}_1^0, \dots, \underline{\underline{E}}_6^0)$  est une base de  $\mathbb{T}_2^s$ , alors  $(\underline{\underline{E}}_1^{\text{HS}}, \dots, \underline{\underline{E}}_6^{\text{HS}})$  en est une aussi.

### 5.1.D Mise en œuvre numérique

#### 5.1.D.a Choix d'une technique

À ce stade la seule difficulté qui subsiste est celle de la résolution des problèmes auxiliaires, définis par les motifs seuls soumis à des conditions aux limites homogènes à leur frontière s'il s'agit des bornes de type Voigt et Reuss, ou par les motifs noyés dans un milieu infini homogène et soumis à des conditions homogènes à l'infini, s'il s'agit des bornes ou estimations de type Hashin et Shtrikman.

Dans quelques rares situations, les solutions sont connues analytiquement et conduisent à des expressions analytiques des bornes et modèles. Il s'agit d'abord bien sûr du cas des motifs homogènes, qui conduit aux résultats « classiques ». C'est ensuite celui de la sphère composite avec des phases isotropes (*cf.* paragraphe **1.2.C**), qui conduit aux bornes de Hashin, aux bornes de Hervé, Stolz et Zaoui et à l'estimation des trois phases de Christensen et Lo. C'est aussi celui de l'inclusion multicouche à phases isotropes, qui conduit à des extensions des précédentes et plus généralement aux bornes et modèles de type mnPh décrits au paragraphe **3.2.A**.

À notre connaissance, la liste s'arrête là<sup>2</sup>. Le traitement de tous les autres cas impose le recours à des techniques numériques. Les problèmes auxiliaires n'étant autres que des problèmes de structures particuliers, tout outil numérique de calcul des structures peut être envisagé pour les traiter. Citons entre autres les méthodes reposant sur la transformation de Fourier, les techniques d'éléments de frontière et la méthode des éléments finis.

Les premières ont été utilisées par d'autres auteurs pour traiter des problèmes voisins (voir par exemple [49, 125]). Leur intérêt réside notamment dans la performance de l'algorithme de la transformation de Fourier rapide et dans la possibilité de traiter facilement toutes les situations d'anisotropie. La méthode des éléments de frontière est également performante, notamment pour la modélisation de structures tridimensionnelles ou pour la prise en compte correcte et efficace de conditions aux limites à l'infini. En revanche, cette méthode est moins intéressante pour modéliser les structures internes hétérogènes des motifs : toutes les surfaces délimitant les sous-domaines homogènes devraient être modélisées, ce qui induit un grand nombre de degrés de liberté pour des motifs hétérogènes et donc une perte de performance de la méthode. La méthode des éléments finis est mieux adaptée au traitement de telles structures hétérogènes. Une approche mixte combinant des éléments de frontière pour la modélisation du milieu infini et des éléments finis décrivant la structure interne des motifs semble ainsi une solution bien adaptée au traitement des problèmes d'inclusions hétérogènes en milieu infini. La technique des éléments de frontière bute toutefois sur une difficulté majeure : elle nécessite de connaître explicitement le tenseur de Green  $\underline{\underline{G}}^0$  associé au comportement des phases modélisées, soit en l'occurrence celui du milieu infini. Or  $\underline{\underline{G}}^0$  n'est bien connu que pour des symétries particulières, dont l'isotropie. L'objectif de mettre en œuvre les méthodes proposées pour tout type de comportement local et macroscopique n'est ainsi pas compatible avec cette limitation. Nous avons donc renoncé à cette solution.

De manière plus générale, toutes les méthodes suggérées ci-dessus nécessitent des développements spécifiques, du fait de l'absence de « codes universels » fondés sur ces approches. Nous avons préféré renoncer à nous lancer dans une telle voie et avons donc en fin de compte opté pour la méthode classique des éléments finis. Ce n'est probablement pas la technique numérique la plus performante. Elle présente en revanche l'avantage d'une grande souplesse en matière à la fois de géométrie des structures, de comportement des constituants et de chargements. Ses performances sont par ailleurs satisfaisantes et bien maîtrisées pour la résolution des problèmes linéaires tels que ceux que nous avons à résoudre. Enfin, cette technique tend à devenir un outil presque universel et systématique en micromécanique, si bien que les procédures que nous proposons ici pourront facilement être mises en œuvre, adaptées et développées par qui le souhaitera.

Les calculs présentés dans la suite de ce chapitre ont été entrepris avec le code d'éléments finis CASTEM 2000. Ce logiciel a été choisi pour la puissance de son langage de commande, qui fournit des procédures prêtes à l'emploi pour le calcul des moyennes de contrainte  $\langle \underline{\underline{\sigma}}^{\text{HS}} \rangle_{D_\lambda}$  et de déformation  $\langle \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{HS}} \rangle_{D_\lambda}$ , permet d'effectuer facilement les manipulations algébriques conduisant aux constantes d'élasticité et comporte des directives de programmation nécessaires en particulier pour le calcul des estimations autocohérentes (voir l'annexe **E** pour plus d'informations techniques).

### 5.1.D.b Approximations numériques

Le recours à des méthodes numériques s'accompagne d'approximations sur les solutions, qu'il s'agit de maîtriser et quantifier. C'est l'objet du paragraphe qui suit. Précisons d'emblée que pour la méthode des éléments finis retenue, il y a principalement deux sources d'approximations.

**Finesse de maillage** La première est classique et est liée à la discrétisation des champs mécaniques, c'est-à-dire à la finesse des maillages. La méthode mise en œuvre fait appel à une approximation des champs de déplacement et repose sur le théorème de l'énergie potentielle. Les calculs numériques

---

<sup>2</sup>On aurait aussi pu citer le cylindre multicouche, mais les motifs correspondants ne sont pas exactement conformes aux définitions utilisées ici car d'extension infinie.

fournissent ainsi une majoration de l'énergie potentielle totale de la structure à l'équilibre, qui est d'autant plus proche de la valeur exacte que l'espace des champs de déplacement discrets est riche, c'est-à-dire que le maillage est fin. Lorsqu'on construit les bornes de Voigt et Reuss généralisées en appliquant les conditions aux limites directement aux frontières des motifs, c'est très exactement cette énergie potentielle à l'équilibre qui sert à calculer les tenseurs  $C_{MMR}^V$  et  $C_{MMR}^R$ . Les tenseurs calculés numériquement sont donc des majorants de ces derniers.

Les choses sont moins claires pour la procédure de Hashin et Shtrikman, dans laquelle le tenseur  $C_{MMR}^{HS}$  est calculé à partir des champs d'une partie seulement de la structure. Le sens de l'écart entre les valeurs exactes et leurs approximations numériques n'est alors pas déterminé. Nous verrons dans ce qui suit ce qu'il en est pour quelques situations particulières.

Une bonne maîtrise de l'influence de la finesse du maillage est souhaitable. En effet, les modèles proposés ici sont capables de traiter des situations anisotropes dans lesquelles aucune propriété de symétrie particulière ne permet de simplifier le maillage : il faut alors avoir recours à des modèles numériques tridimensionnels, qui sont susceptibles de devenir très rapidement très lourds, d'autant plus qu'il faut modéliser non seulement les motifs mais aussi une partie du milieu infini dans lesquels ils sont insérés (voir ci-après). Si l'on modifie par exemple d'un facteur deux la dimension des éléments, on multiplie par huit le nombre de degrés de liberté, par huit ou plus (64 dans les mauvais cas) l'encombrement de la matrice de rigidité, si bien que le temps de résolution peut passer de quelques minutes à quelques heures voire quelques jours. Il est donc indispensable d'utiliser la finesse de maillage « juste suffisante » pour la précision souhaitée.

Des maillages tridimensionnels sont indispensables même pour des structures de motifs relativement simples. Considérons par exemple le cas d'un motif axisymétrique conduisant à un comportement effectif isotrope transverse. Les réponses à une traction simple le long de l'axe de symétrie ou à une compression dans le plan transverse sont bien axisymétriques et peuvent donc être calculées par un modèle axisymétrique représentant un demi-espace. Elles conduisent aux valeurs des constantes  $E_t$ ,  $\nu_t$  et  $K_t$ . Les réponses aux cisaillements transverses et longitudinaux ne sont en revanche pas axisymétriques. Il faut alors avoir recours à des maillages tridimensionnels modélisant au minimum un huitième d'espace et utiliser des conditions de symétrie adéquates sur les plans limites, conditions qui ne seront pas les mêmes pour les deux types de cisaillement. Si l'on souhaite calculer le tenseur de Hashin et Shtrikman en minimisant de la sorte la taille des maillages, il faut ainsi construire deux maillages, calculer et inverser trois matrices de rigidité et calculer la réponse à quatre chargements. Nous avons préféré faire appel directement à un maillage tridimensionnel unique représentant toute la structure, dont on calcule et inverse une seule fois la matrice de rigidité et qui conduit à partir de la réponse à deux chargements à la valeur de tous les modules d'élasticité. La puissance de calcul requise est plus lourde, mais la procédure est plus systématique et sujette à une généralisation immédiate à des contenus de motif absolument quelconques. Cette remarque n'exclut toutefois pas le recours à la première stratégie lorsqu'il s'agit de faire un grand nombre de calculs sur une même famille de microstructures.

Nous montrons dans ce qui suit que la taille des modèles numériques nécessaire reste tout à fait raisonnable, en tous cas lorsqu'on ne s'intéresse qu'au comportement effectif. Tous les calculs présentés ici sont à la portée d'une station de travail de gamme intermédiaire de 1994 (et donc probablement d'un ordinateur familial de 1998 !). Le calcul de champs locaux en vue d'une prévision de la réponse locale est un peu plus délicat. Nous y reviendrons en fin de chapitre.

**Extension du « milieu infini »** La seconde source d'approximations est moins classique et liée à l'extension infinie des structures à traiter lors de la mise en œuvre de la procédure de Hashin et Shtrikman. Les éléments que nous avons utilisés étant d'extension finie, il faut se contenter de mailler une partie seulement du milieu infini homogène, en appliquant les conditions aux limites homogènes en déformation ou en contrainte à une distance finie des motifs hétérogènes.

Même dans l'hypothèse où le maillage est suffisamment fin, le champ de polarisation calculé  $\underline{p}^{ca} = \underline{\sigma}_\lambda^{HSca} - C^0 : \underline{\epsilon}_\lambda^{HSca}$  par cette procédure ne sera pas exactement égal au champ optimal  $\underline{p}^\circ$ . Suivant la valeur du milieu de référence, plus raide ou plus souple que les bornes d'ordre 0, la valeur de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman HS pour cette valeur  $\underline{p}^{ca}$  calculée sera supérieure ou inférieure

à la valeur optimale obtenue pour  $p^\circ$ . Mais par ailleurs,  $p^{\text{ca}}$  n'étant pas optimale,  $\frac{2}{\Omega}\text{HS}$  n'est pas non plus exactement égale à  $\underline{\underline{E}}^{\text{HSca}} : \mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HSca}} : \underline{\underline{E}}^{\text{HSca}}$ , où  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HSca}}$  est calculé comme indiqué plus haut à partir de  $\underline{\underline{E}}^{\text{HSca}}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}^{\text{HSca}}$ , moyennes des champs  $\underline{\underline{\epsilon}}_\lambda^{\text{HSca}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_\lambda^{\text{HSca}}$ . Le signe de l'écart entre l'estimation numérique  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HSca}}$  et la valeur exacte  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}$  n'est donc pas connu. Nous verrons sur des exemples qu'il peut être positif ou négatif.

Il y a toutefois un moyen de quantifier cet écart. En effet, lorsque le « milieu infini » est de grande extension, la perturbation sur le champ homogène  $\underline{\underline{E}}^0$  induite par la présence du motif hétérogène n'est quasiment pas sensible loin de ce dernier. Le champ de déformation est alors homogène à proximité du bord de la structure et égal à  $\underline{\underline{E}}^0$  ; il en est de même de la contrainte. Dans ces conditions les champs solutions sont très peu sensibles à la nature des conditions aux limites appliquées : déformation homogène  $\underline{\underline{E}}^0$  ou contrainte homogène  $\mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}$ . Il en est de même des tenseurs  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HSca}}$  calculés. La comparaison entre le tenseur calculé en appliquant la déformation et celui obtenu en appliquant la contrainte fournit une bonne estimation de l'approximation. Précisons toutefois qu'il n'y a pas de raison pour que ces tenseurs soient l'un une borne supérieure et l'autre une borne inférieure de la valeur exacte, sauf pour une extension quasi-nulle du milieu infini, puisqu'on obtient alors les bornes de Voigt et Reuss généralisées. Nous préciserons pour un cas particulier comment s'effectue la transition de ces bornes d'ordre un vers les bornes de Hashin et Shtrikman d'ordre deux lorsque l'extension du milieu infini passe de 0 à une valeur suffisamment grande. Ceci permettra de quantifier l'extension minimale nécessaire pour obtenir une approximation satisfaisante du tenseur  $\mathbf{C}_{\text{MMR}}^{\text{HS}}$ .

## 5.2 Test sur le modèle des trois phases

Ce paragraphe présente ce que l'on peut considérer comme une « étude de faisabilité » de la mise en œuvre numérique de l'approche théorique proposée. Elle consiste à comparer les solutions numériques obtenues pour l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin aux solutions analytiques exactes et à étudier quantitativement l'effet des divers paramètres cités plus haut<sup>3</sup>. Les solutions analytiques en question (*cf.* paragraphe 1.2.C.b) sont les bornes de Hashin  $\mathbf{C}^{\text{H+}}$  et  $\mathbf{C}^{\text{H-}}$ , les bornes de Hervé, Stolz et Zaoui  $\mathbf{C}^{\text{HSZ+}}$  et  $\mathbf{C}^{\text{HSZ-}}$  et le modèle des trois phases de Christensen et Lo  $\mathbf{C}^{\text{3Ph}}$ . Ces résultats s'appliquent à des composites à phases isotropes. Comme on l'a vu, toutes les bornes coïncident pour le module de compressibilité et donnent donc la valeur effective de ce module, indépendant des paramètres de distribution des motifs. Pour le module de cisaillement, on obtient en revanche cinq valeurs différentes  $\mu^{\text{H-}} \leq \mu^{\text{HSZ-}} \leq \mu^{\text{3Ph}} \leq \mu^{\text{HSZ+}} \leq \mu^{\text{H+}}$  que l'on va comparer aux prévisions numériques.

### 5.2.A Modèles numériques bidimensionnels

#### 5.2.A.a Maillages

L'étude a d'abord été menée avec des modèles numériques bidimensionnels axisymétriques. Les maillages testés varient suivant leur finesse, l'extension du milieu infini, la géométrie de ce dernier et le type d'éléments utilisés.

Nous avons utilisé les éléments bilinéaires à 4 nœuds et les éléments quadratiques à 8 nœuds proposés par le logiciel CASTEM 2000. À nombre de degrés de liberté identique, les seconds donnent systématiquement de meilleurs résultats. Ceci s'explique facilement par la meilleure prise en compte de la géométrie par les éléments quadratiques, qui décrivent mieux la courbure des sphères définissant les motifs, notamment pour les maillages grossiers. On le constate d'ailleurs facilement lorsqu'on compare les volumes calculés du noyau ou de la sphère composite aux volumes théoriques. Par la suite, on a donc toujours utilisé des éléments quadratiques, à 8 nœuds pour les maillages bidimensionnels et à 20 nœuds pour les maillages tridimensionnels.

---

<sup>3</sup>Cette étude a été menée avec l'aide de M. Sallami ; des informations complémentaires peuvent être trouvées dans la référence [146].

Deux types de géométries du « milieu infini » ont été testées : l'une sphérique et l'autre cylindrique. La première présente l'avantage de la symétrie et est susceptible de réduire les éventuels artefacts numériques liés à l'absence d'isotropie du maillage. Elle permet aussi de définir clairement un paramètre d'extension du « milieu infini », noté  $D$  dans ce qui suit, par le rapport du rayon de la sphère limitant ce dernier au rayon de la sphère composite. Avec cette définition, une « extension nulle » du « milieu infini », obtenue pour  $D = 1$ , correspond bien à l'absence de ce dernier et conduit donc aux bornes de Voigt et Reuss généralisées, soit en l'occurrence les bornes de Hashin.

Il se pose toutefois un petit problème technique : alors qu'il est possible d'imposer n'importe quel valeur de déplacement ou de force à n'importe quel nœud du maillage, CASTEM 2000 ne permet (du moins dans la version que nous avons utilisée) d'imposer des forces distribuées que sous la forme de pressions. Appliquer des conditions de contraintes homogènes non isotropes aux bords de la sphère est dans ces conditions assez délicat. Il faudrait pour cela calculer les résultantes des efforts en chaque nœud du maillage. Nous avons préféré renoncer à cette solution qui aurait exigé des développements spécifiques et nous sommes orienté vers une solution alternative faisant appel à un maillage cylindrique du milieu infini. Il est alors possible d'imposer des conditions de traction simple ou de cisaillement pur en appliquant des pressions différentes sur les faces extrêmes et le bord latéral du cylindre. Pour un tel maillage cylindrique, on définit le paramètre  $D$  d'extension du « milieu infini » comme le rapport du rayon de la plus grande sphère inscrite dans le cylindre au rayon de la sphère composite. Une extension nulle ( $D = 1$ ) ne correspond alors pas aux bornes de Voigt et Reuss généralisées.

Le problème technique évoqué ci-dessus interdit de calculer la borne de Reuss généralisée selon la première procédure proposée au paragraphe 5.1.A. Comme annoncé plus haut, nous avons donc mis en œuvre la seconde procédure consistant à faire appel à la procédure de calcul des bornes de Hashin et Shtrikman avec un milieu de référence très souple en comparaison des constituants.

Des maillages plus ou moins fins ont été utilisés pour tester l'influence de ce paramètre. Nous avons convenu de caractériser leur finesse par la dimension caractéristique d'un élément au sein du noyau rapportée au rayon de la sphère composite ; on la note  $F$ . La taille des autres éléments varie de manière sensiblement proportionnelle. Les tailles relatives des éléments d'un même maillage sont choisies de sorte que, classiquement, les zones de gradients locaux forts soient discrétisées plus finement. Nous ne commentons pas le processus d'optimisation qui a conduit au maillage final.

La figure 5.1 présente quelques exemples de maillages, sphériques ou cylindriques, avec les valeurs correspondantes des paramètres  $F$  et  $D$ , ainsi que les nombres de nœuds et d'éléments, de type « Q8 ». La fraction volumique d'inclusion est de 30% pour tous ces maillages. On ne maille qu'un demi espace : on impose des conditions de symétrie adéquates aux nœuds du plan équatorial.

### 5.2.A.b Influence des paramètres de maillage

La figure 5.2 donne les résultats des calculs numériques des bornes  $\mu^{\text{HSZ}^-}$  et  $\mu^{\text{HSZ}^+}$  et de l'estimation  $\mu^{3\text{Ph}}$  pour diverses valeurs des paramètres  $F$  et  $D$  et pour les deux types de conditions aux limites. Les maillages sphériques ont été utilisés pour les conditions en déformation homogène et les maillages cylindriques pour les conditions en contrainte homogène. La fraction volumique des inclusions est de 30% ; les valeurs des modules d'élasticité des constituants sont indiquées sur la figure et correspondent à un contraste de phases de l'ordre de 10.

Dans ces calculs, le chargement imposé à l'« infini » est une extension simple ( $\mathbf{E}^0 = \underline{u}_z \otimes \underline{u}_z$ ) ou une traction simple ( $\mathbf{\Sigma}^0 = \underline{u}_z \otimes \underline{u}_z$ ). La seconde est obtenue en imposant une pression unitaire sur le bord supérieur du maillage. La convergence du processus itératif utilisé pour le calcul de  $\mu^{3\text{Ph}}$  est jugée suffisante lorsque l'écart entre deux estimations successives du module de cisaillement est inférieur à une valeur critique  $\epsilon^{\text{AC}}$ . On prend en général  $\epsilon^{\text{AC}} = 10^{-4}$ . Le nombre d'itérations nécessaires est en règle générale inférieur à 5. Les bornes de Hashin et Shtrikman reportées sont celles obtenues en prenant pour milieu de référence les bornes d'ordre 0. Pour l'exemple présenté les modules de cisaillement sont ordonnés comme les modules de compressibilité, la matrice étant la phase souple. Dans ces conditions, on utilise les phases constitutives comme milieu de référence ; de plus, le problème auxiliaire relatif à la borne inférieure n'est autre que celui d'une sphère homogène dans un milieu homogène.

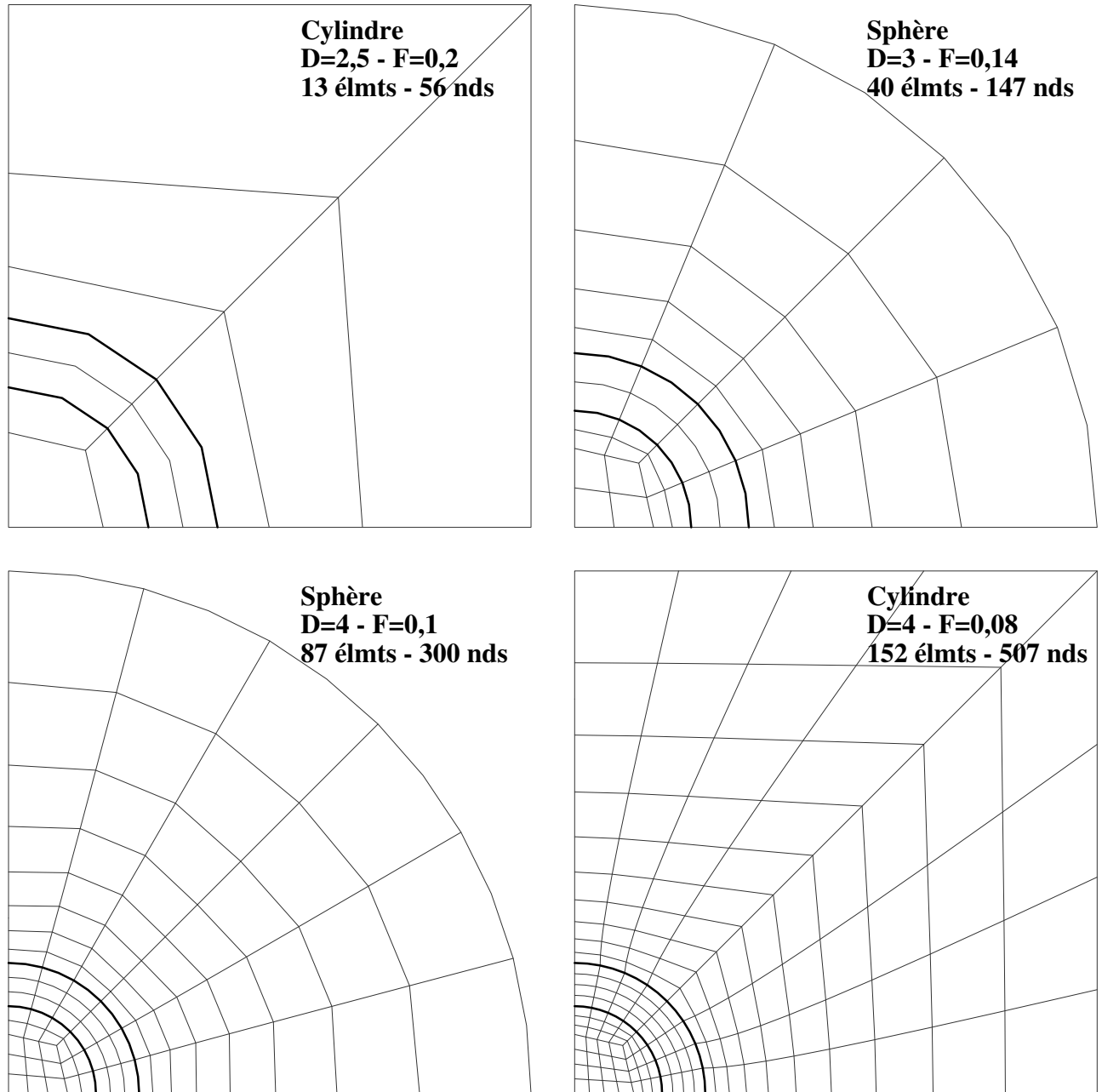


Figure 5.1 : Exemples de maillages bidimensionnels de la sphère composite en « milieu infini » ; fraction volumique de renforts = 30%

La figure 5.2 appelle les commentaires suivants :

- Il est inutile d'utiliser des maillages très fins pour obtenir des valeurs satisfaisantes des modules de cisaillement. Seul le maillage très grossier ( $F = 0,2$ ) conduit à des résultats qui s'écartent de manière sensible des valeurs théoriques. Cet écart reste toutefois très modéré, puisque, ramené à l'écart entre les bornes de Voigt et Reuss classiques ( $\mu^V = 3,7$  et  $\mu^R = 1,34$ ), il n'excède pas 1 pour cent. Les maillages légèrement plus fins conduisent à des précisions meilleures que 0,1 pour cent et les courbes correspondantes sont en pratique toutes confondues. On peut aussi noter que l'influence de la finesse de maillage est sensiblement indépendante de  $D$ . De plus, les résultats obtenus avec les maillages fins sont toujours les plus petits. Ceci est conforme aux remarques du paragraphe 5.1.D.b en ce qui concerne la borne de Voigt. Il semble donc que cette propriété est en réalité plus générale : le recours à des éléments fins reposant sur une formulation variationnelle en déplacements conduit à de faibles surestimations des modules.
- Les courbes obtenues en imposant la déformation convergent bien vers celles calculées en imposant



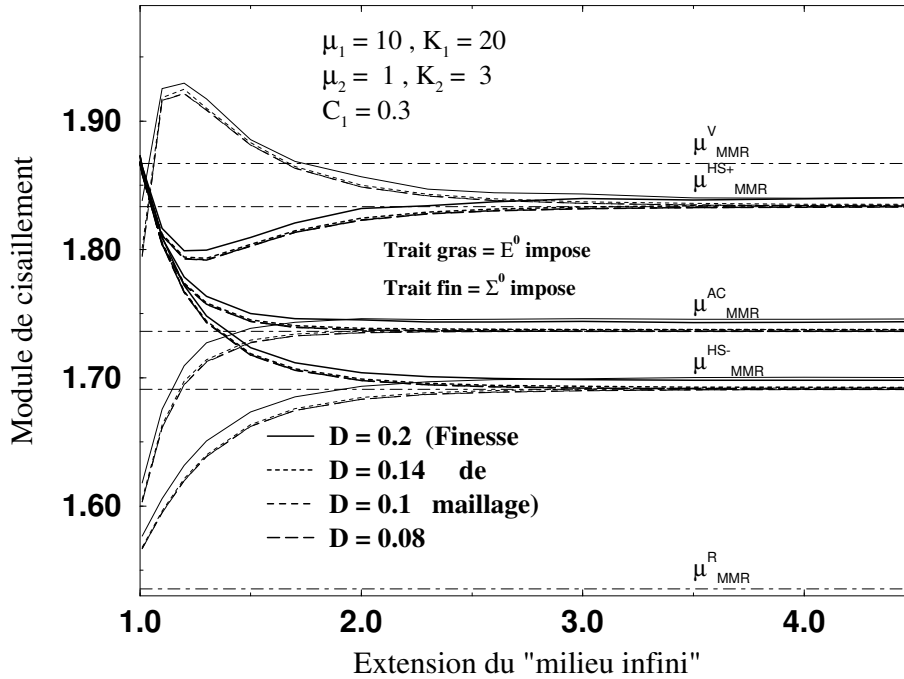


Figure 5.2 : Influence des paramètres  $F$  et  $D$

la contrainte lorsque  $D$  croît. Cette convergence est relativement rapide : il est ainsi inutile de modéliser un domaine d'extension très grande pour rendre compte correctement de l'interaction entre le milieu infini et le motif. De plus, cette convergence est d'autant plus rapide que les modules du milieu de référence sont proches de ceux du milieu autocohérent : pour obtenir une même valeur de l'écart entre les deux courbes, de l'ordre de 0,5% de l'écart  $\mu^V - \mu^R$ , il faut prendre  $D \geq \approx 3$  pour la borne supérieure de Hashin et Shtrikman,  $D \geq \approx 2,5$  pour la borne inférieure et  $D \geq \approx 2$  pour l'estimation autocohérente. Le milieu autocohérent apparaît ainsi comme celui pour lequel la perturbation induite par la présence de la sphère composite est la moins forte : elle n'est presque plus sensible à une distance supérieure au rayon de la sphère. Par la suite, on optera pour une valeur de  $D$  de l'ordre de 3 qui conduit à une modélisation satisfaisante des conditions imposées aux bords du motif par l'intermédiaire du milieu infini et par suite à des précisions suffisantes sur les modules de Hashin et Shtrikman ou les modules autocohérents.

- On note ensuite que les courbes obtenues en imposant la déformation débutent toutes à la même valeur (aux effets de la finesse de maillage près), égale à la borne de Hashin supérieure. Ceci est bien le comportement attendu, puisqu'avec  $D = 0$  des conditions de déformation homogène sont appliquées au bord de la sphère composite. Il n'en va pas de même lorsque la contrainte est imposée, mais ceci est lié au maillage utilisé, qui comporte toujours un domaine non nul de « milieu infini » et résulte de la limitation technique commentée plus haut. Les courbes correspondant à l'estimation autocohérente et à la borne inférieure de Hashin et Shtrikman évoluent de manière monotone de leur valeur initiale vers leur valeur limite pour  $D$  grand ; ce n'est en revanche pas le cas de celles associées à la borne supérieure qui se coupent pour une valeur de  $D$  très faible, atteignent un maximum ou un minimum avant de converger finalement de manière monotone vers leurs valeurs limites. Les valeurs obtenues pour une extension  $D$  donnée n'ont donc pas systématiquement le statut de borne vis-à-vis de la valeur limite obtenue avec  $D$  grand<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>On peut toutefois remarquer que pour  $D$  supérieur à une valeur minimale relativement faible, l'estimation calculée en imposant la contrainte encadre de manière conservative les valeurs limites, c'est-à-dire conserve un statut de borne vis-à-vis des modules effectifs. Cette propriété, qui devrait bien-sûr être vérifiée et étudiée plus rigoureusement d'un point de vue théorique, pourrait éventuellement être mise à profit en vue de réduire l'extension du domaine maillé du milieu infini dans le cadre de la recherche d'encadrements des modules effectifs.

### 5.2.B Modèles numériques tridimensionnels

Les observations précédentes suggèrent fortement que l'application de la procédure numérique à des motifs de structures plus complexes, nécessitant des modèles numériques tridimensionnels, devrait être possible : on peut se contenter de modéliser un domaine de petite extension du milieu infini et il est inutile de faire appel à des maillages particulièrement fins. La « lourdeur informatique » des calculs à entreprendre devrait être tout à fait raisonnable et compatible avec les puissances actuelles des calculateurs.

Avant d'entreprendre une telle démarche, il convient de la tester pour la sphère composite. Nous reprenons donc ce motif mais abordons le problème auxiliaire d'inclusion en milieu infini au moyen de modèles numériques tridimensionnels, sans chercher à tirer parti des symétries (nombreuses) de la géométrie en question. Des maillages tels que ceux présentés en figures 5.3 et 5.4 sont alors utilisés. On peut les caractériser par les mêmes paramètres  $F$  et  $D$  que plus haut. Le domaine du milieu infini maillé peut être une sphère (figure 5.4) mais aussi un cube (figure 5.3), qui présente l'avantage de permettre d'imposer des contraintes homogènes non isotropes.

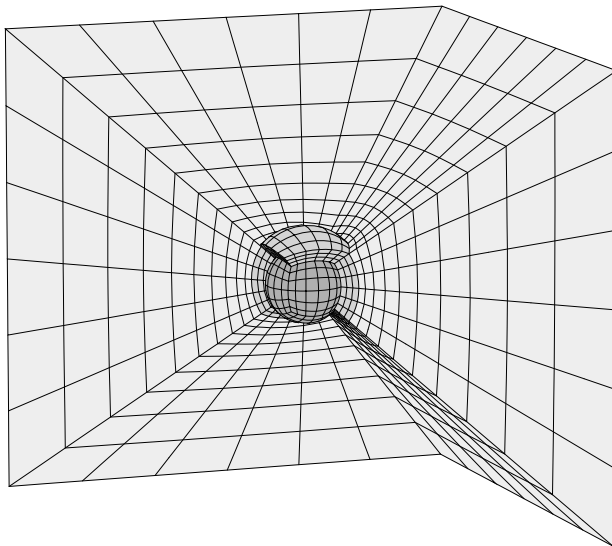


Figure 5.3 : Vue éclatée d'un maillage tridimensionnel fin de la sphère composite en « milieu infini » cubique ( $C = 0,3$   $F \approx 0,1$   $D = 4$  - 3672 éléments et 15113 nœuds)

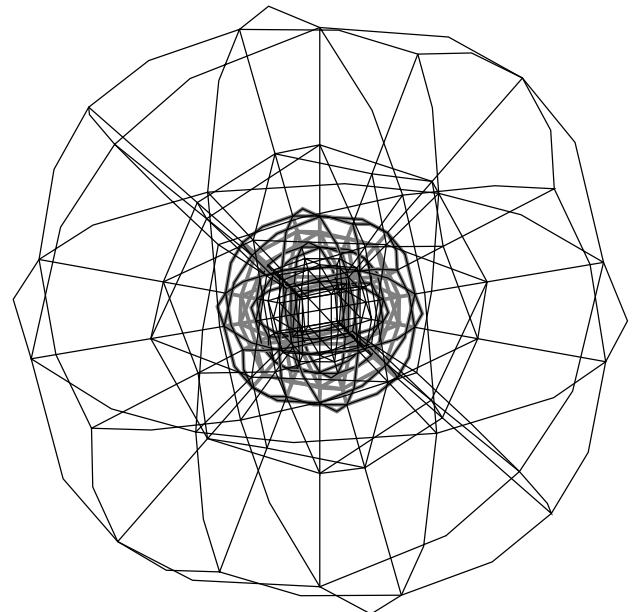


Figure 5.4 : Maillage tridimensionnel grossier de la sphère composite en « milieu infini » sphérique ( $C = 0,3$   $F \approx 0,2$   $D = 3$  - 152 éléments et 681 nœuds)

Les deux exemples de maillages représentés mettent en évidence l'importance d'un choix pertinent de la discrétisation. Le premier, dont la finesse correspond sensiblement à celle du troisième maillage bidimensionnel de la figure 5.1, présente plusieurs dizaines de milliers de degrés de liberté. Le calcul correspondant nécessiterait une puissance et un temps de calcul considérables, notamment du fait de l'encombrement de la matrice de rigidité, dont la largeur de bande serait nécessairement élevée du fait de la connectivité complexe des éléments. Le second maillage est beaucoup plus modeste. Il peut sembler exagérément grossier, mais l'étude du paragraphe précédent montre qu'il conduit à des résultats précis au pour cent près : sa finesse et l'extension du milieu infini correspondent sensiblement à ceux du premier maillage de la figure 5.1.

On vérifie d'ailleurs qu'il en est bien ainsi, sur toute la gamme de concentration. La figure 5.5 compare dans le diagramme de Hill normalisé par rapport aux bornes de Voigt et Reuss classiques, les résultats des calculs numériques, obtenus avec des maillages du type de celui présenté en figure 5.4, aux valeurs théoriques des diverses bornes et du modèle des trois phases. On constate une très bonne adéquation, les écarts n'excédant jamais 1 pour cent de la différence  $\mu^V - \mu^R$ . Les 45 valeurs reportées

sur cette courbe ont été calculées en un quart d'heure<sup>5</sup>, ce qui, compte-tenu des 3 à 5 itérations requises pour obtenir l'estimation autocohérente, correspond à moins de 15 secondes pour effectuer un calcul  $C^0 \rightarrow C_{MMR}^{HS}(C^0)$ . Avec un maillage légèrement plus fin, on peut obtenir des résultats encore meilleurs pour un temps de calcul qui reste tout à fait raisonnable. Dans l'exemple présenté en figure 5.5, les écarts sont presque tous inférieurs à 0,1%, sauf pour quelques points correspondant à de faibles concentrations en particules.

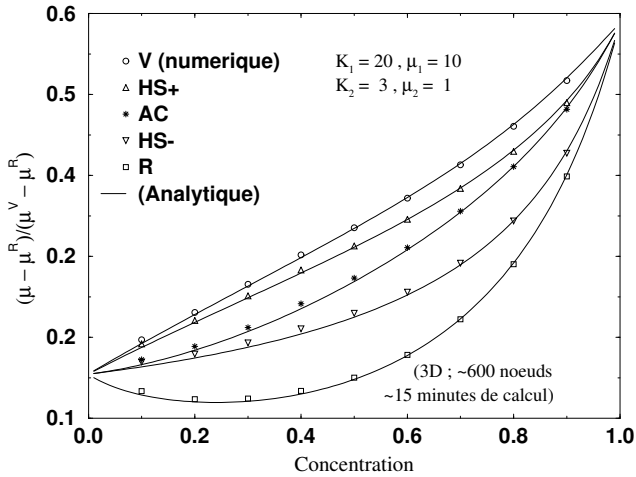


Figure 5.5 : Fuseaux de Hill calculés numériquement avec un maillage grossier ; comparaison avec les valeurs analytiques exactes (quelques secondes de calcul pour un point)

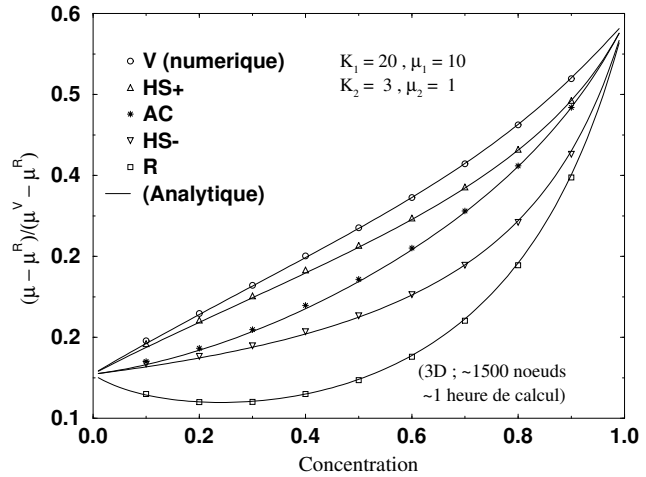


Figure 5.6 : Fuseaux de Hill calculés numériquement avec un maillage légèrement plus fin ( $\approx 1$  minute de calcul par point)

Les valeurs numériques ci-dessus sont bien sûr relatives à la géométrie particulière du motif considéré et aux valeurs des modules des phases constitutives. Mais pour une finesse de maillage et une extension du domaine maillé du milieu infini données, la puissance de calcul requise sera toujours la même, quelle que soit la géométrie interne du motif et la symétrie de comportement de ses constituants. La sensibilité des résultats à ces deux paramètres de maillage ne devrait pas trop différer de celle observée pour la sphère composite, en tous cas pour des géométries suffisamment régulières et des contrastes de phases du même ordre ou plus faibles que ceux considérés ici. Par ailleurs, les divers problèmes relatifs à un milieu de référence donné ne sont pas couplés : le temps de calcul requis pour traiter une morphologie décrite par plusieurs motifs non homothétiques varie donc linéairement avec le nombre de motifs.

Ces remarques établissent la viabilité, d'abord, de la technique numérique proposée pour le calcul des bornes et estimations mais aussi, plus généralement, de l'approche par MMR, dont on montre ainsi qu'elle est susceptible d'une mise en œuvre pratique pour des situations morphologiques non encore abordées par d'autres modèles. Cette « Méthode AutoCohérente Assistée par Ordinateur », désignée par la suite sous l'appellation générique de « Macao »<sup>6</sup>, est mise en œuvre dans le paragraphe qui suit pour calculer de nouvelles bornes et estimations pour des composites anisotropes.

### 5.3 Exemples d'application et confrontation à d'autres modèles

Nous présentons ici deux applications relatives à des composites à renforts particuliers cubiques ou ellipsoïdaux, décrits sous la forme d'assemblages de Hashin généralisés avec des supports de motifs sphériques ou ellipsoïdaux. Pour simplifier, nous n'avons traité que les composites avec une seule géométrie de motif. Les phases constitutives sont isotropes, mais l'on pourrait utiliser exactement

<sup>5</sup>Les temps de calculs donnés ici et par la suite sont relatifs à la même station de travail, de « gamme intermédiaire » de 1994.

<sup>6</sup>L'abréviation, due à A. Zaoui, fait d'abord référence au calcul des estimations autocohérentes généralisées, mais plus largement aux procédures numériques pour le calcul de  $C_{MMR}^{HS}(C^0)$  à partir de  $C^0$ .

les mêmes procédures pour traiter le cas de composites dont les constituants présenteraient la même symétrie de comportement que le milieu effectif. Tous les calculs ont été entrepris avec des modules des phases constitutives identiques à ceux du paragraphe précédent :  $\mu_1 = 10$ ,  $k_1 = 20$ ,  $\mu_2 = 1$  et  $k_2 = 3$  (unités indifférentes).

Les maillages sont déduits de ceux utilisés pour la sphère composite par des transformations géométriques simples. Nous ne détaillons plus la démarche conduisant au choix des finesses de maillage et à l'extension du domaine maillé du milieu infini. Précisons simplement que la précision sur les valeurs numériques des modules d'élasticité calculés devrait être meilleure que 1 pour cent de la différence  $C^V - C^R$ , sauf éventuellement pour quelques situations extrêmes pour lesquels les maillages étaient trop déformés<sup>7</sup>. Les éléments utilisés sont systématiquement des cubes à 20 nœuds et l'extension du domaine maillé du milieu infini est en général de 3. Le nombre de nœuds dans un maillage complet varie suivant la géométrie du motif entre environ 1500 et 3000. Le temps de calcul pour une opération  $C^0 \rightarrow C_{MMR}^{HS}(C^0)$  est habituellement de l'ordre de la minute et n'excède jamais les cinq minutes.

### 5.3.A Composites à inclusions cubiques

Le premier exemple concerne un composite avec des inclusions cubiques alignées en distribution isotrope, dont la symétrie générale est ainsi cubique, d'axes parallèles à ceux des renforts. La description par MMR invoquée fait appel à un motif unique, constitué d'une inclusion cubique enrobée d'une gaine sphérique concentrique de matrice. La figure 5.8 présente un exemple de maillage. Il s'agit de celui déjà utilisé pour aborder les problèmes auxiliaires relatif à l'assemblage des sphères composites ; seul le matériau constitutif de certains éléments a été modifié. La figure 5.7 donne une représentation du type de composite modélisé. La fraction volumique maximale en phase inclusionnaire est donnée par le rapport du volume d'un cube à celui de la sphère circonscrite, soit  $\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 37\%$ . Les maillages utilisés n'étant pas compatibles avec les fractions volumiques extrêmes, on limite les calculs aux concentrations inférieures à 35%.

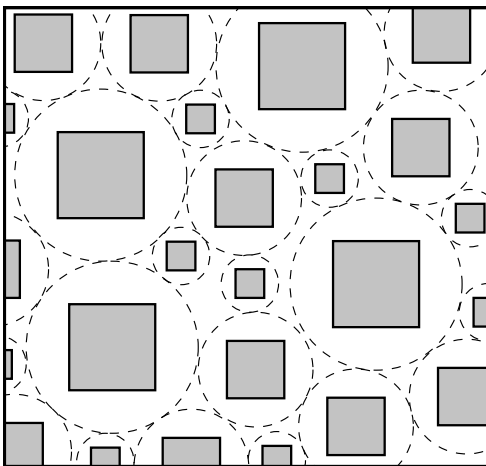


Figure 5.7 : Assemblage de Hashin généralisé avec des inclusions cubiques alignées en distribution isotrope

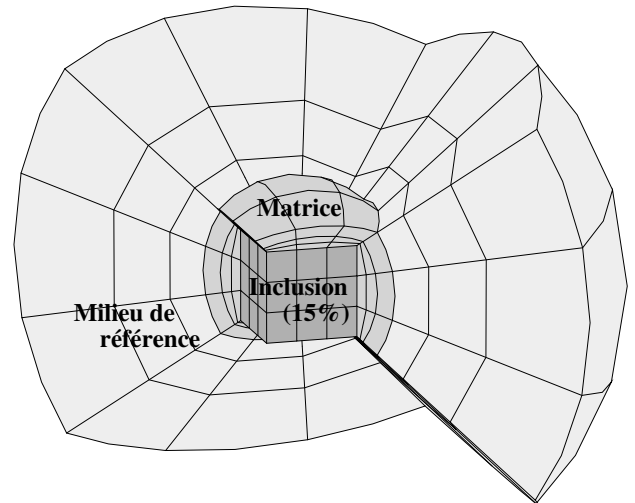


Figure 5.8 : Vue éclatée d'un maillage typique pour la résolution des problèmes auxiliaires associés à l'assemblage de Hashin de la figure 5.7 - 351 éléments et 1528 nœuds

<sup>7</sup>Des maillages construits spécifiquement devraient permettre d'améliorer ces résultats.

5.3.A.a Effet de la forme cubique des renforts

Les figures 5.9 et 5.10 comparent dans le diagramme de Hill les bornes de type Voigt et Reuss, celles de type Hashin et Shtrikman et l'estimation autocohérente pour les deux modules de cisaillement  $\mu_a$  et  $\mu_d$  aux bornes et à l'estimation de mêmes noms relatives au module de cisaillement  $\mu$  de l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin. L'écart entre les divers fuseaux et courbes rend compte de l'effet de la non sphéricité des renforts. On constate que tous les fuseaux relatifs au composite à renforts cubiques sont situés plus haut que les fuseaux correspondants relatifs à l'assemblage des sphères composites et qu'il en est de même pour l'estimation autocohérente. Le fuseau donné par les bornes de type Hashin et Shtrikman relatives à  $\mu_a$  est de plus strictement en dehors du fuseau de même nom délimitant les valeurs possibles pour  $\mu$  et disjoint de celui relatif à  $\mu_d$ .

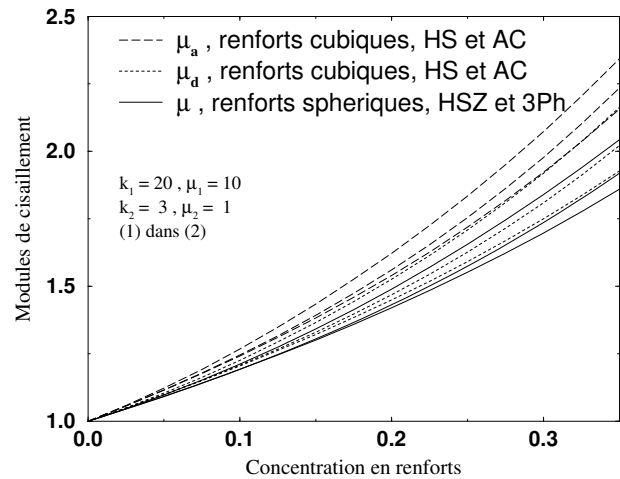
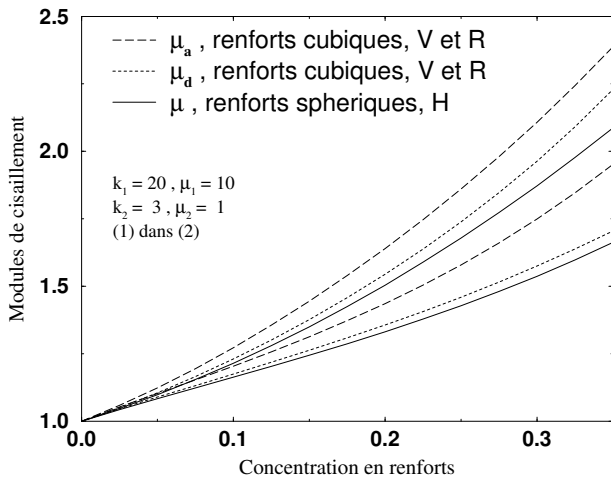


Figure 5.9 : Bornes de type Voigt et Reuss pour les modules de cisaillement d'un composite à renforts cubiques alignés - Comparaison avec les bornes de Hashin

Figure 5.10 : Bornes de type Hashin et Shtrikman et estimation autocohérente pour les modules de cisaillement d'un composite à renforts cubiques alignés - Comparaison avec les bornes de Hervé, Stolz et Zaoui et le modèle des trois phases

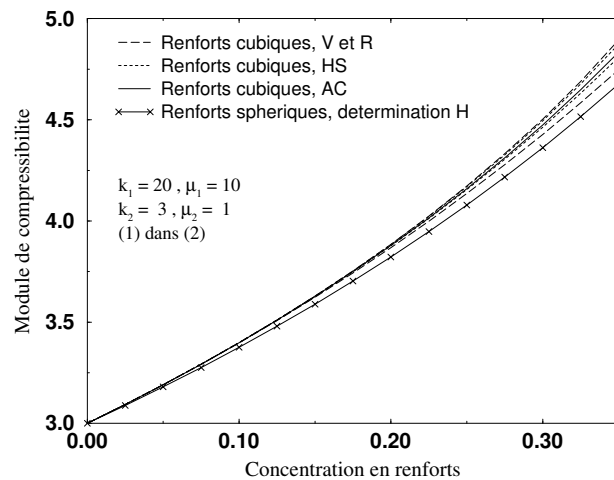


Figure 5.11 : Bornes de type VR et HS et estimation AC pour le module de compressibilité d'un composite à renforts cubiques alignés - Comparaison avec la détermination de Hashin

La figure 5.11 donne les résultats relatifs au module de compressibilité. On note d'abord que contrairement au cas des renforts sphériques les bornes d'ordre zéro ne sont pas confondues : plusieurs

valeurs de  $k$  sont possibles pour une même fraction volumique de renforts mais des distributions de motifs différentes. Le fuseau correspondant est d'amplitude relativement modeste mais situé au-dessus de la détermination de Hashin.

La géométrie cubique des renforts tend donc à raidir le composite sous tous les chargements mécaniques, en tous cas lorsque les renforts sont alignés.

### 5.3.A.b Comparaison aux bornes de Milton et Kohn

On peut comparer les bornes ainsi obtenues en tirant profit de l'information morphologique sur la nature inclusionnaire de l'une des phases et la géométrie des renforts aux bornes de Milton et Kohn (voir le paragraphe 1.2.B.a et la référence [119]) qui ne rendent compte que de la symétrie macroscopique du composite en question. Pour une telle symétrie cubique et des modules des constituants vérifiant  $K_1 > K_2$  et  $\mu_1 > \mu_2$ , ces auteurs obtiennent les deux inégalités suivantes sur les modules  $\mu_a$  et  $\mu_d$  :

$$c_2 \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_a} + \frac{3}{2(\mu_1 - \mu_d)} \right] \leq \frac{5}{2(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{3c_1(K_1 + 2\mu_1)}{\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}, \quad (5.30)$$

$$c_1 \left[ \frac{1}{\mu_a - \mu_2} + \frac{3}{2(\mu_d - \mu_2)} \right] \leq \frac{5}{2(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{3c_2(K_2 + 2\mu_2)}{\mu_2(3K_2 + 4\mu_2)}. \quad (5.31)$$

La figure 5.12 donne dans le plan  $(\mu_a, \mu_d)$  le domaine admissible pour les modules effectifs d'un composite avec 25% de renforts durs et le compare aux bornes déjà abordées plus haut : les bornes de Voigt et Reuss classiques valables pour tout composite, les bornes MMR de type Voigt et Reuss qui s'appliquent à la géométrie particulière du motif considéré quelle que soit la distribution spatiale et les bornes MMR de type Hashin et Shtrikman vérifiées si la distribution est isotrope. Les bornes relatives à l'assemblage des sphères composites sont aussi reportées. Notons qu'à l'exception des bornes de Milton et Kohn tous les encadrements relatifs au couple  $(\mu_a, \mu_d)$  sont découplés : les domaines admissibles sont des rectangles, dont les coordonnées des sommets sont données par les valeurs en  $c_1 = 0,25$  des courbes des figures 5.9 et 5.10.

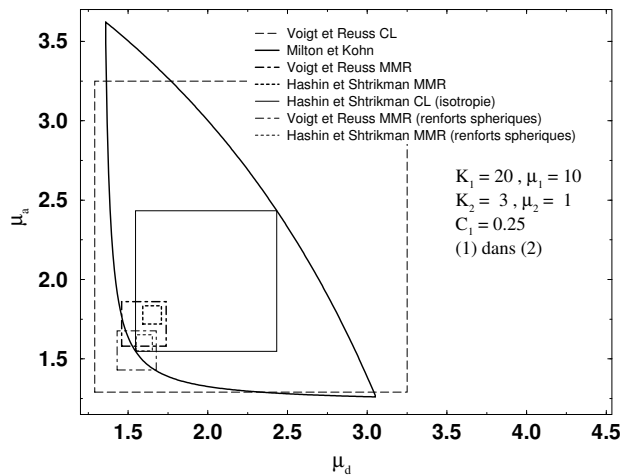


Figure 5.12 : Comparaison entre bornes - Inclusions cubiques dures dans une matrice souple

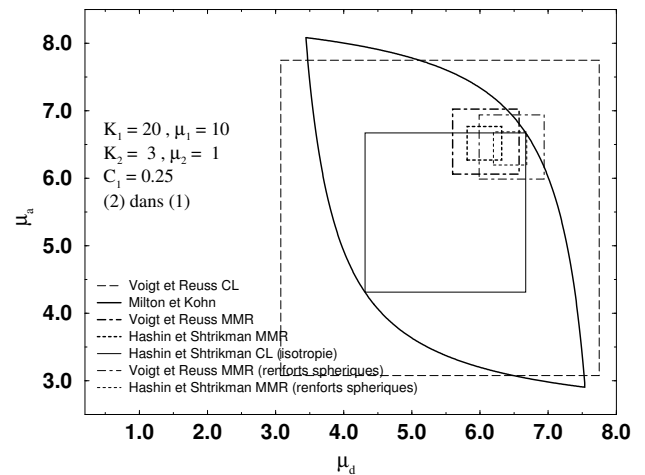


Figure 5.13 : Comparaison entre bornes - Inclusions cubiques souples dans une matrice dure

On vérifie d'abord que les nouvelles bornes proposées sont cohérentes avec les bornes antérieures : les bornes MMR de type Voigt et Reuss respectent bien, ainsi qu'on l'a démontré dans le cas le plus général, les bornes de Voigt et Reuss classiques. Mais on constate aussi que le domaine délimité par les bornes de Milton et Kohn n'est pas inclus dans celui de Voigt et Reuss, ce qui suggère que les encadrements obtenus par ces auteurs ne soient pas optimaux dans toutes les situations.

Par ailleurs, le comportement effectif d'un matériau avec des motifs à symétrie cubique en distribution isotrope étant à symétrie cubique, les modules correspondants doivent respecter les bornes de

Milton et Kohn ; c'est bien ce que l'on observe, puisque le domaine admissible délimité par les bornes MMR de type Hashin et Shtrikman est bien un sous-domaine de celui défini par les bornes de Milton et Kohn. En revanche, les bornes MMR de type Voigt et Reuss ne respectent pas ces dernières bornes : ceci n'est pas surprenant et rend compte de l'existence d'assemblages de Hashin généralisés construits à partir de motifs à symétrie cubique qui ne respectent pas la symétrie cubique à l'échelle macroscopique, du fait de la distribution des motifs non isotrope. Ce résultat étend à la symétrie cubique celui déjà bien connu pour l'assemblage des sphères composites, pour lequel les bornes de Hashin ne respectent pas les bornes de Hashin et Shtrikman classiques, au contraire des bornes de Hervé, Stolz et Zaoui<sup>8</sup>.

On vérifie ensuite que la configuration « inclusion dure dans matrice souple » conduit à un comportement effectif proche de la borne classique inférieure de type Hashin et Shtrikman, alors que la configuration inverse, « inclusion souple dans matrice raide », conduit à un comportement effectif proche de la borne supérieure, ainsi qu'on le constate en figure 5.13. Ce comportement est bien conforme à celui observé pour l'assemblage des sphères composites. En revanche, alors que pour ce dernier l'une des bornes MMR coïncide avec une des bornes CL, il n'en va pas de même pour un composite à inclusions cubiques, pour lequel la prise en compte de l'information morphologique a permis d'améliorer les deux bornes : le domaine délimité par les bornes MMR de type Hashin et Shtrikman ne touche pas la frontière définie par les bornes de Milton et Kohn. Un tel comportement est directement lié à la géométrie non ellipsoïdale des inclusions qui fait que les champs de polarisation d'essai ne sont pas uniformes. Il suggère que le choix d'une des bornes de Hashin et Shtrikman comme estimation des modules effectifs est moins pertinent que dans la situation où les renforts sont sphériques.

Enfin, ces deux figures mettent en évidence l'intérêt de la prise en compte de l'information morphologique locale : les dimensions linéaires des domaines délimités par les bornes MMR sont environ 5 fois plus petites que celles associées aux bornes de même type obtenues par l'approche classique. Ceci suggère que les interactions les plus importantes en élasticité linéaire sont celles qui opèrent à courte distance et milite en faveur de descriptions utilisant des motifs morphologiques.

### 5.3.B Composites à inclusions elliptiques

Le second exemple traité est celui de composites dont les renforts sont des ellipsoïdes de révolution de même orientation, en distribution ellipsoïdale simple caractérisée par un autre ellipsoïde de révolution de même orientation que les particules.

Les motifs utilisés, représentés en figure 5.14, sont formés d'une inclusion ellipsoïdale enrobée d'une gaine de matrice ellipsoïdale de même axe. La symétrie macroscopique des assemblages de Hashin généralisés construits à partir de ces motifs est isotrope transverse, d'axe celui des ellipsoïdes, de vecteur directeur  $\underline{u}_z$ . On caractérise les ellipsoïdes de révolution par leur rapport de forme  $w = \frac{c}{a}$ , où  $c$  est leur longueur selon l'axe  $\underline{u}_z$  et  $a$  leur diamètre équatorial. Nous utiliserons également le paramètre  $f$ , défini par :

$$\begin{cases} f = \frac{c}{a} & \text{si } \frac{c}{a} \leq 1 \\ f = 2 - \frac{a}{c} & \text{si } \frac{c}{a} \geq 1. \end{cases} \quad (5.32)$$

Son intérêt est de traiter de manière symétrique les ellipsoïdes allongés et les ellipsoïdes aplatis. Par la suite on désignera par  $w_i$  ou  $f_i$  les rapports relatifs aux inclusions et  $w_d$  ou  $f_d$  ceux caractérisant les distributions.

Remarquons que si  $w_i = w_d$  toutes les fractions volumiques de renforts sont admissibles, le cas particulier  $w_i = w_d = 1$  correspondant à la sphère composite. Lorsque  $w_i \neq w_d$ , la concentration en renforts est majorée par le rapport  $c_+$  du volume de l'ellipsoïde de géométrie  $w_i$  à celui de l'ellipsoïde

<sup>8</sup>Il convient à ce sujet de rappeler la signification des bornes exprimées en termes de modules. Pour un comportement macroscopique de symétrie quelconque, il n'est pas possible de définir un module de cisaillement isotrope  $\mu$  macroscopique, ni des modules de cisaillement cubiques  $\mu_a$  et  $\mu_d$ . Les bornes exprimées dans ces grandeurs sont à prendre au sens des formes quadratiques associées : si par exemple  $\{\mu_a^b, \mu_d^b, k^b\}$  est une borne pour le tenseur des modules effectif  $\bar{C}$ , alors pour tout chargement macroscopique  $\underline{\underline{\epsilon}}$ ,  $2\mu_a^b \epsilon_a^{\text{eq}2} + 2\mu_d^b \epsilon_d^{\text{eq}2} + k^b \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})^2$  est une borne pour  $\underline{\underline{\epsilon}} : \bar{C} : \underline{\underline{\epsilon}}$ .

