



**HAL**  
open science

# Modélisation de réservoirs chenalisés méandriformes : une approche génétique et stochastique

Simon Lopez

► **To cite this version:**

Simon Lopez. Modélisation de réservoirs chenalisés méandriformes : une approche génétique et stochastique. Sciences de la Terre. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003. Français. <NNT : 2003ENMP1260>. <pastel-00000630>

**HAL Id: pastel-00000630**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00000630v1>**

Submitted on 6 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



## THESE

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École des Mines de Paris**

présentée et soutenue

par

**Simon Lopez**

le 17 juin 2003

# Modélisation de Réservoirs Chenalisés Méandriformes *Approche Génétique et Stochastique*

## Jury

Mme.	Isabelle	COJAN	Directrice de thèse
Mme.	Margarita	DIAZ-MOLINA	Examinatrice
M.	Jean-Laurent	MALLET	Rapporteur externe
M.	Ghislain	de MARSILY	Examineur
M.	Jacques	RIVOIRARD	Directeur de thèse
M.	Bruno	SAVOYE	Rapporteur externe



*A Marie-Joséphine Archiprêtre*

En souvenir de paquets d'allumettes...



En quoi le scientifique est-il concerné par ses objets d'étude, en quoi le savoir qu'il accumule l'aide-t-il à vivre ? Mystère. Selon un mot attribué à Imre Lakatos, beaucoup de scientifiques (et des meilleurs) n'en comprennent pas tellement plus sur la science que les poissons en matière d'hydrodynamique - ce qui n'empêche ni les poissons de nager, ni les scientifiques de poursuivre leurs travaux. Cependant, si l'on veut accomplir un destin humain, et non de merlan, il faut chercher un sens à ses actes et à son existence.

Rey (2003)

Le moyen fait partie de la vérité, aussi bien que le résultat. Il faut que la recherche de la vérité soit elle-même vraie ; la recherche vraie, c'est la vérité déployée, dont les membres épars se réunissent dans le résultat.

Marx *in* Perec (1965)



# Merci à...

Isabelle Cojan d'avoir proposé ce sujet de thèse, il y a de cela bientôt 5 ans. Si les ambitions sous-marines initiales n'ont pas été atteintes, elles fondent cependant mon prochain départ en mer. Je la remercie également de son enthousiasme qui a permis bien des avancées.

Alain Galli d'être également à l'origine de ce travail, et d'être resté présent ponctuellement mais toujours utilement jusqu'à aujourd'hui. Son intuition m'a beaucoup aidé.

Jacques Rivoirard d'avoir pris ce travail en chemin et de s'être investi dans son encadrement. Je reste en admiration devant sa concision.

Michel Schmitt de m'avoir accueilli au Centre de Géostatistique et de m'avoir fait partager quelques astuces algorithmiques.

Jean-Paul Chilès d'avoir chaleureusement pris le relais.

Ghislain de Marsily d'avoir manifesté de l'intérêt pour ce travail avant d'avoir accepté de présider mon jury. J'ai particulièrement apprécié, et éprouvé, la pertinence de ses interventions.

Bruno Savoye d'avoir supporté de rester au dessus du niveau de la mer pendant toute la durée de ce travail, d'en avoir été un rapporteur méticuleux et de m'emmener aujourd'hui découvrir les grands fonds.

Jean-Laurent Mallet d'avoir accepté d'être le second rapporteur de ce manuscrit, d'y avoir apporté son pragmatisme.

Margarita Diaz Molina d'avoir accepté de faire le déplacement, dans des conditions éprouvantes, depuis Madrid pour juger ce travail. J'ai été à plus d'un titre honoré et ai particulièrement apprécié sa présence.

Marie-Christine Cacas, Xavier Le Varlet et Christophe Rigollet, ainsi qu'épisodiquement Caroline Hern, Virginie Robert, Gérard Bodewitz, Tristan Euzen, Gilbert Leclercq et Jonathan Pugh pour, à travers le consortium MCRC, m'avoir fait profiter de leur expérience et de leurs savoir-faires industriels et pétroliers.

```
“Fifi” : while(true) { cout<<“Merci!”<<endl ; }
```

“Dom”, Françoise, Nathalie, “Picsou”, “Phiphi”, Sylvie indispensables de bout en bout...

Jan puis Eric de m'avoir supporté.

... mes nombreux relecteurs.

... ceux dont l'évidence me fait oublier ici le nom de ne pas m'en tenir rigueur, ils savent certainement répondre aux questions qu'ils pourraient se poser.

La tradition voudrait que l'on épeluche ensuite l'oignon psychanalytique des amis et des êtres chers, mais une forme de pudeur s'y oppose pour ne pas confondre amitiés et relations professionnelles.

Que les gens précités se rassurent cependant, la topologie de mon bulbe freudien peut être assez tortueuse pour leur laisser de la place.

Je concluerai seulement par une pensée pour mes parents, en espérant pouvoir transmettre un jour fidèlement ce qu'ils m'ont appris.

Brest, février 2004

# Table des matières

Liste des figures	xiii
Introduction	1
<b>I Enjeux, objets et méthodologies</b>	<b>3</b>
Résumé . . . . .	5
<b>1 Enjeux</b>	<b>7</b>
1.1 Potentiel économique des séries fluviales . . . . .	7
1.2 L'optique pétrolière . . . . .	8
1.2.1 <i>O tempora...</i> . . . . .	8
1.2.2 Vie d'un gisement . . . . .	8
1.2.3 Modèles de réservoirs . . . . .	8
1.3 Classification sommaire des réservoirs pétroliers fluviaux . . . . .	9
1.3.1 Une classification... . . . .	9
1.3.2 ... parmi d'autres... . . . .	11
1.3.3 ... un problème d'échelle? . . . . .	12
<b>2 Objets</b>	<b>15</b>
2.1 Morphologie du système fluvial . . . . .	15
2.1.1 Débits et définitions associées . . . . .	15
2.1.1.1 Débits caractéristiques et unités morphologiques . . . . .	15
2.1.1.2 Autres définitions . . . . .	16
2.1.2 Caractérisation de la morphologie des cours d'eau . . . . .	16
2.2 Écoulements et charges sédimentaires . . . . .	19
2.2.1 Caractéristiques de l'écoulement fluvial . . . . .	19
2.2.2 Transport en solution . . . . .	20

2.2.3	Transport particulaire . . . . .	21
2.2.3.1	Transport en suspension . . . . .	21
2.2.3.2	Transport de fond . . . . .	22
2.3	Écoulements chenalés et processus associés . . . . .	23
2.3.1	Les cours sinueux . . . . .	23
2.3.2	Processus du lit mineur . . . . .	25
2.3.3	Écoulements sur la plaine d'inondation . . . . .	25
2.3.3.1	Crues de débordement . . . . .	25
2.3.3.2	Ruptures de berges . . . . .	29
2.4	Structures sédimentaires . . . . .	30
2.4.1	Structures du lit fluvial . . . . .	30
2.4.1.1	Corps chenalés . . . . .	30
2.4.1.2	Barres . . . . .	31
2.4.1.3	Dépôts gravitaires . . . . .	32
2.4.1.4	Dépôts tabulaires . . . . .	32
2.4.1.5	Microformes sableuses . . . . .	32
2.4.2	Structures sédimentaires hors du lit fluvial . . . . .	33
2.4.2.1	Dépôts de levées . . . . .	34
2.4.2.2	Chenaux de crevasse . . . . .	34
2.4.2.3	Lobes de crevasse . . . . .	34
2.4.2.4	Dépôts de débordement . . . . .	34
2.4.2.5	Remplissage de chenaux abandonnés . . . . .	36
2.4.2.6	Sédimentation biochimique . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Modélisation</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1	Modèles déterministes . . . . .	39
3.1.1	Modèles de remplissage de bassin . . . . .	40
3.1.2	Modèles géologiques . . . . .	40
3.1.3	Modèles hydrauliques et géomorphologiques . . . . .	41
3.2	Modèles probabilistes . . . . .	42
3.2.1	Modèles objets . . . . .	42
3.2.2	Modèles pixels . . . . .	43
3.3	Vers des modèles mixtes . . . . .	43
3.4	Approche adoptée . . . . .	45
	Conclusions . . . . .	47

<b>II</b>	<b>Construction d'un modèle</b>	<b>49</b>
	Résumé . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Evolution spatiale</b>	<b>53</b>
4.1	Equation d'évolution . . . . .	53
4.1.1	Structure de l'écoulement . . . . .	53
4.1.1.1	Notations . . . . .	53
4.1.1.2	Vitesses d'écoulement . . . . .	53
4.1.1.3	Modélisation des systèmes méandriformes . . . . .	55
4.1.1.4	Équations reliant la structure de l'écoulement à la géométrie du chenal . . . . .	55
4.1.2	Déplacements du chenal . . . . .	56
4.1.2.1	Migration latérale . . . . .	56
4.1.2.2	Accommodation et aggradation verticale . . . . .	57
4.1.3	Vitesses de déplacement . . . . .	57
4.1.3.1	Taux de migration . . . . .	58
4.1.3.2	Incision et migration latérale . . . . .	58
4.1.3.3	Taux d'aggradation . . . . .	59
4.1.3.4	Discrétisation et équation d'évolution . . . . .	59
4.1.4	Coefficient d'érosion . . . . .	60
4.1.5	Calcul du taux d'aggradation, profil d'équilibre, ajustement du profil longi- tudinal . . . . .	60
4.2	Évolution à coefficient d'érosion constant . . . . .	61
4.2.1	Développement des méandres . . . . .	63
4.2.2	Évolution à long terme . . . . .	66
4.2.3	Basculement latéral . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Modèles de dépôts</b>	<b>71</b>
5.1	Dépôts chenalisés . . . . .	71
5.1.1	Modèle de section transverse . . . . .	71
5.1.2	Dépôts de barres de méandres . . . . .	72
5.1.3	Dépôts de bras mort, bouchons d'argile . . . . .	73
5.2	Dépôts de plaine alluviale . . . . .	73
5.2.1	Dépôts de débordements . . . . .	73
5.2.2	Dépôts de levée . . . . .	78
5.2.3	Dépôts organiques, faciès de point bas . . . . .	78

5.3	Lobes de crevasses et avulsions . . . . .	81
5.3.1	Formation d'une crevasse . . . . .	81
5.3.2	Chenal d'avulsion . . . . .	81
5.3.3	Recouvrements par déversement . . . . .	82
5.3.4	Lobes de crevasse . . . . .	82
5.3.5	Avulsion locale . . . . .	83
5.3.6	Avulsion régionale . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Paramètres du modèle</b>	<b>87</b>
6.1	Évolution spatiale de la ligne médiane . . . . .	88
6.2	Modèle de faciès . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Réponse du système fluvial et architecture des dépôts</b>	<b>91</b>
7.1	Paramètres étudiés . . . . .	91
7.2	Influence des paramètres étudiés . . . . .	92
7.2.1	Système en phase . . . . .	92
7.2.2	Système contraint avec avulsions . . . . .	92
7.2.3	Système contraint . . . . .	95
7.2.4	Système à réponse rapide . . . . .	95
7.2.5	Système dominé par les avulsions régionales . . . . .	95
7.3	Conclusions . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Reproduction de cyclicités</b>	<b>101</b>
8.1	Incision . . . . .	101
8.2	Aggradation . . . . .	104
	Conclusions . . . . .	107
<b>III</b>	<b>Vers un conditionnement...</b>	<b>109</b>
	Résumé . . . . .	111
<b>9</b>	<b>Architecture des dépôts</b>	<b>113</b>
9.1	La part du hasard . . . . .	113
9.2	Courbes de proportions verticales . . . . .	113
9.2.1	Coefficient d'érosion . . . . .	115
9.2.2	Largeur du chenal . . . . .	115
9.2.3	Fréquence des crues . . . . .	115
9.2.4	Paramètres contrôlant la structure des dépôts de débordement . . . . .	117
9.3	Architecture globale des dépôts . . . . .	117

<b>10 Localisation des dépôts</b>	<b>119</b>
10.1 Localisation de la ceinture de chenaux . . . . .	119
10.1.1 Localisation à un niveau donné . . . . .	119
10.1.2 Qu'est ce que le coefficient d'érosion? . . . . .	122
10.1.3 Évolution spatio-temporelle . . . . .	130
10.2 Localisation des corps chenalésés . . . . .	133
Conclusions . . . . .	137
<b>Perspectives</b>	<b>139</b>
Modèle d'évolution . . . . .	139
Modèle de dépôts . . . . .	139
Conditionnement . . . . .	140
Quel avenir? . . . . .	140
<b>Conclusion générales</b>	<b>141</b>
<b>IV Annexes</b>	<b>143</b>
<b>A Changement de repère</b>	<b>145</b>
A.1 Base mobile et base naturelle . . . . .	145
A.1.1 Choix d'un référentiel . . . . .	145
A.1.2 Base mobile . . . . .	145
A.1.2.1 Construction . . . . .	145
A.1.2.2 Variations de la base mobile . . . . .	147
A.1.3 Système de coordonnées . . . . .	148
A.1.4 Base naturelle . . . . .	149
A.1.4.1 Définition . . . . .	149
A.1.4.2 Matrices de passage . . . . .	150
A.1.4.3 Changements de coordonnées . . . . .	151
A.1.4.4 Variation des multiplicateurs . . . . .	152
A.2 Champs tensoriels . . . . .	152
A.2.1 Champ scalaire . . . . .	152
A.2.1.1 Différentielle d'un champ scalaire . . . . .	152
A.2.1.2 Vecteur gradient . . . . .	154
A.2.2 Champ vectoriel . . . . .	154
A.2.2.1 Différentielle . . . . .	155
A.2.2.2 Tenseur gradient . . . . .	157
A.2.2.3 Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	157
A.2.2.4 Transport convectif . . . . .	158

<b>B</b>	<b>Obtentions des équations</b>	<b>159</b>
B.1	Principe fondamental de la dynamique : équations d'Euler . . . . .	159
B.2	Hypothèses de modélisation . . . . .	160
B.2.1	Pente de l'écoulement . . . . .	160
B.2.2	Résultante des forces agissant sur une colonne d'eau . . . . .	160
B.2.2.1	Inventaire . . . . .	160
B.2.2.2	Termes négligés . . . . .	161
B.2.3	Structure de l'écoulement . . . . .	161
B.2.3.1	Fonction de structure . . . . .	161
B.2.3.2	Plages de valeurs . . . . .	162
B.2.4	Expression des multiplicateurs . . . . .	163
B.3	Écoulement sur les interfaces . . . . .	164
B.3.1	Normales sur les interfaces . . . . .	164
B.3.2	Relations avec la vitesse de l'écoulement . . . . .	164
B.4	Conservation de la matière . . . . .	165
B.4.1	Forme générale . . . . .	165
B.4.2	Cas d'un écoulement horizontal et de largeur constante . . . . .	166
B.5	Calcul des termes des équations d'Euler . . . . .	166
B.5.1	Variation de la quantité de mouvement . . . . .	166
B.5.1.1	Coordonnée de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}$ sur $\mathbf{e}_s$ . . . . .	167
B.5.1.2	Coordonnée de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}$ sur $\mathbf{e}_n$ . . . . .	168
B.5.1.3	Termes de moyenne . . . . .	169
B.5.1.4	Cas d'un écoulement horizontal et de largeur constante . . . . .	169
B.5.2	Forces de pression . . . . .	169
B.5.2.1	Hypothèse de validité de la loi de l'hydrostatique . . . . .	169
B.5.2.2	Résultante des forces de pression suivant $\mathbf{e}^s$ . . . . .	170
B.5.2.3	Résultante des forces de pression suivant $\mathbf{e}^n$ . . . . .	170
B.5.2.4	Calcul des termes de moyenne . . . . .	171
B.5.2.5	Cas d'un écoulement horizontal et de largeur constante . . . . .	171
B.5.3	Équations de Saint-Venant . . . . .	172

<b>C</b>	<b>Linéarisation et modélisation</b>	<b>175</b>
C.1	Linéarisation des équations décrivant la vitesse de l'écoulement . . . . .	175
C.1.1	Équations de départ . . . . .	175
C.1.1.1	Accélération convective suivant $\mathbf{e}_s$ . . . . .	175
C.1.1.2	Accélération convective suivant $\mathbf{e}_n$ . . . . .	177
C.1.1.3	Obtention des équations . . . . .	177
C.1.2	Adimensionnement . . . . .	178
C.1.3	Hypothèses de linéarisation . . . . .	179
C.1.4	Développements limités . . . . .	180
C.2	Expressions et résolution des équations . . . . .	181
C.2.1	Expressions et résolution des équations à l'ordre 0 en $\Psi$ . . . . .	181
C.2.2	Expression et résolution des équations à l'ordre 1 en $\Psi$ . . . . .	182
C.2.3	Calcul de la vitesse de l'écoulement contre les rives . . . . .	184
C.3	Comparaisons . . . . .	186
C.3.1	Comparaisons avec l'équation d'évolution d'Ikeda et al. (1981) . . . . .	186
C.3.2	Comparaisons avec les travaux de Sun et al. (2001c) . . . . .	188
C.3.3	Variations de largeur . . . . .	188
C.4	Terme de transport convectif dû aux courants secondaires . . . . .	188
C.5	Discrétisation et implémentation . . . . .	191
C.5.1	Calculs géométriques . . . . .	191
C.5.1.1	Ligne médiane . . . . .	191
C.5.1.2	Abscisse curviligne . . . . .	191
C.5.1.3	Courbure de la ligne médiane . . . . .	194
C.5.1.4	Normale contre une rive . . . . .	198
C.5.2	Calcul de $u_0^s$ et $h_0$ à partir du débit fluide $Q$ . . . . .	199
C.5.2.1	Équation dimensionnelle . . . . .	199
C.5.2.2	Schéma numérique . . . . .	200
C.5.2.3	Calcul de $h_0$ . . . . .	201
C.5.2.4	Stabilité . . . . .	201
C.5.3	Calcul de $u_\kappa^s _{n=1}$ , connaissant $u_0$ et $h_0$ . . . . .	202
C.5.3.1	Discrétisation . . . . .	202
C.5.3.2	Stabilité . . . . .	203

<b>D</b>	<b>Crués de débordement</b>	<b>205</b>
D.1	Équation de diffusion . . . . .	205
D.1.1	Formulation . . . . .	205
D.1.2	Solution en régime permanent . . . . .	207
D.1.3	Conditions aux limites . . . . .	207
D.1.4	Épaisseur de dépôt . . . . .	208
D.1.5	Loi de décroissance exponentielle . . . . .	208
D.2	Granulométrie des dépôts . . . . .	209
D.2.1	Formulation approchée . . . . .	209
D.2.2	Expression analytique . . . . .	209
<b>E</b>	<b>Lobes de crevasse</b>	<b>211</b>
E.1	Géométrie plane . . . . .	211
E.2	Exemples de géométries obtenues . . . . .	213
<b>F</b>	<b>Compléments sur la morphologie des systèmes fluviaux</b>	<b>219</b>
F.1	Distribution temporelle des débits . . . . .	219
F.2	Méandres et sinuosité . . . . .	220
F.3	Tressage et multiplicité des chenaux . . . . .	223
<b>G</b>	<b>Profil d'équilibre et charge sédimentaire</b>	<b>225</b>
G.1	Calcul du taux d'aggradation . . . . .	225
G.1.1	Formulation . . . . .	225
G.1.2	Vitesses de réajustement du profil longitudinal . . . . .	226
G.1.3	Comparaisons avec les modèles classiques . . . . .	226
G.2	Profil longitudinal et influence de la pente . . . . .	227
G.2.1	Situation d'équilibre . . . . .	227
G.2.2	Niveau de base fixé . . . . .	229
<b>H</b>	<b>Inférence des paramètres hydrauliques</b>	<b>233</b>
H.1	Conditions hydrauliques passées . . . . .	233
H.2	Largeur et profondeur moyennes imposées . . . . .	234
H.2.1	Cas 1 : profondeur moyenne 2m - largeur 80m . . . . .	234
H.2.2	Cas 2 : profondeur moyenne 3m - largeur 80m . . . . .	236
H.2.3	Cas 3 : profondeur moyenne 3m - largeur 160m . . . . .	236
H.2.4	Cas 4 : profondeur moyenne 3m - largeur 160m . . . . .	236
H.3	Profondeur moyenne imposée . . . . .	240
	<b>Index</b>	<b>243</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>243</b>

# Table des figures

1.1	Influence de la connectivité des corps réservoirs sur l'exploitation d'un champ pétrolier, Weber (1986) . . . . .	10
1.2	Classification des réservoirs fluviatiles, Miall (1996) . . . . .	10
1.3	Cartes d'isopaques de corps gréseux, champ de Citronnelle (USA), Eaves (1976) . .	11
1.4	Carte d'isoperméabilité d'un complexe d'origine fluvatile, formation de Sadlerochit (Alaska North Slope, USA), Wadman et al. (1979) . . . . .	12
1.5	Classification des grands types de réservoirs clastiques, Weber et Van Geuns (1989)	13
1.6	Hiérarchie des hétérogénéités dans un réservoir fluvatile, Weber (1986) . . . . .	14
2.3	Classification des cours d'eau, Nanson et Knighton (1996) . . . . .	17
2.1	Classification des différents types de cours d'eau, Rust (1978) . . . . .	18
2.2	Trois rivières en tresses à lit caillouteux du Yukon Territory (Canada), Miall (1996)	18
2.4	Modes de transports en rivière naturelle, Teles (1999) . . . . .	21
2.5	Diagramme de Hjulström (1935) . . . . .	21
2.6	Domaine d'existence des méandres, Yalin (1992) . . . . .	23
2.7	Flot hélicoïdal à l'intérieur d'un écoulement chenalisé, Knighton (1998) . . . . .	24
2.8	Lieux théoriques d'érosion et de dépôt lors d'une crue, Bridge (1993) . . . . .	26
2.9	Modèle d'écoulement sur une plaine d'inondation à partir d'études en laboratoire, Sellin (1964) . . . . .	27
2.10	Étude de l'interaction entre l'écoulement chenalisé et l'écoulement sur sa plaine d'inondation, Naish et Sellin (1996) . . . . .	28
2.11	Principaux dépôts dans un système fluvatile, Platt et Keller (1992) . . . . .	33
2.12	Évolution d'un épanchement de crevasse, Perez-Alurcea et Smith (1999) . . . . .	35
3.1	Modèle de Mackey et Bridge (1995) . . . . .	40
3.2	Simulation booléenne ( <a href="http://www.cg.ensmp.fr">http://www.cg.ensmp.fr</a> ) . . . . .	42
3.3	Simulation plurigaussienne, Armstrong et al. (2003) ( <a href="http://www.cg.ensmp.fr">http://www.cg.ensmp.fr</a> ) . . .	43
3.4	Modèle de Viseur et al. (2001) . . . . .	44
3.5	Modèle de Teles (1999) . . . . .	44

4.1	Grandeurs définies . . . . .	53
4.2	Repère utilisé . . . . .	54
4.3	Vitesses de déplacement de la ligne médiane . . . . .	57
4.4	Modification du coefficient d'érosion dans un contexte d'incision . . . . .	58
4.5	Profil d'équilibre et définitions associées . . . . .	61
4.6	Modèle d'ajustement du profil longitudinal du chenal . . . . .	62
4.7	Positions du chenal aux itérations 25000 pour les figures 4.9(a) (noir) et 4.9(b) (gris). . . . .	63
4.8	Positions successives de la ligne médiane du chenal . . . . .	64
4.9	Positions successives du chenal évoluant à partir des conditions initiales de la figure 4.8 . . . . .	65
4.10	Positions respectives des chenaux des figures 4.11(a) (noir) et 4.11(b) (gris) p. 67 . . . . .	66
4.11	Positions successives du chenal évoluant à partir des conditions initiales similaires à celle de la figure 4.8 . . . . .	67
4.12	Influence du basculement latéral sur les positions successives du chenal . . . . .	69
5.1	Profils de sections transverses . . . . .	71
5.2	Dépôts de <i>point-bars</i> sur 10.000 itérations . . . . .	72
5.3	Dépôts de <i>point-bars</i> sur 12.000 itérations . . . . .	72
5.4	Dépôts de <i>point-bars</i> sur 15.000 itérations . . . . .	72
5.5	Vue en coupe de dépôts de barres de méandres . . . . .	73
5.6	Vue aérienne des différents dépôts simulés . . . . .	74
5.8	Définition de $\mathcal{V}'_P$ , le chenal est en bleu, la grille représente la plaine d'inondation. . . . .	74
5.7	Définitions des grandeurs utilisées pour modéliser les crues de débordement. . . . .	75
5.9	Vues en coupe des dépôts . . . . .	77
5.10	Vue en coupe schématique du chenal et de l'altitude de référence pour la définition des zones humides . . . . .	79
5.11	Vues aériennes montrant les dépôts de matière organique à des temps différents . . . . .	79
5.12	Sections transversales montrant les dépôts de matière organique . . . . .	80
5.13	Détermination du tracé potentiel du chenal . . . . .	81
5.14	Modélisation de recouvrements par déversement . . . . .	82
5.15	Vue aérienne d'un chenal avec trois épandements de crevasse de type I . . . . .	82
5.16	Lobe de crevasse avec 50 chenaux aléatoires comblés avec du sable . . . . .	83
5.17	Vue tridimensionnelle du lobe de crevasse avec chenaux sableux et lobes sableux de tailles inférieures à l'extrémité des chenaux . . . . .	84
5.18	Vue tridimensionnelle de la surface de la plaine d'inondation . . . . .	84
5.19	Avulsion réussie et nouveau cours du chenal sur la plaine d'inondation . . . . .	85

7.1	Évolution d'un système en phase avec l'élévation de son profil d'équilibre . . . . .	93
7.2	Évolution d'un système contraint par son profil d'équilibre, en aval d'une zone instable	94
7.3	Évolution d'un système stable contraint par son profil d'équilibre . . . . .	96
7.4	Évolution d'un système aggradant à réponse rapide . . . . .	97
7.5	Évolution d'un système aggradant dominé par les avulsions . . . . .	98
7.6	Flux de matière instantanés à travers la plaine d'inondation . . . . .	99
8.1	Cycle d'incision - vue aérienne . . . . .	102
8.2	Cycle d'incision - vue en coupe perpendiculaire à l'axe de la vallée . . . . .	103
8.3	Cycle d'aggradation, remplissage de la vallée incisée - vue aérienne . . . . .	105
8.4	Cycle d'aggradation, remplissage de la vallée incisée - vue en coupe perpendiculaire à l'axe de la vallée . . . . .	106
9.1	Longueur d'un chenal au cours du temps . . . . .	114
9.2	Courbes de proportions verticales . . . . .	116
9.3	Section verticale obtenue en variant la fréquence des crues de débordements . . . . .	117
10.1	Conditionnement global par cartes d'érodabilité . . . . .	120
10.2	Carte d'érodabilité obtenue par simulation conditionnelle . . . . .	121
10.3	Fréquences de présence d'un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.2 p. 121 . . . . .	121
10.4	Carte d'érodabilité avec un fort contraste entre zones de forte érodabilité et zones de faible érodabilité . . . . .	122
10.5	Carte d'érodabilité caractérisée par une région de transition entre zones de forte érodabilité et zones de faible érodabilité . . . . .	123
10.6	Fréquences de présence d'un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.4p. 122 . . . . .	124
10.7	Fréquences de présence d'un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.5 p. 123 . . . . .	125
10.8	Carte d'érodabilité et fréquences de présence avec une zone réduite de forte érodabilité	126
10.9	Carte d'érodabilité et fréquences de présence avec une zone très réduite de forte érodabilité . . . . .	127
10.10	Différence de fréquence de présence d'un chenal évoluant sur des cartes d'érodabilité légèrement différentes . . . . .	128
10.11	Différence de fréquence de présence d'un chenal évoluant sur des cartes d'érodabilité légèrement différentes . . . . .	129
10.12	Fonctions sinus, cosinus et leur somme... . . . .	130
10.13	Déformation de la carte d'érodabilité . . . . .	131
10.14	Courbe de proportions globale obtenue après déformation de la carte d'érodabilité	132

10.15	Courbes de proportions verticales locales obtenues après déformation de la carte d'érodabilité . . . . .	132
10.16	Effet d'un point attractif sur l'évolution d'un chenal . . . . .	134
10.17	Effet de deux points attractifs sur l'évolution d'un chenal . . . . .	135
A.1	Construction de la base mobile $\mathcal{B}_s$ . . . . .	146
A.2	Section du chenal dans le plan $(M_\Gamma(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_z(s))$ , système de coordonnées et grandeurs physiques caractérisant le chenal . . . . .	149
B.1	Fonction de structure d'Engelund Engelund (1974) . . . . .	162
C.1	Calcul du rayon de courbure de la ligne médiane et de son vecteur unitaire horizontal normal . . . . .	195
D.1	Notations employées pour modéliser le transport par diffusion lors des crues de débordement . . . . .	206
E.1	Notations introduites pour modéliser un épanchement de crevasse . . . . .	212
E.2	Graphe de la fonction $y = \frac{1}{2} [1 + \tanh(a(x - l_c))]$ . . . . .	212
E.3	Lobe de crevasse, position de la largeur maximale du lobe . . . . .	214
E.4	Lobe de crevasse, largeur de la zone d'alimentation . . . . .	215
E.5	Lobe de crevasse, largeur du lobe . . . . .	216
E.6	Lobe de crevasse, longueur de la zone d'alimentation . . . . .	217
E.7	Lobe de crevasse, transition entre la zone d'alimentation et le lobe . . . . .	218
F.2	Asymétrie des méandres, Carson et Lapointe (1983) . . . . .	220
F.3	Indice d'asymétrie des méandres, Carson et Lapointe (1983) . . . . .	220
F.1	Classification des méandres, Brice (1973) . . . . .	221
F.4	Histogramme de l'indice d'asymétrie, Carson et Lapointe (1983) . . . . .	222
F.5	Sinuosités définies par Howard et Hemberger (1991) . . . . .	222
F.6	Calcul d'indices de tressage . . . . .	224
G.1	Profils longitudinaux du chenal . . . . .	228
G.2	Développement du profil longitudinal du chenal et géométrie plane correspondante. . . . .	230
G.3	Profil longitudinal développé lorsque la partie aval du chenal est fixée alors que l'évolution de la partie amont est laissée libre. . . . .	231
G.4	Suite de la figure G.3. . . . .	232
H.1	Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 2 m et une demi-largeur fixée à 40 m . . . . .	235

H.2	Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en $\Psi$ par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal . . . . .	235
H.3	Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 3 m et une demi-largeur fixée à 40 m . . . . .	237
H.4	Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en $\Psi$ par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal . . . . .	237
H.5	Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 3 m et une demi-largeur fixée à 80 m . . . . .	238
H.6	Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en $\Psi$ par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal . . . . .	238
H.7	Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 3 m et une demi-largeur fixée à 80 m . . . . .	239
H.8	Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en $\Psi$ par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal . . . . .	239
H.9	Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée de 3 m	241
H.10	Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en $\Psi$ par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal . . . . .	241



# Introduction

La modélisation de réservoirs pétroliers chenalisés dans les séries sédimentaires fluviales est souvent réalisée à l'aide de simulations stochastiques. Ces méthodes sont aujourd'hui opérationnelles et permettent d'honorer des données de puits en des temps raisonnables. Cependant, elles peinent à reproduire la géométrie et l'agencement relatif des corps naturels considérés. Reproduisant seulement une certaine hétérogénéité de faciès, elles n'intègrent pas les processus gouvernant la sédimentation. Or, depuis une vingtaine d'années, de nouveaux modèles déterministes ont été élaborés et validés sur des périodes de temps historiques pour expliquer et simuler l'évolution des systèmes fluviaux méandriformes. L'objectif de ce travail est de combiner méthodes stochastiques et déterministes à l'échelle des temps géologiques pour simuler la formation de réservoirs pétroliers chenalisés. Nous négligerons ainsi, les phénomènes dont l'échelle spatio-temporelle est celle du bassin sédimentaire. Il s'agit, comme pour une simulation stochastique, de proposer pour un même réservoir plusieurs réalisations possibles, conditionnelles ou non, tout en tirant partie de l'apport explicatif et réaliste des modèles déterministes.

La première partie de ce mémoire s'attache aux enjeux, aux objets et aux méthodologies de la modélisation de réservoirs pétroliers dans les séries sédimentaires fluviales. Après en avoir présenté le potentiel économique, nous décrivons les problématiques de leur exploitation dans un contexte pétrolier. Leur complexité architecturale et leur diversité sont expliquées par celles des systèmes fluviaux actuels. La connaissance des différents processus sédimentaires observés et des dépôts qu'ils engendrent permet alors de les modéliser de manière réaliste. Nous continuons avec un bref historique des modèles géologiques de l'architecture de dépôts alluviaux à

l'échelle du réservoir pétrolier et concluons par une description de l'approche retenue.

La seconde partie de ce mémoire explicite la construction et l'utilisation d'un modèle d'évolution spatio-temporelle d'une rivière méandriforme, dont les détails sont donnés en annexe. L'approche développée se base sur le modèle hydraulique d'Ikeda *et al.* (1981), choisi en raison de sa simplicité et de sa robustesse. Ce modèle a été constamment amélioré et testé sur des rivières réelles avec des résultats concluants. Les équations obtenues traduisent de manière simple la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la matière. Elles sont au coeur d'un modèle d'évolution où le chenal est assimilé à sa ligne médiane. Ensuite, cette ossature est habillée avec un modèle de faciès simulant les différents dépôts. La mise en place de ces derniers se fait en retenant des modèles physiques ou descriptifs simples prenant en compte les conditions hydrauliques dans le chenal, la topographie de la plaine d'inondation et intègre une composante stochastique. Sont considérés : les dépôts sableux de point-bar, dont les propriétés réservoirs sont les plus intéressantes et dont nous reproduisons les surfaces successives, les bouchons d'argiles résultant du comblement des méandres abandonnés, les dépôts résultant de la rupture des berges du chenal (lobes de crevasses) et d'éventuelles avulsions. Le modèle représente les crues de débordement de manière rapide et suffisamment réaliste. De plus, des considérations simples permettent d'intégrer la production de matière organique dans les zones humides. Enfin, en intégrant les différences locales d'espace disponible pour la préservation du sédiment, nous présentons divers types d'architecture et modélisons les cycles géologiques d'incision ou d'aggradation successifs, qui conduisent soit à l'encaissement de la rivière dans une vallée

soit à l'élévation progressive de la plaine d'inondation.

La dernière partie de ce mémoire concerne les aspects stochastiques introduits dans le modèle et propose des pistes pour en permettre le conditionnement. Les courbes verticales de proportions et les matrices de proportions permettent d'étudier l'influence de plusieurs paramètres sur la distribution spatio-temporelle des dépôts. Les résultats obtenus mettent en évidence certaines corrélations pouvant servir à l'inférence des pa-

ramètres caractérisant le fonctionnement du système. Une fois ceux-ci déterminés, la migration du chenal est contrainte par l'érodabilité de la rive qui corrige la migration de la rivière prévue par les modèles d'écoulements à l'intérieur du chenal. L'utilisation de ce paramètre, sous forme de cartes obtenues par simulation conditionnelle, est simple à mettre en oeuvre et permet de définir des zones de migration préférentielle du chenal. Le conditionnement aux puits peut également se faire à partir de simulations spatio-temporelles de l'érodabilité le long du chenal.

Première partie

Enjeux, objets et méthodologies



## Résumé

*Nous présentons l'intérêt économique des séries sédimentaires fluviales, en nous attachant aux problématiques soulevées par leur exploitation dans un contexte pétrolier. L'échelle d'observation de ces dépôts apparaît comme un élément déterminant. Les progrès de l'acquisition de données, des techniques d'exploration et d'exploitation ont ainsi conduit à reconsidérer une vision souvent simplifiée de l'architecture de ces séries.*

*La complexité des dépôts provient de la complexité même de la dynamique du système fluvial. Nous présentons donc les différents types de systèmes fluviaux et les éléments les constituant tels qu'ils peuvent être mis en évidence à partir des systèmes actuels. Nous nous attachons en particulier à la description des systèmes méandriformes. Les systèmes fluviaux sont caractérisés par des processus d'érosion et de dépôts nombreux et variés qui construisent peu à peu les séries sédimentaires fluviales. Nous présentons alors brièvement les caractéristiques du transport sédimentaire en milieu fluvial puis décrivons les différentes structures sédimentaires en résultant.*

*Enfin, nous présentons un bref historique des approches utilisées dans le domaine de la modélisation de l'architecture des séries fluviales, pour préciser quelle sera celle adoptée dans ce travail.*



# Chapitre 1

## Enjeux

### 1.1 Potentiel économique des séries fluviales

Les cours d'eau, quelle que soit leur taille, ont depuis longtemps été reconnus comme le principal vecteur de transport du matériel de l'érosion des continents. On oublie, ce faisant, que de grandes quantités de sédiments peuvent être stockées dans les plaines alluviales. Ce stockage temporaire, à l'échelle des ères géologiques, peut paraître évident quand, à l'échelle d'une vie humaine, des crues parfois catastrophiques rappellent son existence. L'accumulation et la préservation de ces dépôts peut alors conduire à des épaisseurs considérables dont l'importance quantitative n'a été reconnue que relativement récemment. Ainsi, d'après Bravard et Petit (1997) seul un quart des sédiments érodés parvient à l'océan.

Le potentiel économique de ces dépôts fluviaux est important. Ils renferment de grandes quantités d'énergies non renouvelables ainsi que de nombreux gisements de minerais ou pierres précieuses. Ainsi, la majorité des hydrocarbures des champs géants de Prudhoe Bay (Alaska), Brent (Mer du Nord) ou Daqing (Chine) sont piégés dans des sédiments d'origine fluviale. Les séries fluviales de la région du Witwatersrand (Afrique du Sud) regorgent d'or, d'uranium et de

diamant. Enfin, ces dépôts renferment de nombreux gisements houillers, comme dans tout le Bassin du Western Interior (États Unis) [Miall (1992)].

Les techniques de construction modernes permettent aujourd'hui d'assécher les zones humides et d'endiguer les colères récurrentes des fleuves. Les dépôts de plaines alluviales sont ainsi devenus l'un des lieux d'implantation favoris de l'espèce humaine. Elle y a trouvé une topographie relativement accueillante aux prix d'une lutte continuelle contre l'érosion des terrains agricoles et les crues dévastatrices. Mais les plaines alluviales sont surtout riches en eau douce, élément vital indispensable. Les aquifères alluviaux constituent une richesse importante tant qualitativement, car l'eau y est très proche de la surface donc facilement accessible [Teles (1999)], que quantitativement, puisqu'ils représentent la majorité des réservoirs d'eau potable à la surface du globe [Bridge et Tye (2000)].

Une bonne connaissance de l'architecture, des volumes et de la nature des dépôts fluviaux est alors nécessaire pour permettre selon les cas l'exploitation optimale ou la meilleure protection des richesses qu'ils renferment.

## 1.2 L'optique pétrolière

### 1.2.1 *O tempora...*

Il y a encore 30 ans, les compagnies pétrolières pouvaient espérer découvrir sans cesse de nouveaux champs géants dont l'exploitation serait toujours rentable et facile. Les temps ont changé. D'après Chessa (1995), plus des trois quarts des quantités contribuant aujourd'hui à l'augmentation de l'estimation des réserves mondiales d'hydrocarbures proviennent d'une meilleure exploitation ou d'une remise en exploitation de

champs déjà connus. Il est alors nécessaire pour une compagnie pétrolière de connaître de manière de plus en plus détaillée l'architecture interne de ses réservoirs sous-terrains. Compte tenu de coûts de production élevés, elle doit également pouvoir évaluer rapidement différents scénarios de mise en exploitation, tout au long de la vie du gisement.

### 1.2.2 Vie d'un gisement

Les décisions les plus difficiles à prendre sur un projet pétrolier sont traditionnellement les premières. Il s'agit alors d'estimer la potentialité de production d'un champ avec un nombre très restreint de données. Cette phase d'exploration se fait à l'aide de données de forages, de données sismiques et éventuellement de tests sur quelques puits. Rapidement, la capacité du gisement doit être estimée et un schéma d'exploitation décidé, avec en particulier l'implantation des futurs puits.

Au fur et à mesure de la mise en production du champ, les forages apportent de nouveaux renseignements et une meilleure connaissance du réservoir qui conduisent à de constantes réévaluations. Ces données vont permettre de réaliser des

simulations d'écoulement plus précises qui aideront à une meilleure conduite des opérations.

Ensuite, l'exploitation du champ entre dans une phase de *plateau* pour laquelle la production est planifiée de manière relativement fiable grâce à un nombre important de données qui sont à nouveau utilisées pour calibrer des simulations d'écoulements (*history matching*).

Finalement, quand la production commence à décliner, on a recourt à des techniques sophistiquées pour tirer le meilleur parti du champ qui s'épuise (*Enhanced Oil Recovery*). Certains puits peuvent alors servir à injecter des mélanges eau chaude - solvants sous pression pour littéralement laver le réservoir de ses derniers hydrocarbures.

### 1.2.3 Modèles de réservoirs

La grande diversité des processus sédimentaires fluviaux dans l'espace et dans le temps conduit à une grande hétérogénéité des séries sédimentaires en résultant. Ainsi, sur de très courtes distances, des sédiments fins peuvent alterner avec des sédiments plus grossiers.

Pour que les hydrocarbures puissent être piégés dans des corps poreux, formant un bon réservoir potentiel, il faut cependant que [de Graciansky (1992)] :

- leur formation et leur maturation se réalise dans une partie du bassin sédimentaire voisine du réservoir,
- le réservoir soit sur une de leurs voies de migration<sup>1</sup>,
- il existe une couverture imperméable au toit du réservoir dont la géométrie permette leur piégeage<sup>2</sup>.

On rencontre alors deux principaux types de pièges : les pièges structuraux et les pièges stratigraphiques. Les premiers sont dus à des défor-

<sup>1</sup>Peu de forages implantés sur des pièges bien reconnus sont généralement productifs...

<sup>2</sup>Partie supérieure du réservoir localement convexe.

mations postérieures à la sédimentation - anticlinaux, failles - conduisant à la juxtaposition d'un corps réservoir et d'une couverture imperméable. Dans le cas des seconds, les processus sédimentaires sont directement à l'origine de cette juxtaposition (existence de lentilles sableuses, ou corps chenalisés sableux). Les corps argileux, avoisinant les corps sableux<sup>3</sup> dans les séries fluviales, ont par exemple une perméabilité faible qui en fait d'excellentes barrières stoppant la migration des hydrocarbures.

Au cours des différentes phases de la vie d'un gi-

ment (*cf.* § 1.2.2 p. 8) il s'agira d'une part de toujours mieux comprendre l'agencement spatial de ces différents corps, et d'autre d'améliorer la prédiction de leurs propriétés pétrophysiques (perméabilité, porosité) et de leurs connectivités respectives. Ce dernier facteur contrôle en particulier le volume cumulé qui va pouvoir être drainé à l'aide d'un seul puits<sup>4</sup> (*cf.* fig. 1.1 p. 10).

Dans un premier temps, on doit se faire une idée rapide du type de réservoir auquel on est confronté.

## 1.3 Classification sommaire des réservoirs pétroliers fluviaux

Historiquement, les différents styles de pièges dans des séries fluviales ont été décrits par Cant (1982). Les travaux de Blackbourn (1984) présentent la variabilité des faciès des dépôts fluviaux sans réellement classifier les types de ré-

servoirs. Enfin Davies et al. (1993)<sup>5</sup> proposent deux modèles de classification des corps réservoirs chenalisés en domaine continental tout en suggérant que leurs champs d'application puissent être élargis.

### 1.3.1 Une classification...

Nous reprenons ici succinctement les travaux exhaustifs de Miall (1996), qui sur la base de deux principaux critères descriptifs, répartit en trois grandes catégories la majorité des grès fluviaux constituant des réservoirs d'hydrocarbures. Ces critères sont d'une part la géométrie et l'origine du système de dépôt, de l'autre la géométrie des corps réservoirs (*c.f.* fig. 1.2 p. 10).

- Les *prismes clastiques* sont constitués d'épais dépôts gréseux en forme de nappes, dès lors que les conditions tectoniques permettent leur accumulation : fortes paléopentes et reliefs significatifs. D'épaisseur hectométrique à kilométrique, ils peuvent s'étendre sur des distances également grandes, d'ordre hectométrique à décakilométrique. Communément, ces séries se trouvent dans les bassins de rift ou d'avant pays. Les facteurs allocycliques (tectonique, eustatisme...) ont alors un contrôle important sur la distribution et la géométrie de

ces corps. Cependant, l'influence de facteurs autocycliques n'est parfois pas négligeable, en particulier dans l'intercalation de dépôts purement fluviaux et de dépôts marqués par une influence deltaïque. On peut distinguer deux grands types de structures internes.

- Les *corps chenalisés et barres sableuses* (*Channel-and-Bar Bodies - type CB*) sont des accumulations de corps réservoirs gréseux, de tailles relativement faibles, isolés entre eux par des dépôts ayant souvent une granulométrie plus fine, générant ainsi des pièges stratigraphiques. L'accumulation de plusieurs centaines voire milliers d'unités constitue le champ pétrolier. Si toutes contiennent effectivement des hydrocarbures, le potentiel du champ peut devenir considérable. Cependant son architecture complexe rend la migration des fluides en son sein très difficile à prédire. Il est alors

<sup>3</sup>Les sables fluviaux sont transformés en grès lors de la diagenèse. Dans une optique pétrolière, nous considérons que lorsque les sables initiaux sont propres, la porosité des grès en résultant est suffisante pour constituer de bons réservoirs potentiels.

<sup>4</sup>Ce degré de connectivité va donc déterminer le nombre de puits à implanter sur un champ.

<sup>5</sup>Voir aussi Davies et Williams (1991).

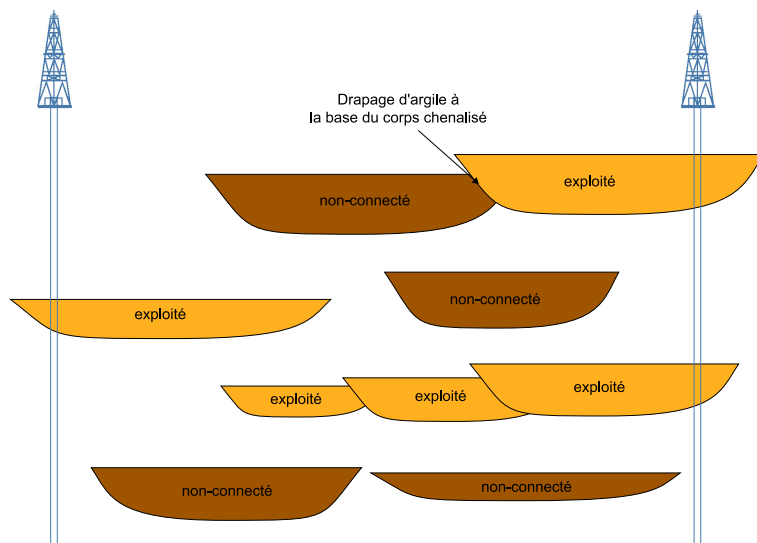


FIG. 1.1 – Influence de la connectivité des corps réservoirs sur l'exploitation d'un champ pétrolier, Weber (1986)

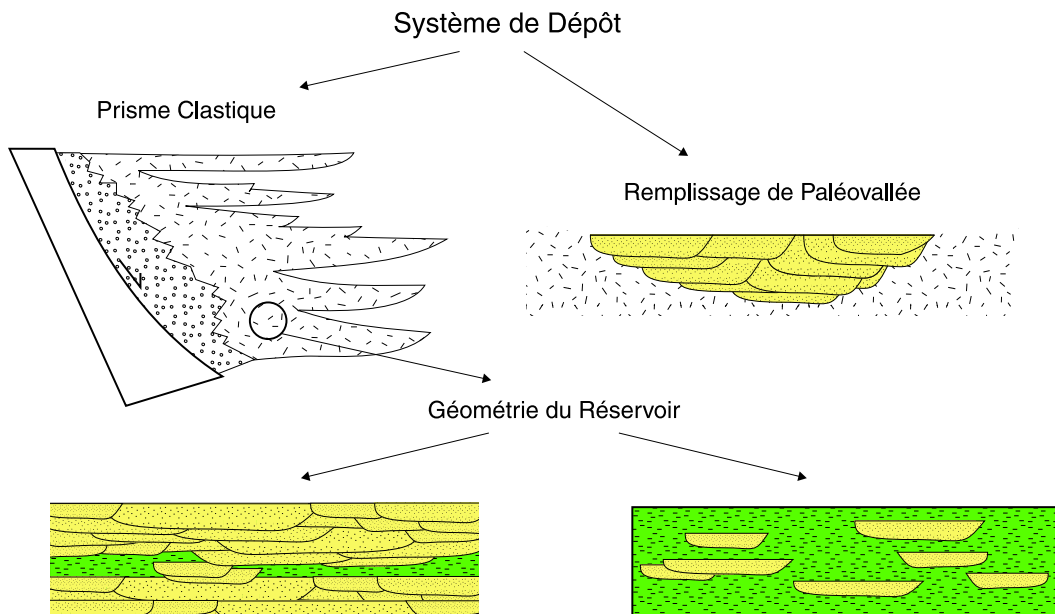


FIG. 1.2 – Classification des réservoirs fluviaux, Miall (1996)

nécessaire de connaître de manière détaillée l'agencement spatial des corps réservoirs, à l'aide de forage rapprochés (*cf.* fig. 1.3), de campagnes sismiques ou de modélisation.

- Les **nappes gréseuses** (*Sheet Bodies - type SH*) forment des corps réservoirs avec une grande extension latérale. Cette extension spatiale implique souvent un piégeage des hydrocarbures de type structural. En effet, ces larges étendues poreuses et bien interconnectées ne présentent que peu de résistance à la migration des fluides (*cf.* fig. 1.4). Une analyse détaillée peut cependant faire apparaître une hétérogénéité interne importante et des similitudes avec la catégorie CB.
- Les **remplissages de paléovallées** (*Paleovalleys Bodies - type PV*) comblent les vallées formées lors de phases antérieures d'incision. Ces paléovallées ont typiquement une largeur d'ordre kilométrique, une profondeur d'ordre décamétrique et une extension longitudinale déca-kilométrique. Elles se trouvent principalement dans des domaines caractérisés par de faibles paléopentes, tels que les bassins cratoniques, les marges continentales en extension et les parties distales des bassins d'avant pays<sup>6</sup>. Leurs remplissages se caractérisent par des géométries en forme de rubans ou de lacets, et sont généralement associés à des discontinuités régionales. Elles ne deviennent des pièges pétroliers que si leur encaissant et leur toit sont suffisamment imperméables aux migrations d'hydrocarbures<sup>7</sup>. De tels réservoirs peuvent être relativement homogènes ou bien

présenter d'importantes variations internes de faciès qui les rapprochent alors à nouveau de la catégorie CB.

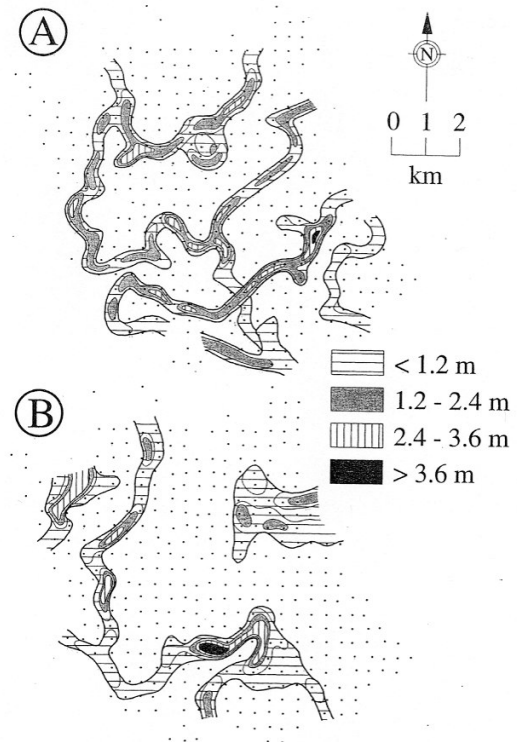


FIG. 1.3 – Cartes d'isopaques de corps gréseux, champ de Citronnelle (USA), Eaves (1976)  
L'interconnexion verticale entre corps gréseux crée un réseau de circulation des fluides particulièrement tortueux. Chaque point représente un puits.

### 1.3.2 ... parmi d'autres...

A titre de complément, la classification précédente peut être comparée à la classification plus ancienne mais plus imagée de Weber et Van Geuns (1990) établie à des fins d'exploration et d'exploitation. Ces auteurs distinguent également trois catégories (*cf.* fig. 1.5 p. 13) :

- les réservoirs "millefeuilles" (*layer-cake réservoirs*) avec une grande extension latérale qui

peuvent être assimilés à des unités tabulaires et homogènes (à rapprocher du type SH de Miall) ;

- les réservoirs "puzzles" (*jigsaw-puzzle réservoirs*) composés de corps gréseux chenalisés peu individualisés bien interconnectés avec quelques barrières de perméabilité locales (à rapprocher du type PV de Miall, ou à placer comme intermédiaire entre les types SH et

<sup>6</sup>Ce domaine correspond à la zone B du modèle stratigraphique de Posamentier et Allen (1993).

<sup>7</sup>Une partie de l'encaissant doit être imperméable si le toit n'a pas une forme convexe permettant le piégeage.

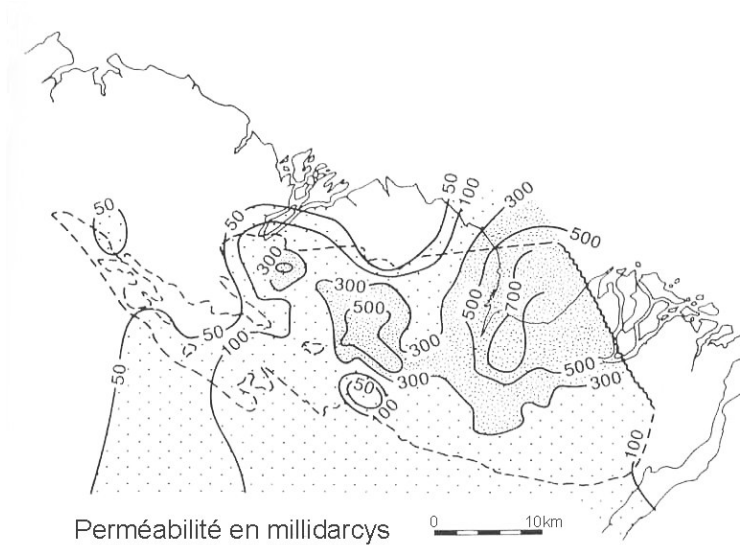


FIG. 1.4 – Carte d’isoperméabilité d’un complexe d’origine fluviale, formation de Sadlerochit (Alaska North Slope, USA), Wadman et al. (1979)

Les contours du champ pétrolier de Prudhoe bay sont indiqués en pointillés. La ligne ondulée représente une faille délimitant le champ à l’Est.

CB);  
– les réservoirs “labyrinthes” (*labyrinth reservoirs*) constitués de lentilles et poches gr-

seuses faiblement interconnectées et difficiles à cartographier (le type CB de Miall).

### 1.3.3 ... un problème d’échelle ?

Au cours de la dernière décennie, les progrès des méthodes d’acquisition géophysiques ont permis d’obtenir une représentation tridimensionnelle du sous-sol dont la résolution est de plus en plus fine. Des champs qui paraissaient alors ne présenter que peu d’hétérogénéités internes ont révélé une structure interne beaucoup plus complexe. De nombreux réservoirs *a priori* “mille-feuilles” ont ainsi dévoilé une architecture “labyrinthique”. Parallèlement, des techniques d’exploitation de plus en plus sophistiquées ont permis, soit de remettre en exploitation certains champs abandonnés, soit de mettre en exploitation des champs dont le potentiel avait été initialement jugé insuffisant.

Dans ce contexte, une connaissance générale de la forme et de l’agencement des corps réservoirs n’est plus suffisante pour permettre une utilisation optimale des méthodes d’exploitation

modernes. En plus d’une bonne connaissance du contexte géologique du champ étudié, l’architecture détaillée du réservoir doit être appréhendée si possible à l’aide de modèles numériques dont l’utilisation est toujours moins coûteuse que celles de techniques géophysiques lourdes. Pour travailler à un tel niveau de détail, ces modèles doivent alors être suffisamment réalistes pour reproduire fidèlement la géométrie et la nature des objets sédimentaires dans les séries fluviales.

Un modèle de réservoir est utile s’il permet d’estimer efficacement les différentes échelles d’hétérogénéités qui vont influencer la récupération des hydrocarbures. Celles-ci sont intimement liées aux processus sédimentaires ayant conduit aux dépôts modélisés.

Weber (1986) distingue quatre échelles princi-

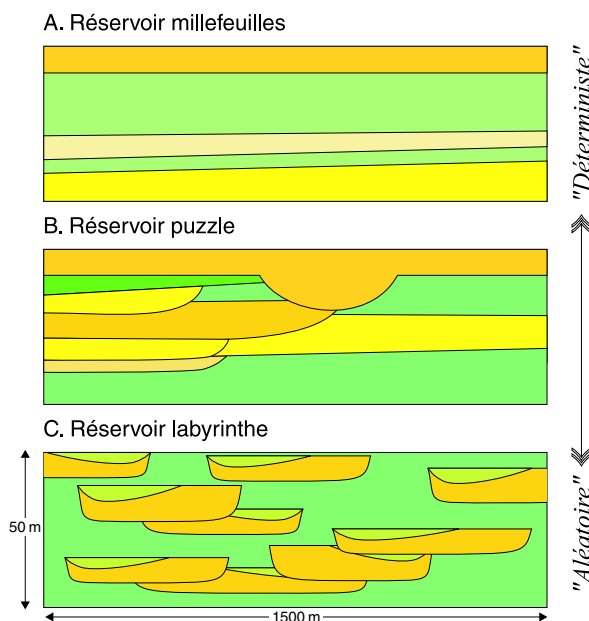


FIG. 1.5 – Classification des grands types de réservoirs clastiques, Weber et Van Geuns (1989)

pales d'hétérogénéités susceptibles de se présenter dans un réservoir fluviatile (*cf.* fig. 1.6 p. 14).

- Les hétérogénéités à l'échelle du champ concernent principalement l'agencement des corps réservoirs entre eux (type a). La bonne ou mauvaise interconnection des corps réservoirs gréseux donnera une idée du potentiel économique du champ dans la phase d'exploration et le début de la mise en production<sup>8</sup>.
- Les hétérogénéités à l'échelle des unités génétiques qui constituent ces corps réservoirs sont souvent liées aux différents styles de dépôt (type b).
- Les hétérogénéités à l'échelle du remplissage de ces unités génétiques sont dues à la superposition de différentes structures sédimentaires (type c).

– Les hétérogénéités à l'échelle de la structure même des ces unités sédimentaires, sont à relier directement aux paramètres pétrophysiques intrinsèques des sédiments<sup>9</sup> (type d). Ces hétérogénéités deviennent particulièrement importantes durant les phases finales d'exploitation d'un réservoir lorsque l'on cherche à en optimiser l'exploitation.

Les failles et la nature de leurs remplissages sont également sources d'hétérogénéité à l'échelle globale du réservoir. Selon la distribution des perméabilités le long de celles-ci, elles peuvent constituer de gigantesques barrières imperméables ou au contraire, des chemins de migration préférentiels des fluides [Corrigan (1988)].

La compréhension et la prédiction de l'architecture complexe des séries sédimentaires d'origine fluviatile constitue un enjeu économique important, en particulier dans le domaine pétrolier. Le chapitre suivant s'intéresse aux objets possibles d'une modélisation suffisamment réaliste et efficace dans ce contexte. Il s'agira d'objets conceptuels, avec la description de processus physiques, et d'objets sédimentaires concrets, avec les dépôts observés.

<sup>8</sup>Ce type d'hétérogénéités détermine en particulier le nombre de puits à implanter (*cf.* note 4 p. 10 et fig. 9 p. 10).

<sup>9</sup>Les hétérogénéités à très faible échelle, en particulier dans les structures sédimentaires, engendrent des différences de pressions capillaires qui peuvent conduire au piégeage d'hydrocarbures Hartkamp-Bakker (1991).

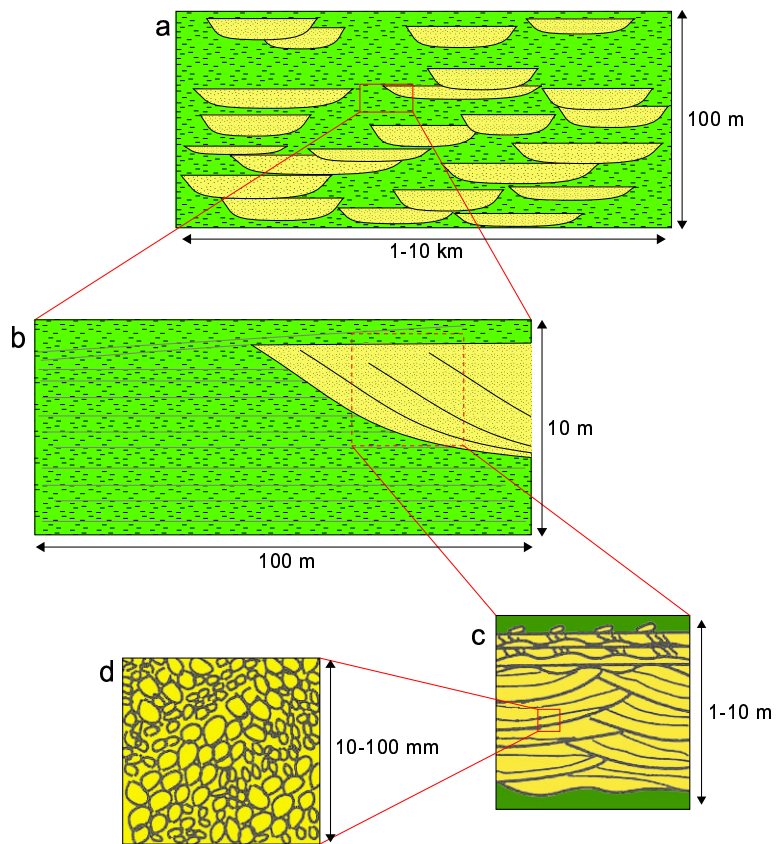


FIG. 1.6 – Hiérarchie des hétérogénéités dans un réservoir fluvial, Weber (1986)

# Chapitre 2

## Objets

### 2.1 Morphologie du système fluvial

#### 2.1.1 Débits et définitions associées

Le *lit fluvial*, emplacement d'un cours d'eau où circulent les eaux courantes, est façonné au fil du temps par les débits liquides et solides qui y transitent. En hydrologie, il existe de multiples possibilités de traitement des débits, en fonction

de la variable analysée : débit annuel, débit mensuel, évolution des débits en période de tarissement... Certains, dépassant une valeur seuil sont cependant plus susceptibles de jouer un rôle dans le façonnement et l'évolution des lits.

##### 2.1.1.1 Débits caractéristiques et unités morphologiques

Dans les systèmes fluviaux modernes, on distingue, sur la base des différentes unités de relief, les zones qui sont exposées à des crues non débordantes, fréquentes ou exceptionnelles :

- Le *lit mineur* est l'espace fluvial, formé d'un chenal unique ou de chenaux multiples et de bancs de sables ou galets, recouverts par les eaux coulant à pleins bords avant débordement. On appelle *débit dominant* le débit continu qui façonne le même lit mineur que la succession des débits réellement observés.
- Le *lit moyen* est l'espace fluvial, ordinairement occupé par la ripisylve<sup>1</sup>, sur lequel s'écoulent les crues aux périodes de retour de 1 à 10 ans en moyenne, il est donc soumis à un risque fréquent d'inondation.
- Le *lit majeur* est limité par l'extension des crues exceptionnelles, il correspond à la zone potentiellement inondable en dehors de laquelle le risque d'inondation fluviale est nul

(ce qui n'exclut pas le risque d'inondation par ruissellement pluvial).

- La *plaine alluviale* correspond à la zone inondable sur laquelle des sédiments peuvent être déposés lors des crues. Elle regroupe donc le lit moyen et le lit majeur.
- Les *terrasses* sont des replats situés sur un versant de la vallée, ou sur les deux, à une altitude supérieure à celle du cours d'eau. Elles représentent le reste d'un lit ancien dans lequel le cours d'eau s'est enfoncé. Une terrasse peut être aussi bien construite par des alluvions (terrasse alluviale) que façonnée par l'érosion du lit rocheux (terrasse rocheuse) ou d'une terrasse antérieure. Dans ce dernier cas, on observe des terrasses emboîtées ou étagées.

Parmi les débits caractéristiques le *débit à pleins bords* est l'un des plus importants. Il représente le débit limite avant débordement dans la plaine

<sup>1</sup>Végétation implantée aux bords des rivières.

alluviale. De part sa définition, ce débit représente le débit au delà duquel des phénomènes de sédimentation pourront se produire dans le lit majeur : édification de levées naturelles, décantation de matériaux fins dans la plaine alluviale... Le débit à pleins bords est considéré proche du débit dominant pour les phénomènes de mise en mouvement de la charge de fond et pour l'efficacité de l'évacuation du matériau par charriage. Il représente également le point optimum d'efficacité pour les modifications géomorphologiques au sein du lit mineur, notamment pour le façonnement des méandres [Tricart (1977); Bravard et Petit (1997)]. Enfin, certains phénomènes d'érosion dans le lit majeur, en conditions naturelles ne peuvent être produits que par des débits à pleins bords, en particulier en ce qui concerne l'installation de chenaux de recouplement [Bravard et Petit (1997)].

La période de retour du débit à pleins bords était initialement considérée comme oscillant entre 1 an et 2 ans [Leopold et al. (1964); Tricart (1977)]. Dury (1976) l'a définie par une récurrence de 1,58 ans<sup>2</sup>. Si l'on considère, au lieu de la série annuelle des débits, la *série partielle des débits*, c'est à dire en sélectionnant dans l'ensemble des observations, les crues supérieures à un certain seuil, cet événement correspond schématiquement à une période de retour de 1 an [Bravard et Petit (1997)]. Cependant, la lithologie du bassin versant joue un rôle important sur la récurrence du débit à pleins bords par le biais du régime hydrologique. En effet, toujours en considérant la série partielle des débits, les rivières coulant sur des terrains perméables ont une récurrence du débit à pleins bords supérieur à 2 ans alors que dans le cas de rivières sur des terrains non perméables, cette récurrence oscille entre 2 et 8 mois [Roberts (1989)].

### 2.1.1.2 Autres définitions

Pour les besoins de l'analyse et de la description des morphologies fluviales nous introduisons quelques définitions complémentaires.

- Le *talweg* ou *thalweg* est une ligne imaginaire qui joint les points les plus bas d'une vallée, suivant laquelle s'écoulent les eaux.
- Lorsque l'on considère un chenal unique nous définissons sa *ligne médiane*, comme la ligne imaginaire à la surface de l'eau, équidistante de ses bords.
- Lorsque le système considéré est méandrique (cf. fig. 2.1 p. 18), la *ceinture de méandres*<sup>3</sup> est la zone de migration préféren-

tielle du chenal essentiellement occupée par le chenal lui-même et ses dépôts récents. Cette zone ne représente qu'une partie de l'espace disponible. Elle est délimitée par les levées du chenal et les anciens méandres abandonnés qui constituent une frontière plus résistante à l'érosion [Sun et al. (1996)].

- La *sinuosité* d'un chenal entre deux de ses points est le rapport de la longueur du cours d'eau entre ces deux points à la distance géodésique séparant ceux-ci. La sinuosité d'un cours d'eau est donc une grandeur sans dimension, supérieure à 1 et atteignant en pratique des valeurs maximales aux alentours de 6.

## 2.1.2 Caractérisation de la morphologie des cours d'eau

La morphologie et l'évolution des rivières dépendent de leur liberté à se développer. Suivant la capacité du substrat à être érodé, les structures observées sont alors régies ou non par l'encaissement du cours d'eau. Dans les vallées alluviales larges, l'évolution des cours d'eau est essentiellement régie par la seule dynamique flu-

viale. On parle dans ce cas de cours d'eau libres. Si l'idée même de rivière semble être un concept intuitivement simple, dès que l'on compare les rivières naturelles entre elles, leur classification s'avère d'autant plus ardue que l'on cherche à l'établir de manière précise et exclusive. Aux début des années 1970, de nombreux travaux

<sup>2</sup>Cette dernière valeur correspond à la crue annuelle la plus probable dans la distribution de Gumbel (cf. § F.1 p. 219), lorsque l'on ne considère que la série des crues maximales annuelles [Roberts (1989)].

<sup>3</sup>On confondra ici ceinture de méandres, ceinture de chenaux et lit fluvial.

ont montré la grande variabilité des morphologies fluviales [Schumm (1972b,a); Galay et al. (1973); Mollard (1973)]. La réalité était alors plus complexe que ne pouvait le laisser supposer les travaux antérieurs de Leopold et Wolman (1957) proposant de distinguer les cours droits, les rivières à méandres et les rivières en tresse<sup>4</sup>. Miall (1977) proposa à la fin de la même décennie une classification en quatre catégories dont Rust (1978) a montré qu'elle pouvait être établie à partir de quantités mesurables, au moins sur les rivières actuelles. Cette classification s'est progressivement imposée avec comme principales grandeurs caractéristiques la sinuosité et le nombre de chenaux actifs. Elle distingue (*cf.* fig. 2.1 p. 18) :

- les cours d'eau rectilignes ou faiblement sinueux : un chenal d'écoulement actif, sinuosité inférieure à 1,5.
- les rivières en tresse : plusieurs chenaux d'écoulement actifs connectés, sinuosité inférieure à 1,5.
- les rivières en méandres : un chenal d'écoulement actif, sinuosité supérieure à 1,5.
- les rivières anastomosées : plusieurs chenaux d'écoulement actifs connectés, sinuosité supérieure à 1,5.

Cette classification bien que pratique a toutefois ses limites. En effet, chacune de ses classes n'est pas exclusive et il existe de nombreux intermédiaires entre deux d'entre elles. De plus, pour le même cours d'eau, il existe de grandes variations tant spatiales, de l'amont vers l'aval, que temporelles, suivant l'évolution des paramètres contrôlant la dynamique fluviale [Bravard et Petit (1997)]. Ceci est principalement dû au fait que la distinction entre les deux principaux types que sont les rivières en méandres et les rivières en tresse se fait sur des paramètres relativement indépendants. Ainsi, Miall (1996) illustre clairement cette ambiguïté avec trois exemples de cours d'eau en tresse dont la sinuosité est très variable (*cf.* fig. 2.2 p. 18).

La distinction entre lits à méandres et lits à tresses est délicate lorsque des bancs apparaissent en eaux moyennes dans un chenal sinueux. D'une part le style à tresses est caracté-

térisé par des bancs d'alluvions non végétalisés mais, des formes de transition incluent des îles plus ou moins végétalisées et stables. De plus, si l'on se base sur la définition stricte de l'apparition de bancs lors de basses eaux, plusieurs systèmes non considérés comme en tresses peuvent cependant présenter des figures de tressage. D'autre part, Schumm et Khan (1972) montrent que l'apparition de méandres semble être une caractéristique de tous les cours d'eau. Ceux-ci s'expriment dans la forme sinueuse du talweg d'un cours d'eau considéré rectiligne ou dans la sinuosité des chenaux d'un réseau en tresses.

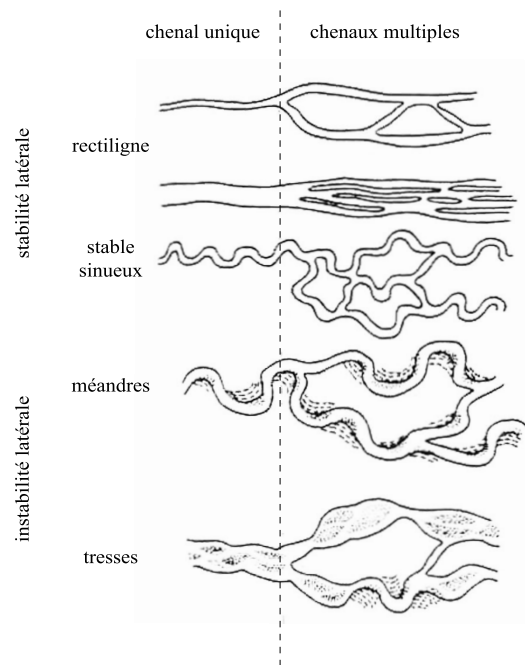


FIG. 2.3 – Classification des cours d'eau, Nanson et Knighton (1996)

Le principal problème de la classification des morphologies fluviales est souvent le manque de précision de la terminologie employée. Nanson et Knighton (1996)<sup>5</sup> proposent de distinguer la morphologie de la rivière (*river pattern*) et la morphologie des chenaux (*channel pattern*). La première est caractérisée par la géométrie plane de l'ensemble d'un tronçon du lit fluvial

<sup>4</sup>Leopold et Wolman (1957) caractérise également la morphologie d'un cours d'eau en formant le rapport entre son débit à plein bords et sa pente longitudinale.

<sup>5</sup>Voir aussi Knighton et Nanson (1993).

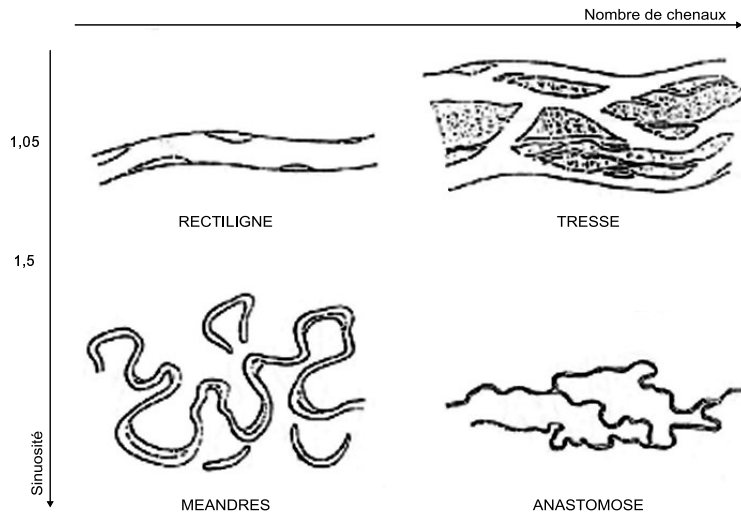


FIG. 2.1 – Classification des différents types de cours d'eau, Rust (1978)

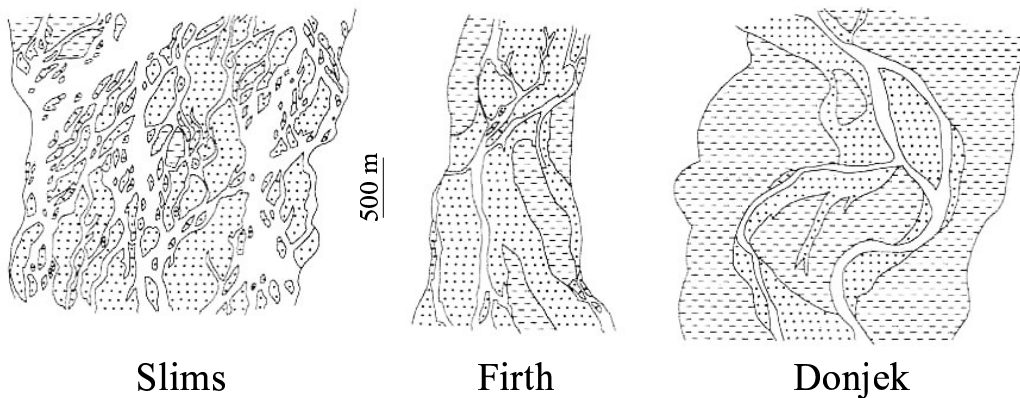


FIG. 2.2 – Trois rivières en tresses à lit caillouteux du Yukon Territory (Canada), Miall (1996)  
 La rivière Slims est une rivière en tresse typique avec de nombreux chenaux multiples et une très faible sinuosité. La Donjek possède en revanche peu de chenaux multiples et chacun d'eux pris individuellement peut présenter des sinuosités élevées.

pour une section donnée. Elle est l'expression des processus agissant à cette échelle. La seconde concerne chaque chenal pris individuellement. Cette distinction est utile car de nombreux systèmes présentent des chenaux interconnectés qui pris individuellement peuvent présenter des morphologies différentes. En effet, la géométrie plane d'un système ne caractérise pas forcément sa dynamique.

En particulier, ces auteurs distinguent les morphologies méandriformes et les morphologies sinueuses stables. Les premières possèdent une géométrie sinueuse et construisent leurs plaines d'inondation par accretion latérale. Les secondes, relativement stables, les construisent essentiellement par aggradation verticale. Bien que les géométries planes de ces systèmes soient similaires, les morphologies de leurs chenaux et surtout les architecture de leurs dépôts sont très différentes.

Nanson et Knighton (1996) proposent donc une

révision des classifications traditionnelles (cf. fig. 2.3 p. 17) [Miall (1977); Rust (1978); Brice (1984)]. Ils considèrent que les rivières rectilignes et sinueuses stables sont apparentées car latéralement inactives. Au contraire, ils divisent les systèmes à chenaux multiples (*anabranching rivers*) selon les terrains émergés qu'ils délimitent : îles souvent végétalisées ou simples barres longitudinales souvent non végétalisées. Les chenaux en tresses sont actifs et migrent activement comme le font souvent les rivières en tresses [Fahnestock (1963); Reinfelds et Nanson (1993)]. Les systèmes méandriformes et en tresses ont donc en commun une activité latérale importante. Les systèmes à chenaux multiples sont en conséquence répartis en cinq grands types : rectilignes à îles, rectilignes à barres longitudinales, sinueux stables, méandriformes et en tresses. Les trois premières catégories sont stables alors que les deux dernières sont caractérisées par une activité latérale importante<sup>67</sup>.

Nous avons présenté les différentes unités morphologiques constituant un système fluvial, ainsi que leur géométries caractéristiques. Les structures sédimentaires observées dans les séries fluviales naissent de l'interaction entre ces différentes unités par le biais de l'écoulement fluide les traversant et de la charge solide qu'il peut déposer ou prélever.

## 2.2 Écoulements et charges sédimentaires

Nous rappelons brièvement la définition des nombres adimensionnels caractérisant un écoulement, puis présentons les différents modes de transport en rivière. Enfin, nous présentons la

structure des écoulements principaux que nous modéliserons, l'écoulement chenalisé en cours sinueux et l'écoulement lors des crues de débordement.

### 2.2.1 Caractéristiques de l'écoulement fluvial

Bien que la plupart des applications de l'hydrodynamique fassent l'hypothèse d'écoulements uniformes, les vitesses des écoulements en rivières naturelles varient spatialement et temporellement : les vitesses instantanées du courant peuvent atteindre jusqu'à trois fois la valeur moyenne des vitesses [Kalinske (1943)]. Lorsque

les modifications dans les vitesses et les profondeurs sont progressives, en vue de compenser les effets dus à l'élargissement de la section, par exemple, on parle d'*écoulement graduellement varié*.

Sous des conditions données, les écoulements

<sup>6</sup>Les catégories de rivières à chenaux multiples définies précédemment sont équivalentes à leurs homologues à chenal unique suivant les critères de Leopold et Wolman (1957) (cf. note 4 p. 17).

<sup>7</sup>Les types 1 et 2 de Nanson et Knighton (1996) regroupent les rivières anastomosées, les types 3 et 4 regroupent les rivières méandriformes à charge mixte et les rivières en tresses à charge sableuse et les types 5 et 6 regroupent des systèmes transitionnels comme les rivières en tresses à charge grossière pour lesquelles le tressage est rendu difficile par des rives résistantes ou une charge sédimentaire relativement faible.

sont bien caractérisés par deux nombres adimensionnels :

- le *nombre de Reynolds* ( $Re$ ) quantifie le rapport entre les forces d’inertie et les forces de frictions dues à la viscosité du fluide :

$$Re = \frac{UH}{\nu}$$

où  $U$  est la vitesse moyenne de l’écoulement,  $H$  sa profondeur et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. En pratique, lorsque :

- $Re < 500$  l’écoulement est *laminaire* : les veines de fluide glissent les unes sur les autres sans échange latéral.
- $Re > 2000$  l’écoulement est *turbulent* : les forces d’inertie ont une influence prédominante et les vitesses instantanées de l’écoulement présentent une grande dispersion temporelle et spatiale autour de leur valeur moyenne. Les tourbillons ainsi générés conduisent au brassage des sédiments et des particules pourront être maintenues en suspension grâce aux composantes verticales du flux.

De manière quasi générale, l’écoulement en rivière naturelle est de type turbulent [Bravard et Petit (1997)].

- le *nombre de Froude* ( $F$ ) quantifie le rapport entre la vitesse de l’écoulement et la célérité des ondes de pressions :

$$F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

où  $g$  est l’accélération locale de la pesanteur. Deux cas principaux peuvent alors être distingués :

- $F < 1$  : si un obstacle se présente sur l’écoulement, ce dernier peut s’adapter en amont, les ondes de déformation pouvant “remonter” le courant, on parle alors d’*écoulement subcritique* et le régime est dit *fluvial*.
- $F > 1$  : l’écoulement ne “découvre” un obstacle que lorsqu’il passe dessus, il peut alors devenir instable et les ondes de pression peuvent donner naissance à des vagues qui en se brisant permettent de dissiper de l’énergie, on parle alors d’*écoulement supercritique* et le régime est dit *torrentiel*.

En rivière naturelle, le régime d’écoulement est généralement fluvial. Très localement des écoulements supercritiques peuvent se produire lors d’accélération brutales de l’écoulement (passage au dessus de gros blocs...).

## 2.2.2 Transport en solution

Certains éléments de la lithosphère sont dissous et exportés de manière préférentielle. En particulier, les roches cristallines silicatées sont très peu solubles par rapport aux roches carbonatées. Cependant l’altération chimique n’est pas l’unique source de matériau et les éléments apportés par les précipitations peuvent parfois représenter une part non négligeable de la charge en solution dans un cours d’eau. De manière générale sa concentration diminue avec le débit du cours d’eau mais le débit solide total augmente avec le débit liquide. On peut ainsi atteindre des valeurs de débit solide transportés en solution de  $100 \text{ m}^3 \cdot \text{km}^{-2} \cdot \text{an}^{-1}$  dans les karsts tropicaux<sup>8</sup> [Bravard et Petit (1997)]. A l’échelle des conti-

nents, le facteur essentiel de la variation de ce transport dissous est climatique. Les concentrations maximales se rencontrent sous les climats arides à cause de précipitations faibles donc d’un écoulement total faible, d’une évaporation active favorisant une reconcentration. Cependant, en termes de production totale, les débits solides évacués en solution sont plus importants sous des climats plus humides à cause de débits liquides plus importants [Bravard et Petit (1997)]. Les climats chauds et humides favorisent à la fois l’altération chimique et l’exportation de ses produits. Ils sont donc caractérisés par une charge en suspension particulièrement importante [Cogan et Renard (1997)].

<sup>8</sup>Cette valeur est rapportée à la surface du bassin versant, elle correspond donc à une érosion de

$$10^2 \cdot (10^3)^{-2} \text{ mm} \cdot \text{an}^{-1} = 0,1 \text{ mm} \cdot \text{an}^{-1}$$

sur toute la superficie du bassin versant soit 1 cm par siècle.

## 2.2.3 Transport particulaire

Le matériel en transit dans les chenaux fluviaux est constitué des produits de l'érosion du bassin versant ou du lit fluvial. Il s'agit soit de particules individualisées de taille infra-millimétrique à décimétrique soit d'agrégats de petites particules, souvent des flocculats d'argile.

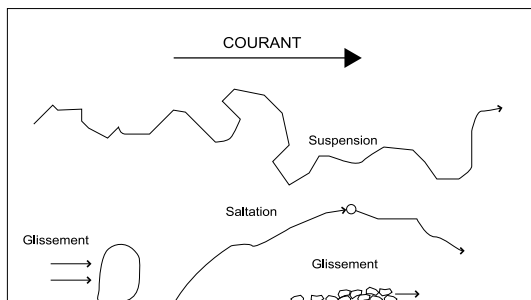


FIG. 2.4 – Modes de transports en rivière naturelle, Teles (1999)

Une partie de ce matériel est qualifiée de charge de fond car les particules se déplacent au contact du fond. La granulométrie de la charge de fond dépend des types de cours d'eau. On la distingue de la charge en suspension maintenue par turbulence dans le fluide et déplacée par transport convectif (*cf.* fig. 2.4). La limite entre les deux types de transport dépend de l'énergie spécifique disponible pour le transport en suspension. Elle est haute sur les rivières torrentielles dans lesquelles des galets peuvent être transportés en

suspension et s'abaisse vers l'aval à mesure que l'énergie spécifique et la turbulence décroissent. Un fleuve comme la Loire compte des galets et du sable dans sa charge de fond [Bravard et Petit (1997)].

La vitesse de mise en mouvement d'une particule ou vitesse critique d'érosion est plus importante que celle nécessaire à son transport, celle-ci ayant alors déjà acquis une certaine inertie. Le diagramme de Hjulström (1935) (*cf.* fig. 2.5) obtenu à partir d'observations et d'extrapolations met en évidence ce fait en reliant les vitesses critiques d'érosion et de transport à la taille d'une particule donnée. Malgré de nombreuses critiques, ce diagramme demeure une première approximation fiable.

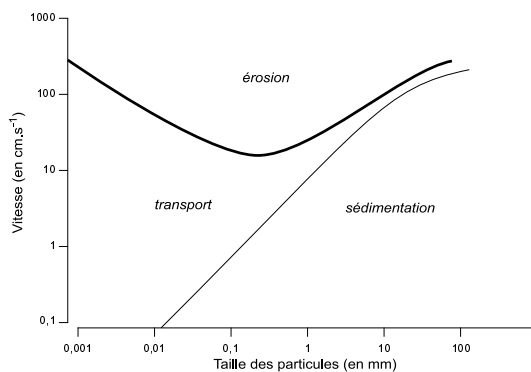


FIG. 2.5 – Diagramme de Hjulström (1935)

### 2.2.3.1 Transport en suspension

La répartition de la charge en suspension, dans la section transversale d'une rivière, dépend de la dimension du matériau. Les particules dont le diamètre est inférieur à 60 microns montrent en général une répartition homogène selon la profondeur et la largeur, on parle alors de suspension uniforme. En revanche, les éléments plus grossiers se présentent selon un gradient de concentration en fonction de la profondeur, on parle de suspension graduée.

De manière générale le débit solide total en suspension augmente de manière importante avec le débit liquide. En effet, la hausse de ce dernier

correspond à une hausse des conditions dynamiques, permettant une remobilisation des particules déjà déposées. De plus, elle est généralement liée à de fortes précipitations produisant du matériel susceptible d'être évacué par les rivières. Il existe également des variations saisonnières, la charge en suspension étant plus importante en été qu'en hiver dans les régions tempérées [Bravard et Petit (1997)].

