



HAL
open science

Analyse par homogénéisation élastoplastique des ouvrages en milieux rocheux fracturés

Ano Atta

► **To cite this version:**

Ano Atta. Analyse par homogénéisation élastoplastique des ouvrages en milieux rocheux fracturés. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. Français. NNT : 2004ENPC0007 . pastel-00000822

HAL Id: pastel-00000822

<https://pastel.hal.science/pastel-00000822>

Submitted on 10 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
Spécialités : Structures et Matériaux

par

Ano ATTA

Sujet de la thèse :

**Analyse par homogénéisation élastoplastique
des ouvrages en milieux rocheux fracturés**

soutenue à Champs-sur-Marne le 10 Mai 2004

devant le jury composé de :

R. Frank	<i>Président</i>
A. Giraud	<i>Rapporteur</i>
L. Siad	<i>Rapporteur</i>
D. Kondo	<i>Examineur</i>
A. Morel	<i>Invité</i>
D. Garnier	<i>Examineur</i>
S. Maghous	<i>Directeur de thèse</i>

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier Monsieur Roger Frank, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs Albert Giraud et Larbi Siad qui ont accepté la très fastidieuse tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Je voudrais également remercier Monsieur André Morel qui a favorablement répondu à mon invitation malgré ses responsabilités quotidiennes à l'École Spéciale des Travaux Publics.

Je souhaite également exprimer mon infinie reconnaissance à Samir Maghous et à Denis Garnier qui m'ont encadré durant tout ce travail. J'ai énormément bénéficié de leur connaissances et de leur rigueur scientifiques et pédagogiques pour aborder certaines difficultés rencontrées au cours de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs Djimédo Kondo, Luc Dormieux et Patrick de Buhan, directeur du CERMMO.

Je ne saurais arrêter cette liste de remerciements sans une pensée à tous mes collègues doctorants qui d'une façon ou d'une autre m'ont encouragé dans la préparation de cette thèse.

Mes dernières pensées vont à ma famille qui a pu endurer ces longues années de séparation.

TABLES DES MATIERES

Intoduction	4
Chapitre 1 : Modélisation mécanique des massifs rocheux fracturés	8
1. Matrice rocheuse	10
2. Joints	15
3. Comportement du massif rocheux	24
4. Méthodes de calcul des ouvrages en milieux rocheux fracturés	28
Chapitre 2 : Formulation du comportement homogénéisé en élastoplasticité	34
1. Echelle et hypothèses de la modélisation	36
2. Critère de résistance macroscopique du milieu à joints	37
3. Elasticité macroscopique du milieu à joints	45
4. Comportement élastoplastique homogénéisé du milieu rocheux fracturé	52
Chapitre 3 : Etude analytique de la convergence d'une galerie souterraine	60
1. Définition du cadre académique pour la résolution analytique	62
2. Résolution	64
3. Commentaires	84
Chapitre 4 : Un outil pour l'analyse par éléments finis des ouvrages en roches fracturées	86
1. Introduction	88

2. Méthode des éléments finis pour le milieu homogénéisé	89
3. Démarche de résolution	94
4. Validation de l'outil numérique	101
Chapitre 5 : Mise en œuvre de l'outil numérique	109
1. Tunnel profond en déformation plane	111
2. Fondation superficielle sur un massif fracturé	118
3. Commentaires	127
Conclusion	130
Références bibliographiques	134
Annexes	140
Annexe A	141
Annexe B	146

INTRODUCTION

L'une des caractéristiques principales des milieux rocheux est la présence à différentes échelles, de discontinuités (fractures ou joints) séparant des blocs de roche saine. En mécanique des roches, le terme discontinuité désigne toute interruption des propriétés mécaniques ou physiques dans la matrice rocheuse. En ce qui nous concerne, il s'agit essentiellement d'une dégradation des propriétés mécaniques sur des zones de très faible épaisseur. Si le comportement des massifs rocheux fracturés dépend naturellement de celui de la matrice rocheuse, il est également fortement gouverné par celui des joints qui induisent des faiblesses en termes de déformabilité et de résistance.



FIG. 1: Massif rocheux fracturé. Photo extraite d'archives internet.

Le dimensionnement d'ouvrages construits dans de tels massifs exige par conséquent la prise en compte préalable, lors de la formulation du modèle mécanique, de ces surfaces de moindre résistance (discontinuités). Les méthodes d'analyse actuelles reposent pour la plupart sur une modélisation du milieu rocheux, dite de "milieu discontinu", dans laquelle les blocs de roche saine et les joints sont traités séparément. La méthode numérique par

éléments distincts, due essentiellement aux travaux de Cundall et co-auteurs (1979,1988a, 1988b), constitue l'outil le plus spécifique développé à cet égard. Ce type d'approche, indiqué lorsque le nombre de joints reste limité, s'avère toutefois moins pertinent lorsque le réseau de joints devient très dense : problèmes numériques parfois insurmontables liés à la difficulté de discrétisation géométrique et au nombre élevé de blocs.

Dans ces conditions, la méthode d'analyse des ouvrages en milieux rocheux fortement fracturés, fondée sur la technique d'homogénéisation des milieux périodiques ou aléatoires apparaît comme une approche alternative. La pertinence de cette méthode repose théoriquement sur la régularité et la forte densité du réseau de joints. Soulignons à cet égard que les discontinuités naturelles d'un massif rocheux présentent fréquemment des structures planaires et peuvent être regroupées en familles directionnelles bien identifiées (figure 1).

En fait, l'idée d'homogénéisation a déjà été mise en œuvre avec succès auparavant par plusieurs auteurs dans les domaines du Génie Civil (sols renforcés, béton armé, milieux poreux...) ou même pour construire expérimentalement certains aspects du comportement global à partir d'échantillons de roches fracturées. Ainsi le critère de résistance proposé par Hoek (1983) pour décrire les capacités de résistance d'un milieu rocheux traversé par des joints relève bien de cet esprit d'homogénéisation, bien qu'il ne rende pas compte de l'anisotropie de résistance induite par les directions privilégiées des joints. Le principe de l'homogénéisation des milieux rocheux fracturés, consiste à substituer au milieu initial un milieu *homogène équivalent*, fortement anisotrope en raison de l'orientation privilégiée des réseaux de joints, et dont les caractéristiques mécaniques découlent de celles des constituants (la matrice rocheuse et les joints).

L'objectif du présent travail est l'analyse en élastoplasticité des massifs rocheux considérés en tant que milieux homogénéisés. Il s'inscrit dans la continuité de la thèse de Fréard (2000) qui a abordé par la même technique d'homogénéisation les aspects de stabilité. Le mémoire est constitué de cinq chapitres. Il s'articule autour de deux chapitres clés : le second et le quatrième.

- Le premier chapitre est une étude bibliographique. On décrit le comportement individuel de chacun des constituants (matrice rocheuse, joint), puis celui global du massif rocheux. Nous rappelons ensuite les méthodes usuelles de calcul des ouvrages en milieux rocheux fracturés. En dernier lieu, une présentation de la démarche d'homogénéisation est esquissée.

- Le chapitre II est dédié à la formulation du comportement élastoplastique homogénéisé.

Après avoir précisé l'échelle de la modélisation, on examine tout d'abord la situation d'une répartition périodique de joints. L'extension de la formulation au cas des milieux à distribution aléatoire de joints est ensuite examinée.

- Afin de disposer d'une solution de référence pour valider l'outil numérique incorporant le comportement formulé au second chapitre, on développe au chapitre III la solution analytique du problème de la convergence d'un tunnel profond dans la situation d'un schéma académique pour la fracturation.

- Le chapitre IV concerne l'implémentation du comportement homogénéisé dans un code de calcul par éléments finis. L'accent est mis sur l'élaboration d'un algorithme de plasticité *ad hoc*. En raison du caractère multi-potentiel de la règle d'écoulement macroscopique, on propose un processus itératif de projection sur le domaine d'élasticité. L'outil numérique mis au point est finalement validé en comparant avec la solution analytique construite au chapitre II.

- Le dernier chapitre est consacré à la mise en œuvre du code de calcul par élément finis sur des problèmes types de mécanique des roches. Les exemples ont été choisis en fonction de leur intérêt pratique et de la disponibilité de résultats provenant d'autres approches que nous comparerons à nos résultats numériques.

REFERENCES

Cundall P.A. and Strack O.D.L., 1979. *A discrete numerical model for granular assemblies*, Géotechnique, 29, 47-65.

Cundall P.A., 1988a. *Formulation of a three-dimensional distinct element model - part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 25 (3), 107-116.

Hart R., Cundall P.A. and Lemos J., 1988b. *Formulation of a three-dimensional distinct element model - part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 25 (3), 117-125.

Hoek E., (1983. *Strength of jointed rock masses. 23rd Rankine lecture*, Géotechnique, 33 (3), 187-223.

Fréard J., 2000. *Analyse de la stabilité des massifs rocheux fracturés par une méthode d'homogénéisation*. Thèse de doctorat ENPC.

CHAPITRE 1

Modélisation mécanique des massifs rocheux fracturés

Sommaire

- 1.** Matrice rocheuse
 - 1.1 Eléments du comportement mécanique
 - 1.2 Critères de rupture de la matrice rocheuse

- 2.** Joints
 - 2.1 Description géométrique des joints
 - 2.2 Comportement mécanique d'un joint
 - 2.3 Critères de rupture d'un joint
 - 2.4 Modèles de comportement d'un joint

- 3.** Comportement du massif rocheux
 - 3.1 Classification des massifs rocheux
 - 3.2 Critères de rupture d'un massif rocheux
 - 3.3 Propriétés mécaniques des massifs rocheux

- 4.** Méthodes de calcul des ouvrages en milieux rocheux fracturés
 - 4.1 Calcul de stabilité
 - 4.2 Méthodes de calcul en déplacement

Ce chapitre, à caractère essentiellement bibliographique, est une description des modèles mécaniques, généralement utilisés pour les milieux rocheux fracturés. On présente tout d'abord les comportements individuels, basés sur les nombreux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature, de chacun des deux constituants : matrice rocheuse et joint, pour décrire ensuite ceux traditionnellement adoptés pour décrire le massif rocheux dans son ensemble. Nous rappelons dans une seconde étape les méthodes usuelles de calcul des ouvrages en milieux rocheux fracturés, tant du point de vue de l'analyse de la stabilité que de l'analyse en déplacement. Le chapitre s'achève sur un parti pris : la démarche d'homogénéisation comme méthode d'analyse pour les ouvrages en question.

Conformément à l'usage en mécanique des roches, nous adoptons exceptionnellement dans ce chapitre, la convention de contraintes positives en compression.

1 Matrice rocheuse

L'échelle à laquelle on se place, dite échelle de l'ingénieur, est celle où les joints constituent l'unique hétérogénéité du milieu rocheux. Il s'agit également de celle dans laquelle la modélisation expérimentale est réalisée. A cette échelle, la matrice rocheuse fait référence aux blocs non-fracturés situés entre les discontinuités structurales. Ces blocs possèdent une taille variant de quelques millimètres à quelques mètres. Elle est modélisée comme un milieu homogène, résultant d'un processus d'homogénéisation (expérimental ou théorique) intégrant d'éventuelles microfissures.

1.1 Eléments du comportement mécanique

De nombreux travaux sont dédiés à la caractérisation du comportement de la matrice rocheuse. Ceux-ci relèvent d'une problématique vaste en mécanique des roches, et leur description exhaustive dépasse le cadre de ce chapitre.

En pratique, la matrice rocheuse est usuellement supposée *isotrope*. Il s'agit d'une hypothèse très forte qui se justifie tout simplement par des raisons de commodités expérimentales et de simplicité de mise en œuvre. Le comportement élastique linéaire est donc complètement caractérisé par la donnée du module de Young E et du coefficient de Poisson ν . Le tableau 1 présente leurs valeurs pour quelques roches saines typiques.

	σ_c (MPa)	σ_t (MPa)	E (GPa)	ν
Norite	300	20	100	0,24
Granite	166	12	45	0,23
Quartzite	250	25	90	0,16
Grès	100	6	22	0,24
Dolérite	280	20	70	0,20
Calcaire	102	14	48	0,25

TAB. 1: Caractéristiques mécaniques de roches intactes (Bieniawski,1974)

Dans la phase des déformations irréversibles, la matrice rocheuse est généralement décrite par un comportement élastoplastique, intégrant parfois des aspects d'endommagement. Le plus souvent, les caractéristiques post-élastiques se réduisent aux valeurs des résistances à la compression σ_c et à la traction σ_t . Le tableau 1 montre que cette dernière est d'un ordre de grandeur inférieure à la résistance en compression.

Nous allons examiner maintenant quelques critères de rupture classiquement utilisés pour la matrice rocheuse. Il faut observer que ceux-ci servent :

- bien entendu à décrire les états de contrainte ultimes lors de problèmes relevant de l'analyse de la stabilité d'ouvrages ;
- mais sont également utilisés comme critères de plasticité lorsqu'il s'agit d'analyser en déplacement des ouvrages rocheux.

1.2 Critères de rupture de la matrice rocheuse

Les critères principalement utilisés pour la matrice rocheuse sont : le critère de Mohr-Coulomb et les critères proposés par Murrell (1965) et Hoek (1968). Nous nous bornerons à décrire ces deux derniers. Ils s'agit de critères empiriques, reposant sur des résultats exclusivement expérimentaux . De natures très semblables, le choix de leur utilisation est souvent motivé par leur facilité de mise en œuvre pour le problème étudié. Ils permettent de décrire la résistance d'une large gamme de roches : argilite, norite, quartzite, grès ...

Critère de rupture de Murrell (1965)

Ce critère décrit la résistance de la roche saine par l'expression suivante :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = k \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^A + 1 \quad (1)$$

où σ_1 et σ_3 désignent respectivement les contraintes principales majeure et mineure et σ_c la résistance en compression uniaxiale. A et k sont des constantes déterminées expérimentalement. Diverses expériences ont été réalisées sur cinq types de roches (Bieniawski, 1974) afin d'identifier leurs valeurs. Les états de rupture obtenus sont reportés sur les figures 1 et 2. A côtés des points expérimentaux, figurent également les courbes de rupture correspondantes obtenues par identification approchée des coefficients k et A . On constate que k est une fonction croissante de la résistance à la compression uniaxiale. Le coefficient A , quant à lui, varie peu (valeur de 0,75 pour les roches ici présentées).

FIG. 1: Critère de Murrell pour le siltstone, l'argilite et la norite (d'après Bieniawski, 1974)

FIG. 2: Critère de Murrell pour le quartzite et le grès (d'après Bieniawski, 1974)

Critère de rupture de Hoek (1968)

Le second critère très usité pour décrire la résistance de la roche saine, est le critère proposé par Hoek :

$$\frac{\tau_m}{\sigma_c} = B \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_c} \right)^C + 0.1 \quad (2)$$

où $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ et $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ désignent respectivement, la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale moyenne. σ_c est la résistance en compression uniaxiale. B et C sont des coefficients empiriques, déterminés à partir de résultats d'expériences réalisées sur différentes roches. Certaines courbes de rupture ainsi que les points expérimentaux ayant permis leur détermination sont représentés sur les figures 3 à 4. On observe les mêmes influences des matériaux étudiés sur B et C que sur les coefficients k et A du critère de Murrell, dans le sens où B croît avec la résistance à la compression, alors que la valeur du paramètre C est quasi constante.

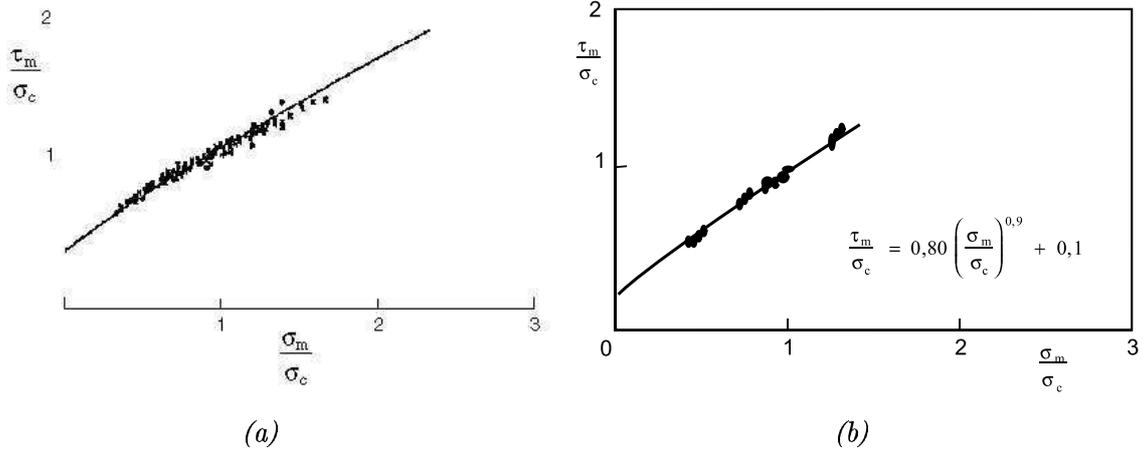


FIG. 3: Critère de Hoek pour le siltstone, l'argilite et la norite (d'après Bieniawski, 1974)

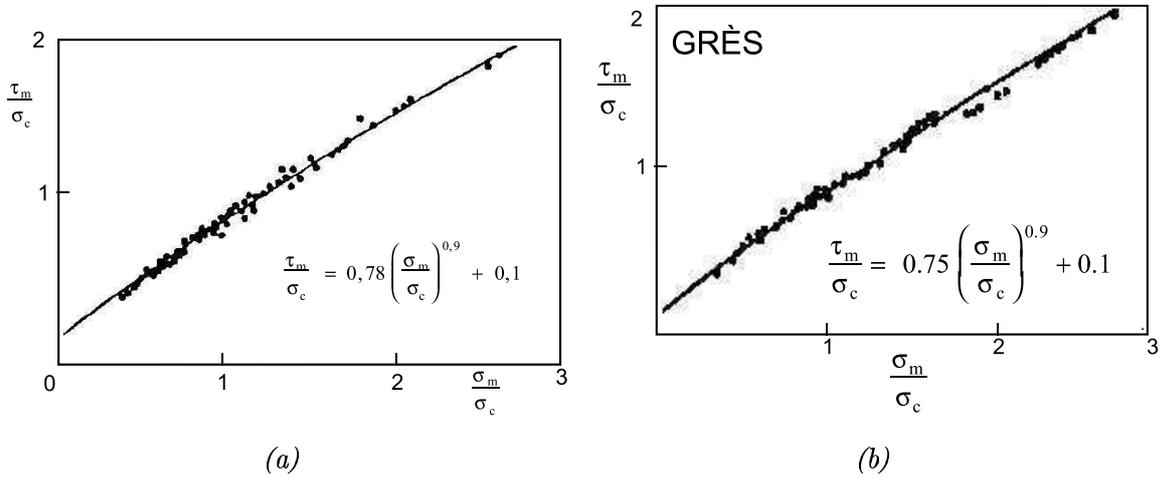


FIG. 4: Critère de Hoek pour le quartzite et le grès (d'après Bieniawski, 1974)

Justification du choix de critère de résistance

L'observation des courbes décrivant les critères de Murrell et de Hoek, indique qu'elles sont quasiment linéaires, leur légère non-linéarité reste localisée au voisinage de $\sigma_3 = 0$ (Murrell) ou de $\sigma_m = 0$ (Hoek). Cette remarque montre qu'il est raisonnable de décrire les capacités de résistance de la matrice rocheuse par un critère de Mohr-Coulomb, défini par l'angle de frottement interne φ_r et la cohésion C_r de la roche intacte. Rappelons que son expression s'écrit de la façon suivante :

$$\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi^r = 2 C_r \cos \varphi^r \quad (3)$$

2 Joints

Le second constituant du massif rocheux fracturé est l'ensemble des joints le traversant. Le terme désigne une zone de faible épaisseur le long de laquelle les propriétés mécaniques de la roche sont fortement dégradées. Il correspond à différentes origines géologiques (joint sédimentaire, diaclase, faille, schistosité, etc.). Mécaniquement, il présente des propriétés plus faibles que celles de la matrice rocheuse, et sa prise en compte est essentielle pour la modélisation des ouvrages en milieux rocheux. La description géométrique du réseau de joints ainsi que la description de leur comportement mécanique sont donc fondamentales.

2.1 Description géométrique des joints

Afin de bien connaître la répartition et la géométrie des joints traversant le massif rocheux, il est nécessaire de procéder à un grand nombre de levés dans toute la zone à étudier, afin d'avoir une bonne représentativité de leur répartition. Mais il est naturellement très important de déterminer leur nature.

2.1.1 Nature des joints

On recense quatre grandes familles de nature de joints :

- Les joints stratigraphiques : ils sont le résultat d'une discontinuité dans le processus de formation sédimentaire. Ils possèdent une grande extension et une faible ondulation. Ils sont remplis par de minces dépôts argileux ou schisteux les rendant dangereux pour la stabilité.
- Les diaclases : elles sont souvent perpendiculaires ou obliques aux joints de stratification ou à la schistosité. Elles ne présentent pas de trace de mouvement et elles ont une extension limitée.
- Les fentes ou fractures d'extension : elles sont formées sous l'effet d'une traction qu'a subi le massif lors de mouvements tectoniques. Elles sont souvent remplies de calcite ou de quartz.
- Les failles : elles résultent de la rupture d'une zone du massif qui a subi un grand effort de cisaillement (déplacement tangentiel important). Elles représentent ainsi des discontinuités séparant deux grandes entités du massif et sont caractérisées par une grande extension et souvent un remplissage de matériau broyé et altéré, parfois de recristallisation.

Rappelons que sous le terme joint sont regroupées toutes les discontinuités qui interviennent à l'échelle du massif rocheux.

2.1.2 Paramètres géométriques

La bonne connaissance de la distribution spatiale du réseau de joints au sein du massif rocheux est primordiale. On caractérise un joint par son orientation, sa fréquence, son extension, son ouverture, sa rugosité, le degré d'altération de ses épontes et ses matériaux de remplissage. On a accès généralement à toutes ces mesures en procédant à des carottages.

Il est cependant illusoire de prétendre obtenir une description déterministe d'un réseau de fractures dans un massif rocheux. En conséquence, des approches stochastiques basées sur des théories probabilistes sont aussi mises en œuvre.