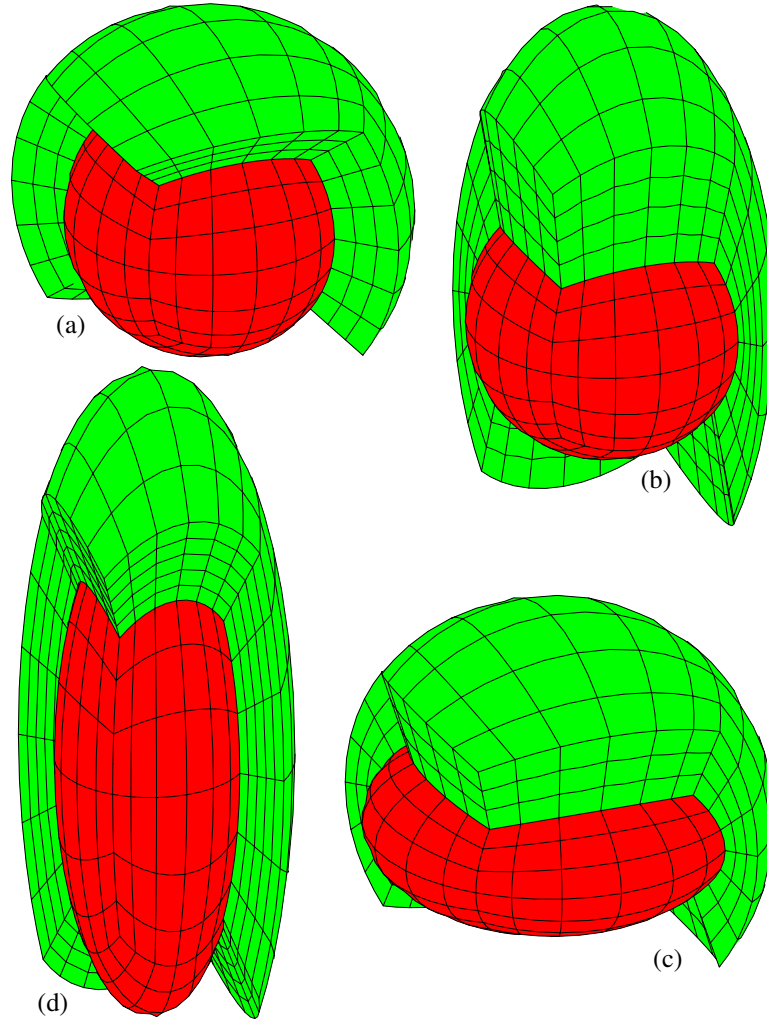


Figure 5.14 : Diverses géométries de motifs : (a) sphère composite, (b) sphère dans un ellipsoïde ( $\frac{c}{a} = 2$ ), (c) ellipsoïde dans une sphère ( $\frac{c}{a} = 0,5$ ), (d) ellipsoïde dans un ellipsoïde de même rapport de forme ( $\frac{c}{a} = 3$ )

de géométrie  $w_d$  qui lui est circonscrit. Plus précisément :

$$\begin{cases} c_+ = \frac{w_i}{w_d} & \text{si } w_i < w_d \\ c_+ = \left[\frac{w_d}{w_i}\right]^2 & \text{si } w_i > w_d. \end{cases} \quad (5.33)$$

Seules les bornes de type Hashin et Shtrikman et l'estimation autocohérente sont présentées dans ce qui suit. Tous les résultats sont obtenus avec les mêmes modules d'élasticité des phases isotropes constitutives que précédemment et pour une fraction volumique de renforts durs égale à 30%. Les maillages utilisés sont déduits de ceux mis en œuvre pour la sphère composite en appliquant des transformations ellipsoïdales adéquates à des sous-domaines. Les calculs numériques dont on présente les résultats ont été menés avec un domaine maillé du milieu infini de forme sphérique, de rayon égal à 3 fois le rayon le plus grand du motif, et en appliquant des conditions homogènes en déformation. D'autres géométries et conditions aux limites peuvent toutefois être appliquées. Précisons que les deux chargements  $\underline{E}^0$  utilisés pour calculer toutes les constantes d'élasticité sont  $\underline{E}_1^0 = \underline{u}_x \otimes \underline{u}_x + 2\underline{u}_y \otimes \underline{u}_y + \underline{u}_z \otimes \underline{u}_z + \underline{u}_x \otimes \underline{u}_y + \underline{u}_y \otimes \underline{u}_x + \underline{u}_x \otimes \underline{u}_z + \underline{u}_z \otimes \underline{u}_x + \underline{u}_z \otimes \underline{u}_y + \underline{u}_y \otimes \underline{u}_z$  et  $\underline{E}_2^0 = \underline{u}_z \otimes \underline{u}_z$ .

Nous nous intéressons plus particulièrement à trois situations : celles d'inclusions ellipsoïdales en distribution isotrope, d'inclusions sphériques en distribution ellipsoïdale et enfin d'inclusions ellipsoïdales en distribution ellipsoïdale de même rapport de forme.



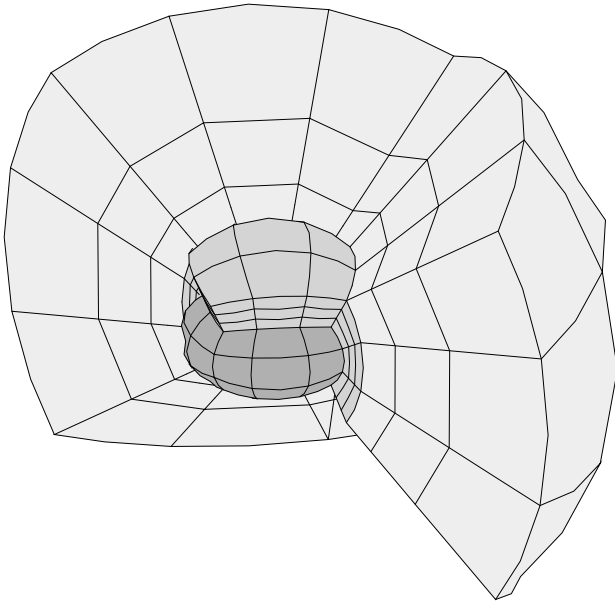


Figure 5.15 : Exemple de maillage pour la première situation -  $w_i = 0,6$  et  $w_d = 1$  - 459 éléments et 1968 nœuds

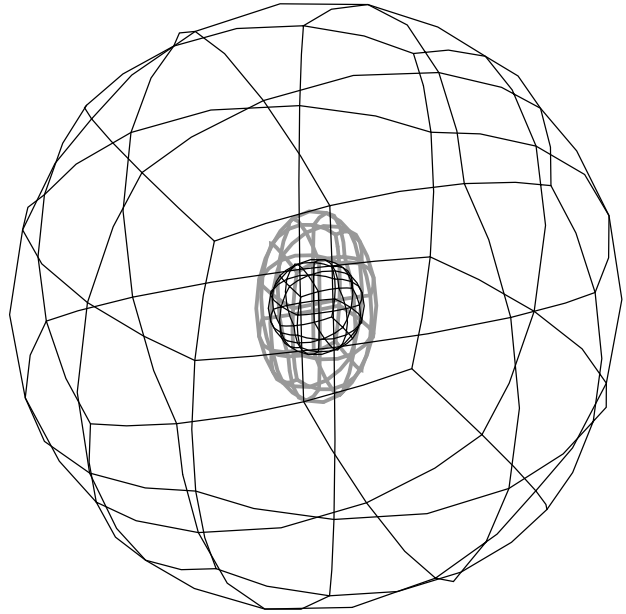


Figure 5.16 : Exemple de maillage pour la seconde situation -  $w_i = 1$  et  $w_d = 1,7$  - 567 éléments et 2408 nœuds

### 5.3.B.a Anisotropie de distribution et anisotropie de forme

Les comparaisons des résultats obtenus dans les deux premières situations vont permettre d'estimer au moins qualitativement l'influence relative de deux sources d'anisotropie : celle liée à la géométrie des renforts et celle résultant des propriétés de leur distribution.

Lorsque la concentration  $c$  en renforts est imposée et que l'un des rapport de forme est fixé, les valeurs que peut prendre l'autre rapport sont limitées par la condition de compatibilité géométrique  $c \leq c_+$ . Avec  $w_d = 1$ , on obtient :

$$c \leq w_i \leq \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \text{soit :} \quad c \leq f_i \leq 2 - \sqrt{c} \quad (5.34)$$

et avec  $w_i = 1$  :

$$\sqrt{c} \leq w_d \leq \frac{1}{c}, \quad \text{soit :} \quad \sqrt{c} \leq w_d \leq 2 - c. \quad (5.35)$$

Avec  $c = 0,3$ , on obtient  $0,3 \leq w_i \leq 1,825$  et  $0,3 \leq f_i \leq 1,452$  pour le premier cas et  $0,548 \leq w_d \leq 3,33$  soit  $0,548 \leq f_d \leq 1,7$  pour le second. Les valeurs ultimes n'ont pas été traitées pour des raisons liées à des difficultés de maillage. En pratique on s'est limité à  $0,4 \leq w_i \leq 1,7$  pour  $w_d = 1$  et  $0,6 \leq w_d \leq 2,1$  pour  $w_i = 1$ . Les figures 5.15 et 5.16 présentent deux exemples de maillages utilisés pour traiter les problèmes auxiliaires.

Les résultats relatifs aux modules de cisaillement sont présentés en figures 5.17 et 5.18. La première donne leur évolution en fonction du rapport de forme des renforts en distribution isotrope, alors que la seconde donne l'effet de l'anisotropie de distribution de renforts sphériques. Les modules  $\mu_l$  et  $\mu_t$ , qui coïncident en cas d'isotropie, évoluent de manière sensiblement opposée dans la plupart des cas. Ceci se conçoit intuitivement. Par exemple, lorsque les renforts sont très aplatis, il n'opposent qu'une faible résistance à un cisaillement longitudinal mais induisent une rigidité importante dans le plan transverse. Il en est de même si les renforts sphériques sont éloignés les uns des autres selon la direction  $z$  mais plus proches selon une direction du plan transverse. Notons toutefois que l'évolution de  $\mu_l$  n'est pas monotone en fonction de  $w_d$  pour  $w_d = 1$  : ce module décroît pour les faibles valeurs de  $w_d$ , puis augmente pour  $w_d \geq \approx 1,7$ .

Dans l'hypothèse où la comparaison quantitative des rapports  $w_d$  et  $w_i$  a bien un sens, il semble d'après ces résultats que l'effet sur l'anisotropie macroscopique de la non sphéricité des renforts soit

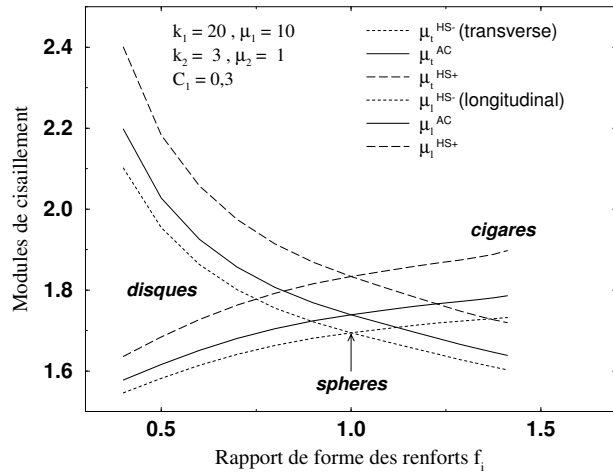


Figure 5.17 : Modules de cisaillement  $\mu_t$  et  $\mu_t$  - Renforts ellipsoïdaux en distribution isotrope

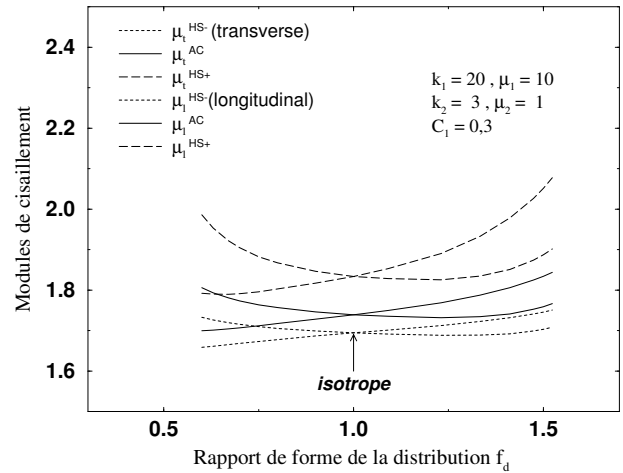


Figure 5.18 : Modules de cisaillement  $\mu_t$  et  $\mu_t$  - Renforts sphériques en distribution ellipsoïdale

plus important que celui de l'anisotropie de leur distribution : les variations des deux modules sont plus importantes lorsque  $w_i$  varie que lorsque  $w_d$  varie. Cette observation qui devrait certes être vérifiée pour d'autres valeurs numériques des paramètres des calculs confirme toutefois que les interactions les plus importantes en élasticité sont celles à courte portée, dont en particulier celles liées à la géométrie des renforts ; les interactions à plus longue distance, influencées notamment par les propriétés de la distribution des renforts, ont un effet plus limité, qu'on ne peut toutefois pas négliger.

### 5.3.B.b Assemblage des sphères composites « extrudé » ou « écrasé »

Le dernier exemple d'application utilise des motifs dont l'inclusion et le support ont même rapport de forme  $w_i = w_d$ . Une telle géométrie correspond à un matériau déduit d'un assemblage isotrope de sphères composites par une transformation ellipsoïdale. Elle décrit en première approximation un matériau réel obtenu par extrusion (pour  $w_i = w_d > 1$ ) ou écrasement (pour  $w_i = w_d < 1$ ) d'un matériau isotrope de morphologie « matrice/inclusions ».

Aucune condition de compatibilité géométrique ne limite cette fois-ci le rapport de forme. Les performances des maillages utilisés limitent toutefois la gamme abordable en pratique : les calculs ont été menés pour  $0,1 \leq w_i = w_d \leq 8$ . D'autres valeurs sont aussi envisageables mais au prix de maillages spécifiques.

Nous avons comparé les bornes de type Hashin et Shtrikman et l'estimation autocohérente obtenues par la procédure Macao aux bornes calculées avec l'approche de Willis et Ponte Castañeda (voir le paragraphe 4.2.C et la référence [135]). Compte-tenu des valeurs numériques des modules des phases constitutives, l'estimation proposée par ces auteurs est une borne inférieure. La borne supérieure peut aussi-être calculée selon la même procédure (voir le paragraphe 4.2.C.f). Les valeurs de ces deux bornes sont données par les relations (4.244) et (4.245), dont tous les termes admettent une expression analytique. Les tenseurs  $\mathbf{P}_2^i = \mathbf{P}_d^i$ ,  $i = 1, 2$  sont isotropes transverses. Des expressions donnant les valeurs de leurs composantes peuvent être trouvées dans la référence [103]. Nous avons déjà établi l'identité entre la borne inférieure et celle calculée par l'approche MMR dans une situation comme celle traitée ici où les renforts sont des ellipsoïdes, identité qui est la conséquence de l'homogénéité dans les renforts des champs de polarisation optimaux calculés par l'approche MMR. La comparaison des deux résultats fournit une mesure des erreurs numériques induites par le calcul par éléments finis. Les bornes supérieures sont en revanche distinctes, la borne MMR étant systématiquement plus performante. La borne supérieure de Willis et Ponte Castañeda n'exploite guère la nature inclusionnaire des renforts : pour  $w_i = w_d = 1$  elle s'identifie à la borne de Hashin et Shtrikman classique. La comparaison entre ces deux bornes supérieures permettra de mesurer quantitativement l'effet de la morphologie de type « matrice/inclusions » pour des situations anisotropes.

Nous avons également comparé les résultats de la procédure **Macao** aux valeurs analytiques connues pour le composite à fibres longues unidirectionnelles et le matériau laminé. Le premier est décrit par un assemblage de fibres composites de Hashin, dont toutes les constantes d'élasticité sont connues à l'exception du module de cisaillement transverse. Ce dernier est encadré par les bornes « d'ordre un » de Hashin et Rosen [68], valables quelle que soit la distribution des fibres dans le plan transverse. Lorsqu'elles sont distribuées de manière isotrope, les nouvelles bornes « d'ordre deux » de Hervé et Zaoui (voir le paragraphe **1.2.C.c** et la référence [77]) peuvent être utilisées. Elle ne sont pas confondues et encadrent l'estimation autocohérente également proposée par ces auteurs. Les valeurs numériques des quatre constantes  $E_l$ ,  $\nu_l$ ,  $K_t$  et  $\mu_l$  connues et celles des deux bornes d'ordre deux et de l'estimation autocohérente pour la cinquième  $\mu_t$  ont été calculées numériquement au moyen d'une adaptation aux cylindres multicouches du logiciel utilisé pour traiter le modèle mnPh (*cf.* annexe **E**). Ces valeurs ont été associées à des rapports de forme très grands ( $f_d = f_i = 2$ ).

Les constantes d'élasticité d'un matériau formé de couches planes infinies superposées sont aussi calculables exactement<sup>9</sup>. On les associe aux rapports de forme très petits ( $f_d = f_i = 0$ ).

Les figures 5.19 à 5.23 donnent les courbes obtenues pour les cinq constantes usuelles  $\mu_l$ ,  $\mu_t$ ,  $E_l$ ,  $\nu_l$ ,  $K_t$ . Elles appellent les commentaires suivants :

- Les deux courbes donnant les bornes inférieures sont toujours quasiment confondues. La précision des calculs numériques est donc satisfaisante. De faibles écarts sont perceptibles pour les rapports de forme supérieurs à environ 3 ou inférieurs à 0,4, mais ils sont nettement plus faibles que les écarts entre les diverses courbes. L'écart va toujours dans le sens d'une surestimation par le calcul numérique, sauf pour le rapport de Poisson, pour lequel l'ordre général de toutes les courbes est inversé<sup>10</sup>.
- L'encadrement fourni par l'approche **MMR** est beaucoup plus resserré que celui de Willis et Ponte Castañeda. Ceci confirme une fois de plus la prédominance des interactions locales dans le comportement effectif : l'encadrement de Willis et Ponte Castañeda résulte de la prise en compte des seuls paramètres de distribution spatiale de la phase constitutive des renforts, alors que les bornes **MMR** rendent en plus compte de la nature inclusionnaire de l'une des phases. La proximité des bornes **MMR** est parfois telle qu'elle fournissent en pratique une détermination du module effectif. C'est le cas notamment du module de compressibilité transverse pour des rapports de forme proches de 0,6 mais c'est aussi celui du module de compressibilité équivalent  $k_s$ , donné en figure 5.24. Il est bien connu que les bornes **MMR** relatives à ce dernier coïncident pour l'assemblage des sphères composites ( $w_i = w_d = 1$ ) ; on montre ici qu'il en est ainsi en pratique pour toute une gamme de rapports de forme proches de l'unité. Pour les valeurs numériques considérées ici, cette gamme s'étend d'environ  $w_i = w_d = 0,5$  à  $w_i = w_d = 2$ .
- L'estimation autocohérente est encadrée comme attendu par les bornes de type Hashin et Shtrikman. Elle est plus proche de la borne inférieure que de la borne supérieure, pour la concentration considérée. Ceci justifie d'utiliser la borne inférieure comme estimation du comportement effectif, ainsi que le suggèrent Willis et Ponte Castañeda [135], mais sans fournir d'argument bien convainquant. Pour des concentrations plus élevées, on peut s'attendre, à l'instar de ce que l'on observe pour le modèle des trois phases, à une tendance inverse, l'estimation autocohérente étant alors plus proche de la

<sup>9</sup>Les champs de contrainte et de déformation solutions sous chargement macrohomogène sont homogène dans chaque couche. Il est facile de voir que sous cisaillement transverse la déformation est homogène, si bien que le module de cisaillement transverse n'est autre que le module de cisaillement de la borne de Voigt. Au contraire sous cisaillement longitudinal, c'est la contrainte qui est homogène : le module de cisaillement longitudinal est celui de la borne de Reuss. Enfin, la réponse aux chargements de  $\mathcal{A}_2(\underline{u}_z)$  est calculée en supposant la déformation dans chaque phase  $i$  de la forme  $(\epsilon_{zz}^i, \epsilon_{tt}^i) = (\epsilon_{zz}^i, \epsilon_{tt}^i)$ , avec  $\sum_i c_i \epsilon_{zz}^i = \langle \epsilon \rangle_{zz}$ . Les équations d'équilibre donnent alors

$$\begin{aligned} \forall i \quad (3k_i + 4\mu_i)\epsilon_{zz}^i + \sqrt{2}(3k_i - 2\mu_i)\langle \epsilon \rangle_{tt} &= 3\langle \sigma \rangle_{zz} \\ \sqrt{2}\sum_i c_i(3k_i - 2\mu_i)\epsilon_{zz}^i + 2\sum_i c_i(3k_i + \mu_i)\langle \epsilon \rangle_{tt} &= 3\langle \sigma \rangle_{tt}. \end{aligned}$$

La résolution de ce système pour des valeurs appropriées de la contrainte macroscopique  $(\langle \sigma \rangle_{zz}, \langle \sigma \rangle_{tt})$  conduit aux constantes  $E_l$ ,  $\nu_l$  et  $K_t$ .

<sup>10</sup>Ceci n'est pas gênant puisqu'il ne s'agit pas de bornes pour le rapport de Poisson effectif mais de rapports de Poisson de tenseurs des modules qui bornent le tenseur des modules effectifs au sens des formes quadratiques associées.

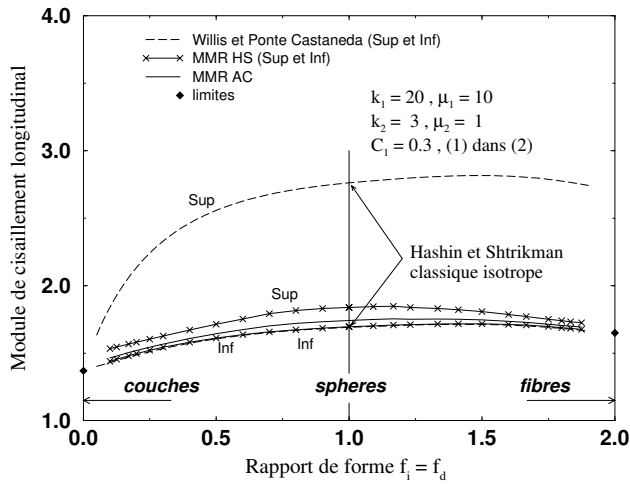


Figure 5.19 : Module de cisaillement longitudinal  $\mu_l$  - Renforts ellipsoïdaux en distribution ellipsoïdale - Bornes et estimation MMR, bornes de Willis et Ponte Castañeda et valeurs limites (composite à fibres et composite à couches)

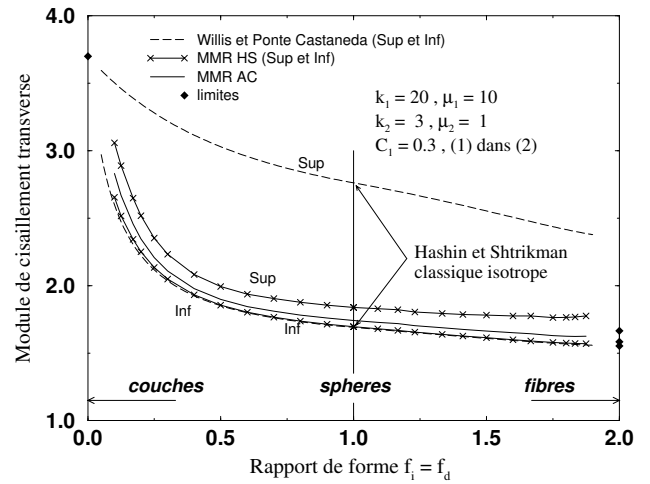


Figure 5.20 : Module de cisaillement transverse  $\mu_t$

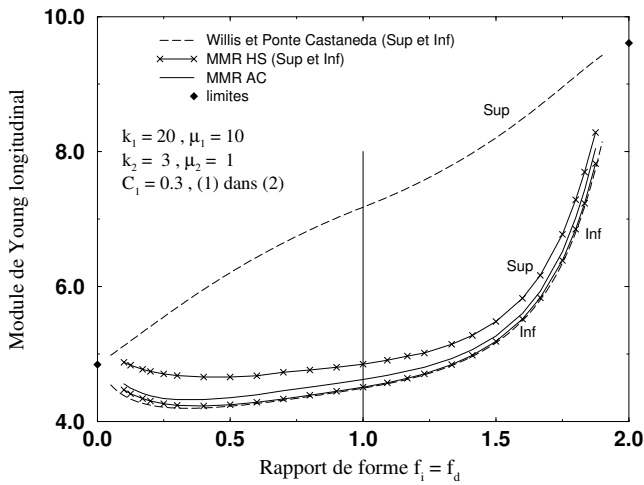


Figure 5.21 : Module de Young longitudinal  $E_l$

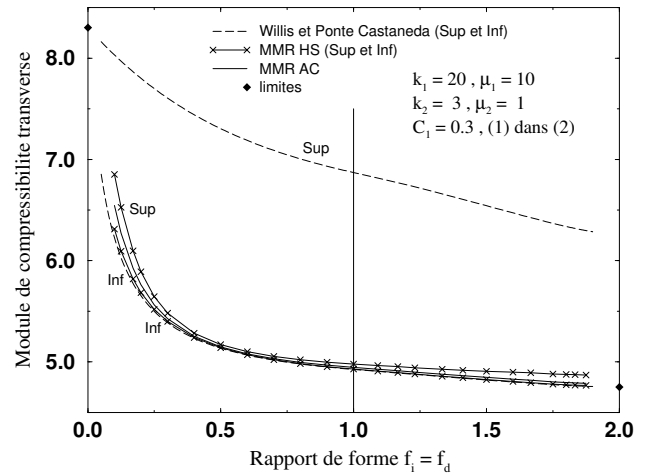


Figure 5.22 : Module de compressibilité transverse  $k_t$

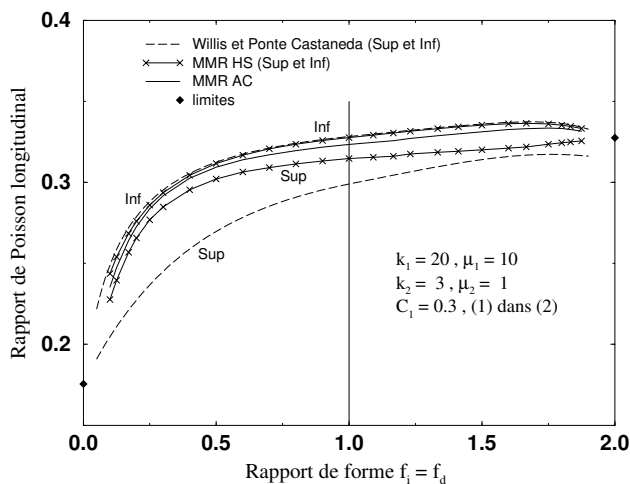


Figure 5.23 : Rapport de Poisson longitudinal  $\nu_l$

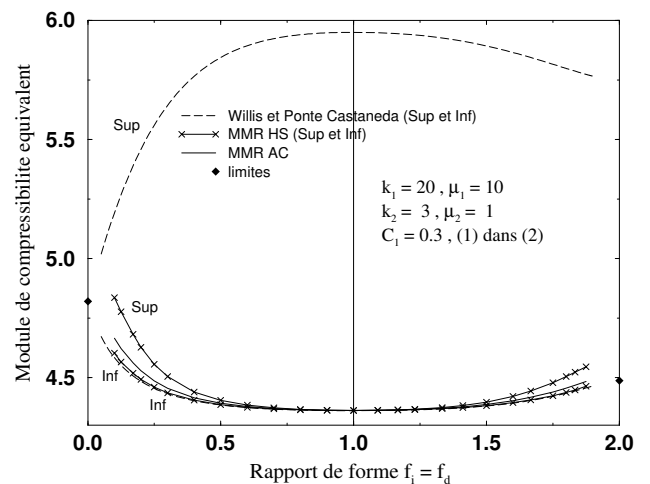


Figure 5.24 : Module de compressibilité  $k_s$

borne supérieure de type MMR. L'estimation de Willis et Ponte Castañeda est alors probablement moins pertinente.

- Toutes les bornes et estimations convergent vers la solution du composite laminé lorsque le rapport de forme tend vers zéro. De même, toutes les bornes et estimations données par l'approche MMR convergent vers les valeurs correspondant au composite à fibres. En particulier, les courbes relatives au module de cisaillement transverse convergent sensiblement (aux erreurs numériques près : voir ci-après) vers les deux bornes non confondues et l'estimation autocohérente relatives à l'assemblage des fibres composites. En revanche, les courbes donnant la borne supérieure de Willis et Ponte Castañeda ne tendent pas vers les valeurs associées au composite à fibre, à l'exception de celle donnant le module de Young longitudinal. Ces comportements s'expliquent par le fait que les « morphologies » possibles pour un matériau laminé, simplement caractérisées par les matériaux constitutifs et l'épaisseur des couches successives, sont toutes équivalentes d'un point de vue mécanique. Un composite unidirectionnel admet au contraire plusieurs morphologies, caractérisées par une coupe selon le plan transversal. Les morphologies « à fibres » constituent une classe particulière. Le comportement observé de la borne supérieure de Willis et Ponte Castañeda montre que cette borne n'est pas spécifique de cette classe. En fait, pour les géométries considérées ici, l'encadrement de Willis et Ponte Castañeda est le même que celui fourni par les bornes classiques de Hashin et Shtrikman associées à une distribution ellipsoïdale simple des phases (*cf.* paragraphe 4.2.C.d).
- Les convergences commentées ci-dessus sont satisfaisantes pour la borne inférieure et l'estimation autocohérente calculées par Macao ; elles le sont un peu moins pour la borne supérieure, qui tend à surestimer quelque peu les valeurs limites, notamment pour les modules  $E_l$  et  $k_s$  et, dans une moindre mesure,  $\mu_l$  et  $\mu_t$ . Ces écarts sont fort probablement dus à des difficultés numériques. Rappelons que la convergence des modules en fonction de l'extension du domaine maillé du milieu infini est la moins rapide pour la borne supérieure ; il se peut donc qu'une extension égale à trois fois le plus grand rayon du motif soit une valeur légèrement trop faible. De plus, l'hétérogénéité des champs locaux est aussi la plus prononcée pour cette borne supérieure ; les maillages utilisés sont peut-être trop grossiers pour ces géométries. Les figures 5.25 et figures 5.26 reproduisent ceux utilisés pour les rapports de forme extrêmes : les discrétisations des zones polaires pour  $w = 8$  et des zones équatoriales pour  $w = 0,1$  sont probablement insuffisantes ; il en est de même du milieu infini à proximité du motif. Une étude plus poussée de ces situations, menée avec d'autres maillages et faisant appel à une comparaison systématique des résultats obtenus avec des déplacements imposés et des contraintes imposées, devrait être entreprise pour obtenir des valeurs numériques plus fiables. Elle sort toutefois du cadre strict de cet exposé qui reste essentiellement une démonstration de faisabilité.

Pour conclure ce paragraphe, il convient de rappeler que les bornes MMR présentées ici sont relatives à un assemblage de Hashin généralisé qui, du fait de sa nature fractale, ne représente pas de manière totalement satisfaisante un matériau réel. Pour représenter une véritable microstructure il faudra faire appel à deux motifs ou plus, dont l'un, homogène et constitué de matrice, représente les zones non couvertes par les autres motifs formés d'inclusions composites. La fraction volumique associée à ce motif homogène rend compte du « degré de matricité » de la phase correspondante : si elle est nulle, le degré est maximal et correspond à celui de l'assemblage de Hashin, si elle est égale à la concentration nominale de cette phase, ce degré est minimal et l'on obtient une situation de distribution ellipsoïdale simple des phases. Ceci ne change rien à la borne inférieure ; en revanche la borne supérieure évolue de manière continue en fonction de ce degré de matricité de la borne CL vers la borne MMR relative à l'assemblage de Hashin généralisé. Comme on l'a vu au paragraphe 4.4.H.c, la fraction volumique à accorder à ce motif homogène ne devrait toutefois pas être très élevée. Les bornes données par l'approche par MMR pour une situation réelle seraient donc légèrement moins resserrées que celles présentées plus haut, mais malgré tout nettement plus performantes que les bornes classiques.

## 5.4 Extensions non-linéaires

Nous achevons ce chapitre par quelques indications sur les diverses extensions aux comportements non-linéaires envisageables pour l'approche par MMR et plus particulièrement pour l'outil Macao. Nous

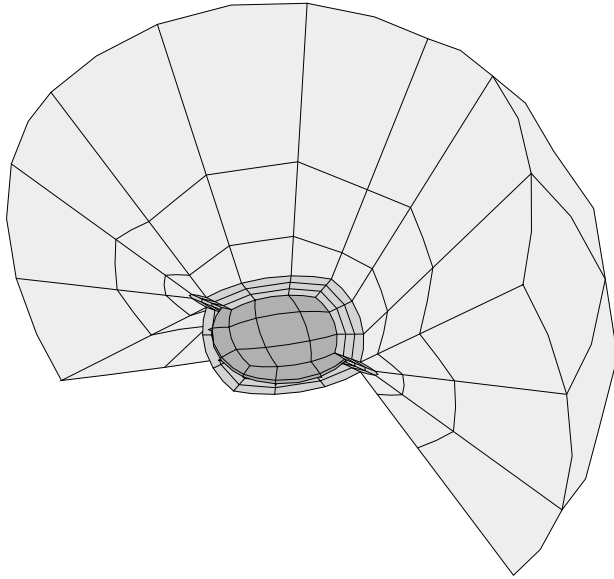


Figure 5.25 : Maillage pour  $w_i = w_d = 0,1$  - 1968 nœuds et 459 éléments

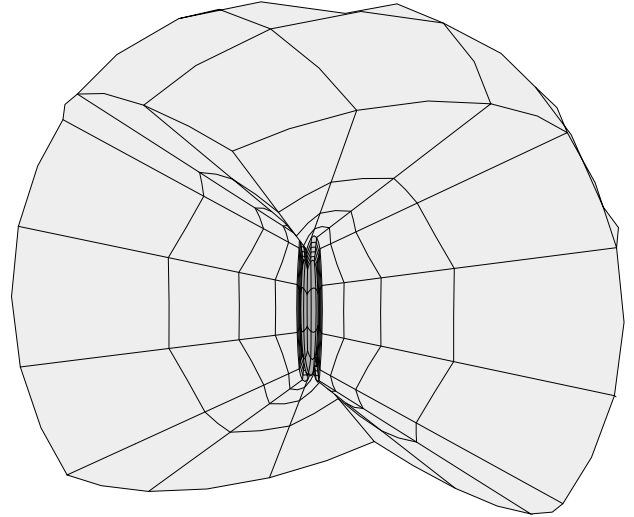


Figure 5.26 : Maillage pour  $w_i = w_d = 8$  - 2628 nœuds et 621 éléments

abordons le problème selon les principes déjà adoptés pour le modèle à motifs sphériques multicouches (cf. paragraphe **3.2.A**) en ayant recours aux lois élastiques linéaires sécantes. Diverses formulations sont proposées. L'application effective de la plus simple d'entre elles montre toutefois que la difficulté numérique est bien plus grande que dans une situation linéaire.

### 5.4.A Principes

Les estimations, autocohérentes ou autres, construites à partir de l'approche par MMR sont susceptibles d'une extension aux comportements non-linéaires au même titre que n'importe quel modèle de prévision du comportement linéaire. Nous renvoyons au paragraphe **1.3** pour une revue synthétique des nombreuses approches possibles. Nous nous intéressons plus particulièrement aux extensions utilisant une description du comportement non-linéaire des phases constitutives par une loi linéaire sécante. La variante « classique » et la variante « modifiée » de cette approche sont décrites en détail au paragraphe **1.3.B.c** et ont déjà été mises en œuvre au paragraphe **3.2.A.b** pour le modèle mnPh.

Rappelons qu'il s'agit d'écrire le comportement non-linéaire en tout point  $\underline{x}$  de la structure  $\mathcal{S}$  sous la forme  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \{2\mu_i^{sc}(\epsilon^{eq}(\underline{x})), 3k_i\} : \underline{\epsilon}(\underline{x})$ , où  $\mu_i^{sc}(\cdot)$  est le module sécant de la phase constitutive  $i$  au point  $\underline{x}$ , supposé caractériser complètement son comportement non-linéaire. On se ramène ainsi formellement à un problème linéaire. Toutefois, comme le champ  $\mu_i^{sc}(\epsilon^{eq}(\underline{x}))$  est très hétérogène, sa résolution par les modèles d'homogénéisation disponibles n'est pas possible. L'idée consiste alors à remplacer ce champ  $\mu_i^{sc}(\epsilon^{eq}(\underline{x}))$  par un champ  $\tilde{\mu}(\underline{x})$  moins hétérogène qui le décrit toutefois suffisamment bien et pour lequel on peut résoudre le problème d'homogénéisation linéaire.

L'idée la plus simple est de choisir des modules uniformes sur chaque phase, de façon à retrouver dans le nouveau problème linéaire la même distribution de modules, c'est-à-dire en d'autres termes la même morphologie microstructurale, que dans le même matériau s'il était linéaire. Un tel champ local  $\tilde{\mu}(\underline{x})$  est de la forme  $\tilde{\mu}(\underline{x}) = \sum_i \mu_i^{sc}(P_i)\kappa_i(\underline{x})$ , où  $P_i$  est le « paramètre d'érouissage moyen » de la phase  $i$ . On peut alors utiliser les résultats du modèle linéaire pertinent pour la microstructure traitée. La difficulté est de choisir  $P_i$  de manière pertinente.

Dans l'extension classique, il s'agit de l'équivalent de la déformation moyenne sur la phase  $i$ , que l'on estime à partir des lois de localisation données par le modèle linéaire de changement d'échelle. Dans l'extension modifiée, qui présente le gros avantage de conduire à un résultat ayant un statut de borne supérieure rigoureuse, le paramètre  $P_i$  est le moment d'ordre deux de la déformation locale dans le domaine occupé par la phase en question. On l'estime par l'intermédiaire d'une dérivation adéquate

(voir les relations (1.72), (1.172) et (1.180)) de l'énergie potentielle globale à l'équilibre donnée par le modèle linéaire par rapport au module de cisaillement de cette phase :

$$P_i = \frac{1}{c_i} \frac{\partial \mu^*}{\partial \mu_i} E^{\text{eq}2} + \frac{1}{3c_i} \frac{\partial k^*}{\partial \mu_i} \text{tr}(\underline{\underline{E}})^2, \quad (5.36)$$

où  $\underline{\underline{E}}$  est la déformation macroscopique imposée et  $\{2\mu^*, 3k^*\}$  le tenseur des modules effectifs donné par le modèle linéaire en fonction des modules  $\mu_j$  et des concentrations  $c_j$  des phases constitutives  $j$ .

Cette première idée est naturelle pour les modèles linéaires classiques fondés sur le choix de champs de polarisation uniformes par phase : l'analyse qui les soutient considère deux points d'une même phase totalement équivalents. Il n'est donc pas possible de faire appel à des champs  $\tilde{\mu}(\underline{x})$  plus riches que ceux proposés plus haut.

Il n'en va pas de même pour les approches par MMR, capables de distinguer deux points d'une même phase s'il ne sont pas homologues vis-à-vis du même motif. Pour ces modèles, il est permis d'opter pour des champs  $\tilde{\mu}(\underline{x})$  dont la seule contrainte est de prendre la même valeur en deux points homologues. De tels champs sont caractérisés par des champs locaux  $P_\lambda(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in D_\lambda$ ,  $\lambda \in [2, n]$  définis pour tous les motifs et une valeur  $P_1$  pour l'éventuelle matrice :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \tilde{\mu}(\underline{x}) = \mu_1^{\text{sc}}(P_1) + \sum_{\lambda=2}^n \int_{D_\lambda} \left[ \mu_\lambda^{\text{sc}}(\underline{y})(P_\lambda(\underline{y})) - \mu_1^{\text{sc}}(P_1) \right] \zeta^\lambda(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y, \quad (5.37)$$

où  $\mu_\lambda^{\text{sc}}(\underline{y})(\cdot)$  est le module sécant caractérisant la phase constitutive au point  $\underline{y}$  du motif  $\lambda$ . Cette forme de champ de modules locaux est compatible avec l'approche par MMR, qui conduit donc, en théorie tout au moins, à une valeur des modules effectifs et donc aussi à la réponse macroscopique au chargement macroscopique imposé.

Il reste à choisir les champs  $P_\lambda$  et le paramètre  $P_1$  et l'on peut pour cela suivre les principes de l'extension classique et de l'extension modifiée. Selon la première, on choisit pour  $P_\lambda(\underline{x})$  l'équivalent de la moyenne de la déformation aux points homologues à  $\underline{x}$ , c'est-à-dire tout simplement la déformation équivalente au point  $\underline{x}$  calculée dans les problèmes auxiliaires d'inclusions en milieu infini. Il en est de même pour  $P_1$ , le motif homogène correspondant étant en état de déformation homogène dans le problème auxiliaire.

Si l'on suit les principes de l'extension modifiée,  $P_\lambda(\underline{x})$  est le moment d'ordre deux de la déformation aux points homologues à  $\underline{x}$  et  $P_1$  celui de la déformation dans la matrice. Ce dernier paramètre se calcule au moyen de la relation (5.36). Le calcul du champ  $P_\lambda(\underline{x})$  est en revanche un peu plus délicat et on l'obtient comme la limite de la variation d'énergie macroscopique en réponse à une variation uniforme  $\Delta\mu$  des modules de cisaillement dans un petit domaine  $V(\underline{x})$  autour du point  $\underline{x}$ , divisée par la fraction volumique associée à ce domaine, lorsque l'extension de ce domaine tend vers zéro, que l'on peut écrire formellement :

$$P_\lambda(\underline{x}) = \lim_{|V(\underline{x})| \rightarrow 0} \frac{1}{p_\lambda |V(\underline{x})|} \left[ \frac{\partial \mu^*(\mu_\lambda + \Delta\mu I_{V(\underline{x})})}{\partial \Delta\mu} \Big|_{(\Delta\mu=0)} E^{\text{eq}2} + \frac{\partial k^*(\mu_\lambda + \Delta\mu I_{V(\underline{x})})}{3\partial \Delta\mu} \Big|_{(\Delta\mu=0)} \text{tr}(\underline{\underline{E}})^2 \right], \quad (5.38)$$

où  $I_{V(\underline{x})}$  est la fonction indicatrice de  $V(\underline{x})$ . Cette extension généralise celle déjà proposée et mise en œuvre pour l'extension aux comportements non linéaires du modèle mnPh. Pour ce dernier, les champs  $P_\lambda(\underline{x})$  étaient uniformes sur les couches sphériques. Cette nouvelle formulation autorise aussi des hétérogénéités orthoradiales. Le résultat de cette procédure conserve son statut de borne.

Dans ce qui suit, nous désignons l'extension utilisant des champs hétérogènes de paramètres d'écrouissage sous l'appellation « extension complète », alors que celle fondée sur des paramètres homogènes par phase est dite « simplifiée ».

#### 5.4.B Mise en œuvre numérique de l'extension simplifiée

Les formulations obtenues pour ces diverses extensions restent bien évidemment des problèmes non-linéaires. Pour tout chargement macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  imposé, il s'agit de calculer les paramètres  $P_i$

ou les champs  $P_\lambda(\cdot)$  satisfaisant toutes les équations, puis d'en déduire la réponse macroscopique par le modèle linéaire. Une courbe de traction complète peut ainsi être calculée pas à pas.

Si l'on opte pour l'extension simplifiée, dans sa variante classique ou dans sa variante modifiée, la difficulté du problème non linéaire à résoudre pour chaque niveau de chargement est identique à celle du problème correspondant obtenu avec le modèle mnPh. On peut donc reprendre les algorithmes de résolution mis en œuvre pour ce dernier, décrits au paragraphe **3.2.A.c**. La seule différence réside dans l'utilisation d'un outil numérique et non semi-analytique pour traiter les problèmes auxiliaires d'inclusions en milieu infini. Les itérations sont de ce fait beaucoup plus longues. Les bonnes propriétés de stabilité de l'algorithme de résolution utilisé pour le modèle mnPh permettent d'utiliser ce dernier dans une démarche inverse consistant à construire le comportement d'un constituant à partir du comportement effectif. Le prix de cette stabilité est une convergence plus lente. L'algorithme du point fixe est moins stable mais plus rapide et s'avère suffisant pour les calculs directs auxquels nous nous limitons dans un premier temps. Nous avons donc opté pour ce dernier pour une première tentative. Précisons aussi que les moments d'ordre deux nécessaires pour l'extension modifiée sont calculés par différenciation numérique, de la même façon que pour le modèle mnPh. À chaque itération de l'algorithme du point fixe,  $n + 1$  calculs Macao sont donc nécessaires : le premier est relatif aux valeurs atteintes des modules sécants, les  $n$  suivants donnent la variation des modules effectifs lorsque le module sécant de l'une des  $n$  phases constitutives est légèrement modifié.

Comme pour la mise au point de l'outil numérique Macao linéaire, la première étape de construction d'un outil non linéaire concerne naturellement l'assemblage des sphères composites de Hashin, abordé avec des modèles numériques axisymétriques, et avec une seule phase constitutive de comportement non-linéaire. Nous avons opté pour un comportement en loi puissance, identique à celui utilisé par Suquet dans la référence [154]. Les phases sont isotropes et incompressibles<sup>11</sup> et le comportement déviatorique de la phase  $i$  est caractérisé par :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma_0^{(i)} \left( \frac{\epsilon^{\text{eq}}}{\epsilon_0} \right)^{m^{(i)}}, \quad (5.39)$$

soit encore :

$$\mu_i^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}}) = \frac{\sigma_0^{(i)}}{3\epsilon^{\text{eq}}} \left( \frac{\epsilon^{\text{eq}}}{\epsilon_0} \right)^{m^{(i)}}. \quad (5.40)$$

Les valeurs numériques adoptées pour les diverses constantes sont celles utilisées par Suquet :

$$\frac{\sigma_0^{(1)}}{\sigma_0^{(2)}} = 5, \quad m^{(1)} = 1 \quad \text{et} \quad m^{(2)} = 0,1. \quad (5.41)$$

La phase inclusionnaire est la phase 1 ; elle est linéaire. Sa concentration est de 50%.

Le calcul a été entrepris avec trois maillages différents, de paramètres  $(F; D) = (0, 15; 3)$ ,  $(0, 1; 3)$  et  $(0, 08; 4)$ , c'est-à-dire voisins des trois maillages les plus fins présentés en figure 5.1. Rappelons que ces derniers conduisent tous trois à la valeur du module de cisaillement autocohérent d'un composite linéaire avec un contraste de phases de l'ordre de 10 avec une précision meilleure que 0,1%. La figure 5.27 présente les courbes macroscopiques obtenues et les compare aux courbes théoriques de Suquet, recalculées avec le modèle semi-analytique mnPh. Il s'agit de l'extension de l'estimation autocohérente.

On constate que l'accord entre les calculs numériques et les solutions analytiques est assurément moins bon que pour les modules d'élasticité linéaire, notamment pour les valeurs de la déformation macroscopique pour lesquelles le contraste des phases est le plus important. Seul le maillage le plus fin conduit à une courbe macroscopique acceptable, les écarts étant inférieurs à 2% sur l'ensemble de la courbe. La convergence vers la solution analytique en fonction de la finesse de maillage est sensiblement la même pour l'extension classique et pour l'extension modifiée.

Ces résultats sont la conséquence d'une mauvaise estimation des paramètres  $P_i$  par les modèles numériques. La figure 5.28 donne leur évolution en fonction du chargement macroscopique et les

---

<sup>11</sup>En réalité on a pris dans les calculs par éléments finis des modules de compressibilité beaucoup plus grands que les valeurs potentielles des modules de cisaillement sécants.



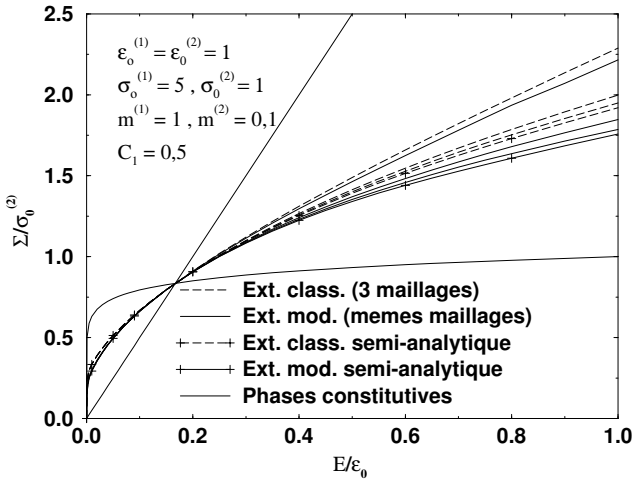


Figure 5.27 : Comportement global - Extension non linéaire classique et modifiée de l'estimation des trois phases - Calculs numériques et analytiques

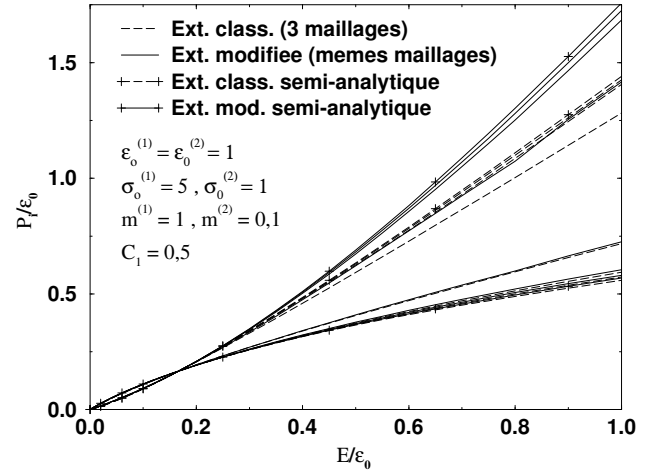


Figure 5.28 : Paramètres d'écroutissage des phases - Valeurs locales correspondant aux courbes globales de la figure 5.27

compare aux valeurs exactes calculées avec le modèle mnPh. L'hétérogénéité inter-phase des paramètres est amplement sous-estimée par le modèle numérique reposant sur le maillage le plus grossier. De ce fait, le module sécant de la phase matrice non linéaire est surestimé et il en est de même du comportement global. Les maillages plus fins conduisent à de meilleurs résultats mais l'hétérogénéité est aussi sous-estimée.

#### 5.4.C Moyennes par phases et champs locaux

Cette mauvaise estimation des paramètres d'écroutissage est la conséquence d'une mauvaise approximation numérique des champs locaux par les maillages trop grossiers. Les figures 5.29 et 5.30 donnent par exemple les valeurs locales d'une même grandeur<sup>12</sup> calculées dans les mêmes conditions avec deux maillages distincts, analogues au premier et au dernier maillages de la figure 5.1. Il est évident que le premier ne conduit qu'à des approximations très grossières des champs locaux. C'est pourtant ce même maillage qui permet de calculer des valeurs des modules effectifs avec une précision meilleure que 1% de l'écart entre les bornes de Voigt et Reuss classiques.

Une telle situation s'explique par le fait que le calcul des modules d'élasticité macroscopiques est un processus de moyenne qui n'est que peu sensible aux hétérogénéités locales. Seules les valeurs moyennes par phase sont importantes mais la sensibilité des modules globaux aux variations de ces dernières reste faible. L'évolution d'une situation de déformation homogène à un état de contrainte homogène ne fait jamais passer les modules macroscopiques que de la borne de Voigt à la borne de Reuss classiques. L'obtention d'une précision égale à  $\epsilon$  fois l'écart entre ces dernières ne nécessite de connaître les déformations moyennes par phase qu'à une précision de  $\epsilon$  fois l'écart entre celles correspondant à ces deux situations extrêmes qui, pour des concentrations des phases pas trop éloignées de l'équirépartition, est de l'ordre de grandeur de la déformation macroscopique (voir la figure 1.3). De plus, l'écart est plutôt dans le sens d'une sous-estimation de l'hétérogénéité inter-phases, puisque le calcul numérique conduit en général à une surestimation des modules macroscopiques, c'est-à-dire à des modules trop proches des modules de Voigt. Pour des modules  $\mu_i$  des constituants, une concentration et une déformation macroscopique fixées, le modèle numérique tend donc à sous-estimer la déformation de la phase la plus déformée d'une quantité proche de  $\epsilon$  fois la déformation macroscopique. Si l'on note  $A^{\text{th}}$  et  $A^{\text{num}}$  les coefficients de localisation théoriques et numériques relatif à cette phase, ceci s'écrit :

$$A^{\text{num}}(\mu_i) = A^{\text{th}}(\mu_i) - \epsilon.$$

<sup>12</sup>Il s'agit en l'occurrence de la contrainte équivalente de von Mises mais la même constatation vaut pour toutes les autres grandeurs.

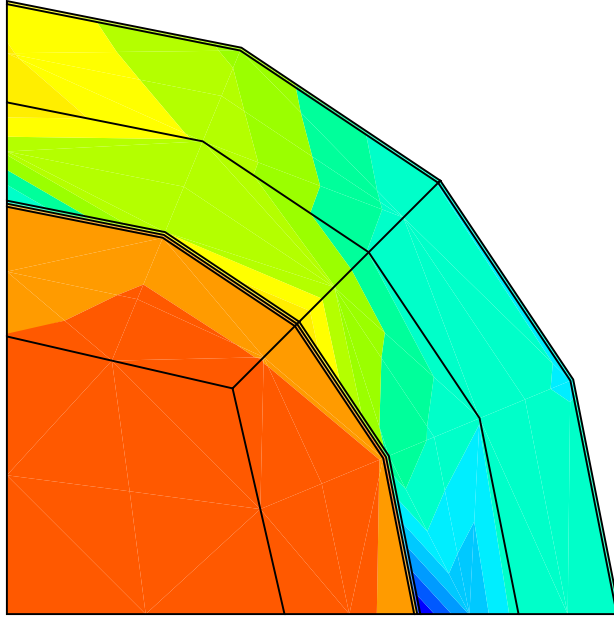


Figure 5.29 : Champ local dans l'inclusion composite  
- Maillage grossier ( $D = 2,5$  et  $F = 0,2$ )

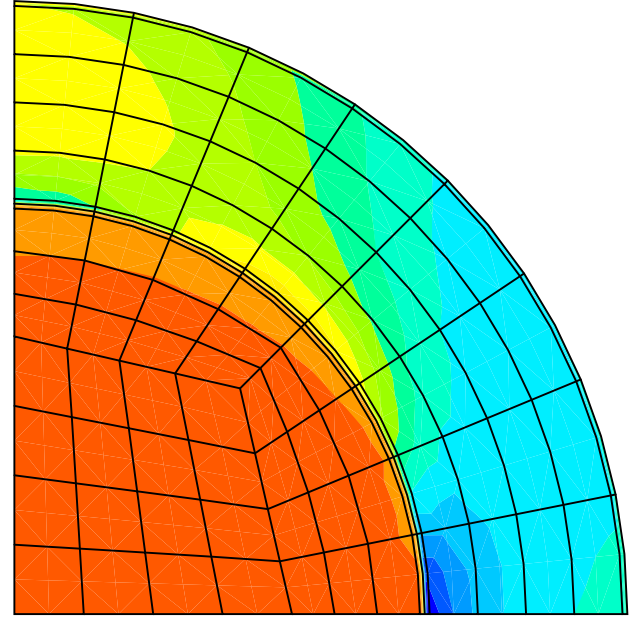


Figure 5.30 : Champ local dans l'inclusion composite  
- Même grandeur que dans la figure 5.29 - Maillage fin  
( $D = 4$  et  $F = 0,08$ )

Considérons maintenant une situation avec, pour simplifier, une seule phase de comportement non-linéaire. La recherche du paramètre  $P$  associé à la déformation macroscopique  $E^{\text{eq}}$  revient, conformément à l'extension classique, à résoudre l'équation :

$$P = A^{\text{th}}(\mu^{\text{sc}}(P))E^{\text{eq}}.$$

Le recours à une solution numérique de précision  $\epsilon$  a pour conséquence de la modifier en :

$$P = \left[ A^{\text{th}}(\mu^{\text{sc}}(P)) - \epsilon \right] E^{\text{eq}}.$$

Il est clair que le résultat numérique  $P^{\text{num}}$  ne sera pas égal à la valeur théorique  $P^{\text{th}}$  et l'on peut quantifier l'écart en écrivant :

$$A^{\text{th}}(\mu^{\text{sc}}(P))E^{\text{eq}} \approx P^{\text{th}} + (P - P^{\text{th}}) \frac{\partial A^{\text{th}}(\mu^{\text{sc}}(P))}{\partial P} (P^{\text{th}})E^{\text{eq}}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{P^{\text{num}} - P^{\text{th}}}{E^{\text{eq}}} \approx -\epsilon \left[ 1 - \frac{\partial A^{\text{th}}(\mu^{\text{sc}}(P))}{\partial P} (P^{\text{th}})E^{\text{eq}} \right]^{-1} \quad (5.42)$$

L'erreur est donc multipliée par un coefficient qui est proche de 1 pour les faibles non-linéarités, puisque la dérivée est alors petite, mais qui peut être grand pour des non-linéarités plus importantes. Les modules sécants associés sont alors également faux, si bien que l'erreur sur les modules macroscopiques et donc la contrainte associée à  $E^{\text{eq}}$  peut être beaucoup plus importante que dans une situation linéaire. Un phénomène analogue agit certainement aussi pour l'extension modifiée.

Ces remarques établissent que la précision sur les déformations moyennes par phase pour un problème linéaire est sensiblement la même que celle sur les modules macroscopiques. On peut donc les utiliser comme prévision à l'échelle locale. En revanche l'effet multiplicateur décrit ci-dessus interdit de s'en servir sans précautions pour aborder des problèmes non-linéaires.

Par ailleurs, les champs locaux ne peuvent être utilisés en tant que prévisions d'hétérogénéités intra-phases qu'avec des maillages suffisamment fins, aussi bien pour les modèles linéaires que les modèles non-linéaires.

#### 5.4.D Un problème largement ouvert

L'utilisation des procédures numériques décrites ci-dessus n'est donc envisageable qu'avec des maillages suffisamment fins qui permettent de réduire l'erreur  $\epsilon$ . Ceci interdit en pratique le passage à des situations anisotropes nécessitant des modèles numériques tridimensionnels. Le nombre de degrés de liberté serait tellement grand qu'une résolution avec des moyens informatiques usuels serait impossible : l'encombrement de la matrice de rigidité conduirait à un temps de calcul très long, même pour une inversion unique, temps qui serait de plus multiplié par le nombre d'itérations nécessaires pour calculer l'estimation autocohérente, le nombre d'itérations requises pour trouver les paramètres d'écrouissage associés à chaque phase et le nombre de pas de chargement. Les courbes données en **figure 5.27** ont été obtenues, suivant le maillage utilisé et l'extension non-linéaire adoptée, en quelques minutes ou quelques heures. On peut craindre que le temps de calcul pour un modèle tridimensionnel utilisant un maillage de finesse comparable à celle du maillage bidimensionnel ayant conduit à une solution acceptable et donc avec près de 100000 degrés de liberté, ne se compte en semaines ou en mois, même avec un ordinateur très performant.

Ceci interdit *a fortiori* d'envisager une mise en œuvre pratique de l'extension complète, classique ou modifiée. Précisons toutefois que l'application de ses principes à une approche numérique par éléments finis consisterait à utiliser une valeur distincte des modules sécants en chaque point de Gauss. Cette valeur serait associée à la déformation en ce point si l'extension classique est adoptée et pourrait être calculée à partir d'une seule résolution linéaire à chaque itération. En revanche, si l'extension modifiée est adoptée, le module sécant serait associé au paramètre  $P$  calculé selon (5.38) en prenant pour domaine  $V(\underline{x})$  celui associé au point de Gauss considéré. Le calcul numérique des dérivées nécessiterait autant de calculs linéaires que de points de Gauss dans les motifs, ce qui n'est assurément pas raisonnable. . . Dans l'état actuel des choses, il est donc prématuré d'envisager d'utiliser la procédure Macao pour aborder des comportements non-linéaires, en tous cas au moyen des algorithmes adoptés pour traiter ces non-linéarités avec le modèle mnPh.