Il est important de remarquer que l'efficacité du transport résulte d'un compromis entre la distribution temporelle des crues, et le débit solide évacué par un événement déterminé. Des

études menées en Angleterre par Webb et Walling (1982), montrent que le débit dominant correspondant au transport de la charge en suspension est légèrement inférieur au débit à pleins bords. Les trois quarts de la charge totale des sédiments en suspension est évacuée par des débits dont la fréquence est de l'ordre de 1% soit

environ 3,5 jours par an. Les gros événements hydrologiques sont donc principalement responsables de ce type de transport. À titre de comparaison, les mêmes études montrent que la moitié de la charge en solution est évacuée par des débits qui surviennent en moyenne 20% du temps, soit environ 70 jours par an.

### 2.2.3.2 Transport de fond

La notion de vitesse critique d'érosion pérennisée par le diagramme de Hjulström (1935) (cf. fig. 2.5) est un critère largement répandu pour évaluer la capacité de transport par charriage d'une rivière. Il est facile d'application, notamment lors d'événements catastrophiques où des mesures plus fines sont difficiles, voire impossibles à réaliser. Cependant ces critères négligent le rôle protecteur de la végétation, l'interaction entre particules, les phénomènes de dallage, d'armurage ou de pavage, et conduisent souvent à une surestimation des vitesses critiques en présence de particules dont le diamètre dépasse 20 mm [Petit (1988)].

Un second critère pour évaluer la capacité d'un cours d'eau à mobiliser sa charge de fond est la notion de force tractrice ou force du courant. Cette force tractrice<sup>9</sup> est caractérisée par la contrainte de cisaillement s'exerçant sur les parois ou le fond d'un chenal. Une première formulation met en jeu les grandeurs hydrauliques caractéristiques de l'écoulement et s'écrit :

$$\tau = g\rho R_h I_e$$

où  $\tau$  est la contrainte de cisaillement exprimée en  $N.m^{-2}$ ,  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $I_e$  est la pente

de la ligne d'énergie de l'écoulement. Pour les rivières naturelles, on peut, en première approche, considérer que  $I_e$  est égale à la pente du chenal et que  $R_h$  est voisin de la profondeur moyenne de l'écoulement.

La force tractrice ainsi calculée intègre tout un ensemble de phénomènes. En particulier elle est dissipée par [Bravard et Petit (1997)] :

- la résistance des particules :  $\tau'$  (*grain shear stress*),
- la résistance due aux irrégularités du chenal et des berges  $\tau''$  (*bedform shear stress*) .

La résistance des particules  $\tau'$  serait égale à la force tractrice totale  $\tau$  si le lit était plat. Elle est la seule responsable du transport de la charge de fond. Les études réalisées en rivières naturelles montrent que pour des systèmes subrectilignes assez larges, les résistances dues aux formes du lit sont très faibles devant les résistances dues aux particules et on peut souvent poser  $\tau = \tau'$ . En revanche, dans les lits sableux, caractérisés par un développement de nombreuses microformes et une charge de fond en mouvement continu<sup>10</sup>, la composante  $\tau''$  peut atteindre des valeurs considérables.

<sup>9</sup>Il est également possible d'évaluer la force tractrice à partir de la vitesse de frottement  $u^*$  sur le fond d'un chenal. Celle-ci, est définie à l'aide de la contrainte de cisaillement par :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Or, la vitesse de frottement peut être déterminée à partir de la distribution des vitesses selon la profondeur  $u(z)$  qui obéit à une distribution logarithmique :

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_0}$$

où  $z$  est la distance à partir du fond où  $u$  vitesse de l'écoulement est mesurée,  $\kappa$  est la constante de Von Karman [ $\kappa = 0,4$  Brice et Dominic (1984); Nezu et Rodi (1986) in Bravard et Petit (1997)] et  $k_0$  est un paramètre de rugosité du fond qui a la dimension d'une distance. La validité de la distribution logarithmique des vitesses ne se vérifie que juste à proximité du fond. Il est notable que la valeur de  $k_0$  et l'allure du gradient de vitesse de l'écoulement sur le fond restent constantes quelles que soient les conditions d'écoulement.

<sup>10</sup>Dans les rivières sableuses de Lorraine belge, la charge de fond est loin d'être négligeable, de l'ordre de

Comparées avec la force tractrice moyenne, les forces tractrices instantanées peuvent présenter des valeurs jusqu'à dix fois supérieures. Les fluctuations de vitesses les plus importantes se situent à proximité du fond et leur intensité dimi-

nue avec la hauteur au dessus du lit. Ainsi, les méthodes d'évaluation de la force tractrice présentent certaines imprécisions lorsqu'elles sont appliquées aux rivières naturelles, spécialement lorsque des méandres y sont développés.

## 2.3 Écoulements chenalés et processus associés

### 2.3.1 Les cours sinueux

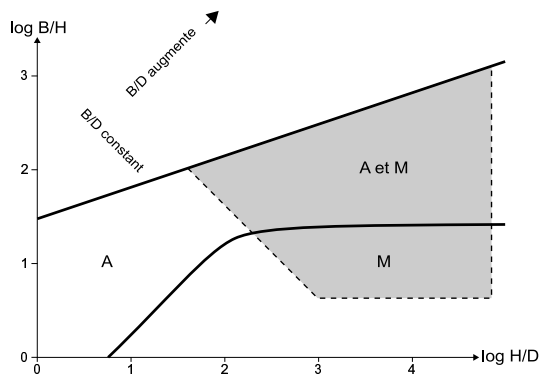


FIG. 2.6 – Domaine d'existence des méandres, Yalin (1992)

$B$  désigne la largeur du chenal,  $h$  sa profondeur moyenne et  $D$  le diamètre moyen du matériel transporté.  $M$  désigne les rivières développant des méandres,  $A$  désigne les rivières développant des barres alternes. La zone grisée correspond donc au domaine d'existence des rivières en méandres.

Yalin (1992) a proposé un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour que des méandres se développent à partir d'un cours d'eau rectiligne :

- Le courant doit être capable d'éroder et de transporter le sédiment érodé. Dans le cas contraire, ses berges ne peuvent pas se déformer et il ne peut pas migrer.
- Le courant doit être turbulent. Des tourbillons peuvent alors se créer et déformer périodique-

ment les rives du chenal.

- Sa pente doit être supérieure à sa pente d'équilibre. Le chenal doit avoir tendance à s'allonger pour diminuer sa pente.
- Les rapports de sa largeur à sa profondeur et de sa profondeur au diamètre moyen des particules transportées doit satisfaire certains critères (*cf.* fig. 2.6).

Dans tout écoulement naturel chenalé, un flot hélicoïdal s'installe. Ce flot rend la vitesse du courant alternativement plus forte contre une rive puis contre l'autre (*cf.* fig. 2.7 p. 24). Cette asymétrie de la structure de l'écoulement introduit alors des déformations du lit du chenal. Ensuite, lorsque l'écoulement principal est détourné contre les rives, à la faveur de ces irrégularités ou typiquement dans une courbe, le flux bute contre la rive externe. Il s'enfonce alors en l'érodant activement<sup>11</sup> et se charge avec les produits de cette érosion. La rive devient abrupte et présente un profil convexe. Le flux ramène ensuite le matériel érodé sur le haut de la rive opposée. A cause de la réduction de la tranche d'eau la capacité de transport de l'écoulement y est réduite. Des quantités substantielles de sédiments peuvent alors être déposées et on observe l'accrétion latérale de la rive par amalgamations successives de figures sédimentaires sableuses.

La migration de la rivière ne s'effectue que lorsque la rivière a la force suffisante pour éroder sa rive et transporter les sédiments. Cela se produit lors des crues à plein bords (*cf.* § 2.1.1.1

<sup>10</sup>  $0,2 t.km^{-2}.an^{-1}$ , ceci en dépit des faibles variations de débits liées à un substrat très perméable [Petit (1986)]. Ceci résulte de la dimension même du matériau mis à la disposition des rivières ( $150 \mu m$ ) de telle sorte que le charriage s'opère de façon subcontinue. Au contraire, dans les systèmes à charge de fond caillouteuse, le mouvement des particules transporté par charriage est bref et discontinu et la vitesse des particules y est très nettement inférieure à celle du flux.

<sup>11</sup> L'érosion des rives s'effectue soit par détachement progressif de particules individuelles soit plus fréquemment par glissements de pans entiers. Ces blocs s'accumulent sur le fond du chenal où ils sont alors déstructurés et repris par le courant sous forme de charge de fond.

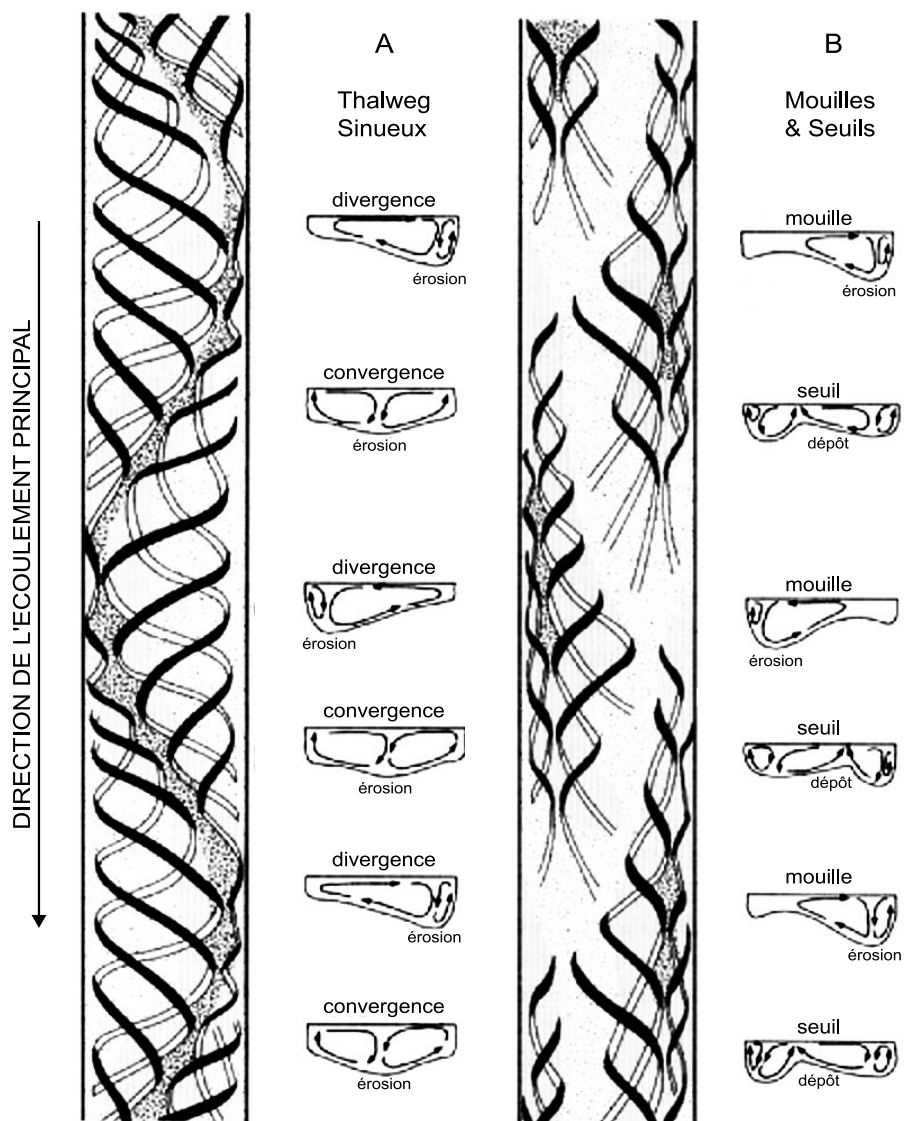


FIG. 2.7 – Flot hélicoïdal à l'intérieur d'un écoulement chenalisé, Knighton (1998)  
**A** Sections successives représentant la variation du profil transversal d'une rivière dans laquelle le champ des vitesses développe une structure hélicoïdale, représentée à gauche. D'après Einstein et Shen (1964).  
**B** Sections successives représentant la variation du profil transversal d'un chenal présentant une succession de seuils (*riffle*) et de mouilles (*pool*). Ces objets apparaissent lorsque la mobilité du lit du chenal est importante. On retrouve néanmoins une structure en double hélice pour le champ des vitesses de l'écoulement. D'après Thompson (1986).

p. 15). Les crues exceptionnelles peuvent modifier l'aspect de la rivière de façon catastrophique, mais souvent l'écoulement *normal* ra-

mène le fleuve vers son aspect antérieur [Gupta (1996); Teles (1999)].

### 2.3.2 Processus du lit mineur

Le lit fluvial connaît une histoire complexe faite d'une succession de remaniements et d'érosions. Lors des pics de crues, le transport sédimentaire est maximal et le lit fluvial est généralement soumis à une érosion intense. Le transport de matériel dans le lit du chenal est principalement influencé par la composante longitudinale de l'écoulement. On observe alors essentiellement un dépôt par accrétion latérale avec quelques lieux d'accrétion aval. Le dépôt est ensuite maximal lors de la décrue, lorsque la capacité de l'écoulement diminue. Du matériel est déposé sur le fond du chenal, conduisant à une aggradation. Les structures existantes sont modifiées et de nouvelles peuvent être créées. Au fur et à mesure que le débit diminue, certaines de ces structures sont soumises à émersion et l'écoulement moins chargé peut redevenir érosif dans les parties basses du lit. Le matériel fin est principalement déposé à la fin de cette décrue. L'hydrogramme de la crue, caractérisant l'évolution temporelle du débit, a une influence importante sur la répartition spatiale des dépôts. Bridge (1993) a proposé des modèles simples pour expliquer le rôle du changement des lieux d'érosion et de dépôt entre crue et décrue (*cf.* fig. 2.8 p. 26).

Le déplacement latéral de matériel par les cou-

rants hélicoïdaux conduit à la migration latérale du chenal et au balayage d'une zone préférentielle de migration appelée ceinture de chenaux ou ceinture de méandres. La migration de la ceinture de chenaux est quant à elle sujette à discussions. Certains auteurs estiment qu'elle ne migre latéralement que sous certaines conditions très spécifiques, essentiellement liées à la pente transverse de la vallée [Bridge (2003)].

Un méandre peut être court-circuité soit à la faveur d'une crue exceptionnelle et on parle de recoupement par déversement (*chute-cutoff*) soit simplement lorsque ses deux extrémités se rencontrent et on parle de recoupement par tangence (*neck-cutoff*). La jonction avec le chenal actif est alors progressivement obstruée par des particules de granulométrie moyenne, isolant la partie abandonnée des courants violents de crue. La partie intermédiaire, isolée du reste du système, forme un bras mort rempli d'eau stagnante. Sa forme d'arc explique la terminologie anglo-saxonne d'*oxbow-lake*. Les bras morts sont des éléments courants du système fluvial en particulier lorsque la granulométrie de la charge sédimentaire est relativement fine comme sur les rivières méandriformes ou anastomosées : *bayous* du Mississippi, ou *billabongs* australiens.

### 2.3.3 Écoulements sur la plaine d'inondation

#### 2.3.3.1 Crues de débordement

Lors des crues de débordement, la complexité de l'écoulement et du transport sédimentaire sur la plaine d'inondation augmente avec celle de sa topographie : chenaux abandonnés, dépressions locales, accumulations de sédiments sous forme de levées naturelles ou d'épandages de crevasse... L'observation des systèmes actuels en crue pouvant être périlleuse, on dispose de peu de relevés de terrain sur la structure de ces écoulements. En revanche, de nombreuses expériences menées en laboratoire sur des maquettes ont aidé à mieux les comprendre (*cf.* fig. 2.9 p. 27 et

fig. 2.10 p. 28).

Une crue de débordement commence par une période de montée des eaux pendant laquelle la plaine est inondée :

- par la montée de la nappe sous-fluviale,
- par de l'eau arrivant en masse des points bas dans les berges, en particulier les points de rupture antérieurs,
- par de l'eau provenant éventuellement du ruisellement sur les bords de la vallée.

L'écoulement est alors particulièrement rapide

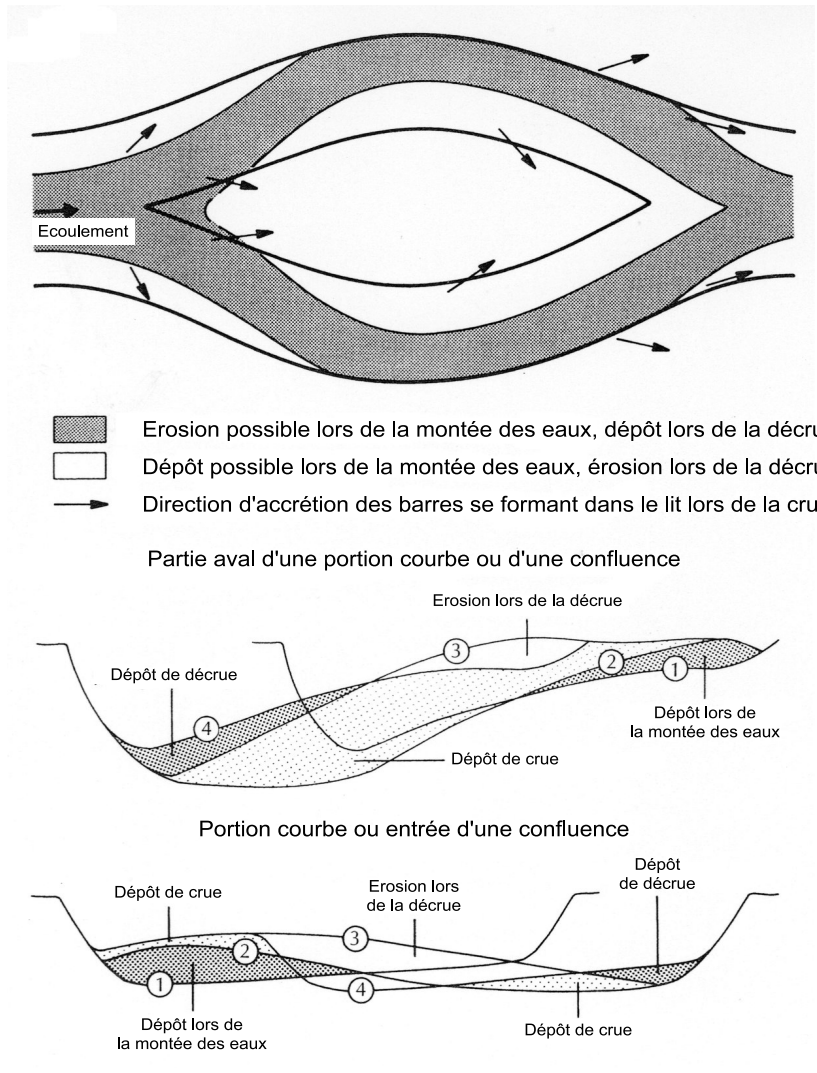


FIG. 2.8 – Lieux théoriques d'érosion et de dépôt lors d'une crue, Bridge (1993)  
 Sur les figures du bas sont dessinées les géométries successives de la section transverse du chenal : 1 - lors des basses-eaux, 2 - lors de la crue, 3 - lors de la crue après érosion de la rive et dépôt d'une barre d'accrétion, 4 - après la décrue.

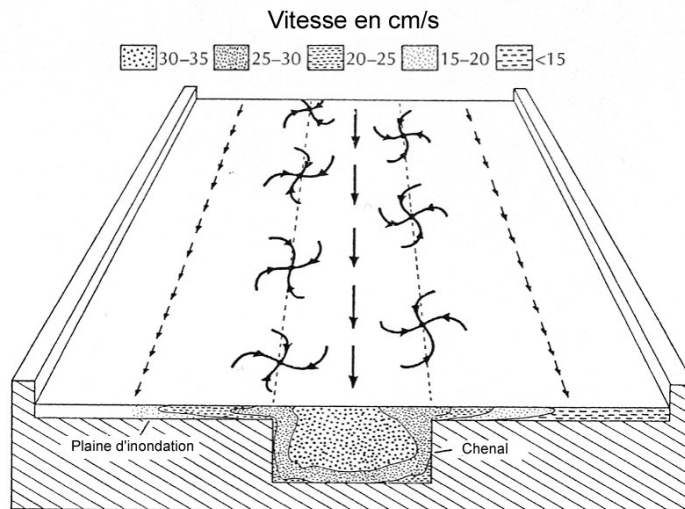


FIG. 2.9 – Modèle d'écoulement sur une plaine d'inondation à partir d'études en laboratoire, Sellin (1964)

et puissant dans le chenal car il ne perd pas ou peu d'énergie dans les échanges avec la plaine d'inondation. Il est alors particulièrement érosif et destructeur allant parfois jusqu'à rompre ses berges.

Ensuite, lorsque l'eau recouvre complètement le chenal et la plaine environnante, l'écoulement reste beaucoup plus rapide dans le chenal que dans la plaine même s'il a perdu de sa puissance par rapport à la phase de montée des eaux. L'écoulement chenalisé transmet en effet une partie de son énergie à l'écoulement non confiné par le biais de tourbillons se produisant au niveau des berges<sup>12</sup> (cf. fig. 2.9 p. 27). La décroissance de vitesse se produit essentiellement à la transition entre ces deux zones puis s'atténue avec l'éloignement au chenal. Cependant, pour des crues relativement exceptionnelles, la vitesse de l'écoulement peut demeurer relativement élevée sur la plaine aux environs du chenal [Shiono (1998)].

Enfin, lors de la phase de décrue, l'eau se retire progressivement de la plaine d'inondation, soit par infiltration soit par des chenaux naturels la drainant. De petits lacs ou des marécages

plus ou moins permanents peuvent apparaître et combler les points bas de la plaine lorsque le climat le permet.

La source du matériel déposé sur la plaine d'inondation est essentiellement le chenal principal ou les éventuels chenaux entaillant les berges. Une partie peut également provenir des bords de la vallée ou de la plaine elle-même et être redistribuée. La fraction grossière de ce matériel est transportée comme charge de fond sous la forme de rides et se dépose aux abords du chenal principal. La part essentielle de l'apport sédimentaire provient d'un transport convectif s'effectuant dans les tourbillons aux bords du chenal. Ce matériel est alors transporté en suspension et réparti sur l'ensemble de la plaine.

Plusieurs auteurs proposent un modèle de diffusion de la zone très concentrée au dessus du chenal principal vers les zones peu concentrées loin de cette zone de mélange [Pizzuto (1987); Nicholas et Walling (1997)]. Bien que satisfaisante loin du chenal [Pizzuto (1987)], une telle approche est nécessairement incomplète car elle ne peut rendre compte des phénomènes de transport convectif et de charriage sur le fond. De

<sup>12</sup>Bien que ces tourbillons aient un effet sur l'écoulement principal dans le chenal, ils affectent peu l'écoulement secondaire caractéristique de la structure hélicoïdale de l'écoulement dans les cours sinueux (cf. § 2.3.1 p. 23 et fig. 2.10 p. 28).

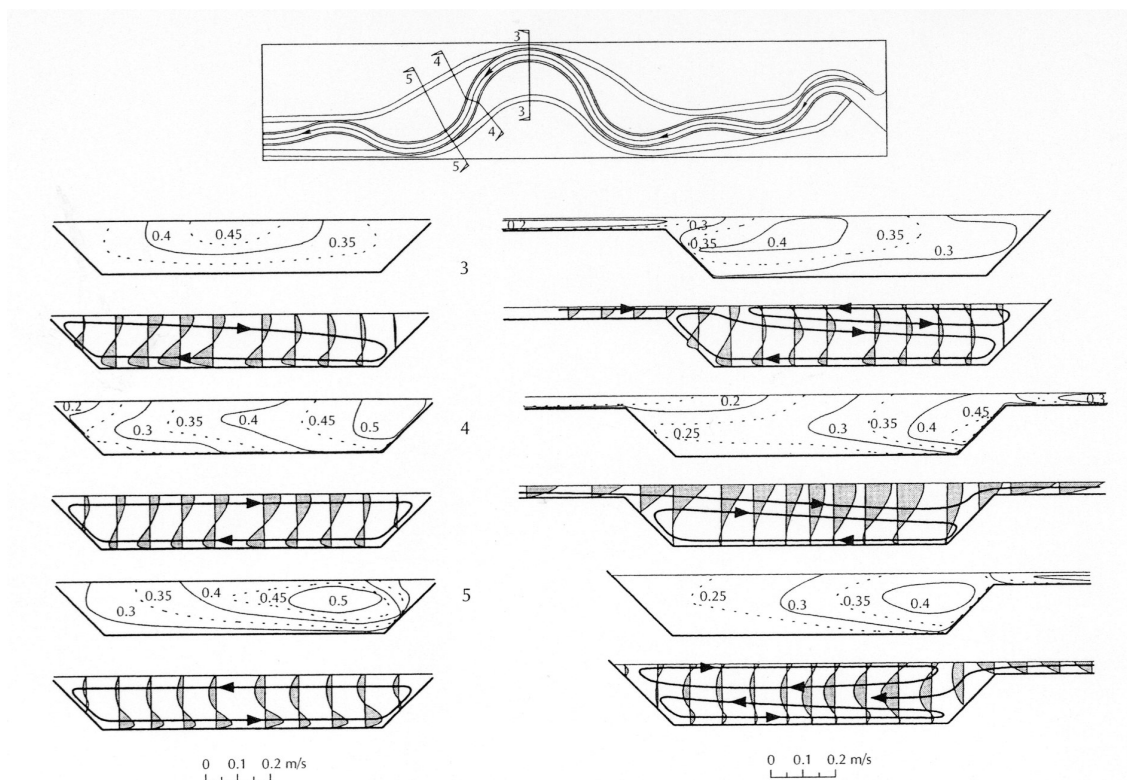


FIG. 2.10 – Étude de l'interaction entre l'écoulement chenalisé et l'écoulement sur sa plaine d'inondation, Naish et Sellin (1996)

plus, la topographie de la plaine, loin du chenal l'alimentant, peut également générer des zones d'accélération de l'écoulement conduisant à une

modification importante du transport sédimentaire, voire à des zones d'érosion [Bridge (2003)].

### 2.3.3.2 Ruptures de berges

A la faveur des crues de haute énergie les rives du chenal peuvent céder, une crevasse entaillant les levées et une partie de la berge. Suivant la force et la charge sédimentaire des crues suivantes, cette crevasse peut servir de déversoir à une partie de la charge liquide et solide sur la plaine d'inondation en contrebas (*cf.* § 2.3.3.1 p. 25, § 2.4.2.2 p. 34 et § 2.4.2.3 p. 34). La crevasse peut ainsi [Slingerland et Smith (1998)] :

- être comblée progressivement,
- être entretenue et remplir une fonction de "trop-plein",
- contribuer à l'installation d'un réseau de type anastomosé,
- détourner totalement le cours du chenal principal.

Indépendamment de son évolution ultérieure, la crevasse assure toujours momentanément la fonction de "trop-plein", déversant périodiquement une partie de la charge sédimentaire dans un environnement analogue à un petit delta. Lorsque le cours du chenal principal est détourné on parle d'avulsion.

Les mécanismes favorisant la rupture des berges et *in fine* l'avulsion sont multiples. De manière générale, ils peuvent être vu comme le franchissement d'une barrière d'énergie. Pour franchir ce seuil, les événements hydrauliques successifs auront un effet cumulatif et la crue la plus forte ne produira pas forcément la rupture [Jones et Schumm (1999)].

De plus, les crues ne sont pas les seuls événements favorisant le passage de cette barrière.

Un accroissement de la quantité d'eau, donc de l'énergie disponible, peut être favorisé par un barrage en aval : végétation barrant le cours de la rivière, constructions animales... De même, la barrière d'énergie peut également être abaissée en certains points, les berges étant fragilisées par le passage répété d'animaux [McCarthy et al. (1992)] ou simplement à la faveur des migrations latérales par la rencontre d'un chenal abandonné [Bridge (2003)].

Les processus d'avulsion ont une influence importante sur l'architecture des dépôts à l'échelle géologique, car ils déplacent brusquement la localisation de la ceinture de chenaux conduisant à l'abandon de l'ancienne ceinture. Suivant la taille de la nouvelle portion de chenal résultant d'une avulsion, Heller et Paola (1996) proposent d'employer les terminologies d'avulsion locale ou régionale.

Malgré une forte composante aléatoire, on retient classiquement deux paramètres comme ayant une influence prépondérante sur la fréquence des avulsions. Il s'agit du débit de crue et du rapport entre pente le long du chenal et pente transverse [Mackey et Bridge (1995); Bridge (2003)]. En effet, la capacité de transport sédimentaire est une fonction croissante du produit entre débit de crue et pente de l'écoulement. Ainsi, lorsque cette capacité devient plus importante sur les flancs du chenal qu'à l'intérieur du lit, l'érosion, la formation de crevasses et leur approfondissement sont favorisés et conduisent finalement à l'avulsion.

Après avoir présenté les différents processus permettant le transport et le dépôt de matériel en milieu fluvial nous présentons les structures sédimentaires qui en résultent.

## 2.4 Structures sédimentaires

Les différentes structures sédimentaires à l'intérieur du lit fluvial et sur la plaine alluviale se construisent au gré des apports sédimentaires dont les crues successives sont la principale source. Elles sont caractérisées par différentes échelles spatiales et temporelles, les phénomènes brefs étant souvent associés à de forts taux de sédimentation instantanés. Ainsi, les macroformes de taille hectométriques se construisent généralement sur des périodes assez longues, souvent séculaires et sont façonnées par plusieurs événements hydrologiques. Au contraire, les microformes qui les constituent sont de tailles millimétriques à centimétriques et peuvent être construites en une seule crue. Certaines de ces

formes sont rapidement érodées par les crues suivantes alors que les autres sont préservées, en fonction des déplacements de l'écoulement principal.

Nous reprenons en la simplifiant la classification de Miall (1996). Elle repose sur la division entre les structures formées à l'intérieur du lit fluvial, là où se trouvent principalement les corps ayant les meilleures propriétés réservoirs et les structures déposées à l'extérieur de ce dernier, souvent de granulométrie plus fine, formées sur des périodes de temps plus longues, par des événements moins fréquents et dont les propriétés réservoirs sont médiocres.

### 2.4.1 Structures du lit fluvial

Dans le lit fluvial les structures sédimentaires connaissent une histoire complexe faite d'une succession de remaniements et d'érosions (*cf.* § 2.3.2 p. 25).

#### 2.4.1.1 Corps chenalisés

L'identification de corps chenalisés dans des séries sédimentaires d'origine fluviale ne paraît pas *priori* un apport important pour leur compréhension. Cependant, ces structures peuvent présenter des géométries complexes et s'imbriquer les unes dans les autres. Il est alors utile de distinguer certaines surfaces d'érosion majeures, bases de ces formes chenalisées, qui serviront à découper la série en plusieurs unités architecturales.

La géométrie des corps chenalisés est souvent caractérisée par une hauteur maximale et le rapport à sa largeur. Si elle est mesurable, on peut également évaluer sa sinuosité. La hauteur peut donner une indication de la profondeur de l'ancien système fluvial [Bridge et Tye (2000)]. Cependant il n'existe pas de relations simples. En effet, comme le système fluvial peut se développer verticalement, par aggradation, ou latéralement, par accrétion, la géométrie des corps gréseux résultants n'est pas directement reliée aux dimensions du système fluvial. De plus, la base de ces corps n'est pas toujours clairement identifiable, soit en raison d'une trop grande extension latérale, soit en raison de pentes très faibles.

Le remplissage des corps chenalisés peut être le résultat de la construction de macroformes soit par accrétion latérale ou aval soit par aggradation progressive. Dans ce dernier cas, on observe souvent une décroissance granulométrique vers le sommet, reflétant l'abandon progressif du chenal et la diminution de la capacité de l'écoulement. En revanche, si l'abandon est rapide, comme lors d'un recoupement de méandre, on observe un remplissage essentiellement constitué de fines apportées par les crues de débordements ultérieures. Dans les deux cas, on trouve souvent à la base de ces corps chenalisés un lit constitué de particules assez grossières, ainsi que des masses glissées pouvant provenir de l'effondrement des berges.

Les travaux de Cowan (1991) ont montré que des formes érosives d'épaisseur métrique et de largeur hectométrique auparavant identifiées à des corps chenalisés devaient en fait être interprétées comme des surcreusements locaux d'un corps beaucoup plus grand. Ces dépressions sont souvent le produit de l'action de gigantesques tourbillons, en particulier à la confluence de deux

chenaux. Leur remplissage se fait généralement par piégeage de la charge de fond. Il présente à

la fois des figures d'accrétion et d'aggradation.

#### 2.4.1.2 Barres

La fraction grossière du matériel transporté dans le lit fluvial s'ammalgame souvent sous la forme de barres imbriquées de manière complexe. Leur genèse est en effet fortement affectée par les processus de charriage. On peut les trouver soit sous la forme de barres au milieu du lit fluvial soit déposées contre ses rives. On les appelle barres de convexité (*point bars*), barres alternes (*alternate bars*) ou barres latérales (*lateral bars*) suivant leur forme et leur position. Cette classification n'est à nouveau pas exclusive et ces unités peuvent évoluer d'un type à l'autre du fait des variations de débit ou de la migration latérale du lit fluvial.

Lorsqu'elles sont constituées de galets, ces constructions peuvent se présenter :

- soit sous la forme de lentilles diffuses peu épaisses, de l'ordre de quelques éléments, qui se déplacent sur le fond du chenal,
- soit s'amalgamer pour créer des mésoformes de dimensions métriques voir des macroformes de dimensions hectométriques.

De minces lits argileux déposés lors de la décrue peuvent marquer les différentes phases de construction.

Avec les barres d'accrétion latérale, les barres d'accrétion aval constituent des macroformes résultant de processus d'accrétion à l'intérieur de chenaux relativement importants à lit sableux. Ces barres ont des dimensions généralement de l'ordre de celles du chenal les contenant. Leur hauteur peut alors donner une première indication de la profondeur de ce dernier [Bridge et Tye (2000)]. Elles présentent souvent des géométries internes complexes et ce n'est que relativement récemment que de telles formes à grande échelle ont été clairement identifiées et décrites dans des séries fluviales anciennes. Ces structures revêtent une importance toute particulière dans l'industrie pétrolière car elles sont souvent constituées de sables propres qui au cours de la diagenèse se transforment en des corps gréseux avec d'excellentes propriétés réservoirs.

Cependant, les structures hélicoïdales décrites

précédemment (*cf.* 2.3.1) sont très importantes et en déplaçant latéralement du sédiment dans le lit, elles peuvent construire des accumulations conséquentes de matériels. On parle alors d'accrétion latérale. Les processus d'accrétion aval et latérale à l'intérieur du lit conduisent à la formation de barres constituées de la fraction grossière du matériel transporté par la rivière : sable, galets...

La principale caractéristique des barres d'accrétion aval est de présenter des assemblages de formes sédimentaires dues à l'action du courant, orientées vers l'aval du cours d'eau et liées génétiquement par des surfaces plus ou moins marquées de reprise de la sédimentation, ou de réactivation avec des marques d'érosion. En fait la plupart de ces corps gréseux résultent d'une combinaison d'aggradation et d'accrétion : les formes sédimentaires progressant sur le lit fluvial sont piégées à leur sommet ou sur la partie haute de leurs flancs alors qu'un enfouissement rapide et la préservation de formes superposées se produit sur les flancs progressant ainsi vers l'aval. La composante d'accrétion peut parfois être très difficile à mettre en évidence.

Dans les rivières sinueuses, les volumes érodés sur les berges externes sont en général comparables aux volumes déposés sur les rives internes et conduisent au développement à l'intérieur des méandres de macroformes sableuses composites attachées au rivage, (barres de convexité ou *point-bars*, *cf.* § 2.3.2 p. 25). Traditionnellement leur surface supérieure émergeant à la faveur des crues et décrues est marquée par la progression de rides marquant cette alternance (*epsilon cross-bedding*) et parfois par le dépôt de particules plus fines (*cf.* fig. 2.8 p. 26). Leur structure interne est très variable car elle dépend essentiellement de la géométrie du chenal et de la charge sédimentaire. En particulier la décroissance granulométrique des barres de convexité vers le haut n'est pas toujours observée [Bridge et Jarvis (1976); Miall (1996)]. Leur largeur est typiquement de l'ordre des deux-tiers de celle du chenal les contenant. A l'aide d'un modèle infor-

matique, simulant plusieurs configurations possibles de méandres, Willis (1989, 1993) a montré que l'évolution des méandres pouvait conduire à de subtiles mais importantes différences d'architecture interne de ces barres de convexité. Les surfaces inclinées vers l'aval peuvent alors pré-

senter sur certaines sections des similarités avec les unités d'accrétion aval et être sources d'ambiguïté. Une étude détaillée de ces dépôts dans des séries anciennes a été réalisée par Diaz-Molina (1993)<sup>13</sup>.

#### 2.4.1.3 Dépôts gravitaires

Ces corps, contrairement aux précédents, ne sont pas construits et correspondent à des événements relativement brefs. Ils se présentent souvent sous la forme de lobes hétéroclites, étroits et allongés pouvant comporter plusieurs niveaux

intercalés avec des épanchements de sable ou de gravier. Leur base est typiquement non érosive et irrégulière car ils correspondent au remplissage en masse d'une topographie préexistante. Leur épaisseur peut-être métrique.

#### 2.4.1.4 Dépôts tabulaires

Les unités gréseuses étendues présentant des stratifications tabulaires planes sont souvent interprétées comme le produit de crues particulièrement brèves et violentes (*flash-floods*) dans des conditions de haut régime. L'épaisseur de

ces corps est typiquement décimétrique voir métrique. Ils présentent une base très légèrement érosive et sont généralement recouverts par des dépôts de granulométrie décroissante, indicateurs de la décrue et du vannage des sédiments.

#### 2.4.1.5 Microformes sableuses

A plus petite échelle, de nombreuses figures sédimentaires peuvent se former sur le fond des rivières dont la charge dominante est sableuse. Elles sont présentes dans de nombreux environnements fluviaux et peuvent se combiner pour former des assemblages verticaux variés [Collinson (1996)]. Ces agencements, lorsqu'ils ne se présentent pas dans un contexte d'accrétion représentent souvent des trains de formes sédimentaires migrant sur le fond du chenal et s'étant accumulées à la faveur d'une aggradation verticale. Gibling et Rust (1990) définissent un taux d'aggradation (*aggradation index*) qui permette de quantifier l'importance relative de ces deux

styles d'accumulations sédimentaires .

L'empilement vertical de ces différentes figures reflète les changements du régime fluvial à différentes échelles temporelles. Certaines sont dues à la simple alternance de crues et de décrues. D'autres peuvent refléter un changement de la capacité de transport du système fluvial sur plusieurs années, conduisant à la réduction de la tranche d'eau et à une aggradation liée au dépôt de la charge sableuse. Toutefois, ces différents assemblages peuvent être très similaires. La formulation d'interprétations correctes demande alors une analyse poussée de l'architecture des dépôts et du contexte paléohydrologique.

---

<sup>13</sup>Voir aussi Diaz-Molina et al. (1995).

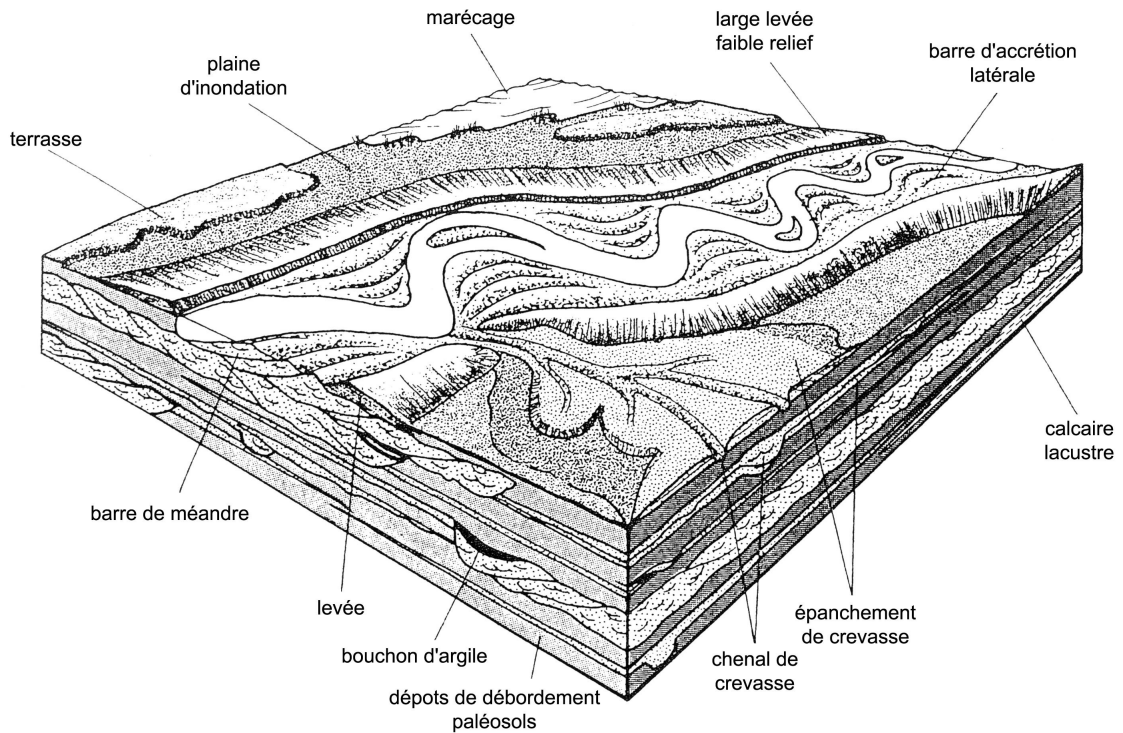


FIG. 2.11 – Principaux dépôts dans un système fluvial, Platt et Keller (1992)

#### 2.4.2 Structures sédimentaires hors du lit fluvial

Les dépôts hors du lit fluvial peuvent être sommairement classés en trois grandes catégories suivant leurs granulométries et leur modes de formation :

- Les dépôts ayant une granulométrie moyenne sont généralement formés lors de débordements entraînant hors du chenal principal une part de la charge de fond. Ils comprennent les dépôts de levées, les remplissages de chenaux de crevasse et les épanchements de crevasse.
- Les dépôts ayant une granulométrie fine sont formés dans des environnements de basse énergie. Il s'agit soit de dépôts de débordements distaux, soit de dépôts sur les points bas de la plaine d'inondation dans des zones humides où l'on peut trouver des plans d'eau

plus ou moins permanents.

- Les dépôts d'origine biochimique sont issus de la formation des sols (pédogenèse), de l'évaporation ou de l'activité organique, en particulier dans les zones humides évoquées précédemment.

Il est communément admis que les rivières en tresses à charge plus ou moins grossière, ont tendance à occuper une grande part de la plaine alluviale, au détriment de ces faciès distaux [Miall (1996)]. Cependant cette thèse n'est pas accréditée par tous les auteurs [Bridge (2003)]. En effet, la part relative de ces deux types de dépôts est largement influencée par les apports sédimentaires et la vitesse de subsidence du bassin [Bentham et al. (1992, 1993)].

#### 2.4.2.1 Dépôts de levées

Les levées se constituent aux abords du chenal au gré de crues de débordement successives (*cf.* § 2.3.3.2 p. 29). Elles sont généralement constituées d'unités silteuses ou gréseuses présentant de petites figures de courants et organisées suivant une certaine rythmicité, correspondant aux

crues successives. Ces figures sont souvent détruites par la colonisation de la végétation et des bioturbations. Leur épaisseur peut être jusqu'à décamétrique et leur extension latérale kilométrique.

#### 2.4.2.2 Chenaux de crevasse

Lors de la rupture de la berge d'un chenal, le flux liquide et solide peut être partiellement détourné vers un point bas adjacent à travers une crevasse. Selon la taille du système considéré, les chenaux résultant de tels événements peuvent avoir des tailles métriques à hectométriques. Ils sont généralement érosifs et incisent les levées ou les dépôts de débordement antérieurs. L'incision peut éventuellement atteindre le niveau du lit du chenal principal. Les crues successives peuvent alors former un réseau de distributaires

de type deltaïque qui devient de moins en moins profond lorsque l'on s'éloigne du chenal principal (*cf.* § 2.3.3.2 p. 29).

Le remplissage de ces chenaux génère souvent des corps gréseux, disposés en rubans interconnectés pouvant présenter des stratifications entrecroisées en auges ou des rides de courant. Leur granulométrie est généralement moyenne et dépend essentiellement de la profondeur de la crevasse qui va déterminer la part sédimentaire prélevée dans le chenal principal.

#### 2.4.2.3 Lobes de crevasse

Les lobes ou épanchements de crevasse se forment :

- par débordements du chenal principal et des chenaux de crevasse,
- par apport de charge sédimentaire en contrebas du chenal principal lorsque le flux n'est plus confiné.

Les lobes de crevasse sont des corps lenticulaires souvent allongés, qui peuvent atteindre une extension kilométrique. Leur épaisseur est généralement d'ordre métrique et ils sont fréquemment recoupés par les chenaux de crevasse les alimen-

tant. A leur extrémité on observe une transition avec les faciès de débordement du chenal principal. Leur granulométrie est celle de sables fins à moyens. Elle décroît sensiblement vers leur extrémité. Ils présentent de nombreuses figures de courant, des traces de végétation et des bioturbations. De nombreuses surfaces de réactivation érosives marquent l'absence temporaire de dépôt et témoignent d'une formation progressive par des apports sédimentaires ponctuels. Si la crevasse est progressivement bouchée, le haut de l'épanchement peut présenter une granulométrie décroissante et d'abondantes bioturbations.

#### 2.4.2.4 Dépôts de débordement

Lors des crues importantes, l'eau envahit toute la plaine alluviale et transporte loin du chenal principal un matériel essentiellement fin, constitué pour une grande partie du matériel en suspension dans le chenal principal (*cf.* § 2.3.3.1 p. 25). Ces dépôts occasionnels présentent une stratification plane et une très grande exten-

sion latérale, souvent d'ordre kilométrique. Les variations lithologiques à l'intérieur de ces faciès peuvent cependant être importantes reflétant les variations des processus de dépôts. Sur les parties émergées la sédimentation est intermittente et peut parfois être marquée par des figures éoliennes. Dans les points bas envahis par

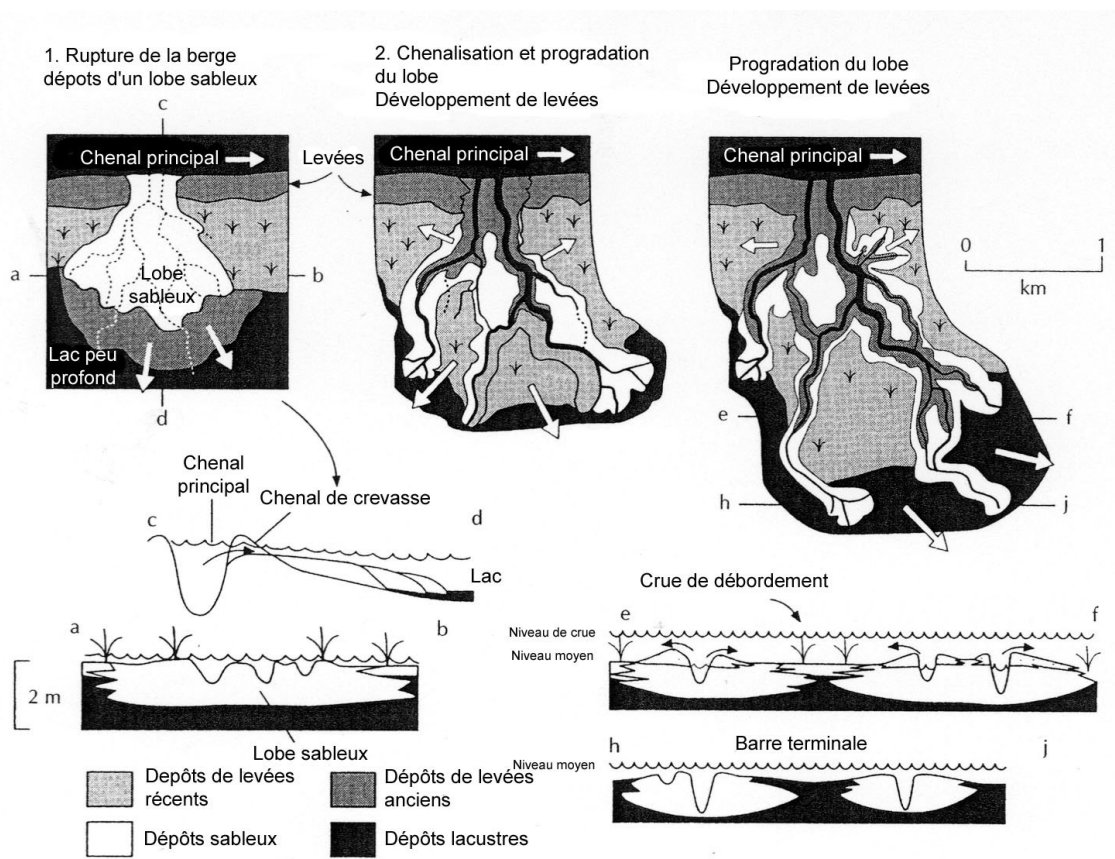


FIG. 2.12 – Évolution d'un épanchement de crevasse, Perez-Alurcea et Smith (1999)

les eaux (étangs, marais...) on peut observer un dépôt continu de matériel par décantation. Dans les environnements où l'alternance entre saisons

ou périodes humides et saisons ou périodes plus sèches est marquée, on peut également observer des traces de pédogenèse plus ou moins franches.

#### 2.4.2.5 Remplissage de chenaux abandonnés

Fréquemment les chenaux abandonnés restent ennoyés pendant de longues périodes sous la forme de lacs ou d'étangs. Dans ces eaux tranquilles, se déposent lors des crues, des particules d'argile provenant de la charge en suspension du chenal principal. Les corps sédimentaires résultants, nommés bouchons d'argile (*mud-plugs*) ont une granulométrie fine et forment des ensembles cohésifs, difficilement érodables. Ils délimitent ainsi la ceinture de chenaux en contrai-

gnant la migration latérale du système [Sun et al. (1996)]. Ils peuvent contenir une part non négligeable de dépôts d'origine organique, le lac se transformant en tourbière (*cf.* 2.4.2.6).

Ces bouchons d'argiles ont une grande importance dans l'industrie pétrolière car ils constituent de véritables barrières de perméabilité qui, soit isolent les corps réservoirs les uns des autres, soit permettent de transformer des corps gréseux sous-jacents en pièges à hydrocarbures.

#### 2.4.2.6 Sédimentation biochimique

Cette dernière catégorie comprend les paléosols, les dépôts organiques et les évaporites. Les deux premiers types ont une importance considérable car ils peuvent fournir des indications précieuses sur l'équilibre entre subsidence et sédimentation [Miall (1996)]. Leur grande extension latérale peut être le signe de modifications hydrologiques majeures et le reflet de changements de processus de dépôts et d'espace disponible pour la préservation du sédiment (espace d'accommodation). Ils sont ainsi d'excellents candidats pour identifier les surfaces stratigraphiques significatives, en particulier en terme de séquences de dépôts.

Les charbons se présentent souvent dans les séries continentales sous la forme de lits intercalés avec des dépôts de levées ou de crevasse. Ils peuvent ainsi contenir un taux variable de débris clastiques ou cendres (*ash content*) provenant de l'enneigement des tourbières par les dépôts de débordement. Ces dépôts d'origine organique présentent également des taux de compaction très importants. Ils peuvent influencer la morphologie de la plaine d'inondation par compaction différentielle et contrôler ainsi la localisation du système fluvial. Ryer et Langer (1980) ont montré que la formation du charbon à partir de la tourbe par évacuation d'eau pouvait conduire à

des taux de compaction<sup>14</sup> de 1,4 à 30 avec une valeur médiane de 7. Enfin, suivant la position de la nappe sous-fluviale on peut distinguer différents environnements de dépôts qui conduiront à différents types de charbons : les marais relativement bien drainés, caractérisés par la présence d'arbres, les marais faiblement drainés et les environnements ennoyés.

La variabilité latérale des paléosols dans les séries continentales reflète fréquemment des variations de conditions de drainage et de hauteur de la nappe sous-fluviale. Ces variations peuvent être liées à la topographie de la plaine alluviale, avec des reliefs bien drainés, ou à l'éloignement du système fluvial alimentant la nappe [Collinson (1996)]. Les différences entre paléosols sont principalement dues à la fréquence et à l'intensité des apports sédimentaires par les crues de débordement qui contrôlent leur temps de maturation. Atkinson (1986) a montré que les variations de pédofaciès pouvaient être liées à des changements régionaux du style fluvial, conséquences de la subsidence tectonique du bassin. Les paléosols peuvent également être utilisés pour estimer les taux de sédimentation sur la plaine alluviale [Wright (1990); Kraus et Bown (1993); Bialkowski (2003)].

<sup>14</sup>Voir aussi Nadon (1998) qui relativise toutefois ces données en mettant en évidence des taux importants de compaction avant enfouissement.

Les éléments constitutifs de l'architecture des dépôts fluviaux ainsi que les processus qui en sont à l'origine étant connus, l'outil informatique permet de fournir des modèles de réservoirs tridimensionnels pour mieux visualiser l'agencement des corps. Les modèles déterministes ont un apport explicatif alors que les modèles stochastiques permettent d'explorer rapidement plusieurs possibilités.



## Chapitre 3

# Modélisation

Pour reproduire la grande diversité et complexité des dépôts fluviatiles deux approches sont classiquement adoptées. D'une part les modèles dits génétiques sont des modèles déterministes dans le sens où ils prédisent la nature et l'emplacement des dépôts une fois donné un jeu de paramètres initiaux. Aucune connaissance de la distribution et de la nature des dépôts n'est nécessaire *a priori*, en revanche les lois physiques à l'origine des ces dépôts doivent être connues afin de reproduire fidèlement les processus les

engendrant<sup>1</sup>. D'autre part, les modèles stochastiques considèrent les dépôts observés comme la réalisation d'un processus stochastique caractérisé par sa loi spatio-temporelle. Ils s'attachent alors à reproduire statistiquement une distribution de faciès ou de propriétés dans l'espace en négligeant totalement les processus les ayant engendrés. Une bonne connaissance des dépôts *a priori* est donc nécessaire afin d'estimer de manière fiable les différents moments statistiques et de choisir un modèle approprié.

### 3.1 Modèles déterministes

Les facteurs contrôlant l'architecture des dépôts fluviaux sont classiquement répartis en deux catégories. D'une part les contrôles à grande échelle spatiale ou temporelle comme l'activité tectonique, le climat ou l'eustasie sont qualifiés d'allocycliques. Ils sont indépendants de la partie du bassin considérée et sont sensiblement les mêmes d'un bassin sédimentaire à un autre pour une région donnée. Par opposition on définit les paramètres autocycliques comme liés à des événements ou des processus très localisés spatialement et temporellement. Il s'agira par exemple des crues saisonnières, de la topographie locale résultant du déplacement du lit fluvial et qui influencera en retour les mécanismes de migration et d'avulsion du lit... Une fois encore cette distinction est ambiguë et paramètres allocycliques et autocycliques sont parfois fortement liés. Leurs interactions sont souvent com-

plexes et il est fréquemment difficile d'en isoler un comme étant déterminant [Ethridge et al. (1999)].

L'avantage essentiel des modèles déterministes réside dans l'interprétation génétique de leurs résultats en termes de processus sédimentaires et leurs apports en termes de compréhension de ces systèmes. Ils produisent également des architectures sédimentaires beaucoup plus réalistes que leurs homologues stochastiques qui se contentent de reproduire une certaine hétérogénéité de faciès. Leur principal inconvénient reste cependant la difficulté à les conditionner de manière satisfaisante à des données de terrains ou de subsurface [Clemetsen et al. (1990); North (1996); Anderson (1997)]. En particulier l'estimation et l'inférence des paramètres de ces modèles déterministes à partir des données disponibles dans le domaine opérationnel (inversion) est d'autant

---

<sup>1</sup>D'où la terminologie anglaise de *process-based models*.

plus difficile qu'il existe souvent une incompatibilité de nature entre les paramètres dynamiques

du modèle et la géométrie et les propriétés physiques des dépôts observés.

### 3.1.1 Modèles de remplissage de bassin

Plusieurs modèles existent pour reproduire l'architecture du remplissage des bassins sédimentaires. Ces modèles travaillent sur des mailles essentiellement décakilométriques et reposent sur l'utilisation de lois hydrauliques simplifiées pour simuler les processus gouvernant la formation des dépôts clastiques. A l'échelle du bassin, les paramètres concernant les processus autocycliques de ces modèles sont considérés constants ou d'influence négligeable. De plus le transport sédimentaire est essentiellement reproduit à l'aide d'un mécanisme diffusif [Tetzlaff et Harbaugh (1989); Granjeon et Joseph (1999); Marr et al. (2000)]. Par exemple, dans le modèle Dionisos [Granjeon et Joseph (1999)], la charge sé-

dimentaire est proportionnelle à la pente du bassin, au débit permettant d'estimer la capacité de l'écoulement, à la nature du substrat et à un coefficient de diffusion censé modéliser l'efficacité de ce transport. Bien que très simples, ces modèles reproduisent correctement les concepts de stratigraphie séquentielle et permettent d'appréhender la géométrie générale du bassin en étant suffisamment prédictifs. Ils ne reproduisent toutefois pas correctement les corps sédimentaires et leurs agencement relatifs à l'échelle du réservoir pétrolier. Des modèles spécifiques doivent être utilisés pour simuler le remplissage de chacune des mailles de ces modèles.

### 3.1.2 Modèles géologiques

Dans le but de prédire la distribution et la géométrie de corps chenalisés gréseux au sein de dépôts de plaine d'inondation, les premiers modèles d'architecture des dépôts fluviaux à l'échelle du réservoir pétrolier furent essentiellement qualitatifs et bidimensionnels [Allen (1965)]. Avec la meilleure compréhension des systèmes fluviaux, résultant en particulier de la modélisation analogique, et avec l'avènement de la modélisation numérique, plusieurs hypothèses formulées auparavant se révélèrent erronées.

L'un des premiers modèles quantitatifs d'architecture alluvial est celui de Leeder (1978). Ce modèle simule la formation d'un transect perpendiculaire à la vallée, constitué de blocs gréseux représentant les ceintures de chenaux au milieu des dépôts de plaine d'inondation. Il est à l'origine de toute une génération de modèles de plus en plus perfectionnés et intégrant de nombreux paramètres contrôlant la formation des dépôts comme par exemple le taux d'aggradation, la fréquence d'avulsion ou les effets sur la topographie locale du lit majeur, dus à la compaction et à l'abandon des chenaux [Bridge et Leeder (1979)]. Ces modèles ont été validés sur des données provenant de formations fluviales

tertiaires ou quaternaires [Leeder et al. (1996); Mack et Leeder (1998); Peakall (1998); Törnqvist et Bridge (2002)].

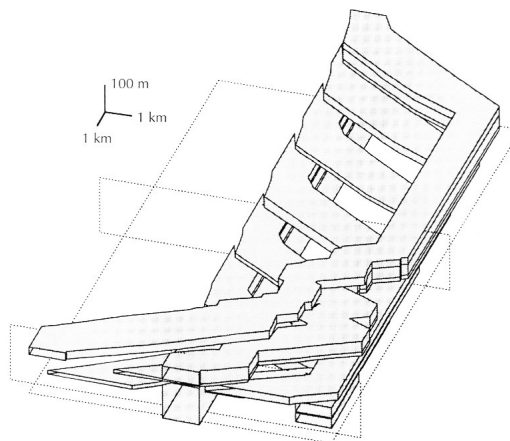


FIG. 3.1 – Modèle de Mackey et Bridge (1995)

Comme ces modèles bidimensionnels ne peuvent pas reproduire correctement les variations des dépôts le long d'une vallée ainsi que la localisation et l'orientation des ceintures des che-

naux, une extension tridimensionnelle en a été proposée lors de la dernière décennie (*cf.* fig. 3.1) [Bridge et Mackey (1993); Mackey et Bridge (1995)]. Les principales améliorations proviennent de la prise en compte de variations de taux de sédimentation, de la compaction des dépôts et de l'influence tectonique. Ces modèles comportent également un modèle paramétrique d'avulsion intégrant des fréquences variables et une prise en compte de la topographie locale. Bien qu'ils reproduisent assez fidèlement les observations et aient un fort potentiel explicatif, le fait qu'ils ne modélisent pas la formation et le remplissage de la ceinture de chenaux reste un handicap pour l'utilisation de ces modèles dans l'industrie pétrolière [Clemetsen et al. (1990)]. L'hétérogénéité interne et la géométrie exacte de la ceinture de chenaux sont en effet très importantes pour estimer les propriétés réservoirs de ces dépôts.

Le point commun des modèles précédents est la formulation mathématique de concepts et connaissances géologiques sans pour autant in-

tégrer réellement la modélisation physique des processus sédimentaires. Le principal axe de recherche est aujourd'hui le développement de modèles physiques de formation de dépôts fluviaux [Kolterman et Gorelick (1996); North (1996); Paola (2000)]. Ils sont basés sur une résolution des équations fondamentales de transport de l'eau et du sédiment et proviennent essentiellement des champs de l'ingénierie civile ou de la géomorphologie, dans lesquels ils servent à traiter des problèmes simples d'inondation, d'érosion et de dépôt sur les rivières actuelles. En sédimentologie, ils ont été utilisés pour expliquer la granulométrie décroissante vers l'aval du lit fluvial et le tri à grand échelle à l'origine de gisements de minerais précieux comme l'or ou les diamants [van Niekerk et al. (1992); Vogel et al. (1992); Bentham et al. (1992); Robinson et Slingerland (1998)]. A part quelques essais [Gross et Small (1998)], ils n'ont pas été utilisés pour simuler l'architecture complexe des séries sédimentaires fluviales sur des temps géologiques [Bridge (2003)].

### 3.1.3 Modèles hydrauliques et géomorphologiques

Au cours des dernières décennies, des progrès considérables ont été réalisés dans la compréhension des systèmes fluviaux méandriformes. Aussi bien en ce qui concerne la géométrie de ces systèmes que leur évolution dynamique. La linéarisation des équations principales de l'hydraulique a permis de retrouver théoriquement des formules empiriques et d'expliquer le développement des méandres à partir d'un cours initial rectiligne [Callander (1969); Engelund et Skovgaard (1973); Engelund (1974); Ikeda et al. (1981); Parker et al. (1982); Blondeaux et Seminara (1985); Odgaard (1989a,b); Johansson et Parker (1989a,c,b)]. La principale hypothèse à la base des modèles d'évolution géométrique spatio-temporelle d'un rivière méandriforme, obtenus à partir de ces approches, est l'existence d'une relation linéaire entre la migration latérale du système et la vitesse de l'écoulement contre les rives. Cette vitesse est obtenue à partir d'une étude des perturbations de l'écoulement dues à l'existence d'une sinuosité caractérisée par la courbure de la ligne médiane du chenal considéré. Par rapport à des approches

précédentes basées sur la minimisation de la dissipation d'énergie [Chang (1984, 1988)], l'existence d'un chemin le plus probable [von Shelling (1950); Langbein et Leopold (1966)] ou d'autres modèles heuristiques [Surkan (1969); Thakur et Scheidegger (1968); Thakur (1970); Ferguson (1976)] ces théories linéaires ne reposent pas seulement sur des bases physiques plus solides mais elles sont également stables pour simuler l'évolution d'une rivière sur de longues périodes de temps.

L'approche initiale d'Ikeda et al. (1981) a été le point de départ de nombreux modèles, chacun s'attachant à décrire de manière plus précise l'un ou l'autre des processus impliqués dans l'évolution du système. Une amélioration particulièrement importante est due à Johansson et Parker (1989b,c) qui ont expliqué l'origine d'une difficulté à calibrer ce modèle initial sur des rivières réelles, en intégrant une modélisation du courant secondaire. Pour ce faire, ils utilisent une description du profil vertical des vitesses de l'écoulement. Les tests du modèle obtenu sur des rivières actuelles se sont avérés très concluants.

Un modèle de transport sédimentaire a également été proposé pour modéliser les déformations du lit du chenal [Blondeaux et Seminara (1985); Johansson et Parker (1989a)].

La géométrie des rivières méandriformes étant complexe, et de nombreux processus, comme les recouvrements de méandres, étant fortement non linéaires, les simulations numériques ont permis d'appliquer ces théories à l'évolution des systèmes méandriformes sur de longues périodes de temps. Un premier modèle de ce type avait été d'ailleurs proposé par Howard (1984) sur la base de considérations empiriques et heuristiques, modèle qui fournit une expression de la vitesse de migration des rives d'une rivière méandriforme identique à celle prédite par la théorie d'Ikeda et al. (1981). Néanmoins, alors que dans l'approche théorique les paramètres impliqués

ont une signification physique et peuvent par conséquent être calculés, les paramètres obtenus par Howard (1984) doivent être estimés.

Au cours de la dernière décennie de nombreux modules ont été incorporés aux modèles physiques d'évolution de la ligne médiane du chenal. Les variations spatiales d'érodabilité des berges ont été étudiées afin de simuler l'évolution de méandres confinés [Howard (1984)], ou l'influence des dépôts sur la migration du système et la formation d'une ceinture de méandres stable [Howard (1992); Sun et al. (1996)]. Howard (1992, 1996) Howard a également couplé le modèle physique de Johansson et Parker (1989a) avec un modèle simple de sédimentation sur une plaine alluviale. Gross et Small (1998) ont appliqué ce modèle pour la modélisation de séries anciennes.

## 3.2 Modèles probabilistes

Le principal avantage des modèles stochastiques réside dans la relative facilité à les conditionner à des observations d'affleurement ou de subsurface, et à les rendre cohérents avec une connaissance géologique générale du bassin sédimentaire [Clemetsen et al. (1990); North (1996); Doligez et al. (1999)]. Cette efficacité opérationnelle explique la préférence qui leur a souvent été accordée jusque là dans l'industrie pétrolière. Ainsi, la plupart des logiciels commerciaux de modélisation de réservoirs utilisent de telles approches. Cependant, bien que les multiples réalisations

obtenues grâce à ces modèles soient très utiles pour aider à la prise de décision en servant de base à l'estimation de probabilités, chacune d'elles, prise individuellement, manque souvent de cohérence en termes de géologie et n'est souvent qu'un pâle reflet de la réalité. Ainsi, le fait que les processus sédimentaires ne soient pas pris en compte empêche toute interprétation géologique et apporte souvent peu à la compréhension du système étudié. On distingue classiquement deux grandes catégories : les modèles objets et les modèles pixels.

### 3.2.1 Modèles objets



Les modèles objets, ou modèles *booléens*, considèrent chaque corps géologique comme un objet caractérisé par une certaine forme paramétrique et des caractéristiques d'orientation spatiale. Chacun de ces objets possède un point nommé centre. Pour chaque objet modélisé on tire alors au hasard dans l'espace, typiquement suivant un processus de points poissonniens, un point d'implantation, ou germe, sur lequel est positionné le centre de l'objet. Les caractéristiques de forme

FIG. 3.2 – Simulation booléenne  
(<http://www.cg.ensmp.fr>)

et d'orientation de l'objet suivent également des lois fixées. L'approche consiste à peupler l'espace de formes déterminées en respectant une distribution de géométries<sup>2</sup> estimée empiriquement, jusqu'à en obtenir une proportion fixée. Plusieurs règles arbitraires de répulsion ou d'attraction entre les corps simulés doivent être employées afin de produire des simulations réalistes. À l'instar des modèles géologiques, les premiers modèles étaient bidimensionnels et repro-

duisaient des sections transverses à l'axe d'une vallée. L'extension à des distributions tridimensionnelles [Deutch et L. (1996); Holden et al. (1998); Lantuejoul (2003)] est essentielle pour les applications industrielles mais peut encore soulever des problèmes théoriques, en particulier lorsque l'agencement des corps est complexe et non stationnaire [Benito Garcia Morales et al. (2003)].

### 3.2.2 Modèles pixels

Dans les modèles pixels, le réservoir est discrétisé sur une grille régulière et on cherche à affecter à chaque maille ou "pixel" de la grille des paramètres qui peuvent être continus comme les propriétés pétrophysiques du réservoir sur le volume considéré, ou catégoriels comme un faciès lithologique parmi un catalogue prédéterminé. On caractérise *a priori* la structure spatiale de ces paramètres, pour que la simulation remplissant la grille respecte *in fine* une loi spatiale et honore éventuellement les données disponibles pour certaines des mailles. Des approches variées existent, qu'il s'agisse de simulations de simples variables gaussiennes, de méthodes de krigeage d'indicatrice, ou des méthodes plurigaussiennes [Dubrule (1989); Deutch et Cockerham (1994); Kolterman et Gorelick (1996); North (1996); Armstrong et al. (2003)]. Le point commun de ces méthodes consiste à faire dépendre la valeur d'une variable en un point des valeurs de cette variable, ou d'un ensemble de variables, au voisinage de ce point. Cette dépendance est caractérisée à l'aide d'outils comme le variogramme

pour les méthodes géostatistiques. Cependant, la phase de caractérisation et de choix du modèle probabiliste est souvent délicate. Il est par exemple parfois difficile d'inférer une structure à trois dimensions lorsque l'échantillonnage disponible a été fait dans une direction préférentielle, typiquement le long de puits verticaux.

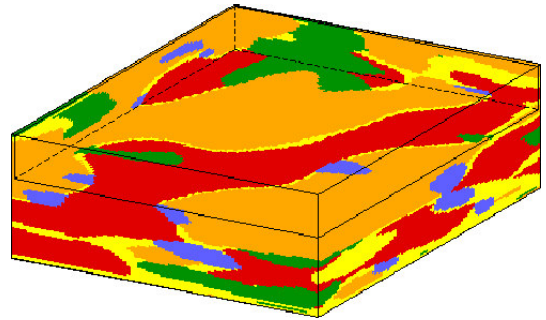


FIG. 3.3 – Simulation plurigaussienne, Armstrong et al. (2003) (<http://www.cg.ensmp.fr>)

### 3.3 Vers des modèles mixtes

Les principaux inconvénients des deux grandes approches dans la modélisation de réservoirs fluviaux peuvent être palliés en recourant à des modèles hybrides [Kolterman et Gorelick (1996); North (1996)]. Un premier pas vers cette nouvelle génération de modèle est l'utilisation des résultats de simulations déterministes pour estimer les lois statistiques utilisées dans les modèles stochastiques, que ce soit directement ou

indirectement en utilisant ces résultats sous la forme de *training images* par exemple [Caers (2000)]. Au cours des dernières années, plusieurs approches ont cependant associé explicitement les différentes approches.

Ainsi, dans le cadre d'un modèle de type objet dans lequel l'implémentation spatiale et la forme de chenaux, sont tirées de manière aléatoire, Vi-seur et al. (2001) ont proposé de déformer les

<sup>2</sup>Typiquement largeur et épaisseur des corps réservoirs.

chenaux obtenus suivant la normale à leur ligne médiane afin de respecter des données de puits ou des informations sismiques. Cette déformation est similaire à celle des lois d'évolution obtenues à partir de modèles physiques [Sun et al. (1996)] et permet de donner aux chenaux simulés des formes plus réalistes (*cf.* fig. 3.4). Cependant, ni les dépôts dus à la migration du chenal, ni les dépôts dus aux crues de débordement ne sont pris en compte. Il n'existe pas non plus de lien génétique entre les différentes unités obtenues.

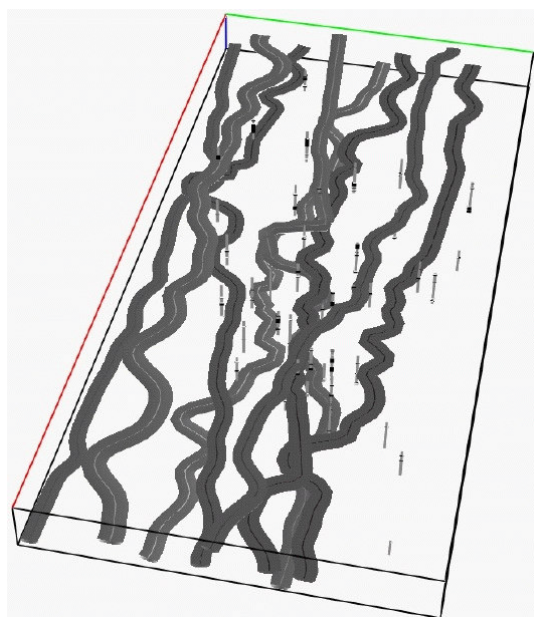


FIG. 3.4 – Modèle de Viseur et al. (2001)

Parallèlement Teles (1999)<sup>3</sup> a proposé un modèle beaucoup plus génétique visant à reproduire la géométrie et la composition des unités sédimentaires composant la plaine alluviale d'un système méandrique. Il s'agit d'un modèle multi-agent dans lequel la rivière charrie un stock d'entités représentant à la fois la charge sédimentaire et la capacité érosive de l'écoulement. Ce stock peut être considéré comme une valeur représentative de l'énergie de l'écoulement de la rivière. L'évolution du système est alors déterminée à partir de ce stock et de la simulation de processus respectant des lois empiriques pour la migration latérale des méandres [Hickin et Nanson

(1975)] et leur migration vers l'aval [Schumm et al. (1987)]. Les dépôts de débordement sont simulés par un dépôt aléatoire de fines sur la plaine d'inondation. Ce type de modélisation, bien que ne faisant pas directement intervenir les lois de l'hydrodynamique, permet de simuler le creusement d'une vallée ou l'élargissement d'un fleuve et produits des simulations réalistes (*cf.* fig. 3.5).

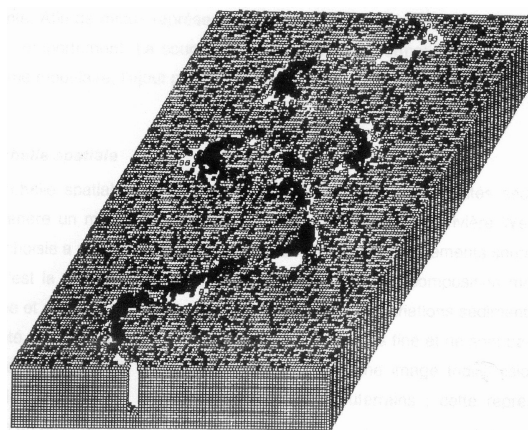


FIG. 3.5 – Modèle de Teles (1999)

Enfin, des tentatives de conditionnement des modèles géologiques évoqués précédemment (*cf.* § 3.1.2 p. 40) ont été effectuées récemment avec plus ou moins de succès. Le modèle tridimensionnel de Mackey et Bridge (1995) a été conditionné à quelques données de puits par une méthode d'essai-erreur. Le conditionnement reste assez long à obtenir et n'a pu être effectué que pour une épaisseur faible de dépôt. Karssenberg et al. (2001) misent sur les rapides progrès de l'informatique pour rendre cette approche opérationnelle. Le modèle d'Howard (1996) a également été utilisé par Oliver (2002) pour conditionner la localisation de chenaux méandriques à des données de puits à l'aide d'une méthode de maximum de vraisemblance. Bien que selon les propres termes de l'auteur, les résultats obtenus manquent de réalisme, il considère que ces simulations peuvent permettre d'estimer de manière efficace l'interconnection entre les différents corps réservoirs.

<sup>3</sup>Voir aussi Teles et al. (1998).

### 3.4 Approche adoptée

Le but de ce travail est de proposer un modèle pour la simulation d'un type particulier de réservoir en milieu fluvial, les réservoirs chenalés méandriformes. Notre objectif principal est de combiner deux approches. Une approche déterministe d'abord, avec l'utilisation d'équations d'hydrodynamique fluviale pour capturer une part de la réalité des phénomènes modélisés. Une approche stochastique ensuite, afin d'obtenir plusieurs réalisations d'un même objet et surtout proposer des pistes pour conditionner ces simulations à partir de données acquises dans la phase d'exploration : données aux puits, sismique... L'enjeu consiste à :

- pallier le manque de réalisme des modèles purement stochastiques sans pour autant perdre leur souplesse d'utilisation,
- renoncer à la complexité des modèles purement déterministes, tout en en conservant leur apport descriptif et explicatif.

Enfin, notre modélisation se limitera à l'échelle du réservoir pétrolier, ceci tant spatialement que temporellement. Les phénomènes dont l'échelle d'observation est celle du bassin sédimentaire ne seront donc pas toujours considérés comme ayant une importance prépondérante.

Nous reprenons les travaux de l'école de pensée baptisée *Minnesota School*<sup>4</sup> par Parker et Johansson (1989) qui se place dans la lignée des travaux d'Ikeda et al. (1981) qu'elles ont sensiblement améliorés par la suite. Nous proposons en annexe une expression générale des équations de l'hydraulique dans un repère curviligne adapté à la modélisation des écoulements chenalés. A partir de cette expression nous proposons une équation d'évolution de la ligne médiane d'un chenal sinueux retenant l'influence de la topographie du lit fluvial en nous inspirant des travaux de [Sun et al. (2001c)].

Nous montrons ensuite comment l'équation obtenue permet de modéliser l'évolution d'un chenal sur de longues période de temps à partir de paramètres physiques et géométriques. La géométrie de la ligne médiane du chenal étant connue, et des constantes physiques étant choi-

sies - accélération de la gravité, coefficients de friction, ... - les paramètres essentiels à déterminer sont le débit liquide transitant dans le chenal et sa largeur. Ce dernier paramètre peut d'ailleurs être obtenu en fonction du débit liquide à partir de régressions linéaires effectuées sur des systèmes modernes. Nous complétons ce modèle d'évolution de la ligne médiane précédent par un modèle de faciès afin de construire effectivement les dépôts engendrés par l'évolution du système fluvial. Notre point de départ est ici le modèle d'Howard (1996) que nous modifions légèrement et complétons par des modèles simples de dépôts de lobes de crevasse, d'avulsion et d'aggradation. Nous proposons également une simulation très simple des dépôts organiques caractérisant souvent les points bas immergés de la plaine d'inondation. Notre modèle, constitué d'un modèle d'évolution de la ligne médiane et d'un module d'habillage en faciès de cette dernière permet alors d'obtenir rapidement des simulations tridimensionnelles réalistes de l'architecture fluviale des séries chenalées méandriformes.

Parmi la hiérarchie des hétérogénéités présentées sur la figure 1.6 p. 14 nous nous situons au niveau "b" alors que la majeure partie des modèles déterministes se situent au niveau "a". Parmi les processus évoqués à la section 2.3 p. 40 nous tenons compte de la migration latérale des chenaux, des crues de débordement et des processus d'avulsion. La période de retour du débit à pleins bords (*cf.* § 2.1.1.1 p. 15) nous servira d'unité temporelle et tous les événements modélisés sont considéré comme moyennés à l'échelle de cette durée. Par exemple la crue et la décrue ne sont pas simulées explicitement. Parmi les dépôts présentés à la section 2.4 p. 30 nous modélisons les corps chenalés, les barres sableuses de convexité, le remplissage des méandres abandonnés, les dépôts de débordement, les épanchements de crevasse et les dépôt organiques de point-bas. En revanche, bien que l'agencement des microformes sédimentaires ait une influence importante sur les propriétés pétrophysiques des

<sup>4</sup>Cette école s'est développée autour du Saint Anthony Falls Laboratory, de l'université du Minnesota (U.S.A.), qui constitue un des plus gros laboratoires hydrauliques du monde et dont des membres influents sont entre autres Gary Parker ou Chris Paola (<http://www.safll.umn.edu>).

dépôts, nous n'en tiendrons pas compte (niveau d'hétérogénéité "c", fig. 1.6 p. 14).

Enfin, nous montrons comment conditionner la localisation de la ceinture de méandres et donc des corps réservoirs en introduisant une composante stochastique sur la migration latérale du chenal. Nous étudions ce conditionnement en utilisant des courbes de proportions verti-

cales afin de caractériser la répartition spatiale des dépôts. Nous proposons également une façon simple de conditionner la localisation du chenal à des données de puits et mettons en évidence les différents problèmes posés par le conditionnement. Ceux-ci restent aujourd'hui à résoudre afin d'obtenir un modèle opérationnel dans l'industrie pétrolière.

## Conclusions

*Les progrès technologiques des dernières décennies ont mis en évidence la complexité des séries fluviales, permis de mieux la comprendre et ont facilité l'exploitation des ressources qu'elles renferment. Reproduire cette complexité à l'échelle d'un réservoir pétrolier nécessite la compréhension et la prise en compte des processus sédimentaires l'engendrant. Cependant, toute modélisation opérationnelle doit comporter un volet stochastique afin de pouvoir proposer plusieurs alternatives possibles, ceci pour expliquer une réalité que l'on ne connaît toujours que trop partiellement. L'approche présentée à la suite propose une voie vers une conciliation des deux approches.*



Deuxième partie

Construction d'un modèle



## Résumé

*Nous montrons comment appliquer le modèle décrivant la structure des écoulements, développé en annexe, pour simuler l'évolution spatiale de la ligne médiane. Nous décrivons un modèle simple de migration latérale et d'aggradation verticale. Le nombre de paramètres de ce modèle peut être restreint à la géométrie du chenal, supposée connue en tout point, et au débit fluide y transitant. Nous appliquons ce modèle pour simuler l'évolution d'un chenal assimilé à sa ligne médiane. L'influence de perturbations aléatoires sur le court terme est illustré puis les différentes configurations en résultant sur le long terme. Ensuite, nous étudions l'évolution du profil longitudinal du chenal et l'influence d'un basculement latéral du chenal sur son évolution. Le modèle d'évolution spatiale est ensuite couplée à un modèle de faciès afin d'habiller l'ossature que constitue la ligne médiane du chenal. On peut ainsi simuler l'architecture tridimensionnelle de dépôts respectant une chronologie et dont l'organisation est cohérente à chaque instant avec la position du chenal. Quelques paramètres influencent la réponse du système fluvial et permettent d'obtenir plusieurs géométries de dépôts. Enfin, nous présentons la simulation d'un cycle d'incision puis d'un cycle de remplissage de vallée incisée.*



# Chapitre 4

## Evolution spatiale

### 4.1 Equation d'évolution

#### 4.1.1 Structure de l'écoulement

##### 4.1.1.1 Notations

Étant donné un chenal, on note (*cf.* fig. 4.2 p. 54 et fig. 4.1 p. 53) :

- $\Gamma$  sa ligne médiane,
- $s$  l'abscisse curviligne le long de  $\Gamma$ ,
- $M_\Gamma(s)$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse curviligne  $s$ ,
- $\mathbf{e}_n(s)$  le vecteur unitaire horizontal normal à la ligne médiane en  $M_\Gamma$ ,
- $\theta(s)$  une mesure algébrique et continue de l'angle que fait  $\mathbf{e}_n$  avec une direction fixe dans un plan horizontal  $\mathcal{P}_z$ ,
- $b(s)$  la demi largeur du chenal, mesurée dans  $\mathcal{P}_z$ , le long de  $\mathbf{e}_n$ .

Dans  $\mathcal{P}_z$  la section transverse  $\sigma_s$  du chenal au point  $M_\Gamma$  est donc l'ensemble des points :

$$\sigma_s = \{M_\Gamma + n\mathbf{e}_n \mid n \in [-b; b]\}$$

##### 4.1.1.2 Vitesses d'écoulement

Les écoulements en rivière naturelle étant peu profonds par rapport à leur largeur, la structure de l'écoulement peut être considérée localement plane. En un point  $M_\Gamma + n\mathbf{e}_n$  de  $\sigma_s$  on peut alors considérer que la vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}$  est une fonction de l'abscisse curviligne  $s$  et de

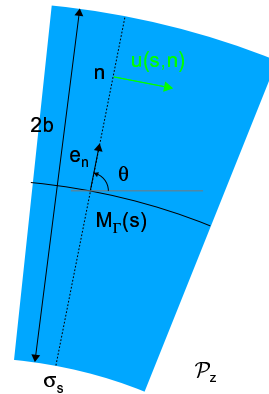


FIG. 4.1 – Grandeurs définies

Le chenal est en bleu, sa ligne médiane  $\Gamma$  est en noir, la section transverse  $\sigma_s$  est en pointillés noirs.

la position sur la section transverse  $n$ . On écrit alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(s, n)$$

que l'on décompose en :

$$\mathbf{u}(s, n) = \mathbf{u}_0(s) + \mathbf{u}_\Psi(s, n) \quad (4.1)$$

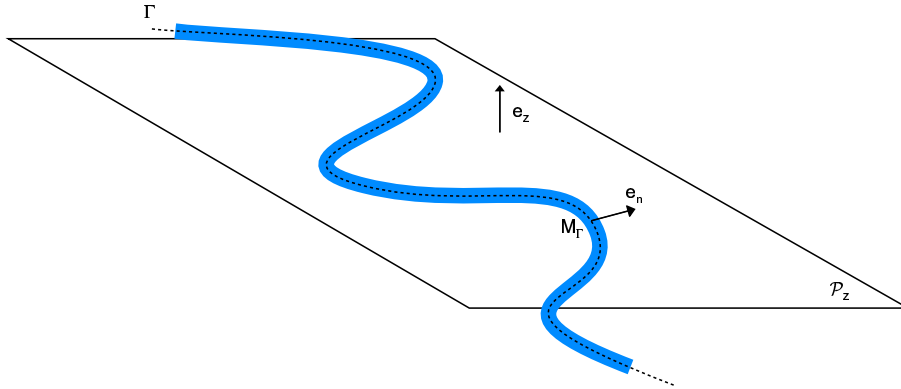


FIG. 4.2 – Repère utilisé

Le chenal est en bleu, sa ligne médiane  $\Gamma$ , est en pointillés noirs.

où :

- $\mathbf{u}_0$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans le chenal sur une section transverse  $\sigma_s$ ,
- $\Psi$  désigne un paramètre d'échelle caractérisant la géométrie locale du chenal.

La structure de l'écoulement peut alors être caractérisée par :

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{u} dn \quad (4.2)$$

et le déport de  $\mathbf{u}$ , noté  $\mathcal{D}$  et défini par :

$$\mathcal{D}(s) = \frac{1}{2b\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_s} \int_{-b}^b n\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_s dn$$

$$\mathcal{D}(s) = \frac{1}{2b\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_s} \int_{-b}^b n\mathbf{u}_\Psi \cdot \mathbf{e}_s dn \quad (4.3)$$

$\mathcal{D}$  caractérise la structure de l'écoulement et l'écart<sup>1</sup> du lieu du maximum des vitesses de l'écoulement à l'axe de la ligne médiane du chenal [Johanesson et Parker (1989c); Imran et al. (1999)].