La construction modélisée de tels réseaux est réalisée à partir de paramètres géométriques variables. Chacun des ces derniers est alors associé à une variable aléatoire dont les lois de distribution sont à ajuster à partir des données acquises sur le terrain.

a) Orientation Une discontinuité est, au moins localement, plane. La position du plan de discontinuité est décrite par son orientation dans l'espace muni d'un repère ayant un axe parallèle au nord magnétique (figure 5).

L'orientation du plan est définie par celle du vecteur-pendage \underline{P} , dirigé vers le bas, qui matérialise la ligne de plus grande pente du plan :

- azimut : angle α de la projection horizontale du vecteur \underline{P} avec le nord \underline{N} ; α varie de 0° à 360° ;
- pendage : angle β que fait \underline{P} avec le plan horizontal; β varie de 0° à 90° .

Pour représenter les directions de plan, on utilise la projection stéréographique. Cette projection des discontinuités sur un canevas permet de faire un classement des discontinuités en familles directionnelles. Une étude statistique permet d'identifier les familles et de dégager une loi de distribution des discontinuités au sein de chaque famille. Bien qu'apparemment désordonnées dans le détail, les discontinuités d'un massif constitue le plus souvent un ensemble structuré et leur orientation observée en un site donné se répartissent en un petit nombre de familles.

L'orientation et le pendage peuvent être traités comme une seule variable (vecteur) ou séparément. Leur distribution est souvent représentée par une loi de distribution hémisphérique dans le premier cas et par des lois normales ou log-normales dans le second cas.

b) Extension Ce paramètre caractérise la dimension de la discontinuité dans l'espace. Sa mesure est dans les faits très difficile à obtenir, les mesures réalisées ne pouvant être que locales. Pour déterminer la distribution de l'extension d'un joint dans l'espace tridimensionnel, on a recours à des hypothèses sur la forme de la discontinuité. En général, la forme

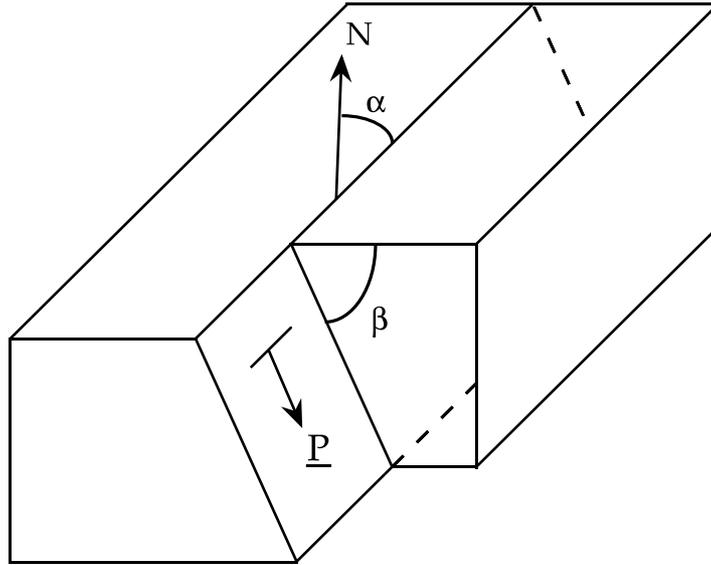


FIG. 5: Orientation d'un joint en fonction du vecteur-pondage \underline{P}

du joint est modélisée par un disque. Warburton (1980) exprime la loi de distribution des longueurs des traces des joints sur un plan infini, en fonction de la loi de distribution des diamètres des disques, qui peut suivre une loi exponentielle ou log-normale.

c) Espacement et densité L'espacement représente la distance moyenne séparant deux discontinuités d'une même famille et la densité le nombre de discontinuités d'une même famille par unité de volume, de surface ou de longueur.

d) Ouverture L'ouverture est un paramètre représentant la distance qui sépare les deux lèvres d'une discontinuité. Cette caractéristique est difficile à mesurer du fait du remplissage de la discontinuité, de sa rugosité et de sa grande variabilité le long d'un joint. En pratique, on suppose que chaque fracture a une ouverture constante et égale à son ouverture moyenne, qui est souvent ajustée par une loi log-normale.

Après avoir présenté la façon dont était décrit la nature et la géométrie des joints, nous allons maintenant nous intéresser à leur comportement.

2.2 Comportement mécanique d'un joint

Les propriétés mécaniques d'un joint sont généralement mises en évidence en étudiant son comportement sous contrainte normale ou tangentielle. Le comportement mécanique d'un joint est défini par la relation entre les efforts appliqués et les déplacements relatifs entre les deux lèvres du joint. De nombreux travaux expérimentaux, et principalement ceux de Goodman (1974) et de Bandis et al. (1983), ont mis en évidence le comportement

type d'un joint dans les directions normale et tangentielle. Modélisé comme une interface, le comportement d'un joint est usuellement décrit par des relations de type $\underline{T} = f(\underline{u})$, où \underline{T} désigne le vecteur contrainte agissant sur le joint et $\underline{u} = [\underline{\xi}]$ le saut de déplacement au passage de celui-ci. Ce comportement dépend de nombreux paramètres tels que la rugosité, le degré d'altération et les propriétés des matériaux de remplissage.

2.2.1 Comportement en compression

Sous une compression normale, on mesure la fermeture du joint (déplacement relatif normal). Le comportement du joint sous compression est défini par la relation entre ce déplacement et la contrainte de compression appliquée. Cette relation non-linéaire est représenté sur la figure 6. Elle est usuellement modélisée par une loi hyperbolique entre la contrainte normale σ_n (≥ 0) et la fermeture normale u_n (≥ 0), de la forme :

$$\sigma_n = \frac{u_n k_{no} V_m}{V_m - u_n} \quad (4)$$

où V_m désigne la fermeture maximale du joint, grandeur mesurée expérimentalement :

$$\lim_{\sigma_n \rightarrow \infty} u_n = V_m \quad (5)$$

et k_{no} la pente à l'origine de la courbe, obtenue également empiriquement :

$$k_{no} = \frac{d\sigma_n}{du_n}(u_n = 0). \quad (6)$$

Le déplacement relatif dans la direction tangentielle au joint est généralement négligée.

2.2.2 Comportement en cisaillement

On présente maintenant la réponse de l'échantillon lorsqu'il est soumis à un effort de cisaillement. Le comportement est décrit sur la figure 7 par la relation entre la contrainte de cisaillement τ et le déplacement tangentiel relatif u_t . On observe une brusque croissance de τ jusqu'à une valeur de pic τ_p puis une décroissance jusqu'à la contrainte résiduelle τ_r , où elle se stabilise. τ_p correspond au point de résistance maximum des aspérités composant le joint. Celles-ci sont ensuite progressivement écrasées conduisant la valeur de τ à se stabiliser à la valeur résiduelle de la contrainte tangentielle.

Contrairement au chargement normal précédemment présenté, le déplacement normal relatif (perpendiculaire à la direction du chargement) n'est pas négligé. Il est dû au glissement des indentations entre-elles lorsque le déplacement tangentiel se produit. Les déplacements normal et tangentiel sont reliés entre eux par l'angle de dilatance d , de la manière suivante :

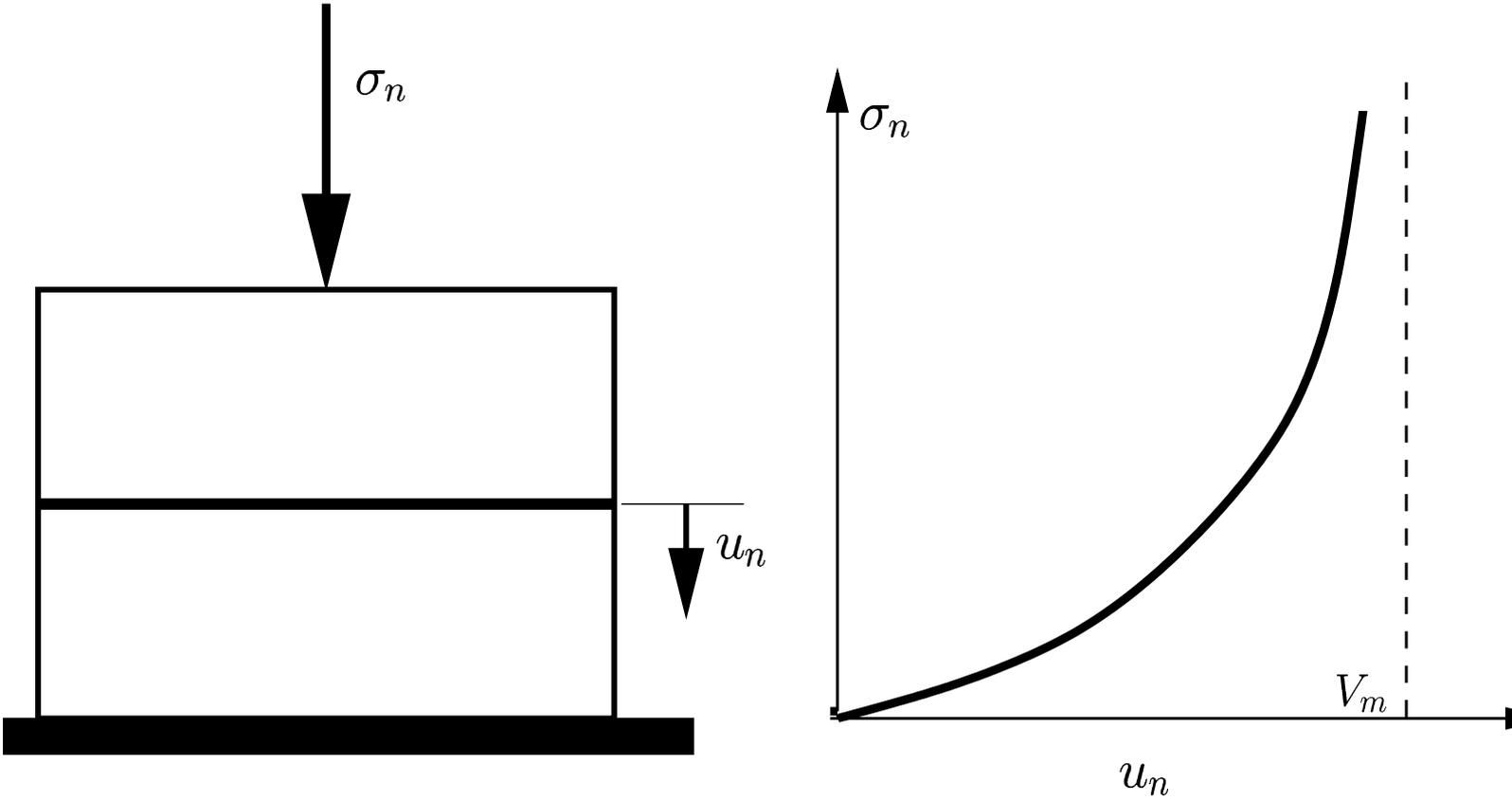


FIG. 6: Essai de compression et courbe $\sigma_n = f(u_n)$

$$d = \arctan\left(\frac{du_n}{du_t}\right) \quad (7)$$

La dilatance maximale d_n , atteinte au pic de résistance est définie par Barton (1973) par :

$$d_n = JRC \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma_n}\right) \quad (8)$$

où JRC (Joint Roughness Coefficient) et JCS (Joint Wall Compressive Strength) sont des paramètres qualitatifs, permettant de caractériser mécaniquement le joint. Le JRC, exprimé en degré ($0 \leq JRC \leq 20^\circ$), définit la rugosité du joint, et permet de déterminer la variation des angles de dilatance et de frottement mobilisés. Les profils types de joints ainsi que les valeurs du JRC associées sont représentées sur la figure 8. Le JCS, homogène à une contrainte, caractérise l'altération des épontes du joint, par le biais de leur résistance en compression simple, comparée à celle de la roche saine.

2.3 Critères de rupture d'un joint

Pour décrire les capacités de résistance d'un joint naturel, trois critères sont couramment rencontrés. Le critère d'interface de Coulomb adapté pour les joints, ainsi que deux

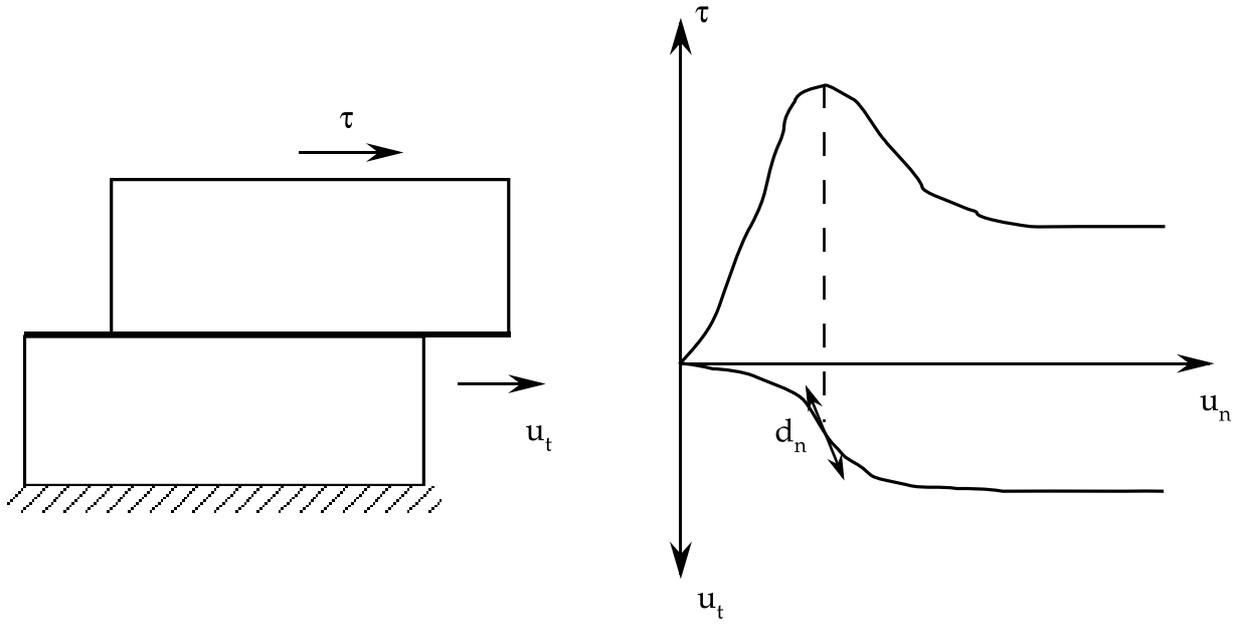


FIG. 7: Essai de cisaillement et courbes $\tau = f(u_t)$ et $u_n = f(u_t)$

critères plus spécifiquement dédiés aux joints rocheux, celui de Barton et celui de Hoek.

Critère de type Coulomb

La forme de ce critère est définie par deux expressions selon le niveau de contrainte appliqué. Pour des contraintes normales faibles, le critère s'écrit avec une cohésion nulle.

$$|\tau| = \sigma_n \tan(\varphi^j + d_j) \quad (9)$$

où d_j et φ^j sont les angles de dilatance et de frottement. Pour des valeurs de contrainte normale fortes, la dilatance est alors négligeable, tandis que la cohésion n'est plus nulle. Le critère s'écrit alors :

$$|\tau| = C_j + \sigma_n \tan(\varphi^j) \quad (10)$$

Critère de Barton (1973)

Le critère proposé par Barton est formulé à partir du critère de Coulomb, dans lequel l'angle de dilatance d est remplacé par sa valeur maximale d_n définie dans la relation 8 :

$$|\tau| = \sigma_n \tan \left(\varphi^j + JRC \log_{10} \left(\frac{JCS}{\sigma_n} \right) \right) \quad (11)$$

Ce critère pose un problème de définition lorsque la contrainte normale est nulle. En outre son expression n'est plus valable dès que σ_n dépasse la valeur du JCS du joint étudié.

FIG. 8: Valeurs du JRC pour les profils typiques de rugosité des joints (Barton & Choubey, 1977)

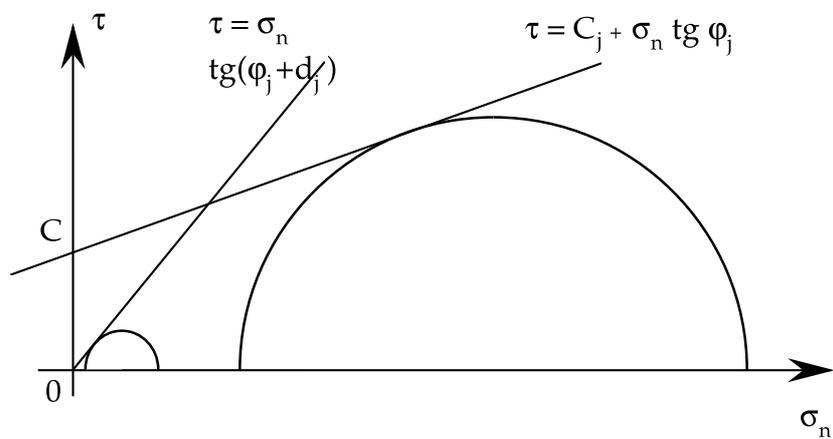


FIG. 9: Critère de type Coulomb pour un joint

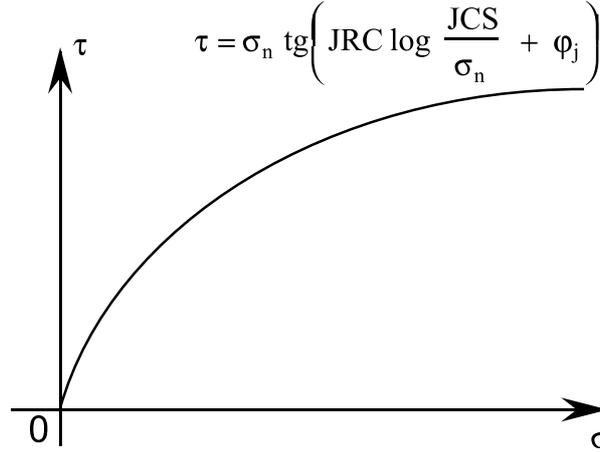


FIG. 10: Critère de Barton (1973) pour un joint

Critère de Hoek (1983)

Ce critère a été construit (Hoek, 1983) à partir de celui formulé pour les roches intactes. Il correspond à l'enveloppe des cercles de rupture dans le plan de Mohr et s'écrit en termes de contraintes normale et tangentielle appliquées au joint sous la forme :

$$|\tau| = (\cot \Phi'_i - \cos \Phi'_i) \frac{m \sigma_c}{8} \quad \text{avec} \quad \tan \Phi'_i = \frac{d\tau}{d\sigma_n} \quad (12)$$

où Φ'_i , appelé angle instantané de frottement, définit la pente de la tangente à la courbe $\tau = f(\sigma_n)$:

$$\Phi'_i = \arctan \left[4h \cos^2 \left(30 + \frac{1}{3} + \arcsin h^{\frac{-3}{2}} \right) - 1 \right]^{\frac{-1}{2}} \quad (13)$$

avec $h = 1 + \frac{16(m\sigma + s\sigma_c)}{3m^2\sigma_c}$

Les coefficients m et s sont des coefficients empiriques sans dimension liés aux caractéristiques mécaniques de la roche constituant les lèvres de la fracture.

2.4 Modèles de comportement d'un joint

Dans l'optique d'une analyse en déplacement d'un ouvrage en milieux rocheux fracturé, dépassant le cadre des aspects de l'analyse de la stabilité, il convient de décrire complètement le comportement du constituant joint. A cet effet, le mécanicien des roches dispose de deux types de modèles existant pour simuler le comportement des joints : les modèles incrémentaux et les modèles élastoplastiques.

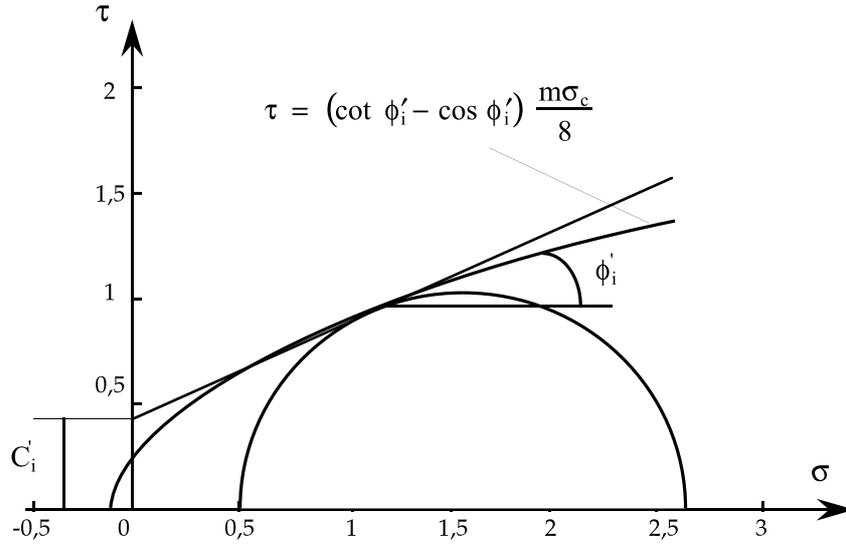


FIG. 11: Critère de Hoek (1983) pour un joint

2.4.1 Modèles incrémentaux

Ces modèles consistent à formuler des lois phénoménologiques reliant les incréments de contrainte normale et tangentielle ($d\sigma_n$, $d\tau$) aux incréments du saut de déplacement normal et tangentiel (du_n , du_t), de la manière suivante :

$$d\sigma_n = k_{nn}du_n + k_{nt}du_t$$

$$d\tau = k_{tn}du_t + k_{tt}du_t$$

où k_{nn} , k_{nt} , k_{tn} et k_{tt} représentent sont les coefficients de la matrice de rigidité tangente du joint. Plusieurs auteurs proposent des expressions pour cette matrice de rigidité, à partir des caractéristiques mécaniques et géométriques du joint (Goodman, 1976 ; Amadei et Saeb, 1990), calées sur des résultats expérimentaux. D'autres (Benjelloun, 1991) prennent en compte l'endommagement du joint, correspondant à la dégradation des aspérités.