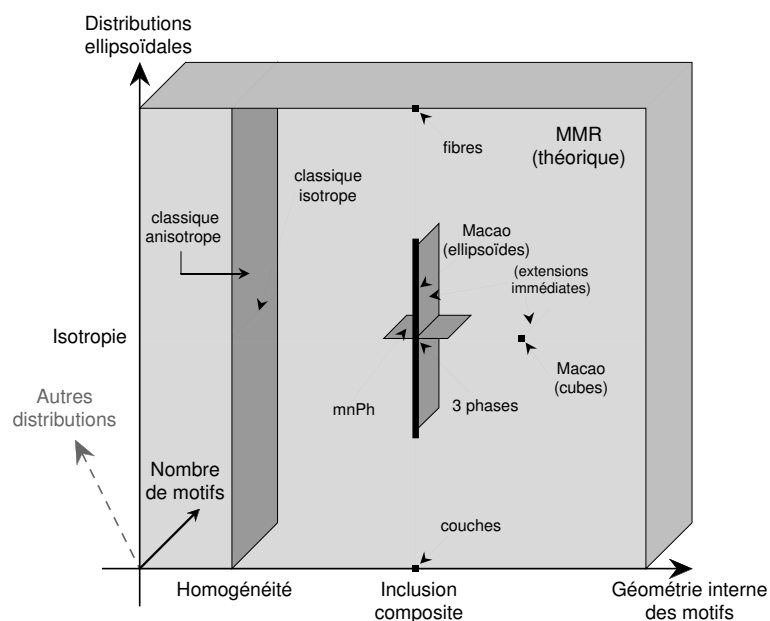
Ceci n'exclut toutefois pas d'utiliser les principes généraux exposés au paragraphe **5.4.A**. Mais il faudra pour cela mieux maîtriser le calcul des paramètres d'écrouissage en contrôlant mieux le phénomène de multiplication des erreurs décrit plus haut, par exemple en combinant une technique d'éléments finis en déplacement à une technique fondée sur le principe de l'énergie complémentaire. L'utilisation de techniques numériques plus performantes que la méthode des éléments finis devra aussi être envisagée.

Les problèmes à résoudre ne se limitent toutefois pas, loin s'en faut, à des difficultés numériques. Les principes de l'extension non-linéaire présentés au paragraphe **5.4.A** ne s'appliquent qu'à des situations bien particulières : celles de composites isotropes dont le comportement non linéaire est réversible et décrit par une courbe d'écrouissage unique. Il s'agit bien là du cadre général de ce travail, présenté au paragraphe **1.1**. Il permet de décrire en première approximation le comportement élasto-plastique macroscopique d'un grand nombre de matériaux. Il est en revanche notoirement insuffisant pour aborder des comportements microscopiques aussi complexes que la plasticité cristalline. C'est pourtant à cette échelle que des modèles tels que ceux que nous avons proposés ici trouvent un terrain naturel d'application. Aborder de tels comportements locaux nécessitera de mettre au point des formulations non-linéaires plus riches que celles présentées ici, probablement fondées sur une approche incrémentale capable d'intégrer l'histoire des matériaux à l'échelle locale. Le traitement rigoureux et complet de ce problème est certainement l'un des défis les plus audacieux que la créativité des micromécaniciens devra relever dans les années à venir.

# Conclusions générales

Le bilan que l'on peut établir à l'issue de ces quelques années de recherche résumées dans cet ouvrage comporte autant de questions qu'il apporte de réponses.

Un rapide coup d'œil vers le passé permet d'apprécier le chemin parcouru. Le point de départ de notre travail était une étude expérimentale sur des matériaux biphasés dont on a tenté tant bien que mal de faire varier les paramètres morphologiques microstructuraux pour mettre en évidence leur effet sur le comportement mécanique, tant à l'échelle macroscopique que microscopique. L'analyse détaillée de mesures de déformations locales a permis de mettre en évidence, au moins qualitativement, l'influence à cette échelle des paramètres de distribution des phases. Les modèles micromécaniques disponibles se sont avérés incapables de rendre compte des phénomènes observés, principalement à cause de la pauvreté de l'information morphologique qu'ils prennent en compte. Une première tentative d'enrichissement a conduit au modèle des sphères composites multicouches. Ce premier modèle à « paramètres morphologiques variables » bénéficie d'une expression semi-analytique qui rend sa mise en œuvre très souple et performante et permet une extension aux comportements non-linéaires. Les biphasés étudiés restent toutefois en dehors du domaine morphologique qu'il permet d'aborder.



*Diagramme synthétique des domaines morphologiques explorés*

La seconde tentative, plus audacieuse et générale, a consisté à refondre complètement l'approche théorique de la description des milieux aléatoires linéaires, grâce notamment à la notion de Motif Morphologique Représentatif. Son résultat est d'abord une vision unifiée, clarifiée et pour l'essentiel rigoureuse d'un grand nombre de modèles antérieurs, mais aussi et surtout une porte ouverte sur un « territoire morphologique » beaucoup plus vaste que celui qu'ont permis d'apercevoir tous les modèles antérieurs et dont la figure ci-dessus donne une carte schématique.

L'exploration systématique de ce domaine théorique reste pour l'essentiel à entreprendre et elle

ne pourra se faire qu'au prix de l'approximation et de la lourdeur des méthodes numériques. Nous avons établi la viabilité d'une approche par la méthode des éléments finis pour des microstructures de morphologies pas trop complexes mais néanmoins bien représentatives de situations réelles et pour des comportements linéaires. Des « expéditions morphologiques » plus téméraires permettront certainement de découvrir d'autres contrées. . .

Ces difficultés numériques ne constituent toutefois pas les barrières les plus hautes à franchir pour rendre l'approche initiée dans ce travail réellement viable. Le domaine représenté ci-dessus est encore très loin de couvrir l'ensemble des morphologies possibles pour les milieux hétérogènes. Les distributions ellipsoïdales ne sont par exemple qu'une classe particulière des distributions envisageables en pratique. Il est fort probable aussi que les morphologies des matériaux biphasés étudiés au début de ce travail n'appartiennent toujours pas au domaine couvert. En particulier les morphologies à phases co-continues sont difficiles à représenter par des motifs tels que nous les avons définis. Il faudra donc certainement encore enrichir la description morphologique sous-jacente à la démarche, notamment en élargissant la notion de motif.

Le second problème à traiter est celui de la construction d'une description par motifs, conforme à la définition adoptée dans ce travail ou éventuellement plus sophistiquée, à partir d'une microstructure réelle. Nous avons montré que cette opération est possible pour des microstructures très simples, telles que celle des composites à renforts particuliers tous identiques. La question reste en revanche ouverte pour des morphologies plus riches telles que celles des matériaux biphasés modèles testés au début de notre travail et *a fortiori* pour des matériaux industriels.

La dernière difficulté qu'il convient enfin de rappeler est celle d'une véritable extension aux comportements non-linéaires des modèles linéaires. Elle n'est pas spécifique de l'approche proposée ici mais devra être résolue pour transformer les modèles micromécaniques de changement d'échelle en véritables outils systématiques de prévision et d'optimisation.

---

# Annexes



# Annexe A

## Sphère creuse élasto-plastique sous pression

Le problème de la sphère creuse élasto-plastique sous pression monotone croissante admet une solution analytique exacte. Nous la comparons à des solutions approchées faisant appel à des modules de cisaillement sécants associés à tout ou partie de la structure. Cette comparaison est effectuée tant du point de vue de la réponse globale de la structure, de son comportement mécanique moyen, que de sa réponse locale en terme d'hétérogénéités de contraintes et de déformations. Elle fournit quelques éléments d'appréciation de la pertinence des méthodes d'extension non linéaire des modèles d'homogénéisation élastiques.

La première solution approchée fait appel à un module sécant associé à toute la structure, dépendant de l'état mécanique moyen de cette dernière. Ce dernier est caractérisé par la moyenne de l'équivalent de la déformation totale locale, conformément à la première modification de l'extension classique proposée dans ce travail, ou par le second moment de cette déformation locale, conformément à la seconde modification envisagée et proposée par d'autres auteurs.

Dans une seconde approche, deux modules sont utilisés ; le premier, élastique, est associé à la zone externe de la sphère non plastifiée et le second, sécant, est associé à la zone interne. Le rayon séparant ces deux zones évolue en fonction du chargement. Les deux extensions sont également considérées.

Une dernière approche utilise un module sécant local, dépendant du rayon de la sphère ; dans ce cas les deux extensions coïncident.

### A.1 Notations et relations générales

La sphère est délimitée par les rayons externe  $R_e$  et interne  $R_i$ . On considère les solutions à symétrie sphérique, rapportées à un système de coordonnées sphérique  $(r, \theta, \phi)$  de repère orthonormé associé  $(\underline{U}_r, \underline{U}_\theta, \underline{U}_\phi)$  (figure A.1). Le déplacement est de la forme  $\underline{u}(r) = u(r)\underline{U}_r$  ; il est continu et dans l'hypothèse des petites perturbations, la déformation linéarisée s'écrit, sur tout domaine où  $u$  est continument différentiable :

$$\underline{\epsilon}(r) = \epsilon_{rr}\underline{U}_r \otimes \underline{U}_r + \epsilon_{\theta\theta}(\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi) \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{du}{dr}\underline{U}_r \otimes \underline{U}_r + \frac{u}{r}(\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi). \quad (\text{A.2})$$

La contrainte  $\underline{\sigma}$  est statiquement admissible avec des forces de volume nulles et les pressions externe  $p_e$  et interne  $p_i$ . Sur tout domaine où  $\underline{\sigma}$  est continument différentiable, on a donc

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

et,  $[[f]]$  désignant le saut d'une grandeur  $f$  au passage d'une surface de discontinuité de normale  $\underline{n}$ ,

$$[[\underline{\sigma}]] \cdot \underline{n} = 0. \quad (\text{A.4})$$



Sur les bords de la sphère creuse :

$$\underline{\underline{\sigma}}(R_e) \cdot \underline{U}_r = -p_e \underline{U}_r, \quad (\text{A.5})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(R_i) \cdot \underline{U}_r = -p_i \underline{U}_r. \quad (\text{A.6})$$

Compte tenu de la symétrie sphérique, les surfaces de discontinuité sont nécessairement sphériques et  $\underline{\underline{\sigma}}$  est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \underline{U}_r \otimes \underline{U}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) (\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi). \quad (\text{A.7})$$

Les relations précédentes se résument alors à :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$|[\sigma_{rr}]| = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{rr}(R_e) = -p_e, \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{rr}(R_i) = -p_i. \quad (\text{A.11})$$

Le comportement élastique est linéaire et isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \left[ \underline{\underline{\epsilon}}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}^e) \underline{\underline{I}} \right] + k \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}^e) \underline{\underline{I}}, \quad (\text{A.12})$$

où  $k$  et  $\mu$  sont les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau et  $\underline{\underline{\epsilon}}^e$  la déformation élastique. Pour le comportement en plasticité, on adopte un critère de Tresca avec écoulement plastique normal et écrouissage isotrope linéaire de module  $H$ .  $\sigma_0$  désigne la limite élastique initiale et on définit la contrainte et déformation équivalentes par :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sup_{i \neq j} |\sigma_i - \sigma_j| \quad \text{et} \quad \epsilon^{\text{eq}} = \frac{2}{3} \sup_{i \neq j} |\epsilon_i - \epsilon_j|. \quad (\text{A.13})$$

où  $\sigma_i$  et  $\epsilon_i$  pour  $i \in [1, 3]$  sont les contraintes et déformations principales. Compte tenu de la symétrie sphérique, ces expressions deviennent :

$$\sigma^{\text{eq}} = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| \quad \text{et} \quad \epsilon^{\text{eq}} = \frac{2}{3} |\epsilon_{rr} - \epsilon_{\theta\theta}| = \frac{2}{3} \left| \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right|. \quad (\text{A.14})$$

Le critère est de la forme :

$$\sigma^{\text{eq}} - (\sigma_0 + H \epsilon^{\text{peq}}) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \epsilon^{\text{peq}} = \int d\epsilon^{\text{peq}}, \quad (\text{A.15})$$

où  $d\epsilon^{\text{peq}}$  est l'équivalent de l'incrément de déformation plastique. Remarquons qu'un critère de Von Mises fournit exactement les mêmes relations pour les grandeurs équivalentes et aboutit donc aux mêmes résultats. Ceci est dû à la forme du champ de contrainte qui localement est une traction simple, à une composante isostatique près. Par ailleurs, l'absence de décharge et la proportionnalité du déviateur du champ de contrainte local assurent qu'un modèle avec écrouissage cinématique aurait fourni les mêmes résultats.

Les modules sécants dans le domaine non linéaire dépendent de l'état de déformation équivalent  $\epsilon^{\text{eq}}$  selon (figure A.2) :

$$k^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}}) = k \quad (\text{A.16})$$

$$\mu^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}}) = \mu \quad \text{si} \quad \epsilon^{\text{eq}} \leq \frac{\sigma_0}{3\mu} \quad (\text{A.17})$$

$$\mu^{\text{sc}}(\epsilon^{\text{eq}}) = \mu^{\text{tg}} \left( 1 + \frac{\sigma_0}{H \epsilon^{\text{eq}}} \right) \quad \text{si} \quad \epsilon^{\text{eq}} > \frac{\sigma_0}{3\mu}. \quad (\text{A.18})$$

où  $\mu^{\text{tg}} = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{3}{H} \right)^{-1}$  est le module de cisaillement tangent constant du matériau en écoulement plastique.

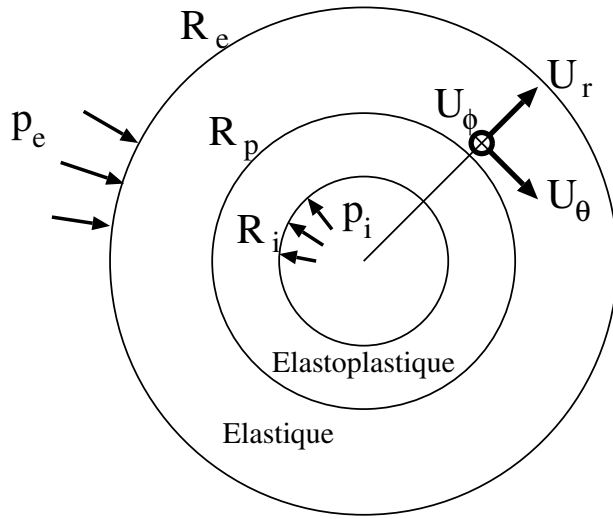


Figure A.1 : Géométrie

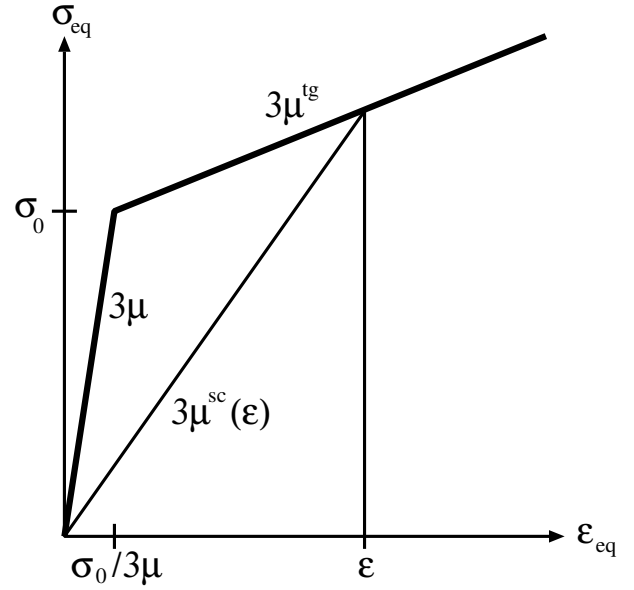


Figure A.2 : Modules sécants

Précisons que la moyenne de toute grandeur *scalaire*  $f$  dans le volume élémentaire (une fibre) déterminé par un angle solide élémentaire d'orientation  $(\theta, \phi)$  et compris entre deux rayons  $r_1$  et  $r_2$  s'obtient par :

$$\langle f \rangle_{r_1}^{r_2} = \frac{3 \int_{r_1}^{r_2} f r^2 dr}{r_2^3 - r_1^3} \quad (\text{A.19})$$

et qu'elle ne dépend pas de  $(\theta, \phi)$ . La moyenne sur toute la structure vaut donc  $\langle f \rangle = \langle f \rangle_{R_i}^{R_e}$ . La moyenne du tenseur de déformation sur une telle fibre vaut :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{r_1}^{r_2} = \langle \epsilon_{rr} \rangle_{r_1}^{r_2} \underline{U}_r \otimes \underline{U}_r + \langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle_{r_1}^{r_2} [\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi]. \quad (\text{A.20})$$

et son équivalent est :

$$\left[ \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{r_1}^{r_2} \right]^{\text{eq}} = \frac{2}{3} \left| \langle \epsilon_{rr} \rangle_{r_1}^{r_2} - \langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle_{r_1}^{r_2} \right| \quad (\text{A.21})$$

Des relations similaires s'appliquent à la contrainte. Les déviateurs de tous les tenseurs  $\underline{t}$  de contrainte ou de déformation locaux sont tous proportionnels (avec un signe constant) au tenseur  $\underline{U}_r \otimes \underline{U}_r - \frac{1}{2} [\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi]$ , si bien que les moyennes sur une fibre de leurs équivalents sont égaux aux équivalents de leurs moyennes sur la même fibre :

$$\left[ \langle \underline{t} \rangle_{r_1}^{r_2} \right]^{\text{eq}} = \langle t^{\text{eq}} \rangle_{r_1}^{r_2} \quad (\text{A.22})$$

La moyenne sur toute la structure se limite en revanche à la partie sphérique du fait de la symétrie sphérique du problème. En particulier, du fait de l'incompressibilité plastique, la contrainte moyenne sur la sphère est égale à la déformation moyenne multipliée par  $3k$ .

## A.2 Solution exacte

### A.2.A Solution élastique

En l'absence de déformation plastique, la combinaison de (A.2), (A.8) et (A.12) fournit l'équation de Navier :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2du}{rdr} - \frac{2u}{r^2} = 0, \quad (\text{A.23})$$

dont la solution générale dépend de deux constantes  $a$  et  $b$  :

$$u(r) = ar + \frac{b}{r^2}. \quad (\text{A.24})$$

On en tire :

$$\epsilon_{rr} = a - \frac{2b}{r^3} \quad \epsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^3} \quad (\text{A.25})$$

$$\sigma_{rr} = 3ka - 4\mu \frac{b}{r^3} \quad \sigma_{\theta\theta} = 3ka + 2\mu \frac{b}{r^3}. \quad (\text{A.26})$$

Les constantes  $a$  et  $b$  sont déterminées par les conditions aux limites (A.10) et (A.11) :

$$a = \frac{1}{3k} \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4\mu} \frac{p_i - p_e}{R_i^{-3} - R_e^{-3}}. \quad (\text{A.27})$$

Les équivalents de la contrainte et la déformation locales sont respectivement :

$$\epsilon^{\text{eq}} = \frac{2|b|}{r^3} = \frac{1}{2\mu r^3} \frac{|p_e - p_i|}{R_i^{-3} - R_e^{-3}} \quad \text{et} \quad \sigma^{\text{eq}} = \frac{6\mu|b|}{r^3} = \frac{3}{2r^3} \frac{|p_e - p_i|}{R_i^{-3} - R_e^{-3}}. \quad (\text{A.28})$$

Les équivalents de la contrainte et la déformation moyennes sur une fibre valent :

$$\left[ \langle \epsilon \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = \frac{3}{2} \frac{|p_e - p_i|}{\mu} \frac{\ln R_e - \ln R_i}{(R_e^3 - R_i^3)(R_i^{-3} - R_e^{-3})} \quad (\text{A.29})$$

$$\left[ \langle \sigma \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = \frac{9}{2} |p_e - p_i| \frac{\ln R_e - \ln R_i}{(R_e^3 - R_i^3)(R_i^{-3} - R_e^{-3})}. \quad (\text{A.30})$$

### A.2.B Première plasticité

La solution élastique établie ci-dessus s'applique jusqu'à ce que le critère soit atteint en un point quelconque de la sphère creuse :  $\frac{6\mu|b|}{r^3} = \sigma_0$ . Il est d'abord atteint sur le bord intérieur, pour une différence de pression de :

$$|p_e - p_i| = \Delta P_1 = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^3 \right] \sigma_0. \quad (\text{A.31})$$

Ni le sens du différentiel de pression, ni la pression moyenne n'ont d'effet sur l'initiation de l'écoulement plastique.

### A.2.C Propagation de la zone plastifiée

Après l'apparition du premier écoulement plastique, la zone plastifiée s'étend vers le bord extérieur de la sphère, à mesure que le différentiel de pression augmente. Pour satisfaire la symétrie, la limite entre les deux zones est nécessairement sphérique ; on note  $R_p$  son rayon (figure A.1). La déformation plastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  n'est plus identiquement nulle dans la zone plastifiée et compte tenu de la symétrie du problème et de l'incompressibilité plastique, elle est nécessairement de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p(r) = \epsilon^p{}_{rr}(r) \left[ \underline{U}_r \otimes \underline{U}_r - \frac{1}{2} (\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi) \right]. \quad (\text{A.32})$$

On suppose de plus que pour les chargements monotones considérés, le sens de l'écoulement plastique reste le même, si bien que la deuxième relation de (A.15) admet une forme intégrée :

$$\epsilon^p{}_{\text{eq}} = \frac{2}{3} \sup_{i \neq j} |\epsilon^p{}_i - \epsilon^p{}_j| = |\epsilon^p{}_{rr}|. \quad (\text{A.33})$$

On vérifiera ultérieurement l'admissibilité des hypothèses ci-dessus. Dans le formalisme des déformations infinitésimales, la déformation élastique s'obtient par :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p. \quad (\text{A.34})$$

En cas d'écoulement, le critère est atteint :

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = \sigma_0 + H |\epsilon^p_{rr}|. \quad (\text{A.35})$$

La loi de normalité impose que l'incrément de déformation plastique appartienne au sous-différentiel  $\partial f / \partial \sigma$  du critère  $f$ . Dans le cas présent, ceci donne :

$$d\underline{\epsilon}^p = de \nu (U_r \otimes U_r - g U_\theta \otimes U_\theta - h U_\phi \otimes U_\phi) \quad (\text{A.36})$$

où  $g$  et  $h$  sont des réels positifs de somme égale à l'unité,  $de$  est un réel positif quelconque et  $\nu$  désigne le signe de  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ . Du fait de la symétrie sphérique,  $g = h = 1/2$ . La déformation plastique  $d\epsilon^p_{rr}$  est donc du signe de  $\nu$ . Par intégration et avec l'hypothèse de monotonie de l'écoulement, elle conserve ce signe, qu'on suppose de plus être le même en tout point de la zone plastifiée. Les relations (A.2), (A.12), (A.34) et (A.35) permettent d'exprimer la déformation plastique en fonction du déplacement :

$$\epsilon^p_{rr} = \frac{\mu^{\text{tg}}}{H} \left[ \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} - \frac{\nu\sigma_0}{2\mu} \right] \quad (\text{A.37})$$

Les relations (A.2), (A.8), (A.12), (A.32), (A.34) et (A.37) permettent alors d'établir l'équation différentielle régissant le déplacement dans la zone où il y a écoulement plastique :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2du}{rdr} - \frac{2u}{r^2} + \frac{6\nu\sigma_0}{\beta r} = 0 \quad (\text{A.38})$$

avec

$$\beta = 3k + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{H}{3\mu} (4\mu + 3k). \quad (\text{A.39})$$

La solution générale de cette équation dépend de deux constantes  $a_p$  et  $b_p$  :

$$u(r) = a_p r + \frac{b_p}{r^2} - \frac{2\nu\sigma_0}{\beta} r \ln r. \quad (\text{A.40})$$

On en tire :

$$\epsilon_{rr} = a_p - \frac{2b_p}{r^3} - \frac{2\nu\sigma_0}{\beta} (1 + \ln r), \quad \epsilon_{\theta\theta} = a_p + \frac{b_p}{r^3} - \frac{2\nu\sigma_0}{\beta} \ln r, \quad (\text{A.41})$$

$$\epsilon^p_{rr} = \frac{-6\mu^{\text{tg}} b_p}{H r^3} - \frac{\nu\sigma_0 \alpha}{H\beta}, \quad (\text{A.42})$$

$$\sigma_{rr} = 3ka_p - 4\mu^{\text{tg}} \frac{b_p}{r^3} - \frac{6k\nu\sigma_0}{\beta} \ln r, \quad \sigma_{\theta\theta} = 3ka_p + 2\mu^{\text{tg}} \frac{b_p}{r^3} - \frac{3k\nu\sigma_0}{\beta} (1 + 2 \ln r). \quad (\text{A.43})$$

Par ailleurs, le déplacement dans la zone externe vérifie toujours les équations établies dans le paragraphe A.2.A ; il est donc de la forme (A.24).

Les quatre constantes  $a$ ,  $b$ ,  $a_p$  et  $b_p$  sont déterminées par les deux conditions aux limites (A.10) et (A.11) et les conditions de continuité à l'interface du déplacement et du vecteur contrainte (A.9) :

$$\begin{pmatrix} 3k & -4\mu R_e^{-3} & 0 & 0 \\ 3k & -4\mu R_p^{-3} & -3k & 4\mu^{\text{tg}} R_p^{-3} \\ 1 & R_p^{-3} & -1 & R_p^{-3} \\ 0 & 0 & 3k & -4\mu^{\text{tg}} R_i^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ a_p \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_e \\ -\frac{6k\nu\sigma_0}{\beta} \ln R_p \\ -\frac{2\nu\sigma_0}{\beta} \ln R_p \\ -p_i + \frac{6k\nu\sigma_0}{\beta} \ln R_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

La solution de ce système d'équations est :

$$a = -\frac{p_i}{3k} - \frac{p_e - p_i}{3k\gamma} \left[ \frac{3k}{R_p^3} + \frac{\alpha}{R_i^3} \right] + \frac{2\nu\sigma_0}{\gamma} \frac{\ln R_p - \ln R_i}{R_e^3}, \quad (\text{A.45})$$

$$b = \frac{\beta p_i - p_e}{\gamma} \frac{1}{4\mu} + \frac{3k\nu\sigma_0}{2\mu\gamma} \ln \frac{R_p}{R_i}, \quad (\text{A.46})$$

$$a_p = -\frac{p_i}{3k} + \frac{\alpha}{3k\gamma} \frac{p_i - p_e}{R_i^3} + \frac{2\nu\sigma_0}{\beta} \ln R_i + \frac{2\nu\sigma_0 \alpha}{\beta\gamma} \frac{\ln R_p - \ln R_i}{R_i^3}, \quad (\text{A.47})$$

$$b_p = \frac{\alpha}{4\mu^{\text{tg}}\gamma} \left[ p_i - p_e + \frac{6k\nu\sigma_0}{\beta} \ln \frac{R_p}{R_i} \right], \quad (\text{A.48})$$

avec

$$\gamma = 3k \left( R_p^{-3} - R_e^{-3} \right) + \alpha \left( R_i^{-3} - R_e^{-3} \right). \quad (\text{A.49})$$

La frontière entre zone plastifiée et zone non plastifiée est caractérisée par la nullité de la déformation plastique en  $r = R_p$  :

$$\frac{6b_p}{R_p^3} + \frac{\nu\sigma_0\alpha}{\mu^{\text{tg}}\beta} = 0. \quad (\text{A.50})$$

L'explicitation de cette relation fournit l'équation suivante qui détermine par inversion  $R_p$  en fonction du chargement  $|p_e - p_i|$  :

$$\frac{3}{2} \frac{|p_e - p_i|}{\sigma_0} = \frac{9k}{\beta} \ln \frac{R_p}{R_i} + \frac{\alpha}{\beta} \left[ \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^3 - 1 \right] + 1 - \left( \frac{R_p}{R_e} \right)^3. \quad (\text{A.51})$$

Notons que ce résultat est équivalent à celui obtenu lorsqu'on exprime que le critère est atteint par la solution élastique en  $r = R_p$  :

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = -\frac{6\nu\mu b}{R_p^3} = \sigma_0 \quad (\text{A.52})$$

( $\nu$  est aussi le signe de  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$  à l'entrée en plasticité). Le rayon  $R_p$  ne dépend pas du sens du chargement. On vérifie que pour  $R_p = R_i$  cette relation coïncide avec (A.31). Pour  $R_p = R_e$ , on obtient le chargement pour lequel la plasticité débouche sur la surface externe de la sphère :

$$|p_e - p_i| = \Delta P_2 = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^3 - 1 \right] \left[ 1 - \frac{3k}{\beta} + \frac{9k \ln R_e - \ln R_i}{\beta \left( \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^3 - 1 \right)} \right] \sigma_0 \quad (\text{A.53})$$

Les relations (A.50) et (A.52) permettent de simplifier l'écriture des constantes :

$$a = \frac{-1}{3k} \left[ p_e + \frac{2}{3} \nu \sigma_0 \left( \frac{R_p}{R_e} \right)^3 \right], \quad b = -\frac{\nu \sigma_0}{6\mu} R_p^3, \quad (\text{A.54})$$

$$a_p = \frac{-1}{3k} \left[ p_i + \frac{2}{3} \frac{\nu \sigma_0}{\beta} \left[ -9k \ln R_i + \alpha \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^3 \right] \right], \quad b_p = -\frac{\nu \sigma_0 \alpha}{6\mu^{\text{tg}}\beta} R_p^3. \quad (\text{A.55})$$

$\nu$  est le signe de  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ . En début de plastification, cette grandeur est donnée par la solution élastique et vaut  $3(p_e - p_i)/(2(1 - (R_i/R_e)^3))$ , dont le signe est celui de  $p_e - p_i$ . Comme par hypothèse il n'y a pas de décharge des zones plastifiées, cette quantité ne peut s'annuler au cours du chargement et garde donc ce même signe. Il reste à vérifier que la solution obtenue est cohérente avec les hypothèses initiales. D'une part, la forme (A.32) de la déformation plastique est bien compatible avec la loi d'écoulement, comme cela a déjà été vérifié plus haut. D'autre part, l'écoulement est bien monotone : on vérifie en effet facilement que  $\epsilon^p_{rr}(r)$  est une fonction strictement monotone de  $p_e - p_i$  pour toute valeur de  $r$  dans la zone plastifiée.

Notons enfin l'expression de la contrainte et de la déformation équivalentes locales. Dans la zone plastifiée :

$$\epsilon^{\text{eq}} = \frac{\sigma_0}{3\mu} \left[ \left( 1 + 4\frac{\mu}{\beta} \right) \left( \frac{R_p}{r} \right)^3 - 4\frac{\mu}{\beta} \right] \quad \text{et} \quad \sigma^{\text{eq}} = \frac{\sigma_0}{\beta} \left[ 3k + \alpha \left( \frac{R_p}{r} \right)^3 \right] \quad (\text{A.56})$$

et dans la zone non plastifiée :

$$\epsilon^{\text{eq}} = \frac{\sigma_0}{3\mu} \left( \frac{R_p}{r} \right)^3 \quad \text{et} \quad \sigma^{\text{eq}} = \sigma_0 \left( \frac{R_p}{r} \right)^3 \quad (\text{A.57})$$

Les équivalents de la contrainte et la déformation moyennes sur une fibre s'obtiennent par intégration des composantes locales :

$$\left[ \langle \epsilon \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = \frac{\sigma_0 R_p^3}{\mu (R_e^3 - R_i^3)} \left[ 4 \frac{\mu}{\beta} \ln \frac{R_p}{R_i} - \frac{4\mu}{3\beta} \left( 1 - \left( \frac{R_i}{R_p} \right)^3 \right) + \ln \frac{R_e}{R_i} \right], \quad (\text{A.58})$$

$$\left[ \langle \sigma \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = \frac{3\sigma_0 R_p^3}{R_e^3 - R_i^3} \left[ \frac{3k}{\beta} \left( 1 - \left( \frac{R_i}{R_p} \right)^3 \right) + \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{R_p}{R_i} + \ln \frac{R_e}{R_p} \right]. \quad (\text{A.59})$$

### A.2.D Plasticité débouchante

Pour un chargement supérieur à  $\Delta P_2$ , toute la sphère est plastifiée et la solution (A.40) y est valable partout. Les constantes  $a_p$  et  $b_p$  sont déterminées par les conditions aux limites (A.10) et (A.11). On obtient :

$$a_p = \frac{1}{3k} \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3} + \frac{2\nu\sigma_0}{\beta} \frac{R_e^3 \ln R_e - R_i^3 \ln R_i}{R_e^3 - R_i^3}, \quad (\text{A.60})$$

$$b_p = \frac{1}{4\mu^{\text{tg}}} \frac{p_i - p_e}{R_i^{-3} - R_e^{-3}} + \frac{3k\nu\sigma_0}{2\mu^{\text{tg}}\beta} \frac{\ln R_e - \ln R_i}{R_i^{-3} - R_e^{-3}}. \quad (\text{A.61})$$

La contrainte et la déformation locales équivalentes s'en déduisent :

$$\epsilon^{\text{eq}} = -2\nu \frac{b_p}{r^3} - \frac{4\sigma_0}{3\beta} \quad \text{et} \quad \sigma^{\text{eq}} = -6\nu\mu^{\text{tg}} \frac{b_p}{r^3} + \frac{3k\sigma_0}{\beta} \quad (\text{A.62})$$

(les signes résultent de la définition de  $\nu$  et du sens de l'écoulement plastique). La contrainte et la déformation moyennes équivalentes sur une fibre valent :

$$\left[ \langle \epsilon \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = -6\nu b_p \frac{\ln R_e - \ln R_i}{R_e^3 - R_i^3} - \frac{4\sigma_0}{3\beta} \quad (\text{A.63})$$

$$\left[ \langle \sigma \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = -18\nu\mu^{\text{tg}} b_p \frac{\ln R_e - \ln R_i}{R_e^3 - R_i^3} + \frac{3k\sigma_0}{\beta} \quad (\text{A.64})$$

En cas de plasticité parfaite  $H$  est nul et  $b_p$  est infini : le chargement ne peut donc dépasser la valeur  $\Delta P_2$  qui vaut alors  $2 \ln \frac{R_e}{R_i} \sigma_0$ .

## A.3 Solutions avec un seul module sécant

### A.3.A Extension utilisant le moment d'ordre un

La solution élastique à une seule couche, obtenue au paragraphe A.2.A, est étendue au domaine non linéaire par l'utilisation du module sécant  $\mu^{\text{sc}}$  relatif à la valeur moyenne de la déformation équivalente sur toute la sphère. D'après (A.19) et (A.28), elle vaut :

$$\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle = \langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{R_i}^{R_e} = 6|b| \frac{\ln R_e - \ln R_i}{R_e^3 - R_i^3} \quad (\text{A.65})$$

$$= \frac{3|p_e - p_i|}{2\mu^{\text{sc}}} \frac{\ln R_e - \ln R_i}{(R_e^3 - R_i^3)(R_i^{-3} - R_e^{-3})}. \quad (\text{A.66})$$

Notons bien qu'il s'agit de la moyenne des déformations équivalentes et non pas de l'équivalent de la déformation moyenne, qu'il est d'usage d'utiliser pour l'extension classique des modèles élastiques. Ce dernier est en effet nul dans le cas présent puisque la déformation moyenne sur la sphère est une dilatation pure.  $\mu^{\text{sc}}$  vaut  $\mu$  tant que  $\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle$  reste inférieur à  $\sigma_0/3\mu$ . Cette valeur est atteinte pour un chargement valant :

$$|p_e - p_i| = \Delta P_1^{\text{sc11}} = \frac{2(R_e^3 - R_i^3)(R_i^{-3} - R_e^{-3})}{9 \ln R_e - \ln R_i} \sigma_0 = \Delta P_1 \frac{\left( \frac{R_e}{R_i} \right)^3 - 1}{3(\ln R_e - \ln R_i)}. \quad (\text{A.67})$$

Cette valeur critique est supérieure à celle obtenue lors de la résolution élasto-plastique ; les deux valeurs coïncident à la limite  $R_e/R_i \approx 1$ . Pour un chargement supérieur, le module sécant, inférieur au module élastique, est déterminé par la relation (A.18) qui permet d'éliminer  $\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle$  dans l'équation (A.66) :

$$\mu^{\text{sc}} = \left[ \frac{1}{\mu^{\text{tg}}} - \frac{2}{H} \frac{\sigma_0}{|p_e - p_i|} \frac{(R_e^3 - R_i^3)(R_i^{-3} - R_e^{-3})}{3 \ln R_e - 3 \ln R_i} \right]^{-1}. \quad (\text{A.68})$$

Les résultats du paragraphe A.2.A où l'on remplace  $\mu$  par  $\mu^{\text{sc}}$  ci-dessus fournissent ensuite toutes les autres grandeurs mécaniques en fonction du chargement. Notons que lorsque l'écroutissement est nul,  $\mu^{\text{sc}}$  est indéterminé pour le chargement critique  $\Delta P_1^{\text{sc11}}$  et nul pour un chargement supérieur : la structure ne peut supporter un différentiel de pression supérieur à cette valeur. Notons que  $\Delta P_1^{\text{sc11}}$  est aussi supérieur à  $\Delta P_2$  dans ce cas.

### A.3.B Extension utilisant le moment d'ordre deux

On associe ici le module sécant  $\mu^{\text{sc}}$  au moment d'ordre deux de l'équivalent de la déformation élastique locale qui d'après (A.19) et (A.28) s'écrit :

$$\sqrt{\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle} = \sqrt{\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_{R_i} \frac{R_e}{R_i}} = \frac{2|b|}{(R_i R_e)^{3/2}} \quad (\text{A.69})$$

$$= \frac{|p_e - p_i|}{2\mu^{\text{sc}}} \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^{3/2} - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^{3/2} \right]^{-1}. \quad (\text{A.70})$$

La solution élastique reste valable tant que  $\sqrt{\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle}$  reste inférieur à  $\sigma_0/3\mu$ , c'est-à-dire pour des chargements inférieurs à :

$$|p_e - p_i| = \Delta P_1^{\text{sc12}} = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^{3/2} - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^{3/2} \right] \sigma_0 = \Delta P_1 \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^{3/2}. \quad (\text{A.71})$$

Cette valeur critique est également supérieure à la valeur exacte, les deux coïncidant à la limite  $R_e/R_i \approx 1$ . Toutefois cette valeur est inférieure à celle obtenue précédemment puisque  $\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle \geq \langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle^2$ . Comme précédemment, le module sécant pour tout chargement supérieur est déterminé par la relation (A.18) :

$$\mu^{\text{sc}} = \left[ \frac{1}{\mu^{\text{tg}}} - \frac{2}{H} \frac{\sigma_0}{|p_e - p_i|} \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^{3/2} - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^{3/2} \right] \right]^{-1} \quad (\text{A.72})$$

Les autres grandeurs mécaniques s'en déduisent. En cas d'écroutissement nul,  $\Delta P_1^{\text{sc12}}$  est la charge maximale supportable par la structure. Elle est aussi supérieure à  $\Delta P_2$ .

## A.4 Solutions avec deux modules sécants

Dans cette solution approchée plus élaborée, on décompose la sphère en deux zones. La première, non-plastifiée, conserve ses propriétés élastiques alors que le comportement de la seconde où la plasticité est apparue est caractérisé par des modules sécants associés à l'état mécanique moyen de cette zone. Du fait de la symétrie sphérique, la frontière entre les deux zones est une sphère de rayon également désigné par  $R_p$  par analogie avec la solution élasto-plastique. Pour résoudre ce problème nous considérons d'abord le problème d'une sphère creuse constituée de deux matériaux distincts ayant le même module de compressibilité.

### A.4.A Solutions élastique avec deux couches

Soit comme précédemment  $\mu$  et  $k$  les modules du matériau externe et  $\mu^{\text{sc}}$  et  $k$  ceux du matériau interne. Le champ de déplacement obéit dans ce cas aussi localement à l'équation différentielle (A.23)

et est donc de la forme (A.24). Du fait de la discontinuité en  $R_p$ , il convient de distinguer les constantes des deux couches, notées  $a$  et  $b$  pour la couche externe et  $a_p$  et  $b_p$  pour la couche interne. Elle sont déterminées par les conditions aux limites (A.10) et (A.11) et par les conditions de continuité de  $u$  et de  $\sigma_{rr}$  en  $R_p$  :

$$\begin{pmatrix} 3k & -4\mu R_e^{-3} & 0 & 0 \\ 1 & R_p^{-3} & -1 & -R_p^{-3} \\ 3k & -4\mu R_p^{-3} & -3k & 4\mu R_p^{-3} \\ 0 & 0 & 3k & -4\mu^{\text{sc}} R_i^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ a_p \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_e \\ 0 \\ 0 \\ -p_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.73})$$

Ce système d'équations a pour solution :

$$a = -\frac{3k \left[ p_e - p_i \left( \frac{R_p}{R_e} \right)^3 \right] + \frac{\mu^{\text{sc}}}{\mu} \left[ 3k p_e \left( \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^3 - 1 \right) + 4\mu R_p^3 \left( \frac{p_e}{R_i^3} - \frac{p_i}{R_e^3} \right) \right]}{3k\Delta}, \quad (\text{A.74})$$

$$b = -\frac{R_p^3(p_e - p_i)(4\mu^{\text{sc}} + 3k)}{4\mu\Delta}, \quad (\text{A.75})$$

$$a_p = -\frac{3k p_i \left[ 1 - \left( \frac{R_p}{R_e} \right)^3 \right] + \frac{\mu^{\text{sc}}}{\mu} \left[ 3k \left( p_e \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^3 - p_i \right) + 4\mu R_p^3 \left( \frac{p_e}{R_i^3} - \frac{p_i}{R_e^3} \right) \right]}{3k\Delta}, \quad (\text{A.76})$$

$$b_p = -\frac{R_p^3(p_e - p_i)(4\mu + 3k)}{4\mu\Delta}, \quad (\text{A.77})$$

avec

$$\Delta = 3k \left[ 1 - \left( \frac{R_p}{R_e} \right)^3 \right] + \frac{\mu^{\text{sc}}}{\mu} \left[ 3k \left( \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^3 - 1 \right) + 4\mu R_p^3 \left( R_i^{-3} - R_e^{-3} \right) \right]. \quad (\text{A.78})$$

La déformation et la contrainte équivalentes locales sont toujours données par les relations :

$$\epsilon^{\text{eq}} = \frac{2|b_i|}{r^3} \quad \text{et} \quad \sigma^{\text{eq}} = \frac{6\mu|b_i|}{r^3} \quad (\text{A.79})$$

où  $b_i$  vaut  $b$  pour  $r \geq R_p$  et  $b_p$  sinon. La contrainte et la déformation moyennes équivalentes sur une fibre sont données par :

$$\left[ \langle \epsilon \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = \frac{6}{R_e^3 - R_i^3} \left| b_p \ln \frac{R_p}{R_i} + b \ln \frac{R_e}{R_p} \right|, \quad (\text{A.80})$$

$$\left[ \langle \sigma \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = \frac{12}{R_e^3 - R_i^3} \left| b_p \mu^{\text{sc}} \ln \frac{R_p}{R_i} + b \mu \ln \frac{R_e}{R_p} \right|. \quad (\text{A.81})$$

#### A.4.B Extension utilisant le moment d'ordre un

On associe ici le module sécant de la couche interne plastifiée au moment d'ordre un de la déformation équivalente locale sur cette couche, qui vaut :

$$\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_p = \langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{R_i}^{R_p} = 6|b_p| \frac{\ln R_p - \ln R_i}{R_p^3 - R_i^3} \quad (\text{A.82})$$

( $\langle f \rangle_p$  désigne la moyenne d'une grandeur  $f$  sur la zone plastifiée). La frontière  $R_p$  est déterminée par le fait que le matériau dans la zone élastique atteint la limite élastique sur cette frontière.  $R_p$  vaut  $R_i$  tant que le chargement reste inférieur à une valeur critique  $DP_1^{\text{sc}21}$ , correspondant à l'obtention de la limite élastique sur la frontière interne  $R_i$ . Cette limite est bien sûr la même que celle obtenue dans le calcul élasto-plastique:  $DP_1^{\text{sc}21} = DP_1$ . Pour des chargement supérieurs, la frontière  $R_p$  se propage et atteint le bord extérieur de la sphère pour la valeur critique  $DP_2^{\text{sc}21}$ . Au delà, la solution proposée dans ce paragraphe coïncide avec celle du paragraphe A.3.A.  $R_p$  est ainsi déterminé par :

$$\frac{6\mu|b|}{R_p^3} = \sigma_0. \quad (\text{A.83})$$



Utilisant (A.18), (A.82), (A.83) et la relation  $b_p(3k + 4\mu^{sc}) = b(3k + 4\mu)$ , on montre facilement que :

$$\mu^{sc}(R_p) = \mu^{tg} \frac{\alpha \ln \frac{R_p}{R_i} + k \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_p} \right)^3 \right]}{\alpha \ln \frac{R_p}{R_i} - \frac{4}{3} \mu^{tg} \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_p} \right)^3 \right]}. \quad (\text{A.84})$$

L'explicitation de la valeur de  $b$  (A.75) dans (A.83) fournit une relation entre  $R_p$  et  $|p_e - p_i|$  :

$$|p_e - p_i| = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{\Delta(R_p)}{4\mu^{sc}(R_p) + 3k} \quad (\text{A.85})$$

Son inversion permet d'obtenir l'ensemble des grandeurs mécaniques en fonction du chargement. La valeur critique  $DP_2^{sc21}$  est obtenue pour  $R_p = R_e$ . Par (A.75) et (A.83), on obtient d'abord :

$$DP_2^{sc21} = \frac{2}{3} \sigma_0 \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^3 - 1 \right] \frac{\frac{3k}{\mu} + 4}{\mu^{sc}(R_e) + 4}. \quad (\text{A.86})$$

Avec l'expression (A.84), on en tire :

$$DP_2^{sc21} = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^3 - 1 \right] \left[ 1 - \frac{3k}{\beta} + \frac{k}{\beta} \frac{1 - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^3}{\ln R_e - \ln R_i} \right] \sigma_0. \quad (\text{A.87})$$

On peut vérifier que  $DP_2^{sc21} \geq DP_2$ , l'égalité étant obtenue à la limite  $R_e/R_i \approx 1$  et que lorsque  $H$  est nul, on retrouve la valeur critique  $DP_1^{sc11}$ .

#### A.4.C Extension utilisant le moment d'ordre deux

On associe maintenant le module sécant de la zone plastifiée au moment d'ordre deux de la déformation équivalente locale :

$$\sqrt{\langle \epsilon^{eq2} \rangle_p} = \sqrt{\langle \epsilon^{eq2} \rangle_{R_i}^{R_p}} = \frac{2|b_p|}{(R_i R_p)^{3/2}}. \quad (\text{A.88})$$

L'initiation de la plasticité s'opère comme précédemment, mais la propagation est différente. La relation entre  $\mu^{sc}$  et  $R_p$  s'écrit maintenant :

$$\mu^{sc}(R_p) = \mu^{tg} \frac{\alpha \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^{3/2} + 3k}{\alpha \left( \frac{R_p}{R_i} \right)^{3/2} - 4\mu^{tg}}. \quad (\text{A.89})$$

Celle entre  $R_p$  et  $|p_e - p_i|$  s'en déduit par (A.85) et permet d'obtenir l'ensemble des grandeurs mécaniques en fonction des pressions. Le chargement à partir duquel toute la sphère est plastifiée s'obtient avec (A.86) et (A.89) :

$$DP_2^{sc22} = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{R_e}{R_i} \right)^3 - 1 \right] \left[ 1 - \frac{3k}{\beta} \left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^{3/2} \right] \right] \sigma_0. \quad (\text{A.90})$$

On peut vérifier que  $DP_2^{sc21} \geq DP_2^{sc22} \geq DP_2$ , l'égalité étant obtenue à la limite  $R_e/R_i \approx 1$ . Par ailleurs, lorsque  $H$  est nul,  $DP_2^{sc22} = DP_1^{sc12}$ .

## A.5 Solution avec des modules sécants locaux

Les modules sécant  $\mu^{\text{sc}}$  sont ici déterminés par la valeur locale de la déformation équivalente :

$$\epsilon^{\text{eq}} = \frac{2}{3} \left| \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right| = \frac{2}{3} \nu_1 \left( \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \quad (\text{A.91})$$

Le rayon  $R_p$  est déterminé comme précédemment.

où  $\nu_1$  est le signe  $\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}$ . Les relations (A.2), (A.12) où les constantes élastiques ont été remplacées par les modules sécants, (A.18) qui définit ces derniers en fonction de la grandeur ci-dessus et (A.8) fournissent l'équation différentielle régissant le déplacement dans le domaine où la déformation équivalente est supérieure à la valeur critique  $\sigma_0/3\mu$ . Cette équation est identique à celle obtenue dans le calcul élasto-plastique (A.38), à condition de prendre  $\nu_1 = -\nu$ , ce qui est tout à fait cohérent avec la définition de ces variables. Dans la zone où la déformation équivalente est inférieure à la valeur critique, la solution élastique s'applique. La frontière entre les deux zones est déterminée par  $\epsilon^{\text{eq}} = \sigma_0/3\mu$ , ce qui est équivalent au critère  $\sigma^{\text{eq}} = \sigma_0$  utilisé pour déterminer  $R_p$  dans le calcul élasto-plastique.

L'approche utilisant les modules sécants locaux fournit donc la même solution que le calcul élasto-plastique exact. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où le chargement est radial pour sa partie déviatorique : en tout point de la sphère et pour toute valeur du chargement, la partie déviatorique de la contrainte est proportionnelle à  $U_r \otimes U_r - 1/2(U_\theta \otimes U_\theta + U_\phi \otimes U_\phi)$ . Dans une telle situation, l'approche en modules sécants est tout à fait légitime.

## A.6 Résultats et comparaisons

Les valeurs suivantes des divers paramètres ont été utilisées pour tracer les courbes (les unités sont arbitraires) :

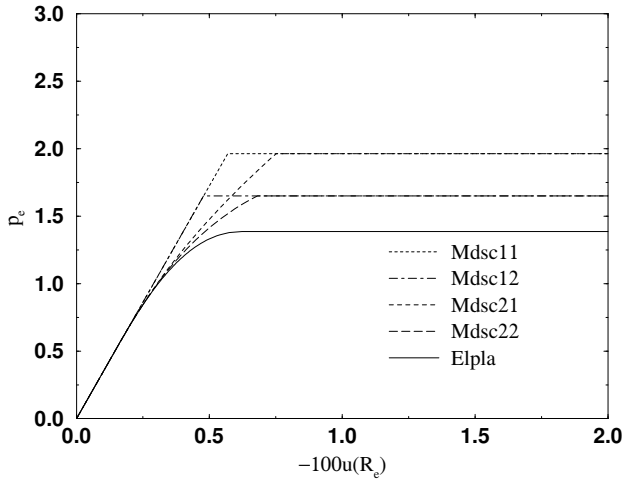
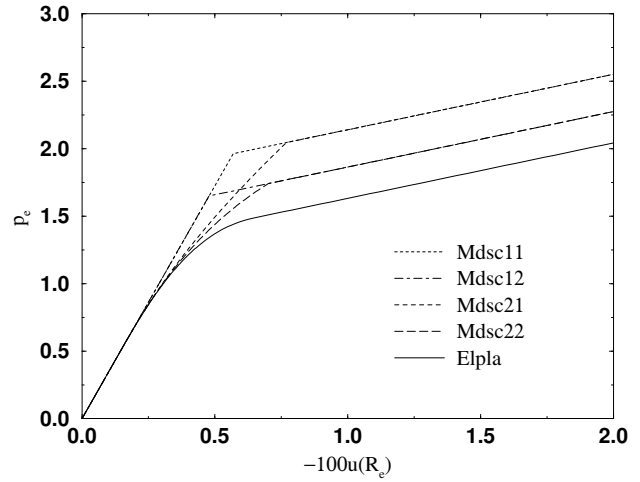
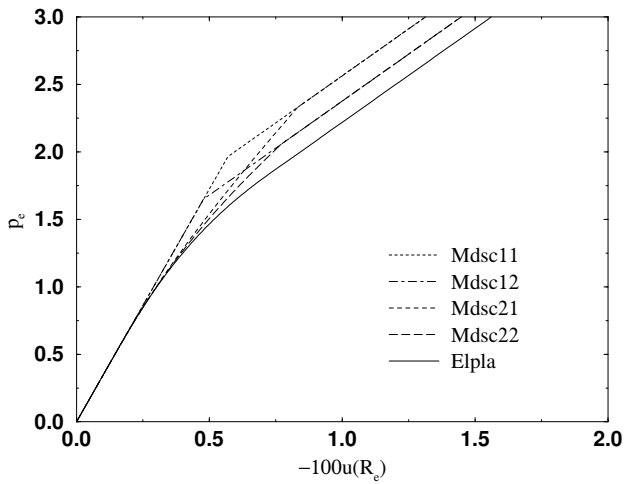
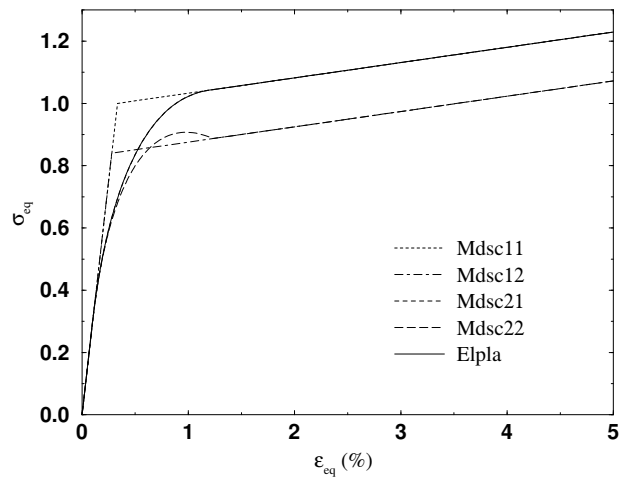
$$\begin{aligned} \mu &= 100.0 & \text{et} & & k &= 150.0 \\ \sigma_0 &= 1.0 & \text{et} & & H &= 0.0, 5.0 \text{ ou } 25.0 \\ R_e &= 1.0 & \text{et} & & R_i &= 0.5 \end{aligned}$$

Les diverses approches divergent uniquement par les résultats relatifs aux parties déviatoriques de la contrainte. La pression moyenne appliquée importe peu. On a pris  $p_i = 0$ . On désigne par la suite l'approche élasto-plastique par "Elpla", les calculs en modules sécants par "Mdscxy", où  $x$  correspond au nombre de modules utilisés et  $y$  correspond à l'ordre des moments (Exemple : Mdsc21 est l'approche avec deux modules sécants, relatifs au moment d'ordre un de la déformation équivalente sur les zones).

### A.6.A Réponse globale de la structure

On s'intéresse d'abord aux courbes (déplacement sur le bord extérieur - différentiel de pression). Elles ont été tracées pour les trois valeurs de H données ci-dessus (figures A.3, A.4 et A.5). Il s'avère que Mdsc11 surestime amplement la rigidité de la structure et ce d'autant plus que l'écroutissage est faible. Mdsc21 permet d'améliorer la prévision au début de la phase de propagation de la zone plastifiée, mais l'écart avec Elpla se creuse très rapidement. Les modèles utilisant les moments d'ordre deux améliorent les résultats, mais ils surestiment toujours la rigidité de la structure. Notons que l'intégrale de ces courbes est proportionnelle à l'énergie emmagasinée (la puissance des efforts extérieurs est  $-4\pi P_e u_e R_e^2$ ). On vérifie donc que ces deux dernières approches fournissent une borne supérieure du potentiel de la structure.

Les résultats des calculs peuvent également être interprétés en termes de comportement moyen du matériau constitutif, défini comme la relation entre les moyennes de la contrainte et de la déformation. Les moyennes prises sur toute la sphère creuse se résument à leur parties sphériques et leur

Figure A.3 : Réponse de la structure -  $H = 0$ Figure A.4 : Réponse de la structure -  $H = 5$ Figure A.5 : Réponse de la structure -  $H = 25$ Figure A.6 : Comportement équivalent -  $H = 5$ 

rapport est le module de compressibilité du matériau, constant, puisque la plasticité n'affecte pas les propriétés sphériques du matériau. Les parties déviatoriques des moyennes sur une fibre ne sont en revanche pas nulles et permettent de définir un module de cisaillement équivalent par :

$$\left[ \langle \sigma^{\text{eq}} \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} = 3\mu^{\text{eq}} \left[ \langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} \quad (\text{A.92})$$

La figure A.7 donne l'évolution de ce module en fonction du chargement et la figure A.6 donne la loi de comportement équivalente  $\left( \left[ \langle \underline{\sigma} \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}}, \left[ \langle \underline{\epsilon} \rangle_{R_i}^{R_e} \right]^{\text{eq}} \right)$ , pour  $H = 5$ . Il apparaît que la rigidité de cisaillement moyenne est surestimée par toutes les approches élastiques en modules sécants, notamment par celles n'utilisant qu'un seul module. Les approches avec deux modules sont bien meilleures, surtout au début de plastification. Elle s'écartent de la solution exacte lorsque la plastification est presque complète, Mdsc22 offrant toutefois la meilleure estimation.

La courbe de comportement équivalente obtenue avec Mdsc11 est bien sûr la loi de comportement locale, puisque dans ce cas le module obtenu est le module local uniforme, associé à la moyenne de la déformation équivalente locale égale à la déformation moyenne équivalente. Mdsc12 diffère de cette courbe, car le module macroscopique obtenu, égal comme pour Mdsc11 au module local uniforme, est associé au moment d'ordre deux de la déformation équivalente locale, supérieur à la déformation moyenne équivalente ; la contrainte macroscopique équivalente est donc inférieure à celle associée à la déformation macroscopique équivalente par la loi de comportement locale. Les courbes obtenues avec les modèles à deux couches diffèrent des précédentes dans la phase de propagation de la zone plastifiée.

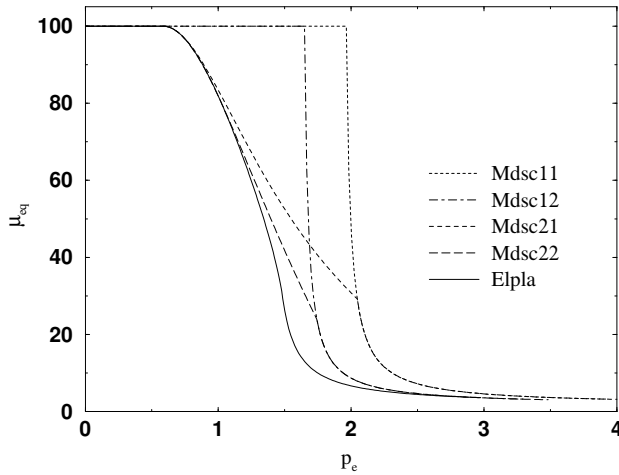


Figure A.7 : Module de cisailment équivalent

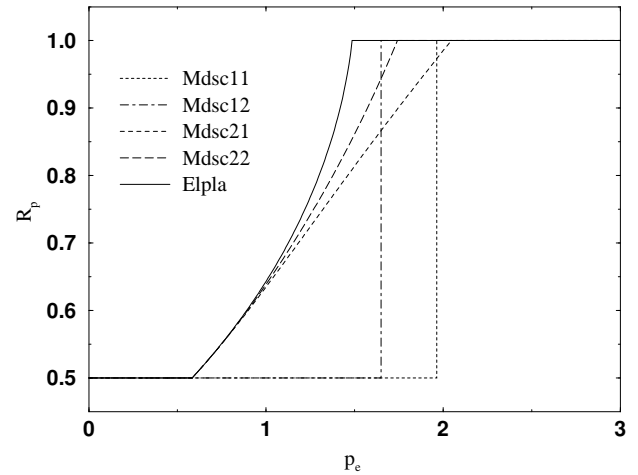


Figure A.8 : Extension de la zone plastifiée

On constate que Mdsc21 et Elpla donnent la même courbe. Ce résultat a priori surprenant est en fait normal ; il provient de la proportionnalité de la contrainte locale (qui fait que l'approche avec des modules sécants locaux donne la réponse exacte), de l'identité entre les moyennes des contraintes et déformations équivalentes locales et les équivalents des moyennes de la contrainte et la déformation, et de la dépendance affine de  $\sigma^{eq}$  avec  $\epsilon^{eq}$  dans la loi de comportement locale : la relation entre la contrainte et la déformation moyennes équivalentes sur la zone plastifiée est la même pour Mdsc21 et Elpla ; elle l'est bien sûr aussi pour la zone élastique. La relation entre la contrainte et la déformation moyennes équivalentes sur toute la sphère à  $R_p$  fixé est donc aussi la même. La courbe obtenue avec Mdsc22 diffère des deux précédentes par la même raison qui fait que Mdsc11 diffère de Mdsc12.

Le fait que les approches basées sur le moment d'ordre deux sous-évaluent la courbe de comportement macroscopique n'est pas contradictoire avec les courbes concernant les modules sécants apparents, car les déformations moyennes équivalentes sur une fibre à chargement fixé ne sont pas égales dans les diverses approches (*cf.* figure A.10). De manière plus générale, la notion de comportement équivalent est contestable dans le contexte présent, en tous cas sous la définition adoptée ici, car la condition de macrohomogénéité n'est pas satisfaite. Seule la comparaison énergétique, illustrée par les courbes (déplacement sur le bord extérieur - différentiel de pression), a vraiment un sens.