Soit :

$$\mathbf{u}_\Psi^b(s) = \mathbf{u}_\Psi(s, b) \quad (4.4)$$

la perturbation locale de la vitesse de l'écoulement contre la rive gauche du chenal. Les travaux de De Vriend (1981) montrent que, pour les écoulements sinueux de largeur constante, la relation :

$$\mathbf{u}_\Psi(s, b) = n\mathbf{u}_\Psi^b(s) \quad (4.5)$$

est une excellente approximation du terme  $\mathbf{u}_\Psi$  quantifiant les variations de  $\mathbf{u}$  au premier ordre en  $\Psi$ . Dans ce cas, il existe donc une relation simple entre la vitesse de l'écoulement contre la rive  $\mathbf{u}_\Psi$  et le déport  $\mathcal{D}$ , soit :

$$\mathcal{D} = \frac{b^2}{3u_0} \mathbf{u}_\Psi^b \quad (4.6)$$

L'excès de vitesse de l'écoulement contre les rives  $\mathbf{u}_\Psi^b$  est une caractéristique de l'action de l'écoulement contre son encaissant au niveau des berges. On peut donc s'attendre à ce que  $u_\Psi^b$  soit une mesure de l'érosion des berges du chenal.  $\mathcal{D}$  caractérise en revanche la façon dont le matériel

<sup>1</sup>D'après la définition 4.3, le déport  $\mathcal{D}$  est homogène à une longueur. On peut faire une analogie risquée en considérant que  $\mathcal{D}$  est l'espérance de la position aléatoire du maximum de transport de matériel  $N \in [-b, b]$  - celle-ci étant reliée à la vitesse de l'écoulement en un point - dont la densité de probabilité serait :

$$f(n) = \frac{\mathbf{u}_\Psi \cdot \mathbf{e}_s}{2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_s} \mathbf{1}_{[-1,1]} \left( \frac{n}{b} \right)$$

c'est à dire que la probabilité de transport de matériel est d'autant plus forte que la perturbation sur la vitesse de l'écoulement est élevée.

provenant de cette érosion est redistribué dans le chenal. Le chenal ne se déplacera que si la redistribution du matériel permet au lit de s'adapter. On peut donc s'attendre à ce que  $\mathcal{D}$  soit une mesure du déplacement latéral de la ligne médiane.

Si l'on considère par exemple un écoulement dont le champ des vitesses est symétrique par rapport à sa ligne médiane, le dépôt de  $\mathbf{u}$  sera nul :

$$\mathcal{D} = 0$$

#### 4.1.1.3 Modélisation des systèmes méandriformes

Le modèle développé permet de retenir les faibles variations de largeur du chenal. Or l'observation des systèmes méandriformes actuels montre que leur largeur mesurée lors d'une crue à pleins bords est spatialement quasiment constante [Ikeda et al. (1981); Howard (1996); Sun (1998)]. Par la suite tous les systèmes considérés seront donc de largeur constante, ce qui nous conduit à poser :

$$\partial_s b = 0$$

La prise en compte des variations de largeur de manière réaliste nécessiterait en particulier un modèle plus précis de la structure du fond du

Cependant pour un tel écoulement la vitesse de l'écoulement contre les rives :

$$\mathbf{u}_0(s) + \mathbf{u}_\Psi(s, b) = \mathbf{u}_0(s) + \mathbf{u}_\Psi(s, -b)$$

peut être très forte. Si le substrat est uniforme, l'écoulement étant symétrique, le chenal adaptera sa largeur sans pour autant migrer latéralement.

chenal et la modélisation des perturbations de la vitesse de l'écoulement suivant  $\mathbf{e}_n$  introduites par cette structure<sup>2</sup>. Ces considérations sont discutées en annexe.

Les rivières méandriformes font typiquement partie du domaine de validité de la relation 4.6. Les premiers modèles développés relient la migration latérale du chenal à la perturbation de la vitesse de l'écoulement contre les rives  $u_\Psi^b$  [Ikeda et al. (1981)]. Dans le but de conserver la plus grande généralité nous préférons par la suite relier la migration latérale de la ligne médiane au dépôt de la vitesse  $\mathcal{D}$ .

#### 4.1.1.4 Équations reliant la structure de l'écoulement à la géométrie du chenal

En nous basant sur les travaux d'Ikeda et al. (1981) et les nombreux travaux en découlant, en particulier ceux de Johansson et Parker (1989c,b); Sun et al. (1996); Sun (1998); Imran et al. (1999); Sun et al. (2001c) nous proposons en annexe une linéarisation des équations exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de la matière qui permet d'exprimer  $u_0$  et  $u_\Psi$  en fonction des paramètres hydrauliques et géométriques de l'écoulement. Sous la condition que les variations de largeur<sup>3</sup> du chenal soient suffisamment faibles pour ne pas introduire de perturbations indépendantes de  $\Psi$  sur la composante normale de la vitesse de l'écoulement suivant  $\mathbf{e}_n$ , alors  $\mathbf{u}_0$  est tangent à  $\Gamma$  en  $M_\Gamma$ . Ces

équations sont :

$$\alpha_0 u_0^s \partial_s u_0^s + \beta_0 u_0^{s3} = \delta_0 \quad (4.7)$$

et :

$$\alpha \partial_s \mathcal{D} + \beta \mathcal{D} = \gamma \partial_s \kappa + \delta \kappa \quad (4.8)$$

où :

- $\alpha_0, \beta_0, \delta_0, \alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des paramètres fonction de l'abscisse curviligne  $s$  et du temps  $t$ , faisant intervenir :
- $Q(t)$  le débit dans le chenal à l'instant  $t$ ,
- $I(s, t)$  la pente le long de la ligne médiane du chenal,
- $B_0(t)$  la moyenne spatiale de la demi-largeur du chenal, ici  $B_0 = b$ ,

<sup>2</sup>On pourra consulter Repetto et al. (2002) qui propose une linéarisation et une solution numérique pour la structure tridimensionnelle des vitesses de l'écoulement.

<sup>3</sup>Cette condition implique également que la largeur soit constante au premier ordre de nos approximations.

- $H_0(t)$  la moyenne spatiale de la profondeur du chenal,
- $C_f$  un coefficient de friction assimilé à une constante,
- $A$  un coefficient assimilé à une constante, caractérisant la géométrie du lit du chenal,
- $A_{sec}$  un coefficient assimilé à une constante, caractérisant l'écoulement secondaire,
- $g$  un coefficient assimilé à une constante, mesurant l'accélération due à la pesanteur,
- $\kappa(s, t) = \partial_s \theta$  est proche<sup>4</sup> de la courbure de la

projection orthogonale de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{P}_z$ , au point image de  $M_\Gamma$  par cette projection.

Les valeurs typiques de certains coefficients en rivière naturelle sont :

- $C_f \approx 0,036$  cf. Sun et al. (1996)
- $A \in [2; 8]$  cf. Johanesson et Parker (1989b,c)
- $A_{sec} \in [2; 8]$  cf. Johanesson et Parker (1989b,c)
- $g \approx 9,8 m \cdot s^{-2}$

## 4.1.2 Déplacements du chenal

### 4.1.2.1 Migration latérale

Tous les cours d'eau naturels ont la potentialité de migrer latéralement, ceci par le simple fait qu'un écoulement chenalisé exerce une contrainte de cisaillement sur son encaissant. La migration latérale du système fluvial est alors due à cette contrainte qui conduit à l'érosion progressive d'une ou des deux berges du chenal. Cependant, les vitesses de retrait des rives présentent de grandes disparités. Elles peuvent être conséquentes sur des échelles de temps très faibles : le Rio Grande lors d'une crue peut migrer latéralement de plusieurs centaines de mètres [Mack et Leeder (1998)]. Certains cours d'eau, tel l'Okavango sur sa partie basse McCarthy et al. (1992), peuvent au contraire demeurer particulièrement stables sur des échelles de temps historiques voire géologiques.

Bien que de nombreuses incertitudes demeurent en ce qui concerne les processus gouvernant l'érosion des rives des rivières naturelles [Lawler et al. (1997)], Howard (1992) propose quatre principales contraintes influençant la vitesse de ce phénomène :

- la vitesse de dépôt sur la berge opposée à la berge érodée ;
- la capacité du courant à évacuer le matériel résultant de l'érosion ;
- la capacité du courant à arracher le matériel de la rive - abrasion mécanique ;
- la vitesse d'altération de la rive (*weathering*

*rate*) diminuant sa cohésion et facilitant son érosion progressive voire un écroulement par pans entiers.

On pourrait rajouter bien d'autres conditions comme la surélévation de la rive qui augmente la quantité de matériel à évacuer, sa stabilisation lorsqu'elle est colonisée par la ripisylve, le type même de cette ripisylve, le degré d'humidité des terrains la constituant<sup>5</sup>... Bien que les causes soient nombreuses, il s'agit toujours de manière schématique de la capacité de l'écoulement considéré à agir sur un encaissant dont la réponse est conditionnée par tous les processus évoqués.

En négligeant les termes de pression, la seule énergie fournie par l'écoulement et pouvant servir à l'érosion de la rive est d'origine cinétique<sup>6</sup>. Cette énergie, variable le long d'une même section transversale du chenal, dépend donc de la masse du fluide s'écoulant contre l'encaissant, comprenant une certaine charge sédimentaire, de la vitesse de cet écoulement et de sa structure. La quantité d'énergie disponible est alors proportionnelle au carré de la vitesse de l'écoulement et proportionnelle à la masse du fluide. Or la charge sédimentaire transportée tant en terme quantitatif qu'en terme de structure spatiale est également une fonction de la vitesse et de la structure de l'écoulement. En première approximation, on peut donc ne retenir qu'une dé-

<sup>4</sup>La différence provient du fait que  $s$  est l'abscisse curviligne le long de  $\Gamma$  et non le long du projeté de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{P}_z$ .

<sup>5</sup>Les rives humides étant plus facilement érodables [Micheli et Kirchner (2002)].

<sup>6</sup>Cette énergie est dissipée contre les bords et surtout sur le fond de la rivière par les forces de frottements et les forces de mises en mouvement du matériel constituant le lit (contraintes de cisaillement, cf. § 2.2.3.2 p. 22).

pendance de l'érosion des rives en fonction de la vitesse de l'écoulement et de sa structure.

#### 4.1.2.2 Accommodation et aggradation verticale

Le profil d'équilibre d'un cours d'eau est son profil longitudinal, dans une situation d'équilibre hypothétique, pour laquelle les phénomènes d'érosion et de dépôt se compensent exactement. Une notion proche est celle de niveau de base en milieu marin. Elle sert à définir l'espace disponible pour la préservation des sédiments ou espace d'accommodation. Ainsi, certains auteurs étendent la notion de niveau de base pour englober celle de profil d'équilibre en milieu continental<sup>7</sup> [Cross et Lessenger (1998); Catuneanu (2002)].

En posant l'hypothèse que le système fluvial tend à évoluer vers une situation globale d'équilibre, ce concept théorique permet d'expliquer l'architecture des dépôts en terme de position relative du profil réel du cours d'eau par rapport à son profil d'équilibre. Lorsque le profil d'équilibre est en dessous du profil réel le système dépose plus de sédiment qu'il n'en prélève et le système aggrade verticalement. A l'inverse, lorsque le profil réel est au dessus du profil d'équilibre, les phénomènes d'érosion prédo-

minent et le système incise son substrat pour s'ajuster à son profil d'équilibre. Dans sa partie aval, le profil d'équilibre est contraint par le niveau de l'étendue d'eau servant d'exutoire à la charge sédimentaire transitant dans le système fluvial. Cette étendue d'eau, qu'il s'agisse de la mer ou d'un lac, représente également le niveau d'érosion maximal, en dessous duquel tous les sédiments en domaine continental seront préservés.

Les principaux contrôles allocycliques s'exerçant sur la position du profil d'équilibre, car ayant une influence sur les processus sédimentaires, sont d'origine climatique, tectonique et eustatique<sup>8</sup>. Les deux premiers sont prépondérants loin du rivage alors que l'influence de l'eustatisme est grandissante lorsque l'on s'en rapproche [Shanley et al. (1994)]. En terme de contrôles autocycliques, la réponse du système fluvial est toujours contrainte localement par les facteurs contrôlant la répartition et le transport de la charge sédimentaire, en particulier les conditions hydrauliques de l'écoulement.

#### 4.1.3 Vitesses de déplacement

Soit (*cf.* fig. 4.3) :

- $\Gamma(t)$  et  $\Gamma(t')$  les lignes médianes respectives du chenal aux instants  $t$  et  $t'$ ,
- $\mathbf{M}_\Gamma(s, t)$  le vecteur position du point  $M_\Gamma(s, t)$  d'abscisse curviligne  $s$  sur  $\Gamma(t)$ ,
- $\mathbf{N}_\Gamma(s, t, t')$  le vecteur position du point de  $\Gamma(t')$  le plus proche de  $M_\Gamma(s, t)$  et situé dans le plan vertical contenant la droite  $(M_\Gamma(s, t), \mathbf{e}_n(s, t))$ , on a donc  $\mathbf{M}_\Gamma(s, t) = \mathbf{N}_\Gamma(s, t, t)$ .

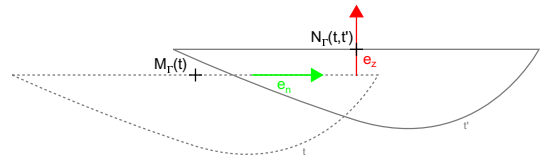


FIG. 4.3 – Vitesses de déplacement de la ligne médiane

Le taux de migration  $\zeta$  est mesuré suivant  $\mathbf{e}_n$ , le taux d'aggradation  $\phi$  est mesuré suivant  $\mathbf{e}_z$ .

<sup>7</sup>Notre définition du profil d'équilibre est à prendre littéralement au sens historique de Le Chatelier c'est à dire comme le postulat de l'existence d'un état d'équilibre du système vers lequel il tendra dès qu'il en est écarté.

<sup>8</sup>L'eustatisme est pris ici dans une acceptation générale comprenant abusivement les variations du niveau de l'étendue d'eau servant d'exutoire.

#### 4.1.3.1 Taux de migration

On appelle vitesse ou taux de migration latérale de la ligne médiane du chenal ou plus simplement migration du chenal, la vitesse  $\zeta$  définie par (cf. fig. 4.3) :

$$\zeta(s, t) = \left( \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathbf{N}_\Gamma(s, t, t') - \mathbf{M}_\Gamma(s, t)}{t' - t} \right) \cdot \mathbf{e}_n$$

A partir des considérations des sections 4.1.2.1 et 4.1.1,  $\zeta$  est écrite :

$$\zeta = \zeta(\mathbf{x}, s, b, \theta, u_0, \mathcal{D}, t)$$

où :

- $\mathbf{x}$  est le vecteur position dans un plan horizontal du projeté orthogonal de  $M_\Gamma$  sur ce plan,
- $b$  est la demi-largeur du chenal au point  $M_\Gamma$ ,
- $u_0$  est la vitesse moyenne de l'écoulement à travers la section passant par  $M_\Gamma$  (cf. eq. 4.2 p. 54),
- $\mathcal{D}$  est le déport de la vitesse de l'écoulement en  $M_\Gamma$  (cf. eq. 4.3 p. 54).

A un instant  $t$ , les variables  $(\mathbf{x}, b, \mathbf{e}_n)$  permettent de localiser la portion de l'encaissant soumis à un écoulement dont la structure est donnée par  $(u_0, \mathcal{D})^9$ .

#### 4.1.3.2 Incision et migration latérale

Le taux de migration latérale tel qu'il a été introduit à la section précédente a été implicitement défini pour un écoulement chenalisé dont les rives ne surplombent pas la surface de l'écoulement. Cependant, lorsqu'une rivière incise une vallée et bute contre les flancs de cette vallée la quantité de matériel à éroder pour migrer latéralement augmente avec l'encaissement de la vallée (cf. fig. 4.4). La migration latérale est ralentie, voire parfois stoppée ce qui conduit à la formation de canyons.

Le taux de migration latérale  $\zeta$  est calculé pour des conditions d'écoulement données. Nous faisons alors l'hypothèse que sous ces conditions le volume de sédiments érodés demeure constant. On note  $h_{fal}$  la hauteur de rive érodée surplombant le chenal et  $H_{max}$  la profondeur maximale du chenal (cf. fig. 4.4). Le taux de migration  $\zeta$  prédit par le modèle d'évolution de la ligne médiane correspond à la situation  $h_{fal} = 0$ . En écrivant la conservation du volume de sédiment érodé, on obtient le nouveau taux de migration  $\zeta_{fal}$  correspondant au cas d'une rive surplombant le chenal [Lancaster (1998)] :

$$\zeta_{fal} = \frac{H_{max}}{H_{max} + h_{fal}} \cdot \zeta$$

Le taux de migration est donc simplement modifié par un coefficient faisant intervenir la hauteur de la falaise surplombant le chenal.

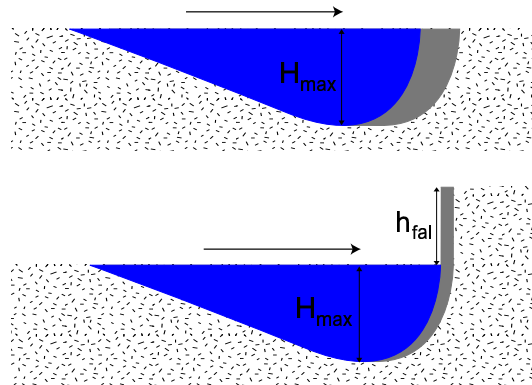


FIG. 4.4 – Modification du coefficient d'érosion dans un contexte d'incision  
La surface grisée représentant le volume érodé reste constante.

<sup>9</sup>Il est clair que la donnée de ces deux quantités n'est pas suffisante pour reconstruire le champ exacte des vitesses de l'écoulement. On considérera cependant qu'elle est suffisante à notre ordre d'approximation.

### 4.1.3.3 Taux d'aggradation

Nous définissons la vitesse ou taux d'aggradation verticale de la ligne médiane du chenal ou plus simplement aggradation du chenal, la vitesse  $\dot{\Phi}$  définie par (cf. fig. 4.3 p. 57) :

$$\dot{\Phi}(s, t) = \left( \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathbf{N}_\Gamma(s, t, t') - \mathbf{M}_\Gamma(s, t)}{t' - t} \right) \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{e}_z$  est un vecteur unitaire orienté vers le haut suivant la verticale locale.

$\dot{\Phi}$  est relié à la puissance de l'écoulement et à la charge sédimentaire du chenal au point  $M_\Gamma$ . Si l'écoulement est trop puissant par rapport à la charge sédimentaire qu'il transporte, il aura tendance à se charger et à inciser son substrat  $\dot{\Phi} < 0$ . Si au contraire la charge sédimentaire est trop importante pour la puissance de l'écoulement, celui-ci perdra de sa charge sédimentaire, ce qui conduit à une aggradation verticale, soit  $\dot{\Phi} > 0$ .

### 4.1.3.4 Discrétisation et équation d'évolution

La ligne médiane du chenal est discrétisée sous la forme d'une suite de points de l'espace :

$$\Gamma(t) \approx (M_i(t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

Si on indice par  $i$  la valeur prise par les grandeurs définies précédemment au point  $M_i$ , on utilise les schémas de différences finies du premier ordre suivants :

$$\partial_s u_{0,i} \approx \frac{u_{0,i+1} - u_{0,i}}{M_i M_{i+1}} \quad (4.10)$$

$$\partial_s \mathcal{D}_i \approx \frac{\mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{D}_i}{M_i M_{i+1}} \quad (4.11)$$

$$M_i(t + \Delta t) \approx M_i(t) + [\zeta_i \mathbf{e}_n + \dot{\Phi}_i \mathbf{e}_z] \Delta t \quad (4.12)$$

pour lesquels  $M_i M_{i+1}$  désigne la distance entre les points  $M_i$  et  $M_{i+1}$ .

A l'aide des schémas 4.10 et 4.11, on résout numériquement les équations 4.7 et 4.8 à l'instant  $t$  pour trouver de manière récursive les valeurs  $(u_{0,i})_{i \in \{1, \dots, m\}}$  et  $(\mathcal{D}_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ . Grâce à ces valeurs, on calcule alors la position de la ligne médiane du chenal à l'instant  $t + \Delta t$ ,  $\Gamma(t) \approx (M_i(t + \Delta t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$  à l'aide du schéma 4.12.

Le pas de temps  $\Delta t$  sera par la suite toujours pris égal à une année. Ainsi une itération de l'algo-

ritme résumé précédemment correspond à la simulation de la migration du système sur une année. La réalité est cependant tout autre<sup>1011</sup> : le chenal migre essentiellement lors des crues possédant une énergie assez forte pour pouvoir façonner le lit (cf. § 2.1.1.1 p. 15).

En fixant un pas de temps de une année, nous ne considérons donc plus le temps lié aux événements hydrologiques mais la réponse moyenne du système à des conditions hydrologiques également considérées comme moyennes sur l'intervalle de temps considéré. Tout se passe comme si le chenal migrerait de manière continue au cours du temps. Nous préférons donc par la suite parler d'itérations du modèle. Une chronologie en année, plutôt qu'en itérations est par contre plus éloquente lorsque l'on s'intéresse aux dépôts liés à l'évolution du système et que l'on cherche à les interpréter géologiquement. Enfin, comme nous nous intéressons davantage à générer des formes réalistes qu'à la position exacte du système au cours du temps et qu'en outre nous introduirons par la suite une composante aléatoire dans son évolution, nous négligeons les artefacts numériques (cf. note 11) tant qu'il ne conduisent pas à des instabilités remarquables.

<sup>10</sup>Si l'on considère par exemple deux crues de même puissance dont la seconde est deux fois plus longue que la première, on peut s'attendre à une réponse du système fluvial plus importante dans le dernier cas. Si la première crue est simulée par un pas de temps  $\Delta t$ , il serait plus rigoureux de simuler la réponse du système à la deuxième crue par deux itérations successives de pas de temps  $\Delta t$ .

<sup>11</sup>Afin d'éviter les artefacts numériques, il serait également plus rigoureux d'employer un pas de temps variable de telle sorte que les positions de la ligne médiane obtenues par deux itérations de pas de temps  $\frac{\Delta t}{2}$  soit sensiblement les mêmes que celles obtenues avec une itération de pas  $\Delta t$ .

#### 4.1.4 Coefficient d'érosion

En première approche on peut considérer que  $\mathcal{D}$  est suffisamment proche de 0 pour pouvoir écrire de manière satisfaisante :

$$\zeta = \zeta|_{\mathcal{D}=0} + \partial_{\mathcal{D}}\zeta|_{\mathcal{D}=0} \quad (4.13)$$

On appellera coefficient d'érosion et on notera  $\Xi$  le nombre<sup>12</sup> :

$$\Xi(\mathbf{x}, s, b, \theta, u_0, t) = \partial_{\mathcal{D}}\zeta|_{\mathcal{D}=0}$$

Conformément aux recommandations de Sun et al. (2001c) nous appelons  $\Xi$  coefficient d'érosion et non érodabilité. En effet, l'érodabilité caractérise les propriétés mécaniques de l'encaissant indépendamment de la structure de l'écoulement qu'on lui applique, alors que  $\Xi$  caractérise la réponse d'un encaissant donné à l'action d'un écoulement donné.

$\zeta|_{\mathcal{D}=0}$  est la migration latérale d'un chenal dont le champ des vitesses d'écoulement a une structure symétrique<sup>13</sup> par rapport à son axe central.

Un tel chenal ne peut migrer latéralement que s'il existe des différences spatiales des caractéristiques mécaniques de son encaissant sur une section transversale. En particulier si  $\zeta$  est indépendant de l'orientation de la section transverse du chenal en  $M_{\Gamma}$  alors on a  $\zeta|_{\mathcal{D}=0} = 0$ . Soit :

$$\partial_{\theta}\zeta = 0 \Rightarrow \zeta|_{\mathcal{D}=0} = 0$$

Dans ce cas, l'équation 4.13 prend la forme simple :

$$\zeta = \Xi\mathcal{D} \quad (4.14)$$

Toujours dans ce cas, si  $u_0$  est indépendante<sup>14</sup> de  $s$ , la valeur  $u_0 = U_0$  étant fixée,  $\Xi$  ne dépend plus que des caractéristiques mécaniques de l'encaissant et le terme d'érodabilité est alors justifié.

#### 4.1.5 Calcul du taux d'aggradation, profil d'équilibre, ajustement du profil longitudinal

Pour simuler une architecture tridimensionnelle, nous devons définir un modèle pour les mouvements verticaux du chenal. Dans cette optique, on suppose l'existence d'un profil d'équilibre vers lequel le chenal tend constamment à évoluer. Si une portion de chenal est en dessous de ce profil d'équilibre on considère qu'il existe de l'espace disponible pour préserver les sédiments et on modélisera l'aggradation de cette portion. A l'inverse, si une portion du chenal est en-dessous du profil d'équilibre on considère que, sur cette portion, le chenal incise sa plaine d'inondation. Le profil d'équilibre est supposé contenu dans un plan parallèle à un plan de référence de la plaine d'inondation caractérisé par une pente longitudinale. La donnée du profil d'équilibre du chenal correspond alors à la donnée d'une altitude  $z_{eq}$  (cf. fig. 4.5 p. 61).

La ligne médiane est supposée discrétisée sous la forme d'une suite de points de l'espace :

$$\Gamma(t) \approx (M_i(t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

On note  $z_i$  l'altitude du point  $M_i$  et  $z_i^{eq}$  l'altitude du profil d'équilibre à la verticale du point  $M_i$ . L'écart total entre la ligne médiane et le profil d'équilibre à un instant donné peut être mesuré de manière discrète par :

$$\Delta_{eq} = \sum_{i=1}^{m-1} |z_i - z_{eq}|$$

Lorsque le chenal est partout en dessous de son profil d'équilibre,  $\Delta_{eq}$  est alors une mesure de l'espace disponible pour la préservation de sédiment.

<sup>12</sup> $\zeta$  étant homogène à une vitesse, d'après les considérations précédentes sur  $\mathcal{D}$  (cf. note 1 page 54), le coefficient d'érosion  $\Xi$  est donc homogène à une fréquence temporelle et se mesure donc en Hertz.

<sup>13</sup>... à l'ordre de nos approximations...

<sup>14</sup>On peut par exemple considérer un chenal dont le profil longitudinal est tel que l'accélération due à la gravité est exactement compensée par la dissipation d'énergie par les forces de frottements (viscosité interne, transport de matériel...). Cette situation correspond d'ailleurs à celle du profil libre d'équilibre que nous avons introduite.

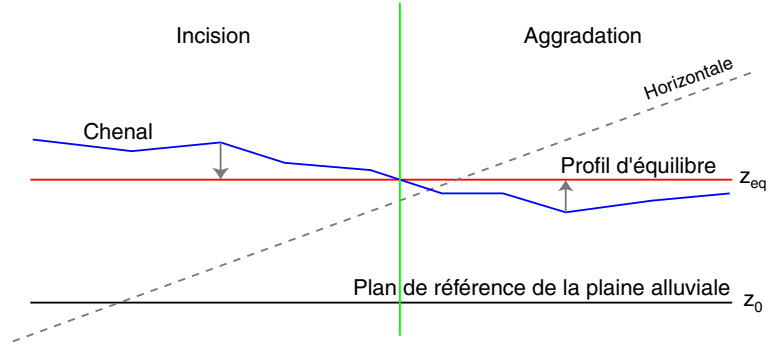


FIG. 4.5 – Profil d'équilibre et définitions associées

On considérera alors qu'un événement hydrologique de durée  $\Delta t$  modifiant le profil longitudinal de la ligne médiane contribue à combler une certaine proportion de cet espace, que ce soit par érosion ou dépôt. Nous notons cette proportion  $\alpha_{eq} \in [0, 1]$  et l'appelons taux d'ajustement. Le taux d'aggradation de chacun des points de la ligne médiane est ensuite calculé suivant leur position par rapport au profil d'équilibre, en les considérant dans l'ordre décroissant de leur dis-

tance au profil d'équilibre, cela jusqu'à ce que le déplacement total corresponde à un espace  $\alpha_{eq} \cdot \Delta_{eq}$  (cf. fig. 4.6 p. 62).

Le taux d'aggradation verticale du point  $M_i$ , tel qu'il est utilisé dans l'équation 4.12 p. 59 est alors :

$$\phi_i(t) = \frac{z_i(t + \Delta t) - z_i(t)}{\Delta t}$$

Par la suite nous appliquons le modèle théorique d'évolution de la ligne médiane. L'algorithme utilisé est celui décrit à la section 4.1.3.4 p. 59. La position de la ligne médiane étant connue par l'intermédiaire de la suite de points  $(M_i(t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$ , et les paramètres physiques  $C_f$ ,  $A$ ,  $A_{sec}$  et  $g$  étant choisis (cf. § 4.1.1.4 p. 55), la donnée du débit  $Q$  et de la largeur du chenal  $2b$  permet de calculer tous les autres paramètres.

## 4.2 Évolution à coefficient d'érosion constant

Dans toute cette partie, le coefficient d'érosion est considéré spatialement constant, on pose donc :

$$\Xi = \Xi_0$$

et le taux de migration latérale est donné de manière simple par l'équation 4.14 soit :

$$\zeta = \Xi_0 \mathcal{D}$$

Nous considérons également que le profil longitudinal du chenal est globalement à l'équilibre :

$$\phi = 0$$

L'évolution des cours d'eau ici assimilés à leur ligne médiane, est simulée en tenant compte des éventuels recouvrements par tangence (cf. § 2.3.2 p. 2.3.2).

<sup>15</sup>L'espacement entre les points de la ligne médiane est supposé constant.

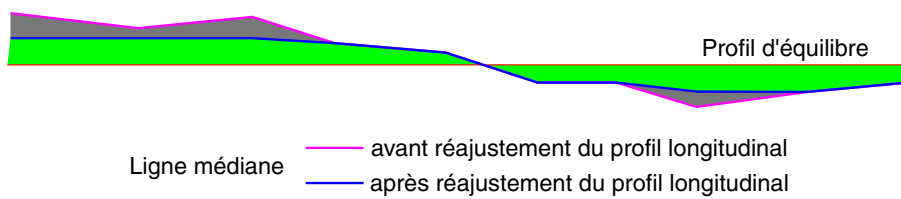


FIG. 4.6 – Modèle d'ajustement du profil longitudinal du chenal  
 L'aire totale<sup>15</sup> des surfaces vertes et grises est proportionnelle à  $\Delta_{eq}$ . Le rapport entre l'aire grisée et cette aire totale est égale à  $\alpha_{eq}$ .

### 4.2.1 Développement des méandres

Nous étudions l'évolution de deux chenaux pris initialement rectilignes avec de très faibles perturbations aléatoires<sup>16</sup>, normalement distribuées, introduites sur leurs lignes médianes suivant  $e_n$ . Tous les paramètres du modèle restent constants par ailleurs. Les équations d'évolution appliquées à différents états initiaux obtenus suivant le même principe nous permettent de dégager quelques observations (*cf.* fig. 4.8 p. 64) :

- L'algorithme est très stable et lisse rapidement les perturbations dont la forme initiale exacte n'est déjà plus perceptible après seulement 50 itérations.
- On retrouve un résultat classique de géomorphologie, à savoir que le chenal développe une longueur d'onde qui dépend essentiellement de ses paramètres géométriques, en particulier de sa largeur [Knighton (1998)]. Ainsi sur la figure 4.9 p. 65 les longueurs d'onde observées sont similaires. Ce résultat peut également être retrouvé à partir d'une analyse fréquentielle des équations d'évolution [Ikeda et al. (1981)].
- Si la forme des méandres se développant est très proche d'un chenal à l'autre, la localisation exacte des méandres dépend fortement de l'état initial. Par exemple, l'orientation du premier méandre - convexité tournée vers la droite ou la gauche de la vallée - ne dépend que de la position des deux premiers points du chenal. Cette localisation exacte des méandres influence la migration à long terme du chenal

(*cf.* §4.2.2 p. 66) en influençant la localisation des recouvrements par tangence.

Vu la similitude des formes se développant, il semble très difficile de pouvoir retrouver l'état initial d'un chenal à partir de son tracé à un instant donné. De plus, chacun des recouvrements par tangence entraîne des non-linéarités et la perte d'une partie du chenal. Ce sont autant d'obstacles à une possible inversion du système.

Très rapidement, les perturbations aléatoires introduites précédemment, imperceptibles à l'échelle du chenal (*cf.* fig. 4.9 p. 65) conduisent au développement de méandres avec des localisations différentes (*cf.* fig. 4.7 p. 63).

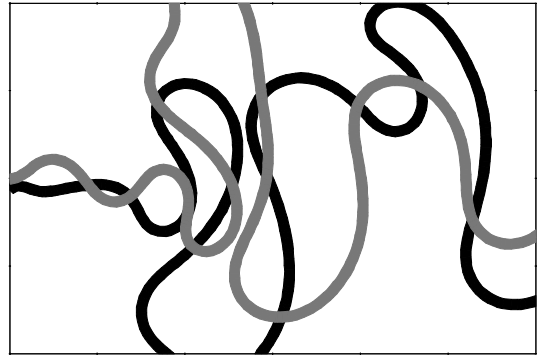
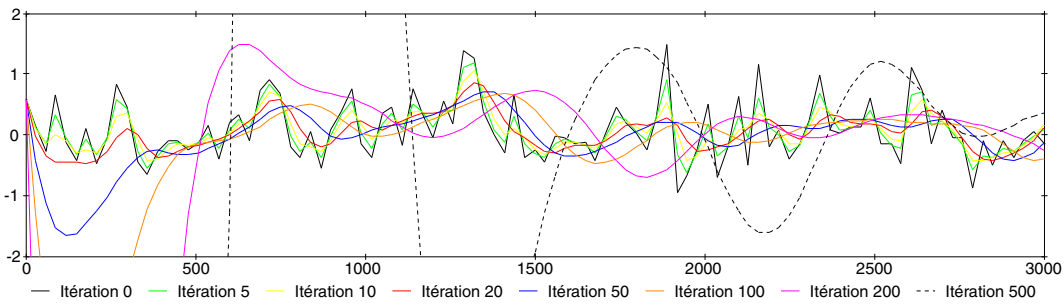
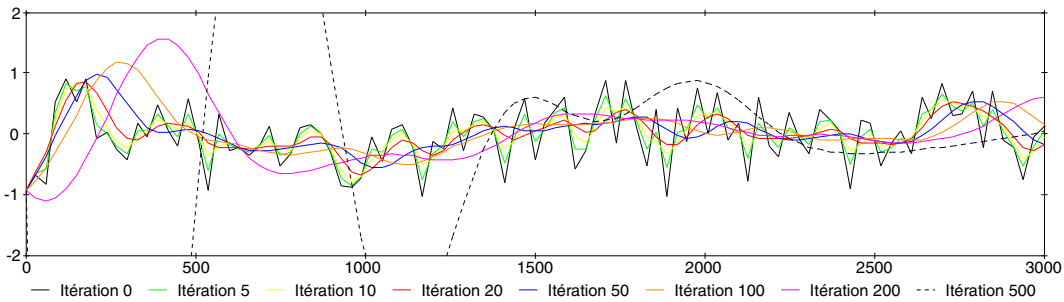


FIG. 4.7 - Positions du chenal aux itérations 25000 pour les figures 4.9(a) (noir) et 4.9(b) (gris).

<sup>16</sup>Ces perturbations sont nécessaires pour initier le développement des méandres. Elles peuvent être vues comme la simulation d'une hétérogénéité interne des vitesses d'écoulement du fluide due à la turbulence naturelle ou tout simplement aux irrégularités d'un cours naturel...



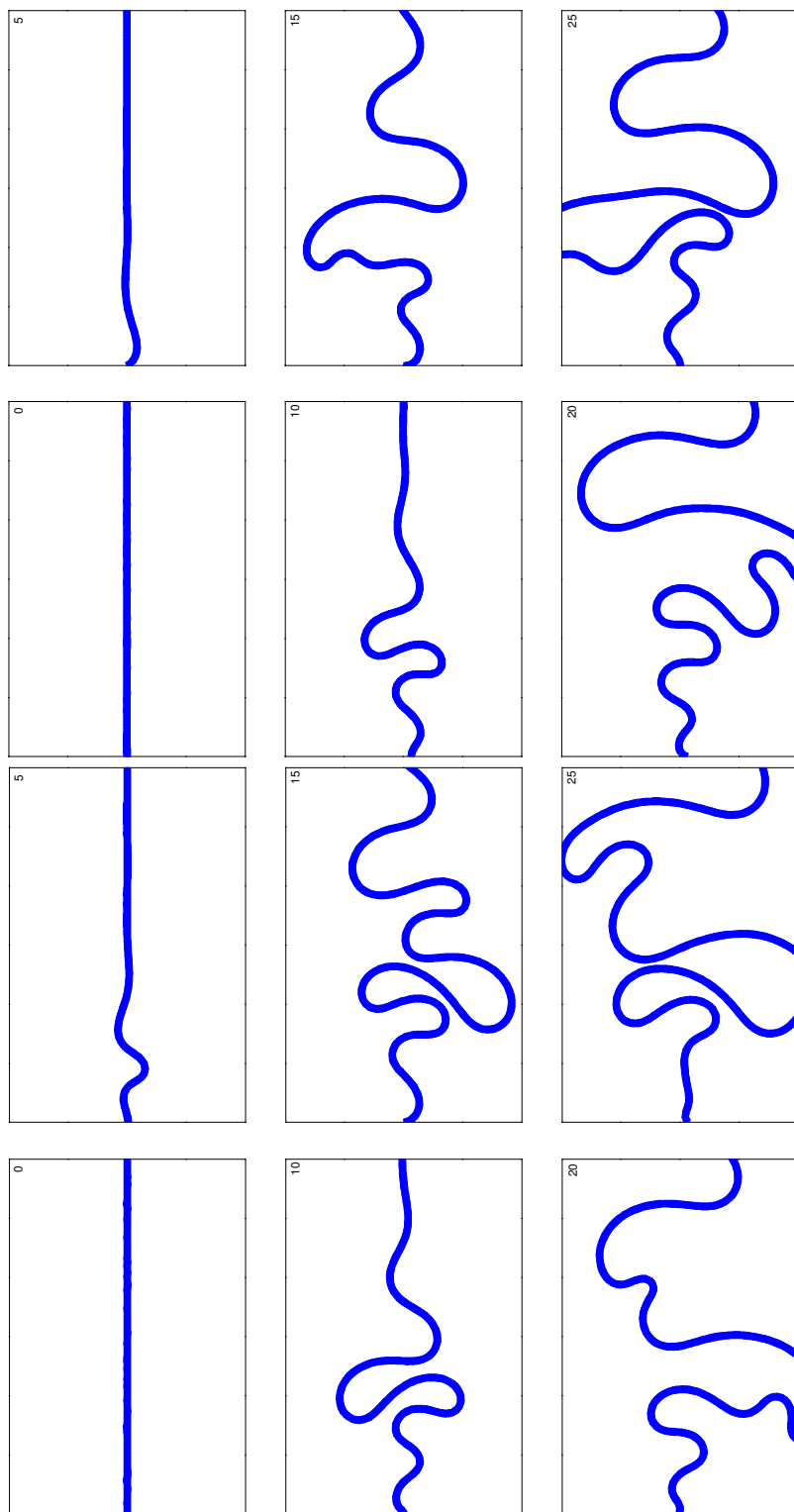
(a) Cas 1



(b) Cas 2

FIG. 4.8 – Positions successives de la ligne médiane du chenal

Les figures représentent une vue en plan. Le chenal évolue à partir d'une ligne  $y = 0$  sur laquelle sont introduites des perturbations suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type  $\frac{1}{2}$ . Les axes sont gradués en mètres, l'échelle des ordonnées est très dilatée. Une itération correspond à une crue de migration. Le débit imposé est de  $100\text{m}^3\text{s}^{-1}$ , la plaine d'inondation a une pente de  $10^{-3}$ . L'écoulement va de la gauche de la figure vers la droite. Seules les perturbations aléatoires initiales diffèrent entre les deux figures.



(a) Cas 1

(b) Cas 2

FIG. 4.9 – Positions successives du chenal évoluant à partir des conditions initiales de la figure 4.8

La figure représente une vue en plan. L'axe des abscisses mesure 3 km, l'axe des ordonnées mesure 2km. Les vues de gauche à droite et de haut en bas représentent respectivement les itérations 0, 5000, 10000, 15000, 20000 et 25000. Le sens de l'écoulement va de la gauche de la figure vers la droite.

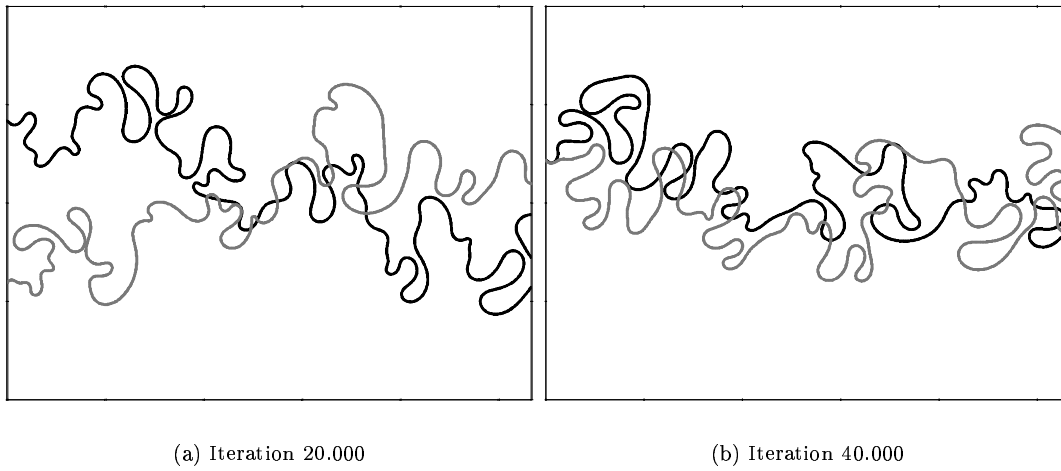
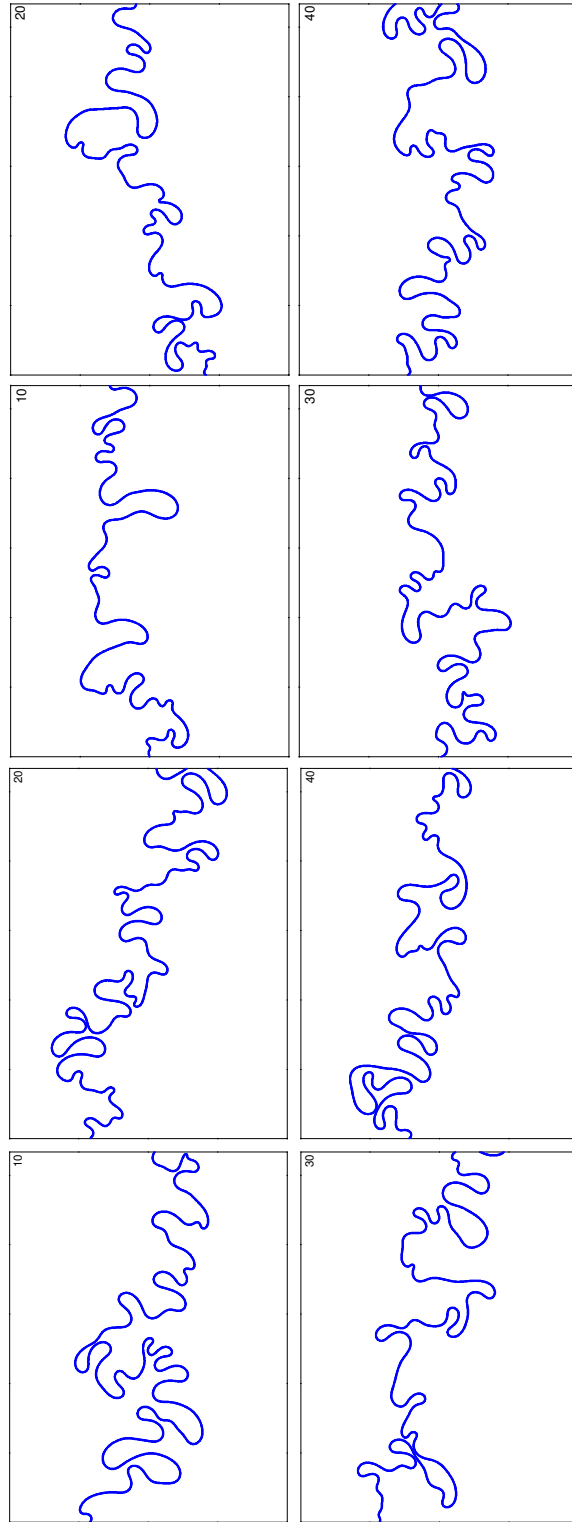


FIG. 4.10 – Positions respectives des chenaux des figures 4.11(a) (noir) et 4.11(b) (gris) p. 67

#### 4.2.2 Évolution à long terme

Des simulations menées sur un plus grand nombre d'itérations, montrent que, si l'on omet les processus d'avulsion, la localisation du chenal et de sa ceinture de méandres dépend de la position des recoupements par tangence (*cf.* fig. 4.11 p. 67). Ainsi, à partir de situations initiales indiscernables à l'échelle du chenal (*cf.* fig. 4.9 p. 65), on peut aboutir à des localisations à long terme très différentes (*cf.* fig. 4.10(a) p. 66) ou voisines (*cf.* fig. 4.10(b) p. 66).

On observe également un résultat à plus large échelle concernant la longueur d'onde de la ceinture de méandres qui, elle aussi, dépend essentiellement des caractéristiques géométriques du chenal, en particulier de sa largeur, tout comme la longueur d'onde du méandre. Cette similitude à différentes échelles explique que certains auteurs aient essayé de caractériser la géométrie plane des rivières méandriformes à l'aide d'outils fractals [Stolum (1998)].



(a) Cas 1

(b) Cas 2

FIG. 4.11 – Positions successives du chenal évoluant à partir des conditions initiales similaires à celle de la figure 4.8. La figure représente une vue en plan. L'axe des abscisses mesure 16 km, l'axe des ordonnées mesure 12km. Les vues de gauche à droite et de haut en bas représentent respectivement les itérations 10000, 20000, 30000 et 40000. L'écoulement va de la gauche de la figure vers la droite.

### 4.2.3 Basculement latéral

Nous considérons ici la réponse du système fluvial à un basculement latéral du plan d'écoulement, dû par exemple aux mouvements tectoniques et à la subsidence d'une partie de la plaine alluviale. L'interaction avec la plaine d'inondation n'étant pas ici prise en compte on modifie directement les altitudes des points du chenal.

- Durant la période (*cf.* fig. 4.12) de basculement on observe tout d'abord une orientation des méandres non plus dans l'axe de la vallée mais déviée dans le sens du basculement. L'organisation des méandres décrite par Carson et Lapointe (1983) (*cf.* § F.2 p. 62) semble ici se faire autour de la ligne de plus grande pente. Cette prédiction du modèle est confirmée par l'observation de systèmes récents [Mike (1975); Leeder et Alexander (1987); Alexander et Leeder (1987); Holbrook et Schumm (1999)].
- Ensuite, les recoupements par tangence successifs se produisent préférentiellement dans les zones les plus basses des méandres, à cause de vitesses d'écoulement et donc de migration plus importantes. L'ensemble du chenal migre alors progressivement dans la direction

du basculement latéral.

- Ce mouvement de migration latérale se poursuit une fois la période de basculement terminée.
- Enfin, on observe une réorganisation du cours d'eau dans le sens initial de l'écoulement, due au fait que la différence d'altitude entre les extrémités amont et aval étant maintenue constante, lorsque le basculement est terminé, le profil longitudinal se réajuste et l'influence du basculement n'est plus ressentie par le cours d'eau.

Pour obtenir la figure 4.12, nous imposons un basculement latéral important de l'ordre de plusieurs centimètres toutes les 100 itérations soit, si on considère qu'une itération représente de 1 à 2 ans, un enfoncement de l'ordre de quelques centimètres par siècle. Nos résultats sont qualitativement en accord avec les hypothèses émises par Peakall et al. (2000), mais notre but est ici d'illustrer la réponse du système par la seule évolution de sa ligne médiane. Nous ne considérons pas les processus d'avulsion qui dans ce contexte sont particulièrement importants [Bridge (2003)].

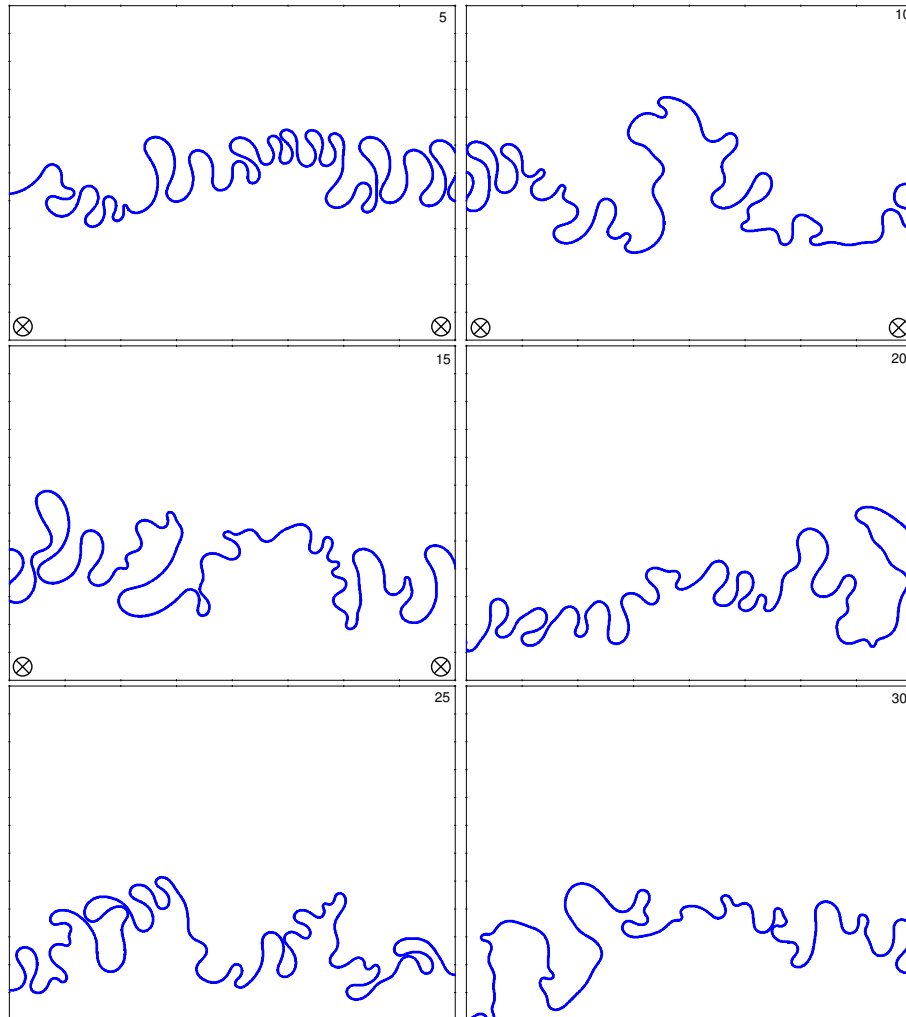


FIG. 4.12 – Influence du basculement latéral sur les positions successives du chenal  
 Les conditions initiales et hydrauliques sont celles de la figure 4.11(b). L'axe des abscisses mesure 16 km, l'axe des ordonnées mesure 12km. Les vues de gauche à droite et de haut en bas représentent respectivement les itérations 5000, 10000, 15000, 20000, 25000 et 30000. L'écoulement va de la gauche de la figure vers la droite. Entre les itérations 5000 et 15000, toutes les 5 itérations, les points du chenal effectuent une rotation de  $10^{-6}$  autour d'un axe horizontal dirigé dans le sens de la vallée - de la gauche vers la droite de la figure - et situé sur le bord supérieur de la figure, de telle sorte que la partie basse de la figure s'enfonce progressivement. La partie s'enfonçant est marquée par une flèche suivant le sens de l'enfoncement.



# Chapitre 5

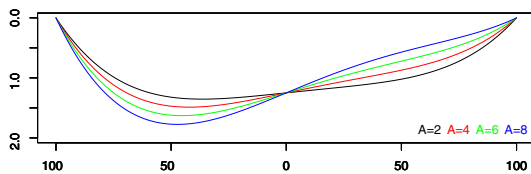
## Modèles de dépôts

La plaine alluviale est discrétisée sur une grille rectangulaire bidimensionnelle. En chacun des points de cette grille, la succession verticale des dépôts est stockée sous la forme de puits virtuels

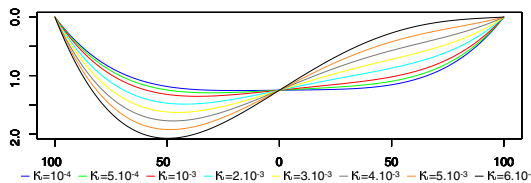
regroupant plusieurs briques élémentaires. Chacune de ces briques est informée avec la nature du dépôt, son âge et son épaisseur.

### 5.1 Dépôts chenalisés

#### 5.1.1 Modèle de section transverse



(a) Influence du coefficient d'affouillement  $A$  courbure constante ( $2km^{-1}$ )



(b) Influence de la courbure  $\tilde{A}$  coefficient d'affouillement constante (4)

Pour modéliser la profondeur du chenal sur une section transverse, nous utilisons une approximation polynomiale de degré 4. Soit  $h(s, n) = P_s(n)$ , avec  $n \in [-b; b]$  où  $h$  et  $b$  sont respectivement la profondeur et la demi-largeur du chenal. Nous imposons comme conditions :

- $P_s(-b) = P_s(b) = 0$  traduisant le fait que la profondeur est nulle sur les bords du chenal,
- $\partial_n P_s|_{n=0} = AH_0\kappa$  où  $A$  est le coefficient d'affouillement introduit par Ikeda et al. (1981),  $H_0$  la profondeur moyenne du chenal et  $\kappa$  la courbure de la ligne médiane,
- $\partial_{nn}^2 P_s|_{n=0} = 0$  car dans la partie médiane du chenal le fond est relativement plan,
- $\frac{1}{2b} \int_{-b}^b P_s(n) dn = H_0$  afin d'assurer la conservation du débit à l'ordre le plus bas.

FIG. 5.1 – Profils de sections transverses  
Pour les deux figures L'axe des ordonnées est normalisé à 1. L'axe des abscisses est centré sur la ligne médiane et gradué en mètres.

Ce modèle très simple peut être adapté sans peine à une largeur et une profondeur variables longitudinalement en récrivant les conditions précédentes avec les grandeurs correspondantes. La figure 5.1 illustre les différentes sections transverses obtenues à l'aide de ce modèle. Le

calcul montre que le modèle produit des sections réalistes pour des rivières méandriformes tant que la condition :

$$|AH_0\kappa| \leq \frac{5H_0}{2b}$$

est satisfaite. Cette condition s'exprime égale-

ment :

$$A \leq \frac{5}{2|b\kappa|}$$

Or, comme  $A$  est de l'ordre de 4 et que nos calculs sont faits avec l'hypothèse  $b\kappa \ll 1$ , cette condition portant sur  $A$  est toujours remplie.

### 5.1.2 Dépôts de barres de méandres

Au fur et à mesure de la migration du chenal, la grille stockant les informations représentant la plaine alluviale est mise à jour. Pour un point de cette grille se retrouvant dans le chenal, les dépôts sont érodés si leur altitude est supérieure à l'altitude du fond du chenal en ce point. Dans le cas contraire une brique élémentaire de sable est ajoutée au puits virtuel stockant les dépôts en ce point.

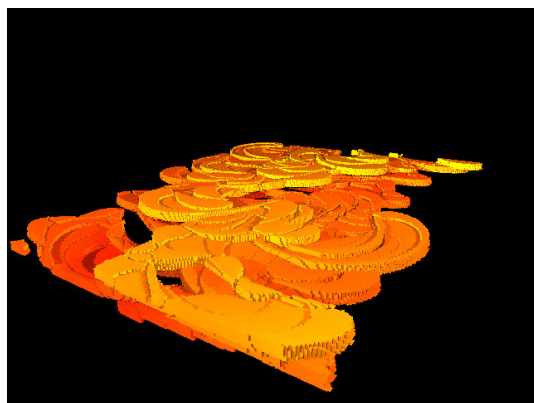


FIG. 5.2 – Dépôts de *point-bars* sur 10.000 itérations

La granulométrie  $\Phi_{pb}$  du matériel déposée est unique mais on pourrait introduire une granulométrie décroissante suivant l'élévation par rapport au niveau du thalweg du chenal<sup>1</sup>. L'âge attribué au dépôt est celui du chenal au moment du dépôt. Son épaisseur est égale à la différence d'altitude entre le fond du chenal au point considéré et l'altitude des dépôts sous-jacents.

<sup>1</sup>Un modèle d'évolution intégrant le transport sédimentaire et le tri granulométrique de la charge est proposé par Sun (1998).

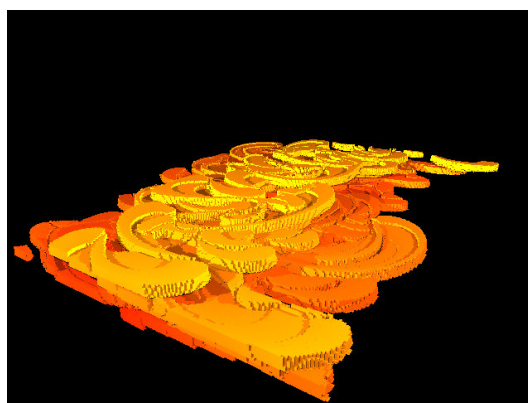


FIG. 5.3 – Dépôts de *point-bars* sur 12.000 itérations

La vue inclue les dépôts de la figure 5.2.

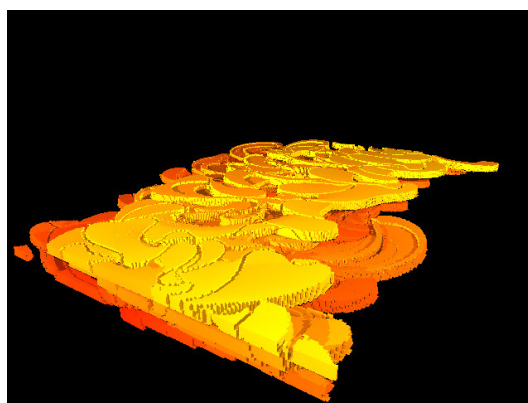


FIG. 5.4 – Dépôts de *point-bars* sur 15.000 itérations

La vue inclue les dépôts des figures 5.2 et 5.3.

Ce procédé permet d'enregistrer les variations successives de la topographie du lit en érodant les dépôts précédents ou en déposant du matériel. Les dépôts de *points-bars* (cf. fig. 5.2, 5.3 et 5.4) sont donc simplement générés par ce processus de mise à jour de la topographie de la plaine d'inondation, puisque les cellules de la plaine précédemment occupées par le chenal sont remplies avec du sable. On peut en particulier reconstituer les surfaces successives des *point-bars* (cf. fig. 5.5) qui sont souvent des barrières de perméabilité lors de la migration de fluides dans un réservoir pétrolier [Mikes et al. (2001)].



FIG. 5.5 – Vue en coupe de dépôts de barres de méandres

Le chenal est en bleu sa largeur est de 110m pour une profondeur moyenne très exagérée de 2m. Les dépôts sableux les plus anciens sont codés en rouge et les plus récents sont codés en jaune. Ce codage demeurera le même par la suite.

### 5.1.3 Dépôts de bras mort, bouchons d'argile

Lorsqu'une portion de chenal est abandonnée à la suite d'un recoupement par tangence ou déversement, la boucle abandonnée est remplie avec un matériel fin de granulométrie  $\Phi_{mp}$  jusqu'à la hauteur de la surface de l'eau dans le méandre avant son abandon. Comme pour la

granulométrie des barres sableuses du lit fluvial, cette granulométrie est un paramètre du modèle. Les extrémités du chenal abandonné sont scellées avec deux bouchons de granulométrie sableuse à silteuse. On attribue à ces dépôts l'âge de l'abandon du méandre (cf. fig. 5.6 p. 74).

## 5.2 Dépôts de plaine alluviale

### 5.2.1 Dépôts de débordements

Les processus de dépôt lors des crues de débordement ont été présentés à la section 2.3.3 p. 25. Nous retenons pour simuler les dépôts de débordement le modèle diffusif de Pizzuto (1987) également implémenté par Howard (1992, 1996) et Gross et Small (1998). Le modèle diffusif est détaillé en annexe. Il se base sur l'hypothèse d'une répartition de la charge sédimentaire due à un mécanisme de diffusion des zones très concentrées près du chenal vers les zones plus distantes moins concentrées. Ce faisant, il néglige les phénomènes de transport convectif de matériel, particulièrement importants dans les tourbillons existant aux frontières du chenal et les phénomènes de charriage sur le fond, là où le courant possède assez d'énergie. Les expériences réalisées par Pizzuto (1987) sur une plaine d'inondation actuelle pour une période historique sont néanmoins en accord avec son

modèle. Le fait que nous appliquions ce modèle sur des temps géologiques et que nous nous intéressions à un résultat "moyen" est un argument supplémentaire pour l'utilisation de ce modèle simple.

Ce modèle de diffusion prévoit une décroissance exponentielle de l'épaisseur de matériel déposée avec la distance au chenal approvisionnant la plaine. Des études sur les systèmes actuels ont confirmé cette décroissance tant de la quantité de matériel déposé sur la plaine d'inondation que de sa granulométrie [Guccione (1993); Törnqvist et Bridge (2002)]. En conséquence, nous adopterons également une loi de décroissance exponentielle pour la granulométrie du matériel déposé<sup>2</sup>. Enfin, ces modèles utilisant des décroissances exponentielles prédisent une épaisseur et une granulométrie de dépôt tendant à s'annu-

<sup>2</sup>Cette loi de décroissance n'est pas justifiée par le modèle théorique de Pizzuto (1987) qui prévoit une décroissance exponentielle de la concentration de chaque classe granulométrique. Le choix de cette modélisation est lié à des choix d'implémentation.



FIG. 5.6 – Vue aérienne des différents dépôts simulés

Le chenal est en bleu. Les dépôts sableux sont codés du rouge sombre pour les plus anciens au jaune pour les plus récents. Les dépôts argileux sont codés du vert sombre pour les plus anciens au vert clair pour les plus récents. Il existe une gradation de couleur entre ces deux teintes suivant la granulométrie du matériel. Le code de couleurs utilisé restera le même par la suite.

ler très loin du chenal. Néanmoins, l'observation des dépôts de crues sur des plaines alluviales récentes montre qu'il existe une épaisseur de dépôts minimum, constituée essentiellement de particules fines et indépendante de la distance au chenal [Howard (1996); Törnqvist et Bridge (2002); Bridge (2003)]. Ce dépôt est certainement à relier à la période de décrue pendant laquelle le matériel qui pouvait être maintenu en suspension sur l'ensemble de la plaine d'inondation est déposé de manière homogène.

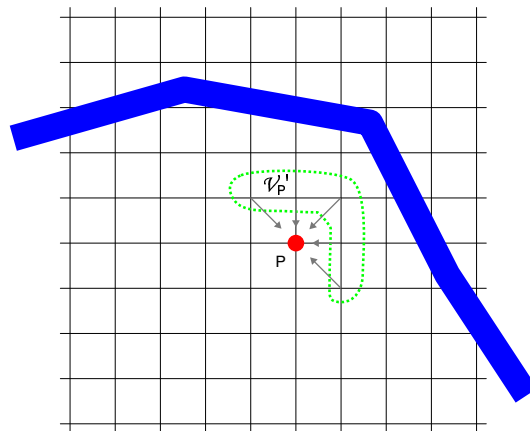


FIG. 5.8 – Définition de  $\mathcal{V}'_P$ , le chenal est en bleu, la grille représente la plaine d'inondation.

Nous noterons :

- $\mu(t)$  la longueur caractéristique de la loi de décroissance exponentielle de l'épaisseur de dépôt avec la distance au chenal,
- $\lambda(t)$  la longueur caractéristique de la loi de décroissance exponentielle de la granulométrie des dépôts avec la distance au chenal,
- $a(t)$  l'épaisseur de matériel déposé sur la plaine, indépendamment de la localisation par rapport au chenal.

Afin de décrire l'algorithme de simulation des crues de débordement, nous introduisons également pour un point  $P$  de la plaine alluviale et pour la crue considérée (cf. fig. 5.7 p. 75) :

- $z_P$  l'altitude de  $P$  avant le dépôt,
- $z_P^{max}$  l'altitude maximale de  $P$  après le dépôt,
- $T_P$  l'épaisseur du dépôt au point  $P$  prédite par le modèle de diffusion,

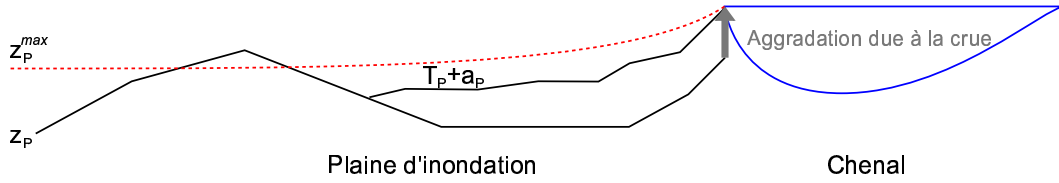


FIG. 5.7 – Définitions des grandeurs utilisées pour modéliser les crues de débordement.

- $a_P$  l'épaisseur de matériel déposée au point  $P$
  - $\Phi_P$  la granulométrie du dépôt au point  $P$ .
- Avec ces notations, on doit donc avoir à tout instant :

$$z_P + a_P + T_P \leq z_P^{max}$$

On simule alors les dépôts de crue de débordement en plusieurs étapes :

1. On dépose sur les points de la plaine d'inondation situés dans le chenal une épaisseur de sable (granulométrie  $\Phi_{pb}$ )<sup>4</sup> égale à l'aggradation du point de la ligne médiane le plus proche. Cette aggradation verticale au point  $P$  de la plaine, est notée  $\phi_P$  et calculée suivant la procédure détaillée à la section 4.1.5 p. 60. Pour chacun de ces points  $P$ , on pose alors :

$$\begin{aligned} T_P &= \phi_P \\ a_P &= a \\ z_P^{max} &= z_P + a_P + T_P \\ \Phi_P &= \Phi_{pb} \end{aligned}$$

2. On calcule la distance  $d_P$  de chaque point  $P$  de la grille représentant la plaine d'inondation à la berge du chenal la plus proche en utilisant l'algorithme de Danielsson (1980); Schmitt et Vincent (2004) [Schmitt et Vincent (2004)].
3. Pour chaque point  $P$  de la plaine d'inondation en dehors du chenal, on note  $\mathcal{V}_P$  l'ensemble de ses voisins immédiats sur la grille représentant la plaine d'inondation et  $\mathcal{V}'_P$  l'ensemble (cf. fig. 5.8) :

$$\mathcal{V}'_P = \{P' \in \mathcal{V}_P \mid d_{P'} \leq d_P\}$$

Si  $\mathcal{V}'_P$  est vide, on considère  $P'$  le point du chenal le plus proche de  $P$  et on effectue :

$$\begin{aligned} T_P &= \phi_{P'} \exp\left(-\frac{d_P}{\mu}\right) \\ a_P &= a \\ z_P^{max} &= z_{P'} + a_P + T_P \\ \Phi_P &= \Phi_{pb} \exp\left(-\frac{d_P}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Cette hypothèse est relativement inexacte dans la mesure où le rétablissement du profil longitudinal est un mécanisme assez rapide. Dès que le courant circulant à l'intérieur du chenal permet le transport d'une quantité suffisante de matériel, la mobilisation de ce matériel contribue au rétablissement du profil longitudinal. Notre hypothèse est donc que les crues de débordement ont un effet statistique prépondérant par rapport aux crues de plus basse énergie.

<sup>4</sup>La granulométrie utilisée ici est la même que celle des *point-bars*. On peut cependant introduire un faciès de *channel-lag* avec une granulométrie différente.

Sinon, on effectue la moyenne des paramètres sur les points de la plaine plus proche du chenal que  $P$  :

$$\begin{aligned}
T_P &= \frac{1}{|\mathcal{V}'_P|} \sum_{P' \in \mathcal{V}'_P} T_{P'} \exp\left(\frac{d_{P'} - d_P}{\mu}\right) \\
a_P &= \frac{1}{|\mathcal{V}'_P|} \sum_{P' \in \mathcal{V}'_P} a_{P'} \\
z_P^{max} &= \frac{1}{|\mathcal{V}'_P|} \sum_{P' \in \mathcal{V}'_P} \left[ z_{P'}^{max} - T_{P'} \left( 1 - \exp\left(\frac{d_{P'} - d_P}{\mu}\right) \right) \right] \\
\Phi_P &= \frac{1}{|\mathcal{V}'_P|} \sum_{P' \in \mathcal{V}'_P} \Phi_{P'} \exp\left(\frac{d_{P'} - d_P}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Enfin, on corrige les valeurs obtenues en effectuant :

- Si  $z_P \geq z_P^{max}$ , on ne peut pas déposer de matériel, on effectue alors :

$$\begin{aligned}
T_P &= 0 \\
a_P &= 0
\end{aligned}$$

- Sinon, si  $z_P + a_P \geq z_P^{max}$ , seule la fraction indépendante de la localisation est déposée, et on effectue :

$$\begin{aligned}
T_P &= 0 \\
a_P &= z_P^{max} - z_P
\end{aligned}$$

- Si  $z_P + a_P + T_P \geq z_P^{max}$ , l'épaisseur prédite par le modèle de diffusion est trop importante, et on effectue :

$$T_P = z_P^{max} - (z_P + a_P)$$

4. Si  $T_P + a_P \neq 0$ , on dépose au point  $P$  une brique élémentaire de sédiment d'épaisseur  $T_P + a_P$ , de granulométrie  $\Phi_P$  et d'âge celui de la crue considérée.

Contrairement au modèle proposé par Howard (1992, 1996), notre modèle :

- permet de respecter la topographie de la plaine d'inondation en tenant compte des éventuels reliefs, à travers la variable  $z^{max}$ .
- ne fait pas apparaître de discontinuités des dépôts dues à l'utilisation de la distance directe au chenal.
- ne tient pas compte de la diminution de la fré-

quence de crues de débordement avec le temps et la construction des levées du chenal, ce dernier point étant critiqué par Bridge (2003).

L'altitude  $z_{eq}$  du profil d'équilibre et le taux d'ajustement  $\alpha_{eq}$  étant connus, on doit donc se donner pour modéliser les crues de débordements les paramètres  $\mu$ ,  $a$  et  $\lambda$ . Par la suite, le paramètre  $a$  sera maintenu nul par souci de simplification.

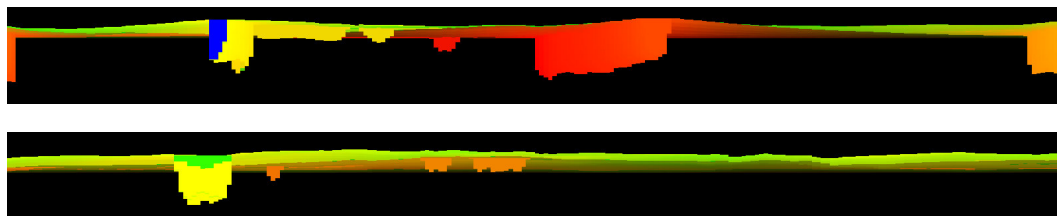


FIG. 5.9 – Vues en coupe des dépôts

La plaine d'inondation est un carré de  $6\text{ km}$  de large. La figure du haut représente une section verticale transversale de la vallée. La figure du bas représente une section longitudinale. L'axe des ordonnées est dilaté par un facteur multiplicatif de 100. Les sections ont été obtenues avec 2500 itérations. Sur la figure du haut on observe des ensembles gréseux correspondant aux ceintures de chenaux. La ceinture rouge-orangée est la plus ancienne. Etant en relief, elle crée un barrage lors des crues de débordements successives, d'abord lorsque le chenal se retrouve sur sa droite à la faveur d'une avulsion, puis sur sa gauche. Sur la figure du bas on observe à gauche l'extrémité d'un bouchon d'argile. Les différences de teintes marquent les crues de débordement successives. Les corps chenalisés de petite taille sont des chenaux de crevasse.

## 5.2.2 Dépôts de levée

On peut simuler des dépôts de levées en répétant fréquemment l'algorithme utilisé pour simuler les crues de débordement, en ne modifiant pas le profil longitudinal du chenal et en prenant des longueurs caractéristiques faibles pour

la décroissance de l'épaisseur des dépôts. Toutefois, il est important de rappeler que le transport convectif et le transport de la charge de fond sont un rôle très important dans la formation des levées.

## 5.2.3 Dépôts organiques, faciès de point bas

Nous simulons la formation de dépôts organiques dans les zones humides. Comme on a introduit l'altitude du profil d'équilibre  $z_{eq}$ , on introduit une altitude de référence  $z_{hu}$  qui sera assimilée à la hauteur de la nappe sous-fluviale<sup>5</sup>. Les points de la plaine d'inondation dont l'altitude est inférieure à  $z_{hu}$  seront considérés envoyés (*cf.* fig. 5.10 p. 79). La topographie de la plaine alluviale étant connue à tout instant, on peut par conséquent calculer  $z_{hu}$  de manière à envoyer une proportion donnée de sa surface (*cf.* fig. 5.11 p. 5.11 et 5.12 p. 80).

La matière organique se dépose dans des tourbières ou des marais entre chaque événement hydrologique alimentant ces zones humides en eau et en débris clastiques (*cf.* § 2.4.2.6 p. 36). La quantité de matériel déposée entre deux de ces événements est donc une fonction croissante du temps  $\Delta t$  qui les sépare. Nous poserons à nouveau un modèle de croissance exponentielle dont le temps caractéristique est noté  $t_{mo}$ . L'épaisseur  $T_{P,mo}$  de matière organique déposée au point  $P$  de la plaine d'inondation entre ces deux événements hydrologiques sera alors prise égale à :

$$T_{P,mo} = (z_{hu} - z_P) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{t_{mo}}\right) \right] \mathbb{1}_{z_P < z_{hu}}$$

Le fait que ces dépôts soient fortement affectés par la compaction (*cf.* § 2.4.2.6 p. 36) peut influencer l'évolution du système fluvial en contraignant la migration de la ceinture de chenaux ou la localisation des avulsions (*cf.* fig. 5.12 p. 80)[Rajchl et Ulicny (2001)]. Des travaux récents montrent en effet que l'essentiel de cette compaction est contemporaine des dépôts ou lui est de peu postérieure. En effet le volume des dépôts de tourbières est fortement affecté par la perte d'eau due à un assèchement, aux incendies ou aux processus de dégradation de la matière organique [Nadon (1998)]. Nous ne tiendrons en conséquence pas compte de la compaction due à l'enfouissement profond des dépôts. En revanche, un taux de compaction précoce  $\tau_{mo}$  est affecté aux dépôts organiques. Ce dernier paramètre peut être tiré au hasard. A partir du moment de son dépôt, une brique élémentaire modélisant un dépôt de matière organique est alors compactée les  $n_{mo}$  premières fois où l'on dépose au sommet du puits qui la contient, une brique de dépôt non-organique. Le paramètre  $n_{mo}$  correspond au nombre de fois où le taux de compaction  $\tau_{mo}$  est appliqué au dépôt organique. Il peut être choisi aléatoire.

---

<sup>5</sup>Nous ne modélisons pas les variations de niveau de cette nappe avec l'éloignement au chenal.

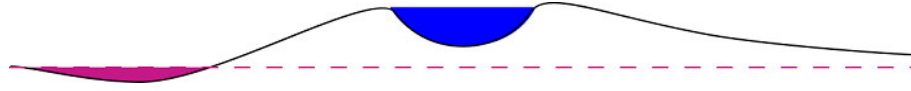


FIG. 5.10 – Vue en coupe schématique du chenal et de l'altitude de référence pour la définition des zones humides

Le chenal est en bleu, l'altitude  $z_{hu}$  est marquée par la ligne pointillée violette. Des dépôts organiques sont déposés sur les points de la plaine d'inondation situés en dessous de ce niveau de référence.

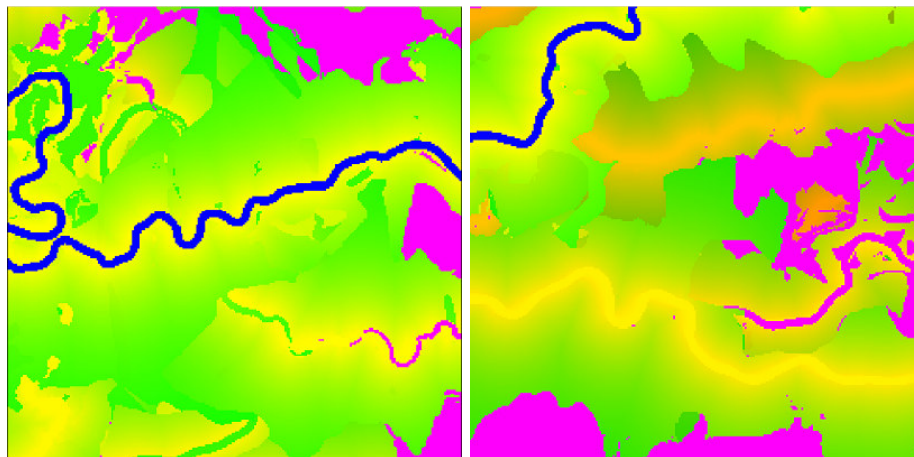
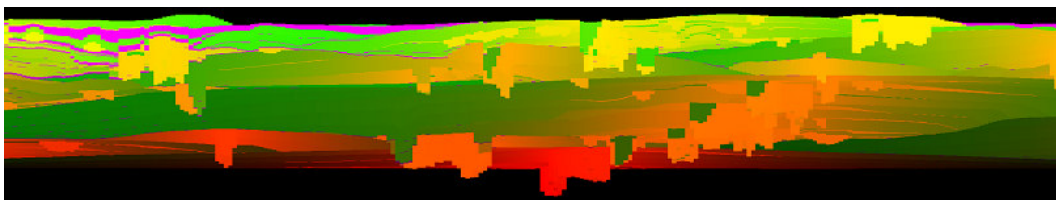
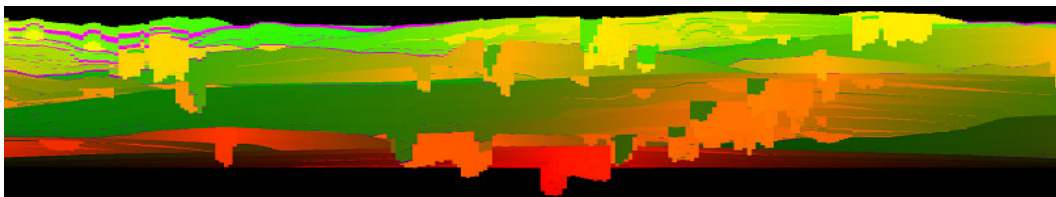


FIG. 5.11 – Vues aériennes montrant les dépôts de matière organique à des temps différents  
La plaine d'inondation est un carré de 6 km de côté. Les dépôts de matière organique sont codés en rose. 20% de la surface de la plaine d'inondation est ennoyé et enregistre le dépôt de matière organique. Le code de couleur demeurera le même par la suite.



(a) Avant compaction précoce



(b) Après compaction précoce

FIG. 5.12 – Sections transversales montrant les dépôts de matière organique  
 La figure représente une coupe transversale dans la plaine d'inondation simulée à la figure 5.11. L'axe des ordonnées est dilaté d'un facteur 100. Les dépôts de matière organique non recouverts par des dépôts de crue ne sont pas affectés par la compaction.

## 5.3 Lobes de crevasses et avulsions

La formation de crevasses dans les berges du chenal, les recouvrements par déversement, le dépôt de lobe de crevasse et l'avulsion finale sont des

processus liés qui sont modélisés en cinq étapes successives.

### 5.3.1 Formation d'une crevasse

Comme détaillé dans la section 2.3.3.2 p. 29, le dépôt d'un lobe de crevasse est consécutif à la rupture d'une berge du chenal, qui sert alors de déversoir dans la plaine d'inondation en contrebas. La zone de rupture est relativement aléatoire sur tout le cours d'un chenal. On peut cependant raisonnablement s'attendre à ce qu'elle se produise en des points où l'action du courant contre les berges du chenal est maximale. Nous choisissons de modéliser la formation des crevasses aux points de maxima locaux des vitesses de l'écoulement contre les rives. On se donne une loi de probabilité  $L_{cr}$  que l'on simule pour dé-

terminer le lieu de rupture parmi ces maxima.

A l'instar du modèle tridimensionnel de Mackey et Bridge (1995), on peut choisir un débit fluide important  $Q_{cr}$  pour lequel la rupture de la berge est jugée certaine. Pour chaque maximum de vitesse le long du chenal, on simule alors le tirage  $u$  d'une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , et on considère que la crevasse se forme si  $u < \frac{Q}{Q_{cr}}$  où  $Q$  est le débit fluide dans le chenal. La profondeur de la crevasse  $d_{cr}$  et la largeur de la crevasse  $w_{cr}$  sont également tirées au hasard suivant des lois uniformes d'intervalles fixés.

### 5.3.2 Chenal d'avulsion

Lorsqu'une crevasse se forme nous calculons en premier lieu le tracé du chenal qui résulterait d'un détournement complet du cours de la rivière par la crevasse (avulsion). Pour ce faire, nous utilisons la projection de l'équation de Saint-Venant sur l'axe normal à la direction principale de l'écoulement. En négligeant la composante normale de l'écoulement, cette équation s'écrit (cf. eq. B.77 p. 173) :

$$\frac{\kappa}{1 - n\kappa} u^2 = -g\partial_n \xi$$

où  $\partial_n \xi$  désigne la pente transverse de la surface de l'eau et les autres grandeurs ont été introduites au chapitre précédent (cf. § 4.1.1.4 p. 55). Si on évalue cette équation au milieu du chenal, sur la ligne médiane, il vient :

$$\kappa u^2 = -g\partial_n \xi \quad (5.1)$$

La pente de la surface de l'eau est ensuite supposée égale à la pente de la plaine d'inondation au point considéré suivant la même direction. Elle est notée  $I_n$ . Nous considérons que  $u$  est égale à la vitesse longitudinale moyenne dans le chenal où s'est formée la crevasse.

Toujours avec les notations introduites au chapitre précédent (cf. § 4.1.1.4 p. 55), le long de ce nouveau chenal, l'équation 5.1 se réécrit :

$$\partial_s \theta = -\frac{gI_n}{u^2} \quad (5.2)$$

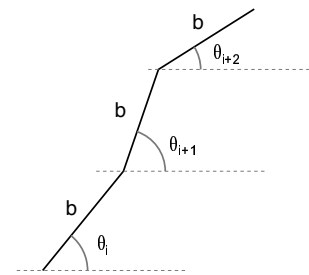


FIG. 5.13 – Détermination du tracé potentiel du chenal

La pente normale à l'écoulement  $I_n$  contribue à dévier l'écoulement, déviation atténuée par l'inertie acquise par l'écoulement<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Cette équation ne prétend pas refléter la réalité. En effet, la pente longitudinale n'intervenant pas, un écoulement

Ensuite, partant de la crevasse, nous construisons alors de proche en proche le tracé du nouveau chenal sous la forme d'une ligne brisée constituée de tronçons de longueur  $b$ , la demie largeur du chenal (*cf.* fig. 5.13). L'équation 5.2 est à cette fin discrétisée sous la forme :

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{gbI_n}{u^2}$$

### 5.3.3 Recouvrements par déversement

Lorsque le tracé calculé à la section précédente recoupe le chenal dont il est issu, la partie du chenal court-circuitée est abandonnée et scellée de manière analogue au remplissage des bras morts résultant de recouvrements par tangence. Nous modélisons ainsi les recouvrements par déversement (*cf.* fig. 5.14).

La plaine représentée en vue aérienne sur la figure ci-contre mesure  $6\text{ km}$  de long pour  $3\text{ km}$  de large. Les trois bras morts scellés avec des argiles récentes sont en vert clair. On peut observer en kaki, un bouchon d'argile résultant d'un recouvrement par tangence plus ancien. Ce recouvrement par tangence a provoqué une configuration instable, qui a conduit à un recouvrement par déversement.

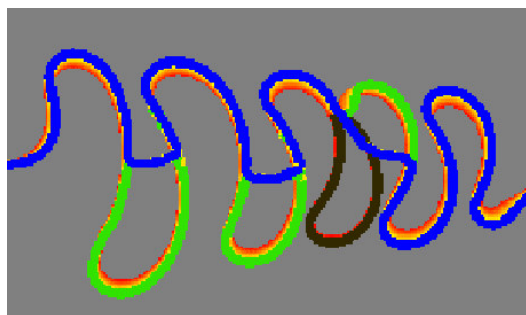


FIG. 5.14 – Modélisation de recouvrements par déversement

### 5.3.4 Lobes de crevasse

Nous utilisons pour modéliser les lobes de crevasse un modèle paramétrique détaillé en annexe. Ce modèle permet d'obtenir une géométrie tridimensionnelle qui est remplie avec un matériel dont la granulométrie décroît vers ses bords. On spécifie en particulier la largeur et la longueur du lobe qui sont à nouveau tirées au hasard suivant des lois uniformes d'intervalles fixés. Lorsqu'une crevasse s'est formée et que les conditions de formation d'un recouvrement par déversement ne sont pas rassemblées, on considère qu'un premier épanchement de forme allongée et de granulométrie grossière s'effectue sur la plaine alluviale. Nous appellerons ce premier ensemble épanchement de type I (*cf.* fig. 5.15).