Ce type de loi, identifiée expérimentalement lors de processus de chargement *monotones*, n'inclut pas la réponse du joint lors d'une décharge.

2.4.2 Modèles élastoplastiques

Il s'agit d'une extension au milieu joint modélisé comme une interface, des modèles classiques élastoplastiques formulés pour le milieu continu tridimensionnel. Le saut de déplacement étant la mesure pertinente pour la déformation du joint, on décompose l'incrément de saut de déplacement $d\underline{u} = d\underline{\xi}$ en partie élastique (réversible) et partie plastique (irréversible) :

$$d\underline{u} = d\underline{u}^e + d\underline{u}^p \quad (14)$$

la partie élastique $d\underline{u}^e$ de l'incrément de déplacement s'exprime à partir de l'incrément du vecteur contrainte, via la loi de comportement élastique. La partie plastique $d\underline{u}^p$ est régie par la règle d'écoulement plastique. Ces considérations conduisent à écrire le comportement sous la forme :

$$d\sigma_n = k_{nn}^{ep} du_n + k_{nt}^{ep} du_t \quad (15)$$

$$d\tau = k_{tn}^{ep} du_t + k_{tt}^{ep} du_t \quad (16)$$

où k_{nn}^{ep} , k_{nt}^{ep} , k_{tn}^{ep} et k_{tt}^{ep} sont les coefficients de la matrice élastoplastique. Ils s'expriment à partir de la loi de comportement élastique, la règle d'écoulement plastique et la condition de chargement plastique.

Le potentiel plastique, la fonction de charge ainsi que les variables d'écrouissage peuvent être estimés à partir d'hypothèses géométriques et mécaniques formulées à l'échelle microscopique. C'est ce que proposent certains auteurs comme Plesha (1987) qui modélisent la microstructure du joint par des aspérités en dents de scie ou de forme sinusoïdale et dont le comportement est caractérisé par des rigidités normale et tangentielle. Supposant un critère de Barton pour le joint, Nguyen et Selvadurai (1998) en identifient les paramètres à partir d'un raisonnement à l'échelle microscopique.

3 Comportement du massif rocheux

Nous abordons dans cette section, la description du comportement mécanique du massif rocheux fracturé dans sa globalité.

3.1 Classification des massifs rocheux

Afin de caractériser les massifs rocheux, des classifications sont effectuées, à partir des propriétés de la matrice rocheuse et des joints, et de la géométrie de l'excavation. Hérités d'une pratique ancienne (génie minier), les systèmes de classification relèvent de l'avant-projet et ne constituent en aucun cas une analyse mécanique du massif rocheux. L'objectif étant principalement de se prononcer sur l'opportunité de recourir à un système de renforcement de l'ouvrage. Les deux systèmes de classification les plus utilisés sont le Rock Mass Rating (Bieniawski, 1973, 1979) et le Q-système (Barton *et al.*, 1974).

3.1.1 Le Rock Mass Rating (RMR)

Cette classification consiste à attribuer une valeur (comprise entre 0 et 100) à l'ouvrage rocheux étudié, selon la qualité de la roche. Le calcul de cette valeur du RMR dépend des six paramètres suivants, chacun étant qualifié par une note : la résistance à la compression de la roche saine, la qualité des carottes de sondage obtenues, l'espacement, l'orientation et les caractéristiques des joints et les propriétés hydrauliques (figure 12). La somme des six notes obtenue définit le RMR.

La résistance en compression de la roche saine peut être déterminée soit en laboratoire sur une sonde, soit préférentiellement en procédant au test du chargement ponctuel. La qualité des carottes de sondage obtenues est évaluée par le RQD (Rock Quality Designation) (Deere, 1964). Il est déterminé à partir du relevé d'un sondage carotté, en calculant le rapport entre la longueur cumulée des carottes supérieures à dix centimètres et la longueur totale considérée.

L'espacement et l'orientation des joints sont déterminés à partir des sondages. La qualité des joints est évaluée selon les observations suivantes : les bonnes conditions sont définies par la discontinuité et la fermeture des joints. Inversement les conditions défavorables sont la continuité et l'ouverture prononcée des joints.

Enfin, les propriétés hydrauliques sont qualifiées à partir de la réalisation d'une exploration ou d'un tunnel pilote ; on réalise alors des mesures de flux d'eau ou de pressions interstitielles du joint.

1	résistance en compression uniaxiale de la roche intacte	> 200 MPa	100 - 200 MPa	50 - 100 MPa	25 - 50 MPa	< 25 MPa
	valeur attribuée	10	5	2	1	0
2	RQD	90% - 100%	75% - 90%	50% - 75%	25% - 50%	<25% ou très altérée
	valeur attribuée	20	17	14	8	3
3	espacement des joints	> 3m	1 - 3m	0,3 - 1m	50 - 300mm	< 50mm
	valeur attribuée	30	25	20	10	5
4	orientation et pendage des joints	très favorable	favorable	moyenne	défavorable	très défavorable
	valeur attribuée	15	13	10	6	3
5	état des joints	très étroit: séparation < 0,1mm non-continus		étroit: < 0,1mm continus pas de gouge	ouvert: 1 - 5mm continus gouge < 5mm	ouvert: > 5mm continus gouge > 5mm
	valeur attribuée	15		10	5	0
6	flux d'eau (pour 10m de longueur de tunnel)	aucun		< 25 l/min	25 - 125 l/min	> 125 l/min
	valeur attribuée	10		8	5	2

FIG. 12: Classification RMR d'après Bieniawski (1973)

La note obtenue pour l'ouvrage conduit à la réalisation d'un système de soutènement approprié durant les travaux, en attendant qu'une analyse mécanique complète du milieu rocheux fracturé soit effectuée.

3.1.2 Le Q-système

Le Q-système est une classification technique des roches établie pour déterminer le soutènement à prévoir dans les cavités creusées dans la roche. Ce système conduit au calcul d'une valeur Q (Barton et al. 1974) à partir de six paramètres :

$$Q = \frac{RQD}{J_n} \cdot \frac{J_r}{J_a} \cdot \frac{J_w}{SRF} \quad (17)$$

La valeur de Q varie de 0,001, pour une roche particulièrement mauvaise, fluante ou gonflante, à 1000 pour une roche d'excellente qualité, pratiquement exempte de discontinuités. Le paramètre RQD est identique à celui employé dans le calcul du RMR. J_n représente le nombre de familles de joints. Il varie entre 0,5 et 20 (roche intacte à roche broyée). J_r et J_a caractérisent la résistance au cisaillement des joints. J_r représente la rugosité (celle du plus faible plan de discontinuité) et J_a l'altération des joints (caractéristique du matériau de remplissage). J_w est le facteur de réduction dû à la présence éventuelle d'eau dans les joints ($J_w = 1$ maximal pour une roche sèche et minimal pour une roche comportant un flux très important). SRF désigne le facteur de réduction de contrainte, qui doit être évalué lorsque l'argile est présente dans un massif rocheux.

Les deux systèmes de classification que nous venons de présenter sont relativement proches sur la manière dont ils abordent l'étude de la stabilité d'ouvrages en milieu rocheux, conduisant à des résultats qualitatifs. Ils restent donc des méthodes à utiliser en avant-projet. Une analyse mécanique plus affinée du milieu rocheux est nécessaire pour la réalisation de l'ouvrage.

3.2 Critères de rupture d'un massif rocheux

La description des capacités de résistance du massif rocheux fracturé dépend de l'approche envisagée pour l'analyse de sa stabilité.

3.2.1 Modélisation discontinue ou discrète

Dans le cas où l'on examine le matériau rocheux à l'échelle des joints, l'analyse de stabilité du massif s'opère en distinguant géométriquement les joints et la matrice rocheuse :

c'est l'approche milieu discontinu. Il s'agit de considérer en chaque point du massif, le critère du joint ou celui de la roche selon que le point géométrique appartient à l'un ou l'autre des deux constituants. Ces critères ont été décrits dans les sections précédentes. Ce type de démarche est efficace lorsque le réseau de joints est peu dense, mais devient de plus en plus complexe et coûteux en moyens de calcul lorsque le réseau se densifie.

3.2.2 Modélisation continue

Cette approche est mieux adaptée à l'étude des massifs fortement fracturés. Elle consiste à regarder le matériau à une échelle où l'on ne distingue plus les joints de la matrice rocheuse, c'est-à-dire que l'on modélise le matériau rocheux fracturé comme un matériau homogène. Le critère de rupture ne dépend plus du point où l'on se trouve. Le critère le plus rencontré dans ce type d'approche est celui proposé par Hoek & Brown (1980), exprimé de la façon suivante :

$$\sigma_1 = \sigma_3 + (m\sigma_3\sigma_c + s\sigma_c^2)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

où m et s sont des constantes déterminées empiriquement à partir des propriétés de la roche saine et de l'estimation de la résistance en compression de celle-ci. σ_1 et σ_3 représentent respectivement les contraintes principales majeure et mineure et σ_c la résistance en compression uniaxiale. Ce critère étant isotrope, il est d'autant plus pertinent que les directions des joints décrivent tout l'espace.

3.3 Propriétés mécaniques des massifs rocheux

Pour fixer les ordres de grandeur des grandeurs mécaniques des milieux rocheux, nous reportons dans les tableaux 2 et 3 les valeurs de la résistance à la compression, la résistance à traction et du module de Young correspondant à des massifs rocheux moyennement et fortement fracturés.

4 Méthodes de calcul des ouvrages en milieux rocheux fracturés

S'agissant des méthodes de calcul des ouvrages, il convient de distinguer celles relatives à l'analyse de la stabilité, de celles visant l'évaluation de la réponse en déplacement de l'ouvrage.

	σ_c (MPa)	σ_t (kPa)	E_m (GPa)
Norite	19	480	50
Granite	10,5	265	22,5
Quartzite	15,8	665	45
Grès	6,3	266	11
Dolérite	17,7	657	35
Calcaire	6,45	578	24

TAB. 2: Propriétés mécaniques des roches moyennement fracturées (Bieniawski, 1974)

	σ_c (kPa)	σ_t (kPa)	E_m (GPa)
Norite	948	23	20
Granite	525	12,7	9
Quartzite	790	31	18
Grès	315	12,5	4,4
Dolérite	885	31	14
Calcaire	322	25	9,6

TAB. 3: Propriétés mécaniques des roches fortement fracturées (Bieniawski, 1974)

4.1 Calcul de stabilité

Les joints constituant des zones de faiblesse pour le milieu rocheux, c'est naturellement le long de ceux-ci que les mécanismes de rupture se développent en général. C'est pourquoi, et devant la complexité du problème, les méthodes d'analyse de stabilité usuelles reposent sur le postulat que la rupture survient par défaut de résistance des seuls joints. Cette hypothèse est à la base des méthodes étudiant l'équilibre limite des blocs.

4.1.1 Analyse vectorielle (Warburton, 1981)

Elle consiste à analyser la stabilité de blocs polyédriques arbitraires. Ces derniers sont délimités soit par des faces de contact entre blocs (joints) soit par des faces libres (en bord d'excavation). Les surfaces des joints sont planes et les blocs rigides et indéformables.

Une procédure basée sur une étude vectorielle permet alors d'identifier les mouvements potentiels pour un bloc polyédrique; seuls les mouvements de translation sont considérés. Lorsque l'on a déterminé un bloc susceptible de bouger (pas d'interpénétration entre blocs), un facteur de sécurité est défini pour ce bloc, comme le rapport des forces "résistantes" (en adoptant un critère de rupture de Mohr Coulomb) et des forces motrices. Ce

facteur permet de statuer, selon cette méthode, sur la stabilité ou l'instabilité du bloc.

Deux problèmes se posent dans ce type d'approche. La restriction des mouvements à des translations, ne permet pas de prévoir des éboulements par rotation. Le second problème est que l'on étudie l'équilibre d'un bloc seul, sans prendre en compte les efforts que les autres blocs peuvent lui appliquer. Cette analyse peut donc conduire à une conclusion trop optimiste de la stabilité du massif rocheux.

4.1.2 Théorie des blocs (Goodman et Shi, 1985, 1989)

Cette théorie repose sur une analyse purement géométrique de l'organisation des blocs de matrice rocheuse et des joints. Elle consiste à rechercher les blocs clés (blocs potentiellement instables) dans le massif étudié. Comme pour la méthode précédente, ces blocs sont rigides et délimités par des joints plans. L'axiome fondamental de cette théorie s'écrit :

"La rupture d'une excavation commence avec le mouvement d'un bloc dans l'espace excavé. La perte d'un premier bloc augmente l'espace et offre ainsi la possibilité de déplacement pour les blocs voisins, accroissant la dégradation pouvant mener jusqu'à la rupture massive."

Ici encore, l'absence de la prise en compte du caractère mécanique du problème conduit cette méthode à ne donner que des résultats qualitatifs sur la stabilité de l'ouvrage rocheux.

4.2 Méthodes de calcul en déplacement

Comme pour le calcul de stabilité, les méthodes d'analyse en déplacement se rattachent à deux catégories distinctes : les approches discrètes et les approches continues. Après avoir décrit brièvement les premières, nous nous bornerons à décrire pour la seconde classe, l'approche par homogénéisation.

4.2.1 Approches discrètes

Ces approches sont également qualifiées d'approches directes. La spécificité des milieux rocheux fracturés a conduit plusieurs auteurs à étendre la méthode des éléments finis aux cas des milieux discontinus. Les premières tentatives ont consisté à modéliser les fractures par des éléments-joints de fine épaisseur (Goodman & Bray, 1976), séparant des éléments continus déformables. Deux principaux problèmes handicapent cette méthode : le premier est la taille des calculs à réaliser dès que la densité des joints croît, le second est qu'elle ne

peut donner lieu à la construction de champs de déplacements discontinus. Cette dernière limitation ne permet pas la simulation de grands déplacements au niveau des failles, ainsi que des chutes de blocs.

Afin de pallier ces inconvénients, la méthode dite des éléments distincts a été développée par Cundall (1971). Elle conduit à modéliser le milieu rocheux fracturé en blocs de cinématiques différentes, en contact entre eux le long des joints. La déformation du massif provient alors de l'interaction entre l'ensemble des blocs et des joints du massif. Deux codes de calcul ont été construits sur la base de cette méthode : UDEC (Universal Distinct Element Code) qui est voué à la résolution de problèmes dynamiques, et BRIG3D (Tahiri, 1992) qui lui, est destiné aux problèmes statiques.

Résolution explicite : UDEC (Hart et al., 1988) La méthode des éléments distincts propose de considérer les discontinuités comme des interactions entre les blocs, leur comportement étant régi par des lois liant forces et déplacements au niveau des interfaces. L'évolution de l'ouvrage est déterminé par la résolution numérique des équations du mouvement selon un schéma d'intégration explicite.

Le modèle est donc composé de deux constituants. Les blocs de matrice rocheuse possèdent un comportement de type élastoplastique, avec une plasticité de type Coulomb ou Drucker-Prager. Deux types de loi de comportement peuvent être retenus pour les joints : une loi élastoplastique avec critère de plasticité de type Mohr-Coulomb, ou la loi de l'endommagement continu.

La procédure numérique est une technique de relaxation dynamique pour résoudre les équations du mouvement. Les forces et les déplacements entre blocs peuvent être déterminés en étudiant l'équilibre dynamique des blocs considérés séparément. Pour chaque incrément en temps, les équations du problème sont obtenues en écrivant le bilan en résultante et en moment résultant pour chaque bloc considéré (forces extérieures, forces de contact entre blocs et forces d'inertie). Cette résolution adopte un schéma explicite en temps, au moyen de différences finies centrées.

Résolution statique : BRIG3D (Tahiri, 1992) Inspiré de la méthode des éléments distincts, un code de calcul adapté au cas statique a été développé par Tahiri (1992). La procédure de calcul numérique suivie est celle des éléments finis classiques. Les blocs sont considérés indéformables, leur déplacement étant donc décrit par une translation et une rotation. L'interaction entre deux blocs, initialement en contact par l'intermédiaire d'un joint, peut être alors évaluée à partir du déplacement relatif entre les deux blocs. Les forces de contact sont reliées aux déplacements relatifs du joint par l'intermédiaire

de la loi de comportement de celui-ci. La loi de comportement du joint est écrite sous forme incrémentale

L'énergie potentielle totale du modèle étudié est composée de l'énergie de déformation des joints et du travail des forces extérieures. Sa minimisation permet de lier les forces et les déplacements des blocs par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité et conduit à un système d'équations non-linéaires, les rigidités étant fonction des déformations.

4.2.2 Approche par homogénéisation

Les méthodes numériques que l'on vient de décrire sont efficaces, lorsque le réseau de joints traversant le massif est peu dense. En revanche, elles deviennent inopérantes pour les milieux fortement fracturés : calculs numériques très lourds, voire parfois insurmontables. Les approches par homogénéisation constituent alors une alternative, prenant justement avantage de la forte densité des joints. Elles découlent de l'idée intuitive selon laquelle, le massif rocheux fracturé peut être appréhendé à l'échelle de l'ouvrage comme un milieu homogène.

Le principe de la démarche d'homogénéisation est le suivant. Il consiste à substituer au problème initial défini sur l'ouvrage fracturé, un problème homogène associé (figure 13) défini sur un ouvrage

- de même géométrie que l'ouvrage initial ;
- soumis au même chargement que l'ouvrage initial ;
- constitué d'un matériau homogène équivalent dans un sens à définir.

Problématique : La problématique de cette démarche réside dans la détermination du comportement mécanique du milieu homogène équivalent. De nombreux auteurs, tels Sanchez-Palencia (1982), Suquet (1982) ou de Buhan (1986), ont montré que cette détermination découle de la résolution d'un problème aux limites (dit problème auxiliaire), défini sur la cellule de base ou le volume élémentaire représentatif (VER), selon que la structure de la fracturation est périodique ou aléatoire. Ainsi, le problème auxiliaire est un problème d'élasticité, si le matériau homogénéisé recherché doit être équivalent au sens des propriétés élastiques.

L'approche par homogénéisation permet une analyse de l'ouvrage à une échelle, dite macroscopique, de sorte que l'on ne distingue plus géométriquement les joints de la

matrice. Les hétérogénéités (joints) sont prises en compte au travers des caractéristiques mécaniques du matériau homogène équivalent, qui dépendent de celles des constituants à l'échelle microscopique.

Validité de la démarche : Par validité de la démarche, nous entendons équivalence entre les réponses mécaniques du problème hétérogène initial et du problème homogène associé.

Cette question a priori théorique, se pose en fait pour l'expérimentateur lorsqu'il s'interroge sur la capacité des résultats de ses essais à décrire le comportement d'un milieu. La réponse est bien entendu à rechercher dans la représentativité ou non des échantillons testés. La taille des échantillons est-elle suffisamment grande pour contenir toutes les informations relatives au matériau à tester ?

D'un point de vue théorique, les auteurs cités ci-dessus ont montré que la solution du problème homogène associé converge vers la solution du problème hétérogène initial lorsque la tailles des hétérogénéités est très petite devant celle d'une grandeur caractéristique de l'ouvrage. Plus précisément ici, si e , L et B désignent respectivement l'espacement inter-joint, la taille du v.e.r et la grandeur caractéristique de l'ouvrage, la validité de la démarche requiert :

- la condition $e \ll B$ dans le cas de milieu périodique;
- les conditions $L \ll B$ et $e \ll L$ dans le cas de milieu aléatoirement hétérogène.

La première condition assure qu'il est légitime de traiter l'ouvrage comme un milieu continu, alors que la seconde est nécessaire pour pouvoir caractériser le comportement du v.e.r par une loi homogène équivalente. Ces conditions sont habituellement dites *conditions de séparation des échelles*.

L'application de la démarche d'homogénéisation a déjà été appliquée avec succès dans le cadre de la thèse de Fréard (2000), pour l'analyse de stabilité des massifs rocheux fracturés. Par ailleurs, une étude (de Buhan *et al.* (2001)) portant sur les effets d'échelle a permis de montrer la complémentarité entre les approches directes et les approches par homogénéisation : à chacune son domaine de pertinence.