### A.6.B Réponse locale

Toutes les courbes qui suivent ont été obtenue avec  $H = 5$ . La figure A.8 donne tout d'abord l'évolution du rayon  $R_p$  en fonction de la charge  $p_e$ . L'estimation de l'étendue de la zone plastifiée par les modèles à deux couches est assez bonne en début de plastification, mais l'écart avec la solution exacte se creuse assez rapidement, Mdsc22 étant là aussi meilleur que Mdsc21. Remarquons aussi que d'après ces deux modèles, la sphère creuse se plastifie complètement pour des charges supérieures à celles prévues par leur homologues avec un seul module sécant.

Les modèles peuvent ensuite être comparés d'après leurs prévisions de distribution des champs locaux de contrainte et de déformation. Nous nous intéressons d'abord aux valeurs moyennes sur une fibre de ces champs avant de considérer les hétérogénéités proprement dites. Les modèles avec une seule couche prévoient la même dépendance linéaire entre chargement et contrainte moyenne (figure A.9) : elle découle de l'équilibre statique de la structure, indépendamment du module élastique. Les modèles à deux couches ne s'écartent de cette droite que pendant la phase de propagation de la zone plastifiée. La solution élasto-plastique est elle de nature différente : la présence de déformations plastiques irréversibles modifie l'équilibre statique de la structure et induit une contrainte moyenne plus élevée. Les modèles approchés ne peuvent en rendre compte, même si Mdsc21 et Mdsc22 tendent à s'en rapprocher en début de plastification.

Les déformations moyennes (figure A.10) sont elles largement sous-estimées par les modèles avec

des modules sécants, les prévisions des modèles utilisant les moments d'ordre deux étant toutefois meilleures. Au niveau de chargement  $p_e = 1.1\Delta P_2$ , la déformation réelle vaut par exemple plus de dix fois celle estimée par Mdsc11.

Les distributions de champs locaux de contrainte et de déformation sont enfin données par les figures A.11 à A.16. Afin de s'affranchir des effets sur les moyennes déjà évoqués au paragraphe précédent, nous avons en fait reporté en fonction du rayon, les rapports des contraintes ou déformations locales à leurs valeurs moyennes, ceci pour trois niveaux de chargements : en début de plastification ( $p_e = (\Delta P_1 + \Delta P_2)/2$ ), lorsque la plastification est complète d'après le modèle Elpla mais pas encore pour les autres ( $p_e = 1.1\Delta P_2$ ) et lorsque la plastification est complète pour tous les modèles ( $p_e = 1.5\Delta P_2$ ). Notons tout de suite que les courbes relatives à la contrainte pour les divers modèles avec un unique module sécant sont les mêmes et résultent du seul équilibre statique de la structure.

De manière générale, l'on constate que les prévisions d'hétérogénéités de déformation obtenues avec les modèles approchés sont bonnes. Les plus gros écarts sont observés en début de plastification, avec une sous-estimation des hétérogénéités réelles par les modèles Mdsc11 et Mdsc12. Mdsc11 et Mdsc12 améliorent quelque peu ces résultats en décrivant notamment des déformations plus importantes dans la zone plastifiée. Les différences s'estompent pour les niveaux de chargement plus élevés. Les résultats sont beaucoup moins satisfaisants pour la contrainte : le nivellement de la contrainte équivalente dans la zone plastifiée ne peut être décrit par les modèles approchés. Les modèles avec deux couches améliorent légèrement les prévisions en réduisant notamment l'intensité de la contrainte dans la zone plastifiée. Notons enfin les discontinuités des champs de déformation et de contrainte au passage de  $R_p$  présentées par les modèles avec deux modules sécants ; elles correspondent à une dissipation surfacique qui n'a pas de signification physique mais résulte de la construction de ces modèles.

## A.7 Conclusions

La comparaison entre les calculs approchés élastiques utilisant des modules sécants uniformes sur tout ou partie de la structure et un calcul élasto-plastique prenant en compte une véritable loi de comportement élasto-plastique montre qu'il convient d'être très prudent dans l'utilisation de ce genre de calculs simplifiés.

Dans le cas de chargement relativement simple considéré ici, la rigidité globale de la structure est sur-estimée par les modèles simplifiés, l'hétérogénéité des contraintes est également sur-estimée alors que la valeur moyenne de cette dernière est sous-estimée ; la valeur moyenne de la déformation est aussi largement sous-estimée, notamment dans la transition élasto-plastique. Les champs de déformations élastiques, à déformation moyenne donnée, sont toutefois une bonne approximation des champs de

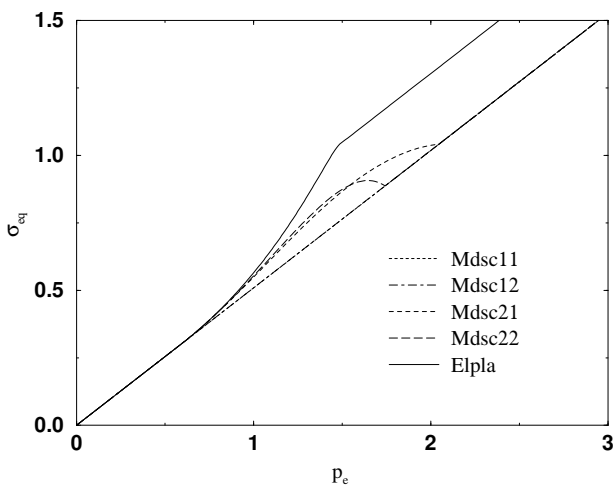


Figure A.9 : Contrainte moyenne équivalente sur une fibre

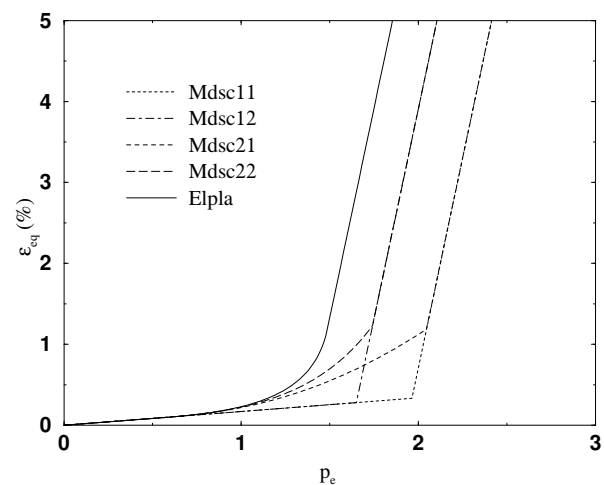


Figure A.10 : Déformation moyenne équivalente sur une fibre

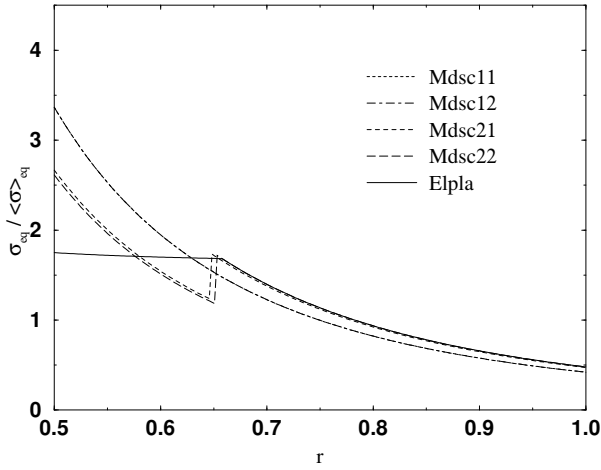


Figure A.11 : Hétérogénéité de contrainte équivalente pour  $p_e = (\Delta P_1 + \Delta P_2)/2$

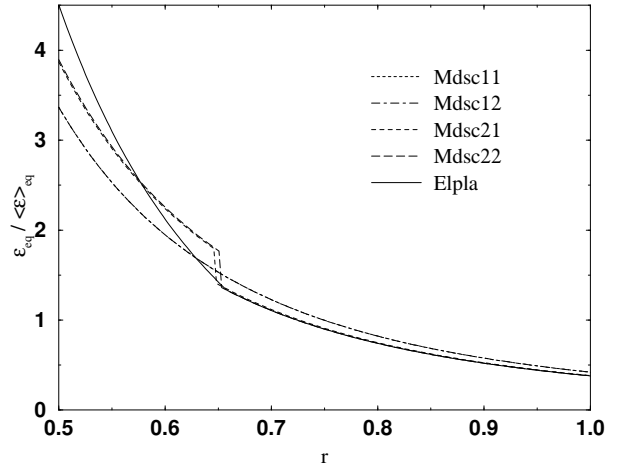


Figure A.12 : Hétérogénéité de déformation équivalente pour  $p_e = (\Delta P_1 + \Delta P_2)/2$

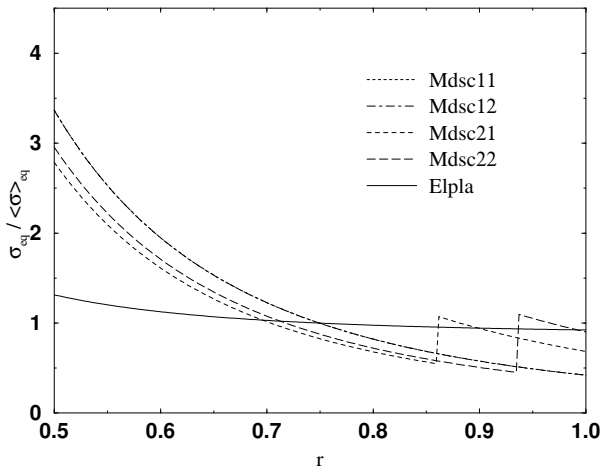


Figure A.13 : Hétérogénéité de contrainte équivalente pour  $p_e = 1.1\Delta P_2$

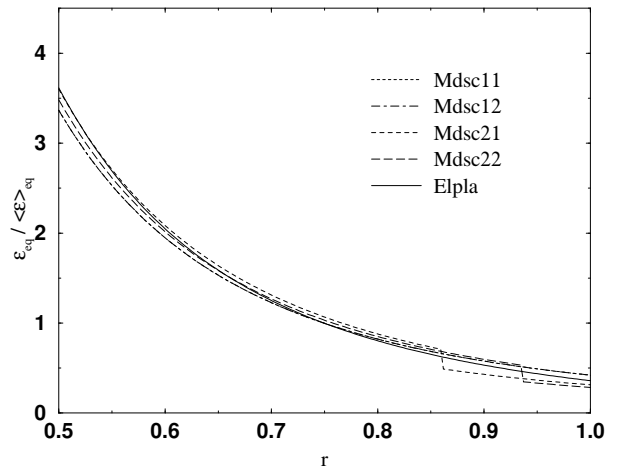


Figure A.14 : Hétérogénéité de déformation équivalente pour  $p_e = 1.1\Delta P_2$

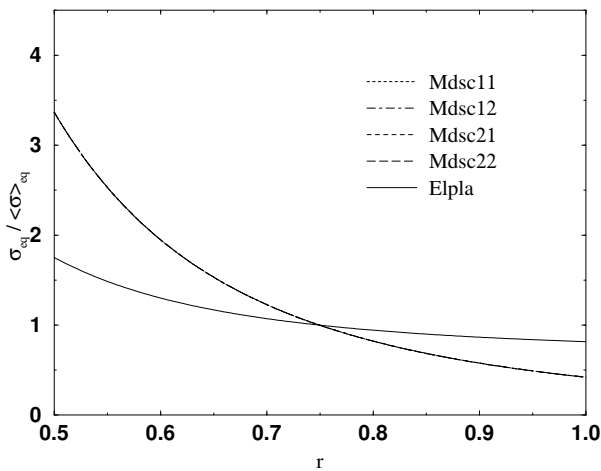


Figure A.15 : Hétérogénéité de contrainte équivalente pour  $p_e = 1.5\Delta P_2$

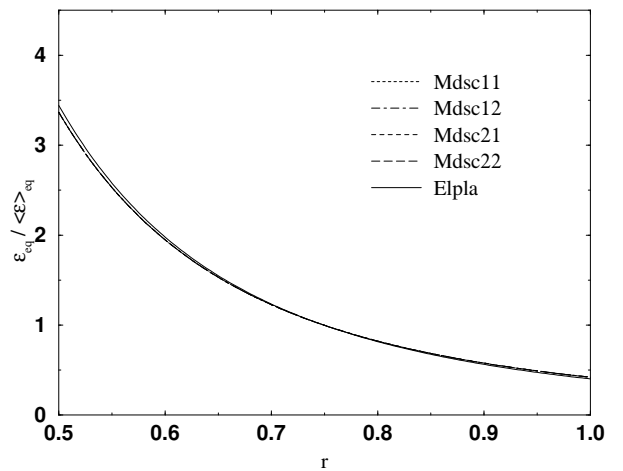


Figure A.16 : Hétérogénéité de déformation équivalente pour  $p_e = 1.5\Delta P_2$

déformation élasto-plastiques.

De manière générale, les modèles approchés associant les modules sécants aux moments d'ordre deux de la déformation améliorent les prévisions de ceux faisant appel aux moments d'ordre un, notamment à l'échelle globale et en termes d'énergie absorbée par la structure. Les approches avec plusieurs modules sécants sont également plus puissantes que celles n'en utilisant qu'un seul. Celles décrites ici ne font appel qu'à deux modules, mais associés à des zones dont l'extension varie en fonction du chargement. Elle améliorent notablement les résultats en début de plastification, en étant notamment capables de décrire correctement le premier écoulement plastique. D'autres extensions aurait pu être considérées : par exemple, une discrétisation de la sphère en couches concentriques d'extension fixe, analogue à celle utilisée dans le modèle à  $n$ -couches. Les résultats de telles approches convergent vers la solution exacte quand le nombre de couches croît, mais uniquement pour le cas particulier à symétrie sphérique considéré ici.

Nombre de résultats obtenus ici découlent du fait que les déviateurs des tenseurs de déformation et de contrainte locales sont proportionnels au tenseur  $\underline{U}_r \otimes \underline{U}_r - \frac{1}{2} [\underline{U}_\theta \otimes \underline{U}_\theta + \underline{U}_\phi \otimes \underline{U}_\phi]$  et de la linéarité de l'érouissage. Dans le cas de géométries ou de chargements plus compliqués (taux de triaxialité différents, non-proportionnalité du déviateur des contraintes, chargements cycliques, etc...), le recours à des méthodes de résolution numériques semble s'imposer et peut seul garantir la fiabilité des résultats, mais au prix d'une multiplication de la puissance de calcul requise.

---

# Annexe B

## Opérateurs de Green

On donne ici quelques relations générales sur l'opérateur de Green et l'« opérateur de Green modifié » en élasticité. Les résultats sont d'abord donnés pour une structure homogène d'extension finie, soumise à des conditions aux limites en forces ou en déplacements. On considère ensuite le cas du milieu infini soumis à des conditions évanescentes à l'infini et chargé localement par une distribution de forces volumiques ou de polarisation. Dans cette situation, l'opérateur présente des propriétés de convergence et de symétrie particulières. La dernière partie est consacrée à l'utilisation du tenseur de Green du milieu infini pour traiter des problèmes définis sur un milieu fini de grande extension et plus particulièrement des problèmes définis sur un VER.

Beaucoup de relations données ici sont très classiques, d'autres le sont toutefois un peu moins et en tous cas sont rarement données avec le détail et les justifications que nous avons tenté d'apporter. Notons que certains résultats sont inspirés des références [182, 151].

### B.1 En milieu borné

#### B.1.A Relations générales

Soit  $\Omega$  le milieu homogène<sup>1</sup> borné considéré, de frontière  $\partial\Omega$  et de modules  $\mathbf{C}^0$ . Il est soumis aux déplacements imposés  $\underline{u}^d$  sur une partie de sa frontière  $\partial\Omega^u$ , aux forces  $\underline{F}^d$  sur la partie complémentaire  $\partial\Omega^F$ , aux forces de volume  $\underline{f}^d$  et à la polarisation  $\underline{p}^d$ , la loi de comportement locale<sup>2</sup> étant  $\underline{\sigma} = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon} + \underline{p}^d$ .

Les champs de déplacement, déformation et contrainte  $(\underline{u}(\underline{x}), \underline{\epsilon}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x}))$  solutions de ce problème peuvent être exprimés à partir de la solution élémentaire  $(\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}), \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}), \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}))$ , qui résout le problème pour des déplacements imposés nuls  $\underline{u}^d = 0$ , des forces surfaciques imposées nulles  $\underline{F}^d = 0$ , une polarisation nulle  $\underline{p}^d = 0$  et une force ponctuelle au point  $\underline{y}$ ,  $\underline{f}^d(\underline{x}) = \underline{f}\delta(\underline{x} - \underline{y})$ , sous la forme  $\underline{u}^0(\underline{x}) = \underline{\mathbf{G}}_\Omega^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{f}$  (voir figure B.1).

Le champ  $\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$  est SA avec la force  $\underline{f}$  en  $\underline{y}$  et des forces nulles sur  $\partial\Omega^F$ . Les champs  $(\underline{u}(\underline{x}), \underline{\epsilon}(\underline{x}))$  sont CA avec les données du premier problème. Par le principe des travaux virtuels, on en tire :

$$\int_{\Omega} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{f}\delta(\underline{x} - \underline{y})d\omega_x + \int_{\partial\Omega^u} \underline{u}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x})ds_x = \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{x}) : \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})d\omega_x. \quad (\text{B.1})$$

Par ailleurs  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbf{C}^0 : \underline{\epsilon}(\underline{x}) + \underline{p}^d(\underline{x})$  est SA avec  $\underline{f}^d$  et  $\underline{F}^d$  et  $(\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}), \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}))$  sont CA avec 0 sur

<sup>1</sup>Remarquons que la plupart des relations décrites dans ce paragraphe se généralisent aux milieux hétérogènes.

<sup>2</sup>La polarisation peut avoir différentes interprétations, physiques (déformation plastique, déformation de transformation...) ou plus théorique (générateur de champs admissibles dans une formulation de Hashin et Shtrikman...). Nous la considérons comme une caractéristique du comportement local du matériau, mais il s'agit là d'une convention purement formelle qui nous a semblé la plus simple dans le cadre de cette présentation.



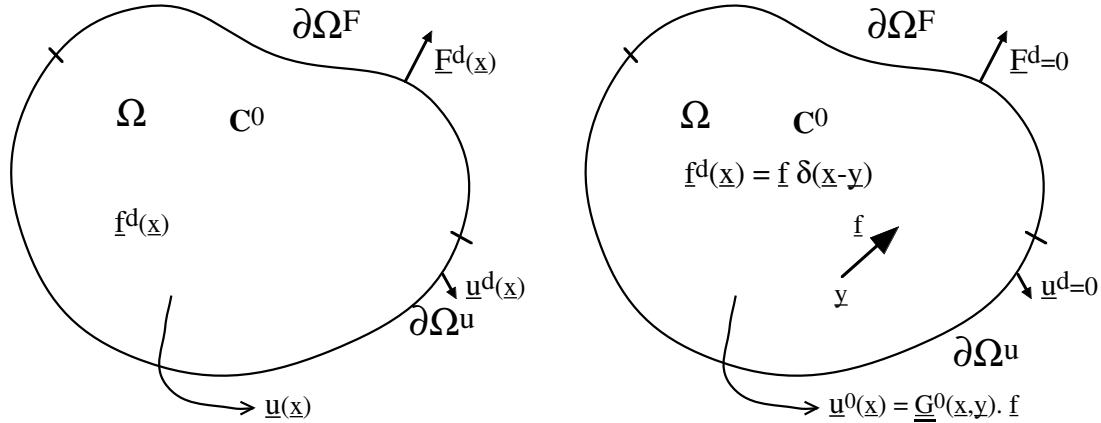


Figure B.1 : Problème d'élasticité sur un milieu fini et solution élémentaire de Green associée

$\partial\Omega^u$ . D'où:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{u}}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x - \int_{\Omega} \underline{\underline{p}}^d(\underline{x}) : \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x + \int_{\partial\Omega^F} \underline{\underline{F}}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{u}}^0(\underline{x}, \underline{y}) ds_x. \quad (\text{B.2})$$

La combinaison des deux relations conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}}(\underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}} &= \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}} d\omega_x - \int_{\Omega} \underline{\underline{p}}^d(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}} d\omega_x \\ &+ \int_{\partial\Omega^F} \underline{\underline{F}}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}} ds_x - \int_{\partial\Omega^u} [\underline{\underline{n}}(\underline{x}) \otimes \underline{\underline{u}}^d(\underline{x})] : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}} ds_x, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_1^s \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y})$ , où  $\nabla_1^s$  désigne la dérivation par rapport au premier argument (d'où l'exposant  $p$  de  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}$ ) suivie d'une symétrisation appropriée, de telle sorte que  $\underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\underline{E}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}$ . En appliquant la relation (B.3) pour le problème élémentaire avec la force ponctuelle  $\underline{\underline{f}}'$  au point  $\underline{\underline{y}}'$ , on obtient :

$$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{y}, \underline{y}') \cdot \underline{\underline{f}}' = \underline{\underline{f}}' \cdot \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{y}', \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}, \quad (\text{B.4})$$

la relation étant valable  $\forall(\underline{y}, \underline{y}', \underline{\underline{f}}, \underline{\underline{f}}')$ .  $\underline{\underline{G}}_{\Omega}^0$  est donc auto-adjoint. Cette propriété garantit aussi que  $\nabla_1^s \underline{\underline{G}}_{\Omega}^{0T}(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_2^s \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{y}, \underline{x})$ . Après simplification de la relation (B.3) par  $\underline{\underline{f}}$ , arbitraire, transposition et échange des variables  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , on obtient l'expression formelle du champ  $\underline{\underline{u}}$  en fonction de  $\underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y})$  et du chargement :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}}(\underline{x}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega} \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{s0}(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y \\ &+ \int_{\partial\Omega^F} \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{F}}^d(\underline{y}) ds_y - \int_{\partial\Omega^u} \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{s0}(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbf{C}^0 : [\underline{\underline{n}}(\underline{y}) \otimes \underline{\underline{u}}^d(\underline{y})] ds_y, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{s0}(\underline{x}, \underline{y})$  est défini comme  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}(\underline{x}, \underline{y})$ , mais avec une dérivation portant sur le second argument de  $\underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y})$  et une symétrisation associée. Les termes correspondants dans (B.5) méritent une précision quant aux contractions et symétrisations ; exprimés en composantes, ils s'écrivent :

$$- \int_{\Omega} p_{ij}^d(\underline{y}) \left[ \frac{\partial G_{\Omega}^{0mi}}{\partial x_j^s} \right]^{(i,j)}(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_y - \int_{\partial\Omega^u} u_i^d(\underline{y}) n_j(\underline{y}) C_{ijkl}^0 \left[ \frac{\partial G_{\Omega}^{0mk}}{\partial x_l^s} \right]^{(k,l)}(\underline{x}, \underline{y}) ds_y, \quad (\text{B.6})$$

l'indice  $m$  étant relatif à la composante du déplacement et l'exposant  $(k, l)$  désignant la symétrisation par rapport à ces indices ; l'exposant  $s$  précise que la dérivation est relative au second argument.

$\underline{\underline{G}}_{\Omega}^0$  est le noyau de l'opérateur de Green associé au milieu  $\Omega$ , aux modules  $\mathbf{C}^0$  et aux conditions aux limites sur  $\partial\Omega^u$  et  $\partial\Omega^F$ .

Notons qu'il présente une singularité en  $\underline{x} = \underline{y}$  et qu'il en est de même de ses dérivées et donc de  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}$  et  $\underline{\underline{E}}_{\Omega}^{s0}$ . Ces singularités sont les mêmes que celles de l'opérateur associé au milieu infini et seront discutées ultérieurement. Il faut aussi préciser qu'en l'absence de conditions aux limites en déplacement, ou lorsque  $\partial\Omega^u$  est réduit à des points alignés, le problème n'a de solution que lorsque le torseur des efforts appliqués s'annule, ou, respectivement, lorsque le couple relatif aux axes contenant les points d'ancrage est nul. Dans le cas contraire, l'équilibre ne peut être atteint et nous excluons de telles situations.

La relation (B.5) conduit, par dérivation par rapport à  $\underline{x}$  et symétrisation, au champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{f}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{p}^d(\underline{y}) d\omega_y \\ &+ \int_{\partial\Omega^F} \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{p0}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{F}^d(\underline{y}) ds_y - \int_{\partial\Omega^u} \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbf{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}^d(\underline{y})] ds_y, \end{aligned} \tag{B.7}$$

avec

$$\mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_1^s \underline{\underline{E}}_{\Omega}^{s0}(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_1^s \nabla_2^s \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}), \tag{B.8}$$

soit, en termes de composantes :

$$\Gamma_{\Omega m i j}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \left[ \frac{\partial^2 G_{\Omega m i}^0}{\partial x_n^p \partial x_j^s} \right]^{(i,j)(m,n)}(\underline{x}, \underline{y}). \tag{B.9}$$

Ces relations sont à prendre au sens des distributions du fait de la singularité de  $\underline{\underline{G}}_{\Omega}^0$  en  $\underline{x} = \underline{y}$ . Les difficultés liées à cet aspect seront discutées ultérieurement.  $\underline{\underline{\Gamma}}_{\Omega}^0$  est le noyau de l'opérateur de Green modifié « en déformations », associé au milieu  $\Omega$ , aux modules  $\mathbf{C}^0$  et aux conditions aux limites sur  $\partial\Omega^u$  et  $\partial\Omega^F$ .

En particulier, lorsque le chargement se limite à une polarisation non nulle ( $\underline{u}^d = 0$ ,  $\underline{f}^d = 0$  et  $\underline{F}^d = 0$ ), cet opérateur donne le champ de déformation en fonction de la polarisation :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0 \star \underline{p}^d, \tag{B.10}$$

où  $\star$  désigne la convolution. En appliquant cette relation pour deux polarisations  $\underline{p}^1$  et  $\underline{p}^2$ , induisant des champs  $(\underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{\epsilon}}^i)$ ,  $i \in [1, 2]$ , et en remarquant que par le principe des travaux virtuels, on a :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^i : \underline{\underline{\epsilon}}^j d\omega = 0 = \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}^i : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^j d\omega - \int_{\Omega} \underline{p}^i : \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0 \star \underline{p}^j d\omega, \tag{B.11}$$

on établit que  $\mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0$  est auto-adjoint :

$$\forall(\underline{x}, \underline{y}) \quad \forall(\underline{p}^1, \underline{p}^2) \quad \underline{p}^1 : \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{p}^2 = \underline{p}^2 : \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0(\underline{y}, \underline{x}) : \underline{p}^1 \tag{B.12}$$

Par la suite, la notation  $\text{CA}_{\Omega}^0$  fera référence aux champs de  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$  cinématiquement admissibles avec  $\underline{u}^d = 0$  sur  $\partial\Omega^u$  et la notation  $\text{SA}_{\Omega}^0$  désignera les champs statiquement admissibles avec  $\underline{F}^d = 0$  sur  $\partial\Omega^F$  et  $\underline{f}^d = 0$  dans  $\Omega$ . La relation (B.10) établit ainsi que :

$$\forall \underline{p}^d \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0 \star \underline{p}^d \text{ est } \text{CA}_{\Omega}^0 \\ -\mathbf{C}^0 : \mathbf{\Gamma}_{\Omega}^0 \star \underline{p}^d + \underline{p}^d \text{ est } \text{SA}_{\Omega}^0. \end{array} \right. \tag{B.13}$$

En explicitant la loi de comportement locale, on peut aussi réécrire (B.10) sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\mathbf{\Delta}_{\Omega}^0 \star \underline{e}^d, \tag{B.14}$$

où  $\underline{\underline{e}}^d = -\mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}^d$  est la polarisation en déformation, telle que la loi de comportement locale s'écrive  $\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{e}}^d$ , et où  $\Delta_\Omega^0$  est l'opérateur de Green modifié « en contraintes », également auto-adjoint :

$$\Delta_\Omega^0 = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \Gamma_\Omega^0] \star \mathbf{C}^0. \quad (\text{B.15})$$

Dans cette écriture, les tenseurs des modules ou des complaisances sont à interpréter comme des opérateurs locaux sur  $\mathbb{T}_2^s(\Omega)$ . La relation (B.14) exprime le fait que :

$$\forall \underline{\underline{e}}^d \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \quad \begin{cases} \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{e}}^d \text{ est SA}_\Omega^0 \\ -\mathbf{S}^0 : \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{e}}^d + \underline{\underline{e}}^d \text{ est CA}_\Omega^0. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

### B.1.B Propriétés

#### B.1.B.a Solution formelle du problème d'élasticité (à polarisation nulle)

Soit  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  un champ SA avec  $\underline{\underline{F}}^d$  sur  $\partial\Omega^F$  et  $\underline{\underline{f}}^d$  dans  $\Omega$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  un champ CA avec  $\underline{\underline{u}}^d$  sur  $\partial\Omega^u$ .

D'après ce qui précède  $-\mathbf{C}^0 : \Gamma_\Omega^0 \star \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{\underline{\sigma}}^*$  est  $\text{SA}_\Omega^0$ . Il en est de même de  $\Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{\epsilon}}^*$ . Donc  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \Gamma_\Omega^0 \star \underline{\underline{\sigma}}^* + \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{\epsilon}}^*$  est SA avec  $\underline{\underline{F}}^d$  sur  $\partial\Omega^F$  et  $\underline{\underline{f}}^d$  dans  $\Omega$ .

Par ailleurs,  $-\mathbf{S}^0 : \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{\epsilon}}^* + \underline{\underline{\epsilon}}^*$  et  $\Gamma_\Omega^0 \star \underline{\underline{\sigma}}^*$  sont  $\text{CA}_\Omega^0$ . Donc  $\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{S}^0 : \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{\epsilon}}^* + \Gamma_\Omega^0 \star \underline{\underline{\sigma}}^*$  est CA avec  $\underline{\underline{u}}^d$  sur  $\partial\Omega^u$ . Il est aussi clair que  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}$ . D'où :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\underline{\sigma}}^*, \underline{\underline{\epsilon}}^*) \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)^2, \quad & \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ SA avec } \underline{\underline{F}}^d \text{ sur } \partial\Omega^F \text{ et } \underline{\underline{f}}^d \text{ dans } \Omega \\ \underline{\underline{\epsilon}}^* \text{ CA avec } \underline{\underline{u}}^d \text{ sur } \partial\Omega^u \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{S}^0 : \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{\epsilon}}^* + \Gamma_\Omega^0 \star \underline{\underline{\sigma}}^* \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \Gamma_\Omega^0 \star \underline{\underline{\sigma}}^* + \Delta_\Omega^0 \star \underline{\underline{\epsilon}}^* \end{cases} \\ & \text{est la solution du problème d'élasticité } (\underline{\underline{u}}^d, \underline{\underline{F}}^d, \underline{\underline{f}}^d). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

#### B.1.B.b Projections

Soit  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  un champ  $\text{CA}_\Omega^0$ . D'après (B.13),  $\Gamma_\Omega^0 \star \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^* - \underline{\underline{\epsilon}}^*$  est  $\text{CA}_\Omega^0$  et  $\mathbf{C}^0 : [\Gamma_\Omega^0 \star \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^* - \underline{\underline{\epsilon}}^*]$  est  $\text{SA}_\Omega^0$ . Par unicité de la solution d'un problème d'élasticité, on a donc  $\Gamma_\Omega^0 \star \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^* - \underline{\underline{\epsilon}}^* = 0$ . D'où :

$$\Gamma_\Omega^0 \star \mathbf{C}^0 \text{ est un projecteur de } \mathbb{T}_2^s(\Omega) \text{ sur l'espace des tenseurs } \text{CA}_\Omega^0. \quad (\text{B.18})$$

Par le même principe, on montre que :

$$\Delta_\Omega^0 \star \mathbf{S}^0 \text{ est un projecteur de } \mathbb{T}_2^s(\Omega) \text{ sur l'espace des tenseurs } \text{SA}_\Omega^0. \quad (\text{B.19})$$

Les tenseurs de Green modifiés et les tenseurs des modules d'élasticité étant auto-adjoints, ces projections sont orthogonales relativement à l'énergie élastique, c'est-à-dire au sens du produit scalaire  $(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}) \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \rightarrow \int_\Omega \underline{\underline{u}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{v}} d\omega$  pour la première et  $(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}) \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \rightarrow \int_\Omega \underline{\underline{u}} : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{v}} d\omega$  pour la seconde.

Ces propriétés induisent directement les relations suivantes :

$$\Delta_\Omega^0 \star \mathbf{S}^0 \star \Delta_\Omega^0 = \Delta_\Omega^0 \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma_\Omega^0 \star \mathbf{C}^0 \star \Gamma_\Omega^0 = \Gamma_\Omega^0 \quad (\text{B.21})$$

$$\Delta_\Omega^0 \star \Gamma_\Omega^0 = \Gamma_\Omega^0 \star \Delta_\Omega^0 = 0. \quad (\text{B.22})$$

Considérons par ailleurs deux problèmes d'élasticité définis sur le domaine  $\Omega$ , avec les mêmes frontières  $\partial\Omega^u$  et  $\partial\Omega^F$ , mais avec des tenseurs de modules  $\mathbf{C}^1$  et  $\mathbf{C}^2$  et des polarisations  $\underline{\underline{p}}^1$  et  $\underline{\underline{p}}^2$  différents. Le champ  $\underline{\underline{\epsilon}} = -\Gamma_\Omega^1 \star \underline{\underline{p}}^1$  est  $\text{CA}_\Omega^0$  et  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{p}}^1$  est  $\text{SA}_\Omega^0$ . Cette dernière relation peut aussi s'écrire sous la forme  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^2 : \underline{\underline{\epsilon}} + [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^2] : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{p}}^1$ , si bien qu'en prenant  $\underline{\underline{p}}^2 = [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^2] :$

$\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{p}}^1$ , les solutions des problèmes d'élasticité sur les deux milieux sont identiques et  $\underline{\underline{e}}$  s'écrit aussi  $-\Gamma_{\Omega}^2 \star \left[ [C^2 - C^1] : \Gamma_{\Omega}^1 \star \underline{\underline{p}}^1 + \underline{\underline{p}}^1 \right]$ .  $\underline{\underline{p}}^1$  étant arbitraire, il vient :

$$\forall (C^1, C^2) \quad \Gamma_{\Omega}^2 - \Gamma_{\Omega}^1 = \Gamma_{\Omega}^2 \star [C^1 - C^2] : \Gamma_{\Omega}^1. \quad (\text{B.23})$$

On établit de même que :

$$\forall (S^1, S^2) \quad \Delta_{\Omega}^2 - \Delta_{\Omega}^1 = \Delta_{\Omega}^2 \star [S^1 - S^2] : \Delta_{\Omega}^1. \quad (\text{B.24})$$

$\Gamma_{\Omega}^1 \star C^1$  étant un projecteur sur l'espace des champs  $CA_{\Omega}^0$  et  $\Gamma_{\Omega}^2 \star \underline{\underline{p}}$  appartenant à cet espace pour tout  $\underline{\underline{p}}$ , on a de manière évidente :

$$\forall (C^1, C^2) \quad \Gamma_{\Omega}^1 \star C^1 \star \Gamma_{\Omega}^2 = \Gamma_{\Omega}^2, \quad (\text{B.25})$$

d'où on tire aussi, par la relation précédente (ou par transposition) :

$$\forall (C^1, C^2) \quad \Gamma_{\Omega}^1 \star C^2 \star \Gamma_{\Omega}^2 = \Gamma_{\Omega}^1. \quad (\text{B.26})$$

De même, on a :

$$\forall (S^1, S^2) \quad \Delta_{\Omega}^1 \star S^1 \star \Delta_{\Omega}^2 = \Delta_{\Omega}^2 \quad (\text{B.27})$$

$$\text{et} \quad \Delta_{\Omega}^1 \star S^2 \star \Delta_{\Omega}^2 = \Delta_{\Omega}^1. \quad (\text{B.28})$$

### B.1.B.c Propriétés sur les moyennes

Deux situations méritent un traitement particulier. La première, notée  $I$ , est celle de déplacements imposés sur toute la surface :  $\partial\Omega^u = \partial\Omega$ . Les opérateurs de Green correspondants sont notés  $\underline{\underline{G}}_{\Omega I}^0$ ,  $\Gamma_{\Omega I}^0$  et  $\Delta_{\Omega I}^0$ . La seconde, notée  $II$ , est celle où  $\partial\Omega^F = \partial\Omega$  ; les opérateurs associés sont indicés par  $II$ .

Dans la situation  $I$ , si l'on considère des conditions homogènes au bord  $\underline{\underline{u}}^d(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}}$  et une polarisation et des forces de volume nulles, la solution du problème est elle-même homogène<sup>3</sup> :  $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}}$ . Or  $\underline{\underline{e}}^*(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{E}}$  est CA pour ce problème et tout champ homogène  $\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\Sigma}}$  est SA. D'où, par (B.17) :

$$\forall (\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}}) \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \Omega \quad \underline{\underline{E}} = \mathbf{S}^0 : \int_{\Omega} \Delta_{\Omega I}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) d\omega_y : \underline{\underline{E}} + \int_{\Omega} \Gamma_{\Omega I}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) d\omega_y : \underline{\underline{\Sigma}}, \quad (\text{B.29})$$

dont on tire :

$$\forall \underline{\underline{x}} \in \Omega \quad \int_{\Omega} \Gamma_{\Omega I}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) d\omega_y = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \Delta_{\Omega I}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) d\omega_y = \mathbf{C}^0. \quad (\text{B.30})$$

En considérant un problème de type  $II$  avec des conditions homogènes au bord  $\underline{\underline{F}}^d(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ , on établit parallèlement :

$$\forall \underline{\underline{x}} \in \Omega \quad \int_{\Omega} \Gamma_{\Omega II}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) d\omega_y = \mathbf{S}^0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \Delta_{\Omega II}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) d\omega_y = 0. \quad (\text{B.31})$$

### B.1.B.d Homogénéité vis-à-vis de $C^0$

Soit un milieu de tenseur des modules  $C^0$ , soumis à un chargement qui se limite à des forces de volume non nulles ( $\underline{\underline{p}}^d = 0$ ,  $\underline{\underline{f}}^d = 0$  et  $\underline{\underline{F}}^d = 0$ ) ; le champ de déplacement est donné par :

$$\underline{\underline{u}}_1 = \underline{\underline{G}}_{\Omega}^0(C^0) \star \underline{\underline{f}}^d, \quad (\text{B.32})$$

où l'on a explicité la dépendance en  $C^0$ . On vérifie facilement que ce déplacement s'identifie au déplacement  $\underline{\underline{u}}_1$  qui apparaît dans une structure géométriquement identique, mais de tenseur des modules

<sup>3</sup>L'homogénéité de  $C^0$  est ici indispensable

$\lambda \mathbf{C}^0$  et soumis au champ de forces  $\lambda \underline{\underline{f}}^d$ , pour tout  $\lambda > 0$  : la contrainte associée,  $\underline{\underline{\sigma}}_\lambda = \lambda \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}_1$  satisfait en effet bien  $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}_\lambda) + \lambda \underline{\underline{f}}^d = 0$ . Or ce déplacement est aussi donné par :

$$\underline{\underline{u}}_\lambda = \underline{\underline{G}}_\Omega^0(\lambda \mathbf{C}^0) \star \lambda \underline{\underline{f}}^d. \quad (\text{B.33})$$

Ces relations étant satisfaites pour toute distribution de forces  $\underline{\underline{f}}^d$ , on établit ainsi l'homogénéité de degré  $-1$  de  $\underline{\underline{G}}_\Omega^0$ , et par suite celle des opérateurs dérivés dont en particulier  $\Gamma_\Omega^0$ .  $\Delta_\Omega^0$  est en revanche homogène de degré 1.

$$\forall \lambda > 0 \quad \underline{\underline{G}}_\Omega^0(\lambda \mathbf{C}^0) = \frac{1}{\lambda} \underline{\underline{G}}_\Omega^0(\mathbf{C}^0) \quad (\text{B.34})$$

$$\Gamma_\Omega^0(\lambda \mathbf{C}^0) = \frac{1}{\lambda} \Gamma_\Omega^0(\mathbf{C}^0) \quad (\text{B.35})$$

$$\Delta_\Omega^0(\lambda \mathbf{C}^0) = \lambda \Delta_\Omega^0(\mathbf{C}^0). \quad (\text{B.36})$$

## B.2 En milieu infini

Le milieu  $\Omega$  est maintenant supposé remplir tout l'espace et le champ des tenseurs des modules est uniforme. Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir des conditions aux limites surfaciques, qui sont remplacées par des conditions de *décroissance à l'infini*. Par ailleurs, on se limite aux distributions de forces de volume  $\underline{\underline{f}}^d$  et de polarisation  $\underline{\underline{p}}^d$  de *support fini*. Les notions de champs cinématiquement admissibles et statiquement admissibles sont modifiées en :

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ SA}^\infty \text{ avec } \underline{\underline{f}}^d \Leftrightarrow \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{f}}^d = 0 \text{ et } \exists K \subset \Omega \text{ compact} / \int_{\Omega \setminus K} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \omega \text{ converge,} \quad (\text{B.37})$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} \text{ CA}^\infty \Leftrightarrow \text{rot}_g(\text{rot}_d(\underline{\underline{\epsilon}})) = 0 \text{ et } \exists K \subset \Omega \text{ compact} / \int_{\Omega \setminus K} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{d}} \omega \text{ converge.} \quad (\text{B.38})$$

La convergence des intégrales garantit que l'énergie élastique est finie. L'exclusion d'un compact  $K$  exprime que la propriété est relative au comportement à l'infini ; son intérêt est principalement technique, et permet d'appliquer cette définition d'admissibilité des champs d'essai également aux solutions élémentaires qui divergent localement (voir plus loin). Résoudre le problème d'élasticité consiste à trouver les champs  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , respectivement  $\text{SA}^\infty$  avec  $\underline{\underline{f}}^d$  et  $\text{CA}^\infty$ , tels que  $\forall \underline{\underline{x}} \in \Omega$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) + \underline{\underline{p}}^d(\underline{\underline{x}})$ , ou encore  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) + \underline{\underline{e}}^d(\underline{\underline{x}})$ , avec  $\underline{\underline{e}}^d = -\mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}^d$ . Nous admettons l'existence et l'unicité de la solution<sup>4</sup>.

### B.2.A Relations générales

Comme dans le cas du milieu fini, il existe une solution élémentaire pour une polarisation nulle et une force de volume ponctuelle  $\underline{\underline{f}}^d(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{f}} \delta(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}})$ , de la forme  $\underline{\underline{u}}^0(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{G}}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) \cdot \underline{\underline{f}}$ , qui permet d'écrire la solution du problème d'élasticité sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) = \int_\Omega \underline{\underline{G}}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{\underline{y}}) d\omega_y - \int_\Omega \underline{\underline{E}}^{s0}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{\underline{y}}) d\omega_y \\ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \int_\Omega \underline{\underline{E}}^{p0}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{\underline{y}}) d\omega_y - \int_\Omega \Gamma^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{\underline{y}}) d\omega_y, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \int_\Omega \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}^{p0}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{\underline{y}}) d\omega_y - \int_\Omega \Delta^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) : \underline{\underline{e}}^d(\underline{\underline{y}}) d\omega_y. \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

Les opérateurs  $\underline{\underline{E}}^{s0}$ ,  $\underline{\underline{E}}^{p0}$ ,  $\Gamma^0$  et  $\Delta^0$  sont construits à partir de  $\underline{\underline{G}}^0$  comme précédemment et présentent les mêmes propriétés de symétrie. Ils sont définis au sens des distributions et l'on précisera les singularités de leurs noyaux par la suite. Leur support est l'espace  $\Omega$  entier, mais ceux des distributions de forces de volume et de polarisation étant finis, les convolutions ci-dessus sont parfaitement définies. Nous admettons la continuité de  $\underline{\underline{x}} \rightarrow \underline{\underline{G}}^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$  en  $\underline{\underline{x}} \neq \underline{\underline{y}}$ .

Toutes les propriétés établies au paragraphe précédent pour les opérateurs associés à un milieu borné s'appliquent aussi aux opérateurs définis pour le milieu infini, à l'exception des relations relatives aux grandeurs moyennes qui n'ont pas de sens dans le cas présent, la notion de condition aux limites de type *I* ou *II* n'étant pas définie. D'autres propriétés peuvent cependant être établies.

<sup>4</sup>On pourrait l'établir par une extension adéquate du théorème de Lax-Milgram.

## B.2.B Propriétés

### B.2.B.a Invariance par translation

Soit  $T_{\underline{v}}$  la translation de vecteur  $\underline{v}$  sur  $\Omega$ , définissant pour tout champ  $f$  sur  $\Omega$  le champ traduit  $T_{\underline{v}}(f)$  par  $\forall \underline{x} \in \Omega, T_{\underline{v}}(f)(\underline{x}) = f(\underline{x} - \underline{v})$ . Il est immédiat d'établir, du fait de l'absence de point de référence dans le problème d'élasticité, que si  $\underline{u}$  est la solution du problème de données  $(\underline{f}^d, \underline{p}^d = 0)$ ,  $T_{\underline{v}}(\underline{u})$  est la solution du problème de données  $(T_{\underline{v}}(\underline{f}^d), 0)$ , ce qui conduit à :

$$\forall \underline{v} \quad \forall \underline{f}^d \quad \underline{\underline{G}}^0 \star T_{\underline{v}}(\underline{f}^d) = T_{\underline{v}}(\underline{\underline{G}}^0 \star \underline{f}^d). \quad (\text{B.40})$$

En explicitant la convolution et en effectuant un changement de variable de translation, la propriété correspondante sur le noyau est :

$$\forall \underline{v} \quad \forall (\underline{x}, \underline{y}) \quad \underline{\underline{G}}^0(\underline{x}, \underline{y} + \underline{v}) = \underline{\underline{G}}^0(\underline{x} - \underline{v}, \underline{y}). \quad (\text{B.41})$$

La même propriété s'applique bien-sûr à tous les autres opérateurs. Elle permet d'écrire les noyaux sous la forme de fonctions de  $\underline{x} - \underline{y}$  :  $\underline{\underline{G}}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\underline{G}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \dots$  Dans ces conditions, le recours au terme de « convolution » pour désigner les intégrations impliquant ces opérateurs, *a priori* abusif en toute rigueur, est en fait pleinement justifié.

### B.2.B.b Homogénéité vis-à-vis de la variable d'espace

Soit  $D_\lambda$  la dilatation de rapport  $\lambda \neq 0$  sur  $\Omega$ , transformant tout champ  $f$  sur  $\Omega$  en son dilaté  $T_\lambda(f)$  par  $\forall \underline{x} \in \Omega, T_\lambda(f)(\underline{x}) = f(\frac{1}{\lambda}\underline{x})$ . Si  $(\underline{u}, \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$  est la solution du problème de données  $(\underline{f}^d, 0)$ , alors  $\underline{u}_\lambda = \lambda^2 D_\lambda(\underline{u})$  est le déplacement solution du problème de données  $(D_\lambda(\underline{f}^d), 0)$ . En effet, la déformation correspondante  $\underline{\underline{\epsilon}}_\lambda = \lambda D_\lambda(\underline{\underline{\epsilon}})$  est  $\text{CA}^\infty$  et la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}_\lambda = \lambda \underline{\underline{C}}^0 : D_\lambda(\underline{\underline{\epsilon}}) = \lambda D_\lambda(\underline{\underline{\sigma}})$  est  $\text{SA}^\infty$  avec  $D_\lambda(\underline{f}^d)$ , puisque  $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}_\lambda) + D_\lambda(\underline{f}^d) = D_\lambda(\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}^d) = 0$ . D'où :

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \forall \underline{f}^d \quad \underline{\underline{G}}^0 \star D_\lambda(\underline{f}^d) = \lambda^2 D_\lambda(\underline{\underline{G}}^0 \star \underline{f}^d), \quad (\text{B.42})$$

soit, en termes de noyaux :

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \forall \underline{x} \quad \underline{\underline{G}}^0(\lambda \underline{x}) = \frac{1}{|\lambda|} \underline{\underline{G}}^0(\underline{x}). \quad (\text{B.43})$$

Cette relation, appliquée avec  $\lambda = -1$ , et la nature auto-adjointe de l'opérateur conduisent aux propriétés de symétrie :

$$G_{ij}^0(\underline{x}) = G_{ij}^0(-\underline{x}) = G_{ji}^0(\underline{x}), \quad (\text{B.44})$$

ainsi qu'à la forme suivante de  $\underline{\underline{G}}^0$  :

$$\underline{\underline{G}}^0(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|} \underline{\underline{f}}^0(\underline{\underline{\epsilon}}), \quad (\text{B.45})$$

avec  $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{\|\underline{x}\|} \underline{x}$  et  $\underline{\underline{f}}^0$  tenseur d'ordre deux symétrique et fonction paire de  $\underline{\underline{\epsilon}}$ .

La propriété précédente s'exprime en terme de déformations selon :

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \forall \underline{f}^d \quad \underline{\underline{E}}^{p0} \star D_\lambda(\underline{f}^d) = \lambda D_\lambda(\underline{\underline{E}}^{p0} \star \underline{f}^d), \quad (\text{B.46})$$

soit, pour les noyaux :

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \forall \underline{x} \quad \underline{\underline{E}}^{p0}(\lambda \underline{x}) = \frac{1}{\lambda |\lambda|} \underline{\underline{E}}^{p0}(\underline{x}). \quad (\text{B.47})$$

L'application de cette relation pour  $\lambda = -1$  et les propriétés générales de symétrie de  $\underline{\underline{E}}^{s0}$  et  $\underline{\underline{E}}^{p0}$  conduisent à :

$$E_{ijk}^{p0}(\underline{x}) = E_{kij}^{s0}(-\underline{x}) = -E_{kij}^{s0}(\underline{x}) \quad (\text{B.48})$$

La distinction entre ces deux opérateurs n'est donc plus nécessaire et l'on notera simplement  $\underline{\underline{E}}^{p0} = \underline{\underline{E}}^0$ ,  $\underline{\underline{E}}^{s0}$  s'en déduisant par changement de signe et transposition adéquate :  $\underline{\underline{E}}^{s0} = -\underline{\underline{E}}^{0T}$ .

Enfin, on vérifie facilement que si  $\underline{\underline{e}}$  est la déformation solution du problème de données  $(0, \underline{\underline{p}}^d)$ , alors  $\underline{\underline{e}}_\lambda = D_\lambda(\underline{\underline{e}})$  est la déformation solution du problème de données  $(0, D_\lambda(\underline{\underline{p}}^d))$  :

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \forall \underline{\underline{p}}^d \quad \Gamma^0 \star D_\lambda(\underline{\underline{p}}^d) = D_\lambda(\Gamma^0 \star \underline{\underline{p}}^d), \quad (\text{B.49})$$

soit, en termes de noyaux :

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \forall \underline{x} \quad \Gamma^0(\lambda \underline{x}) = \frac{1}{|\lambda|^3} \Gamma^0(\underline{x}). \quad (\text{B.50})$$

L'opérateur  $\Delta^0$  obéit à la même propriété d'homogénéité. À ce propos, précisons que les opérateurs consistant à multiplier un champ de tenseurs par un tenseur des modules  $\mathbf{C}$  s'écrivent  $\mathbf{C}\delta$  et que le noyau de la distribution de Dirac satisfait  $\delta(\lambda \underline{x}) = \frac{1}{|\lambda|^3} \delta(\underline{x})$ . La relation  $\Delta^0 = \mathbf{C}^0 \delta - \mathbf{C}^0 : \Gamma^0 \star \mathbf{C}^0$  établit ainsi l'homogénéité de  $\Delta^0$  à partir de celle de  $\Gamma^0$ .

Notons que les divers degrés d'homogénéité obtenus sont liés à la nature tridimensionnelle de l'espace  $\Omega$ .

### B.2.B.c Intégrales sur un contour fermé

Soit  $S_1$  une surface fermée de  $\Omega$  et  $V_1$  le volume qu'elle délimite. Aucune restriction particulière n'est imposée à leur géométrie. Soit  $S_\lambda$  et  $V_\lambda$  la surface et le volume construits à partir de  $S_1$  et  $V_1$  par l'homothétie de rapport  $\lambda > 0$  et de centre l'origine :

$$\underline{x} \in V_\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \underline{x} \in V_1. \quad (\text{B.51})$$

Soit  $\underline{\underline{p}}^0 \in \mathbb{T}_2^s$  et  $\underline{\underline{p}}_\lambda \in \mathbb{T}_2^s(\Omega)$  la polarisation définie par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{p}}_\lambda(\underline{x}) = \underline{\underline{p}}^0 & \forall \underline{x} \in V_\lambda \\ \underline{\underline{p}}_\lambda(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \setminus V_\lambda \end{cases} \quad (\text{B.52})$$

On a  $\underline{\underline{p}}_\lambda(\underline{x}) = \underline{\underline{p}}^0(\frac{1}{\lambda} \underline{x})$  et d'après les résultats précédents, les déformations solutions des problèmes d'élasticité associés à ces données satisfont  $\forall \underline{x} \underline{\underline{e}}_\lambda(\underline{x}) = \underline{\underline{e}}_1(\frac{1}{\lambda} \underline{x})$ . En particulier, à l'origine  $\underline{x} = 0$ , on obtient  $\underline{\underline{e}}_\lambda(0) = \underline{\underline{e}}_1(0)$ . Comme par ailleurs  $\underline{\underline{e}}_\lambda = -\Gamma^0 \star \underline{\underline{p}}_\lambda$ , il vient, par soustraction des solutions associées à deux valeurs  $(\lambda, \lambda')$  :

$$\forall (\lambda, \lambda') \quad \Gamma^0 \star [\underline{\underline{p}}_{\lambda'} - \underline{\underline{p}}_\lambda](0) = 0. \quad (\text{B.53})$$

Après simplification par  $\underline{\underline{p}}^0$  arbitraire et utilisation de la parité de  $\Gamma^0$ , il vient :

$$\forall \lambda \quad \int_{V_\lambda} \Gamma^0(\underline{x}) d\omega_x = \int_{V_1} \Gamma^0(\underline{x}) d\omega_x = \mathbf{E}_V^0, \quad (\text{B.54})$$

où  $\mathbf{E}_V^0$  est un tenseur d'ordre quatre qui ne dépend que la forme de  $V_1$  mais pas de son extension.

En notant  $V_{\lambda', \lambda}$  l'ensemble  $V_{\lambda'} \cap (\Omega \setminus V_\lambda)$  (voir figure B.2), il vient aussi :

$$\int_{V_{\lambda', \lambda}} \Gamma^0 d\omega = \int_{V_{\lambda, \lambda'}} \Gamma^0 d\omega, \quad (\text{B.55})$$

ce qui, après passage à la limite  $\lambda' \rightarrow \lambda$ , donne :

$$\int_{S_\lambda} \Gamma^0(\underline{x}) \underline{x} \cdot d\underline{S}_\lambda(\underline{x}) = 0, \quad (\text{B.56})$$

où  $d\underline{S}_\lambda(\underline{x})$  est le vecteur surface sortant de  $S_\lambda$  au point  $\underline{x}$ . Une telle écriture impose que  $S_1$  soit régulière par morceaux, les contributions des points singuliers aux intégrales étant nulles.

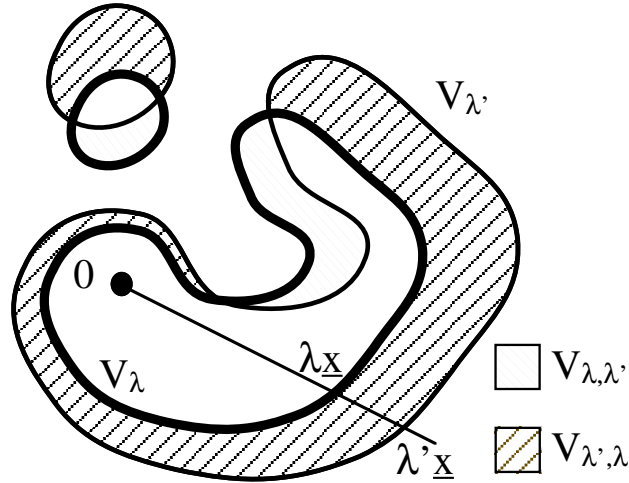


Figure B.2 : Intégrale de contour

Lorsque  $V_1$  est une sphère centrée à l'origine  $S^{\text{sph}}$ , de surface  $\partial S^{\text{sph}}$ , on obtient la relation classique :

$$\int_{\partial S^{\text{sph}}} \Gamma^0(\underline{x}) ds_x = 0. \tag{B.57}$$

Lorsque  $V_1$  est un ellipsoïde  $E$ , d'équation  $\|\underline{A}^{-1} \cdot \underline{x}\| \leq 1$ , où  $\underline{A}$  est symétrique définie positive, on obtient :

$$\int_{\lambda \leq \|\underline{A}^{-1} \cdot \underline{x}\| \leq \lambda'} \Gamma^0(\underline{x}) d\omega_x = 0, \tag{B.58}$$

puis, par le changement de variables  $\underline{u} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{x}$ , il vient :

$$\int_{\lambda \leq \|\underline{u}\| \leq \lambda'} \Gamma^0(\underline{A} \cdot \underline{u}) d\omega_u = 0, \tag{B.59}$$

et enfin, après passage à la limite :

$$\int_{\partial S^{\text{sph}}} \Gamma^0(\underline{A} \cdot \underline{x}) ds_x = 0. \tag{B.60}$$

### B.2.B.d Convergence et décomposition

Les propriétés d'homogénéité de  $\underline{\underline{E}}^0$  et  $\Gamma^0$  garantissent une décroissance en  $\frac{1}{\|\underline{x}\|^2}$  du champ de déformation de la solution élémentaire et donc aussi du champ de contrainte lorsque  $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$ . Ces champs sont donc bien  $CA^\infty$  et  $SA^\infty$ . De manière plus générale, il en est de même de toutes les solutions de la forme (B.39), pour toutes distributions compactes et bornées de forces de volume ou de polarisation, la décroissance des champs induits par ces dernières étant en  $\frac{1}{\|\underline{x}\|^3}$ .

La continuité et l'homogénéité de degré  $-1$  de  $\underline{\underline{G}}^0(\underline{x})$  garantit que cette fonction est localement sommable sur tout l'espace. Elle définit de ce fait une distribution, qui admet des dérivées à tous ordres, dont en particulier les distributions  $\underline{\underline{E}}^0$  et  $\Gamma^0$ .

En admettant que la fonction  $f^0(\underline{e})$  est  $C^2$ , on établit qu'il en est de même de  $\underline{\underline{G}}^0(\underline{x})$  sur  $\Omega \setminus \{0\}$  et que les noyaux de  $\underline{\underline{E}}^0$  et  $\Gamma^0$  coïncident avec ses dérivées sur cet espace. Le calcul complet des distributions dérivées nécessite toutefois un traitement correct des fonctions au voisinage de l'origine. Pour ce faire, on considère la distribution  $\underline{\underline{G}}^0$  comme la limite, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , d'une suite de fonctions localement sommables  $\underline{\underline{G}}_\epsilon^0$  qui convergent vers  $\underline{\underline{G}}^0$  presque partout et dont les dérivées au sens des distributions sont bien connues et admettent des limites connues, qui s'identifient aux dérivées correspondantes de  $\underline{\underline{G}}^0$ .