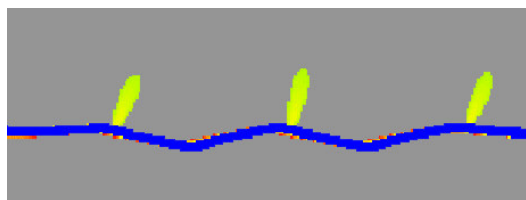
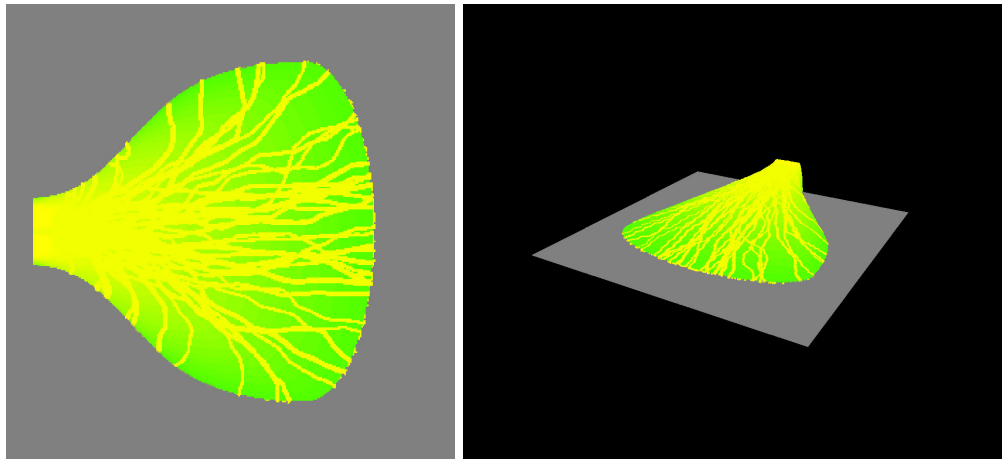


FIG. 5.15 – Vue aérienne d'un chenal avec trois épanchements de crevasse de type I

Si la crevasse se maintient, les déversements successifs de matériel forment progressivement un ensemble hétérogène sur lequel divergent plusieurs chenaux. Nous appellerons ce second ensemble, épanchement de type II (*cf.* fig. 2.12 p. 35). L'évolution de l'épanchement du type I au

---

pourrait *a priori* remonter un plan incliné!!! Elle nous sert uniquement à obtenir rapidement un tracé plausible. On peut introduire la dépendance avec la pente longitudinale de l'écoulement, mais il faut alors également modéliser l'évolution de sa profondeur. De plus, la réalité est tout autre et le nouveau chenal se forme peu à peu en construisant des levées et en incisant la plaine alluviale [Bridge (2003)]. La prise en compte de ces phénomènes ne correspond pas à l'échelle temporelle de notre modélisation et nous nous contentons ainsi d'un modèle simple.



(a) Vue aérienne

(b) Vue tridimensionnelle

FIG. 5.16 – Lobe de crevasse avec 50 chenaux aléatoires comblés avec du sable

type II est simulée par une loi donnée. En pratique, nous fixons une probabilité de transition d'un type à l'autre.

On peut également introduire des tirages incluant la pente locale de la plaine alluviale au niveau de la crevasse ou les débits circulant dans le chenal, de manière analogue à la modélisation proposée pour la formation des crevasses. En effet, des pentes prononcées ne permettront pas le comblement de la crevasse et conduiront au dépôt d'un ensemble de type II. L'influence du débit fluide dépend essentiellement de la charge sédimentaire : un écoulement peu chargé aura

tendance à être érosif et élargir la crevasse, alors qu'un écoulement plus chargé pourra éventuellement contribuer à son comblement [Slingerland et Smith (1998)].

Le corps de l'épanchement de type II est obtenu à partir du modèle paramétrique précédent en imposant une largeur plus importante. Le lobe est ensuite rempli avec un matériel fin dont la granulométrie décroît vers l'extérieur du lobe. En utilisant l'algorithme décrit à la section 5.3.2 p. 81, on simule enfin sur ce lobe un nombre aléatoire de chenaux érosifs remplis avec un matériel silteux (*cf.* fig. 5.16 et fig. 5.18).

### 5.3.5 Avulsion locale

Lorsque l'on a déposé un lobe de type II, un dernier tirage est effectué pour déterminer si la crevasse est finalement comblée ou si l'avulsion réussit. A nouveau, le tirage s'effectue en comparant le résultat du tirage d'une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$  à une valeur seuil. Nous choisissons comme seuil le rapport entre la pente normale au chenal sur la plaine alluviale  $I_n$  et la pente longitudinale le long du chenal  $I$ . L'avulsion est ainsi considérée réussie lorsque :

$$u < a_{av} \frac{I_n}{I}$$

où  $a_{av}$  est un coefficient donné, proche de l'unité.

Dans ce cas, le nouveau tracé du chenal à partir de la crevasse est celui déterminé à la section 5.3.2 p. 81 (*cf.* fig.5.19 p. 85). L'extrémité du chenal abandonné est scellée avec un bouchon de matériel silteux et d'épaisseur décroissante le long de cet ancien cours.

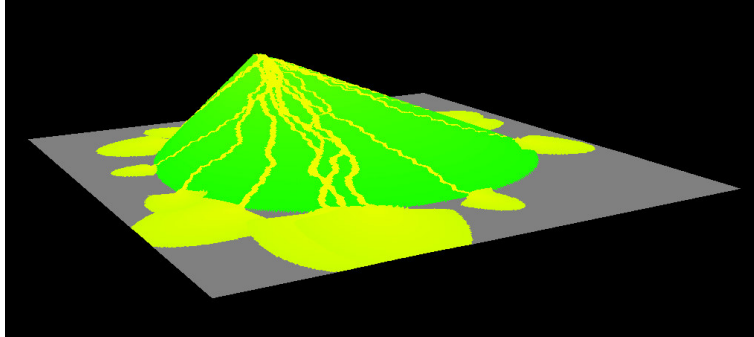


FIG. 5.17 – Vue tridimensionnelle du lobe de crevasse avec chenaux sableux et lobes sableux de tailles inférieures à l'extrémité des chenaux

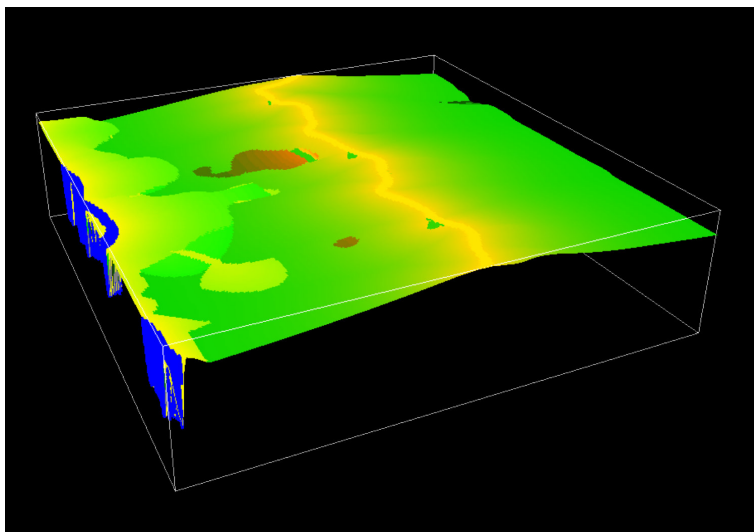


FIG. 5.18 – Vue tridimensionnelle de la surface de la plaine d'inondation

La plaine alluviale est un carré de côté 6 km. L'exagération verticale est très importante. On distingue au centre l'ancien lit de la rivière, surélevé par rapport à sa plaine d'inondation. Suite à une avulsion régionale, le chenal se trouve sur la gauche de la figure, une partie en est visible. On distingue au premier plan, un lobe de crevasse avec un chenal rempli de matériel silteux et un lobe sableux de taille inférieure à son extrémité.



FIG. 5.19 – Avulsion réussie et nouveau cours du chenal sur la plaine d'inondation  
La plaine d'inondation, représentée en vue aérienne, mesure 6 km de long pour 3 km de large. On peut observer en kaki, un bouchon d'argile résultant d'un recouvrement par tangence plus ancien.

### 5.3.6 Avulsion régionale

Lorsqu'une avulsion se produit en amont de la portion de plaine alluviale modélisée, elle se traduit par l'abandon du chenal actif et l'installation d'un nouveau cours en contrebas du premier. Pour simuler ce processus, le cours du chenal est abandonné, selon une périodicité fixe ou

aléatoire, et un nouveau tracé est déterminé sur la plaine alluviale en utilisant l'algorithme décrit à la section 5.3.2 p. 81. L'extrémité amont de ce nouveau tracé est choisie au hasard parmi les points amont de la plaine alluviale dont l'altitude est la plus faible.



## Chapitre 6

# Paramètres du modèle

A la suite, nous résumons succinctement les paramètres du modèle d'évolution de la ligne médiane et du modèle de faciès présentés dans les deux chapitres précédents.

Le modèle global résultant de la combinaison des deux modules précédents permet d'obtenir rapidement une architecture de dépôts réalistes. La réponse du système fluvial à certains de ces paramètres, en particulier la position de son profil d'équilibre, sera étudiée dans le chapitre suivant. Différentes géométries de dépôts sont obtenues pour lesquelles la connectivité et le volume des corps potentiellement réservoirs sont très variables.

## 6.1 Évolution spatiale de la ligne médiane

<p>Géométrie</p> <p>Hydraulique</p>	<p><math>\Gamma</math></p> <p><math>Q</math></p> <p><math>b</math></p> <p><math>I</math></p>	<p>Ligne médiane</p> <p>Débit</p> <p>Demi-largeur</p> <p>Pente de la plaine<sup>1</sup></p>	<p>Suite de points 3D</p> <p>Lien possible avec <math>Q</math></p>
<p>Constantes physiques</p>	<p><math>C_f</math></p> <p><math>A</math></p> <p><math>A_{sec}</math></p> <p><math>g</math></p>	<p>Coefficient de friction</p> <p>Coefficient d'affouillement</p> <p>Redistribution latérale du flux</p> <p>Accélération de la gravité</p>	<p><math>\sim 10^{-3} - 10^{-2}</math></p> <p><math>\sim 4</math></p> <p><math>\sim 4</math></p> <p><math>\approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}</math></p>
<p>Migration latérale</p> <p>(<math>\zeta</math>)</p>	<p><math>\Xi</math></p>	<p>Coefficient d'érodabilité<sup>2</sup></p>	<p><math>\zeta = \Xi \mathcal{D}</math></p>
<p>Aggradation verticale</p> <p>(<math>\phi</math>)</p>	<p><math>z_{eq}</math></p> <p><math>\alpha_{eq}</math></p>	<p>Altitude du profil d'équilibre<sup>3</sup></p> <p>Taux de comblement</p>	<p><math>\alpha_{eq} \in [0, 1]</math></p>
<p>Avulsion locale</p>	<p><math>\mathcal{L}_{II \rightarrow av}</math></p> <p><math>\varepsilon</math></p>	<p>Loi de transition épanchement II <math>\rightarrow</math> avulsion</p> <p>Bruit blanc sur le parcours</p>	<p>La topographie locale intervient</p>
<p>Avulsion régionale</p>	<p><math>\mathcal{L}_{pos}</math></p> <p><math>\varepsilon</math></p> <p><math>f_{reg}</math></p>	<p>Loi d'entrée sur la plaine</p> <p>Bruit blanc sur le parcours</p> <p>Fréquence</p>	<p>La topographie amont intervient</p>

<sup>2</sup>La pente moyenne de la vallée dans le sens de l'écoulement est comptée positivement dans le sens de l'écoulement.

<sup>3</sup>Nous nous plaçons dans le cas où  $\partial_\theta \zeta = 0$ , le coefficient d'érosion est donc égal au coefficient d'érodabilité, de plus nous considérons qu'un écoulement rectiligne ne se déplace pas latéralement, c'est à dire  $\partial_{\mathcal{D}} \zeta|_{\mathcal{D}=0} = 0$ .

<sup>4</sup>En fait, distance entre le plan moyen de la plaine d'inondation, ou plan de référence, et le plan contenant le profil d'équilibre.

## 6.2 Modèle de faciès

Dépôts du Lit Mineur	$\Phi_{pb}$ $\Phi_{mp}$	Granulométrie des barres de méandres Granulométrie des bouchons d'argile
Dépôts de débordement	$\mu$ $a$ $\lambda$ $f_{deb}$	Décroissance de l'épaisseur Epaisseur constante Décroissance de la granulométrie Fréquence des crues de débordement  On prend $a = 0$
Dépôts organiques	$z_{hu}$ $t_{mo}$ $\tau_{mo}$ $n_{mo}$	Hauteur de la nappe sous-fluviale Temps caractéristique de formation Taux de compaction Nombre de compactions
Lobes de crevasse	$\mathcal{L}_{cre}$ $\mathcal{L}_{I \rightarrow II}$ Dimensions Granulométrie	Loi de formation d'une crevasse Loi de transition épanchement I $\rightarrow$ II  L'écoulement intervient



## Chapitre 7

# Réponse du système fluvial et architecture des dépôts

### 7.1 Paramètres étudiés

Un système fluvial demeure rarement méandri-forme sur une longue période de temps [Teles (1999)]. La charge sédimentaire, le profil d'équilibre varient au gré de contrôles allocycliques tels que le climat, le contexte tectonique ou l'eustasie. La réponse du système comprend alors fréquemment un changement de morphologie et un passage du style méandri-forme au style en tresses ou anastomosé. Néanmoins nous ferons par la suite l'hypothèse que les écoulements chenalisés modélisés ne sont jamais interconnectés.

Nous nous plaçons dans un contexte aggradant, le chenal demeure donc en dessous de son profil d'équilibre. De plus nous ne modélisons pas la formation de dépôts organiques. Dans cette partie certains paramètres sont considérés comme des processus aléatoires. On peut donc obtenir plusieurs réalisations différentes, les paramètres conservant les mêmes lois.

Le temps écoulé est compté en itérations du modèle. Le temps écoulé entre deux crues de débordement successives (période de retour des crues), les périodes sans avulsion régionale et les périodes de stabilité du profil d'équilibre sont modélisées comme des processus aléatoires discrets suivant des lois de Poisson de paramètres donnés. La valeur de ce paramètre est  $\frac{1}{f_{deb}}$  pour les

crues de débordement et  $\frac{1}{f_{reg}}$  pour les avulsions régionales. L'élévation du profil d'équilibre est également une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur un intervalle donné.

Enfin, nous appelons intensité de la crue de débordement la différence entre l'altitude moyenne du chenal avant et après la crue de débordement. Cette différence correspondant à un taux d'aggradation moyen mesuré au niveau des levées du chenal, on la note  $\Delta L$ . On la simule comme une variable aléatoire réelle suivant une loi lognormale d'espérance et de variance fixées. Elle nous permet de calculer pour chaque crue de débordement le taux d'ajustement du profil longitudinal qui est égal à :

$$\alpha_{eq} = \min\left(\frac{\Delta L}{z_{eq} - z_{ch}}, 1\right)$$

où  $z_{ch}$  désigne l'élévation moyenne de la ligne médiane du chenal (on a  $z_{ch} \leq z_{eq}$ ).

Nous étudions principalement l'influence de :

- la position du profil d'équilibre  $z_{eq}$ ,
- la fréquence et l'intensité des crues de débordement  $f_{deb}$ ,
- la fréquence des avulsions régionales  $f_{reg}$ .

## 7.2 Influence des paramètres étudiés

Dans cette partie la plaine d'inondation simulée est un carré de 6 km de côté.

### 7.2.1 Système en phase

*Cf. figure 7.1 p. 93*

Nous considérons un système libre pour lequel l'élévation du profil d'équilibre est rapide. L'espace disponible pour la préservation des sédiments demeure important. Il est progressivement comblé par des crues de débordement d'intensité et de fréquence moyennes (fig. 7.1(a)). La fréquence des avulsions régionales n'étant pas trop importante le chenal a le temps de migrer

latéralement. Cette migration latérale conduit à la formation de corps sableux d'extension latérale moyenne (fig. 7.1(c)). Comme le taux d'aggradation du système est relativement élevé et que les avulsions régionales sont relativement fréquentes ces corps ne sont cependant que faiblement interconnectés (fig. 7.1(b)).

### 7.2.2 Système contraint avec avulsions

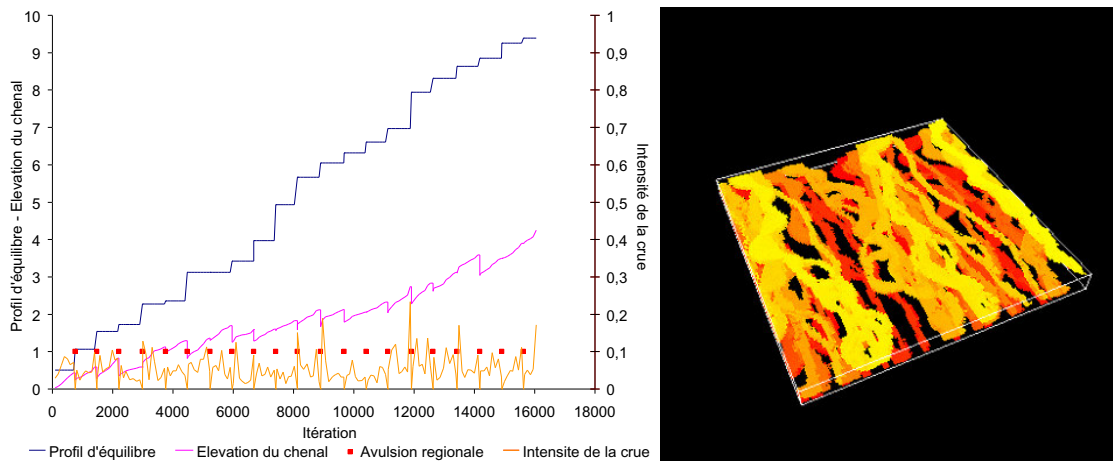
*Cf. figure 7.2 p. 94*

On suppose qu'en amont de la portion de plaine d'inondation modélisée existe une zone où les avulsions sont possibles. On peut par exemple penser à une surrection tectonique de la partie amont du bassin. Les avulsions régionales sont donc fréquentes. En revanche, sur la portion modélisée, l'élévation du profil d'équilibre est lente. L'espace disponible pour la préservation des sédiments et le dépôt des crues de débordement demeure donc très faible : l'aggradation du système est fortement contrainte (fig. 7.2(a)). La zone modélisée correspond à une zone de non-dépôt (zone de *by-pass*). Bien que l'intensité des crues soit plus forte que dans le cas précédent, elles n'ont que peu d'influence sur la nature des dépôts car le matériel qu'elles pourraient apporter sur la plaine ne peut pas être stocké. De plus,

leur fréquence faible diminue la possibilité des avulsions locales. Sous ces conditions, le chenal a le temps de migrer latéralement. Cette migration latérale conduit à la formation de corps sableux d'extension latérale moyenne, limitée par la fréquence des avulsions régionales. Bien que la zone modélisée soit une zone de "non-dépôt"<sup>1</sup> on observe la formation d'un volume important de corps potentiellement réservoirs (fig. 7.2(c)). Hormis la présence de quelques bouchons d'argile (fig. 7.2(c)) ces corps sont bien interconnectés. En revanche la fréquence importante des avulsions régionales contribue à créer deux unités assez distinctes dues au va et vient du chenal entre les parties basses de la plaine alluviale (fig. 7.2(b)).

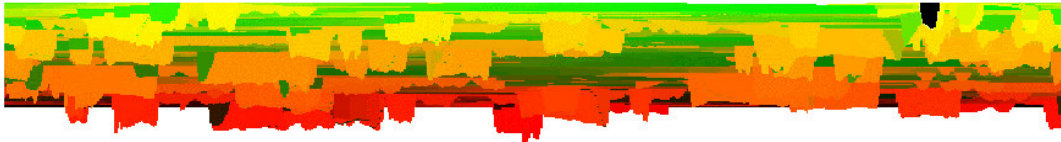
---

<sup>1</sup>Au sens de non-aggradation (*cf.* en particulier le commentaire de la figure 7.6 p. 99).



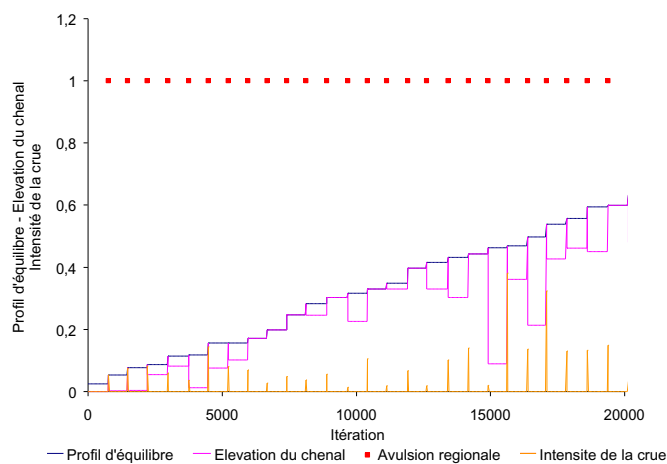
(a) Paramètres de contrôle

(b) Architecture des dépôts sableux

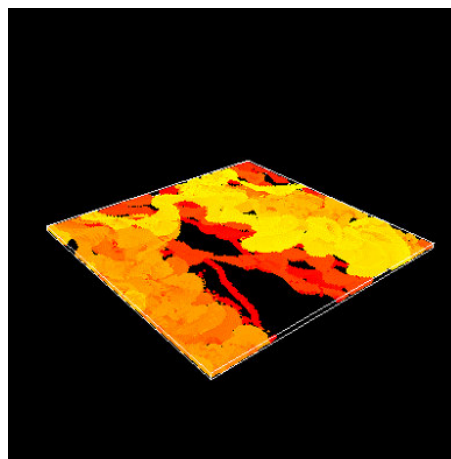


(c) Coupe transversale à l'axe de la vallée

FIG. 7.1 – Évolution d'un système en phase avec l'élévation de son profil d'équilibre  
 Les périodes moyennes de stabilité du profil d'équilibre et de retour des avulsions régionales sont de 750 itérations, celle de retour des crues de débordement est de 100 itérations. L'élévation moyenne du profil d'équilibre est de 50 *cm*. L'intensité moyenne des crues de débordement est de l'ordre de 5 *cm*.



(a) Paramètres de contrôle



(b) Architecture des dépôts sableux



(c) Coupe transversale à l'axe de la vallée

FIG. 7.2 – Évolution d'un système contraint par son profil d'équilibre, en aval d'une zone instable. Les périodes moyennes de stabilité du profil d'équilibre, de retour des crues de débordement et de retour des avulsions régionales sont de 750 itérations. L'élévation moyenne du profil d'équilibre est 2,5 cm. L'intensité moyenne des crues est de l'ordre de 40 cm.

### 7.2.3 Système contraint

*Cf. figure 7.3 p. 96*

On se place dans les mêmes conditions qu'à la section précédente. Seules les avulsions régionales sont beaucoup moins fréquentes, de plus, la possibilité d'avulsions locales est supprimée. Nous modélisons donc un système relativement stable. Comme précédemment, le chenal a le temps de migrer latéralement. Les avulsions ne limitant pas cette migration latérale, elle conduit à la formation de corps sableux d'extension latérale importante. Encore une fois, bien que la zone modélisée soit une zone de "non-dépôt"<sup>2</sup>

on observe la formation d'un volume important de corps potentiellement réservoirs (fig. 7.3(a)). La continuité latérale de ces corps est importante. Ils sont bien interconnectés, cependant l'absence d'avulsion permettant le développement de méandres important et donc de recouvrements par tangence, on observe la présence de nombreux bouchons d'argile bien développés (fig. 7.3(c)). La rareté des avulsions régionales ne contribue pas à créer des unités distinctes comme précédemment (fig. 7.3(b)).

### 7.2.4 Système à réponse rapide

*Cf. figure 7.4 p. 97*

Nous considérons à nouveau un système pour lequel l'élévation du profil d'équilibre est assez rapide mais se produit par saccades. La fréquence des crues de débordement étant élevée, l'espace disponible pour la préservation des sédiments généré par cette élévation du profil d'équilibre est comblé rapidement et le système se retrouve très vite contraint par la position de son profil d'équilibre (fig. 7.4(a)). La fréquence des avulsions régionales n'étant pas trop importante le chenal a le temps de migrer latéralement. Le nombre important de crues de débordement ne

contribuant pas à une aggradation verticale du système conduit à lisser progressivement la topographie de la plaine d'inondation et diminuer également le nombre d'avulsions locales. Cette migration latérale conduit à la formation de corps sableux d'extension latérale moyenne (fig. 7.4(b)). Comme le réajustement du profil d'équilibre est très rapide, ces corps ont une bonne continuité latérale mais ne sont que très peu connectés verticalement car les avulsions régionales sont concomitantes des élévations du profil d'équilibre (fig. 7.4(c)).

### 7.2.5 Système dominé par les avulsions régionales

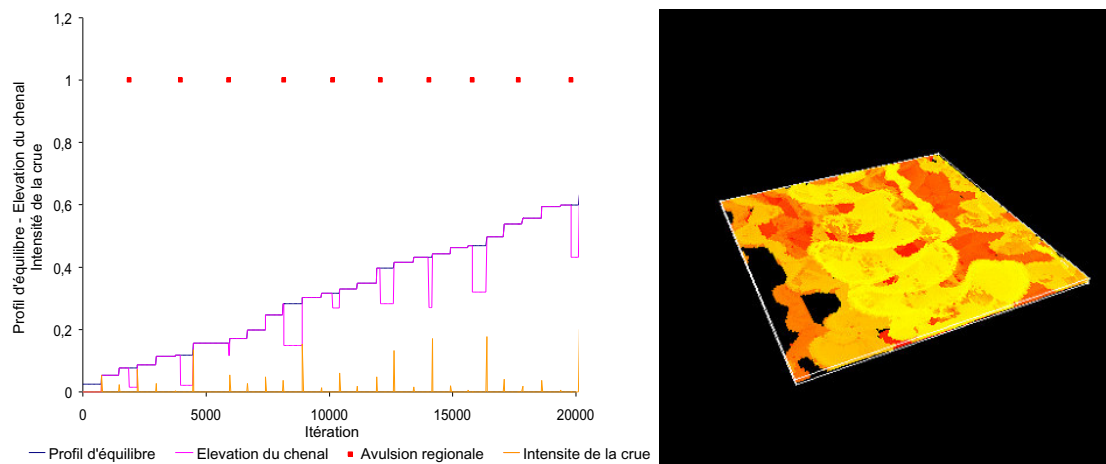
*Cf. figure 7.5 p. 98*

Enfin, on suppose qu'en amont de la portion de plaine d'inondation modélisée, il existe une zone très instable où les avulsions sont fréquentes. Sur la portion modélisée, les avulsions régionales sont donc fréquentes. De plus, l'élévation du profil d'équilibre est moyenne. Les crues de débordement sont à nouveau très fréquentes et contribuent à combler rapidement l'espace disponible pour la préservation des sédiments (fig. 7.5(c)).

La fréquence des avulsions contribue à déplacer continuellement la position du chenal sur la plaine d'inondation. En conséquence, il n'a pas le temps de migrer latéralement. Les corps sableux générés n'ont donc aucune extension latérale et se présentent sous la forme de long rubans (fig. 7.5(c) et fig. 7.5(b)). L'aggradation du système étant importante, ils sont également très mal interconnectés.

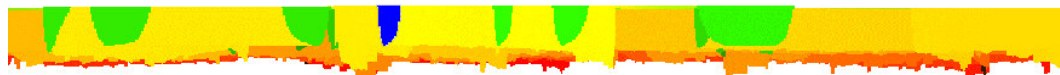
---

<sup>2</sup> *Ibid.*



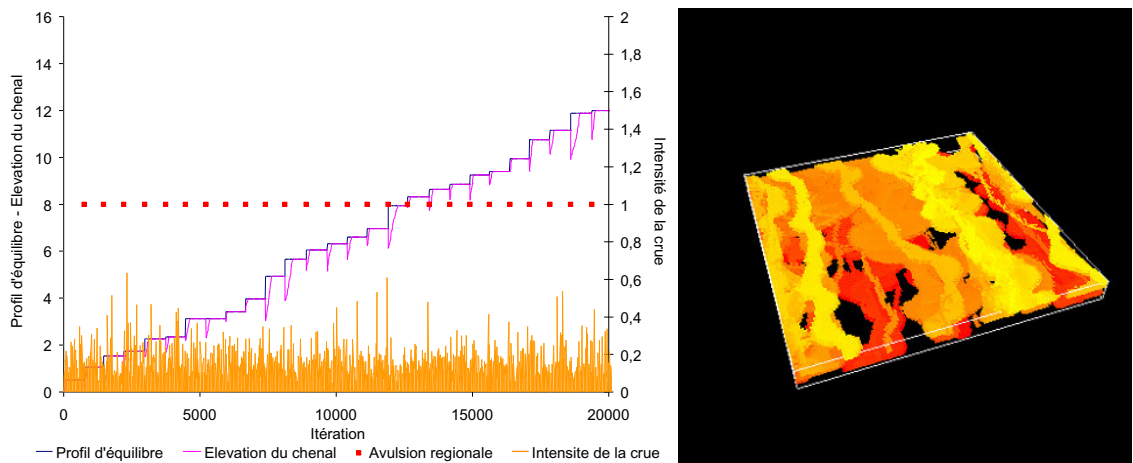
(a) Paramètres de contrôle

(b) Architecture des dépôts sableux



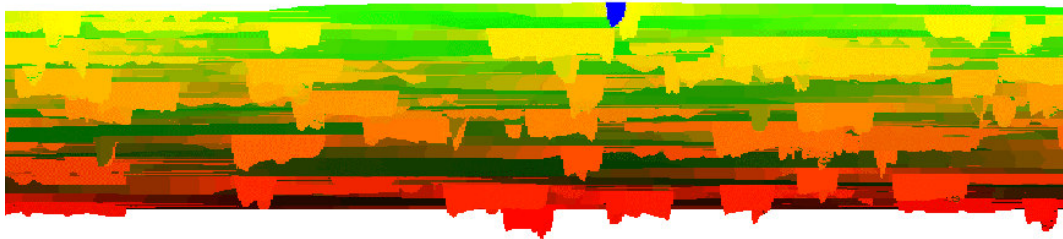
(c) Coupe transversale à l'axe de la vallée

FIG. 7.3 – Évolution d'un système stable contraint par son profil d'équilibre  
 Les périodes moyennes de stabilité du profil d'équilibre et de retour des crues de débordement sont de 750 itérations. Celle de retour des avulsions régionales est de 2000 itérations. L'élévation moyenne du profil d'équilibre est 2,5 *cm*. L'intensité moyenne des crues est de l'ordre de 40 *cm*.



(a) Paramètres de contrôle

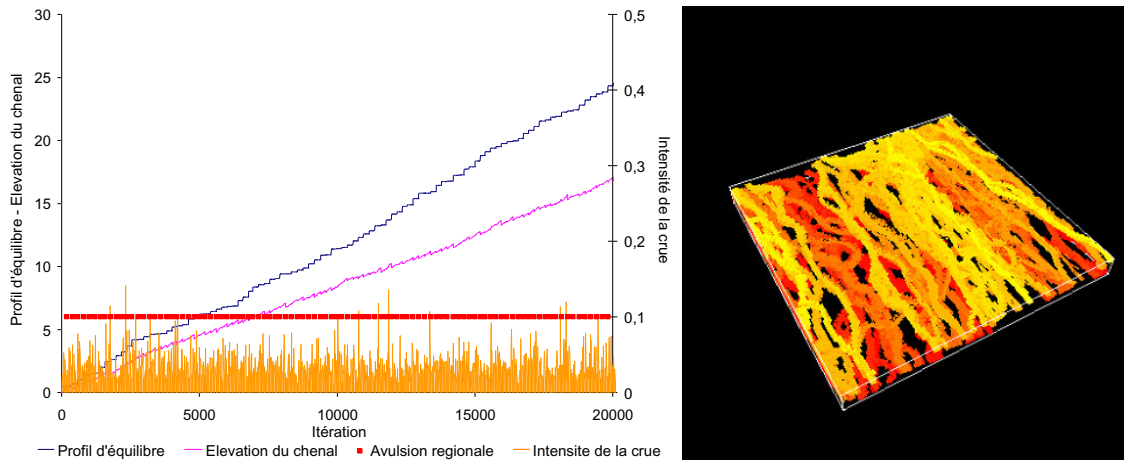
(b) Architecture des dépôts sableux



(c) Coupe transversale à l'axe de la vallée

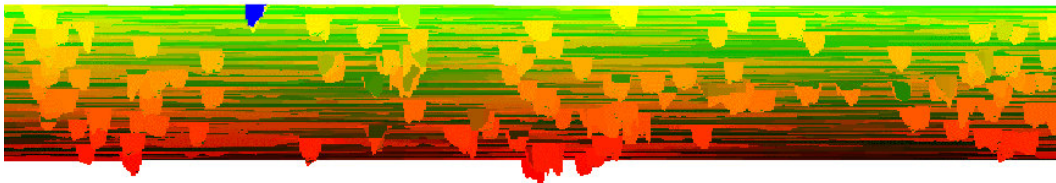
FIG. 7.4 – Évolution d'un système aggradant à réponse rapide

Les périodes moyennes de stabilité du profil d'équilibre et de retour des avulsions régionales sont de 750 itérations. Celle de retour des crues de débordement est de 20 itérations. L'élévation moyenne du profil d'équilibre est 50 *cm*. L'intensité moyenne des crues est de l'ordre de 15 *cm*.



(a) Paramètres de contrôle

(b) Architecture des dépôts sableux



(c) Coupe transversale à l'axe de la vallée

FIG. 7.5 – Évolution d'un système aggradant dominé par les avulsions

Les périodes moyennes de stabilité du profil d'équilibre et de retour des avulsions régionales sont de 200 itérations. Celle de retour des crues de débordement est de 20 itérations. L'élévation moyenne du profil d'équilibre est 25 *cm*. L'intensité moyenne des crues est de l'ordre de 4 *cm*.

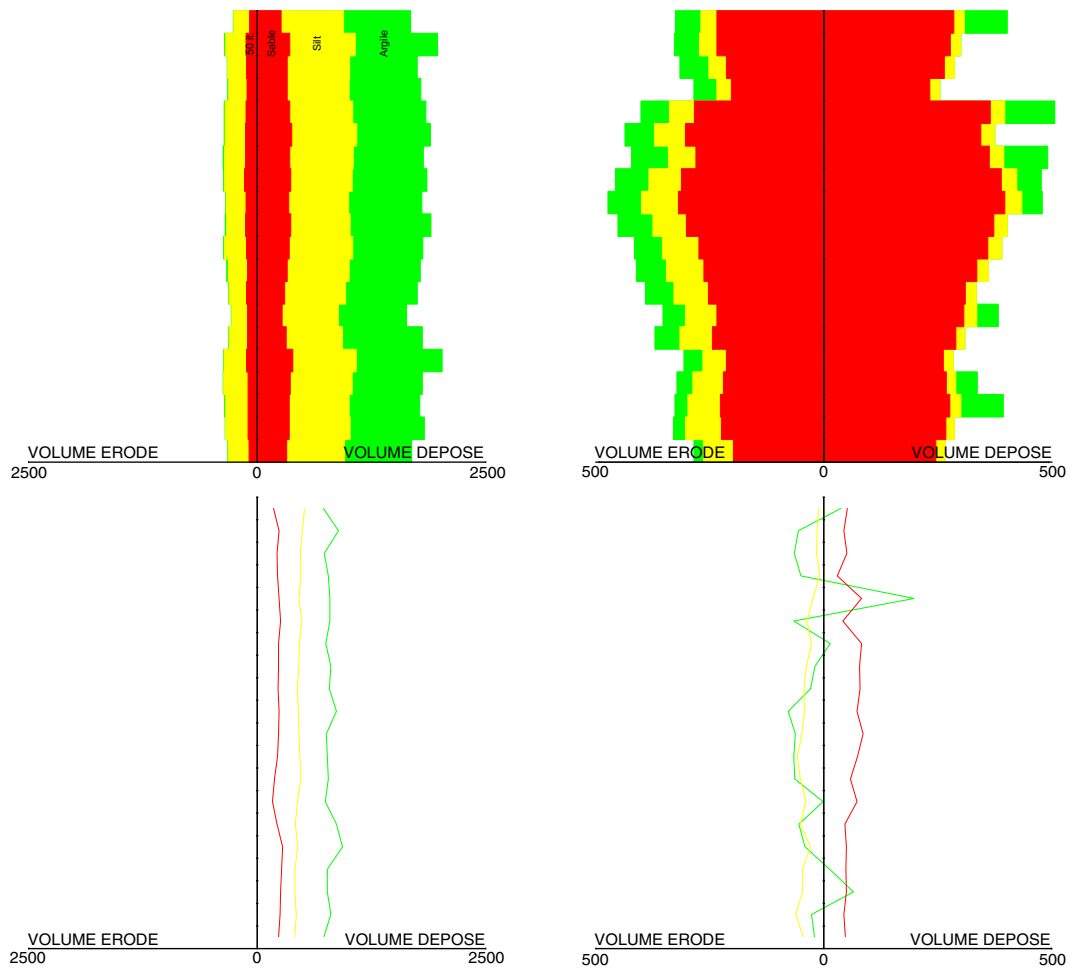


FIG. 7.6 – Flux de matière instantanés à travers la plaine d'inondation

La plaine d'inondation modélisée est un carré de  $6\text{ km}$  de côté. Le débit fluide est de  $100\text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . L'axe des ordonnées des quatre figures est gradué en  $\text{m}^3$ , l'axe des ordonnées représente le temps et est gradué toutes les 50 itérations. Les figures du haut représentent les volumes totaux de matière érodée, à gauche, ou déposée, à droite, toutes les 50 itérations. Le rouge représente les sables, le jaune les silts et le vert les argiles. L'aire coloriée est proportionnelle au volume de sédiment considéré. Les figures du bas représentent le bilan de masse pour chaque classe granulométrique correspondant aux figures situées au dessus.

Les deux figures de gauche correspondent à une simulation où le profil d'équilibre s'élève rapidement et l'espace disponible est comblé progressivement par des crues de débordement fréquentes. Les dépôts de sables correspondent essentiellement aux dépôts de migration latérale, les dépôts de silt et d'argiles correspondent essentiellement aux lobes de crevasse et aux dépôts de débordement. Le système évacue principalement du silt qui correspond aux dépôts proximaux érodés lors de la migration latérale du chenal. Le bilan global est positif pour chaque classe granulométrique.

Les deux figures de droite correspondent à la même simulation où le profil d'équilibre ne s'élève plus. Une fois son profil d'équilibre atteint, le système migre latéralement et dépose essentiellement du sable et de l'argile correspondant aux recouvrements par tangence ou déversement. Le bilan global est positif en sable mais négatif en silt et en argile. Les dépôts de débordement sont évacués du système et sont remplacés par des dépôts sableux. Une quantité importante de corps potentiellement réservoirs est donc formée par substitution de corps non réservoirs, ceci sans que l'on soit dans une période d'aggradation importante.

## 7.3 Conclusions

Des cinq exemples précédents, nous tirons quelques conclusions générales :

- Les avulsions régionales contribuent à diminuer l'élévation moyenne du chenal en le déplaçant vers un creux topographique. Dans un contexte aggradant elles éloignent le système de son profil d'équilibre. Elles contribuent ainsi à favoriser le dépôt de particules fines apportées par les crues de débordement. Cependant, elles s'accompagnent, lors de l'installation du nouveau cours du chenal, de l'érosion des dépôts distaux sous-jacents, également de granulométrie fine.
- La fréquence des avulsions, locales ou régionales, est un obstacle au développement de fortes sinuosités. En conséquence, plus elles sont nombreuses et moins les corps sableux générés présentent une extension latérale importante.
- Le profil d'équilibre, lorsqu'il contraint le système et empêche l'aggradation conduit à la formation par accrétion latérale d'une quantité importante de corps potentiellement réservoirs. Ces dépôts d'accrétion latérale peuvent se trouver dans des zones de transit et non de dépôt. Une partie de la charge sableuse est alors piégée et substituée à du matériel de granulométrie plus fine (*cf.* fig. 7.6 p. 99).
- L'intensité et la fréquence des crues de débordement, lorsqu'elles sont élevées, contribuent à rattraper rapidement le profil d'équilibre du chenal. Si l'augmentation du profil d'équilibre se fait par saccades ou par paliers, les dépôts sableux, même s'ils présentent une extension latérale importante, peuvent ne pas être fortement interconnectés.

## Chapitre 8

# Reproduction de cyclicités

### 8.1 Incision

**Figures 8.1 p. 102 et 8.2 p. 103**

Nous simulons l'incision d'un bloc carré de  $6\text{ km}$  de côté et de  $10\text{ m}$  d'épaisseur. Le profil d'équilibre est graduellement abaissé. La formation des dépôts de matière organique et des lobes de crevasses ainsi que les processus d'avulsion ne sont pas pris en compte. Enfin, nous formulons l'hypothèse que le système reste méandrique durant toute la phase d'incision.

Les figures 8.1 p. 102 et 8.2 p. 103 représentent quatre états successifs du système lors de cette phase d'incision.

Durant les 5.000 premières itérations, le chenal a atteint son profil d'équilibre. Des méandres libres se développent à la surface de la plaine

d'inondation et des crues de débordements sont simulées afin de donner au système une configuration réaliste (fig. 8.1(a) et fig. 8.2(a)).

De l'itération 5.000 à l'itération 30.000 le profil d'équilibre du chenal est abaissé toutes les 10 itérations pour simuler une incision totale de  $\Delta z_{eq}^-$ . Le taux d'ajustement  $\alpha_{eq}$  est constant, de valeur 1. Le chenal est donc supposé réagir instantanément à l'abaissement de son profil d'équilibre. La vitesse d'abaissement du profil d'équilibre est faible au début et à la fin du cycle d'incision, elle est maximale au milieu du cycle. Si  $z_{eq}$  désigne l'altitude en mètres du profil d'équilibre nous posons :

$$z_{eq} = z_{eq}|_{t=0} - \frac{\Delta z_{eq}^-}{2} \left[ 1 + \cos \pi \left( \frac{t - 5000}{25000} - 1 \right) \right]$$

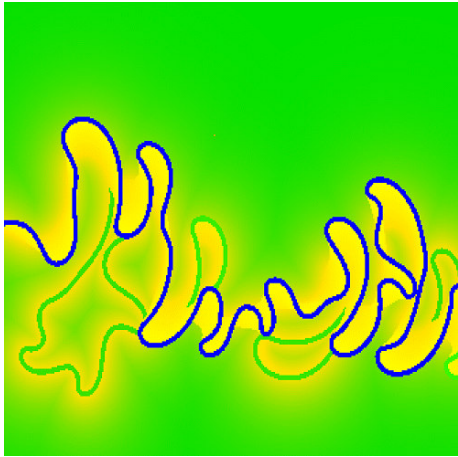
où  $t$  désigne le temps compté en itérations. Nous prenons ici  $\Delta z_{eq}^- = 5\text{ m}$ .

A l'itération 10.000, l'incision est encore faible mais déjà l'influence de l'encaissement se ressent sur la géométrie des méandres (fig. 8.1(b) et fig. 8.2(b)).

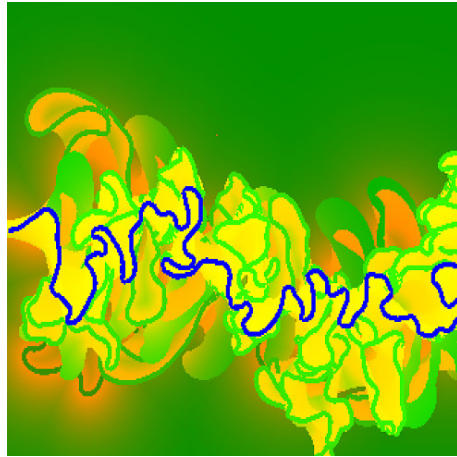
A l'itération 25.000, le maximum de l'incision a été simulé. On observe la formation de terrasses étagées sur les flancs de la vallée et des formes caractéristiques des méandres encaissés,

dont l'évolution est contrainte par les flancs de la vallée (fig. 8.2(c) et fig. 8.2(c)).

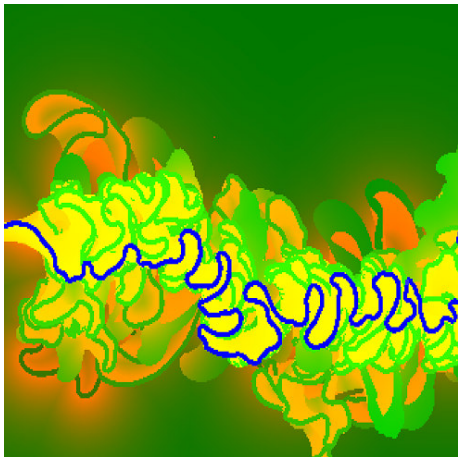
A l'itération 40.000, l'incision est terminée depuis 10.000 itérations et le profil d'équilibre est maintenu constant. Le chenal divague alors au fond de sa vallée en l'élargissant progressivement. L'hypothèse d'un chenal méandrique est ici assez forte. Il est probable que dans un système réel on observerait une transition vers un système en tresses (fig. 8.1(d) et fig. 8.2(d)).



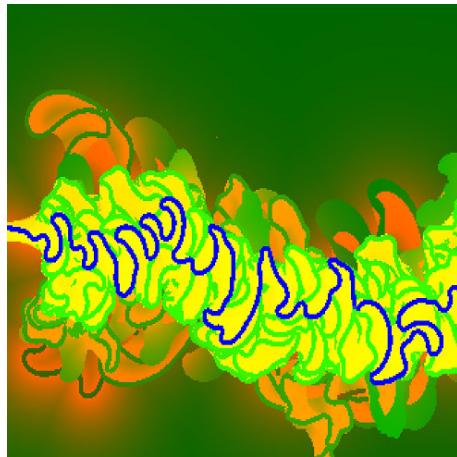
(a) Itération 5.000



(b) Itération 10.000



(c) Itération 25.000



(d) Itération 40.000

FIG. 8.1 – Cycle d'incision - vue aérienne



(a) Itération 5.000



(b) Itération 10.000



(c) Itération 25.000



(d) Itération 40.000

FIG. 8.2 – Cycle d'incision - vue en coupe perpendiculaire à l'axe de la vallée

## 8.2 Aggradation

Figures 8.3 p. 105 et 8.4 p. 106

Nous simulons le remplissage de la vallée incisée simulée au chapitre précédent. Le profil d'équilibre est graduellement relevé. La pente hydraulique de l'écoulement est rétablie à sa valeur initiale. La formation des dépôts de matière organique et des lobes de crevasses et les processus d'avulsion sont à nouveau négligés. Le système reste toujours méandrique.

Les figures 8.3 p. 105 et 8.4 p. 106 représentent quatre états successifs du système lors de cette phase de remplissage d'une vallée incisée.

$$z_{eq} = z_{eq}|_{t=40000} + \frac{\Delta z_{eq}^+}{2} \left[ 1 + \cos \pi \left( \frac{t - 40000}{30000} - 1 \right) \right]$$

où  $t$  désigne le temps compté en itérations. Nous prenons ici  $\Delta z_{eq}^+ = 15 \text{ m}$ .

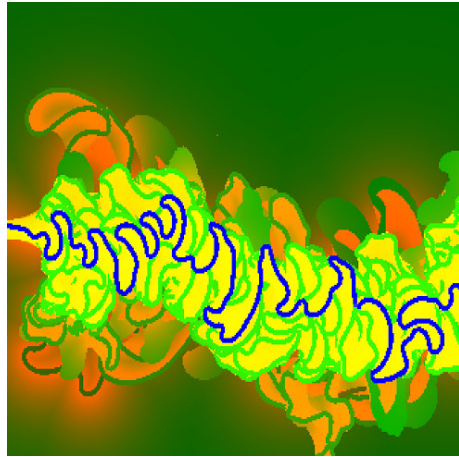
De l'itération 40.000 à l'itération 50.000 nous imposons une valeur élevée à la grandeur caractéristique de décroissance de la granulométrie lors des crues de débordements  $\lambda$ . Ainsi le fond de la vallée est comblé avec un matériel relativement grossier (fig. 8.3(b) et fig. 8.4(b)) puis cette grandeur caractéristique est diminuée progressivement.

A l'itération 52.000 la vallée incisée est totalement remplie. Le profil d'équilibre continuant à

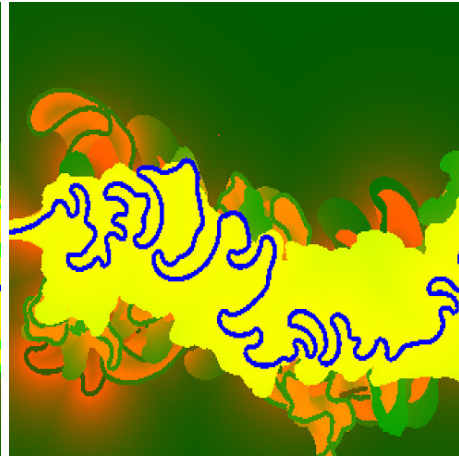
De l'itération 40.000 à l'itération 70.000 le profil d'équilibre du chenal est élevé toutes les 10 itérations pour simuler une aggradation totale de  $\Delta z_{eq}^+$ . Nous simulons des crues de débordement fréquentes et d'intensité moyenne, le chenal suit donc l'élévation de son profil d'équilibre (cf. section 7.2.4 p. 95). La vitesse d'élévation du profil d'équilibre est faible au début et à la fin du cycle d'aggradation, elle est maximale au milieu du cycle. Si  $z_{eq}$  désigne l'altitude en mètres du profil d'équilibre nous posons :

s'élever, la plaine d'inondation se construit progressivement par aggradation. La grandeur caractéristique de décroissance de la granulométrie lors des crues de débordements  $\lambda$  a retrouvé sa valeur initiale à l'itération 50000 (fig. 8.3(c) et fig. 8.4(c)).

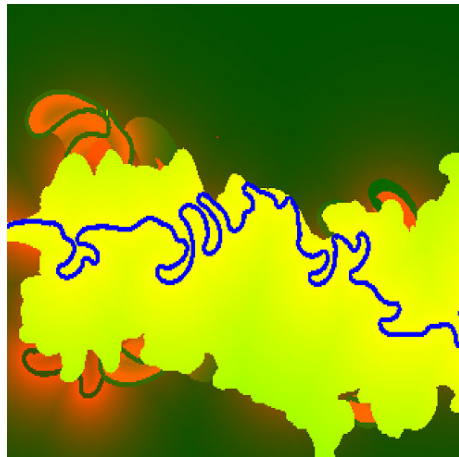
Le profil d'équilibre du chenal est stabilisé à partir de l'itération 70.000, on observe le retour du système à son état initial (fig. 8.3(d) et fig. 8.4(d)). Son profil d'équilibre est à nouveau maintenu stable.



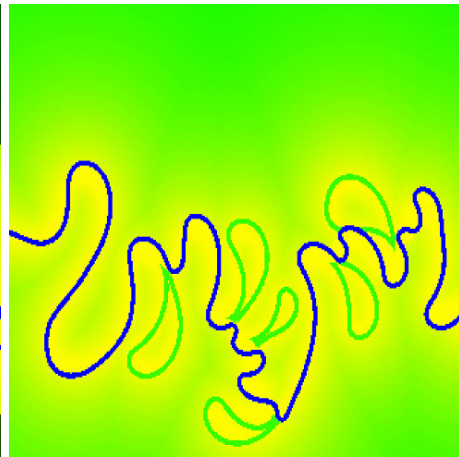
(a) Itération 40.000



(b) Itération 50.000



(c) Itération 52.000



(d) Itération 72.000

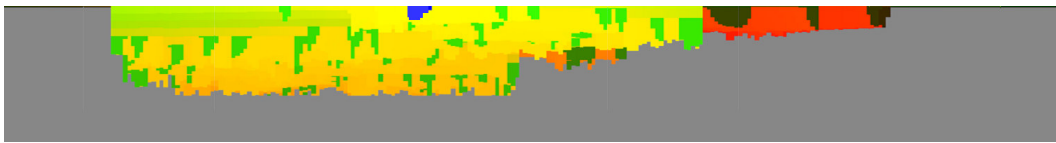
FIG. 8.3 – Cycle d'aggradation, remplissage de la vallée incisée - vue aérienne



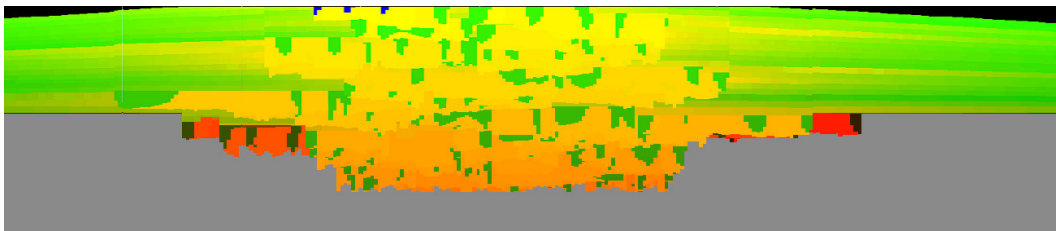
(a) Itération 40.000



(b) Itération 50.000



(c) Itération 52.000



(d) Itération 72.000

FIG. 8.4 – Cycle d'aggradation, remplissage de la vallée incisée - vue en coupe perpendiculaire à l'axe de la vallée

## Conclusions

*Nous avons proposé un modèle d'évolution spatio-temporelle d'un chenal méandriforme couplé à un modèle de faciès détaillé reproduisant les alluviaux à l'échelle des corps chenalisés. Ce couplage permet de construire rapidement des architectures réalistes. La géométrie des corps potentiellement réservoirs et leur agencement spatial sont alors facilement appréhendés. L'utilisation de paramètres stochastiques permet de proposer plusieurs réalisations. Un nombre restreint de paramètres clés permet de contrôler le type d'architecture désiré. Une fois ce type d'architecture choisi, nous proposons au chapitre suivant des méthodes pour contraindre la localisation des dépôts.*



Troisième partie

Vers un conditionnement...



## Résumé

*Nous reprenons le modèle développé dans la partie précédente pour étudier l'influence de certains de ses paramètres à l'aide de courbes de proportions verticales. La lecture de ces courbes apporte des informations sur l'architecture globale des dépôts et permet en retour d'apprécier les grandeurs relatives de certains paramètres. Nous proposons ensuite un moyen simple de contraindre la localisation de la ceinture de chenaux du système et son évolution par migration latérale à l'aide de "cartes d'érodabilité". Dans une certaine mesure, ces cartes peuvent être interprétées comme des cartes de localisation de la ceinture de méandres. Enfin, nous étudions la possibilité de contraindre un chenal à passer par un point donné.*

Dans l'ensemble de cette partie, nous confondrons érodabilité et coefficient d'érosion. Nous nous plaçons donc implicitement dans la situation pour laquelle la vitesse de migration latérale du chenal s'écrit (*cf.* § 4.1.4 p. 60) :

$$\zeta = \Xi D$$

De plus, les processus d'avulsion et le dépôt de matière organique ne sont pas pris en compte. Le système évolue alors latéralement par érosion de ses berges et recoupements par tangence. Les crues de débordements contribuent à son aggradation progressive.

## Chapitre 9

# Architecture des dépôts

### 9.1 La part du hasard

Chacun des paramètres du modèle, résumés au chapitre 6 p. 87, dépend du temps et peut être considéré comme un processus stochastique. De même, chaque événement hydrologique peut être modélisé à la lumière de la connaissance des systèmes fluviaux modernes (*cf.* § F.1 p. 114). Les débits de crue peuvent par exemple être simulés comme les réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi lognormale ou une loi de Gumbel. Bien que le modèle d'évolution de la ligne médiane et, dans une moindre mesure les modèles de dépôts, reposent sur des considérations physiques et le respect de lois déterministes, le système modélisé est extrêmement sensible aux faibles perturbations. De plus, certains processus, par exemple les recoupements par tangence ou les avulsions, sont caractérisés par une forte non-linéarité (*cf.* fig. 9.1 p. 114). Dès que l'on introduit une composante aléatoire, elle devient

alors vite prépondérante dans l'évolution du système. De faibles perturbations peuvent ainsi permettre d'obtenir des simulations très diversifiées (*cf.* § 4.2 p. 61).

On peut tirer avantage des caractéristiques d'instabilité du système pour explorer différentes possibilités. Elles deviennent toutefois rapidement un obstacle à son conditionnement. Les non linéarités rendent en effet très coûteuse toute méthodologie reposant sur des stratégies "essai-erreur" et celles d'inversion directe se heurtent à l'irréversibilité temporelle de l'équation d'évolution spatiale du chenal. La seule démarche opérationnelle de conditionnement nous semble alors être, à l'heure actuelle, celle visant à guider le système au cours de son évolution vers le résultat que l'on cherche à reproduire. Dans cette logique, nous essayons de caractériser simplement l'influence de certains paramètres.

### 9.2 Courbes de proportions verticales

Nous considérons tout d'abord la distribution moyenne des faciès à l'échelle de la plaine d'inondation à l'aide de courbes de proportions verticales. Ces courbes représentent, pour un bloc tri-dimensionnel donné, l'évolution avec la profondeur des proportions horizontales de faciès caractérisant les dépôts. Dans une optique pétrolière, elles peuvent par exemple être obtenues ou estimées à partir de données de puits.

Leur utilisation est motivée par le fait que les simulations purement stochastiques les honorant donnent fréquemment de bons résultats pour l'étude de la migration des fluides entre corps réservoirs [Ravenne et al. (2000)].

En conséquence, nous cherchons à déterminer l'influence des paramètres du modèle présenté dans ce travail sur l'allure de ces courbes de pro-

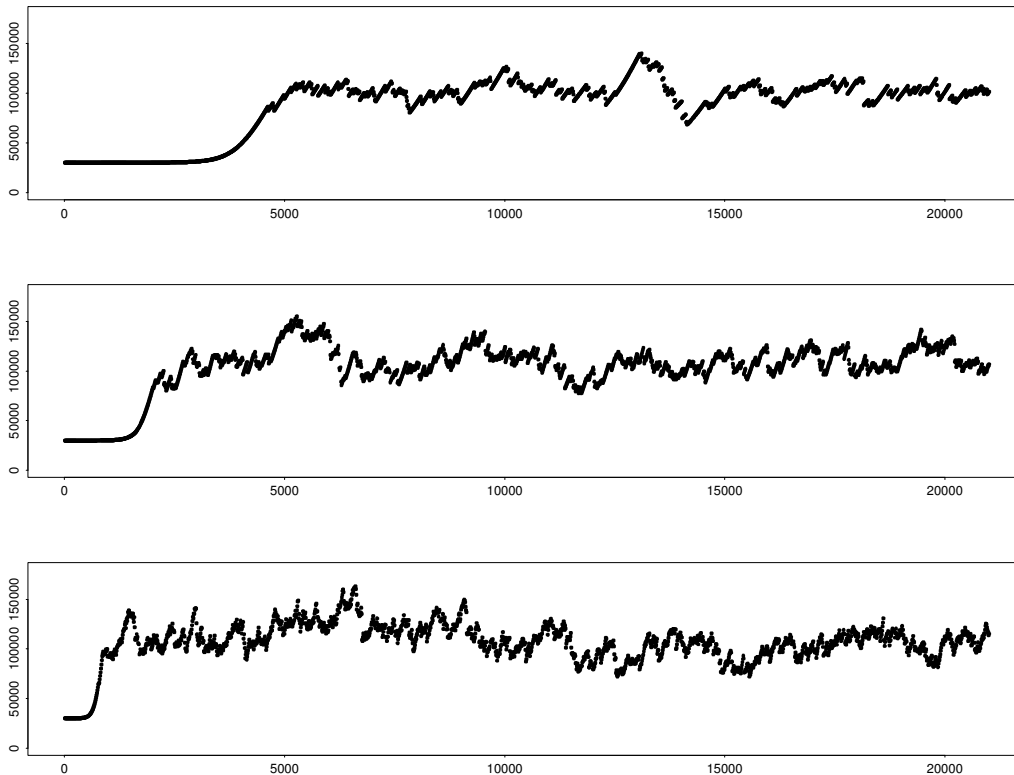


FIG. 9.1 – Longueur d'un chenal au cours du temps

L'axe des ordonnées est gradué en mètres, l'axe des abscisses est gradué en itérations. Les trois figures ont été réalisées à partir des mêmes conditions initiales, mais pour des pentes différentes. Les valeurs de pente sont  $I = 0,0005$  pour le graphique du haut,  $I = 0,001$  pour le graphique du milieu et  $I = 0,002$  pour le graphique du bas.

Le chenal évolue à partir d'une ligne médiane rectiligne légèrement perturbée. La longueur du chenal croît d'abord lentement avec le développement des méandres. A partir d'une certaine sinuosité, la longueur qui tend toujours à s'accroître est maintenue dans un intervalle de valeurs par les recoupements par tangence qui la diminuent brutalement. Chacune des discontinuités observées correspond ainsi à un ou plusieurs de ces recoupements.

portions verticales (*cf.* fig. 9.2 p. 116). Lorsque l'influence d'un paramètre est testée, tous les autres paramètres sont maintenus constants. Les résultats ont été obtenus en considérant à chaque

fois le même état initial du système. Le profil d'équilibre du chenal a également été choisi tel qu'il ne soit pas un obstacle à l'aggradation verticale de la plaine d'inondation.

### 9.2.1 Coefficient d'érosion

#### Figure 9.2(a) p. 116

Un changement de la valeur moyenne du coefficient d'érosion entraîne une migration du chenal et un développement des méandres plus rapide<sup>1</sup>. Dans un contexte d'aggradation verticale à vitesse constante, une proportion plus importante de sable est déposée. Ainsi, la transition entre

deux niveaux possédant un coefficient d'érosion différent se traduit sur la courbe de proportions verticales par une augmentation progressive de la teneur en sable, la conservation de la proportion de silts déposée et une diminution de la proportion d'argiles.

### 9.2.2 Largeur du chenal

#### Figure 9.2(b) p. 116

En faisant varier la largeur du chenal on augmente également la taille des dépôts de *point-bars* et par conséquent la proportion de sable déposé. Cette augmentation se fait par paliers progressifs, au fur et à mesure que les chenaux

s'amalgament les uns sur les autres. La proportion de silts semble légèrement diminuer et par conséquent l'essentiel de l'augmentation de la teneur en sable est équilibrée par la diminution de la proportion d'argiles déposées.

### 9.2.3 Fréquence des crues

#### Figure 9.2(c) p. 116

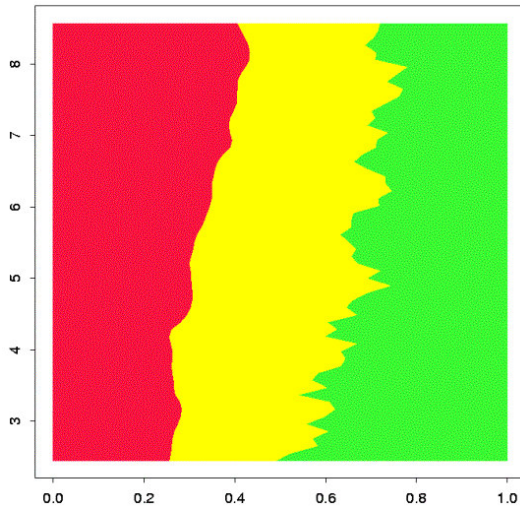
Les crues sont modélisées comme des processus de Poisson. La simulation a été effectuée sur un intervalle de temps de 120.000 itérations divisé en trois périodes de durées égales<sup>2</sup>. Sur chacune de ces périodes une fréquence de crues différente est imposée en changeant l'intensité du proces-

sus de Poisson. Les périodes de crues rares correspondent à un niveau dont la proportion en sable est beaucoup plus importante. En effet, entre deux crues, le chenal a le temps de migrer à travers toute l'étendue de sa plaine d'inondation et les dépôts de *point-bars* sont prépondérants

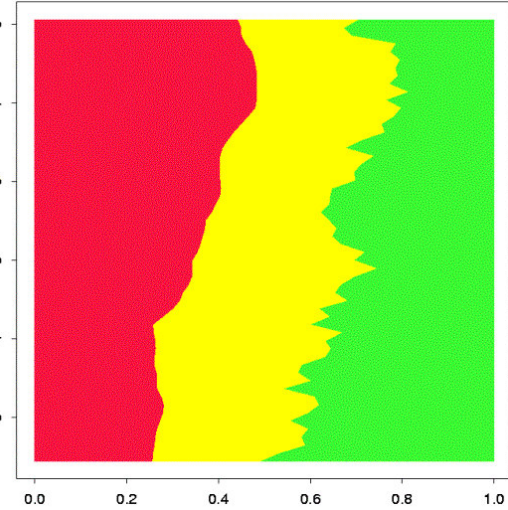
---

<sup>1</sup>Étant donné le schéma de discrétisation choisi (*cf.* § 4.1.3.4, eq. 4.12 p. 59), la multiplication du taux de migration latérale  $\zeta$  par un paramètre  $\alpha$  a la même influence qu'une multiplication du pas de temps du modèle par ce même paramètre  $\alpha$ , ceci à taux d'aggradation  $\Phi$  nul! En conséquence, l'interprétation proposée en terme de vitesse de migration latérale du chenal peut également être formulée en terme de temps écoulé. Ainsi, pour un niveau horizontal donné, le doublement du taux de migration latérale correspond au doublement du temps représenté par une itération. Les paramètres de contrôle du système demeurant inchangés, le système migre pendant une période deux fois plus longue en temps réel et déposera une quantité plus importante de sable. Enfin, si les crues de débordement contribuent à une aggradation constante du système suivant une période constante comptée en itérations, le doublement du taux de migration latérale est formellement équivalent à un doublement du pas de temps et à une division par deux du taux d'aggradation verticale. Dans ces conditions, les crues sont alors moins fréquentes en temps réel.

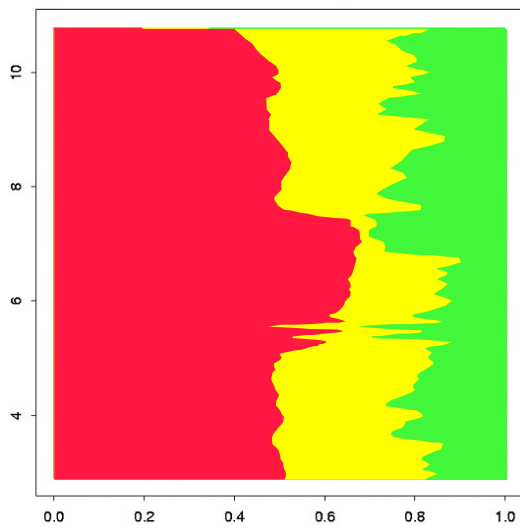
<sup>2</sup>Si on considère que chaque itération correspond à une année, soit une crue de migration annuelle, on arrive à des périodes de 40.000 ans, choix arbitraire fait pour correspondre approximativement à l'une des périodes des cycles astro-climatiques mis en évidence par Milankovitch (1920, 1941).



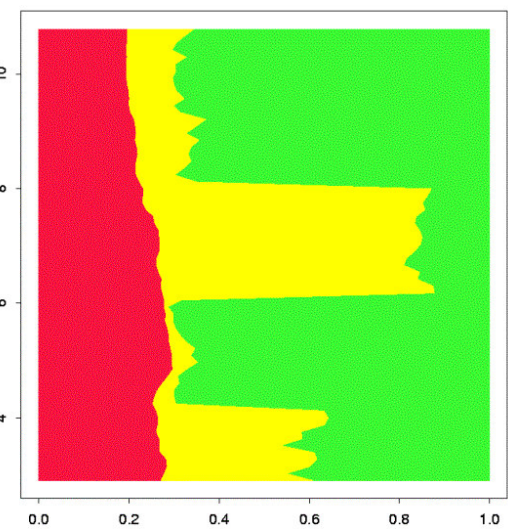
(a) Variation du coefficient d'érosion de la plaine d'inondation



(b) La largeur du chenal est doublée à l'altitude 4 et entre l'altitude 6 et 7



(c) Variation de la fréquence des crues



(d) Variation de la grandeur caractéristique de décroissance de la granulométrie des dépôts

FIG. 9.2 – Courbes de proportions verticales

Les faciès sableux sont codés en rouge, les faciès silteux sont codés en jaune et les faciès argileux sont codés en vert. On lit la proportion de faciès sur l'axe des abscisses et l'altitude des dépôts sur l'axe des ordonnées. Ce code de couleur sera conservé par la suite.

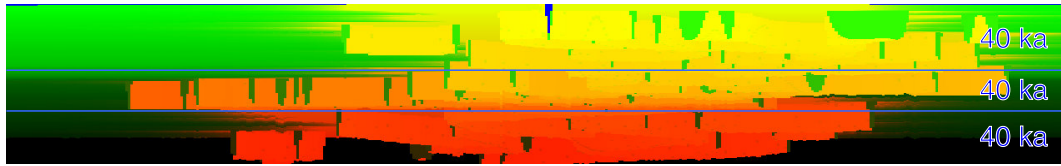


FIG. 9.3 – Section verticale obtenue en variant la fréquence des crues de débordements  
 Une itération du modèle est ici assimilée à une année. Les crues sont simulées comme des processus de Poisson. L'intensité du processus de Poisson est forte sur la première et la troisième période de 40 ka, mais plus faible sur la période intermédiaire.

sur les autres dépôts (*cf.* fig. 9.3 p. 117). En variant la fréquence des crues de débordement on peut donc obtenir des niveaux très sableux. La

proportion de silts est relativement peu affectée et c'est la proportion de fines qui diminue.

#### 9.2.4 Paramètres contrôlant la structure des dépôts de débordement

Figure 9.2(d) p. 116

Enfin, on considère les grandeurs caractéristiques de décroissance exponentielle qui interviennent dans la modélisation des dépôts de débordement (*cf.* § 5.2.1 p. 116). En particulier,

la grandeur caractéristique de décroissance de la granulométrie contrôle les proportions relatives de silts et d'argiles déposées sur la plaine d'inondation lors des crues de débordement.

### 9.3 Architecture globale des dépôts

Le paragraphe précédent détaille l'influence de certains paramètres sur les proportions moyennes de dépôts obtenues pour un niveau horizontal donné. Les résultats sont à rapprocher de ceux du chapitre précédent concernant l'architecture tridimensionnelle des dépôts. Les courbes de proportions verticales calculées sur l'ensemble du bloc simulé offrent ainsi une lecture et une caractérisation différentes selon les architectures fluviales modélisées. Estimées à partir de données de puits, ces courbes de proportions verticales peuvent permettre d'inférer les valeurs, ou tout au moins les ordres de grandeurs de certains paramètres du modèle.

En particulier, les différences relatives entre vitesse de migration latérale et vitesse d'aggradation verticale peuvent être appréciées qualitativement au regard des variations de la proportion de sable déposée. Le rapport entre proportion de silts et proportion de faciès argileux déposées permet d'estimer la grandeur caractéristique de décroissance exponentielle de la granulométrie des dépôts de débordement. La plus ou moins grande connectivité des corps potentiellement réservoirs est ensuite contrôlée par la vitesse d'aggradation du système et la fréquence des avulsions.



# Chapitre 10

## Localisation des dépôts

### 10.1 Localisation de la ceinture de chenaux

#### 10.1.1 Localisation à un niveau donné

Une fois que sont choisis certains paramètres déterminant l'architecture générale des dépôts, il est nécessaire de conditionner la localisation de ces dépôts. Nous proposons ici une méthode simple pour contraindre la localisation de la ceinture de méandres basée sur l'utilisation du coefficient d'érosion  $\Xi$ . Ce coefficient est considéré comme une variable régionalisée [Matheron (1971)]. En effectuant des simulations géostatistiques de ce paramètre [Lantuejoul (2003)], on obtient des cartes attribuant à chaque noeud de la grille représentant la plaine d'inondation une valeur de coefficient d'érosion. Nous appellerons ces cartes, cartes d'érodabilité (*cf.* fig. 10.1(a) p. 120 et fig. 10.2 p. 121). Évoluant à partir d'une ligne médiane rectiligne, légèrement perturbée (*cf.* § 4.2 p. 61) située au milieu de la plaine d'inondation, un chenal est attiré rapidement par les zones de forte érodabilité. Cette attraction est due à une migration plus rapide

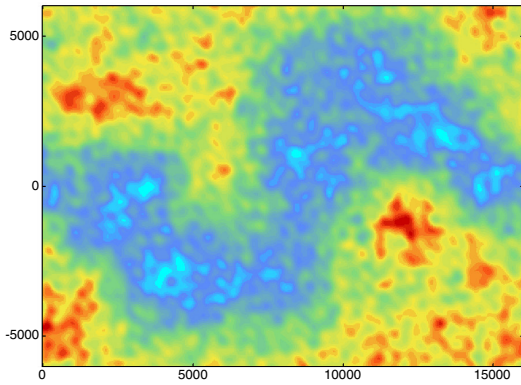
du chenal dans les zones de forte érodabilité (*cf.* fig. 10.1(b) p. 120). Les recoupements par tangence se produisent alors préférentiellement dans ces zones, et le chenal se déplace progressivement vers les zones de forte érodabilité (*cf.* fig. 10.1(c) p. 120). Une fois attiré, le chenal est confiné dans les zones de forte érodabilité, les zones de transition entre régions de faible et de forte érodabilité s'opposant à sa migration (*cf.* fig. 10.1(d) p. 120). On peut ainsi imposer une localisation prédéterminée à la ceinture de chenaux et reproduire assez fidèlement l'allure générale des cartes d'érodabilité employées pour ce faire (*cf.* fig. 10.2 p. 121 et fig. 10.3 p. 121).

Comme les cartes d'érodabilité donnent une indication sur la localisation de la ceinture de chenaux, nous pensons qu'elles peuvent être estimées à partir de sections horizontales dans des blocs sismiques à trois dimensions.

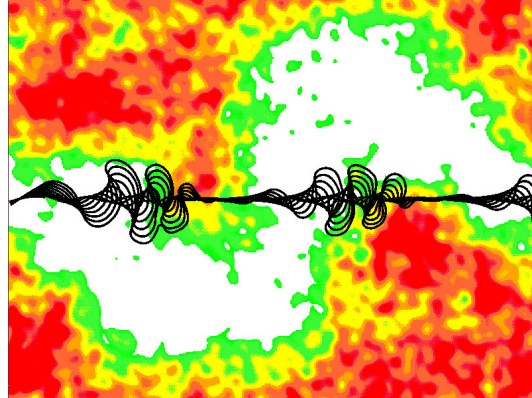
---

<sup>1</sup> On choisit un certain nombre de points de la grille auxquels on affecte une valeur d'érodabilité a priori.

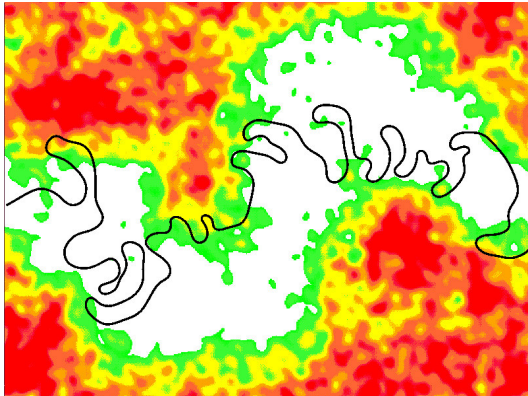
Ces points sont alors utilisés comme points conditionnants pour réaliser la simulation conditionnelle. En effectuant d'autres simulations à partir de ces mêmes points, on peut obtenir des cartes différentes, donc une évolution du chenal différente, mais conservant la localisation générale des zones de forte et de faible érodabilité (*cf.* fig. 10.2 p. 121).



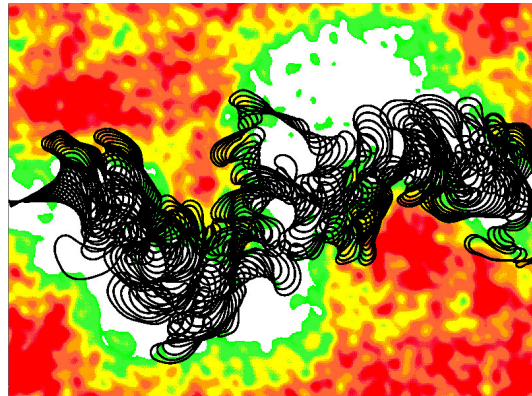
(a) Carte d'érodabilité conditionnelle obtenue avec le logiciel Isatis



(b) Itérations 0-4.000



(c) Itération 10.000



(d) Itérations 12.000-16.000

FIG. 10.1 – Conditionnement global par cartes d'érodabilité

Les axes sont gradués en mètres. Les valeurs fortes d'érodabilité sont en bleu (de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-8}$  Hz), les valeurs faibles sont en rouge (de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-8}$  Hz). Sur la figure 10.1(a) la zone bleue peut être assimilée à une vallée de forte érodabilité qui va attirer le chenal<sup>1</sup> d'où le choix d'un code de couleurs "topographique". Sur les figures suivantes, les valeurs fortes d'érodabilité ne sont pas représentées. Le chenal initialement rectiligne évolue plus rapidement dans les zones de forte érodabilité.

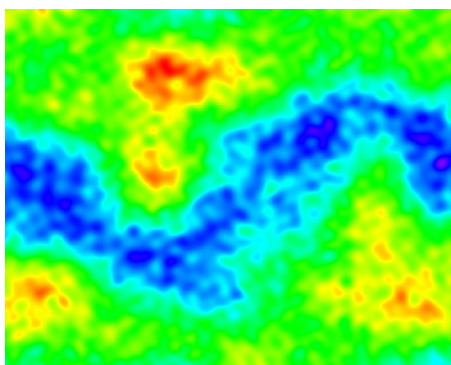
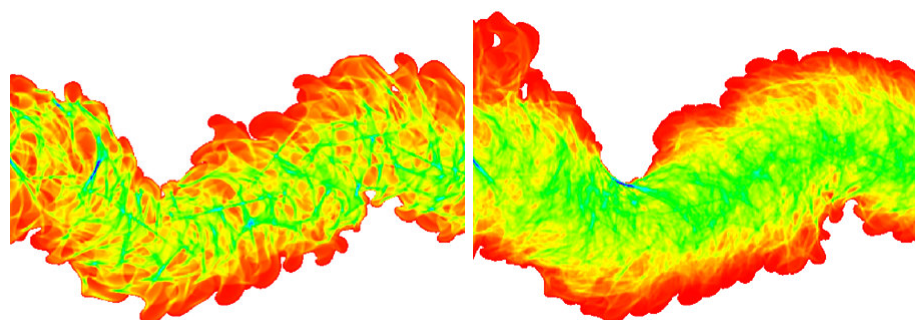


FIG. 10.2 – Carte d'érodabilité obtenue par simulation conditionnelle  
 Les dimensions sont les mêmes que pour la figure 10.1 p. 120. Les points conditionnants utilisés sont également les mêmes (*cf.* note 1 p. 119). En conséquence on retrouve la même localisation des zones de forte et de faible érodabilité.



(a) Après 10.000 itérations

(b) Après 50.000 itérations

FIG. 10.3 – Fréquences de présence d'un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.2 p. 121

Suivant le même code de couleur que pour les cartes d'érodabilité (*cf.* fig. 10.1 p. 120), on représente pour chaque point de la plaine d'inondation, le nombre d'itérations pendant lesquelles le chenal a occupé ce point. Les zones blanches n'ont donc pas été occupées, les zones rouges ont été très peu occupées et les zones bleues ont été très souvent occupées. Le chenal reste confiné dans la vallée de forte érodabilité dans laquelle il évolue à partir d'une ligne brisée. On remarque en bleu les zones où les méandres butent sur des régions d'érodabilité plus faible. On retrouve au bout de 50.000 itérations l'allure générale de la carte d'érodabilité imposée. La zone bleue à gauche de la figure représente le point amont du chenal qui est maintenu dans une zone déterminée.

### 10.1.2 Qu'est ce que le coefficient d'érosion ?

Le coefficient d'érosion  $\Xi$  a été défini à la section 4.1.4 p. 60 par :

$$\Xi(\mathbf{x}, s, b, \theta, u_0, t) = \partial_{\mathcal{D}}\zeta|_{\mathcal{D}=0} \quad (10.1)$$

Il caractérise la réponse d'un encaissant donné à l'action d'un écoulement donné et dépend des propriétés mécaniques de l'encaissant, mais aussi de la structure de l'écoulement et de la géométrie du chenal. L'utilisation de "cartes d'érodabilité" pour contraindre la localisation de la ceinture de chenaux revient de fait à imposer un coefficient d'érosion variant spatialement mais temporellement constant. Ce dernier point peut paraître critiquable. En effet, à partir du moment où des dépôts recouvrent un point donné de la plaine d'inondation, qu'il s'agisse de dépôts chenalés ou de dépôts de débordement, les caractéristiques mécaniques de ce point sont changées. De plus, l'évolution temporelle des dépôts - altération chimique, compaction... - va également contribuer à cette variation temporelle de l'érodabilité. Enfin, l'écoulement et la géométrie du chenal ne sont pas pris en compte par ces cartes.

Cependant, la principale conséquence de l'utilisation d'une carte d'érodabilité est de confiner le chenal dans des zones de forte érodabilité. Une fois le chenal confiné, la zone de forte érodabilité correspond alors approximativement à celle occupée par la ceinture de méandres du chenal. Dans cette zone le chenal migre rapidement car les dépôts sont facilement érodables et il est donc justifié que le coefficient d'érosion soit élevé à cet endroit. Le chenal bute sur les frontières de ces zones de forte érodabilité et de nombreux dépôts de bouchons d'argile se forment sur cette frontière. Ils évoluent avec le temps en des unités beaucoup plus cohésives, difficiles à éroder, qui constituent des zones de faible érodabilité [Sun et al. (1996)]. En conséquence, nous imposons, *a priori*, une carte pour le coefficient d'érosion sur laquelle évolue le chenal, qui est globalement similaire, *a posteriori*, à la carte de l'érodabilité des dépôts résultant de cette évolution.

D'après l'équation 10.1, les zones à fort coefficient d'érosion sont des zones sur lesquelles le chenal migre rapidement. Bien que l'on puisse

s'attendre à ce que le chenal ne demeure pas longtemps dans ces zones, la figure 10.3(b) p. 121 semble suggérer que la fréquence de présence du chenal y est pourtant élevée. Des simulations réalisées à partir de cartes d'érodabilité simples montrent en effet qu'elles peuvent être interprétées, dans une certaine mesure, comme des cartes de fréquences de présence<sup>2</sup> (cf. fig. 10.6 p. 124 et fig. 10.7 p. 10.7). Les régions de faible érodabilité sont alors des régions dont on veut exclure le chenal alors que les régions de forte érodabilité sont des zones où l'on désire l'attirer, en moyenne.

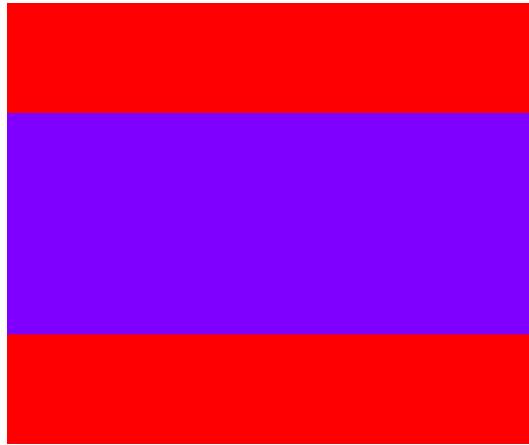


FIG. 10.4 – Carte d'érodabilité avec un fort contraste entre zones de forte érodabilité et zones de faible érodabilité

Les dimensions sont les mêmes que pour la figure 10.1 p. 120. Dans la région violette le coefficient d'érosion a pour valeur  $3 \cdot 10^{-8}$  Hz, alors qu'il est trois fois inférieur dans les régions rouges.

Cependant, à cause de la sensibilité du système, des cartes d'érodabilité très peu différentes peuvent conduire à des situations radicalement différentes (cf. fig. 10.9 p. 127 et fig. 10.11 p. 129). Ainsi, sur un temps court, l'influence d'une zone localisée d'érodabilité forte peut avoir un effet répulsif et non attractif. Le chenal a en effet tendance à migrer très rapidement dans cette zone et à en sortir, les recouvrements par

<sup>2</sup>On pourra faire une analogie avec la note 12 p. 60 qui précise, qu'avec la définition adoptée pour le dépôt  $\mathcal{D}$ , le coefficient d'érodabilité se mesure en Hertz.

tangence se produisant essentiellement à l'extérieur de la zone (*cf.* fig. 10.9 p. 127). Cependant, l'influence de cette zone, même restreinte, se propage rapidement à l'ensemble du système non seulement vers l'aval mais également vers l'amont puisque la géométrie du chenal intervient dans le calcul de sa migration (*cf.* fig. 10.10 p. 128 et fig. 10.11 p. 129).

Il est donc difficile de donner une interprétation unique de l'influence du coefficient d'érosion sur l'évolution d'un chenal. Lorsque l'on considère des extensions assez importantes, les zones de fortes valeurs peuvent être utilisées pour attirer le chenal, et le confiner. Ce confinement sera plus efficace si les gradients d'érodabilité sont élevés à la frontière de ces zones. Cependant, localement, les zones de forte érodabilité peuvent être utilisées pour déplacer rapidement le chenal et ont donc un effet répulsif. Enfin, il est important de rappeler que les processus d'avulsion ne sont pas pris en compte bien qu'ils aient une importance essentielle dans la localisation de la ceinture de méandres.



FIG. 10.5 – Carte d'érodabilité caractérisée par une région de transition entre zones de forte érodabilité et zones de faible érodabilité

Les dimensions sont les mêmes que pour la figure 10.1 p. 120. Dans la région violette le coefficient d'érosion a pour valeur  $3 \cdot 10^{-8}$  Hz, alors qu'il est trois fois inférieur dans les régions rouges.