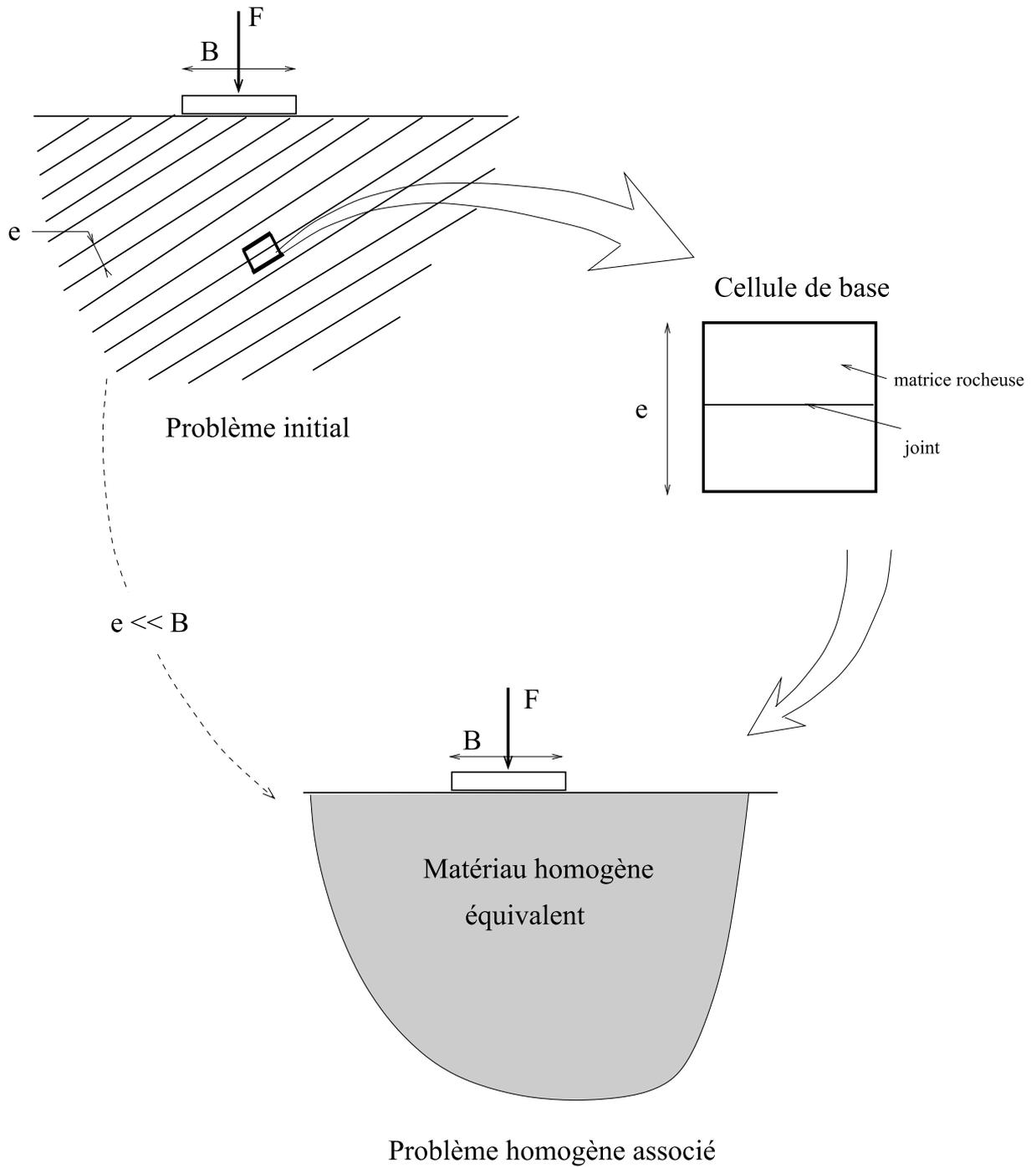


FIG. 13: Principe général de la démarche d'homogénéisation

5 Références

- Amadei B., Saeb S., 1990. *Constitutive models of rock joints*, Proc. Int. Symp. Rock Joints, Loen, Norway, pp. 587-594.
- Bandis S.C., Lumbdsen A.C., Barton N.R., 1983. *Fundamentals of rock joint deformation*, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 20, n°6, pp. 249-268.
- Barton N., 1973. *Review of a new shear strength criterion for rock joint*, Engineering geology, Vol. 7, pp. 287-332.
- Barton N., Lien R., Lunde J., 1974. *Engineering Classification of Rocks Masses for the Design of Tunnel Support*, Rock Mechanics, Vol. 6, pp. 189-236.
- Barton N., Choubey V., 1977. *The shear strength of rock joints in theory and practice*, Rock Mechanics, Vol. 10, pp. 1-54.
- Benlloun Zahar H., 1991. *Etude expérimentale et modélisation du comportement hydro-mécanique des joints rocheux*, Thèse de l'Université de J. Fourier, Grenoble.
- Bieniawski Z. T., 1973. *Engineering classification of jointed rock masses*, Trans. S. Afr. Instn. Civ. Engrs, Vol. 15, n°12, pp. 335-344.
- Bieniawski Z. T., 1974. *Rock mechanics design in mining and tunneling*, A.A. Balkema, Rotterdam.
- Bieniawski Z. T., 1979. *The Geomechanics Classification of rock masses and its application in tunneling*, Proc. 3rd Congr. Int. Soc. Rock Mech., Denver, Vol. 2, part A, pp. 27-32.
- de Buhan P., 1986. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse Doctorat d'Etat, Université Paris VI, Paris.
- de Buhan P., Fréard J., Garnier D., Maghous S. *Failure properties of fractured rock masses as anisotropic homogenized media*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 128(8), 869-875.
- Cundall P.A., 1971. *A computer model for simulation progressive, large scale movements in blocky rock systems*, Int. Symp. on rock fracture ISRM, Nancy (France), Vol. 1, paper n° II-8.

Deere D.U., 1964. *Technical description of rock cores for engineering purposes*, Rock Mechanics and Rock Engineering, Vol. 1, pp, 17-22.

Fréard J., 2000. *Analyse de la stabilité des massifs rocheux fracturés par une méthode d'homogénéisation*, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Goodman R.E., 1974. *The mechanical properties of joints*, Proc. 3rd Cong. ISRM, Denver, vol. 1A, pp. 127-140.

Goodman R.E., 1976. *Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rock*, New York, West Publishing Compagny Goodman.

Goodman R.E., Bray J.W., 1976. *Toppling of rock slopes in rock engineering for foundations and slopes*, Special conference ASCE, Boulder, Colorado, Vol. 2, pp. 2001-234.

Goodman R.E., Shi G.H., 1985. *Block theory and its application to rock engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Goodman R.E., Shi G.H., 1989. *The key block of unrolled joint traces in developed maps of tunnel walls*, Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 13, pp. 131-158.

Hart R., Cundall P.A., Lemos, 1988. *Formulation of a three-dimensional distinct element model - Part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 25, n°3, pp. 117-125.

Hoek E., 1968. *Brittle fracture of rock*, Rock Mechanics in Engineering Practice, John Wiley & Sons, London, pp. 93-124.

Hoek E., Brown E.T., 1980. *Empirical strength criterion for rock masses*, J. Geotech. Engng. Div. Am. Soc. Civ. Engrs, Vol. 106, GT9, pp. 1013-1035.

Hoek E., 1983. *Strength of jointed rock masss*, Geotechnique 33, n°3, pp. 187-223.

Murrell S.A., 1965. *The effect of triaxial stress system on the strength of rock at atmospheric temperatures*, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Vol. 10, pp. 231-281.

Nguyen T.S., Selvadurai A.P.S., 1998. *A model for coupled mechanical and hydraulic behaviour of a rock joint*, Int. J. Numer. Anal. Methods geomech., Vol. 22, pp. 29-48.

Plesha M.E., 1987. *Constitutive models for rock discontinuities with dilatancy and surface degradation*, Int. J. Numer. Anal. Methods geomech., Vol. 11, pp. 345-362.

Sanchez-Palencia E., 1980. *Non homogeneous media and vibration theory*. Lectures Notes in Physics, 127, Springer Verlag, Berlin.

Souley M., 1993. *Modélisation des massifs rocheux fracturés par la méthode des éléments distincts : Influence de la loi de comportement des discontinuités sur la stabilité des ouvrages*, Thèse de l'I.N.P.L., Nancy.

Suquet P., 1982. *Plasticité et homogénéisation*, Thèse Doctorat d'Etat, Université Paris VI, Paris.

Tahiri A., 1992. *Modélisation des massifs rocheux fissurés par la méthode des éléments distincts*, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Warburton P.M., 1980. *A stereological interpretation of joint data trace*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 17, pp. 181-190.

Warburton P.M., 1981. *Vector stability analysis of an arbitrary polyhedral rock block with any number of free faces*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 18, pp. 415-427.

CHAPITRE 2

Formulation du comportement homogénéisé en élastoplasticité

Sommaire

1. Echelle et hypothèses de la modélisation
2. Critère de résistance macroscopique du milieu à joints
 - 2.1 Le cas périodique
 - 2.2 Le cas d'une distribution non périodique de joints
3. Elasticité macroscopique du milieu à joints
 - 3.1 Le cas périodique
 - 3.2 Commentaires sur les interactions entre joints
 - 3.3 Extension au cas non périodique
4. Comportement élastoplastique homogénéisé du milieu rocheux fracturé
 - 4.1 Distribution périodique de joints
 - 4.2 Extension au cas non périodique
 - 4.3 Quelques commentaires

1 Echelle et hypothèses de la modélisation

L'une des caractéristiques principales des milieux rocheux est la présence à différentes échelles de discontinuités. Celles-ci englobent aussi bien les micro-fissures (quelques *mm* d'extension) que les joints pouvant atteindre plusieurs dizaines de *mètres*. Ce chapitre étant dédié à la mise en œuvre des outils de la micromécanique pour formuler le comportement d'un milieu rocheux à partir de celui de ses composantes, il convient donc de préciser au préalable l'échelle adoptée pour la description de celles-ci.

Tout au long de ce travail, on se place à une échelle où le milieu rocheux est perçu comme un assemblage de blocs homogènes séparés par des joints. Ces derniers constituent la seule hétérogénéité considérée pour le milieu rocheux. A cette échelle, le milieu rocheux est donc entièrement décrit par deux 'phases' :

- la **matrice rocheuse** modélisée comme **un milieu homogène** et faisant référence aux blocs ;
- les **joints**

A une échelle plus fine, la matrice rocheuse est constituée de la roche saine comportant d'éventuelles hétérogénéités (généralement fissures), qualifiées ici de micro-hétérogénéités en comparaison avec les joints qui constituent des hétérogénéités à la grande échelle. Cette homogénéité supposée pour la matrice peut découler d'un processus d'homogénéisation préalable, tel que schématisé par la figure 1, et que l'on admet effectué par ailleurs. De nombreux travaux ont été consacrés à la formulation du comportement homogénéisé prenant en compte la présence de fissures au sein de la roche saine. A cet effet, le lecteur pourra se référer par exemple à Pensée *et al.* (2002-a, 2002-b); Deudé *et al.* (2002-a, 2002-b); Dormieux et Kondo (2004); Kachanov (); Nemat-Nasser (1993). Au terme de ce processus, la contrepartie de cette homogénéité retrouvée réside dans le fait que le comportement 'local' de la matrice est éventuellement de nature anisotrope.

Géométriquement, un joint occupe un domaine (tridimensionnel) de faible épaisseur. Schématiquement, il s'agit d'un espace, délimité par deux surfaces, plus ou moins rempli de matériaux. Compte tenu de ses dimensions, le joint est modélisé comme une interface, géométriquement décrite par une surface dont l'orientation est définie par un vecteur unitaire normal \underline{n} . Son comportement est décrit par des relations entre le vecteur contrainte \underline{T} agissant sur le joint et le saut de déplacement $[\underline{\xi}]$ au passage de celui-ci (figure 2). On pourra se reporter à de Buhan et Maghous (1997) pour le lien entre le modèle 3D et le modèle interface correspondant, dans le cas particulier du comportement élastique.

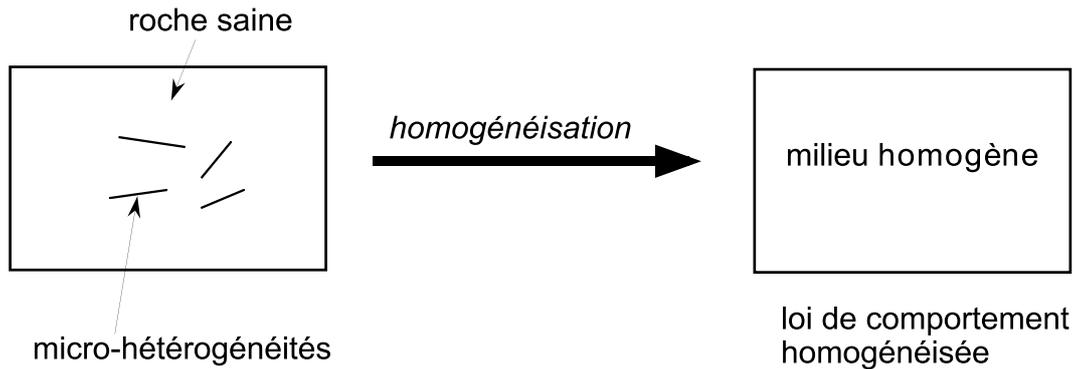


FIG. 1: Homogénéisation préliminaire de la matrice rocheuse.

On se limitera dans toute la suite au cas où les **joints** sont **plans** et d'**extension infinie**.

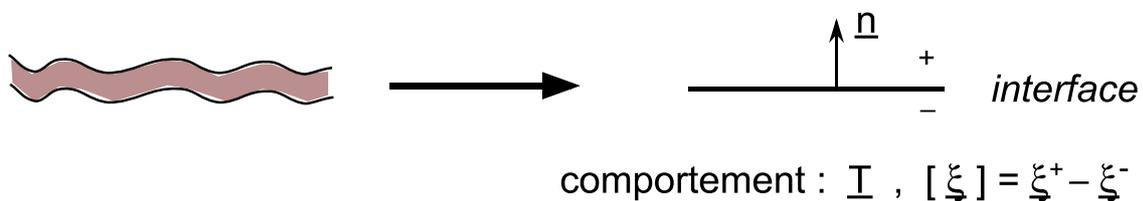


FIG. 2: Modélisation du joint comme une interface.

En résumé, la démarche que l'on suivra pour formuler le comportement macroscopique du milieu rocheux est schématisée par la figure 3.

Bien que la démarche d'homogénéisation sera mise en œuvre essentiellement dans le cas de réseau périodique de joints, des éléments pour l'extension des résultats au cas non périodique seront précisés. Il est à noter que dans ce travail, on se placera dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

2 Critère de résistance macroscopique du milieu à joints

On examine dans cette section la question des capacités de résistance du milieu rocheux fracturé, en mettant en œuvre les outils du calcul à la rupture (Salençon 1983, 1990). Après avoir rappelé les résultats établis dans Bekaert et Maghous (1996) et Fréard (2000) pour un schéma de fracturation périodique, on abordera le cas d'une distribution aléatoire de joints. On verra que, en dehors de l'hypothèse de périodicité, une difficulté majeure surgit quant à la définition même du critère de résistance macroscopique.

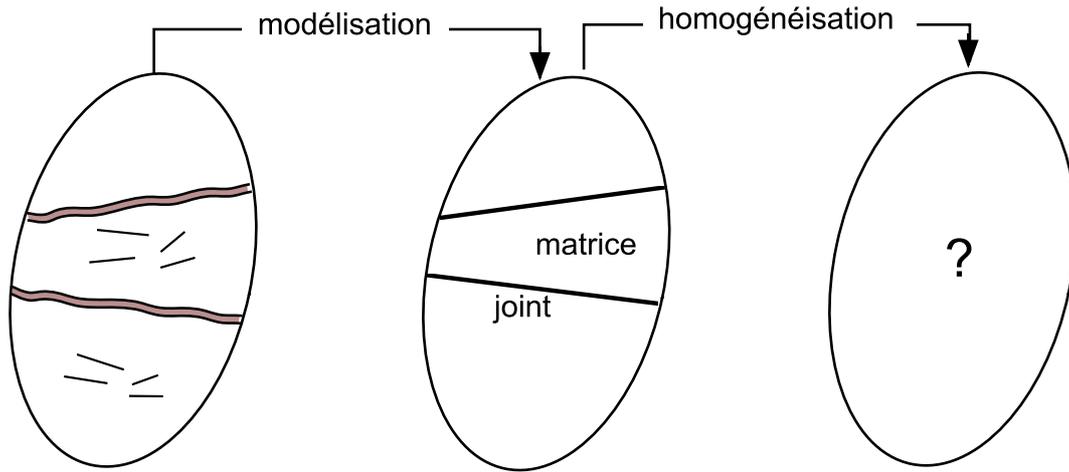


FIG. 3: Démarche vers le comportement homogénéisé du milieu rocheux fracturé.

2.1 Le cas périodique

On considère la situation où la matrice rocheuse est traversée par une distribution régulière de joints plans, telle que la cellule de base \mathcal{A} soit un volume parallélépipédique contenant p (p compris entre 1 et 3) joints (voir figure 4). Chaque joint \mathcal{P}_j est caractérisé par sa normale \underline{n}_j .

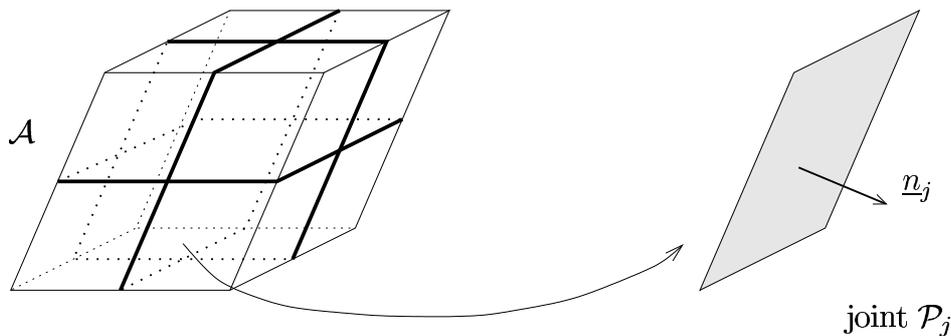


FIG. 4: Cellule de base du milieu rocheux périodique.

La construction du domaine de résistance G^{hom} du milieu homogénéisé à partir de celui de ses constituants, résulte de la résolution d'un problème de calcul à la rupture posé sur \mathcal{A} (Suquet, 1983; de Buhan, 1986). On caractérise les capacités de résistance de la matrice rocheuse (homogène) par un domaine convexe G^r de \mathcal{R}^6 et celles du joint j , modélisé comme une interface, par un domaine convexe G^j de \mathcal{R}^3 , formé par les vecteurs contraintes admissibles \underline{T} agissant sur le joint.

Le domaine G^{hom} est défini par

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \iff \exists \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S} \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^r \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{A} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_j \in \mathcal{G}^j \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{P}_j, \quad j = 1, p \end{cases} \quad (1)$$

où \mathcal{S} désigne l'ensemble des champs de contraintes définis sur \mathcal{A} et vérifiant les conditions d'équilibre (*i.e* $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0$, $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ continue et $\underline{\underline{\sigma}}$ \mathcal{A} -périodique). La notation $\langle . \rangle$ désigne l'opérateur moyenne volumique sur la cellule \mathcal{A} :

$$\langle . \rangle = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{A}} . \, d\mathcal{A} \quad (2)$$

Partant de cette définition, on montre (voir Bekaert et Maghous (1996)) que

$$G^{hom} = G^r \cap G^{int} \quad (3)$$

où le domaine G^{int} de \mathcal{R}^6 est défini par

$$G^{int} = \{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_j \in \mathcal{G}_j \quad \forall j = 1, p \} = \bigcap_{j=1}^p \{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_j \in \mathcal{G}_j \} \quad (4)$$

G^{int} représente tout simplement le domaine de résistance macroscopique dans le cas, assez courant, où les capacités de résistance de la matrice rocheuse peuvent être considérées comme très grandes devant celles des joints (*i.e* $G^r \simeq \mathcal{R}^6$).

Se plaçant dans l'espace des contraintes macroscopiques, l'interprétation géométrique de la définition (3) du domaine macroscopique est donnée par la figure 5.

L'identité (3) illustre d'une part, le fait que la construction de G^{hom} ne requiert aucune information relative au comportement des constituants autre que celle concernant leur résistance, et d'autre part, que ses propriétés découlent directement de celles satisfaites au niveau des constituants. Ainsi, la convexité de G^{hom} résulte de la convexité de G^r et des \mathcal{G}^j .

D'une manière équivalente, G^{hom} peut être caractérisé par une fonction critère portant sur le tenseur des contraintes macroscopique. Plus précisément, si f^r et f^{int} désignent les fonctions critères de résistance correspondant aux domaines G^r et G^{int} , le critère de résistance macroscopique s'écrit

$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \max(f^r(\underline{\underline{\Sigma}}), f^{int}(\underline{\underline{\Sigma}})) \leq 0 \quad (5)$$

En utilisant la définition de G^{int} on a encore

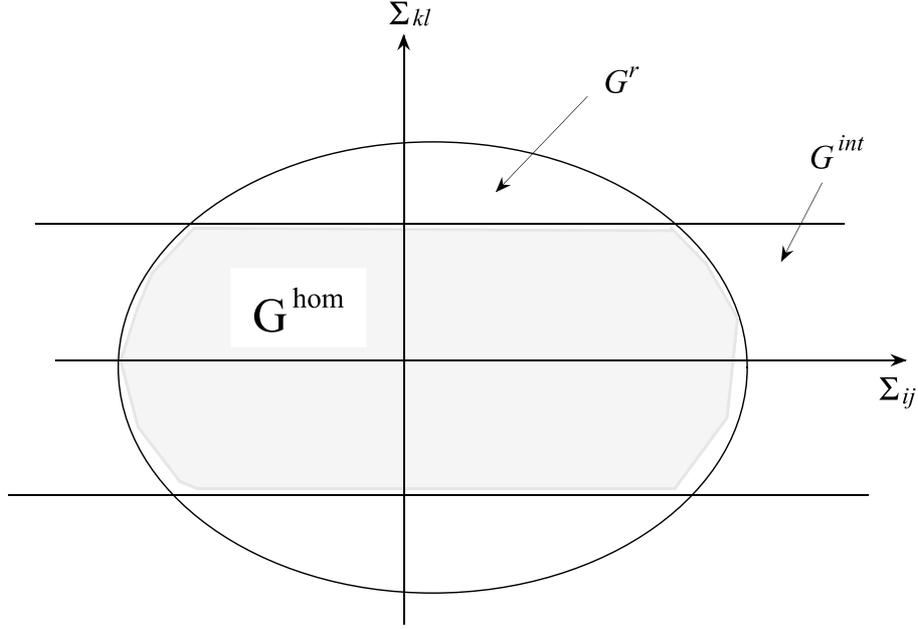


FIG. 5: Domaine de résistance macroscopique du milieu rocheux fracturé.

$$F^{hom}(\underline{\Sigma}) = \max(f^r(\underline{\Sigma}), f^1(\underline{\Sigma}), \dots, f^p(\underline{\Sigma})) \leq 0 \quad (6)$$

f^j étant la fonction critère pour le joint j exprimée en terme de tenseur de contraintes :

$$f^j(\underline{\sigma}) \leq 0 \iff \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_j \in \mathcal{G}_j \quad (7)$$

Signalons enfin que l'anisotropie de résistance du milieu homogénéisé se manifeste clairement dans l'expression de G^{hom} par les directions privilégiées \underline{n}_j .

2.2 Le cas d'une distribution non périodique de joints

Bien que la condition de périodicité stricte du réseau de joints puisse paraître de prime abord très limitative, ce qui réduirait significativement la portée des résultats établis en **2.1**, il faut souligner que les discontinuités naturelles d'un massif rocheux présentent fréquemment un ensemble structuré avec des orientations bien définies. D'un point de vue géométrique, l'usage est de les regrouper en quelques familles principales de joints caractérisées chacune par une orientation, seul l'espacement inter-joints d'une même famille n'étant quant à lui pas nécessairement constant.