Les fonctions les plus simples sont celles qui s'identifient à  $\underline{\underline{G}}^0(\underline{x})$  pour  $\|\underline{x}\| > \epsilon$  et s'annulent dans la boule  $\mathcal{B}_\epsilon$  de centre l'origine et de rayon  $\epsilon$  et dont les dérivées peuvent être calculées par la formule des sauts. Notant que  $\frac{\partial \|\underline{x}\|}{\partial \underline{x}} = \underline{e}$  et  $\frac{\partial \underline{e}}{\partial \underline{x}} = \frac{1}{\|\underline{x}\|} \left[ \underline{I} - \underline{e} \otimes \underline{e} \right]$ , on obtient, pour les dérivées d'ordre 1 :

$$\frac{\partial \underline{\underline{G}}_\epsilon^0}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = -\frac{I_\epsilon}{\|\underline{x}\|^2} \left[ \underline{f}^0(\underline{e}) \otimes \underline{e} - \frac{\partial \underline{f}^0}{\partial \underline{e}}(\underline{e}) + \left( \frac{\partial \underline{f}^0}{\partial \underline{e}}(\underline{e}) \cdot \underline{e} \right) \otimes \underline{e} \right] + \underline{f}^0(\underline{e}) \otimes \underline{e} \frac{d\sigma_\epsilon}{\epsilon}, \quad (\text{B.61})$$

où  $I_\epsilon$  vaut 1 pour  $\|\underline{x}\| > \epsilon$  et 0 sinon et  $d\sigma_\epsilon$  est la distribution de simple couche associée à la sphère de centre l'origine et de rayon  $\epsilon$ . Elle varie comme  $\epsilon^2$  si bien que la limite du dernier terme est nulle.  $\underline{\underline{E}}^0$  est donc une fonction dont l'expression est donnée, après symétrisation adéquate et extension à tout l'espace, par le premier membre localement sommable de la relation ci-dessus. Elle est de la forme :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \frac{1}{\|\underline{x}\|^2} \underline{g}^0(\underline{e}), \quad (\text{B.62})$$

où  $\underline{g}^0$  est une fonction impaire de  $\underline{e}$ .

Les dérivées d'ordre deux de  $\underline{\underline{G}}^0$  peuvent être calculées de la même manière en considérant des fonctions  $\underline{\underline{E}}_\epsilon^0$  qui s'identifient à  $\underline{\underline{E}}^0$  sauf à l'intérieur de  $\mathcal{B}_\epsilon$  où elles s'annulent. On obtient :

$$\frac{\partial \underline{\underline{E}}_\epsilon^0}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = -\frac{I_\epsilon}{2\|\underline{x}\|^3} \left[ \underline{g}^0(\underline{e}) \otimes \underline{e} - 2\frac{\partial \underline{g}^0}{\partial \underline{e}}(\underline{e}) + 2\left( \frac{\partial \underline{g}^0}{\partial \underline{e}}(\underline{e}) \cdot \underline{e} \right) \otimes \underline{e} \right] + \underline{g}^0(\underline{e}) \otimes \underline{e} \frac{d\sigma_\epsilon}{\epsilon^2}. \quad (\text{B.63})$$

Lorsque l'on applique ces distributions à une fonction  $\phi \in C^\infty$ , le second terme tend vers  $\int_{\|\underline{e}\|=1} \underline{g}^0(\underline{e}) \otimes \underline{e} ds \phi(0)$  : la distribution déterminée par la limite du second terme est proportionnelle au pic de Dirac  $\delta$ . Le premier terme admet donc lui aussi une limite finie et la distribution vers laquelle il converge est précisément la valeur principale associée à la fonction non sommable qui le définit.

L'opérateur  $\underline{\underline{\Gamma}}^0$  se décompose donc en une partie régulière et une partie singulière :

$$\underline{\underline{\Gamma}}^0 = VP(\underline{\underline{F}}^0) + \underline{\underline{E}}^0 \delta. \quad (\text{B.64})$$

$VP(\underline{\underline{F}}^0)$  est la valeur principale de la fonction  $\underline{\underline{F}}^0$ , c'est-à-dire :

$$\forall \underline{p} \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \quad \int VP(\underline{\underline{F}}^0) : \underline{p} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \mathcal{B}_\epsilon} \underline{\underline{F}}^0 : \underline{p} d\omega, \quad (\text{B.65})$$

et  $\underline{\underline{F}}^0 = -\nabla^s \nabla^s \underline{\underline{G}}^0$  est la fonction déduite de  $\underline{\underline{G}}^0$  par dérivation en tout point distinct de l'origine.

Cette décomposition classique n'est toutefois pas unique. De façon plus générale, pour tout domaine  $V_1$  contenant l'origine et définissant, comme au paragraphe précédent, une famille de domaines  $V_\epsilon$ ,  $\epsilon \neq 0$  par homothétie, on peut en effet écrire l'égalité :

$$\underline{\underline{\Gamma}}^0 = VP_{V_1}(\underline{\underline{F}}^0) + \underline{\underline{E}}_{V_1}^0 \delta, \quad (\text{B.66})$$

avec

$$\forall \underline{p} \in \mathbb{T}_2^s(\Omega) \quad \int VP_{V_1}(\underline{\underline{F}}^0) : \underline{p} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus V_\epsilon} \underline{\underline{F}}^0 : \underline{p} d\omega. \quad (\text{B.67})$$

L'existence de cette « valeur principale généralisée » découle des propriétés établies au paragraphe précédent. Le tenseur symétrique  $\underline{\underline{E}}_{V_1}^0$  est celui introduit au paragraphe précédent ; il donne la déformation  $\underline{\underline{e}}$  à l'origine lorsqu'une polarisation uniforme  $\underline{p}$  est appliquée dans le domaine  $V_1$  :

$$\underline{\underline{e}}(0) = \underline{\underline{E}}_{V_1}^0 : \underline{p}. \quad (\text{B.68})$$

### B.2.B.e Invariance par les transformations conservant $C^0$

Soit  $\mathcal{T}$ , une transformation orthonormale, d'inverse  $\mathcal{T}^{-\infty}$ , conservant l'origine, c'est-à-dire une rotation ou une symétrie<sup>5</sup>. On note  $\mathcal{T}(f)$  le transformé de la grandeur tensorielle  $f$ . Un champ tensoriel  $f : \underline{x} \rightarrow f(\underline{x})$  est transformé en le champ  $\mathcal{T}f : \underline{x} \rightarrow \mathcal{T}(f(\mathcal{T}^{-1}(\underline{x})))$ .

Le champ de forces de volume  $\underline{f}$  induit dans le milieu infini homogène de tenseurs des modules  $C^0$  un champ de déplacement  $\underline{u} = \underline{G}^0(C^0) \star \underline{f}$ . En appliquant la transformation  $\mathcal{T}$  à cette structure et à son chargement, ce champ devient  $\mathcal{T} [\underline{G}^0(C^0) \star \underline{f}]$ . Mais par ailleurs ce dernier champ peut aussi être estimé par  $\underline{G}^0(\mathcal{T}(C^0)) \star \mathcal{T}\underline{f}$ . En explicitant ces relations, il vient :

$$\int \mathcal{T} [\underline{G}^0(C^0)(\mathcal{T}^{-1}(\underline{x}), \underline{y}) \underline{f}(\underline{y})] d\omega_y = \int \underline{G}^0(\mathcal{T}(C^0))(\underline{x}, \underline{y}) \mathcal{T}(\underline{f}(\mathcal{T}^{-1}(\underline{y}))) d\omega_y. \quad (\text{B.69})$$

L'égalité étant vérifiée pour tout  $\underline{f}$ , son application en  $\underline{x} = 0$ , tel que  $\mathcal{T}(\underline{x}) = 0$ , conduit à :

$$\forall \underline{x} \in \Omega \quad \underline{G}^0(\mathcal{T}(C^0))(\underline{x}) = \mathcal{T} [\underline{G}^0(C^0)(\mathcal{T}^{-1}(\underline{x})) \mathcal{T}^{-1}]. \quad (\text{B.70})$$

Le même raisonnement appliqué aux déformations induite par une distribution de polarisation dans la même structure conduit à la même propriété, interprétée au sens des distributions, satisfaite par  $\Gamma^0$  :

$$\forall \underline{x} \in \Omega \quad \Gamma^0(\mathcal{T}(C^0))(\underline{x}) = \mathcal{T} [\Gamma^0(C^0)(\mathcal{T}^{-1}(\underline{x})) \mathcal{T}^{-1}]. \quad (\text{B.71})$$

Ces relations induisent des propriétés de symétrie satisfaites par les parties singulières de l'opérateur  $\Gamma^0$  :

$$\text{Si } \begin{cases} C^0 \text{ est invariant par } \mathcal{T} \\ V_1 \text{ est invariant par } \mathcal{T} \end{cases} \text{ alors } \mathbf{E}_{V_1}^0 \text{ est invariant par } \mathcal{T}. \quad (\text{B.72})$$

On montre ainsi que si  $C^0$  est isotrope, la partie singulière sphérique de l'opérateur de Green modifié est isotrope, mais aussi que la partie singulière associée à un ellipsoïde admet une symétrie rectangulaire, d'axes donnés par les directions principales de l'ellipsoïde, et isotrope transverse lorsque deux demi-axes sont égaux, ou encore que lorsque le matériaux admet une symétrie cubique,  $\mathbf{E}^0$  l'admet aussi. Plus généralement, le degré de symétrie de  $\mathbf{E}_{V_1}^0$  est au moins égal au plus grand degré de symétrie commun à  $C^0$  et à  $V_1$ .

### B.2.B.f Intégration sur un volume ellipsoïdal

Les résultats précédents s'appliquent à des domaines  $V_1$  de géométrie quelconque. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'ellipsoïdes, il est possible de les enrichir en tirant profit de la propriété d'Eshelby (*cf.* paragraphe **1.2.B.d**), qui assure que la déformation au sein du volume  $E_1$  ellipsoïdal induit par une polarisation homogène sur ce même domaine est elle-même homogène. Exprimée au moyen du tenseur de Green modifié, cette propriété assure que :

$$\forall \underline{x} \in E_1 \quad \int_{E_1} \Gamma^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y = \mathcal{P}_{E_1}^0, \quad (\text{B.73})$$

où  $\mathcal{P}_{E_1}^0$  est le tenseur symétrique d'ordre quatre opérant sur  $\mathbb{T}_2^s$  introduit par Hill.

Par un raisonnement directement dérivé de celui utilisé au paragraphe **B.2.B.c**, mais qui s'applique non seulement à la déformation à l'origine mais aussi à celle en tout point de  $E_1$ , on établit :

$$\forall \lambda > 1, \forall \underline{x} \in E_1, \quad \int_{E_{\lambda,1}} \Gamma^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y = 0, \quad (\text{B.74})$$

$E_{\lambda,1}$  étant le domaine délimité par l'ellipsoïde  $E_1$  et son dilaté  $E_\lambda$ . À la limite  $\lambda \rightarrow 1$ , il vient :

$$\forall \underline{y} \in E_1, \int_{\partial S} \Gamma^0(\underline{A}\underline{x} - \underline{y}) ds_x = 0, \quad (\text{B.75})$$

où  $\underline{A}$  caractérise l'ellipsoïde  $E_1$  selon  $\|\underline{A}^{-1}\underline{x}\| \leq 1$ .

---

<sup>5</sup>ou de manière équivalente un changement de repère orthonormal. L'hypothèse de conservation de l'origine n'est pas restrictive mais simplement liée à un choix initial de l'origine ; elle permet une simplification d'écriture)

## B.3 Relations milieu borné / milieu infini

### B.3.A Relations générales

Les propriétés particulières de l'opérateur de Green en milieu infini homogène font qu'il est souvent judicieux de faire appel à celui-ci pour traiter des problèmes définis sur un milieu borné et soumis à des conditions aux limites précises à ces frontières. Considérons donc à nouveau la situation traitée au paragraphe **B.1**, mais utilisons pour la résoudre formellement, la solution élémentaire  $\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{G}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{f}$  qui résout le problème en milieu infini pour une force imposée  $\underline{f}\delta(\underline{x} - \underline{y})$ .

Le champ  $\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$  est maintenant SA avec la force  $\underline{f}$  en  $\underline{y}$  et des forces  $\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$  sur  $\partial\Omega$ . Par le principe des travaux virtuels, on en tire :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{f}\delta(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_x + \int_{\partial\Omega^u} \underline{u}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) ds_x \\ & + \int_{\partial\Omega^F} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) ds_x = \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{x}) : \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Par ailleurs  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}(\underline{x}) + \underline{p}^d(\underline{x})$  est toujours SA avec  $\underline{f}^d$  et  $\underline{F}^d$  mais  $\underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$  est CA avec  $\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y})$  sur  $\partial\Omega$ . D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{x}) : \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x & = \int_{\Omega} \underline{f}^d(\underline{x}) \cdot \underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x - \int_{\Omega} \underline{p}^d(\underline{x}) : \underline{\epsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) d\omega_x \\ & + \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d(\underline{x}) \cdot \underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}) ds_x + \int_{\partial\Omega^u} \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}) ds_x. \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

La combinaison des deux relations, suivi d'une transposition et d'une simplification par  $\underline{f}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}) & = \int_{\Omega} \underline{G}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{f}^d(\underline{y}) d\omega_y + \int_{\Omega} \underline{E}^{0T}(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{p}^d(\underline{y}) d\omega_y \\ & + \int_{\partial\Omega^F} \underline{G}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{F}^d(\underline{y}) ds_y + \int_{\partial\Omega^u} \underline{E}^{0T}(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}^d(\underline{y})] ds_y \\ & + \int_{\partial\Omega^u} \underline{G}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y})] ds_y + \int_{\partial\Omega^F} \underline{E}^{0T}(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}(\underline{y})] ds_y. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Une dérivation suivie d'une symétrisation conduit à l'expression de la déformation :

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}(\underline{x}) & = \int_{\Omega} \underline{E}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{f}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega} \underline{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{p}^d(\underline{y}) d\omega_y \\ & + \int_{\partial\Omega^F} \underline{E}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{F}^d(\underline{y}) ds_y - \int_{\partial\Omega^u} \underline{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}^d(\underline{y})] ds_y \\ & + \int_{\partial\Omega^u} \underline{E}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y})] ds_y - \int_{\partial\Omega^F} \underline{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}(\underline{y})] ds_y, \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

où, bien sûr, les intégrales invoquant l'opérateur  $\underline{\Gamma}^0$  sont à prendre au sens des distributions. L'on constate l'apparition de deux termes supplémentaires par rapport aux relations analogues du paragraphe **B.1**, correspondant à la présence des conditions aux limites dont l'opérateur de Green associé au milieu infini ne rend pas intrinsèquement compte.

### B.3.B Application au VER macrohomogène

Le domaine  $\Omega$  considéré est maintenant un VER d'un milieu hétérogène macrohomogène (cf. paragraphe **1.1.C**), d'extension finie, et il est soumis à des conditions aux limites elles-mêmes macrohomogènes, c'est-à-dire de la forme :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega^u \quad \underline{u}^d(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{u}^{dl}(\underline{x}) \quad (\text{B.80})$$

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega^F \quad \underline{F}^d(\underline{x}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \underline{f}^{dl}(\underline{x}), \quad (\text{B.81})$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  sont la contrainte et la déformation macroscopiques, homogènes sur le VER, et  $\underline{\underline{u}}^{d'}$  et  $\underline{\underline{f}}^{d'}$  sont les fluctuations locales, non seulement de moyenne nulle, mais qui de plus oscillent autour de 0 avec une longueur d'onde beaucoup plus courte que les dimensions du VER et une amplitude bornée. Les sollicitations volumiques  $\underline{\underline{f}}^{d'}$  et  $\underline{\underline{p}}^{d'}$  suivent elles-aussi des variations de ce type. Par ailleurs, la réponse à cette sollicitation peut elle-même être décomposée en deux échelles, et c'est en particulier le cas du déplacement sur  $\partial\Omega^F$  et du vecteur force sur  $\partial\Omega^u$ . On a donc, de manière plus générale :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad \underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} + \underline{u}'(\underline{x}) \quad (\text{B.82})$$

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \underline{f}'(\underline{x}). \quad (\text{B.83})$$

Enfin (voir la discussion du paragraphe 1.1.C), les champs locaux  $\underline{\underline{e}}(\underline{x})$  au sein du VER, pour  $\underline{x}$  « loin » de  $\partial\Omega$ , ne dépendent que de la sollicitation macroscopique et pas des fluctuations au bord, dont l'effet se limite à une couche périphérique d'épaisseur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des fluctuations.

L'application de (B.79) à cette situation conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{e}}(\underline{x}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{f}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y \\ &+ \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \left[ \underline{C}^0 : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega} \right] \cdot \underline{n}(\underline{y}) + \underline{f}'(\underline{y}) \Big] ds_y \\ &- \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{C}^0 : \left[ \underline{n}(\underline{y}) \otimes \left[ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{y} + \underline{u}'(\underline{y}) \right] \right] ds_y, \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

où l'on a utilisé  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{C}^0 : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega}$ . Les intégrales de bord comportent des termes dépendant des conditions aux limites macroscopiques et des termes fonctions des fluctuations. Les premiers conduisent aux quantités suivantes :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \left[ \underline{C}^0 : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega} \right] \cdot \underline{n}(\underline{y}) ds_y = \int_{\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y : \left[ \underline{C}^0 : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega} \right] \quad (\text{B.85})$$

$$- \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{C}^0 : \left[ \underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{\underline{E}} \cdot \underline{y} \right] ds_y = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y : \underline{C}^0 : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}}. \quad (\text{B.86})$$

La première égalité est une application de la formule de Green, alors que la seconde s'interprète comme l'application du principe des travaux virtuels au champ SA  $-\underline{C}^0 : \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{y} - \underline{x}) : \underline{q} + \underline{q}\delta(\underline{y} - \underline{x})$  et au champ homogène  $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{y}$ , CA, pour toute polarisation ponctuelle  $\underline{q}$  en  $\underline{x}$ . Ces termes conduisent donc à :

$$\underline{\underline{E}} + \underline{E}_{\Omega}^0(\underline{x}) : \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega}, \quad (\text{B.87})$$

où  $\underline{E}_{\Omega}^0(\underline{x})$  est l'opérateur déduit de celui introduit au paragraphe précédent lorsqu'on translate l'origine en  $\underline{x}$ . Il dépend de la géométrie du domaine  $\Omega$ , de la position au sein de celui-ci, mais pas de son extension, dans le sens d'une invariance par homothétie de centre  $\underline{x}$ .

Il reste à traiter les termes dépendant des conditions aux limites fluctuantes. Considérons d'abord celui induit par les fluctuations du vecteur contrainte :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{f}'(\underline{y}) ds_y. \quad (\text{B.88})$$

Le changement de variable  $\underline{x} - \underline{y} = \lambda(\underline{x} - \underline{y}')$  avec  $\lambda > 0$  permet, grâce à l'homogénéité de degré  $-2$  de  $\underline{\underline{E}}^0(\underline{x})$ , d'écrire ce terme sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega_{\underline{x},1}} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{f}'(\underline{x} + \lambda(\underline{y} - \underline{x})) ds_y, \quad (\text{B.89})$$

où  $\partial\Omega_{\underline{x},1}$  est déduit de  $\partial\Omega$  par l'homothétie de rapport  $1/\lambda$  et de centre  $\underline{x}$ . En prenant  $\lambda$  de telle sorte que le minimum de  $\|\underline{x} - \underline{y}\|$  pour  $\underline{y} \in \partial\Omega_{\underline{x},1}$  soit par exemple égal à l'unité, et si  $\underline{x}$  est au contraire « loin » de  $\partial\Omega$ , alors  $\lambda$  est de l'ordre de grandeur de la dimension caractéristique  $L$  du VER. Par

ailleurs,  $\underline{f}'$  fluctue autour de zéro avec une longueur d'onde caractéristique  $l \ll L$ . Dans l'intégration ci-dessus et dans l'hypothèse où les bords de  $\Omega$  sont suffisamment régulières, la longueur d'onde des variations de  $\underline{E}^0$  est proche de 1 alors que celle de  $\underline{f}'$  est  $l/L \ll 1$ . Le résultat ne dépend alors que de la moyenne de  $\underline{f}'$ , et est donc nul.

L'effet des fluctuations du déplacement sur  $\partial\Omega$  est également nul. Le même changement de variable que ci-dessus donne en effet :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \mathbf{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}'(\underline{y})] ds_y = \int_{\partial\Omega_{\underline{x},1}} \frac{1}{\lambda} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \mathbf{C}^0 : [\underline{n}(\underline{y}) \otimes \underline{u}'(\underline{x} + \lambda(\underline{y} - \underline{x}))] ds_y, \quad (\text{B.90})$$

le facteur  $\frac{1}{\lambda}$  résultant de l'homogénéité de degré  $-3$  de  $\mathbf{\Gamma}^0(\underline{x})$ . Comme plus haut, la longueur d'onde des variations de  $\frac{1}{L} \mathbf{\Gamma}^0 \cdot \underline{n}$  est de l'ordre de 1 et celle du déplacement  $\underline{u}'$  est  $l/L$ . Le résultat ne dépend alors que de la moyenne de ce dernier et est donc nul.

En conclusion, on a l'égalité :

$$\forall \underline{x} \in \Omega \quad \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{x}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y, \quad (\text{B.91})$$

avec

$$\forall \underline{x} \ll \text{« loin » de } \partial\Omega \quad \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega} + \mathbf{E}_{\Omega}^0(\underline{x}) : \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega}, \quad (\text{B.92})$$

où

$$\mathbf{E}_{\Omega}^0(\underline{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y. \quad (\text{B.93})$$

En utilisant les relations  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{p}}^d$ ,  $\underline{\underline{e}}^d = \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{p}}^d$  et  $\mathbf{\Delta}^0 = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{\Gamma}^0] : \mathbf{C}^0$ , on en déduit facilement l'expression de la contrainte :

$$\forall \underline{x} \in \Omega \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}) + \int_{\Omega} \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y + \int_{\Omega} \mathbf{\Delta}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{e}}^d(\underline{y}) d\omega_y, \quad (\text{B.94})$$

avec

$$\forall \underline{x} \ll \text{« loin » de } \partial\Omega \quad \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} - \mathbf{G}_{\Omega}^0(\underline{x}) : \langle \underline{\underline{e}}^d \rangle_{\Omega}, \quad (\text{B.95})$$

où

$$\mathbf{G}_{\Omega}^0(\underline{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{\Delta}^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_y = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{E}^0] : \mathbf{C}^0. \quad (\text{B.96})$$

Rappelons que ces relations s'appliquent quelles que soient les conditions aux limites appliquées, à conditions qu'elles soient macrohomogènes.

On notera la dépendance en  $\underline{x}$  de  $\mathbf{E}_{\Omega}^0$  et  $\mathbf{G}_{\Omega}^0$  qui disparaît lorsque  $\Omega$  est un ellipsoïde  $E$ , en vertu de la propriété (B.73). On pourra alors écrire

$$\forall \underline{x} \in \Omega \ll \text{« loin » de } \partial\Omega \quad \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \int_{\Omega} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y \quad (\text{B.97})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \int_{\Omega} \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y + \int_{\Omega} \mathbf{\Delta}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{e}}^d(\underline{y}) d\omega_y, \quad (\text{B.98})$$

avec

$$\underline{\underline{\epsilon}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_E + \mathcal{P}_E^0 : \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_E \quad (\text{B.99})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_E - \mathcal{Q}_E^0 : \langle \underline{\underline{e}}^d \rangle_E, \quad (\text{B.100})$$

où

$$\mathcal{P}_E^0 = \int_E \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) d\omega_y \quad (\text{B.101})$$

$$\mathcal{Q}_E^0 = \int_E \mathbf{\Delta}^0(\underline{y}) d\omega_y. \quad (\text{B.102})$$

Mais de manière plus générale, les relations ci-dessus sont vraies pour tout domaine macrohomogène d'une microstructure hétérogène  $\mathcal{S}$ . Si cette dernière est stationnaire et si  $\Omega_0$  est un tel domaine,

il en sera de même de tout domaine  $\Omega(\underline{x})$  déduit de  $\Omega_0$  par translation de vecteur  $\underline{x}$ . En prenant  $\Omega_0$  tel que l'origine soit sensiblement centrée dans ce domaine, et donc loin du bord  $\partial\Omega_0$ , les relations ci-dessus utilisées avec  $\Omega = \Omega(\underline{x})$  deviennent :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} \quad \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \int_{\Omega(\underline{x})} \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y - \int_{\Omega(\underline{x})} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y \quad (\text{B.103})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \int_{\Omega(\underline{x})} \underline{\underline{C}}^0 : \underline{\underline{E}}^0(\underline{x} - \underline{y}) \cdot \underline{\underline{f}}^d(\underline{y}) d\omega_y + \int_{\Omega(\underline{x})} \underline{\underline{\Delta}}^0(\underline{x} - \underline{y}) : \underline{\underline{e}}^d(\underline{y}) d\omega_y \quad (\text{B.104})$$

avec

$$\underline{\underline{\epsilon}}^0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega(\underline{x})} + \underline{\underline{E}}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega(\underline{x})} \quad (\text{B.105})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega(\underline{x})} - \underline{\underline{G}}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{e}}^d \rangle_{\Omega(\underline{x})}, \quad (\text{B.106})$$

où

$$\underline{\underline{E}}_{\Omega_0}^0 = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Gamma}}^0(\underline{y}) d\omega_y \quad (\text{B.107})$$

$$\underline{\underline{G}}_{\Omega_0}^0 = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Delta}}^0(\underline{y}) d\omega_y. \quad (\text{B.108})$$

Les termes  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  sont maintenant indépendants<sup>6</sup>, du point  $\underline{x}$  même dans la situation où  $\Omega_0$  n'est pas un ellipsoïde. Les relations ci-dessus s'appliquent en tout point  $\underline{x}$  tel que  $\Omega(\underline{x})$  appartienne à  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire pas trop loin du bord de la structure. Il n'y a pas de restriction particulière quant à la géométrie de  $\Omega_0$  : il doit simplement être suffisamment grand pour que la déformation et la contrainte au point  $\underline{x}$  ne dépendent pas des fluctuations locales des conditions aux limites appliquées aux bords  $\partial\Omega(\underline{x})$  et que les variations des moyennes des champs  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sur ce domaine avec la position  $\underline{x}$  soient bien macroscopiques.

Ces résultats permettent d'exprimer les opérateurs de Green en milieu fini en fonction de ceux en milieu infini. Lorsque  $\Omega_0$  est une sphère  $S$ , en l'absence de forces de volume et avec des déplacements nuls imposés aux bords  $\partial S(\underline{x})$  (situation de type  $I$ ), la déformation en  $\underline{x}$  vaut  $-\int_{S(\underline{x})} \underline{\underline{\Gamma}}_{S(\underline{x})I}^0(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y$  ce qui établit la relation formelle classique [182] :

$$\underline{\underline{\Gamma}}_{SI}^0 = \underline{\underline{\Gamma}}^0 - \underline{\underline{E}}^0 \langle \cdot \rangle_S, \quad (\text{B.109})$$

où  $\underline{\underline{E}}^0$  est le tenseur relatif à la partie singulière de l'opérateur de Green lorsqu'on applique la décomposition sphérique et  $\langle \cdot \rangle_S$  désigne l'opération de moyenne sur  $S$ . Avec des conditions de type  $II$ , la déformation s'écrit toujours  $-\int_{S(\underline{x})} \underline{\underline{\Gamma}}_{S(\underline{x})II}^0(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y$ , mais elle n'est plus de moyenne nulle :  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{S(\underline{x})} = -\underline{\underline{S}}^0 : \langle \underline{\underline{p}} \rangle_{S(\underline{x})}$ , si bien que l'on obtient :

$$\underline{\underline{\Gamma}}_{SII}^0 = \underline{\underline{\Gamma}}^0 + [\underline{\underline{S}}^0 - \underline{\underline{E}}^0] \langle \cdot \rangle_S. \quad (\text{B.110})$$

On retrouve alors formellement les propriétés (B.30) et (B.31) relatives aux moyennes sur  $S$  de  $\underline{\underline{\Gamma}}_{SI}^0$  et  $\underline{\underline{\Gamma}}_{SII}^0$ . Ces écritures se généralisent aisément aux domaines  $\Omega_0$  de géométrie quelconque mais elles sont en toute rigueur abusives et ne s'appliquent qu'à la valeur au centre de la sphère ou du domaine  $\Omega_0$ . Lorsque ce dernier est très grand (c'est-à-dire « infini »), elle s'applique aussi de manière approchée dans un voisinage de ce centre.

Il est préférable de préciser les domaines d'intégration, variables en fonction du point, et d'opérer à partir des relations explicites (B.103). Par exemple, le calcul précis des moyennes sur  $\Omega(\underline{x})$  des termes

<sup>6</sup>À condition bien-sûr que les moyennes  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega(\underline{x})}$ ,  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega(\underline{x})}$  et  $\langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega(\underline{x})}$  le soient. On dira plus justement que  $\underline{\underline{\epsilon}}^0$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  sont des grandeurs macroscopiques.

intégraux nécessite un changement de variable, le recours à la relation de Fubini et l'utilisation de la stationnarité de  $\langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega(\underline{y})}$  pour  $\underline{y} \in \Omega(\underline{x})$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(\underline{x})} \int_{\Omega(\underline{x})} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{u} - \underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{y}) d\omega_y d\omega_u &= \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(-\underline{y}) : \underline{\underline{p}}^d(\underline{u} + \underline{y} + \underline{x}) d\omega_y d\omega_u \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) : \int_{\Omega_0} \underline{\underline{p}}^d(\underline{u} + \underline{y} + \underline{x}) d\omega_u d\omega_y \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{y}) d\omega_y : \int_{\Omega_0} \underline{\underline{p}}^d(\underline{u} + \underline{x}) d\omega_u \\
&= |\Omega(\underline{x})| \mathbf{E}_{\Omega_0}^0 : \langle \underline{\underline{p}}^d \rangle_{\Omega(\underline{x})}.
\end{aligned} \tag{B.111}$$

Précisons bien que les résultats ci-dessous sont une conséquence de la propriété de macrohomogénéité, qui reste fondamentalement une hypothèse.

# Annexe C

## Problèmes d'inclusions

### C.1 Propriétés générales

#### C.1.A Relation d'Eshelby

La relation établie ici fournit la différence entre l'énergie élastique emmagasinée dans un milieu hétérogène élastique linéaire soumis à un certain chargement sur sa frontière et l'énergie dans un milieu géométriquement identique au précédent et soumis au même chargement, mais avec des valeurs différentes des tenseurs des modules dans un certain sous-domaine, l'« inclusion ». Elle généralise celle utilisée par Eshelby<sup>1</sup>[54].

Soit  $\Omega$  le milieu hétérogène considéré, de tenseurs des modules locaux  $\mathbf{C}^0(\underline{x})$ . Il est soumis aux déplacements imposés  $\underline{u}^d$  sur une partie de sa frontière  $\partial\Omega^u$  et aux forces  $\underline{F}^d$  sur la partie complémentaire  $\partial\Omega^F$  ; il n'y a pas de forces de volume. Sous ces conditions, l'énergie élastique emmagasinée dans  $\Omega$  vaut  $U^0 = \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}} d\omega$ . Soit par ailleurs  $I$  un sous-domaine de  $\Omega$  ne débouchant pas sur  $\partial\Omega$ . On s'intéresse aussi à l'énergie élastique  $U^1$  contenue dans la structure déduite de la précédente en remplaçant les tenseurs des modules dans  $I$  par  $\mathbf{C}^1(\underline{x})$  et soumise au même chargement.

Pour estimer l'écart  $\Delta U = U^1 - U^0$ , il convient de considérer une troisième configuration (voir figure C.1), déduite des deux précédentes en appliquant une distribution de forces extérieures supplémentaires  $\underline{F}^I$  sur la frontière  $\partial I$  de l'inclusion, de telle sorte que cette dernière se trouve dans son état naturel relâché et que l'énergie élastique y soit nulle. Cette distribution de forces est la même pour les deux situations initiales puisqu'elle ne dépend que du chargement sur  $\partial\Omega$  et des modules dans le domaine  $\Omega \setminus I$  (la « matrice »). Soit  $U^2$  l'énergie dans cette configuration. La variation d'énergie est alors donnée par le travail des forces extérieures :

$$\Delta U = [U^2 - U^0] + [U^1 - U^2] \quad (\text{C.1})$$

$$= \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot [\underline{u}^2 - \underline{u}^0] ds + \frac{1}{2} \int_{\partial I} -\underline{F}^I \cdot \underline{u}^0 ds + \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^2] ds + \frac{1}{2} \int_{\partial I} \underline{F}^I \cdot \underline{u}^1 ds \quad (\text{C.2})$$

$$= \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^0] ds + \frac{1}{2} \int_{\partial I} \underline{F}^I \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^0] ds, \quad (\text{C.3})$$

où  $\underline{u}^i$ ,  $i = [0, 1, 2]$  désigne le déplacement dans la situation  $i$ . Dans ces relations on a utilisé la linéarité du problème pour exprimer le travail de la force  $\underline{F}^I$  entre les différentes configurations.

L'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti à la matrice, entre les situations 0 et 1 conduit à :

$$\int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^1 ds + \int_{\partial\Omega^u} \underline{F}^0 \cdot \underline{u}^d ds + \int_{\partial I} \underline{F}^0 \cdot \underline{u}^1 ds = \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^0 ds + \int_{\partial\Omega^u} \underline{F}^1 \cdot \underline{u}^d ds + \int_{\partial I} \underline{F}^1 \cdot \underline{u}^0 ds. \quad (\text{C.4})$$

où  $\underline{F}^i$ ,  $i = [0, 1, 2]$  désigne le vecteur force qui s'exerce sur la matrice dans les situations  $i$ . Notons que sur  $\partial I$ , on a  $\underline{F}^2 = \underline{F}^I$ . Les relations de réciprocité entre la situation 2 et les situations 0 et 1 s'écrivent

---

<sup>1</sup>Notons que cet auteur utilise le terme d'« inhomogénéité » pour désigner une tel problème et réserve l'appellation d'« inclusion » au problème de déformation initiale non nulle dans un sous-domaine d'un milieu infini homogène (cf. paragraphe 1.2.B.d). Nous ne faisons pas cette distinction et traitons les deux situations conjointement.



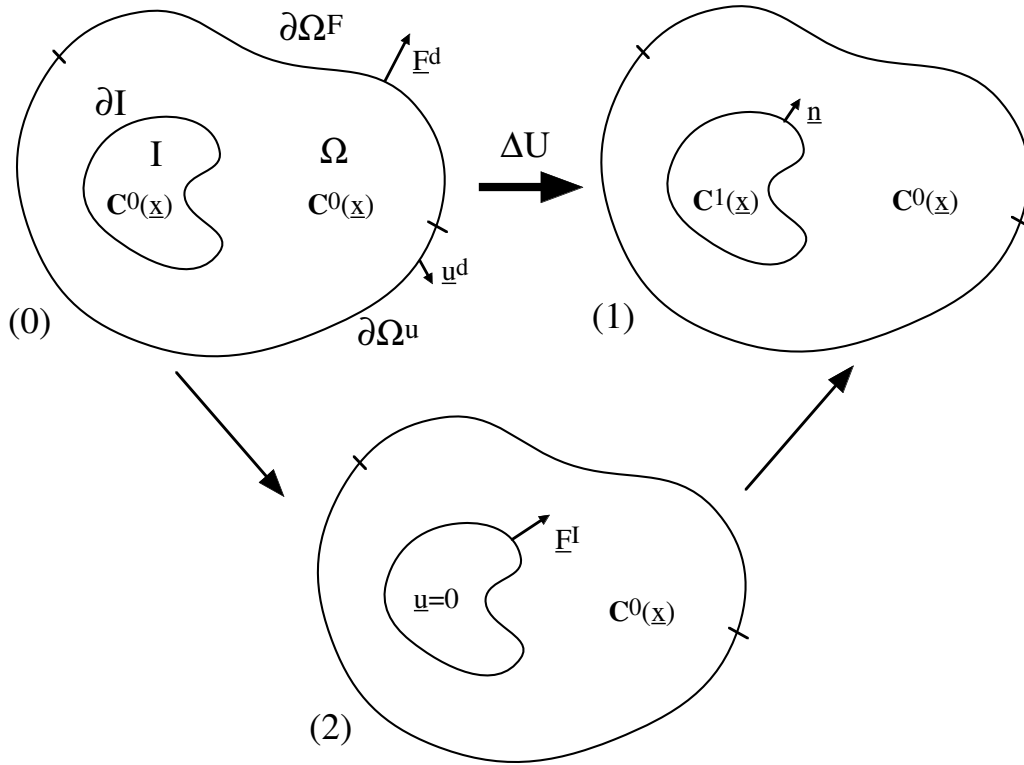


Figure C.1 : Propriété d'Eshelby

par ailleurs respectivement :

$$\int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^2 ds + \int_{\partial\Omega^u} \underline{F}^0 \cdot \underline{u}^d ds = \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^0 ds + \int_{\partial\Omega^u} \underline{F}^2 \cdot \underline{u}^d ds + \int_{\partial I} \underline{F}^2 \cdot \underline{u}^0 ds \quad (C.5)$$

$$\int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^2 ds + \int_{\partial\Omega^u} \underline{F}^1 \cdot \underline{u}^d ds = \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^1 ds + \int_{\partial\Omega^u} \underline{F}^2 \cdot \underline{u}^d ds + \int_{\partial I} \underline{F}^2 \cdot \underline{u}^1 ds, \quad (C.6)$$

d'où on déduit, par soustraction :

$$\int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^0] ds + \int_{\partial\Omega^u} [\underline{F}^0 - \underline{F}^1] \cdot \underline{u}^d ds + \int_{\partial I} \underline{F}^I \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^0] ds = 0.$$

L'exploitation de ces relations conduit aux trois expressions suivantes de  $\Delta U$  :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^0] ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^u} [\underline{F}^1 - \underline{F}^0] \cdot \underline{u}^d ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial I} \underline{n} \cdot [\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{u}^1 - \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{u}^0] ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot [\underline{u}^1 - \underline{u}^0] ds \\ &= +\frac{1}{2} \int_{\partial I} \underline{n} \cdot [\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{u}^1 - \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{u}^0] ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^u} [\underline{F}^1 - \underline{F}^0] \cdot \underline{u}^d ds, \end{aligned} \quad (C.7)$$

$\underline{n}$  étant la normale à  $\partial I$  unitaire sortante et  $\underline{\sigma}^i$ ,  $i \in [1, 2]$ , désignant la contrainte dans le problème  $i$ . On retrouve la relation d'Eshelby dans le cas particulier où les déplacements sont imposés sur tout  $\partial\Omega$  et dans celui de forces imposées sur tout  $\partial\Omega$  :

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \int_{\partial I} \underline{n} \cdot [\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{u}^1 - \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{u}^0] ds \quad \text{si } \partial\Omega^u = \partial\Omega \quad (C.8)$$

$$= +\frac{1}{2} \int_{\partial I} \underline{n} \cdot [\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{u}^1 - \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{u}^0] ds \quad \text{si } \partial\Omega^F = \partial\Omega. \quad (C.9)$$

Nous allons voir dans le paragraphe qui suit que la variation d'énergie élastique dans la structure  $\Omega$  n'est pas la quantité la plus judicieuse à considérer : il est préférable de s'intéresser à la variation

d'énergie potentielle (ou complémentaire) du système qui admet une expression unique ne faisant appel qu'aux grandeurs au sein de l'inclusion, valable quelles que soit les conditions aux limites invoquées. La valeur obtenue s'identifie aux expressions précédentes, au signe près, lorsque les conditions aux limites sont exprimées exclusivement en force ou exclusivement en déplacements.

### C.1.B Formulation variationnelle

Nous considérons maintenant la situation 1 comme une perturbation de la situation de référence 0 et établissons la formulation variationnelle caractérisant les champs solutions de la première situation en tant qu'écart par rapport à ceux de la seconde. Nous traitons de plus une situation légèrement plus générale que celle du paragraphe précédent, en prenant en compte une polarisation  $\underline{p}(\underline{x})$  non nulle dans l'inclusion, où la loi de comportement s'écrit maintenant :

$$\underline{\sigma} = \underline{C}^1(\underline{x}) : \underline{\epsilon} + \underline{p}(\underline{x}). \quad (\text{C.10})$$

Cette polarisation peut par exemple être due à une déformation de transformation ou à une dilatation thermique. Pour des raisons de simplification d'écriture, nous convenons par ailleurs que  $\underline{C}^1(\underline{x}) = \underline{C}^0(\underline{x})$  pour  $\underline{x} \in \Omega \setminus I$ . La figure C.2 résume les données du problème de référence 0 et de la situation perturbée 1.

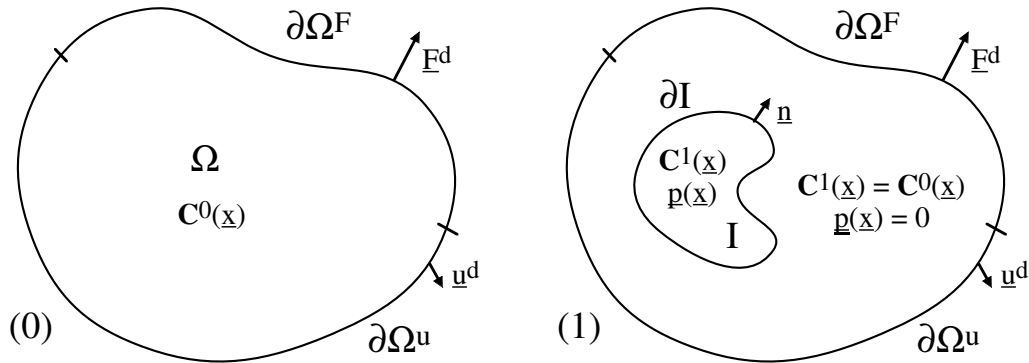


Figure C.2 : Problème général d'inclusion

Soient donc  $(\underline{u}^i, \underline{\epsilon}^i, \underline{\sigma}^i)$ ,  $i \in [1, 2]$ , les champs de déplacement, de déformation et de contrainte solutions pour les deux situations et définissons les écarts  $(\underline{u}', \underline{\epsilon}', \underline{\sigma}')$  par :

$$\begin{cases} \underline{u}^1 = \underline{u}^0 + \underline{u}' \\ \underline{\epsilon}^1 = \underline{\epsilon}^0 + \underline{\epsilon}' \\ \underline{\sigma}^1 = \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}' \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Tous les champs  $(\underline{u}^*, \underline{\epsilon}^*, \underline{\sigma}^*)$  CA ou SA pour le problème 1 peuvent par ailleurs être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{u}^* = \underline{u}^0 + \underline{u}^{*'} \\ \underline{\epsilon}^* = \underline{\epsilon}^0 + \underline{\epsilon}^{*'} \\ \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}^{*'} \end{cases}, \quad (\text{C.12})$$

où  $(\underline{u}^{*'}, \underline{\epsilon}^{*'})$  sont CA avec des déplacements nuls sur  $\partial\Omega^u$  et  $\underline{\sigma}^{*'}$  est SA avec des forces nulles sur  $\partial\Omega^F$ .

L'énergie potentielle relative au problème 1 peut être calculée pour tout  $(\underline{u}^*, \underline{\epsilon}^*)$  CA selon :

$$\begin{aligned} \phi(\underline{\epsilon}^*) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^* : [\underline{C}^1 : \underline{\epsilon}^* + 2\underline{p}] d\omega - \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^* ds \\ &= \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^0 : \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^0 d\omega - \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^0 ds \right] + \left[ \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^{*'} : \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^0 d\omega - \int_{\partial\Omega^F} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^{*'} ds \right] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^{*'} : \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^{*'} d\omega + \frac{1}{2} \int_I \underline{\epsilon}^* : [[\underline{C}^1 - \underline{C}^0] : \underline{\epsilon}^* + 2\underline{p}] d\omega \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Le premier crochet du membre de droite de cette équation est l'énergie potentielle du problème de référence et le second est identiquement nul d'après le principe des travaux virtuels,  $\mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^0$  étant SA avec  $\underline{\underline{F}}^d$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^{*'} CA$  avec des déplacements nuls sur  $\partial\Omega^u$ . La dernière ligne est stationnaire vis-à-vis de  $\underline{\underline{\epsilon}}^{*'}$  lorsque  $\underline{\underline{\epsilon}}^{*' = \underline{\underline{\epsilon}}'}$ , à savoir :

$$\forall d\underline{\underline{\epsilon}} CA \text{ avec } 0 \text{ sur } \partial\Omega^u \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}' : \mathbf{C}^0 : d\underline{\underline{\epsilon}} d\omega + \int_I \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}^1 + \underline{\underline{p}} \right] : d\underline{\underline{\epsilon}} d\omega = 0, \quad (\text{C.14})$$

et vaut donc, pour cette valeur de  $\underline{\underline{\epsilon}}^{*'}$  :

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}^1 + \underline{\underline{p}} \right] d\omega + \frac{1}{2} \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_I \left[ \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^0 \right] d\omega + \frac{1}{2} \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega. \end{aligned}$$

L'énergie complémentaire peut être calculée de la même manière. Pour tout champ  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}^{*'}$  SA pour le problème 1, on a :

$$\begin{aligned} 2\psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) &= \int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{p}} \right] : \mathbf{S}^1 : \left[ \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{p}} \right] d\omega - 2 \int_{\partial\Omega^u} \underline{\underline{u}}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{n}} ds \\ &= \left[ \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^0 : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^0 d\omega - 2 \int_{\partial\Omega^u} \underline{\underline{u}}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{n}} ds \right] + 2 \left[ \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{*' : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^0 d\omega + \int_{\partial\Omega^u} \underline{\underline{u}}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{*' \cdot \underline{\underline{n}} ds \right] \\ &\quad + \left[ \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{*' : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^{*' d\omega + \int_I \underline{\underline{\sigma}}^* : \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0] : \underline{\underline{\sigma}}^* - 2\mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] d\omega + \int_I \underline{\underline{p}} : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \right], \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

le premier crochet du membre de droite étant l'énergie complémentaire de la situation de référence et le second étant identiquement nul. La dernière ligne est stationnaire vis-à-vis de  $\underline{\underline{\sigma}}^{*'}$  lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}^{*' = \underline{\underline{\sigma}}'}$ , soit :

$$\forall d\underline{\underline{\sigma}} SA \text{ avec } 0 \text{ sur } \partial\Omega^F \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \mathbf{S}^0 : d\underline{\underline{\sigma}} d\omega + \int_I \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0] : \underline{\underline{\sigma}}^1 - \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] : d\underline{\underline{\sigma}} d\omega = 0, \quad (\text{C.16})$$

et est égale, pour cette valeur de  $\underline{\underline{\sigma}}^{*'}$ , à  $-\Delta W$ , puisque

$$\begin{aligned} & - \int_I \underline{\underline{\sigma}}^0 : \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0] : \underline{\underline{\sigma}}^1 - \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] d\omega + \int_I \left[ \underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{p}} \right] : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \\ &= \int_I \left[ \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^0 \right] d\omega + \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \end{aligned}$$

En soustrayant l'énergie potentielle du problème de référence aux inégalités variationnelles classiques relatives à la solution du problème 1, on obtient ainsi la formulation variationnelle suivante caractérisant la perturbation  $(\underline{\underline{\sigma}}', \underline{\underline{\epsilon}}')$  induite par les changements de module et la polarisation locale sur la solution de référence  $(\underline{\underline{\sigma}}^0, \underline{\underline{\epsilon}}^0)$  :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^{*' SA \text{ avec des forces nulles sur } \partial\Omega^F, \quad \forall \underline{\underline{\epsilon}}^{*' CA \text{ avec des déplacements nuls sur } \partial\Omega^u, \quad (\text{C.17}) \\ -\psi'(\underline{\underline{\sigma}}^{*'}) \leq -\psi'(\underline{\underline{\sigma}}') = \Delta W = \phi'(\underline{\underline{\epsilon}}') \leq \phi'(\underline{\underline{\epsilon}}^{*'})$$

avec

$$\begin{aligned} 2\psi'(\underline{\underline{\sigma}}^{*'}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{*' : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^{*' d\omega + \int_I \left[ \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}^{*' \right] : \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0] : \left[ \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}^{*' \right] - 2\mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] d\omega \\ &\quad + \int_I \underline{\underline{p}} : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega, \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

$$2\phi'(\underline{\underline{\epsilon}}^{*'}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}^{*' : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^{*' d\omega + \int_I \left[ \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^{*' \right] : \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \left[ \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^{*' \right] + 2\underline{\underline{p}} \right] d\omega. \quad (\text{C.19})$$

L'écart  $\Delta W$  entre les valeurs stationnaires de l'énergie potentielle ou de l'énergie complémentaire de la situation perturbée et celles de la situation de référence admet les diverses représentations suivantes :

$$2\Delta W = \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}^1 + \underline{\underline{p}} \right] d\omega + \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \quad (\text{C.20})$$

$$= - \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}' : \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}' d\omega + \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \left[ [\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}^0 + 2\underline{\underline{p}} \right] d\omega \quad (\text{C.21})$$

$$= \int_I \underline{\underline{\sigma}}^0 : \left[ [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^1] : \underline{\underline{\sigma}}^1 + \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] d\omega + \int_I \left[ \underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{p}} \right] : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \quad (\text{C.22})$$

$$= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{\sigma}}' d\omega - \int_I \underline{\underline{\sigma}}^0 : \left[ [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0] : \underline{\underline{\sigma}}^0 - 2\mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] d\omega - \int_I \underline{\underline{p}} : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega, \quad (\text{C.23})$$

$$= \int_I \left[ \underline{\underline{\epsilon}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^0 \right] d\omega + \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \quad (\text{C.24})$$

$$= \int_{\partial I} \underline{\underline{n}} \cdot \left[ \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{\underline{u}}^0 - \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{u}}^1 \right] ds + \int_I \underline{\underline{\epsilon}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega, \quad (\text{C.25})$$

où l'on pourra reconnaître un terme des relations d'Eshelby (C.7), lorsque la polarisation est nulle. La dernière égalité découle de l'admissibilité statique ou cinématique des champs en question.

### C.1.C Application au milieu infini

Les champs solutions de la formulation variationnelle précédente satisfont les relations suivantes :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}' : \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}' d\omega = \int_I \underline{\underline{\epsilon}}' : \left[ [\mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^1] : \underline{\underline{\epsilon}}^0 - \underline{\underline{p}} \right] d\omega \quad (\text{C.26})$$

$$\text{et} \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{\sigma}}' d\omega = \int_I \underline{\underline{\sigma}}' : \left[ [\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^1] : \underline{\underline{\sigma}}^0 + \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \right] d\omega. \quad (\text{C.27})$$

Les intégrands des premiers membres de ces égalités sont quadratiques en  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  ou  $\underline{\underline{\sigma}}'$ . Ceux des seconds membres sont bien évidemment bornés sur le domaine d'intégration  $I$ . L'extension du domaine dans lequel l'amplitude des perturbations  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  ou  $\underline{\underline{\sigma}}'$  n'est pas négligeable est donc de l'ordre de grandeur de la taille de l'inclusion  $I$ . Nous admettons de surcroît, par application du principe de Saint-Venant, que ce domaine se situe à proximité de l'inclusion : les perturbations sont par essence *locales*.

Cette propriété fait tout l'intérêt de la formulation variationnelle proposée ci-dessus dans le cas où le milieu  $\Omega$  est très grand par rapport à l'inclusion  $I$  et que les frontières  $\partial\Omega^u$  et  $\partial\Omega^F$  sont très éloignées de cette dernière. Dans une telle situation, il n'est alors plus nécessaire de spécifier les conditions aux limites particulières sur ces frontières ; il suffit d'imposer une certaine décroissance de la norme des champs d'essai : les champs optimaux seront, malgré cette simplification, proches de la solution exacte.

La formulation proposée s'applique également dans la situation limite où le milieu  $\Omega$  est infini et occupe l'espace entier. Les champs du problème de référence ( $\underline{\underline{\sigma}}^0, \underline{\underline{\epsilon}}^0$ ), déterminés par des « conditions à l'infini » qu'il est inutile de préciser, sont alors figés et apparaissent comme des données. Les perturbations locales ( $\underline{\underline{\sigma}}', \underline{\underline{\epsilon}}'$ ) induites par des modifications locales des tenseurs des modules dans l'inclusion  $I$  sont caractérisées par la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^{*\prime} \text{ SA}^\infty, \quad \forall \underline{\underline{\epsilon}}^{*\prime} \text{ CA}^\infty, \quad -\psi'(\underline{\underline{\sigma}}^{*\prime}) \leq -\psi'(\underline{\underline{\sigma}}') = \Delta W = \phi'(\underline{\underline{\epsilon}}') \leq \phi'(\underline{\underline{\epsilon}}^{*\prime}) \quad (\text{C.28})$$

où les fonctions  $\phi'$  et  $\psi'$  sont définies comme précédemment, l'intégrale sur  $\Omega$  étant remplacée par une intégrale sur tout l'espace. La notion de champs « SA $^\infty$  » ou « CA $^\infty$  » est la même que celle introduite en annexe B et fait référence aux champs de tenseurs  $\underline{\underline{t}}$  respectivement auto-équilibrés ou dérivant d'un déplacement, définis sur tout l'espace et tels que l'intégrale  $\int \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{t}} d\omega$  converge, ce qui garantit la convergence des intégrales  $\int \underline{\underline{t}} : \mathbf{S}^0 : \underline{\underline{t}} d\omega$  et  $\int \underline{\underline{t}} : \mathbf{C}^0 : \underline{\underline{t}} d\omega$ , dans l'hypothèse où les tenseurs  $\mathbf{S}^0$  et  $\mathbf{C}^0$  sont eux-mêmes bornés sur l'espace entier. La valeur stationnaire des fonctions  $\phi'$  et  $\psi'$  donne formellement l'écart entre l'énergie potentielle du problème sans perturbation et celle du problème avec perturbation. Ces énergies peuvent être infinies, mais l'écart reste fini.

Rappelons que les champs ( $\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}), \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{\underline{x}})$ ) de la situation de référence sont quelconques. Toutefois, sans rien altérer à la généralité du propos mais pour simplifier l'écriture, il est possible de les supposer nuls. En effet, les résultats obtenus dans ce cas peuvent facilement être adaptés aux situations où ils ne le sont pas, en appliquant les règles suivantes :

- Remplacer  $\underline{\underline{p}}(\underline{\underline{x}})$  par  $\underline{\underline{p}}(\underline{\underline{x}}) + [\mathbf{C}^1(\underline{\underline{x}}) - \mathbf{C}^0(\underline{\underline{x}})] : \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{\underline{x}})$ , soit encore remplacer  $\mathbf{S}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{p}}(\underline{\underline{x}})$  par  $\mathbf{S}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{p}}(\underline{\underline{x}}) + [\mathbf{S}^1(\underline{\underline{x}}) - \mathbf{S}^0(\underline{\underline{x}})] : \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}})$  ;

- Ajouter les champs  $(\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}), \underline{\underline{\epsilon}}^0(\underline{x}))$  aux champs  $(\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}), \underline{\underline{\epsilon}}'(\underline{x}))$ ;
- Ajouter le terme constant  $\int_I \underline{\underline{\epsilon}}^0 : [\underline{\underline{C}}^1 - \underline{\underline{C}}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}^0 + 2\underline{\underline{p}}] d\omega$  aux énergies potentielles et son opposé aux énergies complémentaires.

En omettant par ailleurs les signes ', la formulation variationnelle retrouve la forme classique :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ SA}^\infty, \quad \forall \underline{\underline{\epsilon}}^* \text{ CA}^\infty, \quad -\psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) \leq -\psi(\underline{\underline{\sigma}}) = W = \phi(\underline{\underline{\epsilon}}) \leq \phi(\underline{\underline{\epsilon}}^*) \quad (\text{C.29})$$

$$\text{avec} \quad 2\psi(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int [\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{p}}] : \underline{\underline{S}}^1 : [\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{p}}] d\omega, \quad (\text{C.30})$$

$$2\phi(\underline{\underline{\epsilon}}^*) = \int \underline{\underline{\epsilon}}^* : [\underline{\underline{C}}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}^* + 2\underline{\underline{p}}] d\omega, \quad (\text{C.31})$$

$$\text{et} \quad 2W = \int_I \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{p}} d\omega = \int_I [\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{p}}] : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \quad (\text{C.32})$$

$$= - \int \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{C}}^1 : \underline{\underline{\epsilon}} d\omega = \int \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{\sigma}} d\omega - \int_I \underline{\underline{p}} : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \quad (\text{C.33})$$

Les deux dernières égalités établissent clairement les inégalités :

$$\forall \underline{\underline{C}}^1, \forall \underline{\underline{p}}, \quad - \int_I \underline{\underline{p}} : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \leq 2W \leq 0. \quad (\text{C.34})$$

La nullité n'est assurée que lorsque  $\underline{\underline{\epsilon}} = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\underline{\underline{p}}$  est auto-équilibré :

$$W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}(\underline{\underline{p}}) = 0. \quad (\text{C.35})$$

La borne inférieure n'est atteinte que pour  $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}}$  dérive d'un déplacement :

$$W = - \int_I \underline{\underline{p}} : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}} d\omega \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot}_g(\text{rot}_d(\underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}})) = 0. \quad (\text{C.36})$$

La formulation variationnelle permet par ailleurs d'étudier l'évolution de  $W$  en fonction de  $\underline{\underline{C}}^1$ . En utilisant comme champs d'essai pour le problème relatif aux données  $(\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{\Delta C}}^1, \underline{\underline{p}})$  les champs solutions du problème relatif aux données  $(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}})$ , on obtient en effet :

$$\begin{aligned} 2W(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}) - \int [\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}) - \underline{\underline{p}}] : \underline{\underline{\Delta S}}^1 : [\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}) - \underline{\underline{p}}] d\omega \\ \leq 2W(\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{\Delta C}}^1, \underline{\underline{p}}) \leq \\ 2W(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}) + \int \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}) : \underline{\underline{\Delta C}}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}) d\omega, \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

où  $\underline{\underline{\Delta S}}^1 = [\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{\Delta C}}^1]^{-1} - \underline{\underline{S}}^1$ . Notons que l'on a  $\underline{\underline{\Delta S}}^1 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\Delta C}}^1 \geq 0$ . On en déduit que  $W$  est une fonction croissante de  $\underline{\underline{C}}^1$  :

$$\forall (\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{\Delta C}}^1, \underline{\underline{p}}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \underline{\underline{\Delta C}}^1(\underline{x}) \geq 0 \Rightarrow W(\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{\Delta C}}^1, \underline{\underline{p}}) \geq W(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}}). \quad (\text{C.38})$$

Dans les relations ci-dessus les inégalités appliquées aux tenseurs d'ordre quatre s'entendent, bien sûr, au sens des formes quadratiques associées.

De manière plus générale, on peut utiliser les champs  $(\underline{\underline{\epsilon}}', \underline{\underline{\sigma}}')$  solutions du problème  $(\underline{\underline{C}}^1 + \underline{\underline{\Delta C}}^1, \underline{\underline{p}}')$  comme champs d'essai pour le problème  $(\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{p}})$ , dont la solution est  $(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$ . On établit ainsi les inégalités :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{\Delta C}}^1, \underline{\underline{p}}, \underline{\underline{p}}') \\ \left\{ \begin{array}{l} \left\langle 2\underline{\underline{\epsilon}}' : \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{\epsilon}}' : \underline{\underline{p}}' - \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{p}} \right\rangle_I - \frac{1}{|\Gamma|} \int \underline{\underline{\epsilon}}' : \underline{\underline{\Delta C}}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}' d\omega \geq 0 \\ \left\langle 2\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{\sigma}}' : [\underline{\underline{S}}^1 + \underline{\underline{\Delta S}}^1] : \underline{\underline{p}}' - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^1 : \underline{\underline{p}} \right\rangle_I + \frac{1}{|\Gamma|} \int \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\Delta S}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}' d\omega \leq 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.39}) \end{aligned}$$

Lorsque l'incrément  $\Delta \mathbf{C}^1$  est uniforme sur l'inclusion, il peut être intéressant de décomposer l'intégrale sur tout l'espace selon :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_{\underline{\underline{\epsilon}}'} : \Delta \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}' d\omega &= \frac{1}{|I|} \int_{\Omega \setminus I} \underline{\underline{\epsilon}}' : \Delta \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}' d\omega + \langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I : \Delta \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I \\ &+ \left[ \langle \underline{\underline{\epsilon}}' : \Delta \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I - \langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I : \Delta \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Si  $\Delta \mathbf{C}^1 \geq 0$  dans l'inclusion, le dernier terme entre crochets est positif du fait de la convexité de l'application  $\underline{\underline{x}} \in \mathbb{T}_2^s \mapsto \underline{\underline{x}} : \Delta \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{x}}$ . Il en est de même de l'intégrale sur  $\Omega \setminus I$  lorsque  $\Delta \mathbf{C}^1 \geq 0$  est positif sur ce domaine. On obtient alors l'inégalité :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{C}^1, \Delta \mathbf{C}^1, \underline{\underline{p}}, \underline{\underline{p}}') \quad \Delta \mathbf{C}^1 \geq 0 \text{ et } \Delta \mathbf{C}^1 \text{ uniforme dans } I \\ \langle 2\underline{\underline{\epsilon}}' : \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{\epsilon}}' : \underline{\underline{p}}' - \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{p}} \rangle_I - \langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I : \Delta \mathbf{C}^1 : \langle \underline{\underline{\epsilon}}' \rangle_I \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Une manipulation analogue sur le terme intégrale sur  $\Omega \setminus I$  dans l'énergie complémentaire conduit à :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{S}^1, \Delta \mathbf{S}^1, \underline{\underline{p}}, \underline{\underline{p}}') \quad \Delta \mathbf{S}^1 \geq 0 \text{ et } \Delta \mathbf{S}^1 \text{ uniforme dans } I \\ \langle 2\underline{\underline{\sigma}}' : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{\sigma}}' : [\mathbf{S}^1 + \Delta \mathbf{S}^1] : \underline{\underline{p}}' - \underline{\underline{\sigma}} : \mathbf{S}^1 : \underline{\underline{p}} \rangle_I + \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle_I : \Delta \mathbf{S}^1 : \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle_I \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Notons toutefois que  $\Delta \mathbf{C}^1$  et  $\Delta \mathbf{S}^1$  ne sont uniformes simultanément dans  $I$  que lorsque  $\mathbf{C}^1$  est lui-même uniforme dans ce domaine.