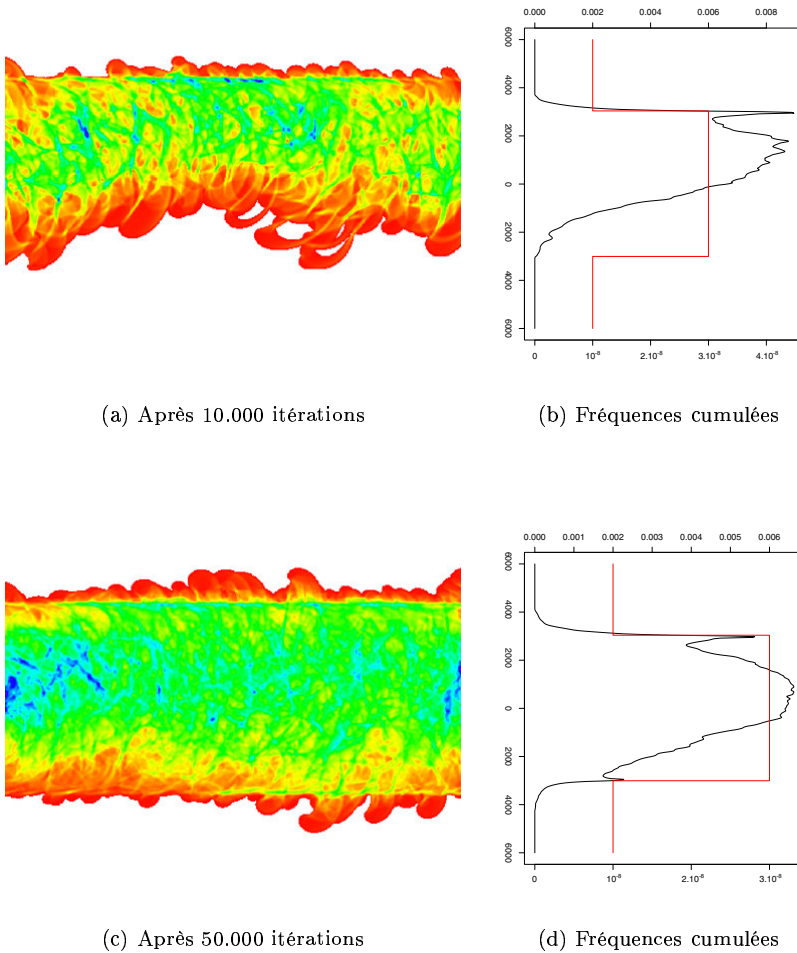
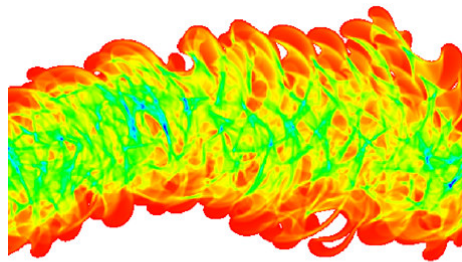
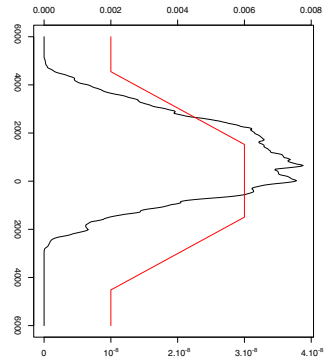


FIG. 10.6 – Fréquences de présence d'un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.4p. 122

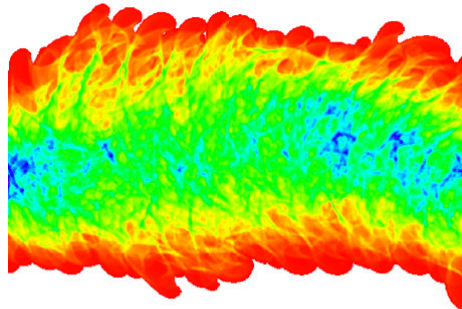
Le chenal évolue à partir d'une ligne brisée située au milieu de la carte d'érodabilité. Les 2000 premières itérations ne sont pas comptabilisées. Les fréquences cumulées sont normalisées de telle sorte que leur somme soit égale à 1. La section d'érodabilité correspondant à la carte 10.4 p. 122 est tracée en rouge, l'échelle de valeurs est reportée sur l'axe du bas, gradué en Hertz. Bien que les "frontières" entre zones de faible et de forte érodabilité se dessinent progressivement, le chenal occupe de manière assez homogène l'ensemble de la zone de fortes valeurs.



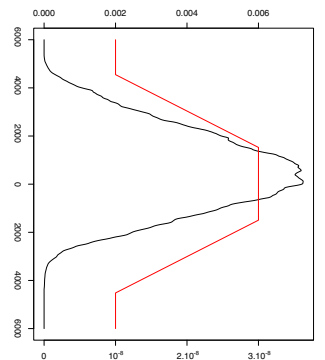
(a) Après 10.000 itérations



(b) Fréquences cumulées



(c) Après 50.000 itérations



(d) Fréquences cumulées

FIG. 10.7 – Fréquences de présence d'un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.5 p. 123

Les notations sont les mêmes que pour la figure 10.6 p. 124. L'histogramme des présences correspond globalement à la section d'érodabilité imposée. Les variations linéaires du coefficient d'érosion se traduisent par une variation sensiblement linéaire de la fréquence cumulée de présence. Le léger déport sur la gauche (partie basse de la carte 10.7(c)) est induit par le maintien dans une région déterminée de la partie amont du chenal (à gauche de la la carte 10.7(c)).

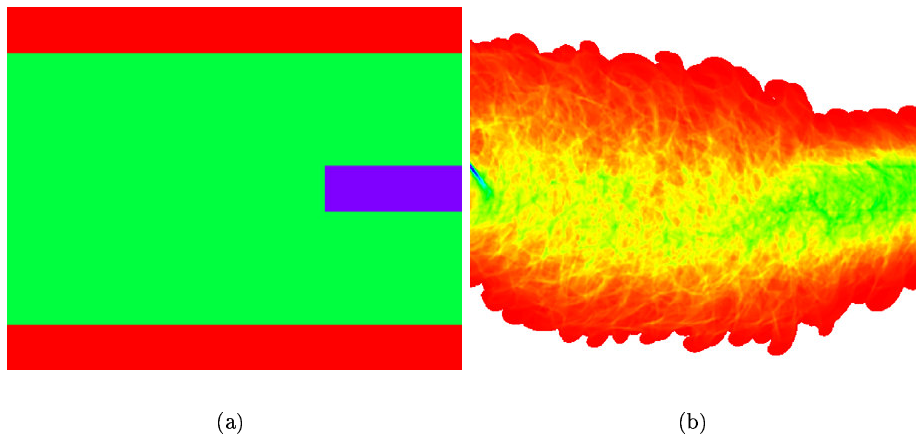
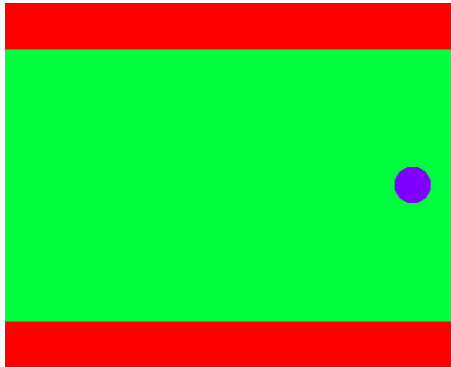
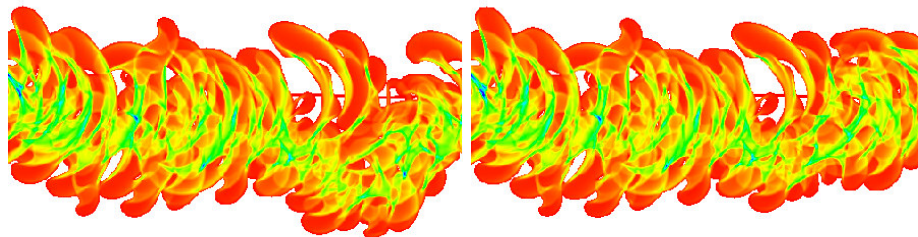


FIG. 10.8 – Carte d'érodabilité et fréquences de présence avec une zone réduite de forte érodabilité. Les dimensions sont les mêmes que pour la figure 10.1(a). Dans les régions rouges, le coefficient d'érosion a pour valeur  $10^{-8}$  Hz. Il est deux fois supérieur dans la région verte et trois fois supérieur dans la région violette. La carte de fréquences de présences a été calculée après 90.000 itérations. On remarque l'attraction exercée par la zone de forte érodabilité. La zone de fréquences élevées à gauche est due au maintien de la partie amont du chenal dans une région prédéterminée.



(a) Carte d'érodabilité



(b) Fréquences de présence avec la zone violette

(c) Fréquences de présence sans la zone violette

FIG. 10.9 – Carte d'érodabilité et fréquences de présence avec une zone très réduite de forte érodabilité

Les dimensions sont les mêmes que pour la figure 10.1(a). Dans les régions rouges de la carte d'érodabilité, le coefficient d'érosion a pour valeur  $10^{-8}$  Hz. Il est deux fois supérieur dans la région verte et trois fois supérieur dans la région violette.

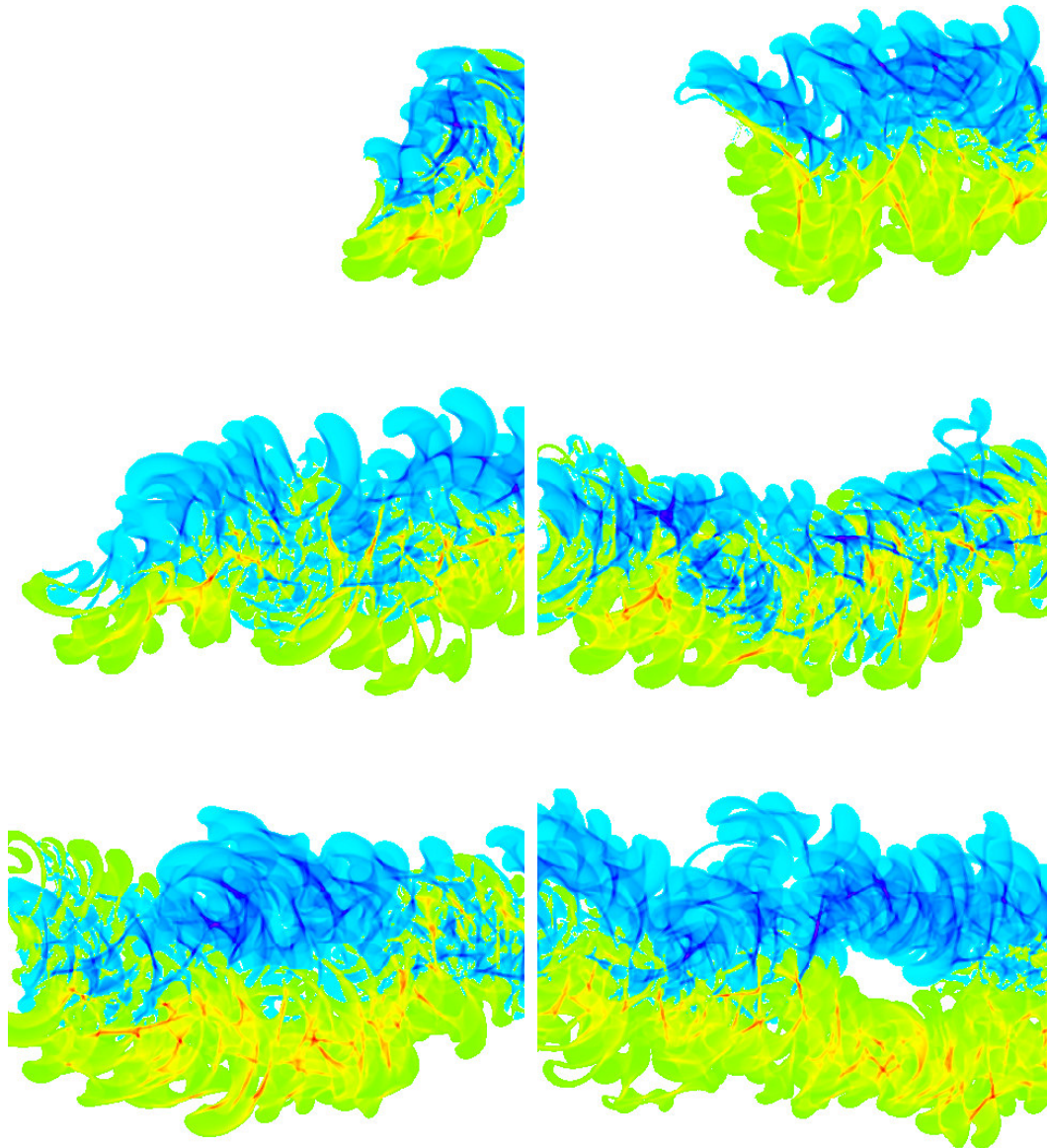


FIG. 10.10 – Différence de fréquence de présence d'un chenal évoluant sur des cartes d'érodabilité légèrement différentes

Les figures représentent les différences entre les cartes de fréquence pour un chenal évoluant sur la carte d'érodabilité de la figure 10.9 et un chenal évoluant sur la même carte privée de sa zone circulaire de forte érodabilité. Les vignettes correspondent respectivement de gauche à droite et de haut en bas à des fréquences calculées sur des intervalles de 5000 itérations. Hormis la différence minimale d'érodabilité, les conditions de simulation sont exactement les mêmes. Les zones bleues correspondent aux zones où le chenal évoluant sur la carte sans zone de forte érodabilité est présent plus souvent.

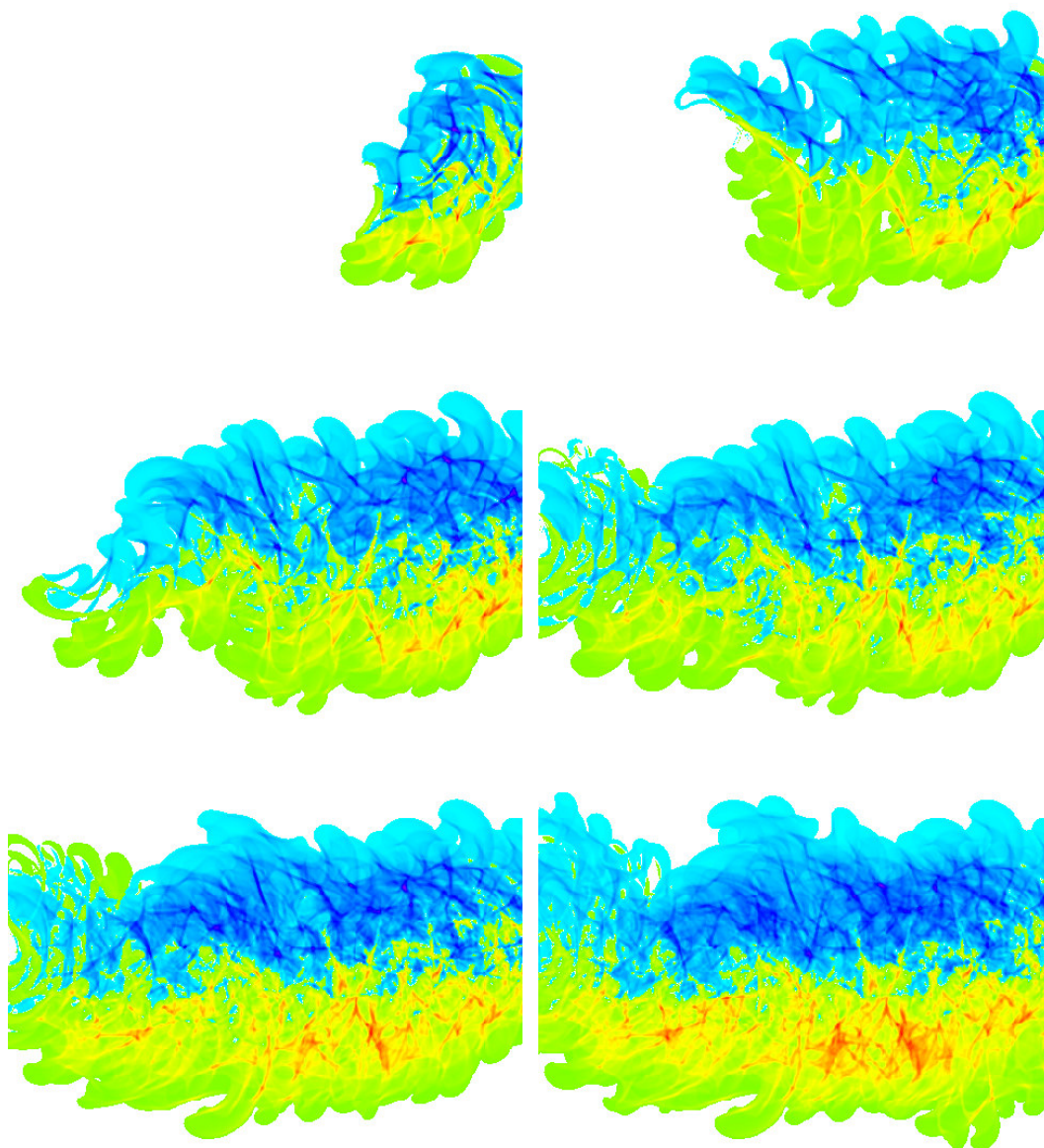


FIG. 10.11 – Différence de fréquence de présence d'un chenal évoluant sur des cartes d'érodabilité légèrement différentes

Les vignettes correspondent aux vignettes de la fig 10.10 p. 128 cumulées respectivement de gauche à droite et de haut en bas aux itérations 5.000, 10.000, 15.000, 20.000, 25.000 et 30.000. Pour la dernière vignette, correspondant à 30.000 itérations, les différences maximales sont de l'ordre de 4000 itérations en valeurs absolues.

### 10.1.3 Évolution spatio-temporelle

La migration latérale d'une ceinture de chenaux sur des distances importantes est critiquée par certains auteurs [Bridge (2003)]. Nonobstant, on peut utiliser les cartes d'érodabilité pour guider l'évolution d'un chenal en conservant des formes réalistes. Selon les cas, on pourra ou non modéliser les dépôts lors de cette migration. Dans ce dernier cas, on peut chercher à obtenir de nouveaux tracés du chenal, à la suite d'une avulsion, par exemple. En revanche, si on modélise les dépôts, on peut changer progressivement la carte d'érodabilité afin de contraindre l'évolution spatio-temporelle du chenal, au fur et à mesure de la construction de la plaine d'inondation. Le but est alors de déformer de manière continue la carte d'érodabilité initiale en une seconde carte, sans pour autant piéger le chenal dans une zone de faible érodabilité lors de cette déformation. Soit  $\Xi_1$  la carte initiale et  $\Xi_2$  la carte finale. On peut utiliser une simple interpolation linéaire entre les deux cartes et poser sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\Xi(t) = (1-t) \cdot \Xi_1 + t \cdot \Xi_2$$

On aura ainsi  $\Xi(0) = \Xi_1$  et  $\Xi(1) = \Xi_2$ . Il suffit ensuite de dilater l'échelle des temps de manière adéquate. A cette transformation, nous préférons la transformation sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\Xi(t) = \cos(t) \cdot \Xi_1 + \sin(t) \cdot \Xi_2 \quad (10.2)$$

On a toujours  $\Xi(0) = \Xi_1$  et  $\Xi(\frac{\pi}{2}) = \Xi_2$  mais cette transformation diminue la superficie des régions d'érodabilité faible lors de la transformation<sup>3</sup> (cf. fig. 10.12). Pour peu que la déformation de la carte d'érodabilité ne soit pas trop rapide, on diminue ainsi le risque de piéger le chenal dans une zone de faible érodabilité.

Nous utilisons la relation 10.2 pour contraindre l'évolution d'un chenal sur 40.000 itérations (cf.

fig.10.13 p. 131), tout en simulant parallèlement les dépôts. Le profil d'équilibre est maintenu suffisamment élevé pour que chacune des crues de débordement contribue à une aggradation verticale progressive du système. La courbe de proportions verticales globale calculée sur l'ensemble des dépôts ne montre pas de variations notables dans les proportions relatives de sable, silt et argile (cf. fig.10.14 p. 132). En revanche, la matrice de proportions calculée à partir des courbes de proportions locales (cf. fig. 10.15) montre que l'on peut ainsi contraindre la répartition spatiale des dépôts. Les zones vers lesquelles le chenal se déplace montrent alors une évolution vers des proportions de sable plus importantes et les zones que le chenal quitte montrent un accroissement de la proportion d'argiles déposée.

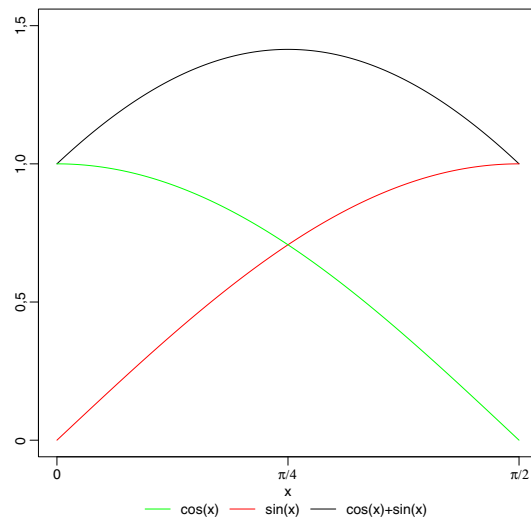


FIG. 10.12 – Fonctions sinus, cosinus et leur somme...

<sup>3</sup>La transformation utilisée n'est donc pas une déformation graduelle au sens de Matheron (1982) ou L.Y. (2000) car elle ne conserve pas les propriétés statistiques de la carte d'érodabilité, qui est de moyenne non nulle. Nous tirons avantage de ce fait.

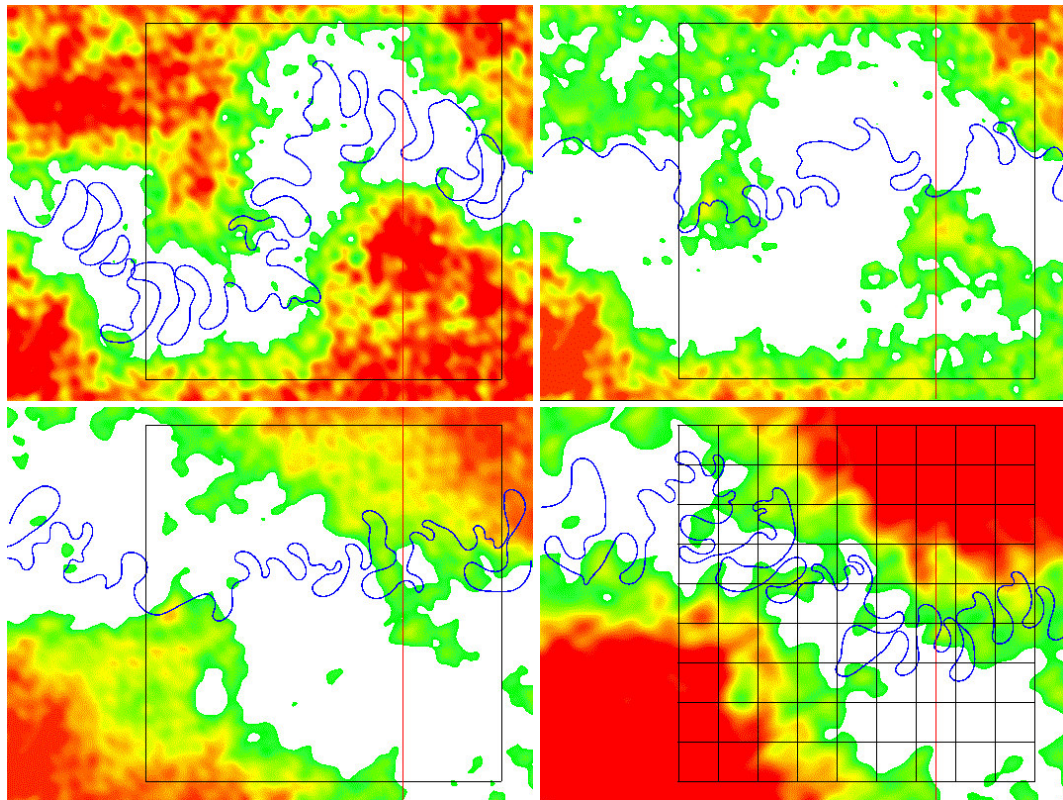


FIG. 10.13 – Déformation de la carte d'érodabilité

La carte d'érodabilité a les dimensions de la carte de la figure 10.1(a) p. 120, soit  $16\text{ km}$  de long et  $12\text{ km}$  de large. On la déforme progressivement en une autre sur 40.000 itérations, en utilisant la relation 10.2 p. 130. Les figures représentent l'état initial (en haut à gauche) et l'état final (en bas à droite), ainsi que deux états intermédiaires. La ligne médiane du chenal est représentée en bleu.

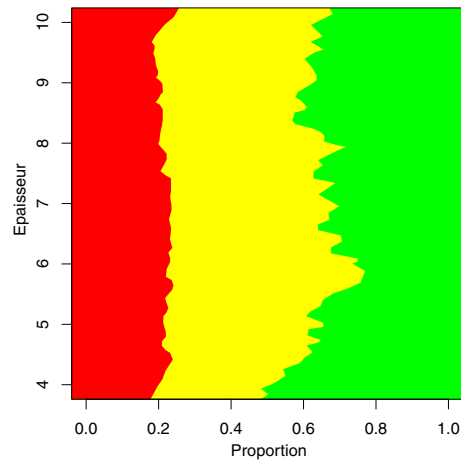


FIG. 10.14 – Courbe de proportions globale obtenue après déformation de la carte d'érodabilité  
 Le calcul des proportions est effectué sur l'ensemble de l'épaisseur de la série simulée après 40.000 itérations et sur la superficie correspondant au grand rectangle noir sur les vignettes de la figure 10.13 p. 131. Le code de couleur est celui de la figure 9.2 p. 132.

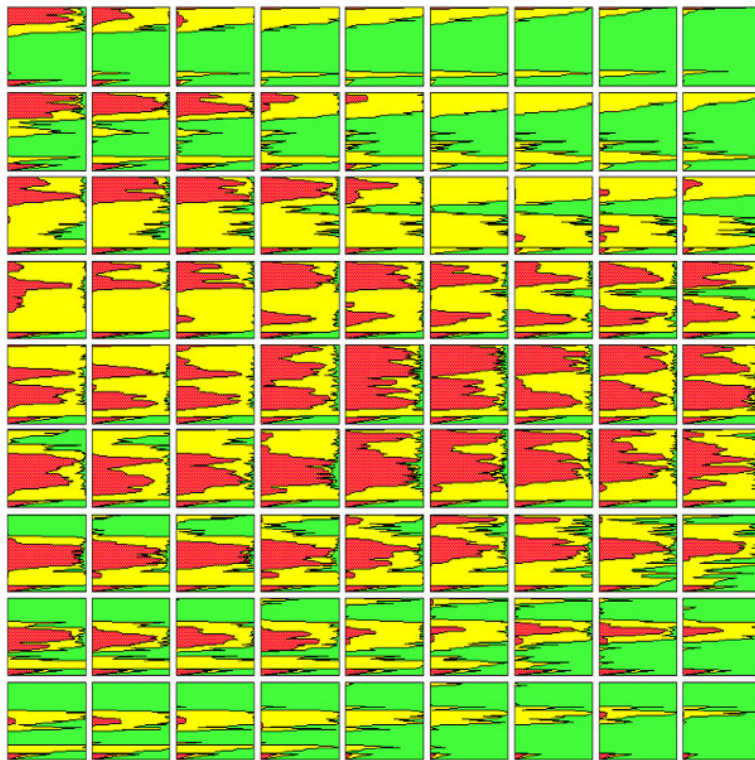


FIG. 10.15 – Courbes de proportions verticales locales obtenues après déformation de la carte d'érodabilité  
 Les 81 courbes sont calculées sur un maillage régulier de la surface utilisée pour calculer la courbe de la figure 10.14 p. 132. Ce maillage est représenté sur la dernière vignette de la figure 10.13 p. 131.

## 10.2 Localisation des corps chenalisés

On peut contraindre la localisation de la ceinture de méandres d'un système méandriforme en utilisant des cartes d'érodabilité. Nous nous intéressons brièvement dans cette dernière partie au problème du conditionnement d'un chenal en un point. Nous considérons pour cela que la valeur coefficient d'érosion  $\Xi$  en un point est affectée par un bruit  $\varepsilon_{\Xi}$ . On écrit alors :

$$\Xi = \Xi_0 + \varepsilon_{\Xi}$$

où  $\Xi_0$  correspond à la valeur du coefficient d'érosion donnée par une carte d'érodabilité, éventuellement constante. Nous considérons toujours que  $\Xi$  est strictement positif.

Soit  $P$  un point de la plaine d'inondation et  $M_P$  le point de la ligne médiane du chenal le plus près de  $P$ . La migration latérale du chenal en  $M_P$  est donnée par :

$$\zeta = \Xi \cdot \mathcal{D}$$

Soit  $\mathcal{D}_{M_P}$  la valeur prise par le déport de la vitesse de l'écoulement en  $M_P$ . Alors :

- si  $(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{M}_P \mathbf{P}) \cdot \mathcal{D}_{M_P} > 0$ , le chenal migre vers  $P$
- si  $(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{M}_P \mathbf{P}) \cdot \mathcal{D}_{M_P} < 0$ , le chenal s'éloigne de  $P$

Si on veut attirer le chenal en  $P$  :

- dans le premier cas, on peut considérer que la carte d'érodabilité sousestime la valeur du coefficient d'érosion au point  $M_P$ , l'erreur  $\varepsilon_{\Xi}$  est alors choisie positive afin d'accélérer la migration du chenal vers  $P$ ,
- dans le second cas, on peut considérer que la carte d'érodabilité surestime la valeur du coefficient d'érosion au point  $M_P$ , l'erreur  $\varepsilon_{\Xi}$  est alors choisie négative afin de ralentir la migration du chenal loin de  $P$ .

La même démarche peut être effectuée en changeant le signe de  $\varepsilon_{\Xi}$  si l'on désire éloigner le chenal de  $P$ .

Ce raisonnement est tenu pour chacun des  $n_P$  points  $P$  qui sont jugés avoir une influence sur l'évolution du chenal. Typiquement, il s'agira de points pour lesquels on dispose d'une information que l'on désire respecter. On obtient alors  $n_P$  valeurs de l'erreur  $\varepsilon_{\Xi}$  en différents points du chenal. On effectue ensuite une simulation géostatistique conditionnelle afin de déterminer une valeur  $\varepsilon_{\Xi}$  en chaque point de ce chenal. Cette méthodologie permet d'attirer un chenal vers un point donné ou, au contraire, de l'en éloigner. On peut ainsi conditionner la localisation des dépôts de barres de méandres ou de bouchons d'argile résultant des recoupements par tangence (*cf.* fig. 10.16 p. 134 et fig. 10.17 p. 135).

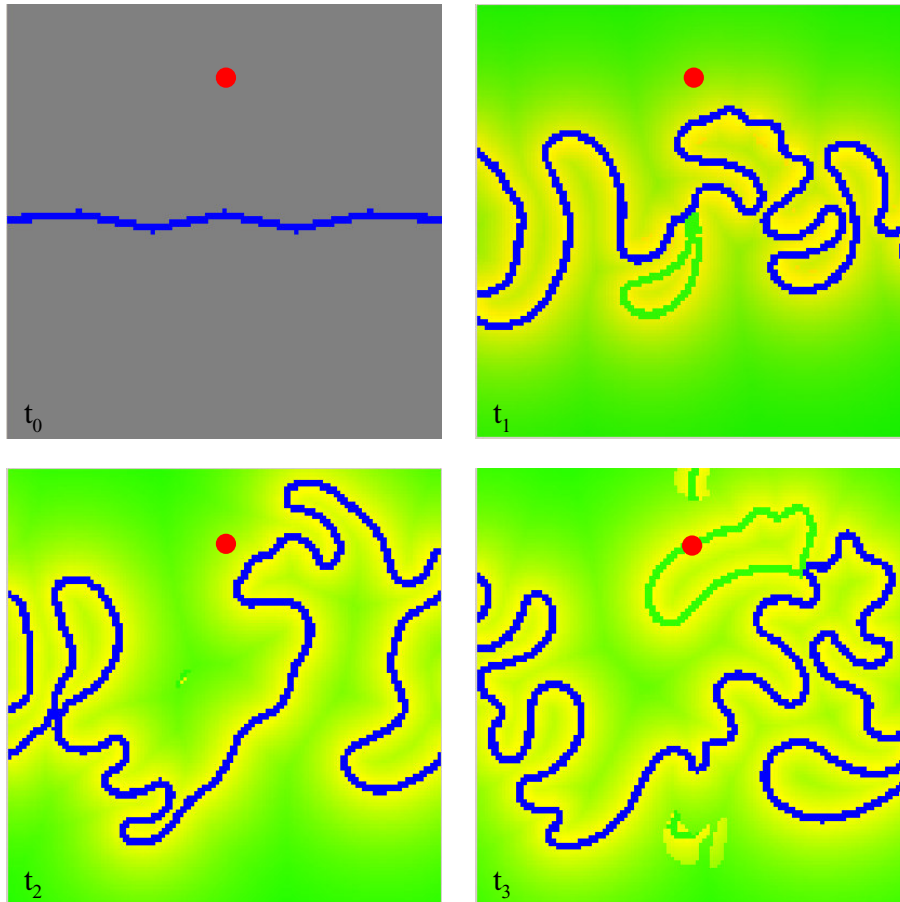


FIG. 10.16 – Effet d'un point attractif sur l'évolution d'un chenal

La simulation effectuée sur une plaine d'inondation carrée de  $6\text{ km}$  de côté est réalisée sur 5.000 itérations. Le point rouge est attractif. Le bruit sur le coefficient d'érosion est modélisé comme une variable gaussienne ayant une structure spatiale caractérisée par une covariance exponentielle. Ce dernier choix est un choix pratique motivé par la réalisation aisée de simulations conditionnelles à une dimension sous ces hypothèses [Chiles et Delfiner (1999)]. Le temps  $t_0$  représente la situation initiale. On ressent l'attraction au temps  $t_1$  mais le conditionnement est retardé par un recouplement par tangence. Au temps  $t_2$  le conditionnement est réalisé. Si on "relâche" alors le chenal, on déposera une barre de méandre au niveau du point conditionnant. Si au contraire on fixe le chenal au point conditionnant, on obtient un bouchon d'argile (temps  $t_3$ ).

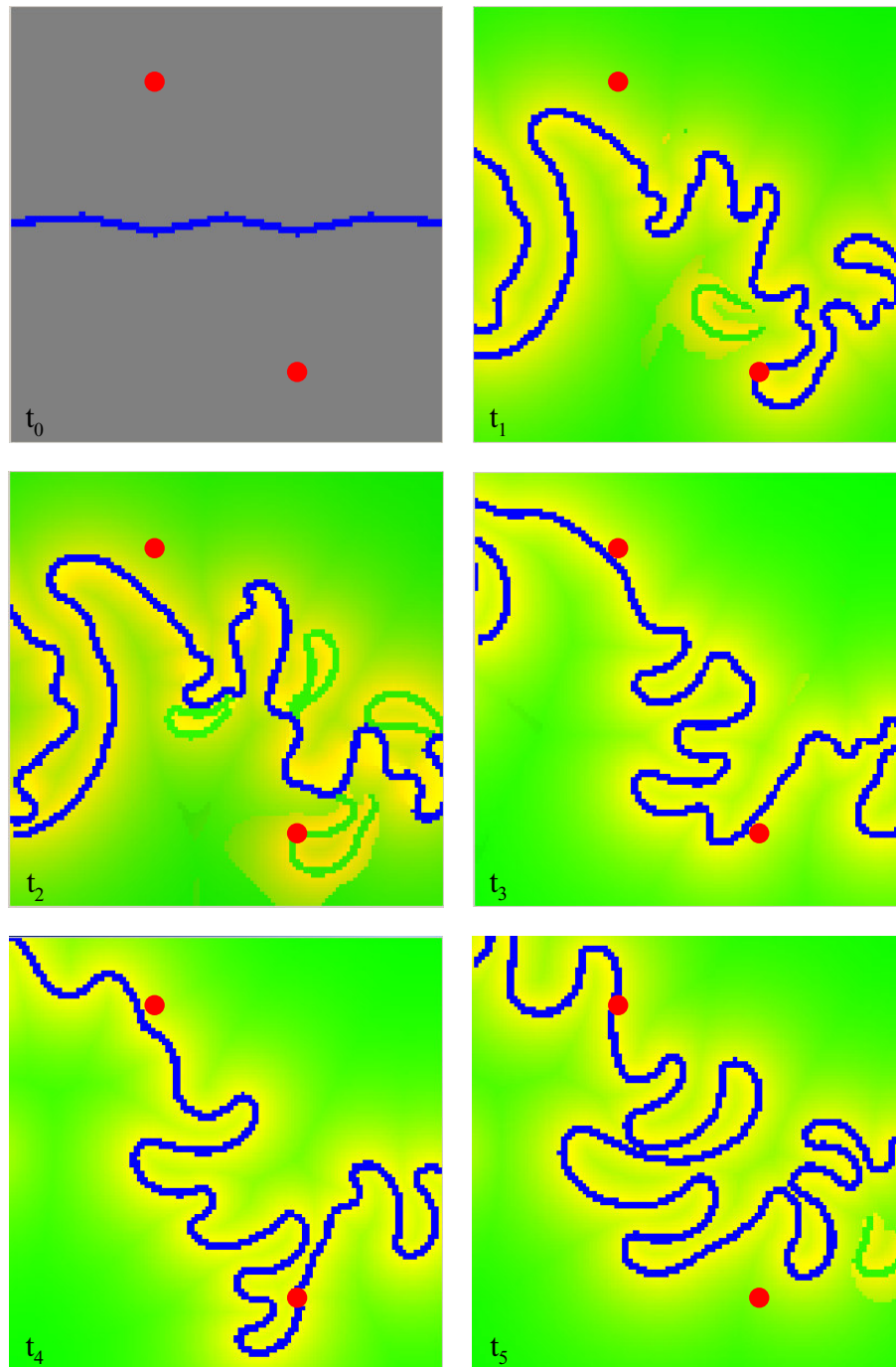


FIG. 10.17 – Effet de deux points attractifs sur l'évolution d'un chenal

Les conditions de simulation sont les mêmes que pour la figure 10.16. Les deux points rouges sont attractifs. On observe la difficulté à réaliser au même moment le conditionnement sur deux points. Pour des applications pratiques, ce conditionnement instantané n'a toutefois que peu d'intérêt.



## Conclusions

*Les courbes de proportions verticales peuvent permettre d'approcher les grandeurs relatives des paramètres du modèle contrôlant l'architecture des dépôts. Ensuite, à l'aide de cartes d'érodabilité et grâce à l'introduction de perturbations sur ces cartes, on peut contraindre la localisation de la ceinture de méandres, ou directement positionner un chenal sur un point précis.*

*En dehors de sa définition à l'intérieur du modèle physique, qui le relie à la vitesse de migration du chenal, il est difficile de donner une interprétation exacte du coefficient d'érosion. Nous en faisons une utilisation pratique qui amène à le considérer sous certaines conditions, en particulier sur de longues périodes de temps, comme une estimation de la fréquence de présence du chenal.*

*De nombreux processus ont été omis dans cette dernière partie et il sera par la suite nécessaire d'introduire les processus d'avulsion et de pouvoir contraindre la localisation des autres dépôts générés par le modèle.*



# Perspectives

## Modèle d'évolution de la ligne médiane

Un modèle d'évolution tridimensionnel de la ligne médiane d'un chenal méandrique est proposé. Il intègre en particulier le réajustement de son profil longitudinal. Alors que l'approche générale adoptée a été largement validée sur des systèmes réels, sur ce dernier point, des études ou des données de terrain seront nécessaires pour confronter le modèle à l'expérience et établir une échelle de valeurs des paramètres employés.

Des études récentes [Repetto et al. (2002)] ont proposé, toujours à partir de la linéarisation des équations de l'hydraulique, un modèle d'évolution d'un écoulement chenalisé de largeur variable. Or, notre travail concerne essentiellement

les systèmes fluviaux méandriques, dont la largeur est relativement constante. L'intégration souhaitable des deux modèles permettrait alors de modéliser les transitions d'un système méandrique vers d'autres types de systèmes.

Enfin, cette approche mériterait également d'être appliquée sur les systèmes sous-marins profonds ou estuariens. En effet, d'une part les données récentes sur les systèmes profonds confirment de grandes similarités avec les systèmes fluviaux [Babonneau (2002)], et d'autre part, les développements théoriques sont similaires et conduisent à une même famille d'équations [Imran et al. (1999); Solari et al. (2002)].

## Modèle de dépôts

Le modèle d'évolution de la ligne médiane est complété par un modèle de faciès caractérisé par plusieurs familles de granulométrie. Cependant, le transport sédimentaire n'est jamais modélisé de manière effective. En particulier, si la quantité de fluide est préservée, la quantité de matière ne l'est pas toujours. Il sera alors intéressant d'inclure un modèle de transport sédimentaire permettant de mieux reproduire les variations de géométrie et de granulométrie du lit [Johanesson et Parker (1989a); Sun et al. (2001a,b)], de mieux modéliser les crues de débordement [Nicholas et Walling (1997)], la formation des épanchements de crevasse et de prendre en compte la transition entre différents systèmes fluviaux. Sur ce point, la modélisation

des systèmes géologiques clastiques semble de plus en plus s'orienter vers des modèles de transport d'un nombre fini d'unités élémentaires de sédiment ("*sediment routing*") [Murray et Paola (1994); Thomas et Nicholas (2002)].

Le modèle de faciès établi pourra être enrichi à partir de cette description plus fine des processus. Par la suite, il s'agit en effet de pouvoir estimer de manière fiable les paramètres pétrophysiques des dépôts simulés. Leur évolution temporelle, due aux phénomènes de compaction et d'altération pourrait également être intégrée. Néanmoins, ces modèles devraient rester simples pour ne pas représenter un surcoût informatique préjudiciable.

Enfin, dans le cadre d'une application au do-

maine sous-marin, le modèle de faciès développé pour le milieu continental devra être remodelé et adapté à un environnement différent afin d'intégrer la spécificité des processus sédimentaires.

## Conditionnement

La complexification d'un modèle, si elle permet de mieux reproduire les phénomènes naturels, se fait souvent au détriment des possibilités de le conditionner. Une méthodologie simple a été proposée pour contraindre l'emplacement des dépôts chenalisés. Il reste cependant à contraindre la localisation des autres dépôts : lobes de crevasse, dépôts de débordement, dépôts organiques. Il s'agira également de prendre en compte les processus d'avulsion.

Dans ce cadre, on devra identifier des para-

mètres ayant un rôle déterminant dans l'évolution du système. L'étude du coefficient d'érosion a cependant montré qu'il pouvait être délicat d'interpréter de manière "empirique" l'influence d'un coefficient. Il est alors nécessaire de toujours connaître les hypothèses effectuées et le cadre précis du modèle physique. Afin de garder un caractère opérationnel et d'éviter un temps de calcul trop important, il sera préférable de choisir des techniques de conditionnement basées sur la correction progressive de son évolution.

## Quel avenir ?

De manière générale, la modélisation informatique des systèmes géologiques utilise de plus en plus les travaux effectués sur des échelles de temps plus courtes, qui, en étant plus détaillées, permettent de mieux comprendre les processus modélisés. De plus, les modélisations stochastiques sont aujourd'hui devenues incontournables en permettant de quantifier des incertitudes ou de simuler rapidement différentes possibilités pour une réalité largement inconnue. Les technologies informatiques tendent à faire

tomber les barrières pratiques entre ces différentes approches. Elles permettent ainsi d'aborder des problèmes environnementaux ou de génie civil dans la perspective de longues périodes de temps. Réciproquement, elles permettent une meilleure connaissance des séries géologiques grâce à la modélisation de processus sédimentaires brefs. L'utilisation d'approches mixtes transdisciplinaires, mêlant aléatoire et déterminisme, représente alors une évolution naturelle dans tous les domaines d'application.

# Conclusions générales

Ce travail propose un modèle d'évolution d'un chenal méandrique sur des périodes géologiques. Il permet de produire des formes réalistes et de prendre en compte l'influence de nombreux paramètres physiques. Il est complété par un modèle de dépôts basé sur l'utilisation de règles simples et permettant de décrire plusieurs environnements. La combinaison de ces deux modèles produit des simulations :

- rapides : les simulations présentées dans ce travail, correspondant à moins de 50.000 itérations ont toutes été obtenues en moins d'une heure de temps sur un ordinateur de bureau standard ;
- riches : les environnements et processus décrits reproduisent fidèlement les principaux processus sédimentaires sur une plaine alluviale ;
- réalistes : obtenues à partir d'équations déterministes, les formes sédimentaires ont des morphologies "naturelles" ;
- variées : la forte sensibilité du système permet, en considérant certains paramètres comme des processus aléatoires, de produire plusieurs simulations différentes.

De plus, en intégrant la notion de profil d'équilibre, on peut obtenir différentes architectures de dépôts ou reproduire un scénario géologique pré-établi.

Les méthodologies introduites pour contraindre la localisation des dépôts demandent à être développées. Cependant, elles permettent d'ores et déjà de contrôler de manière simple l'évolution du système, et de conditionner son passage par certains points.



Quatrième partie

Annexes



# Annexe A

## Changement de repère

Ce premier chapitre introduit le repère utilisé pour modéliser les écoulements chenalés. Il est ensuite consacré à établir l'expression de différents opérateurs dans ce repère de la manière la plus générale possible. La lecture de la section A.1.3 présentant le système de coordonnées utilisés est seule nécessaire à la compréhension des annexes suivantes. Des rappels plus détaillés pourront être trouvés dans Garrigues (2001).

Dans cette partie les tenseurs d'ordre un ou supérieur sont identifiés par une typographie en gras. Les grandeurs scalaires, tenseurs d'ordre 0, sont différenciées des grandeurs non scalaires par le fait qu'elles ne possèdent pas d'indices de coordonnées. Nous utilisons la convention d'Einstein sur la sommation des indices alternés répétés avec les *seuls* indices muets  $i$ ,  $j$  et  $k$ . Enfin nous notons  $\partial_i$  la dérivée partielle par rapport à la coordonnée  $i$ .

### A.1 Base mobile et base naturelle

#### A.1.1 Choix d'un référentiel

Soit un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_{gal}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \mathbf{e}_x^{gal}, \mathbf{e}_y^{gal}, \mathbf{e}_z^{gal})$  où  $\mathbf{e}_z^{gal}$  est colinéaire à la verticale locale supposée uniforme sur le champ d'expérience et orientée vers le haut. Nous noterons  $\mathcal{B}_{gal}$  la base associée à  $\mathcal{R}_{gal}$  et  $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{gal}$  les coordonnées d'un vecteur sur cette base.

L'espace physique  $\mathcal{E} = (O, \mathbf{e}_x^{gal}, \mathbf{e}_y^{gal}, \mathbf{e}_z^{gal})$  muni du produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^3$  est un espace affine euclidien de dimension 3. Soit  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{E}$  alors :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \overline{\otimes} \mathbf{v}$$

où  $\overline{\otimes}$  désigne le produit tensoriel contracté.

#### A.1.2 Base mobile

##### A.1.2.1 Construction

Nous avons défini la ligne médiane d'un chenal comme étant la ligne imaginaire à la surface de l'eau, équidistante de ses deux rives. Nous notons cette ligne  $\Gamma$  et considérons que  $\Gamma$  est un arc

régulier de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathcal{E}$ .  $\Gamma$  étant régulier, il peut être paramétré par son abscisse curviligne que nous noterons  $s$ , et qui prend ses valeurs dans  $J_\Gamma \subset \mathbb{R}$ . Si  $\mathbf{M}_\Gamma(s)$  désigne le point de  $\Gamma$  d'abscisse curviligne  $s$  alors, on peut définir le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  en  $\mathbf{M}_\Gamma(s)$  qui est :

$$\partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s)$$

Nous supposons par la suite que  $\Gamma$  n'est jamais localement vertical, c'est à dire :

$$\forall s \in J_\Gamma \quad \partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s) \wedge \mathbf{e}_z^{gal} \neq \mathbf{0}$$

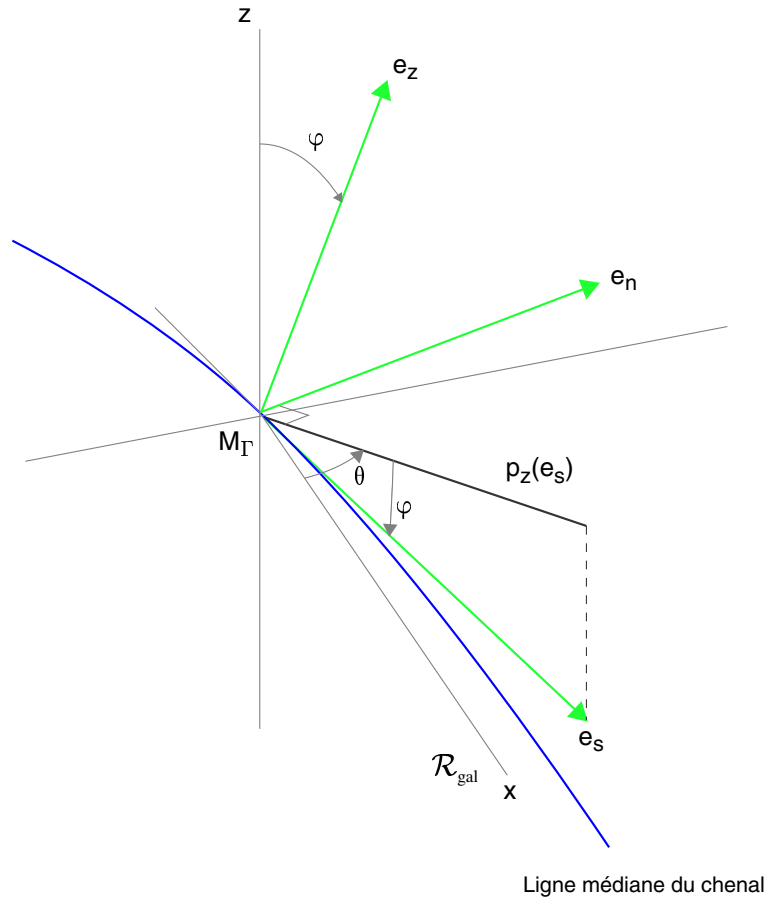


FIG. A.1 – Construction de la base mobile  $\mathcal{B}_s$

Soit  $p_z$  la projection sur le plan horizontal  $\mathcal{P}_z = (O, \mathbf{e}_x^{gal}, \mathbf{e}_y^{gal})$ . Comme  $\Gamma$  n'est pas localement vertical, on peut définir  $\theta(s)$  une mesure continue<sup>1</sup> en  $s$  de l'angle orienté  $(\mathbf{e}_x^{gal}, p_z(\partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s)))$  dans  $\mathcal{P}_z$  (cf. fig. A.1). De même, on peut définir le plan vertical  $\mathcal{P}_s = (O, \partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s), \mathbf{e}_z^{gal})$  qui est tel que :

$$\forall s \in J_\Gamma \quad p_z(\partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s)) \in \mathcal{P}_s$$

On définit alors  $\varphi(s)$  une mesure continue<sup>2</sup> en  $s$  de l'angle orienté  $(p_z(\partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s)), \partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s))$  dans  $\mathcal{P}_s$  (cf. fig. A.1).

<sup>1</sup> Ceci est possible grâce à la régularité de  $\Gamma$ .

<sup>2</sup> La démarche est la même que pour  $\theta(s)$ .

Si on note :

$$\mathbf{e}_s(s) = \partial_s \mathbf{M}_\Gamma(s) \quad (\text{A.1})$$

alors par construction on a :

$$\mathbf{e}_s(s) = \begin{bmatrix} \cos \varphi(s) \cos \theta(s) \\ \cos \varphi(s) \sin \theta(s) \\ -\sin \varphi(s) \end{bmatrix}_{gal} \quad (\text{A.2})$$

Nous construisons également les vecteurs :

$$\mathbf{e}_z(s) = \begin{bmatrix} \sin \varphi(s) \cos \theta(s) \\ \sin \varphi(s) \sin \theta(s) \\ \cos \varphi(s) \end{bmatrix}_{gal} \quad (\text{A.3})$$

et :

$$\mathbf{e}_n(s) = \mathbf{e}_z(s) \wedge \mathbf{e}_s(s)$$

$$\mathbf{e}_n(s) = \begin{bmatrix} -\sin \theta(s) \\ \cos \theta(s) \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \quad (\text{A.4})$$

Alors, la base mobile (*cf.* fig. A.1) :

$$\mathcal{B}_s(s) = (\mathbf{e}_s(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_z(s))$$

est orthonormée directe.

Par la suite, nous omettrons de spécifier la dépendance par rapport à l'abscisse curviligne. On note alors :

$$\mathcal{B}_s = (\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z)$$

et  $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_s$  les coordonnées d'un vecteur sur cette base.

### A.1.2.2 Variations de la base mobile

La base mobile  $\mathcal{B}_s$  ne dépend que de l'abscisse curviligne, on peut calculer ses variations par rapport à  $s$  et les exprimer sur elle même.

D'après A.2 :

$$\partial_s \mathbf{e}_s = -\partial_s \varphi \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{bmatrix}_{gal} + \partial_s \theta \cos \varphi \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_s \mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_s \theta \cos \varphi \\ -\partial_s \varphi \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.6})$$

De même, d'après A.4 :

$$\partial_s \mathbf{e}_n = -\partial_s \theta \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \quad (\text{A.7})$$

$$\partial_s \mathbf{e}_n = -\partial_s \theta \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.8})$$

Enfin, d'après A.3 :

$$\partial_s \mathbf{e}_z = \partial_s \varphi \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \end{bmatrix}_{gal} + \partial_s \theta \sin \varphi \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \quad (\text{A.9})$$

$$\partial_s \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} \partial_s \varphi \\ \partial_s \theta \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.10})$$

### A.1.3 Système de coordonnées

Considérons un point  $M$  à l'intérieur du chenal de ligne médiane  $\Gamma$ , repéré dans  $\mathcal{R}_{gal}$  par son vecteur position  $\mathbf{OM} = \mathbf{M}$ , fonction du triplet de coordonnées  $(s, n, z) \in J_{ch} = J_\Gamma \times [-1, 1] \times [0, 1]$  tel que (cf. A.1.2.1) :

$$\mathbf{M}(s, n, z) = \mathbf{M}_\Gamma(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ n \cdot b(s) \\ \eta(s, n) + z \cdot h(s, n) \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.11})$$

où (cf. fig. A.2) :

- $b(s)$  est la demi largeur du chenal au niveau de  $M_\Gamma(s)$ , mesurée dans le plan horizontal  $(M_\Gamma(s), p_z(\mathbf{e}_s), \mathbf{e}_n)$ .  
 $2b$  correspond donc à la largeur du chenal mesurée sur une vue aérienne.
- $\eta(s, n)$  est l'élévation algébrique du fond du chenal mesurée sur l'axe  $(M_\Gamma(s) + nb(s) \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z)$  par rapport à l'altitude du point  $M_\Gamma(s)$ .
- $h(s, n)$  est la profondeur du chenal, grandeur positive mesurée sur l'axe  $(M_\Gamma(s) + nb(s) \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z)$ .

On introduit également :

$$\xi(s, n) = \eta(s, n) + h(s, n) \quad (\text{A.12})$$

élévation algébrique de la surface de l'eau mesurée sur l'axe  $(M_\Gamma(s) + nb(s) \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z)$  par rapport à l'altitude du point  $M_\Gamma(s)$ .

Le but de ce changement de repère est d'exprimer les lois de la physique de la manière la plus simple possible en utilisant la ligne médiane  $\Gamma$  et les grandeurs naturelles  $b$ ,  $h$  et  $\eta$ , caractéristiques du chenal.

Nous supposons ici que les variations des angles  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction de  $s$  sont suffisamment faibles pour que le système de coordonnées ainsi défini soit valide<sup>3</sup>. La coordonnée  $s$  est homogène à une longueur, alors que  $n$  et  $z$  sont adimensionnelles.

Par la suite nous omettons également de spécifier la dépendance en  $n$ , et notons :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\Gamma + \begin{bmatrix} 0 \\ nb \\ \eta + zh \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.13})$$

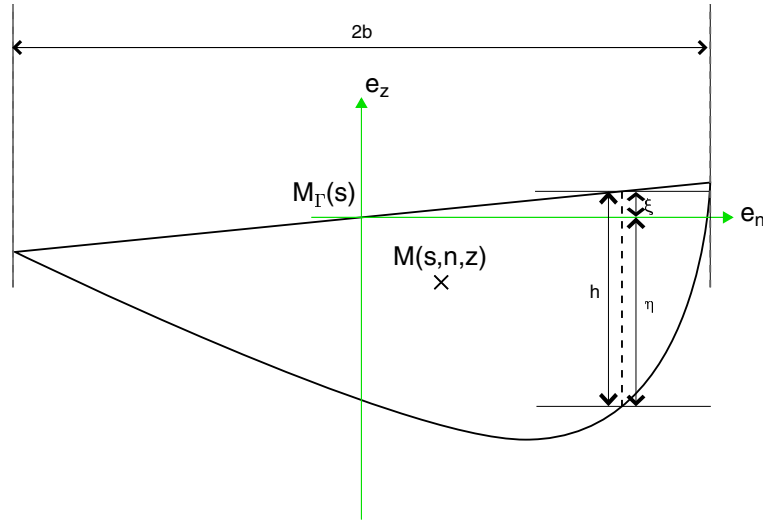


FIG. A.2 – Section du chenal dans le plan  $(M_\Gamma(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_z(s))$ , système de coordonnées et grandeurs physiques caractérisant le chenal

## A.1.4 Base naturelle

### A.1.4.1 Définition

Soit  $I = \{s, n, z\}$ , on note :  $\mathcal{B}_s = (\mathbf{e}_i)_{i \in I}$ . L'arc  $\Gamma$  étant régulier, et en supposant de même que les grandeurs naturelles  $b(s)$ ,  $\eta(s)$  et  $h(s)$  sont suffisamment régulières, le champ vectoriel  $\mathbf{M}(s, n, z)$  est différentiable. Soit  $a = (s_a, n_a, z_a) \in J_{ch}$  un point de l'espace des coordonnées utilisées pour repérer un point du chenal auquel correspond un point  $M_a$  de l'espace physique  $\mathcal{E}$  tel que  $\mathbf{OM}_a = \mathbf{M}(s_a, n_a, z_a)$  (cf. A.11). La différentielle de  $\mathbf{M}$  en  $a$  est :

$$d_a \mathbf{M} = \partial_i \mathbf{M}|_a dx^i \quad (\text{A.14})$$

<sup>3</sup>Un système de coordonnées est valide si l'application :

$$\Phi : \begin{cases} J_{ch} & \rightarrow \mathcal{E} \\ (s, n, z) & \mapsto \mathbf{M}(s, n, z) \end{cases}$$

est un  $\mathcal{C}^1$  – difféomorphisme de  $J_{ch}$  dans  $\Phi(J_{ch})$  que l'on suppose ici contenir tous les points du chenal.

où  $\partial_i \mathbf{M}|_a$  désigne la dérivée partielle de  $\mathbf{M}$  au point  $a$  par rapport à la  $i$ -ème coordonnée et  $dx^i$  désigne la  $i$ -ème application coordonnée définie sur  $J_{ch}$ .

On note  $\mathcal{B}_{nat}$  et on appelle base naturelle au point  $M_a$  associée aux coordonnées  $(s, n, z)$  le triplet :

$$\mathcal{B}_{nat}^a = (\partial_s \mathbf{M}|_a, \partial_n \mathbf{M}|_a, \partial_z \mathbf{M}|_a)$$

que l'on note plus simplement :

$$\mathcal{B}_{nat} = (\partial_s \mathbf{M}, \partial_n \mathbf{M}, \partial_z \mathbf{M}) \quad (\text{A.15})$$

En combinant A.13, A.6, A.8 et A.10 on obtient les coordonnées de la base naturelle sur  $\mathcal{B}_s$  :

$$\partial_s \mathbf{M} = \partial_s \mathbf{M}_\Gamma + \partial_s \left( \begin{bmatrix} 0 \\ nb \\ \eta + zh \end{bmatrix}_s \right)$$

$$\partial_s \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_s + \begin{bmatrix} 0 \\ n \partial_s b \\ \partial_s (\eta + zh) \end{bmatrix}_s - nb \partial_s \theta \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}_s + (\eta + zh) \begin{bmatrix} \partial_s \varphi \\ \partial_s \theta \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}_s$$

$$\partial_s \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 - nb \partial_s \theta \cos \varphi + (\eta + zh) \partial_s \varphi \\ n \partial_s b + (\eta + zh) \partial_s \theta \sin \varphi \\ \partial_s (\eta + zh) - nb \partial_s \theta \sin \varphi \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.16})$$

$$\partial_n \mathbf{M} = \partial_n \mathbf{M}_\Gamma + \partial_n \left( \begin{bmatrix} 0 \\ nb \\ \eta + zh \end{bmatrix}_s \right)$$

$$\partial_n \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ \partial_n (\eta + zh) \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.17})$$

$$\partial_z \mathbf{M} = \partial_z \mathbf{M}_\Gamma + \partial_z \left( \begin{bmatrix} 0 \\ nb \\ \eta + zh \end{bmatrix}_s \right)$$

$$\partial_z \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}_s \quad (\text{A.18})$$

#### A.1.4.2 Matrices de passage

Soit  $A$  la matrice des coordonnées de  $\mathcal{B}_{nat}$  sur  $\mathcal{B}_s$ , également appelée matrice de passage de  $\mathcal{B}_{nat}$  à  $\mathcal{B}_s$ . On a d'après A.16, A.17 et A.18 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - nb \partial_s \theta \cos \varphi + (\eta + zh) \partial_s \varphi & 0 & 0 \\ n \partial_s b + (\eta + zh) \partial_s \theta \sin \varphi & b & 0 \\ \partial_s (\eta + zh) - nb \partial_s \theta \sin \varphi & \partial_n (\eta + zh) & h \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Les coefficients de  $A$  sont parfois appelés multiplicateurs et l'on note :

$$A = \begin{bmatrix} \mu_s & 0 & 0 \\ \mu_{ns} & b & 0 \\ \mu_{zs} & \mu_{zn} & h \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Si le système de coordonnées  $(s, n, z)$  est valide<sup>4</sup> on a  $\det A \neq 0$ ,  $A$  est alors inversible et  $\mathcal{B}_{nat} = (\tilde{\mathbf{e}}_i = \partial_i \mathbf{M})_{i \in I}$  est bien une base de  $\mathcal{E}$ . Pour un chenal en eau,  $b$  et  $h$  sont des grandeurs strictement positives, une condition nécessaire et suffisante est  $\mu_s \neq 0$  soit par continuité  $\mu_s > 0$  car pour une portion de chenal rectiligne dont la pente est constante on a  $\mu_s = 1$ .

On note alors  $B = A^{-1}$ . Comme  $A$  est triangulaire inférieure, il en est de même de  $B$  et le calcul donne :

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} bh & 0 & 0 \\ -h\mu_{ns} & \mu_s h & 0 \\ \mu_{ns}\mu_{zn} - b\mu_{zs} & -\mu_s\mu_{zn} & \mu_s b \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_s} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{bh} - \frac{\mu_{zs}}{h} \right) & -\frac{\mu_{zn}}{bh} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

#### A.1.4.3 Changements de coordonnées

En notant  $A^i_j$  (respectivement  $B^i_j$ ) l'élément situé sur la  $i$ ème ligne et sur la  $j$ ème colonne de  $A$  (respectivement  $B$ ), on a :

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = A^i_j \mathbf{e}_j$$

Soit un vecteur  $\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i = \tilde{V}^i \tilde{\mathbf{e}}_i$  alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \tilde{V}^j \tilde{\mathbf{e}}_j \\ &= \tilde{V}^j A^i_j \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

et par unicité de la décomposition sur  $\mathcal{B}_s$ , il vient :

$$V^i = A^i_j \tilde{V}^j$$

soit, matriciellement si l'on désigne par  $[V]$  et  $[\tilde{V}]$  les vecteurs coordonnées de  $\mathbf{V}$  respectivement sur  $\mathcal{B}_s$  et  $\mathcal{B}_{nat}$  :

$$[V] = A^\bullet \cdot [\tilde{V}]$$

De même on montre que :

$$[\tilde{V}] = B^\bullet \cdot [V]$$

---

<sup>4</sup> $|\det A|$  est le jacobien de  $\Phi$  introduite à la note 3 qui par hypothèse est alors non nul.

Soit  $\mathcal{B}_s^\perp = (\mathbf{e}^i)_{i \in I}$  et  $\mathcal{B}_{nat}^\perp = (\tilde{\mathbf{e}}^i)_{i \in I}$  les bases duales respectives de  $\mathcal{B}_s$  et  $\mathcal{B}_{nat}$ . Une forme linéaire  $\mathbf{u}$ , tenseur d'ordre 1, peut être définie par ses coordonnées sur l'une de ces deux bases. Soit  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = \tilde{u}_i \tilde{\mathbf{e}}^i$ , on a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_j &= \langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, A^i_j \mathbf{e}_i \rangle \\ &= A^i_j \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= A^i_j u_i\end{aligned}$$

Donc si l'on désigne par  $[u]$  et  $[\tilde{u}]$  les vecteurs coordonnées de  $\mathbf{u}$  respectivement sur  $\mathcal{B}_s^\perp$  et  $\mathcal{B}_{nat}^\perp$ , il vient :

$$[\tilde{u}] = A^\bullet \bullet^T [u]$$

et de même :

$$[u] = B^\bullet \bullet^T [\tilde{u}] \quad (\text{A.22})$$

#### A.1.4.4 Variation des multiplicateurs

En utilisant leurs définitions (*cf.* A.19 et A.20) on peut calculer les variations des multiplicateurs par rapport aux différentes coordonnées :

$$\begin{aligned}\partial_s \mu_s &= -n \partial_s b \partial_s \theta \cos \varphi - n b \partial_{ss} \theta \cos \varphi + n b \partial_s \theta \partial_s \varphi \sin \varphi + \partial_s (\eta + zh) \partial_s \varphi + (\eta + zh) \partial_{ss} \varphi \\ \partial_n \mu_s &= -b \partial_s \theta \cos \varphi + \partial_n (\eta + zh) \partial_s \varphi \\ \partial_z \mu_s &= h \partial_s \varphi \\ \partial_s \mu_{ns} &= n \partial_{ss} b + \partial_s (\eta + zh) \partial_s \theta \sin \varphi + (\eta + zh) \partial_{ss} \theta \sin \varphi + (\eta + zh) \partial_s \theta \partial_s \varphi \cos \varphi \\ \partial_n \mu_{ns} &= \partial_s b + \partial_n (\eta + zh) \partial_s \theta \sin \varphi \\ \partial_z \mu_{ns} &= h \partial_s \theta \sin \varphi \\ \partial_s \mu_{zs} &= \partial_{ss} (\eta + zh) - n \partial_s b \partial_s \theta \sin \varphi - n b \partial_{ss} \theta \sin \varphi - n b \partial_s \theta \partial_s \varphi \cos \varphi \\ \partial_n \mu_{zs} &= \partial_{sn} (\eta + zh) - b \partial_s \theta \sin \varphi \\ \partial_z \mu_{zs} &= \partial_s h \\ \partial_s \mu_{zn} &= \partial_{sn} (\eta + zh) \\ \partial_n \mu_{zn} &= \partial_{nn} (\eta + zh) \\ \partial_z \mu_{zn} &= \partial_n h\end{aligned}$$

## A.2 Champs tensoriels

### A.2.1 Champ scalaire

#### A.2.1.1 Différentielle d'un champ scalaire

A définie précédemment (*cf.* A.1.4.1) est la matrice<sup>5</sup> de l'application linéaire tangente  $d_a \mathbf{M}$  qui fait correspondre à un déplacement élémentaire dans l'espace des coordonnées, un déplacement

<sup>5</sup>A est la matrice de  $d_a \mathbf{M}$  exprimée sur la base canonique de  $J_{ch}$  et  $\mathcal{B}_s$ . A est donc définie pour chaque point  $M_a$  et on devrait noter  $A(s, n, z)$

élémentaire dans l'espace physique. Comme  $A$  est inversible,  $d_a \mathbf{M}$  est un isomorphisme et pour tout déplacement rectiligne  $\Delta$  dans  $\mathcal{E}$ <sup>6</sup> à partir de  $M_a$  il existe alors un unique vecteur dans l'espace des coordonnées  $\delta = (\delta^s, \delta^n, \delta^z) \in J_{ch}$  tel que  $d_a \mathbf{M}(\delta) = \Delta$  c'est à dire :

$$\forall \Delta \in \mathcal{E} \exists ! \delta \in J_{ch} \ d_a \mathbf{M}(\delta) = \Delta \quad (\text{A.23})$$

Or, par définition (cf. A.15), on peut récrire A.14 :

$$d_a \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{e}}_i dx^i$$

ce qui donne :

$$d_a \mathbf{M}(\delta) = \delta^i \tilde{\mathbf{e}}_i$$

et comme par définition de  $\delta$  (cf. A.23) :

$$d_a \mathbf{M}(\delta) = \Delta$$

on a par unicité de la décomposition de  $\Delta$  sur  $\mathcal{B}_{nat}$  :

$$\forall i \in I \ \delta_i = \tilde{\mathbf{e}}^i(\Delta) \quad (\text{A.24})$$

Soit  $f$  un champ scalaire différentiable qui à tout point de l'espace, fait correspondre une grandeur scalaire. On peut voir la différentielle de ce champ comme une application de l'espace des coordonnées  $J_{ch}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors au point  $a$  :

$$d_a f = \partial_i f dx^i$$

soit en l'appliquant à  $\delta$  :

$$d_a f(\delta) = \partial_i f \delta^i$$

$$d_a f(\delta) = \partial_i f \tilde{\mathbf{e}}^i(\Delta)$$

Il est cependant plus pratique de considérer  $d_a f$  comme une forme linéaire sur l'espace physique  $\mathcal{E}$ . En utilisant A.24 sa différentielle au point  $M_a$  appliquée au vecteur  $\Delta$  de  $\mathcal{E}$  est telle que :

$$\begin{aligned} d_{M_a} f(\Delta) &= d_{M_a} f(d_a \mathbf{M}(\delta)) \\ &= d_a f(\delta) \\ d_{M_a} f(\Delta) &= \partial_i f \tilde{\mathbf{e}}^i(\Delta) \end{aligned}$$

et comme ceci est vrai pour tout vecteur  $\Delta$  de  $\mathcal{E}$ , on a en tout point  $M_a$  :

$$df(\mathbf{M}) = \partial_i f \tilde{\mathbf{e}}^i \quad (\text{A.25})$$

où les  $\tilde{\mathbf{e}}^i$  sont les vecteurs de  $\mathcal{B}_{nat}^\perp$  qui dépendent du point considéré  $M_a$ .

A l'aide de A.22 il vient :

$$df = B^i_j \partial_i f \mathbf{e}^j$$

---

<sup>6</sup>En fait dans  $\Phi(J_{ch})$ , avec  $\Phi$  défini à la note 3.

Soit en utilisant A.21 :

$$\begin{aligned}
df &= \left( \frac{1}{\mu_s} \partial_s f - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f \right) \mathbf{e}^s \\
&+ \left( \frac{1}{b} \partial_n f - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f \right) \mathbf{e}^n \\
&+ \frac{1}{h} \partial_z f \mathbf{e}^z
\end{aligned} \tag{A.26}$$

que l'on note :

$$df = df_i \mathbf{e}^i \tag{A.27}$$

### A.2.1.2 Vecteur gradient

Pour l'espace physique  $\mathcal{E}$  muni de sa structure d'espace affine euclidien, on peut introduire<sup>7</sup> en tout point  $M_a$  le vecteur gradient du champ scalaire  $f$  en  $M_a$ , noté  $\mathbf{grad}_{M_a} f$  qui est l'unique vecteur de  $\mathcal{E}$  tel que :

$$\forall M_a \in \mathcal{E} \forall \mathbf{V} \in \mathcal{E} \quad df_{M_a}(\mathbf{V}) = \mathbf{grad}_{M_a} f \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

soit, en simplifiant :

$$df(\mathbf{V}) = \mathbf{grad} f \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

les grandeurs considérées dépendant du point  $M_a$ .

Comme  $\mathcal{B}_s$  est une base orthonormée, en identifiant  $\mathcal{B}_s$  et  $\mathcal{B}_s^\perp$ , on a égalité des composantes contravariantes et covariantes soit :  $df^i = df_i$ . D'après A.27, il vient :

$$\mathbf{grad} f = df^i \mathbf{e}_i \tag{A.28}$$

soit avec A.26 :

$$\mathbf{grad} f = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{\mu_s} \partial_s f - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f \\ \frac{1}{b} \partial_n f - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f \\ \frac{1}{h} \partial_z f \end{array} \right]_s \tag{A.29}$$

## A.2.2 Champ vectoriel

Soit  $\mathbf{f}$  un champ vectoriel défini sur l'espace des coordonnées, qui a tout point de l'espace physique, de coordonnées  $(s, n, z)$ , fait correspondre un vecteur  $\mathbf{f}(s, n, z)$ . On note  $f^i$  les applications coordonnées telles que :

$$\mathbf{f} = f^k \mathbf{e}_k$$

<sup>7</sup>On aurait également pu introduire l'opérateur :

$$\nabla(\cdot) = \left[ \begin{array}{c} B^k_s \partial_k \cdot \\ B^k_n \partial_k \cdot \\ B^k_z \partial_k \cdot \end{array} \right]_s$$

### A.2.2.1 Différentielle

Si le champ  $\mathbf{f}$  est différentiable, A.25 donne :

$$d\mathbf{f} = \partial_i (f^k \mathbf{e}_k) \otimes \tilde{\mathbf{e}}^i$$

et, à l'aide de A.22 :

$$d\mathbf{f} = B^i_j \partial_i (f^k \mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}^j$$

soit :

$$d\mathbf{f} = B^i_j (\partial_i f^k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^j + f^k \partial_i \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^j)$$

Alors à l'aide A.6, A.8 et A.10, il vient :

– Les coordonnées sur  $\mathbf{e}^s$  :

$$d\mathbf{f}(\mathbf{e}_s) = B^i_s (\partial_i f^k \mathbf{e}_k + f^k \partial_i \mathbf{e}_k)$$

$$d\mathbf{f}(\mathbf{e}_s) = B^i_s (\partial_i f^s \mathbf{e}_s + \partial_i f^n \mathbf{e}_n + \partial_i f^z \mathbf{e}_z) + B^k_s (f^s \partial_i \mathbf{e}_s + f^n \partial_i \mathbf{e}_n + f^z \partial_i \mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(\mathbf{e}_s) &= B^s_s (\partial_s f^s \mathbf{e}_s + \partial_s f^n \mathbf{e}_n + \partial_s f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^n_s (\partial_n f^s \mathbf{e}_s + \partial_n f^n \mathbf{e}_n + \partial_n f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^z_s (\partial_z f^s \mathbf{e}_s + \partial_z f^n \mathbf{e}_n + \partial_z f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^s_s (f^s \partial_s \mathbf{e}_s + f^n \partial_s \mathbf{e}_n + f^z \partial_s \mathbf{e}_z) \\ &+ B^n_s (\mathbf{0}) \\ &+ B^z_s (\mathbf{0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(\mathbf{e}_s) &= B^s_s (\partial_s f^s \mathbf{e}_s + \partial_s f^n \mathbf{e}_n + \partial_s f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^n_s (\partial_n f^s \mathbf{e}_s + \partial_n f^n \mathbf{e}_n + \partial_n f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^z_s (\partial_z f^s \mathbf{e}_s + \partial_z f^n \mathbf{e}_n + \partial_z f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^s_s \begin{pmatrix} f^s (\partial_s \theta \cos \varphi \mathbf{e}_n - \partial_s \varphi \mathbf{e}_z) \\ -\partial_s \theta f^n (\cos \varphi \mathbf{e}_s + \sin \varphi \mathbf{e}_z) \\ + f^z (\partial_s \varphi \mathbf{e}_s + \partial_s \theta \sin \varphi \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(\mathbf{e}_s) &= (B^s_s \partial_s f^s + B^n_s \partial_n f^s + B^z_s \partial_z f^s - B^s_s \partial_s \theta \cos \varphi f^n + B^s_s \partial_s \varphi f^z) \mathbf{e}_s \\ &+ (B^s_s \partial_s f^n + B^n_s \partial_n f^n + B^z_s \partial_z f^n + B^s_s \partial_s \theta \cos \varphi f^s + B^s_s \partial_s \theta \sin \varphi f^z) \mathbf{e}_n \\ &+ (B^s_s \partial_s f^z + B^n_s \partial_n f^z + B^z_s \partial_z f^z - B^s_s \partial_s \varphi f^s - B^s_s \partial_s \theta \sin \varphi f^n) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(\mathbf{e}_s) &= [B^s_s (\partial_s f^s - \partial_s \theta \cos \varphi f^n + \partial_s \varphi f^z) + B^n_s \partial_n f^s + B^z_s \partial_z f^s] \mathbf{e}_s \\ &+ [B^s_s (\partial_s f^n + \partial_s \theta \cos \varphi f^s + \partial_s \theta \sin \varphi f^z) + B^n_s \partial_n f^n + B^z_s \partial_z f^n] \mathbf{e}_n \\ &+ [B^s_s (\partial_s f^z - \partial_s \varphi f^s - \partial_s \theta \sin \varphi f^n) + B^n_s \partial_n f^z + B^z_s \partial_z f^z] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

– Les coordonnées sur  $\mathbf{e}^n$  :

$$df(\mathbf{e}_n) = B^i_n (\partial_i f^k \mathbf{e}_k + f^k \partial_i \mathbf{e}_k)$$

$$df(\mathbf{e}_n) = B^i_n (\partial_i f^s \mathbf{e}_s + \partial_i f^n \mathbf{e}_n + \partial_i f^z \mathbf{e}_z) + B^k_n (f^s \partial_i \mathbf{e}_s + f^n \partial_i \mathbf{e}_n + f^z \partial_i \mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned} df(\mathbf{e}_n) &= 0 \cdot (\partial_s f^s \mathbf{e}_s + \partial_s f^n \mathbf{e}_n + \partial_s f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^n_n (\partial_n f^s \mathbf{e}_s + \partial_n f^n \mathbf{e}_n + \partial_n f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^z_n (\partial_z f^s \mathbf{e}_s + \partial_z f^n \mathbf{e}_n + \partial_z f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ 0 \cdot (f^s \partial_s \mathbf{e}_s + f^n \partial_s \mathbf{e}_n + f^z \partial_s \mathbf{e}_z) \\ &+ B^n_n (\mathbf{0}) \\ &+ B^z_n (\mathbf{0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df(\mathbf{e}_n) &= (B^n_n \partial_n f^s + B^z_n \partial_z f^s) \mathbf{e}_s \\ &+ (B^n_n \partial_n f^n + B^z_n \partial_z f^n) \mathbf{e}_n \\ &+ (B^n_n \partial_n f^z + B^z_n \partial_z f^z) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

– Les coordonnées sur  $\mathbf{e}^z$

$$df(\mathbf{e}_z) = B^i_z (\partial_i f^k \mathbf{e}_k + f^k \partial_i \mathbf{e}_k)$$

$$df(\mathbf{e}_z) = B^i_z (\partial_i f^s \mathbf{e}_s + \partial_i f^n \mathbf{e}_n + \partial_i f^z \mathbf{e}_z) + B^k_z (f^s \partial_i \mathbf{e}_s + f^n \partial_i \mathbf{e}_n + f^z \partial_i \mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned} df(\mathbf{e}_z) &= 0 \cdot (\partial_s f^s \mathbf{e}_s + \partial_s f^n \mathbf{e}_n + \partial_s f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ 0 \cdot (\partial_n f^s \mathbf{e}_s + \partial_n f^n \mathbf{e}_n + \partial_n f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ B^z_z (\partial_z f^s \mathbf{e}_s + \partial_z f^n \mathbf{e}_n + \partial_z f^z \mathbf{e}_z) \\ &+ 0 \cdot (f^s \partial_s \mathbf{e}_s + f^n \partial_s \mathbf{e}_n + f^z \partial_s \mathbf{e}_z) \\ &+ 0 \cdot (\mathbf{0}) \\ &+ B^z_z (\mathbf{0}) \end{aligned}$$

$$df(\mathbf{e}_z) = B^z_z \partial_z f^s \mathbf{e}_s + B^z_z \partial_z f^n \mathbf{e}_n + B^z_z \partial_z f^z \mathbf{e}_z \quad (\text{A.32})$$

D'où le résultat final en rassemblant A.30, A.31 et A.32 et en utilisant A.21 :

$$\begin{aligned} df &= \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^s - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^s + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^s - \frac{\partial_s \theta \cos \varphi}{\mu_s} f^n + \frac{\partial_s \varphi}{\mu_s} f^z \right] \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}^s \\ &+ \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^n - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^n + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^n + \frac{\partial_s \theta \cos \varphi}{\mu_s} f^s + \frac{\partial_s \theta \sin \varphi}{\mu_s} f^z \right] \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^s \\ &+ \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^z - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^z + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^z - \frac{\partial_s \varphi}{\mu_s} f^s - \frac{\partial_s \theta \sin \varphi}{\mu_s} f^n \right] \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}^s \\ &+ \left[ \frac{1}{b} \partial_n f^s - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^s \right] \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}^n + \left[ \frac{1}{b} \partial_n f^n - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^n \right] \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n + \left[ \frac{1}{b} \partial_n f^z - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^z \right] \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}^n \\ &+ \left[ \frac{1}{h} \partial_z f^s \right] \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}^z + \left[ \frac{1}{h} \partial_z f^n \right] \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^z + \left[ \frac{1}{h} \partial_z f^z \right] \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}^z \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

que l'on note :

$$df = df^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (\text{A.34})$$

### A.2.2.2 Tenseur gradient

Comme on a introduit le vecteur gradient (cf. A.2.1.2), on peut également introduire en tout point  $M_a$  de  $\mathcal{E}$  le tenseur gradient du champ vectoriel  $\mathbf{f}$  en  $M_a$ , noté  $\mathbf{grad}_{M_a} \mathbf{f}$  qui est l'unique tenseur sur  $\mathcal{E}$  tel que :

$$\forall M_a \in \mathcal{E} \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{E} \quad df_{M_a}(\mathbf{V}) = \mathbf{grad}_{M_a} \mathbf{f} \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

soit en simplifiant :

$$df(\mathbf{V}) = \mathbf{grad} \mathbf{f} \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

Alors, d'après A.34,  $\mathcal{B}_s$  étant une base orthonormée on a  $df^{ij} = df^{ij}$  et  $\mathbf{grad} \mathbf{f}$  s'écrit :

$$\mathbf{grad} \mathbf{f} = df^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.35})$$

### A.2.2.3 Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel

De manière générale, on peut s'intéresser aux invariants du tenseur  $df$  en un point  $M_a$  de  $\mathcal{E}$ .

Sa trace, appelée divergence, concerne sa partie symétrique et si  $\mathbf{f}$  est un champ de vitesse, elle mesure la dilatation locale ou déformation pure. On la note :

$$div \mathbf{f} = df^i_i$$

et d'après A.33 il vient :

$$\begin{aligned} div \mathbf{f} &= \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^s - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^s + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^s \\ &+ \frac{1}{b} \partial_n f^n - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^n + \frac{1}{h} \partial_z f^z - \frac{\partial_s \theta \cos \varphi}{\mu_s} f^n + \frac{\partial_s \varphi}{\mu_s} f^z \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Si  $\mathbf{f}$  est un champ de vitesse, la partie antisymétrique de  $df$  caractérise la rotation pure de l'élément de volume infinitésimal considéré, elle est caractérisée par le rotationnel de  $df$  :

$$\mathbf{rot} \mathbf{f} = -df \overline{\otimes} \Omega$$

avec  $\Omega$ , tenseur d'orientation de  $\mathcal{E}$ . Or, la base  $\mathcal{B}_s$  étant orthonormée directe  $\Omega$  s'écrit simplement :

$$\Omega = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{e}_{\sigma(2)} \otimes \mathbf{e}_{\sigma(3)}$$

où :

$$\Omega = \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_s$$

Soit un champ vectoriel  $\mathbf{f}$  dont l'écriture sur  $\mathcal{B}_s$  est :

$$\mathbf{f} = f^i \mathbf{e}_i$$

La base  $\mathcal{B}_s$  étant orthonormée les coordonnées contravariantes et covariantes sont égales, d'après A.35 on a alors :

$$\mathbf{rot} \mathbf{f} = - \left[ \begin{array}{c} df^{nz} - df^{zn} \\ df^{zs} - df^{sz} \\ df^{sn} - df^{ns} \end{array} \right]_s$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{f} = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{1}{b} \partial_n f^z - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^z \right) - \left( \frac{1}{h} \partial_z f^n \right) \\ \left( \frac{1}{h} \partial_z f^s \right) - \left( \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^z - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^z + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^z \right) \\ \left( \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^n - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^n + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^n \right) - \left( \frac{1}{b} \partial_n f^s - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^s \right) \\ + \frac{\partial_s \theta \cos \varphi}{\mu_s} f^s + \frac{\partial_s \theta \sin \varphi}{\mu_s} f^z \end{array} \right]_s$$

et finalement :

$$\mathbf{rot} \mathbf{f} = \left[ \begin{array}{c} \left( -\frac{1}{h} \partial_z f^n + \frac{1}{b} \partial_n f^z - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^z \right) \\ \left( \frac{1}{h} \partial_z f^s - \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^z + \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^z \right) \\ \left( -\frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^z + \frac{\partial_s \theta \cos \varphi}{\mu_s} f^s + \frac{\partial_s \theta \sin \varphi}{\mu_s} f^n \right) \\ \left( -\frac{1}{b} \partial_n f^s + \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z f^s + \frac{1}{\mu_s} \partial_s f^n - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n f^n \right) \\ \left( +\frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z f^n + \frac{\partial_s \theta \cos \varphi}{\mu_s} f^s + \frac{\partial_s \theta \sin \varphi}{\mu_s} f^z \right) \end{array} \right]_s \quad (\text{A.37})$$

Nous ne détaillons pas plus le calcul du rotationnel car il est fastidieux et nous ne l'utiliserons pas par la suite. On peut néanmoins à l'aide de A.37 calculer les composantes de  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{f})$  sur  $\mathcal{B}_s$  puis obtenir sur cette même base le laplacien de  $\mathbf{f}$  par la formule :

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{f}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{f})$$

Pour un fluide Newtonien incompressible, le laplacien du champs de vitesses de l'écoulement caractérise alors la dissipation d'énergie par les forces de viscosité.

#### A.2.2.4 Transport convectif

Si  $\mathbf{f} = f^j \mathbf{e}_j$  est un champ de vitesses, on a le terme d'accélération convective associée :

$$d\mathbf{f}(\mathbf{f}) = d\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}$$

soit à l'aide de l'équation A.34 :

$$d\mathbf{f} \otimes \mathbf{f} = df^i_j f^j \mathbf{e}_i \quad (\text{A.38})$$

Lorsque l'on a introduit le tenseur gradient, on note :

$$d\mathbf{f} \otimes \mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{f}$$

## Annexe B

# Obtentions des équations

### B.1 Principe fondamental de la dynamique : équations d'Euler

Nous faisons l'hypothèse que les fluides considérés sont newtoniens. Pour de tels fluides, il existe localement une relation linéaire entre vitesses de déformation et contraintes de cisaillement<sup>1</sup>. Dans un écoulement en rivière naturelle le transport de particules par l'écoulement met en défaut cette hypothèse. Cependant, des études ont montré qu'elle restait valable jusqu'à des concentrations extrêmes de l'ordre de 8% en masse [Graf et Altinakar (1996) *in* Balayn (2001)].

Comme nous retiendrons uniquement le résultat moyen de l'action cumulée de plusieurs phénomènes successifs sur une grande période de temps, l'hypothèse d'un régime permanent est justifiée. Soit  $\mathbf{u}$  le champ de vitesses de l'écoulement permanent (*i.e.*  $\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) d'un fluide Newtonien incompressible, la conservation locale de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} = -\mathbf{grad} p + \rho \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (\text{B.1})$$

et la conservation locale de la matière :

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{B.2})$$

avec pour le fluide considéré :

- $\rho$  la masse volumique,
- $p$  le champ de pression,
- $\nu$  le coefficient de viscosité cinématique,
- $\mathbf{F}$  le champ des densités volumiques de forces agissant sur le fluide.

