



HAL
open science

Insensibilité et bornes stochastiques dans les réseaux de files d'attente. Application à la modélisation des réseaux de télécommunication au niveau flot.

Alexandre Proutière

► To cite this version:

Alexandre Proutière. Insensibilité et bornes stochastiques dans les réseaux de files d'attente. Application à la modélisation des réseaux de télécommunication au niveau flot.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2003. Français. NNT: . pastel-00000733

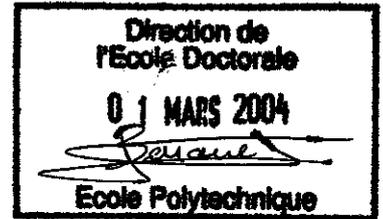
HAL Id: pastel-00000733

<https://pastel.hal.science/pastel-00000733>

Submitted on 21 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour l'obtention du titre de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Alexandre PROUTIERE

Titre de la thèse :

**Insensibilité et bornes stochastiques dans les réseaux de files
d'attente
Application à la modélisation des réseaux de
télécommunications au niveau flot**

Directeur de thèse : François BACCELLI

Soutenue le 6 novembre 2003 devant le jury composé de :

Messieurs	Philippe ROBERT	Président du jury et rapporteur
	Takis KONSTANTOPOULOS	Rapporteur
	Laurent MASSOULIE	Rapporteur
	François BACCELLI	Directeur de thèse
	Eitan ALTMAN	Examineur
	Frank KELLY	Examineur
	Jim ROBERTS	Examineur

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à François Baccelli, qui a accepté de diriger cette thèse. Ce fut pour moi un grand honneur et un réel plaisir de profiter de ses conseils et de son soutien. J'espère qu'il m'aura transmis son exigence, sa rigueur et sa curiosité scientifique.

Je ne pourrai sans doute jamais assez remercier Jim Roberts, pour m'avoir accueilli dans l'équipe qu'il dirige à France Telecom R&D. C'est grâce à son étonnante intuition des phénomènes physiques qu'il sait orienter les recherches de son équipe vers des problèmes concrets et motivants. Les travaux effectués dans cette thèse sont presque tous issus des premiers modèles au niveau flot pour le trafic Internet qu'il a développés avec Laurent Massoulié.

Mille mercis à Thomas Bonald. Une grande majorité des résultats présentés ici sont le fruit de notre collaboration. J'ai pu pleinement profiter de l'émulation qu'il a instaurée entre nous et de ses idées toujours lumineuses et abondantes. Je doute qu'il en ait profité autant. Enfin, l'impressionnante rapidité avec laquelle il travaille a toujours dynamisé l'ensemble du groupe.

Je remercie très vivement Takis Konstantopoulos, Laurent Massoulié et Philippe Robert d'avoir accepté de lire et de rédiger un rapport sur cette thèse. Leurs remarques et leurs conseils m'ont permis de corriger de nombreuses erreurs et d'améliorer le document final.

Ce fut un grand honneur pour moi d'avoir dans mon jury Frank Kelly et Eitan Altman, merci à eux.

Je tiens à remercier Franck Delcoigne et Gwénaél Régnier pour notre travail commun sur l'intégration de trafic, ainsi que les membres de l'équipe, Nabil Benameur, Matthieu Jonckheere, Sara Oueslati et Philippe Olivier pour nos très agréables et fructueuses collaborations. Un grand merci à Christophe et Laurent pour la joyeuse et studieuse ambiance qu'ils ont su maintenir dans notre bureau.

Enfin, merci à Jean-François Legros, chef du laboratoire Optimisation Architecture et Trafic et à Prosper Chemouil, responsable du projet de recherche Precepte, pour m'avoir permis d'entreprendre cette thèse à France Telecom R&D.

Table des matières

Introduction	9
1 Modèles stochastiques dans les réseaux de télécommunications	11
1.1 Analyse statistique de la demande	12
1.1.1 Caractéristiques générales du trafic	12
1.1.2 Caractéristiques statistiques du trafic temps-réel	14
1.1.3 Caractéristiques statistiques du trafic de données	14
1.1.4 Auto-similarité et dépendance à long terme	15
1.1.5 Un invariant unique : le processus d'arrivée des sessions	15
1.2 Gestion des ressources	16
1.2.1 L'Internet best-effort	16
1.2.2 Intserv et la réservation de ressources	17
1.2.3 Diffserv et les classes de service	17
1.3 Analyse de la performance pour le trafic temps-réel	19
1.3.1 Complexité du problème	19
1.3.2 Bornes déterministes	20
1.3.3 Bornes stochastiques	21
1.4 Analyse de la performance pour le trafic de données	22
1.4.1 A quelle échelle de temps travailler ?	23
1.4.2 Modèles au niveau paquet	24
1.4.3 Modèles de partage au niveau flot	25
1.4.4 La notion d'utilité	27
1.4.5 La notion d'insensibilité	27
1.5 Intégration des trafics temps-réel et élastiques	28

2	Insensibilité dans les réseaux de files PS	31
2.1	La file PS	32
2.2	Des réseaux de Jackson aux réseaux de Whittle	33
2.2.1	Régime stationnaire des réseaux de Whittle	35
2.2.2	Réversibilité des réseaux de Whittle	36
2.2.3	Représentation d'autres types de réseaux par des réseaux de Whittle . . .	37
2.3	Insensibilité dans les réseaux PS	38
2.3.1	Processus semi-Markoviens généralisés et leurs extensions	38
2.3.2	Condition nécessaire et suffisante d'insensibilité dans les réseaux PS . . .	43
2.3.3	Insensibilité dans les réseaux PS fermés ou mixtes	46
2.4	Performance dans les réseaux de Whittle	48
2.4.1	Temps de séjour moyen	48
2.4.2	Temps de séjour conditionnel	49
2.5	Routage dépendant de l'état dans les réseaux de Whittle	50
2.5.1	Réseaux à forme produit	50
2.5.2	D'autres réseaux à distribution stationnaire explicite	52
2.5.3	Condition nécessaire et suffisante d'insensibilité	52
2.5.4	Exemple à deux nœuds	54
2.5.5	Perspectives	55
3	Des réseaux de Whittle à la modélisation du trafic élastique	57
3.1	Partage équitable d'un lien	58
3.1.1	Lien congestionné	58
3.1.2	partage équitable avec limitation à l'accès	58
3.2	Modèles PS en réseau	59
3.2.1	Réseau PS	61
3.2.2	Arrivées Poisson de flots	61
3.2.3	Arrivées Poisson de sessions	62
3.3	Allocations insensibles	64
3.4	Store-and-Forward	68
3.4.1	En l'absence de limitations à l'accès	68
3.4.2	En présence de limitations à l'accès	69

3.4.3	Performance de Store-and-Forward	70
3.5	Équité balancée	70
3.5.1	Stabilité de l'équité balancée	71
3.5.2	Autres propriétés de l'équité balancée	72
3.6	Allocations basées sur la notion d'utilité	74
3.6.1	Stabilité	75
3.6.2	Sensibilité	75
3.6.3	Preuve du théorème 3.4	77
3.7	Exemples sur quelques topologies particulières	84
3.7.1	Lignes, grilles et hypercubes	84
3.7.2	Les arbres	87
3.7.3	Les hypercycles	90
3.7.4	Lien avec débits d'accès différents	92
3.7.5	Vers d'autres topologies : algorithmes récursifs d'obtention des constantes de normalisation et des débits moyens	93
3.8	Allocation réalisée par TCP	95
3.9	Routage dynamique insensible	96
3.10	Dépendance à long terme au niveau flot	98
3.10.1	Dépendance à long terme	99
3.10.2	Inter-arrivées des flots	101
4	Comparaisons stochastiques dans les réseaux de files d'attente	105
4.1	Comparaisons de variables aléatoires réelles	106
4.2	Ordres stochastiques intégraux	107
4.3	Ordre croissant \leq_{st}	108
4.4	Ordres convexes \leq_{cx} et \leq_{icx}	108
4.5	Ordre super-modulaire \leq_{sm}	109
4.6	Propriétés stochastiques des variables aléatoires réelles	110
4.7	Comparaisons de files G/G/1	112
4.7.1	Processus d'arrivée	112
4.7.2	Disciplines de service	116
4.8	Comparaisons pour des réseaux de files d'attente	119

4.9	Files d'attente à capacité variable	121
4.9.1	Modèles et objectifs	121
4.9.2	File à faible charge : un contre-exemple simple	123
4.9.3	Capacité globale de la file variable	124
4.9.4	Capacité individuelle variable	127
5	Garanties statistiques de la performance des applications temps-réel	133
5.1	Position du problème	134
5.2	Travaux existants	134
5.3	Bornes stochastiques dans le cas d'un lien unique	136
5.3.1	Arrivées périodiques	137
5.3.2	Arrivées lissées par leaky bucket	138
5.4	Conjectures <i>mieux que Poisson</i>	139
5.4.1	Conjecture <i>mieux que Poisson</i>	139
5.4.2	Conjecture <i>mieux que Poisson/MTU</i>	139
5.5	Un contre-exemple aux conjectures	142
5.6	Arguments en faveur des conjectures	143
5.6.1	Cas de files en tandem avec trafic transverse	143
5.6.2	Grandes déviations et réseaux feed-forwards	146
5.7	Conclusions et perspectives	148
6	Files PS à capacité variable et intégration de service	149
6.1	Modèle PS à capacité variable	150
6.1.1	Caractéristiques du trafic temps-réel	150
6.1.2	Impact sur le trafic élastique	151
6.2	Quelques résultats partiels de la littérature	151
6.2.1	Modèles markoviens	151
6.2.2	File PS avec interruption de service	152
6.2.3	File M/M/1 à deux vitesses	152
6.3	Stabilité uniforme vs. Instabilité locale	152
6.4	Performance en cas d'instabilité locale	153
6.4.1	Une borne grossière de la performance	153
6.4.2	Quasi-stationnarité	154

6.4.3	En régime de forte charge	155
6.5	Performance en cas de stabilité uniforme	156
6.5.1	Borne supérieure - Régime <i>fluide</i>	156
6.5.2	Borne inférieure - Quasi-stationnarité	156
6.5.3	Optimalité des bornes fluide et quasi-stationnaire	157
6.5.4	Cas de stabilité uniforme - un exemple	158
6.5.5	Précisions des bornes - une mesure de la sensibilité	160
6.5.6	Gain d'intégration	160
6.5.7	Contrôle d'admission	161
6.6	Quelques simulations	162
6.6.1	Impact de la moyenne des appels temps-réel	162
6.6.2	Impact de la variance de la durée des appels temps-réel	163
6.6.3	Impact de la nature statistique de la taille des flots	163
6.7	Conclusions et perspectives	164
	Conclusion	165
	Liste des acronymes	169
	Bibliographie	171

Introduction

Les études présentées dans cette thèse ont été effectuées dans un cadre à mi-chemin entre les mondes académique et industriel. Nous avons gardé de ce dernier l'exigence absolue de résultats pratiques et immédiatement utilisables. Ainsi, notre motivation première n'est pas de développer ou d'étudier en détails quelques outils mathématiques, mais plutôt de répondre à tout prix à des questions opérationnelles, quelles que soient la ou les méthodes mathématiques envisagées, de la plus simple à la plus évoluée.

Les premiers résultats de modélisation de réseaux de télécommunications, initiés par Agner Krarup Erlang, concernaient la performance des centraux téléphoniques. En supposant que les arrivées des appels suivent un processus de Poisson, A. Erlang a pu caractériser la probabilité de blocage des appels, seul paramètre de qualité de service. Ce résultat, plus connu sous le nom de formule d'Erlang B, et quelques variantes restent aujourd'hui les plus (les seuls ?) utilisés par les opérateurs pour dimensionner leurs réseaux. Nous pouvons expliquer cela par la simplicité de cette formule, mais surtout par sa robustesse : la probabilité de blocage ne dépend en effet des propriétés statistiques des durées des appels qu'à travers leur moyenne.

Les réseaux de télécommunications ont bien entendu beaucoup évolué depuis, offrant différents types de service et reposant sur une technologie qui est passée de la commutation de circuits (le téléphone) à la commutation de paquets (l'Internet). Traditionnellement, on distingue deux grandes classes de trafic dans les réseaux actuels, les services temps-réel, ayant un débit intrinsèque et nécessitant un transport rapide des paquets correspondants, et les services de données, dont le débit est adapté à l'état de congestion du réseau par un protocole de transport (TCP) et dont la qualité est mesurée par le biais du débit effectivement réalisé au cours de la connexion. Nous pouvons sans risque affirmer que pour des réseaux de type Internet, des équivalents de la formule d'Erlang, donnant une évaluation robuste du délai des paquets des applications temps-réel ou exprimant le débit des connexions de données, n'existent pas.

L'ambition de cette thèse est donc d'élaborer des techniques robustes d'évaluation de la performance des différents types de trafic véhiculés dans le réseau, en fonction des mécanismes de gestion des ressources actuellement mis en œuvre dans le réseau ou qui devraient l'être. Nous traitons dans un premier temps le trafic de données, puis étudions la performance du trafic temps-réel, pour conclure par l'étude des interactions entre ces deux types de trafic.

Les méthodes mathématiques utilisées ou développées dans ce but sont issues de la théorie des réseaux de files d'attente, et plus particulièrement de celle des réseaux de files *processor sharing*, mais aussi de la théorie de l'ordonnement stochastique.

La plupart des travaux présentés ici sont le fruit de collaborations : pour l'étude du trafic de données avec Thomas Bonald [18, 23, 24, 25, 26, 29], et avec Jim Roberts et Gwénaél Régnié [18, 29], pour celle du trafic temps-réel avec Thomas Bonald et Jim Roberts [27], et pour celle de l'intégration des deux types de trafic avec Franck Delcoigne et Gwénaél Régnié [60, 61]. Les résultats d'ordonnancement stochastique, partiellement publiés dans [60, 61, 34], sont plus personnels.

Plan du document

Le premier chapitre est l'occasion d'introduire tous les problèmes mathématiques issus de la modélisation du trafic dans l'Internet, mais également de faire un état des lieux de la recherche dans ce domaine. Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'étude des réseaux de données, le premier, théorique, introduisant et développant la théorie des réseaux de files processor sharing avec paramètres dépendant de l'état, le second appliquant cette théorie à la modélisation du trafic de données au niveau flot. Le chapitre 4 est consacré à l'obtention de bornes stochastiques de la performance des réseaux de files d'attente. Nous étudions plus particulièrement les réseaux de files d'attente de capacités variables et aléatoires. Ces derniers résultats sont appliqués dans le dernier chapitre, à l'étude de l'intégration des trafics temps-réel et de données. Le chapitre 5 a quant à lui pour objet l'étude de la performance des applications temps-réel.

Chapitre 1

Modèles stochastiques dans les réseaux de télécommunications

Nous présentons dans ce premier chapitre les problèmes mathématiques qui apparaissent naturellement lors de l'étude des performances des réseaux de télécommunications. Le but de cette étude est de pouvoir relier la demande de trafic, les ressources du réseau et leur partage entre les utilisateurs, et la qualité de service (QoS) perçue par ces mêmes utilisateurs. Cette relation, une fois identifiée, permet d'élaborer des principes de construction et de dimensionnement du réseau.

La première et très célèbre relation entre demande, ressources et qualité est due à Agner Krarup Erlang en 1917 et relie la probabilité de blocage d'un appel téléphonique, le nombre de circuits disponibles et la charge générée par les appels dont les arrivées sont supposées suivre un processus de Poisson. L'existence d'une relation similaire pour le trafic de données ou plus généralement pour des mélanges de trafics de natures différentes devient cruciale pour les opérateurs qui, jusqu'ici, ont toujours volontairement ou non surdimensionné leurs réseaux.

Nous présentons dans un premier temps une analyse statistique du trafic véhiculé dans l'Internet, analyse nécessaire à la caractérisation de la demande. Nous posons ensuite les problèmes théoriques liés au trafic temps-réel. Pour le trafic de données, nous dressons un état de l'art des modélisations existantes et notamment celles du protocole de transport TCP, avant de présenter les modèles au niveau flot, initiés par J. Roberts et L. Massoulié et sur lesquels se concentre cette thèse. Nous évoquons pour finir les modèles d'intégration des deux types de trafic.

1.1 Analyse statistique de la demande

Caractériser la demande est un pré-requis indispensable à la conception et au dimensionnement d'un réseau. Il s'agit d'une part de définir le processus d'arrivée des demandes, et d'autre part, d'en analyser le contenu. En pratique, il est difficile d'apprécier la demande car les observations disponibles sont celles du trafic effectivement servi et écoulé dans le réseau. Cette difficulté peut être contournée en étudiant des réseaux peu chargés dont aucune ressource ne limite les utilisateurs.

1.1.1 Caractéristiques générales du trafic

Deux grandes classes de trafic : temps-réel et élastique

Nous distinguons deux grandes classes de trafic dans l'Internet.

- Le trafic *élastique* [168]. C'est le trafic traditionnellement véhiculé sur les réseaux IP, il est dit élastique, car le débit des connexions est variable et s'adapte à l'état de congestion du réseau. Il s'agit de toutes les applications utilisant le protocole de transport TCP [88]. Pour ce type de trafic, la qualité de service se mesure au niveau flot, représentée par le temps de réponse (temps pour transmettre un document).
- Le trafic temps-réel. C'est un trafic dont le débit n'est pas contrôlé par le réseau. Les applications correspondantes possèdent un débit (éventuellement variable) et une durée intrinsèques. Pour ce trafic, la qualité de service s'exprime d'une part par un taux de blocage au niveau des appels et d'autre part par un couple taux de perte / délai de bout en bout maximum au niveau paquet (l'utilisateur ne perçoit pas de dégradation de qualité lorsque le délai de traversée du réseau ne dépasse pas ce délai maximum avec une probabilité supérieure à ce taux de perte). Il s'agit des applications temps-réel de type audio ou vidéo par exemple transportées par le protocole UDP.

Trois échelles de décomposition : paquet, flot et session

L'analyse du trafic peut s'effectuer traditionnellement à trois échelles correspondant à différentes entités : le paquet (datagramme en IP), le flot et la session.

- Les paquets sont les entités élémentaires traitées par le réseau. Le comportement des sources temps-réel au niveau paquet est souvent complexe, et cette variabilité se retrouve naturellement dans le réseau. Pour le trafic de données, la notion même de demande au niveau paquet n'a pas de sens, car le comportement au niveau paquet d'une source, dicté par TCP, dépend de l'état de congestion du réseau.
- La notion de flot est plus proche de l'application : un flot correspond à une suite de paquets correspondant à une même instance d'application (une page Web ou une partie d'une page, un fichier de données, un fichier MP3, une communication téléphonique, un film, ...etc). Communément, on identifie un flot à la suite des paquets possédant les mêmes adresses et ports source et destination et séparés par des intervalles de temps inférieurs à un certain

seuil. A l'heure actuelle, le réseau Internet ne reconnaît pas les flots, mais certains préconisent de contrôler le réseau à cette échelle.

- La notion de session est plus proche de l'utilisateur : une session est une succession de flots correspondant à une certaine période d'activité d'un utilisateur. Les flots d'une même session sont séparés par des temps de réflexion ou silences, périodes pendant lesquelles aucun paquet n'est émis. Les sessions représentent par exemple une navigation Web, une connexion telnet,...etc. Moins encore que les flots, les sessions ne sont pas reconnues dans l'Internet. Notons cependant que dans certains réseaux, comme les réseaux mobiles de troisième génération, les notions de flot et de session existent et sont nécessaires à la gestion du trafic et au contrôle de la qualité perçue par les utilisateurs.

Ces trois échelles de décomposition du trafic sont très naturelles et toutes nécessaires. D'une part, la qualité de service perçue par l'utilisateur peut s'exprimer à ces trois niveaux : pour les applications temps-réel, c'est le délai de traversée des paquets qui importe ; pour les applications correspondant à des transferts de données, c'est le temps de transfert global du flot (du document) qui compte ; enfin, l'intégrité d'une session peut également être importante : il est souhaitable dans certains cas que la session ne soit pas interrompue (c'est le cas par exemple d'une session de e-commerce). D'autre part, si souvent l'analyse est extrêmement complexe au niveau paquet, elle devient plus intelligible lorsqu'on passe aux échelles macroscopiques des flots et des sessions. Cela est bien illustré lorsqu'on tente de caractériser les processus d'arrivée : au niveau paquet, la caractérisation du processus est presque impossible du fait de sa grande variabilité. Au niveau flot, le processus d'arrivée est simplifié, mais reste en général très variable. Ce n'est qu'au niveau session que l'on retrouve un processus d'arrivée facilement caractérisable : on peut supposer que les sessions sont générées par des utilisateurs indépendants en nombre fini, auquel cas le processus d'arrivées des sessions est simple, ou en très grand nombre, auquel cas le processus d'arrivées des sessions tend vers un processus de Poisson.

Un processus stationnaire

Les observations du trafic sur un lien (non congestionné) exhibent souvent des variations systématiques et typiques, qui suggèrent l'existence d'une période chargée pendant laquelle l'intensité du trafic reste constante. Cette période se reproduit de jour en jour de manière identique (au moins sur les jours ouvrés), voir figure 1.1.

Ces observations sont à la base de l'hypothèse stationnaire pour le processus caractérisant la demande. On suppose que l'intensité de la demande reste constante pendant une période infinie, ce qui autorise l'apparition d'un régime d'équilibre dont on évalue les caractéristiques. Ces dernières sont alors des approximations du système réel.

Composition actuelle du trafic dans l'Internet

A l'heure actuelle, le trafic temps-réel ne représente qu'une très faible partie du trafic total, 10 à 15 % des paquets, et 5 à 10 % du volume total. Il est composé principalement de flux DNS, "real Audio", de jeux. Tous, opérateurs, constructeurs, développeurs d'applications, prévoient une

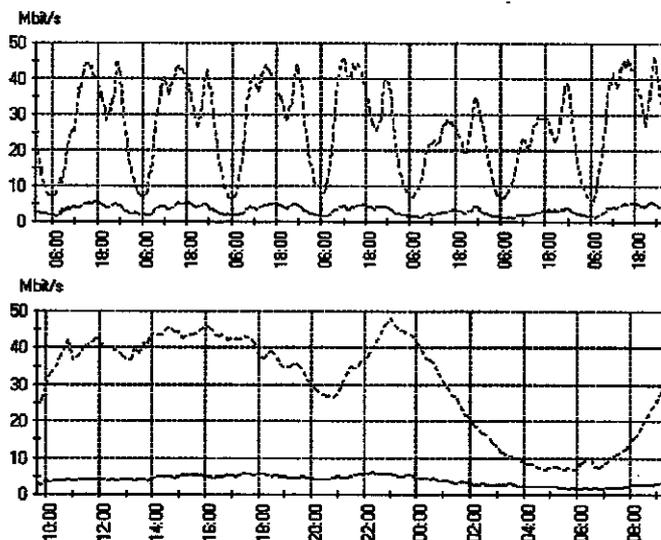


FIG. 1.1 – Utilisation journalière et hebdomadaire d'un lien de capacité 155 Mbit/s.

progression des services temps-réel dans l'Internet. La vidéo, la téléphonie et leur combinaison seraient sur le point d'emprunter le réseau. Mais pour le moment, une brève analyse des applications présentes montre un trafic généré à 60-70 % par HTTP, à 5-10 % par FTP, à 3 % par SMTP, à 3 % par NNTP, et par d'autres applications pour le reste.

1.1.2 Caractéristiques statistiques du trafic temps-réel

Les flots temps-réel sont caractérisés par leur débit instantané et leur durée. Leur débit peut être constant (cas du codage de la voix) ou variable (cas de celui de la vidéo) et dépend de l'application correspondante : de quelques dizaines de kbit/s pour la voix à plusieurs Mbit/s pour la vidéo ou les applications de réalité virtuelle. Les variations de débit d'une source peuvent être de grande amplitude et même présenter un aspect multi-fractal [150].

En ce qui concerne la durée des flots ou des sessions temps-réel, la littérature est peu abondante. Citons cependant V. Bolotin [22] dont les études sur les durées des appels téléphoniques ont exhibé des distributions de type lognormal (à forte variance). Dans l'Internet aujourd'hui, les flots temps-réel UDP sont majoritairement des flux DNS composés d'un seul paquet.

1.1.3 Caractéristiques statistiques du trafic de données

Comme nous l'avons signalé plus haut, décrire le trafic de données au niveau paquet est extrêmement complexe, car chaque source TCP réagit à l'état du réseau. Ce qui peut induire au niveau du processus d'arrivée des paquets un comportement très variable et multifractal. La taille des paquets dans l'Internet est par contre bien connue, car liée au protocole de couche 2 du modèle

OSI et sa distribution ne se concentre que sur de quatre valeurs 40, 552, 576 et 1500 octets [122].

La description du trafic au niveau flot est plus simple, bien que le processus d'arrivée de ces derniers à un lien ne soit pas poissonnien [141] en général et puisse présenter de la dépendance à long terme [29]. En fait, naturellement, lorsqu'on s'intéresse à un lien rassemblant un grand nombre d'utilisateurs, les inter-arrivées entre flots suivent une loi exponentielle, mais le processus de ces arrivées présente une corrélation non nulle, explicable par la structure du trafic en sessions ou par l'utilisation d'applications (par exemple de navigation Web HTTP1.0) générant des rafales de flots. La distribution de la taille des flots a fait l'objet de nombreuses études et il est admis depuis [57] que cette distribution est "heavy-tailed" (de variance infinie). Autrement dit, la majorité des flots sont de petite taille (inférieure à 40 ko), mais le volume de trafic est principalement créé par de très rares flots de grande taille (supérieure à 1 Mo).

1.1.4 Auto-similarité et dépendance à long terme

Depuis 1993 et le travail de W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger et D. Wilson [111], le trafic dans les réseaux de données est connu pour son extrême variabilité, exprimée mathématiquement par diverses notions statistiques, l'auto-similarité et l'auto-similarité asymptotique, la dépendance à long terme ou encore l'aspect multi-fractal [140].

- Une première explication de ces observations est donnée par le fonctionnement du protocole de contrôle de congestion TCP, connu pour engendrer un trafic irrégulier, en rafales [6].
- Une autre explication est donnée par la nature même de la demande de trafic : en supposant que l'écoulement des flots s'effectue par une succession périodique de paquets, de la dépendance à long terme apparaît au niveau paquet dès lors que la distribution de la taille des flots est de variance infinie, et ce même si le processus d'arrivée des flots présente une certaine régularité (poissonnien par exemple) [56].
- Nous donnerons dans le chapitre 3 une troisième interprétation de la variabilité du trafic : on montre qu'au niveau flot, on peut observer de la dépendance à long terme quand la distribution du nombre de flots contenus dans une session est de variance infinie.

Enfin, si l'on s'intéresse au trafic temps-réel, les sources elles-mêmes présentent une grande variabilité liée au type de codage utilisé (voir des exemples dans [150] pour des sources vidéo MPEG).

1.1.5 Un invariant unique : le processus d'arrivée des sessions

Pour conclure l'étude de la demande, notons que seul le processus d'arrivée des sessions peut être caractérisé. Nous considérons donc le modèle de trafic générique suivant. On se place pendant une période de temps où la demande constitue un processus stationnaire. Sur chaque route du réseau des sessions de types différents sont initiées indépendamment suivant un processus de Poisson d'intensité fixée. Le type d'une session est défini par la distribution du nombre de flots qui la compose et par la loi jointe des tailles de flots successifs et des temps de réflexion (ces variables aléatoires ne sont pas forcément indépendantes). Par exemple, une session de téléchargement d'un article est composée d'une part par une navigation web permettant d'arriver jusqu'à

l'URL de l'article et d'autre part par le téléchargement de l'article même ; c'est donc la succession d'un certain nombre de petits flots, suivi par la transmission d'un grand flot.

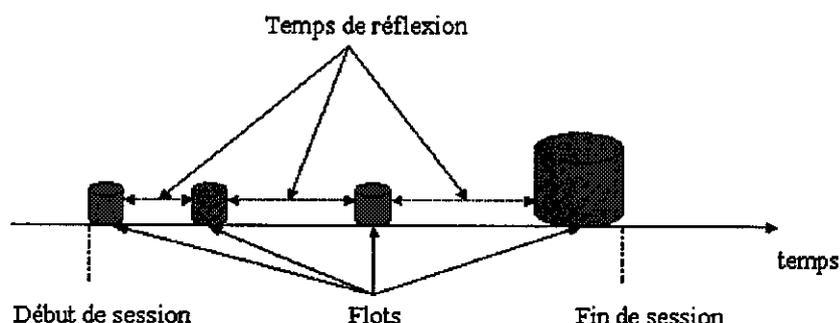


FIG. 1.2 – Exemple de session.

1.2 Gestion des ressources

Après avoir caractérisé la demande, il nous faut décrire la manière dont sont gérées les ressources du réseau pour répondre à cette demande.

1.2.1 L'Internet best-effort

Le réseau Internet est un réseau à commutation de paquets qui n'est chargé que d'effectuer le routage des paquets. Un routeur traite les paquets l'un après l'autre (de simples files FIFO sont implémentées) et de manière indépendante, il définit, à partir de l'adresse destination du paquet et de la table de routage, l'interface de sortie sur laquelle sera envoyé le paquet. L'Internet n'offre donc aucune garantie de qualité de service, les paquets peuvent être perdus (si les files dans les routeurs saturent) : c'est un réseau *best-effort*. Le succès de l'Internet s'explique par cette simplicité ; chaque partie du réseau étant autonome, le réseau peut résister à des pannes locales ou étendre son domaine sans modification de l'existant.

Pour le trafic de données, l'intégrité des transferts est gérée par le protocole de contrôle de flux TCP. Ce dernier n'est implémenté qu'aux extrémités du réseau, les sources et destinations, permettant de conserver la simplicité de l'intérieur du réseau. TCP est chargé de la retransmission des paquets perdus, mais permet également de régler le débit d'émission des sources en fonction de l'état de congestion du réseau et ainsi de partager équitablement les ressources du réseau.

Le trafic temps-réel qui ne nécessite pas un transfert extrêmement fiable (en termes de taux de perte de paquets), mais qui est sensible au délai des paquets, utilise le protocole UDP. En réalité, rien n'est implémenté dans le protocole UDP : aucune gestion particulière n'est effectuée aux extrémités ou à l'intérieur du réseau. Et il n'y a donc aucune garantie de qualité de service. Les

paquets UDP sont simplement mis en compétition avec les paquets TCP dans les files FIFO des routeurs. L'architecture actuelle de l'Internet n'est donc pas adaptée a priori au trafic temps-réel, ce qui a conduit l'IETF à proposer des solutions basées sur la notion de réservation ou sur un traitement différencié par classe de service.

1.2.2 Intserv et la réservation de ressources

Une première architecture proposée par l'IETF s'inspire des solutions de différenciation de service implémentées dans les réseaux ATM. La qualité de service est assurée par la notion de réservation. Il s'agit de réserver des ressources, de la bande passante sur une route, en fonction des paramètres de trafic et de qualité déclarés par les utilisateurs. Cette technique peut s'appliquer aussi bien à un flot unique qu'à un agrégat de flots, et permet effectivement de garantir la qualité de service espérée. Cependant, et de récentes campagnes de mesure sur les réseaux ATM l'ont montré, la réservation de ressources engendre une sous-utilisation importante des liens du réseau, et ce pour deux raisons :

- Le premier problème est de caractériser le trafic généré par les sources ou leurs agrégats assez finement de manière à réserver un minimum de ressources. Les descripteurs de trafic les plus souvent utilisés sont les *leaky-buckets*, simples car caractérisés par un nombre faible de paramètres, mais incapables de représenter finement les sources. La caractérisation de sources très variables, voire auto-similaires, comme les sources vidéo ou le trafic sortant d'un LAN, conduit à choisir des paramètres de *leaky-bucket* qui engendrent inévitablement une réservation excessive de ressources et donc une sous-utilisation du réseau.
- Par ailleurs, ce problème de sous-utilisation est bien souvent amplifié par le fait que les utilisateurs ont du mal à prévoir le volume de trafic qu'ils vont générer. Pour le trafic entreprise notamment, la réservation de ressources est souvent effectuée en fonction du budget, et ne se base donc pas sur des estimations réelles de trafic.

Enfin, un dernier inconvénient d'une architecture basée sur la réservation est celui de l'extensibilité (*scalability* en anglais). En effet, réserver de la bande passante de bout en bout nécessite le déploiement dans chaque unité du réseau d'un certain nombre de mécanismes. Si ce déploiement paraît réalisable sur une petite partie du réseau, on a du mal à l'imaginer sur l'ensemble du réseau. Une réservation de bout en bout complique également les relations d'inter-connexion entre opérateurs. Conscient de toutes ces limites, l'IETF a proposé une seconde architecture de différenciation de service décentralisée, Diffserv.

1.2.3 Diffserv et les classes de service

Cette solution repose sur une gestion différenciée des paquets en fonction de leur classe de service. Deux grandes classes de service sont définies, la classe EF (Expedited Forwarding) [89] sensée regrouper les applications temps-réel et la classe AF (Assured Forwarding) [21] correspondant aux transferts de données.

Différenciation EF - AF

Il est tout à fait légitime d'offrir un traitement privilégié pour les paquets d'applications temps-réel, car il est important que ces paquets voyagent rapidement dans le réseau. La manière la plus simple pour favoriser le trafic EF est de lui donner priorité sur le trafic AF, c'est-à-dire de mettre les paquets EF dans une file d'attente prioritaire à chaque interface des routeurs. L'inconvénient d'une telle implémentation est que le trafic de données n'est pas protégé vis-à-vis des surcharges de trafic EF, ce qui n'est pas vraiment un problème aujourd'hui tant on sait que le trafic EF ne représente qu'une faible proportion du trafic total.

Une autre solution basée sur la discipline de service WFQ (Weighted Fair Queueing) [138, 139] peut être envisagée afin de protéger le trafic de données. Lorsque les deux types de trafic sont présents, chacun d'entre eux dispose d'une certaine fraction garantie de la capacité. Le désavantage d'une telle discipline est le choix de ces fractions relatives : quelle fraction de la capacité faut-il réserver au trafic AF ?

Sous-classes et modèle olympique

Certaines recommandations de l'IETF prévoient également une classification fine des applications : au sein des classes de services AF et EF sont définies un certain nombre de sous-classes. Par exemple, pour le trafic de données AF, l'idée est de pouvoir offrir une qualité de service dépendant du type de contrat souscrit : le contrat "or" offrant un meilleur débit que celui du contrat "argent", lui-même supérieur à celui du contrat "bronze".

En pratique, pour rendre cette différenciation possible, on préconise souvent l'utilisation de système de type WFQ avec autant de files que de classes de service envisagées. La capacité est alors répartie entre les classes qui possèdent des flots en cours de transfert et suivant certains poids. Précisément, lorsque le débit des flots n'est pas limité à l'accès, la fraction de capacité allouée à un flot de classe i est donnée par :

$$c_i = \frac{w_i}{\sum_{j \in J} w_j} \times \frac{1}{x_i},$$

où J est l'ensemble des classes qui possèdent au moins un flot en cours et x_i est le nombre de flots de classe i en cours. Lorsque le débit des flots est limité à l'accès (par la vitesse du modem, le capacité du serveur ou certains paramètres de TCP), les flots de classe $i \in J'$ telle que

$$\frac{w_i}{\sum_{j \in J} w_j} \times \frac{1}{x_i} > \frac{r}{C},$$

(où r est le débit d'accès), reçoivent une capacité r . Pour les flots des autres classes, on alloue :

$$\frac{w_i}{\sum_{j \in J \setminus J'} w_j} \times \frac{C - r \sum_{j \in J'} x_j}{x_i}.$$

On présente figure 1.3 la performance des flots lorsqu'on considère deux classes de flots avec $w_1 = 10w_2$. Remarquons que la différenciation n'est pas si franche que cela : il n'y a pas un

facteur 10 entre les débits des flots de classes différentes. La différenciation s'atténue encore quand le débit est limité à l'accès.

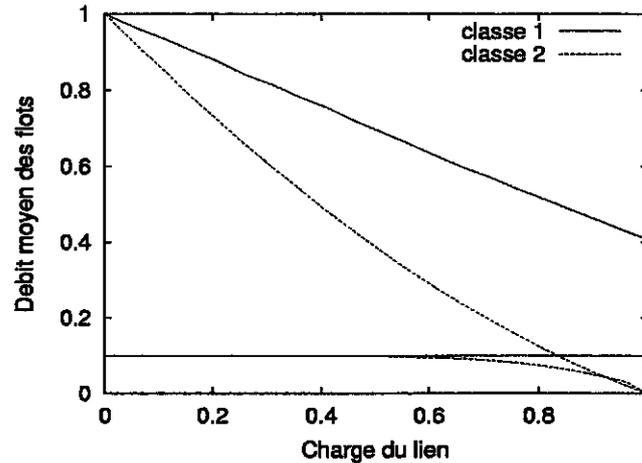


FIG. 1.3 – Différenciation de service AF par WFQ.

En fait, même en implémentant des systèmes à priorité, théoriquement plus efficaces pour favoriser une certaine classe de trafic, il est montré dans [30, 24] que la différenciation n'est effective que dans les cas de surcharges des liens, situations que l'on souhaite éviter. Aussi, dans la suite nous ne considérons qu'une seule classe de trafic AF. Les flots AF vont finalement obtenir des débits différents à charge *normale* uniquement du fait des différences dans leur débit d'accès, ce que nous étudions chapitre 3.

1.3 Analyse de la performance pour le trafic temps-réel

La qualité de service de ce type d'application s'exprime au niveau paquet par une combinaison délai de traversée du réseau / taux de perte. Dans les réseaux à commutation de circuits, comme les réseaux de téléphonie fixe ou mobile, le délai de traversée est connu. A l'inverse, dans les réseaux à commutation de paquets, les paquets de différents appels sont multiplexés dans des buffers communs et subissent donc un délai aléatoire beaucoup plus difficile à quantifier.

1.3.1 Complexité du problème

Le problème de l'évaluation du délai de bout en bout se formalise de la façon suivante : on considère un réseau de files d'attente FIFO et de topologie quelconque. Un flot de paquets, caractérisé par un processus d'arrivée stationnaire, suit une route prédéfinie et est à chaque nœud rencontré multiplexé avec d'autres flots. Il s'agit alors d'évaluer la distribution du délai vu par ces paquets, c'est-à-dire calculée sous la probabilité de Palm associée au processus d'arrivée de ce flot. Pour faciliter l'analyse, nous ferons les quelques hypothèses suivantes :

- Les flots sont statistiquement indépendants à l'entrée du réseau. Cette première hypothèse est justifiée par le fait que les utilisateurs génèrent du trafic indépendamment les uns des autres.
- La taille des paquets de tous les flots est majorée par une certaine valeur MTU (Maximum Transfer Unit, égale par exemple à 1500 octets si le réseau se base sur une couche Ethernet).
- Les processus d'arrivée de paquets sont limités à un débit crête (correspondant au débit d'accès ou au débit maximal de l'application sous-jacente). Autrement dit, les flots peuvent être vus comme des sources On/Off, périodiques pendant les périodes On. Souvent, pour réduire encore la complexité, on fera même l'hypothèse que les flots sont initialement périodiques.
- Les buffers dans les nœuds sont de taille infinie. Cette dernière hypothèse suppose que les buffers sont dimensionnés de telle sorte que la probabilité de leur dépassement reste négligeable.

Malgré ces hypothèses, évaluer précisément le délai de bout en bout demeure une tâche insurmontable. Une démarche plus abordable consiste à essayer de trouver des bornes du délai aussi précises que possible. On distingue plusieurs types de bornes :

- les bornes déterministes évaluent le délai que subirait un paquet dans la pire des situations. Afin que cette dernière ne conduise à un délai infini, il est nécessaire de supposer que les flots possèdent une certaine régularité : bien souvent, les flots sont régulés par des *leaky-buckets*. Le pire cas est alors obtenu en synchronisant les arrivées de paquets de différents flots à un nœud, et en considérant la plus importante accumulation de rafales de paquets possible lorsque les flots progressent dans le réseau. Malheureusement, comme nous le verrons un peu plus loin, ces bornes sont extrêmement pessimistes, car basées sur un pire cas qui n'a qu'une probabilité négligeable d'arriver en pratique.
- Les bornes stochastiques sont des mesures de probabilité qui *majorent* dans un certain sens la distribution du délai. Par exemple, on dira qu'une fonction f , densité de probabilité, est une borne supérieure du délai en distribution si, pour tout $x > 0$, $\Pr[\text{délai} > x] \leq f(x)$. Ces bornes, au contraire des bornes déterministes, permettent de prendre en compte la nature aléatoire du trafic, c'est-à-dire la phase aléatoire existant entre deux flots.

1.3.2 Bornes déterministes

L'approche purement déterministe est basée sur le *Network Calculus*, développé notamment par R.L. Cruz [58] et repris par de nombreux auteurs. On trouvera dans le monographe de C.S. Chang une description exhaustive de cette technique basée sur le calcul dans l'algèbre min-plus [45]. Une application du *Network Calculus* est le calcul d'une borne déterministe du délai de traversée des paquets dans un réseau qui transporte des flots initialement régulés par un *leaky-bucket* : cette étude est due à J.Y. Le Boudec et al. [50, 19]. En voici les hypothèses :

- Soit \mathcal{I} l'ensemble des flots présents dans le réseau. Un flot $i \in \mathcal{I}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des liens du réseau (une route) et est limité en entrée du réseau par un *leaky-bucket*. Autrement dit, si $A_i(s, t)$ désigne le volume généré par le flot entre les instants s et

t ,

$$A_i(s, t) \leq r_i(t - s) + b_i.$$

- A chaque lien l de capacité C_l est garanti un service $(C_l(t - s) - \beta)^+$ entre les instants s et t . Le paramètre β est introduit ici pour tenir compte du trafic de données non prioritaire.
- Le niveau de charge de chaque lien est borné par $\alpha < 1$, c'est-à-dire $\sum_{i \ni l} r_i \leq \alpha C_l$.
- La somme des profondeurs des leaky-buckets des flots passant par un lien est bornée : pour tout lien l , $\sum_{i \ni l} b_i \leq \tau C_l$.
- Enfin les routes des flots n'excèdent pas h liens.

Une borne sur le délai est alors donnée par :

$$D = \frac{h}{1 - (h - 1)\alpha} \left(\max_i \frac{\beta}{C_l} + \tau \right). \quad (1.1)$$

Une conséquence directe de cette majoration est que dès que l'utilisation d'un lien dépasse la limite $\alpha^* = 1/(h - 1)$, il devient impossible de borner le délai. L'existence même de bornes déterministes n'est donc pas assurée dans des conditions normales de charge et ce sur des réseaux de topologie simple (voir les exemples présentés par M. Andrews et al. [5]). Les bornes déterministes souffrent donc de leur pessimisme. Par ailleurs, une borne stricte du délai de traversée ne constitue pas un paramètre de qualité de service ; comme nous l'avons mentionné précédemment c'est plutôt le couple taux de perte / délai de traversé qui importe. Les bornes stochastiques sont donc naturellement plus appropriées.

1.3.3 Bornes stochastiques

Idéalement, pour un flot donné, le but serait de pouvoir trouver des bornes réalistes du délai de bout en bout en distribution, c'est-à-dire une variable aléatoire B , pas trop éloignée du délai, de distribution $f(x) = \Pr[B > x]$ et telle que, pour tout $x > 0$, $\Pr[\text{délai} > x] \leq f(x)$. Malheureusement, cet objectif est très ambitieux et nous devons nous contenter de bornes dans un sens plus faible. En fait, trouver une borne sur la valeur moyenne du délai dans un réseau de topologie quelconque est déjà une tâche extrêmement difficile (nous illustrons cette difficulté dans le chapitre 5).

Le calcul du délai est rendu complexe du fait de la déformation des flots lors de leur progression dans le réseau : les flots initialement périodiques perdent cette régularité dès qu'ils sont multiplexés avec d'autres flots, on dit qu'ils acquièrent de la *gigue*. Pour simplifier le problème, on peut essayer de trouver une borne stochastique du délai subi par les paquets d'un flot à un nœud quelconque du réseau. Pour ce faire, on tente de comparer le processus réel d'arrivée des paquets au nœud considéré avec un processus de référence et suivant un certain ordre stochastique. Cet ordre doit être bien choisi : si deux processus d'arrivée de paquets sont comparables suivant cet ordre, les délais des paquets correspondant à ces processus doivent aussi être comparables. Par ailleurs, l'ordre choisi doit pouvoir *se propager* : si les processus d'arrivée sont inférieur au processus de référence choisi suivant cet ordre à leur entrée dans le réseau, ils doivent conserver cette propriété dans le réseau après avoir été multiplexés avec d'autres flots. Cette idée est à la base des deux conjectures suivantes.

La conjecture mieux que Poisson dans l'ATM

Une première conjecture due à F. Bricet, L. Massoulié et J. Roberts [39] a été développée pour les réseaux ATM, c'est-à-dire pour des réseaux véhiculant des paquets de taille constante. Cette conjecture propose de prendre le processus de Poisson comme processus de référence et dit :

Si les flots sont initialement mieux que Poisson, alors ils conservent cette propriété à l'intérieur du réseau.

Le qualificatif *mieux* signifie *inférieur* à suivant l'ordre stochastique choisi. Cette conjecture s'inspire de deux observations :

- La performance d'une file avec pour processus d'arrivée une superposition de flots périodiques est *meilleure* que celle de la même file en remplaçant le processus d'arrivée par un processus de Poisson d'intensité égale à celle du processus initial [150].
- Le processus de sortie d'une file à temps de service déterministe est plus *régulier* que le processus en entrée de la file [46].

La première observation suggère que les flots temps-réel périodiques et leur superposition sont initialement mieux que Poisson, la seconde que cette propriété se propage dans le réseau.

La conjecture mieux que Poisson/MTU dans l'Internet

Lorsque les paquets peuvent avoir des tailles différentes mais bornées par une valeur maximale MTU, la conjecture devient [27] :

Si les flots sont initialement mieux que Poisson / MTU, alors ils conservent cette propriété à l'intérieure du réseau.

Mieux que Poisson / MTU signifie que l'on compare les processus d'arrivée de paquets par rapport à un processus de Poisson de paquets de taille constante MTU et générant une charge équivalente. Il est nécessaire de prendre des paquets de taille MTU : intuitivement, les paquets d'un flot peuvent attendre derrière des paquets de taille MTU, auquel cas la déformation de ce flot sera comparable à celle d'un flot de paquets de taille MTU.

Il paraît extrêmement difficile de prouver ces conjectures : la difficulté est de trouver un ordre stochastique sur les processus d'arrivée qui donne assez d'informations sur le délai des paquets à une file, et qui en même temps se propage dans le réseau. En fait, il est possible de trouver des topologies (certes rares et atypiques) sur lesquelles les deux conjectures sont fausses : nous donnerons un contre-exemple dans le chapitre 5. Même pour des topologies simples pour les conjectures semblent justes, elles restent difficiles à montrer.

On consacra le chapitre 5 à l'étude des bornes stochastiques sur le délai des flots temps-réel, mais les résultats théoriques seront modestes pour les raisons que nous venons d'expliquer.

1.4 Analyse de la performance pour le trafic de données

Dans les réseaux IP, le débit auquel une source envoie ses paquets de données est contrôlé par le protocole TCP, implémenté aux extrémités du réseau, c'est-à-dire aux sources et destinations.

Ce mécanisme, proposé initialement par V. Jacobson [88], adapte le débit des sources, défini par la taille de la fenêtre de transmission, aux conditions du réseau. Il est la combinaison de plusieurs algorithmes :

- Le *slow start* : au début de la connexion ou lorsque son débit est retombé à 0, la fenêtre de transmission augmente rapidement ; celle-ci est doublée à chaque fois que les acquittements des paquets de la fenêtre précédente sont reçus à la source. A chaque RTT (Round Trip Time), le débit est donc doublé. La phase de *slow start* dure jusqu'à ce que la fenêtre atteigne un certain seuil, après quoi la connexion entre dans une période de contrôle de congestion (*congestion avoidance* en anglais).
- Le contrôle de congestion. Quand une ressource du réseau devient saturée, des paquets sont perdus ; la destination informe la source de ces pertes de paquets et la source réagit en diminuant son débit d'un certain facteur (dans les implémentations courantes de TCP, Vegas et Reno, la source réduit la fenêtre de moitié). Quand aucune perte n'est détectée au contraire, la source augmente linéairement son débit jusqu'à ce qu'une nouvelle perte soit détectée.

Voilà en quelques mots le fonctionnement du protocole TCP. Notre but n'est pas d'en décrire très précisément le fonctionnement, et le lecteur est invité à consulter [169] et les récentes RFC de l'IETF pour une description détaillée.

1.4.1 A quelle échelle de temps travailler ?

Un grand nombre de travaux tente de modéliser le comportement de TCP au niveau paquet. Dans ces études, le nombre de connexions TCP en cours dans le réseau est fixé. Les buts de ces études sont multiples : dans un premier temps, on peut essayer de connaître la stabilité de TCP, c'est-à-dire de savoir si son comportement converge vers un comportement limite. Une fois la stabilité établie, il est alors intéressant d'étudier le régime limite : le calcul du débit moyen de chaque connexion permet d'apprécier l'équité du partage effectivement réalisé. Ces études que nous résumons dans un des paragraphes suivants sont intéressantes dans le sens où elles permettent de comprendre le comportement microscopique de TCP. En revanche, elles souffrent d'un certain nombre d'inconvénients quand on veut les appliquer à des problèmes concrets d'ingénierie de trafic. En effet, en pratique, le nombre de connexions utilisant une ressource donnée varie rapidement au cours du temps. Par conséquent, ces modèles ne peuvent par exemple prédire la qualité de service des transferts qui, rappelons-le, s'exprime à travers le temps de réponse des flots. En fait, ce temps de réponse est le résultat complexe du partage réalisé par TCP et de la distribution du nombre de connexions simultanées. Un second inconvénient est qu'à l'heure actuelle, l'étude du comportement limite ne donne pas de résultats explicites et simples. Le partage réalisé par TCP reste difficilement accessible. Nous illustrons cette difficulté dans les trois paragraphes suivants, paragraphes qui résument les trois grands types d'approche pour modéliser TCP.

1.4.2 Modèles au niveau paquet

Méthodes de point fixe

Les premières études du comportement de TCP [69, 109, 119, 137] ont tenté de relier le processus de perte des paquets au débit réalisé par la connexion TCP subissant ces pertes : le débit augmente linéairement jusqu'à ce que la connexion subisse une perte, auquel cas le débit est divisé par deux. Les premiers modèles ont relié performance et pertes pour des temps de congestion arrivant périodiquement [109, 119, 137]. Puis on a amélioré les modèles en considérant des pertes se produisant selon un processus de Poisson, puis selon un processus stationnaire [1]. La plus célèbre des relations perte - débit est la formule en " $1/\sqrt{p}$ ", [137] : le débit moyen d'une connexion est proportionnel à l'inverse de la racine carré du taux de perte, le facteur de proportionnalité dépendant d'un certain nombre de paramètres (principalement le RTT).

Mais donner une relation entre processus de perte et performance ne suffit pas : il est nécessaire pour obtenir un modèle fermé de TCP de modéliser les pertes provoquées par l'accroissement simultané des débits des connexions en cours dans le réseau. C'est ce qui est fait par exemple par les auteurs de [40, 71]. Mais en général, les modèles proposés pèchent par leur simplicité et ne sont guère justifiés : dans [71], le processus de perte dû au dépassement d'un buffer est approximé par celui d'une file M/M/1/K (ce qui est douteux quand on connaît la complexité du trafic au niveau paquet). C'est ici qu'on atteint les limites de ce type d'approche.

TCP résout un problème d'optimisation

On doit l'idée de cette approche à F. Kelly, A. Maullo et D. Tan [94]. Elle a suscité un grand nombre de travaux dont certains sont cités ci-après. Il s'agit d'étudier la limite fluide déterministe du système stochastique réalisé par des connexions TCP en interaction :

- le réseau est constitué d'un ensemble de liens \mathcal{L} et d'un ensemble de route \mathcal{R} . On note x_r le nombre de connexions sur la route r .
- Chaque source sur la route r reçoit une bande passante $\lambda_r(t)$ à l'instant t .
- L'utilisation d'un lien $l \in \mathcal{L}$ a un prix : utiliser une capacité y coûte $C_l(y)$. Ce coût est rapporté aux sources, chacune ajustant son débit en fonction des informations reçues. Ces informations sont dans le cas de TCP le nombre de pertes de paquets et le coût d'un lien est alors interprété par ses limitations en capacité et en buffer.
- La réaction aux informations d'une source sur la route r est caractérisée par :

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial t} = K_r - \sum_{l \in r} f_r \left(\sum_{s \ni l} \lambda_s(t) \right). \quad (1.2)$$

La constante K_r représente l'augmentation linéaire du débit en l'absence de perte et f_r est la fonction de perte.

Notons qu'en toute rigueur, on devrait dans (1.2) tenir compte du fait que l'information de coût prend un certain temps pour parvenir à la source, voir les travaux de R. Johari, D. Tan, L. Mas-

soulié, G. Vinnicombe [91, 117, 173]. Sous certaines hypothèses, le système d'équations différentielles (1.2) converge vers une certaine limite solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max \sum_r x_r U_r(\lambda_r), \\ \sum_{r \in l} x_r \lambda_r \leq C_l, \quad \forall l. \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans les premières études de F. Kelly sur le sujet [94], TCP réalisait un partage du type d'équité proportionnelle ($U_r = \ln$), plus récemment, il a été montré que la fonction arctan est un choix plus approprié [95]. Ce modèle est intéressant dans la mesure où il part du comportement individuel de chaque source pour étudier la partage réalisé. Le point faible de cette approche, comme de celle du point fixe d'ailleurs, est la modélisation de la cause de la perte (ici la fonction f_r est sensée être régulière, qu'en est-il réellement ?). Le dernier modèle que nous souhaitons décrire tente de résoudre ce défaut en exprimant rigoureusement la cause de la perte d'un paquet.

Dynamique stochastique de TCP

Ce dernier modèle du à F. Baccelli et D. Hong [10, 11] étudie précisément l'algorithme AIMD (Additive Increase Multiplicative decrease).

Dans ce modèle, les sources augmentent leur débit jusqu'à ce qu'une ressource du réseau sature. Par exemple, si le réseau se réduit à un lien unique de capacité C partagé par N connexions, et si l'on indexe par n les instants où le lien sature, l'évolution du débit λ^i de la source i est dictée par :

$$\lambda_{n+1}^i = ((1 - a_{n+1}^i) + \beta a_{n+1}^i) \left(\lambda_n^i + \frac{\alpha}{R} \tau_{n+1} \right), \quad (1.4)$$

où a_{n+1}^i est une variable aléatoire égale à 1 si la source subit une perte à la $n + 1$ -ième saturation du lien et à 0 sinon. β est le facteur de diminution de la fenêtre en cas de perte (égal à 0.5). α est le coefficient de croissance linéaire en l'absence de perte et R le RTT de la connexion i . Enfin τ_{n+1} est l'intervalle de temps entre les n et $n + 1$ -ièmes saturations du lien et est donné par :

$$\sum_i \lambda_n^i + \frac{\alpha}{R} \tau_{n+1} N = C. \quad (1.5)$$

Les équations (1.4) et (1.5) permettent d'exprimer le vecteur des variables aléatoires des débits comme solution d'un système dynamique stochastique linéaire non homogène dont on peut étudier le régime limite. Le cas d'un réseau se traite de la même manière. Le seul inconvénient de ce type de modèle est que pour le moment, des résultats explicites de partage restent difficiles à appréhender. Certains partages sont obtenus en régime asymptotique d'un grand nombre de sources.

1.4.3 Modèles de partage au niveau flot

On est en droit d'être effrayé par la complexité de TCP et par la difficulté de modélisation qui en résulte. Surtout, comme nous l'avons déjà mentionné, il est difficile d'en tirer quelque chose du point de vue pratique : on ne sait pas bien décrire le partage de TCP quand le nombre de connexions est fixe, on ne sait a fortiori rien dire lorsque le nombre de connexions varie de manière

aléatoire, suivant les arrivées et départs des clients utilisant certaines ressources du réseau. C'est pourquoi il est plus aisé et pragmatique d'étudier la performance du trafic élastique à une échelle de temps macroscopique, celle des flots, en espérant que les phénomènes microscopiques dus à TCP restent *invisibles* à l'utilisateur. On fait donc ici l'hypothèse de séparabilité des échelles de temps : lorsque le nombre de flots est fixé dans le réseau, ces flots en cours reçoivent à tout instant de leur transfert un débit constant.

Partages processor sharing (PS)

Les premiers modèles du trafic élastique au niveau flot sont dus à L. massoulié et J. Roberts [149], et considèrent un lien simple en congestion : il s'agit de modèles de partage équitable (ou *processor sharing*). Les flots en cours se partagent équitablement la capacité du lien. Si les arrivées des flots à ce lien constituent un processus de Poisson, alors le nombre de flot en cours est simplement celui du nombre de clients dans une file $M/G/1$ processor sharing, dont on connaît bien le régime stationnaire. C'est l'intérêt de ce modèle : en supposant que TCP fait son travail de partage de la capacité C parfaitement et instantanément, on connaît la performance du système. En fait on connaît la distribution du nombre de flot en cours de transfert et par conséquent le temps moyen de réponse des flots : si ρ désigne la charge du lien (produit du taux d'arrivée des flots et de leur taille moyenne rapporté à la capacité du lien), la probabilité d'avoir n flots en cours de transfert à l'équilibre est donnée par

$$\Pr [N = n] = \rho^n (1 - \rho), \quad (1.6)$$

et le temps de réponse moyen des flots de taille s par

$$E[\tau | \sigma = s] = \frac{s}{C(1 - \rho)}. \quad (1.7)$$

Une propriété importante de ce modèle est celle de l'*insensibilité* : la performance au premier ordre (en ne s'intéressant qu'aux moyennes) ne dépend que de la charge moyenne générée sur le lien. La nature de la distribution de la taille des flots ne joue aucun rôle. Cela confère au modèle une robustesse appréciable pour qui veut par exemple dimensionner un réseau sans connaître très précisément les détails statistiques de la demande. Cela est particulièrement important dans les réseaux actuels, pour lesquels cette demande change sans cesse de nature, de nouvelles applications apparaissant régulièrement.

Dans le chapitre 3, nous étendrons d'abord le modèle précédent au cas d'arrivées poissonniennes des sessions avec ou sans limitation de débit pour les flots, puis au cas beaucoup plus général d'un réseau de liens quelconques. Ces généralisations seront effectuées toujours avec le souci de conserver cette propriété d'insensibilité si pertinente du point de vue opérationnel.

Autres partages

D'autres types de partage des ressources entre les flots sont envisageables. Certains préconisent toujours l'utilisation de discipline de service de type WFQ dans les routeurs pour favoriser certains flots.

Un autre type de partage s'inspire de la discipline SRPT (Shortest Remaining Processing Time). Cette discipline, plutôt implémentable dans les serveurs, sert le flot avec le plus petit travail restant à effectuer. Cette discipline est connue pour son optimalité (meilleure que processor sharing). Le lecteur trouvera dans [12] les principaux résultats de performance, récents ou non, sur la file à discipline SRPT. En particulier, un point important en faveur de SRPT est que lorsque la distribution de la taille des flots est à forte variance, les flots de grand volume ne sont pas pénalisés (par rapport à la discipline processor sharing), contrairement à ce qu'intuitivement, nous pourrions croire. L'implémentation de SRPT dans un réseau se heurte cependant à deux problèmes : au fait qu'en général, le réseau ne connaît pas la taille des objets qu'il transfère. Ce premier handicap est gommé par certaines disciplines qui équivalent SRPT sans pour autant nécessiter la connaissance a priori des tailles des flots : FB-N processor sharing (voir [142] pour une analyse de la performance de ce type de discipline). Le second inconvénient de SRPT en réseau est sa stabilité : favoriser les petits flots sur certaines routes du réseau peut être équivalent à l'introduction de priorités, ce qui restreint les conditions de stabilité.

1.4.4 La notion d'utilité

Comme nous l'avons vu précédemment, certains modèles suggèrent que TCP résout un problème d'optimisation et maximise, lorsque le nombre de connexions est fixé, une certaine fonction d'utilité. Aujourd'hui, à la lumière de ce résultat, de nombreux travaux inversent le raisonnement fait par F. Kelly et tentent de proposer des protocoles qui vont maximiser une certaine fonction d'utilité (définie par exemple par le revenu tiré par l'opérateur). Cette démarche est fautive, car un protocole qui maximise une utilité quand le nombre de connexions est fixé, ne maximise pas nécessairement l'utilité en pratique lorsque le nombre de connexions varie. Cela s'explique simplement par le fait que l'utilité avec un nombre variable de connexions est fonction certes de l'utilité obtenue quand on fixe le nombre de connexions, mais aussi de la distribution du nombre de connexions en cours, et cette dernière dépend fortement du protocole utilisé, c'est-à-dire de la fonction d'utilité choisie. L'exemple le plus convaincant est celui du réseau linéaire considéré dans [28] : il est montré que l'allocation qui maximise le débit instantané du réseau peut mener à des situations d'instabilité même sous les conditions usuelles de trafic (la charge de chaque lien est inférieure à 1). Ainsi, maximiser le débit du réseau dans des scénarios statiques à nombre de connexions fixé peut minimiser le débit du réseau en pratique.

On en déduit que la notion d'utilité n'a de sens que si elle est définie en relation avec la dynamique du réseau quand les arrivées et départs des connexions sont aléatoires.