Les développements ci-dessus s'appliquent à toute distribution de modules  $\mathbf{C}^1(\underline{\underline{x}})$ . Ils sont toutefois principalement utilisés dans le cadre des problèmes d'inclusion invoqués par les modèles d'homogénéisation, où le milieu de référence est homogène :  $\forall \underline{\underline{x}} \in \Omega \setminus I, \mathbf{C}^1(\underline{\underline{x}}) = \mathbf{C}^0$ . Nous discutons ces cas plus précisément dans ce qui suit : l'application des principes variationnels ci-dessus permet en effet d'établir certaines propriétés sur le tenseur d'Eshelby et les grandeurs qui en découlent.

## C.2 Inclusion en milieu infini homogène

Nous supposons maintenant le milieu de référence infini et homogène, de tenseur des modules  $\mathbf{C}^0$  et faisons appel aux tenseurs de Green modifiés  $\mathbf{\Gamma}^0$  et  $\Delta^0 = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathbf{\Gamma}^0] : \mathbf{C}^0$  (cf. annexe B.2) pour résoudre formellement le problème de perturbation :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}}) = - \int_I \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) : \left[ [\mathbf{C}^1(\underline{\underline{y}}) - \mathbf{C}^0] : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{y}}) + \underline{\underline{p}}(\underline{\underline{y}}) \right] d\omega_y \quad (\text{C.43})$$

$$\text{et } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = - \int_I \Delta^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) : \left[ [\mathbf{S}^1(\underline{\underline{y}}) - \mathbf{S}^0] : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}}) - \mathbf{S}^1(\underline{\underline{y}}) : \underline{\underline{p}}(\underline{\underline{y}}) \right] d\omega_y. \quad (\text{C.44})$$

### C.2.A Comportement homogène, polarisation uniforme, inclusion ellipsoïdale

Un grand nombre de propriétés sont établies dans le cas où l'inclusion  $I$  a la forme d'un ellipsoïde, pour lequel on a :

$$\forall \underline{\underline{y}} \in I \quad \int_I \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) d\omega_x = \mathcal{P}_I^0, \quad (\text{C.45})$$

où  $\mathcal{P}_I^0$  est le tenseur symétrique d'ordre quatre opérant sur  $\mathbb{T}_2^s$  introduit par Hill (cf. paragraphe 1.2.B.d). De même, on a :

$$\forall \underline{\underline{y}} \in I \quad \int_I \Delta^0(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}}) d\omega_x = \mathcal{Q}_I^0 = \mathbf{C}^0 : [\mathbf{S}^0 - \mathcal{P}_I^0] : \mathbf{C}^0. \quad (\text{C.46})$$

Dans ces conditions, les relations suivantes sur les grandeurs moyennes sur l'inclusion s'appliquent :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I + \mathcal{P}_I^0 : \left[ \langle \mathbf{C}^1 : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{p}} \rangle_I - \mathbf{C}^0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I \right] = 0 \quad (\text{C.47})$$

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_I + \mathcal{Q}_I^0 : \left[ \langle \mathbf{S}^1 : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{p}}) \rangle_I - \mathbf{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_I \right] = 0 \quad (\text{C.48})$$

Le cas d'un comportement homogène dans l'inclusion  $C^1(\underline{x}) = C^I, \forall \underline{x} \in I$  et d'une polarisation uniforme  $\underline{p}(\underline{x}) = \underline{p}^I, \forall \underline{x} \in I$  a été considéré par Walpole [170] et Eshelby et généralise celui abordé initialement par ce dernier ( $C^I = C^0$  et  $\underline{p}^I = -C^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^I$ ). La propriété ci-dessus des tenseurs de Green modifiés conduit alors à l'homogénéité de la contrainte et de la déformation dans  $I$  et aux relations suivantes sur leurs valeurs  $\underline{\underline{\sigma}}^I$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^I$  :

$$\left[ I + \mathcal{P}_I^0 : \left[ C^I - C^0 \right] \right] : \underline{\underline{\epsilon}}^I = -\mathcal{P}_I^0 : \underline{\underline{p}}^I \quad (\text{C.49})$$

$$\left[ I + \mathcal{Q}_I^0 : \left[ S^I - S^0 \right] \right] : \underline{\underline{\sigma}}^I = \mathcal{Q}_I^0 : S^I : \underline{\underline{p}}^I \quad (\text{C.50})$$

Lorsque  $C^I = C^0$ , on en déduit une expression immédiate des tenseurs  $\underline{\underline{\epsilon}}^I$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^I$ , qui conduisent à la valeur de  $W$  pour ce problème :

$$2W = \int_I \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{p}} d\omega = -|I| \underline{\underline{p}}^I : \mathcal{P}_I^0 : \underline{\underline{p}}^I \quad (\text{C.51})$$

$$= \int_I \left[ \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{p}} \right] : S^I : \underline{\underline{p}} d\omega = |I| \underline{\underline{p}}^I : S^0 : \left[ \mathcal{Q}_I^0 - C^0 \right] : S^0 : \underline{\underline{p}}^I. \quad (\text{C.52})$$

L'encadrement (C.34) conduit aux inégalités suivantes, à interpréter au sens des formes quadratiques associées :

$$\forall C^0, \quad 0 \leq \mathcal{P}_I^0 \leq S^0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathcal{Q}_I^0 \leq C^0. \quad (\text{C.53})$$

La nullité de  $W$  nécessite que  $\underline{\underline{p}}$  soit auto-équilibré et induit donc, dans le cas présent, sa nullité. L'autre borne n'est atteinte que lorsque  $S^0 : \underline{\underline{p}}$  dérive d'un déplacement, ce qui n'est aussi le cas que pour  $\underline{\underline{p}} = 0$ . Les inégalités ci-dessus sont donc strictes et les tenseurs en question sont définis. Leurs inverses permettent de définir le tenseur  $C_I^{0*} = S_I^{0*-1}$  introduit par Hill sous l'appellation de « constraint tensor » (cf. paragraphe 1.2.B.d) :

$$C_I^{0*} = \left[ \mathcal{P}_I^0 \right]^{-1} - C^0 = \left[ \left[ \mathcal{Q}_I^0 \right]^{-1} - S^0 \right]^{-1}. \quad (\text{C.54})$$

Il est défini positif.

Cette propriété permet de faire appel à l'inverse de  $\mathcal{P}_I^0$  et d'exprimer la polarisation en fonction de la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^I$  dans le cas où  $C^I \neq C^0$  selon :

$$\underline{\underline{p}}^I = \left[ \left[ \mathcal{P}_I^0 \right]^{-1} + C^I - C^0 \right] : \underline{\underline{\epsilon}}^I. \quad (\text{C.55})$$

D'après ce qui précède, le tenseur  $\mathcal{P}_I^{0-1} - C^0$  est défini positif et il en est donc de même de celui opérant sur  $\underline{\underline{\epsilon}}^I$  dans le membre de droite de cette équation, qui s'inverse ainsi selon :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^I = -P(C^0, C^I) : \underline{\underline{p}}^I \quad (\text{C.56})$$

avec  $P(C^0, C^I)$  tel que

$$P(C^0, C^I)^{-1} - C^I = \left[ \mathcal{P}_I^0 \right]^{-1} - C^0 = C_I^{0*} \quad (\text{C.57})$$

De même on peut définir le tenseur symétrique défini positif  $Q(C^0, C^I)$  par :

$$Q(C^0, C^I)^{-1} - S^I = \left[ \mathcal{Q}_I^0 \right]^{-1} - S^0 = S_I^{0*}; \quad (\text{C.58})$$

il est tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}}^I = Q(C^0, C^I) : S^I : \underline{\underline{p}}^I. \quad (\text{C.59})$$

Les tenseurs  $P(C^0, C^I)$  et  $Q(C^0, C^I)$  vérifient des propriétés générales, indépendantes de la nature ellipsoïdale de l'inclusion  $I$ , qui seront étudiées au paragraphe suivant. Dans le cas présent, ils satisfont de plus les relations algébriques suivantes, que l'on établit facilement à partir de (C.54) :

$$\begin{cases} C^I : P(C^0, C^I) = Q(C^0, C^I) : S_I^{0*} \\ S^I : Q(C^0, C^I) = P(C^0, C^I) : C_I^{0*}. \end{cases} \quad (\text{C.60})$$

Les inégalités suivantes découlent aussi directement des définitions de ces tenseurs :

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)^{-1} = \mathbf{C}_I^{0*} + \mathbf{C}^I > \mathbf{C}_I^{0*} > 0 \quad (\text{C.61})$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)^{-1} = \mathbf{S}_I^{0*} + \mathbf{S}^I > \mathbf{S}_I^{0*} > 0. \quad (\text{C.62})$$

L'énergie  $W$  s'écrit sous la forme :

$$\forall(\mathbf{C}^I, \mathbf{C}^0, \underline{\underline{p}}^I) \quad \frac{2}{|I|} W = -\underline{\underline{p}}^I : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \underline{\underline{p}}^I = \underline{\underline{p}}^I : \mathbf{S}^I : [\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) - \mathbf{C}^I] : \mathbf{S}^I : \underline{\underline{p}}^I. \quad (\text{C.63})$$

La propriété de croissance de  $W$  en fonction de  $\mathbf{C}^I$  à  $\underline{\underline{p}}$  fixé permet d'établir dans le cas présent, en prenant  $\Delta \mathbf{C}^I(\underline{x}) = \Delta \mathbf{C}^0$  pour  $\underline{x} \in \Omega \setminus I$  et  $\Delta \mathbf{C}^I(\underline{x}) = 0$  pour  $\underline{x} \in I$ , la croissance, au sens des formes quadratiques associées, de  $\mathbf{C}_I^{0*}(\mathbf{C}^0)$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  :

$$\forall(\mathbf{C}^0, \Delta \mathbf{C}^0) \quad \Delta \mathbf{C}^0 > 0 \Rightarrow [\mathbf{P}_I^0(\mathbf{C}^0)]^{-1} < [\mathbf{P}_I^0(\mathbf{C}^0 + \Delta \mathbf{C}^0)]^{-1} - \Delta \mathbf{C}^0. \quad (\text{C.64})$$

Notons bien que l'inégalité est stricte. Cette propriété se conçoit aisément lorsque l'on se souvient de la signification physique du tenseur  $\mathbf{C}_I^{0*}(\mathbf{C}^0)$ , qui relie la contrainte à la déformation au sein de l'inclusion selon :

$$\underline{\underline{\sigma}}^I = -\mathbf{C}_I^{0*} : \underline{\underline{\epsilon}}^I. \quad (\text{C.65})$$

La même propriété exprimée en termes de tenseurs  $\mathbf{Q}_I^0$  s'écrit :

$$\forall(\mathbf{S}^0, \Delta \mathbf{S}^0) \quad \Delta \mathbf{S}^0 > 0 \Rightarrow [\mathbf{Q}_I^0(\mathbf{S}^0)]^{-1} < [\mathbf{Q}_I^0(\mathbf{S}^0 + \Delta \mathbf{S}^0)]^{-1} - \Delta \mathbf{S}^0. \quad (\text{C.66})$$

Notons aussi que du fait des propriétés d'homogénéité de  $\mathbf{\Gamma}^0$  en fonction de  $\mathbf{C}^0$  discutées au paragraphe **B.1.B.d**, le tenseur  $\mathbf{C}_I^{0*}$  est une fonction homogène de degré 1 de  $\mathbf{C}^0$  :

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall \mathbf{C}^0 \quad \mathbf{C}_I^{0*}(\lambda \mathbf{C}^0) = \lambda \mathbf{C}_I^{0*}(\mathbf{C}^0). \quad (\text{C.67})$$

Ceci implique en particulier que si  $\mathbf{C}^0$  est « très grand » ou « très petit » par rapport à d'autres tenseurs des modules, il en est de même de  $\mathbf{C}_I^{0*}$ .

### C.2.B Comportement homogène, polarisation uniforme, géométrie quelconque

Le cas d'une inclusion homogène soumise à une polarisation uniforme mais de forme non nécessairement ellipsoïdale a également été traité par Walpole [170] et généralise la situation précédente. Les relations (C.45) et (C.46) ne s'appliquent plus. Les champs au sein de l'inclusion ne sont plus non plus homogènes, mais la linéarité du problème mécanique permet toujours d'écrire leurs moyennes sous la forme :

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I = -\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \underline{\underline{p}}^I \quad \text{et} \quad \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_I = \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \mathbf{S}^I : \underline{\underline{p}}^I. \quad (\text{C.68})$$

Les tenseurs  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)$  et  $\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)$  satisfont à :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \mathbf{S}^I + \mathbf{C}^I : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) = \mathbf{I} \\ \mathbf{S}^I : \mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) + \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \mathbf{C}^I = \mathbf{I}. \end{cases} \quad (\text{C.69})$$

Ils sont symétriques comme dans la situation précédente. Soit en effet  $\underline{\underline{p}}^A$  et  $\underline{\underline{p}}^B$  deux polarisations, induisant des champs  $(\underline{\underline{\sigma}}^A, \underline{\underline{\epsilon}}^A)$  et  $(\underline{\underline{\sigma}}^B, \underline{\underline{\epsilon}}^B)$  dans le milieu infini. Comme  $\underline{\underline{\sigma}}^A = \mathbf{C}^I : \underline{\underline{\epsilon}}^A + \underline{\underline{p}}^A$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^B$  tel que  $\langle \underline{\underline{\epsilon}}^B \rangle_I = -\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \underline{\underline{p}}^B$ , sont respectivement  $\text{SA}^\infty$  et  $\text{CA}^\infty$ , on a :

$$\int \underline{\underline{\sigma}}^A : \underline{\underline{\epsilon}}^B d\omega = 0 = \int \underline{\underline{\epsilon}}^A : \mathbf{C}^I : \underline{\underline{\epsilon}}^B d\omega - |I| \underline{\underline{p}}^A : \mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I) : \underline{\underline{p}}^B, \quad (\text{C.70})$$

ce qui établit la symétrie de  $\mathbf{P}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)$  et par suite celle de  $\mathbf{Q}(\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^I)$ , par les relations (C.69).



L'énergie  $W$  admet alors toujours la forme (C.63) et l'encadrement (C.34) permet d'en déduire des inégalités relatives aux formes quadratiques associées à  $P(C^0, C^I)$  et  $Q(C^0, C^I)$  :

$$\forall(C^I, C^0) \quad 0 < P(C^0, C^I) < S^I \quad \text{et} \quad 0 < Q(C^0, C^I) < C^I. \quad (\text{C.71})$$

Elles sont strictes pour la raison invoquée plus haut. Les inverses de ces tenseurs peuvent donc être invoqués ; ils satisfont :

$$P(C^0, C^I)^{-1} - C^I = [Q(C^0, C^I)^{-1} - S^I]^{-1}. \quad (\text{C.72})$$

L'application de la propriété (C.41) à la situation présente conduit à :

$$\begin{aligned} & \forall(C^I, C^0, \Delta C^I, \Delta C^0, \underline{\underline{p}}, \underline{\underline{p'}}) \quad \Delta C^I \geq 0, \Delta C^0 \geq 0 \Rightarrow \\ & \underline{\underline{p}} : P(C^0, C^I) : \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{p'}} : P(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I) : \underline{\underline{p}} - 2\underline{\underline{p'}} : P(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I) : \underline{\underline{p}} \\ & - \underline{\underline{p'}} : P(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I) : \Delta C^I : P(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I) : \underline{\underline{p'}} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

On peut vérifier que l'inégalité est stricte lorsque  $\Delta C^0$  est non nul. La stationnarité du premier membre vis-à-vis de  $\underline{\underline{p}}$  à  $\underline{\underline{p'}}$  fixé est obtenue pour  $P(C^0, C^I) : \underline{\underline{p}} = P(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I) : \underline{\underline{p}}$  et conduit à l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \forall(C^I, C^0, \Delta C^I, \Delta C^0) \\ & \Delta C^I \geq 0, \Delta C^0 > 0 \Rightarrow [P(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I)]^{-1} > [P(C^0, C^I)]^{-1} + \Delta C^I. \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

Lorsque  $\Delta C^0$  est nul, l'inégalité devient large. En prenant par ailleurs  $\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{p'}}$ , on peut aussi montrer :

$$\begin{aligned} & \forall(C^I, C^0, \Delta C^I, \Delta C^0) \quad \Delta C^I \geq 0, \Delta C^0 > 0 \Rightarrow \\ & P(C^0 - \Delta C^0, C^I - \Delta C^I) > P(C^0, C^I) + P(C^0, C^I) : \Delta C^I : P(C^0, C^I). \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Une utilisation similaire de la relation (C.42) permet d'établir :

$$\begin{aligned} & \forall(S^I, S^0, \Delta S^I, \Delta S^0) \quad \Delta S^I \geq 0, \Delta S^0 > 0 \Rightarrow \\ & [Q(S^0 + \Delta S^0, S^I + \Delta S^I)]^{-1} > [Q(S^0, S^I)]^{-1} + \Delta S^I \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

$$Q(S^0 - \Delta S^0, S^I - \Delta S^I) > Q(S^0, S^I) + Q(S^0, S^I) : \Delta S^I : Q(S^0, S^I). \quad (\text{C.77})$$

On peut vérifier que ces inégalités conduisent à celles trouvées sur  $\mathcal{P}_I^0$  et  $\mathcal{Q}_I^0$  dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale (propriétés (C.64) et (C.66)).

Il est également possible de définir le tenseur  $C_I^{0*}$  défini positif tel que  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_I = -C_I^{0*} \cdot \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_I$ . Il est donné par :

$$C_I^{0*}(C^0, C^I) = [P(C^0, C^I)]^{-1} - C^I, \quad (\text{C.78})$$

mais, contrairement au cas de l'inclusion ellipsoïdale, il dépend aussi de  $C^I$ . La propriété (C.74) établit sa croissance en fonction de  $C^0$  et  $C^I$  :

$$\begin{aligned} & \forall(C^I, C^0, \Delta C^I, \Delta C^0) \\ & \Delta C^I \geq 0, \Delta C^0 \geq 0 \Rightarrow C_I^{0*}(C^0 + \Delta C^0, C^I + \Delta C^I) > C_I^{0*}(C^0, C^I). \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

On peut aussi vérifier l'homogénéité de degré de  $C_I^{0*}(C^0, C^I)$  par rapport à ses deux variables.

Notons enfin que lorsque  $C^0 = C^I$ , le tenseur  $P(C^0, C^I)$  peut être calculé explicitement à partir de l'opérateur de Green modifié :

$$P(C^0, C^0) = \frac{1}{|I|} \int_I \int_I \Gamma^0(\underline{x} - \underline{y}) d\omega_x d\omega_y. \quad (\text{C.80})$$

## Annexe D

# Calcul des déformations

### D.1 Éléments de réduction d'une transformation matérielle

Soit  $\Phi$  la transformation lagrangienne (figure D.1) donnant la position  $x$  dans la configuration actuelle  $\lambda$  d'un point matériel à position  $X$  dans la configuration de référence  $\Lambda$  :

$$x = \Phi(X). \quad (\text{D.1})$$

Le gradient au point  $X$  de cette transformation est le tenseur défini par :

$$F(X) = \frac{\partial \Phi}{\partial X}(X) = 1 + \frac{\partial u}{\partial X}(X), \quad (\text{D.2})$$

où  $u = \Phi(X) - X$  est le déplacement et 1 le tenseur unitaire d'ordre 2. Si l'espace est rapporté à un repère orthonormées  $(e_1, e_2, e_3)$ , ses composantes sont :

$$F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}. \quad (\text{D.3})$$

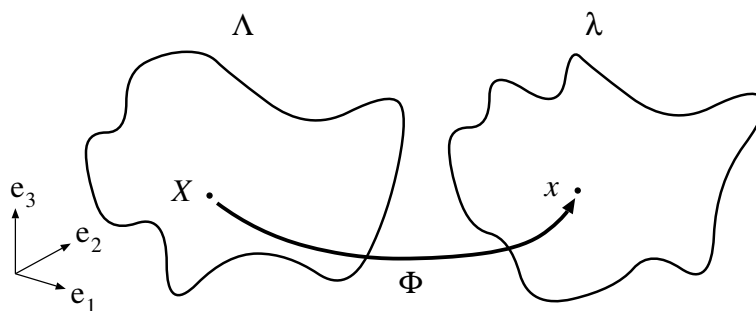


Figure D.1 : Transformation lagrangienne

$F$  peut être décomposé sous la forme du produit d'une rotation de corps rigide  $R$  et d'une distorsion  $U$  :

$$F = R.U \quad \text{avec} \quad R^T.R = 1, \det(R) = 1 \quad \text{et} \quad U \text{ symétrique}, \quad (\text{D.4})$$

$^T$  désignant la transposition.  $U$  peut être diagonalisé dans une base orthonormée :

$$U = Q^T.D.Q \quad \text{avec} \quad Q^T.Q = 1, \det(Q) = 1 \quad \text{et} \quad D \text{ diagonale}. \quad (\text{D.5})$$

Les valeurs propres  $1 + \epsilon_i$  de  $U$  sont les distorsions principales de la transformation ; elles sont positives, car la transformation est matérielle.

La rotation de corps solide  $R$ , caractérisée par trois angles d'Euler, le tenseur  $Q$  donnant l'orientation des directions principales, également caractérisée par trois angles d'Euler, et les trois distorsions principales  $1 + \epsilon_i$  sont les éléments de réduction de la transformation  $\Phi$  au point  $X$ .  $R$  est déterminée de manière unique. En cas d'identité de deux ou trois valeurs propres de  $U$ ,  $Q$  n'est déterminé qu'à des rotations conservant les sous-espaces propres de  $U$  près.

Ces quantités permettent de définir la déformation au point  $X$  selon l'échelle choisie. La déformation de Green-Lagrange donne la variation entre les deux configurations du produit scalaire de deux vecteurs matériels infinitésimaux et est définie par :

$$E^{\text{GL}} = \frac{1}{2} (F^T \cdot F - 1) = \frac{1}{2} (Q^T \cdot D^2 \cdot Q - 1). \quad (\text{D.6})$$

Ses directions principales sont celles de  $U$  et les déformations principales de Green-Lagrange  $\epsilon_i^{\text{GL}}(X)$  se déduisent des distorsions principales par :

$$\epsilon_i^{\text{GL}} = \frac{1}{2} [(1 + \epsilon_i)^2 - 1]. \quad (\text{D.7})$$

La déformation logarithmique a mêmes directions principales que  $U$  et ses déformations principales sont  $\epsilon_i^{\text{Log}} = \ln(1 + \epsilon_i)$ , ce qui s'écrit :

$$E^{\text{Log}} = Q^T \cdot \ln(D) \cdot Q. \quad (\text{D.8})$$

Cette déformation est additive lorsque les directions principales de  $U$  ne changent pas : la déformation dans une configuration  $\lambda_2$  par rapport à une configuration de référence  $\lambda_0$  est la somme de la déformation dans la configuration  $\lambda_2$  par rapport à une autre configuration de référence  $\lambda_1$  et de la déformation dans la configuration  $\lambda_1$  par rapport à la configuration de référence  $\lambda_0$ . Avec des notations évidentes, ceci s'écrit :

$$E_{\lambda_0 \rightarrow \lambda_2}^{\text{Log}}(X) = E_{\lambda_0 \rightarrow \lambda_1}^{\text{Log}}(X) + E_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}^{\text{Log}}(\Phi_{\lambda_0 \rightarrow \lambda_1}(X)). \quad (\text{D.9})$$

Enfin la déformation linéarisée est utilisée quand le gradient du déplacement est petit devant l'unité :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial X} \right\| \ll 1. \quad (\text{D.10})$$

$\left\| \frac{\partial u}{\partial X}(X) \right\|$  étant utilisé comme infiniment petit principal,  $R$  peut être estimé au premier ordre par  $R = 1 + R'$  et  $D$  par  $D = 1 + D'$ , avec  $R'$  antisymétrique et  $D'$  symétrique. Le gradient de la transformation vaut alors au premier ordre :

$$F \approx 1 + R' + Q^T \cdot D' \cdot Q. \quad (\text{D.11})$$

La rotation de corps solide est déterminée par sa partie antisymétrique et la déformation linéarisée par sa partie symétrique :

$$E^{\text{Lin}} = \frac{1}{2} (F^T + F) - 1 = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial X} \right]^T + \left[ \frac{\partial u}{\partial X} \right] \right). \quad (\text{D.12})$$

Ses déformations principales  $\epsilon_i^{\text{Lin}}$  s'identifient aux distorsions principales  $\epsilon_i$  au premier ordre. Les deux déformations définies précédemment se réduisent au premier ordre à ce tenseur. Il en est de même de toute autre mesure de déformation non mentionnée ici.

La variation de volume est donnée par le jacobien de la transformation  $\det(F) = \prod_i (1 + \epsilon_i)$ . La dilatation volumique de Green-Lagrange  $\Theta^{\text{GL}}$ , logarithmique  $\Theta^{\text{Log}}$  et linéarisée  $\Theta^{\text{Lin}}$  valent respectivement :

$$\Theta^{\text{GL}} = \prod_i \sqrt{1 + 2\epsilon_i^{\text{GL}}} - 1 = \prod_i (1 + \epsilon_i) - 1 \quad (\text{D.13})$$

$$\Theta^{\text{Log}} = \text{tr}(E^{\text{Log}}) = \ln \left[ \prod_i (1 + \epsilon_i) \right] \quad (\text{D.14})$$

$$\Theta^{\text{Lin}} = \text{tr}(E^{\text{Lin}}) \approx \sum_i \epsilon_i. \quad (\text{D.15})$$

La partie non sphérique de la transformation est caractérisée par une déformation équivalente, que l'on peut par exemple définir, dans les trois échelles, par :

$$\epsilon^{\text{eqGL}} = \text{Max}_{i,j} \left[ \frac{1 + 2\epsilon_i^{\text{GL}}}{1 + 2\epsilon_j^{\text{GL}}} \right]^{1/3} - 1 = \text{Max}_{i,j} \left[ \frac{1 + \epsilon_i}{1 + \epsilon_j} \right]^{2/3} - 1 \quad (\text{D.16})$$

$$\epsilon^{\text{eqLog}} = \frac{2}{3} \text{Max}_{i,j} \left[ \epsilon_i^{\text{Log}} - \epsilon_j^{\text{Log}} \right] \quad (\text{D.17})$$

$$\epsilon^{\text{eqLin}} = \frac{2}{3} \text{Max}_{i,j} \left[ \epsilon_i^{\text{Lin}} - \epsilon_j^{\text{Lin}} \right]. \quad (\text{D.18})$$

La déformation équivalente linéarisée s'identifie à la déformation équivalente de Tresca classiquement utilisée ; il en est de même des deux autres dans le cas d'une transformation infinitésimale.

Le calcul des éléments de réduction de  $F$  comporte plusieurs étapes : d'abord le calcul de  $F^T.F$ , puis sa diagonalisation qui donne  $Q$  et  $D^2$ , puis le calcul de  $U = Q^T.D.Q$  et enfin celui de  $R = F.U^{-1}$ .

## D.2 Cas d'une transformation axisymétrique

Nous explicitons les relations précédentes dans le cas d'une transformation axisymétrique, c'est-à-dire avec deux distorsions principales identiques. Soit  $(e_X, e_Y, e_Z)$  un repère orthonormé tel que le plan  $XY$  contienne deux directions principales de distorsion associées à des distorsions principales différentes ; la direction  $Z$  est alors une direction principale de distorsion. Nous supposons de plus que la rotation de corps solide est d'axe  $Z$ . Les composantes de  $F$  dans le plan  $XY$  sont connues, alors qu'avec les hypothèses précédentes, les autres composantes sont nulles, à l'exception de la composante  $ZZ$ , égale à la distorsion principale de multiplicité 2.

Cette situation est celle rencontrée lors d'une mesure de déformation locale par microgrilles, le plan  $XY$  étant la surface de l'éprouvette, la direction  $Z$  l'axe optique et  $X$  et  $Y$  les axes de coordonnées de l'image. Nous donnons la procédure de calcul des éléments de réduction de la transformation ainsi que les incertitudes associées, en fonction des quatre composantes connues du gradient  $F_{ij}$  et de leurs incertitudes  $dF_{ij}$ , également connues.

Avec ces hypothèses, le gradient et son incertitude s'écrivent, dans le repère  $(e_X, e_Y, e_Z)$  :

$$F = \begin{pmatrix} F_{XX} & F_{XY} & 0 \\ F_{YX} & F_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \quad dF = \begin{pmatrix} dF_{XX} & dF_{XY} & 0 \\ dF_{YX} & dF_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

et les éléments de réduction de la transformation sont de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \epsilon_1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.20})$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.21})$$

$\theta$  est l'angle polaire de la distorsion principale  $1 + \epsilon_2$ , mesuré dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe  $Y$  ; il donne en fait la direction de traction simple.  $\phi$  est l'angle de la rotation de corps solide dans le plan  $XY$ , également mesuré dans le sens trigonométrique (*cf.* figure D.2). Nous donnons ci-après les relations explicites utilisées pour le dépouillement des microgrilles.

### D.2.A Calcul explicite des éléments de réduction de $F$

Les composantes dans le plan  $XY$  de  $F^T.F$  et de son incertitude sont :

$$\left[ F^T.F \right]_{XX} = F_{XX}.F_{XX} + F_{YX}.F_{YX}$$

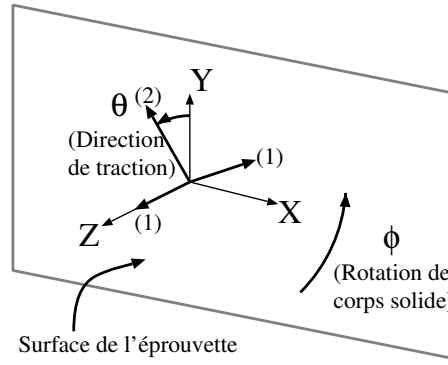


Figure D.2 : Éléments de réduction

$$\begin{aligned} [F^T \cdot F]_{YY} &= F_{XY} \cdot F_{XY} + F_{YY} \cdot F_{YY} \\ [F^T \cdot F]_{XX} &= F_{XX} \cdot F_{XX} + F_{YX} \cdot F_{YX} \\ [d(F^T \cdot F)]_{XX} &= 2|F_{XX}| \cdot dF_{XX} + 2|F_{YX}| \cdot dF_{YX} \\ [d(F^T \cdot F)]_{YY} &= 2|F_{XY}| \cdot dF_{XY} + 2|F_{YY}| \cdot dF_{YY} \\ [d(F^T \cdot F)]_{XY} &= |F_{XX}| \cdot dF_{XY} + |F_{XY}| \cdot dF_{XX} + |F_{YX}| \cdot dF_{YY} + |F_{YY}| \cdot dF_{YX}. \end{aligned}$$

Les valeurs principales de U sont solutions d'une équation du second degré ; on admet que  $\epsilon_2$  est la valeur la plus élevée :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{([F^T \cdot F]_{XX} - [F^T \cdot F]_{YY})^2 + 4[F^T \cdot F]_{XY}^2} \\ (1 + \epsilon_1)^2 &= \frac{1}{2} \left( [F^T \cdot F]_{XX} + [F^T \cdot F]_{YY} - \Delta \right) \\ (1 + \epsilon_2)^2 &= \frac{1}{2} \left( [F^T \cdot F]_{XX} + [F^T \cdot F]_{YY} + \Delta \right). \end{aligned}$$

Les incertitudes liées à ces quantités sont :

$$\begin{aligned} d\Delta &= \sqrt{([d(F^T \cdot F)]_{XX} + [d(F^T \cdot F)]_{YY})^2 + 4[d(F^T \cdot F)]_{XY}^2} \quad \text{si } \Delta = 0 \\ d\Delta &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left| [F^T \cdot F]_{XX} - [F^T \cdot F]_{YY} \right| \cdot \left( [d(F^T \cdot F)]_{XX} + [d(F^T \cdot F)]_{YY} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left| [F^T \cdot F]_{XY} \right| \cdot [d(F^T \cdot F)]_{XY} \right] \quad \text{sinon} \\ d\left((1 + \epsilon_1)^2\right) &= d\left((1 + \epsilon_2)^2\right) = \frac{1}{2} \left( [d(F^T \cdot F)]_{XX} + [d(F^T \cdot F)]_{YY} + d\Delta \right) \\ d\epsilon_i &= \frac{d\left((1 + \epsilon_i)^2\right)}{2(1 + \epsilon_i)} \quad \text{pour } i \in [1, 2]. \end{aligned}$$

La direction de la traction simple s'obtient par :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2[F^T \cdot F]_{XY}}{[F^T \cdot F]_{XX} - [F^T \cdot F]_{YY}} \quad \text{si } [F^T \cdot F]_{XX} \neq [F^T \cdot F]_{YY} \\ \theta &= +\frac{\Pi}{4} \text{ (resp. } -\frac{\Pi}{4}) \quad \text{si } [F^T \cdot F]_{XX} = [F^T \cdot F]_{YY} \quad \text{et } [F^T \cdot F]_{XY} > 0 \text{ (resp. } < 0) \end{aligned}$$

Dans les autres cas, la transformation est isotrope dans le plan XY et  $\theta$  est indéterminé. L'incertitude sur cet angle est donnée par :

$$d\theta = \frac{\left| [F^T \cdot F]_{XX} - [F^T \cdot F]_{YY} \right| \cdot [d(F^T \cdot F)]_{XY} + \left[ [d(F^T \cdot F)]_{XX} + [d(F^T \cdot F)]_{YY} \right] \cdot [F^T \cdot F]_{XY}}{4[F^T \cdot F]_{XY}^2 + \left[ [F^T \cdot F]_{XX} - [F^T \cdot F]_{YY} \right]^2}$$

Il reste à calculer la rotation de corps solide et son incertitude. Les composantes dans  $(e_X, e_Y, e_Z)$  de l'inverse de  $D$  et leurs incertitudes sont données par les matrices :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\epsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\epsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\epsilon_1} \end{pmatrix} \quad d(D^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{d\epsilon_1}{(1+\epsilon_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\epsilon_2}{(1+\epsilon_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\epsilon_1}{(1+\epsilon_1)^2} \end{pmatrix}$$

L'inverse de  $U$  s'en déduit par rotation d'angle  $\theta$  :

$$U^{-1} = Q^T \cdot D^{-1} \cdot Q$$

L'incertitude sur ce tenseur résulte à la fois de l'incertitude sur  $D$  et de celle sur  $\theta$  :

$$d(U^{-1}) = dQ^T \cdot |D^{-1} \cdot Q| + |Q^T| \cdot d(D^{-1}) \cdot |Q| + |Q^T \cdot D^{-1}| \cdot dQ,$$

où  $|M|$  est la matrice dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de  $M$  et  $dQ$  vaut :

$$dQ = d\theta \begin{pmatrix} |\sin \theta| & |\cos \theta| & 0 \\ |\cos \theta| & |\sin \theta| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La rotation  $R$  et son incertitude valent finalement :

$$R = F \cdot U^{-1} \quad \text{et} \quad dR = dF \cdot |U^{-1}| + |F| \cdot d(U^{-1})$$

L'angle de rotation de corps solide et son incertitude en découlent :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \left[ \arctan \frac{R_{YX}}{R_{XX}} + \arctan \frac{-R_{XY}}{R_{YY}} \right] \quad \text{si} \quad R_{XX} \neq 0 \quad \text{et} \quad R_{YY} \neq 0 \\ \phi &= \frac{\Pi}{2} \quad \text{si} \quad R_{YX} > 0 \quad \text{et} \quad \phi = -\frac{\Pi}{2} \quad \text{si} \quad R_{YX} < 0 \\ d\phi &= \frac{1}{2} \left[ \frac{|R_{YX}| dR_{XX} + |R_{XX}| dR_{YX}}{R_{YX}^2 + R_{XX}^2} + \frac{|R_{XY}| dR_{YY} + |R_{YY}| dR_{XY}}{R_{XY}^2 + R_{YY}^2} \right] \end{aligned}$$

## D.2.B Calcul explicite de la déformation de Green-Lagrange

Le tenseur de Green-Lagrange et l'incertitude associée s'obtiennent facilement à partir de  $F^T \cdot F$  par :

$$E^{\text{GL}} = \frac{1}{2} [F^T \cdot F - 1] \quad \text{et} \quad dE^{\text{GL}} = \frac{1}{2} d(F^T \cdot F).$$

Les déformations principales, la dilatation volumique et la déformation équivalente sont données par :

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{\text{GL}} &= \frac{1}{2} [(1 + \epsilon_i)^2 - 1] \quad \text{et} \quad d\epsilon_i^{\text{GL}} = (1 + \epsilon_i) d\epsilon_i \quad \text{pour} \quad i \in [1, 2], \\ \Theta^{\text{GL}} &= (1 + \epsilon_1)^2 (1 + \epsilon_2) - 1 \quad \text{et} \quad d\Theta^{\text{GL}} = 2(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2) d\epsilon_1 + (1 + \epsilon_1)^2 d\epsilon_2, \\ \epsilon^{\text{eqGL}} &= \left[ \frac{1 + \epsilon_2}{1 + \epsilon_1} \right]^{2/3} - 1 \quad \text{et} \quad d\epsilon^{\text{eqGL}} = \frac{2}{3} \frac{1 + \epsilon^{\text{eqGL}}}{(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)} [(1 + \epsilon_2) d\epsilon_1 + (1 + \epsilon_1) d\epsilon_2]. \end{aligned}$$

## D.2.C Calcul explicite de la déformation logarithmique

Les composantes du tenseur de déformation logarithmique dans le repère  $(e_X, e_Y, e_Z)$  s'obtiennent à partir du tenseur  $\ln(D)$  et du tenseur  $Q$  :

$$\begin{aligned} E^{\text{Log}} &= Q^T \cdot \ln(D) \cdot Q \\ dE^{\text{Log}} &= dQ^T \cdot |\ln(D) \cdot Q| + |Q^T| \cdot d\ln(D) \cdot |Q| + |Q^T \cdot \ln(D)| \cdot dQ. \end{aligned}$$

avec 
$$d\ln(D) = \begin{pmatrix} \frac{d\epsilon_1}{1+\epsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\epsilon_2}{1+\epsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\epsilon_1}{1+\epsilon_1} \end{pmatrix}$$

Les déformations principales, la dilatation volumique et la déformation équivalente se déduisent des distorsions principales comme précédemment :

$$\begin{aligned}\epsilon_i^{\text{Log}} &= \ln(1 + \epsilon_i) \quad \text{et} \quad d\epsilon_i^{\text{Log}} = \frac{d\epsilon_i}{1 + \epsilon_i} \quad \text{pour} \quad i \in [1, 2], \\ \Theta^{\text{Log}} &= 2 \ln(1 + \epsilon_1) + \ln(1 + \epsilon_2) \quad \text{et} \quad d\Theta^{\text{Log}} = 2 \frac{d\epsilon_1}{1 + \epsilon_1} + \frac{d\epsilon_2}{1 + \epsilon_2}, \\ \epsilon^{\text{eqLog}} &= \frac{2}{3} [\ln(1 + \epsilon_2) - \ln(1 + \epsilon_1)] \quad \text{et} \quad d\epsilon^{\text{eqLog}} = \frac{2}{3} \left[ \frac{d\epsilon_1}{1 + \epsilon_1} + \frac{d\epsilon_2}{1 + \epsilon_2} \right].\end{aligned}$$

### D.2.D Calcul explicite de la déformation linéarisée

Les composantes du tenseur de déformation linéarisé dans le repère  $(e_X, e_Y, e_Z)$  s'obtiennent directement à partir de  $F$  :

$$E^{\text{Lin}} = \frac{1}{2} [F^T + F] - 1 \quad \text{et} \quad dE^{\text{Lin}} = \frac{1}{2} [dF^T + dF] - 1$$

Par une procédure de diagonalisation exactement identique à celle appliquée précédemment à  $F^T.F$ , on calcule les déformations principales  $\epsilon_1^{\text{Lin}}$  et  $\epsilon_2^{\text{Lin}}$ , leurs incertitudes  $d\epsilon_1^{\text{Lin}}$  et  $d\epsilon_2^{\text{Lin}}$ , la direction des axes principaux de déformation  $\theta^{\text{Lin}}$  et son incertitude  $d\theta^{\text{Lin}}$ . La dilatation volumique et la déformation équivalente s'en déduisent :

$$\begin{aligned}\Theta^{\text{Lin}} &= 2\epsilon_1^{\text{Lin}} + \epsilon_2^{\text{Lin}} \quad \text{et} \quad d\Theta^{\text{Lin}} = 2d\epsilon_1^{\text{Lin}} + d\epsilon_2^{\text{Lin}}, \\ \epsilon^{\text{eqLin}} &= \frac{2}{3} [\epsilon_2^{\text{Lin}} - \epsilon_1^{\text{Lin}}] \quad \text{et} \quad d\epsilon^{\text{eqLin}} = \frac{2}{3} [d\epsilon_2^{\text{Lin}} + d\epsilon_1^{\text{Lin}}].\end{aligned}$$

Enfin, l'angle de rotation de corps solide  $\phi^{\text{Lin}}$  et son incertitude  $d\phi^{\text{Lin}}$  sont estimés à partir de la composante  $YX$  de la partie antisymétrique de  $F$  :

$$\phi \approx \phi^{\text{Lin}} = \frac{F_{YX} - F_{XY}}{2} \quad \text{et} \quad d\phi^{\text{Lin}} = \frac{dF_{YX} + dF_{XY}}{2}$$

### D.2.E Expression des tenseurs dans un autre repère

Tous les tenseurs de déformation précédents et leurs incertitudes peuvent être exprimés dans tout autre repère se déduisant de  $(e_X, e_Y, e_Z)$  par une rotation d'axe  $Z$ . Si  $E$  et  $dE$  sont les matrices du tenseur en question et de son incertitude,  $T$  la matrice de la rotation considérée et  $dT$  son incertitude liée à l'incertitude sur l'angle, la matrice  $E'$  et son incertitude  $dE'$  dans le nouveau repère valent :

$$E' = T^T . E . T \quad \text{et} \quad dE' = dT^T . |E.T| + |T^T| . dE . |T| + |T^T . E| . dT. \quad (\text{D.22})$$

Un tel changement de repère est utilisé dans le traitement des microgrilles pour exprimer les composantes de la déformation locale dans le repère naturel de la traction simple macroscopique, qui a plus de signification intrinsèque que le repère initial lié aux axes des images. Pour faciliter l'acquisition et le traitement des images, il est en effet souhaitable d'aligner les bords des images avec les grilles de points avant déformation, par rotation électronique du balayage du microscope. Comme les grilles ne sont jamais parfaitement alignées avec les axes de l'éprouvette ou de la machine d'essai, il en résulte généralement une petite désorientation, de l'ordre du degré, que l'on peut calculer comme indiqué ci-dessus à partir du gradient macroscopique.

# Annexe E

## Aspects informatiques

Nous donnons ici quelques indications techniques sommaires sur les principaux logiciels développés au cours du présent travail. Ils concernent le traitement quantitatif des grilles, la mise en œuvre du modèle à «  $m$  motifs de type  $n$  phases » non-linéaire et le calcul des bornes et estimations auto-cohérentes généralisées pour des motifs de structure quelconque.

### E.1 Traitement de grille et analyse d'images

Les programmes de ce premier groupe sont dédiés au traitement des images de grilles de points. Ils sont écrits en TurboPascal pour PC et font appel à des procédures de l'analyseur d'images MORPHOPERICOLOR. Outre le logiciel de capture et de sauvegarde des images TV issues du MEB et divers petits outils de gestion, relecture et correction des fichiers, les principaux programmes sont les suivants :

- `grilptfa.pas` et `grilptfc.pas` sont utilisés pour la détermination des coordonnées des points d'or selon la procédure décrite au paragraphe **2.2.F** ; le premier est adapté aux biphasés fer/argent et le second aux biphasés fer/cuivre. Ils lisent les images numériques en 64 niveaux de gris et fournissent des fichiers au format `texte` contenant les coordonnées des points et leur phases. L'interface avec l'utilisateur utilise le clavier, la souris et l'écran du MORPHOPERICOLOR affichant simultanément l'image initiale et en surimpression les pixels centraux des points d'or, dans une couleur différente pour chaque phase.
- `recolima.pas` est utilisé lorsque la seconde procédure de numérotation des points est mise en œuvre (*cf.* paragraphe **2.2.E**). Il sert à construire la matrice globale des coordonnées de points à partir des matrices locales associées à chaque sous-image de la plage étudiée. Il lit les fichiers créés avec les programmes précédents et un autre fichier `texte` donnant les indices de lignes et de colonnes globaux du premier point d'or de chaque sous-image et fournit un fichier `texte` contenant les coordonnées globales et phases de tous les points.

Ces programmes représentent environ 2000 lignes de Pascal.

Les fichiers au format `texte` ainsi obtenus sont ensuite transférés sur station de travail (HP 9000 série 700). Divers programmes de traitement de ces données permettent d'en déduire des grandeurs pertinentes pour le mécanicien. Ils sont écrits en Pascal et reposent sur une bibliothèque permettant de construire facilement de nouvelles applications. Cette bibliothèque comporte les modules suivants :

- `morphgeneral.p` donne des outils de calcul généraux, concernant principalement le calcul matriciel classique.
- `morphfichpt.p` fournit des procédures de lecture, d'écriture et de manipulation des fichiers de points.
- `morphfront.p` contient les procédures de construction des frontières de points, c'est-à-dire, plus précisément, les chemins d'intégration  $a$  à  $d$ , les frontières des phases « avec » et « sans interface » et les frontières pour le calcul des tenseurs macroscopiques.



```

program morphisto(input,output);
$SEARCH 'morphist.o,morphgrad.o,morphfront.o,morphfichpts.o,morphgeneral.o'\$
IMPORT MorphHist,Morphgrad,MorphFront,MorphFichPts,MorphGeneral;

var cref,cdef : tab_points;
    histoph : tab_histogram;
    eprou,defo : nom;
    nl,nc,nbmat,i : integer;

begin
write('Nom de l''eprouvette : ');
readln(eprou);
write('Taux de deformation : ');
readln(defo);
write('Nombre de classes : ');
readln(nclas);
nbmat := -1;           {initialisation du nombre de phases}
morceaux := false;    {seconde procedure de numeratiation}
typ := 2;             {schema d'integration c}
sansinterface := false; {calcul avec interface}
Histo_Glob := true;   {calculer aussi la fonctions de distribution globale}
Norm_Histo := true;   {normaliser les fonctions de distribution a un}
Norm_Histo_Macr := true; {normaliser les defo. par rapport a la defo. macro.}
Val_Histo := ElogEq;  {s'interesser aux defo. locales equivalentes logarithmiques}
lit_conf_ref_et_def(eprou+'df00.pts',eprou+'df'+defo+'.pts',cref,cdef,nl,nc,nbmat);
                    {lecture des fichiers de points et determination des points
                    communs aux configurations avant et apres deformation}
Tenseur_macro(cref,cdef,nl,nc); {calcul de la deformation macroscopique}
for i:=-1 to nbmat do
    inithist(histoph[i],infini,-infini,nclas);
                    {initialisation des fonctions de distribution}
                    {nb : les phases sont numerotees a partir de 0
                    et -1 represente la distribution globale}
    calc_borne_hist(cref,cdef,histoph,nl,nc,typ,nbmat);
                    {determination des valeurs extremales et de la somme}
for i:= nbmat downto -1 do {calcul des valeurs moyennes et des concentrations}
begin
    if histoph[i].hvol<>0 then
    begin
        histoph[i].hmoy := histoph[i].hmoy/histoph[i].hvol;
        histoph[i].hd moy := sqrt(histoph[i].hd moy)/histoph[i].hvol;
    end;
    histoph[i].hvol := histoph[i].hvol/histoph[-1].hvol;
end;
calc_hist(cref,cdef,histoph,nl,nc,typ); {calcul des fonctions de distribution}
for i:= -1 to nbmat do {normalisation des fonctions de distribution}
    normhist(histoph[i]);
ecrit_hst_mat(eprou,defo,histoph,nbmat); {écriture des resultats}
end.

```

Figure E.1 : Programme de calcul de fonctions de distribution expérimentales

- **morphgrad.p** fournit les outils de calcul des gradients moyens par intégration des déplacements sur ces frontières, ainsi que les procédures de calcul des tenseurs de déformation associés, respectant les relations données en annexe **D** ; des procédures d'affichage des résultats sont aussi proposées.
- **morphist.p** donne des outils de construction de fonctions de répartition de grandeurs locales. On peut opter pour des histogrammes globaux et des histogrammes relatifs à une phase, « avec » et « sans interface ». On peut s'intéresser à la composante selon l'axe de traction macroscopique du tenseur de déformation local, à la déformation équivalente locale ou à son carré. Les moments d'ordre un ou deux de la déformation locale sur une phase peuvent être calculés par ces mêmes outils.
- **morphavs.p** constitue enfin l'interface entre ces programmes et le programme de traitement graphique de données **AVS**, utilisé pour le tracé de cartes de déformation.

Tous les résultats donnés dans ce travail ont été obtenus avec des programmes faisant appel à cette bibliothèque. La figure E.1 donne à titre d'exemple les lignes d'un programme servant à calculer des fonctions de distribution de déformation à partir de fichiers de points respectant la seconde procédure de repérage. Cette bibliothèque et les programmes qui les utilisent représentent environ 4500 lignes de Pascal.

D'autres programmes de traitement d'image ont aussi été développés mais ne sont pas spécifiques du traitement des microgrilles. **concentr.pas** détermine la concentration par analyse discriminante et seuillage, **covariog.pas** calcule des covariogrammes et **domrepr.pas** permet de déterminer le grandissement maximal garantissant la représentativité d'une plage selon les principes décrits au paragraphe **2.2.C**. Ces trois logiciels utilisent les procédures de l'analyseur d'images MORPHOPERICOLOR et ne fonctionnent qu'avec les images lisibles par cet appareil. D'autres outils de manipulation d'images ont été développés en **C** sur station de travail sur la base de la bibliothèque de procédures de traitement d'images **VISTA** (disponible gratuitement sur Internet à l'adresse <ftp://ftp.cs.ubc.ca/pub/local/vista>). Il s'agit principalement de programmes de conversion des fichiers d'images du format MORPHOPERICOLOR au format **VISTA**, permettant de traiter les images de grilles par ce logiciel, et d'outils de reconstitution d'images globales par assemblage de sous-images. (Les micrographies en figure F.20 ont été obtenues par juxtaposition des 36 images au format MORPHOPERICOLOR au grandissement 1000, acquises avant et après déformation de l'éprouvette). Ces programmes représentent environ 700 lignes de Pascal et 650 lignes de **C**.

## E.2 Modèle à motifs sphériques multicouches non-linéaire

L'implémentation du modèle à «  $m$  motifs de type  $n$  phases » non-linéaire repose aussi sur une bibliothèque Pascal. Bien que ce langage ne soit pas « orienté objet », nous avons cherché à respecter une construction informatique de ce type, afin de garantir une certaine souplesse d'utilisation et une grande évolutivité. Ainsi les prémisses du logiciel datent de mars 1992, mais il n'a cessé de évoluer depuis, le dernier ajout majeur, relatif à l'extension non-linéaire modifiée (*cf.* paragraphe **1.3.B.c**), datant de juillet 1995.

La bibliothèque repose sur 5 modules principaux, représentant plus de 5000 lignes de Pascal :

- **general.p** propose des structures de données et des outils de calcul généraux, concernant principalement le calcul matriciel et tensoriel. Des matrices de dimension  $1 \times 2$  à  $2 \times 4$  peuvent être utilisées et les tenseurs d'ordre un ou deux sont définis dans trois systèmes de coordonnées (cartésien, cylindrique et sphérique).
- **materiau.p** définit les structures de données décrivant le comportement élastique linéaire isotrope, compressible ou non, et le comportement non linéaire, caractérisé par une courbe d'écrouissage donnée point par point (nombre de points quelconques). Diverses procédures permettent d'appliquer la loi de Hooke, de calculer des modules sécants ou tangents et de lire ou d'écrire des données relatives au comportement des phases.
- **n\_phases.p** constitue l'implémentation informatique de toutes les relations relatives à l'inclusion sphérique multicouche données dans la référence [76]. Elle définit d'abord la structure **Mtf\_NPh**

décrivant géométriquement et mécaniquement une telle structure. Des procédures permettent ensuite de calculer les constantes d'intégration des champs locaux élastiques dans chaque couche. D'autres fournissent à partir de ces dernières et pour un chargement macroscopique de traction simple, de compression ou de cisaillement pur, les champs locaux de déplacement, de déformation, de contrainte ou de densité d'énergie dans l'inclusion composite ou le milieu infini, ainsi que des grandeurs moyennes relatives à une couche ou à l'inclusion complète. Enfin, les caractéristiques élastiques effectives satisfaisant les conditions d'autocohérence peuvent être calculées par la résolution de l'équation du second degré donnée dans [76]

- `motifs.p` définit d'abord la notion d'assemblage de motifs de type  $n$  phases, représentée par une structure `Assemblage` composée d'un certain nombre de structure `Mtf_NPh` et de leur concentrations. Elle fournit ensuite les procédures de « calcul non linéaire d'état », donnant le niveau d'écroutissage de chacune des couches de chaque motif et du milieu infini pour une sollicitation donnée, caractérisée par la déformation imposée à l'infini ou dans l'une des couches, et pour un comportement connu de toutes les phases. Les procédures de « calcul autocohérent » permettent en plus de déterminer le comportement d'un des matériaux par application de la condition d'autocohérence. Ce matériau inconnu est généralement le MHE (calcul direct), mais il peut aussi s'agir d'une phase constitutive présente dans une seule couche (calcul inverse). L'extension non-linéaire est classique (dans ses diverses variantes) ou modifiée. Dans ce second cas, les moments d'ordre deux sont calculés par dérivation numérique de l'énergie globale, mais le calcul ne peut être que direct. Des procédures itératives sont mises en œuvre pour calculer l'état et satisfaire la condition d'autocohérence.
- `histo.p` propose des outils de caractérisation statistique des champs locaux au sein d'un assemblage de motifs de type  $n$  phases, principalement sous forme d'histogrammes et de fonctions de distribution. Des chargements macroscopiques de traction simple, cisaillement pur ou compression peuvent être considérés et l'on peut s'intéresser à la composante selon l'axe de traction du tenseur de déformation local ou à la déformation équivalente locale.
- `sortie_ucd.p` constitue enfin l'interface entre ces programmes et le programme de traitement graphique de données `AVS`, utilisé pour représenter graphiquement les champs de déformation locaux au sein des inclusions multicouches<sup>1</sup>.

Cette bibliothèque est à la base de tous les programmes utilisés pour calculer les résultats théoriques relatifs au modèle à  $m$  motifs de type  $n$  phases donnés dans le présent travail. Les bornes classiques de Hashin et Shtrikman, le modèle autocohérent classique, les bornes de Hashin, les nouvelles bornes de Hervé, Stolz et Zaoui relatives à l'assemblage des sphères composites, les modèles des trois phases de Christensen et Lo ainsi que le modèle de Mori et Tanaka ne sont rien d'autre que des cas particuliers abordables par cet outil à condition de définir correctement l'assemblage de motifs sur lequel repose la modélisation. L'extension classique et l'extension modifiée permettent d'aborder les comportements élastiques non-linéaires, la seconde donnant le résultat exact de la procédure variationnelle de Ponte Castañeda. La discrétisation des sphères composites en un grand nombre de couches permet d'aborder des situations avec des gradients de propriétés. Toutes ces procédures reposent sur des solutions analytiques, si bien que les temps de calcul sont en général très courts. L'algorithme itératif de résolutions des équations non-linéaires (calcul d'état et calcul autocohérent) n'est pas optimal mais s'avère très stable, si bien qu'aucun cas de non convergence n'a été observé lors des nombreuses applications effectuées<sup>2</sup>.

La première façon d'utiliser cette bibliothèque est d'écrire un programme `Pascal` adapté au problème que l'on souhaite étudier. La figure E.2 donne à titre d'exemple les lignes d'un tel programme visant à déterminer le comportement linéaire d'un biphasé fer/argent par le modèle des trois phases et à calculer la valeur de la déformation locale au centre de l'inclusion sous une traction simple macroscopique. Les programmes d'application de ce type écrits pour obtenir les résultats présentés dans ce travail représentent environ 2500 lignes de `Pascal`. La seconde méthode, ouverte aux personnes ne connaissant pas le `Pascal`, est l'utilisation d'un programme d'interface (`composit`) permettant d'appeler

<sup>1</sup>`ucd` est le nom d'un format de fichier de données lisible par `AVS`.

<sup>2</sup>les seuls cas de non-convergence rencontrés correspondaient à des calculs inverses pour lesquels il n'y avait pas de solution.

```

PROGRAM Exemple(input,output);
$SEARCH 'general.o,materiau.o,n_phases.o,motifs.o'$
IMPORT General,Materiaux,N_Phases,Motifs;

VAR Ass : Assemblage;
    X : Point;
    Char : Chargement;
    E : Tenseur2;
    C : Reel; I : INTEGER; Pb : Boolean;

BEGIN
  ErrRelMax := 1E-7;           {Parametres de calcul: erreur relative maximale}
  IterMax := 500; Coef_Grad := 0.001; {nb. max. d'iterations et coef. de controle}
  NbPhs := 3;                 {Initialisation des 3 materiaux : fer/argent et composite}
  for i:=1 to NbPhs do
  begin
    New(Don_Mat[i].Elast);
    Don_Mat[i].Plast := FALSE;      {materiaux elastiques non plastiques}
    Don_Mat[i].Elast^.Compr := FALSE;
    Don_Mat[i].Elast^.K := 0;       {module de compressibilite initialise a zero}
    Don_Mat[i].Elast^.Mu := 0;     {module de cisaillement initialise a zero}
  end;
  Don_Mat[1].Elast^.K := 165000;    {modules d'elasticite du fer (phase 1)}
  Don_Mat[1].Elast^.Mu := 82000;
  Don_Mat[1].Elast^.Compr := TRUE;
  Don_Mat[2].Elast^.K := 106000;    {modules d'elasticite de l'argent (phase 2)}
  Don_Mat[2].Elast^.Mu := 29700;
  Don_Mat[2].Elast^.Compr := TRUE;
  C := 0.3;                          {concentration}
  Ass.M := 1;                          {definition de l'assemblage avec un seul motif}
  Ass.Conc[1] := 1;                     {de concentration 1}
  Ass.Motf[1].N := 2;                   {avec deux couches}
  Ass.Motf[1].Cou[0].A := 0.0;          {rayon interne de couche interne = 0}
  Ass.Motf[1].Cou[1].A := Cbrt(C);     {rayon externe de couche interne = racine3 de C}
  Ass.Motf[1].Cou[2].A := 1.0;         {rayon externe = 1}
  Ass.Motf[1].Cou[1].Mat := 1;         {materiau couche interne = 1 (fer)}
  Ass.Motf[1].Cou[2].Mat := 2;         {materiau couche externe = 2 (argent)}
  Mat_Moy := 3; Mat_Inf := 3;          {le MHE est la phase 3, tout comme le milieu inf.}
  Ass.Motf[1].Cou[Cou_Moy].Mat := Mat_Moy;
  Pb := FALSE;
  Autocoh_Ass(Ass,Rep_Moy,0,Rep_Moy,Don_Mat[Mat_Moy].Elast^,Pb);
  {calcul autocoherent non-lineaire du comportement du MHE ; on impose une
  deformation macroscopique egale a zero, ce qui revient a faire un calcul lineaire}
  Ecriv_Materiau(Don_Mat[Mat_Moy]); {Ecriture du comportement du materiau 3}
  X := Origine;
  Char.typ := Tra; Char.Sig := 1.0; {traction simple (selon l'axe 1) d'intensite 1}
  Defo_Nph(Ass.Motf[1],Char,I,X,E); {calcul du tenseur de deformation a l'origine}
  Tens2_Car{E};                       {conversion en coordonnees cartesiennes}
  Writeln{'E11 = ',E.Mat.Val[1,1]}; {écriture de la composante 11}
END.