Lorsque  $\mathbf{F}$  se limite à l'action de la force de pesanteur, on a  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_g$  avec :

$$\mathbf{F}_g = \rho g \mathbf{e}_z^{gal}$$

soit :

$$\mathbf{F}_g = \rho g \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{bmatrix}_s \quad (\text{B.3})$$

où  $g$  est l'accélération due à la pesanteur.

---

<sup>1</sup>Pour plus de détails voir Guyon et al. (2001).

## B.2 Hypothèses de modélisation

### B.2.1 Pente de l'écoulement

Nous retenons une formulation du principe fondamental de la dynamique appliqué à une colonne d'eau d'axe  $\mathbf{e}_z$  et de hauteur  $h$  qui prend en compte l'influence de la pente longitudinale de la ligne médiane du chenal, notée  $I$  et des variations de largeur du chenal. La pente longitudinale  $I$  le long de  $\Gamma$ , sera comptée positivement vers le bas (aval du chenal), elle est donc définie par :

$$I = -\partial_s \mathbf{M}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_z^{gal} \quad (\text{B.4})$$

soit, d'après et A.1 et A.2 :

$$I = \sin \varphi \quad (\text{B.5})$$

On a par conséquent,  $\cos \varphi$  étant par construction positif pour un écoulement réel :

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - I^2}$$

soit :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}I^2 + o(I^3)$$

Or, les valeurs de  $I$  étant très faibles, typiquement de l'ordre de  $10^{-3}$  pour des rivières naturelles, nous faisons l'approximation :

$$\cos \varphi \approx 1 \quad (\text{B.6})$$

De plus nous nous plaçons dans le cas :

$$\partial_s \varphi \rightarrow 0 \quad (\text{B.7})$$

### B.2.2 Résultante des forces agissant sur une colonne d'eau

#### B.2.2.1 Inventaire

Les forces agissant sur une colonne d'eau sont :

- la pesanteur, de densité volumique  $\mathbf{F}_g$  (cf. B.3) ;
- les forces de pression interne du fluide, équivalentes à une densité volumique de forces  $-\mathbf{grad} p$  ;
- les forces de frottements à la base de la colonne d'eau, dont la résultante est colinéaire à la vitesse de l'écoulement, de sens opposé et proportionnelle à son carré. Leur action est modélisée par une contrainte de cisaillement  $\tau_f$  (densité surfacique de force) donnée par la relation d'Einstein :

$$\tau_f = -\rho C_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} \mathbf{u} \quad (\text{B.8})$$

où le coefficient de proportionnalité<sup>2</sup>  $C_f$  est appelé coefficient de friction de Chézy ;

- les forces de dissipation d'énergie par viscosité ;
- les forces de frottements à l'interface avec le fluide situé dans la zone  $z > 1$  ;

<sup>2</sup>En toute rigueur, le coefficient  $C_f$  peut varier suivant la nature du lit de la rivière. En particulier, il est influencé par la rugosité du lit, directement liée à la granulométrie du fond et la présence de dunes ou autres formes sédimentaires.

– les effets de la force de Coriolis...

Au vu des considérations précédentes la densité surfacique de forces s'exerçant sur une colonne d'eau le long de  $\mathbf{e}_z$  de hauteur  $h$  est donnée par :

$$\int_0^1 \mathbf{F} h dz + \tau_f$$

où  $\mathbf{F}$  est la densité volumique de forces introduite précédemment (cf. B.1).

### B.2.2.2 Termes négligés

Dans ce travail, concernant des écoulements en rivières naturelles, nous négligerons :

- les forces de frottements avec l'interface supérieur, ici de l'air ;
- les effets de la force de Coriolis, qui ne deviennent importants qu'à des échelles spatiales supérieures à celles des rivières naturelles.

Pour des écoulements subaquatiques à grande échelle, les écoulements sous-marins par exemple, ces deux termes auraient du être retenus.

Nous négligerons également les forces de viscosité d'où :

$$\nu \Delta \mathbf{u} \approx \mathbf{0} \quad (\text{B.9})$$

Ce faisant nous formulons implicitement l'hypothèse que l'écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds élevé. La viscosité cinématique de l'eau étant de l'ordre de  $10^{-6}$ , cette condition est toujours satisfaite dans les écoulements chenalés de profondeur métrique<sup>3</sup>. De plus, nous nous intéresserons essentiellement aux phénomènes de crues pour lesquelles l'écoulement dans le chenal est fortement turbulent.

## B.2.3 Structure de l'écoulement

### B.2.3.1 Fonction de structure

On suppose que le champ de vitesse de l'écoulement peut être décrit par la structure suivante :

$$\mathbf{u}(s, n, z) = [u^s(s, n) \mathbf{e}_s + u^n(s, n) \mathbf{e}_n] T(z) + u^z(s, n, z) \mathbf{e}^z \quad (\text{B.10})$$

où  $T(z)$  est un facteur de structure telle que :

$$\int_0^1 T(z) dz = 1$$

On notera de manière générale :

$$\bar{\cdot} = \int_0^1 \cdot dz$$

<sup>3</sup>Ainsi un écoulement d'eau d'épaisseur décacentimétrique, est turbulent pour des vitesses de l'ordre du  $cm \cdot s^{-1}$ . Les écoulements sur la plaine d'inondation sont donc également turbulents. En outre cette turbulence est un facteur essentiel du transport sédimentaire.

on a donc :

$$\overline{T} = 1$$

A l'instar de Johansson et Parker Johansson et Parker (1989b) nous utilisons la fonction de structure parabolique (*cf.* fig. B.1) établie par Engelund Engelund (1974) pour un écoulement turbulent large et rectiligne. Cette fonction est donnée par :

$$T(z) = \frac{\chi + z - \frac{z^2}{2}}{\chi_1} \quad (\text{B.11})$$

avec :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\alpha_{C_f}}{\sqrt{C_f}} \\ \chi &= \chi_1 - \frac{1}{3} \\ \alpha_{C_f} &= 0,077 \end{aligned}$$

et  $C_f$  le coefficient de friction sur le lit du chenal introduit dans l'équation B.8. Il sera considéré constant ici.

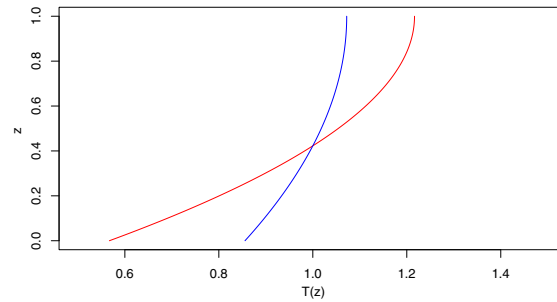


FIG. B.1 – Fonction de structure d'Engelund Engelund (1974)

Le tracé bleu correspond à une valeur minimale en rivière naturelle  $C_f = \frac{1}{900}$  et le tracé rouge correspond à une valeur maximale en rivière naturelle  $C_f = \frac{1}{100}$ .

### B.2.3.2 Plages de valeurs

Selon Johansson et Parker (1989b), on a en rivières naturelles :

$$10 < C_f^{-\frac{1}{2}} < 30 \quad (\text{B.12})$$

Nous calculons des grandeurs apparaissant par la suite :

$$\begin{aligned} \overline{zT} &= \frac{1}{\chi_1} \overline{\chi z + z^2 - \frac{1}{2}z^3} \\ &= \frac{1}{\chi_1} \left( \chi \overline{z} + \overline{z^2} - \frac{1}{2} \overline{z^3} \right) \\ \overline{zT} &= \frac{1}{\chi_1} \left( \frac{\chi}{2} + \frac{5}{24} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{T^2} &= \frac{1}{\chi_1^2} \overline{\chi^2 + z^2 + \frac{1}{4}z^4 + 2\chi z - \chi z^2 - z^3} \\
&= \frac{1}{\chi_1^2} \left( \chi^2 + \overline{z^2} + \frac{1}{4}\overline{z^4} + 2\chi\overline{z} - \chi\overline{z^2} - \overline{z^3} \right) \\
&= \frac{1}{\chi_1^2} \left( \chi^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \chi - \frac{\chi}{3} - \frac{1}{4} \right) \\
\overline{T^2} &= \frac{1}{\chi_1^2} \left( \chi^2 + \frac{2}{3}\chi + \frac{2}{15} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{zT^2} &= \frac{1}{\chi_1^2} \overline{z\chi^2 + z^3 + \frac{1}{4}z^5 + 2\chi z^2 - \chi z^3 - z^4} \\
&= \frac{1}{\chi_1^2} \left( \chi^2\overline{z} + \overline{z^3} + \frac{1}{4}\overline{z^5} + 2\chi\overline{z^2} - \chi\overline{z^3} - \overline{z^4} \right) \\
&= \frac{1}{\chi_1^2} \left( \frac{\chi^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{2\chi}{3} - \frac{\chi}{4} - \frac{1}{5} \right) \\
\overline{zT^2} &= \frac{1}{\chi_1^2} \left( \frac{\chi^2}{2} + \frac{5\chi}{12} + \frac{11}{120} \right)
\end{aligned}$$

Sur la plage de valeurs attribuées à  $C_f$  (cf. eq. B.12) on a respectivement :

$$1 < \overline{T^2} < 1,04 \quad (\text{B.13})$$

$$0,51 < \overline{zT} < 0,55 \quad (\text{B.14})$$

$$0,53 < \overline{zT^2} < 0,63 \quad (\text{B.15})$$

$$0,01 < \overline{z(T^2 - T)} < 0,07 \quad (\text{B.16})$$

$$0,55 < \overline{z(2T^2 - T)} < 0,70 \quad (\text{B.17})$$

## B.2.4 Expression des multiplicateurs

Avec la définition B.5 et sous les hypothèses B.6 et B.7 les multiplicateurs, définis par A.20, deviennent :

$$\mu_s = 1 - nb\partial_s\theta \quad (\text{B.18})$$

$$\mu_{ns} = n\partial_s b + (\eta + zh)I\partial_s\theta \quad (\text{B.19})$$

$$\mu_{zs} = \partial_s(\eta + zh) - nbI\partial_s\theta \quad (\text{B.20})$$

$$\mu_{zn} = \partial_n(\eta + zh) \quad (\text{B.21})$$

et leurs variations sont données par :

$$\partial_s\mu_s = -nb\partial_{ss}\theta - n\partial_s b\partial_s\theta \quad (\text{B.22})$$

$$\partial_n\mu_s = -b\partial_s\theta \quad (\text{B.23})$$

$$\partial_z\mu_s = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\partial_s\mu_{ns} = n\partial_{ss}b + \partial_s(\eta + zh)I\partial_s\theta + (\eta + zh)I\partial_{ss}\theta \quad (\text{B.25})$$

$$\partial_n\mu_{ns} = \partial_s b + \partial_n(\eta + zh)I\partial_s\theta \quad (\text{B.26})$$

$$\partial_z\mu_{ns} = hI\partial_s\theta \quad (\text{B.27})$$

$$\partial_s \mu_{zs} = \partial_{ss} (\eta + zh) - nI \partial_s b \partial_s \theta - nbI \partial_{ss} \theta \quad (\text{B.28})$$

$$\partial_n \mu_{zs} = \partial_{sn} (\eta + zh) - bI \partial_s \theta \quad (\text{B.29})$$

$$\partial_z \mu_{zs} = \partial_s h \quad (\text{B.30})$$

$$\partial_s \mu_{zn} = \partial_{sn} (\eta + zh) \quad (\text{B.31})$$

$$\partial_n \mu_{zn} = \partial_{nn} (\eta + zh) \quad (\text{B.32})$$

$$\partial_z \mu_{zn} = \partial_n h \quad (\text{B.33})$$

## B.3 Écoulement sur les interfaces

### B.3.1 Normales sur les interfaces

Considérons une surface  $\mathcal{S}_z$  paramétrée par  $(s, n)$  telle que :

$$\mathcal{S}_z = \{M_{\mathcal{S}_z}(s, n) = M(s, n, z) \mid (s, n) \in J_\Gamma \times [-1, 1]\}$$

avec  $z \in [0, 1]$  et  $M(s, n, z)$  défini par A.11.  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathcal{S}_1$  sont donc respectivement le fond du chenal et la surface de l'eau. En utilisant A.16 et A.17 une normale à  $\mathcal{S}_z$  en un point  $M_{\mathcal{S}_z}(s, n)$  est donnée par :

$$\partial_s M_{\mathcal{S}_z} \wedge \partial_n M_{\mathcal{S}_z} = (\mu_s \mathbf{e}_s + \mu_{ns} \mathbf{e}_n + \mu_{zs} \mathbf{e}_z) \wedge (b \mathbf{e}_n + \mu_{zn} \mathbf{e}_z)$$

La base  $\mathcal{B}_s$  étant directe, on a :

$$\partial_s M_{\mathcal{S}_z} \wedge \partial_n M_{\mathcal{S}_z} = \begin{bmatrix} \mu_{ns} \mu_{zn} - b \mu_{zs} \\ -\mu_s \mu_{zn} \\ \mu_s b \end{bmatrix}_s \quad (\text{B.34})$$

En évaluant B.34 en  $z = 0$  et en  $z = 1$ , on obtient une normale respectivement sur le fond du chenal et à la surface de l'eau.

### B.3.2 Relations avec la vitesse de l'écoulement

Au contact avec l'air, l'écoulement est tangent à la surface de l'eau, on a alors en tout point de la surface :

$$\partial_s M_{\mathcal{S}_1} \wedge \partial_n M_{\mathcal{S}_1} \cdot \mathbf{u}|_{z=1} = 0$$

soit avec B.34 évaluée en  $z = 1$  :

$$(\mu_{zn} \mu_{ns}|_{z=1} - b \mu_{zs}|_{z=1}) u^s T(1) - \mu_s \mu_{zn}|_{z=1} u^n T(1) + \mu_s b u^z|_{z=1} = 0 \quad (\text{B.35})$$

De même, l'écoulement étant tangent sur le fond du chenal, on a en tout point du fond :

$$\partial_s M_{\mathcal{S}_0} \wedge \partial_n M_{\mathcal{S}_0} \cdot \mathbf{u}|_{z=0} = 0$$

soit avec B.34 évaluée en  $z = 0$  :

$$(\mu_{zn} \mu_{ns}|_{z=0} - b \mu_{zs}|_{z=0}) u^s T(0) - \mu_s \mu_{zn}|_{z=0} u^n T(0) + \mu_s b u^z|_{z=0} = 0 \quad (\text{B.36})$$

En soustrayant B.36 à B.35 on obtient :

$$u^s [(\mu_{zn} \mu_{ns} - b \mu_{zs}) T]_{z=0}^{z=1} - \mu_s u^n [\mu_{zn} T]_{z=0}^{z=1} + \mu_s b [u^z]_{z=0}^{z=1} = 0$$

soit :

$$[u^z]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{b} u^n [\mu_{zn} T]_{z=0}^{z=1} - \frac{u^s}{\mu_s} \left[ \left( \frac{\mu_{zn} \mu_{ns}}{b} - \mu_{zs} \right) T \right]_{z=0}^{z=1} \quad (\text{B.37})$$

De plus, en multipliant B.35 par  $T$  (1) et B.36 par  $T$  (0) puis en les soustrayant, on obtient :

$$[u^z T]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{b} u^n [\mu_{zn} T^2]_{z=0}^{z=1} - \frac{u^s}{\mu_s} \left[ \left( \frac{\mu_{zn} \mu_{ns}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2 \right]_{z=0}^{z=1} \quad (\text{B.38})$$

Les relations B.37 et B.38 seront utilisées par la suite.

## B.4 Conservation de la matière

### B.4.1 Forme générale

La définition B.5, sous les hypothèses B.6 et B.7 et à l'aide de A.36 et B.10, donne :

$$\text{div } \mathbf{u} = \left( \begin{aligned} & \frac{1}{\mu_s} T \partial_s u^s - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} T \partial_n u^s + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) u^s \partial_z T \\ & + \frac{1}{b} T \partial_n u^n - \frac{\mu_{zn}}{bh} u^n \partial_z T - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^n T + \frac{1}{h} \partial_z u^z \end{aligned} \right) \quad (\text{B.39})$$

En sommant sur  $z$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div } \mathbf{u}} &= \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s \overline{T} - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} T} + \frac{1}{\mu_s h} u^s \overline{\left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z T} \\ &+ \frac{1}{b} \partial_n u^n \overline{T} - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^n \overline{T} - \frac{1}{bh} u^n \overline{\mu_{zn} \partial_z T} + \frac{1}{h} \overline{\partial_z u^z} \end{aligned}$$

soit sachant que  $\overline{T} = 1$  :

$$\overline{\text{div } \mathbf{u}} = \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} T} + \frac{1}{\mu_s h} u^s \overline{\left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z T} + \frac{1}{b} \partial_n u^n - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^n - \frac{1}{bh} u^n \overline{\mu_{zn} \partial_z T} + \frac{1}{h} [u^z]_{z=0}^{z=1}$$

puis, en intégrant par parties et en utilisant B.21 avec B.37 :

$$\overline{\text{div } \mathbf{u}} = \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} T} - \frac{1}{\mu_s h} u^s \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T} + \frac{1}{b} \partial_n u^n - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^n + \frac{1}{bh} u^n \overline{\partial_z \mu_{zn} T} \quad (\text{B.40})$$

Enfin en utilisant B.19, B.20, B.21, B.27, B.30, B.33 il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T} &= \overline{\left( \frac{\partial_z \mu_{ns} \mu_{zn} + \mu_{ns} \partial_z \mu_{zn}}{b} - \partial_z \mu_{zs} \right) T} \\ \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T} &= \overline{\left( \frac{h I \partial_s \theta \partial_n (\eta + zh) + (n \partial_s b + (\eta + zh) I \partial_s \theta) \partial_n h}{b} - \partial_s h \right) T} \\ \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T} &= -\partial_s h + \frac{h I \partial_s \theta \partial_n \eta + (n \partial_s b + \eta I \partial_s \theta) \partial_n h}{b} \\ &+ \frac{2h I \partial_s \theta \partial_n h}{b} \overline{zT} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

De même en utilisant B.33, on obtient :

$$\overline{\partial_z \mu_{zn} T} = \partial_n h \quad (\text{B.42})$$

et avec B.19 :

$$\begin{aligned} \overline{\mu_{ns} T} &= \overline{(n \partial_s b + (\eta + zh) I \partial_s \theta) T} \\ \overline{\mu_{ns} T} &= n \partial_s b + \eta I \partial_s \theta + h I \partial_s \theta \overline{z T} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

En rassemblant B.40, B.41, B.42 et B.43, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div } \mathbf{u}} &= \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^s (n \partial_s b + \eta I \partial_s \theta + h I \partial_s \theta \overline{z T}) \\ &\quad - \frac{1}{\mu_s h} u^s \left( -\partial_s h + \frac{h I \partial_s \theta \partial_n \eta + (n \partial_s b + \eta I \partial_s \theta) \partial_n h}{b} + \frac{2h I \partial_s \theta \partial_n h \overline{z T}}{b} \right) \\ &\quad + \frac{1}{b} \partial_n u^n - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^n + \frac{\partial_n h}{bh} u^n \\ \mu_s b h \overline{\text{div } \mathbf{u}} &= b h \partial_s u^s - h \partial_n u^s (n \partial_s b + \eta I \partial_s \theta + h I \partial_s \theta \overline{z T}) \\ &\quad - b u^s \left( -\partial_s h + \frac{h I \partial_s \theta \partial_n \eta + (n \partial_s b + \eta I \partial_s \theta) \partial_n h}{b} + \frac{2h I \partial_s \theta \partial_n h \overline{z T}}{b} \right) \\ &\quad + \mu_s h \partial_n u^n - b h \partial_s \theta u^n + \mu_s \partial_n h u^n \end{aligned}$$

Puis, à l'aide de B.23 il vient :

$$\begin{aligned} \mu_s b h \overline{\text{div } \mathbf{u}} &= b \partial_s (h u^s) + \partial_n (\mu_s h u^n) \\ &\quad - u^s \partial_n h [n \partial_s b + I \partial_s \theta (\eta + h \overline{z T})] - u^s I \partial_s \theta h \partial_n (\eta + h \overline{z T}) \\ &\quad - h \partial_n u^s [n \partial_s b + I \partial_s \theta (\eta + h \overline{z T})] \end{aligned}$$

D'après B.2, la conservation de la matière moyennée sur la profondeur s'écrit finalement :

$$\left( \begin{array}{c} b \partial_s (h u^s) + \partial_n (\mu_s h u^n) \\ -\partial_n (h u^s) [n \partial_s b + I \partial_s \theta (\eta + h \overline{z T})] \\ -u^s I \partial_s \theta h \partial_n (\eta + h \overline{z T}) \end{array} \right) = 0 \quad (\text{B.44})$$

## B.4.2 Cas d'un écoulement horizontal et de largeur constante

Dans le cas particulier où  $\partial_s b = 0$  et  $I = 0$ , on obtient à partir de B.44 :

$$b \partial_s (h u^s) + \partial_n (\mu_s h u^n) = 0 \quad (\text{B.45})$$

## B.5 Calcul des termes des équations d'Euler

### B.5.1 Variation de la quantité de mouvement

L'écoulement étant considéré permanent, on s'intéresse uniquement au terme d'accélération convective :

$$(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}$$

### B.5.1.1 Coordonnée de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}$ sur $\mathbf{e}_s$

En utilisant A.38 il vient :

$$\mathbf{e}^s((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) = du^s_s \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) + du^s_n \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) + du^s_z \mathbf{e}^z(\mathbf{u})$$

soit en utilisant A.35 et A.33 :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^s((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) &= \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) \right] \\ &+ \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{b} \partial_n \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) \right] \\ &+ \mathbf{e}^z(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{h} \partial_z \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) \right] \end{aligned}$$

Avec la structure retenue (cf. B.10) pour le champ des vitesses de l'écoulement on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^s((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) &= u^s T \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu_s} T \partial_s u^s - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} T \partial_n u^s - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^n T \\ + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) u^s \partial_z T \end{array} \right] \\ &+ u^n T \left[ \frac{1}{b} T \partial_n u^s - \frac{\mu_{zn}}{bh} u^s \partial_z T \right] + u^z \left[ \frac{1}{h} u^s \partial_z T \right] \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

En utilisant le fait que la conservation de la matière s'écrit :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

et en utilisant B.39 que l'on additionne à B.46 après l'avoir multipliée par  $u^s T$  il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^s((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) &= \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s T^2 - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n u^s T^2 + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) u^s T^2 \partial_z T - \frac{2 \partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n T^2 \\ &+ \frac{1}{b} \partial_n (u^s u^n) T^2 - \frac{\mu_{zn}}{bh} u^s u^n T^2 \partial_z T \\ &+ \frac{1}{h} u^s \partial_z (u^z T) \end{aligned}$$

En sommant sur  $z$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^s((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \left( \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s T^2 - \frac{2 \partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n \right) \overline{T^2} - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^s T^2 \overline{\mu_{ns} T^2} \\ &+ \frac{1}{\mu_s h} u^s T^2 \overline{\left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) 2T \partial_z T} + \frac{1}{b} \partial_n (u^s u^n) \overline{T^2} \\ &- \frac{1}{bh} u^s u^n \overline{\mu_{zn} T^2 \partial_z T} + \frac{1}{h} u^s \overline{\partial_z (u^z T)} \end{aligned}$$

Ensuite, en intégrant par parties et en utilisant B.38 on a :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^s((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \left( \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^s T^2 - \frac{2 \partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n + \frac{1}{b} \partial_n (u^s u^n) \right) \overline{T^2} \\ &- \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^s T^2 \overline{\mu_{ns} T^2} - \frac{1}{\mu_s h} u^s T^2 \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} \\ &+ \frac{1}{bh} u^s u^n \overline{\partial_z \mu_{zn} T^2} \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

### B.5.1.2 Coordonnée de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}$ sur $\mathbf{e}_n$

En utilisant A.38, A.35 et A.33 il vient :

$$\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) = du^n_s \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) + du^n_n \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) + du^n_z \mathbf{e}^z(\mathbf{u})$$

soit en utilisant A.35 et A.33 :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) &= \mathbf{e}^s(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) \right] \\ &+ \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{b} \partial_n \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) \right] \\ &+ \mathbf{e}^z(\mathbf{u}) \left[ \frac{1}{h} \partial_z \mathbf{e}^n(\mathbf{u}) \right] \end{aligned}$$

Avec la structure retenue (cf. B.10) pour le champ des vitesses de l'écoulement on a alors :

$$\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) = u^s T \left[ \begin{aligned} &\frac{1}{\mu_s} T \partial_s u^n - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} T \partial_n u^n + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^s T \\ &+ \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) u^n \partial_z T + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^z T \\ &+ u^n T \left[ \frac{1}{b} T \partial_n u^n - \frac{\mu_{zn}}{bh} u^n \partial_z T \right] \\ &+ u^z \left[ \frac{1}{h} u^n \partial_z T \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{B.48})$$

En utilisant à nouveau le fait que la conservation de la matière s'écrit :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

et en utilisant B.39 que l'on additionne à B.48 après l'avoir multipliée par  $u^n T$  il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}) &= \frac{1}{\mu_s} \partial_s (u^s u^n) T^2 - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n (u^s u^n) T^2 + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} (u^{s2} - u^{n2}) T^2 \\ &+ \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) u^s u^n 2T \partial_z T + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^z T \\ &+ \frac{1}{b} \partial_n u^{n2} T^2 - \frac{\mu_{zn}}{bh} u^{n2} 2T \partial_z T \\ &+ \frac{1}{h} u^n \partial_z (u^z T) \end{aligned}$$

En sommant sur  $z$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s (u^s u^n) + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} (u^{s2} - u^{n2}) + \frac{1}{b} \partial_n u^{n2} \right] \overline{T^2} - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n (u^s u^n) \overline{\mu_{ns} T^2} \\ &+ \frac{1}{\mu_s h} u^s u^n \overline{\left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) 2T \partial_z T} - \frac{1}{bh} u^{n2} \overline{\mu_{zn} 2T \partial_z T} \\ &+ \frac{1}{h} u^n \overline{\partial_z (u^z T)} + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s \overline{u^z T} \end{aligned}$$

Ensuite, en intégrant par parties et en utilisant B.38 on a :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s (u^s u^n) + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} (u^{s2} - u^{n2}) + \frac{1}{b} \partial_n u^{n2} \right] \overline{T^2} \\ &\quad - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n (u^s u^n) \overline{\mu_{ns} T^2} \\ &\quad - \frac{1}{\mu_s h} u^s u^n \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} \\ &\quad + \frac{1}{bh} u^{n2} \overline{\partial_z \mu_{zn} T^2} + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s \overline{u^z T} \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

### B.5.1.3 Termes de moyenne

Nous calculons ici les termes de moyenne faisant intervenir des multiplicateurs dans les équations B.47 et B.49.

On a :

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} = \overline{\left( \frac{\partial_z \mu_{ns}\mu_{zn} + \mu_{ns}\partial_z \mu_{zn} - \partial_z \mu_{zs}}{b} \right) T^2}$$

Puis en utilisant B.19, B.20, B.21, B.27, B.30, B.33 :

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} = \overline{\left( \frac{hI\partial_s\theta\partial_n(\eta + zh) + (n\partial_s b + (\eta + zh)I\partial_s\theta)\partial_n h}{b} - \partial_s h \right) T^2}$$

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} = -\partial_s h \overline{T^2} + \frac{hI\partial_s\theta\partial_n\eta + (n\partial_s b + \eta I\partial_s\theta)\partial_n h}{b} \overline{T^2} + \frac{2hI\partial_s\theta\partial_n h}{b} \overline{zT^2}$$

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} = -\partial_s h \overline{T^2} + \frac{n\partial_s b}{b} \partial_n h \overline{T^2} + \frac{I\partial_s\theta}{b} \partial_n \left[ h \left( \eta \overline{T^2} + hz \overline{T^2} \right) \right] \quad (\text{B.50})$$

De même on a :

$$\overline{\partial_z \mu_{zn} T^2} = \partial_n h \overline{T^2} \quad (\text{B.51})$$

Enfin, en utilisant B.19 :

$$\begin{aligned} \overline{\mu_{ns} T^2} &= \overline{(n\partial_s b + (\eta + zh)I\partial_s\theta) T^2} \\ \overline{\mu_{ns} T^2} &= n\partial_s b \overline{T^2} + I\partial_s\theta \left( \eta \overline{T^2} + hz \overline{T^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

### B.5.1.4 Cas d'un écoulement horizontal et de largeur constante

Dans le cas particulier où  $\partial_s b = 0$  et  $I = 0$ , on a en regroupant B.47, B.49 et en utilisant B.50, B.51 et B.52 :

$$\overline{\mathbf{e}^s \cdot ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} = \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^{s2} - \frac{2\partial_s\theta}{\mu_s} u^s u^n + \frac{\partial_s h}{\mu_s h} u^{s2} + \frac{1}{b} \partial_n (u^s u^n) + \frac{\partial_n h}{bh} u^s u^n \right] \overline{T^2} \quad (\text{B.53})$$

$$\overline{\mathbf{e}^n \cdot ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} = \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s (u^s u^n) + \frac{\partial_s\theta}{\mu_s} (u^{s2} - u^{n2}) + \frac{1}{b} \partial_n u^{n2} + \frac{\partial_n h}{bh} u^{n2} + \frac{\partial_s h}{\mu_s h} u^s u^n \right] \overline{T^2} \quad (\text{B.54})$$

## B.5.2 Forces de pression

### B.5.2.1 Hypothèse de validité de la loi de l'hydrostatique

L'action des forces de pression à l'intérieur du fluide est équivalente à celle d'une densité volumique de force :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} p$$

En utilisant A.29 on a alors :

$$\mathbf{grad} p = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{\mu_s} \partial_s p - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n p + \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \partial_z p \\ \frac{1}{b} \partial_n p - \frac{\mu_{zn}}{bh} \partial_z p \\ \frac{1}{h} \partial_z p \end{array} \right]_s \quad (\text{B.55})$$

Nous formulons alors l'hypothèse que la loi de l'hydrostatique donnant la pression est valide<sup>4</sup>, à savoir :

$$\partial_z p \approx -\rho g h \cos \varphi$$

et on obtient en utilisant B.6 :

$$\partial_z p = -\rho g h \quad (\text{B.56})$$

D'où à  $s$  et  $n$  fixés, on a l'intégrale sur une colonne d'eau, le long de  $\mathbf{e}_z$  du fond du chenal à sa surface :

$$\bar{p} = [zp]_0^1 - z \overline{\partial_z p}$$

et à l'aide de B.56 :

$$\bar{p} = p|_{z=1} + \frac{\rho g h}{2} \quad (\text{B.57})$$

où  $p|_{z=1}$  n'est autre que la pression atmosphérique considérée comme constante sur le champ d'expérience ce qui donne :

$$\partial_s (p|_{z=1}) = \partial_n (p|_{z=1}) = 0 \quad (\text{B.58})$$

### B.5.2.2 Résultante des forces de pression suivant $\mathbf{e}^s$

En reportant B.56 dans B.55, il vient :

$$\mathbf{e}^s (\mathbf{grad} p) = \frac{1}{\mu_s} \partial_s p - \frac{\mu_{ns}}{\mu_s b} \partial_n p - \frac{1}{\mu_s h} \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) \rho g h$$

d'où en sommant sur  $z$  :

$$\overline{\mathbf{e}^s (\mathbf{grad} p)} = \frac{1}{\mu_s} \partial_s \bar{p} - \frac{1}{\mu_s b} \overline{\mu_{ns} \partial_n p} - \frac{\rho g}{\mu_s} \overline{\left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right)} \quad (\text{B.59})$$

Or en utilisant B.57 et B.58 il vient :

$$\partial_s \bar{p} = \frac{1}{2} \rho g \partial_s h \quad (\text{B.60})$$

### B.5.2.3 Résultante des forces de pression suivant $\mathbf{e}^n$

En reportant B.56 dans B.55, il vient :

$$\mathbf{e}^n (\mathbf{grad} p) = \frac{1}{b} \partial_n p + \frac{\rho g \mu_{zn}}{b}$$

d'où en sommant sur  $z$  :

$$\overline{\mathbf{e}^n (\mathbf{grad} p)} = \frac{1}{b} \partial_n \bar{p} + \frac{\rho g}{b} \overline{\mu_{zn}} \quad (\text{B.61})$$

Or en utilisant B.57 et B.58 il vient :

$$\partial_n \bar{p} = \frac{1}{2} \rho g \partial_n h \quad (\text{B.62})$$

---

<sup>4</sup>Cette hypothèse revient à négliger les contributions des termes de vitesse dans la projection de B.1 sur  $\mathbf{e}_z$ .

#### B.5.2.4 Calcul des termes de moyenne

On a en utilisant B.19 :

$$\begin{aligned}\overline{\mu_{ns}\partial_n p} &= \overline{(n\partial_s b + (\eta + zh) I\partial_s\theta) \partial_n p} \\ \overline{\mu_{ns}\partial_n \bar{p}} &= (n\partial_s b + I\partial_s\theta\eta) \partial_n \bar{p} + hI\partial_s\theta\partial_n \bar{z}\bar{p}\end{aligned}$$

et en utilisant B.62 et en intégrant par parties :

$$\overline{\mu_{ns}\partial_n p} = \frac{\rho g}{2} (n\partial_s b + I\partial_s\theta\eta) \partial_n h + hI\partial_s\theta\partial_n \left( \left[ \frac{z^2}{2} p \right]_{z=0}^{z=1} - \frac{z^2}{2} \partial_z p \right)$$

et avec B.56 et B.58 :

$$\begin{aligned}\overline{\mu_{ns}\partial_n p} &= \frac{\rho g}{2} (n\partial_s b + I\partial_s\theta\eta) \partial_n h + \frac{\rho g}{6} hI\partial_n h\partial_s\theta \\ \overline{\mu_{ns}\partial_n \bar{p}} &= \frac{\rho g}{2} n\partial_s b\partial_n h + \frac{\rho g}{2} I\partial_s\theta\partial_n h \left( \eta + \frac{1}{3}h \right)\end{aligned}\tag{B.63}$$

En utilisant B.19, B.20 et B.21 on a :

$$\begin{aligned}\overline{\left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right)} &= \frac{\overline{\mu_{ns}\mu_{zn}}}{b} - \overline{\mu_{zs}} \\ \overline{\left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right)} &= \frac{(n\partial_s b + (\eta + zh) I\partial_s\theta) \partial_n (\eta + zh)}{b} - \overline{(\partial_s (\eta + zh) - nbI\partial_s\theta)} \\ \overline{\left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right)} &= \frac{\partial_n \eta}{b} (n\partial_s b + (\eta + \bar{z}h) I\partial_s\theta) + \frac{\partial_n h}{b} (n\partial_s b + \eta I\partial_s\theta) \bar{z} \\ &\quad + \frac{hI\partial_n h\partial_s\theta}{b} \bar{z}^2 - \partial_s \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + nbI\partial_s\theta \\ \overline{\left( \frac{\mu_{ns}\mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right)} &= \frac{n\partial_s b}{b} \partial_n \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + \frac{I\partial_s\theta}{b} \left( \partial_n \eta \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + \frac{\partial_n h}{2} \left( \eta + \frac{2}{3}h \right) \right) \\ &\quad - \partial_s \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + nbI\partial_s\theta\end{aligned}\tag{B.64}$$

Enfin, on a avec B.21 :

$$\overline{\mu_{zn}} = \partial_n \left( \eta + \frac{1}{2}h \right)\tag{B.65}$$

#### B.5.2.5 Cas d'un écoulement horizontal et de largeur constante

On a en regroupant B.59, B.60, B.63, et B.64 :

$$\begin{aligned}\overline{e^s(\mathbf{grad} p)} &= \frac{\rho g}{2\mu_s} \partial_s h - \frac{\rho g}{\mu_s b} \left[ \frac{1}{2} n\partial_s b\partial_n h + \frac{1}{2} I\partial_s\theta\partial_n h \left( \eta + \frac{1}{3}h \right) \right] \\ &\quad - \frac{\rho g}{\mu_s b} \left[ n\partial_s b\partial_n \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + I\partial_s\theta \left( \partial_n \eta \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + \frac{\partial_n h}{2} \left( \eta + \frac{2}{3}h \right) \right) \right. \\ &\quad \quad \left. - b\partial_s \left( \eta + \frac{1}{2}h \right) + nb^2 I\partial_s\theta \right]\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{e}^s(\mathbf{grad} p)} = -\frac{\rho g n b I \partial_s \theta}{\mu_s} - \frac{\rho g}{\mu_s b} \left[ n \partial_s b \partial_n (\eta + h) - b \partial_s (\eta + h) + I \partial_s \theta \left( \eta + \frac{h}{2} \right) \partial_n (\eta + h) \right]$$

soit encore avec A.12 :

$$\overline{\mathbf{e}^s(\mathbf{grad} p)} = -\frac{\rho g n b}{\mu_s} I \partial_s \theta + \frac{\rho g}{\mu_s} \partial_s \xi - \frac{\rho g}{\mu_s b} \left( n \partial_s b + I \partial_s \theta \left( \eta + \frac{h}{2} \right) \right) \partial_n \xi \quad (\text{B.66})$$

Dans le cas particulier où  $\partial_s b = 0$  et  $I = 0$ , il vient :

$$\overline{\mathbf{e}^s(\mathbf{grad} p)} = \frac{\rho g}{\mu_s} \partial_s \xi \quad (\text{B.67})$$

Avec B.61, B.62 et B.65 on a de manière générale :

$$\overline{\mathbf{e}^n(\mathbf{grad} p)} = \frac{\rho g}{b} \partial_n (\eta + h)$$

soit encore avec A.12 :

$$\overline{\mathbf{e}^n(\mathbf{grad} p)} = \frac{\rho g}{b} \partial_n \xi \quad (\text{B.68})$$

### B.5.3 Équations de Saint-Venant

On écrit de manière surfacique le principe fondamental de la dynamique pour une colonne d'eau d'axe  $\mathbf{e}_z$  et de hauteur  $h$ , à savoir qu'à tout moment, la variation de la quantité de mouvement de cette colonne est égale à la résultante des forces s'exerçant dessus. Pour cela on somme le long de la colonne d'eau B.1 et on ajoute la contrainte de friction à la base de la colonne d'eau (*cf.* B.8). Sachant que l'élément de longueur le long de la colonne est  $h dz$  il vient :

$$\int_0^1 \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} h dz = \int_0^1 \mathbf{F} h dz + \tau_f \quad (\text{B.69})$$

Dans le cas particulier où  $\partial_s b = 0$  et  $I = 0$ , en regroupant B.53, B.54, B.67, et B.68, l'équation B.69 donne :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s (h u^s) + \frac{1}{b} \partial_n (h u^s u^n) - \frac{2h \partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n \right] \overline{T^2} \\ &= -\frac{gh}{\mu_s} \partial_s \xi - C_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} u^s \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\mu_s} \partial_s (h u^s u^n) + \frac{1}{b} \partial_n (h u^{n2}) + \frac{h \partial_s \theta}{\mu_s} (u^s - u^n) \right] \overline{T^2} \\ &= -\frac{gh}{b} \partial_n \xi - C_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} u^n \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

On adjoint alors à ces équations la conservation de la matière B.45 soit :

$$b \partial_s (h u^s) + \partial_n (\mu_s h u^n) = 0 \quad (\text{B.72})$$

Les équations B.70 et B.71 sont, au terme de courant secondaire près, la forme conservative<sup>5</sup> des équations utilisées par Johansson et Parker (1989b); Sun (1998).

<sup>5</sup>La forme non conservative peut être obtenue à partir de la conservation de la matière B.72.

Si on considère que l'on a  $\overline{T^2} \approx 1$ , approximation satisfaisante dans les rivières naturelles (*cf.* eq. B.13) on obtient les équations utilisées par Ikeda et al. (1981); Sun et al. (1996); Sun (1998); Sun et al. (2001c) qui sont les équations de Saint-Venant pour les écoulements peu profonds :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_s} \partial_s (hu^{s^2}) + \frac{1}{b} \partial_n (hu^s u^n) - \frac{2h\partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n \\ = & -\frac{gh}{\mu_s} \partial_s \xi - C_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} u^s \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_s} \partial_s (hu^s u^n) + \frac{1}{b} \partial_n (hu^{n^2}) + \frac{h\partial_s \theta}{\mu_s} (u^{s^2} - u^{n^2}) \\ = & -\frac{gh}{b} \partial_n \xi - C_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} u^n \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

$$\partial_s (hu^s) + \frac{1}{b} \partial_n (\mu_s hu^n) = 0 \quad (\text{B.75})$$

ou sous la forme non conservative<sup>6</sup>, en explicitant  $\mu_s$  (*cf.* eq. B.18) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - nb\partial_s \theta} u^s \partial_s u^s - \frac{\partial_s \theta}{1 - nb\partial_s \theta} u^s u^n + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^s \\ = & -\frac{g}{1 - nb\partial_s \theta} \partial_s \xi - \frac{C_f}{h} \|\mathbf{u}\| u^s \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - nb\partial_s \theta} u^s \partial_s u^n + \frac{\partial_s \theta}{1 - nb\partial_s \theta} u^s u^s + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^n \\ = & -\frac{g}{b} \partial_n \xi - \frac{C_f}{h} \|\mathbf{u}\| u^n \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

$$\partial_s (hu^s) + \frac{1}{b} \partial_n ((1 - nb\partial_s \theta) hu^n) = 0 \quad (\text{B.78})$$

---

<sup>6</sup>Cette forme est obtenue :

- en multipliant B.75 par  $\frac{u^s}{\mu_s}$  puis en soustrayant le résultat à B.73 et en divisant le tout par  $h$ .
- en multipliant B.75 par  $\frac{u^n}{\mu_s}$  puis en soustrayant le résultat à B.74 et en divisant le tout par  $h$ .



## Annexe C

# Linéarisation et modélisation

Contrairement aux travaux de Ikeda et al. (1981) et Sun et al. (1996) et Sun (1998) nous ne partons pas des équations de Saint-Venant, mais d'une formulation retenant explicitement l'influence de la pente longitudinale du chenal et des variations de largeur de l'écoulement. Nos développements permettent de préciser quels termes sont retenus en ce qui concerne l'influence de la pente longitudinale du chenal et pourquoi les variations de largeur n'ont qu'une faible influence. In fine nous retrouvons en partie les résultats de Sun (1998) en ce qui concerne l'influence de la pente longitudinale.

La description de l'écoulement que nous retenons (*cf.* B.10) est moins complexe que celle proposée par Johansson et Parker (1989a) mais ces auteurs ont montré que les résultats obtenus ainsi ne différaient que peu : seul un coefficient est différent, qui de plus peut être facilement modifié une fois les développements obtenus. Des études récentes plus poussées [Zolezzi et Seminara (2001); Seminara et Tubino (2001)] montrent que le modèle utilisé ici pourrait être légèrement mis en défaut pour certains cas précis et rares. Notre objectif étant d'appliquer ces équations d'évolution sur une longue période de temps, le recours à la complexité supérieure du modèle de ces auteurs ne nous semble pas justifié.

### C.1 Linéarisation des équations décrivant la vitesse de l'écoulement

#### C.1.1 Équations de départ

On pose par la suite :

$$\overline{T^2} \approx 1$$

Cette approximation est justifiée en rivière naturelle (*cf.* eq. B.13).

##### C.1.1.1 Accélération convective suivant $\mathbf{e}_s$

En soustrayant à B.47 l'équation de conservation de la matière B.40 multipliée par  $u^s$  il vient :

$$\overline{\mathbf{e}^s \cdot ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} = \frac{1}{\mu_s} \partial_s u^{s2} - \frac{2\partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n + \frac{1}{b} \partial_n (u^s u^n) - \frac{1}{\mu_s b} \partial_n u^{s2} \overline{\mu_{ns} T^2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\mu_s h} u^{s2} \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T^2} + \frac{1}{b h} u^s u^n \overline{\partial_z \mu_{zn} T^2} \\
& -\frac{1}{\mu_s} u^s \partial_s u^s + \frac{1}{\mu_s b} u^s \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} T} + \frac{1}{\mu_s h} u^{s2} \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) T} \\
& -\frac{1}{b} u^s \partial_n u^n + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n - \frac{1}{b h} u^s u^n \overline{\partial_z \mu_{zn} T} \\
\overline{\mathbf{e}^s ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \frac{1}{\mu_s} u^s \partial_s u^s - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^s + \frac{1}{\mu_s b} u^s \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} (T - 2T^2)} \\
& + \frac{1}{\mu_s h} u^{s2} \overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) (T - T^2)} - \frac{1}{b h} u^s u^n \overline{\partial_z \mu_{zn} (T - T^2)}
\end{aligned}$$

Par analogie à B.50 :

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) (T - T^2)} = \frac{-\partial_s h \overline{T - T^2} + \frac{n \partial_s b}{b} \partial_n h \overline{T - T^2}}{+ \frac{I \partial_s \theta}{b} \partial_n \left[ h \left( \eta T - T^2 + h z (T - T^2) \right) \right]} \quad (\text{C.1})$$

et comme :

$$\begin{aligned}
\overline{T - T^2} &= \overline{T} - \overline{T^2} \\
&= 1 - \overline{T^2} \\
\overline{T - T^2} &\approx 0
\end{aligned}$$

alors C.1 donne :

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) (T - T^2)} \approx \frac{I \partial_s \theta}{b} \partial_n h^2 z \overline{(T - T^2)}$$

Or d'après B.16 :

$$\overline{z (T - T^2)} \approx 0 \quad (\text{C.2})$$

donc finalement :

$$\overline{\partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) (T - T^2)} \approx 0 \quad (\text{C.3})$$

De même, par analogie à B.51 :

$$\overline{\partial_z \mu_{zn} (T - T^2)} \approx 0 \quad (\text{C.4})$$

Puis, à l'aide de B.52 :

$$\overline{\mu_{ns} (T - 2T^2)} = n \partial_s b \overline{T - 2T^2} + I \partial_s \theta \left( \eta \overline{T - 2T^2} + h z \overline{(T - 2T^2)} \right)$$

et d'après<sup>1</sup> B.17 :

$$\overline{z (2T^2 - T)} \approx \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\overline{\mu_{ns} (T - 2T^2)} \approx -n \partial_s b - I \partial_s \theta \left( \eta + \frac{h}{2} \right)$$

et finalement, on a :

$$\overline{\mathbf{e}^s ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} \approx \frac{1}{\mu_s} u^s \partial_s u^s - \frac{n \partial_s b + I \partial_s \theta \left( \eta + \frac{h}{2} \right)}{\mu_s b} u^s \partial_n u^s - \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^s u^n + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^s \quad (\text{C.5})$$

<sup>1</sup>Bien que cette approximation ne soit pas excellente, les termes impliqués n'auront pas d'influence par la suite.

### C.1.1.2 Accélération convective suivant $\mathbf{e}_n$

En prenant  $\overline{T^2} \approx 1$  et en soustrayant à B.49 l'équation de conservation de la matière B.40 multipliée par  $u^n$  il vient comme précédemment :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \frac{1}{\mu_s} u^s \partial_s u^n + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^{s2} + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^n - \frac{1}{\mu_s b} u^s \partial_n u^n \overline{\mu_{ns} T^2} + \frac{1}{\mu_s b} u^n \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} (T - T^2)} \\ &\quad - \frac{1}{\mu_s h} u^s u^n \partial_z \left( \frac{\mu_{ns} \mu_{zn}}{b} - \mu_{zs} \right) (T - T^2) - \frac{1}{bh} u^{n2} \overline{\partial_z \mu_{zn} (T - T^2)} + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s \overline{u^z T} \end{aligned}$$

En utilisant B.52, C.3 et C.4, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \frac{1}{\mu_s} u^s \partial_s u^n + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^{s2} + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^n - \frac{1}{\mu_s b} u^s \partial_n u^n \left( n \partial_s b + I \partial_s \theta \left( \eta + h z \overline{T^2} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_s b} u^n \partial_n u^s \overline{\mu_{ns} (T - T^2)} + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s \overline{u^z T} \end{aligned}$$

Par analogie à B.52 :

$$\overline{\mu_{ns} (T - T^2)} = n \partial_s b (T - T^2) + I \partial_s \theta \left( \eta (T - T^2) + h z \overline{(T - T^2)} \right)$$

et en utilisant C.2 :

$$\overline{\mu_{ns} (T - T^2)} \approx 0$$

Enfin, en effectuant l'approximation<sup>2</sup> (cf. eq. B.15) :

$$\overline{z T^2} \approx \frac{1}{2}$$

on a :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}^n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u})} &= \frac{1}{\mu_s} u^s \partial_s u^n - \frac{n \partial_s b + I \partial_s \theta \left( \eta + \frac{h}{2} \right)}{\mu_s b} u^s \partial_n u^n \\ &\quad + \frac{\partial_s \theta}{\mu_s} u^{s2} + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^n + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s \overline{u^z T} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

### C.1.1.3 Obtention des équations

En rassemblant C.5, C.6, B.66, B.68, B.3 et B.8, et en exprimant la relation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient B.69 :

– la conservation de la quantité de mouvement selon  $\mathbf{e}_s$  :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - nb \partial_s \theta} u^s \partial_s u^s - \frac{n \partial_s b + \left( \eta + \frac{h}{2} \right) I \partial_s \theta}{b (1 - nb \partial_s \theta)} u^s \partial_n u^s - \frac{\partial_s \theta}{1 - nb \partial_s \theta} u^s u^n + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^s \\ &= \frac{g}{1 - nb \partial_s \theta} \left[ \frac{1}{b} \left( n \partial_s b + \left( \eta + \frac{h}{2} \right) I \partial_s \theta \right) \partial_n \xi - \partial_s \xi + nb I \partial_s \theta \right] + g I - \frac{C_f}{h} \|\mathbf{u}\| u^s \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

– la conservation de la quantité de mouvement selon  $\mathbf{e}_n$  :

<sup>2</sup>A nouveau, bien que cette approximation ne soit pas excellente, les termes impliqués n'auront pas d'influence par la suite.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 - nb\partial_s\theta} u^s \partial_s u^n - \frac{n\partial_s b + \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \partial_s \theta}{b(1 - nb\partial_s\theta)} u^s \partial_n u^n + \frac{\partial_s \theta}{1 - nb\partial_s\theta} u^s u^s + \frac{1}{b} u^n \partial_n u^n + \frac{I \partial_s \theta}{\mu_s} u^s \overline{u^z T} \\
= & -\frac{g}{b} \partial_n \xi - \frac{C_f}{h} \|\mathbf{u}\| u^n
\end{aligned} \tag{C.8}$$

En utilisant B.44 et en posant (cf. eq. B.14) :

$$\overline{zT} \approx \frac{1}{2}$$

la conservation de la matière s'écrit :

$$\begin{aligned}
b\partial_s (hu^s) + \partial_n (\mu_s hu^n) - [n\partial_s b + I\partial_s \theta \left(\eta + \frac{h}{2}\right)] \partial_n (hu^s) \\
- I\partial_s \theta h \partial_n \left(\eta + \frac{h}{2}\right) u^s = 0
\end{aligned} \tag{C.9}$$

### C.1.2 Adimensionnement

Nous normalisons les différentes grandeurs physiques afin de leur donner le même ordre de grandeur. On note :

- $B_0$  la demi-largeur moyenne du chenal, donnant l'échelle des longueurs dans le plan de l'écoulement ;
- $H_0$  la profondeur moyenne du chenal, donnant l'échelle des longueurs dans le plan de la section verticale transverse du chenal ;
- $U_0$  la vitesse moyenne de l'écoulement.

Ces trois grandeurs sont considérées être *spatialement* constantes pour l'événement modélisé, dont on cherche à connaître le champ des vitesses de l'écoulement. Cependant, elles peuvent varier au cours du temps entre chaque itération du modèle.

On introduit alors les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$s \rightarrow B_0 s \tag{C.10}$$

$$\partial_s \rightarrow \frac{1}{B_0} \partial_s \tag{C.11}$$

$$b \rightarrow B_0 b \tag{C.12}$$

$$h \rightarrow H_0 h \tag{C.13}$$

$$\eta \rightarrow H_0 \eta \tag{C.14}$$

$$\mathbf{u} \rightarrow U_0 \mathbf{u} \tag{C.15}$$

$$I \rightarrow \frac{H_0}{B_0} I \tag{C.16}$$

En substituant les variables ainsi obtenues dans les équations C.7, C.8 et C.9, on obtient :

$$\begin{aligned}
& u^s \partial_s u^s - \frac{n\partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \partial_s \theta}{b} u^s \partial_n u^s - \partial_s \theta u^s u^n + \frac{1 - nb\partial_s\theta}{b} u^n \partial_n u^s \\
= & F^{-2} \left[ \frac{1}{b} \left( n\partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \partial_s \theta \right) \partial_n \xi - \partial_s \xi + I \right] - \frac{\epsilon}{h} (1 - nb\partial_s\theta) \|\mathbf{u}\| u^s \tag{C.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u^s \partial_s u^n - \frac{n \partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \partial_s \theta}{b} u^s \partial_n u^n + \partial_s \theta u^s u^s + \frac{1 - nb \partial_s \theta}{b} u^n \partial_n u^n + \frac{H_0}{B_0} I \partial_s \theta u^s \overline{u^z T} \\
= & -\frac{F^{-2}}{b} (1 - nb \partial_s \theta) \partial_n \xi - \frac{\epsilon}{h} (1 - nb \partial_s \theta) \|\mathbf{u}\| u^n
\end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
b \partial_s (h u^s) + \partial_n (\mu_s h u^n) - \left[ n \partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 I \partial_s \theta \left(\eta + \frac{h}{2}\right) \right] \partial_n (h u^s) \\
- \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 I \partial_s \theta h \partial_n \left(\eta + \frac{h}{2}\right) u^s = 0
\end{aligned} \tag{C.19}$$

où l'on a noté  $F$  le nombre de Froude :

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{g H_0}} \tag{C.20}$$

et  $\epsilon$  le coefficient de friction renormalisé :

$$\epsilon = \frac{C_f B_0}{H_0} \tag{C.21}$$

### C.1.3 Hypothèses de linéarisation

On pose alors :

$$\partial_s \theta = \Psi \kappa \tag{C.22}$$

où  $\Psi$  est le maximum *spatial* de la courbure à l'échelle du chenal. Si on considère que le rayon de courbure de la projection de la ligne médiane  $\Gamma$  sur le plan  $\mathcal{P}_z$  (*cf.* A.1.2.1) est faible devant la largeur du chenal on peut écrire en utilisant les grandeurs non adimensionnées :

$$b \partial_s \theta \ll 1$$

soit encore :

$$B_0 \partial_s \theta \ll 1 \tag{C.23}$$

et en utilisant la substitution C.11 :

$$\partial_s \theta \ll 1$$

Ceci nous amène à considérer que :

$$\Psi \ll 1 \tag{C.24}$$

et que le paramètre  $\kappa$  introduit par C.22 est d'ordre 1.

On peut alors écrire les différentes grandeurs physiques adimensionnelles introduites précédemment (*cf.* C.1.2) sous la forme suivante :

$$u^s(s, n) = u_0(s) + \Psi u_\kappa^s(s, n) \tag{C.25}$$

$$u^n(s, n) = \Psi u_\kappa^n(s, n) \tag{C.26}$$

$$u^z(s, n, z) = \Psi u_\kappa^z(s, n, z) \tag{C.27}$$

$$h(s, n) = h_0(s) + \Psi h_\kappa(s, n) \tag{C.28}$$

$$\eta(s, n) = -h_0(s) + \Psi \eta_\kappa(s, n) \tag{C.29}$$

$$\xi(s, n) = \Psi \xi_\kappa(s, n) \tag{C.30}$$

où l'indexation par  $\kappa$  désigne une déviation de la grandeur considérée de la valeur d'équilibre due à la courbure.

L'hypothèse implicite de modélisation faite lorsque l'on pose les développements précédents est qu'à l'ordre 0, les variables d'ajustement aux conditions hydrauliques sont la vitesse longitudinale et la profondeur de l'écoulement (équations C.25 et C.28). Ces deux grandeurs sont également supposées ne dépendre que de l'abscisse curviligne, c'est à dire de la position longitudinale sur le chenal. Ces hypothèses de modélisation sont appropriées pour décrire l'influence de la pente longitudinale du chenal. Cependant les variations de largeur du chenal introduisent une composante normale de la vitesse de l'écoulement qui peut être non négligeable si ces variations sont importantes. De plus ces variations sont indépendantes des variations dues à la courbure du chenal, il suffit par exemple de considérer une section rectiligne de largeur variable, et par conséquent, les développements précédents ne sont pas suffisants pour modéliser correctement l'influence des variations de largeur du chenal sur la structure de l'écoulement.

### C.1.4 Développements limités

A l'aide des développements introduits précédemment, C.25, C.26, C.28, C.29 et C.30 on peut effectuer un développement limité des équations C.17, C.18 et C.19. Du fait de l'adimensionnement des variables effectué précédemment (cf. C.1.2) la dérivation conserve l'ordre de grandeur de la variable considérée. On obtient ainsi :

– pour le terme de variation de la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbf{e}_s$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_s &= (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \partial_s (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) - \frac{n \partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \kappa \Psi}{b} (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \partial_n (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \\
&\quad - \kappa \Psi (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) u_\kappa^n \Psi + \frac{1 - nb \kappa \Psi}{b} u_\kappa^n \Psi \partial_n (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \\
&= u_0^s \partial_s u_0^s + u_0^s \partial_s u_\kappa^s \Psi + u_\kappa^s \partial_s u_0^s \Psi - \frac{n \partial_s b}{b} u_0^s \partial_n u_\kappa^s \Psi + o(\Psi) \\
\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_s &= u_0^s \partial_s u_0^s + \left( u_0^s \partial_s u_\kappa^s + u_\kappa^s \partial_s u_0^s - \frac{n \partial_s b}{b} u_0^s \partial_n u_\kappa^s \right) \Psi + o(\Psi) \tag{C.31}
\end{aligned}$$

– pour le terme de variation de la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbf{e}_n$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_n &= (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \partial_s u_\kappa^n \Psi - \frac{n \partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \kappa \Psi}{b} (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \partial_n u_\kappa^n \Psi \\
&\quad + \kappa \Psi (u_0^s + u_\kappa^s \Psi)^2 + \frac{1 - nb \kappa \Psi}{b} u_\kappa^n \Psi \partial_n u_\kappa^n \Psi + \frac{H_0}{B_0} I \kappa \Psi (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \Psi \overline{u_\kappa^z T} \\
&= u_0^s \partial_s u_\kappa^n \Psi - \frac{n \partial_s b}{b} u_0^s \partial_n u_\kappa^n \Psi + \kappa \Psi (u_0^{s2} + 2u_0^s u_\kappa^s \Psi + o(\Psi)) + o(\Psi) \\
\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_n &= \left( u_0^s \partial_s u_\kappa^n - \frac{n \partial_s b}{b} u_0^s \partial_n u_\kappa^n + \kappa u_0^{s2} \right) \Psi + o(\Psi) \tag{C.32}
\end{aligned}$$

– pour le terme résultant de l'action des forces volumiques  $\mathbf{F}_{vol}$  sur  $\mathbf{e}_s$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{vol} \cdot \mathbf{e}_s &= F^{-2} \left[ \frac{1}{b} \left( n \partial_s b + \left(\frac{H_0}{B_0}\right)^2 \left(\eta + \frac{h}{2}\right) I \Psi \right) \partial_n \xi_\kappa \Psi - \partial_s \xi_\kappa \Psi + I \right] \\
&= F^{-2} \left[ \frac{n \partial_s b}{b} \partial_n \xi_\kappa \Psi - \partial_s \xi_\kappa \Psi + I \right] + o(\Psi) \\
\mathbf{F}_{vol} \cdot \mathbf{e}_s &= F^{-2} I + F^{-2} \left( \frac{n \partial_s b}{b} \partial_n \xi_\kappa - \partial_s \xi_\kappa \right) \Psi + o(\Psi) \tag{C.33}
\end{aligned}$$

– pour le terme résultant de l'action des forces volumiques  $\mathbf{F}_{vol}$  sur  $\mathbf{e}_n$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{vol} \cdot \mathbf{e}_n &= -F^{-2} \frac{1 - nb\kappa\Psi}{b} \partial_n (\xi_\kappa \Psi) \\ \mathbf{F}_{vol} \cdot \mathbf{e}_n &= -F^{-2} \frac{1}{b} \partial_n \xi_\kappa \Psi + o(\Psi)\end{aligned}\tag{C.34}$$

– pour le terme de forces de frottements  $\mathbf{e}_s$  :

$$\begin{aligned}\tau_f \cdot \mathbf{e}_s &= \epsilon \frac{1 - nb\kappa\Psi}{h_0 + h_\kappa\Psi} \left[ (u_0^s + u_\kappa^s \Psi)^2 + (u_\kappa^n \Psi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \\ &= \frac{\epsilon}{h_0} (1 - nb\kappa\Psi) \left( 1 - \frac{h_\kappa}{h_0} \Psi + o(\Psi) \right) \left[ u_0^{s2} + 2u_0^s u_\kappa^s \Psi + o(\Psi) \right]^{\frac{1}{2}} (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \\ &= \frac{\epsilon}{h_0} (1 - nb\kappa\Psi) \left( 1 - \frac{h_\kappa}{h_0} \Psi + o(\Psi) \right) (u_0^s + u_\kappa^s \Psi + o(\Psi)) (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) \\ &= \frac{\epsilon}{h_0} \left( u_0^{s2} - u_0^{s2} nb\kappa\Psi - u_0^{s2} \frac{h_\kappa}{h_0} \Psi + u_0^s u_\kappa^s \Psi + u_0^s u_\kappa^s \Psi + o(\Psi) \right) \\ \tau_f \cdot \mathbf{e}_s &= \epsilon \frac{u_0^{s2}}{h_0} + \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} \left( 2u_\kappa^s - u_0^s nb\kappa - \frac{u_0^s}{h_0} h_\kappa \right) \Psi + o(\Psi)\end{aligned}\tag{C.35}$$

– pour le terme de forces de frottements  $\mathbf{e}_n$  :

$$\begin{aligned}\tau_f \cdot \mathbf{e}_n &= \epsilon \frac{1 - nb\kappa\Psi}{h_0 + h_\kappa\Psi} \left[ (U_0^s + u_\kappa^s \Psi)^2 + (u_\kappa^n \Psi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} u_\kappa^n \Psi \\ &= \frac{\epsilon}{h_0} (1 - nb\kappa\Psi) \left( 1 - \frac{h_\kappa}{h_0} \Psi + o(\Psi) \right) (u_0^s + u_0^s u_\kappa^s \Psi + o(\Psi)) u_\kappa^n \Psi \\ \tau_f \cdot \mathbf{e}_n &= \epsilon \frac{u_0^s}{h_0} u_\kappa^n \Psi + o(\Psi)\end{aligned}\tag{C.36}$$

– pour la conservation de la matière :

$$\begin{aligned}& b\partial_s ((h_0 + h_\kappa\Psi) (u_0^s + u_\kappa^s \Psi)) + \partial_n ((1 - nb\kappa\Psi) (h_0 + h_\kappa\Psi) u_\kappa^n \Psi) \\ & - \left[ n\partial_s b + \left( \frac{H_0}{B_0} \right)^2 I\kappa\Psi \left( \eta_\kappa \Psi - \frac{h_0}{2} + \frac{h_\kappa}{2} \Psi \right) \right] \partial_n ((h_0 + h_\kappa\Psi) (u_0^s + u_\kappa^s \Psi)) \\ & - \left( \frac{H_0}{B_0} \right)^2 I\kappa\Psi (h_0 + h_\kappa\Psi) \partial_n \left( \eta_\kappa \Psi - \frac{h_0}{2} + \frac{h_\kappa}{2} \Psi \right) (u_0^s + u_\kappa^s \Psi) = 0 \\ & b\partial_s (h_0 u_0^s + h_0 u_\kappa^s \Psi + h_\kappa u_0^s \Psi) + h_0 \partial_n u_\kappa^n \Psi \\ & - n\partial_s b (h_0 \partial_n u_\kappa^s + u_0^s \partial_n h_\kappa) \Psi + o(\Psi) = 0 \\ \partial_s (h_0 u_0^s) + \left[ \begin{array}{l} \partial_s (h_0 u_\kappa^s + h_\kappa u_0^s) + \frac{1}{b} h_0 \partial_n u_\kappa^n \\ - \frac{n\partial_s b}{b} (h_0 \partial_n u_\kappa^s + u_0^s \partial_n h_\kappa) \end{array} \right] \Psi + o(\Psi) = 0\end{aligned}\tag{C.37}$$

## C.2 Expressions et résolution des équations

### C.2.1 Expressions et résolution des équations à l'ordre 0 en $\Psi$

En rassemblant C.31, C.32, C.33, C.34, C.35, C.36 et C.37 on obtient à l'ordre 0 en  $\Psi$  le système d'équations :

$$u_0^s \partial_s u_0^s = F^{-2} I - \epsilon \frac{u_0^{s2}}{h_0}\tag{C.38}$$

$$0 = 0 \quad (\text{C.39})$$

$$\partial_s (h_0 u_0^s) = 0 \quad (\text{C.40})$$

Or, le produit  $h_0 u_0^s$  n'est fonction que de l'abscisse curviligne, C.40 implique donc que :

$$d(h_0 u_0^s) = 0 \quad (\text{C.41})$$

et ce produit est constant.

Soit  $Q$  le débit fluide transitant dans le chenal, la conservation du débit à l'ordre 0 en  $\Psi$ , s'écrit :

$$\int_{-1}^1 H_0 h_0 U_0 u_0^s B_0 b dn = Q$$

soit :

$$\int_{-1}^1 h_0 u_0^s b dn = \frac{Q}{B_0 H_0 U_0} \quad (\text{C.42})$$

ce qui, les trois grandeurs considérées dans le terme de gauche de C.42 ne dépendant que de  $s$ , peut se récrire :

$$h_0 u_0^s b = \frac{Q}{2B_0 H_0 U_0} \quad (\text{C.43})$$

En introduisant  $Q_0$  le débit adimensionné<sup>3</sup> du chenal à l'ordre 0 en  $\Psi$ , C.42 devient :

$$h_0 u_0^s = \frac{Q_0}{b} \quad (\text{C.44})$$

mais comme C.41 implique que le produit  $h_0 u_0^s$  est constant et que la conservation du débit entraîne que  $Q_0$  est également constant, on voit qu'à l'ordre le plus bas en  $\Psi$ , les hypothèses de modélisation C.25 à C.30, impliquent que la largeur doit également être constante. On peut donc écrire :

$$b = 1 + \Psi b_\kappa \quad (\text{C.45})$$

et l'équation C.44 devient, à l'ordre 0 en  $\Psi$  :

$$h_0 u_0^s = Q_0 \quad (\text{C.46})$$

Alors en combinant C.38, C.46, il vient finalement :

$$u_0^s \partial_s u_0^s + \frac{\epsilon}{Q_0} u_0^{s3} = F^{-2} I \quad (\text{C.47})$$

## C.2.2 Expression et résolution des équations à l'ordre 1 en $\Psi$

En rassemblant les développements limités C.31, C.32, C.33, C.34, C.35, C.36 et C.37 on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} & u_0^s \partial_s u_\kappa^s + u_\kappa^s \partial_s u_0^s - \frac{n \partial_s b}{b} u_0^s \partial_n u_\kappa^s \\ &= F^{-2} \left( \frac{n \partial_s b}{b} \partial_n \xi_\kappa - \partial_s \xi_\kappa \right) - \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} \left( 2u_\kappa^s - u_0^s n b \kappa - \frac{u_0^s}{h_0} h_\kappa \right) \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

<sup>3</sup>Si  $Q_0$  désigne le débit du chenal à l'ordre 0 en  $\Psi$  on a fait la substitution :

$$Q \rightarrow 2B_0 H_0 U_0 Q_0$$

et la valeur adimensionnelle de  $Q_0$  est donc voisine de 1.

$$u_0^s \partial_s u_\kappa^n - \frac{n \partial_s b}{b} u_0^s \partial_n u_\kappa^n + \kappa (u_0^s)^2 = -F^{-2} \frac{1}{b} \partial_n \xi_\kappa - \epsilon \frac{u_0^s}{h_0} u_\kappa^n \quad (\text{C.49})$$

$$\partial_s (h_0 u_\kappa^s + h_\kappa u_0^s) - \frac{n \partial_s b}{b} (h_0 \partial_n u_\kappa^s + u_0^s \partial_n h_\kappa) + \frac{1}{b} h_0 \partial_n u_\kappa^n = 0 \quad (\text{C.50})$$

Mais C.45 implique que :

$$\partial_s b = \Psi \partial_s b_\kappa$$

et par conséquent les termes faisant intervenir  $\partial_s b$  dans les équations C.48, C.49 et C.50, disparaissent et les termes en  $b$  peuvent être remplacés par 1, ce qui donne à l'ordre 1 en  $\Psi$ , le système :

$$u_0^s \partial_s u_\kappa^s + u_\kappa^s \partial_s u_0^s = -F^{-2} \partial_s \xi_\kappa - \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} \left( 2u_\kappa^s - u_0^s n \kappa - \frac{u_0^s}{h_0} h_\kappa \right) \quad (\text{C.51})$$

$$u_0^s \partial_s u_\kappa^n + \kappa u_0^{s2} = -F^{-2} \partial_n \xi_\kappa - \epsilon \frac{u_0^s}{h_0} u_\kappa^n \quad (\text{C.52})$$

$$\partial_s (h_0 u_\kappa^s + h_\kappa u_0^s) + h_0 \partial_n u_\kappa^n = 0 \quad (\text{C.53})$$

Pour aller plus loin nous avons besoin de connaître l'élévation de la surface de l'eau due à la force centrifuge dans une courbe. Johansson et Parker (1989b) à partir des études d'Ikeda et al. (1981) et de données de terrains ont montré que dans l'équation C.52 les termes  $\partial_s u_\kappa^n$  et  $\epsilon u_\kappa^n$  étaient de même ordre, cet ordre étant inférieur à celui des autres termes de C.52 (*cf.* leur équation 27 et leur équation 31 pendant de C.52). C.52 devient alors :

$$\kappa u_0^{s2} = -F^{-2} \partial_n \xi_\kappa \quad (\text{C.54})$$

Par définition de la ligne médiane, ligne imaginaire à la surface du chenal,  $\mathbf{e}_s$  est tangent à la surface en tout point  $M_\Gamma$ , on doit donc avoir  $\xi_\kappa|_{n=0} = 0$ . Avec cette condition, C.54 s'intègre facilement et donne :

$$\xi_\kappa = -F^2 u_0^{s2} n \kappa \quad (\text{C.55})$$

d'où le terme de surpression dans C.51 :

$$-F^{-2} \partial_s \xi_\kappa = n u_0^s (2 \partial_s u_0^s \kappa + u_0^s \partial_s \kappa) \quad (\text{C.56})$$

Ce modèle basé sur les équations de Saint-Venant et leur linéarisation due originellement à Ikeda et al. (1981) ne prend pas en compte le transport sédimentaire. Afin de modéliser les déformations du lit du chenal qui y sont cependant liées, ces auteurs proposent d'utiliser la relation d'Engelund (1974) reliant l'inclinaison latérale du lit à la courbure du chenal et s'écrivant avec les variables introduites<sup>4</sup> :

$$\eta_\kappa = A h_0 n \kappa \quad (\text{C.57})$$

où  $A$ , coefficient quantifiant la dépendance entre la courbure et l'inclinaison latérale du lit est appelé coefficient d'affouillement. La relation d'Engelund (1974), a été obtenue à partir de considérations sur le profil tridimensionnel des vitesses d'un écoulement dans un méandre de courbure constante. Des relations similaires ont également été trouvées par Zimmermann et Kennedy (1978) et Odgaard (1981). Cette relation est également obtenue comme limite d'autres modèles, dans le cas où le rayon de courbure du méandre est grand devant sa largeur (condition C.24) [Sun (1998)]. Enfin elle est

<sup>4</sup>Par rapport à l'équation 6 d'Ikeda et al. (1981), le terme  $h_0$  provient du fait que nous retenons les variations de hauteur du chenal à l'ordre zéro en  $\Psi$ , alors qu'Ikeda et al. (1981) les négligent et posent  $h_0 = 1$ .

également en accord avec les données expérimentales de Suga (1963) et Hooke (1975).  $A$  peut être mesuré sur les rivières naturelles ou prédit à l'aide de méthodes décrites par Odgaard (1981).  $A$  varie usuellement entre 3 et 5 [Johanesson et Parker (1989a,c)].

Comme :

$$\eta + h = \xi$$

Il vient :

$$h_\kappa = \xi_\kappa - \eta_\kappa$$

et en rassemblant C.55, C.57 on a :

$$h_\kappa = - (h_0 A + F^2 u_0^{s2}) n_\kappa \quad (C.58)$$

En reportant C.56 et C.58 dans C.51, cette dernière équation devient :

$$\begin{aligned} & u_0^s \partial_s u_\kappa^s + \left( \partial_s u_0^s + \frac{2\epsilon u_0^s}{h_0} \right) u_\kappa^s \\ = & n \left[ u_0^{s2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s2}}{h_0} \left( \frac{u_0^{s2}}{h_0} F^2 - \frac{2h_0}{\epsilon u_0^s} \partial_s u_0^s + A - 1 \right) \kappa \right] \end{aligned} \quad (C.59)$$

Sous cette forme le facteur de la courbure  $\kappa$  contient quatre termes qui sont dans l'ordre pour les deux premiers l'effet de la surélévation et la surpression en résultant, puis l'inclinaison du fond du chenal du à l'affouillement de la rive et enfin le terme  $-1$  de tourbillon libre résultant du transport convectif de la quantité de mouvement.

### C.2.3 Calcul de la vitesse de l'écoulement contre les rives

Nous cherchons à évaluer la contrainte tangentielle exercée par la vitesse de l'écoulement contre les rives du chenal. Le terme de droite de C.59 ne dépend de  $n$  que par le premier facteur, il est alors clair que la solution  $u_\kappa^s$  est impaire en  $n$ , on a donc :

$$u_\kappa^s|_{n=1} = - u_\kappa^s|_{n=-1}$$

et en évaluant C.59 contre la rive gauche, soit en  $n = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \left( \partial_s u_0^s + \frac{2\epsilon u_0^s}{h_0} \right) u_\kappa^s|_{n=1} \\ = & u_0^{s2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s2}}{h_0} \left( \frac{u_0^{s2}}{h_0} F^2 - \frac{2h_0}{\epsilon u_0^s} \partial_s u_0^s + A - 1 \right) \kappa \end{aligned} \quad (C.60)$$

A partir d'une étude en pseudo-3D de l'écoulement dans une rivière sinueuse, retenant l'influence des courants secondaires induits par la courbure du chenal, Johanesson et Parker (1989b,c) ont montré que le couplage entre l'utilisation des équations de Saint-Venant et la relation d'Engelund amenait à sous-estimer la composante tangentielle de la vitesse de l'écoulement le long des rives. En effet, le transport convectif du courant principal par le courant secondaire des cellules de circulation hélicoïdale ne peut pas être pris en compte par les équations de Saint-Venant. La prise en compte de ce transport convectif aux ordres d'approximation que nous retenons conduit à rajouter *in fine*<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Nous montrons plus loin (cf. C.4) comment intégrer l'influence du transport convectif à partir des équations de Johanesson et Parker (1989c).

à rajouter un quatrième terme dans le facteur de la courbure de C.60. Ce terme est noté  $A_{sec}$  et est de l'ordre de  $A$  avec des valeurs typiquement comprise entre 2, 5 et 6 [Johanesson et Parker (1989c)]. On obtient alors l'équation :

$$\begin{aligned} & u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \left( \partial_s u_0^s + \frac{2\epsilon u_0^s}{h_0} \right) u_\kappa^s|_{n=1} \\ = & u_0^{s^2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s^2}}{h_0} \left( \frac{u_0^{s^2}}{h_0} F^2 - \frac{2h_0}{\epsilon u_0^s} \partial_s u_0^s + A + \frac{1}{u_0^s} A_{sec} - 1 \right) \kappa \end{aligned} \quad (C.61)$$

Enfin en utilisant C.38, il vient :

$$\partial_s u_0^s = F^{-2} \frac{I}{u_0^s} - \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} \quad (C.62)$$

qui donne reportée dans C.61 :

$$\begin{aligned} & u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} \left( \frac{h_0}{\epsilon F^2 u_0^{s^2}} I + 1 \right) u_\kappa^s|_{n=1} \\ = & u_0^{s^2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s^2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s^2}}{h_0} F^2 - 2 \left( \frac{h_0}{\epsilon F^2 u_0^{s^2}} I - 1 \right) + A + \frac{1}{u_0^s} A_{sec} - 1 \right] \kappa \end{aligned} \quad (C.63)$$

En utilisant les définitions C.20 et C.21 on peut donner un sens physique au résultat précédent. Il vient en effet :

$$\begin{aligned} & u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} \left( \frac{h_0}{u_0^{s^2}} \cdot \frac{gB_0 I}{C_f U_0^2} + 1 \right) u_\kappa^s|_{n=1} \\ = & u_0^{s^2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s^2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s^2}}{h_0} F^2 - 2 \left( \frac{h_0}{u_0^{s^2}} \cdot \frac{gH_0^2 I}{C_f B_0 U_0^2} - 1 \right) + A + \frac{1}{u_0^s} A_{sec} - 1 \right] \kappa \end{aligned} \quad (C.64)$$

Si on s'intéresse au rapport :

$$R_I(s) = \frac{h_0}{u_0^{s^2}} \cdot \frac{gB_0 I}{C_f U_0^2} \quad (C.65)$$

et que l'on effectue les substitutions inverses de C.13, C.15 et C.16, c'est à dire :

$$\begin{aligned} h & \rightarrow \frac{1}{H_0} h \\ \mathbf{u} & \rightarrow \frac{1}{U_0} \mathbf{u} \\ I & \rightarrow \frac{B_0}{H_0} I \end{aligned}$$

le rapport adimensionnel  $R_I$  s'écrit avec les grandeurs dimensionnelles :

$$R_I = \frac{gh_0 I}{C_f u_0^{s^2}}$$

or en se rappelant que  $I = \sin \varphi$  par définition (*cf.* B.5),  $R_I$  quantifie donc au premier ordre le rapport entre la contrainte due au poids de la colonne d'eau qui a tendance à accélérer l'écoulement et la contrainte due au frottement sur le fond du lit qui le freine. La valeur d'équilibre de la pente<sup>6</sup>, toujours en grandeurs dimensionnelles, est :

$$I_0(s) = \frac{C_f u_0^{s^2}}{gh_0}$$

---

<sup>6</sup>Elle peut être obtenue en écrivant  $\partial_s u_0^s = 0$  dans C.62.

et on a :

$$R_I = \frac{I}{I_0}$$

C.64 devient avec cette nouvelle notation :

$$u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} (R_I + 1) u_\kappa^s|_{n=1} = u_0^{s2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s2}}{h_0} F^2 - 2(R_I - 1) + A + \frac{1}{u_0^s} A_{sec} \right] \quad (\text{C.66})$$

A la faveur des variations de la topographie :

- si cette pente devient supérieure à sa valeur d'équilibre, on a  $R_I > 1$  ce qui amène une décélération de l'écoulement car les frottements augmentent - action du terme de gauche qui provient de la linéarisation de la contrainte de frottements - et une accélération par action des forces de pesanteur qui conduisent à une diminution de l'élévation de la surface de l'écoulement.
- si cette pente devient inférieure à sa valeur d'équilibre, on a  $R_I < 1$  ce qui amène une accélération de l'écoulement car les frottements diminuent - action du terme de gauche - et une décélération par action des forces de pesanteur qui conduisent à un accroissement de l'élévation de la surface de l'écoulement et une surpression.

On peut légèrement simplifier C.66, et en posant :

$$\alpha(s) = u_0^s \quad (\text{C.67})$$

$$\beta(s) = \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} (R_I + 1) \quad (\text{C.68})$$

$$\gamma(s) = u_0^{s2} \quad (\text{C.69})$$

$$\delta(s) = -\frac{\epsilon u_0^{s2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s2}}{h_0} F^2 - 2R_I + A + \frac{1}{u_0^s} A_{sec} + 1 \right] \quad (\text{C.70})$$

l'équation C.66 admet alors la forme classique :

$$\alpha \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \beta u_\kappa^s|_{n=1} = \gamma \partial_s \kappa + \delta \kappa \quad (\text{C.71})$$

En résumé, pour connaître la vitesse  $u^s|_{n=1}$  de l'écoulement contre la rive gauche du chenal en un point donné :

- On résout d'abord C.47 qui donne  $u_0^s$  puis  $h_0$  à l'aide de C.44.
- A l'aide des valeurs obtenues, on résout ensuite C.71 qui donne  $u_\kappa^s|_{n=1}$  puis  $u^s|_{n=1} = u_0^s + u_\kappa^s|_{n=1}$

Si on désire connaître la vitesse contre la rive droite, on a :

$$u^s|_{n=-1} = u_0^s - u_\kappa^s|_{n=1}$$

## C.3 Comparaisons

### C.3.1 Comparaisons avec l'équation d'évolution d'Ikeda et al. (1981)

Dans les travaux d'Ikeda et al. (1981) les variations de pentes ne sont pas prises en compte et les grandeurs  $u$  et  $h$  sont supposées constantes à l'ordre zéro en  $\Psi$ . En posant :

$$u_0^s = h_0^s = 1 \quad (\text{C.72})$$

la relation C.62 devient alors :

$$I = I_0$$

d'où :

$$R_I = 1 \quad (\text{C.73})$$

soit :

$$C_f U_0^2 = g H_0 I$$

qui est l'équation 2 d'Ikeda et al. (1981).

A l'aide de C.72 et C.73, les coefficients C.67, C.68, C.69 et C.70 deviennent :

$$\alpha_{Ik} = 1 \quad (\text{C.74})$$

$$\beta_{Ik} = 2\epsilon \quad (\text{C.75})$$

$$\gamma_{Ik} = 1 \quad (\text{C.76})$$

$$\delta_{Ik} = -\epsilon (F^2 + A + A_{sec} - 1) \quad (\text{C.77})$$

qui reportés dans C.71 donnent :

$$\partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + 2\epsilon u_\kappa^s|_{n=1} = \partial_s \kappa - \epsilon (F^2 + A + A_{sec} - 1) \kappa \quad (\text{C.78})$$

L'équation C.78 est écrite avec des grandeurs adimensionnelles. Pour retrouver l'équation dimensionnelle on peut en utilisant C.11 et C.15 faire les substitutions :

$$\begin{aligned} \partial_s &\rightarrow B_0 \partial_s \\ \kappa = \partial_s \theta &\rightarrow B_0 \kappa \\ u_\kappa^s|_{n=1} &\rightarrow \frac{1}{U_0} u_\kappa^s|_{n=1} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\frac{B_0}{U_0} \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{2\epsilon}{U_0} u_\kappa^s|_{n=1} = B_0^2 \partial_s \kappa - \epsilon B_0 (F^2 + A + A_{sec} - 1) \kappa$$

puis en utilisant C.20 et C.21 :

$$\frac{B_0}{U_0} \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{2B_0 C_f}{U_0 H_0} u_\kappa^s|_{n=1} = B_0^2 \partial_s \kappa - \frac{B_0^2 C_f}{H_0} \left( \frac{U_0^2}{g H_0} + A + A_{sec} - 1 \right) \kappa$$

qui multipliée par  $U_0^2$  et divisée par  $B_0$  donne finalement :

$$\begin{aligned} &U_0 \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + 2 \frac{U_0}{H_0} C_f u_\kappa^s|_{n=1} \\ &= B_0 \left[ U_0^2 \partial_s \kappa - \frac{U_0^2 C_f}{H_0} \left( \frac{U_0^2}{g H_0} + A + A_{sec} - 1 \right) \kappa \right] \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

C.79 est l'équation 7 d'Ikeda et al. (1981) à quelques différences près :

– Nous considérons positive une déviation vers la gauche<sup>7</sup>, alors qu'Ikeda et al. (1981) posent  $\kappa = -\partial_s \theta$  ce qui explique la différence de signe au deuxième membre de C.79.

<sup>7</sup>Avec cette convention la normale  $\mathbf{e}_n$  à la courbe considérée dans le plan  $\mathcal{P}_z$  désigne une partie localement convexe lorsque la courbure est positive.

- Le coefficient  $-1$  en facteur de  $\kappa$  dans le terme de droite de C.79 provient du fait qu’Ikeda et al. (1981) réutilisent les équations d’Engelund (1974) qui omettent les variations de  $\mu_s$  dans la formulation des équations de Saint-Venant. En conséquence leur équation de départ 1a est différente de B.76 en cela qu’elle ne comporte pas de facteurs multiplicatifs en  $\frac{1}{1-nb\partial_s\theta}$ . Nos résultats sont cependant en accord avec les travaux ultérieurs, en particulier ceux de Johanesson et Parker (1989a) et Sun (1998). Les approches développées par ‘l’école de Gênes’ [Parker et Johanesson (1989)] tiennent également compte de cette correction [Blondeaux et Seminara (1985); Zolezzi et Seminara (2001)].
- La prise en compte du terme  $A_{sec}$  dû au transport convectif du courant principal par le courant secondaire est utilisée dans ce type d’approche bidimensionnelle depuis les travaux de Johanesson et Parker (1989a,c,b). Elle a en particulier été utilisée par Howard (1992, 1994, 1996) et Sun et al. (1996).

### C.3.2 Comparaisons avec les travaux de Sun et al. (2001c)

La prise en compte des variations de pente sur l’évolution d’un chenal méandriforme de largeur constante a été initialement proposée par Sun et al. (2001c). Leur approche est similaire et se base sur les travaux de ‘l’école du Minnesota’ [Parker et Johanesson (1989)] et les travaux initiaux d’Ikeda et al. (1981). Ils procèdent à deux développements limités successifs en partant directement des équations de Saint-Venant B.76, B.77, B.78 alors que notre démarche permet de retenir en amont les termes dus aux variations de  $I$ . Leur premier développement, classique, consiste à formuler l’hypothèse C.24 et à réaliser un développement aux deux premiers ordres en  $\Psi$  et conduit à nos équations C.38, C.39 et C.40. Notre approche est ensuite différente. Le second développement utilisé par Sun et al. (2001c) consiste à supposer que les variations de  $I$  sont faibles et à effectuer un développement aux deux premiers ordres en  $I - I_0$ . En particulier Sun et al. (2001c) n’introduisent pas  $R_I$  dont la signification physique nous semble intéressante. De plus leur équation 47 comporte une erreur de calcul<sup>8</sup>. Enfin ils ne prennent pas en compte l’influence de la pente sur le terme de transport convectif dû au courant secondaire<sup>9</sup>.