On va examiner maintenant, du point de vue des capacités de résistance, la situation non périodique. On suppose qu'il est possible de définir pour le milieu rocheux un volume élémentaire représentatif (VER), noté \mathcal{V} , constitué de la matrice rocheuse traversée par un réseau de joints plans et débouchants. Plus précisément, on considère que le VER contient p (p entier quelconque) familles de joints, caractérisées chacune par une orientation \underline{n}_j , $j = 1, p$. Le VER \mathcal{V} est schématisé par la figure 6.

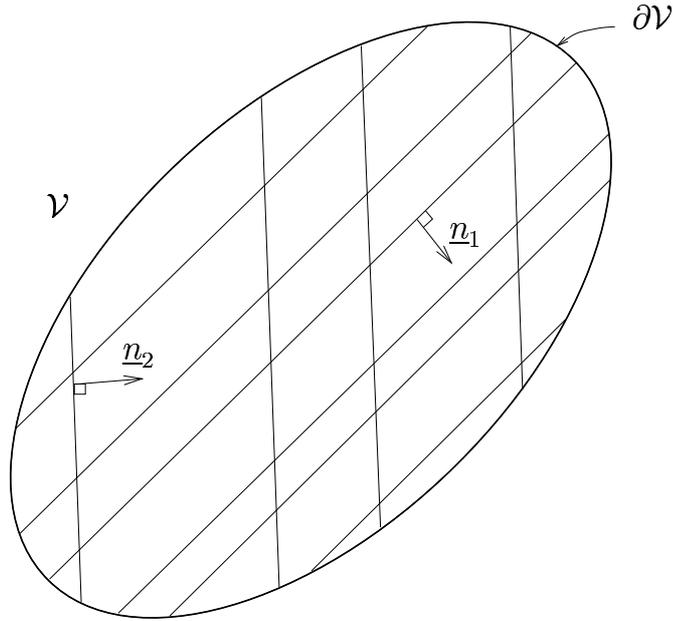


FIG. 6: Volume élémentaire représentatif pour le milieu rocheux fracturé (ici $p = 2$).

Si, en homogénéisation périodique, le mode de chargement de la cellule de base est défini de manière unique, il n'en est pas de même en homogénéisation des milieux aléatoires. Dans cette dernière théorie, on définit classiquement deux types de mode de chargement du VER (Zaoui 1996; Bornert et al., 2001) :

- en imposant une contrainte homogène sur le bord $\partial\mathcal{V}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{V} \quad (8)$$

ou

- en imposant une déformation homogène sur le bord $\partial\mathcal{V}$:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{V} \quad (9)$$

où \underline{v} désigne le champ des vitesses dans le VER. Rappelons que le taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ associé à \underline{v} est donné par la relation :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{v} + {}^t \text{grad } \underline{v}) \quad (10)$$

Si le mode de chargement est défini par la relation (8), on montre alors que la contrainte macroscopique est la moyenne sur le VER de la contrainte microscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} \underline{\underline{\sigma}} \, d\mathcal{V} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad (11)$$

et on définit le taux de déformation macroscopique comme la moyenne $\langle \underline{d} \rangle$ sur le VER du taux de déformation microscopique \underline{d} .

En revanche, si le mode de chargement est défini par la relation (9), on montre que

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} \underline{d} \, d\mathcal{V} = \langle \underline{d} \rangle \quad (12)$$

et on définit la contrainte macroscopique comme la moyenne $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ sur le VER de la contrainte microscopique.

Comme le mode de chargement peut être défini de deux manières différentes, on dispose tout naturellement de deux définitions distinctes pour les capacités de résistance macroscopique.

2.2.1 Contrainte homogène sur le bord du VER

Lorsque le mode de chargement est défini par (8), le domaine de résistance macroscopique, noté G_{Σ}^{hom} , est défini par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{\Sigma}^{hom} \iff \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{V} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^r \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_k \in \mathcal{G}^k \quad \forall \underline{x} \in \text{joint } k \end{cases} \quad (13)$$

où $\mathcal{G}^k \subseteq \mathcal{R}^3$ est le domaine de résistance d'un joint k quelconque du VER, de normale \underline{n}_k .

On effectue une approche statique de G_{Σ}^{hom} en considérant le champ de contrainte homogène :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V} \quad (14)$$

qui fournit l'inclusion

$$G^r \cap G^{int} \subseteq G_\Sigma^{hom} \quad (15)$$

Les joints d'une même famille \mathcal{P}_j étant tous caractérisés par le même convexe \mathcal{G}^j , le domaine G^{int} est défini par (4) exactement comme dans le cas périodique (sauf qu'ici p fait référence au nombre de familles de joints présentes dans le VER).

L'approche cinématique du domaine de résistance macroscopique fait appel à deux classes de champs de vitesse. Tout d'abord, le champ de vitesses correspondant à un taux de déformation homogène dans le VER conduit à la relation

$$G_\Sigma^{hom} \subseteq G^r \quad (16)$$

La seconde classe de champs de vitesses est définie de la manière suivante. Considérons un joint k quelconque, de normale \underline{n}_k . On désigne par \mathcal{V}^+ et \mathcal{V}^- les domaines situés respectivement au-dessus et au-dessous de ce joint, selon le sens défini par \underline{n}_k (voir figure 7). \underline{w} étant un vecteur quelconque, on examine le champ de vitesses défini par :

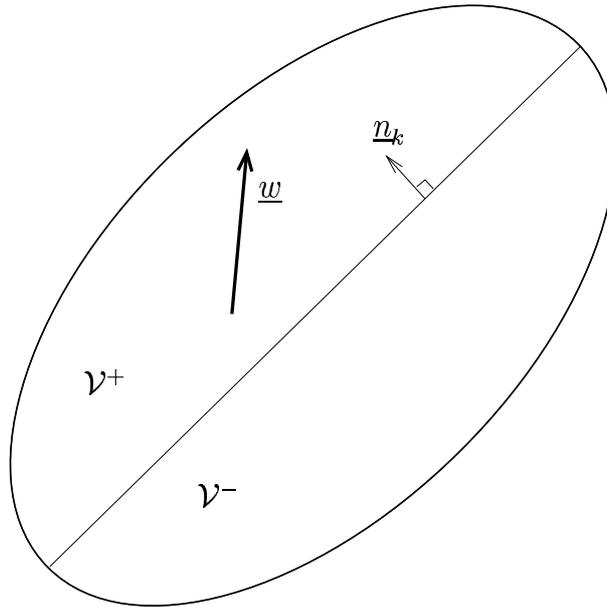


FIG. 7: Champ de vitesse discontinu le long du joint k .

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{w} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{V}^+ \\ \underline{0} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{V}^- \end{cases} \quad (17)$$

L'application de l'inégalité cinématique du calcul à la rupture à l'aide de ce champ discontinu le long du joint j , s'écrit

$$(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_k) \cdot \underline{w} \leq \pi(\underline{n}_k, \underline{w}) \quad \forall \underline{w} \quad (18)$$

où $\pi(\underline{n}_k, \underline{w}) = \sup \{ \underline{T} \cdot \underline{w} ; \underline{T} \in \mathcal{G}^j \}$ est la fonction d'appui du convexe \mathcal{G}^j .
L'inégalité (18) traduit tout simplement que

$$G_{\Sigma}^{hom} \subseteq \{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_k \in \mathcal{G}_k \} \quad (19)$$

Ceci étant vrai pour tout choix du joint k du VER, il vient que

$$G_{\Sigma}^{hom} \subseteq G^{int} \quad (20)$$

La combinaison de (15), (16) et (20) montre que

$$G_{\Sigma}^{hom} = G^r \cap G^{int} \quad (21)$$

résultat identique à celui obtenu pour une distribution périodique de joints.

2.2.2 Déformation homogène sur le bord du VER

Le mode de chargement est maintenant décrit par (9). Le domaine de résistance macroscopique, noté G_D^{hom} , est défini par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{hom} \iff \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^r \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_k \in \mathcal{G}^k \quad \forall \underline{x} \in \text{joint } k \end{cases} \quad (22)$$

On montre facilement que

$$G_{\Sigma}^{hom} = G^r \cap G^{int} \subseteq G_D^{hom} \subseteq G^r \quad (23)$$

Il suffit pour cela de mettre en œuvre :

- une approche statique avec un champ de contrainte homogène dans le v.e.r,
- une approche cinématique avec le champ de vitesse $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{D} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V}$ (i.e. taux de déformation homogène dans le VER).

En revanche, il s'avère très difficile, voire impossible, de construire complètement le domaine G_D^{hom} de manière analytique. Ceci est lié à la difficulté de définir sur le v.e.r des champs de vitesses exhibant des sauts au niveau des joints (c'est à dire faisant travailler les capacités de résistance de ceux-ci) tout en restant compatibles avec la donnée aux limites (9).

2.2.3 Commentaires

Etant donné un milieu hétérogène, on désigne par L et e les tailles caractéristiques respectivement du VER et des hétérogénéités.

En homogénéisation élastique linéaire, Hill (1967) et Mandel (1972) ont établi que si la condition de séparation des échelles $e \ll L$ est satisfaite, alors les approches en contrainte et en déformation homogènes sont équivalentes pour la détermination de la rigidité élastique macroscopique.

En revanche, on ne dispose pas d'un résultat analogue, pour la détermination des capacités de résistance macroscopique, qui assurerait l'identité entre les domaines G_{Σ}^{hom} et G_D^{hom} . D'un point de vue purement théorique, les conditions d'équivalence entre les deux approches définies en 2.2.1 et 2.2.2 ne sont pas établies. Il s'agit donc d'un problème qui demeure ouvert. Cependant, on peut raisonnablement espérer que si la condition de séparation des échelles est satisfaite (dans notre cas e désignerait la valeur caractéristique de l'espacement inter-joints), les domaines G_{Σ}^{hom} et G_D^{hom} seraient peu différents.

On adoptera dans toute la suite G_{Σ}^{hom} (puisque déterminé de manière exacte) comme domaine de résistance macroscopique du milieu rocheux fracturé. En d'autres termes, on le supposera défini en se donnant un mode de chargement décrit par des conditions homogènes en contrainte.

3 Elasticité macroscopique du milieu à joints

Toujours dans le cadre de la formulation du comportement homogénéisé du milieu rocheux fracturé, on se penche maintenant sur la question de la détermination des propriétés élastiques à l'échelle macroscopique. Comme pour les capacités de résistance macroscopique, on commence par examiner la situation d'une distribution périodique de joints.

Le comportement élastique de la matrice rocheuse peut résulter d'une homogénéisation préalable prenant en compte d'éventuelles micro-hétérogénéités (voir section 1). Il est décrit par une relation contrainte-déformation du type :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\mathcal{C}}^r(\underline{\epsilon}) : \underline{\dot{\epsilon}} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\mathcal{S}}^r(\underline{\sigma}) : \underline{\dot{\sigma}} \quad (24)$$

$\underline{\mathcal{C}}^r$ et $\underline{\mathcal{S}}^r$ sont les tenseurs d'élasticité et de souplesse tangents de la matrice. Les relations (24) prennent en compte une éventuelle non linéarité élastique (dépendance de $\underline{\mathcal{C}}^r$ de la

déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$, dépendance de $\underline{\underline{s}}^r$ de la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$).

Modélisé comme une interface, le comportement élastique d'un joint \mathcal{P}_j de normale \underline{n}_j , s'exprime par une relation entre le vecteur contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_j$ agissant sur le joint et le saut de déplacement $[\underline{\xi}]$ au passage de celui-ci :

$$\underline{\dot{T}} = \underline{\underline{c}}^j([\underline{\xi}]) \cdot [\underline{\dot{\xi}}] \quad \text{ou encore} \quad [\underline{\dot{\xi}}] = \underline{\underline{s}}^j(\underline{T}) \cdot \underline{\dot{T}} \quad (25)$$

où $\underline{\underline{c}}^j$ et $\underline{\underline{s}}^j$ représentent les tenseurs d'élasticité et de souplesse tangents. Ces deux tenseurs peuvent être identifiés à partir des nombreux travaux expérimentaux menés sur les joints (voir par exemple Goodman (1976) et Bandis *al.* (1983)).

Notations.

10 • On omettra dans la suite d'écrire la dépendance de $\underline{\underline{c}}^r$ et $\underline{\underline{s}}^r$ respectivement en $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$,
 ainsi que celle de $\underline{\underline{c}}^j$ et $\underline{\underline{s}}^j$ respectivement vis à vis de $[\underline{\xi}]$ et \underline{T} .

8 • On introduira pour chaque joint \mathcal{P}_j , les vecteurs unitaires \underline{t}_j et \underline{t}'_j parallèles au plan
 du joint et tels que le trièdre $(\underline{e}_1^j = \underline{t}_j, \underline{e}_2^j = \underline{t}'_j, \underline{e}_3^j = \underline{n}_j)$ soit orthonormé.

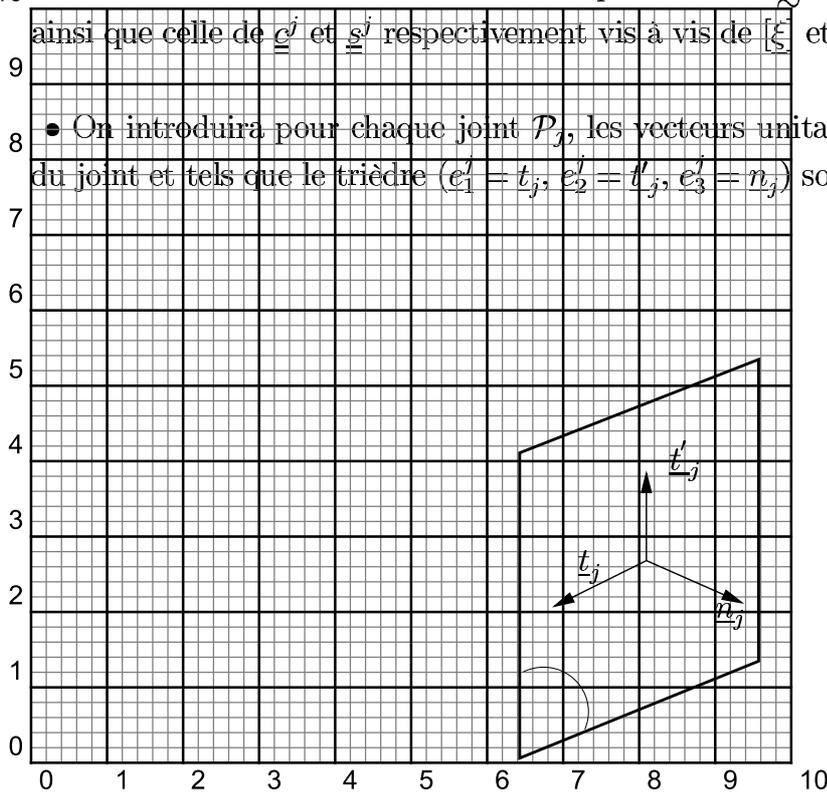


FIG. 8: Schématisation du trièdre orthonormé rattaché au joint \mathcal{P}_j .

3.1 Le cas périodique

On se place dans la situation décrite en section 2.1. La cellule de base \mathcal{A} du milieu rocheux fracturé est celle représentée sur la figure 4, page 38. La construction du comportement élastique macroscopique découle de la résolution d'un problème d'évolution élastique formulé sur \mathcal{A} de la manière suivante :

Soit $\underline{\underline{\Sigma}}$ une valeur de la contrainte macroscopique équilibrée par le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}$ *homogène* dans la cellule \mathcal{A} (état de contrainte initial). Pour un taux de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$ donné, il s'agit de trouver le couple $(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \underline{\underline{\dot{\xi}}})$ solution en taux de contrainte et déplacement du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \rangle = \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} \\ \text{div } \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{T}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ continu} \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \text{ périodique} \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{\xi}}} - \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{x}} \text{ périodique} \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathcal{C}}}^r : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \\ \underline{\underline{\dot{T}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{n}}_j = \underline{\underline{\mathcal{C}}}^j \cdot [\underline{\underline{\dot{\xi}}}] \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \mathcal{P}_j \quad , \quad j = 1, p \end{array} \right. \quad (26)$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}$ est la déformation associée à $\underline{\underline{\xi}}$. Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ est le gradient macroscopique du champ de déplacement :

$$\underline{\underline{F}} = \langle \underline{\underline{\text{grad } \xi}} \rangle + \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{j=1,p} \int_{\mathcal{P}_j} [\underline{\underline{\xi}}] \otimes \underline{\underline{n}}_j dS \quad (27)$$

Rappelons que la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ est la partie symétrique de $\underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle + \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{j=1,p} \int_{\mathcal{P}_j} [\underline{\underline{\xi}}] \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{n}}_j dS \quad (28)$$

Dans cette écriture, le terme $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ fait bien évidemment référence à la moyenne de la déformation dans la matrice rocheuse et $[\underline{\underline{\xi}}] \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{n}}_j = ([\underline{\underline{\xi}}] \otimes \underline{\underline{n}}_j + \underline{\underline{n}}_j \otimes [\underline{\underline{\xi}}])/2$

En fait, on montre que la solution en taux de contrainte du problème (26) est *homogène* dans la cellule $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$, ce qui en justifie au passage l'homogénéité du champ de contrainte initial. Le champ $\underline{\underline{\dot{\xi}}}$ solution, affine par morceaux, est discontinu au passage des joints et s'écrit :

$$[\underline{\underline{\dot{\xi}}}] = \underline{\underline{s}}^j(\underline{\underline{T}}) \cdot \underline{\underline{\dot{T}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{T}}} = \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} \cdot \underline{\underline{n}}_j \quad (29)$$

le long du joint \mathcal{P}_j . La périodicité du champ $\underline{\underline{\dot{\xi}}} - \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{x}}$ est facile à vérifier.

Compte tenu de (29), la relation de moyenne (28) exprimée en vitesse s'écrit :

$$\underline{\dot{E}} = \underline{s}^r : \underline{\dot{\Sigma}} + \sum_{j=1,p} \frac{1}{\ell_j} \left(\underline{s}^j \cdot \underline{\dot{\Sigma}} \cdot \underline{n}_j \right) \otimes^s \underline{n}_j = \underline{\mathcal{S}}^{hom}(\underline{\Sigma}) : \underline{\dot{\Sigma}} \quad (30)$$

$\underline{\mathcal{S}}^{hom}$ représente le tenseur de souplesse tangent du milieu homogénéisé. $\underline{s}^r = \underline{s}^r(\underline{\Sigma})$ et $\underline{s}^j = \underline{s}^j(\underline{\Sigma} \cdot \underline{n}_j)$. On obtient alors en introduisant les composantes $s_{\alpha\beta}^j$ du tenseur \underline{s}^j dans le repère $(\underline{e}_1^j, \underline{e}_2^j, \underline{e}_3^j = \underline{n}_j)$ défini par le plan du joint \mathcal{P}_j et sa normale :

$$\underline{\mathcal{S}}^{hom} = \underline{s}^r + s_{\alpha\beta}^j \frac{1}{\ell_j} \underline{e}_\alpha^j \otimes^s \underline{n}_j \otimes \underline{e}_\beta^j \otimes^s \underline{n}_j \quad (31)$$

avec sommation sur $j = 1, p$, $\alpha = 1, 3$ et $\beta = 1, 3$.

Cette expression met clairement en évidence la non-linéarité de l'élasticité macroscopique comme conséquence de celle du joint (et celle éventuelle de la matrice rocheuse), ainsi que l'anisotropie élastique qui se manifeste à travers l'orientation des joints (et l'anisotropie éventuelle de \underline{s}^r).

Illustration.

A titre d'exemple, on va expliciter l'expression de $\underline{\mathcal{S}}^{hom}$ dans le cas d'une famille de joints ($p = 1$). On adopte pour le comportement élastique du joint les relations classiques, proposées par Goodman (1976) et Bandis *et al.* (1983) à partir d'essais expérimentaux (on omet l'indice j) :

$$\tau_1 = k_1 [\xi_1] \quad ; \quad \tau_2 = k_2 [\xi_2] \quad ; \quad \sigma = k_3 \frac{[\xi_3]}{1 + [\xi_3]/\xi_0} \quad (32)$$

où $\sigma = \underline{T} \cdot \underline{e}_3$ est la contrainte normale, $\tau_1 = \underline{T} \cdot \underline{e}_1$ et $\tau_2 = \underline{T} \cdot \underline{e}_2$ étant les contraintes tangentielles¹. k_1 et k_2 sont les raideurs tangentielles, k_3 est la raideur initiale dans la direction normale et $\xi_0 > 0$ représente la fermeture maximale du joint.