```

Figure E.2 : Exemple de programme de calcul relatif au modèle des trois phases linéaire

de manière interactive un grand nombre des fonctionnalités de la bibliothèque. Son fonctionnement est décrit sommairement dans la référence [22].

Cette bibliothèque a partiellement été adaptée au modèle du « cylindre à  $n$  phases » élastique linéaire [77]. La plupart des fonctionnalités des modules `general.p`, `materiau.p`, `n_phases.p` et `sortie_ucd.p` sont ainsi reprises dans les modules `general_cyl.p`, `materiau_cyl.p`, `n_phases_cyl.p` et `sortie_ucd_cyl.p`, les principaux ajouts concernant le passage aux comportements élastiques linéaires à symétrie isotrope transverse caractérisés par 5 constantes. Ces modules représentent environ 3200 lignes de code, mais comportent beaucoup de similitudes avec leurs homonymes relatifs à l'inclusion sphérique.

### E.3 Modèle autocohérent assisté par ordinateur (Macao)

Les calculs de bornes ou d'estimations autocohérentes généralisées fondées sur une description par motifs morphologiques représentatifs ont été réalisés avec le code aux éléments finis CASTEM 2000, dont le langage de commande permet d'implémenter assez aisément des manipulations numériques élaborées. Toutes les opérations ont été écrites sous forme de procédures afin de faciliter leur emploi pour d'autres applications.

Les tests de faisabilité réalisés avec un maillage bidimensionnel de la sphère composite du modèle des trois phases utilisent les outils définis dans le fichier `autocoh_2d.cast` (715 lignes). Les principales procédures sont les suivantes. `MailIncl` construit un maillage axisymétrique d'un quart de l'inclusion composite et du milieu de référence « infini », dont la forme externe est sphérique ou cylindrique. Le maillage peut éventuellement présenter une couche d'éléments très fins aux interfaces. `Borne` construit les bornes sur le module de compressibilité  $K$  et de cisaillement  $\mu$  à partir des modules  $K_I$  et  $\mu_I$  du milieu de référence. On peut effectuer ce calcul en imposant des conditions aux limites en déplacements ou en contraintes, la seconde option n'étant toutefois possible qu'avec un maillage cylindrique. La procédure `Psttrait` propose un post-traitement graphique des résultats de calcul, permettant d'afficher les champs locaux par des lignes d'isovaleurs. `Autocoh` construit l'estimation autocohérente des modules effectifs par des appels itératifs de la procédure `Borne`. La procédure `Valeurs` calcule les bornes de Voigt et Reuss (motifs), de Hashin et Shtrikman (motifs) et l'estimation autocohérente d'un assemblage donné, en faisant appel aux procédures précédentes. `Fuseaux` construit le fuseau de Hill relatif à ces bornes ou estimations, en faisant appel à la procédure `Valeurs` pour diverses valeurs de la concentration. Enfin les procédures `TailMInf` et `FinMail` ont été écrites pour tester les effets de l'extension du milieu infini maillé et de la finesse du maillage. La figure E.3 présente à titre d'exemple le calcul des modules autocohérents.

Les mêmes principes ont été retenus pour le développement de modèles tridimensionnels mais la mise en œuvre en est plus compliquées car diverses géométries de motifs sans symétrie sphérique et divers comportements linéaires non isotropes ont été abordés. Le fichier `autocoh_3d.cast` ( $\approx 2500$  lignes) regroupe les diverses procédures écrites dont les principales sont les suivantes. `MaillInc` et `MailIncl` sont deux procédures de maillage de l'inclusion composite et du milieu de référence. Suivant la valeur de certains paramètres, elles maillent une inclusion sphérique, ellipsoïdale, cubique ou parallélépipédique entourée d'une gangue de matrice de forme externe sphérique ou ellipsoïdale, elle-même noyée dans le milieu de référence de forme sphérique, ellipsoïdale, cubique ou parallélépipédique. Elles diffèrent par le fait que l'origine est un nœud pour l'une et le centre d'un élément pour l'autre. Les phases constitutives sont isotropes<sup>3</sup> et le comportement du milieu de référence respecte une symétrie isotrope, isotrope transverse ou cubique, suivant la symétrie de l'inclusion composite étudiée. Les procédures `Borne`, `Psttrait`, `Autocoh`, `Valeurs`, `Fuseaux` et `TailMInf` effectuent les mêmes opérations que dans le cas bidimensionnel. Elles sont complétées par `BornV` qui calcule la borne de Voigt en imposant les conditions aux limites directement aux bords de l'inclusion composite et par `Efform` qui permet d'étudier l'effet des rapports de forme des ellipsoïdes définissant la géométrie du motif. Précisons que tous les calculs effectués ne font intervenir qu'une seule géométrie de motifs : les procédures

---

<sup>3</sup> bien que la généralisation à des comportements locaux à symétrie isotrope transverse ou cubique ne pose pas de difficulté particulière

```

* Lecture des procedures
OPTI DONN 'autocoh_2d.cast';
*
* Comportement des materiaux constitutifs (1 = inclusion)
Mu1 = 10.;
K1 = 20.;
Mu2 = 1.;
K2 = 3.;
* Concentration (en inclusions)
C = 0.3
*
* Parametres de calcul
TypMail = 1;
* Milieu infini = sphere (2 : milieu infini = cylindre)
AvcIntrf = FAUX;
* Pas d'elements fins aux interfaces
TypChar = 1;
* Deplacements imposes (2 : forces imposees)
TrMa = FAUX;
* Pas d'affichage du maillage
Pstr = FAUX;
* Pas de post-traitement graphique
*
* calcul autocohérent critere de convergence = 0.00001
*           extension milieu de reference = 2.5 x rayon sphere composite
*           coefficient de finesse de maillage = 0.2
KAC MuAC = Autocoh 0.00001 (MailIncl C 2.5 0.2);
* affichage des resultats
MESSAGE ' KAC = ' KAC;
MESSAGE ' MuAC = ' MuAC;
*
Fin;

```

Figure E.3 : Mise en œuvre de Macao (cas bidimensionnel)

permettant de manipuler deux ou plusieurs motifs de géométries différentes n'ont pas encore été écrites, mais les fonctionnalités d'ores et déjà disponibles devraient permettre d'y parvenir au prix d'un effort minimal.

L'extension de Macao aux comportements non-linéaires a été mise en œuvre dans le cas de la sphère composite décrite par un maillage axisymétrique bidimensionnel. Les procédures développées dans ce but sont regroupées dans le fichier `autocoh_n1.cast` (1200 lignes), qui reprend en les adaptant celles du fichier `autocoh_2d.cast` et les complète par des procédures spécifiques aux comportements non-linéaires. Les principales sont `EtaClas` et `EtaMom2` qui permettent de calculer un état d'écroutissage moyen des phases constitutives pour un chargement macroscopique imposé et un modèle d'homogénéisation élastique choisi, selon l'extension classique ou l'extension modifiée. Le comportement non-linéaire des phases est décrit par une courbe  $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}})$  donnée point par point ou une loi puissance de la forme  $\sigma^{\text{eq}} = \sigma_0 \left(\frac{\epsilon^{\text{eq}}}{\epsilon_0}\right)^m$ . La procédure `Courbe` permet de construire la courbe d'écroutissage du MHE par plusieurs appels aux procédures précédentes. L'application au cas tridimensionnel reste à entreprendre.

Notons enfin que le calcul d'inclusion composite élasto-plastique présenté au paragraphe 3.3 n'a pu être entrepris avec CASTEM 2000 pour des raisons de non convergence du calcul à des taux de déformation relativement faibles, et à cause d'apparentes erreurs de calculs pour des comportements avec écroutissage isotrope. Nous avons donc développé un code de calcul par éléments finis bidimensionnel

pour effectuer ce calcul, sur la base de sources existantes écrites par C. Stolz. Le programme comporte environ 2500 lignes de `fortran`, incluant les procédures de calcul (`mef`) et de post-traitement (calculs de moyennes par phase avec `mef_moy`, de distributions de déformations avec `mef_histo` et interfaçage avec `AVS` pour la visualisation graphique par `mef_to_ucd`).

---

# Annexe F

## Résultats expérimentaux

### F.1 Déformations moyennes par phases

Le tableau F.1 rappelle les résultats complets des mesures de déformation au sein des phases pour les onze essais *in situ*, déjà donnés en chapitre 3. Trois mesures de déformations équivalentes au sein des phases  $i$  sont indiquées : l'équivalent de la déformation moyenne sur chaque phase  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_i^{\text{eq}}$ , le moment d'ordre un de la déformation équivalente locale  $\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_i$  et le moment d'ordre deux  $\sqrt{\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_i}$ . Les incertitudes absolues sur la déformation macroscopique sont toujours inférieures à 0.05%, celles sur les valeurs moyennes par phase sont entre parenthèses. Le tableau précise aussi le nombre de points d'or dont on a enregistré les déplacements.

Réf.	$c_{Fe}$	$E^{\text{eq}}$	nb pts	$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{Fe}^{\text{eq}}$	$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{Ag}^{\text{eq}}$	$\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{Fe}$	$\langle \epsilon^{\text{eq}} \rangle_{Ag}$	$\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_{Fe}^{1/2}$	$\langle \epsilon^{\text{eq}2} \rangle_{Ag}^{1/2}$
H168	92%	4, 87	21918	4, 52(0, 22)	9, 34(1, 0)	5, 01(0, 23)	10, 3(1, 1)	5, 73(0, 31)	11, 4(1, 1)
		9, 84	21063	9, 14(0, 41)	18, 7(1, 8)	9, 31(0, 40)	19, 3(1, 8)	10, 6(0, 55)	21, 3(1, 7)
H169	82%	4, 31	18378	3, 47(0, 34)	8, 01(0, 25)	4, 47(0, 27)	8, 78(0, 27)	5, 24(0, 39)	9, 80(0, 34)
		9, 90	17108	7, 96(0, 75)	18, 2(0, 34)	8, 37(0, 57)	18, 4(0, 34)	9, 99(0, 86)	20, 1(0, 63)
		13, 65	16450	10, 9(1, 0)	25, 3(0, 46)	11, 1(0, 78)	25, 3(0, 36)	13, 4(1, 2)	27, 6(0, 75)
H171	71%	9, 18	9834	7, 24(0, 43)	13, 8(0, 49)	7, 43(0, 24)	14, 2(0, 16)	8, 41(0, 33)	15, 5(0, 13)
H172	53%	5, 49	25092	3, 41(0, 45)	7, 70(0, 19)	4, 68(0, 30)	8, 63(0, 11)	5, 57(0, 40)	9, 72(0, 12)
		8, 92	24866	5, 59(0, 76)	12, 4(0, 22)	6, 63(0, 44)	13, 2(0, 13)	7, 94(0, 59)	14, 7(0, 12)
		13, 19	23479	8, 20(1, 1)	18, 2(0, 33)	8, 89(0, 67)	19, 0(0, 17)	10, 8(0, 95)	21, 1(0, 13)
H174	79%	4, 66	27053	3, 95(0, 29)	7, 17(0, 34)	4, 65(0, 22)	7, 90(0, 23)	5, 32(0, 27)	8, 76(0, 23)
		9, 50	25909	8, 13(0, 53)	14, 3(0, 61)	8, 60(0, 36)	14, 9(0, 32)	9, 75(0, 44)	16, 2(0, 29)
		14, 05	24752	12, 1(0, 74)	20, 9(0, 88)	12, 4(0, 50)	21, 3(0, 37)	14, 0(0, 61)	23, 2(0, 35)
IA11	52%	5, 27	22124	3, 94(0, 38)	6, 68(0, 24)	4, 84(0, 25)	7, 79(0, 20)	5, 53(0, 30)	8, 67(0, 19)
		8, 31	21347	6, 16(0, 59)	10, 6(0, 37)	6, 93(0, 33)	11, 6(0, 24)	7, 93(0, 39)	12, 7(0, 21)
		15, 21	19689	11, 5(1, 0)	19, 0(0, 62)	12, 1(0, 53)	20, 1(0, 36)	13, 7(0, 67)	21, 8(0, 29)
IB10	83%	4, 85	22518	4, 26(0, 31)	7, 70(0, 40)	5, 03(0, 22)	8, 80(0, 44)	5, 77(0, 27)	9, 81(0, 44)
		9, 50	21527	8, 35(0, 59)	15, 0(0, 58)	8, 87(0, 35)	15, 7(0, 49)	10, 1(0, 44)	17, 2(0, 42)
		13, 55	20380	12, 0(0, 79)	21, 2(0, 85)	12, 3(0, 46)	21, 5(0, 54)	14, 0(0, 58)	23, 5(0, 44)
ID03	61%	4, 20	22545	2, 89(0, 49)	6, 13(0, 17)	3, 93(0, 32)	7, 22(0, 16)	4, 63(0, 42)	8, 12(0, 15)
		9, 62	21188	6, 75(1, 0)	13, 8(0, 31)	7, 20(0, 64)	14, 5(0, 18)	8, 67(0, 86)	16, 1(0, 16)
		14, 26	19832	10, 1(1, 5)	20, 3(0, 41)	10, 2(0, 90)	20, 9(0, 22)	12, 3(1, 2)	23, 1(0, 18)
IE05	74%	3, 30	16592	2, 97(0, 11)	4, 30(0, 29)	3, 48(0, 10)	4, 77(0, 20)	3, 84(0, 11)	5, 32(0, 20)
		7, 73	19720	6, 93(0, 21)	10, 1(0, 61)	7, 40(0, 12)	10, 5(0, 30)	8, 11(0, 14)	11, 6(0, 31)
		12, 39	17952	11, 3(0, 32)	15, 8(0, 82)	11, 8(0, 13)	16, 2(0, 26)	12, 9(0, 16)	17, 6(0, 25)
H327	58%	3, 46	11061	2, 83(0, 12)	4, 34(0, 17)	3, 28(0, 11)	4, 74(0, 17)	3, 68(0, 11)	5, 13(0, 16)
		8, 73	10495	7, 31(0, 16)	10, 7(0, 37)	7, 65(0, 11)	11, 1(0, 26)	8, 30(0, 12)	11, 7(0, 22)
		12, 81	10017	10, 8(0, 23)	15, 6(0, 48)	11, 2(0, 12)	16, 1(0, 35)	12, 1(0, 13)	16, 8(0, 30)
H329	20%	2, 20	15066	1, 29(0, 15)	2, 42(0, 055)	2, 03(0, 18)	2, 93(0, 079)	2, 34(0, 18)	3, 31(0, 079)
		5, 72	15066	3, 41(0, 19)	6, 27(0, 10)	3, 82(0, 18)	6, 63(0, 11)	4, 41(0, 18)	7, 26(0, 11)
		9, 77	15066	5, 78(0, 29)	10, 7(0, 16)	6, 17(0, 18)	11, 2(0, 16)	7, 01(0, 18)	12, 0(0, 15)

Tableau F.1 : Déformations au sein des phases (échelle logarithmique, en %)



## F.2 Distributions des déformations

Les figures F.1 à F.11 donnent les résultats complets des mesures d'hétérogénéités de la déformation locale pour les onze essais *in situ*. Les fonctions de distributions font référence au rapport de la déformation équivalente locale à la déformation équivalente macroscopique, et sont normalisées, c'est-à-dire que leur intégrale est égale à l'unité. La procédure « avec interface » et le domaine d'intégration  $c$  (*cf.* paragraphe 2.3.B et paragraphe 2.3.F) ont été utilisées ; la fonction de distribution a été discrétisée en 50 classes pour les fer/argent et 30 classes pour les fer/cuivre. La distribution globale peut être calculée en sommant les distributions au sein de chaque phase pondérées par les fractions volumiques.

Les distributions pour les divers taux de déformation macroscopique d'un même essai sont regroupées sur la même figure. La normalisation rend quasiment identiques les courbes correspondantes, à l'exception de celle obtenue au taux le plus faible, qui est presque toujours légèrement plus étalée que les autres, mais les écarts sont de l'ordre de grandeur des incertitudes expérimentales, plus importantes en valeurs relatives pour les déformations faibles. Les courbes pour les taux plus élevés sont bien superposées et peuvent être considérées comme plus précises et donc significatives des fluctuations de la déformation au sein du domaine de mesure.

## F.3 Cartes de déformations

Les figures F.12 à F.22 donnent enfin les cartes des déformation équivalentes locales des onze essais. Huit d'entre-elles sont des cartes discontinues, obtenues par juxtaposition approximative des zones séparées étudiées. Les trois autres sont des cartes continues, obtenues avec la seconde procédure de repérage des points (*cf.* paragraphes 2.2.E et 2.3.G). Nous avons reporté le rapport de la déformation équivalente locale à la déformation équivalente macroscopique et utilisé la même échelle de couleur pour tous les essais, si bien que les valeurs locales de deux essais différents peuvent être comparées. Plus précisément, les 11 lignes d'isovaleurs utilisées découpent régulièrement l'intervalle de 0 à 4 ; la couleur rouge est utilisée pour toutes les valeurs supérieures à 3,2, les autres couleurs de l'arc-en-ciel étant attribuées aux valeurs inférieures. Cette échelle unique est indiquée en figure F.12. La limite entre les phases est matérialisée par un trait noir épais : il s'agit en fait de la frontière du domaine « avec interface » relatif à la phase argent ou cuivre. L'axe de traction est vertical.

Une seule carte est reportée pour chaque essai, pour le taux de déformation macroscopique le plus proche de 10%. Les cartes correspondant aux taux plus élevés font apparaître quasiment les mêmes lignes d'isovaleurs, mais couvrent un domaine en général légèrement plus petit. Celles correspondant aux taux plus faibles laissent aussi entrevoir ces mêmes modes de localisation mais sont en revanche beaucoup plus « bruitées », principalement du fait des incertitudes relatives de mesure plus importantes. Chaque carte est accompagnée d'une micrographie représentant approximativement la zone étudiée.

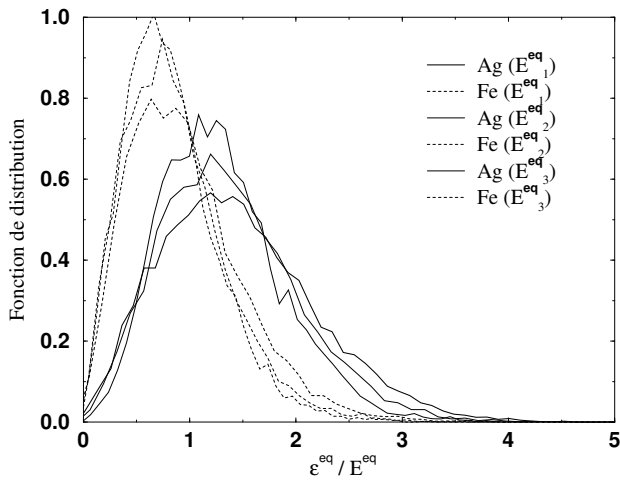


Figure F.1 : IA11, IAF,  $c_{Fe} = 52\%$

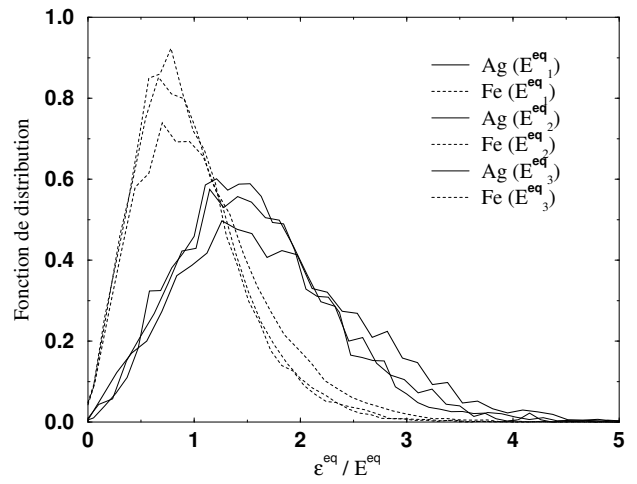


Figure F.2 : IB10, IAF,  $c_{Fe} = 83\%$

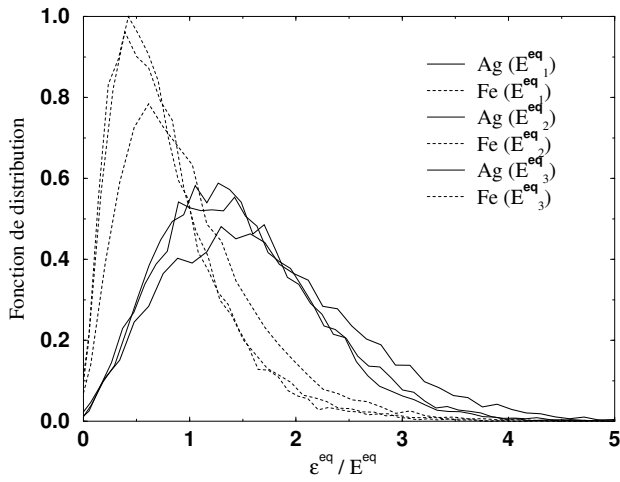


Figure F.3 : ID03, ISF,  $c_{Fe} = 61\%$

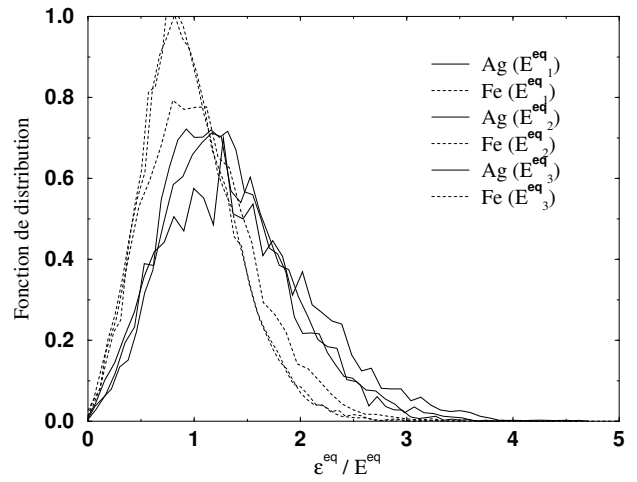


Figure F.4 : IE05, ISF,  $c_{Fe} = 74\%$

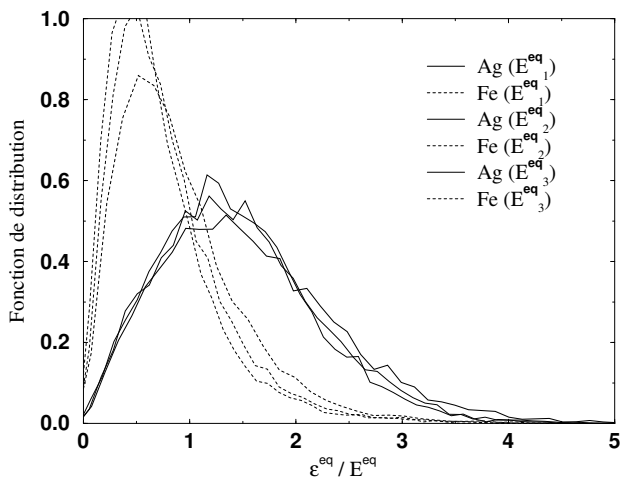


Figure F.5 : H172, CIC,  $c_{Fe} = 53\%$

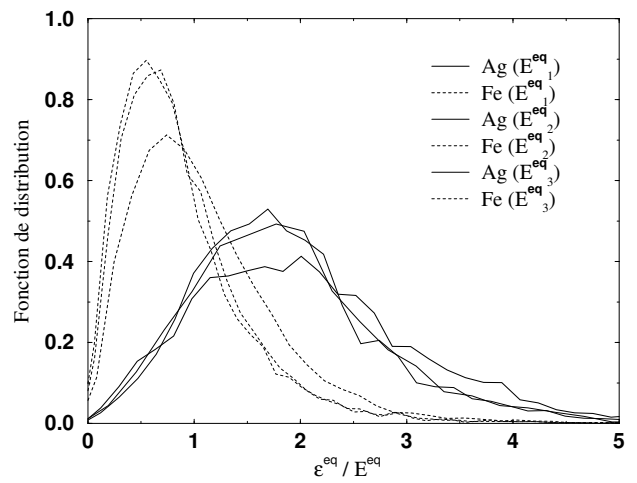
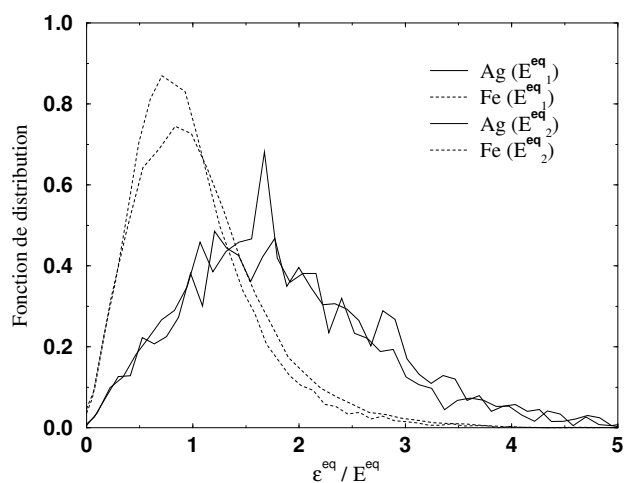
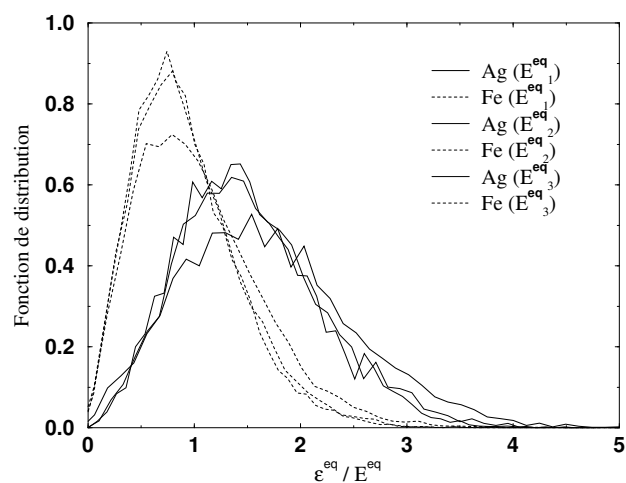
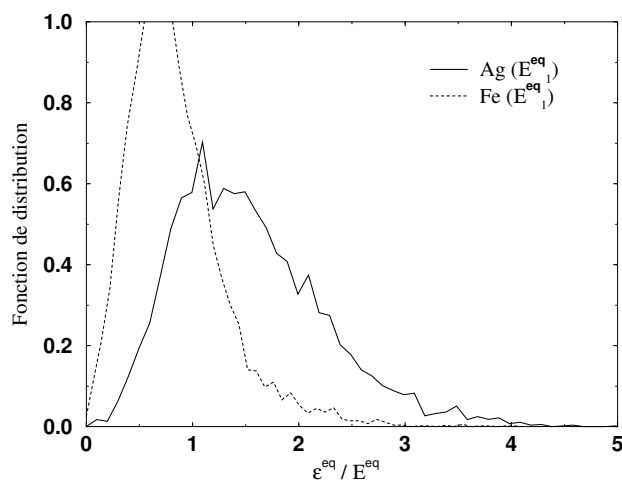
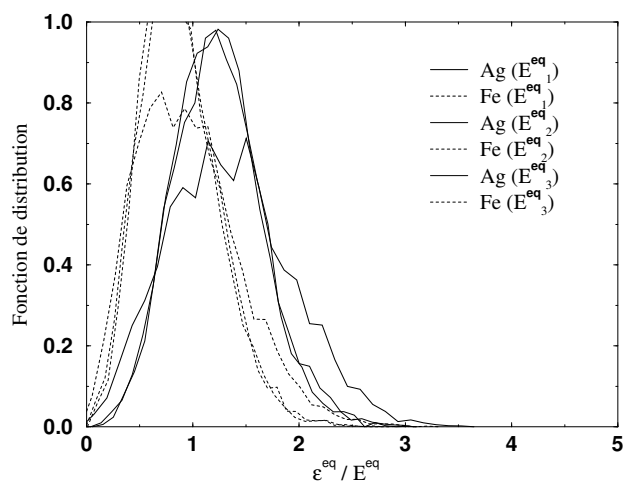
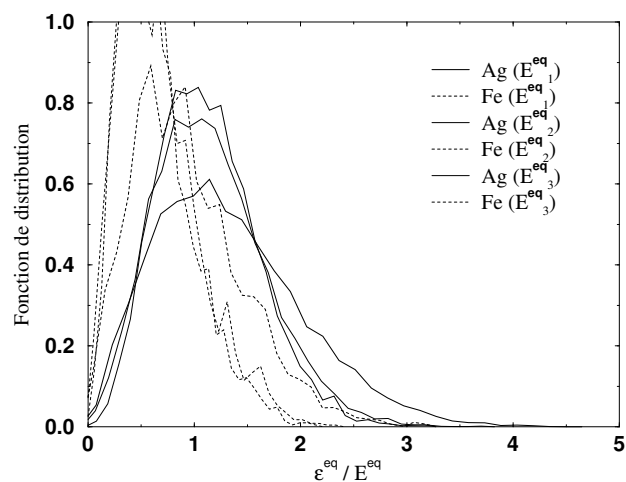


Figure F.6 : H169, CIC,  $c_{Fe} = 82\%$

Figure F.7 : H168, CIC,  $c_{Fe} = 92\%$ Figure F.8 : H174, CIC,  $c_{Fe} = 79\%$ Figure F.9 : H171, CIC,  $c_{Fe} = 71\%$ Figure F.10 : H327, CIC, Fe/Cu,  $c_{Fe} = 58\%$ Figure F.11 : H329, CIC, Fe/Cu,  $c_{Fe} = 20\%$

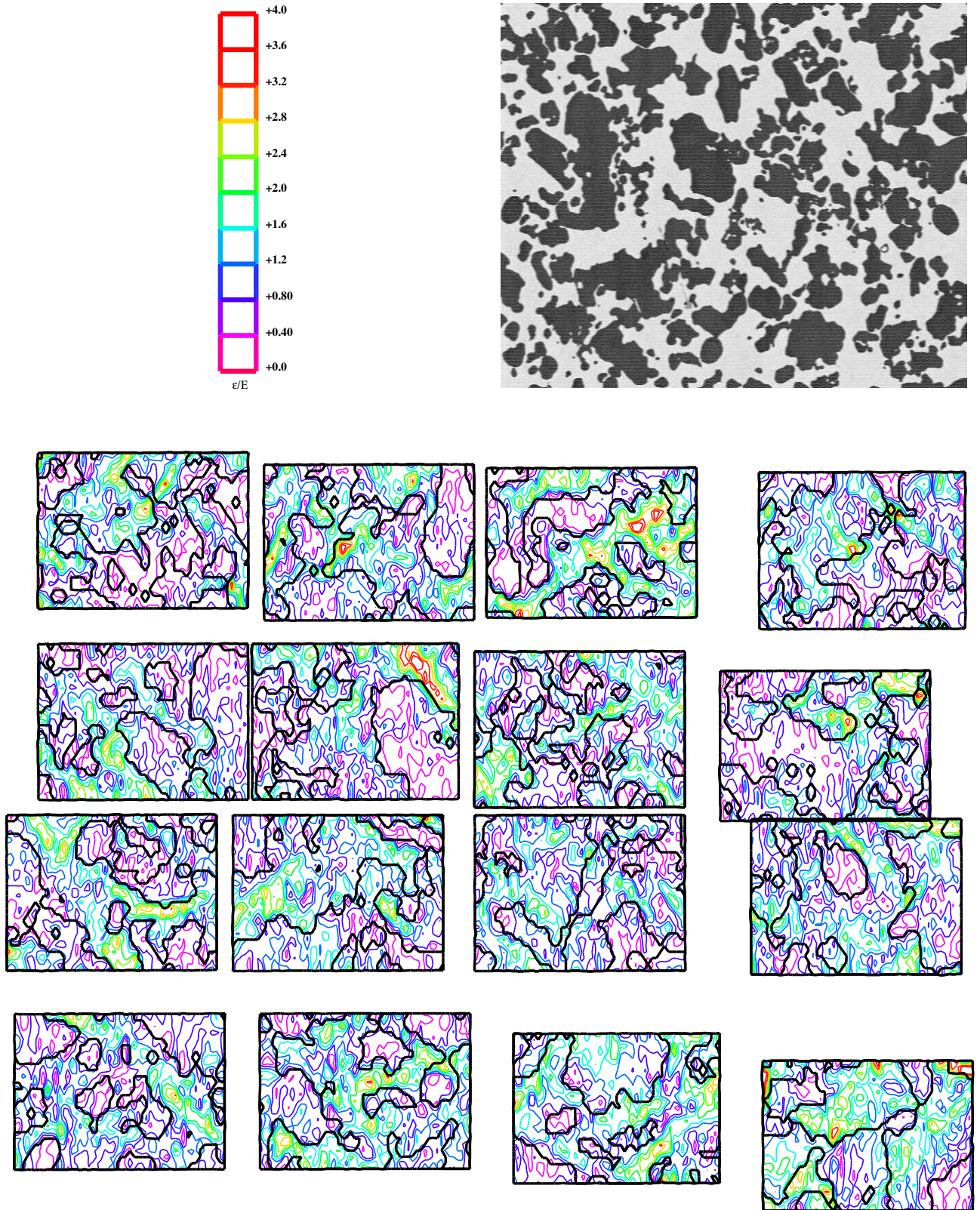


Figure F.12 : IA11 (micrographie  $\times 150$ )

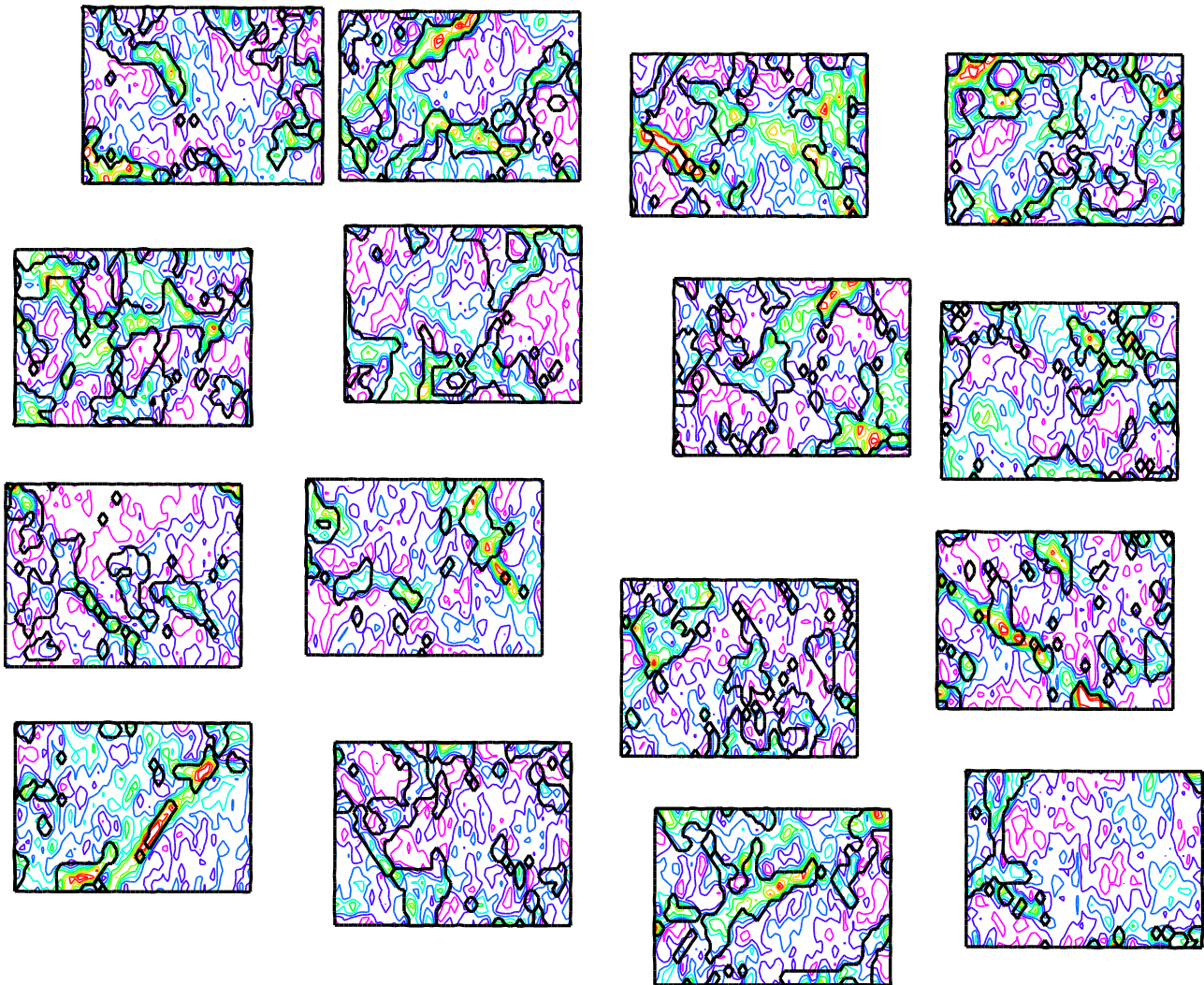
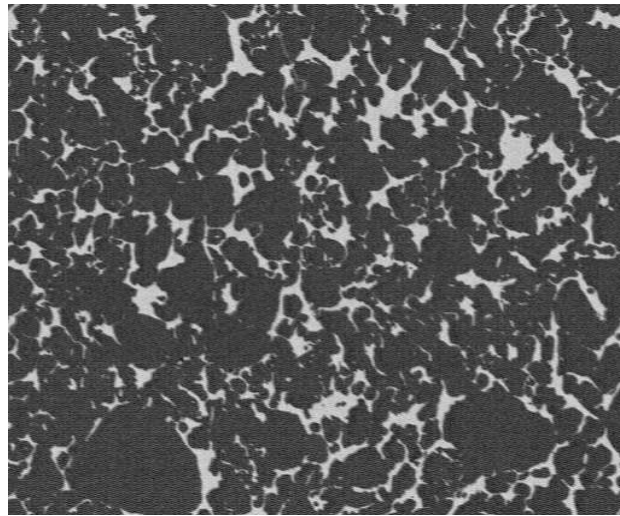


Figure F.13 : IB10 (micrographie  $\times 100$ )

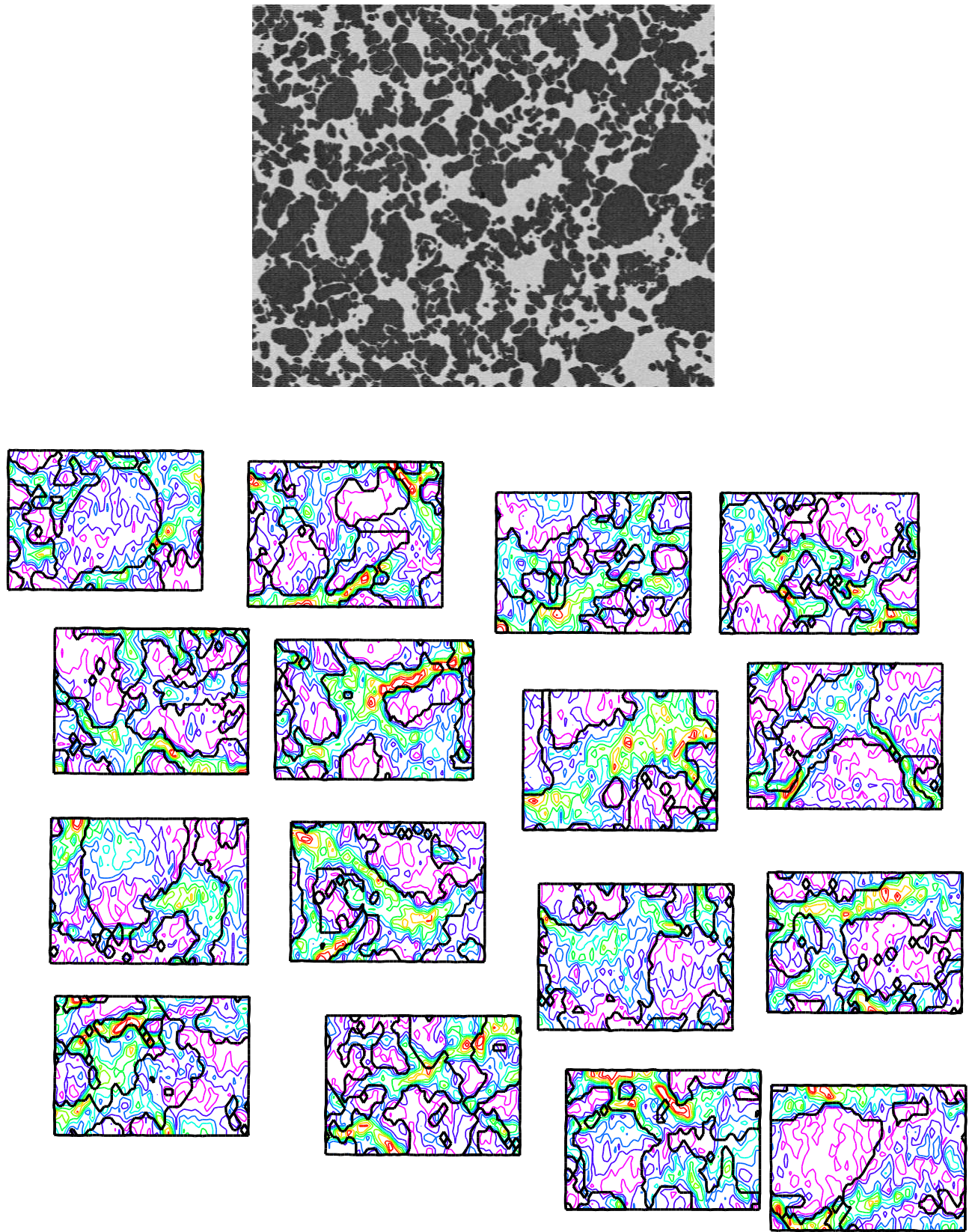


Figure F.14 : ID03 (micrographie  $\times 100$ )

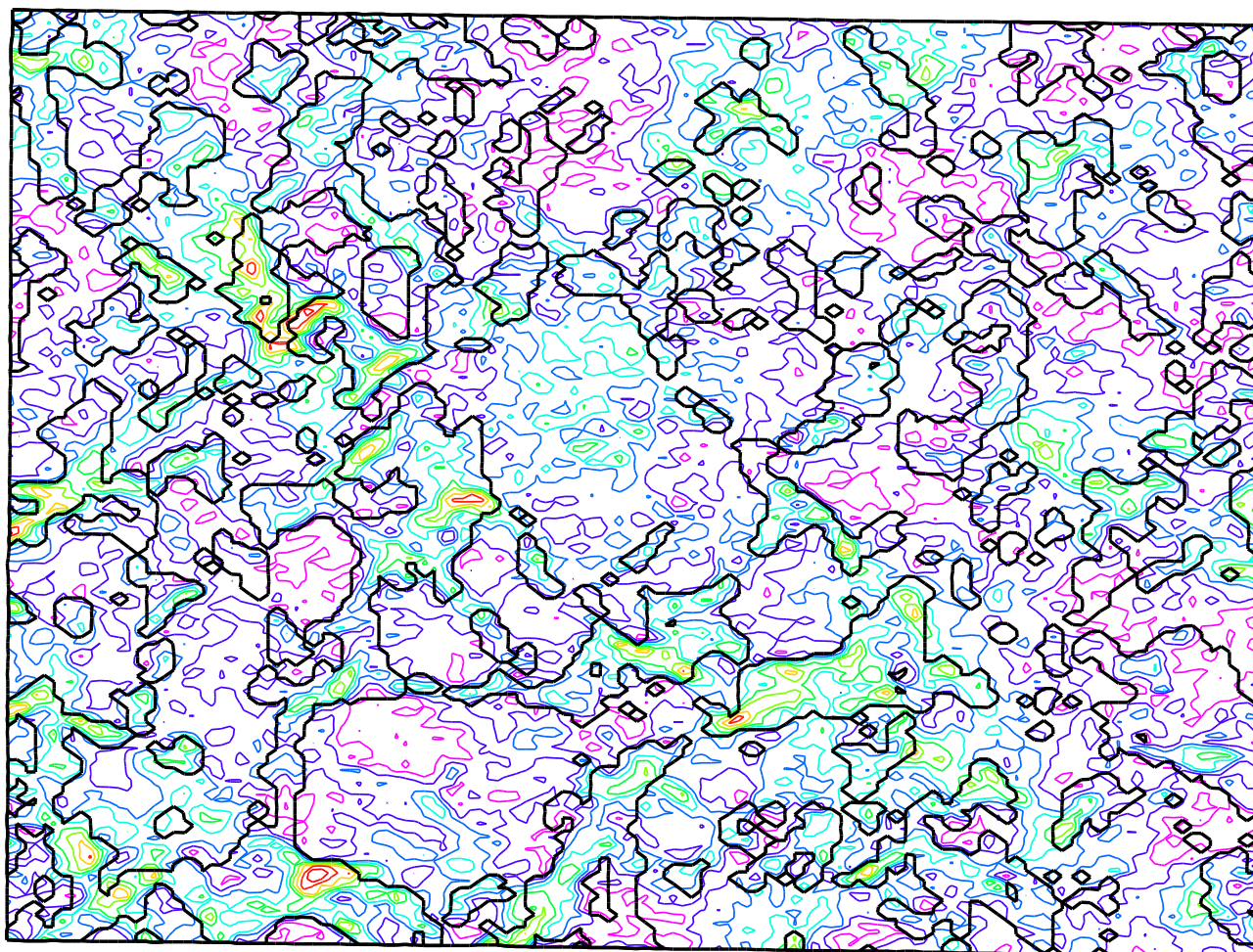
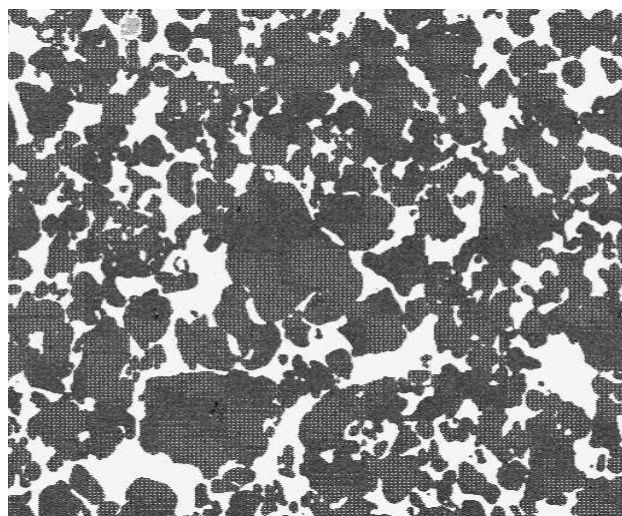


Figure F.15 : IE05 (micrographie  $\times 150$ )

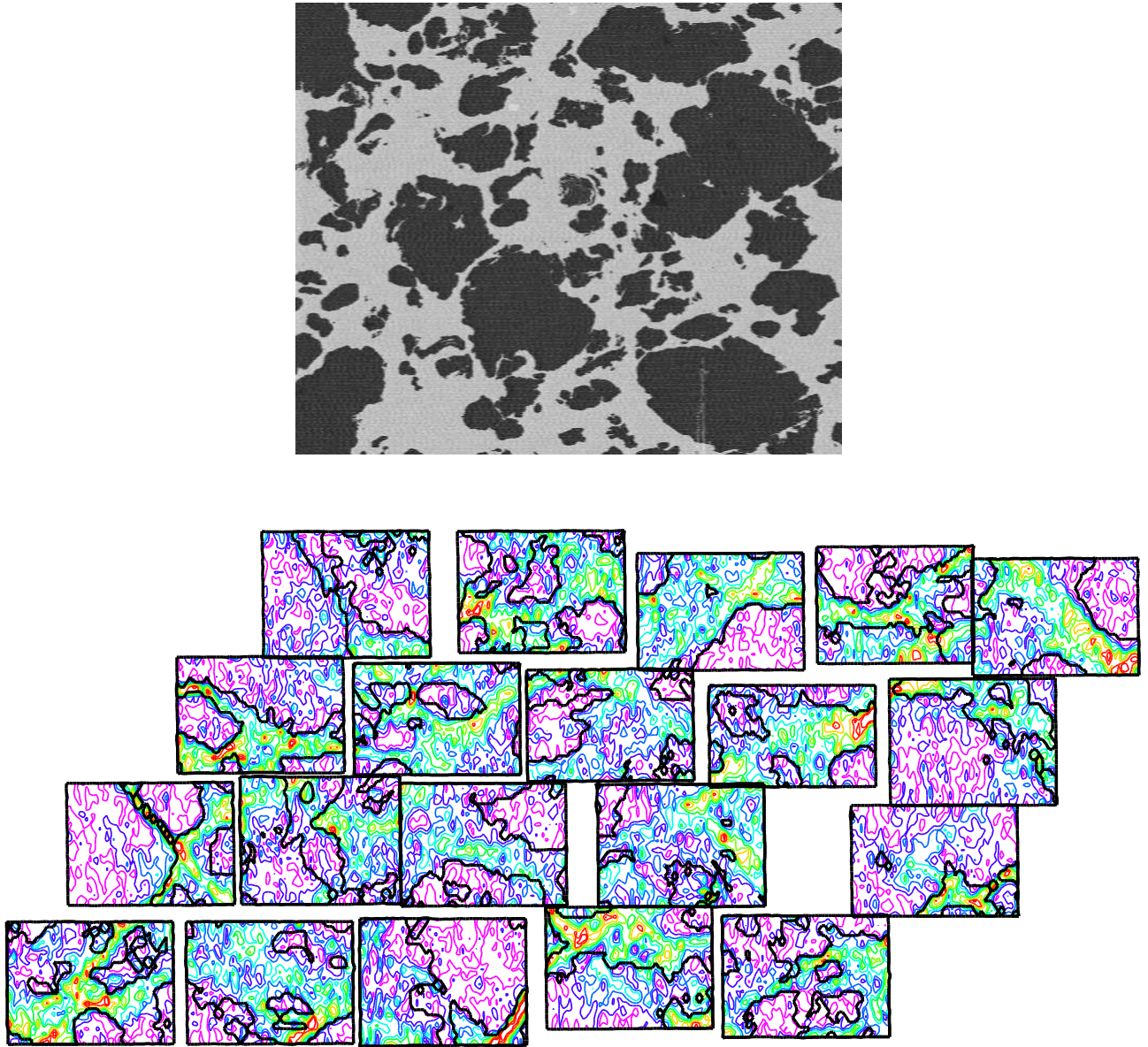


Figure F.16 : *H172* (micrographie  $\times 120$ )



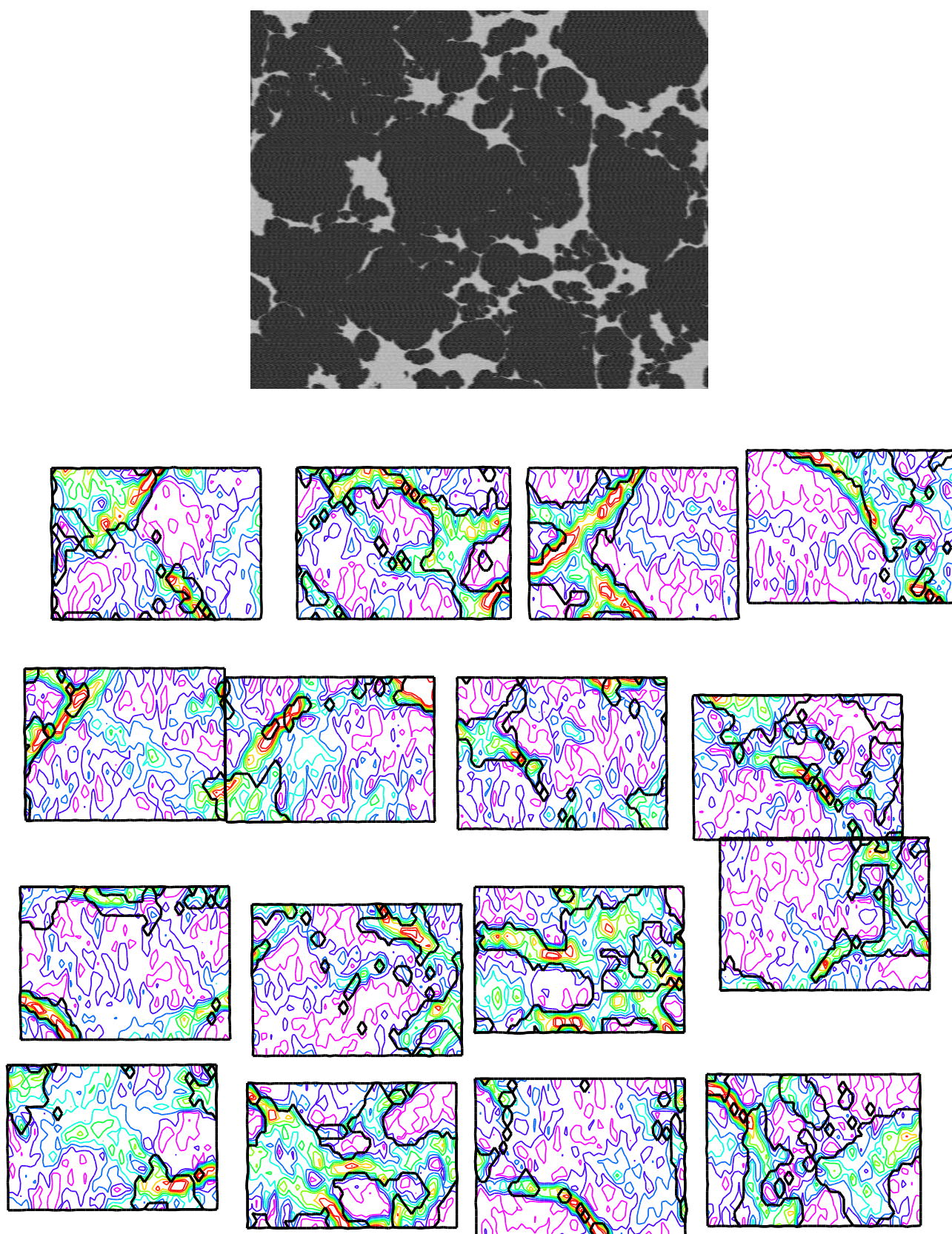


Figure F.17 : H169 (micrographie  $\times 160$ )

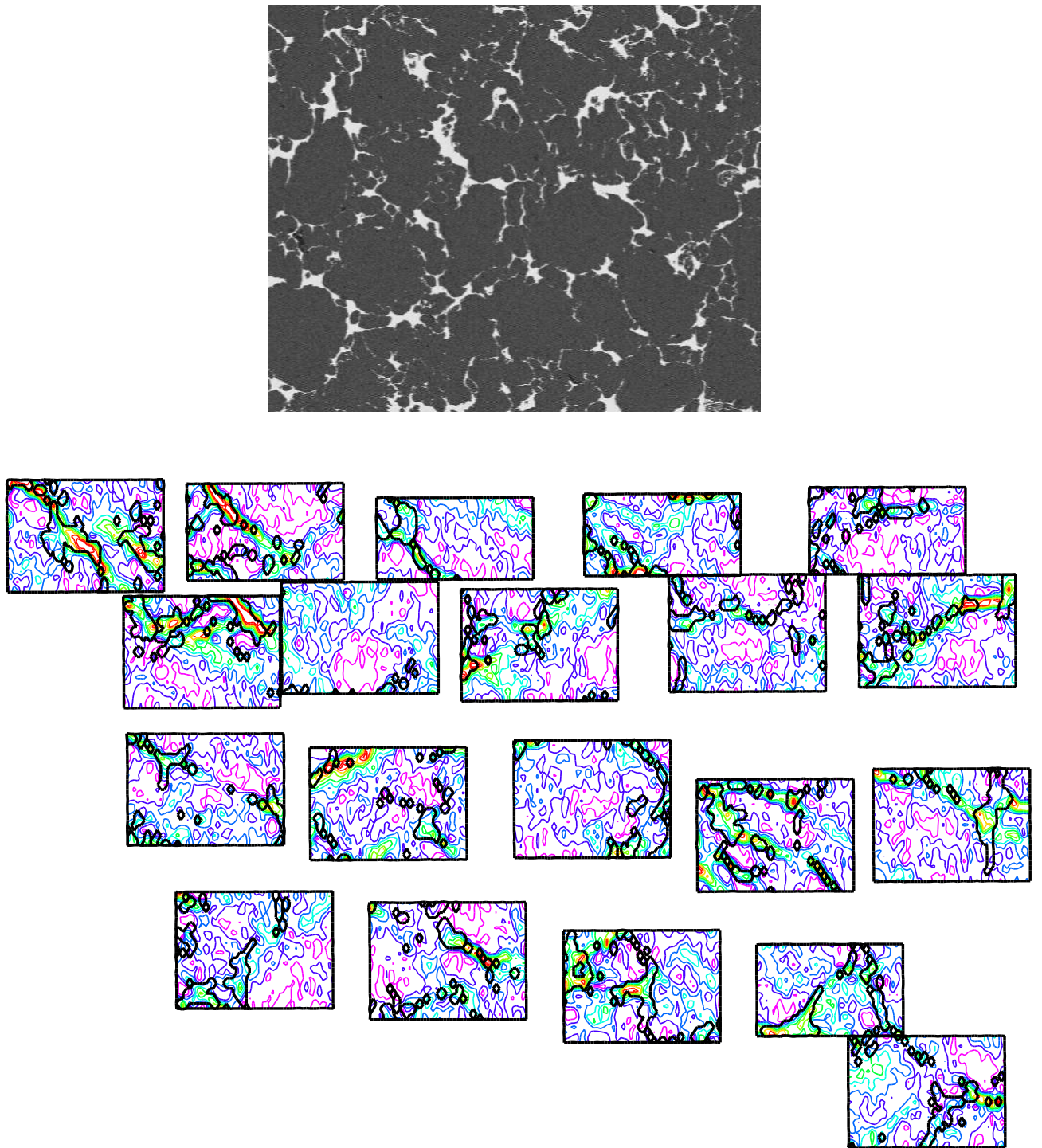


Figure F.18 : *H168* (micrographie  $\times 100$ )