### C.3.3 Variations de largeur

Les travaux récents de Repetto et al. (2002) montrent que l’influence des variations de largeur du chenal sur la structure de l’écoulement ne sont bien prises en compte que par un traitement tridimensionnel des équations d’évolution. Il serait cependant intéressant de retenir les variations de  $u_0$  avec  $n$  et effectuer une linéarisation des équations C.7, C.8, C.9 en effectuant un premier développement limité basé sur C.24 puis un second en considérant que  $\partial_s b \ll b$ .

## C.4 Terme de transport convectif dû aux courants secondaires

Nous indiquons brièvement dans cette section comment retenir l’influence du terme correspondant au transport convectif du courant principal par le courant secondaire à partir des travaux de Johanesson et Parker (1989b,c). Lorsque nous réutilisons leurs notations nous les affectons d’un exposant  $JP$ .

<sup>8</sup>Son second terme  $i_m u'_{s1}$  devrait comporter un facteur  $\frac{3}{2}$ .

<sup>9</sup>Sun et al. (2001c) reportent  $A_{sec}$  au lieu de  $\frac{1}{u_0^s} A_{sec}$ .

Un seul terme de transport convectif dû au courant secondaire, dans les équations de Johansson et Parker (1989c), a une influence au premier ordre en  $\Psi$ . Nous ne retenons donc que ce dernier qui est dans l'équation 7 de Johansson et Parker (1989c) avec les grandeurs dimensionnelles :

$$-\frac{1}{hb} \partial_n \left( u^s h \overline{T v^{JP}} \right)$$

où  $T(z)$  est la fonction de structure du courant introduite précédemment (*cf.* eq. B.11) et  $v^{JP}(s, n, z)$  est la composante normale de la vitesse de l'écoulement<sup>10</sup>.

En adimensionnant, il vient :

$$-\frac{U_0^2}{hB_0b} \partial_n \left( u^s h \overline{T \nu^{JP}} \right)$$

où  $\nu^{JP}(s, n, z)$  est le courant secondaire<sup>11</sup>, déviation de la composante normale de la vitesse d'écoulement par rapport à sa valeur moyenne sur  $e_z$ . Or  $\nu$  est du premier ordre en  $\Psi$ , le terme considéré C.80 à cet ordre est donc :

$$-\frac{U_0^2 u_0^s}{B_0} \partial_n \overline{T \nu^{JP}} \quad (\text{C.80})$$

Or, d'après leur équation 29a :

$$\nu^{JP} = \frac{1}{\chi_1^{JP} \epsilon^{JP}} G_0^{JP}(z) \sigma_s^{JP}(s)$$

d'où :

$$\overline{T \nu^{JP}} = \frac{\sigma_s^{JP}}{\chi_1^{JP} \epsilon^{JP}} \overline{T G_0^{JP}} \quad (\text{C.81})$$

où :

–  $\epsilon^{JP}$  est défini par :

$$\epsilon^{JP} = \frac{B_0 b C_f}{H_0 h}$$

donc :

$$\epsilon^{JP} = \frac{1}{h_0} \epsilon + O(\Psi) \quad (\text{C.82})$$

–  $\sigma_s^{JP}$  est la courbure adimensionnée effective qui possède un léger déphasage sur la courbure effective du chenal considéré. Cependant, d'après Johansson et Parker (1989b), dans les rivières naturelles cette courbure effective est très bien approximée par la courbure réelle, on peut donc écrire<sup>12</sup> :

$$\sigma_s^{JP} = -\kappa \quad (\text{C.83})$$

---

<sup>10</sup>Avec nos notations en grandeurs dimensionnelles :

$$\overline{v^{JP}} = u^n$$

<sup>11</sup>On a :

$$\begin{aligned} \overline{T v^{JP}} &= \overline{T (T v^{JP} + \nu^{JP})} \\ &= \frac{\overline{v^{JP} T^2}}{v^{JP}} + \overline{T \nu^{JP}} \\ \overline{T v^{JP}} &\approx \frac{\overline{v^{JP} T^2}}{v^{JP}} + \overline{T \nu^{JP}} \end{aligned}$$

et  $\overline{v^{JP}}$  est négligé par rapport à  $\overline{T \nu^{JP}}$ .

<sup>12</sup>Le signe moins provient de notre définition de la courbure.

En utilisant C.82 et C.83, C.81 devient au premier ordre en  $\Psi$

$$\overline{T\nu^{JP}} = -\frac{\epsilon\kappa}{h_0\chi_1^{JP}(\epsilon^{JP})^2}\overline{TG_0^{JP}} \quad (\text{C.84})$$

On peut récrire C.84 :

$$\overline{T\nu^{JP}} = -\frac{\epsilon\kappa}{3h_0}\widetilde{A}_s$$

où l'on a posé :

$$\widetilde{A}_s(s, n) = \frac{3}{(\epsilon^{JP})^2\chi_1}\overline{TG_0^{JP}}$$

Le terme convectif adimensionné C.80 devient alors :

$$-\frac{U_0^2 u_0^s}{B_0}\partial_n \overline{T\nu^{JP}} = \frac{U_0^2}{B_0} \cdot \frac{\epsilon u_0^s \kappa}{3h_0}\partial_n \widetilde{A}_s$$

En multipliant par  $\frac{B_0}{U_0^2}$  (adimensionnement de l'équation C.7), il devient :

$$\frac{\epsilon u_0^s \kappa}{3h_0}\partial_n \widetilde{A}_s \quad (\text{C.85})$$

En réutilisant les définitions C.67, C.68, C.69 et en notant :

$$\widetilde{\delta}(s) = -\frac{\epsilon u_0^{s2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s2}}{h_0} F^2 - 2R_I + A + 1 \right]$$

L'équation C.59 de conservation de la quantité de mouvement le long de  $\mathbf{e}_s$ , intégrant l'apport du terme convectif C.85 peut se récrire :

$$\alpha\partial_s u_\kappa^s + \beta u_\kappa^s = n \left[ \gamma\partial_s \kappa + \widetilde{\delta}\kappa \right] + \frac{\epsilon u_0^s \kappa}{3h_0}\partial_n \widetilde{A}_s \quad (\text{C.86})$$

Pour poursuivre, la structure de  $\widetilde{A}_s(s, n)$  pose problème (*cf.* fig. 3 de Johansson et Parker (1989b)). En effet,  $\widetilde{A}_s$  est constante sur quasiment toute la largeur du chenal mais s'annule très rapidement sur les bords. Lorsque le rapport  $\frac{H_0}{B_0}$  tend vers 0, la contribution de  $\partial_n \widetilde{A}_s$  est alors nulle sauf sur les bords du chenal où elle devient infinie. Pour surmonter ce problème, Johansson et Parker (1989b) recourent à la technique dite "du moment" qui consiste à calculer l'équation gouvernant l'évolution du moment de la vitesse de l'écoulement principal. Pour ce faire l'équation C.86 est multipliée par  $n$  puis intégrée entre les deux rives. Il vient alors :

$$\alpha\partial_s \int_{-1}^1 n u_\kappa^s dn + \beta \int_{-1}^1 n u_\kappa^s dn = \left[ \gamma\partial_s \kappa + \widetilde{\delta}\kappa \right] \int_{-1}^1 n^2 dn + \frac{\epsilon u_0^s \kappa}{3h_0} \int_{-1}^1 n \partial_n \widetilde{A}_s dn$$

et en intégrant par parties :

$$\alpha\partial_s \int_{-1}^1 n u_\kappa^s dn + \beta \int_{-1}^1 n u_\kappa^s dn = \frac{2}{3} \left[ \gamma\partial_s \kappa + \widetilde{\delta}\kappa \right] - \frac{\epsilon u_0^s \kappa}{3h_0} \int_{-1}^1 \widetilde{A}_s dn \quad (\text{C.87})$$

car on a :

$$\left[ n \widetilde{A}_s \right]_{n=-1}^{n=1} = 0$$

comme  $\widetilde{A}_s$  s'annule sur les bords. Enfin comme  $\widetilde{A}_s$  est constante sur la majeure partie du chenal, on peut poser :

$$2A_s = \int_{-1}^1 \widetilde{A}_s dn \quad (\text{C.88})$$

Pour conclure, il reste à utiliser les travaux de De Vriend (1981) montrant que la relation :

$$u_\kappa^s = n u_\kappa^s|_{n=1} \quad (\text{C.89})$$

est une excellente approximation du terme  $u_\kappa^s$  quantifiant les variations de  $u^s$  au premier ordre en  $\Psi$ . En combinant C.88 et C.89 on a finalement C.87 qui devient :

$$\alpha \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} \int_{-1}^1 n^2 dn + \beta u_\kappa^s|_{n=1} \int_{-1}^1 n^2 dn = \frac{2}{3} [\gamma \partial_s \kappa + \widetilde{\delta} \kappa] - \frac{2}{3} \cdot \frac{\epsilon u_0^s \kappa}{h_0} A_s$$

soit :

$$\alpha \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \beta u_\kappa^s|_{n=1} = \gamma \partial_s \kappa + \left( \widetilde{\delta} - \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} A_s \right) \kappa$$

et on retrouve C.70 avec :

$$\delta = \widetilde{\delta} - \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} A_s$$

## C.5 Discrétisation et implémentation

### C.5.1 Calculs géométriques

#### C.5.1.1 Ligne médiane

$\Gamma$ , la ligne médiane du chenal, est discrétisée sous la forme d'une suite de  $m$  points de l'espace :

$$\Gamma(t) \approx (M_i(t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

On indice alors par  $i$  les notations introduites précédemment pour indiquer que les grandeurs qu'elles désignent sont évaluées au point  $M_i$  de  $\Gamma$ . Ainsi, on a en particulier au point  $M_i(t)$  :

- l'abscisse curviligne :  $s_i$
- la normale à  $\Gamma$  unitaire horizontale :  $\mathbf{e}_{n,i}$
- la vitesse longitudinale de l'écoulement à l'ordre 0 en  $\Psi$  :  $u_{0,i}^s$
- la profondeur de l'écoulement à l'ordre 0 en  $\Psi$  :  $h_{0,i}$
- la pente le long de  $\Gamma$  :  $I_i$

#### C.5.1.2 Abscisse curviligne

On a en utilisant les notations précédentes et celles introduites dans la partie A.1.2.1 :

$$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} = p_z (\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}) + \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_z^{gal} \quad (\text{C.90})$$

Or d'après A.1 et A.2 :

$$\begin{aligned}
 p_z(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}) &= p_z \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} \partial_s \mathbf{M}_\Gamma|_{s=\sigma} d\sigma \right) \\
 &= p_z \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathbf{e}_s d\sigma \right) \\
 &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} p_z(\mathbf{e}_s) d\sigma \\
 p_z(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}) &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} d\sigma \tag{C.91}
 \end{aligned}$$



En notant  $M_i M_{i+1} = \|\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}\|$ , il vient à l'aide de C.90 :

$$M_i M_{i+1} = \left[ (p_z(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}))^2 + (\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_z^{gal})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.93})$$

Or C.92 donne :

$$(p_z(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}))^2 = (s_{i+1} - s_i)^2 \left[ 1 - \frac{5}{12} (\partial_s \theta_i)^2 (s_{i+1} - s_i)^2 + o_{s_i} \left[ (s_{i+1} - s_i)^2 \right] \right] \quad (\text{C.94})$$

D'autre part, en utilisant à nouveau A.1 et A.2, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_z^{gal} &= - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sin \varphi d\sigma \\ \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_z^{gal} &= - \sin \varphi_i (s_{i+1} - s_i) - \partial_s \varphi_i \cos \varphi_i \frac{(s_{i+1} - s_i)^2}{2} + o_{s_i} \left[ (s_{i+1} - s_i)^2 \right] \end{aligned}$$

Alors avec B.5, il vient :

$$(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_z^{gal})^2 = (s_{i+1} - s_i)^2 \left[ \begin{array}{c} I_i^2 - I_i \partial_s \varphi_i \cos \varphi_i (s_{i+1} - s_i)^2 \\ + o_{s_i} \left[ (s_{i+1} - s_i)^2 \right] \end{array} \right] \quad (\text{C.95})$$

Et finalement en regroupant C.93, C.94 et C.95 :

$$M_i M_{i+1} = (s_{i+1} - s_i) \left[ \begin{array}{c} 1 + I_i^2 - \left( \frac{5}{12} (\partial_s \theta_i)^2 + I_i \partial_s \varphi_i \cos \varphi_i \right) (s_{i+1} - s_i)^2 \\ + o_{s_i} \left[ (s_{i+1} - s_i)^2 \right] \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.96})$$

Le fait de considérer des pentes très faibles qui nous permet de poser  $\cos \varphi = 1$  est équivalent à négliger  $I^2$  (cf. B.6), de plus nous travaillons aussi avec l'hypothèse que  $\partial_s \varphi_i$  est négligeable (cf. B.7). Par conséquent les approximations déjà effectuées simplifient C.96 en effectuant un développement limité par rapport à  $(s_{i+1} - s_i)$  :

$$M_i M_{i+1} = (s_{i+1} - s_i) \left[ 1 - \frac{5}{12} (\partial_s \theta_i)^2 (s_{i+1} - s_i)^2 + o_{s_i} \left[ (s_{i+1} - s_i)^2 \right] \right] \quad (\text{C.97})$$

On voit alors, dans le cadre des hypothèses faites sur la courbure (cf. condition C.23) pour réaliser les développements limités du paragraphe C.1.4, que si l'on prend  $M_i M_{i+1}$  au maximum de l'ordre de  $B_0$ , l'erreur relative faite en approximant  $(s_{i+1} - s_i)$  par  $M_i M_{i+1}$  demeure faible et C.97 donne :

$$\frac{s_{i+1} - s_i - M_i M_{i+1}}{s_{i+1} - s_i} = \frac{5}{12} (\partial_s \theta_i)^2 (s_{i+1} - s_i)^2 + o_{s_i} \left[ (s_{i+1} - s_i)^2 \right] \quad (\text{C.98})$$

### C.5.1.3 Courbure de la ligne médiane

L'abscisse curviligne  $s_z$  le long du projeté orthogonal de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{P}_z$  (cf. A.1.2.1) est donnée par :

$$\begin{aligned} s_z(s) &= \int_0^s \|\partial_s p_z(M_\Gamma)|_{s=\sigma}\| d\sigma \\ &= \int_0^s \|p_z(\partial_s M_\Gamma)|_{s=\sigma}\| d\sigma \\ &= \int_0^s \|p_z(\mathbf{e}_s(\sigma))\| d\sigma \\ s_z(s) &= \int_0^s |\cos \varphi(\sigma)| d\sigma \end{aligned}$$

D'où :

$$\partial_s s_z = |\cos \varphi|$$

Donc :

$$\begin{aligned} \kappa &= \partial_s \theta \\ &= \partial_s s_z \partial_{s_z} \theta \\ \kappa &= |\cos \varphi| \partial_{s_z} \theta \end{aligned} \quad (\text{C.99})$$

Or nous avons posé  $\cos \varphi = 1$  (cf. B.6) et par conséquent à l'ordre d'approximation où nous travaillons<sup>13</sup>, on a :

$$s_z(s) = s \quad (\text{C.100})$$

La grandeur  $\kappa = \partial_s \theta$  peut donc être correctement approchée par la courbure le long de  $p_z(\Gamma)$ .

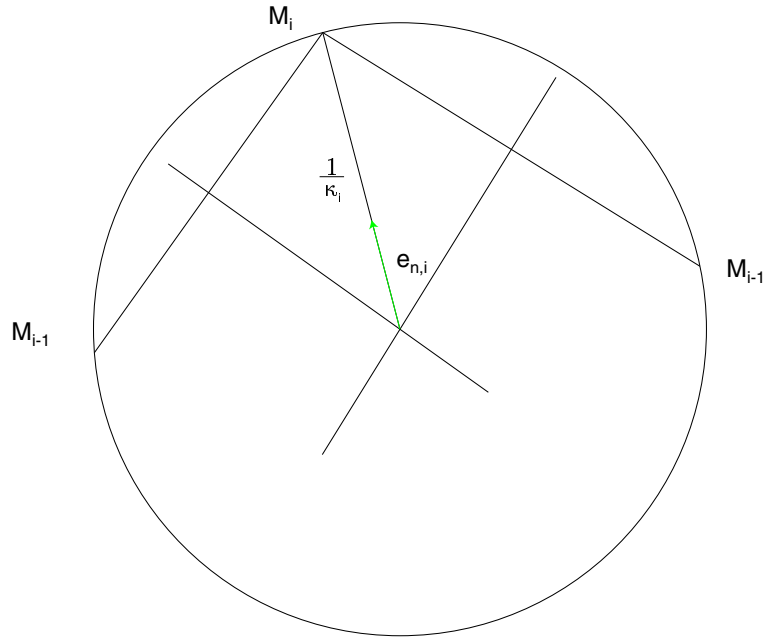


FIG. C.1 – Calcul du rayon de courbure de la ligne médiane et de son vecteur unitaire horizontal normal

En pratique, pour  $i \in \{2, \dots, m-1\}$ , on cherche dans le plan  $\mathcal{P}_z$  le centre du cercle circonscrit à l'image du triangle  $\{M_{i-1}, M_i, M_{i+1}\}$  par la projection  $p_z$  (cf. fig. C.1). On note  $c_i$  le centre de ce cercle et  $r_i$  son rayon. Par simplicité, nous assimilons dans cette partie un point et son image par  $p_z$  et tous les calculs sont effectués dans  $\mathcal{P}_z$ , muni du repère  $(0, \mathbf{e}_x^{gal}, \mathbf{e}_y^{gal})$ . On note alors  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $M_i$  dans ce repère et  $(x_{c_i}, y_{c_i})$  les coordonnées de  $c_i$ .

Avec ces notations, on a :

$$\begin{cases} (x_{i-1} - x_{c_i})^2 + (y_{i-1} - y_{c_i})^2 = r_i^2 \\ (x_i - x_{c_i})^2 + (y_i - y_{c_i})^2 = r_i^2 \\ (x_{i+1} - x_{c_i})^2 + (y_{i+1} - y_{c_i})^2 = r_i^2 \end{cases}$$

<sup>13</sup>C.100 permet également de retrouver rapidement C.98.

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} 2(x_i - x_{i-1})x_{c_i} + 2(y_i - y_{i-1})y_{c_i} & = x_i^2 + y_i^2 - (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2) \\ 2(x_i - x_{i+1})x_{c_i} + 2(y_i - y_{i+1})y_{c_i} & = x_i^2 + y_i^2 - (x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2) \\ (x_i - x_{c_i})^2 + (y_i - y_{c_i})^2 & = r_i^2 \end{cases} \quad (\text{C.101})$$

d'où :

$$\det \begin{bmatrix} 2(x_i - x_{i-1}) & 2(y_i - y_{i-1}) \\ 2(x_i - x_{i+1}) & 2(y_i - y_{i+1}) \end{bmatrix} = -4[\mathbf{M}_{i-1}\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}] \quad (\text{C.102})$$

Si le déterminant C.102 est nul, alors le triangle est aplati le cas  $\mathbf{M}_{i-1}\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1} < 0$  étant incompatible avec les conditions de linéarisation C.23, on considérera en pratique dans ce cas que la courbure est nulle.



On a finalement en regroupant C.101 et C.103 :

$$r_i = \frac{[\mathbf{M}_{i-1}\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}]}{||[\mathbf{M}_{i-1}\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}]||} \sqrt{(x_i - x_{c_i})^2 + (y_i - y_{c_i})^2} \quad (\text{C.104})$$

La courbure de  $\Gamma$  en  $M_i$  est alors approchée par :

$$\kappa_i = \frac{1}{r_i} \quad (\text{C.105})$$

Enfin  $\mathbf{e}_{n,i}$ , le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  en  $M_i$  et horizontal est donné par :

$$\mathbf{e}_{n,i} = \kappa_i \mathbf{M}_i \mathbf{C}_i$$

#### C.5.1.4 Normale contre une rive

L'équation d'un point  $\mathbf{M}_{rg}(s)$  évoluant le long de la rive gauche du chenal est donnée par  $\mathbf{M}_{rg}(s) = \mathbf{M}(s, 1, 1)$  (cf. A.11) soit en grandeurs dimensionnelles :

$$\mathbf{M}_{rg}(s) = \mathbf{M}_\Gamma(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ b(s) \\ \xi(s, 1) \end{bmatrix}_s$$

En utilisant les notations de la partie A.1.2.1 nous considérons l'évolution du point  $p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))$  dans le plan  $\mathcal{P}_z$ . Dans ce dernier, la tangente locale à la courbe  $p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))$  est donnée<sup>14</sup> d'après A.2, A.4, A.3, A.5, A.7 et A.10 :

$$\begin{aligned} \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) &= p_z(\partial_s \mathbf{M}_{rg}(s)) \\ &= p_z(\mathbf{e}_s + \partial_s b \mathbf{e}_n + b \partial_s \mathbf{e}_n + \partial_s \xi|_{n=1} \mathbf{e}_z + \xi|_{n=1} \partial_s \mathbf{e}_z) \\ \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} + \partial_s b \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} - b \partial_s \theta \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \\ &+ \partial_s \xi|_{n=1} \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} + \xi|_{n=1} \partial_s \varphi \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \\ &+ \xi|_{n=1} \partial_s \theta \sin \varphi \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \end{aligned}$$

Et en utilisant B.5, B.6 et B.7 :

$$\partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) = (1 - b \partial_s \theta + I \partial_s \xi|_{n=1}) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} + (\partial_s b + \xi|_{n=1} I \partial_s \theta) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal}$$

Puis, toujours dans le plan  $\mathcal{P}_z$ , un vecteur normal à  $\partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))$  est donné par :

$$\mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) = (1 - b \partial_s \theta + I \partial_s \xi|_{n=1}) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} - (\partial_s b + \xi|_{n=1} I \partial_s \theta) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal}$$

<sup>14</sup>Le fait que  $\Gamma$  soit régulier et la condition C.24 garantissent qu'en tout  $s$  on a  $\partial_s(\mathbf{M}_{rg}(s)) \neq \mathbf{0}$ .

En utilisant les adimensionnements C.11, C.12, C.13, C.14, et C.16, et les développements limités, C.22, C.30 et C.45, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) &= \left( 1 + \left( \left( \frac{H_0}{B_0} \right)^2 I \partial_s \xi_\kappa|_{n=1} - \kappa \right) \Psi + o(\Psi) \right) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \\ &\quad - (\partial_s b_\kappa \Psi + o(\Psi)) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} \end{aligned}$$

On a :

$$\left\| \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) \right\| = 1 + \left( \left( \frac{H_0}{B_0} \right)^2 I \partial_s \xi_\kappa - \kappa \right) \Psi + o(\Psi)$$

Si nous normalisons  $\mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))$ , il vient alors :

$$\frac{\mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))}{\left\| \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) \right\|} = (1 + o(\Psi)) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal} - (\partial_s b_\kappa \Psi + o(\Psi)) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{gal}$$

Soit :

$$\frac{\mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))}{\left\| \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) \right\|} = (1 + o(\Psi)) \mathbf{e}_n - (\partial_s b_\kappa \Psi + o(\Psi)) \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \mathbf{e}_n$$

Soit, en revenant aux grandeurs dimensionnelles, au premier ordre en  $\Psi$  :

$$\frac{\mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s))}{\left\| \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rg}(s)) \right\|} = \mathbf{e}_n - \partial_s b \cdot \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \mathbf{e}_n$$

De même, si  $\mathbf{M}_{rd}(s)$  désigne un point évoluant le long de la rive droite du chenal on montrerait, au premier ordre en  $\Psi$  :

$$\frac{\mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rd}(s))}{\left\| \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \partial_s p_z(\mathbf{M}_{rd}(s)) \right\|} = \mathbf{e}_n + \partial_s b \cdot \mathbf{e}_z^{gal} \wedge \mathbf{e}_n$$

## C.5.2 Calcul de $u_0^s$ et $h_0$ à partir du débit fluide $Q$

Nous explicitons le schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation C.47.

### C.5.2.1 Équation dimensionnelle

Si on veut conserver le maximum de précision dans les calculs numériques, il est nécessaire de résoudre la forme adimensionnelle de l'équation C.47. Nous effectuons cependant ici les substitutions (cf. C.1.2) permettant de retrouver les grandeurs dimensionnelles. On effectue les substitutions inverses de C.10, C.11, C.15 et C.16, à savoir :

$$\begin{aligned} s &\rightarrow \frac{1}{B_0} s \\ \partial_s &\rightarrow B_0 \partial_s \\ u_0^s &\rightarrow \frac{1}{U_0} u_0^s \\ I &\rightarrow \frac{B_0}{H_0} I \end{aligned}$$

L'équation C.47 devient alors, en utilisant C.20 et C.21 :

$$\frac{B_0}{U_0^2} u_0^s \partial_s u_0^s + \frac{C_f B_0}{H_0 U_0^3 Q_0} u_0^{s3} = \frac{g H_0}{U_0^2} \frac{B_0}{H_0} I$$

soit :

$$u_0^s \partial_s u_0^s + \frac{C_f}{H_0 U_0 Q_0} u_0^{s3} = g I \quad (\text{C.106})$$

Si on considère que le débit fluide  $Q$  est une donnée du problème, le débit adimensionné  $Q_0$  est défini par (cf. C.2.1) :

$$Q = 2 B_0 H_0 U_0 Q_0$$

et C.106 devient finalement :

$$u_0^s \partial_s u_0^s + \frac{2 C_f B_0}{Q} u_0^{s3} = g I$$

que l'on écrit, la vitesse longitudinale de l'écoulement étant supposée non nulle :

$$\partial_s u_0^s = \frac{g I}{u_0^s} - \frac{2 C_f B_0}{Q} u_0^{s2} \quad (\text{C.107})$$

### C.5.2.2 Schéma numérique

Nous utilisons un schéma d'Euler explicite<sup>15</sup> pour intégrer C.107, il vient ainsi pour  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  :

$$u_{0,i+1}^s = u_{0,i}^s + (s_{i+1} - s_i) \left[ \frac{g I_i}{u_{0,i}^s} - \frac{2 C_f B_0}{Q} u_{0,i}^{s2} \right] \quad (\text{C.108})$$

Comme on a utilisé le schéma de différences finies du premier ordre :

$$(\partial_s u_0^s)_i \approx \frac{u_{0,i+1}^s - u_{0,i}^s}{s_{i+1} - s_i}$$

on utilise :

$$I_i \approx - \frac{(\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i) \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{s_{i+1} - s_i}$$

qui reporté dans C.108 donne :

$$u_{0,i+1}^s = \left[ 1 - \frac{2 C_f B_0}{Q} (s_{i+1} - s_i) u_{0,i}^s \right] u_{0,i}^s - \frac{g (\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i) \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{u_{0,i}^s} \quad (\text{C.109})$$

<sup>15</sup>Une intégration directe de C.107 par rapport à  $s$  entre les abscisses curvilignes  $s_i$  et  $s_{i+1}$  donne la relation exacte :

$$u_{0,i+1}^{s2} - u_{0,i}^{s2} + \frac{2 C_f B_0}{Q} \int_{s_i}^{s_{i+1}} u_0^{s3} ds = 2g (\mathbf{M}_{i+1} - \mathbf{M}_i) \cdot \mathbf{e}_z^{gal}$$

on peut alors utiliser un schéma numérique de type formule des trapèzes ou formule de Simpson pour calculer une valeur approchée de  $\int_{s_i}^{s_{i+1}} u_0^{s3} ds$ . Cependant, on aboutit ainsi à une équation polynomiale de degré 3 en  $u_{0,i+1}^s$  dont la résolution exacte est possible mais fastidieuse.

Nous approchons enfin la variation d'abscisses curvilignes ( $s_{i+1} - s_i$ ) par la distance  $M_i M_{i+1}$  (cf. C.98). Cette approximation reste correcte tant que la courbure et la pente longitudinale de  $\Gamma$  restent faibles.

C.109 donnent alors finalement la relation de récurrence :

$$u_{0,i+1}^s = \left[ 1 - \frac{2C_f B_0}{Q} M_i M_{i+1} u_{0,i}^s \right] u_{0,i}^s + \frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{u_{0,i}^s} \quad (\text{C.110})$$

qui permet de calculer de proche en proche  $u_{0,i}^s$  pour  $i \in \{2, \dots, m\}$ , connaissant  $u_{0,1}^s$ .

### C.5.2.3 Calcul de $h_0$

La profondeur de l'écoulement adimensionnée à l'ordre 0 en  $\Psi$  est donnée par C.44, soit :

$$h_0 = \frac{Q_0}{u_0^s}$$

et en dimensionnant :

$$h_0 = \frac{2B_0 H_0 U_0 Q_0}{2B_0 U_0 u_0^s}$$

ce qui donne :

$$h_{0,i} = \frac{Q}{2B_0 u_{0,i}^s} \quad (\text{C.111})$$

### C.5.2.4 Stabilité

L'équation C.110 est de la forme :

$$u_{0,i+1}^s = f(u_{0,i}^s)$$

avec :

$$f(x) = x - \frac{2C_f B_0}{Q} M_i M_{i+1} x^2 + \frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{x}$$

Une condition suffisante pour que ce schéma numérique soit stable est que  $f$  soit contractante, il suffit pour cela que :

$$\sup |f'(x)| \in ]0, 1[ \quad (\text{C.112})$$

Or on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{4C_f B_0}{Q} M_i M_{i+1} x - \frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{x^2}$$

et la condition C.112 s'exprime :

$$0 < \frac{4C_f B_0}{Q} M_i M_{i+1} x + \frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{x^2} < 2$$

Comme la pente longitudinale de  $\Gamma$  est toujours positive, tout comme la vitesse longitudinale de l'écoulement à l'ordre 0, alors seule la condition :

$$\frac{4C_f B_0}{Q} M_i M_{i+1} x + \frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{x^2} < 2$$

est à vérifier, ce qui amène :

$$M_i M_{i+1} < \frac{Q}{4C_f B_0 x} \left( 2 - \frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{x^2} \right)$$

et cette dernière grandeur est positive si :

$$x > \sqrt{\frac{g \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_z^{gal}}{2}}$$

### C.5.3 Calcul de $u_\kappa^s|_{n=1}$ , connaissant $u_0$ et $h_0$

#### C.5.3.1 Discrétisation

On considère l'équation C.66, à savoir :

$$u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{\epsilon u_0^s}{h_0} (R_I + 1) u_\kappa^s|_{n=1} = u_0^{s2} \partial_s \kappa - \frac{\epsilon u_0^{s2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s2}}{h_0} F^2 - 2(R_I - 1) + A + \frac{1}{u_0^s} A_{sec} - 1 \right] \kappa \quad (\text{C.113})$$

avec :

$$R_I = \frac{h_0}{u_0^{s2}} \cdot \frac{g B_0 I}{C_f U_0^2}$$

soit dimensionné :

$$R_I = \frac{g h_0 I}{C_f u_0^{s2}}$$

et discrétisé :

$$R_{Ii} = \frac{g h_{0,i} (z_{i+1} - z_i)}{C_f u_{0,i}^{s2} d(M_i, M_{i+1})}$$

En dimensionnant l'équation C.113 et les approximations C.99 et C.100 sur la courbure :

$$u_0^s \partial_s u_\kappa^s|_{n=1} + \frac{C_f u_0^s}{h_0} (R_I + 1) u_\kappa^s|_{n=1} = B_0 u_0^{s2} \partial_s \kappa - \frac{C_f B_0 u_0^{s2}}{h_0} \left[ \frac{u_0^{s2}}{g h_0} - 2(R_I - 1) + A + \frac{U_0}{u_0^s} A_{sec} - 1 \right] \kappa$$

En discrétisant l'équation d'évolution, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{u_\kappa^s|_{n=1,i+1} - u_\kappa^s|_{n=1,i}}{d(M_i, M_{i+1})} + \frac{C_f}{h_{0,i}} (R_{Ii} + 1) u_\kappa^s|_{n=1,i} \\ &= B_0 u_{0,i}^s \frac{\kappa_{i+1} - \kappa_i}{d(M_i, M_{i+1})} - \frac{C_f B_0 u_{0,i}^s}{h_{0,i}} \left( \frac{u_{0,i}^{s2}}{g h_{0,i}} - 2(R_{Ii} - 1) + A + \frac{U_0}{u_{0,i}^s} A_{sec} - 1 \right) \kappa_i \\ & u_\kappa^s|_{n=1,i+1} - u_\kappa^s|_{n=1,i} + \frac{C_f}{h_{0,i}} (R_{Ii} + 1) d(M_i, M_{i+1}) u_\kappa^s|_{n=1,i} \\ &= B_0 u_{0,i}^s (\kappa_{i+1} - \kappa_i) - \frac{C_f B_0 u_{0,i}^s d(M_i, M_{i+1})}{h_{0,i}} \left( \frac{u_{0,i}^{s2}}{g h_{0,i}} - 2(R_{Ii} - 1) + A + \frac{U_0}{u_{0,i}^s} A_{sec} - 1 \right) \kappa_i \\ & u_\kappa^s|_{n=1,i+1} = \left[ 1 - \frac{C_f}{h_{0,i}} (R_{Ii} + 1) d(M_i, M_{i+1}) \right] u_\kappa^s|_{n=1,i} + B_0 u_{0,i}^s \kappa_{i+1} \\ & \quad - u_{0,i}^s B_0 \left[ 1 + \frac{C_f d(M_i, M_{i+1})}{h_{0,i}} \left( \frac{u_{0,i}^{s2}}{g h_{0,i}} - 2(R_{Ii} - 1) + A + \frac{U_0}{u_{0,i}^s} A_{sec} - 1 \right) \right] \kappa_i \quad (\text{C.114}) \end{aligned}$$

### C.5.3.2 Stabilité

Une analyse de A-stabilité simple Mohammadi et Saïac (2003) donne la condition lâche de stabilité sur l'équation C.114 :

$$d(M_i, M_{i+1}) < \frac{h_{0,i}}{C_f (R_{I_i} + 1)}$$



## Annexe D

# Crués de débordement

Les crués de débordement envahissant la plaine d'inondation peuvent transporter du matériel de plusieurs façons. Le matériel en suspension est déplacé par les courants et la turbulence. Il s'agit de processus de convection dans le premier cas et de diffusion dans le second. Une partie du matériel, en particulier dans les zones proches du chenal, où le courant est élevé, peut également être transportée sous forme de charge de fond.

Nous ne considérerons ici que le transport par diffusion dû à la turbulence et décrivons brièvement le modèle établi par Pizzuto (1987) qui permet de justifier théoriquement l'utilisation de lois de décroissance exponentielle dans la modélisation des crués de débordement. Le transport est donc supposé s'effectuer des zones les plus concentrées en sédiment, près du chenal, vers les zones moins concentrées, aux bords de la plaine d'inondation. Les prédictions de ce modèle sont en accord avec les observations hormis dans les zones proches du chenal où les phénomènes de transport sous forme de charge de fond sont importants.

### D.1 Équation de diffusion

#### D.1.1 Formulation

Soit  $TA(t)$ , le taux d'accumulation instantané en  $m \cdot s^{-1}$  de sédiments sur la plaine d'inondation. Les développements de Parker (1978) repris par Pizzuto (1987) relient cette vitesse de dépôt à la moyenne verticale de la concentration de sédiment sur une verticale donnée notée  $\bar{C}$  est définie par :

$$\bar{C} = \int_0^1 C(y, z) dz$$

où  $C(y, z)$  est la concentration de sédiment à une position  $(y, z)$  donnée sur la plaine d'inondation avec  $y$  la distance transverse à partir du chenal et  $z$  la hauteur adimensionnée à partir de la base de l'écoulement ( $z = 0$ ) et jusqu'à sa surface ( $z = 1$ ) (cf. fig. D.1).

$$\partial_t \bar{C} - e_y \partial_{yy}^2 \bar{C} = -TA \quad (\text{D.1})$$

avec  $e_y$  un coefficient de diffusion horizontale.

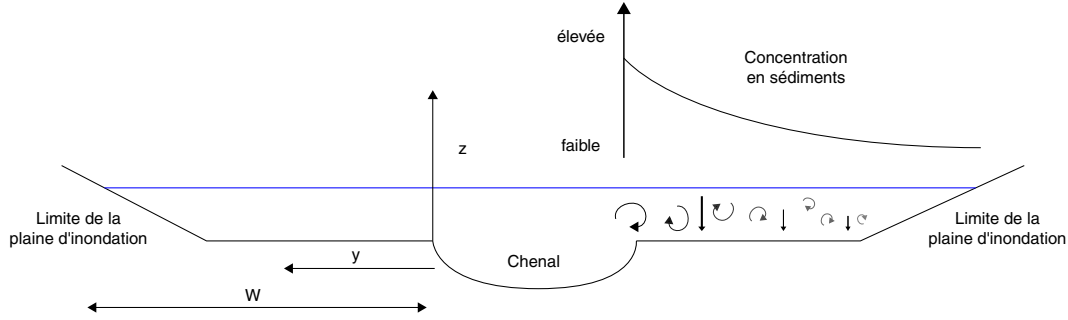


FIG. D.1 – Notations employées pour modéliser le transport par diffusion lors des crues de débordement

La figure représente une vue en coupe normale à l'axe de la vallée. La surface de l'eau est en bleu.

Nous définissons alors une valeur  $\bar{C}_e$  correspondant à la valeur de  $\bar{C}$  pour un écoulement à l'équilibre transportant une concentration de sédiment égale à sa capacité. Sous ces conditions, les taux instantanés d'érosion et de dépôt sont égaux et on a :

$$TA_{\bar{C}=\bar{C}_e} = 0 \quad (D.2)$$

Or le taux de dépôt instantané  $TD$  peut être approché par [Engelund (1970); Parker (1978)] :

$$TD = \frac{V_s^2}{e_z} \bar{C} \quad (D.3)$$

où  $e_z$  est un coefficient de diffusion verticale et  $V_s$  est la vitesse de sédimentation pouvant être obtenue à partir des caractéristiques physiques et géométriques de l'écoulement et celles des particules grâce à la loi de Stokes [Allen (1985); Cojan et Renard (1997)].

En notant  $TE$ , le taux d'érosion instantané, on a :

$$TA = TD - TE \quad (D.4)$$

Les caractéristiques de l'écoulement étant données, ce taux d'érosion ne dépend que de la nature du sédiment considéré. Il est donc égal pour toutes les concentrations, en particulier la concentration  $\bar{C}_e$  correspondant aux conditions d'équilibre définies par D.2. En combinant D.2 et D.4, on obtient alors sa valeur :

$$TE = \frac{V_s^2}{e_z} \bar{C}_e \quad (D.5)$$

En reportant D.3 et D.5 dans D.1 et en utilisant D.4, il vient :

$$\partial_t \bar{C} - e_y \partial_{yy}^2 \bar{C} = \frac{V_s^2}{e_z} \bar{C} - \frac{V_s^2}{e_z} \bar{C}_e \quad (D.6)$$

On introduit alors la variable :

$$Z = \bar{C} - \bar{C}_e$$

mesurant un excès de concentration<sup>1</sup> en sédiment par rapport aux conditions d'équilibre, qui reportée dans D.6 donne finalement l'équation :

$$\partial_t Z - e_y \partial_{yy}^2 Z = \frac{V_s^2}{e_z} Z \quad (D.7)$$

<sup>1</sup>Nous nous plaçons dans une situation de dépôt.

Cette équation finale est analogue à une équation de diffusion de la chaleur entre deux plaques planes parallèles maintenues à température constante.

### D.1.2 Solution en régime permanent

La solution complète de D.7 est classiquement obtenue par transformation de Fourier. En pratique, sa convergence vers un régime permanent est très rapide. Elle met une dizaine d'heures en utilisant des grandeurs physiques caractéristiques des plaines d'inondations naturelles [Pizzuto (1987)]. Comme notre but est la modélisation des dépôts sur des périodes de temps géologiques, nous ne retiendrons que sa forme permanente et considérerons que toutes les crues modélisées excèdent cette durée<sup>2</sup>.

L'équation D.7 prend donc la forme :

$$\partial_{yy}^2 Z - \frac{V_s^2}{e_y e_z} Z = 0$$

dont la solution générale est :

$$Z = \lambda_1 e^{\sqrt{\frac{V_s^2}{e_y e_z}} y} + \lambda_2 e^{-\sqrt{\frac{V_s^2}{e_y e_z}} y} \quad (\text{D.8})$$

On définit alors les deux grandeurs adimensionnelles :

$$n = \frac{y}{W} \quad (\text{D.9})$$

$$G = \frac{W V_s}{\sqrt{e_y e_z}} \quad (\text{D.10})$$

où  $W$  est la distance entre le bord du chenal est la limite de dépôt de matériel sur la plaine d'inondation. La solution D.8 s'écrit alors simplement :

$$Z(n) = \lambda_1 e^{Gn} + \lambda_2 e^{-Gn} \quad (\text{D.11})$$

### D.1.3 Conditions aux limites

Pour trouver les valeurs des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'équation D.11 on doit se donner deux conditions aux limites :

- L'excès de concentration moyenne de sédiments en suspension sur le bord du chenal  $Z_0$  est supposé connu, on a donc :

$$Z(0) = Z_0 \quad (\text{D.12})$$

- Les bords de la plaine d'inondation sont définis par le fait qu'il n'y a pas de dépôt de sédiments au delà de cette distance. En régime permanent la concentration de sédiments à cet endroit est donc constante et on a :

$$\partial_n Z|_{n=1} = 0 \quad (\text{D.13})$$

---

<sup>2</sup>Pizzuto (1987) montre que l'échelle de temps caractéristique du système est donnée par :

$$t_s \sim \frac{W^4 V_s}{e_y^2 C}$$

Le régime permanent seront donc atteint d'autant plus rapidement que la vallée est étroite, la granulométrie du matériel en suspension est faible, correspondant à des faibles valeurs de  $V_s$ , les coefficients de diffusion et les concentrations de matériel en suspension sont élevés.

En exprimant ces deux conditions à l'aide de D.11, on trouve facilement :

$$\lambda_1 = Z_0 \left[ 1 - \frac{e^G}{2 \cosh(G)} \right] \quad (\text{D.14})$$

$$\lambda_2 = \frac{Z_0 e^G}{2 \cosh(G)} \quad (\text{D.15})$$

et en reportant ces résultats dans D.11, on obtient finalement :

$$Z = Z_0 \frac{\cosh[G(n-1)]}{\cosh(G)} \quad (\text{D.16})$$

#### D.1.4 Épaisseur de dépôt

La définition du taux d'accumulation D.4 combinée à D.3 et D.5 donne :

$$TA(n, t) = \frac{V_s^2}{e_z} Z(n)$$

L'épaisseur  $H(n)$  de sédiment déposée à l'abscisse  $n$  lors d'une crue de durée  $T$  est donc donnée par :

$$H(n) = \int_0^T TA(n, t) dt$$

soit :

$$H(n) = \frac{V_s^2 Z_0 T}{e_z} \cdot \frac{\cosh[G(n-1)]}{\cosh(G)} \quad (\text{D.17})$$

#### D.1.5 Loi de décroissance exponentielle

On a :

$$\cosh[G(n-1)] = \cosh(Gn) \cosh(G) - \sinh(Gn) \sinh(G)$$

D'où :

$$\frac{\cosh[G(n-1)]}{\cosh(G)} = \cosh(Gn) - \sinh(Gn) \tanh(G) \quad (\text{D.18})$$

Or lorsque  $G$  augmente,  $\tanh(G)$  prend très rapidement<sup>3</sup> des valeurs proches de 1. En faisant l'approximation  $\tanh(G) \approx 1$ , la relation D.18 devient alors :

$$\frac{\cosh[G(n-1)]}{\cosh(G)} \approx e^{-Gn}$$

et l'épaisseur de sédiment déposé est :

$$H(n) \approx \frac{V_s^2 Z_0 T}{e_z} \cdot e^{-Gn} \quad (\text{D.19})$$

Cette dernière approximation justifie l'utilisation d'une loi de décroissance exponentielle pour modéliser l'épaisseur de matériel déposé avec l'éloignement au chenal.

---

<sup>3</sup>On a :  $\tanh(3) \approx 0,995$

## D.2 Granulométrie des dépôts

### D.2.1 Formulation approchée

Pizzuto (1987) propose d'utiliser la même valeur du coefficient  $G$  (cf. eq. D.10) pour toutes les classes granulométrique à partir d'une valeur médiane. Il définit alors une proportion  $P_i$  de représentants d'une classe granulométrique donnée telle que si l'on considère  $m$  classes, on ait :

$$P_i = \frac{H_i}{H}$$

et :

$$H = \sum_{i=1}^m H_i$$

avec  $H_i$  l'épaisseur constituée par les représentants de la classe  $i$  dans l'épaisseur totale  $H$ .

La loi de décroissance de  $P_i$  est obtenue suivant le même raisonnement que précédemment, et on a (cf. eq. D.16) :

$$P_i = P_i|_{n=0} \frac{\cosh[G(n-1)]}{\cosh(G)}$$

avec  $P_i|_{n=0}$  la concentration de représentants de la classe  $i$  dans le chenal.

La loi de décroissance exponentielle de la granulométrie des dépôts utilisée dans ce travail repose essentiellement sur les considérations expérimentales de Guccione (1993).

### D.2.2 Expression analytique

La vitesse de sédimentation  $V_s$  lorsque la vitesse de l'écoulement est faible de telle sorte que les forces de viscosité sont prépondérantes, est obtenue grâce à la loi de Stokes :

$$V_{sD} = \frac{1}{18} \cdot \frac{(\rho_s - \rho) g D^2}{\nu}$$

où  $\rho_s$  est la densité du sédiment,  $\rho$  est la densité du fluide,  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide,  $g$  est l'accélération due à la gravité et  $D$  est la granulométrie du sédiment. Si les densités du sédiment et du fluide ainsi que sa viscosité sont considérées constantes, on peut écrire :

$$V_{sD} = \alpha D^2$$

et  $G$  peut s'exprimer (cf. D.10) :

$$G = \frac{W V_s}{\sqrt{e_y e_z}}$$

soit :

$$G = \beta D^2 \tag{D.20}$$

En indiquant alors par  $D$  les concentrations relatives au matériel de granulométrie  $D$ , l'équation D.16 s'écrit pour chaque classe granulométrique en utilisant D.20 :

$$Z_D(n) = Z_{D,0} \frac{\cosh [\beta D^2 (n-1)]}{\cosh (\beta D^2)} \quad (\text{D.21})$$

où  $Z_D$  est l'excès de concentration en sédiment de granulométrie  $D$  à l'abscisse  $n$ , et  $Z_{D,0}$  la valeur de cette grandeur aux bords du chenal<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>La distribution des concentrations de matériel suspendu dans le chenal peut-être obtenue grâce à l'équation de Einstein-Rouse [Yalin et Ferreira da Silva (2001)] :

$$C(z) = C_\epsilon \left[ \frac{\epsilon}{z} \cdot \frac{h-z}{h-\epsilon} \right]^{\frac{5V_s}{2v_*}} \quad (\text{D.22})$$

avec  $v_*$  vitesse de cisaillement à la base du chenal :

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

La concentration  $C_\epsilon$  à l'altitude  $\epsilon$  peut être obtenue par les relations proposées par van Rijn (1984, 1985) qui exprimées pour un lit plat donnent :

$$C_\epsilon = \frac{1}{20} \left( \frac{\rho v^2}{\rho_s - \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{D} \quad (\text{D.23})$$

# Annexe E

## Lobes de crevasse

Nous proposons un modèle géométrique paramétrique pour générer des lobes de crevasse.

### E.1 Géométrie plane

On se donne une direction principale par rapport à laquelle les lobes de crevasse sont supposés avoir une symétrie axiale. Soit, un repère cartésien orthonormé  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , où  $O$  est au centre de la crevasse engendrant le lobe et où  $\mathbf{e}_x$  est parallèle à sa direction principale. Le contour du lobe est alors donné par une équation de la forme :

$$y = \pm f(x) \quad \text{avec } x \in [0; L]$$

où  $L$  est la longueur maximale du lobe suivant  $(O, \mathbf{e}_x)$ .

Soit  $w_c$  la largeur de la crevasse à l'origine du lobe. L'épanchement de sédiment se fait d'abord de manière privilégiée dans la direction  $\mathbf{e}_x$  sur une longueur  $l_c$ , puis se répand sous la forme d'une ellipse de longueur  $L$  et de largeur  $W$  (cf. E.1).

L'équation de la partie rectiligne issue de la crevasse est :

$$y = \pm \frac{w_c}{2}$$

L'équation de l'ellipse est :

$$y = \pm f_e(x)$$

avec :

$$f_e(x) = \sqrt{\frac{W^2}{L^2} x(L-x)}$$

L'équation du lobe est alors posée égale à :

$$y = \pm \sqrt{\lambda(x) \frac{w_c^2}{4} + (1 - \lambda(x)) \frac{W^2}{L^2} x(L-x)} \quad (\text{E.1})$$

où  $\lambda(x) \in [0; 1]$  est un poids permettant de simuler une transition continue entre la partie issue de la crevasse et la partie correspondant à l'épanchement.

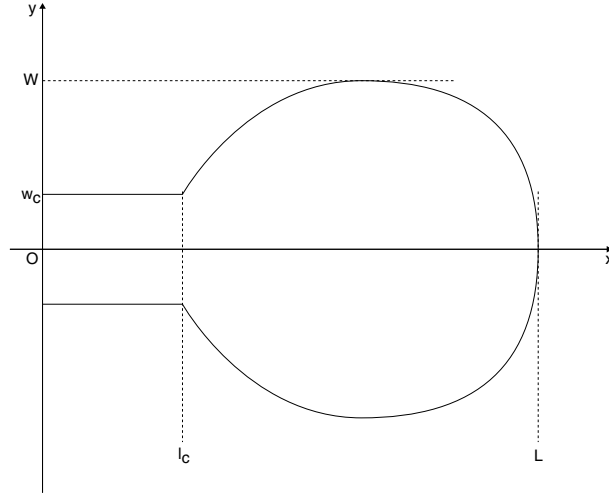


FIG. E.1 – Notations introduites pour modéliser un épanchement de crevasse

Nous utilisons pour  $\lambda$  la fonction tangente hyperbolique :

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} [1 + \tanh(a(x - l_c))]$$

avec  $a$  qui est un paramètre de forme assurant suivant sa valeur une transition plus ou moins abrupte (cf. E.2).

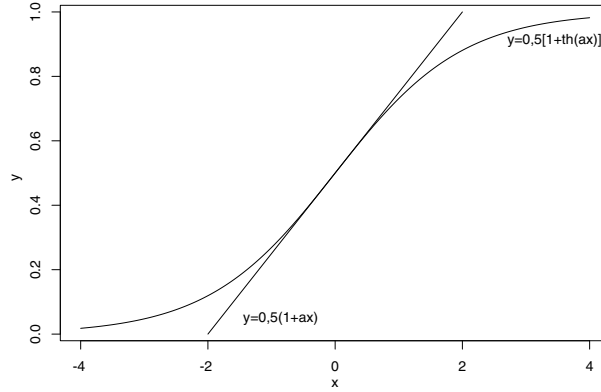


FIG. E.2 – Graphe de la fonction  $y = \frac{1}{2} [1 + \tanh(a(x - l_c))]$

Les paramètres ont pour valeur  $a = \frac{1}{2}$  et  $l_c = 0$ .

Enfin, la géométrie obtenue à l'aide de l'équation E.1 est déformée suivant  $\mathbf{e}_x$ , afin de modéliser différentes positions du maximum de dépôt. Soit  $x_d \in ]0; L[$  on fait la transformation :

$$\tilde{x}(x) = \frac{xL}{2x_d} \mathbb{1}_{\{x < x_d\}}(x) + \frac{L}{2} \left[ \frac{x - x_d}{L - x_d} + 1 \right] \mathbb{1}_{\{x \geq x_d\}}(x)$$

Et finalement, en remplaçant  $x$  par  $\tilde{x}$  dans l'équation E.1 on obtient l'équation finale :

$$y = \pm \sqrt{\lambda(\tilde{x}) \frac{w_c^2}{4} + (1 - \lambda(\tilde{x})) \frac{W^2}{L^2} \tilde{x}(L - \tilde{x})} \quad (\text{E.2})$$

L'épaisseur et la granulométrie du matériel déposé sont considérées maximales sur le segment  $[0, x_d]$ . Elles décroissent ensuite linéairement vers les bords du lobe.

## **E.2 Exemples de géométries obtenues**

On trouvera à la suite l'illustration de l'influence des paramètres utilisés pour modéliser les lobes de crevasse.

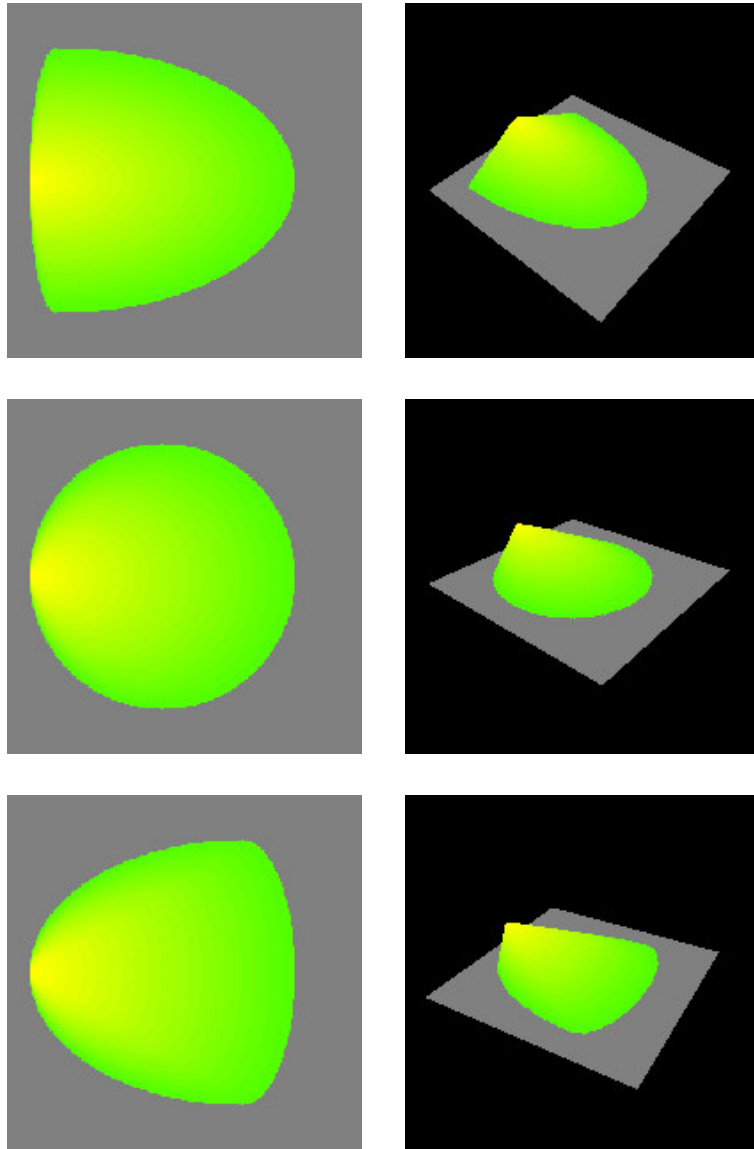


FIG. E.3 – Lobe de crevasse, position de la largeur maximale du lobe

La colonne de gauche représente des vues aériennes en plan alors que la colonne de droite représente une vue 3D. La crevasse à l'origine du lobe se situe à gauche dans la partie sableuse (jaune). Les valeurs de la position la largeur maximale du lobe sont de haut en bas 10%, 50% et 80% de la longueur du lobe. La largeur de la crevasse à l'origine du lobe est ici prise très faible.

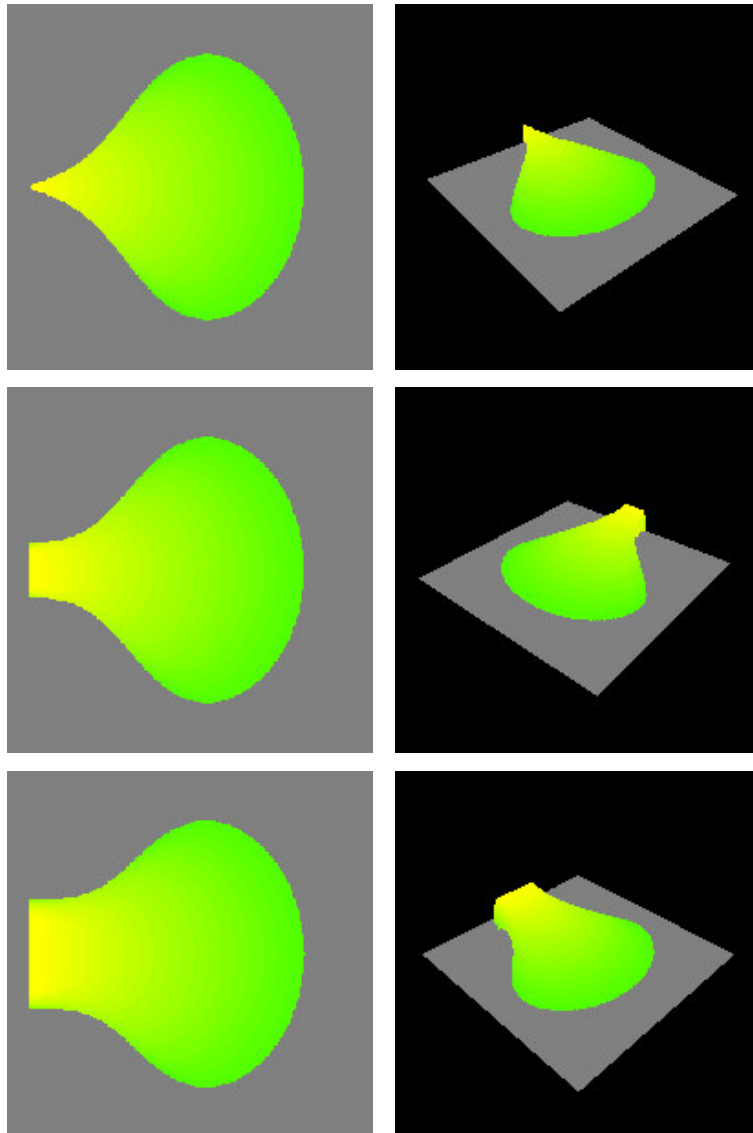


FIG. E.4 – Lobe de crevasse, largeur de la zone d'alimentation  
 La colonne de gauche représente des vues aériennes en plan alors que la colonne de droite représente une vue 3D. La crevasse à l'origine du lobe se situe à gauche dans la partie sableuse (jaune). Les valeurs de la largeur de la zone d'alimentation du lobe, comprenant la crevasse initiale sont de haut en bas 0%, 20% et 40% de la longueur du lobe.

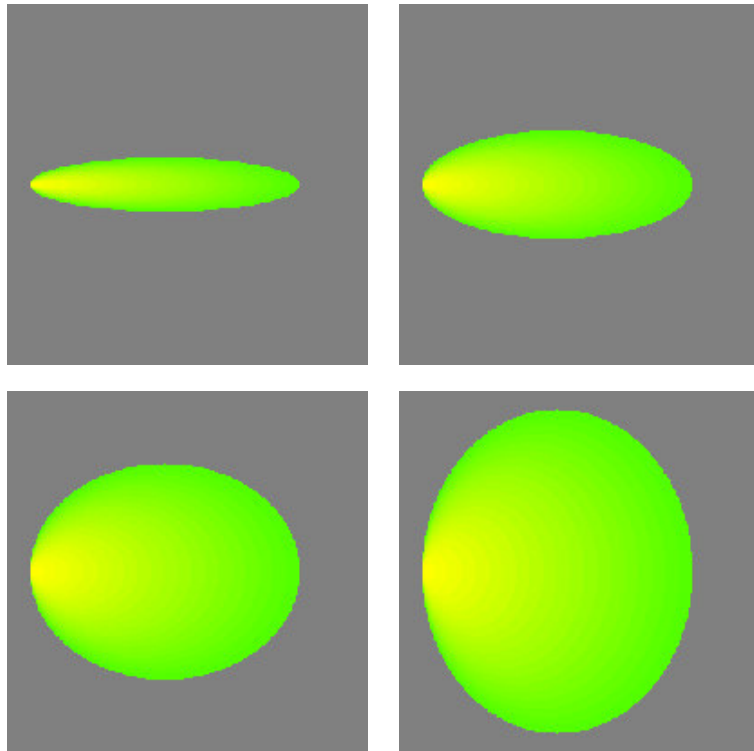


FIG. E.5 – Lobe de crevasse, largeur du lobe

Les figures représentent des vues aériennes en plan. La crevasse à l'origine du lobe se situe à gauche dans la partie sableuse (jaune). Les valeurs de la largeur du lobe sont de haut en bas et de droite à gauche, 20%, 40%, 80% et 120% de la longueur du lobe.

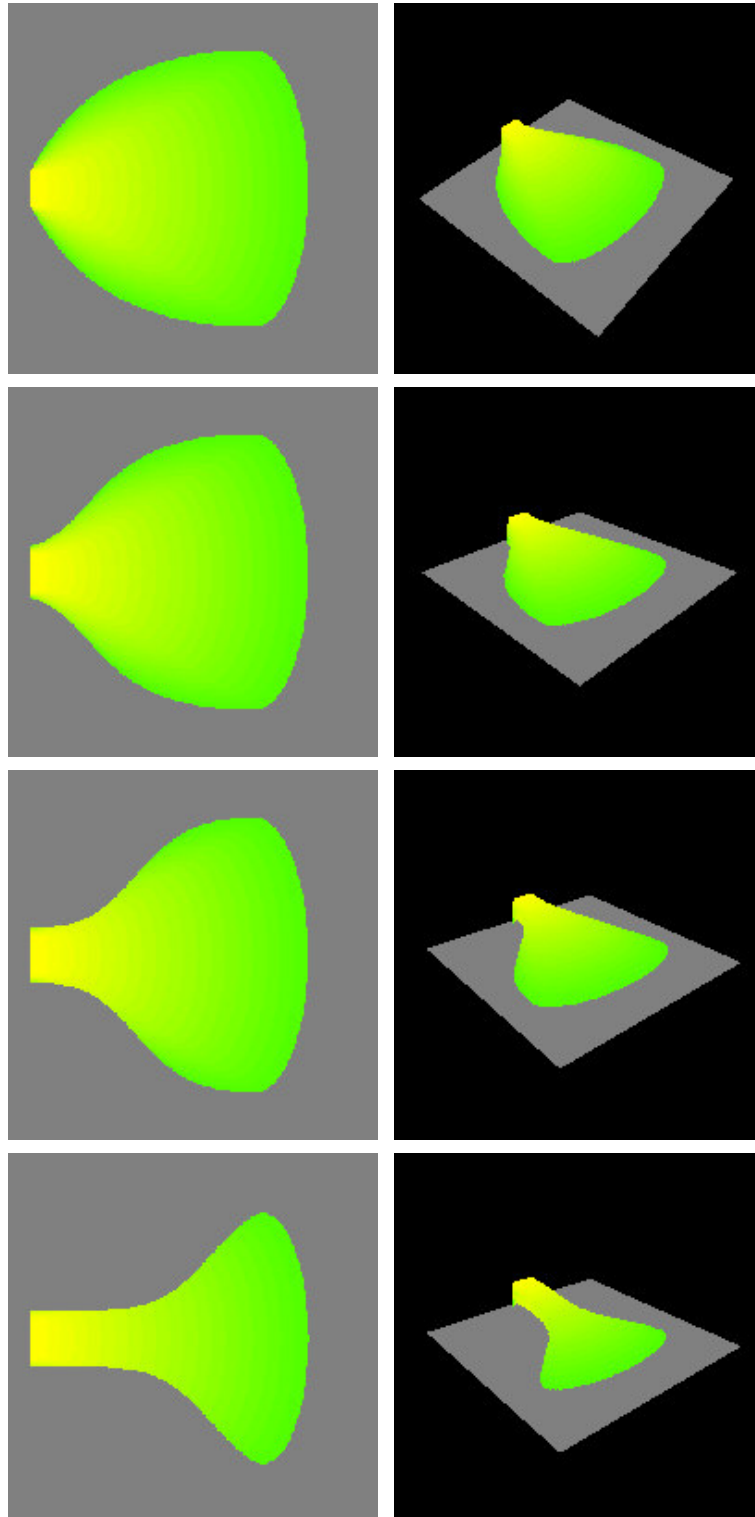


FIG. E.6 – Lobe de crevasse, longueur de la zone d'alimentation

La colonne de gauche représente des vues aériennes en plan alors que la colonne de droite représente une vue 3D. La crevasse à l'origine du lobe se situe à gauche dans la partie sableuse (jaune). Les valeurs de la longueur de la zone d'alimentation sont de haut en bas 0%, 20%, 40% et 70% de la longueur du lobe.

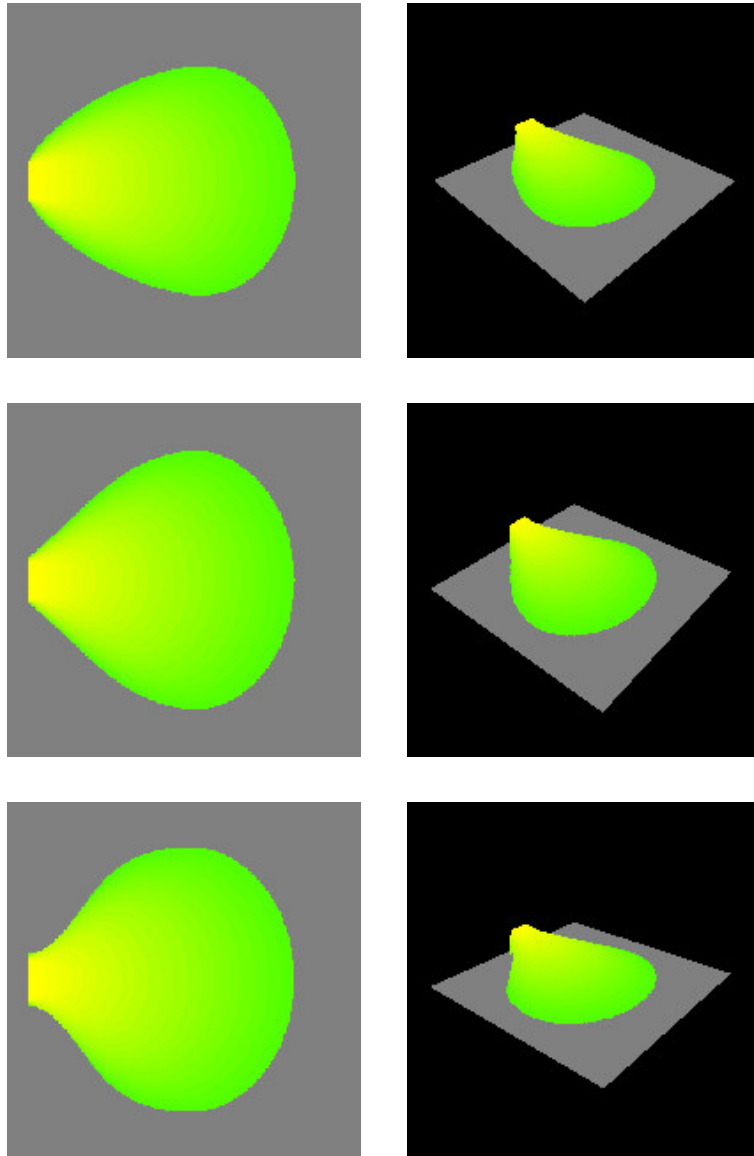


FIG. E.7 – Lobe de crevasse, transition entre la zone d'alimentation et le lobe  
 La colonne de gauche représente des vues aériennes en plan alors que la colonne de droite représente une vue 3D. La crevasse à l'origine du lobe se situe à gauche dans la partie sableuse (jaune). Les valeurs du facteur de transition entre la zone d'alimentation et le lobe sont respectivement de haut en bas 2, 6 et 12.

## Annexe F

# Compléments sur la morphologie des systèmes fluviaux

### F.1 Distribution temporelle des débits

On cherche à décrire le comportement temporel du débit liquide traversant un système fluvial. On le note  $Q$  et on le considère comme une variable aléatoire réelle. On s'intéresse alors à la récurrence des débits dépassant un seuil choisi et considérés comme étant les seuls à avoir une certaine signification géomorphologique. La distribution asymétrique des ces valeurs extrêmes interdit l'utilisation d'une loi normale pourtant relativement bien adaptée à l'étude des modules annuels des variables hydrométéorologiques en climat tempéré.

Certains hydrologues, à l'instar de Chow (1988), préconisent l'utilisation d'une loi lognormale, justifiant son utilisation en argumentant qu'un événement hydrologique  $q$  donné résulte de l'action combinée d'un grand nombre de ces facteurs hydrométéorologiques indépendants dont les contributions sont multiplicatives. La lognormalité de la variable aléatoire  $Q$  découle alors de l'utilisation du théorème centrale limite appliqué à la variable  $\ln(Q)$ .

Cependant, parmi plusieurs autres, la loi de

Gumbel, décrivant la distribution des valeurs extrêmes, est un moyen statistique simple et relativement fiable de modéliser la variable  $Q$  [Assani (1997) *in* Bravard et Petit (1997)]. Sa fonction de répartition, caractérisant la loi de  $Q$ , est donnée par :

$$F^Q(q) = e^{-e^{-a(q-q_0)}}$$

où  $q_0$ , homogène à un débit, est un paramètre de forme et  $a$  est un paramètre d'échelle. Ces deux paramètres peuvent être estimés en utilisant les deux premiers moments de  $Q$ . En pratique on calcule à partir des débits mesurés les fréquences cumulées expérimentales et en utilisant la variable auxiliaire

$$u = -\ln[-\ln(F^Q(q))]$$

on ajuste une droite d'équation :

$$u = a(q - q_0)$$

à la série temporelle des débits mesurés  $\{q_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ .

## F.2 Méandres et sinuosité

Lorsqu'un seul chenal d'écoulement est actif, la sinuosité d'un cours d'eau dépend directement de la géométrie de ses méandres. De nombreux travaux se sont intéressés de manière descriptive à la formation et au développement de ceux-ci. Pour caractériser les formes des méandres, les variables les plus couramment utilisées sont leur longueur d'onde, leur amplitude, leur rayon de courbure et à l'échelle de la rivière, la sinuosité.

Brice (1973, 1974) a proposé une classification des méandres naturels suivant la possibilité d'approcher leur tracé par des arcs de cercles et obtient ainsi quatre grandes catégories (*cf.* fig. F.1 p. 221) : les méandres symétriques simples, les méandres symétriques composés, les méandres asymétriques simples et les méandres asymétriques composés. Bien que la classification de Brice ne repose sur aucune considération physique, elle est une bonne illustration de la complexité des formes que peuvent présenter les méandres naturels.

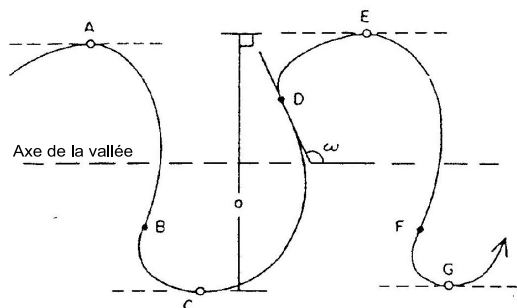


FIG. F.2 – Asymétrie des méandres, Carson et Lapointe (1983)

Les positions des points d'inflexion successifs de la ligne médiane  $B$ ,  $D$  et  $F$  sont alternées par rapport à l'axe de la vallée.

De manière plus précise, Carson et Lapointe (1983) se sont attachés à décrire et quantifier l'asymétrie des méandres naturels (*cf.* fig. F.2, F.3 et F.4). Un premier type d'asymétrie concerne le point d'inflexion de la courbe<sup>1</sup> représentant un méandre dont la position est alternativement d'un côté puis de l'autre de l'axe

de la vallée. Si le méandre était symétrique, ces deux points devraient être alignés sur une droite le long de l'axe de la vallée. Cette alternance traduit un retard dans l'inflexion d'un méandre à son suivant dans le sens de l'écoulement. A l'échelle de la rivière, cette observation se traduit par le fait que la plupart des méandres naturels sont davantage développés vers l'aval de la vallée. La seconde asymétrie remarquée par Carson et Lapointe (1983) concerne l'axe du méandre qui n'est pas perpendiculaire à l'axe de la vallée mais généralement légèrement incliné en direction de l'amont. Ces deux formes d'asymétrie permettent en particulier de déterminer le sens d'écoulement d'une rivière méandriforme à partir d'une observation aérienne. Carson et Lapointe (1983) ont attribué l'origine de ces asymétries à l'existence d'un flot hélicoïdal à l'intérieur du chenal.

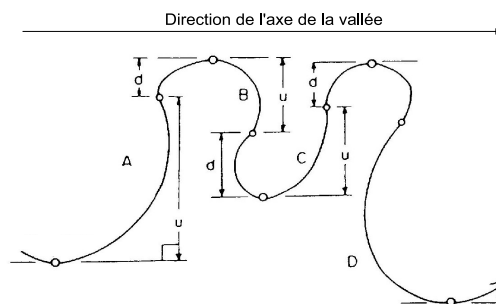


FIG. F.3 – Indice d'asymétrie des méandres, Carson et Lapointe (1983)

$$z = \frac{100 \cdot u}{u + d}$$

Howard et Hemberger (1991) ont montré que les différences entre les rivières en méandres libres pouvaient être entièrement caractérisées par quatre paramètres indépendants reliés respectivement à la longueur d'onde des méandres, l'irrégularité de ces méandres, la sinuosité de la rivière et la longueur d'onde à plus grande

<sup>1</sup> On assimile ici le chenal à sa ligne médiane, c'est à dire la courbe équidistante de ses deux rives.

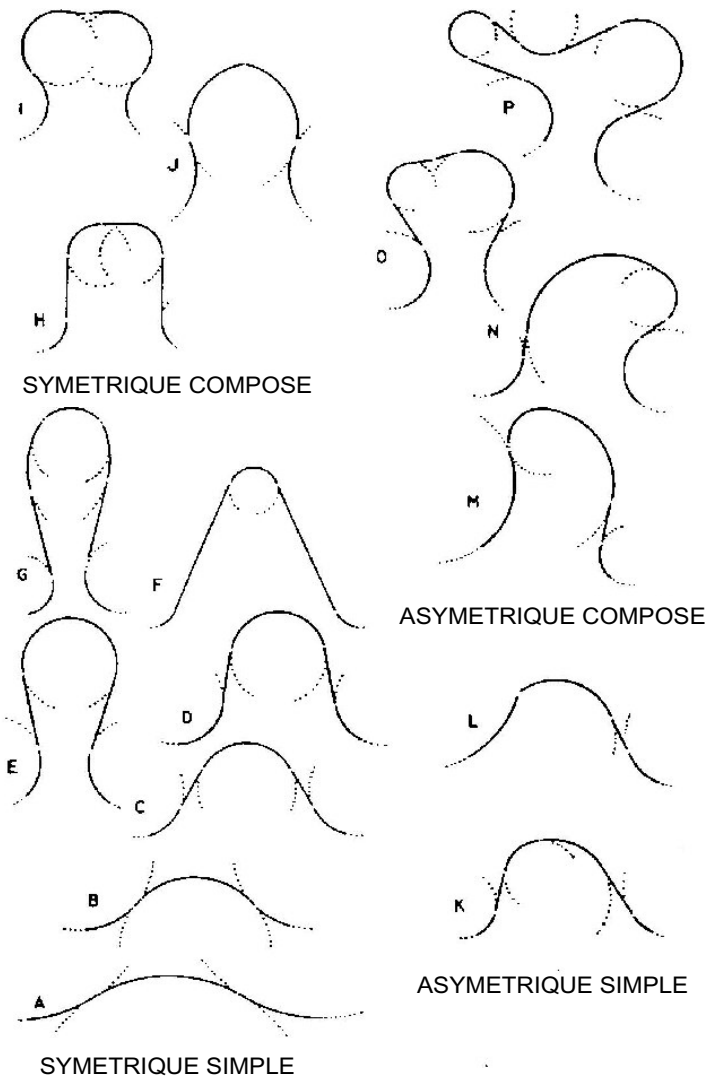


FIG. F.1 – Classification des méandres, Brice (1973)

échelle de la ceinture de méandres. De manière à donner une signification précise à la sinuosité d'une rivière, ils définissent quatre types différents de sinuosités (cf. fig. F.5).

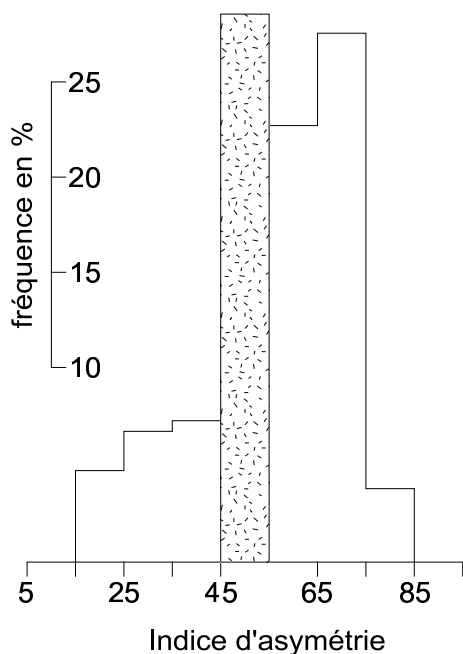


FIG. F.4 – Histogramme de l'indice d'asymétrie, Carson et Lapointe (1983)

- La sinuosité totale de la rivière,  $\mu_T$ , définie comme le rapport entre la longueur totale de la ligne médiane du chenal et la distance en ligne droite entre le premier et le dernier point de cette ligne ( $D$  sur la figure F.5).
- La sinuosité des méandres complets,  $\mu_W$ , est définie comme le rapport entre la somme des demi-largeurs des méandres et la somme de leur largeur totale. La demi-largeur du méandre est la longueur de la ligne brisée reliant trois points d'inflexion consécutifs sur la ligne médiane du chenal ( $Y$  sur la figure F.5) et la largeur totale du méandre est la distance entre les deux extrémités de cette ligne brisée ( $X$  sur la figure F.5), un méandre est la portion de chenal comprise entre ces deux extrémités. La sinuosité des méandres complets caractérise donc l'asymétrie du méandre et un méandre symétrique aura sa sinuosité de méandre complet égale à 1.
- La sinuosité des demi-méandres,  $\mu'_W$ , est le

rapport entre la longueur totale du chenal et la somme des demi-largeurs des méandres. Cette sinuosité permet de quantifier l'amplitude moyenne des méandres par rapport à leur longueur d'onde.

- La sinuosité résiduelle,  $\mu_R$ , est le rapport entre la somme des largeurs des méandres et la distance entre les deux extrémités du chenal, cette dernière sinuosité permettant de quantifier partiellement les déformations de la ceinture de méandres.

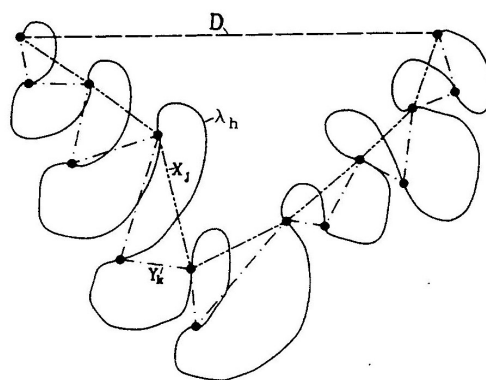


FIG. F.5 – Sinuosités définies par Howard et Hemberger (1991)

$X$  est la largeur d'un méandre.  $Y$  est la largeur d'un demi-méandre. Avec les notations du texte on a :  $\mu_T = \frac{\lambda_h}{D}$ ,  $\mu_W = \frac{\sum Y'_k}{\sum X_j}$ ,  $\mu'_W = \frac{\lambda_h}{\sum Y_k}$  et  $\mu_R = \frac{\sum X_j}{D}$ .

Il existe des rivières de tailles très différentes avec des sinuosités très proches et des tracés quasiment homothétiques. Par conséquent, de nombreux travaux se sont intéressés à l'invariance de la forme des méandres lors de changements d'échelles. Cette invariance a été mise en évidence par Stolum (1998) avec l'utilisation d'outils fractals pour la comparaison de différentes rivières. Cette similarité entre rivières se traduit également par l'existence de nombreuses relations entre les longueurs d'ondes des méandres et la largeur du chenal [Leopold et Wolman (1957)], l'amplitude des méandres et la largeur du chenal [Leopold et Wolman (1960)] ou encore l'amplitude des méandres et le débit de la rivière [Carlston (1965)].

Cependant, malgré ces similitudes, toutes les rivières en méandres n'ont pas les même sinuosi-

tés, en particulier en ce qui concerne les cours d'eau évoluant dans des environnements géologiques et sédimentaires très différents. Ainsi, Schumm (1963, 1977) en mesurant les sinuosités de plusieurs rivières des Grandes Plaines américaines a proposé que la sinuosité de ces rivières était non seulement reliée au rapport entre largeur et profondeur du chenal mais aussi à la composition des rives de ce chenal, en particulier leur teneur en argiles et en silts. Plus le rapport entre largeur et profondeur est faible, plus la sinuosité est faible et parallèlement, plus la teneur des rives en silts et en argiles est importante

plus la sinuosité de la rivière est importante. De même la longueur d'onde des méandres tend à diminuer lorsque le matériau constituant les berges est plus cohésif. A débit égal, des rivières sableuses ou graveleuses tendent à avoir une plus grande longueur d'onde que des rivières transportant du matériau fin (donc à berges constituées de limon et d'argile). Des études récentes ont montré que la composition des berges était peut-être une cause importante et sous-estimée du développement des méandres [Smith (1998); Parker (1998)].

### F.3 Tressage et multiplicité des chenaux

Alors que la définition de la sinuosité d'un chenal est assez immédiate, il est beaucoup plus délicat de définir de la même façon un indice de tressage qui serait censé mesurer le degré de multiplicité des chenaux. Après avoir listé plusieurs définitions pour un tel indice de tressage, Friend et Sinha (1993) proposent d'utiliser un nouvel indice en redéfinissant au préalable la sinuosité d'un système fluvial (*cf.* fig. F.6 p. 224 pour une comparaison des indices de tressage). Ils appellent :

- sinuosité  $P$  du tronçon considéré, le rapport entre la longueur de la ligne médiane du chenal actif le plus large du tronçon ( $L_{cmax}$ ) et la longueur géodésique de ce tronçon ( $L_r$ );
- indice de tressage  $B$  le rapport entre la somme

des longueurs des lignes médianes de tous les chenaux du tronçon ( $L_{ctot}$ ) et la longueur  $L_{cmax}$  de la ligne médiane du chenal le plus large du tronçon.

Cet indice de tressage peut également être calculé pour des rivières méandriformes avec un seul chenal actif qui ont alors un indice de tressage unitaire.

Cependant, comme nous l'avons déjà noté auparavant, cette définition reste très dépendante du nombre de bancs d'alluvion mis à jour lors des basses-eaux. De plus, aucune définition n'est universellement acceptée car toutes expriment à la fois le degré de tressage des chenaux et la sinuosité [Teles (1999)].

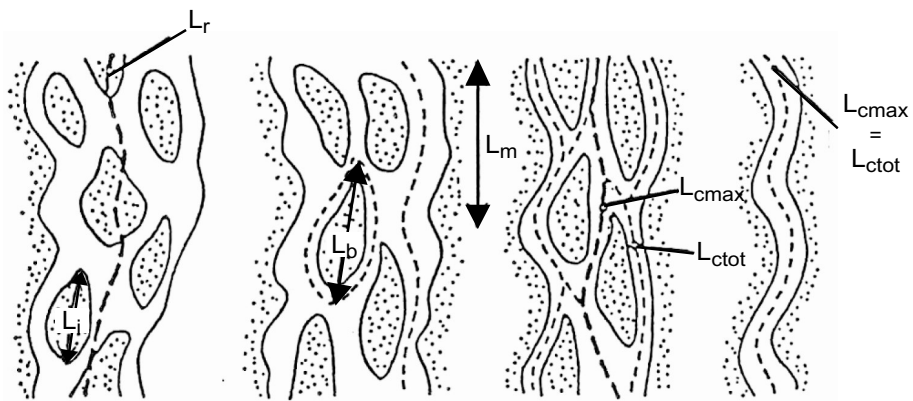


FIG. F.6 – Calcul d'indices de tissage

Selon Brice (1964) :  $B_I = 2 \frac{\sum L_i}{L_r}$

Selon Rust (1978) :  $B_I = \frac{\sum L_b}{L_m}$

Selon Friend et Sinha (1993) :  $\frac{L_{ctot}}{L_{cmax}}$

## Annexe G

# Profil d'équilibre et charge sédimentaire

### G.1 Calcul du taux d'aggradation

On rappelle qu'à la section 4.1.3.3 p. 225, on a défini le taux d'aggradation  $\dot{\phi}$  à l'aide de la formule 4.9 comme la vitesse de déplacement verticale de la ligne médiane d'un chenal.

#### G.1.1 Formulation

Des deux composantes de la vitesse longitudinale de l'écoulement introduites dans l'équation 4.1 p. 225, le terme  $u_{\Psi}$  est lié à la redistribution latérale du flux due à la sinuosité du chenal. En conséquence, seul le terme  $u_0$  contribue au façonnage du profil longitudinal du chenal<sup>1</sup>. Localement ceci se traduit par une érosion (*i.e.*  $\dot{\phi} < 0$ ) ou un dépôt de matériel (*i.e.*  $\dot{\phi} > 0$ ). Grâce à l'équation 4.7,  $u_0$  peut être calculé en tout point du chenal.

Dans les développements conduisant à l'équation 4.1 p. 225, nous considérons que la contrainte de cisaillement sur le fond du chenal est proportionnelle à  $\rho u_0^2$ . Si  $\rho$  la masse volumique du fluide chargé est considérée constante<sup>2</sup>, cette contrainte, homogène à une densité volumique d'énergie, est donc proportionnelle à  $u_0^2$ . En l'ab-

sence d'un modèle de transport sédimentaire<sup>3</sup>, nous postulons que la quantité de matériel localement charriée sur le fond du lit ne dépend que de cette dernière quantité<sup>4</sup>, homogène à une énergie massique. Soit  $\overline{u_0^2}(t)$  la moyenne spatiale du terme  $u_0^2(s, t)$  le long du chenal et  $q_s(s, t)$  le volume de sédiment charrié sur le fond du lit, nous postulons donc :

$$q_s = q_s(u_0^2(s, t))$$

Or les variations du transport longitudinal de sédiment peuvent être directement reliées au taux d'aggradation par :

$$b\dot{\phi} = -\partial_s q_s \quad (\text{G.1})$$

<sup>1</sup>De plus on montre que dans le modèle utilisé  $u_{\Psi}$  a une structure impaire par rapport à  $n$  qui conduit à une contribution totale nulle sur une section transverse du chenal.