Posant $\underline{\delta} = [\underline{\xi}]/\ell$, on observe que le comportement donné par (32) dérive bien d'un potentiel $\phi(\underline{\delta})$

$$\underline{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\delta}} \quad \text{avec} \quad \phi = \ell \left(k_3 \delta_0 [\delta_3 - \delta_0 \ln(\delta_3 + \delta_0)] + \frac{1}{2} k_1 \delta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \delta_2^2 \right) \quad (33)$$

avec $\delta_0 = \xi_0/\ell$. Le potentiel ϕ est convexe par rapport à ses argument δ_i . On en déduit que les tenseurs d'élasticité et de souplesse tangents s'expriment par :

¹la normale au joint est $\underline{n} = \underline{e}_3$, les vecteurs \underline{e}_1 et \underline{e}_2 appartiennent au plan du joint.

$$\underline{\underline{c}} = k_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + k_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{k_3}{(1 + [\xi_3]/\xi_0)^2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (34)$$

et

$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{k_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{k_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{1}{k_3 \left(1 - \frac{\sigma}{k_3 \xi_0}\right)^2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (35)$$

D'où l'expression suivante pour $\underline{\underline{S}}^{hom}$

$$\underline{\underline{S}}^{hom} = \underline{\underline{S}}^r + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\ell k_i} \underline{e}_i \overset{s}{\otimes} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_i \overset{s}{\otimes} \underline{e}_3 + \frac{1}{\ell k_3 \left(1 - \frac{\Sigma_{33}}{k_3 \xi_0}\right)^2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (36)$$

L'anisotropie de comportement du milieu rocheux fracturé ainsi homogénéisé peut être illustrée, à partir de (36), en calculant son module de rigidité **tangent** dans la direction \underline{u} du plan (2, 3) incliné d'un angle θ par rapport au plan des joints (figure 9(a)). Partant d'un état de contrainte uniaxiale de la forme $\Sigma_o \underline{u} \otimes \underline{u}$, on impose un taux de contrainte dans la même direction, soit $\dot{\Sigma}_o \underline{u} \otimes \underline{u}$. Le module de rigidité en question, noté $E^{hom}(\theta)$, est défini comme le rapport de l'intensité $\dot{\Sigma}_o$ à la composante correspondante du taux de déformation provoquée par une telle sollicitation :

$$E^{hom}(\theta) = \frac{\dot{\Sigma}_o}{\underline{\underline{\dot{E}}} : (\underline{u} \otimes \underline{u})} \quad (37)$$

Supposant que le comportement élastique de la matrice est linéaire isotrope, et notant par E_r son module d'Young, il vient :

$$E^{hom}(\theta) = \left(\frac{1}{E_r} + \frac{\sin^4 \theta}{\ell k_3 \left(1 - \frac{\Sigma_o \sin^2 \theta}{k_3 \xi_0}\right)^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\ell k_2} \right)^{-1} \quad (38)$$

En particulier,

$$E^{hom}(0) = E_r \quad ; \quad E^{hom}(\pi/2) = \left(\frac{1}{E_r} + \frac{1}{\ell k_3 \left(1 - \frac{\Sigma_o}{k_3 \xi_0}\right)^2} \right)^{-1} \quad (39)$$

Les résultats sont reportés sur la figure 9(b) sous la forme de courbes donnant les variations du rapport $E^{hom}(\theta)/E_r$ en fonction de θ pour différentes valeurs de la contrainte Σ_o (compression). On constate une brusque décroissance de ce rapport dès que la direction de la sollicitation appliquée s'écarte du plan des joints, traduisant la forte anisotropie

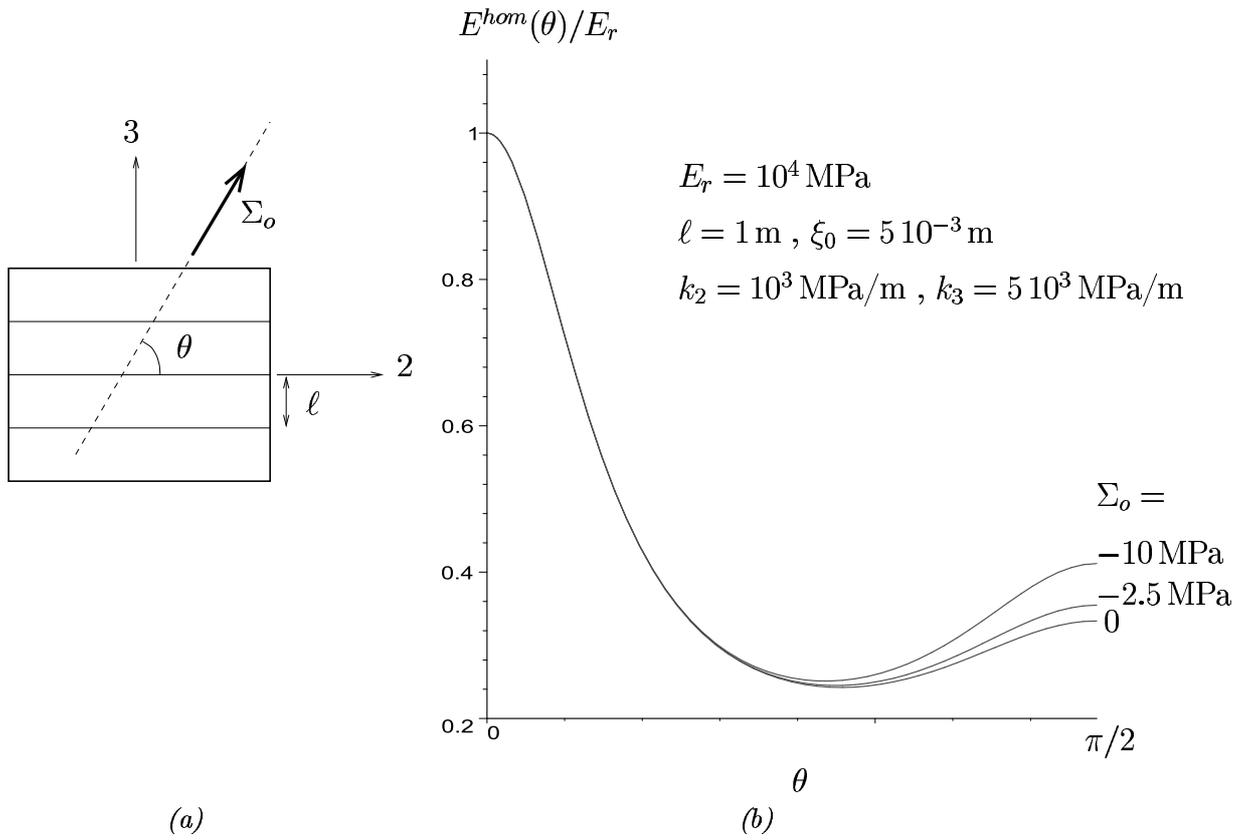


FIG. 9: Variations du module d'élasticité tangent d'une roche comportant un réseau périodique de joints, en fonction de l'orientation de la sollicitation.

élastique du milieu homogénéisé. On observe également le caractère non linéaire de la loi de comportement contrainte-déformation, E^{hom} représentant le module tangent, qui apparaît comme une fonction croissante du niveau Σ_o de la sollicitation. Cette non-linéarité découle bien évidemment de celle du comportement du joint en compression normale, le comportement élastique de la matrice a été supposé ici linéaire. Elle ne se manifeste que pour des orientations de la sollicitation proches de la normale aux joints.

3.2 Commentaires sur l'interaction entre joints

L'expression du tenseur de souplesse tangent macroscopique (31) peut être réécrite de la manière suivante

$$\underline{\underline{S}}^{hom} = \underline{\underline{S}}^r + \sum_j \underline{\underline{S}}^j \quad (40)$$

où l'on a noté

$$\underline{\underline{S}}^j = \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta}^j \frac{1}{\ell_j} \underline{\underline{e}}_\alpha^j \otimes^s \underline{\underline{n}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_\beta^j \otimes^s \underline{\underline{n}}_j \quad (41)$$

(40) et (41) montrent que $\underline{\underline{S}}^{hom}$ est obtenu en sommant la contribution individuelle de chaque famille de joints. En d'autres termes, l'interaction entre des joints se coupant et son éventuel effet sur l'élasticité macroscopique n'est nullement pris en compte.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une matrice rocheuse comportant deux familles perpendiculaires de joints. Lorsque les joints de la famille n^o 1 sont soumis à une sollicitation de cisaillement, on s'attendrait à ce que leur saut de déplacement tangentiel ne soit pas libre, dans le sens où il est contraint par ceux de la famille n^o 2. La question à laquelle il convient de répondre est la suivante :

'L'interaction entre joints a-t-elle un effet significatif sur l'élasticité macroscopique du milieu rocheux?'

L'analyse de cette question amène quelques commentaires :

1- A notre connaissance, aucune réponse théorique n'y a été apportée. Il s'agit donc d'un problème ouvert.

2- Il s'avère très difficile, voire impossible, de prendre en compte cette interaction dans le cadre d'une modélisation, comme celle adoptée ici, dans laquelle les joints sont traités comme des interfaces.

3- La démarche adéquate, serait à notre avis, de modéliser les joints comme des couches avec une épaisseur très petite (par rapport à l'espacement des joints) mais non nulle, comme suggéré dans Maghous *et al.* (2002). La difficulté réside alors dans le fait que les déformations du joint devraient être traitées dans le cadre de l'élasticité finie.

4- Finalement, on peut raisonnablement avancer que la réponse à la question posée dépend fortement de la nature du matériau de remplissage du joint.

Conscient de ne pas apporter de réponse tranchée à cette problématique, nous adopterons dans la suite l'expression (31) pour $\underline{\underline{S}}^{hom}$.

3.3 Extension au cas non périodique

On suppose, comme en section 2.2, qu'il est possible de définir pour le milieu rocheux un VER, noté \mathcal{V} , constitué de la matrice rocheuse traversée par un réseau de p familles de joints plans et débouchants. Chaque famille est caractérisée par une orientation \underline{n}_j , et une élasticité $\underline{\underline{c}}^j$ (ou souplesse $\underline{\underline{s}}^j$). Le chargement du VER est défini par des conditions aux limites uniformes en contrainte. La détermination de $\underline{\underline{S}}^{hom}$ découle d'un problème d'évolution élastique identique à celui décrit dans le cas périodique, en remplaçant (26) par

$$\begin{cases} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} \cdot \underline{n} & \text{sur } \partial\mathcal{V} \\ \text{div } \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0 & ; \quad \underline{\underline{\dot{T}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \cdot \underline{n} \text{ continu} \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{c}}^r : \underline{\underline{\dot{\xi}}} \\ \underline{\underline{\dot{T}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \cdot \underline{n}_j = \underline{\underline{c}}^j \cdot [\underline{\underline{\dot{\xi}}}] & \forall \underline{x} \in \mathcal{P}_j, \quad j = 1, p \end{cases} \quad (42)$$

La solution $(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \underline{\underline{\dot{\xi}}})$ de ce problème a la même structure que dans le cas périodique : $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ homogène dans le VER et $\underline{\underline{\dot{\xi}}}$ affine par morceaux. Il est facile alors de voir que le tenseur tangent de souplesse macroscopique s'écrit

$$\underline{\underline{S}}^{hom} = \underline{\underline{s}}^r + a^j s_{\alpha\beta}^j \underline{e}_\alpha^j \otimes \underline{n}_j \otimes \underline{e}_\beta^j \otimes \underline{n}_j \quad (43)$$

(sommation sur $j = 1, p$, $\alpha = 1, 3$ et $\beta = 1, 3$). Le coefficient a^j désigne la surface spécifique de la famille j , c'est à dire la somme des surfaces des joints de la famille rapportée au volume du VER.

4 Comportement élastoplastique homogénéisé du milieu rocheux fracturé

On examine maintenant le comportement macroscopique du milieu rocheux fracturé lorsque ses constituants subissent des déformations irréversibles dont la nature peut être attribuée uniquement à la plasticité.

Le comportement de la matrice rocheuse ainsi que celui du joint est considéré comme *élastique parfaitement plastique*.

Plus précisément, le comportement de la matrice rocheuse est caractérisé par

- * des tenseurs d'élasticité $\underline{\underline{c}}^r(\underline{\underline{\epsilon}})$ ou de souplesse $\underline{\underline{s}}^r(\underline{\underline{\sigma}})$ tangents (voir relations (24));
- * un critère de plasticité $f^r(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$;
- * un potentiel $g^r(\underline{\underline{\sigma}})$ pour la règle d'écoulement plastique.

Celui du joint \mathcal{P}_j est quant à lui décrit par :

- * des tenseurs d'élasticité $\underline{\underline{c}}^j([\underline{\underline{\xi}}])$ ou de souplesse $\underline{\underline{s}}^j(\underline{\underline{T}})$ tangents (voir relations (25));
- * un critère de plasticité portant sur le vecteur contrainte $f^j(\underline{\underline{T}}) \leq 0$;
- * un potentiel $g^j(\underline{\underline{T}})$ pour la règle d'écoulement plastique qui s'écrit :

$$[\dot{\underline{\underline{\xi}}}]^p = \dot{\lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\underline{T}}} \quad \dot{\lambda}^j \geq 0 \quad (44)$$

où $[\dot{\underline{\underline{\xi}}}]^p$ représente le taux de saut de déplacement irréversible au niveau du joint. Conformément aux sections précédentes, on examine tout d'abord la situation périodique.

4.1 Distribution périodique de joints

Comme établi dans Suquet (1985), la construction du comportement macroscopique découle de la résolution d'un problème d'évolution élastoplastique formulé sur \mathcal{A} de la manière suivante :

pour une histoire donnée de la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ (on adopte pour simplifier $\underline{\underline{\Sigma}}(0) = \underline{\underline{0}}$), il s'agit de déterminer le couple $(\underline{\underline{\sigma}}(t), \underline{\underline{\xi}}(t))$ solution en contrainte et en déplacement du problème ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ continu} \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ p\u00e9riodique} \quad ; \quad \underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{x}} \text{ p\u00e9riodique} \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{c}}^r : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\lambda}^r \geq 0 \\ \underline{\underline{\dot{T}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{c}}^j \cdot ([\underline{\underline{\dot{\xi}}}] - [\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^p) \quad ; \quad [\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^p = \dot{\lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\underline{T}}} \quad \dot{\lambda}^j \geq 0 \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \mathcal{P}_j \quad , \quad j = 1, p \end{array} \right. \quad (45)$$

o\u00f9 $\underline{\underline{\epsilon}}$ est la d\u00e9formation associ\u00e9e \u00e0 $\underline{\underline{\xi}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ sa partie plastique. Rappelons que l'expression du tenseur $\underline{\underline{F}}$, gradient macroscopique du champ de d\u00e9placement, est donn\u00e9e par (27), alors que celle de la d\u00e9formation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ est donn\u00e9e par (28).

D\u00e9terminer le comportement \u00e9lastoplastique homog\u00e9nis\u00e9 consiste, en r\u00e9solvant le probl\u00e8me d\u00e9fini par (45), \u00e0 expliciter la loi d'\u00e9volution de la d\u00e9formation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ en fonction de celle de $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$. Pour cela, on introduit les domaines \mathcal{C}^r et \mathcal{C}^j de \mathcal{R}^6 d\u00e9finis comme suit :

$$\mathcal{C}^r = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid f^r(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \} \quad (46)$$

et

$$\mathcal{C}^j = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid f^j(\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j) \leq 0 \} \quad (47)$$

\mathcal{C}^r et \mathcal{C}^j ne sont autres que les domaines d'\u00e9lasticit\u00e9 de la matrice rocheuse et du joint \mathcal{P}_j , respectivement. On d\u00e9finit \u00e9galement le domaine

$$\mathcal{C}^{hom} = \mathcal{C}^r \cap \mathcal{C}^1 \cap \dots \cap \mathcal{C}^p \quad (48)$$

ainsi que la fonction scalaire qui permet de caract\u00e9riser l'appartenance \u00e0 \mathcal{C}^{hom}

$$F^{hom}(\underline{\underline{\sigma}}) = \max(f^r(\underline{\underline{\sigma}}), f^1(\underline{\underline{\sigma}}), \dots, f^p(\underline{\underline{\Sigma}})) \leq 0 \quad (49)$$

(pour ne pas introduire de notation suppl\u00e9mentaire, on garde la m\u00eame notation f^j pour d\u00e9signer le crit\u00e8re de plasticit\u00e9 du joint \mathcal{P}_j exprim\u00e9 aussi bien en $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j$ qu'en $\underline{\underline{\sigma}}$).

Nous allons maintenant caract\u00e9riser la solution du probl\u00e8me (45).

Phase \u00e9lastique.

Tant que $\underline{\underline{\Sigma}}(t) \in \mathcal{C}^{hom}$, ou encore tant que $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) < 0$, le probl\u00e8me (45) correspond exactement \u00e0 un probl\u00e8me d'\u00e9lasticit\u00e9 sur la cellule de base. On se retrouve exactement dans

la situation étudiée en section **3.1**, c'est à dire que notamment la solution en contrainte de ce problème est *homogène* : $\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t)$. Pour de tels états de contrainte macroscopique, les évolutions de la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ sont donc purement élastiques :

$$\dot{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{S}}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \quad (50)$$

le tenseur tangent de souplesse macroscopique étant donné par (31).

Dans le cas où la contrainte macroscopique est sur la frontière de \mathcal{C}^{hom} , c'est-à-dire $\underline{\underline{\Sigma}}(t) \in \partial\mathcal{C}^{hom}$, et $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}$ est orienté vers l'intérieur de \mathcal{C}^{hom} , c'est-à-dire pour $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = 0$ et $\dot{F}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) < 0$, les évolutions de la déformation macroscopique sont toujours purement élastiques et données par (50).

Phase de charge plastique.

Les constituants matrice rocheuse et joint ayant un comportement élastique parfaitement plastique, les domaines d'élasticité correspondant \mathcal{C}^r et \mathcal{C}^j ont également le statut de domaines de résistance pour ces constituants (Halphen et Salençon (1987)). En d'autres termes, on a identité entre les domaines \mathcal{C}^r et \mathcal{G}^r introduits en section **2** d'une part, et identité entre \mathcal{C}^j et \mathcal{G}^j ² d'autre part.

En vertu des résultats établis en section **2**, on constate que le domaine de résistance macroscopique \mathcal{G}^{hom} du milieu rocheux fracturé est précisément \mathcal{C}^{hom} . Ce dernier représente donc le domaine d'élasticité du milieu rocheux fracturé. Par conséquent, la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ ne peut être en dehors du domaine \mathcal{C}^{hom} , ou encore, la situation $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) > 0$ est impossible.

Il reste maintenant à examiner le cas de charge plastique qui se traduit ici par $\underline{\underline{\Sigma}}(t) \in \partial\mathcal{C}^{hom}$ et $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}$ est tangent à $\partial\mathcal{C}^{hom}$ ou encore, par $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \dot{F}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = 0$. Là encore, la solution en contrainte est *homogène* $\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t)$. Désignant par $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e$ et $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$ les parties élastique et plastique du taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ dans la matrice, on a tout d'abord

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e = \underline{\underline{S}}^r(\underline{\underline{\Sigma}}) : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \quad (51)$$

ce qui prouve que $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e$ est géométriquement compatible, puisque homogène dans la cellule de base. Comme

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e = \dot{\lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad \dot{\lambda}^r \geq 0 \quad (52)$$

²Il s'agit plus précisément de sa représentation en $\mathcal{R}^6 : \{\underline{\underline{\sigma}} \mid \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j \in \mathcal{G}^j\}$

il s'ensuit que la partie plastique $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^p$ de la déformation de la matrice est *géométriquement compatible*. Ceci indique que le champ de vitesse $\underline{\underline{\dot{\xi}}}$ correspond à un mécanisme d'écoulement plastique libre de la cellule.

A priori, comme la solution en vitesse, le champ $\dot{\lambda}^r$ n'est pas défini de façon unique. A côté de la solution particulière $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^p = \text{constante}$, tout champ $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^p$ de la forme $\dot{\lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}}$ géométriquement compatible et périodique répond à la question. Dans le cas d'une localisation de la déformation plastique, $\dot{\lambda}^r$ est proportionnel à une distribution de Dirac dont le support est la surface de discontinuité de la vitesse.

Il faut garder à l'esprit que le paramètre $\dot{\lambda}^r$ n'est non nul que si la matrice rocheuse est effectivement en charge plastique.

De manière analogue, on note respectivement $[\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^e$ et $[\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^p$ les parties élastique et plastique du saut de la vitesse $[\underline{\underline{\dot{\xi}}}]$ au passage du joint \mathcal{P}_j . Cette décomposition s'écrit :

$$[\underline{\underline{\dot{\xi}}}] = [\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^e + [\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^e = \underline{\underline{s}}^j \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j \\ [\underline{\underline{\dot{\xi}}}]^p = \dot{\lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\underline{T}}} \quad \dot{\lambda}^j \geq 0 \end{cases} \quad (53)$$

avec $\underline{\underline{s}}^j = \underline{\underline{s}}^j(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j)$. Le paramètre $\dot{\lambda}^j$ n'est non nul que si le constituant joint est en charge plastique.

Il nous reste à ce stade à définir le potentiel plastique du joint en terme de contrainte macroscopique, en introduisant la fonction g'^j :

$$g'^j(\underline{\underline{\Sigma}}) = g^j(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j) = g^j(T_1 = (\Sigma_{13} + \Sigma_{31})/2, T_2 = (\Sigma_{23} + \Sigma_{32})/2, T_3 = \Sigma_{33}) \quad (54)$$

où les $\Sigma_{\alpha\beta}$ sont les composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ dans la base orthonormée formée par les deux vecteurs du plan du joint ($\underline{\underline{e}}_1^j, \underline{\underline{e}}_2^j$) et la normale à celui-ci $\underline{\underline{e}}_3^j = \underline{\underline{n}}_j$: $\Sigma_{\alpha\beta} = \underline{\underline{e}}_\alpha^j \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_\beta^j$. Il vient alors

$$\frac{\partial g'^j}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} = \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\underline{T}}} \otimes \underline{\underline{n}}_j \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_j \quad (55)$$

Reécrivons maintenant la relation (28) de moyenne de la déformation en taux :

$$\underline{\underline{\dot{E}}} = \langle \underline{\underline{\dot{\xi}}} \rangle + \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{j=1,p} \int_{\mathcal{P}_j} [\underline{\underline{\dot{\xi}}}] \otimes \underline{\underline{n}}_j dS \quad (56)$$

Utilisant (51) et (52) pour exprimer $\underline{\underline{\dot{\xi}}}$, et (53) et (55) pour exprimer $[\underline{\underline{\dot{\xi}}}]$, il vient

$$\underline{\dot{E}} = \underbrace{\underline{\dot{s}}^r : \underline{\dot{\Sigma}} + \frac{1}{\ell_j} \left(\underline{\dot{s}}^j \cdot \underline{\dot{\Sigma}} \cdot \underline{n}_j \right) \otimes^s \underline{n}_j}_{\underline{\dot{E}}^e} + \underbrace{\dot{\Lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\Sigma}} + \sum_{j=1,p} \dot{\Lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\Sigma}}}_{\underline{\dot{E}}^p} \quad (57)$$

avec

$$\dot{\Lambda}^r = \langle \dot{\lambda}^r \rangle \quad , \quad \dot{\Lambda}^j = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{P}_j} \dot{\lambda}^j dS \quad (58)$$

La partie élastique $\underline{\dot{E}}^e$ de la vitesse de déformation macroscopique s'exprime par

$$\underline{\dot{E}}^e = \underline{\mathcal{S}}^{hom}(\underline{\Sigma}) : \underline{\dot{\Sigma}} \quad (59)$$

La partie plastique $\underline{\dot{E}}^p$ s'écrit quant à elle

$$\underline{\dot{E}}^p = \dot{\Lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\Sigma}} + \sum_{j=1,p} \dot{\Lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\Sigma}} \quad \dot{\Lambda}^r \geq 0, \dot{\Lambda}^j \geq 0 \quad (60)$$

L'indétermination des multiplicateurs plastiques demeure, comme une conséquence du fait que la solution en vitesse correspond à un mécanisme d'écoulement plastique libre de la cellule de base.