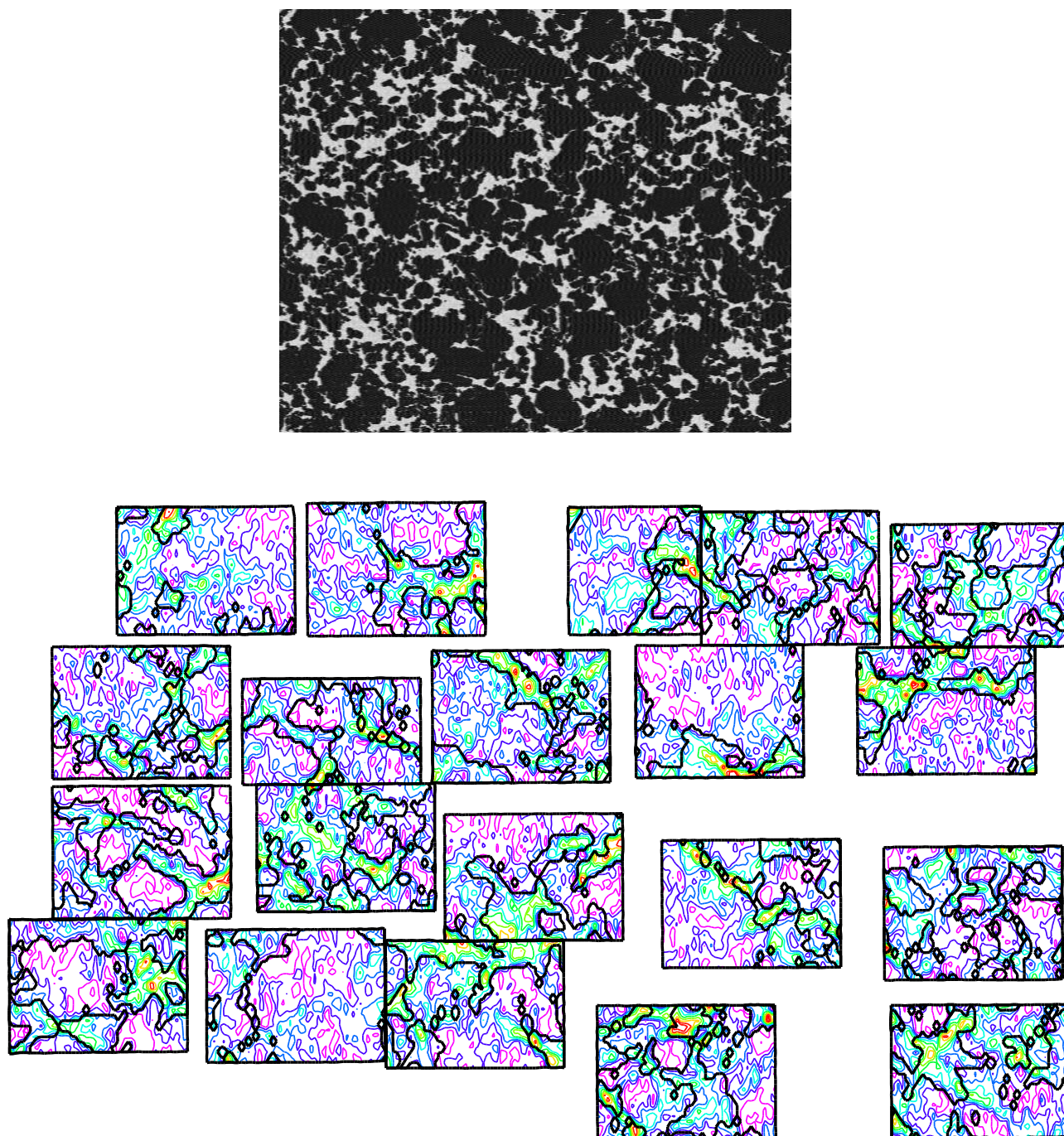


Figure F.19 : H174 (la micrographie  $\times 60$  ne représente pas le même domaine)

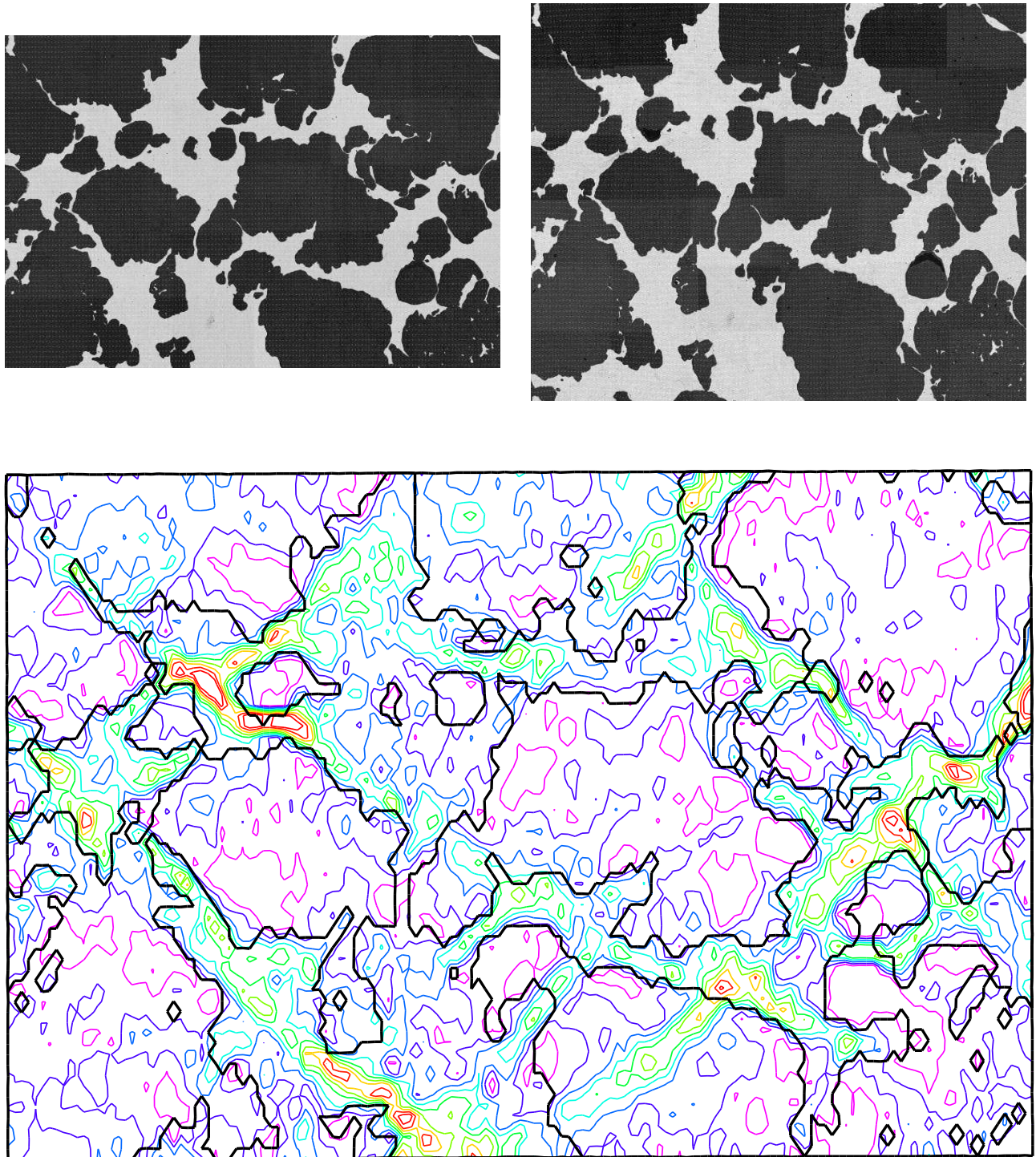


Figure F.20 : H171 (micrographies  $\times 175$  avant et après déformation)

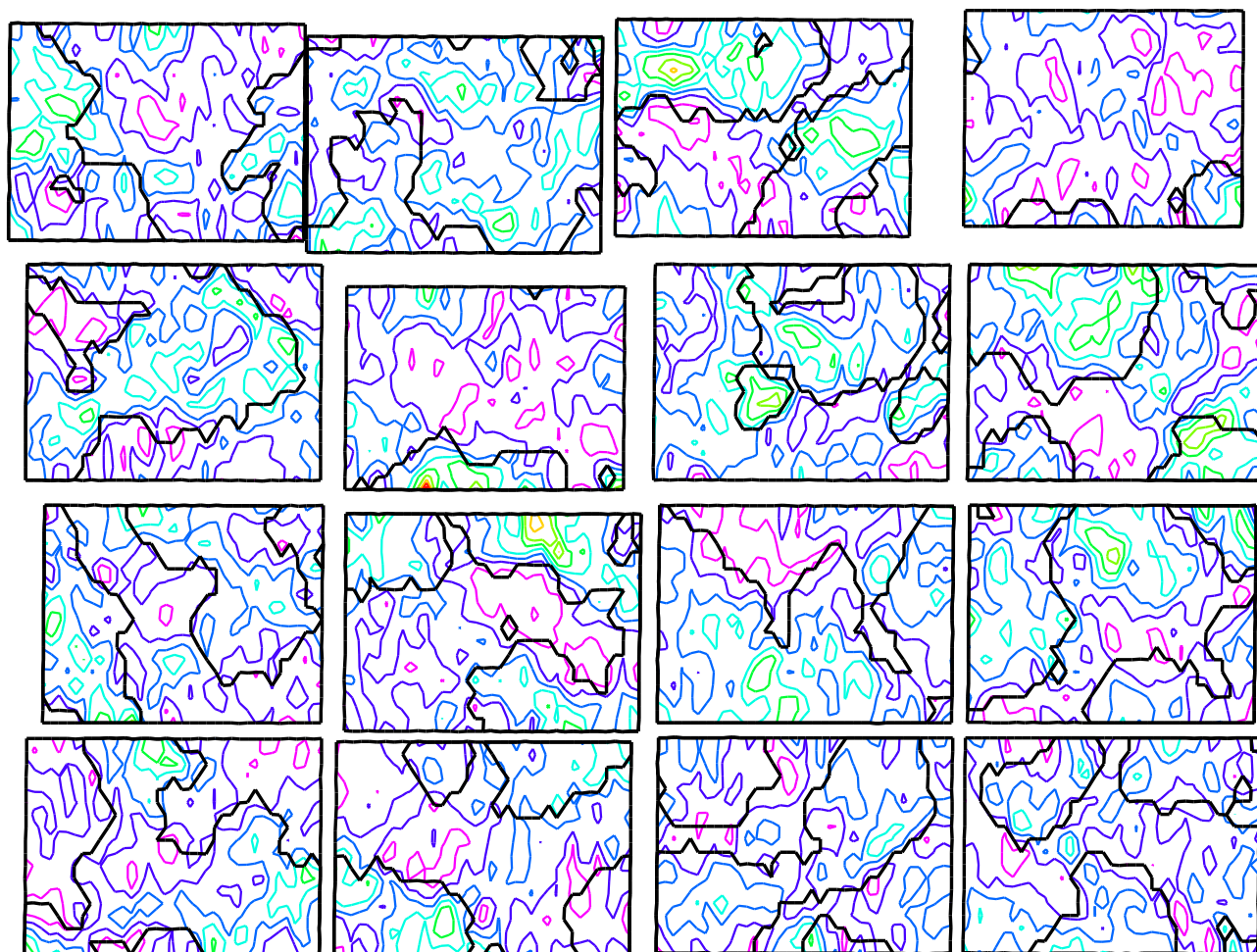


Figure F.21 : H327 (micrographie  $\times 120$ )

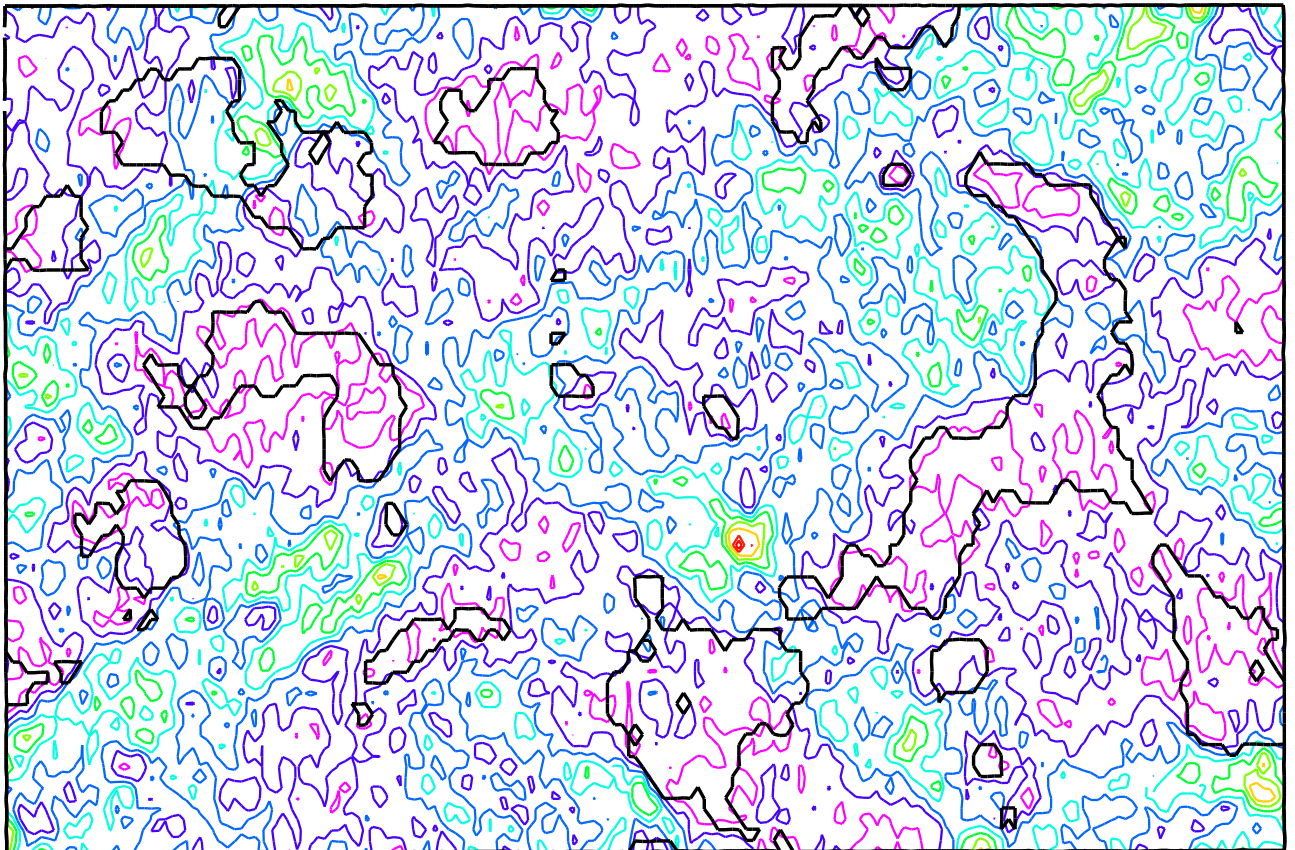
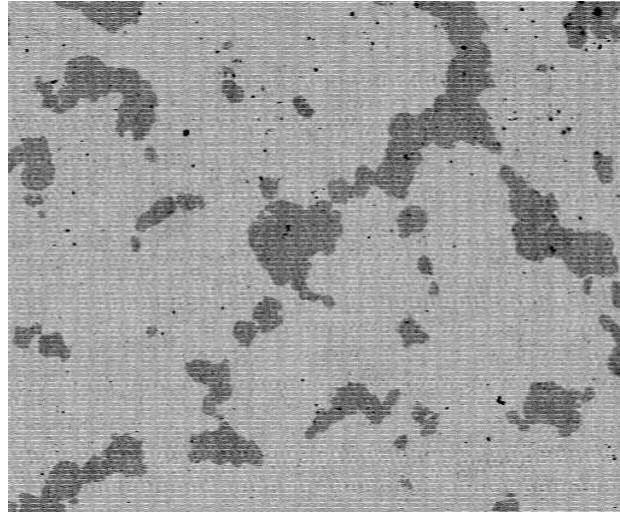


Figure F.22 : H329 (micrographie  $\times 160$ )



# Bibliographie

- [1] N. Albérola, C. Bas et P. Melé. Composites particulières : modélisation du comportement viscoélastique, assortie du concept de percolation. *C. R. Acad. Sci.*, 319:1129–1132, 1994.
- [2] L. Allais. *Effet de la morphologie et de la répartition spatiale des phases sur le comportement mécanique des matériaux biphasés*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII, 11/1991.
- [3] L. Allais, M. Bornert, T. Bretheau et D. Caldemaison. Experimental characterization of the local strain field in a heterogeneous elastoplastic material. *Acta Metall. Mater.*, 42(11):3865–3880, 1994.
- [4] K. Andresen et B. Hubner. Calculation of strain from an object grating on a reseau film. *Exp. Mech.*, 32(2):96–101, 1992.
- [5] J. M. Arnaudès et H. Fraysse. *Algèbre bilinéaire et géométrie*. Dunod Université, 1990.
- [6] D. G. Attwood et P. M. Hazzledine. A fiducial microgrid for high-resolution metallography. *Met.*, 9:483–501, 1976.
- [7] G. Bao, J. W. Hutchinson et R. M. McMeeking. The flow stress of dual-phase, non-hardening solids. *Mech. Mat.*, 12:85–94, 1991.
- [8] R. Becker et O. Richmond. Incorporation of microstructural geometry in material modelling. *Mod. Simul. in Mat. Sci. Engng.*, 2(3A):439–454, 1994.
- [9] N. Ben Amar, P. Viaris de Lesegno et A. Beghdadi. Automatic determination of displacement fields using image analysis techniques. J. Ziebs, J. Bressers, H. Frenz, D. R. Hayhurst, H. Klingelhöffer et S. Forest, éditeurs, *Proceedings of the International Symposium on Local strain and temperature measurements in non-uniform fields at elevated temperatures, Berlin*. Woodhead Publishing Limited, 1996.
- [10] P. Bénéfice et J. P. Boehler. The application of stereophotogrammetry to the analysis of displacement fields in solid mechanics. A. Lagarde, éditeur, *Optical methods in mechanics of solids*, pages 657–667. Sijthoff & Noordhoff, 1983.
- [11] Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori-Tanaka's Theory in composite materials. *Mech. Mat.*, 6:147–157, 1987.
- [12] Y. Benveniste, G. J. Dvorak et T. Chen. On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, 39(7):927–946, 1990.
- [13] M. Beran et J. Molyneux. Use of classical variational principles to determine bounds for the effective bulk modulus in heterogeneous media. *Q. Appl. Math.*, 24:107–118, 1965.
- [14] M. Berveiller, A. Fassi-Fehri et A. Hihi. The problem of two plastic and heterogeneous inclusions in an anisotropic medium. *Int. J. Engng. Sci.*, 25(6):691–709, 1987.
- [15] M. Berveiller et A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 26:325–344, 1979.



- 
- [16] M. Berveiller et A. Zaoui. Modeling of the plastic behavior of inhomogeneous media. *J. Engng. Mat. Tech.*, 106:295–298, 1984.
- [17] J. F. W. Bishop et R. Hill. A theoretical derivation of the plastic properties of polycrystalline face-centred metals. *Phil. Mag.*, 42:1298, 1951.
- [18] J. F. W. Bishop et R. Hill. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stress. *Phil. Mag.*, 42:414, 1951.
- [19] H. J. Böhm et F. G. Rammerstorfer. Fiber arrangement effects on the microscale stresses of continuously reinforced MMCs. R. Pyrz, éditeur, *Microstructure-property interactions in composite materials*, pages 51–62. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [20] H. J. Böhm et F. G. Rammerstorfer. Influence of the micro-arrangement on matrix and fiber damage in continuously reinforced MMCs. A. Pineau et A. Zaoui, éditeurs, *Micromechanics of plasticity and damage of multiphase materials*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [21] M. Bornert. La déformation plastique des matériaux hétérogènes en liaison avec la morphologie de leur microstructure. Rapport de stage, DEA Mécanique et Matériaux, 7/1990.
- [22] M. Bornert. Description du programme **Composit**. Documentation informatique, LMS - École Polytechnique, 8/1992.
- [23] M. Bornert. Morphologically representative pattern-based modelling in elasticity. K. Markov, éditeur, *Continuum Models and Discrete Systems - 8*, pages 123–131. World Scientific, 1995.
- [24] M. Bornert. A generalized pattern-based self-consistent scheme. *Comp. Mat. Sci.*, 5:17–31, 1996.
- [25] M. Bornert. Morphological effects at the local scale in two-phase materials. A. Pineau et A. Zaoui, éditeurs, *Micromechanics of plasticity and damage of multiphase materials*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [26] M. Bornert, E. Hervé, C. Stolz et A. Zaoui. Modelling the strain heterogeneities in a two-phase elastoplastic material. *Mecatmat 93, International Seminar on Micromechanics of Materials*, pages 26–37. Eyrolles, 1993.
- [27] M. Bornert, E. Hervé, C. Stolz et A. Zaoui. Self-consistent approaches and strain heterogeneities in two-phase elastoplastic materials. *Appl. Mech. Rev.*, 47(1):66–76, 1994.
- [28] M. Bornert, C. Stolz et A. Zaoui. Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(3):307–331, 1996.
- [29] T. Bretheau, D. Caldemaison, A. Feylessoufi, J.-P. Fondères et A. Zaoui. Yielding, plastic flow and structural morphology of two-phase materials. *J. Mate. Sci.*, 23:4022–4026, 1988.
- [30] T. Bretheau, P. Mussot et C. Rey. Microscale plastic inhomogeneities and macroscopic behavior of single and multiphase materials. *J. Engng. Mat. Tech.*, pages 1–7, 1985.
- [31] T. Bretheau, M. Bornert et D. Caldemaison. A mesoscale experimental approach of plasticity and damage. J. Ziebs, J. Bressers, H. Frenz, D. R. Hayhurst, H. Klingelhöffer et S. Forest, éditeurs, *Proceedings of the International Symposium on Local strain and temperature measurements in non-uniform fields at elevated temperatures, Berlin*. Woodhead Publishing Limited, 1996.
- [32] T. Bretheau et D. Jeulin. Caractéristiques morphologiques des constituants et comportement à la limite élastique d'un matériau biphasé Fe/Ag. *R. Phys. Appl.*, 24:861–869, 1989.
- [33] B. Budiansky. On the elastic moduli of some heterogeneous material. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:223–227, 1965.
-

- 
- [34] B. Budiansky et T. T. Wu. Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals. *4th U.S. National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, pages 1175–1185, 1962.
- [35] R. F. Bunshah, éditeur. *Techniques of Metal Research - Measurements of mechanical properties*, volume V. Interscience Publishers, 1971.
- [36] V. A. Buryachenko. Effective strength properties of elastic physically nonlinear composites. *Mecamat 93, International Seminar on Micromechanics of Materials*, pages 567–578. Eyrolles, 1993.
- [37] V. A. Buryachenko et W. S. Kreher. Internal residual stresses in heterogeneous solids - A statistical theory for particulate composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(7):1105–1125, 1995.
- [38] V. A. Buryachenko et V. Z. Parton. Effective-field method in the statics of composite materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 33:735–745, 1992.
- [39] G. R. Canova, H. R. Wenk et A. Molinari. Deformation modelling of multi-phase polycrystals: case of a quartz-mica aggregate. *Acta Metall. Mater.*, 40(7):1519–1530, 1992.
- [40] S. Caré. *Plasticité et endommagement du zirconium alpha polycristallin déformé en traction à la température ambiante*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1/1995.
- [41] J.-L. Chermant et M. Coster. *Précis d'analyse d'images*. Presses du CNRS, 1989.
- [42] R. M. Christensen. A critical evaluation for a class of micromechanics models. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3):379–404, 1990.
- [43] R. M. Christensen et K. H. Lo. Solution for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27:315–330, 1979.
- [44] T. Christman, A. Needleman et S. Suresh. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metall. Mater.*, 37(11):3029–3050, 1989.
- [45] T. C. Chu, W. F. Ranson, M. A. Sutton et W. H. Peters. Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics. *Exp. Mech.*, 25(3):232–244, 1985.
- [46] G. Cloud et S. Paleebut. Surface and interior strain fields measured by multiple-embedded-grid Moiré and strain gages. *Exp. Mech.*, 32(3):273–281, 1992.
- [47] J. Crépin, T. Bretheau et D. Caldemaison. Plastic deformation mechanisms of  $\beta$  treated zirconium. *Acta Metall. Mater.*, 43(10):3709–3719, 1995.
- [48] I. M. Daniel. Experimental methods in applied mechanics. *Exp. Mech.*, 50:963–976, 1983.
- [49] R. Dendievel. *Méthodes variationnelles et approximations autocohérentes en élasticité et viscoplasticité*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 8/1992.
- [50] J. Desrues. Sur l'application de la stéréophotogrammétrie à la mesure des grandes déformations. *R. Fr. Méc.*, 3:55–63, 1983.
- [51] M. Dong et S. Schmauder. Transverse mechanical behaviour of fiber reinforced composites - FE modelling with embedded cell models. *Comp. Mat. Sci.*, 5:53–66, 1996.
- [52] A. Einstein. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. *Ann. Phys.*, 19:289, 1906.
- [53] M. El Mouden et A. Molinari. A cluster approach for the elastic interaction of inclusions. *C. R. Acad. Sci.*, 321:355–361, 1995.
- [54] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, A421:376–396, 1957.
-

- 
- [55] J. D. Eshelby. *Progress in solid mechanics*, volume 2, chapter III, pages 87–140. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1961.
- [56] R. W. Fail et C. E. Taylor. An application of pattern mapping to plane motion. *Exp. Mech.*, 30(4):404–410, 1990.
- [57] O. Fassi-Fehri, A. Hiji et M. Berveiller. Multiple site self consistent scheme. *Int. J. Engng. Sci.*, 27(5):495–502, 1989.
- [58] G. Francfort, Q. S. Nguyen et P. Suquet. Thermodynamique et lois de comportement thermo-mécanique homogénéisées. *C. R. Acad. Sci.*, 296:1007–1010, 1983.
- [59] N. Fujimori. Microcomputer-aided analytic method for VTR images of two-dimensional plastic deformation. SPIE, éditeur, *Application of digital image processing VII*, pages 64–69, 1984.
- [60] W. Funk. Reference grids produced by exposure of a photoresist polymer to an electron beam: application to microdeformation measurements. *R. Mech.*, 4:175–190, 1982.
- [61] B. Gambin et E. Kröner. Convergence problems in the theory of random elastic media. *Int. J. Engng. Sci.*, 19:313–318, 1981.
- [62] P. Gilormini. A critical evaluation of various nonlinear extensions of the self-consistent model. A. Pineau et A. Zaoui, éditeurs, *Micromechanics of plasticity and damage of multiphase materials*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [63] P. Gilormini et Y. Germain. A finite element analysis of the inclusion problem for power law viscous materials. *Int. J. Sol. Struct.*, 23(3):413–437, 1987.
- [64] R. Hamann. *Étude expérimentale et théorique des propriétés élastiques et microplastiques des composites à matrice métallique à renfort sous forme de particules*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 1992.
- [65] B. Han, P. Ifju et D. Post. Geometric Moiré methods with enhanced sensitivity by optical/digital fringe multiplication. *Exp. Mech.*, 33(3):195–200, 1993.
- [66] B. Han et D. Post. Immersion interferometer for microscopic Moiré interferometry. *Exp. Mech.*, 32(1):38–41, 1992.
- [67] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29:143–150, 1962.
- [68] Z. Hashin et B. W. Rosen. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *J. Appl. Mech.*, 31:223–232, 1964.
- [69] Z. Hashin et S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:335–342, 1962.
- [70] Z. Hashin et S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:343–352, 1962.
- [71] Z. Hashin et S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11:127–140, 1963.
- [72] K. Hatanaka, T. Fujimitsu et H. Inoue. A measurement of three-dimensional strains around a creep-crack tip. *Exp. Mech.*, 32(3):211–217, 1992.
- [73] A. V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21:236–240, 1954.
- [74] E. Hervé, C. Stolz et A. Zaoui. A propos de l'assemblage des sphères composites de Hashin. *C. R. Acad. Sci.*, 313:857–862, 1991.
-

- 
- [75] E. Hervé et A. Zaoui. Modelling the effective behaviour of non-linear matrix inclusion composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 9(6):505–515, 1990.
- [76] E. Hervé et A. Zaoui. N-layered inclusion-based micromechanical modelling. *Int. J. Engng. Sci.*, 31(1):1–10, 1993.
- [77] E. Hervé et A. Zaoui. Elastic behaviour of multiply coated fiber-reinforced composites. *Int. J. Engng. Sci.*, 33(10):1419–1433, 1995.
- [78] A. Hihi, M. Berveiller et A. Zaoui. Une nouvelle formulation de la modélisation autocohérente de la plasticité des polycristaux métalliques. *J. Méc. Théo. Appl.*, 4(2):201–221, 1985.
- [79] R. Hill. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc.*, A 65:349–354, 1952.
- [80] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:89–101, 1965.
- [81] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:213–222, 1965.
- [82] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15:79–95, 1967.
- [83] R. Hill. On the micro-to-macro transition in constitutive analyses of elastoplastic response at finite strain. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 98:579–590, 1985.
- [84] C. L. Hom. Three-dimensional finite element analysis of plastic deformation in a whisker-reinforced metal matrix composite. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(5):991–1008, 1992.
- [85] J. W. Hutchinson. Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites. *Proc. R. Soc. Lond.*, A319:247–272, 1970.
- [86] J. W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. Lond.*, A348:101–127, 1976.
- [87] T. Iung, H. Petitgand, M. Maire et E. Lemaire. Mechanical behaviour of multiphase materials. Numerical simulations and experimental comparisons. A. Pineau et A. Zaoui, éditeurs, *Micromechanics of plasticity and damage of multiphase materials*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [88] B. Jaoul. *Étude de la plasticité et application aux métaux*. Dunod, Paris, 1965.
- [89] D. Jeulin. *Modèles morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelles*. Thèse de doctorat, Université de Caen, 4/1991.
- [90] D. Jeulin et A. Le Coënt. Morphological modeling of random Composites. K. Markov, éditeur, *Continuum Models and Discrete Systems - 8*, pages 199–206. World Scientific, 1995.
- [91] M. Kachanov, I. Tsukrov et B. Shafiro. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Appl. Mech. Rev.*, 47(1):151–174, 1994.
- [92] S. K. Kanaun. The effective field method in linear problems of statics of composite media. *PMM USSR*, 46:520–528, 1983.
- [93] S. K. Kanaun. Self-consistent schemes of averaging in mechanics of matrix composite materials. *Mech. Comp. Mat.*, 26:702–711, 1990.
- [94] E. H. Kerner. The elastic and thermoelastic properties of composite media. *Proc. Phys. Soc.*, 69B:801–813, 1956.
-

- 
- [95] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(1):115–128, 1990.
- [96] E. Kröner. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Phys.*, 151:504, 1958.
- [97] E. Kröner. Zur plastischen Verformung des Vielkristalls. *Acta Metall. Mater.*, 9:155, 1961.
- [98] E. Kröner. *Statistical continuum mechanics*. International Center for Mechanical Sciences - Springer, 1971.
- [99] E. Kröner. Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 25:137–155, 1977.
- [100] E. Kröner. Self-consistent scheme and graded disorder in polycrystal elasticity. *J. Phys. F: Metal Phys.*, 8(11):78, 1978.
- [101] E. Kröner. Graded and perfect disorder in random media elasticity. *J. Engng. Mech. Div.*, 106(EM5):889–914, 1980.
- [102] E. Kröner et H. Koch. Effective properties of disordered materials. *SM Arch.*, 1(2/3):183–238, 1976.
- [103] G. Li et P. Ponte Castañeda. Variational estimates for the elastoplastic response of particle-reinforced metal-matrix composites. *Appl. Mech. Rev.*, 47(1):77–94, 1994.
- [104] T. H. Lin. Analysis of elastic and plastic strains in a face-centred-cubic crystal. *J. Mech. Phys. Solids*, 5:143–158, 1957.
- [105] P. Lipinski. *Modélisation du comportement des métaux, en transformations élasto-plastiques finies, à partir d'une méthode de transition d'échelles*. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1993.
- [106] P. Lipinski, J. Krier et M. Berveiller. Elastoplasticité des métaux en grandes déformations : comportement global et évolutions de la microstructure. *R. Phys. Appl.*, 25:361–388, 1990.
- [107] P. F. Luo, Y. J. Chao, M. A. Sutton et W. H. Peters. Accurate measurement of three-dimensional deformations in deformable and rigid bodies using computer vision. *Exp. Mech.*, 33(2):123–132, 1993.
- [108] E. Maire. *Relations entre les propriétés mécaniques et la microstructure de composites à matrice métallique à renforts particuliers élaborés par Osprey<sup>TM</sup>*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 1/1995.
- [109] E. Maire, M. Bornert, E. Hervé, G. Lormand et R. Fougères. A method based on metallurgical and micromechanical concepts to calculate the tensile curve of MMCp. *Atelier Franco-Canadien sur les CMM - CMEMP, Evry*, 1995.
- [110] J. Mandel. *Mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, 1966.
- [111] G. Matheron. *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, 1967.
- [112] J. J. McCoy. *Recent Advances in Engineering Sciences*, volume 51, pages 235–254. Gordon and Breach, New York, 1970.
- [113] R. McLaughlin. A study of the differential scheme for composite materials. *Int. J. Engng. Sci.*, 15:237–244, 1977.
- [114] J.-C. Michel et P. Suquet. An analytical and numerical study of the overall behaviour of metal matrix composites. *Mod. Simul. in Mat. Sci. Engng.*, 2(3A):637–658, 1994.
-

- 
- [115] M. N. Miller. Bounds for the effective electrical, thermal, and magnetic properties of heterogeneous materials. *J. Math. Phys.*, 10:1988–2005, 1969.
- [116] G. W. Milton. Bounds on the electromagnetic, elastic and other properties of two-component composites. *Phys. Rev. Lett.*, 46(8):542–545, 1981.
- [117] G. W. Milton. Bounds on the elastic and transport properties of two-component composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 30(3):177–191, 1982.
- [118] G. W. Milton. On characterizing the set of possible effective tensors of composites: the variational method and the translation method. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43:63–125, 1990.
- [119] G. W. Milton et R. W. Kohn. Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 36:597–629, 1988.
- [120] G. W. Milton et N. Phan-Thien. New bounds on the effective elastic moduli of two-component materials. *Proc. R. Soc. Lond.*, A380:305–331, 1982.
- [121] G. W. Milton et N. Phan-Thien. New bounds on the effective thermal conductivity of N-phase materials. *Proc. R. Soc. Lond.*, A380:333–348, 1982.
- [122] A. Molinari, G. R. Canova et S. Ahzi. A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metall. Mater.*, 35(12):2983–2994, 1987.
- [123] A. Molinari et L. S. Tóth. Tuning a self consistent viscoplastic model by finite element results - I. Modeling. *Acta Metall. Mater.*, 42(7):2453–2458, 1994.
- [124] T. Mori et K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall. Mater.*, 21:597–629, 1973.
- [125] H. Moulinec et P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R. Acad. Sci.*, 318:1417–1423, 1994.
- [126] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff, La Hague, 1982.
- [127] A. N. Norris. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mech. Mat.*, 4:1–16, 1985.
- [128] M. Obata, H. Shimada et A. Kawasaki. Fine-grid method for large-strain analysis near a notch tip. *Exp. Mech.*, pages 146–151, 1983.
- [129] M. Ostoja-Starjewski. Towards scale-dependent constitutive laws for plasticity and fracture of random heterogeneous materials. A. Pineau et A. Zaoui, éditeurs, *Micromechanics of plasticity and damage of multiphase materials*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [130] V. J. Parks. *Geometric Moiré, SEM Handbook on Experimental Mechanics*, pages 282–313. Prentice Hall Inc., 1987.
- [131] B. Paul. Prediction of elastic constants of multiphase materials. *Trans. Am. Inst. Min., Metall. Pet. Eng.*, 218:36–41, 1960.
- [132] W. H. Peters et W. F. Ranson. Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Opt. Engng.*, 21(3):427–431, 1982.
- [133] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39(1):45–71, 1991.
- [134] P. Ponte Castañeda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(8):1757–1788, 1992.
-

- 
- [135] P. Ponte Castañeda et J. R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(12):1919–1951, 1995.
- [136] C. Y. Poon, M. Kujawinska et C. Ruiz. Automated fringe pattern analysis for Moiré interferometry. *Exp. Mech.*, 33(3):234–241, 1993.
- [137] D. Post. *Moiré interferometry, SEM Handbook on Experimental Mechanics*, chapter 7. Prentice Hall Inc., 1987.
- [138] D. Post. Moiré interferometry: advances and applications. *Exp. Mech.*, 31(3):276–280, 1991.
- [139] G. L. Povirk, M. G. Stout, M. Bourke, J. A. Goldstone, A. C. Lawson, M. Lovato, S. R. Mecewen, S. R. Nutt et A. Needleman. Thermally and mechanically induced residual strains in Al-SiC composites. *Acta Metall. Mater.*, 40(9):2391–2412, 1992.
- [140] Y. P. Qiu et G. J. Weng. The influence of inclusion shape on the overall elastoplastic behavior of a two-phase isotropic composite. *Int. J. Sol. Struct.*, 27(12):1537–1550, 1991.
- [141] D. T. Read, J. W. Sally et M. Szanto. Scanning Moiré at high magnification using optical methods. *Exp. Mech.*, 33(2):110–116, 1993.
- [142] A. Reuss. Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of monocrystals. *Z. angew. Math. Mech.*, 9:49–58, 1929.
- [143] Y. Rougier, C. Stolz et A. Zaoui. Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. *C. R. Acad. Sci.*, 316:1517–1522, 1993.
- [144] Y. Rougier, C. Stolz et A. Zaoui. Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals. *C. R. Acad. Sci.*, 318:145–151, 1994.
- [145] G. Sachs. Zur Ableitung der Fließbedingung. *Zeit. der V.D.I.*, 72:739–747, 1928.
- [146] M. Sallami. Un modèle autocohérent numérique. Rapport de stage, DEA Mécanique des Solides et des Structures, 6/1994.
- [147] S. Schmauder, J. Wulf, T. Steinkopf et H. F. Fischmeister. Micromechanics of plasticity and damage in an Al/SiC metal matrix composite. A. Pineau et A. Zaoui, éditeurs, *Micromechanics of plasticity and damage of multiphase materials*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [148] J. S. Sirkis. System response to automated grid methods. *Opt. Engng.*, 29(12):1485–1493, 1990.
- [149] J. S. Sirkis et T. J. Lim. Displacement and strain measurement with automated grid methods. *Exp. Mech.*, 31(4):382–388, 1991.
- [150] J. S. Sirkis et C. E. Taylor. Displacement pattern matching and boundary-element methods for elastic-plastic stress analysis. *Exp. Mech.*, 30(1):26–33, 1990.
- [151] C. Stolz. Sur l'opérateur de Green en élasticité. Communication personnelle, LMS - École Polytechnique, 9/1993.
- [152] C. Stolz et A. Zaoui. Analyse morphologique et approches variationnelles du comportement d'un milieu élastique hétérogène. *C. R. Acad. Sci.*, 312:143–150, 1991.
- [153] P. Suquet. Overall potentials and extremal surfaces of power-law or ideally plastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(6):981–1002, 1993.
- [154] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure. *C. R. Acad. Sci.*, 320:563–571, 1995.
-

- 
- [155] M. A. Sutton, S. R. McNeill, J. Jang et M. Babai. Effect of subpixel image restoration on digital correlation error estimates. *Opt. Engng.*, 27(10):870–877, 1988.
- [156] M. A. Sutton, J. L. Turner, H. A. Bruck et T. A. Chae. Full-field representation of discretely sampled surface deformation for displacement and strain analysis. *Exp. Mech.*, 31(2):168–177, 1991.
- [157] M. A. Sutton, J. L. Turner, Y. J. Chao, H. A. Bruck et T. L. Chae. Experimental investigations of three-dimensional effects near a crack-tip using computer vision. *Int. J. Frac.*, 53:201–228, 1992.
- [158] M. A. Sutton, W. J. Wolters, W. H. Peters, W. F. Ranson et S. R. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation technique. *Im. Vis. Comp.*, 1(3):133–139, 1983.
- [159] D. R. S. Talbot et J. R. Willis. Variational principles for inhomogeneous non-linear media. *IMA J. Appl. Math.*, 35:39–54, 1985.
- [160] D. R. S. Talbot et J. R. Willis. Upper and lower bounds for the overall properties of a nonlinear composite dielectric. I. Random microgeometry. *Proc. R. Soc. Lond.*, 447:365–384, 1994.
- [161] G. P. Tandon et G. J. Weng. A theory of particle-reinforced plasticity. *J. Appl. Mech.*, 55(1):126–135, 1988.
- [162] G. I. Taylor. Plastic strain in Metals. *J. Inst. Metals*, 62:307–315, 1938.
- [163] F. Thébaud. *Vers l'introduction de l'endommagement dans la prévision globale du comportement de composites à matrice métallique*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 11/1993.
- [164] F. Thébaud, J.-C. Michel, E. Hervé, P. Suquet et A. Zaoui. Modelling nonlinear behaviour of composites with imperfect interfaces. S. Andersen, éditeur, *Proceedings of the 13th. Risø International Symposium on Materials Science*, pages 467–472, 1992.
- [165] S. Torquato. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties. *Appl. Mech. Rev.*, 44(2):37–76, 1991.
- [166] W. Voigt. Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 38:573–587, 1889.
- [167] L. J. Walpole. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems - I. *J. Mech. Phys. Solids*, 14:151–162, 1966.
- [168] L. J. Walpole. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems - II. *J. Mech. Phys. Solids*, 14:289–301, 1966.
- [169] L. J. Walpole. On the overall elastic moduli of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 17:235–251, 1969.
- [170] L. J. Walpole. *Advances in Applied Mechanics*, volume 21, pages 160–242. Academic Press, New York, 1981.
- [171] G. J. Weng. The overall elastoplastic stress-strain relations of dual-phase metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3):419–441, 1990.
- [172] E. Werner, T. Siegmund, H. Weinhandl et F. D. Fischer. Properties of random polycrystalline two-phase materials. *Appl. Mech. Rev.*, 47(1):231–240, 1994.
- [173] J. R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 25:185–202, 1977.
-



- [174] J. R. Willis. Variational principles and bounds for the overall properties of composites. J. Provan, éditeur, *Continuum Models for Discrete Systems*, pages 185–215. University of Waterloo Press, 1978.
- [175] J. R. Willis. *Advances in Applied Mechanics*, volume 21, pages 1–78. Academic Press, New York, 1981.
- [176] J. R. Willis. The overall response of composite materials. *J. Appl. Mech.*, 50:1202–1209, 1983.
- [177] J. R. Willis. On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39(1):73–86, 1991.
- [178] J. R. Willis. On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites: correction and addition. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(2):441–445, 1992.
- [179] T. T. Wu. The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material. *Int. J. Sol. Struct.*, 2:1–8, 1966.
- [180] Y. Yang. *Mesure du champ de déplacement des matériaux sous charge mécanique par analyse des images*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 9/1992.
- [181] A. Zaoui. *Étude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement visco-plastique de métaux polycristallins (système c.f.c.)*. Thèse de doctorat, Université Paris, 1970.
- [182] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes*. École Polytechnique, 1991.
- [183] R. Zeller et P. H. Dederichs. Elastic constants of polycrystals. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 55:831–842, 1973.
-

# Table des Matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Conseils de lecture</b>	<b>9</b>
<b>Notations</b>	<b>11</b>
<b>I Morphologie et Hétérogénéités</b>	<b>13</b>
<b>1 Modélisations micromécaniques de matériaux multiphasés</b>	<b>15</b>
1.1 Généralités sur les modèles micromécaniques . . . . .	15
1.1.A Un problème de structure sur un matériau hétérogène . . . . .	15
1.1.B Échelle macroscopique et échelle microscopique (théorie de premier gradient) . . . . .	18
1.1.C Notion de macrohomogénéité . . . . .	19
1.1.D Description stochastique des matériaux hétérogènes aléatoires . . . . .	23
1.1.E Détermination du comportement macroscopique . . . . .	25
1.1.E.a Approche phénoménologique . . . . .	25
1.1.E.b Approche micromécanique . . . . .	26
1.1.E.c Méthodologie des modèles micromécaniques . . . . .	28
1.1.E.d Pertinence macroscopique et microscopique des modèles . . . . .	29
1.1.E.e Objectif de la présente étude . . . . .	31
1.2 Modèles d'homogénéisation pour le comportement linéaire . . . . .	32
1.2.A Bornes ou estimations de Voigt et Reuss . . . . .	32
1.2.B Prise en compte de l'information d'ordre supérieur . . . . .	34
1.2.B.a Bornes de Hashin et Shtrikman . . . . .	34
1.2.B.b Théorie systématique de Kröner . . . . .	37
1.2.B.c Autres modèles invoquant des corrélations d'ordre supérieur à deux . . . . .	42
1.2.B.d Problème d'Eshelby et modèles dérivés . . . . .	44
1.2.C Morphologies de type matrice/inclusions . . . . .	49
1.2.C.a Modèle aux faibles concentrations et modèle autocohérent différentiel . . . . .	49
1.2.C.b Modèles à inclusions composites . . . . .	50
1.2.C.c Motifs morphologiques représentatifs . . . . .	52
1.2.C.d Prise en compte de la répartition spatiale des renforts . . . . .	54
1.3 Extensions aux comportements non-linéaires . . . . .	58
1.3.A Extensions classiques des modèles élastiques . . . . .	59

1.3.A.a	Approximations linéaires d'un comportement non linéaire . . . . .	59
1.3.A.b	Comportements élasto-plastiques . . . . .	60
1.3.A.c	Extension non-linéaire des modèles usuels . . . . .	61
1.3.B	Résultats rigoureux sur les comportements non-linéaires . . . . .	64
1.3.B.a	Approximations sous-jacentes aux extensions classiques . . . . .	64
1.3.B.b	Bornes exactes sur le potentiel effectif . . . . .	65
1.3.B.c	Extension modifiée des modèles élastiques . . . . .	66
1.3.B.d	Signification des champs locaux . . . . .	68
1.3.C	Homogénéisation périodique et méthodes dérivées . . . . .	71
<b>2</b>	<b>Mesures de déformations locales</b>	<b>75</b>
2.1	Revue des techniques existantes . . . . .	75
2.1.A	Cahier des charges . . . . .	75
2.1.B	Méthodes de moiré . . . . .	76
2.1.C	Méthodes de corrélations . . . . .	76
2.1.D	Méthodes de grilles . . . . .	77
2.1.E	Techniques quantitatives d'analyse de grilles . . . . .	77
2.2	Procédure expérimentale . . . . .	77
2.2.A	Préparation des éprouvettes . . . . .	77
2.2.B	Montage expérimental . . . . .	78
2.2.C	Détermination d'un domaine représentatif . . . . .	79
2.2.D	Décomposition du domaine étudié . . . . .	81
2.2.E	Repérage des points d'or . . . . .	81
2.2.F	Traitement des images . . . . .	82
2.3	Calcul des déformations . . . . .	85
2.3.A	Définitions . . . . .	85
2.3.A.a	Déformation locale . . . . .	85
2.3.A.b	Déformation moyenne . . . . .	85
2.3.B	Calcul du gradient local . . . . .	86
2.3.C	Incertitude expérimentale sur le gradient local . . . . .	88
2.3.D	Calcul de gradients moyens . . . . .	89
2.3.D.a	Gradient macroscopique . . . . .	89
2.3.D.b	Gradient moyen sur une phase . . . . .	89
2.3.E	Calcul des déformations locales et moyennes . . . . .	91
2.3.F	Caractérisation d'hétérogénéités . . . . .	92
2.3.G	Cartes de déformations . . . . .	94
2.4	Critiques et extensions possibles . . . . .	97
<b>3</b>	<b>Confrontation modèles-expériences et premières extensions</b>	<b>101</b>
3.1	Résultats expérimentaux . . . . .	102
3.1.A	Matériaux . . . . .	102
3.1.A.a	Procédés d'élaboration . . . . .	102
3.1.A.b	Propriétés des phases . . . . .	104
3.1.A.c	Éprouvettes biphasées testées . . . . .	107
3.1.A.d	Concentrations . . . . .	109

3.1.A.e	Caractérisation morphologique des biphasés . . . . .	111
3.1.B	Confrontation à l'échelle globale . . . . .	115
3.1.B.a	Comportement élastique . . . . .	115
3.1.B.b	Comportement élasto-plastique . . . . .	118
3.1.C	Confrontation à l'échelle locale . . . . .	121
3.1.C.a	Hétérogénéités inter-phases . . . . .	121
3.1.C.b	Hétérogénéités intra-phases . . . . .	126
3.1.D	Conclusions partielles . . . . .	132
3.2	Généralisations du modèle des trois phases . . . . .	133
3.2.A	Le modèle à plusieurs motifs n-phases . . . . .	133
3.2.A.a	Formulation en élasticité linéaire . . . . .	133
3.2.A.b	Extensions aux comportements non-linéaires . . . . .	137
3.2.A.c	Algorithme de résolution des équations non-linéaires . . . . .	142
3.2.B	Application aux biphasés étudiés . . . . .	143
3.2.B.a	Effets d'une probable porosité sur les modules d'élasticité . . . . .	143
3.2.B.b	Hétérogénéités de déformations : description morphologique enrichie . . . . .	148
3.2.B.c	Hétérogénéités de déformations : nouvelles extensions non-linéaires . . . . .	150
3.2.B.d	Comparaison entre extension classique et extension modifiée . . . . .	152
3.2.B.e	Confrontation portant sur $\langle \epsilon^{eq2} \rangle^{1/2}$ . . . . .	155
3.2.C	Application à des composites à matrice métallique . . . . .	156
3.2.D	Conclusions . . . . .	159
3.3	Origines des hétérogénéités . . . . .	160
3.3.A	Insuffisance des extensions non-linéaires . . . . .	160
3.3.B	Discrétisation orthoradiale : calculs par éléments finis . . . . .	161
3.3.C	Formalisme en grande transformation . . . . .	164
3.3.D	Insuffisance de la description microstructurale : mécanismes locaux . . . . .	165
3.3.E	Interactions à grandes distances . . . . .	166
3.4	Conclusions et introduction à la seconde partie . . . . .	172

## II Motifs Morphologiques Représentatifs 175

### 4 Encadrements et estimations du comportement élastique linéaire 177

4.1	Formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman . . . . .	177
4.1.A	Formulations variationnelles classiques - Rappels . . . . .	177
4.1.B	Fonctionnelle de Hashin et Shtrikman . . . . .	178
4.1.C	Choix de champs de polarisation optimaux . . . . .	181
4.1.D	Résolution formelle des problèmes auxiliaires . . . . .	184
4.1.E	Application au milieu macrohomogène . . . . .	185
4.1.E.a	Généralités . . . . .	185
4.1.E.b	Tenseurs des modules et souplesses de Hashin et Shtrikman . . . . .	187
4.1.E.c	Équation intégrale . . . . .	189
4.1.E.d	Résumé des propriétés et mise en œuvre de la démarche . . . . .	192
4.1.E.e	Description stochastique . . . . .	193
4.2	Approches classiques : Polarisation uniforme par morceaux . . . . .	193

4.2.A	Relations générales . . . . .	193
4.2.A.a	Description classique des milieux hétérogènes . . . . .	193
4.2.A.b	Bornes de type Hashin et Shtrikman . . . . .	193
4.2.B	Calcul effectif des bornes de Hashin et Shtrikman . . . . .	196
4.2.B.a	Distribution isotrope des phases . . . . .	196
4.2.B.b	Distribution ellipsoïdale des phases . . . . .	203
4.2.B.c	Distribution « ellipsoïdale généralisée » . . . . .	204
4.2.B.d	Distribution « homothétique » . . . . .	206
4.2.C	Bornes de Willis et Ponte Castañeda . . . . .	207
4.2.C.a	Description d'un milieu à renforts particuliers . . . . .	207
4.2.C.b	Calcul de la polarisation optimale : distribution ellipsoïdale généralisée . . . . .	209
4.2.C.c	Distribution ellipsoïdale simple des renforts . . . . .	211
4.2.C.d	Comparaison avec une distribution ellipsoïdale simple des phases . . . . .	214
4.2.C.e	Lien entre répartition des renforts et fraction volumique de matrice . . . . .	215
4.2.C.f	Milieu de référence distinct de la matrice . . . . .	219
4.2.D	Champ de polarisation uniforme sur $\Omega$ . . . . .	220
4.3	Approches par Motifs Morphologiques Représentatifs . . . . .	221
4.3.A	Notion de Motif . . . . .	221
4.3.B	Bornes de type Voigt et Reuss . . . . .	223
4.3.B.a	Construction . . . . .	223
4.3.B.b	Commentaires et propriétés . . . . .	225
4.3.C	Bornes de type Hashin et Shtrikman . . . . .	226
4.3.C.a	Choix des champs de polarisation . . . . .	226
4.3.C.b	Optimisation des champs de polarisation . . . . .	227
4.3.C.c	Distribution ellipsoïdale simple . . . . .	230
4.3.C.d	Assemblage de Hashin généralisé . . . . .	234
4.3.C.e	Distribution ellipsoïdale généralisée . . . . .	237
4.4	Propriétés des bornes obtenues dans l'approche par Motifs Morphologiques Représentatifs . . . . .	238
4.4.A	Calcul . . . . .	238
4.4.B	Symétrie . . . . .	240
4.4.C	Formulation variationnelle et intégrale . . . . .	240
4.4.D	Encadrements des tenseurs $\mathbf{T}_\mu^0$ et $\langle \mathbf{T}_\mu^0 \rangle_\mu$ . . . . .	241
4.4.D.a	Cas général . . . . .	241
4.4.D.b	Cas de motifs ellipsoïdaux . . . . .	244
4.4.E	Autres propriétés des tenseurs $\mathbf{T}_\mu^0$ . . . . .	247
4.4.F	Existence des bornes ou estimations ; premières propriétés . . . . .	250
4.4.F.a	Géométries ellipsoïdales . . . . .	250
4.4.F.b	Géométries quelconques . . . . .	253
4.4.G	Encadrements des bornes obtenues . . . . .	253
4.4.H	Commentaires . . . . .	257
4.4.H.a	Optimisation de la description morphologique . . . . .	257
4.4.H.b	Conséquences . . . . .	258
4.4.H.c	Prise en compte de la morphologie matrice/inclusion . . . . .	259
4.4.H.d	Résumé des propriétés . . . . .	261

4.5	Modèles autocohérents généralisés . . . . .	261
4.5.A	Principe, définitions et premières propriétés . . . . .	261
4.5.B	Définitions équivalentes . . . . .	263
4.5.C	Application aux microstructures décrites par MMR . . . . .	264
4.5.D	Autres propriétés . . . . .	265
4.5.D.a	Équivalence énergétique . . . . .	265
4.5.D.b	Comparaison avec le critère d'autocohérence de Kanaun . . . . .	267
4.5.D.c	Encadrements . . . . .	268
4.5.E	Existence et unicité . . . . .	268
4.5.E.a	Approche classique . . . . .	269
4.5.E.b	Approche par MMR . . . . .	275
4.5.E.c	Propriétés déduites de l'unicité . . . . .	277
4.5.F	Interprétation de l'hypothèse d'autocohérence . . . . .	278
4.5.F.a	Approche classique ; distribution isotrope des phases . . . . .	279
4.5.F.b	Approche classique ; distribution ellipsoïdale simple des phases . . . . .	279
4.5.F.c	Approche par motifs morphologiques . . . . .	281
4.5.F.d	Commentaires . . . . .	282
<b>5</b>	<b>Mise en œuvre numérique et applications</b>	<b>283</b>
5.1	Procédure générale . . . . .	284
5.1.A	Calcul des bornes et estimations . . . . .	284
5.1.A.a	Bornes de type Voigt et Reuss . . . . .	284
5.1.A.b	Bornes de type Hashin et Shtrikman . . . . .	284
5.1.A.c	Estimation autocohérente . . . . .	285
5.1.B	Calcul des modules à partir des réponses . . . . .	285
5.1.B.a	Cas général . . . . .	285
5.1.B.b	Isotropie . . . . .	286
5.1.B.c	Symétrie cubique . . . . .	287
5.1.B.d	Isotropie transverse . . . . .	288
5.1.C	Choix des chargements à l'infini . . . . .	290
5.1.D	Mise en œuvre numérique . . . . .	290
5.1.D.a	Choix d'une technique . . . . .	290
5.1.D.b	Approximations numériques . . . . .	291
5.2	Test sur le modèle des trois phases . . . . .	293
5.2.A	Modèles numériques bidimensionnels . . . . .	293
5.2.A.a	Maillages . . . . .	293
5.2.A.b	Influence des paramètres de maillage . . . . .	294
5.2.B	Modèles numériques tridimensionnels . . . . .	297
5.3	Exemples d'application et confrontation à d'autres modèles . . . . .	298
5.3.A	Composites à inclusions cubiques . . . . .	299
5.3.A.a	Effet de la forme cubique des renforts . . . . .	300
5.3.A.b	Comparaison aux bornes de Milton et Kohn . . . . .	301
5.3.B	Composites à inclusions elliptiques . . . . .	302
5.3.B.a	Anisotropie de distribution et anisotropie de forme . . . . .	304
5.3.B.b	Assemblage des sphères composites « extrudé » ou « écrasé » . . . . .	305

5.4	Extensions non-linéaires . . . . .	308
5.4.A	Principes . . . . .	309
5.4.B	Mise en œuvre numérique de l'extension simplifiée . . . . .	310
5.4.C	Moyennes par phases et champs locaux . . . . .	312
5.4.D	Un problème largement ouvert . . . . .	314
<b>Conclusions générales</b>		<b>315</b>
<b>Annexes</b>		<b>317</b>
<b>A Sphère creuse élasto-plastique sous pression</b>		<b>319</b>
A.1	Notations et relations générales . . . . .	319
A.2	Solution exacte . . . . .	321
A.2.A	Solution élastique . . . . .	321
A.2.B	Première plasticité . . . . .	322
A.2.C	Propagation de la zone plastifiée . . . . .	322
A.2.D	Plasticité débouchante . . . . .	325
A.3	Solutions avec un seul module sécant . . . . .	325
A.3.A	Extension utilisant le moment d'ordre un . . . . .	325
A.3.B	Extension utilisant le moment d'ordre deux . . . . .	326
A.4	Solutions avec deux modules sécants . . . . .	326
A.4.A	Solutions élastique avec deux couches . . . . .	326
A.4.B	Extension utilisant le moment d'ordre un . . . . .	327
A.4.C	Extension utilisant le moment d'ordre deux . . . . .	328
A.5	Solution avec des modules sécants locaux . . . . .	329
A.6	Résultats et comparaisons . . . . .	329
A.6.A	Réponse globale de la structure . . . . .	329
A.6.B	Réponse locale . . . . .	331
A.7	Conclusions . . . . .	332
<b>B Opérateurs de Green</b>		<b>335</b>
B.1	En milieu borné . . . . .	335
B.1.A	Relations générales . . . . .	335
B.1.B	Propriétés . . . . .	338
B.1.B.a	Solution formelle du problème d'élasticité (à polarisation nulle) . . . . .	338
B.1.B.b	Projections . . . . .	338
B.1.B.c	Propriétés sur les moyennes . . . . .	339
B.1.B.d	Homogénéité vis-à-vis de $C^0$ . . . . .	339
B.2	En milieu infini . . . . .	340
B.2.A	Relations générales . . . . .	340
B.2.B	Propriétés . . . . .	341
B.2.B.a	Invariance par translation . . . . .	341
B.2.B.b	Homogénéité vis-à-vis de la variable d'espace . . . . .	341
B.2.B.c	Intégrales sur un contour fermé . . . . .	342
B.2.B.d	Convergence et décomposition . . . . .	343

B.2.B.e	Invariance par les transformations conservant $C^0$ . . . . .	345
B.2.B.f	Intégration sur un volume ellipsoïdal . . . . .	345
B.3	Relations milieu borné / milieu infini . . . . .	346
B.3.A	Relations générales . . . . .	346
B.3.B	Application au VER macrohomogène . . . . .	346
<b>C</b>	<b>Problèmes d'inclusions</b>	<b>351</b>
C.1	Propriétés générales . . . . .	351
C.1.A	Relation d'Eshelby . . . . .	351
C.1.B	Formulation variationnelle . . . . .	353
C.1.C	Application au milieu infini . . . . .	355
C.2	Inclusion en milieu infini homogène . . . . .	357
C.2.A	Comportement homogène, polarisation uniforme, inclusion ellipsoïdale . . . . .	357
C.2.B	Comportement homogène, polarisation uniforme, géométrie quelconque . . . . .	359
<b>D</b>	<b>Calcul des déformations</b>	<b>361</b>
D.1	Éléments de réduction d'une transformation matérielle . . . . .	361
D.2	Cas d'une transformation axisymétrique . . . . .	363
D.2.A	Calcul explicite des éléments de réduction de $F$ . . . . .	363
D.2.B	Calcul explicite de la déformation de Green-Lagrange . . . . .	365
D.2.C	Calcul explicite de la déformation logarithmique . . . . .	365
D.2.D	Calcul explicite de la déformation linéarisée . . . . .	366
D.2.E	Expression des tenseurs dans un autre repère . . . . .	366
<b>E</b>	<b>Aspects informatiques</b>	<b>367</b>
E.1	Traitement de grille et analyse d'images . . . . .	367
E.2	Modèle à motifs sphériques multicouches non-linéaire . . . . .	369
E.3	Modèle autocohérent assisté par ordinateur (Macao) . . . . .	372
<b>F</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>375</b>
F.1	Déformations moyennes par phases . . . . .	375
F.2	Distributions des déformations . . . . .	376
F.3	Cartes de déformations . . . . .	376
	<b>Bibliographie</b>	<b>391</b>
	<b>Table des Matières</b>	<b>401</b>