<sup>2</sup>Cela revient à négliger les variations de densité dues à la charge sédimentaire. Cette approximation peut être justifiée par le volume important de fluide non chargé par rapport au volume de la charge sédimentaire.

<sup>3</sup>On pourra par exemple consulter Blondeaux et Seminara (1985) ou Johansson et Parker (1989a) pour une prise en compte du transport sédimentaire.

<sup>4</sup>En fait une partie non négligeable de cette énergie peut-être dissipée dans les frottements dus aux formes sédimentaires du lit du chenal, sans servir au transport de la charge de fond.

soit :

$$\Phi = -\frac{\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}}{b} \partial_s (u_0^2) \quad (\text{G.2})$$

Nous considérons  $\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}$  comme une donnée du problème que nous posons constante en utilisant  $\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}$ .

En pratique, si la ligne médiane du chenal est discrétisée sous la forme (cf. 4.1.3.4) :

$$\Gamma(t) \approx (M_i(t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

Pour  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ , en  $M_i$  on a :

$$\partial_s u_{0,i}^2(s) \approx \frac{u_{0,i+1}^2 - u_{0,i}^2(s)}{M_i M_{i+1}}$$

et on pose :

$$\Phi_i \approx -\frac{\partial_{u_0} q_s \Big|_{u_0^2}}{b} \partial_s u_{0,i}^2(s) \quad (\text{G.3})$$

Dans ce schéma récursif, le taux d'aggradation du point  $M_m$  situé à l'extrémité aval du chenal est une donnée du problème. Le système réagira donc aux variations du niveau de base suivant les valeurs données à  $\Phi_m$ . De plus, comme le taux

d'aggradation du point  $M_1$  situé à l'extrémité amont du chenal dépend également de la partie amont, non modélisée, de l'écoulement, nous pouvons également suivant le contexte choisir d'imposer certaines valeurs pour  $\Phi_1$ .

On aura par exemple suivant les cas de figure :

- niveau de base fixe ( $\Phi_m = 0$ ),
- profil longitudinal globalement à l'équilibre :
  - $\Phi_1 = \Phi_m = 0$  à l'équilibre,
  - $\Phi_1 = \Phi_m > 0$  dans un contexte aggradant,
  - $\Phi_1 = \Phi_m < 0$  dans un contexte d'incision.

Ce modèle simple ne prenant pas le transport sédimentaire en compte, nous formulons implicitement l'hypothèse d'un chenal pouvant infiniment se charger ou se décharger. Cependant, la capacité d'un écoulement à transporter une certaine charge sédimentaire constitue un facteur limitant tant pour l'érosion que pour le dépôt de matériel. Une première amélioration pourrait consister à ne pas considérer  $\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}$  mais  $\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}$  en prenant des valeurs faibles pour les valeurs minimales et maximales de  $u_0^2$  et considérer qu'il existe une valeur optimale de  $u_0^2$  pour laquelle  $\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}$  est maximal [Sklar et Dietrich (1998, 2001)].

## G.1.2 Vitesses de réajustement du profil longitudinal

L'algorithme décrit à la section 4.1.3.4 p. 59 repose sur l'hypothèse que chaque crue de migration contribue également au rétablissement du profil longitudinal du système. L'étude des rivières actuelles montre cependant dans certains cas que le réajustement du profil longitudinal est un phénomène rapide par rapport aux vitesses de migration latérale [Sun et al. (2001c)]. Un réajustement rapide peut être modélisé en

choisissant des valeurs fortes pour le paramètre  $\partial_{u_0^2} q_s \Big|_{u_0^2}$ , alors que des valeurs plus faibles favoriseront un rétablissement progressif. Le pas de temps choisi est également important. En combinant un pas de temps faible avec un rétablissement rapide du profil longitudinal, on atténuera l'influence de ce profil sur la migration latérale du chenal.

## G.1.3 Comparaisons avec les modèles classiques

La charge sédimentaire en rivière naturelle est classiquement considérée proportionnelle à la différence entre la contrainte de cisaillement exercée par l'écoulement  $\tau$  sur son encaissant et la contrainte de résistance de ce dernier  $\tau_c$ .

La relation utilisée est alors de la forme [Shields (1936); Meyer-Peter et Muller (1948); Gessler (1971); Smart (1984); Granjeon et Joseph (1999)] :

$$q_s = a(\tau - \tau_c)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{G.4})$$

Or, des mesures expérimentales montrent que la contrainte de cisaillement  $\tau$  est beaucoup plus importante que la résistance du fond  $\tau_c$  [Middleton et Southard (1978)]. En conséquence, ce dernier terme est fréquemment négligé, ce qui revient à écrire l'équation G.4 :

$$q_s = a\tau^{\frac{3}{2}} \quad (\text{G.5})$$

formulation utilisée entre autres par Begin et al. (1981) dans son modèle de développement de profil longitudinal de chenaux alluviaux.

En réécrivant l'équation G.1 à l'aide de la relation G.5, il vient :

$$\Phi = -\frac{3a}{2b}\tau^{\frac{1}{2}}\partial_s\tau \quad (\text{G.6})$$

or, au premier ordre de nos approximations, dans notre modèle, nous avons utilisé la formulation :

$$\tau = \rho C_f u_0^2$$

qui reportée dans l'équation G.6 donne :

$$\Phi = -\frac{3a(\rho C_f)^{\frac{3}{2}}}{2b}u_0\partial_s(u_0^2)$$

Une comparaison avec G.2 donne la valeur de notre paramètre  $\partial_{u_0^2}q_s|_{u_0^2}$  :

$$\partial_{u_0^2}q_s|_{u_0^2} = \frac{3a(\rho C_f)^{\frac{3}{2}}}{2}u_0 \quad (\text{G.7})$$

## G.2 Profil longitudinal et influence de la pente

Dans cette partie, nous appliquons le modèle théorique d'évolution de la ligne médiane modifiée en remplaçant la notion de profil d'équilibre introduite à la section 4.1.5 p. 225 par l'équation G.3 p. 226. La position de la ligne médiane étant connue par l'intermédiaire de la suite de points  $(M_i(t))_{i \in \{1, \dots, m\}}$ , et les paramètres phy-

siques  $C_f$ ,  $A$ ,  $A_{sec}$  et  $g$  étant choisis (cf. 4.1.1.4), la donnée du débit  $Q$  et de la largeur  $2b$  permet de calculer tous les autres paramètres. Nous ne modélisons pas la formation des dépôts et nous intéressons à la seule évolution spatiale de la ligne médiane du chenal.

### G.2.1 Situation d'équilibre

Dans cette partie nous considérons que le profil du chenal est globalement à l'équilibre c'est à dire que :

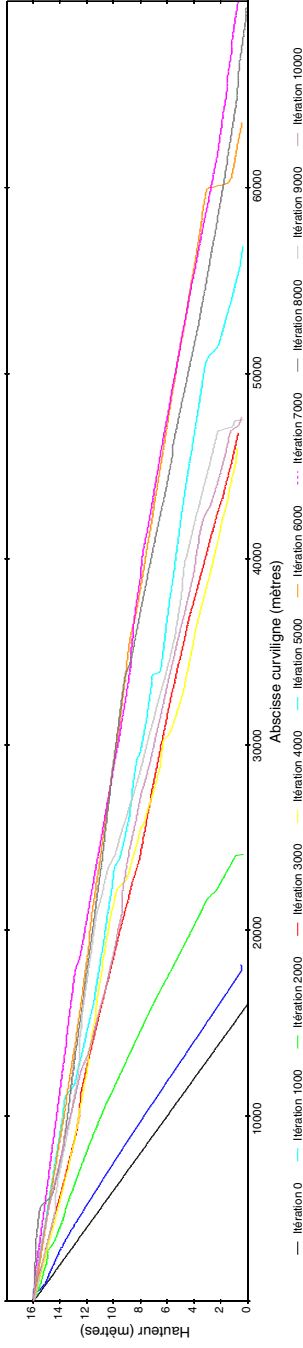
- d'une part nous maintenons constante la différence d'altitude entre ses extrémités aval et amont,
- de l'autre nous estimons qu'il n'y a ni aggradation ni incision, ces altitudes restent donc fixes.

Avec les notations de la section G.1, cela revient à poser :  $\Phi_1 = \Phi_m = 0$ .

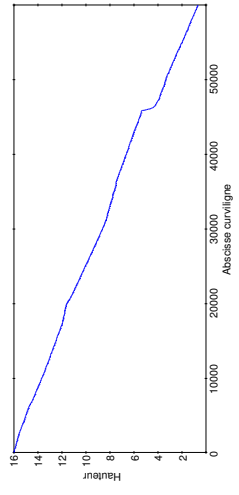
A partir d'une situation initiale rectiligne, le développement de méandres contribue à diminuer la pente du profil longitudinal de la rivière et

donc à accroître sa stabilité (cf. fig. G.1(a) p. 228). Ce résultat est confirmé par les études géomorphologiques de Schumm et al. (1987).

Une fois que les méandres ont atteint une certaine maturité, les recoupements par tangence contribuent à créer des zones avec un très fort gradient de pente longitudinale (cf. fig. G.1(b) p. G.1(b)). Ces zones vont être propices à l'érosion et à l'incision locale du chenal. Si cette incision n'est pas compensée par un apport de sédiment qui vient régulariser le profil local du chenal, elle se propage régressivement à l'ensemble du cours d'eau et conduit à l'abaissement global du cours d'eau (cf. § G.2.2p. 229).



(a) Développement du profil longitudinal du chenal



(b) Profil longitudinal du chenal développé à l'itération 20.000

FIG. G.1 – Profils longitudinaux du chenal

La variation brusque d'altitude correspond à un recouvrement par tangence récent. Elle est rapidement atténuée par le développement de nouveau méandre et le rétablissement du profil en long par développement des méandres, érosion en amont de la dénivellation et dépôt en aval. Pour les deux figures, les axes sont gradués en mètres. Le chenal évolue à partir des conditions initiales de la figure 4.8(a) p. 64. Le débit fluide imposé est de  $100 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . La pente initiale est de  $10^{-3}$ . Le chenal évolue à partir de la situation rectiligne légèrement perturbée de la figure 4.8(a). Avec le développement des méandres le profil longitudinal devient moins pentu.

## G.2.2 Niveau de base fixé

Dans cette partie nous considérons que l'altitude de la partie aval du chenal est fixe. Il peut par exemple s'agir de l'embouchure du cours d'eau dans une étendue d'eau dont le niveau est stable. Avec les notations de la section G.1, cela revient donc à poser :  $\phi_m = 0$ . En revanche, l'extrémité amont du cours d'eau est laissée libre et nous considérons qu'il n'y a pas d'apport de sédiment suffisant pour compenser l'incision régressive due aux variations locales de pente et en particulier aux recoupements par tangence suc-

cessifs. On observe alors (*cf.* fig. G.3 et G.4) un abaissement progressif du profil longitudinal du cours d'eau. On observe également un changement de morphologie des méandres avec l'abaissement du gradient de pente longitudinale du chenal.

On ne tient pas compte ici de la formation progressive d'une vallée incisée dont les murs contraindraient l'évolution latérale du chenal. On s'intéresse seulement à l'évolution du profil théorique.

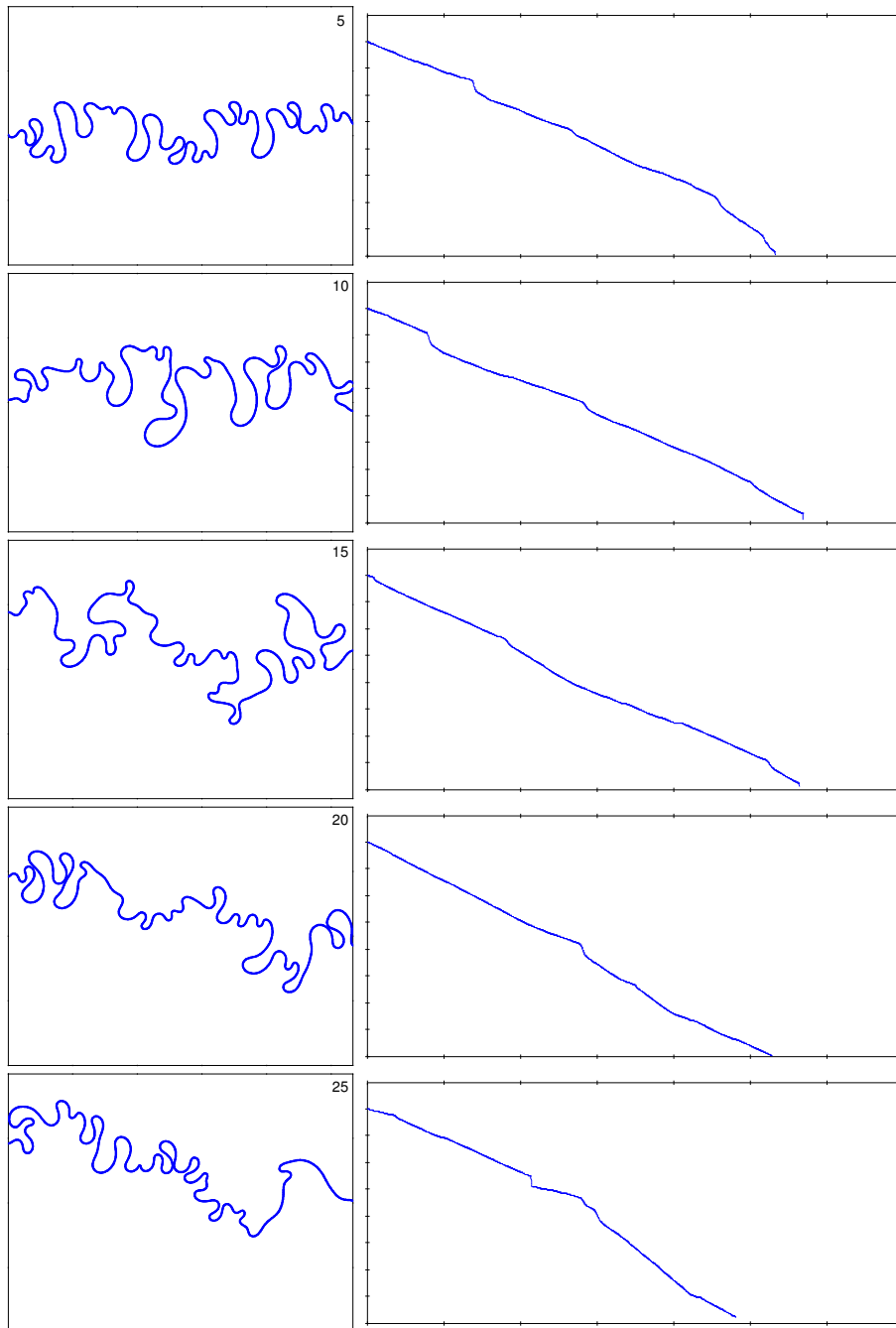


FIG. G.2 – Développement du profil longitudinal du chenal et géométrie plane correspondante. Le chenal évolue à partir des conditions initiales de la figure 4.8(b). Le débit fluide imposé est de  $100 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . La pente initiale est de  $10^{-3}$ . Pour la vue en plan de la géométrie du chenal, à gauche, l'axe des abscisses mesure  $16 \text{ km}$  et l'axe des ordonnées mesure  $12 \text{ km}$ . Pour le profil longitudinal, à droite, on impose une différence constante de  $16 \text{ m}$  entre les extrémités amont et aval. L'axe des abscisses mesure  $60 \text{ km}$ . Les figures correspondent de haut en bas aux itérations 5000, 10000, 15000, 20000 et 25000. L'écoulement va de la gauche de la figure vers la droite.

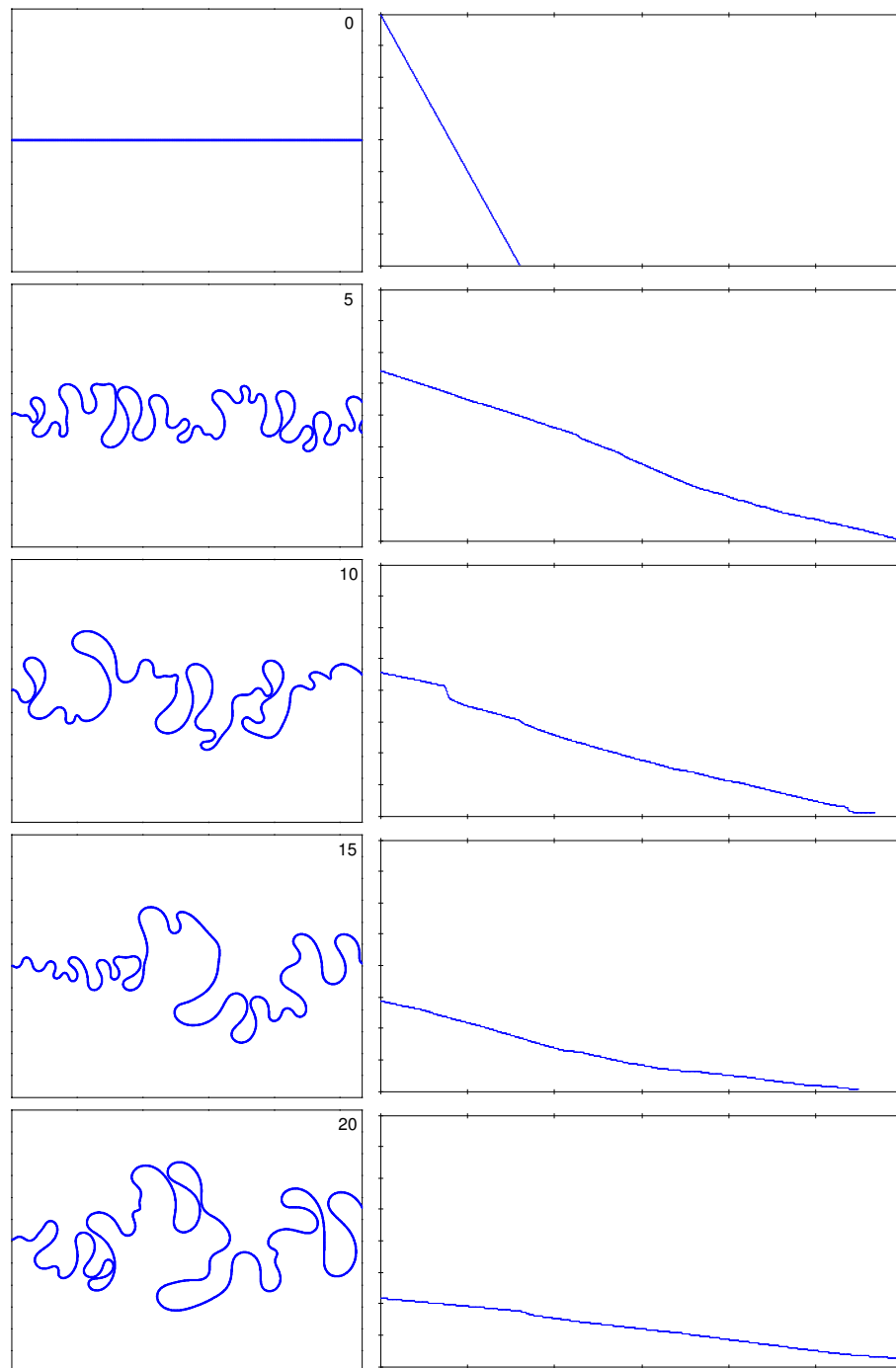


FIG. G.3 – Profil longitudinal développé lorsque la partie aval du chenal est fixée alors que l'évolution de la partie amont est laissée libre.  
 Les échelles, les conditions initiales et hydrauliques sont celles de la figure G.2. L'écoulement va de la gauche de la figure vers la droite. Le nombre indiqué en haut à droite de chaque vue aérienne correspond au nombre de milliers d'itérations.

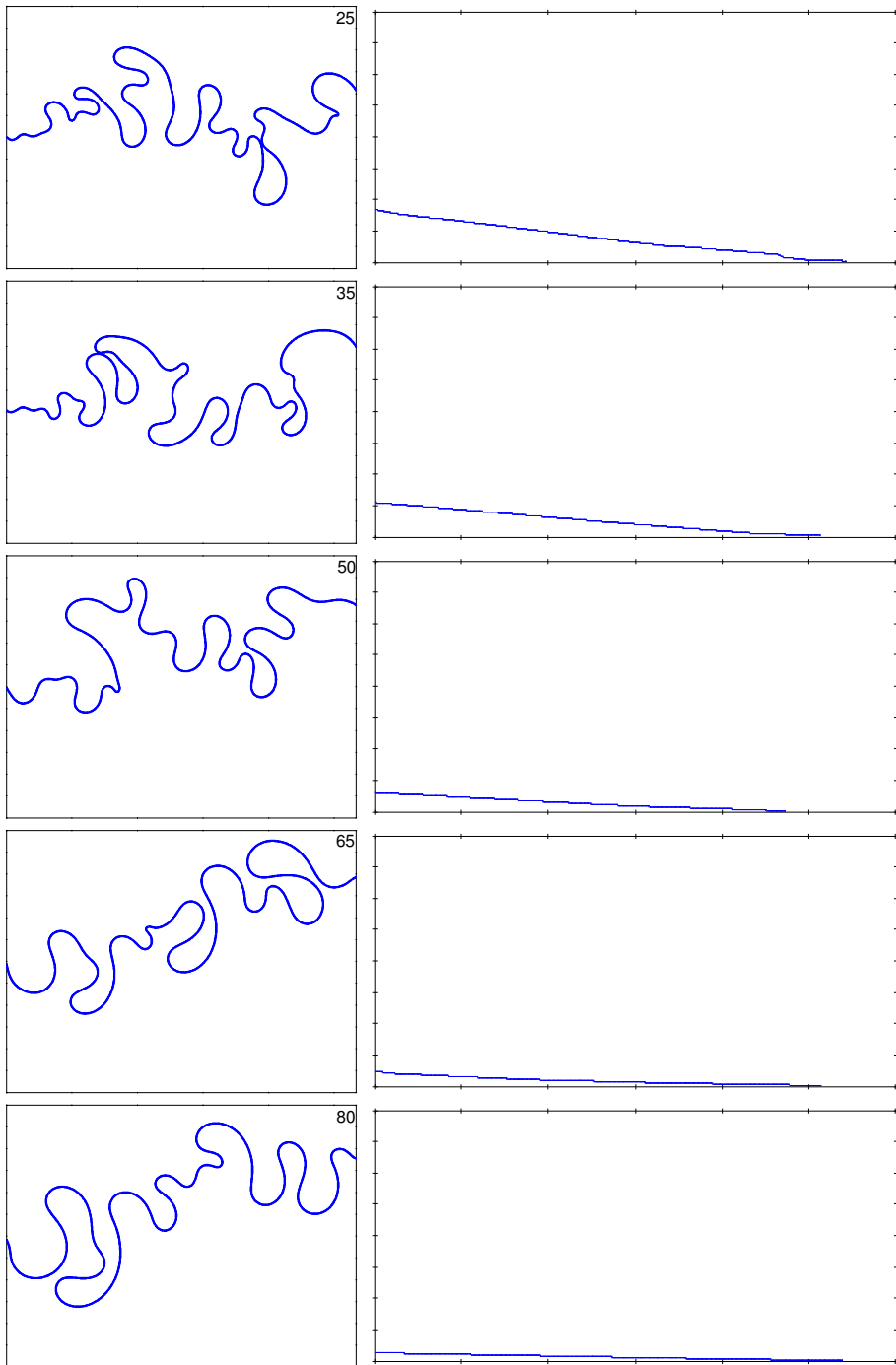


FIG. G.4 – Suite de la figure G.3.

On notera l'évolution de la morphologie des méandres avec l'aplanissement du profil longitudinal. On pourra comparer avec la figure G.2 construite à partir du même état initial.

## Annexe H

# Inférence des paramètres hydrauliques

### H.1 Conditions hydrauliques passées

L'inférence des paramètres hydrauliques à partir des dépôts fluviaux présents dans les séries sédimentaires passées peut parfois être très ardue. La hauteur de corps chenalisés mesurée localement sur une barre sableuse, ou sur un remplissage argileux, correspond rarement à la profondeur moyenne dans le chenal lors de la crue qui a engendré ces corps [Bridge et Tye (2000)]. De plus, ces données peuvent elles-même provenir d'interprétations de sondage ou de carotages et sont donc sujettes à des erreurs. Enfin, des phénomènes de compaction peuvent se combiner à ces incertitudes initiales pour rendre toute restitution des conditions paléohydrauliques très difficile.

La largeur d'un corps chenalisé mesurée directement sur un affleurement peut sembler plus fiable que la donnée de sa hauteur. Cependant, les affleurements ne présentent pas toujours une extension latérale suffisante. De plus, on observe rarement une section transversale normale à la ligne médiane du chenal [Lorenz et al. (1985)]. De même, pour un travail sur des données de subsurface, on devra souvent se contenter de cor-

relations entre puits avec toutes les incertitudes qu'elles comportent.

Malgré ces obstacles, des données géométriques comme la largeur ou la hauteur d'un corps restent certainement plus facilement accessibles que les vitesses moyennes d'écoulement ou la pente des chenaux lors de la formation d'un corps. On pourra éventuellement utiliser la mesure de figures sédimentaires sur le fond du chenal mais il est encore extrêmement difficile de relier la vitesse ainsi obtenue, correspondant à une vitesse d'écoulement sur le lit, et la vitesse moyenne de l'écoulement.

Dans le modèle décrit précédemment nous connaissons à tout instant la position de la ligne médiane du chenal et par conséquent sa pente longitudinale. Dans une optique opérationnelle il nous semble alors intéressant d'essayer d'inférer les paramètres hydrauliques comme la vitesse longitudinale moyenne de l'écoulement  $U_0$  et le débit  $Q$  en fonction de la largeur et de la profondeur moyenne du chenal, grandeurs géométriques plus accessibles à partir des données géologiques classiques.

## H.2 Largeur et profondeur moyennes imposées

La largeur  $2b$  est fixée, nous cherchons un débit tel que la profondeur moyenne du chenal soit  $H_0$ . Nous procédons par dichotomie. La valeur d'une grandeur est indexée en exposant avec le numéro de l'étape de la dichotomie.

Nous donnons au débit une valeur initiale faible notée  $Q^0$ . La vitesse moyenne d'écoulement en amont du tronçon est considérée égale à :

$$u_{0,1}^0 = \frac{Q^0}{2bH_0}$$

En partant de l'étape  $j = 0$  :

1. L'équation 4.7 p. 55 est résolue numériquement pour déterminer quelle est la valeur de  $(u_{0,i}^j)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  en chaque point de la ligne médiane du chenal.
2. On obtient alors la valeur de la profondeur moyenne sur chaque section transverse  $(h_{0,i}^j)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ .
3. On estime  $U^j$  et  $H^j$  moyennes expérimentales respectives de  $(u_{0,i}^j)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  et  $(h_{0,i}^j)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ .
4. On pose :
  - $Q^{j+1} = Q^j + \Delta Q$  avec  $\Delta Q > 0$

$$- u_0^{j+1} = U^j$$

5. On effectue :  $j \rightarrow j + 1$

Si on a pris  $Q^0$  suffisamment faible on aura  $H^0 < H_0$ . On répète alors les étapes 1 à 5 jusqu'à trouver un  $j$  tel que  $H^j > H_0$ . On pose alors  $Q_{min} = Q^{j-1}$ ,  $Q_{max} = Q^j$  et on remplace l'étape 4 par l'étape :

4-bis. On effectue :

- Si  $H^j > H_0$ , on pose :  $Q_{max} = Q^j$
- Si  $H^j < H_0$ , on pose :  $Q_{min} = Q^j$
- On pose :  $Q^{j+1} = \frac{1}{2}(Q_{min} + Q_{max})$
- On pose :  $u_0^{j+1} = U^j$

Et on répète les étapes 1 à 5 jusqu'à trouver un  $j$  tel que  $|H^j - H_0| < \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  choisi auparavant et déterminant la précision désirée.

En pratique, une dizaine d'itérations est suffisante pour trouver une valeur de  $H$  exacte au décimètre près, et une vingtaine pour obtenir une valeur exacte au centimètre près. La vitesse de convergence est légèrement influencée par les valeurs initiales de  $Q_0$  choisies. Il existe une correspondance bi-univoque croissante entre le débit  $Q$  et la profondeur moyenne du chenal pour une configuration spatiale donnée. Cette correspondance assure la convergence de l'algorithme précédent.

### H.2.1 Cas 1 : profondeur moyenne 2m - largeur 80m

On considère le chenal correspondant à l'itération 20000 de la figure 4.11(a) p. 67. La convergence est rapide et donne un débit de  $180 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  pour une vitesse moyenne de l'écoulement de  $1,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (cf. fig. H.1 p. 235). Pour un tel débit l'équation de régression de Carlston (1965) reliant largeur du chenal et débit de crue moyen (cf. § H.3 p. 240) donne une largeur de l'ordre de  $75 \text{ m}$  en accord avec nos choix.

En étudiant les écarts relatifs à leurs valeurs moyennes respectives de la profondeur du chenal et de la vitesse moyenne de l'écoulement, au

premier ordre de nos approximations, on observe un écart de 10% pour ces deux grandeurs. Si on veut obtenir une valeur exacte de la profondeur du chenal en un point donné, on peut utiliser la procédure décrite précédemment en utilisant  $h_{0,i}$  la profondeur désirée au point  $M_i$  de  $\Gamma$  en lieu et place de  $H_0$ . Une régression aux moindres carrés montre une légère décroissance de la profondeur le long du chenal et une légère accélération de l'écoulement (cf. fig. H.2 p. 235). La variation importante observée au niveau de l'abscisse curviligne 50000 est due à une irrégularité locale du profil en long (cf. fig. G.1(b) p. 228).

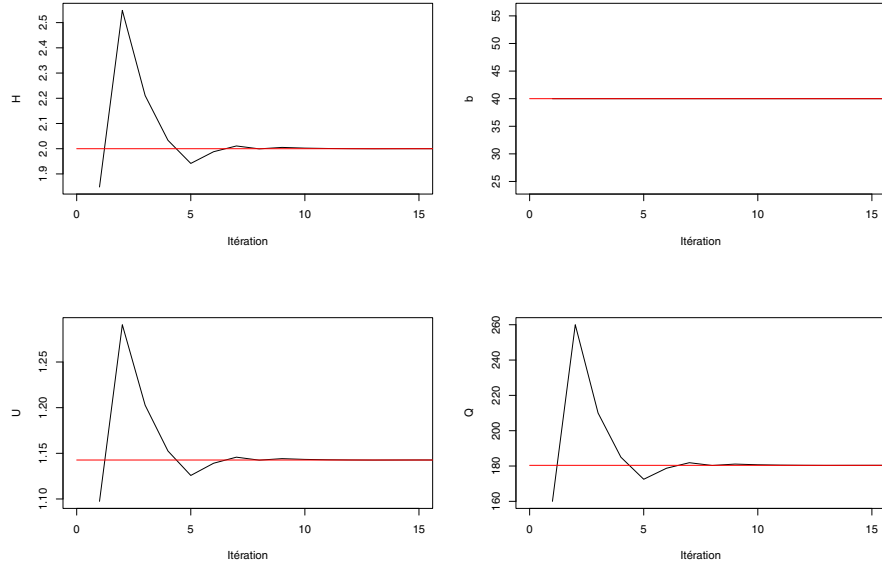


FIG. H.1 – Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 2 m et une demi-largeur fixée à 40 m  
La vitesse moyenne atteinte est de  $1,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le débit s'établit à  $180 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

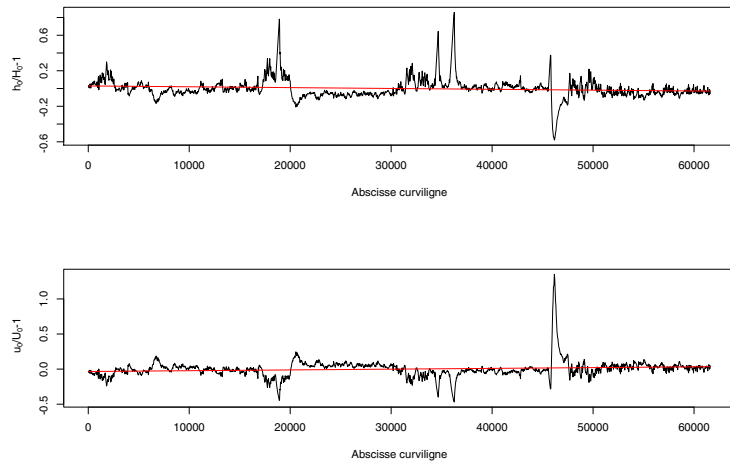


FIG. H.2 – Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en  $\Psi$  par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal  
Les écart-types sont de 11,72% pour la profondeur et de 12,59% pour la vitesse de l'écoulement. Les fortes variations sont dues aux irrégularités du profil longitudinal (*cf.* fig. G.1(b) p. 228). Les droites rouges sont des droites de régressions au moindres carrés.

## H.2.2 Cas 2 : profondeur moyenne 3m - largeur 80m

On considère le même profil que pour la section précédente. La convergence est rapide est donne un débit de  $333 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  pour une vitesse moyenne de l'écoulement de  $1,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (*cf.* fig. H.3 p. 237). Pour un tel débit l'équation de régression de Carlston (1965) donne une largeur de

l'ordre de  $100\text{m}$ , supérieure à la largeur imposée. Cette différence est due à une surestimation de la profondeur fixée. Une régression aux moindres carrés montre à nouveau une légère décroissance de la profondeur le long du chenal et une légère accélération de l'écoulement (*cf.* fig. H.4 p. 237).

## H.2.3 Cas 3 : profondeur moyenne 3m - largeur 160m

On considère à nouveau le même profil que pour les sections précédentes. La convergence est rapide est donne un débit de  $668 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  pour une vitesse moyenne de l'écoulement de  $1,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (*cf.* fig. H.5 p. 238). On remarque que le doublement de la largeur par rapport à la section précédente n'affecte que très peu les valeurs de la vitesse de l'écoulement. En conséquence, la pro-

fondeur demeurant la même, le débit est doublé. Pour ce jeu de paramètres, l'équation de régression de Carlston (1965) donne une largeur de l'ordre de  $140 \text{ m}$ , inférieure à la largeur imposée. Une régression aux moindres carrés montre toujours une légère décroissance de la profondeur le long du chenal et une légère accélération de l'écoulement (*cf.* fig.H.10 p. 241).

## H.2.4 Cas 4 : profondeur moyenne 3m - largeur 160m

On considère la même géométrie qu'à la section précédente mais que l'on impose à un tracé rectiligne légèrement perturbé de pente longitudinale quasiment constante correspondant à l'état initial du chenal sur la figure 4.11(a) p. 67. La convergence est rapide est donne un débit de  $1,37.10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  pour une vitesse moyenne de l'écoulement de  $2,87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (*cf.* fig.H.5 p. 238).

Cette valeur forte du débit peut être expliquée par le fait que la profondeur d'un écoulement rectiligne chenalisé diminue rapidement le long du chenal au fur est à mesure que sa vitesse augmente. En conséquence une profondeur moyenne de  $3 \text{ m}$  ne peut être obtenue qu'en imposant un débit important.

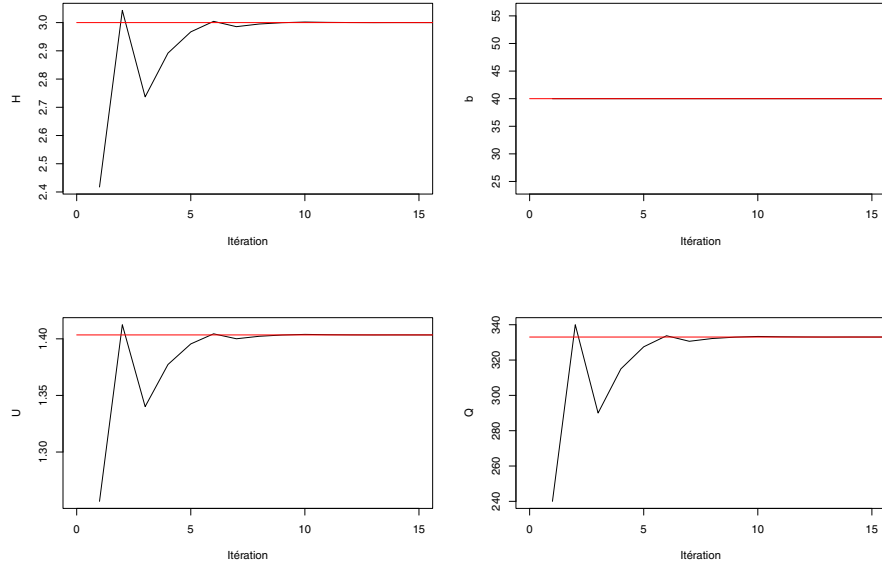


FIG. H.3 – Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 3 m et une demi-largeur fixée à 40 m  
La vitesse moyenne atteinte est de  $1,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le débit s'établit à  $333 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

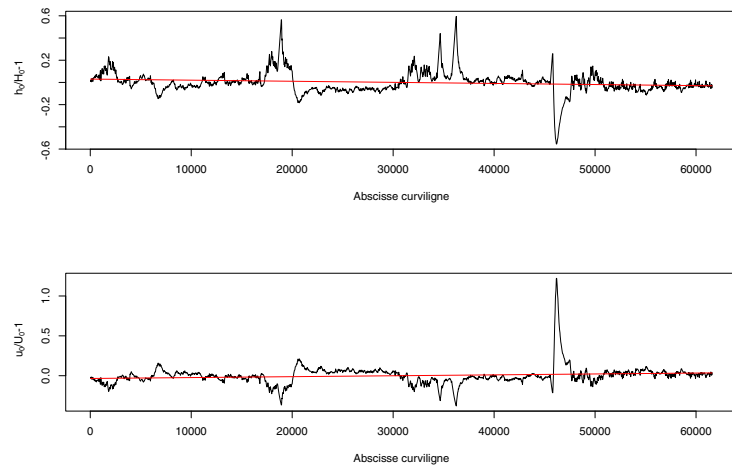


FIG. H.4 – Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en  $\Psi$  par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal  
Les écart-types sont de 10,46% pour la profondeur et de 11,94% pour la vitesse de l'écoulement. Les fortes variations sont dues aux irrégularités du profil longitudinal (*cf.* fig. G.1(b) p. 228). Les droites rouges sont des droites de régressions au moindres carrés.

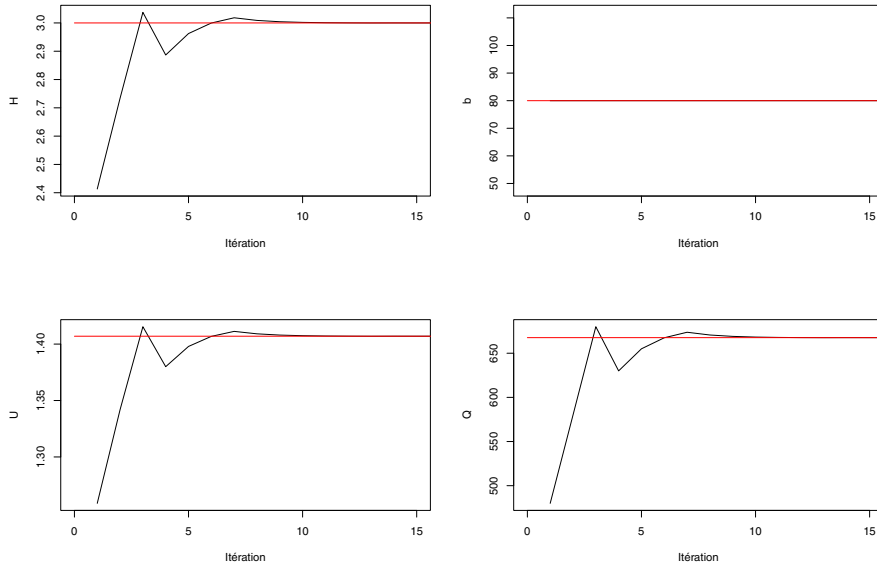


FIG. H.5 – Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 3 m et une demi-largeur fixée à 80 m. La vitesse moyenne atteinte est de  $1,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le débit s'établit à  $668 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

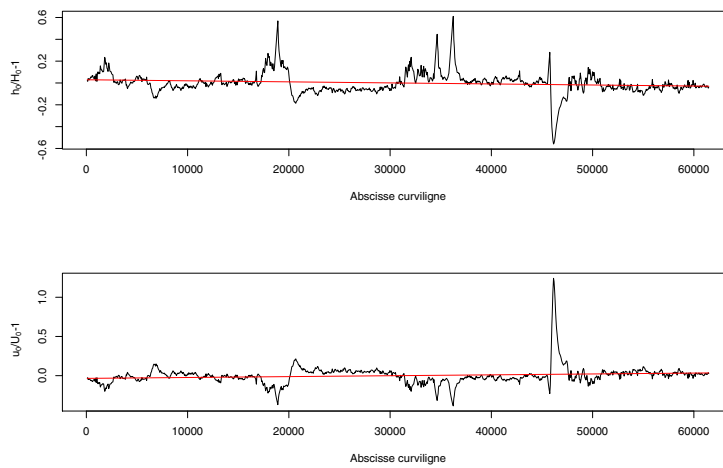


FIG. H.6 – Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en  $\Psi$  par rapport à leur moyenne spatiale le long du canal. Les écart-types sont de 10,41% pour la profondeur et de 10,20% pour la vitesse de l'écoulement. Les fortes variations sont dues aux irrégularités du profil longitudinal (cf. fig. G.1(b) p. 228). Les droites rouges sont des droites de régressions au moindres carrés.

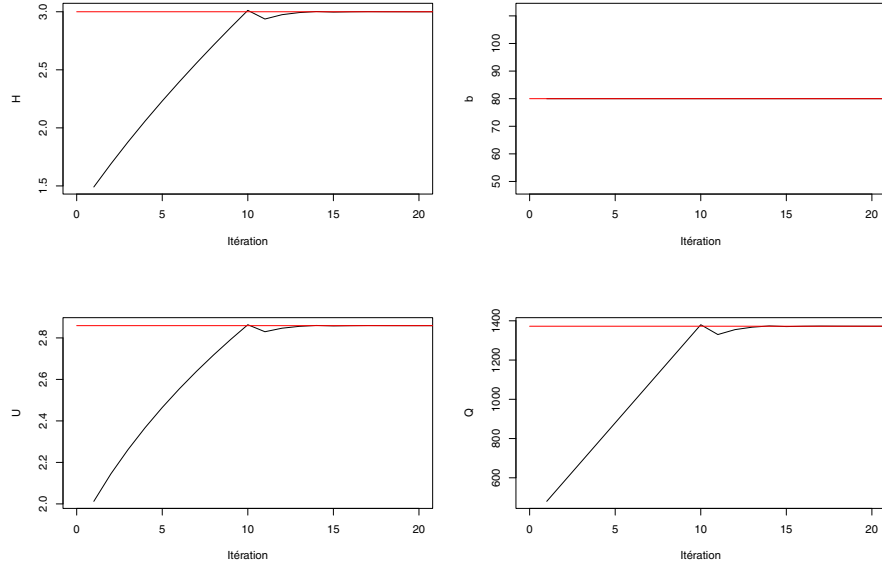


FIG. H.7 – Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée à 3 m et une demi-largeur fixée à 80 m. La vitesse moyenne atteinte est de  $2,87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le débit s'établit à  $1,37 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

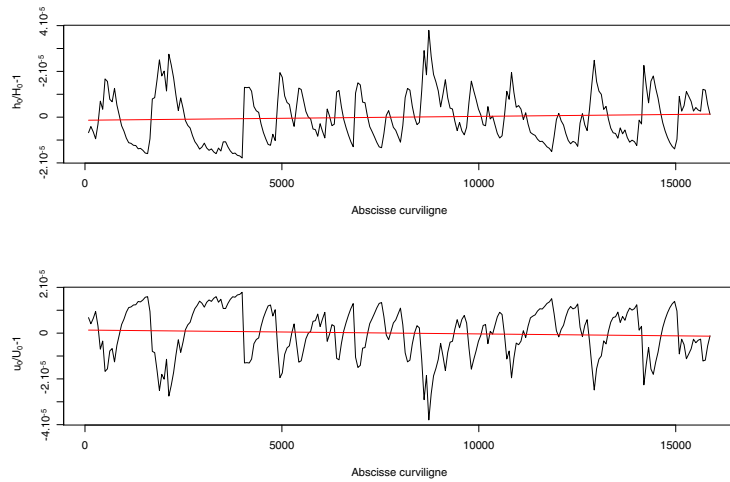


FIG. H.8 – Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en  $\Psi$  par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal. Les écart-types sont de  $1,07 \cdot 10^{-5}$  pour la profondeur et pour la vitesse de l'écoulement. Les variations observées sont dues aux perturbations introduites sur le tracé initial. Les droites rouges sont des droites de régressions au moindres carrés.

### H.3 Profondeur moyenne imposée

Lorsque seule la profondeur moyenne de l'écoulement est supposée connue on utilise l'algorithme de dichotomie décrit à la section H.2 en calculant pour chaque nouvelle valeur du débit une largeur moyenne à partir de l'équation de régression proposée par Carlston (1965). Cette équation relie la largeur du chenal et le débit de crue moyen et s'écrit :

$$2b^j = 7 \cdot (Q^j)^{0,46}$$

D'autres relations obtenues dans des contextes spécifiques, selon la nature des berges, leur végétation ou la charge sédimentaire de la rivière,

peuvent être obtenue dans la littérature [Knigh-ton (1998)].

On considère à nouveau le chenal correspondant à l'itération 20000 de la figure 4.11(a) p. 67 pour lequel on impose une profondeur moyenne de 3 m. La convergence est rapide et donne un débit de  $520 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  pour une vitesse moyenne de l'écoulement de  $1,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La largeur du chenal est alors de 124 m (*cf.* fig. H.9 p. 241). Comme précédemment, on observe que la vitesse de l'écoulement, passé un certain débit, est peu affectée par les variations de géométrie du chenal.

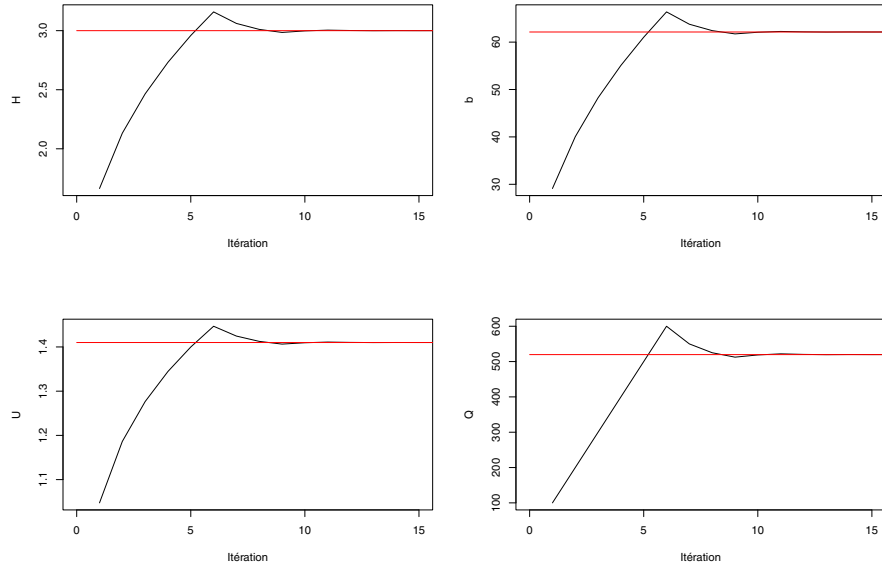


FIG. H.9 – Convergence des paramètres du modèle pour une profondeur moyenne fixée de 3 m. La demi-largeur atteinte est de 62,1 m. La vitesse moyenne atteinte est de  $1,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le débit s'établit à  $520 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

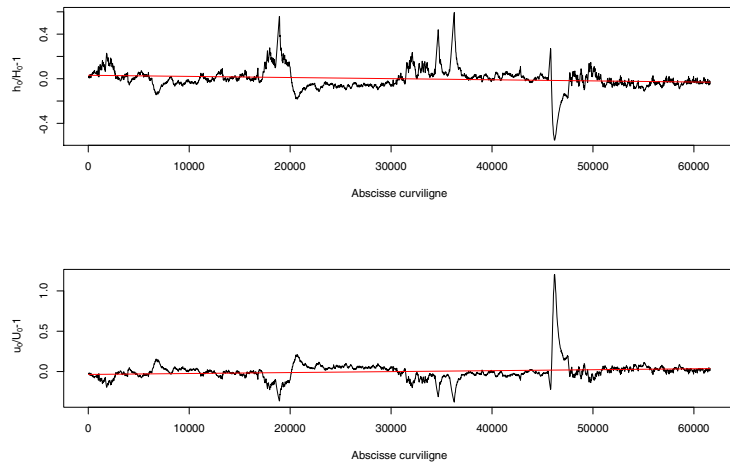


FIG. H.10 – Variation de la profondeur et de la vitesse de l'écoulement à l'ordre zéro en  $\Psi$  par rapport à leur moyenne spatiale le long du chenal. Les écart-types sont de 10,22% pour la profondeur et de 14,49% pour la vitesse de l'écoulement. Les fortes variations sont dues aux irrégularités du profil longitudinal (cf. fig. G.1(b) p. 228). Les droites rouges sont des droites de régressions au moindres carrés.

# Index

- écoulement graduellement varié, 19
- écoulement laminaire, 20
- écoulement torrentiel, 20
- écoulement turbulent, 20
  
- accrétion, 30
- accrétion latérale, 19
- aggradation, 30
- aggradation verticale, 19, 59
- allocyclique, 39
- autocyclique, 39
- avulsion, 29
  
- barre de convexité, 31, 72
- barre de méandre, 31, 72
- bedform shear stress, 22
- bouchons d'argile, 36
  
- ceinture de chenaux, 16, 25, 29
- ceinture de méandres, 16, 25
- ceinture de méandres, 16
- chute-cutoff, 25
- contrôle allocyclique, 57
- contrôle autocyclique, 57
- cours d'eau libres, 16
  
- débit à pleins bords, 15
- débit dominant, 15
  
- espace d'accommodation, 36
- espace disponible, 60
  
- fluide Newtonien, 159
- force du courant, 22
- force tractrice, 22
  
- grain shear stress, 22
  
- ligne médiane, 145
- ligne médiane, 16
- lit fluvial, 15, 16
- lit majeur, 15
- lit mineur, 15
- lit moyen, 15
  
- migration latérale, 58
- mud-plugs, 36
  
- nombre de Froude, 20
- nombre de Reynolds, 19
  
- oxbow-lake, 25
  
- plaine alluviale, 15
- point-bar, 31
- profil d'équilibre, 60
  
- régime fluvial, 20
- recoupement, 25
- recoupements par tangence, 61
- ripisylve, 15, 56
  
- série partielle des débits, 16
- sinuosité, 16
- suspension graduée, 21
- suspension uniforme, 21
  
- talweg, 16
- taux d'ajustement, 61
- taux de migration, 58
- terasse, 15
- thalweg, 16
  
- vitesse de migration, 58

# Bibliographie

- Alexander, J. et Leeder, M. (1987). *Recent Developments in Fluvial Sedimentology*, chapter Active tectonic control on alluvial architecture, pages 243–252. Number 39 in Society for Sedimentary Geology Special Publication. Society for Sedimentary Geology.
- Allen, J. (1965). A review of the origin and characteristics of recent alluvial sediments. *Sedimentology*, 5 :89–191.
- Allen, J. (1985). *Principles of Physical Sedimentology*. George Allen & Unwin.
- Anderson, M. (1997). *Subsurface flow and transport; a stochastic approach*, volume 5 of *International Hydrology*, chapter Characterization of geological heterogeneity, pages 23–43. Cambridge University Press.
- Armstrong, M., Galli, A., Le Loch, G., Geffroy, F., et Eschard, R. (2003). *Plurigaussian Simulations in Geosciences*. Springer Verlag.
- Assani, A. (1997). *Recherche d'impacts d'une retenue sur le comportement d'une rivière ardennaise (hydrologie, sédimentologie, morphologie, végétation). Cas du barrage de Butchenwag sur la Warche (Belgique)*. PhD thesis, Université de Liège.
- Atkinson, C. (1986). *Palosols : their recognition and interpretation*, chapter Tectonic control on sedimentation as revealed by an ancient catena in the Capella Formation (Eocene) of northern Spain, pages 139–179. Blackwell Science.
- Babonneau, N. (2002). *Mode de fonctionnement d'un chenal turbiditique méandriforme : Cas du Système Turbiditique Actuel du Zaïre*. PhD thesis, Université de Bordeaux I.
- Balayn, P. (2001). *Contribution à la modélisation numérique de l'évolution morphologique des cours d'eau aménagés lors de crues*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I.
- Begin, Z., Meyer, D., et Schumm, S. (1981). Development of longitudinal profiles of alluvial channels in response to base-level lowering. *Earth Surface Processes and Landforms*, 6 :49–68.
- Benito Garcia Morales, M., Beucher, H., Geffroy, F., et Doligez, B. (2003). Object based simulations in fluvial environment at the reservoir scale and at a local scale. In *AAPG Annual Meeting 2003 - Salt Lake City*.
- Bentham, P., Burbank, D., et Puigdefabregas, C. (1992). Temporal and spatial controls on the alluvial architecture of an axial drainage system : late eocene escanilla formation, southern pyrenean foreland basin, spain. *Basin Research*, 4 :335–352.
- Bentham, P., Talling, P., et Burbank, D. (1993). *Braided Rivers*, volume 75 of *Geological Society of London Special Publication*, chapter Braided stream and floodplain deposition in a rapidly aggrading basin : the Escanilla Formation, Spanish Pyrenees, pages 177–194. Geological Society of London.

- Bialkowski, A. (2003). *Stratigraphie isotopique (carbone et oxygène) des séries continentales d'un bassin d'avant-pays (Oligo-Miocène du bassin de Digne-Valensole). Paléoenvironnements et séquences de dépôt*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.
- Blackbourn, G. (1984). Sedimentary facies variation and hydrocarbon reservoirs in continental settings - a predictive model. *7* :67–76.
- Blondeaux, P. et Seminara, G. (1985). A unified bar-bend theory of river meanders. *Journal of Fluid Mechanics*, 157 :449–470.
- Bravard, J.-P. et Petit, F. (1997). *Les cours d'eau. Dynamique du système fluvial*. Armand-Colin, Paris.
- Brice, J. (1973). chapter Meandering pattern of White River in Indiana : an analysis, pages 178–200. ?
- Brice, J. (1974). Evolution of meander loops. *Geological Society of America Bulletin*, 85 :581–586.
- Brice, J. (1984). *Proceedings of the Conference - Rivers'83*, chapter Planform properties of meandering rivers, pages 1–15. American Society of Civil Engineers.
- Brice, J. et Dominic, D. (1984). Bedload grain velocities and sediment transport rates. *Water Resource Research*, 20(4) :476–490.
- Bridge, J. (1993). *Braided rivers*, chapter The interaction between geometry, water flow, sediment transport and deposition in braided rivers, pages 13–71. Number 75. Geological Society of London Special Publication.
- Bridge, J. (2003). *Rivers and Floodplains*. Blackwell Publishing.
- Bridge, J. et Jarvis, J. (1976). Flow and sedimentary processes in the meandering river south esk, glen glova, scotland. *Earth Surface Processes*, 1 :303–336.
- Bridge, J. et Leeder, M. (1979). A simulation model of alluvial stratigraphy. *Sedimentology*, 26(5) :617–644.
- Bridge, J. et Mackey, S. (1993). A revised alluvial stratigraphy model. In Marzo, M. et Puidfabregas, C., editors, *Alluvial Sedimentation*, volume 17 of *International Association of Sedimentologists Special Publication*, pages 319–337. International Association of Sedimentologists.
- Bridge, J. et Tye, R. (2000). Interpreting the dimensions of ancient fluvial channel bars, and channel belts from wireline-logs and cores. *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, 84(8) :1205–1228.
- Caers, J. (2000). Geostatistical quantification of geological information for a fluvial-type north sea reservoir. In *American Association of Petroleum Geologists 2000 annual meeting*.
- Callander, R. (1969). Instability and river channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 36(3) :465–480.
- Cant, D. (1982). *Sandstone depositional environments*, volume 31 of *American Association of Petroleum Geologists Memoirs*, chapter Fluvial facies models, pages 115–137. American Association of Petroleum Geologists.
- Carlston, C. (1965). The relation of free meander geometry to stream discharge and its geomorphic implications. *American Journal of Science*, 263 :864–885.
- Carson, M. et Lapointe, M. (1983). The inherent asymetry of river meander planform. *Journal of Geology*, 91(1) :41–55.

- Catuneanu, O. (2002). Sequence stratigraphy of clastic systems : concepts, merits, and pitfalls. *Journal of African Earth Sciences*, 35 :1–43.
- Chang, H. (1984). Analysis of river meanders. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(1) :37–50.
- Chang, H. (1988). *International conference on River regime*, chapter On the cause of river meandering, pages 83–93. John Wiley & Sons.
- Chessa, A. (1995). *Conditional Simulation of Spatial Stochastic Models for Reservoir Heterogeneity*. PhD thesis, Delft University of Technology.
- Chiles, J. et Delfiner, P. (1999). *Geostatistics : modeling spatial uncertainty*. Wiley.
- Chow, V. (1988). *Applied Hydrology*. Civil Engineering. McGraw-Hill.
- Clemetsen, R., Hurst, A., Knarud, R., et Omre, K. (1990). *North Sea oil and gas reservoirs ; II, Proceedings of the North Sea oil and gas reservoirs conference*, chapter A computer program for evaluation of fluvial reservoirs, pages 373–385. Graham & Trotman, London, United Kingdom (GBR).
- Cojan, I. et Renard, M. (1997). *Sédimentologie*. Dunod.
- Collinson, J. (1996). *Sedimentary Environments*, chapter Alluvial Sediments. Blackwell Science. 3rd edition.
- Corrigan, T. (1988). Factors controlling successful reserve prediction : a cautionary tale from the uk north sea. In *2nd Conference on Reservoir Management in Field Development and Production*. Norwegian Petroleum Society.
- Cowan, E. (1991). *The three-dimensional facies architecture terrigenous clastic sediments, and its implications for hydrocarbon discovery and recovery*, chapter The large scale architecture of the fluvial Westwater Canyon Member, Morrisson Formation (Jurassic) San Juan Basin, New Mexico, pages 80–93. Number 3 in SEPMS. Society for Sedimentary Geology.
- Cross, T. et Lessenger, M. (1998). *Sequence Stratigraphy - Concepts and Applications*, chapter Sediment volume partitioning : rationale for stratigraphic model evaluation and high-resolution stratigraphic correlation., pages 171–195. Norwegian Petroleum Society.
- Danielsson, P. (1980). Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14 :227–248.
- Davies, D. et Williams, B. (1991). Reservoir models for meandering and straight fluvial channels : examples from the travis peak formation, east texas. *Gulf Coast Association of Geological Societies Transactions*, 41 :152–174.
- Davies, D., Williams, B., et Vessell, R. (1993). *Characterization of fluvial and aeolian reservoirs*, volume 73 of *Geological Society of London Special Publication*, chapter Dimensions and quality of reservoirs originating in low and high sinuosity channel systems, Lower Cretaceous Travis Peak Formation, Eastern Texas, USA, pages 95–121. Geological Society of London.
- de Graciansky, P. (1992). *Leçons de Géologie*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- De Vriend, H. (1981). Velocity redistribution in curved rectangular channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 107 :423–437.
- Deutch, C. et Cockerham, P. (1994). Practical considerations in the application of simulated annealing to stochastic simulation. *Mathematical Geology*, 26(1) :67–82.

- Deutch, C. et L., W. (1996). Hierarchical object-based stochastic modeling of fluvial reservoirs. *Mathematical Geology*, 28 :857–880.
- Diaz-Molina, M. (1993). Geometry and lateral accretion patterns in meander loops : examples from the upper oligocene-lower miocene, loranca basin, spain. In Marzo, M. et Puidefabregas, C., editors, *Alluvial Sedimentation*, volume 17 of *International Association of Sedimentologists Special Publication*, pages 115–131. International Association of Sedimentologists.
- Diaz-Molina, M., Arribas, J., Gomez, J., et Tortosa, A. (1995). Geological modelling of a reservoir analogue : Cenozoic meander belts, loranca basin, spain. *Petroleum Geoscience*, 1(1) :43–48.
- Doligez, B., Granjeon, D., Joseph, P., Eschard, R., et Beucher, H. (1999). *Numerical experiments in stratigraphy; recent advances in stratigraphic and sedimentologic computer simulations*, volume 62 of *Society for Sedimentary Geology Special Publication*, chapter How can stratigraphic modeling help constrain geostatistical reservoir simulations ?, pages 239–244. Society for Sedimentary Geology.
- Dubrule, O. (1989). *Geostatistics; Proceedings of the Third international geostatistics congress*, volume 2, chapter A review of stochastic models for petroleum reservoirs, pages 493–506. Kluwer Acad. Publ.
- Dury, G. (1976). Discharge predictions, present and former, from channel dimensions. *Journal of Hydrology*, 42 :281–300.
- Eaves, E. (1976). *North American oil and gas fields*, volume 24 of *American Association of Petroleum Geologists Memoirs*, chapter Citronelle oil field, Mobile county, Alabama, pages 259–275. American Association of Petroleum Geologists.
- Einstein, H. et Shen, H. (1964). A study of meandering in straight alluvial channels. *Journal of Geophysical Research*, 69 :5239–5247.
- Engelund, F. (1970). Instability of erodible beds. *Journal of Fluid Mechanics*, 42(225-244).
- Engelund, F. (1974). Flow and bed topography in channel bends. *Journal of the Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, 100 :1631–1648.
- Engelund, F. et Skovgaard, O. (1973). On the origin of meandering and braiding in alluvial streams. *Journal of Fluid Mechanics*, 57(2) :289–302.
- Ethridge, F., Skelly, R., et Bristow, C. (1999). *Fluvial Sedimentology VI*, volume 28 of *International Association of Sedimentologists Special Publication*, chapter Avulsion and crevassing in the sandy, braided Niobrara River; complex response to base-level rise and aggradation, pages 171–191. International Association of Sedimentologists.
- Fahnestock, R. (1963). Morphology and hydrology of a glacial stream - white river, mount rainer, washington. Technical Report 422-A, United States Geological Survey.
- Ferguson, R. (1976). Distributed periodic model for river meanders. *Earth Surface Processes*, 1 :337–347.
- Friend, P. et Sinha, R. (1993). *Braided Rivers*, chapter Braiding and meandering parameters, pages 105–111. Number 75. GSLSP.
- Galay, V., Kellerhals, R., et Bray, D. (1973). Diversity of river types in canada. In *Fluvial processes and sedimentation : proceedings of the Hydrology Symposium, Edmonton, National Research Institute, Canada*, pages 217–250.

- Garrigues, J. (2001). *Elements d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens*.
- Gessler, L. (1971). Critical shear stress for sediment mixture. In *Congress Proceedings of the International Association of Hydraulic Research*, volume 14, pages 1–8.
- Gibling, M. et Rust, B. (1990). Ribbon sandstones in the pennsylvanian waddens cove formation, sydney basin, atlantic canada : the influence of siliceous duricrusts on channel-body geometries. *Sedimentology*, 37 :45–65.
- Graf, W. et Altinakar, M. (1996). *Hydraulique fluviale - Ecoulement non permanent et phénomènes de transport*, volume 16 of *Traité de Génie Civil*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- Granjeon, D. et Joseph, P. (1999). *Numerical experiments in stratigraphy; recent advances in stratigraphic and sedimentologic computer simulations*, volume 62 of *Society for Sedimentary Geology Special Publication*, chapter Concepts and applications of a 3-D multiple lithology, diffusive model in stratigraphic modeling, pages 197–210. Society for Sedimentary Geology.
- Gross, L. et Small, M. (1998). River and floodplain process simulation for subsurface characterization. *Water Resource Research*, 34(9) :2365–2376.
- Guccione, M. (1993). Grain-size distribution of overbank sediment and its use to locate channel positions. In Marzo, M. et Puidfabregas, C., editors, *Alluvial Sedimentation*, number 17 in International Association of Sedimentologists Special Publication, pages 185–194. International Association of Sedimentologists.
- Gupta, A. (1996). *Modern and ancient fluvial*, volume 119-129, chapter High magnitude floods and stream channel response. Blackwell Science.
- Guyon, E., Hulin, J., et Petit, L. (2001). *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences/CNRS Editions. Nouvelle édition revue et augmentée.
- Hartkamp-Bakker, C. (1991). Capillary oil entrapment in crossbedded sedimentary structures of fluvial sandstone reservoirs. *Society of Petroleum Engineers*, (22761).
- Heller, P. et Paola, C. (1996). Downstream changes in alluvial architecture : an exploration of controls on channel-stacking patterns. *Journal of Sedimentary Research*, 66(2) :297–306.
- Hickin, E. et Nanson, G. (1975). The character of channel migration on the beatton river, northeast british columbia, canada,. *Geological Society of America Bulletin*, 86 :487–494.
- Hjulsström, F. (1935). Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the river fyris. *Bulletin of the Geological Institute University of Uppsala*, 25 :221–527.
- Holbrook, J. et Schumm, S. (1999). Geomorphic and sedimentary response of rivers to tectonic deformation : a brief review and critique of a tool for recognizing subtle epeirogenic deformation in modern and ancient settings. *Tectonophysics*, (305) :287–306.
- Holden, L., Hauge, R., Skare, O., et Skorstad, A. (1998). Modeling of fluvial reservoirs with object models. *Mathematical Geology*, 30(5) :473–496.
- Hooke, R. (1975). Distribution of sediment transport and shear stress in a meander bend. *Journal of Geology*, 83 :543–565.
- Howard, A. (1984). Simulation model of meandering. In Elliot, C., editor, *River Meandering*, pages 952–963. American Society of Civil Engineers.

- Howard, A. (1992). *Lowland Floodplain Rivers : Geomorphological Perspectives*, chapter Modelling channel migration and floodplain sedimentation in meandering streams, pages 1–37. John Wiley & Sons.
- Howard, A. (1994). A detachment-limited model of drainage basin evolution. *Water Resource Research*, 30 :2261–2285.
- Howard, A. (1996). *Floodplain Processes*, chapter Modelling channel evolution and floodplain morphology, pages 15–62. John Wiley & Sons.
- Howard, A. et Hemberger, A. (1991). Multivariate characterization of meandering. *Geomorphology*, (4) :161–186.
- Ikeda, S., Parker, G., et Sawai, K. (1981). Bend theory of river meanders. part 1. linear development. *Journal of Fluid Mechanics*, 112 :363–377.
- Imran, J., Parker, G., et Pirmez, C. (1999). A nonlinear model of flow in meandering submarine and subaerial channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 400 :295–331.
- Johansson, H. et Parker, G. (1989a). *River Meandering*, chapter Linear theory of river meanders, pages 181–213. Water Resources Monograph. American Geophysical Union.
- Johansson, H. et Parker, G. (1989b). Secondary flow in a mildly sinuous channel. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(3) :289–308.
- Johansson, H. et Parker, G. (1989c). Velocity redistribution in meandering rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(8) :1019–1039.
- Jones, L. et Schumm, S. (1999). *Fluvial Sedimentology*, volume 28 of *International Association of Sedimentologists Special Publication*, chapter Causes of avulsion : an overview, pages 171–178. Blackwell Science.
- Kalinske, A. (1943). The role of turbulence in river hydraulics. *Bulletin of the University of Iowa*, (27) :266–279.
- Karszenberg, D., Tornqvist, T., et Bridge, J. (2001). Conditioning a process-based model of sedimentary architecture to well data. *Journal of Sedimentary Research*, 71(6) :868–879.
- Knighton, A. (1998). *Fluvial Form and Processes*, volume 1. Arnold.
- Knighton, A. et Nanson, G. (1993). Anastomosis and the continuum of channel pattern. *Earth Surface Processes and Landforms*, 18 :613–625.
- Kolterman, C. et Gorelick, S. (1996). Heterogeneity in sedimentary deposits : a review of structure-imitating, process-imitating, and descriptive approaches. *Water Resource Research*, 32 :2617–2658.
- Kraus, M. et Bown, T. (1993). Short-term sediment accumulation rates determined from eocene alluvial paleosols. *Geology*, 21 :743–746.
- Lancaster, S. (1998). *A nonlinear River Meandering Model and its Incorporation in as Landscape Evolution Model*. PhD thesis, Oregon State University.
- Langbein, W. et Leopold, L. (1966). River meanders. theory of minimum variance. Technical Report H422, United States Geological Survey. 15 pages.
- Lantuejoul, C. (2003). *Geostatistical simulation ; models and algorithms*. Springer-Verlag.

- Lawler, D., Thorne, C., et Hooke, J. (1997). *Applied fluvial geomorphology for river engineering and management*, chapter Bank erosion and instability, pages 137–172. John Wiley & Sons.
- Leeder, M. (1978). *Fluvial sedimentology*, volume 5, chapter A quantitative stratigraphic model for alluvium, with special reference to channel deposit density and interconnectedness, pages 587–596. Canadian Society of Petroleum Geologists.
- Leeder, M. et Alexander, J. (1987). The origin and tectonic significance of asymmetrical meander-belts. *Sedimentology*, 34 :217–226.
- Leeder, M., Mack, G., Peakall, J., et Salyards, S. (1996). First quantitative test of alluvial stratigraphic models ; southern rio grande rift, new mexico. *Gl*, 24(1) :87–90.
- Leopold, L. et Wolman, M. (1957). River channel patterns : Braided, meandering and straight. Technical Report 282-B, United States Geological Survey.
- Leopold, L. et Wolman, M. (1960). River meanders. *Geological Society of America Bulletin*, 71 :769–794.
- Leopold, L., Wolman, M., et Miller, J. (1964). *Fluvial processes in geomorphology*. Freeman and Company.
- Lorenz, J., Heinze, D., Clark, J., et Searls, C. (1985). Determination of widths of meander-belt sandstone reservoirs from vertical downhole data, mesaverde group, piceance creek basin, colorado. *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, 69(5) :710–721.
- L.Y., H. (2000). Gradual deformation and iterative calibration of gaussian-related stochastic models. *Mathematical Geology*, 32(1).
- Mack, G. et Leeder, M. (1998). Channel shifting of the rio grande, southern rio grande rift ; implications for alluvial stratigraphic models. *Journal of Sedimentary Research*, 117(3-4) :207–219.
- Mackey, S. et Bridge, J. (1995). Three-dimensional model of alluvial stratigraphy : theory and application. *Journal of Sedimentary Research*, B65(1) :7–31.
- Marr, J., Swenson, J., Paola, C., et Voller, V. (2000). A two-diffusion model of fluvial stratigraphy in closed depositional basins. *Basin Research*, 12(3-4) :381–398.
- Matheron, G. (1971). *La théorie des variables régionalisées*. Number 5 in Les cahiers du centre de morphologie mathématique de Fontainebleau. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Matheron, G. (1982). La destructuration des hautes teneurs et le krigeage des indicatrices. Technical Report CGMM N-761, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- McCarthy, E., Ellery, W., et Stanistreet, I. (1992). Avulsion mechanisms on the okavango fan, bostwana : the control of a fluvial system by vegetation. *Sedimentology*, 39 :779–793.
- Meyer-Peter, E. et Muller, R. (1948). Formulas for bed-load transport. In *Proceedings of the Third Meeting of the International Association of Hydraulic Research, Stockholm*, pages 39–64.
- Miall, A. (1977). A review of the braided river depositional environment. *Earth Science Review*, 13 :1–62.
- Miall, A. (1992). *Facies Models, Response to Sea Level Change*, chapter Alluvial Deposits, pages 119–142. Geological Association of Canada.
- Miall, A. (1996). *The geology of fluvial deposits*. Springer Verlag.

- Micheli, E. et Kirchner, J. (2002). Effects of wet meadow riparian vegetation on streambank erosion ; 1, remote sensing measurements of streambank migration and erodibility. *Earth Surface Processes and Landforms*, 27(6) :627–639.
- Middleton, G. et Southard, J. (1978). *Mechanics of sediment movement*, volume 3 of *SEPM Eastern Section Short Course*. Society for Sedimentary Geology.
- Mike, K. (1975). Utilization of the analysis of ancient river beds for the detection of holocene crustal movements. *Tectonophysics*, (29) :359–368.
- Mikes, D., Barzandji, O., Bruining, J., et Geel, C. (2001). Upscaling of flow units for reservoir flow incorporating small-scale heterogeneities. In *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition*.
- Milankovitch, M. (1920). *Théorie Mathématique des Phénomènes Produits par la Radiation Solaire*. Gauthier-Villars, Paris.
- Milankovitch, M. (1941). *Canon of Insolation and the Ice-Age Problem*, volume 132 of *Royal Serbian Academy Special Publications*. Royal Serbian Academy.
- Mohammadi, B. et Saïac, J.-H. (2003). *Pratique de la Simulation Numérique*. Dunod.
- Mollard, J. (1973). Airphoto interpretation of fluvial features. In *Fluvial processes and sedimentation : proceedings of the Hydrology Symposium, Edmonton, National Research Institute, Canada*, pages 341–380.
- Murray, A. et Paola, C. (1994). A cellular model of braided rivers. *Nature*, 371 :51–57.
- Nadon, G. (1998). Magnitude and timing of peat-to-coal compaction. *Geology*, 26(8) :727–730.
- Naish, C. et Sellin, R. (1996). *Coherent Flow Structures in Open Channels*, chapter Flow structure in a large-scale model of a doubly meandering compound channel, pages 631–654. Wiley.
- Nanson, G. et Knighton, A. (1996). Anabranching rivers : their cause, character and classification. *Earth Surface Processes and Landforms*, 21 :217–239.
- Nezu, I. et Rodi (1986). Open-channel flow measurements with a laser doppler anemometer. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(5) :335–355.
- Nicholas, A. et Walling, D. (1997). Modelling flood hydraulics and overbank deposition on river floodplains. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22 :59–77.
- North, C. (1996). *Advances in fluvial dynamics and stratigraphy*, chapter The prediction and modelling of subsurface fluvial stratigraphy, pages 395–408. Willey.
- Odgaard, A. (1981). Transverse bed slope in alluvial channel bends. *Journal of the Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, 107 :1677–1694.
- Odgaard, J. (1989a). River-meander model ; i, development. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(11) :1433–1450.
- Odgaard, J. (1989b). River-meander model ; ii, development applications. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(11) :1451–1464.
- Oliver, D. (2002). Conditioning channel meanders to well observations. *Mathematical Geology*, 34(2) :185–201.
- Paola, C. (2000). Quantitative models of sedimentary basin filling. *Sedimentology*, 47(Suppl. 1) :121–178.

- Parker, G. (1978). Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 1. the sand-silt river. *Journal of Fluid Mechanics*, 89 :109–125.
- Parker, G. (1998). River meanders in a tray. *Nature*, 395 :111–112.
- Parker, G. et Johanesson, H. (1989). *River Meandering*, chapter Observations on several recent theories of resonance and overdeepening in meandering channels, pages 379–415. Water Resources Monograph. American Geophysical Union.
- Parker, G., Sawai, K., et Ikeda, S. (1982). Bend theory of river meanders. part 2. nonlinear deformation of finite-amplitude bends. *Journal of Fluid Mechanics*, 115 :303–314.
- Peakall, J. (1998). Axial river evolution in response to half-graben faulting; carson river, nevada, u.s.a. *Journal of Sedimentary Research*, 68(5) :788–799.
- Peakall, J., Leeder, M., Best, J., et Ashworth, P. (2000). River response to lateral ground tilting : a synthesis and some implications for the modelling of alluvial architecture in extensional basins. *Basin Research*, 12(3-4) :413–424.
- Perec, G. (1965). *Les Choses*. Julliard.
- Perez-Alurcea, M. et Smith, N. (1999). Depositional pattern following the 1870s avulsion of the saskatchewan river (cumberland marshes, saskatchewan, canada. *Journal of Sedimentary Research*, 69(1) :62–73.
- Petit, F. (1986). *International Geomorphology*, volume Part I, chapter Channel development in two streams of contrasting bed-load and regime, pages 611–622. John Wiley & Sons.
- Petit, F. (1988). Phénomènes influançant la mise en mouvement et le transport des particules en rivières naturelles. *Zeitschrift für Geomorphologie*, 32(3) :299–310.
- Pizzuto, J. E. (1987). Sediment diffusion during overbank flows. *Sedimentology*, 34 :301–317.
- Platt, H. et Keller, B. (1992). Distal alluvial deposits in foreland basin setting - the lower freshwater molasse (lower miocene), switzerland : sedimentology, architecture and palaeosols. *Sedimentology*, 39 :545–565.
- Posamentier, H. et Allen, G. (1993). Siliclastic sequence stratigraphic patterns in foreland ramp-type basins. *Geology*, 21 :455–458.
- Rajchl, M. et Ulicny, D. (2001). Response of a fluvial depositional system to unequal compaction of underlying peat (neogene, most basin, czech republic). In *21st IAS Meeting of Sedimentology, Davos*.
- Ravenne, C., Galli, A., Doligez, B., Beucher, H., et Eschard, R. (2000). Quantification of faciès relationships via proportion curves. In *31st International Geological Congress*.
- Reinfelds, I. et Nanson, J. (1993). Formation of braided river floodplains, waimakariri river, new zealand. *Sedimentology*, 40 :1113–1127.
- Repetto, R., Tubino, M., et Paola, C. (2002). Planimetric instability of channels with variable width. *Journal of Fluid Mechanics*, 457 :79–109.
- Rey, O. (2003). *Itinéraire de l'égarement, du rôle de la science dans l'absurdité contemporaine*. Le Seuil.
- Roberts, E. (1989). *Floods : Hydrological, Sedimentological and Geomorphological Implications*, chapter Flood frequency and urban induced channel change : some British examples, pages 57–82. John Wiley & Sons, Chichester.

- Robinson, R. et Slingerland, R. (1998). Origin of fluvial grain-size trends in a foreland basin ; the pocono formation on the central appalachian basin. *Journal of Sedimentary Research*, 68(3) :473–486.
- Rust, B. (1978). *Fluvial Sedimentology*, volume 5 of *Canadian Society of Petroleum Geologists Memoir*, chapter A classification of alluvial channel systems, pages 187–198. Canadian Society of Petroleum Geologists.
- Ryer, T. et Langer, A. (1980). Thickness change involved in the peat to coal transformation for a bituminous coal of cretaceous age in central utah. *Journal of Sedimentary Petrology*, 50 :987–992.
- Schmitt, M. et Vincent, L. (2004). *Morphological image analysis : a practical and algorithmic handbook*. Cambridge University Press. to appear.
- Schumm, S. (1963). Sinuosity of alluvial rivers on the great plains. *Geological Society of America Bulletin*, 74 :1089–1099.
- Schumm, S. (1972a). *Recognition of ancient sedimentary environments*, chapter Fluvial paleochannels, pages 98–107. Number 16. Society for Sedimentary Geology Special Publication.
- Schumm, S. (1972b). *River Morphology*. Benchmarks Papers in Geology. Dowden, Hutchinson and Ross, Pennsylvania.
- Schumm, S. (1977). *The fluvial system*. Wiley Interscience.
- Schumm, S. et Khan, H. (1972). Experimental study of channel patterns. *Geological Society of America Bulletin*, 83 :1755–1770.
- Schumm, S., Mosley, M., et Weaver, W. (1987). *Experimental Fluvial Geomorphology*. John Wiley & Sons, New York.
- Sellin, R. (1964). A laboratory investigation into the interaction between the flow in the channel of a river and that over the flood plain. *Houille Blanche*, 7 :793–801.
- Seminara, G. et Tubino, M. (2001). Sand bars in tidal channels. part 1. free bars. *Journal of Fluid Mechanics*, 440 :49–74.
- Shanley, K., McCabe, P., et Hettlinger, R. (1994). Perspectives on the sequence stratigraphy of continental strata. *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, 78 :544–568.
- Shields, J. (1936). Anwendung der aehnlichkeitsmechanik und turbulenzforschung auf die geschiebewegung. *Mitt Preuss Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffbau*, 26 :1–26.
- Shiono, K. Muto, Y. (1998). Complex flow mechanisms in compound meandering channels with overbank flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 276 :221–261.
- Sklar, L. et Dietrich, W. (1998). *Rivers over rock ; fluvial processes in bedrock channels*, volume 107, chapter River longitudinal profiles and bedrock incision models ; stream power and the influence of sediment supply, pages 237–260. G.Mo.
- Sklar, L. et Dietrich, W. (2001). Sediment and rock strength controls on river incision into bedrock. *Gl*, 29(12) :1087–1090.
- Slingerland, R. et Smith, N. (1998). Necessary conditions for a meandering-river avulsion. *Geology*, 26(5) :435–438.
- Smart, G. (1984). Sediment transport formula for steep channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(3) :267–276.

- Smith, C. (1998). Modeling high sinuosity meanders in a small flume. *Geomorphology*, 25 :19–30.
- Solari, L., Seminara, G., Lanzoni, S., Marani, M., et Rinaldo, A. (2002). Sand bars in tidal channels. part 2. tidal meanders. *Journal of Fluid Mechanics*, 451 :203–238.
- Stolum, H.-H. (1998). Planform geometry of meandering rivers. *Geological Society of America Bulletin*, 110 :1485–1498.
- Suga, K. (1963). On local scour at river bends. Public works of the Research Institute 5-3, Ministry of Const. Japan.
- Sun, T. (1998). *Computer simulations on meandering, braided rivers and fluvial fan-deltas*. PhD thesis, Department of Physics, University of Oslo.
- Sun, T., Meakin, P., et Jossang, T. (2001a). A computer model for meandering rivers with multiple bedload sediment sizes 1. theory. *Water Resource Research*, 37 :2227–2241.
- Sun, T., Meakin, P., et Jossang, T. (2001b). A computer model for meandering rivers with multiple bedload sediment sizes 2. computer simulations. *Water Resource Research*, 37 :2243–2258.
- Sun, T., Meakin, P., et Jossang, T. (2001c). Meander migration and the lateral tilting of floodplains. *Water Resource Research*, 37(5) :1485–1502.
- Sun, T., Meakin, P., Jossang, T., et Schwartz, K. (1996). A simulation model for meandering rivers. *Water Resource Research*, 32(9) :2937–2954.
- Surkan, A. (1969). Directional statistics of path curvature and constrained random-walk simulation of meanders. *Eos, Transactions, American Geophysical Union*, 50(4) :149.
- Teles, V. (1999). *Construction de réservoirs aquifères alluviaux par modèle génétique de mise en place des sédiments*. PhD thesis, Université Paris VI.
- Teles, V., de Marsily, G., et Perrier, E. (1998). Sur une nouvelle approche de modélisation de la mise en place des sédiments dans une plaine alluviale pour en représenter l'hétérogénéité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 327 :597–606.
- Tetzlaff, D. et Harbaugh, J. (1989). *Simulating clastic sedimentation*. Computer methods in the geosciences. Van Nostrand Reinhold.
- Thakur, T. (1970). Chain model of river meanders. *Journal of Hydrology*, pages 25–47.
- Thakur, T. et Scheidegger, A. (1968). A test of the statistical theory of meander formation. *Water Resource Research*, 4(2) :317–329.
- Thomas, R. et Nicholas, A. (2002). Simulation of braided river flow using a new cellular routing scheme. *Geomorphology*, 43(3-4) :179–195.
- Thompson, A. (1986). Secondary flows and the pool-riffle unit : a case study of the processes of meander developpment. *Earth Surface Processes and Landforms*, 11 :631–641.
- Tricart, J. (1977). Types de lits fluviaux en amazonie brésilienne. *Annales de Géographie*, (473) :1–54.
- Törnqvist, T. et Bridge, J. (2002). Spatial variation of overbank aggradation rate and its influence on avulsion frequency. *Sedimentology*, 49(5) :891–905.
- van Niekerk, A., Vogel, K., Slingerland, R., et Bridge, J. (1992). Routing of heterogeneous sediments over movable bed ; model development. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(2) :246–262.

- van Rijn, L. (1984). Sediment transport. part ii : suspended-load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(11).
- van Rijn, L. (1985). *Sediment transport*. Delft Hydraulic Laboratory.
- Viseur, S., Shtuka, A., et Mallet, J.-L. (2001). Stochastic object-based simulation of channels constrained by high resolution seismic data. In *Proceedings of the Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, IAMG2001*. International Association for Mathematical Geology.
- Vogel, K., van Niekerk, A., Slingerland, R., et Bridge, J. (1992). Routing of heterogeneous sediments over movable bed ; model verification. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(2) :263–279.
- von Shelling, H. (1950). Most frequent particle paths in a plane. *American Geophysical Union*, 32 :222–226.
- Wadman, D., Lamprecht, D., et Mrosovsky, I. (1979). Joint geologic/engineering analysis of the sadlerochit reservoir, prudhoe bay field. *Journal of Petroleum Technology*, 31 :933–940.
- Webb, B. et Walling, D. (1982). The magnitude and fequency characteristics of fluvial transport in a devon drainage basin and some geomorphic implications. *Catena*, 9(1-2) :9–24.
- Weber, K. (1986). *Reservoir characterization*, chapter How heterogeneity affects oil recovery, pages 487–544. Academic Press.
- Weber, K. et Van Geuns, L. (1989). Framework for constructing clastic reservoir simulation models. *Society of Petroleum Engineers*, (19582).
- Weber, K. et Van Geuns, L. (1990). Framework for constructing clastic reservoir simulation models. *Journal of Petroleum Technology*, 42 :1248–1253,1296–1297.
- Willis, B. (1989). Paleochannel reconstruction from point bar deposits : a three-dimensional perspective. *Sedimentology*, (36) :757–766.
- Willis, B. (1993). *Alluvial Sedimentation*, chapter Interpretation of bedding geometry within ancient point-bar deposits, pages 101–114. Number 17 in International Association of Sedimentologists Special Publication. Blackwell Science.
- Wright, P. (1990). Estimating rates of calcrete formation and sediment accretion in ancient alluvial deposits. *Geomorphology*, 127 :273–276.
- Yalin, S. (1992). *River mechanics*. Pergamon Press.
- Yalin, S. et Ferreira da Silva, A. (2001). *Fluvial Processes*. Internation Association of Hydraulic Engineering and Research.
- Zimmermann, C. et Kennedy, J. (1978). Transverse bed slopes in curved alluvial streams. *Journal of the Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*, 104 :33–48.
- Zolezzi, G. et Seminara, G. (2001). Downstream and upstream influence in river meandering. part 1. general theory and application to overdeepening. *Journal of Fluid Mechanics*, 438 :183–211.