1.4.5 La notion d'insensibilité

Pour un opérateur, pouvoir dimensionner son réseau avec un minimum de connaissance de la nature statistique de la demande est important. En effet, dans les réseaux actuels, la demande évolue sans cesse, de nouvelles applications apparaissent et les habitudes des utilisateurs évoluent très rapidement. Dans ce contexte, il est très difficile de prévoir par exemple la nature de la distribution de la taille des documents transférés. Il est alors important de disposer de modèles de

performance qui s'affranchissent des détails statistiques de la demande, ces modèles sont dits *insensibles*, comme l'est par exemple le modèle de partage équitable (processor sharing) d'un lien. C'est là l'intérêt des modèles processor sharing, car la performance ne dépend que d'un seul paramètre décrivant la demande, la charge. Les autres disciplines évoquées telles que SRPT sont sensibles, et il devient périlleux de dimensionner les liens en faisant une hypothèse sur la distribution de la taille des flots. D'autres disciplines, comme GPS, sont sensibles, mais très peu, ce qui les rend intéressantes. Cette relative insensibilité n'est observable que par simulations, l'étude de la sensibilité est un sujet très complexe, et encore inexploré.

Pour ces raisons, nous ne développons dans cette thèse que des modèles de performance strictement insensibles. Dans le cas de partage dans les réseaux, nous identifierons en particulier toutes les allocations qui mènent à cette propriété d'insensibilité.

1.5 Intégration des trafics temps-réel et élastiques

Nous avons présenté les problèmes liés à la modélisation des trafics élastiques et temps-réel pris indépendamment. Qu'arrive-t-il à ces modèles lorsque les deux types de trafic cohabitent dans le même réseau ?

Pour le trafic temps-réel, en supposant que les paquets s'y rattachant disposent d'une priorité par rapport aux autres paquets, le problème reste inchangé, à peu de chose près. Si la priorité en question est non-préemptive, le trafic temps-réel ne subira l'influence du trafic élastique qu'à travers le temps résiduel de service d'un paquet de données. Cela sera évoqué dans le chapitre 5.

En revanche, pour le trafic élastique, l'influence du trafic prioritaire ne peut être négligé. Reprenons le modèle le plus simple au niveau flot : on considère un lien de capacité C partagé par les deux types de trafic. Le trafic élastique *verra* en fait un lien de capacité variable dans le temps, égale à la capacité laissée disponible par le trafic temps-réel. L'étude la performance du trafic élastique revient non plus seulement à celle de la file M/G/1 processor sharing, mais à celle de la file M/G/1 processor sharing de capacité variable. Le processus qui module la capacité de cette file suit l'évolution du trafic temps-réel et peut donc être considéré comme un processus stationnaire (par exemple, ce processus pourrait être celui représentant l'occupation d'une file à serveur infini dans un modèle d'Erlang ou multi-Erlang).

Par ailleurs, on peut parfois supposer que l'évolution du trafic temps-réel est indépendante de celle du trafic élastique. La validité de cette hypothèse dépend de la gestion de la ressource : si le trafic temps-réel est sujet à un contrôle d'admission indépendant de l'évolution du trafic élastique ou si le trafic temps-réel n'est sujet à aucun contrôle d'admission, cette hypothèse est justifiée. Par contre, si l'on envisage par exemple un contrôle d'admission intégré [17], c'est-à-dire où les conditions d'admission d'un appel temps-réel ou d'un flot élastique dépendent de l'ensemble du trafic présent sur le lien, l'hypothèse est fautive.

Quelles que soient les hypothèses, le problème reste d'une complexité inextricable. C'est celui des files d'attente à environnement aléatoire. Très peu de travaux y sont consacrés. Ce constat est d'autant plus valable pour la file PS, tant on sait ce type de discipline de service induit une difficulté supplémentaire (en comparaison avec la discipline FIFO par exemple). Citons malgré tout certains

travaux qui donnent des résultats très partiels et sous des hypothèses très restreintes, il s'agit des travaux de O. Boxma et I. Kurkova [37, 38], de R. Núñez [134], de R. Núñez et P. Nain [132] et de S. Borst, R. Núñez, M. van Uitert [36].

Au lieu d'essayer, comme les auteurs que nous venons de citer, d'obtenir des résultats précis dans des cas très restrictifs, nous tenterons, dans le chapitre 6, de donner des bornes de la performance aussi précises que possible et valables dans un cadre général.

Chapitre 2

Insensibilité dans les réseaux de files PS

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats théoriques sur les réseaux de files d'attente à discipline de service PS. Ces études sont motivées par la modélisation du trafic élastique abordée dans le chapitre suivant. Nous avons en introduction expliqué l'importance d'aboutir à des modèles simples et robustes, en un mot insensibles à la nature statistique du trafic. Aussi nous intéressons-nous tout particulièrement aux résultats d'insensibilité dans les réseaux de files PS. Sous les impulsions successives des travaux de J. Jackson [87], de P. Whittle [179], puis de F. Kelly [93] et parallèlement de F. Baskett, K. Chandy, R. Muntz, F. Palacios [16], ce thème de recherche a motivé pendant longtemps un très grand nombre de chercheurs [8, 14, 41, 49, 83, 126, 128, 127, 157, 158, 159, 160, 164, 165, 180]. Il faut remarquer à regret aujourd'hui que malgré l'étendue du champs d'application des résultats liés à ce thème, ce dernier ne suscite plus vraiment d'intérêt, et n'est que rarement enseigné. Il reste pourtant dans ce domaine de nombreux points obscurs. Notre contribution est ici d'identifier les conditions nécessaires et suffisantes d'insensibilité dans une vaste classe de réseaux PS.

Nous commençons par rappeler quelques résultats importants pour la file PS isolée. Nous introduisons ensuite les réseaux de Whittle et montrons comment ces réseaux peuvent représenter un très grand nombre d'autres réseaux déjà connus. Puis nous caractérisons les réseaux de files PS à capacité dépendant de l'état du système qui sont insensibles aux distributions des temps de service aux différents nœuds du réseau : ce sont les réseaux de Whittle. Enfin, nous généralisons ces résultats au cas de taux d'arrivée de clients et de routage également dépendant de l'état du système.

Ce chapitre fait l'objet de la publication [24].

2.1 La file PS

La discipline de service PS est la discipline limite *round robin* [53] dans les systèmes à temps partagé lorsque le pas de temps tend vers 0 : lorsque n clients sont présents dans la file, chacun d'entre eux reçoit une fraction $1/n$ de la capacité du serveur.

Notations et hypothèses

Les clients arrivent dans la file selon un processus de Poisson d'intensité λ . Les tailles des requêtes de ces clients sont i.i.d. de distribution générale $B(x)$ et de moyenne β . Nous supposons que le système est stable, c'est-à-dire que la charge $\rho = \lambda\beta$ est strictement inférieure à 1 (la capacité du serveur est normalisée à 1). On note $S(\tau)$ le temps de réponse d'un client de requête de taille τ à l'état stationnaire.

M. Kitayev et S. Yashkov [100] ont dérivé une expression de la transformée de Laplace du temps de séjour conditionnel. On renvoie le lecteur à [184] pour la formulation exacte de ce résultat. Il implique notamment que la probabilité de trouver à l'équilibre n clients dans la file avec pour temps résiduels de service x_1, \dots, x_n est donnée par : pour $n > 0$,

$$\Pr[N = n; x_1, \dots, x_n] = \rho^n (1 - \rho) \prod_{i=1}^n \frac{1 - B(x_i)}{\beta}, \quad (2.1)$$

et pour $n = 0$,

$$\Pr[N = 0] = 1 - \rho. \quad (2.2)$$

On en déduit simplement que la distribution du nombre de clients est géométrique.

M. Kitayev et S. Yashkov ont également calculé le temps de séjour conditionnel moyen et la variance correspondante [101] :

$$\mathbb{E}[S(\tau)] = \frac{\tau}{1 - \rho}, \quad (2.3)$$

$$\text{Var}[S(\tau)] = \frac{2}{(1 - \rho)^2} \int_0^\tau (\tau - u)(1 - R(u)) du, \quad (2.4)$$

où

$$R(x) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F^{n*}(x),$$

et

$$F(x) = \frac{1}{\beta} \int_0^x (1 - B(u)) du.$$

Une propriété intéressante de la file M/G/1 PS est son insensibilité à la nature de la distribution de la taille des requêtes. La distribution stationnaire du nombre de clients ne dépend pas de cette distribution, et mieux encore elle ne dépend que du facteur de charge global ρ . On appelle cette propriété insensibilité au premier ordre car du point de vue de la performance, seul le temps de séjour moyen ne dépend que de la charge (la variance du temps de séjour dépend de la distribution de la taille des requêtes (2.4)).

2.2 Des réseaux de Jackson aux réseaux de Whittle

Nous définissons ici les réseaux de Jackson et de Whittle tels que présentés dans l'excellent monographe de R. Serfozo [163].

On considère un ensemble de N nœuds dans lequel se déplacent des clients. L'état du réseau est décrit par le vecteur des nombres de clients à chaque nœud $x = (x_1, \dots, x_N)$. On se restreint aux réseaux possédant les propriétés suivantes :

- Le réseau peut être ouvert ou fermé. Dans le cas d'un réseau ouvert, les arrivées exogènes de clients au nœud i forment un processus de Poisson d'intensité ν_i . Considérer un réseau fermé revient à annihiler ces arrivées exogènes et considérer une population initiale finie de clients dans le réseau.
- Un client après avoir été servi à un nœud i est routé vers un autre nœud j avec une probabilité p_{ij} (ce type de routage est souvent désigné comme un routage de Bernouilli).
- Dans le cas d'un réseau ouvert, on note $p_i \equiv 1 - \sum_j p_{ji}$ la probabilité qu'un client achevant son service au nœud j sorte du réseau.
- Les temps de service des clients au nœud i sont des variables i.i.d. exponentiellement distribuées de moyenne $1/\mu_i$.
- Les clients sont servis suivant la discipline PS à chaque nœud, bien qu'il soit inutile de le préciser car avec les hypothèses précédentes, le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ décrivant le nombre de clients à chaque nœud est markovien et ne dépend pas de la discipline de service choisie.
- Enfin, les nœuds ont des capacités qui dépendent éventuellement de l'état du système. Le nœud i est de capacité $\phi_i(x)$ lorsque le système est dans l'état x . On interdit les interruptions de service, c'est-à-dire qu'on suppose que si $x_i > 0$, alors $\phi_i(x) > 0$.

Quelques notations pour finir : on note e_i le vecteur dont les composantes sont toutes nulles sauf la i -ème qui est égale à 1. Par ailleurs, pour tout x tel que $x_i > 0$, on note $T_i x$ le vecteur $x - e_i$. De manière similaire, on définit $T^i x$ par $x + e_i$ et enfin $T_j^i x$ par $x + e_j - e_i$.

Définition 2.1. (Réseaux PS) Lorsque la discipline de service à chaque file est PS, on dit que le réseau défini ci-dessus est un réseau PS.

Il faudra donc se rappeler que la particularité des réseaux PS est que les capacités des files peuvent dépendre de l'état du système.

Remarque 2.1. Bouclage à certains nœuds. Sauf mention contraire, nous considérons des réseaux sans bouclage, c'est-à-dire qu'on suppose que $p_{ii} = 0$ pour tout i . En fait, si $p_{ii} > 0$, on peut annuler ce bouclage en remarquant que ce réseau avec bouclage en i est équivalent à un réseau sans bouclage et dont les paramètres sont identiques à ceux du réseau initial sauf pour le nœud i lesquels deviennent : $\tilde{\mu}_i = \mu_i(1 - p_{ii})$ et $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}/(1 - p_{ii})$ pour tout $j \neq i$.

Définition 2.2. (Capacités balancées) Les capacités des nœuds sont dites balancées si

$$\phi_i(x)\phi_j(T_i x) = \phi_j(x)\phi_i(T_j x), \quad \forall i, j, x_i > 0, x_j > 0. \quad (2.5)$$

Soit alors $\langle x, T_{i_1} x, \dots, T_{i_n} \dots T_{i_1} x, 0 \rangle$ un chemin direct de x à 0 , voir figure 2.1, la *balance* des capacités implique que la fonction Φ définie par

$$\Phi(x) = \frac{1}{\phi_{i_1}(x)\phi_{i_2}(T_{i_1}x) \dots \phi_{i_n}(T_{i_{n-1}} \dots T_{i_1}x)}, \quad (2.6)$$

est indépendante du chemin choisi. En particulier, dans ce cas, les capacités sont caractérisées par Φ , appelée *fonction de balance* :

$$\phi_i(x) = \frac{\Phi(T_i x)}{\Phi(x)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad x_i > 0. \quad (2.7)$$

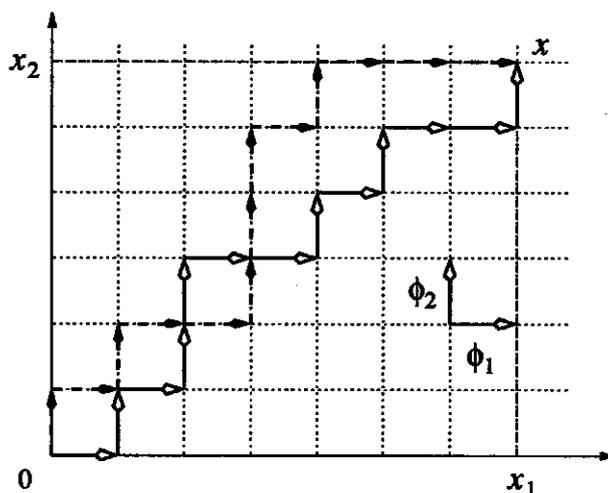


FIG. 2.1 – Deux chemins directs de 0 à x

Réciproquement, s'il existe une fonction positive Φ vérifiant (2.7), on peut vérifier sans peine que les capacités sont balancées. Lorsque les relations (2.7) sont vraies, on dit que les capacités sont *balancées par Φ* .

Définition 2.3. (Réseaux de Whittle et de Jackson) Lorsque les capacités sont balancées, le réseau est dit de Whittle. De plus, si à tout nœud i , la capacité ne dépend que du nombre de clients présents à ce nœud, c'est-à-dire si $\phi_i(x) = \phi_i(x_i)$, on dit que le réseau est un réseau de Jackson.

Le second type de réseau porte le nom de Jackson, car c'est ce dernier qui, en 1957 [87], a initialement remarqué que ces réseaux étaient stables sous les conditions usuelles de stabilité et qu'ils admettaient une distribution stationnaire à forme produit, c'est-à-dire que cette distribution est le produit des distributions stationnaires du nombre de clients à chaque nœud. C'est R. Serfozo [163] qui a donné le nom de *réseaux de Whittle* au premier type de réseau, saluant ainsi les importantes contributions de ce mathématicien dans l'étude des réseaux à transitions dépendant de l'état du système. Bien entendu, les réseaux de Jackson forment une sous-classe des réseaux de Whittle. Nous verrons plus loin qu'en fait, les réseaux de Whittle sont très généraux et qu'il est difficile d'imaginer un réseau de files d'attente PS qui ne puisse être représenté par un réseau de Whittle.

2.2.1 Régime stationnaire des réseaux de Whittle

Pour les réseaux de Whittle, le processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ décrivant l'évolution du nombre de clients à chaque nœud est un processus de Markov, dont les équations de mesure invariante sont :

$$\pi(x) \sum_i (\nu_i + \phi_i(x)\mu_i) = \sum_i \pi(T_i x) \nu_i + \sum_{i,j} \pi(T_i^j x) \phi_j(T_i^j x) \mu_j p_{ji} + \sum_i \pi(T^i x) \phi_i(T^i x) \mu_i p_i. \quad (2.8)$$

Par ailleurs, les taux d'arrivée effectifs de clients aux différents nœuds λ_i sont définis de manière unique comme les solutions du système linéaire suivant :

$$\lambda_i = \nu_i + \sum_j \lambda_j p_{ji}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

La charge effective du nœud i est alors définie par $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$. A présent, on peut donner des mesures invariantes des réseaux de Whittle (théorème 1.15 [163]).

Théorème 2.1. *Une mesure invariante du processus X caractérisant l'évolution des clients dans un réseau de Whittle est :*

$$\pi(x) = \Phi(x) \prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i}. \quad (2.10)$$

Preuve. La preuve de ce théorème consiste à vérifier les équations de mesure invariante (2.8). Plus simplement, on peut vérifier les équations de balance partielles suivantes (qui impliquent par simples sommations, les équations de mesure invariante) :

$$\pi(x) \phi_i(x) \mu_i = \pi(T_i x) \nu_i + \sum_j \pi(T_i^j x) \phi_j(T_i^j x) \mu_j p_{ji}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.11)$$

et

$$\pi(x) \sum_i \nu_i = \sum_i \pi(T^i x) \phi_i(T^i x) \mu_i p_i. \quad (2.12)$$

En remplaçant (2.10) dans (2.11), on obtient :

$$\Phi(x) \lambda_i \phi_i(x) = \Phi(T_i x) \nu_i + \sum_j \lambda_j p_{ji} \Phi(T_i^j x) \phi_j(T_i^j x),$$

et on retrouve une des équations de trafic (2.9) en divisant par $\Phi(x)$ et en observant que les capacités sont balancées. De la même manière, (2.10) vérifie la seconde équation de balance partielle. \square

La proposition simple suivante va jouer un rôle important dans notre analyse de l'insensibilité des réseaux PS, dans la construction de réseaux de Whittle particuliers (par exemple des réseaux multiclassés de Kelly), mais aussi dans le calcul des temps de réponse conditionnels moyens des clients.

Proposition 2.1. *On considère un réseau PS tel que la capacité totale des nœuds 1 et 2 ne dépende des nombres de clients à ces nœuds qu'à travers leur somme $x_1 + x_2$ et tel que cette capacité soit partagée équitablement entre ces $x_1 + x_2$ clients. Autrement dit,*

$$\frac{\phi_1(x)}{x_1} = \frac{\phi_2(x)}{x_2} = \frac{\phi_1(x) + \phi_2(x)}{x_1 + x_2}, \quad x_1, x_2 > 0.$$

Alors les capacités ϕ_1, \dots, ϕ_N sont balancées par Φ si et seulement si $\phi_1 + \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$ sont balancées par $\tilde{\Phi}$ définie par

$$\Phi(x) = \binom{x_1 + x_2}{x_1} \tilde{\Phi}(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_N).$$

Preuve. La preuve est immédiate. □

2.2.2 Réversibilité des réseaux de Whittle

La réversibilité des processus de Markov donne souvent beaucoup d'informations sur le processus et son régime stationnaire. Un processus est réversible si à l'équilibre, le taux de transition d'un état à un autre est égal au taux de transition dans le sens inverse. Dans ce cas, la distribution stationnaire s'obtient simplement par produits et quotients de taux de transition. Le plus simple des processus de Markov réversible est le processus de naissance et de mort. D'autres exemples et applications de la réversibilité sont présentés par F. Kelly dans [93]. Nous nous contentons ici de donner une caractérisation de la réversibilité dans les réseaux de Whittle [163].

Définition 2.4. *Un processus de Markov de noyau de transition q est réversible s'il existe une mesure positive π telle que, pour tout x, y ,*

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)q(y, x).$$

Ces équations sont appelées équations de balance détaillées. On dit également que q est réversible par rapport à π .

Nous caractérisons la réversibilité des réseaux de Whittle grâce au résultat simple suivant [163].

Proposition 2.2. *Soit X un processus de Markov tel que son noyau de transition puisse se décomposer sous la forme $q(x, y) = q_1(x, y)q_2(x, y)$, où q_1 et q_2 sont des noyaux de transition de processus irréductibles.*

- *Si q_1 et q_2 sont réversibles par rapport à π_1 et π_2 respectivement, alors q est réversible par rapport à $\pi(x) \equiv \pi_1(x)\pi_2(x)$.*
- *Par ailleurs, si q et q_2 sont réversibles par rapport à π et π_2 respectivement, alors q_1 est réversible par rapport à $\pi_1(x) \equiv \pi(x)/\pi_2(x)$.*

Théorème 2.2. (i) *Dans un réseau de Whittle, si le processus décrivant le mouvement des clients uniquement (ce que nous nommons le routage, défini par ν_i, p_{ij}) est réversible par rapport à une fonction $\varrho(x)$, alors le réseau est réversible par rapport à $\Phi(x)\varrho(x)$.*

(ii) *Dans un réseau réversible quelconque, il y a équivalence entre la balance des capacités et la réversibilité du routage.*

Preuve. La preuve s'obtient facilement en remarquant que le noyau de transition d'un réseau PS quelconque est donné par :

$$\begin{cases} q(x, T_i^j x) = p_{ij} \mu_i \phi_i(x), \\ q(x, T_i x) = p_i \mu_i \phi_i(x), \\ q(x, T^j x) = \nu_j. \end{cases}$$

On applique la proposition précédente au routage et aux taux de départ, en notant que la *réversibilité* du processus de départ n'est rien d'autre que la balance des capacités. Ici on prend q_2 défini par : $q_2(x, T_i x) = \mu_i \phi_i(x)$, $q_2(x, T^j x) = 1$ (le taux de départ de la source infinie est égal à 1), et $q_2(x, T_i^j x) = \mu_i \phi_i(x)$. \square

2.2.3 Représentation d'autres types de réseaux par des réseaux de Whittle

Les réseaux de Whittle sont des réseaux très généraux, et à titre d'exemple, nous montrons comment ce type de réseau peut représenter les réseaux de Kelly avec routage dépendant de la classe et les réseaux BCMP.

Réseau de Kelly [92]

Dans ce type de réseau, introduit par F. Kelly en 1975, les clients sont répartis en classes. La classe d'un client définit sa route. Le routage des clients d'une certaine classe peut être déterministe ou probabiliste. L'état du réseau est décrit par les variables $x_{i\alpha}$ des nombres de clients de classe α au nœud i . Notons $\phi_{i\alpha}$ le taux de service des clients de classe α au nœud i .

Si les taux de service $\phi_{i\alpha}$ sont balancés par une fonction Ψ , on sait d'après le théorème 2.1, qu'une mesure invariante du réseau est :

$$\pi(x_{i\alpha}, i, \alpha) = \Psi(x_{i\alpha}, i, \alpha) \prod_{\alpha} \prod_i \rho_{i\alpha}^{x_{i\alpha}}.$$

Supposons maintenant que la structure du réseau est celle d'un réseau de Whittle, c'est-à-dire que les capacités des nœuds soient balancées par une fonction Φ . D'après la proposition 2.1, si les capacités sont réparties équitablement entre tous les clients sans distinction de classe (ce qui est le cas pour un nœud PS), alors les taux de service $\phi_{i\alpha}$ sont également balancés et la distribution stationnaire du système est connue.

En fait, les réseaux de Kelly permettent la représentation de discipline de service plus générale que la discipline PS : les résultats restent valables pour des réseaux de files symétriques.

Réseaux BCMP [16]

Ces réseaux ont été introduits par F. Baskett, K. Chandy, R. Muntz et F. Palacios en 75 : [16] est en fait la mise en commun de résultats trouvés indépendamment par ces auteurs. La différence de ces réseaux avec ceux de Kelly est minime : dans les réseaux BCMP, initialement, le routage ne pouvait être déterministe, et seules certaines disciplines de service symétriques pouvaient être modélisées.

Dans ce type de réseau, les clients sont aussi classifiés, et le taux de service d'un client de classe α au nœud i est le produit de deux fonctions, la première dépendant uniquement du nombre total de clients présents au nœud i et la seconde dépendant uniquement du nombre de clients de classe α à ce nœud :

$$\phi_{i\alpha}(x) = g_{i\alpha}(x_i)h_{i\alpha}(x_{i\alpha}).$$

En fait, cette propriété permet de modéliser plusieurs disciplines de service, PS, LIFO [16]. On peut remarquer que le réseau ainsi défini est un réseau de Whittle avec la fonction de balance suivante :

$$\Psi(x_{i\alpha}, i, \alpha) = \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha} \prod_{k=1}^{x_i} g_{i\alpha}(x_i)^{-1} \prod_{l=1}^{x_{i\alpha}} h_{i\alpha}(x_{i\alpha})^{-1}.$$

2.3 Insensibilité dans les réseaux PS

Nous considérons ici des réseaux de files PS, mais dont les capacités dépendent de l'état du système, c'est-à-dire du nombre de clients à chaque file. Le routage est un routage de Bernoulli comme pour les réseaux de Whittle et nous reprenons les notations précédemment utilisées pour ces derniers réseaux.

Il est bien connu que les réseaux PS à capacités constantes sont insensibles à la distribution des temps de service à chaque file (si les moyennes de ces temps de service sont conservées). De nombreux auteurs se sont depuis les années 70 intéressés à cette question (voir les références sur l'insensibilité données en début de chapitre). Parmi les réseaux PS à capacités dépendant de l'état, nous savions également que les réseaux de Whittle constituaient une classe de réseaux insensibles. Ce résultat est une conséquence des travaux de R. Schassberger en 1978 sur l'insensibilité des processus semi-Markoviens généralisés à vitesse variable. Ces processus sont bien plus généraux que les processus liés aux réseaux de Whittle et ont été introduits également dans les années 70, c'est pourquoi il nous a semblé intéressant d'en rappeler les caractéristiques.

2.3.1 Processus semi-Markoviens généralisés et leurs extensions

La notion de GSMP (Generalized Semi-Markov Processes, processus semi-markoviens généralisés en français) a été introduite par K. Matthes en 1962 [121], et la théorie de ces processus a été élaborée par quelques auteurs dont D. König, P. Franken et R. Schassberger notamment [157, 158, 159, 160, 70]. Initialement, la motivation de Matthes était de construire un outil assez général permettant d'étudier l'insensibilité d'un grand nombre de modèles et notamment ceux issus des réseaux de files d'attente. Malheureusement, il s'est avéré que ces objets complexes que sont les GSMP permettaient certes de représenter un grand nombre de systèmes, mais étaient en revanche incapables de représenter les plus simples des réseaux de files d'attente dont l'insensibilité était connue. Même la file $M/GI/\infty$ échappait aux GSMP [160]. En fait, les GSMP ont cependant permis d'étudier l'insensibilité dans les réseaux fermés où chaque client est identifié et où l'insensibilité est prise par rapport aux distributions des temps de service de chaque client à chaque nœud (non pas par rapport aux distributions des temps de service aux nœuds).

En autorisant le ré-indexage dans les GSMP, R. Schassberger en 1986 a finalement construit un formalisme capable d'inclure les réseaux de files d'attente connus pour leur insensibilité [160]. Une autre extension des GSMP, les R-GSMP (R comme Reallocatable) a été proposée par M. Miyazawa en 1993 [126] et permet également de couvrir les réseaux de files d'attente usuels.

Formalisme classique des GSMP

Nous reprenons ici le formalisme introduit dans [160]. A un instant quelconque, l'état z du système appartient à un ensemble dénombrable d'états possibles \mathcal{Z} . On associe à \mathcal{Z} un second ensemble dénombrable S dont les éléments sont appelés *horloges*. A chaque état z , on associe un sous-ensemble non vide S_z d'horloges. Lorsque le système est dans l'état z , par exemple au temps t , une horloge $s \in S_z$ tourne à la vitesse $c(s, z)$ et a un temps résiduel de service $x_s(t)$. Le système reste dans l'état z jusqu'à ce qu'une horloge de S_z termine son service, c'est-à-dire au temps $t + \tau$, avec

$$\tau = \min_{s \in S_z} \frac{x_s(t)}{c(s, z)}.$$

A cet instant, l'horloge s_0 dont le service s'est achevé est retirée et le système passe dans l'état z' avec la probabilité $p(z, s_0, z')$. Cette dernière distribution est bien sûr concentrée sur les états z' tels que $S_z - \{s_0\} \subset S_{z'}$. Pour les horloges $s \in S_z \cap S_{z'}$, les temps résiduels de service ne sont pas modifiés, autrement dit, $x_s(t + \tau) = x_s(t) - \tau c(s, z)$. Quand on change d'état, de nouvelles horloges s peuvent apparaître et leurs temps résiduels de service sont fixés aléatoirement suivant certaines distributions $\mathcal{B}(\mathbb{R})_s$ de moyennes $1/\mu_s$ (représentant des variables aléatoires positives). Ces distributions sont choisies de telle sorte que l'on puisse supposer que, presque sûrement, chaque changement d'état n'est provoqué que par la disparition que d'une seule horloge et que la suite des instants de ces changements tend vers $+\infty$.

Définition 2.5. *Le processus $\{Z(t), X_s(t), s \in S_z, t \geq 0\}$ est un processus de Markov, et $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ est appelé processus semi-Markovien généralisé associé à $\Sigma = \{\mathcal{Z}, S, (S_z), (p(z, s, \cdot)), (c(s, z)), B_s\}$.*

Si les temps de service des horloges sont exponentiels, Z est une chaîne de Markov, dont les équations de mesure invariante sont :

$$\pi(z) \sum_{s \in S_z} \mu_s c(s, z) = \sum_{z' \in \mathcal{Z}} \pi(z') \sum_{s' \in S_{z'}} \mu_{s'} c(s', z') p(z', s', z). \quad (2.13)$$

Cette chaîne de Markov est appelée chaîne associée au GSMP Z . Cette chaîne peut parfois vérifier les équations de balance locale.

Définition 2.6. *(Balance locale en s) Pour $s \in S$, Z est localement balancée en s si pour $z \in \mathcal{Z}_s \equiv \{z : s \in S_z\}$,*

$$\pi(z) \mu_s c(s, z) = \sum_{z' \in \mathcal{Z} - \mathcal{Z}_s} \pi(z') \sum_{s' \in S_{z'}} \mu_{s'} c(s', z') p(z', s', z) + \sum_{z' \in \mathcal{Z}_s} \pi(z') \mu_s c(s, z') p(z', s, z). \quad (2.14)$$

Définition 2.7. *Quand la chaîne associée est localement balancée en tout point $s \in S' \subset S$, on dit simplement qu'elle est localement balancée dans S' .*

Le théorème suivant [107, 159, 177] donne une condition nécessaire et suffisante pour que la distribution stationnaire de la chaîne associée soit insensible aux distributions des temps de service des horloges d'un certain ensemble S' pourvu que leurs moyennes soient conservées.

Théorème 2.3. *La distribution stationnaire d'une chaîne associée à un GSMP et supposée ergodique est insensible aux distributions des temps de service des horloges de S' (les temps de service des autres horloges étant pris exponentiels) si et seulement si cette chaîne est localement balancée dans S' . Dans ce cas, la distribution stationnaire du GSMP peut être mise sous la forme :*

$$\Pr [z(t) = z, x_s(t) = x_s, s \in S_z] = \pi(z) \prod_{s \in S_z} \mu_s (1 - B_s(x_s)). \quad (2.15)$$

Représentation de la file M/G/∞

Le premier et le plus simple des systèmes insensible à la distribution des temps de service est la file M/G/∞. En fait, cette insensibilité au temps de service (les clients tirent leur temps de service indépendamment suivant une certaine distribution) ne peut être représentée par celle d'un GSMP. Cette constatation a été faite par A. Barbour et F. Kelly [13] dans un premier temps, puis a été reprise par R. Schassberger [160].

En fait, il est assez simple de représenter la file GI/G/∞ par un GSMP. Il suffit de choisir un ensemble dénombrable d'horloges $S = \{s_n, n \in \mathbb{N}\}$, où s_0 va représenter le processus d'arrivée des clients dans la file : quand s_0 expire, s_0 est réinitialisée et une nouvelle horloge, qui représentera un client, est créée. La distribution des inter-arrivées de clients dans la file est donc celle du temps de service de l'horloge s_0 . L'état du système peut ici être simplement pris comme l'ensemble des horloges en cours de service, excepté l'horloge s_0 . Si $z = \{s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\}$, alors $S_z = \{s_0, s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\}$ et si $z = \emptyset$, $S_z = \{s_0\}$.

Quand un client arrive à la file, une nouvelle horloge est créée : elle doit être choisie parmi les horloges qui ne sont pas déjà en cours de service, donc choisie dans le sous-ensemble $S \setminus \{s_0, s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\}$ si s_{a_1}, \dots, s_{a_n} sont effectivement les horloges en cours de service. En toute généralité, cette nouvelle horloge peut être choisie suivant une certaine distribution conditionnelle que nous noterons $\alpha(\cdot | s_{a_1}, \dots, s_{a_n})$ ou $\alpha(\cdot | \emptyset)$ si la file est vide. Ainsi les probabilités de transition du GSMP sont définies par :

$$\begin{cases} p(\{s_{a_1}, \dots, s_{a_{n-1}}\}, s_0, \{s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\}) = \alpha(s_{a_n} | s_{a_1}, \dots, s_{a_{n-1}}), \\ p(\emptyset, s_0, \{s_{a_1}\}) = \alpha(s_{a_1} | \emptyset), \\ p(\{s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\}, s_{a_i}, \{s_{a_1}, \dots, s_{a_{i-1}}, s_{a_{i+1}}, \dots, s_{a_n}\}) = 1. \end{cases}$$

Enfin, notons que les vitesses des horloges $c(s, z)$ sont égales et fixées à 1.

L'expression de l'insensibilité de la file M/G/∞ en utilisant le formalisme du GSMP que l'on vient de construire serait alors la suivante : à l'horloge s_0 on associe une distribution de temps de service ϕ_{s_0} exponentielle de moyenne λ et à toutes les autres horloges on associe la même distribution générale (pour tout n , $\phi_{s_n} = \phi$) de moyenne $1/\mu$. L'insensibilité revient à dire que quelle que soit la distribution ϕ , la distribution du nombre d'horloges en cours de service est donnée par :

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}, |z|=n} \pi(z) = p(\emptyset) \frac{\rho^n}{n!},$$

où $\rho = \lambda/\mu$ est la charge de la file. Ce n'est effectivement pas l'expression de l'insensibilité du GSMP définie comme dans le théorème 2.3. En fait, on pourrait voir l'insensibilité de la file M/G/ ∞ comme une conséquence de l'insensibilité du GSMP à toutes les distributions du temps de service des sources (sauf s_0) pourvu que ces dernières aient la même moyenne, c'est-à-dire comme une conséquence de l'insensibilité de $\pi(z)$ elle-même. Or il n'y a pas insensibilité du GSMP.

Proposition 2.3. (*Barbour, Kelly*)

On ne peut choisir les lois de transitions α de telle sorte que le GSMP défini ci-dessus soit insensible.

Preuve. Supposons que le GSMP soit insensible. Alors il serait localement balancé, autrement dit, pour toute horloge s_{a_n} , $n \neq 0$,

$$\pi(\{s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\})\mu = \pi(\{s_{a_1}, \dots, s_{a_{n-1}}\})\lambda\alpha(s_{a_n}|s_{a_1}, \dots, s_{a_{n-1}}).$$

Par conséquent, pour toute permutation σ de l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$,

$$\pi(\{s_{a_1}, \dots, s_{a_n}\}) = \pi(\emptyset)\rho^n \alpha(s_{a_{\sigma(1)}}|\emptyset) \times \dots \times \alpha(s_{a_{\sigma(n)}}|s_{a_{\sigma(1)}}, \dots, s_{a_{\sigma(n-1)}}).$$

Cela implique qu'il existe une suite de variables aléatoires à valeurs entières X_n , $n \geq 1$, telle que $\Pr[X_1 = a_i] = \alpha(s_{a_i}|\emptyset)$, $\Pr[X_1 = a_i, X_2 = a_j] = \alpha(s_{a_j}|s_{a_i})\alpha(s_{a_i}|\emptyset)$, etc., et telle que

$$\Pr[X_1 = a_{i_1}, \dots, X_n = a_{i_n}] = \Pr[X_1 = a_{i_{\sigma(1)}}, \dots, X_n = a_{i_{\sigma(n)}}],$$

pour tout n -uplets (i_1, \dots, i_n) . Et donc les évènements $A_i \equiv \{X_i = 1\}$ sont interchangeables. Par le théorème de Finetti (voir [145] par exemple), il existe une mesure de probabilité η définie sur $[0, 1]$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\omega_k = \int_0^1 x^k d\eta(x) = \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k].$$

Mais $\omega_1 = \alpha(s_1|\emptyset) > 0$ et $\omega_2 = \alpha(s_1|s_1)\alpha(s_1|\emptyset) = 0$ (rappelons que par hypothèse, $\alpha(s_1|s_1) = 0$), ce qui est impossible. \square

GSMP avec ré-indexage [160]

Introduisons à présent l'extension des GSMP qui a permis d'étudier l'insensibilité de la file à serveur infini. Nous considérons une partition dénombrable de l'ensemble des horloges $S = \cup_{i \in I} S_i$. On associe à chacune des horloges de S_i la même distribution du temps de service B_i . Comme pour les GSMP, les transitions sont provoquées par l'expiration d'une horloge, et lors de ces transitions les temps résiduels de service des horloges encore en fonction ne sont pas modifiés. En revanche, les horloges peuvent changer de nom lors des transitions, avec comme unique condition que le nom de la nouvelle horloge choisie soit dans la même classe que l'horloge juste avant la transition. Formellement, lors d'une transition de l'état z à l'état z' due à l'expiration de l'horloge s , il existe une application R injective de $S_z \setminus \{s\}$ dans $S_{z'}$ telle que pour tout i , $R(S_z \cap S_i \setminus \{s\}) \subset S_{z'} \cap S_i$. Cette application est choisie aléatoirement, si bien que la transition de l'état z à l'état z' due à l'expiration de s et avec l'application R se réalise avec une probabilité $p(z, s, R, z')$.

Définition 2.8. Le processus $\{Z(t), X_s(t), s \in S_z, t \geq 0\}$ ainsi construit est un processus de Markov, et $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ est appelé processus semi-Markovien généralisé avec ré-indexage associé à $\Sigma = \{Z, (S_i)_{i \in I}, (S_z), (p(z, s, R, \cdot)), (c(s, z)), B_i\}$.

On a alors l'analogie du théorème 2.3 pour ce nouveau type de processus, théorème 3.1 [160].

Théorème 2.4. Considérons un GSMP avec ré-indexage tel que sa chaîne incluse soit irréductible et ergodique, de distribution stationnaire $\pi(z)$, $z \in Z$. Soit I' un sous-ensemble non vide de I tel que pour tout $i \in I \setminus I'$, B_i est exponentielle.

Supposons également que deux horloges ne peuvent être créées simultanément. Il y a équivalence entre :

- quelles que soient les distributions B_i , $i \in I'$ choisies parmi des lois de Cox, le GSMP avec ré-indexage possède une distribution stationnaire de la forme :

$$\Pr [z(t) = z, x_s(t) = x_s, s \in S_z \cap S_i, i \in I'] = \pi(z) \prod_{i \in I'} \prod_{s \in S_z \cap S_i} \mu_s (1 - B_i(x_s)). \quad (2.16)$$

- La chaîne incluse est balancée dans S_i pour tout $i \in I'$.

Ce nouveau théorème permet de traiter l'insensibilité de la file à serveur infini et même de traiter celle des files symétriques introduites par F. Kelly [93]. On définit $I = \mathbb{N}$, $S_0 = \{s_0\}$ et $S_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots\}$ pour tout $i \geq 1$. L'état z du système est soit e lorsque la file est vide, soit $(c(1), \dots, c(n))$ lorsque la file contient n clients, $c(l) \in I \setminus \{0\}$ désignant la classe du client en position l dans la file. Comme précédemment, une horloge s_0 tourne en permanence pour représenter les arrivées des clients. Ainsi, pour $z = (c(1), \dots, c(n))$, $S_z = \{s_0\} \cup \{s_{c(1),1}, \dots, s_{c(n),n}\}$. La probabilité qu'un client arrivant à la file soit de classe j est $\nu(j) / \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \nu(i)$. Les transitions du GSMP avec ré-indexage sont définis par : pour l'arrivée d'un nouveau client,

$$p((c(1), \dots, c(n)), s_0, R, (c(1), \dots, c(l-1), j, c(l), \dots, c(n))) = \gamma(l, n+1) \frac{\nu(j)}{\sum_{i \in I \setminus \{0\}} \nu(i)},$$

où l'application R renomme les clients de telle sorte que le décalage approprié soit réalisé, c'est-à-dire que pour $i < l$, $R(s_{c(i),i}) = s_{c(i),i}$, et pour $i \geq l$, $R(s_{c(i),i}) = s_{c(i),i+1}$. Ici $\gamma(l, n)$ désigne la proportion du service total de la file, que l'on notera $\phi(n)$ si n clients sont présents, dédiée au client en l -ième position dans la file. Lorsqu'on part d'une file vide,

$$p(e, s_0, R, j) = \frac{\nu(j)}{\sum_{i \in I \setminus \{0\}} \nu(i)},$$

et $R : \emptyset \rightarrow \emptyset$ est quelconque. En cas d'expiration d'une horloge (de départ d'un client), la transition est

$$p((c(1), \dots, c(n)), s_{c(l),l}, R, (c(1), \dots, c(l-1), c(l+1), \dots, c(n))) = 1,$$

avec encore une fois R réalisant le décalage des horloges, pour $i < l$, $R(s_{c(i),i}) = s_{c(i),i}$, et pour $i \geq l+1$, $R(s_{c(i),i}) = s_{c(i),i-1}$.

Les vitesses des horloges sont alors données par $c(s_0, z) = 1$ et $c(s_{c(t), l}, z) = \gamma(l, n)\phi(n)$ pour $z = (c(1), \dots, c(n))$. La file symétrique est par conséquent bien représentée et il est facile de vérifier que la chaîne incluse est balancée dans S_i , $i \geq 1$. Par conséquent, le théorème 2.4 peut être appliqué et l'insensibilité des files symétriques est caractérisée, mais au prix de quels efforts !

De manière similaire, on peut construire un R-GSMP représentant un réseau de files PS à capacités dépendant de l'état. En fait, on peut représenter plus généralement un réseau de J files symétriques dont les capacités dépendent de l'état (il suffit d'étendre l'ensemble des classes d'horloge à $I = \mathbb{N}^J$ et de reprendre la construction précédente ($\phi(n)$ devient $\phi_j(n)$ pour $j = 1, \dots, J$). On peut alors vérifier que la balance de la chaîne incluse est équivalente à la balance des capacités ϕ_j .

Un peu après R. Schassberger, M. Miyasawa [126] a introduit lui-aussi une extension des GSMP classiques, les R-GSMP (R pour reallocated) encore un peu plus générale que les processus avec ré-indexage imaginés par R. Schassberger. Pour les R-GSMP, on montre également l'équivalence entre balance locale de la chaîne incluse et existence d'une forme produit du type (2.16) pour la distribution stationnaire décrivant le système (théorème 4.1, [126]). Par souci de simplicité, nous préférons ne pas entrer dans les détails. L'intérêt des R-GSMP est de pouvoir caractériser la distribution stationnaire de processus complexes tels que ceux des files d'attente à interruption de service, mais également les réseaux avec clients *négatifs* introduits par E. Gelenbe [74].

Les extensions des GSMP que nous venons d'évoquer permettent de donner une condition suffisante d'insensibilité des réseaux usuels et moins usuels : en effet, si la distribution stationnaire du système est de la forme (2.16), le système est insensible. Par conséquent, on arrive à la même conclusion en supposant que la chaîne incluse est localement balancée. Malheureusement, la réciproque n'est pas vraie en général pour les processus avec ré-indexage ou pour les R-GSMP comme le montre la remarque 5.1 de [126] : l'insensibilité n'est pas équivalente à la balance locale. Nous proposons cependant de montrer cette équivalence dans le cas plus restreint des réseaux de files PS à capacités et routage dépendant de l'état. Les démonstrations ont également l'avantage de la clarté et de la simplicité.

2.3.2 Condition nécessaire et suffisante d'insensibilité dans les réseaux PS

Le théorème 2.1 a montré que la distribution stationnaire d'un réseau de Whittle ne dépendait des taux d'arrivées, du routage et des moyennes des temps de service à chaque file qu'à travers les charges de chaque file ρ_1, \dots, ρ_N . Les réseaux de Whittle sont également connus pour être insensibles aux distributions des temps de service. En fait, si pour les temps de service, on se restreint aux distributions du type Cox, qui forment un sous-ensemble dense dans l'ensemble des distributions, cette insensibilité peut être établie simplement.

Proposition 2.4. *La distribution stationnaire d'un réseau de Whittle ne dépend pas des distributions des temps de service, si ces dernières sont des distributions de Cox.*

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la proposition 2.1. Considérons un réseau PS tel que la capacité totale des nœuds 1 et 2 ne dépende des nombres de clients à ces nœuds qu'à travers

leur somme et tel que cette capacité soit équitablement répartié entre ces clients. En combinant les résultats du théorème 2.1 et de la proposition 2.1, on obtient une mesure invariante du réseau :

$$\pi(x) = \binom{x_1 + x_2}{x_1} \tilde{\Phi}(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_N) \prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i}. \quad (2.17)$$

En particulier, une mesure invariante $\tilde{\pi}$ des nombres de clients aux nœuds $1 + 2, 3, \dots, N$ est donnée par :

$$\tilde{\pi}(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_N) = \tilde{\Phi}(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_N) (\rho_1 + \rho_2)^{x_1 + x_2} \prod_{i=3}^N \rho_i^{x_i}.$$

A présent, considérons un réseau de Whittle où l'on remplace les distributions des temps de service exponentielles à chaque nœud i par une distribution de Cox de même moyenne et possédant P_i phases. On construit alors très naturellement un nouveau réseau de Whittle de $P_1 + \dots + P_N$ nœuds. Et d'après ce qui précède, la distribution des nombres totaux de clients présents dans les P_1, \dots, P_N nœuds reste inchangée. Le résultat voulu en découle. \square

On montre en fait que les réseaux de Whittle sont les seuls réseaux PS insensibles.

Théorème 2.5. *Un réseau PS est un réseau de Whittle si et seulement si les mesures invariantes de X restent inchangées lorsqu'à n'importe quel nœud i et pour tout réel α_i tel que $0 < \alpha_i < 1$, les clients demandent un service exponentiel de moyenne $1/\alpha_i \times 1/\mu_i$ avec probabilité α_i ou un service nul avec probabilité $1 - \alpha_i$.*

Preuve. Au vu de la remarque 2.1, on peut supposer que le réseau de Whittle est initialement sans bouclage. Changeons le temps de service requis au nœud 1 par un service exponentiel de moyenne $1/\alpha \times 1/\mu_1$ avec probabilité α et un service nul avec probabilité $1 - \alpha$. Le réseau ainsi obtenu est un réseau PS dont les caractéristiques sont :

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_1 = \alpha \nu_1, \\ \tilde{\nu}_i = \nu_i + \nu_1 (1 - \alpha) p_{1i}, & \text{pour } i \neq 1, \\ \tilde{\mu}_1 = \alpha \mu_1, \quad \tilde{\mu}_i = \mu_i, & \text{pour } i \neq 1, \\ \tilde{p}_{1i} = p_{1i}, \quad \tilde{p}_{i1} = p_{i1} \alpha, \\ \tilde{p}_{ij} = p_{ij} + p_{i1} (1 - \alpha) p_{1j}, & \text{pour } i, j \neq 1. \end{cases}$$

Remarquons que l'on a introduit du bouclage dans ce nouveau réseau, car $\tilde{p}_{ii} = p_{i1} p_{1i}$: une nouvelle fois la remarque 2.1 nous permet de nous en affranchir.

Supposons dans un premier temps que le réseau initial est un réseau de Whittle. Toute mesure invariante π de ce réseau vérifie les équations de balance partielle (2.11) et (2.12) ; et il est facile de vérifier que ces mesures invariantes vérifient également les équations de balance partielle (2.11) et (2.12) correspondant au nouveau réseau.

Réciproquement, considérons un réseau PS dont les mesures invariantes restent inchangées lorsque les clients arrivant au nœud 1 demandent un service $1/\alpha \times 1/\mu_1$ avec probabilité α et

un service nul avec probabilité $1 - \alpha$. Les équations de balance de ce nouveau réseau sont donc vérifiées par les mesures invariantes initiales π :

$$\pi(x) \sum_i (\tilde{\nu}_i + \phi_i(x) \tilde{\mu}_i) = \sum_i \pi(T_i x) \tilde{\nu}_i + \sum_{i,j} \pi(T_i^j x) \phi_j(T_i^j x) \tilde{\mu}_j \tilde{p}_{ji} + \sum_i \pi(T^i x) \phi_i(T^i x) \tilde{\mu}_i \tilde{p}_i.$$

En remplaçant les paramètres du réseau par leurs valeurs, et en faisant tendre α vers 0, on obtient :

$$\pi(x) \sum_{i \neq 1} (\phi_i(x) \mu_i + \bar{\nu}_i) = \sum_{i \neq 1} \pi(T_i x) \bar{\nu}_i + \sum_{i,j \neq 1} \pi(T_{ij} x) \phi_j(T_{ij} x) \mu_j \bar{p}_{ji} + \sum_{i \neq 1} \pi(T^i x) \phi_i(T^i x) \mu_i \bar{p}_i.$$

avec $\bar{\nu}_i = \nu_i + \nu_1 p_{1i}$, $\bar{p}_{ij} = p_{ij} + p_{i1} p_{1j}$, et $\bar{p}_i = 1 - \sum_{j \neq 1} \bar{p}_{ij}$, pour $i, j \neq 1$. Nous remarquons alors que si l'on fixe x_1 , les équations de balance précédentes peuvent être interprétées comme celles d'un réseau de $N - 1$ nœuds : $\pi(x_1, \cdot)$ est une mesure invariante du réseau PS constitué des nœuds $2, \dots, N$ de capacités $\phi_2(x_1, \cdot), \dots, \phi_N(x_1, \cdot)$.

En appliquant successivement la procédure que nous venons de décrire, on montre que, pour tout $j < N$, si l'on fixe x_1, \dots, x_j , $\pi(x_1, \dots, x_j, \cdot)$ est une mesure invariante du réseau PS constitué des nœuds $j+1, \dots, N$ de capacités $\phi_{j+1}(x_1, \dots, x_j, \cdot), \dots, \phi_N(x_1, \dots, x_j, \cdot)$. En particulier, pour $j = N - 1$, cela implique que π vérifie des équations du type :

$$\pi(x) (\phi_N(x) \mu_N + \bar{\nu}_N) = \pi(T_N x) \bar{\nu}_N + \pi(x) \phi_N(x) \mu_N \bar{p}_{NN} + \pi(T^N x) \phi_N(T^N x) \mu_N (1 - \bar{p}_{NN}),$$

avec $\bar{\nu}_N = \lambda_N (1 - \bar{p}_{NN})$. Ce sont les équations d'un processus de naissance et de mort et donc nécessairement, on doit avoir :

$$\pi(x) \phi_N(x) = \pi(T_N x) \rho_N.$$

Tous les nœuds étant équivalents, on en conclut que :

$$\pi(x) \phi_i(x) = \pi(T_i x) \rho_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ainsi les capacités ϕ_i sont balancées par la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = \frac{\pi(x)}{\prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i}}.$$

Nous avons donc à faire à un réseau de Whittle. □

Le fait que les mesures invariantes de X ne dépendent des taux d'arrivée, des taux de service et du routage qu'à travers les charges ρ_1, \dots, ρ_N caractérise également les réseaux de Whittle parmi les réseaux PS. C'est ce que nous enseignent les deux corollaires suivants. Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur ces différentes formes (et d'autres encore) d'insensibilité.

Corollaire 2.1. *Considérons un réseau PS sans routage $p_{ij} = 0$, pour tout i, j . C'est un réseau de Whittle si et seulement si les mesures invariantes de X ne dépendent des taux d'arrivée de clients et des taux de service qu'à travers les charges ρ_1, \dots, ρ_N .*

Preuve. Supposons que les mesures invariantes restent inchangées quand on multiplie les taux d'arrivée de clients exogènes et les taux de service par des facteurs identiques α_i , avec $0 < \alpha_i < 1$. Ces opérations correspondent en fait strictement aux modifications du réseau telles qu'envisagées dans le théorème 2.5. Le corollaire est donc une conséquence de ce théorème. \square

Corollaire 2.2. *Un réseau PS est un réseau de Whittle si et seulement si les mesures invariantes de X ne dépendent des taux d'arrivée de clients exogènes et du routage qu'à travers le taux d'arrivées effectifs de clients aux différents nœuds $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.*

Preuve. Effectuons le changement suivant : pour $0 < \alpha_1 < 1$,

- taux d'arrivée de clients exogènes : $\tilde{\nu}_1 = \alpha_1 \nu_1$, $\tilde{\nu}_i = \nu_i + \nu_1(1 - \alpha_1)p_{1i}$ pour $i \neq 1$.
- Routage : $\tilde{p}_{11} = 1 - \alpha_1$, $\tilde{p}_{1i} = p_{1i}\alpha_1$ et $\tilde{p}_{i1} = p_{i1}\alpha_1$ pour $i \neq 1$, $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} + p_{i1}(1 - \alpha_1)p_{1j}$ pour $i, j \neq 1$.

Encore une fois cette transformation correspond à celle du théorème 2.5, et le corollaire est démontré. \square

2.3.3 Insensibilité dans les réseaux PS fermés ou mixtes

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des réseaux PS ouverts. Les réseaux fermés ou mixtes correspondant s'étudient de la même façon. On considère donc une population finie de M clients dans le réseau. On peut supposer dans un premier temps que le routage est *irréductible*, c'est-à-dire que tous les nœuds sont presque sûrement visités par tous les clients. Les équations de trafic suivantes déterminent à une constante multiplicative près la fréquence des arrivées aux différents nœuds :

$$\lambda_i = \sum_j \lambda_j p_{ji}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Dans la suite, on prendra toujours les λ_i de telle sorte que $\sum_i \lambda_i = 1$. On définit également la charge d'un nœud par $\rho_i \equiv \lambda_i / \mu_i$. Avec ces conventions, si le réseau est un réseau de Whittle, la distribution stationnaire du système est donnée par le théorème 2.1 (2.10).

Réseaux fermés avec une source

On introduit maintenant un nœud 0 qui joue le rôle d'une source (dans les réseaux de télécommunications avec un nombre fini de clients, cette source jouera le rôle d'un temps de réflexion des clients entre deux transmissions de flot). La capacité ψ_0 de la source ne dépend que du nombre de clients présents à ce nœud (typiquement, une source est un serveur infini). Si $x = (x_1, \dots, x_N)$ désigne l'état du système (source non comprise), la capacité de la source se met sous la forme $\phi_0 = \psi_0(M - |x|)$ et les capacités des autres nœuds sont des fonctions de x uniquement. Avec cette hypothèse, le réseau considéré est effectivement un réseau de Whittle si et seulement si les capacités des nœuds $1, \dots, N$ sont balancées par une fonction Φ .

Le processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ décrivant l'évolution du nombre de clients aux nœuds $1, \dots, N$ est un processus de Markov irréductible (car le routage est irréductible) et donc récurrent (car l'espace d'état est fini). Nous avons alors l'analogie du théorème 2.1.

Théorème 2.6. *Pour le réseau de Whittle irréductible fermé avec une source, une mesure invariante de X est :*

$$\pi(x) = \Phi(x) \prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i} \prod_{n=1}^{M-|x|} \frac{\rho_0}{\psi_0(n)}.$$

A l'instar des réseaux de Whittle ouverts, les réseaux de Whittle fermés sont insensibles aux distributions des temps de service. Et une nouvelle fois, cette propriété caractérise les réseaux de Whittle parmi les réseaux PS fermés.

Théorème 2.7. *Un réseau PS irréductible fermé est un réseau de Whittle si et seulement si les mesures invariantes de X demeurent inchangées quand à chaque nœud i , et pour tout α_i tel que $0 < \alpha_i < 1$, les clients requièrent un service exponentiel de moyenne $1/\alpha_i \times 1/\mu_i$ avec probabilité α_i et un service nul avec probabilité $1 - \alpha_i$.*

Preuve. Supposons que le réseau soit un réseau de Whittle, comme pour les réseaux ouverts, il est facile de voir que les mesures invariantes restent inchangées lorsqu'on effectue les opérations décrites dans le théorème.

Réciproquement considérons un réseau PS fermé dont les mesures invariantes restent inchangées par ces opérations. Supposons par exemple que le réseau a une source 0 (la démonstration reste identique dans le cas contraire). Soit π une mesure invariante. Alors comme dans le cas des réseaux ouverts, on peut montrer, en effectuant successivement, les opérations décrites dans la preuve du théorème 2.5 sur les nœuds $1, \dots, N-1$, que pour x_1, \dots, x_{N-1} fixés, $\pi(x_1, \dots, x_{N-1}, \cdot)$ est une mesure invariante du réseau PS fermé avec $M - x_1 - \dots - x_{N-1}$ clients et constitué de la source et du nœud de capacité $\phi_N(x_1, \dots, x_{N-1}, \cdot)$. π vérifie une relation du type :

$$\begin{aligned} \pi(x)(\phi_0(x)\mu_0(1 - \bar{p}_{00}) + \phi_N(x)\mu_N(1 - \bar{p}_{NN})) = \\ \pi(T_N x)\phi_0(T_N x)\mu_0(1 - \bar{p}_{00}) + \pi(T^N x)\phi_N(T^N x)\mu_N(1 - \bar{p}_{NN}), \end{aligned}$$

On retrouve encore des équations de balance d'un processus de naissance et de mort et on en déduit simplement que :

$$\pi(x)\phi_N(x)\rho_0 = \pi(T_N x)\phi_0(T_N x)\rho_N.$$

Les nœuds $1, \dots, N$ étant tous équivalents, nous avons

$$\pi(x)\phi_i(x)\rho_0 = \pi(T_i x)\phi_0(T_i x)\rho_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ainsi les capacités ϕ_1, \dots, ϕ_N sont balancées par la fonction Φ définie par

$$\Phi(x) = \frac{\pi(x)}{\prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i}} \prod_{n=1}^{M-|x|} \frac{\psi_0(n)}{\rho_0}.$$

Et le réseau est un réseau de Whittle. □

De même que pour les réseaux ouverts, l'insensibilité au routage caractérise les réseaux de Whittle. Le corollaire suivant et dont la démonstration est similaire à celle du corollaire 2.2, formalise ce résultat.

Corollaire 2.3. *Un réseau PS fermé irréductible est un réseau de Whittle si et seulement si les mesures invariantes de X ne dépendent du routage qu'à travers les fréquences des arrivées aux différents nœuds $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.*

Réseaux PS à routages réductibles

Des résultats similaires existent lorsque le routage n'est pas irréductible. Soient c_1, \dots, c_K les classes de communication du routage. Chaque classe c_k est visitée par un nombre fixé de clients M_k . Supposons par exemple que chaque classe possède une source. Les équations de trafic par classe sont :

$$\lambda_i = \sum_{j \in c_k} \lambda_j p_{ji}, \quad i \in c_k,$$

avec $\sum_{i \in c_k} \lambda_i = 1$. Notons i_k la source de la classe c_k . On définit $\rho_k = \lambda_{i_k} / \mu_{i_k}$ et $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ pour $i \in c_k \setminus \{i_k\}$. Soit N le nombre de nœuds autres que les sources, c'est-à-dire, les nœuds de l'ensemble $\cup_k (c_k \setminus \{i_k\})$. L'état du système est décrit par $x = (x_1, \dots, x_N)$. Si les capacités ϕ_1, \dots, ϕ_N sont balancées par une fonction Φ , une mesure invariante π de X est

$$\pi(x) = \Phi(x) \prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i} \prod_{k=1}^K \prod_{n=1}^{M_k - \sum_{i \in c_k \setminus \{i_k\}} x_i} \frac{\rho_k}{\psi_k(n)}. \quad (2.18)$$

Le théorème 2.7 et le corollaire 2.3 sont toujours valables dans ce cas.

2.4 Performance dans les réseaux de Whittle

Intéressons nous maintenant à la performance des réseaux PS, donnée par le temps de séjour des clients dans un nœud du réseau ou dans une partie du réseau. Les valeurs moyennes de ces temps de séjour sont assez facilement calculables, grâce notamment à la formule de Little [9, 163].

2.4.1 Temps de séjour moyen

Considérons un réseau PS, que nous supposons positif récurrent et à l'état stationnaire à $t = 0$. Nous notons S_i le temps de séjour des clients au nœud i . En appliquant la formule de Little, on obtient :

$$E[x_i] = \lambda_i E_i[S_i],$$

où E_i est l'espérance prise par rapport à la probabilité de Palm associée au processus ponctuel des arrivées des clients au nœud i [9]. On peut alors définir un débit moyen au nœud i par le rapport du service moyen demandé par les clients à ce nœud par le temps de séjour moyen :

$$\gamma_i \equiv \frac{1/\mu_i}{E_i[S_i]} = \frac{\rho_i}{E[x_i]}. \quad (2.19)$$

Plus généralement, notons S_I le temps de séjour des clients aux nœuds de l'ensemble I (c'est le temps de séjour du premier client arrivant à un des nœuds de I). La formule de Little nous donne

à nouveau :

$$\sum_{i \in I} E[x_i] = \lambda_I E_I[S_I],$$

où E_I est l'espérance sous la probabilité de Palm associée au processus ponctuel des arrivées de clients dans un des nœuds de I . λ_I est le taux d'arrivée des clients aux nœuds I , défini par :

$$\lambda_I = \sum_{i \in I} \left(\nu_i + \sum_{j \notin I} \lambda_j p_{ji} \right).$$

Notons $1/\mu_I$ le temps moyen de service requis par les clients aux nœuds I , défini par $\lambda_I/\mu_I = \sum_{i \in I} \rho_i$. On peut encore définir le débit moyen aux nœuds I :

$$\gamma_I \equiv \frac{1/\mu_I}{E_I[S_I]} = \frac{\sum_{i \in I} \rho_i}{\sum_{i \in I} E[x_i]}. \quad (2.20)$$

Cas des réseaux fermés

Les réseaux fermés se traitent comme les réseaux ouverts, si ce n'est que la définition des taux d'arrivée de clients sont un peu plus complexes. Dans le cas où le routage est irréductible, le taux d'arrivée au nœud i est donné par :

$$\frac{\sum_x \pi(x) \phi_i(x) \mu_i}{\sum_x \pi(x)} = \frac{\theta_{M-1}}{\theta_M} \lambda_i,$$

où θ_M est la constante de normalisation associée avec la mesure invariante π donnée dans le théorème 2.6 avec M clients dans le réseau.