Récapitulatif.

Le milieu rocheux fracturé se comporte donc à l'échelle macroscopique comme un matériau élastique parfaitement plastique dont le domaine d'élasticité est \mathcal{C}^{hom} .

Contrairement au cas général, $\underline{\dot{E}}^e$ et $\underline{\dot{E}}^p$ représentent respectivement les moyennes dans la matrice et le joint au sens de (56) des taux de déformation élastique et plastique. Cette propriété résulte de l'absence de localisation des contraintes à l'échelle microscopique et de la nullité des contraintes résiduelles (due à la compatibilité des déformations plastiques locales), qui se traduit également par la nullité de l'énergie bloquée et l'absence d'écroutissage à l'échelle macroscopique.

Le comportement macroscopique peut finalement être récapitulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{hom} < 0 \text{ ou } (F^{hom} = 0 \text{ et } \dot{F}^{hom} < 0) \longrightarrow \underline{\dot{E}} = \underline{\mathcal{S}}^{hom} : \underline{\dot{\Sigma}} \quad , \quad \underline{\dot{E}}^p = 0 \\ F^{hom} = \dot{F}^{hom} = 0 \longrightarrow \underline{\dot{E}} = \underline{\mathcal{S}}^{hom} : \underline{\dot{\Sigma}} + \dot{\Lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\Sigma}} + \sum_{j=1,p} \dot{\Lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\Sigma}} \quad \dot{\Lambda}^r, \dot{\Lambda}^j \geq 0 \end{array} \right. \quad (61)$$

Illustration.

On examine le comportement homogénéisé en plasticité lorsque la matrice est traversée par une seule famille de joints ($p = 1$), et en se restreignant à la situation où la plasticité des constituants est associée. c'est-à-dire la situation particulière correspondant à $g^r = f^r$ et $g^j = f^j$. La figure 10 illustre la règle d'écoulement macroscopique. Sachant qu'ici $\mathcal{C}^{hom} = \mathcal{C}^r \cap \mathcal{C}^j$, trois cas de figure peuvent se présenter :

1- Le premier cas de charge est celui où la plasticité du milieu rocheux est contrôlée par celle de la matrice rocheuse (point A de la figure) : $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = f^r(\underline{\underline{\Sigma}}) = 0$. Dans ce cas $\dot{\Lambda}^j = 0$ et $\underline{\underline{\dot{E}}}^p$ est porté par la normale extérieure à \mathcal{C}^r .

2- Lorsque le joint est le seul constituant du milieu rocheux qui plastifie (point B) : $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = f^j(\underline{\underline{\Sigma}}) = 0$, alors $\dot{\Lambda}^r = 0$ et la direction de $\underline{\underline{\dot{E}}}^p$ est celle de la normale extérieure à \mathcal{C}^j .

3- La dernière situation est celle où les deux constituants sont simultanément en régime plastique (point C) : $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = f^r(\underline{\underline{\Sigma}}) = f^j(\underline{\underline{\Sigma}}) = 0$. La direction du taux de déformation plastique appartient alors au cône des normales extérieures à \mathcal{C}^{hom} .

Cette illustration montre notamment que la règle de normalité au niveau microscopique est conservée à l'échelle macroscopique.

4.2 Extension au cas non périodique

Comme dans les sections précédentes, on se place maintenant dans la situation où il est possible de définir pour le milieu rocheux un VER \mathcal{V} , constitué de la matrice rocheuse traversée par un réseau de p familles de joints plans et débouchants. Géométriquement, chaque famille est définie par une orientation \underline{n}_j . En ce qui concerne le comportement élastoplastique, chaque famille est caractérisée par une élasticité $\underline{\underline{c}}^j$ (ou souplesse $\underline{\underline{s}}^j$), un critère de plasticité f^j et un potentiel plastique g^j .

Le chargement du VER est défini par des conditions aux limites uniformes en contrainte. Le comportement macroscopique découle de la résolution d'un problème d'évolution élastoplastique, formulé sur \mathcal{V} , analogue à celui du cas périodique. Le problème homologue à

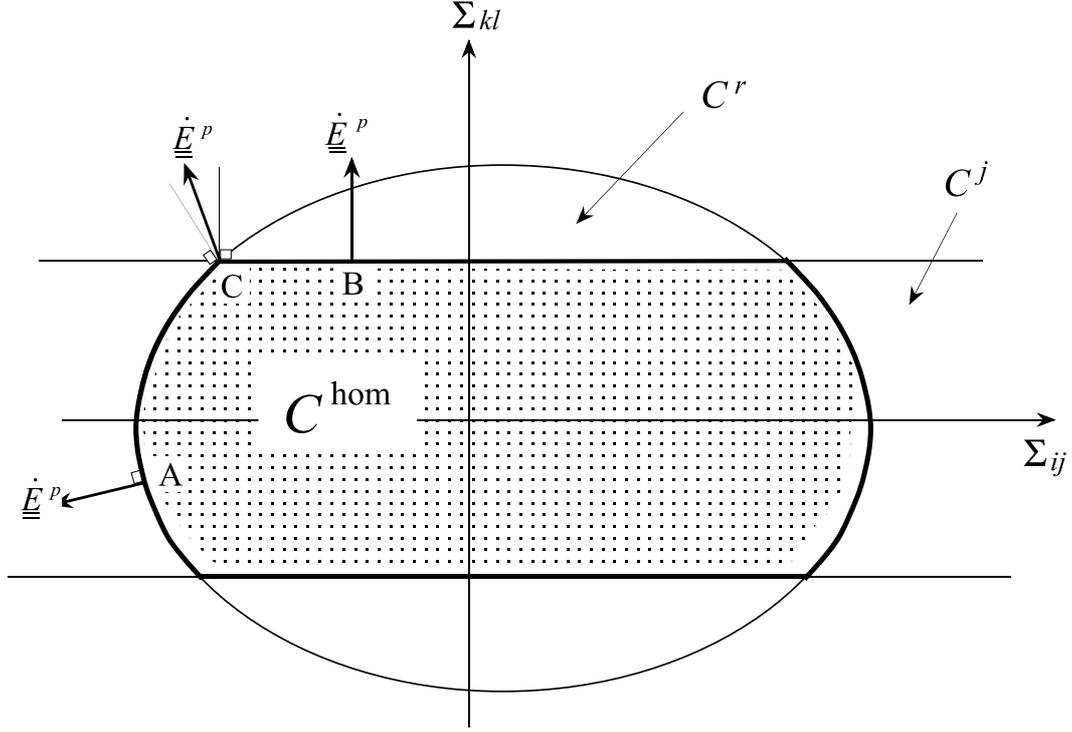


FIG. 10: Règle d'écoulement macroscopique lorsque la plasticité des constituants est associée.

(45) s'écrit ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\dot{\Sigma}} \quad \text{sur } \partial\mathcal{V} \\ \text{div } \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad ; \quad \underline{\dot{T}} = \underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ continu} \\ \underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{c}}^r : (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^p) \quad ; \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\lambda}^r \geq 0 \\ \underline{\dot{T}} = \underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\dot{c}}^j \cdot ([\underline{\dot{\xi}}] - [\underline{\dot{\xi}}]^p) \quad ; \quad [\underline{\dot{\xi}}]^p = \dot{\lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\underline{T}}} \quad \dot{\lambda}^j \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{P}_j \quad , \quad j = 1, p \end{array} \right. \quad (62)$$

On a montré (section **2.2.1**) que le domaine de résistance macroscopique G_{Σ}^{hom} est complètement déterminé et son expression est donnée par (21). Il est identique à celui obtenu pour une distribution périodique. En vue de la résolution de (62), ce résultat s'avère crucial car il permet d'établir, comme en situation périodique, l'identité des domaines d'élasticité et de résistance macroscopiques.

En fait, on montre que la localisation dans le régime élastique comme dans le régime élastoplastique est toujours de type Reuss, c'est-à-dire que la contrainte microscopique $\underline{\underline{\sigma}}$ est égale à la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$. En vertu de cette propriété, l'ensemble des raisonnements précédents demeure valable sous réserve d'adopter l'expression (43) pour

\tilde{S}^{hom} .

4.3 Quelques commentaires

Dans le cadre d'un certain nombre d'hypothèses adoptées pour le comportement des constituants matrice rocheuse et joints, le comportement macroscopique a été complètement formulé en élastoplasticité. Le trait important de ce comportement réside tout d'abord dans *l'absence d'écrouissage à l'échelle macroscopique*. Ce trait est directement lié à l'hypothèse d'homogénéité de la matrice rocheuse et à la modélisation des joints comme des interfaces planes infinies. Ces deux considérations conduisent en effet à l'homogénéité de la solution en contrainte dans la cellule de base (ou VER pour le cas d'une distribution aléatoire de joints), et par suite à la compatibilité géométrique des déformations plastiques.

Bien que le cas ne sera pas considéré dans cette thèse, la même démarche peut être suivie pour la formulation du comportement élastoplastique homogénéisé, lorsque les constituants matrice rocheuse et/ou joints présentent une plasticité avec écrouissage. L'homogénéité de la solution en contrainte du problème d'évolution élastoplastique posé sur la cellule de base (ou le VER) demeure alors toujours valable.

Les commentaires de la section **3.2** peuvent être intégralement repris ici. En effet, pas plus qu'en élasticité, le modèle présenté ne permet pas de prendre en compte les effets d'une interaction entre les joints dans le domaine des déformations plastiques.

Références

Bekaert A. and Maghous S., 1996. *Three-dimensional yield strength properties of jointed rock mass as a homogenized medium*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1, 1-24.

de Buhan P., 1986. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse d'Etat, Université Paris VI, Paris.

de Buhan P. et Maghous S., 1997. *Comportement élastique non linéaire macroscopique d'un matériau comportant un réseau de joints*. C. R. Acad. Sci. Paris, 324, série II b, 209-218.

Bandis C.S., Lumsden A.C. and Barton N.R., 1983. *Fundamentals of rock joint deformation*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 20, 249-268.

Deudé V., Dormieux L., Kondo D., Pensée V., 2002-a. *Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, IIb, 147-152.

Deudé V., Dormieux L., Kondo D., Maghous S., 2002-b. *Micromechanical approach to non linear poroelasticity - Application to cracked rocks*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 128(8), 848-855.

Dormieux L., Kondo D., 2004. *Approche micromécanique du couplage perméabilité - endommagement*. C. R. Mécanique, t. 332/2, 135-140.

Fréard J., 2000. *Analyse de la stabilité des massifs rocheux fracturés par une méthode d'homogénéisation*. Thèse doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.

Goodman R.E., 1997. *Methods of geological engineering in discontinuous rocks*. West Publ., New York.

Halphen B. et Salenç J., 1987. *Elasto-plasticité*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Hill R., 1967. *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids, 15, 79-95.

Maghous S., de Buhan P., Dormieux L., 2002. *Non-linear global elastic behaviour of a periodically jointed material*. Mechanics Research Communications, 29, 45-51.

Mandel J., 1972. *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM lectures notes n° 97, Springer-Verlag.

Pensée V., Dormieux L., Kondo D., Deudé V., 2002-a. *Poroélasticité d'un milieu mésosif-suré*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, IIb, 1-8.

Pensée V., Kondo D., Dormieux L., 2002-b. *A micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 128(8), 889-897.

Salençon J., 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Salençon J., 1990. *An introduction to the yield design theory and its application to soils mechanics*. Eur. J. Mech. A/Solids, 9(5), 477-500.

Suquet P., 1983. *Analyse limite et homogénéisation*. C. R. Acad. Sc., Paris, 296, 1355-1358.

Suquet P., 1985. *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*. Proceeding of the CISM lectures : Homogenization techniques for composite media, Springer-Verlag.

Zaoui A., 1998. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'Ecole Polytechnique, France.

CHAPITRE 3

Etude analytique de la convergence d'une galerie souterraine

Sommaire

- 1.** Définition du cadre académique pour la résolution analytique
 - 1.1 Objectif de la démarche
 - 1.2 Position du problème et hypothèses

- 2.** Résolution
 - 2.1 Tenseur d'élasticité du milieu homogénéisé
 - 2.2 Phase de comportement élastique
 - 2.3 Phase de comportement élastoplastique
 - 2.3.1 Constituants de Tresca
 - 2.3.2 Constituants de Mohr-Coulomb

- 3.** Commentaires

1 Définition du cadre académique pour la résolution analytique

1.1 Objectif de la démarche

Ce chapitre vise à construire une solution analytique, dans la double optique de mettre en évidence la faisabilité d'une telle méthode pour traiter du comportement d'ouvrages constitués de matériaux rocheux fracturés, mais aussi et surtout pour avoir accès à des solutions de référence, nécessaires pour la validation de l'approche numérique que nous développerons dans le chapitre suivant. On s'intéresse au problème de la convergence d'une galerie, creusée à grande profondeur dans un massif rocheux fracturé. Les réseaux de fracturation traversant le milieu rocheux, que l'on se propose d'étudier, à défaut de décrire une représentation géométrique réaliste d'un massif, permet de construire un problème à symétrie de révolution, et d'accéder à la formulation d'une solution analytique.

1.2 Position du problème et hypothèses

On examine le comportement élastoplastique d'un tunnel circulaire profond creusé dans un massif rocheux fracturé. Le réseau de fracturation est constitué de deux familles de joints non perpendiculaires, dont la répartition périodique et la forte densité justifient le recours à la méthode d'homogénéisation.

Plus précisément, on étudie une galerie cylindrique, d'axe horizontal parallèle à \underline{e}_z , de section circulaire (rayon R), creusée dans un massif rocheux fracturé. Le comportement de la matrice rocheuse est *isotrope*. On suppose que les caractéristiques définissant le comportement mécanique des joints sont identiques pour les deux familles. L'axe du tunnel est situé à une profondeur H très grande devant R de sorte que l'on puisse considérer le massif environnant comme infini ($H/R \rightarrow \infty$). Le massif est initialement (avant le creusement de la galerie) le siège de contraintes homogènes et isotropes :

$$\underline{\sigma}_0 = -p_0 \underline{1} \quad (1)$$

C'est dire qu'on néglige la variation de contrainte géostatique au voisinage de la section. La pression p_0 correspond au poids des terres sus-jacentes à la galerie. La paroi du tunnel est soumise à une pression uniforme p_c valant initialement la valeur p_0 . Pour définir la géométrie du réseau des joints, nous adoptons, le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) rattaché au repère orthonormé local $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$.

Pour conserver la symétrie de révolution du problème nous avons été amenés à envisager la situation académique suivante :

En tout point, les deux familles de joints sont localement symétriques par rapport à la direction \underline{e}_r .

La cellule de base correspondante est représentée sur la figure (1).

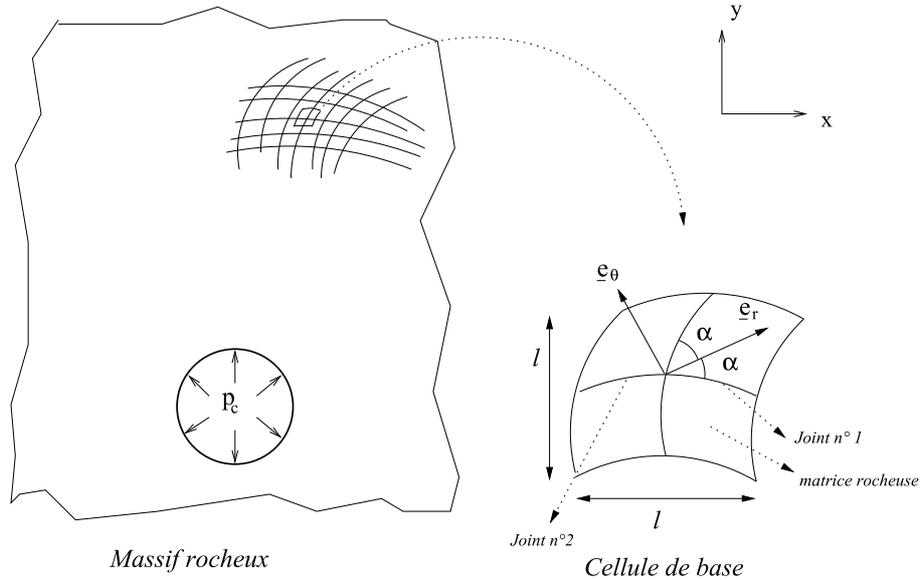


FIG. 1: Géométrie du problème et cellule de base.

Un joint est donc une surface invariante en z , dont la trace dans le plan x, y est une spirale logarithmique.

Allant dans le sens de la simplification de la géométrie de la cellule de base, on suppose en outre que le rayon de courbure de ces spirales reste très grand devant l'espacement moyen inter-joints ℓ , qui définit la taille de la cellule. On peut établir que cette condition est en fait équivalente à la condition de séparation des échelles $\ell/R \ll 1$ (Hill, 1956 ; Mandel, 1972). Les joints peuvent alors être modélisés localement par des plans symétriques par rapport à \underline{e}_r , et la cellule de base ainsi idéalisée est représentée sur la figure (2).

Ayant défini les hypothèses portant essentiellement sur le schéma de fracturation du massif, nous allons aborder maintenant la détermination analytique de la convergence de la galerie. Le processus de chargement consiste à faire décroître progressivement la pression p_c de la valeur initiale p_0 à la valeur nulle. Rappelons que dans l'esprit de la méthode dite de convergence-confinement (voir Panet (1995)), ce processus est adopté pour simuler de manière simplifiée l'effet de front de taille.

Comme on le montrera plus loin, en résolvant le problème d'évolution élastoplastique défini sur le massif en tant que milieu homogénéisé, l'ensemble de ces hypothèses implique que les champs

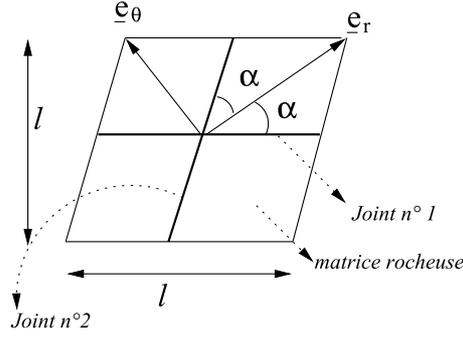


FIG. 2: Cellule de base idéalisée du milieu rocheux fracturé.

solutions satisfont les conditions de symétrie de révolution :

- le champ de déplacement est radial et ne dépend que de la coordonnée r ;
- les directions principales du champ de contrainte coïncident avec les directions \underline{e}_r , \underline{e}_θ , et \underline{e}_z .

Notations.

Dorénavant et pour toute la suite de ce manuscrit, nous nous plaçons à l'échelle macroscopique. Les milieux seront regardés en tant que milieux homogénéisés, et aucune référence ne sera plus faite aux déformations et contraintes à l'échelle microscopique. Nous abandonnons donc les notations $(\underline{\epsilon}, \underline{\sigma})$ et $(\underline{E}, \underline{\Sigma})$ pour distinguer les grandeurs microscopiques et macroscopiques. Les notations $\underline{\xi}(\underline{x})$, $\underline{\epsilon}(\underline{x})$ et $\underline{\sigma}(\underline{x})$ désigneront respectivement le déplacement, la déformation et la contrainte en un point \underline{x} du milieu homogénéisé.

2 Résolution

Nous commençons la résolution du problème d'évolution élastoplastique par la phase élastique. Il convient donc au préalable d'explicitier le tenseur d'élasticité du milieu homogénéisé.

2.1 Tenseur d'élasticité du milieu homogénéisé

L'élasticité de la matrice rocheuse est linéaire et caractérisée par la donnée de :

E et ν (module d'Young et coefficient de Poisson), ou encore λ et μ (coefficients de Lamé).¹

Celle des joints, exprimée à travers une relation entre le vecteur agissant sur le joint et le saut de déplacement est également linéaire. Elle est caractérisée par les raideurs normale k_n et tangentielle k_t . Ces raideurs sont prises identiques pour les deux familles de joints.

¹on omet l'indice r pour alléger les notations

La loi de comportement élastique pour le milieu homogénéisé s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{hom} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{S}}^{hom} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (2)$$

Le tenseur de souplesse macroscopique $\underline{\underline{S}}^{hom}$ est donné par la relation (31) du chapitre 2, et $\underline{\underline{C}}^{hom} = \underline{\underline{S}}^{hom^{-1}}$.