De la même façon, pour un routage réductible, le taux d'arrivée des clients au nœud i de la classe de communication c_k s'exprime sous la forme :

$$\frac{\sum_x \pi(x) \phi_i(x) \mu_i}{\sum_x \pi(x)} = \frac{\theta_{M_1, \dots, M_k-1, \dots, M_K}}{\theta_{M_1, \dots, M_k, \dots, M_K}} \lambda_i,$$

où $\theta_{M_1, \dots, M_k, \dots, M_K}$ est la constante de normalisation associée avec la mesure invariante π donnée par (2.18) avec M_k clients dans la classe c_k .

2.4.2 Temps de séjour conditionnel

Une autre propriété intéressante des réseaux de Whittle, liée à celle d'insensibilité, est que le temps de séjour moyen d'un client demandant un service s au nœud i est proportionnel à s . Ce résultat est une conséquence directe de la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Considérons un réseau de Whittle tel que la capacité totale des nœuds I ne dépende du nombre de clients présents à ces nœuds qu'à travers leur somme et soit partagée équitablement entre ces clients. C'est-à-dire :*

$$\frac{\sum_{i \in I} \phi_i(x)}{\sum_{i \in I} x_i} = \frac{\phi_i(x)}{x_i}, \quad i \in I, x_i > 0.$$

Alors, $\gamma_I = \gamma_i$, pour tout $i \in I$.

Preuve. La preuve est donnée par (2.17) qui implique que :

$$\frac{\rho_i}{E[x_i]} = \frac{\rho_j}{E[x_j]}, \quad \forall i, j \in I.$$

Ainsi, $\gamma_i = \gamma_I, \forall i \in I$. □

Proposition 2.6. *Considérons un réseau de Whittle et notons σ_i le service requis d'un client au nœud i . Alors, pour tout $s > 0$,*

$$\gamma_i = \frac{s}{E_i[S_i | \sigma_i = s]}.$$

Preuve. On montre d'abord le résultat dans le cas où σ_i est une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini. On remplace le nœud i par un ensemble de nœuds indexés par les valeurs possibles de σ_i . Ces nœuds se partagent la capacité $\phi_i(x)$. La proposition 2.5 permet de conclure. A présent, lorsque σ_i peut prendre une infinité de valeurs, il suffit d'approximer σ_i par une suite de variables aléatoires $\tilde{\sigma}_{i,n}$ à valeurs dans un ensemble fini. Par exemple, on peut prendre $n = p2^p$, et $\tilde{\sigma}_{i,n} \in \{0, 2^{-p}, \dots, n \times 2^{-p}\}$, de telle manière que $\Pr[\tilde{\sigma}_{i,n} = j2^{-p}]$ soit proportionnelle à $\Pr[\sigma_i \in (j2^{-p}, (j+1)2^{-p})]$. On montre alors que toutes les mesures de performance du réseau où les σ_i ont été remplacés par $\tilde{\sigma}_{i,n}$ convergent en décroissant vers celles du réseau initial. □

Le lecteur trouvera dans [127] une preuve de ce résultat dans le cadre plus général des systèmes R-GSMP.

2.5 Routage dépendant de l'état dans les réseaux de Whittle

Une extension possible des réseaux de Whittle est obtenue en faisant dépendre les taux d'arrivée de clients exogènes et le routage de l'état du système. Ce type de généralisation peut être intéressante lorsque l'on veut modéliser un blocage ou un reroutage sous certaines conditions. Il existe une littérature assez fournie sur le sujet [49, 128, 164, 165], à laquelle il faut ajouter celle sur les GSMP ou plutôt leurs extensions (car ces processus ont au moins le mérite d'être assez généraux pour couvrir le routage dépendant de l'état).

Nous donnons une nouvelle fois une condition nécessaire et suffisante d'insensibilité dans ces réseaux. Cette condition est très générale, couvre tous les réseaux insensibles connus, et permet d'en construire de nouveaux. Nous exhibons notamment des réseaux insensibles pour lesquels les capacités ne sont pas forcément balancées.

On propose dans les deux sous-parties suivantes deux exemples de réseaux à routage dépendant de l'état et qui possèdent une distribution stationnaire explicite.

2.5.1 Réseaux à forme produit

Un réseau de N nœuds est dit à forme produit si les mesures invariantes π peuvent se mettre sous la forme :

$$\pi(x) = \prod_{j=1}^N \pi_j(x_j).$$

Un certain nombre de travaux tentent de caractériser les réseaux à transitions dépendant de l'état et à forme produit. C'est notamment le cas de [49] qui fournit un bon état de l'art pour ce type d'étude. Dans [49], est étudié le cas où les taux de transitions à un nœud ne dépendent que de la population à ce nœud. Plus précisément, on considère les taux de transitions $q(x, y)$ d'un état x à un état y de la forme :

$$q(x, y) = \sum_{j, k: j \neq k} q_j^d(x_j, y_j) r_{jk} q_k^a(x_k, y_k).$$

Nous supposons qu'il s'agit ici d'un réseau sans bouclage, c'est-à-dire que $r_{jj} = 0$.

Dans le cas de réseau de file d'attente par exemple, ce type de transition peut prendre la forme suivante :

$$\begin{aligned} q_j^a(x_j, y_j) &= a_j(x_j) 1_{y_j = x_j + 1}, \\ q_j^d(x_j, y_j) &= d_j(x_j) 1_{y_j = x_j - 1}. \end{aligned}$$

Nous avons ici implicitement considéré un réseau fermé. Pour passer aux réseaux ouverts, il suffit d'introduire un nœud supplémentaire jouant le rôle de la source.

Considérons à présent un processus de Markov correspondant aux changements d'états au nœud j de noyau de transition :

$$q_j(x_j, y_j) = \beta_j^a q_j^a(x_j, y_j) + \beta_j^d q_j^d(x_j, y_j). \quad (2.21)$$

Les variables β_j^a et β_j^d sont pour l'instant arbitraires, le but étant de déterminer les valeurs de ces variables telles que la distribution stationnaire associée à q_j soit la j -ième marginale de la distribution stationnaire du réseau initial.

Introduisons les notations suivantes : soit π_j une mesure de probabilité sur \mathbb{N} ,

$$\begin{cases} \alpha_j^a(x_j) = \sum_{y_j} q_j^a(x_j, y_j), \\ \tilde{\alpha}_j^a(x_j) = \pi_j(x_j)^{-1} \sum_{y_j} \pi_j(y_j) q_j^a(y_j, x_j), \\ \bar{\alpha}_j^a = \sum_{x_j, y_j} \pi_j(x_j) q_j^a(x_j, y_j), \\ \alpha_j^d(x_j) = \sum_{y_j} q_j^d(x_j, y_j), \\ \tilde{\alpha}_j^d(x_j) = \pi_j(x_j)^{-1} \sum_{y_j} \pi_j(y_j) q_j^d(y_j, x_j), \\ \bar{\alpha}_j^d = \sum_{x_j, y_j} \pi_j(x_j) q_j^d(x_j, y_j), \end{cases}$$

Enfin, notons :

$$D_{jk}(x_j, x_k) = (\bar{\alpha}_j^d - \alpha_j^d(x_j) r_{jk} (\bar{\alpha}_k^a - \alpha_k^a(x_k))) - (\bar{\alpha}_k^d - \alpha_k^d(x_k)) r_{kj} (\bar{\alpha}_j^a - \alpha_j^a(x_j)).$$

Le théorème suivant [49] caractérise les processus à forme produit :

Théorème 2.8. *La distribution stationnaire du processus associé à q est $\pi(x) = \prod_{j=1}^N \pi_j(x_j)$ si et seulement si π_j est la distribution stationnaire du processus associé à q_j pour les coefficients β_j^a et β_j^d définis par :*

$$\begin{cases} \beta_j^a = \sum_{k \neq j} \bar{\alpha}_k^d r_{kj}, \\ \beta_j^d = \sum_{k \neq j} \bar{\alpha}_k^a r_{jk}, \end{cases}$$

et

$$D_{jk}(x_j, x_k) + D_{kj}(x_k, x_j) = 0, \quad j \neq k.$$

Ce résultat est très général, mais on doit remarquer que la vérification des conditions menant à la forme produit est une tâche le plus souvent difficile.

2.5.2 D'autres réseaux à distribution stationnaire explicite

R. Serfozo [163] considère les réseaux pour lesquels les taux de transition sont définis par

$$q(x, y) = \begin{cases} \phi_j(x) \omega_{jk}(x), & \text{si } y = T_j^k x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Les μ_j sont contenus dans les probabilités de routage w_{jk} . Il existe des conditions sur les w_{jk} telles que la distribution stationnaire du système soit connue.

Proposition 2.7. *Pour le processus X avec noyau de transition (2.22), si les capacités ϕ_i sont balancées par la fonction Φ , et s'il existe une fonction positive Ω telle que*

$$\Omega(x) \sum_k \omega_{jk}(x) = \sum_k \Omega(T_j^k x) \omega_{kj}(T_j^k x), \quad x_j \geq 1,$$

Alors une mesure invariante de X est :

$$\pi(x) = \Phi(x) \Omega(x).$$

2.5.3 Condition nécessaire et suffisante d'insensibilité

On note $\nu_i(x)$ et $p_{ij}(x)$ les taux d'arrivée de clients externes et les probabilités de routage dépendant de l'état. Pour fixer les idées, on se focalise sur les réseaux ouverts, bien que des résultats semblables existent pour les réseaux fermés.

Supposons que pour tout état x , le système d'équations suivant possède une solution unique $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$:

$$\lambda_i(x) = \nu_i(x) + \sum_j \lambda_j(x) p_{ji}(T^j x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.23)$$

On appelle $\rho_i(x) = \lambda_i(x) / \mu_i$ l'intensité du trafic au nœud i à l'état x . Les équations de mesure invariante du processus de Markov X correspondant sont :

$$\begin{aligned} \pi(x) \sum_i (\nu_i(x) + \phi_i(x) \mu_i) &= \sum_i \pi(T_i x) \nu_i(T_i x) \\ &+ \sum_{i,j} \pi(T_i^j x) \phi_j(T_i^j x) \mu_j p_{ji}(T_i^j x) + \sum_i \pi(T^i x) \phi_i(T^i x) \mu_i p_i(T^i x). \end{aligned}$$

Le théorème 2.1 et la proposition 2.1 se généralisent de la façon suivante. Soit ψ_i la fonction définie par

$$\psi_i(x) = \frac{\rho_i(T_i x)}{\phi_i(x)}, \quad x_i > 0.$$

Théorème 2.9. *Si les fonctions ψ_1, \dots, ψ_N sont balancées, une mesure invariante de X est donnée par :*

$$\pi(x) = \psi_{i_1}(x)\psi_{i_2}(T_{i_1}x) \dots \psi_{i_n}(T_{i_{n-1}} \dots T_{i_1}x),$$

où $\langle x, T_{i_1}x, \dots, T_{i_{n-1}} \dots T_{i_1}x, 0 \rangle$ est un chemin quelconque de longueur $n = \sum_i x_i$ de l'état x à l'état 0 .

Preuve. Comme pour le théorème 2.1, la preuve de ce résultat consiste simplement à vérifier des équations de balance partielle du type (2.12) et (2.11). \square

Remarque 2.2. *Si ϕ_1, \dots, ϕ_N sont balancées par Φ , ψ_1, \dots, ψ_N sont balancées par Ψ si et seulement si $\rho_1(T_1 \cdot), \dots, \rho_N(T_N \cdot)$ sont balancées par $\Phi \times \Psi$.*

Proposition 2.8. *Supposons que la capacité totale de deux nœuds, par exemple 1 and 2, ne dépendent des nombres de clients présents à ces nœuds qu'à travers leur somme et que cette capacité est partagée équitablement entre ces clients, c'est-à-dire*

$$\frac{\phi_1(x)}{x_1} = \frac{\phi_2(x)}{x_2} = \frac{\phi_1(x) + \phi_2(x)}{x_1 + x_2}, \quad x_1, x_2 > 0.$$

Supposons de plus que $\rho_1(T_1x) + \rho_2(T_2x)$ ne dépend de x_1, x_2 qu'à travers leur somme et qu'il existe des constantes w_1, w_2 telles que,

$$\frac{\rho_1(T_1x)}{w_1} = \frac{\rho_2(T_2x)}{w_2} = \frac{\rho_1(T_1x) + \rho_2(T_2x)}{w_1 + w_2}, \quad x_1, x_2 > 0.$$

Alors ψ_1, \dots, ψ_N sont balancées par Ψ si et seulement si $\frac{\rho_1(T_1 \cdot) + \rho_2(T_2 \cdot)}{\phi_1 + \phi_2}, \psi_3, \dots, \psi_N$ sont balancées par $\tilde{\Psi}$, avec

$$\tilde{\Psi}(x)^{-1} = \binom{x_1 + x_2}{x_1} \frac{w_1^{x_1} w_2^{x_2}}{(w_1 + w_2)^{x_1 + x_2}} \tilde{\Psi}(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_N)^{-1}.$$

Preuve. La proposition est une conséquence directe de :

$$\frac{\rho_1(T_1x)}{\phi_1(x)} = \frac{x_1 + x_2}{x_1} \times \frac{w_1}{w_1 + w_2} \times \frac{\rho_1(T_1x) + \rho_2(T_2x)}{\phi_1(x) + \phi_2(x)}, \quad x_1, x_2 > 0. \quad \square$$

Nous pouvons à partir de ce résultat montrer que si les fonctions ψ_1, \dots, ψ_N sont balancées, les mesures invariantes de X sont insensibles aux distributions des services requis. Réciproquement, l'insensibilité implique la balance des fonctions ψ_1, \dots, ψ_N .

Théorème 2.10. *Les fonctions ψ_1, \dots, ψ_N sont balancées si et seulement si les mesures invariantes de X restent inchangées lorsque pour tout i et tout α_i avec $0 < \alpha_i < 1$, les clients arrivant au nœud i demandent un service exponentiellement distribué de moyenne $1/\alpha_i \times 1/\mu_i$ avec probabilité α_i et un service nul avec probabilité $1 - \alpha_i$.*

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 2.5. Quand le service requis au nœud 1 est modifié en un service exponentiellement distribué de moyenne $1/\alpha_1 \times 1/\mu_1$ avec probabilité $\alpha_1 > 0$ ou en un service nul avec probabilité $1 - \alpha_1$, le nouveau réseau PS avec transitions dépendant de l'état est caractérisé par :

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_1(x) = \alpha_1 \nu_1(x), \\ \tilde{\nu}_i(x) = \nu_i(x) + \nu_1(x)(1 - \alpha_1)p_{1i}(T^1 x) & \text{pour } i \neq 1, \\ \tilde{\mu}_1 = \alpha_1 \mu_1 \text{ et } \tilde{\mu}_i = \mu_i & \text{pour } i \neq 1, \\ \tilde{p}_{1i}(x) = p_{1i}(x), \tilde{p}_{i1}(x) = \alpha_1 p_{i1}(x), \\ \tilde{p}_{ij}(x) = p_{ij}(x) + p_{i1}(x)(1 - \alpha_1)p_{1j}(T_i^1 x) & \text{pour } i, j \neq 1. \end{cases}$$

□

Le théorème 2.10 caractérise les réseaux insensibles avec taux d'arrivée et routage dépendant de l'état. Dans le cas où le réseau est effectivement insensible et où le processus correspondant est positif récurrent, les temps de séjour moyens (conditionnels) sont calculables et toujours proportionnels au service requis.

2.5.4 Exemple à deux nœuds

Afin de clarifier les résultats et les démonstrations évoqués dans le cas d'un réseau général, nous traitons en détails le cas d'un réseau à deux nœuds. Nous supposons toujours en vertu de la remarque (2.1) qu'il n'y a pas de boucles dans le réseau, c'est-à-dire que $p_{11}(x) = p_{22}(x) = 0$ pour tout x .

Les équations de mesure invariante sont :

$$\begin{aligned} \pi(x) (\nu_1(x) + \nu_2(x) + \mu_1 \phi_1(x) + \mu_2 \phi_2(x)) &= \pi(T_1 x) \nu_1(T_1 x) + \pi(T_2 x) \nu_2(T_2 x) \\ &+ \pi(T_2^1 x) \phi_1(T_2^1 x) \mu_1 p_{12}(T_2^1 x) + \pi(T_1^2 x) \phi_2(T_1^2 x) \mu_2 p_{21}(T_1^2 x) \\ &+ \pi(T^1 x) \phi_1(T^1 x) \mu_1 (1 - p_{12}(T^1 x)) + \pi(T^2 x) \phi_2(T^2 x) \mu_2 (1 - p_{21}(T^2 x)). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Au nœud 1, on remplace le service par un service exponentiellement distribué de moyenne $1/\alpha \times \mu_1$ avec probabilité α et par un service nul avec probabilité $1 - \alpha$. S'il existe une mesure invariante insensible π , elle doit vérifier les équations de mesures invariantes de ce nouveau réseau. Lorsque α tend vers 0, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi(x) (\nu_2(x) + \nu_1(x)p_{12}(T^1 x) + \mu_2 \phi_2(x)) &= \\ \pi(T_2 x) (\nu_2(T_2 x) + \nu_1(T_2 x)p_{12}(T_2^1 x)) &+ \pi(T^2 x) \phi_2(T^2 x) \mu_2 (1 - p_{21}(T^2 x)p_{12}(T^1 x)). \end{aligned}$$

On reconnaît les équations de mesure invariante d'un processus de naissance et de mort et par conséquent, on a également :

$$\pi(x) (\nu_2(x) + \nu_1(x)p_{12}(T^1 x)) = \pi(T^2 x) \phi_2(T^2 x) (1 - p_{21}(T^2 x)p_{12}(T^1 x)). \quad (2.25)$$

De la même manière, on obtient :

$$\pi(x) (\nu_1(x) + \nu_2(x)p_{21}(T^2 x)) = \pi(T^1 x) \phi_1(T^1 x) (1 - p_{21}(T^2 x)p_{12}(T^1 x)). \quad (2.26)$$

Les relations (2.25) et (2.26) caractérisent l'insensibilité de la mesure invariante π .

Réseau jamais vide

Le plus simple des exemples que nous pouvons imaginer est un réseau où l'état $x = (0, 0)$ est interdit. Cela suppose que $p_{12}(1, 0) = 1$ et $p_{21}(0, 1) = 1$. Grâce à (2.25), $\pi(0, 0) = 0$. Par ailleurs, prenons pour $x \neq (1, 0)$ et $x \neq (0, 1)$, un réseau sans routage avec des arrivées exogènes d'intensités constantes ν_1 et ν_2 . Posons $\rho_1 = \nu_1/\mu_1$ et $\rho_2 = \nu_2/\mu_2$. Une mesure invariante du système est donnée par : $\pi(0, 0) = 0$ et

$$\pi(x) = \rho_1^{x_1} \rho_2^{x_2}, \quad \text{pour tout } x \neq (0, 0). \quad (2.27)$$

Restriction de l'espace d'états

On peut généraliser l'exemple précédent. Nous allons trouver les formes des *trous* dans l'espace d'états qui peuvent être compatibles avec l'insensibilité. Supposons que l'on veuille $\pi(x_0) = 0$ et que soit $\pi(T^1 x_0) > 0$, soit $\pi(T^2 x_0) > 0$ (On cherche à caractériser la frontière entre états autorisés et états interdits). Alors toujours grâce à (2.25) et (2.26), $p_{12}(T^1 x_0) = 1$ et $p_{21}(T^2 x_0) = 1$, ce qui implique simplement que $\pi(T^1 x_0) > 0$ et $\pi(T^2 x_0) > 0$. Ainsi les états $T^1 x_0$ et $T^2 x_0$ sont dans l'espace des états autorisés. La frontière supérieure entre l'espace d'états interdits et celui des états atteints est de forme linéaire de pente -1.

Intéressons nous à la frontière inférieure. Prenons x_0 tel que $\pi(x_0) > 0$ et $\pi(T^1 x_0) = 0$. Alors nécessairement, $\nu_1(x_0) = 0$ et soit $\nu_2(x_0) = 0$, soit $p_{21}(T^2 x_0) = 0$. De la même manière, si x_0 est tel que $\pi(x_0) > 0$ et $\pi(T^2 x_0) = 0$, alors $\nu_2(x_0) = 0$ et soit $\nu_1(x_0) = 0$, soit $p_{12}(T^1 x_0) = 0$. Ainsi, la frontière inférieure peut être quelconque, mais il est nécessaire qu'en ses points, les conditions précédentes soient vérifiées.

On peut alors envisager un espace d'état complexe fait de *trous* de forme comme illustrée dans la figure (2.2). Une mesure invariante est le produit des fonctions ψ_i le long de n'importe quel chemin d'une origine (il faut se fixer une origine, pas forcément $(0, 0)$ car ce point peut être exclu) au point considéré et sans tomber dans un des trous de l'espace d'états. Remarquons qu'ici, contrairement aux chemins précédemment utilisés dans les réseaux de Whittle, les chemins peuvent avoir des directions quelconques, vers la droite ou la gauche, vers le haut ou vers la bas. Lorsque le chemin descend, on divise la fonction de balance par ψ_2 , quand il va vers la gauche, on la divise par ψ_1 . Ainsi, toute origine est possible et la fonction de balance n'en dépend qu'à travers une constante multiplicative près.

2.5.5 Perspectives

Il reste beaucoup d'efforts à fournir avant de comprendre en détails les routages insensibles dans les réseaux de files PS, l'exemple du réseau à deux nœuds ne devrait constituer que le point de départ d'une étude plus approfondie de ces réseaux. Par exemple, la première question à se poser est de savoir sous quelles hypothèses le système d'équations (2.23) possède effectivement une solution unique. On peut également tenter de quantifier l'intérêt du routage adaptatif par rapport au routage fixe.

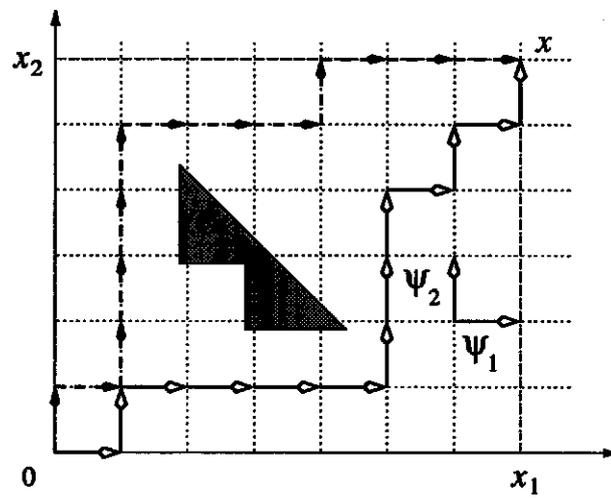


FIG. 2.2 – Routage adaptatif dans un réseau à 2 nœuds - Forme de l'espace d'état

Chapitre 3

Des réseaux de Whittle à la modélisation du trafic élastique

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats théoriques sur les réseaux de files PS au cas de la modélisation du trafic élastique au niveau flot. En particulier, nous identifions et étudions les partages des ressources du réseau entre les flots qui mènent à des résultats explicites pour la performance (pour le débit moyen réalisé par les flots), et ce quelles que soient les caractéristiques du trafic : ces partages sont insensibles à la structure des sessions et aux distributions des tailles des flots.

Nous commençons ce chapitre par un bref rappel du modèle PS pour le partage d'un lien unique avec arrivées poissonniennes de flots. Nous décrivons ensuite les modèles équivalents pour un réseau quelconque avec pour seule hypothèse des arrivées Poisson de sessions. Nous définissons notamment un partage que l'on nomme *équité balancée*, qui est la plus efficace des allocations insensibles. Puis nous étudions également quelques routages dynamiques insensibles. Nous donnons enfin une explication du phénomène de dépendance à long terme du processus d'arrivée des flots ou des paquets à un lien.

Ce chapitre a fait l'objet des publications [29, 18, 23, 26, 24, 25].

3.1 Partage équitable d'un lien

Considérons un lien isolé de capacité C et supposons que les arrivées des flots forment un processus de Poisson d'intensité λ . Les tailles de ces flots sont i.i.d. et de moyenne σ . Nous envisageons ici un modèle fluide au niveau flot, au sens où le débit instantané des flots s'ajuste immédiatement en réponse aux changements dans le nombre de flots en cours. C'est l'hypothèse de séparabilité des échelles de temps que nous avons décrite dans le chapitre 1.

3.1.1 Lien congestionné

Si l'on suppose que les RTT des différents flots sont identiques, TCP va avoir tendance à partager la capacité du lien de manière équitable entre les flots en cours de transfert. Cela est vrai au moins pour les flots suffisamment longs. Si de plus, aucune limitation de débit n'est appliquée aux flots (le débit d'accès est supérieur ou égal à C , la fenêtre maximum de TCP est suffisamment grande), le nombre de flots en cours se comporte comme le nombre de clients dans une file PS de charge $\rho = \lambda\sigma$. En particulier, lorsque $\rho < 1$, la distribution stationnaire π du nombre de flots en cours et le temps de réponse moyen sont insensibles à la distribution de la taille des flots et donnés par les formules déjà évoquées dans les chapitres 1 et 2.

3.1.2 partage équitable avec limitation à l'accès

Le débit instantané des flots peut être limité par la vitesse d'un modem, la capacité du serveur interrogé, par les capacités d'autres liens traversés ou même par la taille maximale de la fenêtre de TCP. En supposant que ces limitations sont communes à tous les flots : leur débit n'excède pas une valeur $a < C$, les résultats d'insensibilité de la file PS sont généralisables [54]. La distribution stationnaire du nombre de flots en cours et le temps de réponse conditionnel moyen sont donnés par les formules suivantes.

$$\pi(n) = (1 - \rho)f(\rho) \times \begin{cases} \frac{m!}{n!} \left(\frac{\rho C}{a}\right)^{n-m}, & \text{pour } n < m, \\ \rho^{n-m}, & \text{pour } n \geq m. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$E[S|\sigma = s] = s \left(\frac{1}{a} + \frac{f(\rho)}{C(1-\rho)} (1 - (C/a - m)(1-\rho)) \right), \quad (3.2)$$

avec m plus grand entier inférieur à C/a et

$$f(\rho) = \frac{\left(\frac{C\rho}{r}\right)^m / m!}{(1-\rho) \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{C\rho}{r}\right)^k / k! + \left(\frac{C\rho}{r}\right)^m / m!}.$$

Nous présentons figure 5.1 le débit moyen réalisé par les flots sur un lien congestionné avec et sans limitation d'accès.

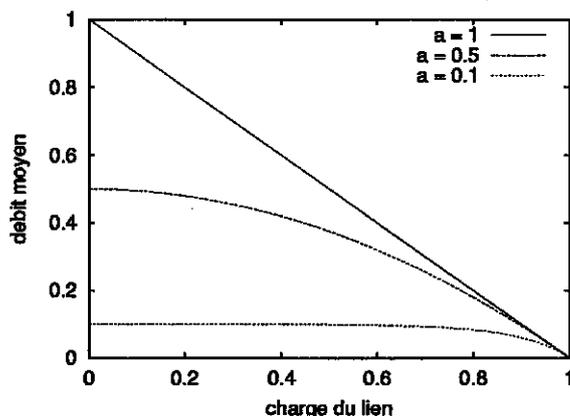


FIG. 3.1 – Débit moyen des flots sur un lien avec partage équitable et limitation commune à l'accès.

Lorsque le débit d'accès est très faible par rapport à la capacité (par exemple sur un lien de cœur de réseau), le lien se comporte à charge inférieure à 1, comme un serveur infini. On retrouve en particulier une distribution de Poisson du nombre de flots.

Cette analyse n'est valable que lorsque les limitations sont identiques et que le partage est équitable. En pratique cependant, des flots écoulés sur un lien peuvent avoir différentes limitations, ils ont en général différents RTT. Ce qui rend le partage inéquitable. Nous discutons ce cas de figure ultérieurement dans ce chapitre.

On trouvera dans [18] une validation expérimentale de ces modèles avec arrivées Poisson de flots ou de sessions. Nous reviendrons à ce modèle de lien unique dans la section 3.10 pour étudier le processus d'arrivée des flots au lien dans le cas d'arrivées poissonniennes de sessions. Nous nous intéressons à présent au cas du partage des capacités des liens d'un réseau.

3.2 Modèles PS en réseau

Le réseau On considère un réseau constitué d'un ensemble de liens $\mathcal{L} = \{1, \dots, L\}$ de capacités respectives C_1, \dots, C_L , et d'un ensemble de routes \mathcal{R} , une route étant définie comme un sous-ensemble (non-ordonné) de liens.

Différents types de flots Des flots de différents types se partagent les ressources de ce réseau. Un type de flot est défini d'une part par la route r qu'il emprunte, d'autre part par son débit d'accès a (supposé modéliser toute limitation de débit externe au réseau : vitesse du serveur consulté, vitesse du modem). a peut éventuellement être infini. Enfin, un flot se définit par sa taille : un flot de taille

σ arrivé à l'instant t_1 s'achève au temps t_2 défini par :

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2} b(t) dt,$$

où $b(t)$ désigne le débit réalisé par le flot à l'instant t .

On considère K types de flot. Les flots de type k suivent la route r_k et sont limités à un débit a_k . Les arrivées de flots de type k forment un processus stationnaire ergodique d'intensité λ_k , et ces flots ont des tailles i.i.d. de moyenne $1/\mu_k$. On note alors $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$ l'intensité du trafic engendré par les flots de type k .

Partage PS des ressources Dans tous les modèles que nous étudions, nous supposons que les flots d'un même type, disons k , se partagent équitablement une bande passante $\phi_k(x)$ qui dépend de l'état $x = (x_1, \dots, x_K)$ du réseau, x_k désignant le nombre de flots de type k en cours de transfert. Le partage est donc bien de type PS, chaque flot de type k s'écoulant à un débit $\phi_k(x)/x_k$. Les allocations de ressources doivent toutes satisfaire les contraintes de capacité suivantes :

$$\sum_{k:l \in r_k} \phi_k(x) \leq C_l, \quad l \in \mathcal{L}, \quad (3.3)$$

$$\phi_k(x) \leq x_k a_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.4)$$

Une propriété importante des allocations est leur faculté à utiliser l'ensemble des ressources du réseau dès que cela est possible. Formellement, cette propriété est définie comme suit en l'absence de limitation à l'accès.

Définition 3.1. (Pareto-efficacité) L'allocation sans limitation d'accès est dite Pareto-efficace si pour tout x tel que $x_k > 0$, il existe un lien l sur la route r_k qui est saturé, c'est-à-dire $\sum_{j:l \in r_j} \phi_j(x) = C_l$.

Une extension naturelle de cette définition est possible lorsque les flots sont limités à l'accès :

Définition 3.2. (Pareto-efficacité avec débits d'accès) L'allocation avec limitations d'accès est dite Pareto-efficace si pour tout x tel que $x_k > 0$, s'il n'existe aucun lien l saturé sur la route r_k , alors la limitation d'accès des flots de type k est atteinte $\phi_k(x) = a_k x_k$.

Conditions usuelles de trafic Pour que le réseau puisse atteindre un état d'équilibre, il faut que la demande en trafic n'excède pas la ressource disponible dans le réseau, ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$$\sum_{i:l \in r_i} \rho_i < C_l, \quad l \in \mathcal{L}. \quad (3.5)$$

Critère de performance Les clients perçoivent la qualité de service à travers le temps moyen pour transférer un flot de taille donnée. De manière équivalente on pourra mesurer la qualité en utilisant le débit moyen des flots de type i , noté γ_i et défini par :

$$\gamma_i \equiv \frac{1/\mu_i}{E_i[S_i]} = \frac{\rho_i}{E[x_i]}. \quad (3.6)$$

La seconde égalité est une conséquence de la formule de Little.

3.2.1 Réseau PS

On introduit ici le réseau générique de files PS à capacités dépendant de l'état qui va permettre de représenter le modèle de trafic de données introduit dans la section précédente, et ce pour des caractéristiques de trafic (processus d'arrivée et taille des flots de chaque type) très générales.

Nous allons représenter le modèle de trafic par un réseau de N files PS de capacités ψ_i dépendant de l'état $y = (y_1, \dots, y_N)$ où y_i est le nombre de clients à la file i . Les arrivées externes de clients aux différentes files forment des processus de Poisson indépendants, d'intensité ν_i , $i = 1, \dots, N$. Les services des clients à la file i sont i.i.d. exponentiellement distribués de moyenne $1/\mu_i$. Un client servi à la file i génère ensuite un client à la file j avec la probabilité p_{ij} ou quitte le réseau avec la probabilité $p_i \equiv 1 - \sum_j p_{ij}$. La matrice de routage est supposée transitoire, impliquant que les intensités des processus d'arrivée λ_i des clients aux différentes files sont caractérisées par les équations suivantes :

$$\lambda_i = \nu_i + \sum_j \lambda_j p_{ji}, \quad i = 1, \dots, N.$$

On note $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ l'intensité du trafic à la file i .

Le processus $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ décrivant l'évolution du nombre de clients à chaque file est un processus de Markov. En reprenant les notations du chapitre précédent, les équations de balance globale vérifiées par les mesures invariantes de Y sont :

$$\chi(y) \sum_i (\nu_i + \psi_i(y)\mu_i) = \sum_i \chi(T_i y) \nu_i + \sum_{i,j} \chi(T_i^j y) \psi_j(T_i^j y) \mu_j p_{ji} + \sum_i \chi(T^i y) \psi_i(T^i y) \mu_i p_i. \quad (3.7)$$

3.2.2 Arrivées Poisson de flots

On commence par donner le réseau représentant le trafic de données lorsque les arrivées de flots de chaque type forment des processus de Poisson indépendants. Dans cette représentation chaque client du réseau de files PS correspond à un flot quand les tailles des flots sont i.i.d. exponentiellement distribuées ou une phase d'un flot lorsque ces tailles ont des distributions à phases.

Tailles des flots i.i.d. exponentielles Avec des flots de taille exponentielle, le réseau de files PS contient autant de files que de types de flot, $N = K$. Aucun routage n'est permis $p_{ij} = 0$ pour tout i, j . Enfin la capacité de la file ψ_i est simplement donnée par celle allouée aux flots de type i , ϕ_i . Nous illustrons ce type de représentation sur l'exemple d'un réseau linéaire, figure 3.2.

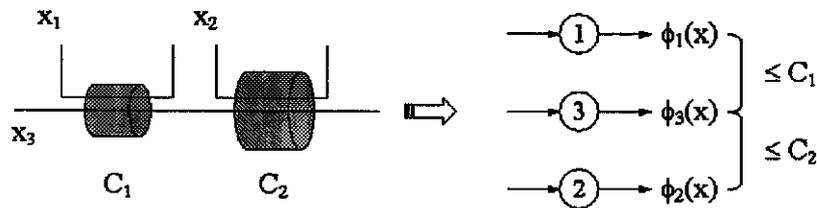


FIG. 3.2 – Représentation d'un réseau linéaire - Arrivées Poisson de flots de tailles exponentielles.

Tailles des flots i.i.d. à phases Comme précisé dans le chapitre introductif, les tailles des flots sont typiquement de grande variance, plutôt qu'exponentielles. Une façon de tenir compte de cette propriété est de considérer des distributions de taille de flots à phases, distributions qui forment un sous-ensemble dense de l'ensemble des distributions. La distribution à phases de la taille des flots de type i peut être représentée par un ensemble de files PS consécutives $S_i \subset \{1, \dots, N\}$, avec $\nu_k > 0$ uniquement pour la première file de ce sous-ensemble et avec le routage suivant : $p_{kj} > 0$ si et seulement si $j = k + 1$ et $k, j \in S_i$. Un exemple est donné figure 3.3. Chaque file représente une phase des flots de type i , et la capacité ϕ_i est partagée équitablement entre tous les flots de type i , ce qui définit les capacités des files $j \in S_i$:

$$\psi_j(y) = \frac{\nu_j}{x_i} \phi_i(x),$$

avec $x_i = \sum_{j \in S_i} \nu_j$.

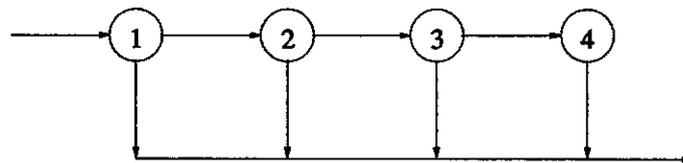


FIG. 3.3 – Représentation d'une distribution à 4 phases.

3.2.3 Arrivées Poisson de sessions

Nous savons que les flots sont en fait générés en sessions par les utilisateurs (voir le chapitre 1). Une session est une succession déterminée de flots et de temps de réflexion ; elle est donc caractérisée par une route r_i et les nombres et tailles des flots et des temps de réflexion successifs. Pour représenter un type particulier de session, on va introduire au moins autant de nœuds qu'il y a de flots dans la session et au moins autant de serveurs infinis qu'il y a de temps de réflexion. On représente en effet un temps de réflexion par un serveur infini de temps de service moyen égal à celui du temps de réflexion. Ces serveurs sont également des nœuds PS formant un sous-ensemble S_0 de $\{1, \dots, N\}$.

Tailles des flots et temps de réflexion i.i.d. exponentiels Lorsque les flots et les temps de réflexion sont i.i.d. exponentiels, une session se représente par une suite alternée de files PS et de serveurs infinis : le routage d'un flot au temps de réflexion suivant et d'un temps de réflexion au flot suivant est bien entendu déterministe. La capacité des files représentant des temps de réflexion est du type

$$\psi_i(y) = y_i, \quad (3.8)$$

où y_i est le nombre de clients en période de réflexion. La capacité ϕ_i alloué aux flots de type i est toujours répartie équitablement entre ces flots, si bien que les capacités des files représentant ce type de flots sont encore définies par : pour $j \in S_i$,

$$\psi_j(y) = \frac{y_j}{x_i} \phi_i(x), \quad (3.9)$$

avec $x_i = \sum_{j \in S_i} y_j$. On donne figure 3.4 un exemple où les flots d'un certain type sont générés suivant deux types de session, avec respectivement 2 et 3 flots.

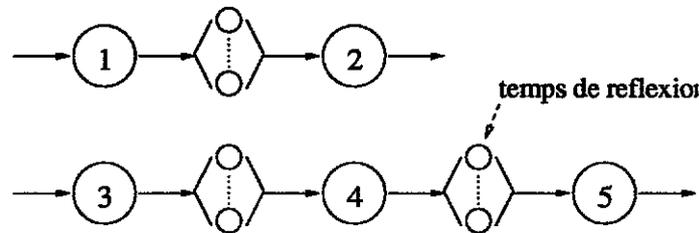


FIG. 3.4 – Exemple de sessions à 2 et 3 flots.

Remarque 3.1. Cette représentation permet une modélisation de sessions avec un nombre de flots de distribution générale. De plus, les tailles moyennes des flots et les durées moyennes des temps de réflexion successives peuvent être corrélées, pouvant ainsi représenter une session de type très général (le téléchargement d'un article sur le Web par exemple peut être vu comme une succession d'un certain nombre de petits flots - des pages Web - puis pour finir d'un flot plus volumineux représentant l'article même).

Tailles des flots et temps de réflexion à phases De la même façon que nous sommes passés de flots de tailles exponentiellement distribuées à des flots de tailles à phases lorsque les arrivées de flots étaient Poisson, nous pouvons représenter des arrivées de sessions Poisson constituées de flots et de temps de réflexion de distributions à phases. La figure 3.5 présente un exemple de session avec deux flots de distributions à 2 et 3 phases et un temps de réflexion de distribution à 2 phases.

Remarque 3.2. En ajoutant un nombre arbitraire de files pour représenter des distributions générales de taille de flots et de durée de temps de réflexion, nous pouvons créer des sessions de structure la plus générale, c'est-à-dire contenant un nombre de flots de distribution générale avec toutes les corrélations voulues entre tailles des flots successifs et durées des temps de réflexion.

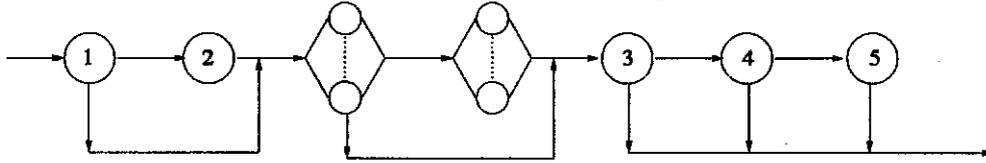


FIG. 3.5 – Représentation d'un type de session avec tailles de flot et durée de réflexion à phases.

Au final, nous venons de voir qu'un simple réseau de Whittle permet de représenter des modèles de trafic les plus généraux dans les réseaux de données, pourvu que l'hypothèse de partage instantané et équitable de la capacité entre flots de même type soit valable.

3.3 Allocations insensibles

Les résultats du chapitre 2 nous permettent d'identifier les allocations qui vont mener à une distribution des nombres de flot de chaque type insensible aux caractéristiques de trafic. En effet, on sait qu'une condition nécessaire et suffisante d'insensibilité dans le réseau de files PS est la balance des capacités des files ψ_i , $i = 1, \dots, N$.

Si l'on considère un réseau de files PS comme introduit dans la section précédente pour représenter un réseau de données, il est facile de montrer au vu des équations (3.8) et (3.9) que les capacités des files ψ_i sont balancées si et seulement si les capacités ϕ_k allouées aux différents types de flot sont également balancées. Si Ψ est une fonction de balance des capacités ψ_i , une fonction de balance des ϕ_k est donnée par :

$$\Psi(y) = \prod_{i \in S_0} \frac{1}{y_i!} \times \prod_{k=1}^K \binom{x_k}{y_i, i \in S_k} \Phi(x). \quad (3.10)$$

Cette correspondance se retrouve également dans les mesures invariantes. Si ξ et χ désignent respectivement des mesures invariantes du système de files PS et du réseau de données, nous avons :

$$\xi(y) = \Psi(y) \prod_{i=1}^N e^{y_i}, \quad (3.11)$$

$$\chi(x) = \sum_{y: \forall k, \sum_{i \in S_k} y_i = x_k} \xi(y) = \prod_{i \in S_0} e^{y_i} \times \Phi(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k}. \quad (3.12)$$

Remarque 3.3. Notons grâce à la forme de la fonction de balance Ψ , que les nombres de flot correspondant à des périodes de réflexion sont indépendants entre eux et indépendants du reste du système.

Le théorème 2.5 permet de caractériser les allocations insensibles aux distributions des tailles des flots lorsque les arrivées des flots sont poissonniennes. On peut s'intéresser à d'autres insensibilités. Nous examinons ici les formes suivantes d'insensibilité.

- (Ins1) Insensibilité aux distributions des tailles des flots avec arrivées poissonniennes des flots de tailles i.i.d..
- (Ins2) Insensibilité par rapport aux processus d'arrivées des flots avec des tailles de flots i.i.d. exponentiellement distribuées. Dans ce cas les mesures invariantes restent inchangées quand on remplace les arrivées poissonniennes de flots par des arrivées Poisson de sessions tout en conservant les intensités des processus d'arrivée des flots.
- (Ins3) Insensibilité aux changements d'échelle de temps avec arrivées Poisson de flots de tailles i.i.d. exponentiellement distribuées. Dans ce cas les mesures invariantes restent inchangées par la multiplication, pour n'importe quelle classe de flot, des inter-arrivées de ces flots et de leur taille par un même facteur quelconque.
- (Ins1') Insensibilité aux distributions des tailles des flots et durées des temps de réflexion successives. Pour des arrivées Poisson de sessions, les mesures invariantes restent inchangées quand on change la distribution des tailles des flots et des durées des temps de réflexion en conservant la structure des sessions (nombre de flots par session).
- (Ins2') Insensibilité par rapport aux processus d'arrivées des flots avec des tailles de flots i.i.d. de distributions fixées. Lorsque les mesures invariantes restent inchangées quand on remplace les arrivées poissonniennes de flots par des arrivées Poisson de sessions tout en conservant les intensités des processus d'arrivée des flots.
- (Ins3') Insensibilité aux changements d'échelle de temps avec arrivées Poisson de sessions. Dans ce cas les mesures invariantes restent inchangées quand on multiplie les inter-arrivées de sessions de n'importe quel type, les tailles des flots et les durées des temps de réflexion contenus dans ces sessions par un même facteur.

Il s'avère en fait que toutes ces notions d'insensibilité sont équivalentes :

Théorème 3.1. *Une allocation vérifiant l'une des conditions d'insensibilité précédentes est balancée.*

Preuve. Les conditions (Ins1), (Ins2) et (Ins3) sont des cas particuliers des conditions (Ins1'), (Ins2') et (Ins3'). Il suffit donc de montrer qu'une de ces trois dernières conditions implique la balance de l'allocation. Le théorème 2.5 caractérise l'insensibilité aux distributions des temps de service dans les réseaux de files PS. Ainsi la condition (Ins1') implique bien la balance de l'allocation. Nous nous contentons alors de montrer que (Ins2') implique la balance de l'allocation, car le même résultat en supposant (Ins3') s'obtient de manière similaire.

Considérons donc une allocation vérifiant (Ins2'). Lorsque les arrivées des flots sont poissonniennes, le réseau de données peut être modélisé par un réseau de files PS où les phases des flots de type k sont représentées par les files consécutives $S_k \subset \{1, \dots, N\}$. Une mesure invariante χ vérifie les équations de balance (3.7). Considérons à présent un nouveau réseau de files PS obtenu en remplaçant le processus d'arrivées Poisson des flots de classe 1 par un processus d'arrivées Poisson de sessions générant un trafic moyen identique, chaque session étant composée d'un nombre

de flots de distribution géométrique et de moyenne $1/\alpha_1$, pour $\alpha_1 \in (0, 1)$. Le nouveau réseau est obtenu en modifiant le réseau initial de la façon suivante : le taux d'arrivée à la file 1 est remplacé par $\tilde{\nu}_1 = \alpha_1 \nu_1$, les probabilités de routage deviennent $\tilde{p}_{i1} = \alpha_1$, $\tilde{p}_i = (1 - \alpha_1)p_i$ pour toutes les files $i \in S_1$. Alors d'après (Ins2'), χ doit également satisfaire :

$$\begin{aligned} \chi(y) \left(\alpha_1 \nu_1 + \sum_{i \notin S_1} \nu_i + \sum_i \psi_i(y) \mu_i \right) &= \chi(T_1 y) \alpha_1 \nu_1 + \sum_{i \notin S_1} \chi(T_i y) \nu_i \\ &+ \sum_{i \in S_1} (\chi(T_{i+1}^i y) \psi_i(T_{i+1}^i y) \mu_i p_{i,i+1} + \chi(T_1^i y) \psi_i(T_1^i y) \mu_i \alpha_1) + \sum_{i,j \notin S_1} \chi(T_i^j y) \psi_j(T_i^j y) \mu_j p_{ji} \\ &+ \sum_{i \in S_1} \chi(T^i y) \psi_i(T^i y) \mu_i (1 - \alpha_1) p_i + \sum_{i \notin S_1} \chi(T^i y) \psi_i(T^i y) \mu_i p_i. \end{aligned}$$

En faisant tendre α_1 vers 0, et observant que pour tout $i \in S_1$ et tout x_1 ,

$$\sum_{\sum_{i' \in S_1} y_{i'} = x_1} \chi(y) \psi_i(y) = \sum_{\sum_{i' \in S_1} y_{i'} = x_1} (\chi(T_{i+1}^i y) \psi_i(T_{i+1}^i y) p_{i,i+1} + \chi(T^i y) \psi_i(T^i y) p_i),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{\sum_{i' \in S_1} y_{i'} = x_1} \chi(y) \sum_{i \notin S_1} (\nu_i + \psi_i(y) \mu_i) &= \sum_{i \notin S_1} \sum_{\sum_{i' \in S_1} y_{i'} = x_1} \chi(T_i y) \nu_i \\ &+ \sum_{i,j \notin S_1} \sum_{\sum_{i' \in S_1} y_{i'} = x_1} \chi(T_i^j y) \psi_j(T_i^j y) \mu_j p_{ji} + \sum_{i \notin S_1} \sum_{\sum_{i' \in S_1} y_{i'} = x_1} \chi(T^i y) \psi_i(T^i y) \mu_i p_i. \end{aligned}$$

En appliquant successivement ce raisonnement aux flots de classes 2, 3, ..., $K - 1$, on montre que, pour tout x_1, \dots, x_{K-1} , la fonction $\sum_{\sum_{i \in S_k} y_i = x_k, k \neq K} \chi(y)$ est une mesure invariante du nombre de clients aux files S_K , de capacités :

$$\forall i \in S_k, \quad \psi_i(y) = \frac{y_i}{x_K} \phi_K(x), \quad x_K = \sum_{i \in S_K} y_i.$$

Pour tout x_1, \dots, x_{K-1} , ces capacités sont balancées par la fonction :

$$\left(\begin{matrix} x_K \\ y_i, i \in S_K \end{matrix} \right) \prod_{n=0}^{x_K-1} \frac{1}{\phi_K(x - ne_K)}.$$

Le réseau correspondant est un réseau de Whittle, et donc :

$$\sum_{\sum_{i \in S_k} y_i = x_k, k \neq K} \chi(y) \propto \left(\begin{matrix} x_K \\ y_i, i \in S_K \end{matrix} \right) \prod_{i \in S_K} \rho_i^{y_i} \times \prod_{n=0}^{x_K-1} \frac{1}{\phi_K(x - ne_K)}.$$

En sommant ces équations sur tous les états y tels que $\sum_{i \in S_K} y_i = x_K$, on a :

$$\sum_{\sum_{i \in S_k} y_i = x_k} \chi(y) \propto \rho_K^{x_K} \prod_{n=0}^{x_K-1} \frac{1}{\phi_K(x - ne_K)}.$$

En particulier, la capacité ϕ_K vérifie

$$\phi_K(x) = \frac{\Phi(x - e_k)}{\Phi(x)},$$

avec

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{\sum_{i \in S_k} y_i = x_k} \chi(y)}{\prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k}}.$$

Par symétrie, cette propriété est vérifiée pour toute classe de flots k et l'allocation est donc balancée. \square

Performance des allocations insensibles On suppose ici que le processus de Markov associé au réseau de files PS représentant le réseau de données est récurrent positif, c'est-à-dire que

$$G = \sum_x \Phi(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k} < +\infty.$$

Dans ce cas, on peut définir de manière unique la distribution stationnaire du réseau par :

$$\pi(x) = \frac{\Phi(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k}}{G}.$$

Le débit moyen des flots de type k est alors donné par la formule de Little :

$$\gamma_k = \frac{\rho_k}{E[x_k]} = \frac{\rho_k}{\sum_x x_k \pi(x)}.$$

Bien entendu, ce paramètre de performance est insensible à toutes les caractéristiques de trafic. Mieux encore, on peut affirmer que le débit perçu par les flots de toute sous-classe de flots de type k (cette sous-classe peut par exemple être l'ensemble des flots de type k qui sont au début d'un certain type de session) ne dépend pas de la sous-classe considérée. Ce résultat s'exprime formellement par la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit un réseau de files PS représentant une allocation balancée dans un réseau de données. Alors pour tout sous-ensemble I_k de S_k ,*

$$\gamma_k \equiv \frac{\sum_{i \in S_k} \rho_i}{\sum_{i \in S_k} E[y_i]} = \frac{\sum_{i \in I_k} \rho_i}{\sum_{i \in I_k} E[y_i]}.$$

Preuve. Le résultat est une conséquence directe (3.11) et (3.12). \square

Une conséquence pratique de cette proposition est que le temps de réponse d'un flot est proportionnel à sa taille. En effet, il suffit, pour se convaincre de cela, de considérer autant de files PS nécessaires pour approximer une distribution déterministe des flots, puis d'appliquer la proposition précédente à ces files. On retrouve ici un résultat bien connu dans le cadre plus général des R-GSMPs [127].

On se propose maintenant d'exhiber quelques allocations insensibles particulières dans les réseaux de données. D'après ce qui précède, il existe autant d'allocations insensibles que de fonctions de balance positives Φ vérifiant les conditions correspondant à (3.3) et à (3.4) : pour tout x ,

$$\Phi(x) \geq \frac{1}{C_l} \sum_{k:r_k \in l} \Phi(x - e_k), \quad \forall l \in \mathcal{L}, \quad (3.13)$$

$$a_k x_k \Phi(x) \geq \Phi(x - e_k), \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (3.14)$$

3.4 Store-and-Forward

3.4.1 En l'absence de limitations à l'accès

Une première allocation insensible a été suggérée par L. Massoulié et est obtenue en partageant les ressources du réseau de manière un peu différente : un flot est transmis successivement d'un lien à un autre le long de sa route, le service à un lien ne débutant qu'après complétion du service au lien précédent (l'ordre dans lequel les liens sont visités sur une route n'a pas d'importance, mais on le fixe une fois pour toutes). Chaque lien partage alors sa capacité équitablement entre les différents flots présents à ce lien. Notons z_{il} le nombre de flots de type i (défini par la route r_i) présents au lien $l \in r_i$, et $z_l \equiv \sum_{r_i \ni l} z_{il}$ le nombre total de flots présents à ce lien. L'état du système est décrit par $z = (z_{il}, i, l \in r_i)$.

Le processus $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ caractérisant l'évolution de z est un processus de Markov qui correspond en fait à celui d'un réseau de Kelly [93], car nous avons ici ni plus ni moins qu'un réseau de files (les liens) PS dans lequel évoluent des clients (les flots) rangés en différentes classes. En particulier, on sait que sous les hypothèses usuelles de stabilité (3.5), ce processus est positif récurrent de distribution stationnaire :

$$\bar{\pi}(z) = \prod_l \frac{z_l!}{C_l^{z_l}} \left[\prod_{r_i \ni l} \frac{\rho_i^{z_{il}}}{z_{il}!} \right].$$

Ainsi, la distribution $\bar{\pi}(x)$ du nombre de flots de chaque type est donnée par :

$$\bar{\pi}(x) = \bar{\Phi}^{SF}(x) \prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i},$$

avec

$$\forall x, \quad \tilde{\Phi}^{SF}(x) = \sum_{z: \sum_{l \in r_i} z_{il} = x_i} \prod_l \frac{z_l!}{C_l^{z_l}} \prod_{r_i \ni l} \frac{1}{z_{il}!}. \quad (3.15)$$

Cette dernière fonction est la fonction de balance de l'allocation Store-and-Forward. Par définition, cette fonction vérifie les contraintes de capacités (3.3). On donne figure 3.6 un exemple de représentation de l'allocation Store-and-Forward sur un réseau linéaire à deux liens.

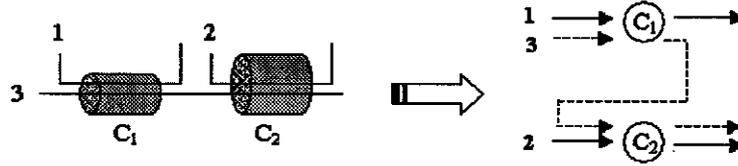


FIG. 3.6 – Réseau de Kelly correspondant à l'allocation Store-and-Forward sur un réseau linéaire.

On peut généraliser cette allocation en tenant compte des limitations à l'accès.

3.4.2 En présence de limitations à l'accès

Pour obtenir une allocation similaire en tenant compte des limitations à l'accès, on impose aux flots de type k , avant d'être transmis successivement sur chacun des liens de la route r_k , de faire un passage à un serveur infini à un débit a_k , limitation à l'accès des flots de type k . Encore une fois, il s'agit d'un réseau de Kelly stable sous les conditions usuelles de trafic (3.5). Notons η_k le nombre de flots de type k présents au serveur infini représentant la limitation d'accès. Le processus $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ caractérisant l'évolution de (η, z) est un processus de Markov récurrent positif sous les conditions usuelles de trafic et de distribution stationnaire :

$$\tilde{\pi}(\eta, z) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\eta_k!} \left(\frac{\rho_k}{a_k} \right)^{\eta_k} \prod_l \frac{z_l!}{C_l^{z_l}} \left[\prod_{r_i \ni l} \frac{\rho_i^{z_{il}}}{z_{il}!} \right].$$

Ainsi, la distribution $\tilde{\pi}(x)$ du nombre de flots de chaque type est donnée par :

$$\tilde{\pi}(x) = \tilde{\Phi}^{SF}(x) \prod_{i=1}^N \rho_i^{x_i},$$

avec

$$\forall x, \quad \tilde{\Phi}^{SF}(x) = \sum_{(\eta, z): \eta_i + \sum_{l \in r_i} z_{il} = x_i} \prod_{k=1}^K \frac{1}{\eta_k!} \left(\frac{\rho_k}{a_k} \right)^{\eta_k} \prod_l \frac{z_l!}{C_l^{z_l}} \prod_{r_i \ni l} \frac{1}{z_{il}!}. \quad (3.16)$$

On donne figure 3.7 le réseau de Kelly représentant Store-and-Forward avec limitations à l'accès sur le réseau linéaire de la figure 3.6.

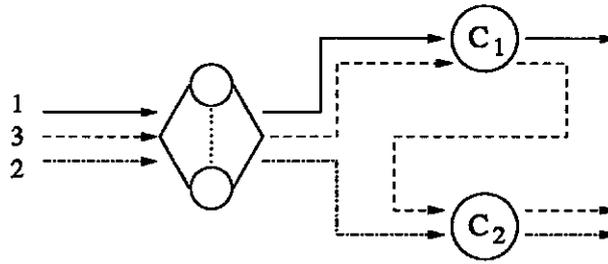


FIG. 3.7 – Réseau de Kelly correspondant à l'allocation Store-and-Forward avec limitations à l'accès sur un réseau linéaire.

3.4.3 Performance de Store-and-Forward

Avec Store-and-Forward, le nombre moyen de flots de type k dans le réseau est donné par :

$$E[x_k] = E[\eta_k] + \sum_{l \in \tau_k} E[z_{kl}] = \frac{\rho_k}{a_k} + \sum_{l \in \tau_k} \frac{\rho_k}{C_l - \sum_{r' \in l} \rho_{r'}}, \quad (3.17)$$

et par conséquent le débit moyen obtenu par les flots de type k s'exprime sous la forme :

$$\gamma_k^{\text{SF}} = \left(\frac{1}{a_k} + \sum_{l \in \tau_k} \frac{1}{C_l - \sum_{r' \in l} \rho_{r'}} \right)^{-1}. \quad (3.18)$$

3.5 Équité balancée

Nous savons que toute allocation insensible est définie par une fonction de balance positive Φ avec par convention $\Phi(0) = 1$ et vérifiant les conditions (3.13) et (3.14). En particulier, il existe une unique allocation qui atteint pour tout état du réseau une de ces contraintes, c'est-à-dire qui sature au moins un lien du réseau ou une des limitations à l'accès : pour tout x , soit il existe un lien l tel que $\sum_{k: l \in \tau_k} \phi_k(x) = C_l$, soit il existe une classe de flots k telle que $\phi_k(x) = a_k x_k$. Nous la nommons *équité balancée* (*Balanced Fairness* en anglais).

Définition 3.3. (*Équité balancée*) L'équité balancée est l'allocation insensible définie récursivement par : $\Phi(0) = 1$ et pour tout $x > 0$,

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \max_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{C_l} \sum_{r_i \ni l, x_i > 0} \Phi^{\text{BF}}(T_i x) \right\} \vee \max_{i, x_i > 0} \left\{ \frac{\Phi^{\text{BF}}(T_i x)}{x_i a_i} \right\}. \quad (3.19)$$

L'équité balancée est donc la plus efficace en terme d'utilisation des ressources des allocations insensibles.

Remarque 3.4. On note alors que les allocations Pareto-efficace qui sont insensibles coïncident avec l'équité balancée (car ces allocations saturent toujours au moins un lien). Réciproquement,

si pour certaines topologies de réseau, l'équité balancée n'est pas Pareto-efficace, on en déduit simplement que pour ces réseaux, il n'existe aucune allocation insensible Pareto-efficace.

Par ailleurs, cette efficacité se traduit par le lemme suivant, qui aura pour corollaires intéressants que l'équité balancée est l'allocation insensible qui maximise l'espace des conditions de trafic qui mènent à la stabilité (positivité et récurrence du réseau de Whittle correspondant) et en cas de stabilité, maximise également la probabilité à l'état stationnaire que le système soit vide.

Lemme 3.1. Soit Φ une fonction positive caractérisant une allocation insensible avec $\Phi(0) = 1$, alors :

$$\Phi(x) \geq \Phi^{\text{BF}}(x), \quad \forall x. \quad (3.20)$$

Preuve. Ce lemme s'obtient facilement par récurrence sur x par définition de l'équité balancée. \square

Corollaire 3.1. Considérons une allocation insensible quelconque supposée stable pour les intensités de trafic ρ_1, \dots, ρ_K . Alors pour ces mêmes intensités de trafic, l'équité balancée est également stable.

Preuve. D'après le lemme précédent, on a

$$\sum_x \Phi(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k} \geq \sum_x \Phi^{\text{BF}}(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k},$$

et donc

$$\sum_x \Phi(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k} < +\infty \quad \text{implique} \quad \sum_x \Phi^{\text{BF}}(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k} < +\infty.$$

\square

Corollaire 3.2. Considérons une allocation insensible qui ne coïncide pas avec l'équité balancée. Alors lorsque cette allocation est stable,

$$\pi(0) < \pi^{\text{BF}}(0). \quad (3.21)$$

Preuve. Une application directe du lemme 3.1 et du fait que pour toute allocation insensible stable :

$$\pi(0) = \frac{1}{\sum_x \Phi(x) \prod_{k=1}^K \rho_k^{x_k}}.$$

\square

3.5.1 Stabilité de l'équité balancée

En combinant les résultats du corollaire 3.1 et la stabilité de l'allocation Store-and-Forward sous les conditions usuelles de trafic (3.5).

Théorème 3.2. Le processus de Markov X associé à l'équité balancée est positif récurrent si et seulement si les conditions (3.5) sont satisfaites.

3.5.2 Autres propriétés de l'équité balancée

Routes ne traversant qu'un lien On s'intéresse aux flots de type k dont les routes ne contiennent qu'un lien l et sans limitation d'accès. On montre les deux résultats suivants.

Proposition 3.2. *Soit l un lien du réseau traversé par des flots de type k de route ne contenant que ce lien et sans limitation d'accès. Alors pour tout état x tel que $x_k > 0$, le lien l est saturé. Autrement dit :*

$$\forall x, x_k > 0, \Phi^{\text{BF}}(x) = \frac{1}{C_l} \sum_{k' : l \in r_{k'}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}).$$

Preuve. On montre le résultat par récurrence sur le nombre de flots qui ne sont pas de type k , $n' = \sum_{k' \neq k} x_{k'}$. L'égalité est vraie pour $n' = 0$ car les flots de type k ne sont pas limités à l'accès. Supposons le résultat pour $n' = m$, $m \geq 0$. Soit x un état tel que $n' = m + 1$ flots ne sont pas de type k . On a pour tout lien $l' \neq l$:

$$\frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}) \geq \frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \frac{1}{C_{l'}} \sum_{r_{k''} \ni l'} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'} - e_{k''}) = \frac{1}{C_{l'}} \sum_{r_{k''} \ni l'} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k''}).$$

D'après (3.19), il reste à montrer que pour tout $k'' \neq k$ tel que $x_{k''} > 0$:

$$\frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}) \geq \frac{1}{x_{k''} a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k''}).$$

Si $l \notin r_{k''}$, on a :

$$\frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}) \geq \frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \frac{1}{x_{k''} a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'} - e_{k''}) = \frac{1}{x_{k''} a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k''}).$$

Dans le cas contraire, on considère d'abord le cas où $x_{k''} > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}) &\geq \frac{1}{C_l} \frac{1}{(x_{k''} - 1) a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - 2e_{k''}) + \frac{1}{C_l} \sum_{k' \neq k'', r_{k'} \ni l} \frac{1}{x_{k''} a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'} - e_{k''}) \\ &\geq \frac{1}{C_l} \sum_{k', r_{k'} \ni l} \frac{1}{x_{k''} a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'} - e_{k''}) = \frac{1}{x_{k''} a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k''}). \end{aligned}$$

Maintenant si $x_{k''} = 1$:

$$\frac{1}{C_l} \sum_{r_{k'} \ni l} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}) \geq \frac{1}{C_l} \sum_{k' \neq k'', r_{k'} \ni l} \frac{1}{a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'} - e_{k''}) = \frac{1}{a_{k''}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k''}).$$

□

La proposition précédente est une première tentative pour étudier la Pareto-efficacité de l'équité balancée. Si tous les liens sont traversés par des routes de longueur 1, l'équité balancée est Pareto-efficace. Une étude plus approfondie semble difficile ; nous avons seulement remarqué qu'en l'absence de limitations à l'accès, l'équité balancée ne semblait pas Pareto-efficace que sur les hypercycles que nous étudions un peu plus loin dans ce chapitre. Par contre, il est possible de montrer qu'elle est Pareto-efficace sur les arbres.

Une conséquence directe de la proposition 3.2 est le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit l un lien du réseau traversé par des flots de type k de route ne contenant que ce lien et sans limitation d'accès. Alors le débit moyen de ces flots est donné par :*

$$\gamma_k^{\text{BF}} = C_l - \sum_{k': l \in r_{k'}} \rho_{k'}.$$

Preuve. D'après la proposition 3.2,

$$\forall x, x_k > 0, \Phi^{\text{BF}}(x) = \frac{1}{C_l} \sum_{k': l \in r_{k'}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_k] &= \frac{1}{G} \times \sum_x x_k \frac{1}{C_l} \sum_{k': l \in r_{k'}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}) \prod_{i=1}^K \rho_i^{x_i} \\ &= \frac{1}{G} \left(\frac{\rho_k}{C_l} G + \sum_{k': r_{k'} \in l} \rho_{k'} \sum_x x_k \Phi^{\text{BF}}(x) \prod_{i=1}^K \rho_i^{x_i} \right) \\ &= \frac{\rho_k}{C_l} + \sum_{k': r_{k'} \in l} \rho_{k'} \mathbb{E}[x_k]. \end{aligned}$$

□

Bornes supérieures et inférieures de la performance de l'équité balancée Même si la distribution stationnaire du réseau avec l'équité balancée est connue, il reste difficile d'en prévoir la performance pour des topologies très générales. Le théorème suivant permet de disposer d'un encadrement simple de la performance : la borne inférieure est obtenue avec l'allocation Store-and-Forward, la borne supérieure en supposant que les flots disposent sur leur route d'une capacité constante égale au minimum des capacités résiduelles des liens de cette route.

Théorème 3.3. *Avec l'équité balancée, le débit moyen des flots de classe quelconque k vérifie :*

$$\gamma_k^{\text{BF}} \geq \gamma_k^{\text{SF}} = \left(\frac{1}{a_k} + \sum_{l \in r_k} \frac{1}{C_l - \sum_{k': r_{k'} \in l} \rho_{k'}} \right)^{-1}, \quad (3.22)$$

$$\gamma_k^{\text{BF}} \leq C_l - \sum_{k': l \in r_{k'}} \rho_{k'}. \quad (3.23)$$

Preuve. La preuve est donnée dans [26]. La borne supérieure est simplement obtenue en utilisant le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.3, mais en utilisant les inégalités :

$$\forall x, x_k > 0, \Phi^{\text{BF}}(x) \geq \frac{1}{C_l} \sum_{k': l \in r_{k'}} \Phi^{\text{BF}}(x - e_{k'}).$$

□

3.6 Allocations basées sur la notion d'utilité

Comme nous l'avons mentionné en introduction, la plupart des allocations considérées jusqu'à présent étaient basées sur une fonction d'utilité. Les capacités allouées sur chaque route sont le résultat d'un problème d'optimisation du type :

$$\begin{cases} \max \sum_i x_i U(\phi_i(x)/x_i), \\ \sum_{r_i \ni l} \phi_i(x) \leq C_l, \quad \forall l, \\ \phi_i(x) \leq x_i a_i, \quad \forall i = 1, \dots, K. \end{cases} \quad (3.24)$$

Toutes les allocations classiques sont basées sur la notion d'utilité : l'équité proportionnelle (*Proportional Fairness* en anglais) introduite par F. Kelly [94], est obtenue en prenant une fonction d'utilité logarithmique. De même, l'équité max-min (*Max-min fairness* en anglais), bien connue des économistes [143] et introduite dans les réseaux de télécommunications par D. Bertsekas et R. Gallager [20], peut être définie comme une limite d'allocations basées sur certaines fonctions d'utilité [130]. On donne ici d'autres exemples de fonctions d'utilité et les allocations correspondantes :

- **Débit maximum** (*Maximum throughput* en anglais) : $U(t) = t$, cette allocation maximise le débit total instantané du réseau. U n'est pas strictement concave, ce qui implique que la solution au problème d'optimisation (3.24) n'est pas unique en général. Cette allocation s'avère de plus inintéressante car très inégalitaires. Le plus souvent, cette allocation revient à donner la priorité à une certaine classe de flots. Ce qui a pour conséquence qu'elle peut être instable sous les conditions usuelles de trafic (3.5), un exemple est donné dans [28].
- **Délai potentiel minimum** (*Minimal Potential delay* en anglais) introduit par L. Massoulié et J. Roberts [114] : $U(t) = -1/t$.
- **α -partage** (*α -bandwidth sharing* en anglais) introduit par J. Mo et J. Walrand [130] : $U(t) = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ pour α positif et différent de 1. Ces allocations sont intéressantes dans la mesure où l'on y retrouve des allocations connues [28] : quand $\alpha = 0$, on obtient l'allocation de débit maximum, pour $\alpha \rightarrow 1$ l'équité proportionnelle, pour $\alpha = 2$ l'allocation de délai potentiel minimum et pour $\alpha \rightarrow +\infty$ l'équité max-min.
- **Partage Arctan** introduit par F. Kelly en 2001 : $U(t) = \arctan(t)$. Dans [95], quelques arguments laissent penser que cette fonction correspond au comportement de TCP.

Partages discriminatoires Dans les allocations précédentes, chaque classe de flots apportait une contribution identique à l'utilité. On peut maintenant à partir de ces allocations favoriser certaines classes de flots par rapport à d'autres et ce en augmentant relativement leur contribution à l'utilité. Les capacités allouées aux différentes classes sont alors solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max \sum_i x_i w_i U(\frac{\phi_i(x)}{w_i x_i}), \\ \sum_{r_i \ni l} \phi_i(x) \leq C_l, \quad \forall l, \\ \phi_i(x) \leq x_i a_i, \quad \forall i = 1, \dots, K, \end{cases} \quad (3.25)$$

où les w_i sont des poids positifs introduisant la discrimination.

3.6.1 Stabilité

L'étude de la stabilité au niveau flot des allocations basées sur la notion d'utilité est récente : on trouvera sur le sujet des travaux de Massoulié-Roberts [114], de Veciana-Lee-Konstantopoulos [63], Fayolle-de la Fortelle-Lasgouttes-Massoulié-Roberts [65], Bonald-Massoulié [25], Ye [185] et Ye-Ou-Yuan [186]. C'est dans ce dernier travail qu'on trouve le plus de résultats, résumés ici. Les tailles des flots de chaque type sont toujours supposés i.i.d. exponentiels. Sont étudiés les équités proportionnelles et max-min, les α -partages, les partages Arctan et de délai potentiel minimum, mais aussi les allocations basées sur des fonctions d'utilité U strictement concave, de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ et menant à une allocation homothétique (c'est-à-dire que pour tout k , tout entier $c > 0$ et tout x , $\phi_k(x) = \phi_k(cx)$). Il est montré, entre autres, dans [186] que :

- avec des arrivées Poisson de flots de chaque type, toutes ces allocations sont stables sous les conditions usuelles de trafic (3.5).
- Avec un processus d'arrivées de renouvellement ayant certaines propriétés¹, toutes ces allocations restent stables sous les mêmes conditions, sauf le partage Arctan pour lequel on ne sait pas conclure.

En bref, il est difficile de prédire la stabilité des allocations basées sur la notion d'utilité, et on peut avoir de mauvaises surprises. Les résultats énoncés ci-dessus ne sont valables que pour des tailles de flots exponentiellement distribuées. Qu'en est-il pour un modèle de trafic plus général (avec arrivées Poisson de sessions de structure arbitraires) ? Ces allocations dont la région de stabilité reste obscure possèdent le défaut supplémentaire qu'il est impossible d'en prédire la performance (seule la performance de l'équité proportionnelle sans limitation à l'accès sur les réseaux linéaires et grilles homogènes², voir figure 3.10, était connue [25]). Cela est simplement dû au fait que la performance de ces allocations sont en général sensibles aux caractéristiques détaillées de la demande en trafic (distributions des tailles de flots, nombre de flots par session, etc ...). Nous prouvons maintenant cette sensibilité.

3.6.2 Sensibilité

Il est facile de montrer que les allocations basées sur la notion d'utilité sont Pareto-efficaces. Ainsi, toute allocation basée sur l'utilité et insensible coïncide avec l'équité balancée. On sait par exemple [28] que l'équité proportionnelle sans limitation à l'accès est insensible sur les réseaux linéaires et grilles homogènes. On en déduit que sur ces réseaux l'équité proportionnelle et l'équité balancée sont identiques. Plus généralement, on montre que ces deux allocations coïncident sur certains réseaux, les hypercubes homogènes. De plus, on prouve que ces réseaux sont les seuls

¹Les inter-arrivées A_1, \dots, A_n, \dots sont telles que pour tout $t > 0$, $\Pr [A_1 \geq t] > 0$, et il existe un entier j et une fonction $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ d'intégrale non nulle tels que $\Pr [a \leq \sum_{k=1}^j A_k \leq b] \geq \int_a^b p(t) dt$, pour tout $0 \leq a < b$.

²homogène signifie ici que tous les liens sont de même capacité

pour lesquels il existe une allocation insensible basée sur la notion d'utilité et sans limitation à l'accès, qui est dans ce cas l'équité proportionnelle. Par ailleurs, si l'on cherche des allocations insensibles basées sur la notion d'utilité et avec des limitations à l'accès, on doit se restreindre au cas bien connu d'un réseau à un lien unique, les flots ayant tous la même limitation d'accès (le réseau devient une simple file symétrique).

Définition 3.4. (*Hypercubes*) Un hypercube de dimension n est un réseau constitué de n ensembles de route, que l'on nomme directions, tel que l'ensemble des liens est l'ensemble des intersections de n routes de directions différentes.

Les réseaux linéaires et les grilles sont des hypercubes de dimension 2.

Remarque 3.5. Les réseaux que l'on considère ici sont supposés connexes, c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble non vide de liens \mathcal{L}' du réseau, il existe une route reliant un lien de \mathcal{L}' et un lien de $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$. De plus, tous les liens sont supposés limitants, au sens où si l'on enlève au réseau un des liens, l'ensemble des allocations défini par les contraintes de capacité (3.3) est modifié. Enfin, on dit qu'un réseau est homogène si les capacités de ses liens sont identiques.

Théorème 3.4. Considérons un réseau dans lequel une allocation basée sur une fonction d'utilité est insensible.

- (i) S'il existe une limitation à l'accès effective, le réseau est réduit à un lien unique et les limitations à l'accès sont toutes identiques.
- (ii) Sans limitation d'accès, le réseau est un hypercube homogène et l'allocation l'équité proportionnelle.

La preuve de ce théorème est présentée dans la sous-section 3.6.3. On montre également que :

Proposition 3.4. Les partages discriminatoires basés sur une fonction d'utilité sont sensibles.

Preuve. Soit l un lien traversé par au moins deux routes r_1, r_2 , telles que les classes de flots correspondantes aient des poids différents $w_1 \neq w_2$. Notons \mathcal{K} l'ensemble des classes k telles que la route r_k contienne le lien l . Le lien l étant limitant, il existe un état x avec $x_k = 0$ pour tout $k \notin \mathcal{K}$ et $x_k > C_l/a_k$ pour tout $k \in \mathcal{K}$, tel que :

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{x_k w_k}{\sum_{k' \in \mathcal{K}} x_{k'} w_{k'}} C_l < \min_{l' \in r_k, l' \neq l} C_{l'}.$$

Notons U la fonction d'utilité, on montre grâce au théorème de Kuhn-Tucker que le lien l est l'unique lien saturé en x et :

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \phi_k(x) = \frac{x_k w_k}{\sum_{k' \in \mathcal{K}} x_{k'} w_{k'}} C_l.$$

En choisissant x_1 et x_2 assez grand, on peut supposer que les expressions précédentes sont toujours vraies pour $x - e_1$ et $x - e_2$. En particulier,

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_1(x - e_2)} = 1 - \frac{w_2}{\sum_{k \in \mathcal{K}} x_k w_k} \neq 1 - \frac{w_1}{\sum_{k \in \mathcal{K}} x_k w_k} = \frac{\phi_2(x)}{\phi_2(x - e_1)}$$

La propriété de balance est contredite. □

3.6.3 Preuve du théorème 3.4

La preuve du théorème s'effectue en un certain nombre d'étapes, correspondant chacune à un ou plusieurs lemmes énoncés et démontrés dans ce qui suit. Considérons un réseau sur lequel une allocation basée sur l'utilité est insensible.

- On montre dans un premier temps que le réseau est homogène, ce que l'on fait dans les lemmes 3.2-3.3. Plus précisément on montre qu'un réseau hétérogène contient un arbre, puis que les allocations basées sur l'utilité sont sensibles sur les arbres.
- On montre ensuite que le réseau homogène est un hypercube. Ce que l'on fait par récurrence sur le nombre de routes. Plus précisément, on prouve dans le lemme 3.9 qu'un réseau homogène ne contenant ni hypercycle, ni ligne ou carré incomplet est un hypercube. Les définitions de ces différentes classes de réseaux sont précisées au cours de la preuve, et on dit qu'un réseau \mathcal{N} "contient" un réseau \mathcal{M} si ce dernier est obtenu en fixant à zéro le nombre de flots sur certaines routes de \mathcal{N} . Ensuite on prouve dans les lemmes 3.6-3.7-3.8 que les allocations basées sur l'utilité sont sensibles sur les hypercycles, les lignes et les carrés incomplets.
- Enfin on s'intéresse aux limitations à l'accès. Le lemme 3.4 permet d'affirmer qu'il y a au plus une limitation d'accès commune à chaque flot. Dans ce cas, on prouve que le réseau est un lien unique : il suffit de montrer le lemme 3.5 et de remarquer qu'un hypercube non réduit à un lien contient une ligne à deux liens. En l'absence de limitation d'accès, l'allocation coïncide avec l'équité proportionnelle d'après la proposition 3.5, que nous exposons dans la section suivante.

Lemme 3.2. *Un réseau hétérogène contient un arbre³.*

Preuve. Considérons un réseau hétérogène. Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ l'ensemble (non vide) des liens l du réseau tel qu'au moins une des routes contenant l contient également un lien de capacité différente de C_l . Notons l_0 le lien de \mathcal{K} de plus petite capacité. Soit l_1 un lien du réseau de plus petite capacité strictement supérieure à C_{l_0} telle qu'il existe une route r_0 passant par les liens l_0 et l_1 . Alors il existe une route r passant par l_1 et ne contenant pas l_0 (sinon l_1 ne serait pas limitant). Par définition, r ne coupe pas r_0 en un lien de capacité strictement inférieure à C_{l_1} et par conséquent r et r_0 forment un arbre. \square

Lemme 3.3. *Les allocations basées sur la notion d'utilité sont sensibles sur les arbres.*

Preuve. Considérons un arbre constitué d'un tronc de capacité 1 et de K branches de capacités respectives $1 \geq C_1 \geq \dots \geq C_K$. On peut supposer que :

$$\sum_{i \neq K} C_i \leq 1 < \sum_k C_k.$$

La classe de flots k est définie par une route r_k contenant le tronc et la branche k , et par une limitation à l'accès a_k . Pour tout état x du réseau tel que $x_k > 1/a_k$ pour tout k , les limitations à

³La définition des arbres est donnée plus loin dans le chapitre, dans le paragraphe 3.7.2.

l'accès ne jouent aucun rôle. D'après le théorème de Kuhn-Tucker, pour ces états, l'allocation est caractérisée par les équations suivantes :

$$U'(\phi_k/x_k) = \eta_0 + \eta_k, \quad k = 1, \dots, K,$$

où η_0 and η_k sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes liées au tronc et aux branches.

Notons $\mathcal{K}(x) \subset \{1, \dots, K\}$ l'ensemble des branches non saturées à l'état x , c'est-à-dire les branches k telles que $\phi_k(x) < C_k$. On a alors $\eta_k = 0$, si bien que les capacités $\phi_k(x)/x_k$ allouées aux flots de classe k , $k \in \mathcal{K}(x)$, sont identiques. Elles sont données par :

$$\phi_k(x) = \frac{x_k}{\sum_{k' \in \mathcal{K}(x)} x_{k'}} (1 - \sum_{k' \notin \mathcal{K}(x)} C_{k'}), \quad k \in \mathcal{K}(x).$$

On en déduit que toute allocation basée sur la notion d'utilité coïncide avec l'équité max-min pour ces états. Considérons à présent deux cas :

– Supposons que $C_1 > C_K$. En remarquant que $\sum_{k \neq 1} C_k < 1$, $\sum_{k \neq 2} C_k \leq 1$, et que

$$\frac{1 - \sum_{k \neq 2} C_k}{C_1} < \frac{C_2}{C_1} < \frac{C_2}{1 - \sum_{k \neq 1} C_k},$$

on peut choisir un état x tel que $x_k > 1/a_k + 1$ pour tout k ,

$$x_1 - 1 < \frac{x_2}{C_2} (1 - \sum_{k \neq 1} C_k) \leq x_1, \quad \frac{x_1}{C_1} (1 - \sum_{k \neq 2} C_k) < x_2 - 1, \quad (3.26)$$

et

$$x_k > \frac{C_k}{1 - \sum_{k' \neq 1,2} C_{k'}} (x_1 + x_2), \quad k \neq 1, 2. \quad (3.27)$$

Les limitations ne jouent aucun rôle à l'état x , ni dans les états $x - e_1$, $x - e_2$. On montre alors que la balance n'est pas satisfaite pour cet état : $\phi_1(x)\phi_2(x - e_1) \neq \phi_2(x)\phi_1(x - e_2)$. Soit $\bar{C} \equiv 1 - \sum_{k \neq 1,2} C_k$. On déduit de (3.26) que :

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} \bar{C} < \frac{x_1}{x_1 + x_2 - 1} \bar{C} < C_1 \quad \text{and} \quad \frac{x_2 - 1}{x_1 + x_2 - 1} \bar{C} < \frac{x_2}{x_1 + x_2} \bar{C} \leq C_2.$$

On déduit de (3.27) que $\mathcal{K}(x) = \{1\}$ ou $\mathcal{K}(x) = \{1, 2\}$. De plus, comme les branches $k \neq 1, 2$ ne sont pas saturées à l'état x , elles ne le sont pas non plus aux états $x - e_1$, $x - e_2$. On déduit alors des inégalités précédentes que $\mathcal{K}(x - e_2) = \{1, 2\}$ et de (3.26) que $\mathcal{K}(x - e_1) = \{1\}$. Ainsi, on a $\phi_1(x - e_2) = \bar{C}x_1/(x_1 + x_2 - 1)$ and $\phi_2(x - e_1) = C_2$. Si $\mathcal{K}(x) = \{1\}$, on a $\phi_1(x) = 1 - \sum_{k \neq 1} C_k$ et $\phi_2(x) = C_2$. Si $\mathcal{K}(x) = \{1, 2\}$, on a $\phi_1(x)/\phi_2(x) = x_1/x_2$. Dans les deux cas, la balance n'est pas satisfaite au vu de (3.26).

- Supposons maintenant que les capacités des branches sont identiques, $C_1 = C_K$. Considérons l'état $x = ne + me_1$ où $e = (1, \dots, 1)$, n est un entier tel que $n > 1/a_k + 1$ pour tout k et $m \geq 1$ est le plus petit entier tel que la branche 1 soit saturée, c'est-à-dire $\phi_1(x) = C_1$ et $\phi_1(x - e_1) < C_1$. Notons que les limitations d'accès sont transparentes dans les états x , $x - e_1$ et $x - e_2$. La branche 1 étant saturée dans l'état x , elle l'est également dans l'état $x - e_2$: $\phi_1(x) = \phi_1(x - e_2) = C_1$. Comme $\phi_2(x) = \dots = \phi_K(x)$, les branches 2, \dots , K ne sont pas saturées en x et $\phi_2(x) = (1 - C_1)/(K - 1)$. De même, comme $\phi_2(x - e_1) = \dots = \phi_K(x - e_1)$ et $\phi_2(x - e_1) \leq \phi_1(x - e_1)$, aucune branche n'est saturée en $x - e_1$:

$$\phi_1(x - e_1) = \frac{n + m - 1}{Kn + m - 1} < C_1 \quad \text{et} \quad \phi_2(x - e_1) = \frac{n}{Kn + m - 1}.$$

On en déduit que $\phi_1(x)\phi_2(x - e_1) > \phi_1(x - e_2)\phi_2(x)$. Les capacités ne sont pas balancées. \square

Lemme 3.4. *Les allocations basées sur l'utilité sont sensibles sur les réseaux homogènes dès que deux limitations d'accès différentes sont présentes.*

Preuve. Un réseau homogène (les capacités sont prises égales à 1) avec deux limitations à l'accès contient un lien partagé par deux classes de flot avec des débits d'accès différents. On considère la restriction du réseau à ces deux classes, 1 et 2, de limitations d'accès $a_1 < a_2$. Soit $x = (x_1, 1)$ où x_1 est le plus petit entier tel que $x_1 a_1 + a_2 > 1$ si $a_2 < 1$, $x_1 = 1$ sinon. Une allocation basée sur l'utilité donne $\phi_1(x) = \phi_1(x - e_2) = x_1 a_1$ et $\phi_2(x) = 1 - x_1 a_1$, $\phi_2(x - e_1) = a_2$ si $a_2 < 1$, $\phi_2(x - e_1) = 1$ sinon. Si cette allocation était balancée, on aurait $x_1 a_1 + a_2 = 1$ si $a_2 < 1$, $a_1 = 1$ sinon. On obtient donc une contradiction. \square

Lemme 3.5. *Les allocations basées sur l'utilité sont sensibles sur les lignes homogènes à deux liens avec au moins une limitation d'accès.*

Preuve. Considérons une ligne homogène de deux liens de capacités 1. La route r_1 contient les deux liens, tandis que les routes r_2, r_3 ne contiennent qu'un seul lien. On sait d'après le lemme 3.4 que les allocations basées sur l'utilité sont sensibles quand deux limitations d'accès différentes sont présentes. Considérons donc une allocation insensible basée sur l'utilité avec un débit d'accès commun à tous les flots $a < 1$, c'est-à-dire avec $K = 3$ classes de flot telles que $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Soit $x = (x_1, x_2, 1)$ où $x_1 a \geq 1$ et x_2 est le plus petit entier tel que $(1 - a)x_2 \geq a x_1$. Le lien $r_1 \cap r_3$ n'est pas saturé en x , donc :

$$\phi_1(x) = \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \quad \phi_2(x) = \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad \phi_3(x) = a.$$

Comme $\phi_2(x - e_3) = \phi_2(x)$, la propriété de balance implique $\phi_3(x - e_2) = a$. Le lien $r_1 \cap r_3$ étant saturé en $x - e_2$, on a $\phi_1(x - e_2) = 1 - a$. On en déduit toujours par la propriété de balance que :

$$\phi_2(x - e_1) = \phi_1(x - e_2) \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)} = (1 - a) \frac{x_2}{x_1}.$$

Mais, comme le lien $r_1 \cap r_3$ n'est pas saturé en x , il ne l'est pas non plus en $x - e_1$ et

$$\phi_2(x - e_1) = \frac{x_2}{x_1 + x_2 - 1}.$$

Ce qui implique $(1 - a)(x_2 - 1) = ax_1$, et on obtient une contradiction. \square

Définition 3.5. (Ligne incomplète) Une ligne incomplète est un réseau formé de cinq routes r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 et trois liens $r_1 \cap r_2 \cap r_3$, $r_1 \cap r_2 \cap r_4$ et $r_1 \cap r_5$.

Définition 3.6. (Carré incomplet) Un carré incomplet est un réseau formé de quatre routes r_1, r_2, r_3, r_4 et de trois liens $r_1 \cap r_2$, $r_2 \cap r_3$ et $r_3 \cap r_4$.

On montre dans les deux lemmes suivants que les allocations basées sur la notion d'utilité sont sensibles sur les lignes incomplètes homogènes et sur les carrés homogènes incomplets. Ces réseaux sont présentés figure 3.8.

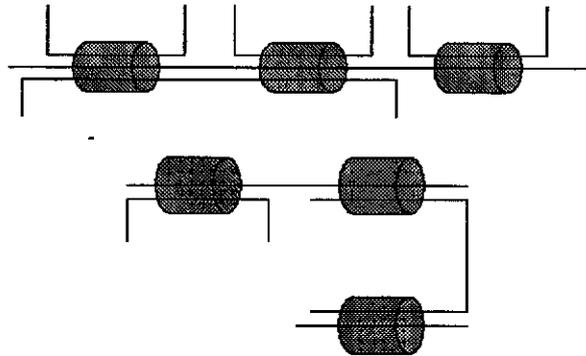


FIG. 3.8 – Ligne et carré incomplets homogènes.

Lemme 3.6. Les allocations basées sur l'utilité sont sensibles sur les lignes incomplètes homogènes.

Preuve. En remarquant qu'une ligne incomplète contient une ligne homogène à deux liens, et grâce aux lemmes 3.5 et 3.4, on sait qu'une allocation basée sur l'utilité ne peut être insensible qu'en l'absence de limitation d'accès. Supposons donc qu'il existe une allocation insensible basée sur l'utilité sur les lignes incomplètes homogènes sans limitation d'accès. Alors cette allocation doit coïncider avec l'équité balancée. Pour $x = (1, 1, 1, 1, 1)$, cette dernière donne $\phi_1 = \phi_5 = 1/2$. On voit d'une part que l'équité max-min ne réalise pas ce partage. D'autre part, d'après le théorème de Kuhn-Tucker, nous avons pour $x = (1, 1, 1, 1, 1)$,

$$U'(\phi_1) = U'(\phi_3) + U'(\phi_4) + U'(\phi_5).$$

Si on avait $\phi_1 = \phi_5$, nous aurions $U'(\phi_3) + U'(\phi_4) = 0$, c'est-à-dire $\phi_3 = \phi_4 = 0$ et $\phi_1 = \phi_2 = \phi_5 = 1/2$. Mais le partage $\phi_2 = 0$ et $\phi_1 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 1/2$ donne un utilité strictement supérieure. \square

Lemme 3.7. *Les allocations basées sur l'utilité sont sensibles sur les carrés incomplets homogènes.*

Preuve. De même que dans la preuve du lemme 4.1, on sait qu'une allocation insensible basée sur l'utilité ne peut être obtenue qu'en l'absence de limitation d'accès. Supposons donc qu'il existe une allocation insensible basée sur l'utilité sur les carrés incomplets homogènes en l'absence de limitation d'accès. Cette allocation doit coïncider avec l'équité balancée, qui donne pour $x = (1, 1, 1, 1)$, $\phi_1 = \phi_2 = 2/5$ et $\phi_3 = \phi_4 = 3/5$. Or une allocation basée sur l'utilité donne dans cet état $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 1/2$. \square

Définition 3.7. (Hypercycles) *Un hypercycle est un réseau de L liens et L routes tel que chaque route contient tous les liens sauf un.*

Les exemples les plus simples d'hypercycles sont le triangle ($L = 3$) et la pyramide ($L = 4$) dont nous donnons une représentation figure 3.9.

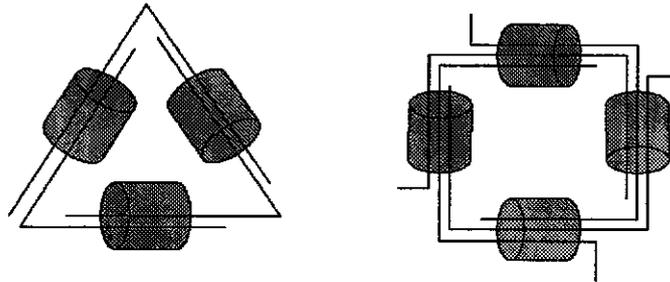


FIG. 3.9 – Le triangle et la pyramide

Lemme 3.8. *Les allocations basées sur la notion d'utilité sont sensibles sur les hypercycles homogènes.*

Preuve. Considérons un hypercycle de L liens de capacité 1, $L \geq 3$. Grâce au lemme 3.4, on peut se contenter de montrer que les allocations basées sur l'utilité sont sensibles en présence d'une limitation d'accès commune à tous les flots a , c'est-à-dire, quand on a $K = L$ classes de flot avec $a_1 = \dots = a_K = a$. On envisage deux cas.

- Supposons $a(K - 1) \geq 1$. Remarquons que ce cas inclut le cas où $a = \infty$ (sans limitation d'accès). On montre que l'équité balancée n'est pas Pareto-efficace, ce qui donne le résultat du lemme d'après la remarque 3.4. Soient $x = (1, 2, \dots, 2)$ et $c = 1/(K - 1)$. Comme $\phi_2(x) = \dots = \phi_K(x)$, d'après les contraintes de capacité (3.3), $\phi_K(x) \leq c$. Si l'équité balancée était Pareto-efficace, on aurait $\phi_1(x) \geq c$ car $a \geq c$. Mais, comme le réseau est réduit à un lien unique dans l'état $x - e_1$, on sait que $\phi_K(x - e_1) = c$. Donc $\phi_K(x - e_1) \geq \phi_K(x)$ et la propriété de balance donne $\phi_1(x - e_K) \geq \phi_1(x) \geq c$. Par symétrie, on a $\phi_1(x - e_2) \geq c$. Maintenant comme $\phi_1(x - e_2) = \phi_2(x - e_2)$ et $\phi_3(x - e_2) = \dots = \phi_K(x - e_2)$, on déduit des contraintes de capacité (3.3) que $\phi_K(x - e_2) \leq c$. En utilisant un

raisonnement similaire, on montre par récurrence sur $j \leq K-2$ que $\phi_K(x - \sum_{i=2}^j e_i) \leq c$. Supposons le résultat vrai jusqu'à $j < K-2$ et posons $y = x - \sum_{i=2}^j e_i$. Alors $\phi_K(y - e_1) = 1/(K - (j+1)/2) \geq \phi_K(y)$, et donc par la propriété de balance, $\phi_1(y - e_K) \geq \phi_1(y) \geq c$, la dernière inégalité étant obtenue par Pareto-efficacité. Par symétrie, $\phi_1(y - e_{j+1}) \geq c$ et les contraintes de capacité impliquent $\phi_K(y - e_{j+1}) \leq c$.

On obtient finalement $\phi_K(z) \leq c$ dans l'état $z = (1, \dots, 1, 2)$. Une nouvelle fois, si l'équité balancée était Pareto-efficace, on aurait $\phi_1(z) \geq c$. Mais $\phi_K(z - e_1) = 2/K > c$. Donc $\phi_K(z - e_1) > \phi_K(z)$ et on déduit de la propriété de balance que $\phi_1(z - e_K) > \phi_1(z) \geq c$. Par symétrie, $\phi_k(e) > c$ pour tout k dans l'état $e \equiv z - e_1 = (1, \dots, 1)$. Les contraintes de capacité (3.3) ne sont pas satisfaites.

- Supposons maintenant que $a(K-1) < 1$. Soit $x = (1, n, m, \dots, m)$ où $m \geq n \geq 1/a$ et où n est le plus petit entier tel que $n(1-a) \geq ma(K-2)$. Comme le lien $r_2 \cap \dots \cap r_K$ est le seul lien saturé dans les états x et $x - e_1$, on a $\phi_2(x) = \phi_2(x - e_1)$ et $\phi_1(x) = a$ pour toute allocation basée sur l'utilité. La propriété de balance impliquerait $\phi_1(x - e_2) = a$. Comme $\phi_3(x - e_2) = \dots = \phi_K(x - e_2)$, on déduit des contraintes de capacité (3.3) que $\phi_3(x - e_2) \leq (1-a)/(K-2)$. Mais, comme le réseau est réduit à un lien dans l'état $x - e_2 - e_1$, on a $\phi_3(x - e_2 - e_1) = m/(n-1 + m(K-2))$. Donc $\phi_3(x - e_2) < \phi_3(x - e_2 - e_1)$ et la propriété de balance impliquerait $\phi_1(x - e_2) < \phi_1(x - e_2 - e_3)$. Donc $\phi_1(x - e_2 - e_3) > a$ et les contraintes de capacité (3.3) ne sont pas satisfaites. □

Lemme 3.9. *Un réseau homogène qui ne contient ni hypercycle, ni ligne incomplète, ni carré incomplet est un hypercube.*

Preuve. On montre le lemme par récurrence sur le nombre N de routes. Le résultat est vrai pour $N = 1$ et $N = 3$ (Notons que d'après la remarque 3.5, $N = 2$ est impossible). En fait un réseau de 3 routes est soit un triangle, soit un réseau linéaire.

Supposons que le résultat est vrai pour $N \leq M$, avec $M \geq 3$, et considérons un réseau de $M+1$ routes $\mathcal{N}_0 = \{r_0, r_1, \dots, r_M\}$ qui ne contient ni hypercycle, ni ligne incomplète, ni carré incomplet. Notons \mathcal{L}_0 l'ensemble des liens de \mathcal{N}_0 . On peut choisir une route r_0 telle que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \setminus r_0$ est connexe. Notons $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0$ l'ensemble des liens limitants de \mathcal{N} . Par hypothèse de récurrence, \mathcal{N} est un hypercube. Soit n la dimension de cet hypercube et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ ses directions.

On montre d'abord qu'un choix judicieux de r_0 mène à $n \geq 2$. Supposons que pour tout k tel que $\mathcal{N}_0 \setminus r_k$ soit connexe, ce réseau soit réduit à un lien unique. S'il existe une route r_1 telle que $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ n'est pas connexe, ce réseau a deux liens limitants, $r_1 \cap r_0$ et $r_1 \cap \dots \cap r_M$. Mais cela implique $r_2 = r_3$, contradiction. Donc pour tout k , le réseau $\mathcal{N}_0 \setminus r_k$ est connexe. Ce réseau est réduit à un lien unique intersection de toutes les routes sauf r_k . On en déduit que \mathcal{N}_0 est un hypercycle, contradiction.

On peut donc supposer que $n \geq 2$. On considère d'abord le cas où une direction de \mathcal{N} contient une seule route, $\mathcal{D}_1 = \{r_1\}$.

- Supposons $n = 2$. Alors $\mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$, car sinon \mathcal{N}_0 serait une ligne incomplète. Tout lien de $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}$ est l'intersection de r_0 et r_1 ou de r_0 et d'une route unique r_2 de \mathcal{D}_2 . Sinon,

on obtiendrait un triangle. Dans le premier cas, \mathcal{N}_0 est un hypercube de directions \mathcal{D}_1 et $\mathcal{D}_2 \cup r_0$. Dans le second cas, $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}$ est l'ensemble des intersections $r_0 \cap r_2$, $r_2 \in \mathcal{D}_2$. Sinon, \mathcal{N}_0 contiendrait un carré incomplet. Donc \mathcal{N}_0 est un hypercube de directions $\mathcal{D}_1 \cup r_0$ et \mathcal{D}_2 .

- Supposons $n \geq 3$. Alors $\mathcal{N} \setminus r_1$ est un hypercube de dimension $n - 1$. Le réseau $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est connexe. Sinon, \mathcal{N}_0 contiendrait une ligne incomplète. Par hypothèse, $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est un hypercube, de dimension $n - 1$ ou n . Si $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est de dimension n , les directions correspondantes sont $r_0, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$. Comme $r_0 \neq r_1$, il existe $r_2 \in \mathcal{D}_2, \dots, r_n \in \mathcal{D}_n$ telles que $r_0 \cap r_2 \cap \dots \cap r_n \neq r_1 \cap r_2 \cap \dots \cap r_n$. On en déduit que les routes r_0 et r_1 ne se croisent pas, sinon elles formeraient un triangle avec une des routes r_2, \dots, r_n . Donc \mathcal{N}_0 est un hypercube de directions $\mathcal{D}_1 \cup r_0, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$. Si $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est de dimension $n - 1$, il existe une direction de \mathcal{N} , disons \mathcal{D}_2 , telle que les directions de cet hypercube soient $\mathcal{D}_2 \cup r_0, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_n$. En particulier, toutes les directions de $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ contiennent au moins deux routes.

On peut donc restreindre l'analyse au cas où les directions de \mathcal{N} contiennent au moins deux routes. On envisage alors deux cas.

- Supposons $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_0$. Soit $l \in \mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}$. Il existe une direction de \mathcal{N} , disons \mathcal{D}_1 , telle que toute route r_1 de cette direction ne contient pas le lien l . Supposons que deux routes de la même direction contiennent le lien l , disons $r_2, r'_2 \in \mathcal{D}_2$, $r_2 \neq r'_2$. Comme r_1 croise r_2 et r'_2 , ces trois routes forment un triangle, contradiction. Le lien l est donc l'intersection de r_0 et d'au moins une route de chaque direction $\mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$. De plus, le réseau $\mathcal{N} \setminus r_1$ est un hypercube de dimension n . Comme le réseau $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est connexe, c'est un hypercube de dimension n ou $n + 1$. Mais le lien l appartient aux n routes de $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$. Donc $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est un hypercube de dimension n . Les directions de cet hypercube sont $\{\mathcal{D}_1 \setminus r_1\} \cup r_0, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$. Comme ce résultat est valable pour toute route $r_1 \in \mathcal{D}_1$, \mathcal{N}_0 est un hypercube de dimension n , et de directions $\mathcal{D}_1 \cup r_0, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$.
- Supposons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Soit $l \in r_0$. Supposons qu'il existe un lien $l' \in \mathcal{L}$ tel que $l' \notin r_0$. Il existe une direction de \mathcal{N} , disons \mathcal{D}_1 , telle que $l \in r_1$ et $l' \in r'_1$, $r_1, r'_1 \in \mathcal{D}_1$, $r_1 \neq r'_1$. Le réseau $\mathcal{N} \setminus r_1$ est un hypercube de dimension n . Comme le réseau $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est connexe, c'est un hypercube de dimension n ou $n + 1$. Mais le lien l' appartient à n routes de $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$. Donc $\mathcal{N}_0 \setminus r_1$ est un hypercube de dimension n . Comme le lien l appartient à r_0 et à une route de chaque direction $\mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$, les directions de cet hypercube sont $\{\mathcal{D}_1 \setminus r_1\} \cup r_0, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$. Comme r_0 contient seulement des liens de \mathcal{L} , ces liens sont $r_1 \cap r_2 \cap \dots \cap r_n$, avec $r_2 \in \mathcal{D}_2, \dots, r_n \in \mathcal{D}_n$. Donc $r_0 = r_1$, contradiction. On conclut que r_0 contient tous les liens de \mathcal{L} , donc \mathcal{N}_0 est un hypercube de dimension $n + 1$, et de directions $r_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$.

□

3.7 Exemples sur quelques topologies particulières

Nous illustrons à présent l'équité balancée sur quelques topologies remarquables. Chaque fois que cela est possible, nous exprimons sa fonction de balance, le débit moyen des flots de chaque classe. Nous comparons également les performances de l'équité balancées avec celle de Store-and-Forward, puis avec celle de l'équité max-min. Cette dernière allocation est sensible sur toute topologie de réseau, sa performance est donc donnée par simulations (arrivées Poisson de flots sur chaque route et tailles des flots i.i.d. exponentielles).

La borne du débit moyen des flots d'une certaine classe k fournie par Store-and-Forward est d'autant plus précise qu'il est possible d'identifier un goulot d'étranglement sur la route r_k , c'est-à-dire un lien $l \in r_k$ de capacité résiduelle $C_l - \sum_{k': l \in r_{k'}} \rho_{k'}$ bien moindre que les capacités résiduelles des autres liens de cette route. L'écart entre Store-and-Forward et l'équité balancée est aussi faible lorsque le débit d'accès a_k est beaucoup plus petit que les capacités résiduelles rencontrées par les flots de classe k .

Sauf mention contraire, on suppose l'absence de limitation d'accès.

3.7.1 Lignes, grilles et hypercubes

Les lignes et grilles présentées figure 3.10 et étudiées par T. Bonald et L. Massoulié [28] sont en fait des cas particuliers d'hypercubes, dont nous avons donné la définition un peu plus haut. Les réseaux linéaires et les grilles sont des hypercubes de dimension 2. Les hypercubes de dimension 1 sont réduits à un lien unique.

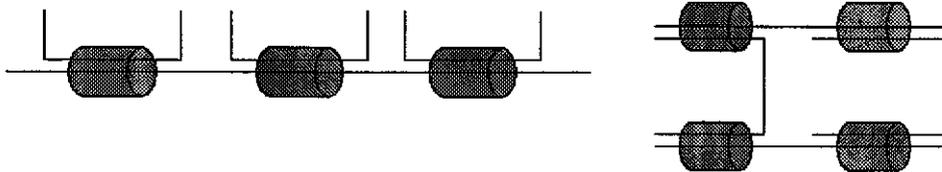


FIG. 3.10 – Réseau homogène linéaire à 3 liens (en haut) et grille 2x2 homogène (en bas).

Calculons dans un premier temps la fonction de balance de l'équité balancée sur une ligne homogène à deux liens. En fait, cette fonction de balance est connue, car donnée, sur ce réseau, par celle de l'équité proportionnelle [28]. Nous présentons cependant son calcul à titre d'exemple.

Notons $x = (x_0, x_1, x_2)$ l'état du réseau, x_0 désignant le nombre de flots sur la route de longueur 2. La fonction de balance est donnée récursivement par $\Phi^{\text{BF}}(0) = 1$ et

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \max(\Phi^{\text{BF}}(x - e_0) + \Phi^{\text{BF}}(x - e_1), \Phi^{\text{BF}}(x - e_0) + \Phi^{\text{BF}}(x - e_2)).$$

Nous savons d'après la proposition 3.2 que le premier lien est saturé dès que $x_1 > 0$, ce qui

implique que pour tout x tel que $x_1 > 0$:

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \Phi^{\text{BF}}(x - e_0) + \Phi^{\text{BF}}(x - e_1).$$

De même, pour tout x tel que $x_2 > 0$:

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \Phi^{\text{BF}}(x - e_0) + \Phi^{\text{BF}}(x - e_2).$$

On en déduit que $\Phi^{\text{BF}}(x)$ est simplement égale au nombre de chemins du point 0 au point x dans le graphe présenté figure 3.11 :

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \binom{x_0 + x_1 + x_2}{x_0}.$$

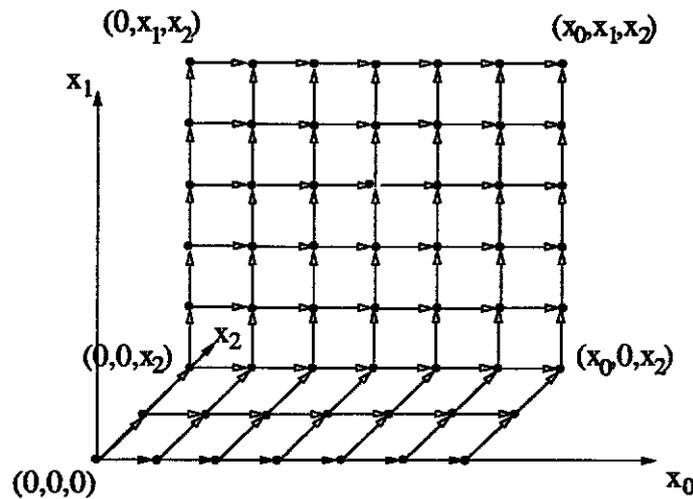


FIG. 3.11 – Calcul de la fonction de balance de l'équité balancée dans un réseau linéaire homogène à deux liens.

Cette méthode de calcul de fonctions de balance se généralise à tous les réseaux pour lesquels nous savons identifier les liens saturés.

Hypercube homogène Considérons un hypercube homogène de dimension $n \geq 2$ de directions $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$. On obtient la fonction de balance suivante :

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \binom{\sum_k x_k}{\sum_{k:r_k \in \mathcal{D}_1} x_k, \dots, \sum_{k:r_k \in \mathcal{D}_n} x_k}. \quad (3.28)$$

Comme suggéré précédemment, l'équité proportionnelle coïncide avec l'équité balancée sur ce type de topologie.

Proposition 3.5. *L'équité proportionnelle coïncide avec l'équité balancée sur les hypercubes homogènes.*

Preuve. On peut montrer dans un premier temps que pour l'équité proportionnelle, tous les liens sont saturés. On en déduit que les routes qui appartiennent à la même direction disposent toutes de la même capacité, que l'on note ϕ_k . On a $\sum_k \phi_k = 1$. L'équité proportionnelle maximise la quantité

$$\sum_k \sum_{i \in \mathcal{D}_k} x_i \log \left(\frac{\phi_k}{x_i} \right).$$

En particulier, il est facile de voir que ϕ_k est proportionnel au nombre de flots qui empruntent une des routes de la direction \mathcal{D}_k :

$$\phi_k = \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}_k} x_i}{\sum_i x_i}.$$

On en déduit le résultat grâce à (3.28). □

La performance de l'équité balancée est sans doute difficilement exprimable pour des hypercubes homogènes généraux. On trouvera dans [28] l'expression pour les lignes et la grille à 4 routes. Rappelons l'expression des débits moyens dans le cas d'une ligne homogène à L liens. La charge moyenne générée sur la route contenant tous les liens est notée ρ_0 , alors que celles des routes de longueur 1 sont ρ_1, \dots, ρ_L . Les débits sont donnés par :

$$\gamma_l^{\text{BF}} = 1 - \rho_0 - \rho_l, \quad l = 1, \dots, L, \quad (3.29)$$

$$\gamma_0^{\text{BF}} = \frac{1 - \rho_0}{1 + \sum_{l=1}^L \frac{\rho_l}{1 - \rho_0 - \rho_l}}. \quad (3.30)$$

Nous comparons figure 3.12, pour une ligne à 2 liens, la performance sur la route longue de l'équité balancée et de Store-and-Forward (ces allocations offrent des débits moyens identiques sur les routes de longueur 1). Nous prenons le cas le plus défavorable (on peut le montrer) où $\rho_1 = \rho_2$ (pas de goulot d'étranglement) et $\rho_0 \rightarrow 0$. Les performances s'éloignent quand la charge des liens est faible : à la limite, pour des charges presque nulles, le débit moyen offert par l'équité balancée est 1 alors que celui offert par Store-and-Forward vaut 1/2.

Nous comparons figure 3.13 les performances obtenues avec l'équité balancée et l'équité max-min sur une ligne homogène de 5 liens. L'équité max-min donne une performance meilleure que celle de l'équité balancée sur les petites routes, mais moins bonne sur la route longue. La différence de performance n'est de toute façon pas significative.

Lignes hétérogènes

Il est difficile en général de trouver la fonction de balance lorsque les réseaux sont hétérogènes. On peut cependant l'obtenir pour des réseaux linéaires hétérogènes (voir figure 3.14) : par souci de simplicité, la capacité du plus petit des liens est prise égale à 1. On note x_0 le nombre de flots sur la route traversant tous les liens et x_l le nombre de flots sur la route ne contenant que le lien l .

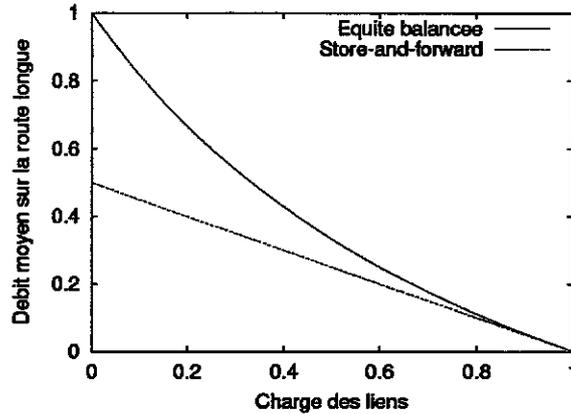


FIG. 3.12 – Ecart maximal entre l'équité balancée et Store-and-Forward sur une ligne homogène à 2 liens.

La fonction de balance est donnée par : pour tout x avec $x_k > 0, \forall k$,

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \sum_{y: \sum_i y_i \leq x_0} \binom{x_1 + y_1 - 1}{y_1} \dots \binom{x_L + y_L - 1}{y_L} \frac{1}{C_1^{x_1 + y_1} \dots C_L^{x_L + y_L}}. \quad (3.31)$$

Le débit moyen des flots de différentes classes peut également être évalué :

$$\gamma_l^{\text{BF}} = C_l - \rho_0 - \rho_l, \quad l = 1, \dots, L, \quad (3.32)$$

$$\gamma_0^{\text{BF}} = \left(\frac{1}{1 - \rho_0} + \sum_{l=1}^L \left(\frac{1}{C_l - \rho_l - \rho_0} - \frac{1}{C_l - \rho_0} \right) \right)^{-1}. \quad (3.33)$$

Rappelons que pour Store-and-Forward, ce débit vaut :

$$\gamma_0^{\text{SF}} = \left(\sum_{l=1}^L \frac{1}{C_l - \rho_l - \rho_0} \right)^{-1}. \quad (3.34)$$

3.7.2 Les arbres

Nous nous intéressons maintenant aux *arbres*⁴ (voir figure 3.15), réseaux de topologie particulièrement intéressante car à même de représenter des réseaux d'accès constitués de plusieurs étages de multiplexage.

Définition 3.8. (*Arbres*) Un arbre est un réseau contenant un lien, appelé tronc, traversé par toutes les routes et de K autres liens, appelés branches, traversés par une seule route.

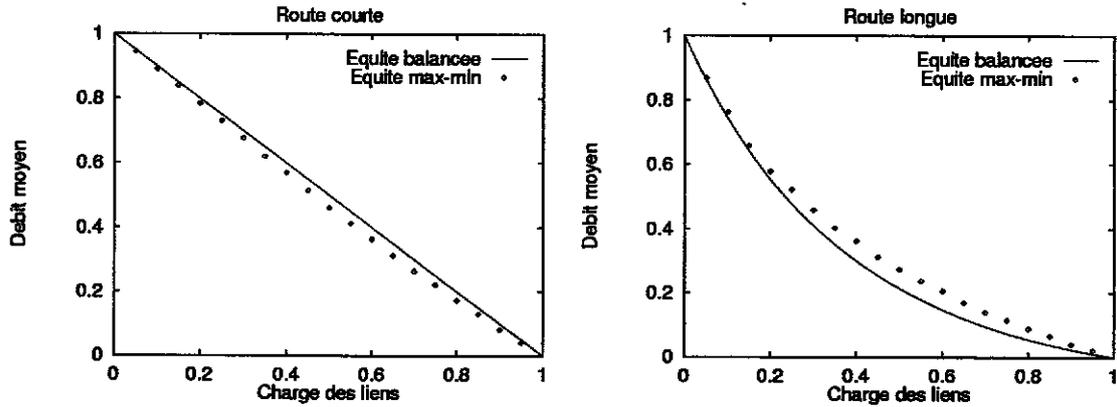


FIG. 3.13 – Comparaison de l'équité balancée et de l'équité max-min sur un réseau linéaire à 5 liens.

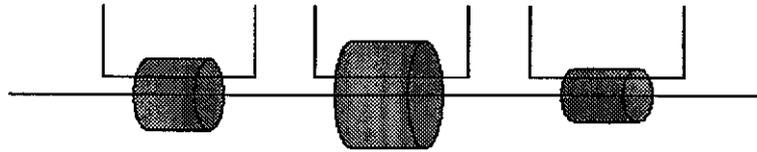


FIG. 3.14 – Ligne hétérogène à 3 liens.

Nous supposons dans la suite que le tronc est de capacité 1 et que les branches sont de capacités respectives C_1, \dots, C_K inférieures ou égales à 1. La route r_k , $k = 1, \dots, K$, traverse le tronc et le lien k . La fonction de balance associée à l'équité balancée est donnée par :

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{C_k^{x_k}}, \quad (3.35)$$

pour tout x telle que la somme des capacités des branches actives (i.e., $\sum_k 1_{\{x_k > 0\}} C_k$) est inférieure à 1, et

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \sum_{z \leq x, I(z) \neq \emptyset} \left(\frac{\sum_{k \in I(z)} (x_k - z_k) - 1}{\sum_{k \notin I(z)} (x_k - z_k)} \right) \left(\frac{\sum_{k \notin I(z)} (x_k - z_k)}{(x_k - z_k), k \notin I(z)} \right) \left(\frac{\sum_{k \in I(z)} (x_k - z_k)}{(x_k - z_k), k \in I(z)} \right) \prod_k \frac{1}{C_k^{x_k}} \quad (3.36)$$

sinon, où $I(z)$ est l'ensemble vide si $C.1(z) \equiv \sum_{k, x_k > 0} C_k > 1$ et l'ensemble d'indices k tels que $z_k = 0$, $x_k > 0$ et $C.1(z) + C_k > 1$ dans le cas contraire.

⁴Les arbres sont ici des réseaux de concentration à 2 niveaux. Dans la littérature, les arbres désignent plus généralement des réseaux de concentration à niveaux multiples.

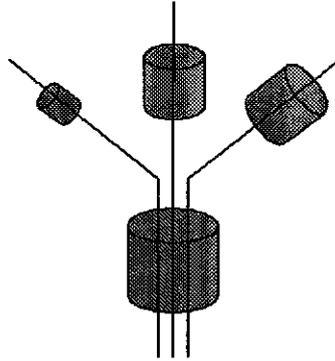


FIG. 3.15 – Arbre à trois branches.

Le débit moyen offert par l'équité balancée reste difficile à évaluer dans des arbres généraux. Pour des arbres à deux branches, on obtient :

$$\gamma_1^{\text{BF}} = \left(\frac{1}{1 - \rho_1 - \rho_2} + \frac{1}{C_1 - \rho_1} \times \frac{C_1(1 - C_1)(C_2 - \rho_2)}{\rho_1(1 - C_1)(C_2 - \rho_2) + C_2(C_1 - \rho_1)(1 - \rho_2)} \right)^{-1}, \quad (3.37)$$

Ce débit est à comparer avec celui offert par Store-and-Forward :

$$\gamma_1^{\text{SF}} = \left(\frac{1}{1 - \rho_1 - \rho_2} + \frac{1}{C_1 - \rho_1} \right)^{-1}. \quad (3.38)$$

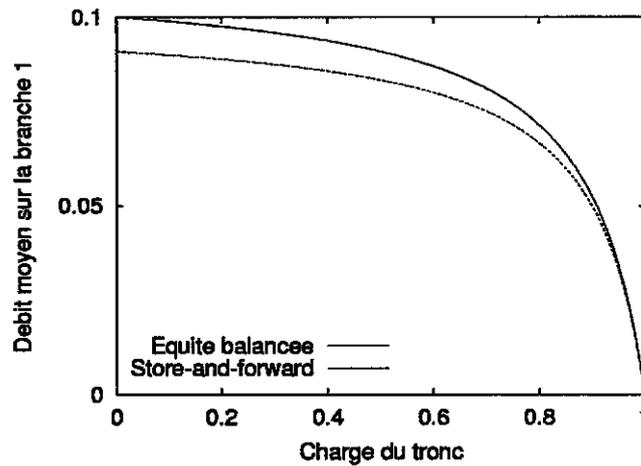


FIG. 3.16 – Comparaison de l'équité balancée et de Store-and-Forward sur un arbre à deux branches ($C_1 = 0.1$ et $C_2 = 1$).

La figure 3.16 présente une comparaison de la performance de l'équité balancée et de Store-and-Forward sur un arbre à deux branches de capacités respectives $C_1 = 0.1$ et $C_2 = 1$. Encore une fois, on choisit le cas le plus défavorable quant à l'écart entre les deux allocations, c'est-à-dire $\rho_1 \rightarrow 0$. Le débit moyen des flots sur la branche 2 est identique pour les 2 allocations.

Figure 3.17, nous comparons les performances de l'équité balancée et de l'équité max-min pour un arbre à deux branches. Il faut noter que toutes les allocations basées sur une fonction d'utilité sont identiques. Pour l'équité max-min, on présente deux résultats de simulation, en fonction du rapport r des tailles moyennes des flots de classe 1 et de classe 2. Comme l'équité max-min est sensible, sa performance dépend de ce rapport. Des valeurs extrêmes pour r permettent de quantifier cette sensibilité. On observe que dans le cas d'un arbre homogène ($C_1 = C_2 = 0.6$ avec $\rho_1 = \rho_2$), les débits moyens offerts par l'équité balancée et max-min sont très proches, et que cette dernière est très peu sensible. Par contre, dans un arbre hétérogène ($C_1 = 1, C_2 = 0.5, \rho_1 = 0.01$), les deux allocations peuvent différer assez nettement, l'équité max-min pouvant être très sensible.

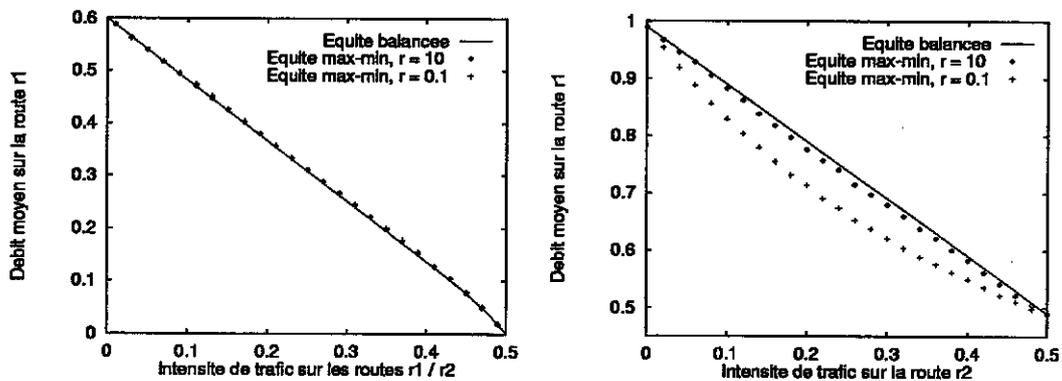


FIG. 3.17 – Comparaison des équités balancée et max-min sur un arbre à 2 branches. A gauche : $C_1 = C_2 = 0.6, \rho_1 = \rho_2$, à droite : $C_1 = 1, C_2 = 0.5, \rho_1$ fixée à 0.01.

3.7.3 Les hypercycles

Les hypercycles sont définis dans la sous-section 3.6.3. Rappelons que les hypercycles à 3 et 4 routes sont les triangles et les pyramides représentés figure 3.9. Malheureusement, même sur ces hypercycles homogènes très simples, il est impossible de calculer une fonction de balance (la fonction de balance peut être vue comme le nombre de chemins d'un point à un autre dans un espace trop compliqué pour mener à des résultats simples). Une propriété importante de ce réseaux est que l'équité balancée n'y est pas Pareto-efficace (cf. lemme 3.8). On pourrait conjecturer que les hypercycles homogènes sont les seuls réseaux sur lesquels l'équité balancée n'est pas Pareto-efficace.

L'inefficacité de l'équité balancée sur le triangle et la pyramide homogènes est illustrée figure 3.18. On donne la fraction de la capacité inutilisée lorsque $x_3 = 10$ pour le triangle et $x_3 = x_4 =$

10 pour la pyramide. Par définition, la capacité gaspillée est la capacité qu'on pourrait ajouter à une route pour atteindre les contraintes (3.3). Il semble que le triangle constitue le cas le plus défavorable parmi les hypercycles. On peut montrer que pour le triangle homogène, pour tout entier n , $\phi_1(x) = (n+1)/(3n+1)$ et $\phi_2(x) = \phi_3(x) = 1/2$ à l'état $x = (1, n, n)$, de telle sorte que la capacité gaspillée peut atteindre $1/6$. Pour la pyramide homogène, on montre également que $\phi_1(x) = (2n^2 + 3n + 1)/(11n^2 + 6n + 1)$ et $\phi_2(x) = \phi_3(x) = \phi_4(x) = 1/3$ à l'état $x = (1, n, n, n)$, de telle sorte que la capacité gaspillée peut atteindre $5/33$.

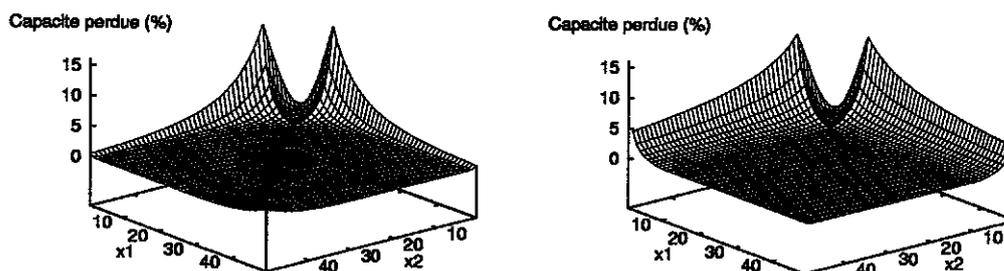


FIG. 3.18 – Inefficacité de l'équité balancée sur le triangle homogène (gauche) et sur la pyramide homogène (droite)

La figure 3.19 présente une comparaison de l'équité balancée et de Store-and-Forward sur un triangle homogène, en supposant que la charge est identique sur les 3 routes. N'ayant pas d'expression explicite pour la fonction de balance, nous n'en disposons pas pour le débit moyen. Les résultats pour l'équité balancée sont obtenus en programmant (3.19).

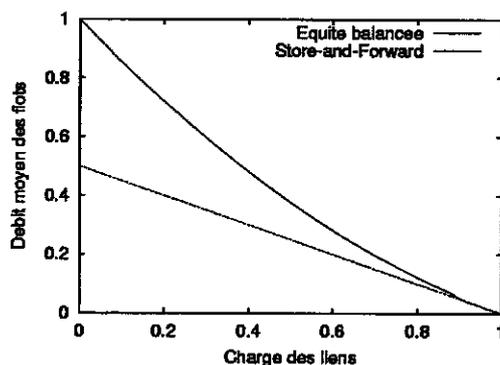


FIG. 3.19 – Comparaison de l'équité balancée et de Store-and-Forward sur le triangle.

Enfin, nous comparons les performances de l'équité balancée et de l'équité max-min sur le

triangle homogène, figure 3.20. On considère deux cas : le premier pour lequel les charges des routes sont identiques, et le second pour lequel on fixe la charge d'une route à 0.05. Dans le second cas, on trace le débit des flots de cette dernière route. Dans tous les cas, les performances sont très proches, malgré l'inefficacité de l'équité balancée. Cela s'explique simplement en remarquant que la probabilité que le système soit dans des régimes inefficaces (sur les pics d'inefficacité représentés figure 3.18) reste faible. On observe également dans le second cas que la performance de l'équité max-min croît avec la charge quand celle-ci devient proche de 1 et tend vers 0.45 quand la charge tend vers 1 : par Pareto-efficacité de max-min, à charge 1, la route 1, de charge 0.05, traverse deux liens identiques de capacité 0.5 (la capacité constante laissée par les autres routes) et a donc un débit de $0.5 - 0.05 = 0.45$.

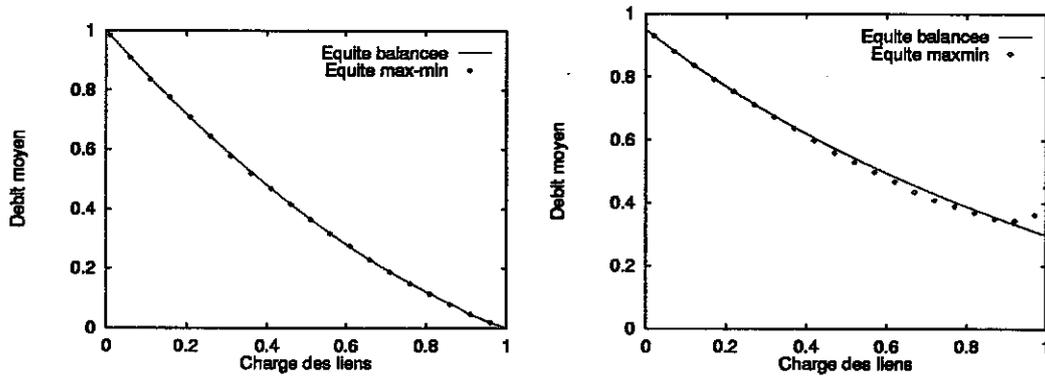


FIG. 3.20 – Comparaison de l'équité balancée et de l'équité max-min sur le triangle - à gauche : même charge sur chaque route, à droite : la charge d'un route est fixée à 0.05.

3.7.4 Lien avec débits d'accès différents

Dans le cas d'un lien unique avec un seul type de flot (limités au débit a_1 , nous savions déjà que la discipline PS était insensible ([54] par exemple). Cette allocation est en fait l'équité balancée caractérisée par la fonction de balance :

$$\Phi(x) = \frac{1}{a_1^{x_1} x_1!}, \text{ si } x_1 a_1 \leq 1, \quad \Phi(x) = \Phi(\lfloor 1/a_1 \rfloor) \text{ sinon.}$$

Considérons maintenant un lien de capacité 1 avec K types de flot. Un flot de type k étant limité à un débit a_k . Le schéma du réseau correspondant est donné figure 3.21.

Pour tout x , notons $I(x)$ l'ensemble vide si $a \cdot x \equiv \sum_i x_i a_i > 1$, et l'ensemble $\{j, a_j + a \cdot x > 1\}$ sinon. On déduit de (3.19) que l'équité balancée est caractérisée par :

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \prod_k \frac{1}{a_k^{x_k} x_k!}, \text{ si } a \cdot x \leq 1, \quad (3.39)$$

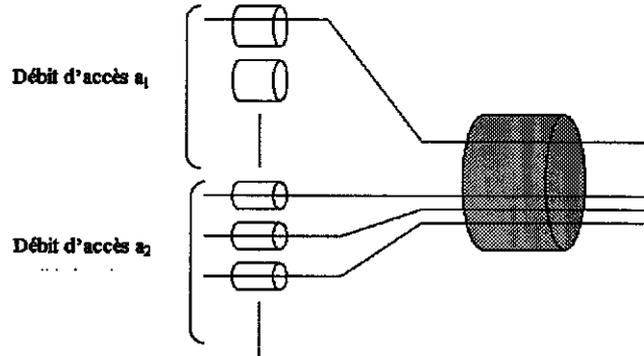


FIG. 3.21 – Lien avec différentes limitations à l'accès.

et

$$\Phi^{\text{BF}}(x) = \sum_{y: y \leq x, I(y) \neq \emptyset} \left(\frac{\sum_{k \in I(y)} (x_k - y_k) - 1}{\sum_{k \notin I(y)} (x_k - y_k)} \right) \left(\frac{\sum_{k \notin I(y)} (x_k - y_k)}{(x_k - y_k), k \notin I(y)} \right) \left(\frac{\sum_{k \in I(y)} (x_k - y_k)}{(x_k - y_k), k \in I(y)} \right) \prod_{k=1}^K \frac{1}{a_k^{y_k} y_k!}, \quad (3.40)$$

sinon. Ici, il est encore une fois difficile d'évaluer la performance de l'équité balancée. Celle de Store-and-Forward est donnée par :

$$\gamma_k^{\text{SF}} = \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{1 - \rho} \right)^{-1}, \quad (3.41)$$

où $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k$ est la charge globale du lien. Nous comparons, figure 3.22, la performance de l'équité balancée à celle de Store-and-Forward avec deux classes de flots. A gauche, $a_1 = 0.5$ et $a_2 = 0.2$, à droite $a_1 = 0.01$ et $a_2 = 0.01$. Les charges des deux classes de flot sont identiques. Comme prévu en introduction de cette section, Store-and-Forward est d'autant plus proche de l'équité balancée que les débits d'accès sont faibles.

Dans la figure 3.23, on compare les performances de l'équité balancée et de l'équité max-min dans les deux cas précédents. L'intensité de trafic est la même pour chaque type de flot. Encore une fois, on s'aperçoit que les performances sont très proches.

3.7.5 Vers d'autres topologies : algorithmes récursifs d'obtention des constantes de normalisation et des débits moyens

Il est parfois difficile d'aboutir à une expression simple de la fonction de balance pour l'équité balancée, la complexité de Φ^{BF} dans les exemples précédents le montre. J. Virtamo [32] a eu l'idée d'un algorithme récursif de calcul de la fonction génératrice de Φ^{BF} :

$$G(\rho) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \dots \sum_{x_K=0}^{\infty} \Phi^{\text{BF}}(x) \prod_{i=1}^K \rho_i^{x_i}, \quad (3.42)$$

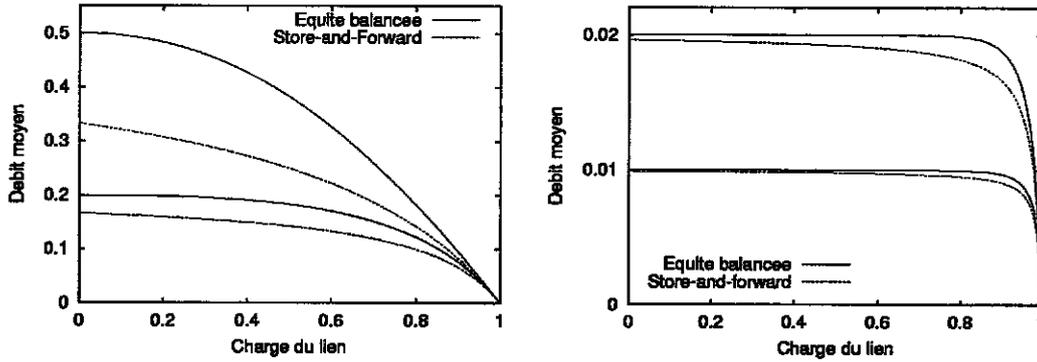


FIG. 3.22 – Comparaison de l'équité balancée et de Store-and-Forward avec deux limitations différentes à l'accès. A gauche : $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.2$, à droite : $a_1 = 0.01$, $a_2 = 0.01$. $\rho_1 = \rho_2$.

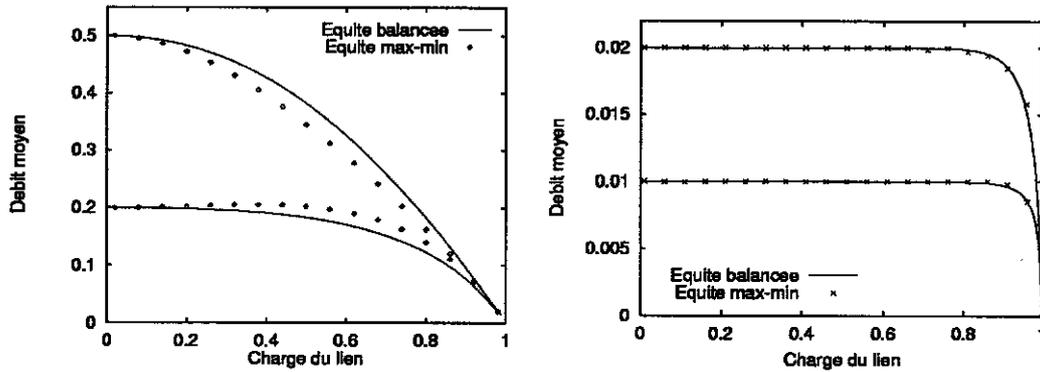


FIG. 3.23 – Comparaison de l'équité balancée et de l'équité max-min avec deux limitations différentes à l'accès. A gauche : $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.2$, à droite : $a_1 = 0.01$, $a_2 = 0.01$. $\rho_1 = \rho_2$.

où $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_K)$. Cette fonction n'est autre que la constante de normalisation de la mesure invariante $\Phi^{\text{BF}}(x) \prod_{i=1}^K \rho_i^{x_i}$. Nous savons donc que $G(\rho) < +\infty$ lorsque ρ satisfait les conditions usuelles de trafic (3.5). La fonction génératrice permet d'obtenir simplement la performance pour chaque classe de flots :

$$\gamma_i^{\text{BF}} = \frac{\rho_i}{\mathbb{E}[x_i]} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho_i} \ln G(\rho) \right)^{-1}. \quad (3.43)$$

Nous présentons maintenant les algorithmes récursifs introduits par J. Virtamo [32]. Ces algorithmes permettent de calculer la fonction génératrice et les débits moyens des flots dans des réseaux de topologies telles qu'on puisse identifier, pour chacun des sous-espaces d'états $\Omega_{\mathcal{I}_k}$, un lien toujours saturé : \mathcal{I}_k est un sous-ensemble des classes de flots de cardinal k et

$$\Omega_{\mathcal{I}_k} = \{x : x_i > 0 \text{ ssi } i \in \mathcal{I}_k\}.$$

On note $G_{\mathcal{I}}(\rho) = \sum_{x \in \Omega_{\mathcal{I}}} \Phi^{\text{BF}}(x) \prod_{k \in \mathcal{I}} \rho_k^{x_k}$. La fonction génératrice est alors décomposée en :

$$G(\rho) = 1 + \sum_{k=1}^K \sum_{\mathcal{I}_k} G_{\mathcal{I}_k}(\rho).$$

Récursion pour la fonction génératrice L'idée de l'algorithme est la suivante. Soit \mathcal{I} l'un des sous-ensembles de classes de flots \mathcal{I}_k , $k = 1, \dots, K$ et soit $l(\mathcal{I})$ un lien saturé pour tout état $x \in \mathcal{I}$. D'après (3.19), on a donc pour toute mesure invariante χ et pour tout $x \in \Omega_{\mathcal{I}}$:

$$\chi(x) = \frac{1}{C_{l(\mathcal{I})}} \sum_{k \in \mathcal{I}: r_k \in l(\mathcal{I})} \chi(x - e_k) \rho_k.$$

En sommant cette équation sur les états de $\Omega_{\mathcal{I}}$, on obtient :

$$G_{\mathcal{I}}(\rho) = \frac{\sum_{k \in \mathcal{I}: l(\mathcal{I}) \in r_k} \rho_k G_{\mathcal{I} \setminus \{k\}}(\rho)}{C_{l(\mathcal{I})} - \sum_{k \in \mathcal{I}: l(\mathcal{I}) \in r_k} \rho_k}. \quad (3.44)$$

Récursion pour les débits moyens Les débits moyens sont donnés en dérivant la fonction génératrice (3.43) :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i} G(\rho) = \sum_{k=1}^K \sum_{\mathcal{I}_k} \frac{\partial}{\partial \rho_i} G_{\mathcal{I}_k}(\rho) = \sum_{k=1}^K \sum_{\mathcal{I}_k} H_{\mathcal{I}_k}^{(i)}(\rho),$$

où les termes $H_{\mathcal{I}}^{(i)}(\rho)$ sont définis et obtenus par :

$$H_{\mathcal{I}}^{(i)}(\rho) \equiv \frac{\partial}{\partial \rho_i} G_{\mathcal{I}}(\rho) = \frac{1_{i \in \mathcal{I}} 1_{l(\mathcal{I}) \in r_i} (G_{\mathcal{I}}(\rho) + G_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}(\rho)) + \sum_{k \in \mathcal{I}: l(\mathcal{I}) \in r_k} \rho_k H_{\mathcal{I} \setminus \{k\}}^{(i)}(\rho)}{C_{l(\mathcal{I})} - \sum_{k \in \mathcal{I}: l(\mathcal{I}) \in r_k} \rho_k}.$$

Dans [32], un certain nombre d'exemples de réseaux est donné. Les algorithmes permettent d'évaluer la performance de l'équité balancée sur des topologies utiles en pratique telles que les arbres et les lignes hétérogènes. Une généralisation de ces algorithmes permet également d'évaluer l'équité balancée dans des réseaux avec différents débits d'accès.

3.8 Allocation réalisée par TCP

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre introductif, l'allocation effectivement réalisée par TCP est difficile à connaître. Est-elle proche de l'équité proportionnelle, de max-min ? Maximise-t-elle plutôt une fonction d'utilité de type Arctan ? Il semble surtout difficile de vérifier par simulations NS (Network Simulator) ou autres que TCP réalise telle ou telle allocation, tant le paramétrage du système est complexe. Il est souvent plus judicieux de modéliser et de simuler certaines parties cruciales qui composent TCP (par exemple, l'algorithme AIMD⁵).

⁵Additive Increase Multiplicative Decrease

Néanmoins, nous présentons une simulation NS du triangle et du réseau linéaire homogènes à trois routes. Nous avons simplifié au maximum le paramétrage de TCP. Les liens sont de capacité 1 Mbit/s, les RTTs sont fixés à 10 ms, les buffers sont de type DropTail (files d'attente classiques), la taille maximale de la fenêtre TCP est de 20 paquets de taille 1000 octets. Il semble que pour ce paramétrage, TCP ne soit pas Pareto-efficace sur le triangle, mais le devient sur le réseau linéaire, tout comme l'équité balancée.

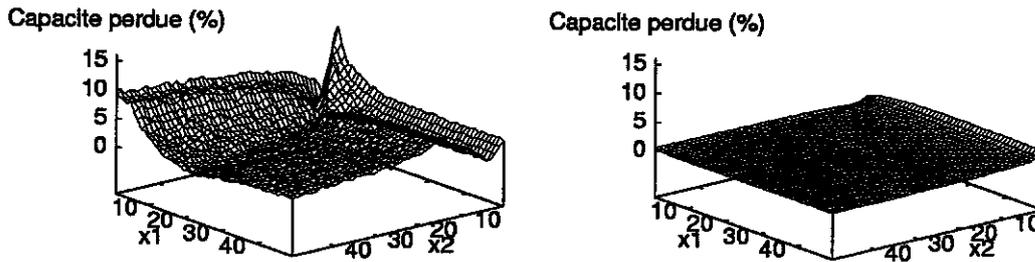


FIG. 3.24 – Inefficacité de TCP sur le triangle, Efficacité sur le réseau linéaire

3.9 Routage dynamique insensible

On a vu dans le chapitre précédent qu'il était possible de caractériser l'insensibilité dans les réseaux PS même lorsque les taux d'arrivée et le routage pouvaient dépendre de l'état du système. Nous illustrons ici sur un exemple simple l'intérêt de ce résultat.

On considère un ensemble de L liens en parallèle de capacités respectives C_1, \dots, C_L (voir figure 3.25). Des flots de taille moyenne $1/\mu$ arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ dans le système. La charge de ce dernier est $\rho = \lambda/\mu$. Chaque flot est routé vers l'un des liens en fonction de l'état du système $x = (x_1, \dots, x_L)$, x_i désignant le nombre de flots en cours sur le lien i . les flots sont traités selon la discipline PS à chaque lien. On étudie les routages au niveau flot et adaptatifs dépendant de l'état du système, comme envisagés dans [136]. On note $\nu_i(x)$ le taux d'arrivée des flots au lien i quand le système est dans l'état x . L'intensité de trafic du lien i est alors $\rho_i(x) = \nu_i(x)/\mu$. Par ailleurs, le routage doit être fait de telle sorte que lorsqu'on reste dans un certain espace d'état que l'on se choisit (cet espace d'état est \mathbb{N}^N si tous les flots sont acceptés) :

$$\sum_{j=1}^L \nu_j(x) = \lambda. \quad (3.45)$$

D'après le théorème 2.9, le routage dynamique sera insensible si et seulement si les fonctions $\rho_i(T_i x)$ sont balancées (en effet, les capacités des nœuds sont constante et donc balancées), ce qui

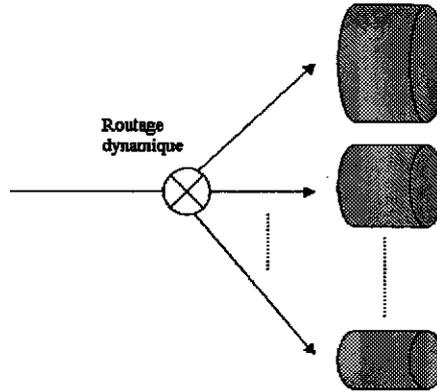


FIG. 3.25 – Routage adaptatif sur des liens parallèles.

revient à dire qu'il existe une fonction positive \mathcal{R} telle que pour tout i ,

$$\nu_i(x) = \frac{\mathcal{R}(x)}{\mathcal{R}(T^i x)}, \quad \forall x. \quad (3.46)$$

Les conditions (3.45) deviennent :

$$\sum_{j=1}^L \mathcal{R}(x) / \mathcal{R}(T^j x) = \lambda. \quad (3.47)$$

Evidemment, il existe autant de routages insensibles que de fonctions positives \mathcal{R} vérifiant (3.47). Nous explicitons ici deux routages simples et insensibles, le routage statique et un routage proportionnel à la capacité résiduelle .

Routage statique Les plus simples des routages insensibles sont les routages statiques : $\nu_i^{\text{fixe}}(x)$ constantes égales à ν_i (dans ce cas, $\mathcal{R}^{\text{fixe}}(x) = \prod_{j=1}^L 1/\nu_j^{x_j}$ par exemple).

Routage en proportion de la capacité résiduelle Un autre routage intéressant est celui qu'on pourrait appliquer si l'on voulait garantir un certain débit minimum à tous les flots (ce type de routage pourrait être envisagé pour des serveurs web par exemple). Formellement, cela signifie que le nombre de flots en cours à chaque serveur i ne doit pas dépasser un certain seuil N_i : si d est le débit minimum souhaité, $N_i = C_i/d$. Ainsi un flot ne peut être routé vers le lien i que si $x_i < N_i$. On peut facilement montrer qu'il n'existe qu'un seul routage dynamique insensible ayant ces propriétés. Il est caractérisé par :

$$\nu_i^{\text{CP}}(x) = \frac{N_i - x_i}{\sum_{j=1}^L (N_j - x_j)} \lambda. \quad (3.48)$$

Une mesure invariante π du système est alors

$$\pi^{\text{CP}}(x) = \binom{\sum_{j=1}^L (N_j - x_j)}{N_1 - x_1, \dots, N_L - x_L} \prod_{j=1}^L \left(\frac{\rho}{C_j} \right)^{x_j}.$$

En particulier, la probabilité de blocage d'un flot est :

$$P^{\text{CP}} = \frac{\pi(N_1, \dots, N_L)}{\sum_{j=1}^L \sum_{x_j=0}^{N_j} \pi(x_1, \dots, x_L)}. \quad (3.49)$$

De même, on peut donner une expression explicite pour le débit moyen des flots avec ce routage. Nous pouvons également comparer ce routage au meilleur des routages statiques sur ce type de réseau, c'est-à-dire au routage fixe donné par $\nu_i^{\text{fixe}} = N_i / \sum_j N_j$. Pour ce routage statique, la probabilité de blocage est donnée par :

$$P^{\text{fixe}} = \sum_i \nu_i \Pr[x_i = N_i] = \sum_i \nu_i \frac{(\rho_i / C_i)^{N_i}}{\sum_{j=0}^{N_i} (\rho_i / C_i)^j}. \quad (3.50)$$

Enfin, nous avons comparé le routage insensible en proportion de la capacité résiduelle au meilleur des routages dynamiques, le routage *opportuniste* qui consiste à router le flot vers le lien le moins occupé [136]. Ce dernier routage est sensible, et le blocage est donc obtenu par simulation pour des flots de tailles exponentiellement distribuées.

Nous donnons dans les figures 3.26 et 3.27 les probabilités de blocage et les débits moyens pour ces trois routages. La figure 3.26 correspond à un réseau de 2 liens en parallèle de même capacité, la figure 3.27 à un réseau de 2 liens de capacités respectives 1 et 5. Ces figures mettent en évidence d'une part l'intérêt d'un routage adaptatif (le routage statique donne toujours une probabilité de blocage élevée), et montrent d'autre part que le routage en proportion de la capacité résiduelle engendre un blocage très faible qui approxime bien celui obtenu avec le routage opportuniste. En revanche, le débit moyen des flots obtenu avec le routage opportuniste reste bien meilleur que ceux obtenus avec tout autre routage. Il faut cependant noter que ce constat est vrai pour des flots de tailles exponentielles, il peut être remis en question lorsqu'on modifie ces distributions, le routage opportuniste étant sensible.

3.10 Dépendance à long terme au niveau flot

Ce paragraphe reprend les résultats de l'article [29].

Le processus d'arrivée des paquets IP à un lien de grande capacité est connu pour être très complexe et présente un caractère asymptotiquement autosimilaire [140]. Au niveau paquet, comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, plusieurs explications de ce phénomène sont possibles : le protocole TCP est responsable des arrivées en rafales, et le fait que les flots soient de taille de distribution à décroissance lente engendre naturellement de l'autosimilarité.

Au niveau flot également, on peut observer de la dépendance à long terme. On sait que le processus d'arrivée des flots à un lien de cœur de réseau présente des corrélations temporelles

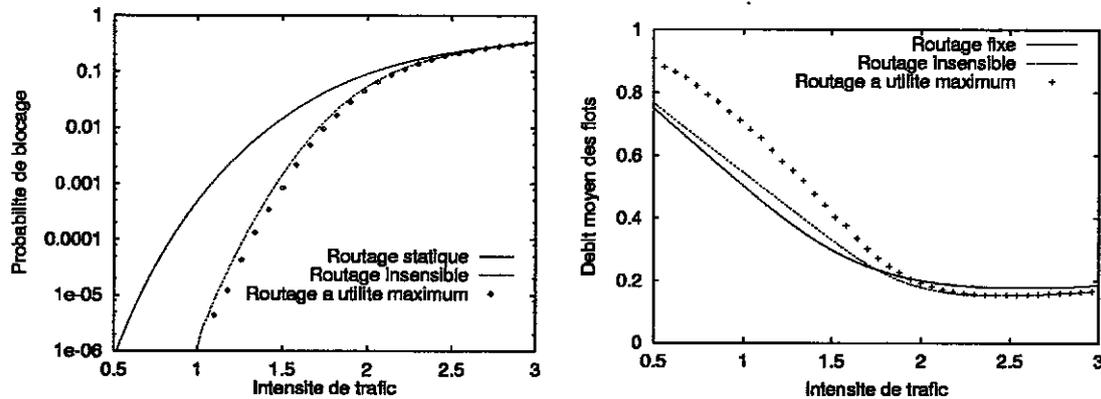


FIG. 3.26 – Probabilité de blocage et débit moyen des flots pour différents types de routage. Cas de deux liens de capacités identiques $C_1 = C_2$.

non négligeables [141, 66]. Ce phénomène se répercute naturellement au niveau paquet. Nous proposons ici d'expliquer cette variabilité au niveau flot de par la structure statistique des sessions. Les sessions sont supposées arriver selon un processus de Poisson. Pour plus de simplicité, on restreint le réseau au cas d'un lien unique. Les temps de réflexion sont représentés par un serveur infini, si bien que le réseau à étudier se réduit à celui de la figure 3.28. Notons ici que pour différencier les flots et les temps de réflexion de session de type particulier, nous introduisons la notion de classe, comme dans [95]. Dans ce qui précède, nous avons différencié les flots et temps de réflexion empruntant la même route par une augmentation du nombre de files PS. Dans le cas du réseau qui nous intéresse maintenant la notion de classe suffit pour représenter le modèle de trafic le plus général d'arrivées poissonniennes de sessions de structure quelconque : la classe du flot ou du temps de réflexion définit le type de session à laquelle il appartient et sa place dans la session.

3.10.1 Dépendance à long terme

On suppose ici qu'un seul type de session est écoulé et que le nombre de flots N par session est une variable aléatoire de distribution $p_k \equiv \Pr[N = k]$. On note $A(u, t]$ le nombre d'arrivées de session entre les instants u et t . De même, on note $X(u, t]$ le nombre d'arrivées de flots au lien entre u et t . On introduit également les notations $A_i = A(i, i + 1]$ et $X_i = (i, i + 1]$.

Définition 3.9. (*Dépendance à long terme*) Le processus ponctuel X présente de la dépendance à long terme si

$$\sum_i |\text{Cov}[X_0, X_i]| = +\infty.$$

Considérons un lien de cœur de réseau transparent et notons σ_n et τ_n les durées des flots et temps de réflexion successifs. Soit $G(u) \equiv \Pr[\sigma_n + \tau_n \leq u]$ la distribution du temps entre deux

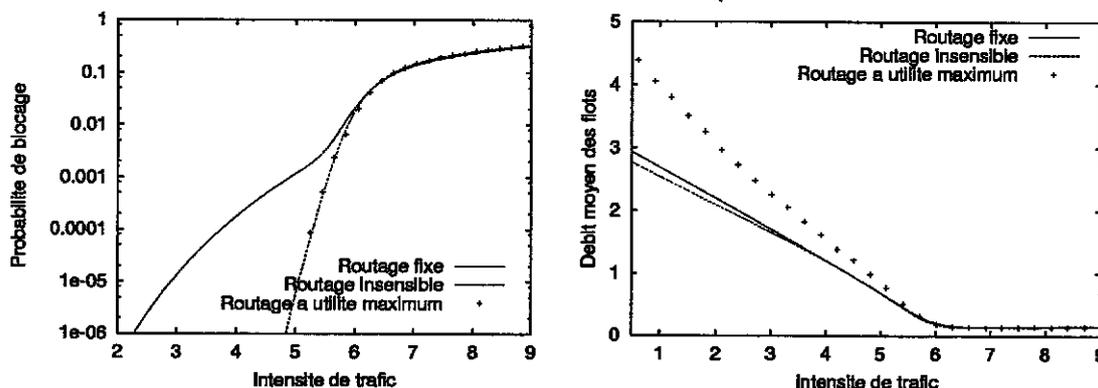


FIG. 3.27 – Probabilité de blocage et débit moyen des flots pour différents types de routage. Cas de deux liens de capacités différentes $C_1 = 5C_2$.

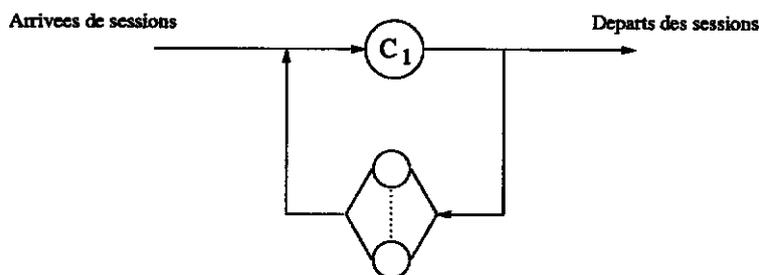


FIG. 3.28 – Réseau à un lien et représentation des sessions.

flots dans une session. Notons enfin $\tilde{G}(u) = \frac{1}{E[G]} \int_0^u (1 - G(v)) dv$. Nous donnons le résultat suivant sans preuve (on pourra trouver une démonstration dans [29, 144]).

Proposition 3.6. *pour tout $i \geq 0$, $Cov [X_0, X_i] \geq 0$ et*

$$\sum_{i \geq 0} Cov [X_0, X_i] = \lambda \sum_{k \geq 1} \left\{ kp_k \int_0^1 \sum_{l=0}^{k-1} G^{*l}(u) du + p_k E[G] \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \sum_{l=0}^{k-j-1} \tilde{G} * G^{*l}(1) \right\}. \tag{3.51}$$

Nous pouvons maintenant caractériser la dépendance à long terme du processus d'arrivées des flots au lien :

Corollaire 3.3. *Le processus d'arrivée des flots présente de la dépendance à long terme si et seulement si le nombre de flots par session à une distribution de variance infinie.*

Preuve. Nous pouvons supposer que $\tilde{G}(1) > 0$ et que $G(1) < 1$. Les deux inégalités suivantes montrent que la série (3.51) diverge si et seulement si le second moment de p_k est infini.

$$0 \leq \sum_{k \geq 1} k p_k \int_0^1 \sum_{l=0}^{k-1} G^{*l}(u) du \leq \sum_{k \geq 1} k^2 p_k,$$

$$\tilde{G}(1) p_k \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \leq p_k \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \sum_{l=0}^{k-j-1} \tilde{G} * G^{*l}(1) \leq \frac{\tilde{G}(1)}{1-G(1)} \tilde{G}(1) p_k \sum_{j=1}^{k-1} (k-j).$$

La seconde inégalité est obtenue en remarquant que $\tilde{G} * G^{*l}(1) = \Pr[\tilde{r} + r_1 + \dots + r_l \geq 1]$ où les variables aléatoires $\tilde{r}, r_1, \dots, r_l$ sont indépendantes et de distributions \tilde{G} pour \tilde{r} et G pour les autres. Donc $\tilde{G} * G^{*l}(1) \leq \tilde{G}(1)G(1)^l$, et finalement

$$\sum_{l=0}^{k-j-1} \tilde{G} * G^{*l}(1) \leq \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{G} * G^{*l}(1) \leq \frac{\tilde{G}(1)}{1-G(1)}.$$

□

On en déduit qu'au niveau flot, les distributions des tailles des flots et de la durée des temps de réflexion ne jouent aucun rôle dans l'apparition de la dépendance à long terme. Seule la distribution du nombre de flots par session affecte la dépendance à long terme dans le processus d'arrivée des flots au lien. Il semble bien que cette conclusion reste valable dans le cas d'un partage PS (cas d'un lien plus proche de l'accès), comme le montre les diagrammes temps-variance⁶ de la figure 3.29. Nous présentons ces diagrammes pour différents types de distribution du nombre de flots par session (la moyenne du nombre de flots reste constante), distributions géométriques et Pareto discrètes de paramètre s , c'est-à-dire telles que $p_k = 1_{k \geq k_0} C/k^s$. Pour le cas du lien de cœur (à gauche), les durées des flots et des temps de réflexion sont fixées. La figure à droite correspond à un lien congestionné (partage PS) avec des distributions Pareto pour la taille des flots et Weibull pour les temps de réflexion [15]. Dans les deux cas, on voit que le paramètre de Hurst augmente (la pente décroît) lorsque on diminue le paramètre s . Ainsi ce que nous avons prouvé pour les liens de cœur semble également juste pour les liens congestionnés.

3.10.2 Inter-arrivées des flots

Intéressons nous maintenant aux inter-arrivées de flots au lien. On suppose toujours que ce dernier est un serveur infini (cas d'un lien de cœur). Nous supposons qu'au temps $t = 0$, un flot arrive au lien. Notons Y_0 le nombre de sessions présentes dans le réseau à cet instant et telles qu'il reste un flot complet à transmettre sur le lien. Le réseau considéré possède bien sûr la propriété MUSTA⁷, et donc Y_0 coïncide avec le nombre de sessions à l'état stationnaire ayant encore un flot à transmettre. Par conséquent Y_0 est une variable aléatoire de Poisson de moyenne $\lambda' E[G]$, où $\lambda' = \lambda \times (E[N] - 1)$. Notons θ le temps de la première arrivée de flot sur le lien après $t = 0$.

⁶Rappelons qu'un diagramme temps-variance présente la fonction $\ln \text{Var}[X^{(m)}]$ en fonction de $\ln m$, où $X^{(m)}$ est le processus agrégé $(X_1 + \dots + X_m)/m$.

⁷Moving Unit See Time Average

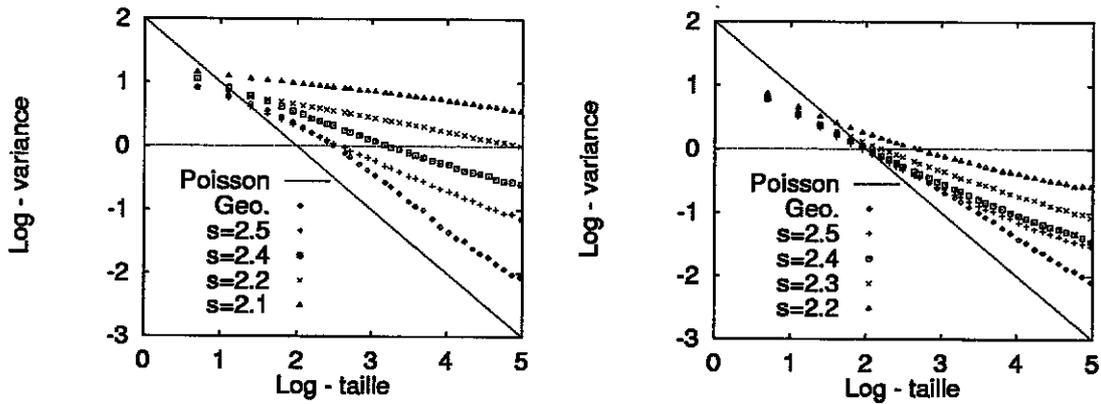


FIG. 3.29 – Diagrammes temps-variance pour le processus des arrivées de flots à un lien de cœur (serveur infini) et un lien congestionné (serveur PS).

Proposition 3.7. Lorsque le taux d'arrivée des sessions λ est important, la distribution des inter-arrivées de flots au lien θ est approximativement exponentielle :

$$\Pr(\theta > x/(\lambda + \lambda')) \sim e^{-x}, \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Preuve. Soit r_i le temps résiduel de la période de réflexion i ; ($r_i, 1 \leq i \leq Y_0$) est une suite de variables aléatoires i.i.d. de distribution :

$$\Pr(r_i \leq x) = \frac{1}{E(G)} \int_0^x (1 - G(t)) dt.$$

On note $F(u) = 1 - \Pr(r_i \leq u)$. On prouve sans difficulté que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pr(r_i \leq xt)}{\Pr(r_i \leq t)} = x$. Le théorème 2.1.5 dans [72] fournit la seconde égalité dans l'expression suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(\min_{i \leq n} r_i > xE(G)/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(\frac{x E(G)}{n}\right)^n = e^{-x}. \quad (3.52)$$

Puisque Y_0 est un processus de Poisson d'intensité $\lambda' E(G)$,

$$\Pr\left(\min_{i \leq Y_0} r_i > \frac{x}{\lambda'}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda' E(G))^n}{n!} e^{-\lambda' E(G)} F\left(\frac{x}{\lambda'}\right)^n.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Grâce au théorème central limite (quand $\lambda \rightarrow +\infty$, Y_0 tend vers une variable gaussienne de moyenne et de variance égales à $\lambda' E(G)$), il existe une fonction $f(\lambda)$ et un réel λ_0 tels que, pour $\lambda' > \lambda_0$:

$$\begin{cases} \sum_{n \notin \mathcal{F}_{\lambda'}} \frac{(\lambda' E(G))^n}{n!} e^{-\lambda' E(G)} \leq \epsilon, \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda)/\lambda = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{F}_{\lambda'}$ désigne l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / -f(\lambda) + \lambda' E(G) \leq n \leq \lambda' E(G) + f(\lambda)\}$. On en déduit que :

$$(1 - \epsilon) F\left(\frac{x}{\lambda'}\right)^{\lambda' E(G) - f(\lambda)} \leq \sum_{n \in \mathcal{F}_{\lambda'}} \frac{(\lambda' E(G))^n}{n!} e^{-\lambda' E(G)} F\left(\frac{x}{\lambda'}\right)^n \leq F\left(\frac{x}{\lambda'}\right)^{\lambda' E(G) + f(\lambda)}.$$

Maintenant, grâce à (3.52), on peut trouver λ_1 tel que, pour $\lambda' > \lambda_1$,

$$\max \left(\left| F\left(\frac{x}{\lambda'}\right)^{\lambda' E(G) - f(\lambda)} - e^{-x} \right|, \left| F\left(\frac{x}{\lambda'}\right)^{\lambda' E(G) + f(\lambda)} - e^{-x} \right| \right) \leq \epsilon.$$

Ce qui donne finalement :

$$\Pr \left(\min_{i \leq Y_0} r_i > x \right) \sim e^{-\lambda' x}, \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

La proposition s'obtient en remarquant que θ est le minimum des variables exponentielles, $\min_{i \leq Y_0} r_i$ et du temps d'arrivée d'une nouvelle session. \square

Chapitre 4

Comparaisons stochastiques dans les réseaux de files d'attente

Ce chapitre est consacré à la comparaison stochastique de réseaux de files d'attente. Ce type de comparaison est loin d'être aisé et la recherche dans le domaine avance lentement. Ces études sont motivées par la difficulté d'obtenir des résultats de performance explicites pour la plupart des réseaux de files d'attente. Il est alors crucial de pouvoir comparer ces systèmes à des systèmes repères de performance bien connue, par exemple à des réseaux de Whittle. Nous présentons des exemples d'application de comparaison stochastique dans les chapitres suivants, l'un consacré à l'évaluation du délai de traversée des paquets associés à des applications temps-réel et l'autre destiné à l'étude de l'impact de ces applications sur le trafic de données dans les réseaux multiservices.

Nous commençons ce chapitre par quelques définitions et résultats sur certains ordres stochastiques, puis présentons les résultats classiques de comparaison stochastique de files d'attente. Le lecteur trouvera dans les ouvrages de M. Shaked et J. Shantikumar [166], de A. Müller et D. Stoyan [131], de R. Szekli [171] et de F. Baccelli et P. Brémaud [8] la plupart de ces résultats. Nous achevons le chapitre en présentant de nouveaux résultats de comparaison de files en environnement aléatoire. Ces comparaisons sont motivées par l'étude de réseaux multiservices et par celle de la mobilité des utilisateurs dans les réseaux radio. Ces derniers résultats sont présentés en partie dans les publications [60, 61, 34].

4.1 Comparaisons de variables aléatoires réelles

D'une manière générale, on appelle ordre stochastique un ordre partiel défini sur un espace des mesures de probabilité. Par exemple, l'ordre stochastique le plus naturel pour comparer deux variables aléatoires réelles consiste à comparer point à point leurs distributions. On note \leq_{st} ⁸ cet ordre : si X et Y sont deux v.a. réelles, on écrit $X \leq_{st} Y$ ssi

$$\Pr[X \leq t] \geq \Pr[Y \leq t], \quad \forall t.$$

Cet ordre est souvent appelé *trajectoriel* du fait de la caractérisation suivante, due à V. Strassen [170].

Théorème 4.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, il y a équivalence entre :*

- (i) $X \leq_{st} Y$,
- (ii) *il existe un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) sur lequel sont définies deux variables aléatoires X' et Y' de même lois que X et Y telles que :*

$$P[X' \leq Y'] = 1.$$

On l'appelle également parfois ordre *croissant* du fait de cette autre caractérisation :

Théorème 4.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, il y a équivalence entre :*

- (i) $X \leq_{st} Y$,
- (ii) *pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante,*

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)],$$

si ces moyennes existent.

Ce dernier résultat montre que l'ordre \leq_{st} est un ordre intégral, c'est-à-dire caractérisé par les valeurs de certaines moyennes. En fait, la majorité des ordres stochastiques considérés jusqu'à présent sont des ordres intégraux, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

On pourrait penser que l'ordre croissant, comparant point à point les distributions des variables aléatoires, est le plus précis des ordres stochastiques. En fait, en s'appuyant sur des notions de temps résiduel de vie, on peut construire des ordres encore plus fins.

Définition 4.1. (Ordre \leq_{hr} ⁹) *On écrit $X \leq_{hr} Y$ si la fonction*

$$t \mapsto \frac{\Pr[X > t]}{\Pr[Y > t]}$$

est décroissante ou si de manière équivalente, pour tout t :

$$[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t].$$

⁸*st* pour *strong*

⁹*hr* pour *hazard rate*

Par construction, $X \leq_{hr} Y$ implique $X \leq_{st} Y$. En essayant à présent de comparer les variables aléatoires $[X|X \in A]$ et $[Y|Y \in A]$, pour tout ensemble mesurable A tel que ces variables conditionnelles soient définies, on est amené à construire un ordre plus encore fort que \leq_{hr} .

Définition 4.2. (Ordre \leq_{lr} ¹⁰) Si X et Y ont des lois de densités respectives f_X et f_Y par rapport à une mesure commune, on écrit $X \leq_{lr} Y$ si

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t), \quad \text{pour tout } s \leq t.$$

On peut vérifier que $X \leq_{lr} Y$ est bien équivalent au fait que, pour tout ensemble mesurable A tel que $\Pr[X \in A] > 0$ et $\Pr[Y \in A] > 0$,

$$[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A].$$

Par construction, $X \leq_{lr} Y$ implique $X \leq_{hr} Y$.

4.2 Ordres stochastiques intégraux

On s'intéresse à présent à des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n . \mathbb{R}^n est muni de l'ordre partiel usuel suivant : $x = (x_1, \dots, x_n) \leq y = (y_1, \dots, y_n)$ si $x_i \leq y_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Par ailleurs, on note \vee et \wedge les opérations de max et min composante par composante.

Les notions suivantes sont généralisables au cas de variables à valeurs dans un espace muni d'un ordre partiel. Les ordres stochastiques intégraux sont définis comme suit.

Définition 4.3. Soit \mathcal{F} un ensemble quelconque de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n . On définit l'ordre $\leq_{\mathcal{F}}$ par :

$$X \leq_{\mathcal{F}} Y \quad \text{ssi} \quad E[f(X)] \leq E[f(Y)], \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

quand les moyennes précédentes existent.

Voici quelques exemples d'ordres stochastiques intégraux :

$$\leq_{st} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissantes}\},$$

$$\leq_{cx} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexes}\},$$

$$\leq_{icx} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexes et croissantes}\},$$

$$\leq_{dcx} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexes et décroissantes}\},$$

$$\leq_{cv} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ concaves}\},$$

$$\leq_{icv} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ concaves et croissantes}\},$$

$$\leq_{sm} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ super-modulaires}\}. \text{ La définition de cet ordre est précisée ci-après.}$$

$$\leq_{sc} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ Schur-convexes}^{11}\},$$

$$\leq_{Lt} \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ de la forme } f(x) = \exp -t.x, t \in \mathbb{R}^n, t > 0\}, \text{ cet ordre compare les transformées de Laplace des variables aléatoires.}$$

¹⁰ lr pour *Likelihood ratio*

¹¹Rappelons qu'une fonction f est Schur-convexe si $x \prec y$ implique $f(x) \leq f(y)$, où \prec est l'ordre usuel en majorisation.

On peut imaginer bien d'autres ordres stochastiques [131], mais pour l'étude de systèmes de files d'attente, les ordres \leq_{st} , \leq_{cx} , \leq_{icx} et \leq_{sm} s'imposent naturellement car bien souvent les variables définissant la performance de ces systèmes peuvent être construites par une succession d'opérations (\max , $+$) menant à des fonctions croissantes, convexes et super-modulaires. Les trois sections suivantes sont donc consacrées à ces trois ordres dont nous rappelons, sans démonstration, les principales propriétés. Le lecteur trouvera dans [131] la justification de ces propriétés et de bien d'autres encore.

4.3 Ordre croissant \leq_{st}

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations de l'ordre croissant pour des variables à valeurs dans \mathbb{R}^n . La première (c'est-à-dire la condition (ii)) est due à V. Strassen [170]. En réalité, le résultat de Strassen est bien plus général que celui présenté ici (voir [131], théorème 2.6.1).

Théorème 4.3. *Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n . Il y a équivalence entre :*

- (i) $X \leq_{st} Y$,
- (ii) *il existe un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) sur lequel sont définies deux variables aléatoires X' et Y' de même lois que X et Y telles que :*

$$P[X' \leq Y'] \leq 1.$$

- (iii) *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\Pr[X \geq x] \leq \Pr[Y \geq x].$$

Le résultat suivant exprime la stabilité de l'ordre croissant par passage aux limites en distribution.

Théorème 4.4. *Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n convergeant respectivement en loi vers X et Y et telles que, pour tout n , $X_n \leq_{st} Y_n$. Alors :*

$$X \leq_{st} Y.$$

4.4 Ordres convexes \leq_{cx} et \leq_{icx}

On donne dans un premier temps quelques propriétés des ordres convexes sur \mathbb{R} .

Théorème 4.5. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Il y a équivalence entre :*

- (i) $X \leq_{cx} Y$,
- (ii) $X \leq_{icx} Y$ et $E[X] = E[Y]$.

Par ailleurs, $X \leq_{icx} Y$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E[(X - x)^+] \leq E[(Y - x)^+]$.

Les ordres convexes ne sont malheureusement pas stables par passage aux limites en distribution. Ce résultat est intimement lié au fait que ces ordres ne peuvent être générés par un sous-ensemble de fonctions bornées (autrement dit, par exemple pour l'ordre \leq_{icx} , il n'existe

pas de sous-ensemble F de fonctions bornées, tel que $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$, $\forall f \in F$, implique $X \leq_{icx} Y$. Par contre, on peut trouver des conditions supplémentaires simples à vérifier et garantissant le passage aux limites.

Théorème 4.6. Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires réelles telles que pour tout n , $X_n \leq_{icx} Y_n$. Supposons de plus que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

- (i) X_n et Y_n convergent en loi respectivement vers X et Y et $E[X_n^+] \rightarrow E[X^+]$, $E[Y_n^+] \rightarrow E[Y^+]$, quand $n \rightarrow +\infty$,
- (ii) il existe deux variables aléatoires X et Y telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E[(X_n - x)^+] \rightarrow E[(X - x)^+]$ et $E[(Y_n - x)^+] \rightarrow E[(Y - x)^+]$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Alors $X \leq_{icx} Y$.

Donnons à présent quelques propriétés des ordres convexes appliqués à des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n . Malheureusement, il ne peut exister de caractérisation simple des ordres convexes comme dans le théorème 4.5 : tout générateur de l'ordre convexe en dimension supérieure à 2 est dense dans l'ensemble des fonctions convexes (voir les travaux de S. Johansen [90]). En revanche, une représentation de Strassen, similaire à celle du théorème 4.3, reste possible (cette propriété en dimension 1 [82] est bien plus ancienne que le résultat de V. Strassen).

Théorème 4.7. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n . Il y a équivalence entre :

- (i) $X \leq_{cx} Y$ (resp. $X \leq_{icx} Y$),
- (ii) il existe un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) sur lequel sont définies deux variables aléatoires X' et Y' à valeurs dans \mathbb{R}^n de même lois que X et Y telles que :

$$E[Y'|X'] = X' \text{ (resp. } E[Y'|X'] \geq X') \text{, p.s..}$$

Enfin, les ordres convexes en dimension supérieure à 2 ne sont pas stables par passage aux limites, mais comme en dimension 1, il n'est pas difficile de trouver des conditions simples pour que le passage aux limites soit possible.

Théorème 4.8. Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^p telles que pour tout n , $X_n \leq_{cx} Y_n$ (resp. $X_n \leq_{icx} Y_n$). Si ces suites convergent en loi respectivement vers X et Y , et si de plus $E[X_n] \rightarrow E[X]$ et $E[Y_n] \rightarrow E[Y]$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors $X \leq_{cx} Y$ (resp. $X \leq_{icx} Y$).

4.5 Ordre super-modulaire \leq_{sm}

Cet ordre, introduit dans les années 80 par Rolski, s'avère très utile dans la comparaison de la performance de certains systèmes de files d'attente [152, 42, 43, 86, 129]. C'est un ordre intégral basé sur l'ensemble des fonctions super-modulaires, dont voici la définition :

Définition 4.4. (Fonction super-modulaire) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite super-modulaire si pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y)$.

La justification des propriétés suivantes peut être trouvée dans [113, 42].

- Théorème 4.9.** (i) Si la fonction f est C^2 , f est super-modulaire si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$, pour tout $i \neq j$.
- (ii) Si f est croissante et super-modulaire, $\max(f, c)$ l'est aussi pour tout $c \in \mathbb{R}$.
- (iii) Si f est monotone et super-modulaire, $\phi \circ f$ est super-modulaire pour toute fonction ϕ croissante convexe.
- (iv) Si f est super-modulaire, $f(\phi_1, \dots, \phi_n)$ l'est aussi si les fonctions ϕ_i sont monotones et de même monotonie.
- (v) Soient $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions affines et monotones, de même monotonie, $f = \max(f_1, \dots, f_1 + \dots + f_k)$ est super-modulaire.

L'ordre super-modulaire est stable par passages aux limites en distribution :

Théorème 4.10. Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^p convergeant respectivement en loi vers X et Y et telles que, pour tout n , $X_n \leq_{sm} Y_n$. Alors :

$$X \leq_{sm} Y.$$

Nous donnons à présent deux résultats qui, nous le verrons, justifient l'intérêt de l'ordre super-modulaire. Le premier est dû à A. Tchen [172] est basé sur l'inégalité de Lorentz [112] (on trouvera dans [105] un preuve plus détaillée), le second à T. Hu et X. Pan [86], bien qu'apparu sous une autre forme dans [45].

Théorème 4.11. (Inégalité de Lorentz) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires de même distribution. Alors :

$$(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (X_1, \dots, X_1).$$

Définition 4.5. Le générateur Q d'un processus de Markov est \leq_{st} -monotone si pour toute fonction f croissante, $x \mapsto \int f(t)Q(x, dt)$ est également croissante.

Hypothèse 4.1. $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus de Markov stationnaire tel que son générateur et celui du processus renversé $\{X(-t), t \in \mathbb{R}\}$ soient \leq_{st} -monotones.

Théorème 4.12. Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus vérifiant l'hypothèse 4.1. Pour tout entier n et tout couple de vecteurs (r_1, \dots, r_n) et (s_1, \dots, s_n) tels que $r_1 \leq s_1$ et $r_i - r_{i-1} \leq s_i - s_{i-1}$ pour $i = 2, \dots, n$, on a :

$$(X(r_1), \dots, X(r_n)) \geq_{sm} (X(s_1), \dots, X(s_n)),$$

4.6 Propriétés stochastiques des variables aléatoires réelles

Nous donnons ici quelques définitions et propriétés de certains sous-ensembles de l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^+ . Comparer des variables aléatoires suivant l'ordre croissant peut ne pas être suffisant. On peut par exemple s'intéresser à la fonction de survie (*survival function* en anglais) et au taux de disparition (*failure rate* en anglais) d'une variable aléatoire X réelle positive à densité f_X , respectivement définis par :

$$\bar{F}(t) = \Pr[X > t],$$

$$r(t) = \frac{f_X(t)}{F(t)}.$$

De manière similaire, on définit la distribution du temps résiduel de vie au temps t par la fonction de distribution de X conditionnellement au fait que $X > t$:

$$F_t(x) = \Pr[X \leq x + t | X > t].$$

On notera X_t une variable aléatoire de distribution F_t . A partir de ces notions, on peut définir et même caractériser certaines mesures de probabilité. Par exemple, la variable exponentielle est l'unique loi sans mémoire, c'est-à-dire pour laquelle F_t ne dépend pas de t .

Définition 4.6. (Distributions IFR et DFR¹²) Une distribution est IFR (resp. DFR) si son taux de disparition croît (resp. décroît).

Il existe un certain nombre de caractérisations des distributions IFR. En voici quelques unes : (i) X est une v.a. de loi IFR, (ii) $X_t \leq_{st} X_s$ pour tout $s < t$, (iii) $X_t \leq_{hr} X$ pour tout t , (iv) la fonction $x \mapsto \Pr[X > x]$ est log-concave.

On obtient une notion plus forte en remplaçant l'ordre \leq_{st} dans la caractérisation (ii) précédente par l'ordre \leq_{lr} et moins forte si on le remplace par \leq_{icx} .

Définition 4.7. (Distributions ILR et DLR¹³) La distribution d'une v.a. X est ILR (resp. DLR) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée : (i) $X_t \leq_{lr} X_s$ (resp. $X_s \leq_{lr} X_t$) pour tout $s < t$, (ii) $X_t \leq_{lr} X$ (resp. $X \leq_{lr} X_t$) pour tout t , (iii) la densité f_X est log-concave (resp. log-convexe).

Définition 4.8. (Distributions DMRL et IMRL¹⁴) La distribution d'une v.a. X est DMRL (resp. IMRL) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée : (i) $X_t \leq_{icx} X_s$ (resp. $X_s \leq_{icx} X_t$) pour tout $s < t$, (ii) la fonction $t \mapsto E[X_t]$ est décroissante (resp. croissante).

Enfin, certains sous-ensembles de distributions ne sont basés que sur la comparaison stochastique de X et X_t .

Définition 4.9. (Distributions NBU et WBU¹⁵) La distribution d'une v.a. X est NBU (resp. WBU) si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée : (i) $X_t \leq_{st} X$ (resp. $X \leq_{st} X_t$) pour tout t , (ii) la fonction $t \mapsto \ln \Pr[X > t]$ est sous-additive (resp. sur-additive).

Rappelons qu'une fonction est sous-additive si $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux moyennes, les notions précédentes deviennent :

Définition 4.10. (Distributions NBUE et WBUE¹⁶) La distribution d'une v.a. X est NBUE (resp. WBUE) si $E[X_t] \leq E[X]$ (resp. $E[X] \leq E[X_t]$) pour tout t .

¹²Increasing Failure Rate, Decreasing Failure Rate

¹³Increasing and Decreasing Likelihood Ratio

¹⁴Decreasing Mean Residual Life, Increasing Mean Residual Life

¹⁵New Better than Used, Worse Better than Used

¹⁶New Better than Used in Expectation, Worse Better than Used in Expectation

Toutes les notions précédentes sont liées, et on peut sans peine montrer que :

$$\begin{array}{ccccc} ILR & \Rightarrow & IFR & \Rightarrow & DMRL \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & NBU & \Rightarrow & NBUE. \end{array}$$

De même que :

$$\begin{array}{ccccc} DLR & \Rightarrow & DFR & \Rightarrow & IMRL \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & WBU & \Rightarrow & WBUE. \end{array}$$

Signalons enfin que les distributions exponentielles sont IFR et DFR, Les distributions log-normales sont DFR, les distributions uniformes sur des intervalles sont IFR. La distribution gamma et de Weibull de paramètre α sont DFR si $\alpha \leq 1$ et IFR si $\alpha \geq 1$.

4.7 Comparaisons de files G/G/1

Nous donnons ici quelques résultats classiques de la comparaison de files G/G/1 pour différents processus d'arrivée et différentes disciplines de service. Par processus d'arrivée, on entend le processus ponctuel marqué dont les points sont les temps d'arrivée et les marques les services requis.

4.7.1 Processus d'arrivée

Nous considérons ici des files d'attente FIFO.

Buffer infini (G/G/1/ ∞).

La comparaison de files de ce type est rendue possible grâce à la structure $(\max, +)$ de la récurrence définissant les temps d'attente des clients. Soient T_n et σ_n l'instant d'arrivée et le temps de service du n -ème client arrivé après $t = 0$. On fixe $T_0 = 0$. Notons $\tau_n = T_{n+1} - T_n$ et $X_n = \sigma_n - \tau_n$. Si le workload de la file à l'instant $t = 0-$ est W_0 , les temps d'attente des clients successifs sont définis par la récurrence suivante : pour tout n ,

$$W_{n+1} = (W_n + X_n)^+.$$

Il n'est pas difficile de voir que :

$$W_n = \max\{0, X_{n-1}, \dots, \sum_{k=1}^{n-1} X_k, \sum_{k=0}^{n-1} X_k + W_0\}.$$

W_n est donc une fonction croissante, convexe et super-modulaire de (X_1, \dots, X_{n-1}) , ce qui a pour conséquence immédiate le théorème suivant.

Théorème 4.13. *Si pour tout n ,*

$$(W_0, X_0, \dots, X_n) \leq_{\mathcal{F}} (\tilde{W}_0, \tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_n),$$

alors, pour tout n ,

$$W_n \leq_{\mathcal{G}} \tilde{W}_n,$$

où $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est l'un des couples suivants (st, st) , (icx, icx) , (cx, icx) , (ism, icx) .

Ce résultat a de multiples applications. Avec l'ordre croissant, ce théorème peut exprimer très simplement que le temps d'attente d'un client augmente si la charge de la file augmente. Avec l'ordre convexe croissant, il justifie dans certains cas la conjecture de Wolff [183] selon laquelle accroître la *variabilité* du processus d'arrivée diminue la performance de la file. Nous donnerons également des exemples contredisant les tentatives de généralisation du théorème pour d'autres couples d'ordres stochastiques. Notons également que si le processus d'arrivées est stationnaire ergodique, la conclusion du théorème 4.13 reste valable pour le temps d'attente à l'état stationnaire (si ce dernier est défini) : pour l'ordre croissant, c'est une conséquence de sa stabilité par passage aux limites. Pour l'ordre convexe croissant, le résultat peut être obtenu par la construction *monotone* de Loynes du temps d'attente stationnaire (on renvoie le lecteur à [9] pour plus de détails). Il est à noter enfin que les résultats énoncés ici pour le temps d'attente stationnaire ne sont pas valables en général lorsqu'on compare le workload de la file à l'état stationnaire : on trouvera dans [9] une description précise de la correspondance entre distribution de Palm et distribution stationnaire.

Le premier corollaire suivant décline la conjecture de Wolff et montre que des distributions déterministes des inter-arrivées ou des services requis optimisent la performance des files G/G/1 pour lesquelles les services requis sont indépendants des inter-arrivées [9].

Corollaire 4.1. *Considérons une file G/G/1 définie par $(W_0, \tau_n, \sigma_n, n \geq 0)$ telle que les suites $\{\tau_n\}$ et $\{\sigma_n\}$ soient indépendantes. Notons $X_n = \sigma_n - \tau_n$, $\tilde{X}_n = \sigma_n - \mathbb{E}[\tau_n]$ et $\tilde{X}_n = \mathbb{E}[\sigma_n] - \tau_n$. Supposons $\tilde{W}_0 = \tilde{W}_0 = W_0$. Alors, pour tout n :*

$$\tilde{W}_n \leq_{icx} W_n \quad \text{et} \quad \tilde{W}_n \leq_{icx} W_n.$$

Le cas échéant, les inégalités précédentes restent valables en régime stationnaire.

Ce corollaire est une conséquence directe de $(\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_n) \leq_{cx} (X_0, \dots, X_n)$ et de $(\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_n) \leq_{cx} (X_0, \dots, X_n)$. Sous les hypothèses de renouvellement, le théorème 4.13 devient :

Corollaire 4.2. *Dans le cas d'une file GI/GI/1, on a :*

$$W_0(P^0) \leq_{icx} \tilde{W}_0(\tilde{P}^0),$$

où P^0 et \tilde{P}^0 désignent les probabilités de Palm associées aux processus d'arrivée, dès que $\sigma_0 \leq_{icx} \tilde{\sigma}_0$ et $\tau_0 \leq_{dcx} \tilde{\tau}_0$. Ces dernières conditions sont par exemple vérifiées quand $\sigma_0 \leq_{cx} \tilde{\sigma}_0$ et $\tau_0 \leq_{cx} \tilde{\tau}_0$.

Ce corollaire est une conséquence directe du fait que la composition d'une fonction convexe croissante (resp. décroissante) par une fonction convexe croissante est convexe croissante (resp. décroissante).

Le résultat suivant dû à W. Whitt [178] contredit la conjecture de Wolff, au sens où pour certains processus d'arrivée, la probabilité à l'état stationnaire qu'un client attende avant d'être servi décroît avec la variabilité du temps de service. Cet exemple prouve également que le résultat du théorème 4.13 n'est pas valable pour le couple d'ordres stochastiques (cx, st) .

Théorème 4.14. *Dans le cas d'une file GI/GI/1, avec inter-arrivées de distribution d'Erlang de degré $k \geq 2$, si $\sigma_0 \leq_{cx} \tilde{\sigma}_0$, alors :*

$$P^0 [W_0 > 0] \geq \tilde{P}^0 [\tilde{W}_0 > 0].$$

En revanche, dans certains cas usuels, il est possible de montrer qu'accroître la variabilité du processus d'arrivée diminue suivant l'ordre croissant la performance de la file. Le théorème suivant est dû à T. Rolski et D. Stoyan [154].

Théorème 4.15. (i) *Dans le cas d'une file M/GI/1, si $E[\tau_0] \leq E[\tilde{\tau}_0]$ et si $\sigma_0 \leq_{cx} \tilde{\sigma}_0$, alors :*

$$W_0(P^0) \leq_{st} \tilde{W}_0(\tilde{P}^0). \quad (4.1)$$

(ii) *Dans le cas d'une file GI/M/1, si $E[\sigma_0] \leq E[\tilde{\sigma}_0]$ et si $\tau_0 \leq_{Lt} \tilde{\tau}_0$, alors on a (4.1).*

Comparaison du workload stationnaire des files G/G/1.

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, les comparaisons du temps d'attente, c'est-à-dire celles du workload sous la probabilité de Palm associée au processus d'arrivée, ne se généralisent pas facilement à celles du workload de la file à l'état stationnaire. C'est une illustration du paradoxe de Feller [9] : prenons une file d'attente avec temps de service $(\sigma_n, n \in \mathbb{Z})$ i.i.d. et inter-arrivées $\tau_n = T_{n+1} - T_n = \sigma_n$. Dans cet exemple simple, le workload sous la probabilité de Palm (aux instants d'arrivées) a même loi que σ_0 alors que le workload sous la probabilité stationnaire a même loi que la variable $\int_0^{\sigma_0} (\sigma_0 - u) du / E[\sigma_0] = \sigma_0^2 / (2E[\sigma_0])$, d'après la formule d'inversion. Choisissons à présent σ_0 une variable exponentielle de moyenne 1, et $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \vee u$ une variable exponentielle tronquée inférieurement. En prenant u assez petit, il est possible de montrer que :

$$\frac{E[\sigma_0^2]}{2E[\sigma_0]} > \frac{E[\tilde{\sigma}_0^2]}{2E[\tilde{\sigma}_0]}.$$

Ainsi, on a bien sûr

$$W_0(P^0) \leq_{st} \tilde{W}_0(\tilde{P}^0),$$

mais

$$E_P[W_0] \geq E_{\tilde{P}}[\tilde{W}_0],$$

où P et \tilde{P} désignent les probabilités stationnaires respectives des deux systèmes. Les comparaisons des mesures de performance aux instants d'arrivée ne sont donc pas nécessairement valables à l'état stationnaire.

Néanmoins, il est possible de trouver des conditions suffisantes pour que les résultats de comparaison montrés sous les probabilités de Palm des processus d'arrivée restent valables sous les probabilités stationnaires. Le lecteur trouvera dans [9] des exemples de telles conditions. Il faut noter cependant que sous les hypothèses de renouvellement, c'est-à-dire lorsque les variables $(\sigma_n, n \in \mathbb{Z})$ sont i.i.d. indépendantes des variables $(\tau_n, n \in \mathbb{Z})$, elles-même i.i.d., certaines comparaisons obtenues sous les probabilités de Palm sont valables sous les probabilités stationnaires sans conditions supplémentaires : pour des comparaisons trajectorielles, la condition (b) de l'exemple 4.4.5 dans [9] n'est pas nécessaire. Par contre, pour des comparaisons suivant un ordre convexe, il paraît plus difficile de se passer des hypothèses faites dans [9] (nous n'avons pas trouvé de variables convergeant vers le workload stationnaire et qui en même temps soit une fonction convexe des inter-arrivées). Néanmoins, on montre le résultat suivant :

Théorème 4.16. *Dans le cas d'une file GI/GI/1,*

(i) *si $\sigma_0 \leq_{st} \tilde{\sigma}_0$ et $\tilde{\tau}_0 \leq_{st} \tau_0$, alors :*

$$W_0(P) \leq_{st} W_0(\tilde{P}).$$

(ii) *ou si $\sigma_0 \leq_{icx} \tilde{\sigma}_0$ et $\tau_0 = \tilde{\tau}_0$, alors*

$$W_0(P) \leq_{icx} W_0(\tilde{P}).$$

Preuve. La preuve de (i) est immédiate par le théorème de représentation de Strassen. On part par exemple d'une file vide à l'instant $t = 0$, en supposant qu'à cet instant le premier client arrive. On note σ_n et τ_n les temps de service et inter-arrivées successifs. Grâce à l'hypothèse de renouvellement et au théorème de représentation de Strassen, on peut facilement construire un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) tel que pour tout $n \geq 0$, $\sigma_n \leq \tilde{\sigma}_n$ et $\tilde{\tau}_n \leq \tau_n$, P -p.s.. Alors si $W(t)$ désigne de manière générale le workload de la file à l'instant t , on a $W(t) \leq \tilde{W}(t)$, P -p.s.. Par passage à la limite, on obtient le résultat voulu.

Pour (ii), le workload à l'état stationnaire est donné par la formule d'inversion. Soit f une fonction convexe croissante de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, alors :

$$E[f(W_0)] = \frac{E^0 \left[\int_0^{\tau_0} f(\max\{0, W_0 + \sigma_0 - t\}) dt \right]}{E^0[\tau_0]}.$$

On conclut en utilisant l'indépendance des variables aléatoires W_0 , τ_0 et σ_0 , le résultat du corollaire 4.2 et la convexité et la croissance de la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^a f(\max\{0, x + b - t\}) dt,$$

où a et b sont des paramètres positifs quelconques. □

Cas de processus d'arrivée généraux (pas de renouvellement).

La comparaison de files à arrivées ne vérifiant l'hypothèse de renouvellement est plus complexe. Il existe néanmoins un certain nombre d'études s'y rattachant. Ces résultats concernent principalement les files avec pour processus d'arrivée des processus de Poisson modulé. Une bibliographie de ces études est donnée ultérieurement dans ce chapitre.

Systèmes à perte.

Des résultats similaires à ceux obtenus pour une file d'attente à buffer infini existent dans le cas de systèmes à perte. Le résultat suivant est dû à R. Szekli [171] :

Théorème 4.17. *Dans le cas d'une file GI/GI/1/0, si τ_0 et $\tilde{\tau}_0$ sont de même distribution DFR et si $\sigma_0 \leq_{icv} \tilde{\sigma}_0$ (ce qui équivaut à $\tilde{\sigma}_0 \leq_{cx} \sigma_0$ si ces variables sont de même moyenne), alors les probabilités de perte à l'état stationnaire sont comparables :*

$$P_{\text{perte}} \leq \tilde{P}_{\text{perte}}.$$

Ce résultat est une conséquence directe du fait que :

$$P_{\text{perte}} = 1 - 1 / \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) dG(t),$$

où F et G sont les fonctions de distribution de τ_0 et σ_0 , et de la concavité de la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$ quand F est DFR. Remarquons que contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'est pas évident d'obtenir un résultat inverse si F est IFR, car on ne sait alors pas conclure sur la convexité de $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$ (on sait que si cette dernière fonction est convexe alors F est IFR, la réciproque n'est pas connue).

Le résultat du théorème précédent est à rapprocher de celui du théorème 4.14, car il énonce également un cas où une plus grande variabilité du temps de service accroît la performance. De même que précédemment, supposer que les temps de service ou les inter-arrivées sont exponentiellement distribués permet d'obtenir des résultats plus généraux, car dans ce cas il devient possible d'évaluer explicitement le régime stationnaire de la file. Le théorème suivant est une conséquence des travaux de M. Miyazawa sur le sujet [124, 125].

Théorème 4.18. (i) *Dans le cas d'une file M/GI/1/L, si $\tau_0 = \tilde{\tau}_0$ et si $\sigma_0 \leq_{cx} \tilde{\sigma}_0$, alors si la charge de la file est strictement inférieure à 1, à l'état stationnaire :*

$$P_{\text{perte}} \leq \tilde{P}_{\text{perte}}. \quad (4.2)$$

(ii) *Dans le cas d'une file GI/M/1/L, si $\tau_0 \leq_{cx} \tilde{\tau}_0$ et si $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0$, alors la comparaison (4.2) reste valable.*

Un résultat similaire a été obtenu par C.S. Chang [44] (dans [47] C.S. Chang et M. Pinedo parviennent également à comparer les probabilités de perte pour des processus d'arrivée Poisson modulés : plus la vitesse de modulation est grande et plus la probabilité de perte est grande).

4.7.2 Disciplines de service

Très nombreuses sont les études visant à comparer les disciplines de service dans les réseaux de files d'attente. Ici nous donnons les principaux résultats de ces études en nous restreignant aux disciplines de service conservatives (c'est-à-dire que lorsque la file n'est pas vide, la somme des capacités instantanées allouées aux différents clients est égale à la capacité de la file, prise constante égale à 1). On doit d'abord classer les différentes disciplines.

- On notera \mathcal{R} l'ensemble des disciplines qui autorisent, pour le choix des clients à servir, la prise en compte du temps de service résiduel des clients.
- On notera $N\mathcal{R}$ l'ensemble des disciplines qui n'autorisent pas la prise en compte des temps résiduels de service.
- Enfin, $N\mathcal{R} - NP$ désignera l'ensemble des disciplines non-préemptives de $N\mathcal{R}$.

Nous pouvons essayer d'identifier les disciplines extrémales dans ces trois sous-ensembles. Depuis les années 60 et l'étude de L. Schrage [161], nous savons que la discipline SRPT¹⁷ est la meilleure des disciplines dans \mathcal{R} . De même, depuis les travaux de R. Wolff [182], pour la file GI/GI/1/∞, on connaît les disciplines de service extrémales dans $N\mathcal{R} - NP$, la pire est LIFO¹⁸, la meilleure FIFO¹⁹. Mais comme le remarquent R. Righter et J. Shantikumar [148], comparer les disciplines de l'ensemble $N\mathcal{R} - NP$ n'est pas vraiment intéressant, car en fait le nombre de clients dans le système est *stochastiquement invariant*²⁰ sous toutes ces disciplines. La comparaison des disciplines de l'ensemble $N\mathcal{R}$ est plus intéressante, cet ensemble ne possède d'ailleurs pas d'extremums, comme nous le verrons.

Optimalité de SRPT dans \mathcal{R} . Nous reprenons ici le formalisme et les résultats décrits dans [9]. On note $V_\phi(t)$ un processus à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^{\infty}$ représentant les temps résiduels de service des clients présents dans le système à l'instant t sous la discipline de service ϕ . Seules les $N_\phi(t)$ (nombre de clients à l'instant t dans la file) premières composantes de $V_\phi(t)$ sont non nulles. En dernière position, on trouve le temps résiduel de service $V_{\phi, N_\phi(t)}(t)$ du client en cours de service, en avant dernière position le client qui sera servi ensuite, ... etc. On a alors :

Théorème 4.19. *On considère une file G/G/1/∞ à arrivées stationnaires ergodiques et stable. Pour toute discipline $\phi \in \mathcal{R}$,*

$$V_\phi(t) \prec V_{SRPT}(t), \quad \forall t, P - p.s.,$$

où P désigne la probabilité stationnaire de la file et \prec est l'ordre partiel en majorisation usuel [113]. Par conséquent,

$$V_\phi(t)(P^0) \leq_{sc} V_{SRPT}(t)(P^0),$$

où P^0 désigne la probabilité de Palm associée au processus d'arrivée. Enfin,

$$N_{SRPT}(t) \leq N_\phi(t), \quad \forall t, P - p.s.,$$

et grâce à la formule de Little

$$E^0 [S_{SRPT}] \leq E^0 [S_\phi],$$

où S_ϕ désigne de manière générale le temps de séjour d'un client (en régime stationnaire lorsque la probabilité de référence n'est pas précisée) dans la file sous la discipline ϕ .

¹⁷ Shortest Remaining Processing Time

¹⁸ Last In First Out

¹⁹ First In First Out

²⁰ Lire [9] chapitre 4 pour plus de détails

Disciplines extrémales dans $NR-NP$. Le résultat suivant, prouvé par R. Wolff [182], identifie les disciplines extrémales dans $NR-NP$ pour la file $GI/GI/1/\infty$.

Théorème 4.20. *On considère une file $GI/GI/1/\infty$ stable. Soit ϕ une discipline quelconque de $NR-NP$. Alors :*

$$S_{FIFO} \leq_{cx} S_{\phi} \leq_{cx} S_{LIFO}, \quad (P^0).$$

Notons que ce résultat n'est plus vrai pour des files $G/G/1$. Un contre-exemple est donné par le système déterministe simple suivant. On choisit un processus d'arrivée périodique, avec deux arrivées de clients par période. Les services requis par ces clients sont σ_1 et σ_2 , et leurs arrivées sont distantes de $a < \sigma_1$. La période du processus d'arrivée est prise supérieure à $\sigma_1 + \sigma_2 + a$. Il est alors facile de montrer que les temps de séjour moyen des clients sous les disciplines FIFO et LIFO sont respectivement donnés par :

$$E^0 [S_{FIFO}] = \sigma_1 + (\sigma_2 - a)/2,$$

$$E^0 [S_{LIFO}] = \sigma_2 + \sigma_1/2.$$

Ainsi, par exemple pour $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$ et $a = 1/2$, la discipline LIFO donne une performance moyenne meilleure que FIFO, voir figure 4.1. Par contre, pour $\sigma_1 = \sigma_2$, FIFO est meilleure en moyenne que LIFO.

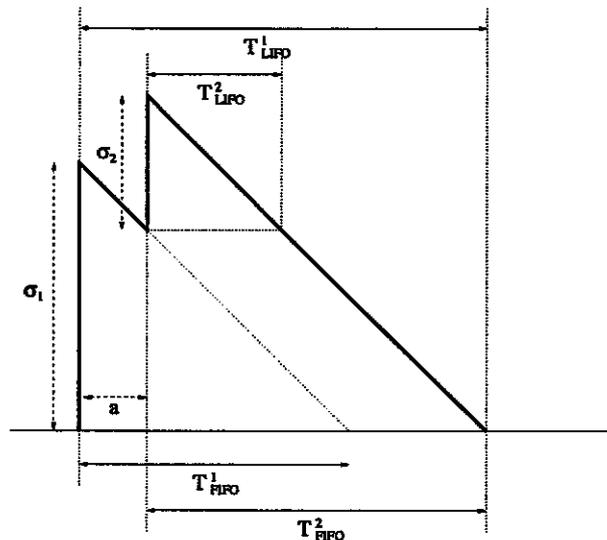


FIG. 4.1 – Exemple où la discipline LIFO mène à une performance moyenne meilleure que celle obtenue avec la discipline FIFO.

Comparaison des disciplines de NR . Identifier les disciplines extrémales de NR est une tâche complexe, car il n'existe pas par exemple de discipline qui soit optimale pour toutes distributions

des temps de service. Les études [167, 84, 85, 146, 147] donnent des résultats partiels d'optimalité. On trouvera dans [147] un énoncé des résultats les plus récents sur la question et l'historique de ce type d'étude. Voici ces résultats.

Théorème 4.21. *On considère une file $G/G/1$ à arrivées stationnaires ergodiques et stable. Soit ϕ une discipline de service quelconque de NR . La discipline de service $LAST^{21}$ sert équitablement les clients ayant été les moins servis (c'est une combinaison des disciplines LIFO et PS). (i) Si la distribution du service requis est NBUE,*

$$E^0 [S_{FIFO}] \leq E^0 [S_\phi].$$

(ii) *Si cette distribution est NWUE,*

$$E^0 [S_\phi] \leq E^0 [S_{FIFO}].$$

(iii) *Si elle est DMRL,*

$$E^0 [S_\phi] \leq E^0 [S_{LAST}].$$

(iv) *Si elle est IMRL,*

$$E^0 [S_{LAST}] \leq E^0 [S_\phi].$$

4.8 Comparaisons pour des réseaux de files d'attente

On peut maintenant se demander si les résultats précédents peuvent être généralisés au cas non plus d'une file unique, mais à un réseau de files d'attente. En fait, il faut noter que les résultats précédents sont facilement généralisables aux files multi-serveur, $G/G/s$. On trouvera dans [9] une bibliographie assez complète sur le sujet. Observons également que comme les résultats précédents résultent presque tous de la *convexité* des mesures de performance aux quelles on s'intéresse, ces mêmes résultats restent valables pour tout système $(\max, +)$. Malheureusement l'ensemble des réseaux $(\max, +)$ n'est pas très étendu, il contient néanmoins les files en tandem et certains réseaux d'accumulation.

Pour des réseaux de topologie générale, on ne sait rien dire, sauf lorsque le routage est markovien. A notre connaissance, l'unique résultat de comparaison de réseaux de files d'attente de topologie générale suppose un routage de ce type. Il est dû à R. Righter et J. Shantikumar [148] : ici on appelle routage markovien un routage pour lequel le j -ième client quittant la file k va à la file l avec la probabilité p_{jkl} . Les décisions de routage sont indépendantes. Le réseau peut être ouvert ou fermé.

Théorème 4.22. *Considérons un réseau de K files d'attente et notons $D(t) = (D_1(t), \dots, D_K(t))$ les nombres de clients ayant quitté les différentes files avant l'instant t . Soit ϕ une discipline de service non-préemptive quelconque, par exemple FIFO. Soit $\psi \in NR$.*

(i) *Si les distributions des services requis aux files sont ILR, pour tout t ,*

$$D_\psi(t) \leq_{st} D_\phi(t).$$

²¹Least Attained Service Time first. Cette discipline est aussi appelée FB, Foreground-Background

(ii) Si les distributions sont DLR, pour tout t ,

$$D_\phi(t) \leq_{st} D_\psi(t).$$

A l'aide de ce théorème, nous pouvons comparer la performance de réseaux de files d'attente FIFO lorsque les services requis ont des distributions ILR, exponentielles ou DLR. Le corollaire suivant découle simplement du théorème précédent et du fait que la discipline de service n'a pas d'impact sur la performance quand les services requis sont exponentiellement distribués.

Corollaire 4.3. (i) Le débit d'un réseau fermé de files FIFO est plus grand (resp. petit) quand les distributions des services requis sont ILR (resp. DLR) plutôt qu'exponentielles de même moyenne. (ii) Notons N_{exp} (resp. N_{ILR} et N_{DLR}) le nombre total de clients à l'état stationnaire dans un réseau ouvert de files FIFO à arrivées Poisson et avec des services requis exponentiels (resp. ILR et DLR). Alors, si les services requis exponentiels, ILR et DLR sont de mêmes moyennes à chaque file :

$$N_{ILR} \leq_{st} N_{exp} \leq_{st} N_{DLR}.$$

la formule de Little permet de comparer les temps de séjour moyen dans le réseau :

$$E^0 [S_{ILR}] \leq E^0 [S_{exp}] \leq E^0 [S_{DLR}],$$

(ces espérances sont prises sous la probabilité de Palm du processus de 'toutes' les arrivées de client dans le réseau).

Ces résultats sont assez exceptionnels dans la mesure où les comparaisons peuvent se faire suivant l'ordre croissant. Ils sont d'autant plus remarquables qu'ils deviennent faux dès qu'on relâche quelque peu l'hypothèse ILR. R. Righter et J. Shantikumar [148] présentent un contre-exemple sur un réseau de deux files en tandem avec des services requis non plus ILR, mais seulement IFR.

Comme nous venons de le voir, lorsque le routage est markovien, remplacer un service exponentiel par un service déterministe de même moyenne dans un réseau de files FIFO améliore trajectoirellement la performance du réseau. Un peu après les travaux de R. Righter et J. Shantikumar, M. Harchol-Balter et D. Wolfe [81] ont entrepris d'identifier les réseaux pour lesquels la propriété précédente reste vraie dans un certain sens : les auteurs se sont restreints au délai moyen de traversée du réseau des paquets (de tous les paquets - c'est-à-dire la moyenne ergodique des temps passés dans le réseau par chaque client). Harchol-Balter et Wolfe ont donné une démonstration simple de l'analogie du corollaire 4.3 dans ce cadre très restreint, pour des services déterministes ou exponentiels et pour le délai moyen de tous les paquets, mesure assez faible de la performance du réseau. Plus intéressant, ces auteurs ont montré qu'il était difficile d'obtenir un résultat similaire lorsqu'on abandonne l'hypothèse du routage markovien : dans un réseau feed-forward de topologie décrite figure 4.2, pour certaines conditions de charge (à faible charge), le délai moyen des paquets peut être réduit en remplaçant des services déterministes par des services exponentiels de mêmes moyennes à chaque file. Cela est par exemple le cas lorsque dans ce réseau, on identifie deux classes de clients, les premiers ne visitant que des files de capacité 1 et les autres étant routés chaque fois que cela est possible vers des files de capacité $\epsilon < 1$, voir figure 4.2.

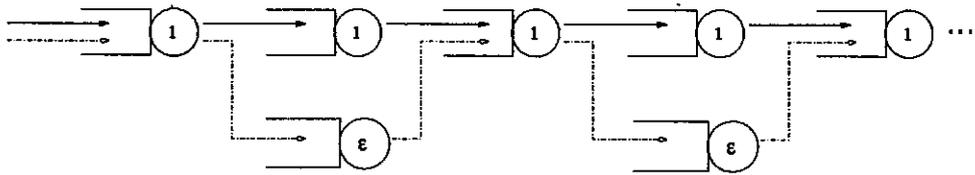


FIG. 4.2 – Réseau feed-forward à deux classes de clients et routage déterministe

Ce contre-exemple, valable pour une mesure très imprécise de la performance du réseau, illustre bien la difficulté de donner des résultats de comparaisons de files d'attente en réseau. Dans le chapitre suivant, nous essaierons néanmoins de donner quelques compléments à ces études : nous tenterons de donner des bornes stochastiques des délais de traversée d'un réseau FIFO.

4.9 Files d'attente à capacité variable

Il arrive parfois que la capacité d'une file d'attente soit conditionnée par un processus externe, c'est le cas par exemple des files à plusieurs niveaux de priorité, où les clients de moindre priorité disposent de la capacité non utilisée par les clients de priorité plus haute. On trouve également des applications de l'étude de ces files dans les réseaux mobiles, où les conditions de propagation radio d'un client sont susceptibles d'évoluer du fait de sa mobilité par exemple [34].

Très peu d'études existent sur ce sujet précis, mais il faut rapprocher l'étude des files à capacité aléatoire de celle des files dont le processus d'arrivée est modulé par un autre processus externe. Ces derniers travaux ont été initiés par S. Ross [155], qui le premier conjectura qu'à charge égale, accroître la *variabilité* du processus d'arrivée à une file d'attente devait en détériorer la performance. Un certain nombre d'arguments en faveur de cette conjecture et d'autres résultats sur les processus d'arrivée de type Poisson modulé ont été établis par S. Asmussen, N. Bäuerle, C.S. Chang, X. Chao, A. Frey, C. O'Conneide, T. Hu, N. Miyoshi, X. Pan, T. Rolski, V. Schmidt [7, 151, 152, 153, 48, 42, 43, 86, 129], entre autres.

Nous nous intéressons ici uniquement aux files d'attente de capacité aléatoire, et étudions l'équivalent de la conjecture de Ross pour ces systèmes, à savoir : à charge égale, plus la variabilité de la capacité est importante et plus la performance de la file d'attente diminue. Si l'on entend par performance le temps de réponse moyen ou bien encore le workload moyen de la file à l'état stationnaire, on montre sur un exemple simple que cette conjecture est fautive en général.

4.9.1 Modèles et objectifs

Nous étudions une file d'attente à arrivées stationnaires ergodiques et considérons deux types de systèmes :

Capacité globale variable : dans un premier modèle, la discipline de service est quelconque et la file opère à une vitesse globale $C(t)$ à l'instant t . $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus stationnaire ergodique de moyenne \bar{C} . Ce modèle s'applique directement au cas de files

prioritaires et nous en donnerons une illustration au chapitre 6 en étudiant la performance d'un réseau intégrant trafic temps-réel et trafic de données.

Capacité individuelle variable : dans un second modèle, chaque client présent dans la file d'attente voit une capacité modulée par un processus stationnaire ergodique et fonction du nombre de client dans la file. On s'attachera par exemple au cas où la capacité disponible à l'instant t pour un client donné, disons le client 1, est de la forme $X_1(t) \times G_1(n(t))$, où $n(t)$ désigne le nombre de clients dans la file à l'instant t et G_1 est une fonction décroissante (plus le nombre de clients est grand, plus la vitesse de service de chaque client est petite). Les processus $X_i(t)$ seront supposés stationnaires ergodiques, indépendants les uns des autres mais également du processus d'arrivée et des service requis par les clients. Ce modèle s'applique au cas de l'écoulement du trafic de données dans une cellule à partage TDMA équitable et où chaque utilisateur se déplace suivant une trajectoire stationnaire ergodique indépendante des trajectoires des autres utilisateurs. Une description précise de ce modèle et du contexte radio sous-jacent est donnée dans [33, 34]. Remarquons enfin que tous les résultats de comparaison obtenus dans la suite pour ce modèle restent valables d'une part dans un cadre plus général où les clients sont répartis en classes et où la capacité allouée au client 1 à l'instant t est de la forme $X_1(t) \times G_1(n_1(t), \dots, n_K(t))$ (ici $n_j(t)$ désigne le nombre de clients de classe j à l'instant t et G_1 est une fonction décroissante de chacune des composantes) ; et d'autre part pour toute discipline de service : dans ce qui précède nous avons supposé que les clients sont servis simultanément, mais on peut très bien supposer qu'un seul client est servi à la fois et que dans ce cas il reçoit une capacité $X_1(t)$.

Bien sûr, obtenir des formules explicites de la performance de ce type de file d'attente est impossible, car quelle que soit la discipline de service ou le modèle considéré, la performance (même moyenne) dépend de toutes les caractéristiques statistiques du trafic et des processus définissant la capacité. En d'autres termes, ces files ne sont pas insensibles. L'idée est donc de comparer la performance de ces files à celle d'autres files plus simples. Une façon de simplifier l'étude des files à capacité variable est d'accélérer ou de ralentir le ou les processus définissant cette capacité, autrement dit de remplacer par exemple le processus de capacité $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ par le processus $\{C(\alpha t), t \in \mathbb{R}\}$, pour $\alpha > 0$. L'intérêt d'une telle transformation est que bien souvent les régimes limites $\alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow +\infty$, appelés respectivement *quasi-stationnaire* et *fluide*, ont des comportements connus : par exemple, ces régimes limites pour la file PS à capacité variable s'expriment simplement à l'aide de files PS simples, et sont donc insensibles, voir chapitre 6. Il convient alors de comparer la performance obtenue dans ces régimes limites à celle du système réel.

Nous sommes donc naturellement amenés à nous poser les questions suivantes :

1. **Variabilité de la capacité :** le régime fluide, correspondant à une capacité constante et donc la moins variable possible, constitue-t'il une borne supérieure de la performance ? C'est l'équivalent de la conjecture de Ross pour les files à capacité variable.
2. **Inégalité de Lorentz :** le régime quasi-stationnaire, correspondant au cas où l'on fixe la capacité de la file à $t = 0$ selon sa loi stationnaire et pour toujours, constitue-t'il une borne inférieure de la performance ? La correspondance entre cette question et l'inégalité de Lorentz sera explicitée dans la suite.

3. **Effet d'accélération** : si la réponse aux deux questions précédentes est positive, on peut s'interroger sur la validité d'un résultat plus général. Accélérer le processus décrivant la capacité accroît-il la performance ?

Nous verrons dans la suite que l'équivalent de la conjecture de Ross n'est pas toujours vraie et nous tenterons d'identifier des conditions suffisantes de validité assez générales. Pour la question 2, nous prouvons que le régime quasi-stationnaire constitue une borne stochastique suivant l'ordre convexe croissant pour le workload de la file ; un résultat similaire pour le temps de réponse est plus difficile à montrer, mais nous n'avons pas trouvé de contre-exemple. Enfin, accélérer le ou les processus de capacité accroît effectivement la performance sous certaines hypothèses que nous préciserons ; en l'absence de ces hypothèses, le résultat est faux comme l'indique le contre-exemple suivant.

4.9.2 File à faible charge : un contre-exemple simple

Nous considérons ici l'exemple simple suivant. Le processus de capacité est stationnaire et périodique de période 1 : la capacité vaut $3/2$ pendant une moitié d'unité de temps et $1/2$ pendant l'autre moitié. Le service requis par les clients est déterministe et vaut 1. Le processus d'arrivée est tel que deux clients ne peuvent être présents dans la file d'attente simultanément, par exemple 2-périodique. Nous présentons figure 4.3 le workload moyen à l'état stationnaire, ainsi que le temps de réponse moyen en fonction du facteur d'accélération α du processus de capacité.

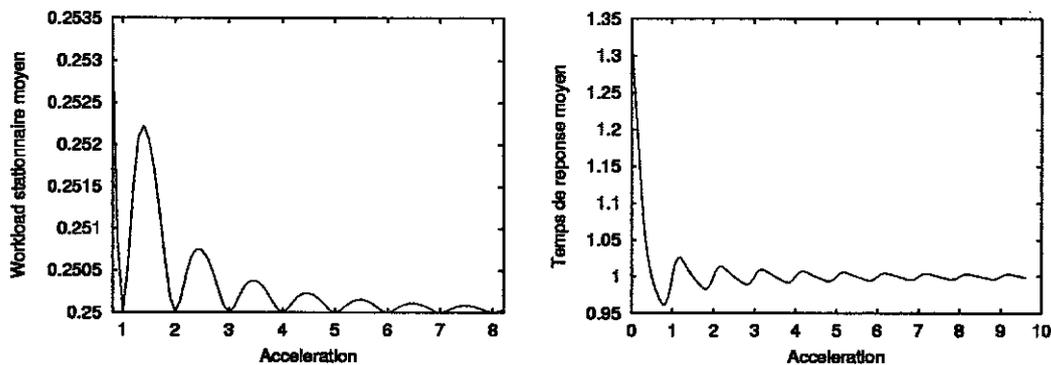


FIG. 4.3 – Workload et temps de réponse moyens stationnaires - un contre-exemple

On peut sans difficulté prouver que le workload moyen n'est pas une fonction monotone en α (en fait, ce dernier est égal au workload du régime fluide dès que α est un entier strictement positif). Par ailleurs, le régime fluide ne constitue pas une borne pour le temps de réponse moyen : il est possible de montrer que pour $\alpha = 3/4$, le temps de réponse moyen vaut $26/27$ et est donc strictement inférieur à 1, temps de réponse moyen pour le régime fluide.

On peut également sans difficulté montrer que ce contre-exemple reste valable pour tout processus d'arrivée dont l'intensité est suffisamment faible (de telle sorte, que la probabilité de trouver

deux clients en même temps dans la file soit négligeable). Autrement dit, ce contre-exemple est valable pour toute file à charge faible. Par ailleurs, il est valable tant pour le modèle à capacité globale variable que pour celui à capacité individuelle variable.

Notons pour finir que la validité de ce contre-exemple est liée au fait que le service requis par les clients est déterministe, nous verrons dans la suite que le contre-exemple n'est plus valable dans le cas de services exponentiellement distribués par exemple.

4.9.3 Capacité globale de la file variable

Etude du workload de la file en régimes transitoire et stationnaire

On montre ici sous des hypothèses de trafic très générales que le workload d'une file de capacité réglée par un processus stationnaire ergodique $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ indépendant du processus d'arrivée est encadré par ceux des régimes quasi-stationnaire et fluide correspondants. Nous ne considérons ici que des processus de capacité càdlàg et bornés.

Théorème 4.23. *Supposons que la file est vide à $t = 0$, et considérons un processus d'arrivée quelconque indépendant du processus $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$. Le workload $W(t)$ de la file à un instant quelconque satisfait :*

$$W^a(t) \leq_{icx} W(t) \leq_{icx} W^q(t), \quad (4.3)$$

où a et q font respectivement référence aux régimes quasi-stationnaire et fluide.

Lorsque le processus d'arrivée est stationnaire ergodique, la file à capacité variable est stable lorsque son régime fluide l'est, c'est-à-dire si l'intensité du trafic rapportée à la capacité moyenne $E[C(t)]$ est strictement inférieure à 1 [9]. On se place pour le corollaire suivant sous cette hypothèse.

Corollaire 4.4. *Notons $W(\infty)$ le workload de la file en régime stationnaire.*

$$W^a(\infty) \leq_{icx} W(\infty) \leq_{icx} W^q(\infty). \quad (4.4)$$

Le corollaire est une conséquence directe des théorèmes 4.23 et 4.6 (il est possible d'obtenir le workload à l'état stationnaire par une construction de type Loynes [9], et donc monotone). Remarquons également que la condition de stabilité de la file à capacité variable ne suffit pas à garantir l'existence du régime stationnaire pour le système quasi-stationnaire. L'existence de ce dernier n'est assurée que si le système est uniformément stable, au sens où, par exemple pour un processus $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ càdlàg, l'intensité du trafic rapportée à la valeur minimale de $C_{\inf} = \inf\{c : \Pr[C(t) \leq c] > 0\}$ est strictement inférieure à 1.

Preuve du théorème 4.23 : On commence par approximer le système par un système slotté, auquel nous ferons référence par S_M . On scinde l'intervalle $[0, t]$ en M slots de même longueur. La vitesse de service de la file reste constante pendant toute la durée d'un slot, et on la fixe à une valeur arbitraire de la capacité pendant ce slot (rappelons qu'on s'est limité à des processus càdlàg bornés). Pour prouver formellement la convergence du système slotté vers le système réel, il suffit d'encadrer ces deux systèmes par deux autres systèmes slottés qui par construction seront

monotones, de monotonie opposée, et convergeront vers le système réel. Nous illustrons cette construction sur l'exemple du workload.

- Le premier système slotté, auquel nous ferons référence par W_M^{S1} , est construit en fixant la capacité de la file pendant un slot à sa valeur minimale pendant ce slot.
- Le second système slotté, référencé par W_M^{S2} , est construit en fixant la capacité pendant un slot à sa valeur maximale pendant ce slot.

On a :

$$W_M^{S2}(t) \leq W_M^S(t) \leq W_M^{S1}(t) \quad \text{et} \quad W_M^{S2}(t) \leq W(t) \leq W_M^{S1}(t).$$

Par ailleurs, si on choisit par exemple $M = 2^k$ (de telle façon que les découpages successifs de $[0, t]$ en slots soient imbriqués), $W_M^{S1}(t)$ et $W_M^{S2}(t)$ sont trajectoriellement des suites respectivement croissante et décroissante en k et convergent vers la même limite $W(t)$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, on en déduit par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [f(W_M^{S1}(t))] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [f(W_M^{S2}(t))] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [f(W_M^S(t))] = \mathbb{E} [f(W(t))].$$

Les constructions et convergences précédentes sont bien sûr valables également pour les régimes quasi-stationnaire et fluide. A présent, on peut se contenter de montrer les résultats désirés sur un système slotté quelconque, ils resteront valables pour le système réel, pourvu que les quantités étudiées soient des fonctionnelles monotones de la performance.

Notons c_i la valeur de la capacité du système slotté pendant le i -ème slot, A_i l'augmentation du workload pendant le i -ème slot due aux arrivées dans le système. Le workload $W_M^S(t)$ s'exprime sous la forme :

$$W_M^S(t)(c_1, \dots, c_M) = \max(0, A_M - c_M, A_M + A_{M-1} - c_M - c_{M-1}, \dots, \sum_{i=1}^M (A_i - c_i)).$$

On sait donc, d'après les propriétés (iii) et (v) établies au théorème 4.9, que, pour toute fonction f convexe croissante :

$$(c_1, \dots, c_M) \mapsto f(W_M^S(t)(c_1, \dots, c_M))$$

est super-modulaire. Par ailleurs, cette fonction est également convexe. On en conclut en appliquant l'inégalité de Lorentz que :

$$\mathbb{E}_C [f(W_M^S(t)(c_1, \dots, c_M))] \leq \mathbb{E}_C [f(W_M^S(t)(c_1, \dots, c_1))], \quad (4.5)$$

où \mathbb{E}_C désigne l'espérance prise par rapport au processus $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$. Le second terme de cette inégalité correspond au régime quasi-stationnaire. De plus, $(\mathbb{E}_C [c_1], \dots, \mathbb{E}_C [c_M]) \leq_{cx} (c_1, \dots, c_M)$, et donc

$$f(W_M^S(t)(\mathbb{E}_C [c_1], \dots, \mathbb{E}_C [c_M])) \leq \mathbb{E}_C [f(W_M^S(t)(c_1, \dots, c_M))]. \quad (4.6)$$

Le premier terme de l'inégalité précédente correspond au régime fluide. Notons que l'indépendance des processus d'arrivée et de capacité est nécessaire à l'établissement des inégalités précédentes. Par monotonie de f , et en moyennant sur le processus d'arrivée, on en déduit que :

$$\mathbb{E} [f(W^a(t))] \leq \mathbb{E} [f(W(t))] \leq \mathbb{E} [f(W^{qs}(t))],$$

ce qui conclut la preuve. \square

Le théorème suivant, conséquence directe du théorème 4.12, montre que si le processus de capacité vérifie l'hypothèse 4.1, alors accélérer ce dernier améliore la performance. En utilisant la notation (α) , on se réfère à un système dans lequel le processus de capacité a été remplacé par le processus $\{C(\alpha t), t \in \mathbb{R}\}$, $\alpha > 0$.

Théorème 4.24. *Supposons que le processus de capacité $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ vérifie l'hypothèse 4.1, et considérons un système vide à $t = 0$. Pour tout $\alpha \geq 1$:*

$$W^{(\alpha)}(t) \leq_{icx} W(t). \quad (4.7)$$

Pour un processus d'arrivée stationnaire ergodique, la comparaison du théorème précédent reste valable en régime stationnaire.

Corollaire 4.5.

$$W^{(\alpha)}(\infty) \leq_{icx} W(\infty). \quad (4.8)$$

Preuve du théorème 4.24 : Ici aussi, on commence par prouver le résultat pour un système slotté dont la performance converge vers celle du système réel. Afin d'appliquer le théorème 4.12, il suffit de construire le système slotté de telle sorte que les capacités choisies pour chaque slot pour les systèmes correspondant respectivement au système réel et à celui où le processus de capacité est accéléré d'un facteur α soient $c_i = C(t \times i/M)$ et $c_i^\alpha = C(\alpha t \times i/M)$. Le théorème est obtenu en appliquant un raisonnement similaire à celui fait dans la preuve du théorème précédent et en appliquant le théorème 4.12. \square

Etude du temps de séjour

Il est plus difficile de comparer les temps de réponse des clients du système réel avec ceux qu'on observerait en régimes quasi-stationnaire et fluide ou en accélérant le processus de capacité. En fait, certains résultats de comparaison sont valables pour le workload mais ne le sont pas pour le temps de réponse, par exemple, le temps de réponse moyen peut parfois être inférieur à celui obtenu en régime fluide comme illustré dans le contre-exemple présenté un peu plus haut. On doit faire des hypothèses supplémentaires pour retrouver les comparaisons espérées. C'est par exemple le cas lorsque les services requis sont exponentiels.

Théorème 4.25. *Nous supposons ici que le processus d'arrivée est stationnaire ergodique. Notons $N(\infty)$ et S le nombre de clients et le temps de réponse dans le système en régime stationnaire. Supposons que les services requis par les clients sont des variables indépendantes exponentielles et indépendantes du processus d'arrivée. On a alors :*

$$N^R(\infty) \leq_{icx} N(\infty) \leq_{icx} N^{qs}(\infty), \quad (4.9)$$

et grâce à la formule de Little

$$E^0[S^R] \leq E^0[S] \leq E^0[S^{qs}]. \quad (4.10)$$

Si le processus de capacité C vérifie l'hypothèse 4.1, pour tout $\alpha > 1$:

$$N^{(\alpha)}(\infty) \leq_{icx} N(\infty) \quad \text{et} \quad E^0 [S^{(\alpha)}] \leq E^0 [S]. \quad (4.11)$$

Preuve. Ici aussi, nous considérons une suite de systèmes slottés indexés par k . Le système indexé par k est composé de $k \times 2^k$ slots de longueur 2^{-k} . On note L_i le nombre d'arrivées dans le slot i (l'indice k est implicite). Soit P un processus de Poisson doublement stochastique d'intensité la mesure égale à $c_i/E[\sigma]$ pendant toute la durée du slot i . On note finalement P_i le nombre de points du processus P tombant dans le slot i (ici encore l'indice k est implicite). Alors pour toute fonction f croissante et convexe, nous avons la limite suivante :

$$E[f(N(\infty))] = \lim_{k \rightarrow +\infty} E \left[f(\max \{0, L_{k2^k} - P_{k2^k}, \dots, \sum_{i=1}^{k2^k} (L_i - P_i)\}) \right].$$

Remarquons aussi que les régimes fluide et quasi-stationnaire sont obtenus en remplaçant le processus P par des processus de Poisson d'intensité $E[c_0]/E[\sigma]$ et $c_0/E[\sigma]$. Posons à présent

$$g_l(x, y) = f(\max 0, x_l - y_l, \dots, \sum_{i=1}^l (x_i - y_i)), \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}^l,$$

et

$$h_l(y) = \sum_{j \in \mathbb{N}^l} \frac{y_1^{j_1} \dots y_l^{j_l}}{j_1! \dots j_l!} e^{-(y_1 + \dots + y_l)} E[g_l(x, y)].$$

La preuve du théorème est achevée de la même manière que précédemment et en utilisant le résultat suivant [152] :

Lemme 4.1. h_l est convexe et super-modulaire.

□

4.9.4 Capacité individuelle variable

On rappelle qu'on s'attache à l'étude d'un système où la capacité disponible pour un client est définie par un processus de capacité propre indépendant des processus de capacité des autres clients, mais également du nombre de clients dans le système. Plus précisément, on classe les clients suivant la distribution de leur service et leur processus de capacité : le service d'un client de classe $k \in \{1, \dots, K\}$ requière un service de même loi qu'une variable aléatoire σ_k . Par ailleurs, un client de classe k arrivé avant l'instant t dispose à t d'une capacité $X(t) \times G(n(t))$, où le processus $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus stationnaire ergodique de même loi qu'un processus étalon $X_k = \{X_k(t), t \in \mathbb{R}\}$, et où $n(t)$ désigne le nombre de clients dans le système à t .

Paradoxalement, les comparaisons stochastiques dans ce système plus complexe que la file à capacité globale variable deviennent plus aisées. On peut, comme dans le cas d'une file à capacité globale variable, définir des régimes fluide et quasi-stationnaire.

- Définition 4.11.** – On appelle régime fluide par rapport à un client i de classe k , le système obtenu en remplaçant le processus de capacité $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ de ce client uniquement par un processus constant, fixé à sa moyenne, $\{E[X(0)], t \in \mathbb{R}\}$. Ce régime sera identifié par la notation fl .
- On appelle régime quasi-stationnaire par rapport ce client, le système obtenu en remplaçant le processus de capacité de ce client uniquement par sa version quasi-stationnaire $\{X(0), t \in \mathbb{R}\}$. Ce régime sera identifié par la notation qs .
 - On dit qu'on accélère le processus de capacité de ce client d'un facteur $\alpha > 0$, si on le remplace par $\{X(\alpha \times t), t \in \mathbb{R}\}$. On utilisera alors la notation $^{(\alpha)}$.

Il est possible de montrer dans des cas très généraux que les régimes fluide et quasi-stationnaire sont respectivement des régimes limites obtenus en accélérant le processus de capacité d'un facteur $\alpha \rightarrow \infty$ et $\alpha \rightarrow 0$.

Dans ce qui suit, nous ferons l'hypothèse suivante sur le service requis par les clients dont nous modifierons le processus de capacité.

Hypothèse 4.2. Soit P_k la distribution cumulative du service d'un client de classe k , c'est-à-dire $P_k(x) = \Pr[\sigma_k \leq x]$. Nous supposons que P_k est une fonction concave. notons qu'un grand nombre de distributions vérifie cette hypothèse (distributions exponentielle, hyper-exponentielle, Weibull, ...).

Le théorème suivant montre que lorsque le processus de capacité de certains clients dont la distribution du service vérifie l'hypothèse 4.2 est remplacé par sa version fluide (resp. quasi-stationnaire), la performance du système augmente (resp. diminue). Ces résultats sont relativement forts dans la mesure où ils sont obtenus pour l'ordre \leq_{st} (comparaison des distributions) et sous des hypothèses très faibles.

Théorème 4.26. Considérons un système vide à $t = 0$ et notons $W(t)$ et $N_k(t)$ le workload global du système et le nombre de clients de classe k présents à l'instant t . Nous désignons par S le temps de séjour d'un client quelconque. On a, pour tout $k = 1, \dots, K$:

$$W^{fl}(t) \leq_{icx} W(t) \leq_{icx} W^{qs}(t), \quad (4.12)$$

$$N_k^{fl}(t) \leq_{st} N_k(t) \leq_{st} N_k^{qs}(t), \quad (4.13)$$

$$S^{fl} \leq_{st} S \leq_{st} S^{qs}, \quad (4.14)$$

où fl (resp. qs) se réfère à un système dans lequel les processus de certains clients vérifiant l'hypothèse 4.2 sont remplacés par leur version fluide (resp. quasi-stationnaire).

Dans le cas où les processus d'arrivée de clients de chaque classe sont stationnaires ergodiques, et si le système est stable, on déduit du théorème précédent le corollaire suivant. Remarquons que la condition de stabilité du système est difficile à identifier pour des fonctions G générales. Pour les systèmes issus de la modélisation de réseaux mobiles [34], on a $G(n) = D(n)/n$, partage PS d'une capacité $D(n)$ dépendant du nombre de clients présents (D croît avec le nombre de clients et tend vers D^* quand ce dernier tend vers ∞). Dans ce cas, si λ_k et C_k désignent respectivement l'intensité du processus d'arrivée des clients de classe k et la moyenne du processus

de capacité X_k , la condition de stabilité est celle obtenue dans le régime fluide (c'est-à-dire dans un système où tous les processus de capacité des clients sont en régime fluide), autrement dit $\sum_{k=1}^K \lambda_k E[\sigma_k] / C_k < D^*$.

Corollaire 4.6. Soit $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, K\}$ un sous-ensemble quelconque de classes de clients vérifiant l'hypothèse 4.2. Notons $W(\infty)$, $N_k(\infty)$ et $S_k(\infty)$ le workload du système, le nombre de clients de classe k et leur temps de séjour à l'état stationnaire. Pour tout k ,

$$W^{\text{n}}(\infty) \leq_{\text{icx}} W(\infty) \leq_{\text{icx}} W^{\text{qs}}(\infty), \quad (4.15)$$

$$N_k^{\text{n}}(\infty) \leq_{\text{st}} N_k(\infty) \leq_{\text{st}} N_k^{\text{qs}}(\infty), \quad (4.16)$$

$$S_k^{\text{n}}(\infty) \leq_{\text{st}} S_k(\infty) \leq_{\text{st}} S_k^{\text{qs}}(\infty), \quad (4.17)$$

où $^{\text{n}}$ (resp. $^{\text{qs}}$) font référence ici au système pour lequel les processus de capacité des clients de classe dans \mathcal{K} ont été remplacés par leur version fluide (resp. quasi-stationnaire).

Preuve du théorème 4.26 : On montre dans un premier temps (4.12) et (4.13). Pour ce faire, nous approximons le système par un système slotté à M slots comme dans la preuve du théorème 4.23. Dans ce système slotté, la valeur du processus X de capacité de chaque client est fixé pendant toute la durée du slot. Par ailleurs, si un client est présent dans le système au début d'un slot, nous supposons qu'il reste dans le système pour toute la durée de ce slot. On démontre la résultats voulus pour le système slotté dont nous ferons référence par la notation $\overset{S}{M}$, ces mêmes résultats restant valables pour le système réel par passage à la limite.

Considérons un client particulier, 1 et 2, arrivés avant l'instant t . Nous supposons, sans perte de généralité, que le client 1 est de classe 1. Nous supposons également que ce client est arrivé au début du slot a . Soit n_j le nombre de clients dans le système slotté en supposant que le client 1 y est présent et notons x_j la variable décrivant le processus de capacité du client 1 pendant le slot j . Le taux de service du client 1 est donc $x_j G(n_j)$ au slot j . Notons R_M^S , W_M^S et $N_{k,M}^S$ le service résiduel du client 1, le workload et le nombre de client de classe k à la fin du M -ème slot. Nous fixons le processus d'arrivée avant t , ainsi que les processus de capacité et les services requis de tous les clients sauf ceux du client 1. σ_1 désigne le service requis par ce dernier. On note finalement E_{σ_1} l'espérance par rapport à la variable aléatoire σ_1 . Le résultat clé est le suivant :

Lemme 4.2. Pour tout $k = 1, \dots, K$, $E_{\sigma_1} [f(R_M^S)]$, $E_{\sigma_1} [f(W_M^S)]$ et $E_{\sigma_1} [g(N_{k,M}^S)]$ sont des fonctions super-modulaires et convexes de (x_a, \dots, x_M) , pour toute fonction f convexe croissante et pour toute fonction g croissante.

Preuve. Remarquons d'abord que puisque tout a été fixé excepté le processus de capacité et le service du client 1, les nombres n_j définis ci-dessus sont également fixés. Nous avons alors :

$$R_M^S = \max(0, \sigma_1 - \sum_{l=a}^M x_l G(n_l)),$$

fonction qui, composée avec une fonction convexe croissante, est super-modulaire et convexe par rapport à (x_a, \dots, x_M) (propriétés (iii) et (v) du théorème 4.9). On peut également écrire :

- si $\sigma_1 \leq x_a G(n_a)$,

$$W_M^S = w^a, \quad N_{k,M}^S = q^a;$$

- si $\sum_{l=a}^{i-1} x_l G(n_l) < \sigma_1 \leq \sum_{l=a}^i x_l G(n_l)$, $a < i \leq M-1$,

$$W_M^S = w^i, \quad N_{k,M}^S = q^i;$$

- si $\sigma_1 > \sum_{l=a}^{M-1} x_l G(n_l)$,

$$W_M^S = w^M + \max(0, \sigma_1 - \sum_{l=a}^M x_l G(n_l)), \quad N_{k,M}^S = q^M.$$

w^i et q^i représentent le workload et le nombre de clients de classe k à la fin du slot M en supposant que le client 1 quitte le système à la fin du slot i . Ces quantités ne dépendent ni de (x_a, \dots, x_M) , ni de σ_1 . Bien sûr, par construction (G est une fonction décroissante), $w^a \leq \dots \leq w^M$ et $q^a \leq \dots \leq q^M$. En moyennant sur σ_1 , on obtient, pour toute fonction croissante g :

$$\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(N_{k,M}^S)] = (g(q^a) - g(q^{a+1}))P_1(x_a G(n_a)) + \dots + (g(q^{M-1}) - g(q^M))P_1\left(\sum_{l=a}^{M-1} x_l G(n_l)\right) + g(q^M).$$

Et par conséquent, $\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(N_{k,M}^S)]$, somme de fonctions super-modulaires et convexes, est aussi super-modulaire et convexe. Effectivement, la fonction

$$h : (x_a, \dots, x_M) \mapsto -P_1\left(\sum_{l=a}^i x_l G(n_l)\right)$$

est super-modulaire et convexe grâce à l'hypothèse 4.2 et la propriété (iii) du théorème 4.9. Maintenant pour toute fonction f croissante convexe :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\sigma_1} [f(W_M^S)] &= (f(w^a) - f(w^{a+1}))P_1(x_a G(n_a)) + \dots \\ &+ (f(w^{M-1}) - f(w^M))P_1\left(\sum_{l=a}^{M-1} x_l G(n_l)\right) + f(w^M)P_1\left(\sum_{l=a}^M x_l G(n_l)\right) \\ &+ \mathbb{E}_{\sigma_1} \left[f\left(w^M + \sigma_1 - \sum_{l=a}^M x_l G(n_l)\right) 1_{\sigma_1 > \sum_{l=a}^M x_l G(n_l)} \right]. \end{aligned}$$

On remarque que la somme des deux derniers termes dans l'égalité précédente n'est autre que $\mathbb{E}_{\sigma_1} [f(w^M + R_M^S)]$ et donc en appliquant le raisonnement précédent, on conclut que $\mathbb{E}_{\sigma_1} [f(W_M^S)]$ est bien super-modulaire et convexe en les x_i . \square

Notons que :

$$\mathbb{E} [g(N_{k,M}^{S,a1})] = \mathbb{E} [\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(N_{k,M}^S)] (\mathbb{E}[x_a], \dots, \mathbb{E}[x_a])],$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [g(N_{k,M}^S)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(N_{k,M}^S)] (x_a, \dots, x_a)], \\ \mathbb{E} [g(W_M^S)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(W_M^S)] (\mathbb{E}[x_a], \dots, \mathbb{E}[x_a])], \\ \mathbb{E} [g(W_M^S)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(W_M^S)] (x_a, \dots, x_a)]. \end{aligned}$$

On déduit alors du lemme 4.2 et de l'inégalité de Lorentz que, pour toute fonction f convexe croissante, toute fonction g croissante et tout $k = 1, \dots, K$:

$$\mathbb{E} [g(N_{k,M}^S)] \leq \mathbb{E} [g(N_{k,M}^S)], \quad (4.18)$$

$$\mathbb{E} [f(W_M^S)] \leq \mathbb{E} [f(W_M^S)]. \quad (4.19)$$

Par ailleurs, comme $(\mathbb{E}[x_a], \dots, \mathbb{E}[x_a]) \leq_{cx} (x_a, \dots, x_a)$, on a également :

$$\mathbb{E} [g(N_{k,M}^S)] \leq \mathbb{E} [g(N_{k,M}^S)], \quad (4.20)$$

$$\mathbb{E} [f(W_M^S)] \leq \mathbb{E} [f(W_M^S)]. \quad (4.21)$$

En appliquant successivement ce raisonnement et en utilisant toujours l'indépendance des processus de capacité entre eux, on peut remplacer $\#1$ (resp. $\#1$) par $\#$ (resp. $\#$) dans les quatre inégalités précédentes. Finalement en faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient (4.12) et (4.13).

On prouve maintenant (4.14). On considère un nouveau système slotté de M slots et de longueur $d(M)$ telle que quand M tend vers $+\infty$, $d(M)$ aussi. Considérons deux clients, 1 et 2, pas nécessairement différents et arrivés dans le système avant l'instant $Md(M)$. On utilise les mêmes notations que précédemment et l'on note a_2 l'instant d'arrivée du client 2. Soit S_M^S la variable aléatoire égale au temps de séjour du client 2 si celui-ci quitte le système avant la fin du slot M et égale à $Md(M) - a_2$ sinon. Comme précédemment, on peut construire le système slotté de telle sorte que S_M^S est une suite croissante en M qui converge vers le temps de séjour du client 2 (et qu'il en soit de même pour les variables correspondantes quand le processus de capacité du client 1 est remplacé par sa version fluide ou quasi-stationnaire) : il suffit par exemple de choisir $M = p2^p$ et $d(M) = 2^{-p}$. On montre comme dans le lemme 4.2 que pour toute fonction g croissante :

$$(x_a, \dots, x_M) \mapsto \mathbb{E}_{\sigma_1} [g(S_M^S)]$$

est une fonction super-modulaire et convexe. En effet, si s^i représente la valeur de S_M^S si le client 1 quitte le système à la fin du slot i , pour $i = a, \dots, M-1$ et après la fin du slot $M-1$ pour $i = M$, on obtient :

$$\mathbb{E}_{\sigma_1} [g(S_M^S)] = (g(s^a) - g(s^{a+1}))P_1(x_a G(n_a)) + \dots + (g(s^{M-1}) - g(s^M))P_1\left(\sum_{l=a}^{M-1} x_l G(n_l)\right) + g(s^M),$$

avec $s^a \leq \dots \leq s^M$. On en déduit :

$$\mathbb{E} [g(S_M^S)] \leq \mathbb{E} [g(S_M^S)] \leq \mathbb{E} [g(S_M^S)]. \quad (4.22)$$

On conclut la preuve de (4.14) de la même manière que pour (4.12) ou (4.13). \square

Dans le théorème suivant, on montre qu'accélérer le processus de capacité de certains clients vérifiant les hypothèses 4.1 et 4.2 accroît la performance.

Théorème 4.27. *Considérons un système vide à $t = 0$. Pour tout $\alpha > 1$ et tout $k = 1, \dots, K$, on a :*

$$W^{(\alpha)}(t) \leq_{icx} W(t), \quad (4.23)$$

$$N_k^{(\alpha)}(t) \leq_{st} N_k(t), \quad (4.24)$$

$$S^{(\alpha)} \leq_{st} S, \quad (4.25)$$

où (α) désigne un système dans lequel les processus de capacité de certains clients vérifiant les hypothèses 4.1 et 4.2 sont accélérés d'un facteur α .

Lorsque le processus d'arrivée est stationnaire ergodique et si le système est stable, les résultats précédents sont valables en régime stationnaire.

Corollaire 4.7. *Notons $\mathcal{L} \subset \{1, \dots, K\}$ un sous-ensemble quelconque de classes de clients vérifiant les hypothèses 4.2 et 4.1. Alors pour tout $\alpha > 1$ et tout $k = 1, \dots, K$:*

$$W^{(\alpha)}(\infty) \leq_{icx} W(\infty), \quad (4.26)$$

$$N_k^{(\alpha)}(\infty) \leq_{st} N_k(\infty), \quad (4.27)$$

$$S_k^{(\alpha)}(\infty) \leq_{st} S_k(\infty), \quad (4.28)$$

où (α) désigne un système dans lequel les processus de capacité des clients de classe dans \mathcal{K} sont accélérés d'un facteur α .

Preuve du théorème 4.27 : Nous ne donnons la preuve que de (4.23) et (4.24) (la preuve (4.25) est similaire à celle de (4.14)). A nouveau, on considère un système slotté. Nous commençons par accélérer le processus de capacité du client 1 supposé de classe 1 et arrivé avant l'instant t . Notons x_j (resp. $x_j^{(s)}$) la variable décrivant le processus de capacité du client 1 pendant le slot j (resp. quand son processus de capacité est accéléré d'un facteur s). Nous choisissons le système slotté de telle sorte que si $\{X_1(t), t \in \mathbb{R}\}$ est le processus de capacité du client 1, $x_j = X_1(t \times j/M)$ et $x_j^{(s)} = X_1(t \times sj/M)$. Soit W_M (resp. $W_M^{(s)}$) et $N_{k,M}$ (resp. $N_{k,M}^{(s)}$) le workload et le nombre de clients de classe k à la fin du slot M (resp. quand le processus de capacité du client 1 est accéléré).

On déduit des lemmes 3.2 et 4.1, que pour toute fonction f convexe croissante et pour toute fonction g croissante :

$$\mathbb{E} \left[g(N_{k,M}^{(s)1}) \right] \leq \mathbb{E} [g(N_{k,M})],$$

$$\mathbb{E} \left[f(W_M^{(s)1}) \right] \leq \mathbb{E} [f(W_M)],$$

où la notation $(s)1$ est utilisée pour un système où le processus de capacité du client 1 est accéléré d'un facteur s . Comme précédemment, en appliquant récursivement ce raisonnement, on peut remplacer $(s)1$ par (s) dans les inégalités précédentes. (4.23) et (4.24) sont alors obtenues en faisant tendre M vers ∞ . \square

Chapitre 5

Garanties statistiques de la performance des applications temps-réel

Nous consacrons ce chapitre à l'étude de la performance des applications temps-réel dans un réseau de type IP, c'est-à-dire, à commutation de paquets. Comme nous l'avons précisé dans le chapitre introductif, la qualité de service pour ce type de service se caractérise par un taux de blocage au niveau flot (ou session) et une garantie statistique du délai de bout en bout au niveau paquet. La performance au niveau paquet dépend d'une part du mécanisme de différenciation des trafics temps-réel et élastique (dans ce qui suit on supposera qu'une priorité est donnée au trafic temps-réel) et d'autre part de la charge générée par le trafic temps-réel. On concentre ici l'étude sur la performance au niveau paquet, en supposant que le nombre de flots temps-réel en cours est constant. Le but est ici de pouvoir dimensionner les buffers des routeurs, mais également d'évaluer le délai de bout en bout subi par les paquets d'un flot particulier, ce qui correspond théoriquement à étudier l'occupation des buffers sous la probabilité stationnaire du système, mais aussi sous la probabilité de Palm associée au processus d'arrivée du flot considéré. Ces études paraissent extrêmement difficiles, et les résultats théoriques énoncés dans ce chapitre sont le plus souvent approximatifs. Néanmoins, d'un point de vue pratique, les conjectures mieux que Poisson déjà évoquées dans le chapitre introductif semblent s'appliquer de manière très satisfaisantes, même si leur justification théorique reste un problème ouvert.

Ce chapitre fait l'objet de la publication [27].

5.1 Position du problème

Le but de l'étude est double : quantifier le délai de bout en bout subi par les paquets d'une application temps-réel multiplexés avec d'autres paquets d'application de même type et dimensionner les buffers des routeurs recevant ces paquets sous les hypothèses suivantes.

- On considère un nombre fixé N de flots temps-réels, générant des paquets de taille inférieure à MTU.
- Le réseau est supposé stable, la charge des liens est strictement inférieure à 1.
- Les flots sont supposés indépendants à l'entrée du réseau. Formellement, les processus ponctuels marqués, représentant les sources et supposés stationnaires ergodiques, sont indépendants.
- Les flots sont régulés à l'entrée du réseau de telle sorte que leur débit instantané n'excède pas un certain débit seuil, par exemple si tous les paquets d'un flot sont de tailles identiques, le flot est une source On/Off de débit égal au débit seuil pendant les périodes On (ces dernières pouvant être réduites à l'émission d'un seul paquet).
- Les paquets d'un flot suivent une route fixe dans le réseau.
- Les paquets des flots temps-réel sont multiplexés entre eux dans des buffers FIFO et jouissent d'une priorité non-préemptive sur les paquets correspondant à des transferts élastiques.

Ces hypothèses, résumées figure 5.1, ne suffisent évidemment pas pour accéder d'une manière ou d'une autre à une quelconque évaluation du délai des paquets dans le réseau, et ce même dans le cas d'un lien unique. En effet, pour un flot donné, il s'agit de quantifier la distribution du délai sous la probabilité de Palm associée au processus d'arrivée des paquets de ce flot, ce qui reste un problème ouvert. L'évaluation de l'occupation des buffers paraît plus aisée, puisqu'il convient juste d'évaluer le workload des buffers sous la probabilité stationnaire, ce qui reste néanmoins aussi une question sans réponse.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons un état de l'art des études visant à quantifier la performance des applications temps-réel dans un réseau à commutation de paquets.

5.2 Travaux existants

Un certain nombre de travaux sont directement liés à notre étude. L'approche utilisée ici s'inspire largement de la notion de gigue négligeable dans les réseaux ATM, introduite et étudiée par F. Bricet, L. Massoulié et J. Roberts [39, 116]. Cette notion fait à présent l'objet d'une recommandation ITU [188]. Nous étendons ici les résultats de [39, 116] au cas d'un réseau IP où la taille des paquets est variable.

Dans [77], M. Grossglauser et S. Keshav démontrent par simulations que pour les services CBR dans les réseaux ATM, la gigue introduite par le multiplexage FIFO des paquets des flots temps-réel n'a pas d'impact significatif sur le délai de bout en bout. Ils en concluent que le multiplexage FIFO est possible et qu'un reconditionnement des flots à l'intérieur du réseau (aux nœuds intermédiaires) n'est pas nécessaire. Ces auteurs confirment les résultats obtenus par simulations

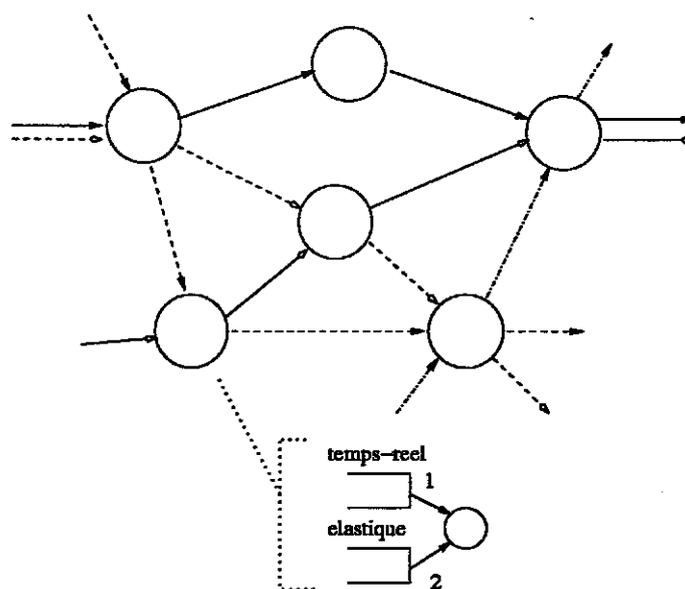


FIG. 5.1 – Multiplexage des flots temps-réel.

par quelques arguments analytiques, concernant principalement la variance des inter-arrivées des paquets aux nœuds du réseau.

L'étude précédente a été généralisée par J. Sahni, P. Goyal et H. Vin au cas de réseaux IP [156], pour tenir compte des tailles variables des paquets. Ce travail confirme que la discipline FIFO est appropriée lorsque les paquets sont de taille identique, mais met en lumière les problèmes qui apparaissent lorsque les paquets sont de tailles très différentes d'un flot à un autre. Les flots à petits paquets souffrent beaucoup plus du multiplexage FIFO que les flots à grands paquets.

Une autre série de simulations présentée par P. Goyal *et al.* [76] quantifie l'impact du trafic de données, servi avec une priorité moindre ou suivant une discipline Fair Queueing par classe, sur le délai subi par les paquets de voix sur IP. L'impact est important dans le cas de disciplines non-préemptives et lorsque le temps mis pour transmettre un paquet de données, typiquement de taille MTU, n'est pas négligeable devant le délai maximum requis par les applications de voix sur IP. C'est par exemple le cas dans les réseaux d'accès de faible capacité, où effectivement le temps pour transmettre un paquet MTU (par exemple 1500 octets) devient élevé. D'autres moyens de différencier trafic temps-réel et trafic de données sont alors nécessaires.

Il existent bien d'autres études sur la performance des applications temps-réel dans l'Internet, nous avons déjà cité dans le chapitre introductif celles concernant les bornes déterministes du délai de bout en bout. Nous en citerons d'autres tout au long de ce chapitre.

5.3 Bornes stochastiques dans le cas d'un lien unique

La recherche de bornes stochastiques du délai ou de l'occupation des buffers a été un sujet assez étudié ces dernières années. Ces études le plus souvent donnent des bornes de la performance lorsque les flots sont lissés à l'aide de leaky buckets avant d'entrer dans la file d'attente. Ces études présentent un intérêt théorique non négligeable. En revanche d'un point de vue pratique, elles se révèlent insuffisantes : d'une part car comme précisé dans le chapitre introductif, il est difficile de caractériser les sources à l'aide de leaky buckets, ce qui engendre fatalement un surdimensionnement du réseau. D'autre part, ces études s'appliquent à une superposition de sources régulées indépendantes, ce qui est effectivement le cas au premier nœud traversé, mais ne l'est plus dans le réseau. De plus, si l'on souhaite obtenir des bornes de la performance de files à l'intérieur du réseau, une analyse de pire cas comme décrite dans le premier chapitre devient inévitable et les bornes obtenues sont extrêmement pessimistes. Notre approche, certes peu rigoureuse, permet d'obtenir des bornes stochastiques réalistes partout dans le réseau.

Il est cependant nécessaire, avant de parler de réseau, d'analyser la performance d'un lien isolé. Cette analyse doit être à la base de l'analyse du délai dans un réseau.

Définissons d'abord deux ordres stochastiques sur les processus d'arrivée. Le premier introduit dans [116] compare le suivant l'ordre convexe le travail généré par le processus d'arrivée entre deux instants, le second compare l'exposant de la queue de distribution du workload stationnaire d'une file FIFO stable avec les processus d'arrivée considérés. Cet exposant est défini comme suit, chaque fois que cela est possible :

$$\alpha(A, c) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \log \Pr [W(A, c) > x],$$

où $W(A, c)$ est une variable aléatoire de même loi que le workload stationnaire d'une file FIFO de capacité c et de processus d'arrivée A .

Définition 5.1. Soient A et A' deux processus d'arrivée stationnaires. On écrit $A \leq_{s-var} A'$ si pour tout $t > 0$, $A(0, t)(P) \leq_{cx} A'(0, t)(P)$, où $A(0, t)$ et $A'(0, t)$ désignent le travail généré par les processus A et A' entre les instants 0 et t et où P est une probabilité sous laquelle les deux processus considérés sont stationnaires. Ici $s-var$ signifie strong variability en rapport avec l'ordre stochastique \leq_{var} introduit par C.S. Chang [46].

Définition 5.2. Soient A et A' deux processus d'arrivée stationnaires. On écrit $A \leq_{EB} A'$ si

$$\alpha(A, c) \geq \alpha(A', c),$$

pour tout $c > 0$ tels que $\alpha(A, c)$ et $\alpha(A', c)$ existent. (Ici EB se réfère à la notion classique de bande passante équivalente (Effective Bandwidth en anglais) [64]).

Voici deux propriétés de l'ordre \leq_{s-var} , prouvées dans [116] (proposition 3).

Proposition 5.1. (i) L'ordre \leq_{s-var} est stable par superposition pourvu que les processus multiples soient indépendants.

(ii) Soient A et A' deux processus d'arrivées admettant des transformées log-Laplace λ_A et $\lambda_{A'}$, définies par

$$\lambda_A(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E \left[e^{xA(0,t)} \right],$$

et possédant certaines propriétés de régularité (voir [116]). Alors,

$$A \leq_{s-var} A' \Rightarrow A \leq_{EB} A'.$$

5.3.1 Arrivées périodiques

Considérons dans un premier temps la superposition de sources périodiques indépendantes. Si les sources sont de même période et si les tailles des paquets sont toutes identiques, le système considéré est une file $N*D/D/1$, pour lequel on a une expression exacte de l'occupation du buffer W en régime stationnaire [150]. Cette expression montre qu'à charge identique, $\Pr[W > x]$ croît avec le nombre de sources et tend vers la distribution du workload d'une file $M/D/1$ (voir figure 5.2). C'est cette observation, combinée avec le fait que le processus de sortie d'une file à temps de service constant est plus régulier que le processus d'arrivée [46], qui est à la base de la conjecture mieux que Poisson dans les réseaux ATM.

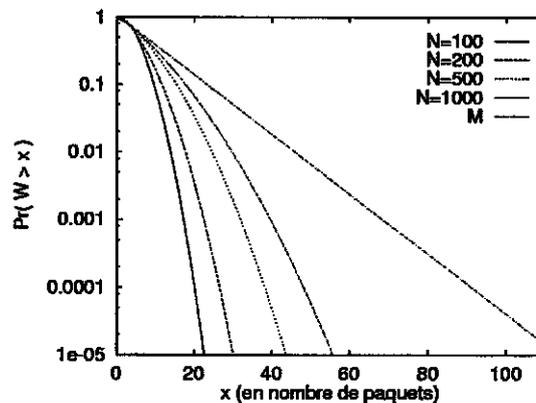


FIG. 5.2 – Distribution stationnaire du workload de files $N*D/D/1$.

Quand chaque source possède sa propre période, la performance observée est celle de la file $\sum D_i/D/1$, pour laquelle de bonnes approximations de la distribution du workload stationnaire existent [150]. Ces approximations suggèrent à nouveau que la file $M/D/1$ de même charge fournit encore une borne supérieure de la performance. En fait, on peut démontrer sans peine que toute superposition de flots périodiques donne asymptotiquement une performance meilleure que celle obtenue avec un processus de Poisson. Il suffit pour cela de remarquer qu'un processus périodique est inférieur à un processus de Poisson de même intensité pour l'ordre \leq_{s-var} , la proposition 5.1 permettant de conclure.

Dans le cas de réseaux IP, on s'intéresse aux files $\sum D_i^{X_i}/D/1$. A nouveau, des approximations de la performance existent [150] et ces dernières montrent que la performance de la file $M/G/1$ fournit une borne supérieure de la performance (la distribution G est prise égale à celle du processus d'arrivée initial). Comme précédemment, on sait que ce résultat est vrai asymptotiquement. Nous illustrons cette comparaison figure 5.3.

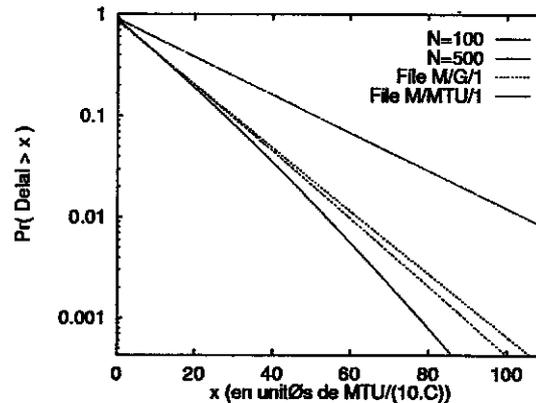


FIG. 5.3 – Distribution stationnaire du workload de files $\sum D_i^{X_i}/D/1$.

Une borne, moins précise que celle fournie par la file $M/G/1$, est donnée par la file $M/MTU/1$ où tous les paquets sont de taille maximale et de charge globale identique à celle de la file initiale. Nous justifierons cette nouvelle comparaison un peu plus loin. En fait, nous verrons que cette comparaison avec la file $M/MTU/1$ est nécessaire si l'on considère non plus un lien en isolation, mais un réseau. En effet, un flot avec des paquets de petites tailles, multiplexés avec des flots de paquets de tailles plus grandes, subit une déformation plus importante et peut devenir pire qu'un processus de Poisson.

5.3.2 Arrivées lissées par leaky bucket

Il existe un grand nombre de travaux visant à trouver des bornes stochastiques du délai ou de l'occupation du buffer lorsque les flots sont lissés par des leaky buckets. Ces études ont bien entendu vu le jour à l'époque où la technologie ATM semblait s'imposer. Aujourd'hui, avec l'avènement des réseaux IP multiservices, ces études restent toujours populaires, car elles permettent d'obtenir des bornes plus réalistes que les bornes déterministes obtenues par le Network Calculus, mais ce sur un lien unique, ce qui de notre point de vue ne constitue pas un progrès dans l'étude de la qualité des applications temps-réel. Nous nous contentons donc ici de citer les principales contributions dans le domaine (nous nous inspirons pour cela de [80]).

Les premiers résultats ont été obtenus par G. Kesidis et T. Konstantopoulos [97] et caractérisent la queue de distribution du workload d'une file FIFO de buffer de taille infinie et alimentée par une source (π, σ, ρ) -régulée. Rappelons qu'une source est (π, σ, ρ) -régulée si le travail $A(t)$ qu'elle génère dans un intervalle quelconque de durée t est borné par :

$$A(t) \leq \min\{\pi \times t, \sigma + \rho \times t\},$$

π est le débit crête, σ est la profondeur du leaky bucket et ρ est le débit moyen. Les mêmes auteurs ont étudié une borne de Chernoff dans le cas d'une superposition d'un grand nombre de sources

régulées et indépendantes [98]. A. Busson et L. Massoulié [118] ont appliqué l'inégalité de Hoeffding pour borner stochastiquement le processus issu de la superposition de sources régulées et indépendantes, et pour ainsi obtenir une borne probabiliste du délai. Cette approche a été ensuite généralisée par M. Vojnovic et J.Y. Leboudec [175], complétant l'étude par une analyse du cas d'un grand nombre de sources. Enfin, F. Guillemin, N. Likhanov, R. Mazumdar et C. Rosenberg sont parvenus à majorer le délai moyen des paquets issus de la superposition de sources régulées [79] et ont amélioré les bornes précédemment citées [80]. Ils ont en particulier généralisé la comparaison suivant l'ordre \leq_{EB} (queue de distribution du workload) de la superposition de sources périodiques et du processus M/G correspondant au cas de la superposition de sources régulées.

5.4 Conjectures mieux que Poisson

Identifier des bornes stochastiques pertinentes pour le délai de bout en bout ou pour l'occupation des buffers dans un réseau est une tâche beaucoup plus complexe que dans le cas d'un lien unique, car les flots à l'intérieur du réseau n'ont plus aucune raison d'être indépendants et sont déformés par l'attente subie aux différents liens. Il a donc fallu se contenter d'émettre des conjectures.

5.4.1 Conjecture mieux que Poisson

Rappelons tout d'abord la conjecture émise dans le cadre des réseaux ATM par F. Bricet, L. Massoulié et J. Roberts. Cette conjecture dit que si les processus d'arrivée de cellules sont initialement tous mieux que Poisson alors ils le restent à l'intérieur du réseau. Le qualificatif mieux signifie simplement que le délai des paquets d'un flot à un nœud est plus petit (en distribution, suivant l'ordre \leq_{st}) que celui qu'on observerait si les processus d'arrivée correspondant aux flots traversant le nœud considéré étaient des processus de Poisson indépendants et de même intensité que les processus d'arrivée initiaux. Autrement dit, le délai subi par les paquets d'un flot quelconque à un nœud est plus petit suivant l'ordre croissant que celui observé dans une file M/D/1 de charge égale à la charge globale du nœud considéré. Le délai de bout en bout est alors évalué en supposant que les délais successifs aux nœuds sont indépendants. Cette dernière hypothèse sera justifiée par simulations, elle est conservative.

Enfin pour tenir compte du trafic de données, on considère un pire cas : le trafic de données sature les nœuds, c'est-à-dire que dès qu'un paquet correspondant à une application temps-réel n'est présent à un nœud, ce dernier commence immédiatement à servir des paquets de données et ce jusqu'à l'arrivée de nouveaux paquets de type temps-réel.

5.4.2 Conjecture mieux que Poisson/MTU

Dans le cas de réseaux IP où les tailles des paquets sont variables, inférieures à MTU, le processus d'arrivée référence devient un processus de Poisson de paquets tous de taille MTU. Si les processus d'arrivée sont initialement mieux que Poisson/MTU, ils conservent cette propriété dans le réseau. Formellement, notons D une variable aléatoire représentant le délai des paquets

d'un flot particulier à un nœud sous la probabilité de Palm associée au processus d'arrivée des paquets de ce flot. De même, on note $D(N)$ le délai dans ce nœud obtenu en remplaçant le processus d'arrivée des paquets à ce nœud par le processus N , supposé générer une intensité de trafic identique au processus initial. La conjecture mieux que Poisson/MTU dit : pour tout flot et à chacun des nœuds du réseau,

$$D \leq_{st} D(M/MTU).$$

De même que dans le cas de réseaux ATM, pour tenir compte du trafic non prioritaire, l'évaluation de $D(M/MTU)$ est effectuée en supposant que le trafic de données, constitué de paquets de taille MTU, sature les nœuds. Enfin la borne sur le délai de bout en bout est construite en supposant que les variables $D(M/MTU)$ à chaque nœud sont indépendantes.

Borne du délai à un lien isolé. L'analyse de la file d'attente $M/MTU/1$ avec vacations introduites par le trafic non prioritaire fournit la transformée de Laplace suivante pour $D(M/MTU)$ (voir le livre de Cooper page 222 exercice 12 pour plus de détails) : pour tout $s \geq 0$,

$$E[\exp(-sD(M/MTU))] = \frac{1-\rho}{\rho} \frac{1-e^{-MTU \times s}}{e^{-MTU \times s} + s/\lambda - 1},$$

où ρ désigne la charge du nœud et λ l'intensité du processus de Poisson. En appliquant une technique similaire à celle utilisée dans [150], page 392, on obtient l'approximation suivante : pour x assez grand,

$$\Pr[D(M/MTU) > x] \approx C \exp(-rx/MTU),$$

où r réel est solution de $\rho(e^r - 1) = r$ et $C = (1 - \rho)/(\rho^2 e^r - \rho)$. Cette approximation fournit une borne supérieure de la distribution du délai :

$$\Pr[D(M/MTU) > x] \leq \begin{cases} 1, & \text{si } x < x_{\min}, \\ C \exp(-rx/MTU), & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $x_{\min} = -MTU/r \log(1/C)$. Le délai est ici normalisé par le temps de traitement par le nœud d'un paquet de taille MTU. On donne dans le tableau 5.1 les valeurs du délai correspondant à des probabilités de dépassement de 10^{-3} et 10^{-6} pour une charge du lien égale à 0.4 et 0.9.

Charge du trafic temps-réel	0.4	0.9	0.4	0.9
Pr[dépassement]	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}
Délai (paquets MTU)	6	35	10	68

TAB. 5.1 – Quantile du délai à un lien isolé.

Bornes du délai de bout en bout. La conjecture permet également de fournir des bornes stochastiques sur le délai de bout en bout. Le tableau 5.2 par exemple donne les bornes statistiques

Nombre de liens	5	5	10	10
Charge	0.4	0.9	0.4	0.9
Quantile 99%	1.0	4.8	1.9	8.0
Quantile 99.9%	1.2	6.0	2.0	9.4

TAB. 5.2 – Quantile du délai de bout en bout en ms.

obtenues pour le délai de traversée d'un certain nombre de liens OC3 (155 Mbit/s) pour différents niveaux de charge.

L'hypothèse d'indépendance est assez intuitive, et semble conservatrice : la dépendance tend à diminuer le délai de bout en bout. Nous l'avons vérifié par simulations sur un réseau de files en tandem avec trafic transverse (voir figures 5.4 et 5.5). Le trafic de bout en bout est initialement Poisson et génère une charge de 0.03, les trafics transverses sont également Poisson d'intensités telles que les charges des liens sont toutes égales à 0.8. Le réseau est constitué de 4 liens de même capacité.

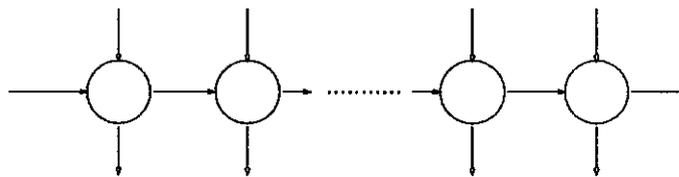


FIG. 5.4 – Files en tandem avec flux transverse.

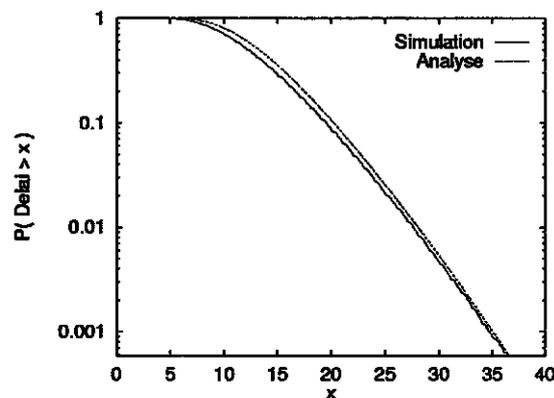


FIG. 5.5 – Distribution du délai de bout en bout - Simulation vs. analyse.

Ces estimations numériques montrent que la borne proposée est suffisante pour garantir les exigences des applications temps-réel, sauf pour les réseaux d'accès, où le temps mis pour transmettre un paquet de taille MTU est déjà non négligeable.

Conditionnement et reconditionnement des flots. La conjecture permet enfin d'affirmer qu'en présence d'un contrôle d'admission permettant d'éviter les surcharges, les flots temps-réel ne se déforment pas trop dans le réseau pourvu qu'ils soient assez réguliers initialement. Afin de garantir cette dernière condition, il peut être nécessaire de lisser les flots individuellement à un débit crête nominal avant de les admettre dans le réseau. En revanche, il apparaît inutile de lisser à nouveau ces flots dans le réseau.

5.5 Un contre-exemple aux conjectures

Dans la suite du chapitre, et pour simplifier quelque peu l'étude, on ne tient plus compte du trafic de données. Tout se passe comme si le trafic temps-réel était seul dans le réseau.

Les conjectures telles qu'énoncées précédemment semblent très fortes, car elles comparent les délais à chaque nœud suivant l'ordre croissant. On peut donner d'autres versions plus faibles de ces conjectures, en ne considérant par exemple que le délai moyen de traversée. La conjecture mieux que Poisson deviendrait alors : si les flots sont initialement mieux Poisson, le délai moyen de traversée des paquets d'un flot est inférieur à la somme des délais moyens observés dans des files $M/D/1$ de charges égales à celles des nœuds traversés. Cette version faible des conjectures est en fait fautive pour des réseaux de topologie générale. Notons \mathcal{M} l'ensemble des réseaux tels que la version faible de la conjecture mieux que Poisson soit vérifiée. Notons également \mathcal{S} l'ensemble des réseaux tels que remplacer les services déterministes par des services exponentiels de même moyenne et avec pour processus d'arrivée des processus de Poisson indépendants, le délai moyen de traversée de tous les paquets soit accru. Cette dernière classe de réseaux a déjà été évoquée dans le chapitre précédent. Il est facile de montrer que :

Lemme 5.1.

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{S}.$$

Preuve. Considérons un réseau de \mathcal{M} . Supposons que les processus d'arrivée sont poissonniens et indépendants. Notons N le nombre de sources dans le réseaux, et notons r_i , $i = 1, \dots, N$ les routes suivies par les différents flots. Notons enfin $d_{i,l}$ le délai moyen des paquets du flot i au nœud $l \in r_i$, désignons par $d_i(M/D)$ le délai moyen observé dans une file $M/D/1$ de même charge que le nœud l . Par hypothèse, on sait que, pour tout i ,

$$\sum_{l \in r_i} d_{i,l} \leq \sum_{l \in r_i} d_i(M/D).$$

Comme le délai moyen dans un file $M/D/1$ est plus petit que celui d'une file $M/M/1$ de même charge, on en déduit simplement que :

$$\sum_{l \in r_i} d_{i,l} \leq \sum_{l \in r_i} d_i(M/M),$$

et en sommant sur i , on montre que le réseau est bien dans \mathcal{S} . □

Ce résultat montre simplement que le réseau feed-forward décrit figure 4.2 fournit un contre-exemple à toutes les conjectures mieux Poisson, même dans leur version faible. Trouver les topologies de réseau pour lesquelles les conjectures sont vraies est un exercice très difficile. On peut par contre donner sur certains types de topologie usuels quelques arguments qui justifient les conjectures.

5.6 Arguments en faveur des conjectures

Nous donnons maintenant quelques arguments expérimentaux ou théoriques tentant de justifier les conjectures mieux que Poisson. Les premiers arguments concernent le cas de files en tandem avec trafic transverse, réseau sur lequel il existe déjà un certain nombre de travaux. Le second concerne plus généralement les réseaux feed-forward.

5.6.1 Cas de files en tandem avec trafic transverse

Considérons dans un premier temps le réseau décrit figure 5.4, un flot test est multiplexé sur une série de files d'attente avec des flots transverses indépendants. Dans le cas de services constants (réseaux ATM), si les processus d'arrivée du trafic transverse sont poissonniens et indépendants, l'analyse du processus d'arrivée des paquets du flot test aux nœuds intermédiaires devient possible. W. Matragi *et al.* [120] ont par exemple donné une procédure récursive complexe fournissant la transformée de Laplace des inter-arrivées de paquets du flot test à la k -ième file traversée. Cette analyse ne permet malheureusement de caractériser le flot test que dans les cas de forte ou de faible charge (à chaque file). Des études menant à des résultats similaires ont également été menées par J. Van den Berg et J. Resing [150] et par F. Kelly et P. Key [96]. Nous généralisons ces études au cadre des réseaux IP, c'est-à-dire quand la taille des paquets varie d'un flot à l'autre, mais n'excède pas une valeur limite MTU.

Files en tandem saturées. On suppose ici que les charges des différentes files traversées sont toutes arbitrairement proches de 1. Cette hypothèse permet une analyse exacte de la déformation du flot test au cours de sa traversée, comme dans le cas de réseaux ATM [150]. Notons σ la taille des paquets du flot test et T la moyenne des inter-arrivées des paquets. Pour simplifier la présentation, on suppose que toutes les files sont de capacités identiques, égales à 1. Le trafic transverse est identique à chaque file d'intensité λ et de tailles de paquets i.i.d. et notées Σ . A saturation, on a : $\sigma/T + \lambda E[\Sigma] = 1$.

Notons $(\tau_n^k)_{n \in \mathbb{Z}}$ les inter-arrivées des paquets du flot test à la k -ième file. Les τ_n^k à n fixé définissent une chaîne de Markov dont l'évolution est caractérisée par la relation

$$\tau_n^{k+1} = \sigma + A(\tau_n^k),$$

où $A(t)$ définit le trafic transverse arrivé dans un intervalle de temps de longueur t . Par conséquent, si le flot test est initialement de renouvellement, il garde cette propriété dans le réseau. Par ailleurs, dans le cas contraire, le flot test tend vers un processus de renouvellement au fur et à mesure qu'il

progresses dans le réseau. Il est alors possible d'exprimer les moments des inter-arrivées à chaque file. Les deux premiers moments par exemple sont définis par : pour tout k , $E[\tau_n^k] = T$ et

$$\text{Var}[\tau_n^{k+1}] = \lambda T \times E[\Sigma^2] + (1 - \sigma/T) \text{Var}[\tau_n^k].$$

On en déduit que la variance des inter-arrivées converge, lorsque k tend vers ∞ , vers :

$$\text{Var}(\tau_n^\infty) = \frac{(T - \sigma)}{1 - (1 - \sigma/T)^2} \frac{E[\Sigma^2]}{E[\Sigma]}.$$

Si le flot test est initialement périodique, sa variance croît de file en file vers cette valeur. Cette dernière est maximale lorsque Σ est constant et égal à MTU. En d'autres termes, le flot test subit une déformation maximale lorsque les processus de trafic transverse sont poissonniens de tailles de paquets constantes égales à MTU. Le coefficient de variation limite des inter-arrivées du flot test est alors :

$$\text{CV}^2 = \frac{1 - \sigma/T}{1 - (1 - \sigma/T)^2} \frac{\text{MTU}}{T}.$$

Ainsi, à charge constante, CV^2 est une fonction décroissante de σ . Lorsque la taille des paquets du flot test est assez petite, ce dernier n'est plus mieux que Poisson. En revanche, si l'on suppose que $\sigma = \text{MTU}/m$ avec m entier, alors on peut montrer que le coefficient de variation limite des intervalles entre les temps d'arrivée du premier et du $m + 1$ -ième paquet est indépendant de m et vaut $(1 - \sigma/T)/(2 - \sigma/T)$. Il varie de $1/2$ à 0 quand on augmente la proportion du trafic test de 0 à 100% .

On peut par ailleurs montrer que le processus d'arrivée du flot test reste toujours inférieur suivant l'ordre $\leq_{s\text{-var}}$ à un processus Poisson/MTU de même charge quand le flot test possède cette propriété initialement. Ce résultat a été établi dans le cas de réseaux ATM dans [116]. Pour le généraliser au cas de réseaux IP, il faut étudier l'effet obtenu sur les processus d'arrivée lorsqu'on "regroupe" des paquets. Considérons donc la transformation suivante appliquée à un processus d'arrivée de paquets de taille constante égale à σ , noté $A^{(1)}$. A partir d'un paquet arbitraire de $A^{(1)}$, on retire les $m - 1$ paquets suivants et on remplace le m -ième paquet par un paquet de taille $m \times \sigma$. On fait ce regroupement pour tout le processus. Le résultat de cette transformation est un processus stationnaire d'arrivée de paquets de taille $m \times \sigma$ et noté $A^{(m)}$. Intuitivement, pour une file d'attente, le processus initial $A^{(1)}$ mène à une meilleure performance que $A^{(m)}$. On peut en fait montrer facilement en utilisant un raisonnement similaire à ceux faits dans [9], chapitre 4, que le temps d'attente stationnaire est effectivement plus petit suivant l'ordre convexe croissant avec $A^{(1)}$. On peut également obtenir ce résultat en utilisant un ordre stochastique basé sur les fonctions multimodulaires [3, 4]. De plus on peut comparer les deux processus suivant l'ordre $\leq_{s\text{-var}}$:

Proposition 5.2.

$$A^{(1)} \leq_{s\text{-var}} A^{(m)}.$$

Preuve. Soit $A^{(1)}(0, t)$ (resp. $A^{(m)}(0, t)$) le travail généré par le processus d'arrivée $A^{(1)}$ (resp. $A^{(m)}$) pendant un intervalle de temps de longueur t . Notons $\Pr[A^{(1)}(0, t) = n\sigma] = \pi_n(t)$ et

posons $n = qm + r$ avec $0 \leq r < m$. Si l'une des r premières arrivées de paquet de $A^{(1)}$ dans cet intervalle est également une arrivée pour $A^{(m)}$, alors $A^{(m)}(0, t) = (q+1)m\sigma = (n-r+m) \times \sigma$. Cela arrive avec une probabilité r/m . Dans le cas contraire, $A^{(m)}(0, t) = (n-r) \times \sigma$. Ainsi, pour toute fonction convexe h ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [h(A^{(m)}(0, t))] / \sigma &= \sum_{n \geq 0} \left\{ \frac{r}{m} h(n-r+m) + \left(1 - \frac{r}{m}\right) h(n-r) \right\} \pi_n(t) \\ &\geq \sum_{n \geq 0} h(n) \pi_n(t) = \mathbb{E} [h(A^{(1)}(0, t))] / \sigma. \end{aligned}$$

□

A présent, si le processus agrégé $A^{(m)}$ est mieux que Poisson/MTU à l'entrée du réseau suivant l'ordre \leq_{s-var} , il conserve cette propriété dans le réseau grâce à la proposition 4 dans [116]. Ce qui implique que le processus réel (avec des paquets de taille de paquets σ) est aussi mieux que Poisson/MTU pour cet ordre partout dans le réseau. Enfin, d'après la proposition 5.1, cela prouve une version asymptotique de la conjecture mieux que Poisson/MTU dans ce type de réseau. Ce résultat sera étendu un peu plus loin au cas des réseaux de type feed-forward.

Files en tandem non saturées. Il est beaucoup plus difficile d'évaluer la déformation du flot test à charge normale, car on ne peut exprimer simplement le processus de sortie d'une file comme nous l'avons fait lorsque les files étaient saturées. Néanmoins, nous montrons par simulations que la conjecture mieux que poisson reste valable dans ce cas. En fait, intuitivement, la gigue devrait décroître avec la charge, c'est ce que nous vérifions figures 5.6 et 5.7.

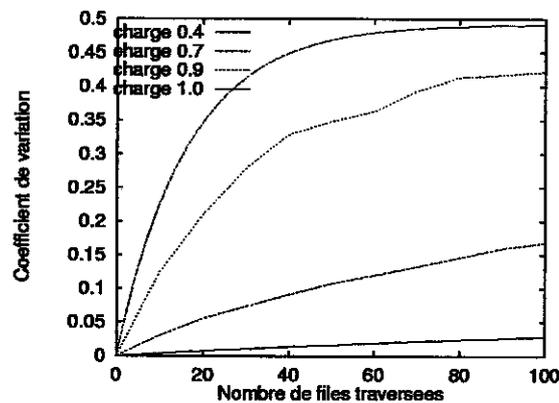


FIG. 5.6 – Coefficient de variation des intervalles entre l'arrivée de 10 paquets consécutifs - $\sigma = MTU/10$.

Ici les paquets du flot test sont 10 fois plus petits que MTU et constituent un trafic d'intensité 0.03 à chaque file. Figure 5.7 représente le coefficient de corrélation entre deux groupes consécutifs de 10 paquets. La corrélation est négative, ce qui suggère que le processus d'arrivée du flot

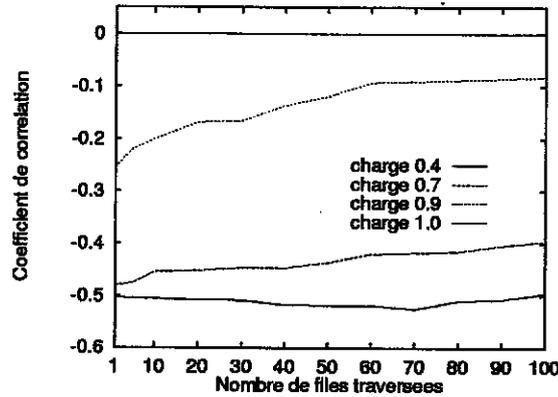


FIG. 5.7 – Corrélation entre deux intervalles successifs d'arrivée de 10 paquets consécutifs.

test est en fait plus régulier que le processus de renouvellement correspondant. Le trafic transverse est Poisson/MTU. D'autres simulations avec un trafic transverse mieux que Poisson/MTU confirme que ce dernier est celui qui engendre le plus de gigue. Ces simulations sont présentées figure 5.8 : on a remplacé le processus de Poisson/MTU par un processus M/G avec G uniforme entre MTU/10 et MTU ou par un processus d'Erlang-2 d'arrivée de paquets de taille MTU. Ces deux derniers processus sont effectivement mieux que Poisson/MTU.

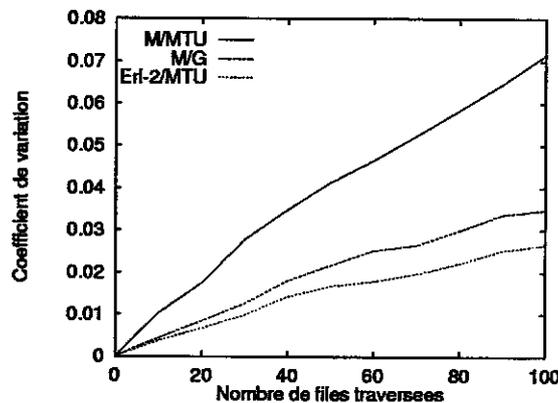


FIG. 5.8 – Coefficient de variation des intervalles entre l'arrivée de 10 paquets consécutifs avec différents types de trafic transverse.

5.6.2 Grandes déviations et réseaux feed-forwards

Nous donnons enfin l'unique résultat théorique tangible qui justifie les conjectures mieux que Poisson. Ce résultat, initialement établi dans le cas des réseaux ATM, est dû à L. Massoulié [116].

Nous nous contentons ici de le généraliser au cas de réseaux IP.

Le résultat ne s'applique qu'aux réseaux feed-forward dont voici la définition.

Définition 5.3. *Un réseau feed-forward est un réseau qui peut être construit en numérotant les nœuds de telle sorte que toutes les routes sont des sous-suites croissantes de l'ensemble des nœuds. On donne un exemple figure 5.9.*

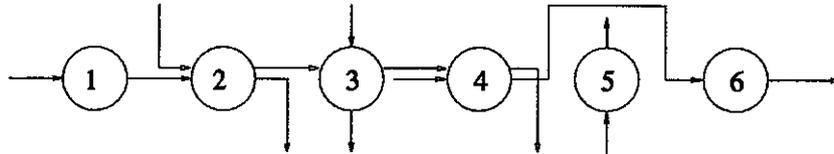


FIG. 5.9 – Un réseau feed-forward.

Au lieu de considérer les processus ponctuels d'arrivée de cellules comme dans [116], on s'intéresse au volume généré par les différents flots. Soit $A(0, t]$ le volume généré par un flot pendant un intervalle de temps de longueur t . On définit :

$$A^n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}A(0, nt] & \text{si } t \geq 0 \\ -\frac{1}{n}A(nt, 0] & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto A^n(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions càdlàg. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est muni de la topologie correspondant à la convergence dans $\mathcal{D}([-T, T], \mathbb{R})$ muni de la topologie de Skorohod, pour tout $T > 0$ (voir les détails dans [116]). On dit que la suite A^n satisfait un principe de grandes déviations (PGD) trajectorien si elle vérifie un PGD dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la topologie précédente avec une certaine fonctionnelle d'action $I_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ([62] par exemple). Par exemple, si M désigne un processus de Poisson d'arrivée de paquets de taille unité, la suite M^n satisfait un PGD trajectorien avec pour fonctionnelle d'action :

$$I_M(\gamma) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} H_M(\gamma'(t)) dt, & \text{si } \gamma \text{ est absolument continue et si } \gamma(0) = 0 \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$H_M(x) = \begin{cases} x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour de plus amples détails, on renvoie le lecteur à [116]. A partir des fonctionnelles d'action, on peut définir un ordre stochastique lié aux grandes déviations :

Définition 5.4. *Soient A et A' deux processus qui satisfont des PGD trajectoriels avec pour fonctionnelles d'action respectives I_A et $I_{A'}$. On écrit $A \leq_{LD} A'$ si pour tout $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $I_A(\gamma) \geq I_{A'}(\gamma)$.*

Cet ordre stochastique est intéressant dans la mesure où il permet de comparer les queues de distribution du workload d'une file FIFO. C'est ce que démontrent les deux résultats suivants : le premier, dû à L. Massoulié [116], est une conséquence directe d'un principe de contraction, le second, dû à N. Duffield et N. O'Connell [64], est un résultat très classique.

Proposition 5.3. *Considérons deux processus ponctuels marqués A et A' satisfaisant tous deux un PGD trajectoriel, de fonctionnelles d'action respectives I_A et $I_{A'}$. Supposons que $A \leq_{LD} A'$. Alors A et A' satisfont des PGD classiques de fonctionnelles d'action H_A et $H_{A'}$ telles que $H_A \geq H_{A'}$.*

Proposition 5.4. *Considérons deux processus ponctuels marqués A et A' satisfaisant tous deux un PGD classique, de fonctionnelles d'action respectives H_A et $H_{A'}$. Alors :*

$$H_A \geq H_{A'} \Rightarrow \alpha(A, c) \geq \alpha(A', c),$$

pour tout $c > 0$ tel que ces deux derniers termes soient définis.

Ce dernier résultat est une conséquence directe de l'identité :

$$\alpha(A, c) = \inf_{t > 0} (tH_A(c + 1/t)).$$

Le résultat suivant est une version asymptotique de la conjecture mieux que Poisson/MTU. Il permet d'affirmer que les queues de distribution du workload stationnaire à chaque nœud sont inférieures à celles observées en remplaçant les processus d'arrivée au nœud par des processus de Poisson de paquets de taille MTU et de même charge. C'est un premier résultat qui ne permet malheureusement pas de comparer les délais effectivement subis par les paquets d'un flot particulier.

Théorème 5.1. *Considérons un réseau feed-forward de files FIFO. Supposons que le réseau est stable, autrement dit l'intensité de trafic à chaque nœud est strictement inférieure à la capacité de ce nœud. Si les flots temps-réel sont mieux que poisson/MTU suivant l'ordre LD à l'entrée du réseau, ils conservent cette propriété partout dans le réseau. En conséquence, à chaque nœud du réseau, si M/MTU désigne un processus de Poisson/MTU de même charge que le processus d'arrivée réel A à ce nœud,*

$$A \leq_{EB} M/MTU.$$

Preuve. Le théorème est prouvé en suivant la même démarche que dans [116], mais appliquée au processus $A(0, t)$. \square

5.7 Conclusions et perspectives

Pour justifier les conjectures mieux que Poisson, les seuls résultats théoriques que nous avons pu fournir, des extensions de résultats obtenus pour les réseaux ATM par L. Massoulié, ne permettent de comparer que les queues de distribution de l'occupation stationnaire des buffers sur des réseaux feed-forwards. Or le contre-exemple aux conjectures est lui-aussi un réseau feed-forward. Certes, l'exemple contredit les conjectures appliquées au délai moyen des paquets et non à l'occupation des buffers. Néanmoins, on est en droit de s'interroger sur le véritable intérêt des comparaisons asymptotiques, basées sur des événements rares, quand on sait qu'éventuellement, les moyennes des quantités comparées peuvent vérifier des comparaisons inverses.

L'analyse statistique de la performance des applications temps-réel n'en est qu'à ses balbutiements, et comme nous l'avons vu tout au long du chapitre, tous les problèmes restent ouverts.

Chapitre 6

Files PS à capacité variable et intégration de service

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à la performance d'un réseau intégrant les deux grands types de trafic, temps-réel et élastique. Plus précisément, nous étudions l'impact de la présence du trafic temps-réel sur la performance au niveau flot du trafic élastique. Lorsque le trafic temps-réel est prioritaire, la performance du trafic élastique est celle d'une file PS à capacité variable. Il est extrêmement difficile d'obtenir des résultats explicites pour ce type de système, car lorsque la capacité est variable, la performance perd sa propriété d'insensibilité et dépend alors de toutes les caractéristiques statistiques des trafics temps-réel et élastique. Après avoir quantifié cette sensibilité dans certains cas simples, nous encadrons la performance du système dans un cas général par celles de deux systèmes insensibles, obtenus en supposant que les deux types de trafic évoluent à des échelles de temps très différentes. Nous montrons en particulier les conditions pour lesquelles ces bornes sont proches et pour lesquelles la performance du système est donc pratiquement insensible.

Les résultats de ce chapitre sont présentés dans [60, 61].

6.1 Modèle PS à capacité variable

Dans la suite, nous restreignons notre analyse au cas d'un lien partagé entre les trafics temps-réel et élastique. Même avec cette restriction, l'étude reste difficile et les problèmes souvent sans réponse.

Nous pouvons supposer que dans les nœuds du réseau, est implémentée une architecture du type DiffServ, permettant de séparer les paquets correspondant aux applications temps-réel et de données. Il y a bien sûr maintes façons d'implémenter cette différenciation. Mais quelle qu'elle soit, il faut que la différenciation permette de réduire au maximum les délais subis par les paquets des applications temps-réel. Dans notre analyse, nous supposons que les paquets temps-réel sont routés dans une file, prioritaire par rapport à celles des autres services. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, cela devrait suffire pour garantir des délais de bout en bout assez faibles pour les paquets temps-réel. Un autre modèle d'intégration a été étudié dans [36] : il s'agit d'implémenter une discipline GPS pour le service des files de paquets temps-réel et de données. En fait, notre modèle est assez général pour tenir compte de ces différentes implémentations.

Les flots élastiques arrivent au lien selon un processus ponctuel stationnaire d'intensité λ_e , que nous supposons Poisson sauf mention du contraire. Les tailles des flots sont i.i.d. de même distribution que la variable aléatoire σ_e , et de moyenne $1/\mu_e$. Nous notons enfin Q_e le nombre de flots élastiques à l'état stationnaire et S_e le temps de réponse de ces flots.

Nous représentons le trafic temps-réel par un processus stationnaire $\{Q_s(t), t \geq 0\}$ dont l'état est décrit par la distribution d'une variable aléatoire Q_s . $Q_s(t)$ pourrait être le nombre de flots temps-réel en cours de service ou la capacité occupée par ces flots. Nous introduisons les notations suivantes :

- π_i est la probabilité à l'état stationnaire pour que Q_s soit dans l'état i ,
- $C_e(i)$ et $\rho_e(i) = \frac{\lambda_e E[\sigma_e]}{C_e(i)}$ sont respectivement la capacité disponible pour le trafic élastique et la charge correspondante quand Q_s est dans l'état i ,
- $\bar{C}_e = \sum_i \pi_i C_e(i)$ est la capacité moyenne disponible pour le trafic de données,
- $\rho_e = \frac{\lambda_e E[\sigma_e]}{\bar{C}_e}$ est la charge moyenne du trafic élastique.

6.1.1 Caractéristiques du trafic temps-réel

Les performances du trafic élastique vont dépendre des caractéristiques du trafic temps-réel. Ce dernier est la somme de flots en cours de transfert et principalement définis par leur débit instantané et leur durée.

- Le débit des flots temps-réel dépend de l'application correspondante. Il va de quelques dizaines de kbit/s pour la téléphonie, jusqu'à plusieurs Mbit/s pour les applications vidéo. Au cours d'un flot, ce débit est susceptible de varier : suppression de silence pour la voix par

exemple, ou codage vidéo adaptatif.

- La durée moyenne des flots temps-réel est de l'ordre de quelques minutes, voire de plusieurs heures pour les vidéos. Il faut noter que ces durées sont bien plus longues que la durée de la majorité des flots élastiques (le chargement d'une page Web devrait se faire en quelques secondes). Par ailleurs, les durées des appels ont souvent une grande variance, c'est le cas des appels téléphoniques dont la durée est de distribution log-normale [22].
- Enfin, un facteur d'importance est la proportion relative du trafic temps-réel par rapport aux autres trafics. Aujourd'hui, il ne représente qu'une faible partie du trafic dans l'Internet. En revanche, sa proportion risque d'être beaucoup plus importante dans les réseaux mobiles de troisième génération, UMTS par exemple.

6.1.2 Impact sur le trafic élastique

Nous supposons ici que les flots élastiques en cours se partagent équitablement (grâce à TCP) la capacité laissée libre par le trafic temps-réel. Le nombre de flots en cours de transfert est alors celui d'une file PS dont la capacité est modulée par le processus stationnaire $\{Q_s(t), t \geq 0\}$ décrivant le trafic temps-réel. Nous supposons que le système est globalement stable, c'est-à-dire que $\rho_e < 1$.

Même quand les arrivées des flots à la file PS modulée sont poissonniennes, la propriété d'insensibilité longuement évoquée dans les chapitres précédents est perdue. Autrement dit, tous les paramètres statistiques des trafics temps-réel et élastique influent sur la performance (d'ordre 1) du trafic élastique. C'est ce qui rend l'analyse de ce système très complexe, et nous illustrons cette complexité dans le paragraphe suivant dédié à la présentation de quelques résultats très partiels sur cette file.

6.2 Quelques résultats partiels de la littérature

6.2.1 Modèles markoviens

Le problème de modélisation de l'intégration n'a pas été beaucoup étudié jusqu'à présent de par sa difficulté. Une manière de contourner le problème de l'analyse de la file M/G/1/ PS à capacité variable est de supposer que toutes les variables aléatoires du système sont exponentiellement distribuées. L'étude se réduit à l'analyse d'un modèle markovien classique, pour lequel on peut trouver des résultats numériques, mais pour lequel des formules explicites sont exclues. Des tailles de flots exponentiellement distribuées, on peut passer au cas de distribution de Cox (en considérant des phases successives), mais le modèle se complique et devient vite inextricable. Citons les travaux d'Altman, Artiges et Traore [1] et ceux de Núñez Queija [134] pour des exemples d'approches markoviennes de ce type.

6.2.2 File PS avec interruption de service

L'étude de la file d'attente PS avec interruptions de service n'a été initiée par Núñez Queija [135] que récemment. Bien auparavant (dès les années 50), la file M/G/1 FIFO avait fait l'objet d'un grand nombre de travaux [176, 73, 123], ... etc (le lecteur trouvera une bibliographie complète sur ce sujet dans [134]). Les résultats sur la file FIFO nous donnent quelques renseignements sur la file PS lorsque les services sont exponentiellement distribués. Nous préférons ici ne donner que le résultat sur le temps de réponse des flots dans le cas PS [134, 135].

Considérons donc le cas où deux états pour Q_s sont possibles : à l'état *on*, ($Q_s = 1$), la capacité disponible pour le trafic élastique est 1, et à l'état *off* ($Q_s = 2$) cette capacité est réduite à 0. Quand les périodes T_1 sont de durées exponentiellement distribuées, la distribution du nombre de flots élastiques Q_e est connue.

Proposition 6.1. *Le temps de réponse conditionnel moyen des flots est donnée par :*

$$E[S_e | \sigma_e = \tau] = \frac{\tau}{\pi_1 \left(1 - \frac{\lambda_e}{\mu_e \pi_1}\right)} + \pi_2 \frac{E[T_2^2]}{2E[T_2]} + \pi_2 \frac{\lambda_e E[T_2^2]}{2\mu_e E[T_2]} \frac{2\pi_1 - \frac{\lambda_e}{\mu_e}}{\left(\pi_1 - \frac{\lambda_e}{\mu_e}\right)^2} \left(1 - e^{-\mu_e \left(1 - \frac{\lambda_e}{\mu_e \pi_1}\right) \tau}\right). \quad (6.1)$$

6.2.3 File M/M/1 à deux vitesses

Les auteurs de [37, 38, 132] ont quant à eux tenté d'étudier la file M/M/1 avec deux vitesses de service. Les périodes pendant lesquelles la vitesse est constante sont de distributions générales. Dans [37, 38], on trouve l'asymptotique de la distribution du workload de la file. Dans [132], on trouve la fonction génératrice du workload.

Tous ces résultats ne nous renseignent pas tellement sur la performance des flots élastiques en présence de trafic temps-réel. Les modèles à interruptions de service sont intéressants au niveau paquet, pour modéliser l'impact de la file prioritaire contenant les paquets des applications temps-réel. Mais dans ce cas, il faudrait prendre des processus d'arrivée différents du processus de Poisson. Dans ce qui suit, au lieu d'essayer de donner des résultats exacts sur la performance dans des cas très précis, nous tentons plutôt d'en fournir de bonnes approximations (sous forme de bornes) valables dans un cadre le plus général possible.

6.3 Stabilité uniforme vs. Instabilité locale

Un problème intéressant est d'identifier les cas où la sensibilité aux caractéristiques de trafic est importante et les cas où au contraire, elle peut être négligée. Cela nous mène à distinguer deux types de régimes.

Stabilité uniforme

Quel que soit l'état i du trafic temps réel Q_s , la capacité disponible pour le trafic élastique est suffisante pour écouler la demande :

$$\rho_e(i) < 1, \quad \forall i.$$

Instabilité locale

Même si globalement le système est stable $\rho_e < 1$, il existe des états i du trafic temps-réel Q_s tels que la capacité disponible pour le trafic élastique ne suffit pas à écouler la demande :

$$\exists i \text{ tel que } \rho_e(i) > 1.$$

Nous allons montrer qu'en régime de stabilité uniforme, on retrouve quasiment la propriété d'insensibilité, alors qu'au contraire, en régime d'instabilité locale, la performance est très sensible aux paramètres statistiques du trafic.

6.4 Performance en cas d'instabilité locale

Nous dérivons dans cette section quelques résultats tentant de décrire l'impact des instabilités locales sur la performance du trafic élastique. Pour simplifier l'analyse, nous supposons que le processus $\{Q_s(t), t \geq 0\}$ est un processus semi-markovien : lorsque Q_s entre dans l'état i , il y reste une période de temps aléatoire T_i de distribution $F_i(u) = \Pr[T_i < u]$. A la fin de cette période, le processus change d'état et se place à l'état j avec probabilité p_{ij} . La chaîne de Markov de transition $P = (p_{ij})$ est supposée positive récurrente. Nous supposons également que les tailles des flots élastiques sont exponentiellement distribuées de moyenne $1/\mu_e$. Il faut remarquer qu'en dépit de ces hypothèses simplificatrices, le problème consistant à trouver le temps moyen de réponse des flots élastiques reste ouvert.

6.4.1 Une borne grossière de la performance

Le résultat suivant donne une première idée sur l'impact des caractéristiques statistiques du trafic temps-réel. Le temps de réponse S_e des flots élastiques augmente au moins aussi vite que la durée moyenne des périodes d'instabilité et que le rapport variance/moyenne de cette durée.

Proposition 6.2. *Le temps de réponse moyen des flots élastiques satisfait l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{E}[S_e] \geq \frac{1}{2\lambda_e} \sum_{i: \rho_e(i) > 1} \pi_i \frac{\mathbb{E}[T_i^2]}{\mathbb{E}[T_i]} (\lambda_e - \mu_e C_e(i)). \quad (6.2)$$

Preuve. On place le système à l'état stationnaire à $t = 0$. Soit Z le temps écoulé depuis le dernier changement d'état du processus Q_s . Alors

$$\Pr[Q_s = i, u \leq Z \leq u + du] = \pi_i \frac{1 - F_i(u)}{\mathbb{E}[T_i]} du, \quad \forall i.$$

De plus, si $Y_i(u)$ représente le nombre de flots au temps u dans une file M/M/1 initialement vide et de capacité $C_e(i)$, alors pour tout u ,

$$E[Q_e | Q_s = i, Z = u] \geq E[Y_i(u)] \geq (\lambda_e - \mu_e C_e(i))u.$$

Donc,

$$E[Q_e 1_{Q_s=i}] \geq \pi_i (\lambda_e - \mu_e C_e(i)) \int_0^\infty \frac{(1 - F_i(u))u}{E[T_i]} du,$$

ce qui implique

$$E[Q_e 1_{Q_s=i}] \geq \pi_i \frac{E[T_i^2]}{2E[T_i]} (\lambda_e - \mu_e C_e(i)).$$

En sommant sur tous les états d'instabilité locale et en appliquant la formule de Little, on obtient le résultat escompté. \square

Remarque 6.1. *Le résultat précédent est facilement généralisable au cas où les flots ont des tailles de distribution générale. En utilisant les résultats de [102] (formule (2.6)), on trouve pour le temps de réponse moyen la borne inférieure suivante :*

$$E[S_e] \geq \frac{1}{2\lambda_e} \sum_{i: \rho_e(i) > 1} \pi_i \frac{E[T_i^2]}{E[T_i]} \alpha_i, \quad (6.3)$$

où α_i est solution de l'équation de point fixe :

$$\alpha_i = \lambda_e \left(1 - \int_0^\infty e^{-\alpha_i y / C_e(i)} \sigma_e(dy) \right).$$

La proposition précédente donne une borne très générale sur le temps de réponse moyen en régime d'instabilité locale. Nous allons maintenant ergoter et proposer des évaluations plus précises sous certaines hypothèses : en régime quasi-stationnaire, puis à forte charge.

6.4.2 Quasi-stationnarité

Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 6.1.1, au niveau flot, les trafics temps-réel et élastique n'évoluent pas à la même échelle de temps : le temps de transfert d'un flot élastique doit être beaucoup plus court que la durée d'un flot temps-réel. Ainsi, il est probable que le nombre de flots élastiques Q_e évolue beaucoup plus rapidement que le processus Q_s caractérisant le trafic temps-réel. Intuitivement, c'est un facteur supplémentaire de dégradation de la performance des flots élastiques, car les périodes d'instabilité locale sont alors relativement longues.

Afin de quantifier cet effet d'échelle, on introduit un système renormalisé $\{Q_s^{(\epsilon)}, Q_e^{(\epsilon)}\}$, où la vitesse d'évolution du trafic temps-réel est multipliée par un paramètre ϵ : $Q_s^{(\epsilon)}$ reste dans l'état i pendant un intervalle de temps T_i/ϵ . Notons qu'à l'équilibre, Q_s^ϵ et Q_s sont de même loi, et donc la charge globale reste inchangée par la renormalisation. Nous analysons le comportement de Q_e^ϵ dans le régime quasi-stationnaire lorsque ϵ tend vers 0.

Une étude détaillée de ce système a été faite par Choudhury, Mandelbaum, Reiman et Whitt [52]. Il ont montré que le processus $\{(\epsilon Q_e^{(\epsilon)}(t/\epsilon), Q_s^{(\epsilon)}(t/\epsilon)), t \geq 0\}$ converge en distribution quand ϵ tend vers 0, vers un processus limite $\{(\hat{Q}_e^{qs}(t), \hat{Q}_s^{qs}(t)), t \geq 0\}$, où $\{\hat{Q}_s^{qs}(t), t \geq 0\}$ a la même distribution que le processus temps-réel initial $\{Q_s(t), t \geq 0\}$ et où $\hat{Q}_e^{qs}(t)$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d\hat{Q}_e^{qs}(t)}{dt} = \sum_i (\lambda - \mu_e C_e(i)) 1_{\{\hat{Q}_s(t)=i\}}, & \text{si } \hat{Q}_e^{qs}(t) > 0, \\ \frac{d\hat{Q}_e^{qs}(t)}{dt} = \sum_i (\lambda - \mu_e C_e(i))^+ 1_{\{\hat{Q}_s(t)=i\}}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce travail ne donne qu'un résultat de convergence. Pour déterminer quantitativement le comportement de $Q_e^{(\epsilon)}$ quand ϵ tend vers 0, on peut résoudre le système précédent ou calculer directement la fonction génératrice de $\epsilon Q_e^{(\epsilon)}$.

C'est par cette dernière méthode et en se restreignant l'espace d'états de Q_s à deux états que nous avons prouvé la proposition suivante. Les détails des calculs ne sont pas présentés ici, mais sont disponibles dans [59]. Dans l'état 1, le système est localement stable, et dans l'état 2 il est instable. Nous supposons de plus que les périodes de stabilité sont exponentiellement distribuées.

Proposition 6.3. *Quand ϵ tend vers 0,*

$$\mathbb{E}[S_e^{(\epsilon)}] \sim \frac{1}{\epsilon} K \frac{\pi_2 \mathbb{E}(T_2^2)}{2\lambda_e \mathbb{E}(T_2)}, \quad (6.4)$$

où

$$K = \frac{\mu_e(C_e(1) - C_e(2))(\lambda_e - \mu_e C_e(2))}{(\mu_e C_e(1) - \lambda_e) + \pi_2(\mu_e C_e(2) - \lambda_e)}.$$

Ce résultat suggère que le temps de réponse moyen des flots élastiques est effectivement proportionnel à la durée moyenne des durées des périodes d'instabilité locale (c'est-à-dire proportionnel à $1/\epsilon$).

6.4.3 En régime de forte charge

Il s'avère très difficile d'étendre l'analyse quasi-stationnaire à plus de deux états possibles pour le trafic temps-réel. Nous donnons ici une approximation de la performance lorsque la charge du système tend vers 1 : $\rho_e \rightarrow 1$. On trouvera une preuve complète de la proposition suivante dans [61].

Le résultat est en fait une conséquence du fait que le processus $\{Q_e(t/(1-\rho_e)^2)/(1-\rho_e), t \geq 0\}$ est proche en distribution d'un processus brownien réfléchi quand ρ_e tend vers 1.

Proposition 6.4. *Lorsque ρ_e tend vers 1,*

$$\mathbb{E}[R_e] \sim \frac{\lambda_e + \mu_e \overline{C_e} + \eta}{2\lambda_e(1-\rho_e)\mu_e \overline{C_e}}, \quad (6.5)$$

où η est donné par :

$$\eta = \sum_i \pi_i \frac{\text{Var}[T_i]}{\mathbb{E}[T_i]} \left(\mu_e C_e(i) - \mu_e \bar{C}_e \right)^2 + \sum_i \pi_i \mathbb{E}[T_i] \sum_j p_{ij} \left(a_j - \sum_k p_{ik} a_k \right)^2, \quad (6.6)$$

et où les réels a_i sont solutions du système linéaire : pour tout i ,

$$a_i - \sum_j p_{ij} a_j = \mu_e \left(C_e(i) - \bar{C}_e \right). \quad (6.7)$$

Une nouvelle fois, on peut observer que le temps de réponse moyen est proportionnel à la moyenne et au rapport variance/moyenne des durées des périodes d'instabilité locale.

6.5 Performance en cas de stabilité uniforme

Dans cette partie, nous supposons que le système est en régime de stabilité uniforme. Nous encadrons la performance par deux bornes stochastiques. Ces bornes ont la propriété d'insensibilité et s'avèrent donner un encadrement très précis. En pratique donc, la performance en régime de stabilité uniforme est presque insensible. L'insensibilité est prise ici par rapport aux caractéristiques des trafics temps-réel et élastique.

6.5.1 Borne supérieure - Régime fluide

La borne supérieure de la performance est obtenue en supposant que le trafic élastique est servi à vitesse constante, égale à la capacité moyenne disponible pour ce trafic \bar{C}_e . Physiquement, cela signifie que le trafic temps-réel s'apparente plus à un bruit qui évolue si rapidement que le trafic élastique ne perçoit pas les changements de capacité qui en résulte. Nous notons Q_e^a et S_e^a les nombres de flots élastiques et leur temps de réponse en régime fluide. Nous avons bien sûr :

$$\mathbb{E}[Q_e^a] = \frac{1}{1 - \rho_e},$$

$$\mathbb{E}[S_e^a] = \frac{1/\mu_e}{\bar{C}_e(1 - \rho_e)}.$$

6.5.2 Borne inférieure - Quasi-stationnarité

La borne inférieure de la performance est obtenue en faisant l'hypothèse de régime quasi-stationnaire déjà évoqué. Cette hypothèse signifie que Q_e évolue si rapidement par rapport à Q_s que lorsque ce dernier est dans l'état i , Q_e atteint un équilibre qui correspond à la file PS de capacité $C_e(i)$. Notons Q_e^{qs} et S_e^{qs} le nombre de flots élastique à l'état stationnaire et le temps de séjour de ces flots. On a :

$$\mathbb{E}[Q_e^{qs}] = \sum_i \frac{\rho_e(i) \pi_i}{1 - \rho_e(i)}, \quad (6.8)$$

$$E[S_e^{qs}] = \sum_i \frac{\rho_e(i)\pi_i}{\lambda_e(1-\rho_e(i))}, \quad (6.9)$$

$$E[S_e^{qs} | \sigma_e = \tau] = \tau \sum_i \frac{\pi_i}{C_e(i)(1-\rho_e(i))}. \quad (6.10)$$

L'objectif est de comparer les performances du système réel aux deux bornes décrites ci-dessus. Les résultats suivants sont prouvés dans le chapitre 4.

Théorème 6.1. *Soit W_e le workload de la file du trafic élastique à l'état stationnaire. Nous avons :*

$$W_e^a \leq_{icx} W_e \leq_{icx} W_e^{qs}. \quad (6.11)$$

Ce théorème n'est pas uniquement vrai pour des arrivées Poisson de flots, mais il est vrai pour tout processus d'arrivée. Il donne des bornes sur le travail de la file, mais pas directement sur sa performance. Comparer les temps de réponse paraît beaucoup plus difficile, mais on peut cependant le faire si les flots sont de tailles exponentiellement distribuées.

Théorème 6.2. *Lorsque les flots élastiques sont de tailles exponentiellement distribuées :*

$$Q_e^a \leq_{icx} Q_e \leq_{icx} Q_e^{qs}. \quad (6.12)$$

On en déduit en appliquant la formule de Little :

$$E(S_e^a) \leq E(S_e) \leq E(S_e^{qs}). \quad (6.13)$$

6.5.3 Optimalité des bornes fluide et quasi-stationnaire

Les bornes fluide et quasi-stationnaire sont en fait les meilleures bornes insensibles que nous pouvons obtenir, et ce du fait que ces deux régimes peuvent être vus comme des régimes limites du système réel. Définissons la vitesse du processus décrivant le trafic temps-réel par un paramètre ϵ : $Q^\epsilon = \{Q_e(t), Q_s(\epsilon t), t \geq 0\}$. On montre alors sous certaines hypothèses très générales que les régimes fluide et quasi-stationnaire sont les limites de Q^ϵ lorsque ϵ tend respectivement vers $+\infty$ et 0. Une démonstration de ce résultat a été donnée par R. Núñez Queija dans le cas où le système est entièrement markovien, c'est-à-dire quand le processus décrivant le trafic streaming est un processus de Markov à espace d'état fini et quand les flots élastiques sont de tailles i.i.d. exponentiellement distribuées [134]. Cette démonstration s'appuie sur une analyse spectrale du système. En fait, comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, des caractéristiques statistiques très générales du trafic peuvent être représentées par un simple processus de Markov. Nous faisons les hypothèses suivantes sur le trafic : pour le trafic temps-réel, on considère un modèle d'Erlang multidébit, c'est-à-dire que des appels de différents types définis par leur débit arrivent selon un processus de Poisson et sont de durées à phases. Un contrôle d'admission limite le nombre de ces appels. Ainsi, le trafic temps-réel peut être représenté par un processus de Markov (dont l'état contient le nombre d'appels de différents types et dans les différentes phases) et la capacité

disponible pour le trafic de données est une fonction de l'état de ce processus. Formellement, on note $i = 1, \dots, N$ les états possibles de ce processus et ϵQ son générateur. Pour le trafic de données, les flots arrivent selon un processus de Poisson et sont de tailles à phases. On a alors le résultat suivant dont nous donnons une preuve très simple ne nécessitant pas une analyse spectrale comme dans [134] :

Théorème 6.3. *Les régimes stationnaires de Q^ϵ convergent en loi vers les régimes stationnaires des systèmes fluide et quasi-stationnaire lorsque ϵ tend vers $+\infty$ et 0 respectivement. De plus, si f est une fonction croissante telle que $E[f(Q_e^{C_{\min}})] < +\infty$, où $Q_e^{C_{\min}}$ fait référence à une file PS de capacité $C_{\min} = \min\{C_e(i) : \pi_i > 0\}$, alors :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{matrix} \text{lim} \\ \text{(resp. } +\infty) \end{matrix} E[f(Q_e)] = E[f(Q_e^*)] \quad (\text{resp. } E[f(Q_e^{\#})]). \quad (6.14)$$

Preuve. Notons π^ϵ la distribution stationnaire de Q^ϵ . On montre dans un premier temps que si π^ϵ converge vers des limites π^0 et π^∞ , alors ces limites sont des mesures invariantes des régimes fluide et quasi-stationnaire. Cela se vérifie en considérant les équations de mesure invariante pour π^ϵ . Soit $y = (x_e, i)$ la variable qui décrit l'état du processus markovien Q^ϵ , x_e décrit le nombre de flots en cours dans chaque phase du temps de service et i décrit l'état du trafic temps-réel. Les équations de mesure invariante pour Q^ϵ s'écrivent :

$$\pi^\epsilon(x_e, i) \left(\epsilon \sum_{j=1}^N q_{ij} + \sum_{x'_e} q_{x_e x'_e}^\epsilon \right) = \epsilon \sum_{j=1}^N \pi^\epsilon(x_e, j) q_{ji} + \sum_{x'_e} \pi^\epsilon(x'_e, i) q_{x'_e x_e}^\epsilon. \quad (6.15)$$

Traisons d'abord le cas $\epsilon \rightarrow 0$. En supposant qu'une limite π^0 existe en $0+$, alors en faisant tendre ϵ vers 0 dans (6.15), lorsque l'état du trafic temps-réel est fixé à i , $\pi^0(\cdot, i)$ vérifie des équations de mesure invariante qui correspondent à la file PS de capacité constante c_i . π^0 est donc une mesure invariante du régime quasi-stationnaire.

Un raisonnement similaire permet de traiter le cas $\epsilon \rightarrow +\infty$. Il reste donc à montrer la convergence de mesures de probabilité π^ϵ . Cette dernière est assurée par la tension de ces mesures obtenues en remarquant par exemple [35] que la probabilité que le système de générateur Q^ϵ soit vide est supérieure à la probabilité que le système soit vide en supposant que la capacité disponible pour le trafic de données soit la plus petite des capacités lorsque le trafic temps-réel varie. Cette dernière probabilité est strictement positive par hypothèse. (6.14) est obtenu simplement par convergence dominée. \square

Remarque 6.2. *Dans ce cadre, on peut en fait même prouver que les régimes transitoires de Q^ϵ convergent vers ceux des régimes fluide et quasi-stationnaire. En effet, cette propriété s'obtient en utilisant des outils de perturbation et de perturbation singulière des processus de Markov, dont on trouvera dans l'ouvrage de Yin et Zhang une description exhaustive [187].*

6.5.4 Cas de stabilité uniforme - un exemple

Nous donnons ici un exemple où l'implémentaton d'un contrôle d'admission appliqué aux flots temps-réel permet de placer le système en régime de stabilité uniforme.

Considérons un lien de capacité C et supposons que l'on veuille garantir une certaine probabilité de blocage B_s pour les appels temps-réel. Ces appels de durée σ_s sont supposés de débit constant c_s et arrivent sur le lien selon un processus de Poisson d'intensité λ_s . La charge due au trafic temps-réel est donc $\rho_s = \lambda_s E[\sigma_s] c_s / C$. En appliquant la formule d'Erlang, nous savons le nombre N_s de circuits nécessaire pour garantir un blocage égal à B_s . La probabilité stationnaire d'avoir i appels en cours est donnée par $\pi_i = \Pr [Q_s = i] = \pi_0 \frac{(\lambda_s E[\sigma_s])^i}{i!}$, for $i = 0, \dots, N_s$.

Par conséquent, une capacité $C_e = (C - N_s c_s)^+$ est réservée au trafic élastique et les intensités de ce trafic compatibles avec le régime de stabilité uniforme ne peuvent excéder C_e . Ce qui revient à dire que la charge ρ_e ne peut dépasser $\rho_{s,u.} = C_e / \bar{C}_e$. La figure 6.1 trace les charges $\rho_{s,u.}$ compatibles avec la stabilité uniforme. La probabilité de blocage B_s est fixée à 2%. On note N_{\max} le nombre maximum d'appels temps-réel susceptibles d'être acceptés s'ils pouvaient occuper tout le lien. On remarque que lorsque N_{\max} est élevé (pour des liens de capacité relativement grande), $\rho_{s,u.}$ est proche de $1 - \rho_s$, la capacité moyenne disponible pour le trafic élastique, et le système est facilement en régime de stabilité uniforme. Cela est simplement dû au fait que la capacité utilisée par le trafic temps-réel est concentrée autour de sa moyenne. Pour cette raison, le trafic élastique ne peut pas tirer avantage des périodes de sous-charge du trafic temps-réel et l'intégration n'est pas très efficace. Lorsque N_{\max} est faible (pour des liens d'accès), il est plus hasardeux d'imposer la stabilité uniforme et la probabilité de blocage en même temps, car le trafic temps-réel est relativement plus variable. Mais dans ce cas, le trafic élastique profite d'avantage des périodes de sous-charge du trafic temps-réel.

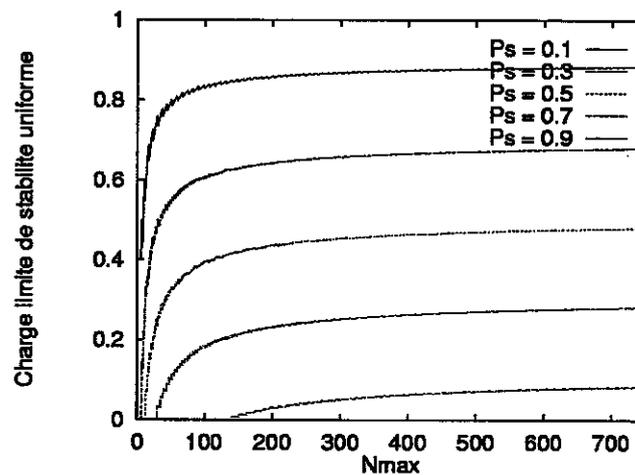


FIG. 6.1 – La charge limite du trafic élastique compatible avec le régime de stabilité uniforme. La charge élastique est ici normalisée par rapport à C .

6.5.5 Précisions des bornes - une mesure de la sensibilité

Nous savons que même en régime de stabilité uniforme, la performance dépend des paramètres statistiques des trafics. Nous pouvons grâce aux bornes stochastiques fluide et quasi-stationnaire évaluer cette sensibilité, car ces bornes sont insensibles. Nous nous intéressons au débit moyen des flots $\gamma_e \equiv \frac{E[\sigma_e]}{E[\delta_e]}$. Soit γ_e^{qs} et γ_e^f les débits en régimes quasi-stationnaire et fluide respectivement. La sensibilité est mesurée par la différence relative :

$$\Delta \equiv \frac{\gamma_e^f - \gamma_e^{qs}}{\gamma_e^f}$$

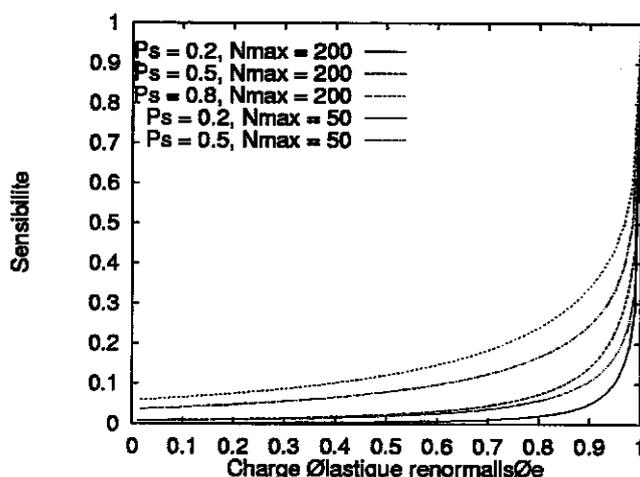


FIG. 6.2 – La sensibilité maximale Δ en fonction de la charge du trafic élastique. Cette charge est normalisée par rapport à $\rho_{s.u.}$.

nous calculons Δ sur l'exemple précédent, voir figure 6.2. On remarque qu'en stabilité uniforme, la performance est peu sensible si la proportion de trafic temps-réel n'est pas trop élevée et si N_{\max} n'est pas trop petit. Autrement dit, les bornes quasi-stationnaire et fluide sont précises.

6.5.6 Gain d'intégration

Supposons maintenant que l'on veuille garantir une certaine qualité de service aux deux types de trafic : une probabilité de blocage B_s pour le trafic temps-réel et un débit moyen γ_e pour les flots élastiques. Notons à nouveau N_s le nombre de circuits de capacité c_s nécessaires pour garantir un blocage de B_s et C_e la capacité qui est alors réservée au trafic élastique. Si l'on n'intègre pas les deux types de trafic, la charge du trafic élastique compatible avec la qualité de service désirée est définie par : $A_e^{ni} = (\lambda_e E[\sigma_e])^{ni} = C_e - \gamma_e$. Lorsque le trafic élastique peut utiliser la capacité non-utilisée par le trafic prioritaire, on ne peut calculer la charge limite A_e . Cependant, on sait que

$A_e^{qs} \leq A_e \leq A_e^a$, où A_e^{qs} et A_e^a correspondent respectivement aux régimes quasi-stationnaire et fluide :

$$\begin{cases} A_e^a = C_e + (N_s - E[Q_s])c_s - \gamma_e, \\ A_e^{qs} \text{ tel que } \gamma_e = \left(\sum_{i=0}^{N_s} \frac{\pi_i}{C_e + (N_{\max} - i)c_s - A_e^{qs}} \right)^{-1}. \end{cases}$$

On définit le gain d'intégration par

$$G \equiv \frac{A_e - A_e^{ni}}{A_e^{ni}}.$$

En appliquant les bornes sur A_e , on sait que ce gain est compris entre $\frac{A_e^a - A_e^{ni}}{A_e^{ni}}$ et $\frac{A_e^{qs} - A_e^{ni}}{A_e^{ni}}$.

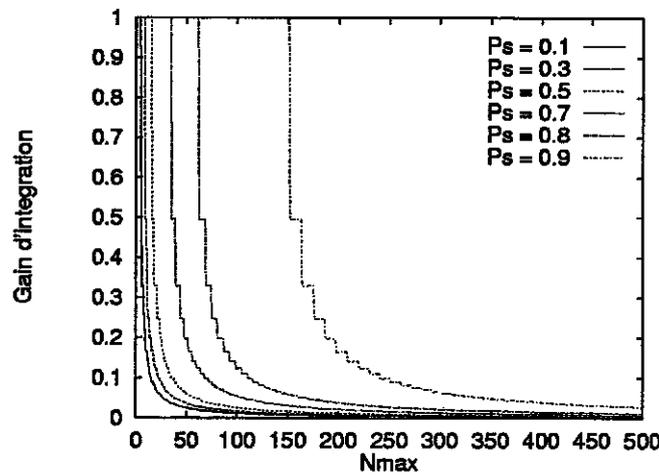


FIG. 6.3 – Gain d'intégration en fonction de la capacité - Objectif de débit moyen $\gamma_e = 50\text{ kbit/s}$ - $E[\sigma_s] = 3 \text{ min}$.

Dans la figure 6.3, on fixe la charge ρ_s du trafic temps-réel et on trace la borne inférieure du gain d'intégration en faisant varier la capacité du lien. Comme nous l'avons suggéré précédemment, l'intégration n'est efficace que pour des liens de petite capacité ou plutôt lorsque N_{\max} est petit.

6.5.7 Contrôle d'admission

Notons finalement que la notion de stabilité uniforme n'a de sens que si l'on contrôle la capacité disponible pour le trafic de données. Cela est réalisé en appliquant un contrôle d'admission sur le trafic temps-réel. Si l'intensité du trafic de données n'est pas bien estimée, il devient nécessaire d'ajuster dynamiquement le seuil d'admission des appels temps-réel. Une autre manière de garantir aux flots de données un débit moyen suffisant est d'appliquer également un contrôle d'admission à ces flots. On obtient alors un système où l'admission de tous les flots quelle que

soit leur nature est contrôlée ; on trouvera dans [17] une description d'un tel système et une étude analytique et expérimentale de sa performance.

6.6 Quelques simulations

Dans cette partie, nous illustrons les résultats théoriques dérivés dans ce chapitre. Considérons l'exemple utilisé dans la partie précédente. Nous choisissons un exemple où le trafic temps-réel n'est pas prédominant ($\rho_s = 0.25$) et où l'intégration est significative ($N_{\max} = 20$). La capacité du lien est fixée à $C = 1$ Mbit/s et on réserve $C_e = 500$ kbit/s pour le trafic élastique. Les flots élastiques sont de moyenne $E[\sigma_e] = 20$ koctets.

6.6.1 Impact de la moyenne des appels temps-réel

Dans la figure 6.4, on trace le débit moyen normalisé γ_e/C en fonction de la charge ρ_e . Les flots élastiques et temps-réel sont de tailles exponentiellement distribuées. Cette figure illustre le fait que la performance est presque insensible dans la région de stabilité uniforme. Au contraire, lorsque la charge dépasse $\rho_{s.u.}$, qui est ici égale à 0.67, le débit décroît très sensiblement quand on augmente la durée moyenne des appels temps-réel. On peut quantifier cette dégradation en calculant la pente asymptotique à forte charge : $\gamma_e \sim K(1 - \rho_e)$.

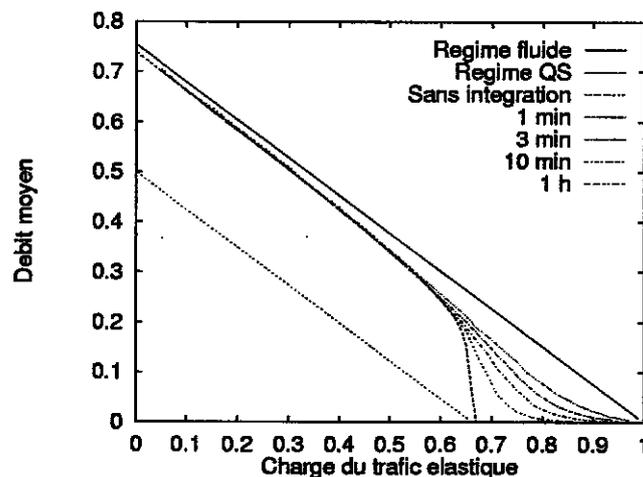


FIG. 6.4 – Impact of the mean duration of streaming flows.

$E[\sigma_s]$	30 sec	1 min	3 min	10 min	1 h
K	0.22	0.13	0.05	0.016	0.003

6.6.2 Impact de la variance de la durée des appels temps-réel

Dans la figure 6.5, on compare la performance des flots élastiques quand la durée des appels temps-réel devient de plus en plus variable. Pour ce faire, on utilise plusieurs distributions hyper-exponentielles définies par :

$$\forall x \geq 0, \Pr[\sigma > x] = \frac{ae^{-\frac{ax}{E[\sigma]}} + e^{-\frac{x}{aE[\sigma]}}}{a+1},$$

de variance $\text{Var}[\sigma] = (a + 1/a - 1)E[\sigma]^2$. Ces distributions donnent une fraction $a/(a + 1)$ d'appels courts de moyenne $E[\sigma]/a$ et une fraction $1/(a + 1)$ d'appels longs de moyenne $aE[\sigma]$. Lorsqu'on augmente a , la variance de σ augmente.

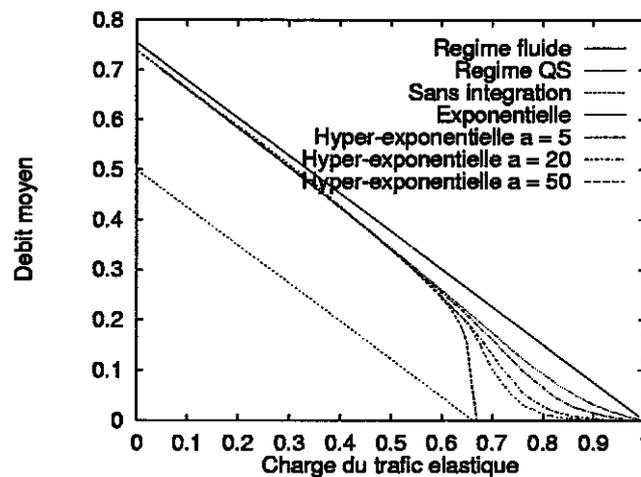


FIG. 6.5 – Impact de la variabilité des durées des appels temps-réel - $E[\sigma_s] = 30s$.

Nous confirmons ici que la performance est pratiquement insensible en stabilité uniforme et se détériore en régime d'instabilité locale lorsqu'on augmente la variance des durées des appels.

6.6.3 Impact de la nature statistique de la taille des flots

Enfin, nous présentons figure 6.6 une comparaison de la performance pour différents types de distributions pour la taille des flots élastiques. Une nouvelle fois, on remarque que le système est insensible en stabilité uniforme. En régime d'instabilité locale, la performance est améliorée lorsque la variabilité de la taille des flots augmente. Cela s'explique par la définition du débit moyen donnant un poids plus important aux grands flots. Pour ces derniers, le temps de réponse est proche du régime fluide car ces flots restent longtemps dans le système et *voit* donc à peu près la capacité moyenne laissée libre par le trafic temps-réel.

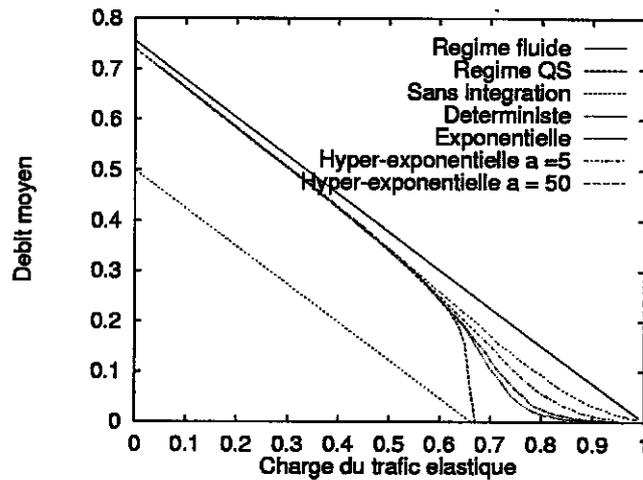


FIG. 6.6 – Impact de la distribution de la taille des flots élastiques - Appels temps-réel \sim exp. de moyenne $E[\sigma_s] = 3\text{min}$

6.7 Conclusions et perspectives

La comparaison stochastique de la performance du système d'intégration avec celles des régimes limites fluide et quasi-stationnaire permet de quantifier l'impact du trafic temps-réel. Ce dernier reste négligeable lorsque la proportion du trafic temps-réel est faible ou quand la capacité des liens considérés est très supérieure au débit crête des applications temps-réel.

Il reste à présent un certain nombre de problèmes à étudier. D'une part, il serait intéressant d'évaluer l'effet de la présence de limitations à l'accès sur les flots élastiques. On s'attend à ce que les régimes fluide et quasi-stationnaire se rapprochent, mais montrer que ces régimes sont des bornes du système réel devient plus difficile du fait de la dépendance entre la capacité disponible pour le trafic élastique et le nombre de flots en cours de transfert. D'autre part, on peut se poser la question de la généralisation des résultats dans le cas d'un réseau : on peut par exemple étudier la performance dans les réseaux PS à capacités variables et avec pour partage des ressources l'équité balancée.

Conclusion

En conclusion, nous présentons les principales contributions de la thèse, et mentionnons également les nombreux problèmes non-résolus ou ceux que nous n'avons pas abordés, mais qui constitueraient des perspectives de recherche intéressantes.

Dans le premier chapitre, nous posons les problèmes mathématiques liés à l'évaluation de la performance dans les réseaux de télécommunications, et ce du point de vue de l'utilisateur. Autrement dit pour le trafic de données par exemple, nous concentrons l'étude au niveau flot et oublions volontairement les phénomènes au niveau paquet, certes non dépourvus d'intérêt théoriques, mais insignifiant du point de vue de l'utilisateur. Ce chapitre est également l'occasion de proposer une vue *aérienne* de la recherche dans le domaine, énumérant ainsi les différents grands types de modélisation des réseaux de télécommunications.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de réseaux de files Processor Sharing dont les capacités dépendent de l'état du système. Ce type de réseau n'est plus vraiment étudié aujourd'hui, car on peut penser sans doute que tout a été dit sur le sujet dans les années 70 et les travaux de F. Kelly. Les principaux résultats figurant dans ce chapitre permettent de caractériser les réseaux de files PS qui possèdent certaines propriétés d'insensibilité (insensibilité aux caractéristiques des services requis, aux processus d'arrivée et aux changements d'échelles de temps). En particulier, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'insensibilité dans le cas de réseaux avec routage dépendant de l'état. Ce dernier résultat permet pour la première fois d'explicitier la performance de certains routages dynamiques (tous les routages dynamiques proposés jusque là étaient sensibles et ne pouvaient donc pas être évalués).

Cette propriété d'insensibilité aux caractéristiques détaillées du trafic est d'importance pour les opérateurs qui souhaitent dimensionner de manière robuste leurs réseaux, et ce dans un contexte où la nature du trafic généré par les utilisateurs peut évoluer avec l'apparition de nouveaux types d'application. Le chapitre 3 applique les résultats du chapitre qui le précède au cas de la modélisation de l'écoulement du trafic dans les réseaux de données au niveau flot. Les partages de ressources qui mènent à la propriété d'insensibilité sont étudiés, on montre notamment que les partages basés sur la notion d'utilité sont tous sensibles à l'exception de l'équité proportionnelle dans certains réseaux, les hypercubes homogènes. On identifie également la plus efficace des allocations insensibles, allocation que l'on nomme équité balancée (*balanced fairness* en anglais) et dont nous étudions les propriétés sur des exemples simples. Nous donnons également un exemple de routage dynamique insensible, dont la performance est une excellente approximation du meilleur des routages dynamiques sur cet exemple. Enfin, nous expliquons pourquoi la structure en session des

flots générés par les utilisateurs peut être à l'origine de la dépendance à long terme tant au niveau paquet qu'au niveau flot observée dans les réseaux IP. Ces travaux ouvrent des perspectives particulièrement intéressantes. Par exemple, une étude plus détaillée des routages dynamiques insensibles est souhaitable. Par ailleurs, si l'équité balancée semble être un excellent compromis entre robustesse, performance et équité, se pose la question de son implémentation : est-il possible d'approcher cette allocation à l'aide de protocole décentralisé (comme TCP) ? Enfin, nous avons vu que les allocations basées sur la notion d'utilité sont presque toutes sensibles. Mais est-il possible de quantifier cette sensibilité ? A l'aide de comparaisons stochastiques, nous avons pu majorer cette sensibilité sur certains réseaux. Néanmoins la plupart des questions sur ce sujet restent sans réponse.

Le chapitre 4 présente un certain nombre de résultats de comparaisons probabilistes de systèmes de files d'attente. Ce type de comparaisons se base sur la notion d'ordre stochastique, et de notre point de vue, doit avoir un avenir prometteur dans l'étude des réseaux de files d'attente. En effet, ces derniers exhibent le plus souvent des comportements qui dépendent de tous les paramètres de trafic, en bref qui sont sensibles. Il est alors intéressant de pouvoir comparer ces systèmes à d'autres dont la performance est insensible et donc bien connue. Il est souvent regrettable de voir fleurir dans la littérature une abondance d'articles sur tel ou tel système de files d'attente sous des hypothèses de trafic très précises ou d'autres s'attachant à fournir, faute de pouvoir par exemple donner la performance moyenne, des mesures asymptotiques de cette performance. Certes, cela permet de multiplier les études à l'infini, mais cela ne permet en rien de comprendre le fonctionnement réel de ces systèmes. Les principales contributions de ce chapitre concernent les files d'attente à capacité variable. On donne dans un premier temps des bornes insensibles de la performance de files de capacité globale variable. Ces résultats sont motivés par l'étude de l'impact d'un trafic prioritaire (par exemple temps-réel) sur la performance des réseaux de données. Nous étudions ensuite des bornes similaires lorsque la capacité vue par chacun des clients présents dans la file est variable, ce qui modélise par exemple la mobilité des utilisateurs dans un réseau radio, la qualité du canal des utilisateurs variant indépendamment selon leurs mouvements. Ces bornes permettent d'affirmer en un certain sens que la mobilité accroît la performance moyenne de chacun.

Nous consacrons le chapitre suivant à l'étude de la performance au niveau paquet des applications temps-réel dans les réseaux IP. Après avoir expliqué la complexité de ce problème, nous énonçons la conjecture mieux que Poisson/MTU, permettant de borner le délai des paquets à chaque lien par celui que subiraient ces paquets si le processus d'arrivée à ce lien était remplacé par un processus de Poisson de paquets de taille maximale MTU et générant une intensité de trafic identique au processus d'arrivée réel. Ces bornes s'avèrent assez réalistes, sauf pour des liens d'accès où garantir un faible délai devient problématique. Quelques arguments sont donnés pour justifier cette conjecture. Il n'en reste pas moins, comme nous l'avons précisé dans ce chapitre, que tout reste à faire dans l'évaluation de la performance des applications temps-réel.

Nous achevons la thèse par une étude de l'impact du trafic temps-réel sur la performance du trafic de données dans l'Internet. En supposant que le trafic temps-réel dispose d'une priorité sur le trafic élastique, la performance pour ce dernier est celle d'une file PS à capacité variable. Pour ce système, nous identifions deux régimes : le premier, nommé régime d'instabilité locale,

est obtenu quand la capacité laissée libre par le trafic prioritaire peut ne pas suffire à écouler la demande moyenne du trafic élastique et ce même si le système global est stable. Dans ce cas, nous montrons que la performance du trafic de données est très sensible aux caractéristiques de trafic et peut, à charge constante, devenir arbitrairement faible avec des caractéristiques de trafic bien choisies. Le second, nommé régime de stabilité uniforme, correspond au cas où la capacité laissée disponible par le trafic temps-réel suffit toujours à écouler la demande du trafic de données. On montre dans ce cas que la performance du trafic est très peu sensible, cette dernière étant comprise entre deux bornes insensibles très proches, obtenues par les limites fluide et quasi-stationnaire.

Liste des acronymes

AF	Assured Forwarding
ATM	Asynchronous Transfer Mode
BCMP	Baskett, Chandy, Muntz et Palacios
BF	Balanced Fairness
CBR	Constant Bit Rate
DFR	Decreasing Failure Rate
DLR	Decreasing Likelihood Ratio
DMRL	Decreasing Mean Residual Life
DNS	Domain Name System
EF	Expedited Forwarding
FB	Foreground Background
FTP	File Transfer Protocol
GPS	Generalized Processor Sharing
GSMP	Generalized Semi Markov Process
HTTP	Hypertext Transfer Protocol
IETF	Internet Engineering Task Force
IFR	Increasing Failure Rate
ILR	Increasing Likelihood Ratio
IMRL	Increasing Mean Residual Life
IP	Internet Protocol
LAN	Local Area Network
LAST	Least Attained Service Time
LIFO	Last In First Out
MPEG	Moving Picture Experts Group
MUSTA	Moving Units See Time Average
NBU	New Better than Used
NBUE	New Better than Used in Expectation
NNTP	Network News Transfer Protocol
NS	Network Simulator
OSI	Open System Interconnection
PASTA	Poisson Arrivals See Time Average
PGD	Principe de Grandes Déviations

PS	Processor Sharing
R-GSMP	Reallocated-Generalized Semi Markov Process
RFC	Request For Comment
RTT	Round Trip Time
SF	Store-and-Forward
SMTP	Simple Mail Transfer Protocol
SRTP	Shortest Remaining Processing Time
TCP	Transmission Control Protocol
TDMA	Time Division Multiple Access
UDP	User Datagram Protocol
UMTS	Universal Mobile Telecommunication System
WBU	Worse Better than Used
WBUE	Worse Better than Used in Expectation
WFQ	Weighted Fair Queueing

Bibliographie

- [1] E. Altman, C. Barakat, K. Avrachenkov, A stochastic model of TCP/IP with stationary random losses, dans : *proc. of ACM Sigcomm*, 2000.
- [2] E. Altman, D. Artiges, K. Traore, On the integration of best-effort and guaranteed performance services, *European Trans. on Telecommunications*, Special issue on Architectures, Protocols and Quality of Service for the Internet of the future, 2, Fev.-Mars 1999.
- [3] E. Altman, B. Gaujal, A. Hordjik, Multimodularity, Convexity and Optimization properties, *Mathematics of Operation Research*, 25(2) pp 324-347, 2000.
- [4] E. Altman, B. Gaujal, A. Hordjik, Admission control in stochastic events graphs, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(5) pp 854-867, 2000.
- [5] M. Andrews, B. Awerbuch, A. Fernandez, J. Kleinberg, T. Leighton, Z. Liu, Universal stability results for greedy contention resolution protocols, dans : *proc. of 37th Annual IEEE symposium of foundations of Computer Science (FOCS'96)*, Burlington VT, 1996.
- [6] A. Arvidsson, P. Karlsson, On traffic models for TCP/IP, dans P. Key, D. Smith : *Teletraffic Engineering in a Competitive World, Proceedings of ITC 16*, Elsevier, 1999.
- [7] S. Asmussen, A. Frey, T. Rolski, V. Schmidt, Does Markov-modulation increase the risk?, *Astin Bulletin*, (25-1) pp 49-66, 1995.
- [8] F. Baccelli, P. Brémaud, *Palm probability and stationary queues*, Lectures notes in Statistics, 41, Springer, 1987.
- [9] F. Baccelli, P. Brémaud. *Elements of Queuing Theory*, Springer Verlag, 2002.
- [10] F. Baccelli, D. Hong, AIMD, fairness and fractal scaling of TCP traffic, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2002.
- [11] F. Baccelli, D. Hong, Interaction of TCP flows as billiards, *soumis*.
- [12] N. Bansal, M. Harchol-Balter, Analysis of SRPT scheduling : Investigated unfairness, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 2001.
- [13] A.D. Barbour, F. Kelly, *Communication personnelle*.
- [14] A.D. Barbour, Generalized semi-Markov schemes and open queueing networks, *Journal of Applied Probability*, 19 pp 469-474, 1982.
- [15] P. Barford, M. Crovella, Generating representative web workloads for Network and server performance Evaluation, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 1998.

-
- [16] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, F.G. Palacios, Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 22 pp 248–260, 1975.
 - [17] N. Benameur, S. Ben Fredj, S. Boulahia, F. Delcoigne, J. Roberts, Integrated admission control for streaming and elastic traffic, dans : *proc. of QofIS*, 2001.
 - [18] S. Ben Fredj, T. Bonald, A. Proutière, G. Regnié, J.W. Roberts, Statistical bandwidth sharing : a study of congestion at flow level, dans : *proc. of ACM Sigcomm*, 2001.
 - [19] J.C. Bennet, K. Benson, A. Charny, W.F. Courtney, J.Y. Le Boudec, Delay Jitter Bounds and Packet Scale Rate Guarantee for Expedited Forwarding, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2001.
 - [20] D. Bertsekas, R. Gallager, *Data Networks*, Prentice Hall, 1987.
 - [21] S. Blake et al., An architecture for differentiated services, *RFC 2475*, 1998.
 - [22] V.A. Bolotin, Modelling call holding time distributions for CCS network design and performance analysis, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, (12-13), avril 1994.
 - [23] T. Bonald, A. Proutière, Insensitive bandwidth sharing, dans : *proc. of IEEE Globecom*, Taipei, 2002.
 - [24] T. Bonald, A. Proutière, Insensitivity in processor sharing networks, *Performance Evaluation*, 49 pp 193-210, 2002.
 - [25] T. Bonald, A. Proutière, Insensitive bandwidth sharing in data networks, *Queueing Systems*, 44(1) pp 69-100, 2003.
 - [26] T. Bonald, A. Proutière, On performance bounds for balanced fairness, *Performance Evaluation* 55 pp 25-50, 2004.
 - [27] T. Bonald, A. Proutière, J. Roberts, Statistical performance guarantees for streaming flows using expedited forwarding, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2001.
 - [28] T. Bonald, L. Massoulié, Impact of Fairness on Internet Performance, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 2001.
 - [29] T. Bonald, A. Proutière, G. Régnier, J.W. Roberts, Insensitivity results in statistical bandwidth sharing, dans : *proc. of ITC 17*, 2001.
 - [30] T. Bonald, J. Roberts, Performance of Bandwidth Sharing Mechanisms for Service Differentiation in the Internet, dans : *proc. of ITC specialist seminar*, Monterey, 2000.
 - [31] T. Bonald, J. Roberts, Performance modelling of elastic traffic in overload, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 2001.
 - [32] T. Bonald, A. Proutière, J. Roberts, J. Virtamo, Computational aspects of balanced fairness, dans : *proc. of ITC 18*, 2003.
 - [33] T. Bonald, A. Proutière, Wireless downlink data channels : User performance and cell dimensioning, dans : *proc. of ACM Mobicom*, 2003.
 - [34] T. Bonald, S. Borst, A. Proutière, The impact of Slow Fading on Wireless Flow-level Performance, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2004.
 - [35] A.A. Borovkov, *Ergodicity and stability of stochastic processes*, Wiley and Sons, 1998.

-
- [36] S. Borst, R. Núñez, M. van Uitert, User-level performance of elastic traffic in a differentiated-services environment, *Performance Evaluation*, 49 pp 507-520, 2002.
- [37] O.J. Boxma, I.A. Kurkova, The M/G/1 queue with two service speeds, *Advances in Applied Probability*, 2001.
- [38] O.J. Boxma, I.A. Kurkova, The M/M/1 queue in heavy-tailed random environment, *Statistica Neerlandica*, 54 pp 221-236, 2000.
- [39] F. Brichet, L. Massoulié, J. Roberts. Stochastic ordering and the notion of negligible CDV, dans : *proc. of ITC 15*, 1997.
- [40] T. Bu, D. Towsley, Fixed point approximations for TCP behavior in an AQM network, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 2002.
- [41] D. Burman, Insensitivity in queueing systems, *Advances in Applied Probability*, 13 pp 846-859, 1981.
- [42] N. Bäuerle, Monotonicity results for MR/GI/1 queues, *Journal of Applied Probability*, 34 pp 514-524, 1997.
- [43] N. Bäuerle, T. Rolski, A monotonicity results for the workload in Markov-modulated queues, *Journal of Applied Probability*, 35 pp 741-747, 1998.
- [44] C.S. Chang, Comparison theorems for queueing systems and their applications to ISDN, thèse de doctorat, Département d'Ingénierie et d'Electronique de l'université de Columbia, New York, 1989.
- [45] C.S. Chang, *A filtering theory for Communication Networks*, Springer Verlag, 1999.
- [46] C.S. Chang, Smoothing point processes as a means to increase throughput, *Operations research*, 43(1) pp 117-129, 1995.
- [47] C.S. Chang, M. Pinedo, Bounds and inequalities for single server loss systems, *Queueing Systems and Applications*, 6 pp 425-436, 1990.
- [48] C.S. Chang, X. Chao, M. Pinedo, Monotonicity results for queues with doubly stochastic Poisson arrivals : Ross's conjecture, *Advances in Applied Probability*, 23 pp 210-228, 1991.
- [49] X. Chao, M. Miyazawa, R. Serfozo, H. Takada, Markov network with product form stationary distributions, *Queueing Systems*, 28 pp 377-401, 1998.
- [50] A. Charny, J-Y. Le Boudec, Delay bounds in a network with aggregate scheduling. dans : *proc. of QoSIS*, Berlin, 2000.
- [51] I. Chlamtac, A. Faragó, H. Zhang, A. Fumagalli, A deterministic approach to the end-to-end analysis of packet flows in connection oriented networks, *IEEE ACM transactions on networking*, 6(4) pp 442-431, 1998.
- [52] G.L. Choudhury, A. Mandelbaum, M.I. Reiman, W. Whitt, Fluid and diffusion limits for queues in slowly changing environments, *Stochastic Models*, 13 pp 121-146, 1997.
- [53] E.G. Coffman, P.J. Denning, *Operating Systems Theory*, Prentice-Hall, 1973.
- [54] J. W. Cohen, The multiple phase service network with generalized processor sharing, *Acta Informatica*, 12 pp 245-284, 1979.

- [55] R.B. Cooper, *Introduction to Queueing theory*, Seconde édition, Elsevier (North-Holland), 1981.
- [56] D.R. Cox, V. Isham, *Point processes*, Chapman and Hall, New York, 1980.
- [57] M. Crovella, A. Bestavros, Self-similarity in World Wide Web traffic : Evidence and possible cause, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 1996.
- [58] R.L. Cruz, Quality of service guarantees in virtual circuit switched networks, *IEEE JSAC*, pp 1048-1056, August 1995.
- [59] F. Delcoigne, Modélisation de l'intégration et de certains réseaux best-effort, rapport de recherche FT R& D, sept. 2001.
- [60] F. Delcoigne, A. Proutière, G. Régnié, Modelling the integration of streaming and data traffic, dans : *proc. of ITC specialist seminar on IP traffic*, Würzburg, 2002.
- [61] F. Delcoigne, A. Proutière, G. Régnié, Integration of streaming and data traffic, *Performance Evaluation*, 55 pp 185-209, 2004.
- [62] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones & Barlett, Boston, 1992.
- [63] G. De Veciana, T.J. Lee, T. Konstantopoulos, Stability and performance analysis of networks supporting services with rate control - Could the Internet be unstable ?, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 1999.
- [64] N.G. Duffield, N. O'Connell, Large Deviations and overflow probabilities for the general single server queue with applications, *Proc.Camb. Phil. Soc.*, 188, 1995.
- [65] G. Fayolle, A. de la Fortelle, J-M. Lasgouttes, L. Massoulié, J.W. Roberts, Best-effort networks : modeling and performance analysis via large networks asymptotics, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2001.
- [66] A. Feldman, Characteristics of TCP connection arrivals, In K. Park, W. Willinger (eds), *Self-similar network traffic and performance evaluation*, Wiley, 2000.
- [67] A. Feldman, A.C. Gilbert, W. Willinger, T.G. Kurtz, The changing nature of network traffic : scaling phenomena, *Computer communication review*, April 1998.
- [68] A. Feldman, A.C. Gilbert, P. Huang, W. Willinger. Dynamics of IP traffic : A study of the role of variability and the impact of control. dans : *proc. of ACM Sigcomm*, 1999.
- [69] S. Floyd, Connections with multiple congested gateways in packet-switched networks part I : One-way traffic, *ACM Computer Communications Review*, oct. 1991.
- [70] P. Franken, D. König, U. Arndt, V. Schmidt, *Queues and point processes*, Wiley, 1982.
- [71] R. Gaeta, M. Gribaudo, D. Manini, M. Sereno, Fixed point approximation of TCP flows in networks of routers implementing heterogeneous queue management policies, dans : *proc. of IEEE Globecom*, 2002.
- [72] J. Galambos, The asymptotic theory of extreme order statistics, *John Wiley & Sons*, 1978.
- [73] D.P. Gaver, A waiting line with interrupted service, including priorities, *Journal of the Royal Statistical Society*, 24 pp 73-90, 1962.

-
- [74] E. Gelenbe, Product-form queueing networks with negative and positive customers, *Journal of Applied Probability*, 28 pp 656-663, 1991.
- [75] R. Gibbens, F. Kelly, P. Key, A decision theoretic approach to call admission control in ATM networks. *IEEE JSAC*, 13(6) pp 1101-1114, August 1995.
- [76] P. Goyal, A. Greenberg, C. Kalmanek, W. Marshall, P. Mishra, D. Nortz, K. Ramakrishnan, Integration of call signaling and resource management for IP telephony, *IEEE Network*, pp 24-32, May/June 1999.
- [77] M. Grossglauser, S. Keshav, On CBR service, dans : *proc. of Infocom*, pp 129-137, 1996.
- [78] R. Guérin, V. Pla, Aggregation and Conformance in Differentiated Service Networks : A Case Study, *ITC Seminar on IP Traffic*, Monterey, September 2000.
- [79] F. Guillemin, N. Likhanov, R. Mazumdar, C. Rosenberg, Extremal traffic and bounds for the mean delay of multiplexed regulated traffic streams, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2002.
- [80] F. Guillemin, N. Likhanov, R. Mazumdar, C. Rosenberg, Buffer overflow bounds for multiplexed regulated traffic streams, dans : *proc. of ITC 18*, 2003.
- [81] M. Harchol-Balter, D. Wolfe, Bounding Delays in Packet-Routing Networks, *Stochastic Processes*, 1995.
- [82] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
- [83] W. Henderson, Insensitivity and reversed Markov processes, *Advances in Applied Probability*, 15 pp 752-768, 1983.
- [84] T. Hirayama, M. Kijima, An extremal property of FIFO discipline in G/IFR/1 queues, *Advances in Applied Probability*, 21 pp 481-484, 1989.
- [85] T. Hirayama, M. Kijima, S. Nishimura, Further results for dynamic scheduling of multiclass G/G/1 queues, *Journal of Applied Probability*, 26 pp 595-603, 1989.
- [86] T. Hu, X. Pan, Comparisons of dependence for stationary Markov processes, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 14 pp 299-315, 2000.
- [87] J.R. Jackson, Networks of waiting lines, *Operations Research*, 5 pp 518-521, 1957.
- [88] V. Jacobson, Congestion avoidance and control, dans : *proc. of ACM Sigcomm*, 1988.
- [89] V. Jacobson, K. Nichols, K. Poduri, An Expedited Forwarding PHB, *RFC 2598*, Juin 1999.
- [90] S. Johansen, The extremal convex functions, *Math. Scand.*, 34 pp 61-68, 1974.
- [91] R. Johari, D. Tan, Congestion Control for the Internet : Delays and Stability, *IEEE Transactions on Networking*, 9 pp 818-832, 2001.
- [92] F. Kelly, Networks of queues with customers of different types, *Journal of Applied Probability*, 12 pp 542-554, 1975.
- [93] F. Kelly, *Reversibility and Stochastic Networks*, Wiley, 1979.
- [94] F. Kelly, A. Maulloo and D. Tan, Rate control for communication networks : Shadow prices, proportional fairness and stability, *Journal of the Operational Research Society*, 49, 1998.

- [95] F. Kelly, Mathematical modelling of the Internet, *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, editors B. Engquist, W. Schmid, Springer-Verlag, pp 685-702, 2001.
- [96] F. Kelly, P. Key, Dimensioning Playout Buffers from an ATM network, *Institution of Electrical Engineers*, 1994.
- [97] G. Kesidis, T. Konstantopoulos, Extremal traffic and worst-case performance for queues with shaped arrivals, dans : *Analysis of communication networks : call centers, traffic and performance*, Amer. Math. Soc., pp 159-178, 2000.
- [98] G. Kesidis, T. Konstantopoulos, Worst case performance of a buffer with independent shaped arrival processes, *IEEE Communication Letters*, 4(1) pp 26-28, 2000.
- [99] A.A. Kherani, A. Kumar, Stochastic models for throughput analysis of randomly arriving elastic flows in the Internet, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2002.
- [100] M.Y. Kitayev, S.F. Yashkov, Distribution of the conditional sojourn time in a system with division of time of servicing, *Engrg. Cybernetics*, 16 pp 162-167, 1978.
- [101] M.Y. Kitayev, S.F. Yashkov, Analysis of a single-channel queuing system with the discipline of uniform sharing of a device, *Engrg. Cybernetics*, 17(6) pp 42-49, 1979.
- [102] M.Y. Kitayev, The M/G/1 processor sharing model :transient behavior, *Queueing Systems*, 14 pp 239-273, 1993.
- [103] L. Kleinrock. Queueing Systems, volume 2, Computer Applications. *John Wiley & Sons*, 1975.
- [104] G. Klutke, P. Kiessler, R. Disney, Interoutput times in processor sharing queues with feedback, *Queueing Systems*, 3 pp 363-376, 1988.
- [105] R. Kulik, Dependence properties associated with dependence orderings for stochastic models based on point processes, Thèse de doctorat, Université de Wrocław, 2002.
- [106] S. Kunniyur, R. Srikant, End-to-end congestion control schemes : Utility functions, random losses and ECN marks, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2000.
- [107] D. König, U. Jansen, Stochastic processes and properties of invariance for queuing system with speeds and temporary interruptions, dans : *proc. of the 7th Prague Conf. Information Theory*, pp 335-343, 1974.
- [108] R.J. La, V. Anantharam, Charge-sensitive TCP and rate control in the Internet, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2000.
- [109] T.V. Lakshman, U. Madhow, The performance of TCP/IP for networks with high bandwidth-delay products and random loss, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, juin 1997.
- [110] J.-Y. Le Boudec. Applications of network calculus to guaranteed service networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44 pp 1087-1096, Mai 1998.
- [111] W. Leland, W. Willinger, M. Taqqu, D. Wilson, On the self-similar nature of Ethernet traffic, *IEEE/ACM Trans. on Networking*, Février 1994.

-
- [112] G.G. Lorentz, An inequality for rearrangement, *Amer. Math. Monthly*, 60 pp 176-179, 1953.
- [113] A.W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities : theory of majorization and its applications*, New-York : Academic Press, 1979.
- [114] L. Massoulié, J.W. Roberts, Bandwidth sharing : objectives and algorithms, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 1999.
- [115] L. Massoulié, J.W. Roberts, Bandwidth sharing and admission control for elastic traffic, *Telecommunication Systems*, 15 pp 185-201, 2000.
- [116] L. Massoulié, Large Deviations Ordering of Point Processes in some Queuing Networks, *Queuing Systems*, 28(4) pp317-335, 1998.
- [117] L. Massoulié, Stability of distributed congestion control with heterogeneous feedback delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(6) pp 895-902, 2002.
- [118] L. Massoulié, A. Busson, Stochastic majorization of aggregates of leaky-bucket constrained traffic streams, Preprint, Microsoft Research, Cambridge, 2000.
- [119] M. Mathis, J. Semke, J. Mahdavi, T. Ott, The macroscopic behavior of the TCP congestion avoidance algorithm, *ACM Computer Communication review*, Juillet 1997.
- [120] W. Matragi, K. Sohraby and C. Bidiskian. Jitter calculus in ATM networks, Multiple nodes. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 5(1) pp 122-133, Fevrier 1997.
- [121] K. Matthes, Zur Theorie der Bedienungsprozesse, dans : *proc. of the 3rd Prague Conf. on Information Theor. Statist. Decision Functions, Random processes*, 1962.
- [122] S. McCreary, K.C. Claffy, Trends in Wide Area IP Traffic Patterns, Tech. Rep. CAIDA, Février 2000.
- [123] I. Mitrani, B. Avi-Itzhak, A many server queue with service interruptions, *Operations Research*, 16 pp 628-638, 1968
- [124] M. Miyazawa, Comparison of the loss probability of the $GI^X/GI/1/k$ queues with a common traffic intensity, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 32 pp 505-516, 1989.
- [125] M. Miyazawa, Complementary generating functions for the $M^X/G/1/k$ and $GI/M^Y/1/k$ queues and their application to the comparison of loss probabilities, *Journal of Applied Probability*, 27 pp 684-692, 1990.
- [126] M. Miyazawa, Insensitivity and product-form decomposability of reallocatable GSMP, *Advances in Applied Probability*, 25 pp 415-437, 1993.
- [127] M. Miyazawa, R. schassberger, V. Schmidt, On the structure of an insensitive generalized semi-Markov process with reallocation and with point-process input, *Advanced in Applied Probability*, 27 pp 203-225, 1995.
- [128] M. Miyazawa, H. Takada, Traffic flows and product form solutions in stochastic transfer networks, *Queuing Systems*, 37 pp 199-232, 2001.
- [129] N. Miyoshi, T. Rolski, Ross type conjectures on monotonicity of queues, *article soumis*, 2003.

- [130] J. Mo, J. Walrand, Fair end-to-end window-based congestion control, *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 8(5) pp 556-567, 2000.
- [131] A. Müller, D. Stoyan, *Comparison methods for stochastic models and risks*, Wiley, 2002.
- [132] P. Nain, R. Núñez Queija, An M/M/1 queue in semi-Markovian environment, dans : *proc. of ACM Sigmetrics*, 2001.
- [133] C.J. Nuzman, I. Saniee, W. Sweldens, A. Weiss, A compound model of TCP arrivals, dans : *proc. of ITC Seminar on IP Traffic Modeling*, Monterey, 2000.
- [134] R. Núñez Queija, Processor Sharing Models for Integrated Services Networks, Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology, 1999.
- [135] R. Núñez Queija, Sojourn Times in a processor sharing queue with service interruptions, *Queueing Systems*, 34(1) pp 351-386, 2000.
- [136] S. Oueslati, E. Oubagha, An approach to elastic flow routing, dans : *proc. of ITC 16*, 1999.
- [137] J. Padhye, V. Firoiu, D. Towley, J. Kurose, Modeling TCP throughput : A simple model and its empirical validation, dans : *proc. of ACM Sigcomm*, 1998.
- [138] A.K. Parekh, R.G. Gallager, A generalized processor sharing approach to flow control in integrated services networks : the single node case, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1 pp 344-357, 1993.
- [139] A.K. Parekh, R.G. Gallager, A generalized processor sharing approach to flow control in integrated services networks : the multiple node case, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2 pp 137-150, 1994.
- [140] K. Park, W. Willinger, *Self-similar network traffic and performance evaluation*, John Wiley & Son, 2000.
- [141] V. Paxson, S. Floyd. Wide-area traffic : The failure of Poisson modeling, *IEEE/ACM Trans. Networking*, 3(3) pp 226-255, 1995.
- [142] LA. Rai, G. Urvoy-Keller, E.W. Biersack, Size-based scheduling with differentiated services to improve response time of highly varying flow-sizes, dans : *proc. of 15th ITC specialist seminar on IP traffic*, Würzburg, 2002.
- [143] J. Rawls, *A theory of justice*, Belknap (nouvelle édition), 1999.
- [144] G. Régnié, Ecoulement du trafic et intégration de services dans l'Internet, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2002.
- [145] A. Renyi, *Foundations of probability theory*, Holden-day, San Francisco, 1970.
- [146] R. Righter, J.G. Shantikumar, Scheduling in multiclass single server queueing systems to stochastically maximize the number of successful departures, *Prob. Eng. Inf. Sciences*, 3 pp 323-334, 1989.
- [147] R. Righter, J.G. Shantikumar, G. Yamazaki, On extremal service disciplines in single-stage queueing systems, *Journal of Applied Probability*, 27 pp 409-416, 1990.
- [148] R. Righter, J.G. Shantikumar, Extremal properties of the FIFO discipline in queueing networks, *Journal of Applied Probability*, 29 pp 967-978, 1992.

-
- [149] J.W. Roberts, L. Massoulié. Bandwidth sharing and admission control for elastic traffic. In : *proc. of ITC Specialist Seminar*, Yokohama, 1998.
- [150] J. Roberts, U. Mocci, J. Virtamo (Eds), *Broadband Network Teletraffic (Final Report of COST 242)*, LNCS 1155, Springer Verlag, 1996.
- [151] T. Rolski, Queues with non-stationary input stream : Ross's conjecture, *Advances of Applied Probability*, 13 pp 603-618, 1981.
- [152] T. Rolski, Upper bounds for single server queues with double stochastic Poisson arrivals, *Mathematics of Operations Research*, 11(3) pp 442-450, 1986.
- [153] T. Rolski, Queues with non-stationary inputs, *Queueing Systems*, 5 pp 113-130, 1989.
- [154] T. Rolski, D. Stoyan, On the comparison of waiting times in GI/G/1 queues, *Operations Research*, 24 pp 197-200, 1976.
- [155] S.M Ross, Average delay in queues with non-stationary Poisson arrivals, *Journal of Applied Probability*, 15 pp 602-609, 1978.
- [156] J. Sahni, P. Goyal, and H. M. Vin. Scheduling CBR flows : FIFO or per-flow queuing ?, dans : *proc. of NOSS-DAV99*, AT&T Learning Center, Basking Ridge, NJ, Juin 1999.
- [157] R. Schassberger, Insensitivity of the steady-state distribution of generalized semi-Markov processes, part I, *Annals of Probability*, 5 pp 87-99, 1977.
- [158] R. Schassberger, Insensitivity of the steady-state distribution of generalized semi-Markov processes, part II, *Annals of Probability*, 6 pp 85-93, 1977.
- [159] R. Schassberger, Insensitivity of steady-state distributions of generalized semi-markov processes with speeds, *Advances in Applied Probability*, 10 pp 836-851, 1978.
- [160] R. Schassberger, Two remarks on insensitive stochastic models, *Advances in Applied Probability*, 18 pp 791-814, 1986.
- [161] L.E. Schrage, A proof of the optimality of the shortest remaining processing time discipline, *Operational research*, 16 pp 678-690, 1968.
- [162] L.E. Schrage, L.W. Miller, The queue M/G/1 with the shortest remaining processing time discipline, *Operational research*, 14 pp 670-684, 1966.
- [163] R.F. Serfozo, *Introduction to stochastic networks*, Springer Verlag, 1999.
- [164] R.F. Serfozo, Markovian network processes : congestion-dependent routing and processing, *Queueing Systems*, 5 pp 5-36, 1989.
- [165] R.F. Serfozo, Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements, *Queueing Systems*, 13 pp 143-182, 1993.
- [166] M. Shaked, J.G. Shanthikumar, *Stochastic orders and their applications*, Boston Academic press, 1994.
- [167] J.G. Shantikumar, U. Sumita, Convex ordering of sojourn times in single-server queues : extremal properties of FIFO and LIFO service disciplines, *Journal of Applied Probability*, 24 pp 737-748, 1987.

-
- [168] S. Shenker, Fundamental design issues for the future Internet, *IEEE Journal Selected Areas Communication*, 13 pp 1176-1188, 1995.
- [169] W.R. Stevens, *TCP/IP Illustrated*, Addison-Wesley, 1994.
- [170] V. Strassen, The existence of Probability measures with given Marginals, *Ann. Math. Statist.*, 36 pp 423-439, 1965.
- [171] R. Szekli, *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*, Springer Verlag, 1995.
- [172] A. Tchen, Inequalities for distributions with given marginals, *Annals of Probability*, 8 pp 814-827, 1980.
- [173] G. Vinnicombe, On the stability of networks operating TCP-like congestion control, *IFAC*, 2002.
- [174] M. Vojnovic, J.-Y. Le Boudec, C. Boutremans, Global fairness of additive-increase and multiplicative-decrease with heterogeneous round-trip times, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2000.
- [175] M. Vojnovic, J.-Y. Le Boudec, stochastic analysis of some Expedited Forwarding networks, dans : *proc. of IEEE Infocom*, 2002.
- [176] H. White, L.S. Christie, Queueing with preemptive priorities or with breakdown, *Operations Research*, 6 pp 79-95, 1958.
- [177] W. Whitt, Continuity of generalized semi-Markov processes, *Math. Oper. Research*, 5 pp 494-501, 1980.
- [178] W. Whitt, Minimizing delays in the GI/G/1 queue, *Operations Research*, 32 pp 41-51, 1984.
- [179] P. Whittle, Equilibrium distributions for an open migration process, *Journal of Applied Probability*, 5 pp 567-571, 1968.
- [180] P. Whittle, Partial balance and Insensitivity, *Journal of Applied Probability*, 22 pp 168-176, 1985.
- [181] W. Willinger, V. Paxson, Where Mathematics meets the Internet, *Notices of the American Mathematical Society*, 45(8) pp 961-970, Août 1998.
- [182] R.W. Wolff, Work conserving priorities, *Journal of Applied Probability*, 7 pp 327-337, 1970.
- [183] R.W. Wolff, The effect of service time regularity on system performance, dans : *Computer Performance*, K.M. Chandy, M. Reiser, North-Holland, pp 297-304, 1977.
- [184] S.F. Yashkov, Processor sharing queues : some progress in analysis, *Queueing Systems*, 2 pp 1-17, 1987.
- [185] H-Q. Ye, Stability of a bandwidth allocation model for TCP Internet, article soumis.
- [186] H-Q. Ye, J. Ou, X-M. Yuan, Stability of Data Networks : Stationarity and Bursty Models, article soumis.

- [187] G.G. Yin, Q. Zhang, *Continuous-Time Markov Chains and Applications : A singular perturbation approach*, Springer-Verlag, 1998.
- [188] ITU Recommendation E.736. Methods for cell level traffic control in B-ISDN. ITU, Geneva, 2000.