Les directions 1, 2 et 3 faisant référence respectivement aux directions \underline{e}_r , \underline{e}_θ , et \underline{e}_z , on obtient pour les huit composantes de $\underline{\underline{S}}^{hom}$ non nulles :

$$S_{11} = S_{1111} = \frac{\lambda + \mu}{(3\lambda + 2\mu)\mu} + \frac{2 \sin^2(\alpha)(\cos^2(\alpha)k_n + \sin^2(\alpha)k_t)}{k_n k_t \ell} \quad (3)$$

$$S_{22} = S_{2222} = \frac{\lambda + \mu}{(3\lambda + 2\mu)\mu} + \frac{2 \cos^2(\alpha)(\sin^2(\alpha)k_n + \cos^2(\alpha)k_t)}{k_n k_t \ell} \quad (4)$$

$$S_{33} = S_{3333} = \frac{\lambda + \mu}{(3\lambda + 2\mu)\mu} \quad (5)$$

$$S_{12} = S_{1122} = -\frac{\lambda}{2(3\lambda + 2\mu)\mu} - \frac{(k_n - k_t) \sin^2(2\alpha)}{2k_n k_t \ell} \quad (6)$$

$$S_{13} = S_{1133} = -\frac{\lambda}{2(3\lambda + 2\mu)\mu} = S_{23} = S_{2233} \quad (7)$$

$$S_{44} = 4S_{1212} = \frac{1}{\mu} + 2 \frac{\cos^2(2\alpha)k_n + \sin^2(2\alpha)k_t}{k_n k_t \ell} \quad (8)$$

$$S_{55} = 4S_{1313} = \frac{1}{\mu} + 2 \frac{\sin^2(\alpha)}{k_t \ell} \quad (9)$$

$$S_{66} = 4S_{2323} = \frac{1}{\mu} + 2 \frac{\cos^2(\alpha)}{k_t \ell} \quad (10)$$

et pour les neuf composantes non nulles de $\underline{\underline{C}}^{hom}$:

$$C_{11} = C_{1111} = \frac{k_n k_t \ell (\lambda + 2\mu) + 8\mu(\lambda + \mu) \cos^2(\alpha)(\sin^2(\alpha)k_n + \cos^2(\alpha)k_t)}{k_n k_t \ell^2 + 2(\mu + \lambda)(k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)) + 2\ell\mu(k_n \sin^2(2\alpha) + k_t \cos^2(2\alpha))} \quad (11)$$

$$C_{22} = C_{2222} = \frac{k_n k_t \ell (\lambda + 2\mu) + 8\mu(\lambda + \mu) \sin^2(\alpha)(\cos^2(\alpha)k_n + \sin^2(\alpha)k_t)}{k_n k_t \ell^2 + 2(\mu + \lambda)(k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)) + 2\ell\mu(k_n \sin^2(2\alpha) + k_t \cos^2(2\alpha))} \quad (12)$$

$$C_{33} = C_{3333} = \frac{2\mu \sin(2\alpha)^2 ((\lambda + 2\mu)(k_n - k_t)\ell + 2\mu(3\lambda + 2\mu)) + k_n k_t \ell^2 (\lambda + 2\mu) + 8k_t \ell \mu (\lambda + \mu)}{k_n k_t \ell^2 + 2(\mu + \lambda)(k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)) + 2\ell\mu(k_n \sin^2(2\alpha) + k_t \cos^2(2\alpha))} \quad (13)$$

$$C_{12} = C_{1122} = \ell \frac{k_n k_t \ell \lambda + 2\mu(\lambda + \mu)(k_n - k_t) \sin^2(2\alpha)}{k_n k_t \ell^2 + 2(\mu + \lambda)(k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)) + 2\ell\mu(k_n \sin^2(2\alpha) + k_t \cos^2(2\alpha))} \quad (14)$$

$$C_{13} = C_{1133} = \ell \lambda \frac{k_n k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)(k_n - k_t) + 4k_t \mu \cos^2(\alpha)}{k_n k_t \ell^2 + 2(\mu + \lambda)(k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)) + 2\ell\mu(k_n \sin^2(2\alpha) + k_t \cos^2(2\alpha))} \quad (15)$$

$$C_{23} = C_{2233} = \ell \lambda \frac{k_n k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)(k_n - k_t) + 4k_t \mu \sin^2(\alpha)}{k_n k_t \ell^2 + 2(\mu + \lambda)(k_t \ell + 2\mu \sin^2(2\alpha)) + 2\ell\mu(k_n \sin^2(2\alpha) + k_t \cos^2(2\alpha))} \quad (16)$$

$$C_{44} = C_{1212} = \frac{k_n k_t \ell \mu}{k_n k_t \ell + 2\mu(k_n \cos^2(2\alpha) + k_t \sin^2(2\alpha))} \quad (17)$$

$$C_{55} = C_{1313} = k_t \ell \mu / (k_t \ell + 2\mu \sin^2(\alpha)) \quad (18)$$

$$C_{66} = C_{2323} = k_t \ell \mu / (k_t \ell + 2\mu \cos^2(\alpha)) \quad (19)$$

Toutes les autres composantes de $\underline{\mathcal{S}}^{hom}$ et de $\underline{\mathcal{C}}^{hom}$ sont nulles.

Notons que le matériau homogénéisé est localement orthotrope, puisqu'il admet les plans $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$, $(\underline{e}_r, \underline{e}_z)$ et $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ comme plans de symétrie. Par ailleurs, l'élasticité de la microstructure est complètement définie par cinq paramètres : λ , μ , ℓk_n , ℓk_t et l'angle α , il s'ensuit que parmi les huit composantes non nulles de $\underline{\mathcal{S}}^{hom}$ (et donc parmi les neuf composantes non nulles de $\underline{\mathcal{C}}^{hom}$), seules cinq sont indépendantes.

2.2 Phase de comportement élastique

Faisant décroître progressivement la pression p_c en paroi du tunnel à partir de sa valeur initiale p_0 , le massif se comporte dans une première phase élastiquement.

La symétrie de révolution du problème nous amène à chercher la solution en déplacement sous la forme

$$\underline{\xi} = u(r) \underline{e}_r \quad (20)$$

Le tenseur de déformations associé s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = u'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u(r)}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad \text{avec} \quad u'(r) = \frac{du}{dr} \quad (21)$$

Le champ de contraintes est donné par

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p_0 \underline{\underline{1}} + \mathcal{Q}^{hom} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (22)$$

Compte tenu de l'expression de \mathcal{Q}^{hom} , défini par les relations (11-19), on montre que $\underline{\underline{\sigma}}$ admet bien \underline{e}_r , \underline{e}_θ et \underline{e}_z comme directions principales :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_\theta \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (23)$$

avec

$$\sigma_r = C_{11}u'(r) + C_{12}\frac{u(r)}{r} - p_0 \quad (24)$$

$$\sigma_\theta = C_{12}u'(r) + C_{22}\frac{u(r)}{r} - p_0 \quad (25)$$

$$\sigma_z = C_{13}u'(r) + C_{23}\frac{u(r)}{r} - p_0 \quad (26)$$

Reportant ces expressions dans l'équation d'équilibre $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (27)$$

on aboutit à l'équation différentielle régissant le déplacement :

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{du(r)}{rdr} - \frac{a^2u(r)}{r^2} = 0 \quad (28)$$

avec

$$a = \sqrt{C_{2222}/C_{1111}} \quad (29)$$

L'allure des variations de ce paramètre en fonction de l'orientation α des joints est donnée en annexe **B**.

L'équation (28) est résolue en tenant compte des deux conditions aux limites :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0 \quad (30)$$

et

$$\sigma_r(r = R) = C_{11}u'(r = R) + C_{12}\frac{u(r = R)}{R} - p_0 = -p_c \quad (31)$$

Il vient alors

$$\frac{u(r)}{r} = \frac{p_c - p_0}{2\bar{\mu}} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} \quad (32)$$

où l'on a noté

$$2\bar{\mu} = \sqrt{C_{1111}C_{2222}} - C_{1122} \quad (33)$$

Par analogie avec le cas du tunnel en milieu élastique homogène isotrope, le coefficient $\bar{\mu}$ joue le rôle de module de cisaillement macroscopique. Ses variations en fonctions de certains paramètres sont illustrées en annexe **B**. On retrouve, par ailleurs, le cas du milieu homogène en faisant tendre la rigidité des joints vers l'infini : $C_{11} = C_{22} = \lambda + 2\mu$ et $C_{12} = \lambda$, c'est-à-dire que

$a = 1$ et $2\bar{\mu} = 2\mu$.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement solution s'écrit

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \epsilon_\theta \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta = \frac{p_c - p_0}{2\bar{\mu}} \frac{R^{a+1}}{r^a} (-a \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \quad (34)$$

alors que les composantes du champ de contraintes sont données par

$$\sigma_r = \frac{p_c - p_0}{2\bar{\mu}} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} (-aC_{11} + C_{12}) - p_0 \quad (35)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_c - p_0}{2\bar{\mu}} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} (-aC_{12} + C_{22}) - p_0 \quad (36)$$

$$\sigma_z = \frac{p_c - p_0}{2\bar{\mu}} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} (-aC_{13} + C_{23}) - p_0 \quad (37)$$

Utilisant la relation (33), nous pouvons re-écrire ces composantes normalisées par p_0 sous la forme :

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{p_0 - p_c}{p_0} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} - 1 \quad (38)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{p_0} = -a \frac{p_0 - p_c}{p_0} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} - 1 \quad (39)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = (1 - a)\nu \cdot \frac{p_0 - p_c}{p_0} \left(\frac{R}{r}\right)^{a+1} - 1 \quad (40)$$

Remarques :

- On peut établir qu'on a une relation entre σ_r , σ_θ et σ_z identique à celle qui prévaut dans un milieu élastique sans joints (Panet, 1995) :

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) + (2\nu - 1) p_0 \quad (41)$$

- Il est facile de vérifier que le déviateur $\sigma_r - \sigma_\theta$ est maximum en paroi.

- Le taux de convergence élastique du tunnel, noté U , défini comme le rapport entre la valeur absolue du déplacement radial en paroi ($r = R$) et le rayon du tunnel, est donné par :

$$U = \frac{|(u(r = R))|}{R} = \frac{|(p_c - p_0)|}{2\bar{\mu}} \quad (42)$$

Sa valeur finale ($p_c = 0$) vaut

$$U_{elastique} = \frac{p_0}{2\bar{\mu}} \quad (43)$$

2.3 Phase de comportement élastoplastique

Continuant à faire décroître la pression p_c en paroi du tunnel, le massif va entrer en phase élastoplastique. Il convient maintenant de préciser le comportement des constituants du massif en phase plastique. On adopte une *plasticité parfaite et associée* aussi bien pour la matrice rocheuse que pour les joints.

Deux types de critères de plasticité vont être considérés dans la suite :

* le critère de Tresca pour tous les constituants (section **2.3.1**)

* le critère de Mohr-Coulomb pour tous les constituants (section **2.3.2**)

2.3.1 Constituants de Tresca

Nous nous plaçons dans la situation où la plasticité de la matrice rocheuse est décrite par un critère de Tresca. En symétrie de révolution, ce dernier s'exprime comme :

$$f^r(\underline{\sigma}) = \max(|\sigma_r - \sigma_\theta|, |\sigma_r - \sigma_z|, |\sigma_\theta - \sigma_z|) - \sigma_0^r \leq 0 \quad (44)$$

σ_0^r étant la limite élastique en compression.

La plasticité des joints est également décrite par un critère de Tresca :

$$f^j(\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) = |\tau| - C_j \leq 0 \quad (45)$$

où la cohésion C_j est la même pour les deux familles de joints. En termes de contraintes, (45) conduit à la même expression pour les deux familles de joints :

$$f^j(\underline{\sigma}) = |\sigma_r - \sigma_\theta| \frac{\sin 2\alpha}{2} - C_j \leq 0 \quad (46)$$

Posant $\sigma_0^j = 2C_j / \sin 2\alpha$, (46) peut être réécrite sous la forme équivalente suivante :

$$f^j(\underline{\sigma}) = |\sigma_r - \sigma_\theta| - \sigma_0^j \leq 0 \quad (47)$$

Le critère de plasticité macroscopique s'écrit (*cf* chapitre 2) :

$$F^{hom}(\underline{\sigma}) = \max[f^r(\underline{\sigma}), f^j(\underline{\sigma})] \leq 0 \quad (48)$$

Représentation géométrique du domaine d'élasticité macroscopique \mathcal{C}^{hom}

Dans l'espace \mathcal{R}^3 des contraintes principales, le domaine d'élasticité \mathcal{C}^r de la matrice rocheuse est un prisme hexagonal régulier (figure 3). Le domaine d'élasticité \mathcal{C}^j des joints est quant à lui délimité par les plans d'équations $\sigma_r - \sigma_\theta = \pm \sigma_0^j$ (figure 4).

Le domaine d'élasticité du milieu homogénéisé \mathcal{C}^{hom} est défini par $\mathcal{C}^{hom} = \mathcal{C}^r \cap \mathcal{C}^j$ (*cf* chapitre 2).

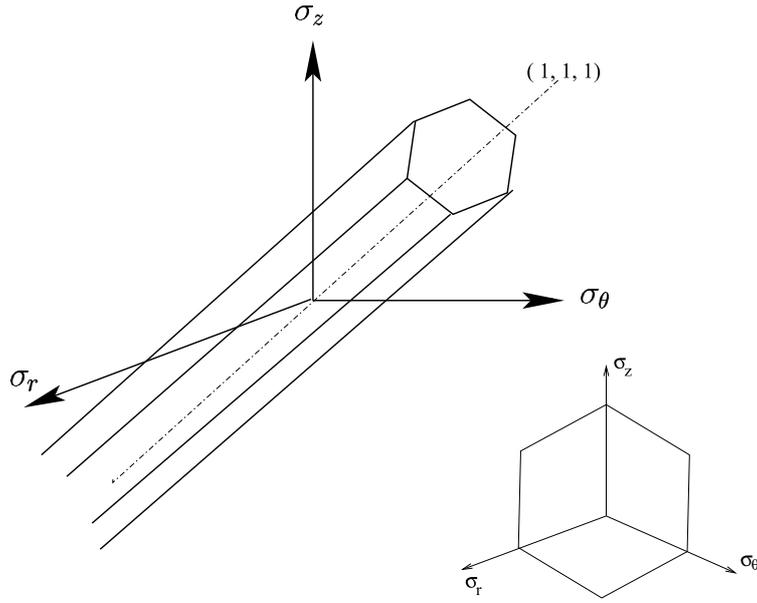


FIG. 3: Domaine d'élasticité de la matrice rocheuse dans et section par un plan déviateur des contraintes.

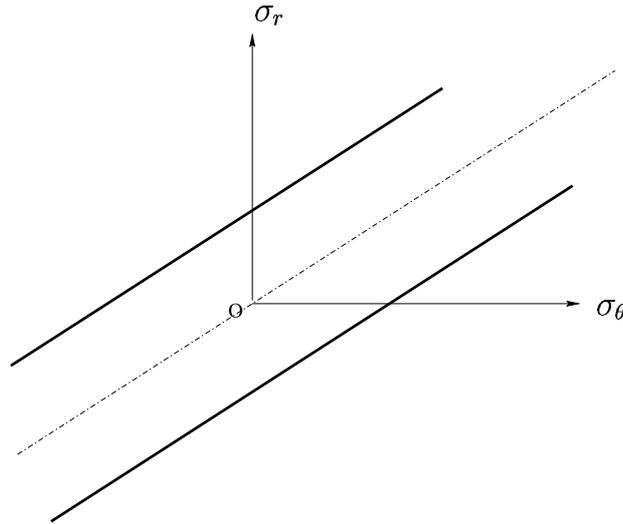


FIG. 4: Domaine d'élasticité des joints

A partir de maintenant, on se place dans l'hypothèse où le domaine \mathcal{C}^j tronque le domaine \mathcal{C}^r . Cela requiert la condition :

$$\sigma_0^j \leq \sigma_0^r \quad (49)$$

Physiquement, cela signifie qu'on se place dans la situation où la plasticité du milieu homogénéisé est effectivement affectée (au sens d'un affaiblissement) par celles des joints.

Géométriquement, \mathcal{C}^{hom} s'identifie alors à un prisme hexagonal dont la section dans un plan déviatorique correspond à celle représentée sur la figure (5).

Nous revenons maintenant à la résolution du problème en phase élastoplastique.

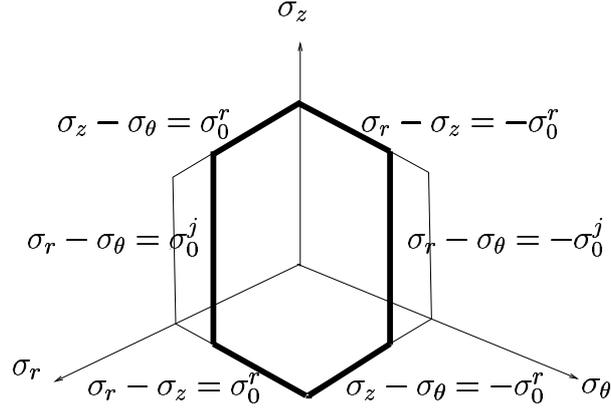


FIG. 5: Domaine d'élasticité macroscopique \mathcal{C}^{hom} .

La solution élastique indique que le déviateur est maximum en paroi. C'est en ce lieu que se produira la première plastification, pour un taux de convergence U^* et une pression de confinement p_c^* obtenus en exprimant la saturation du critère de plasticité en $r = R$ pour un chargement croissant

$$U^* = \frac{1}{a+1} \frac{\sigma_0^j}{2\bar{\mu}} \quad (50)$$

$$p_c^* = p_0 - \frac{\sigma_0^j}{a+1} \quad (51)$$

Cette plastification n'est possible que si $p_0 \geq \sigma_0^j/(a+1)$ puisque p_c est positif .

Etude du domaine élastique ($r > \rho$). Il s'agit maintenant, de déterminer le champ de déplacement dans le massif entourant une galerie fictive, de rayon ρ , soumise à une pression intérieure P appliquée à sa paroi (figure 6).

Par analogie avec (32), on peut poser :

$$\frac{u(r)}{r} = \frac{P - p_0}{2\bar{\mu}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \quad (52)$$

où P est une pression qui sera déterminée par la saturation du critère en $r = \rho$. Ceci conduit à la relation $P = p_c^*$. Il suffit de remplacer p_c par P dans la solution élastique de la section précédente pour avoir les champs solutions dans cette zone :

$$\frac{u(r)}{r} = -\frac{\sigma_0^j}{2\bar{\mu}} \frac{1}{a+1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \quad (53)$$

D'où

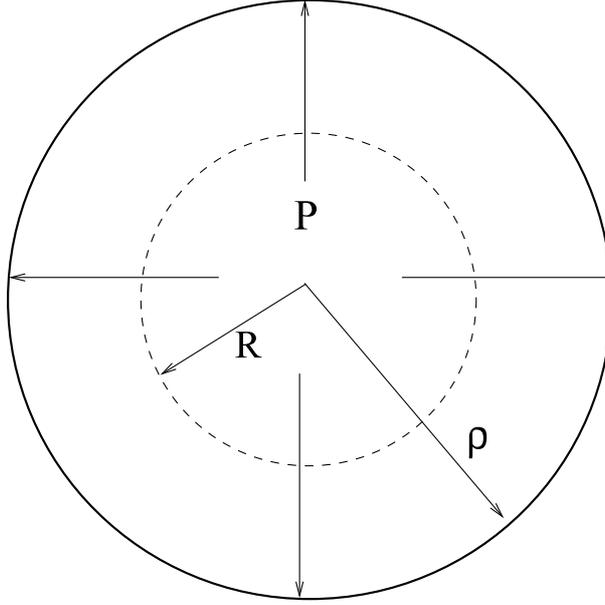


FIG. 6: Limite de la couronne plastique de rayon ρ .

$$\begin{aligned}
 \epsilon_r &= \frac{\sigma_0^j}{2\bar{\mu}} \frac{a}{a+1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \\
 \epsilon_\theta &= -\frac{\sigma_0^j}{2\bar{\mu}} \frac{1}{a+1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \\
 \epsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{54}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \frac{1}{a+1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} - 1 \\
 \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= -\frac{\sigma_0^j}{p_0} \frac{a}{a+1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} - 1 \\
 \frac{\sigma_z}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \frac{(1-a)\nu}{a+1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} - 1
 \end{aligned} \tag{55}$$

Etude de la zone plastique ($R \leq r \leq \rho$). L'état de contrainte en paroi correspondant à la phase élastique est tel que $\sigma_\theta < \sigma_z < \sigma_r$. Nous faisons l'hypothèse, à vérifier a posteriori, que le régime défini par $\sigma_\theta < \sigma_z < \sigma_r$ est maintenu dans la zone plastique durant tout le processus de chargement. Pour un tel régime, le critère macroscopique F^{hom} s'identifie à celui des joints :

$$F^{hom}(\underline{\sigma}) = f^j(\underline{\sigma}) = \sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_0^j \leq 0 \tag{56}$$

Dans la zone plastique, le champ de contraintes doit être plastiquement admissible ($\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_0^j$) et statiquement admissible ($\text{div } \underline{\sigma} = 0$). Prenant en compte la condition en paroi du tunnel $\sigma_r(R) = -p_c$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{p_c}{p_0} \\ \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \left(\ln\left(\frac{R}{r}\right) - 1 \right) - \frac{p_c}{p_0}\end{aligned}\quad (57)$$

La continuité du vecteur contrainte à la traversée de la surface $r = \rho$ à partir de (55) et de (57), fournit l'expression du rayon plastique :

$$\frac{\rho}{R} = \exp\left(\frac{p_0 - p_c}{\sigma_0^j} - \frac{1}{a+1}\right) \quad (58)$$

Il reste maintenant à déterminer σ_z . Or $\dot{\epsilon}_z^p = 0$ puisque le critère ne dépend pas de σ_z . Par ailleurs, la condition de symétrie de révolution impose la condition $\dot{\epsilon}_z = 0$. On en déduit la relation

$$\dot{\epsilon}_z^e = \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_z^p = 0 \quad (59)$$

La loi de comportement écrite en taux, indique alors que

$$\dot{\sigma}_z = \nu (\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta) \quad (60)$$

Compte tenu de (57), on obtient par intégration

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{p_c}{p_0} \\ \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \left(\ln\left(\frac{R}{r}\right) - 1 \right) - \frac{p_c}{p_0} \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= (2\nu) \cdot \frac{\sigma_0^j}{p_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) - \nu \cdot \frac{\sigma_0^j}{p_0} - (2\nu) \frac{p_c}{p_0} + (2\nu - 1)\end{aligned}\quad (61)$$

Ou encore en utilisant l'expression (58) de ρ :

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \left(\ln\left(\frac{\rho}{r}\right) + \frac{1}{a+1} \right) - 1 \\ \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= \frac{\sigma_0^j}{p_0} \left(\ln\left(\frac{\rho}{r}\right) - \frac{a}{a+1} \right) - 1 \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= (2\nu) \cdot \frac{\sigma_0^j}{p_0} \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) + \left(\frac{(1-a)\nu}{a+1} \right) \frac{\sigma_0^j}{p_0} - 1\end{aligned}\quad (62)$$

Champ de déplacement dans la zone plastique

La loi de comportement incrémentale s'écrit :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^e = \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^p = \underline{\mathcal{S}}^{hom} : \underline{\dot{\sigma}} \quad (63)$$

avec

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \dot{u}'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\dot{u}(r)}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad \text{et} \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}^j \frac{\partial F^{hom}}{\partial \underline{\sigma}} \quad \dot{\lambda}^j \geq 0 \quad (64)$$

Compte tenu de (56), il vient

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}^j (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \quad (65)$$

Explicitant la loi de comportement (63), on obtient

$$\dot{\epsilon}_r^e = S_{11}\dot{\sigma}_r + S_{12}\dot{\sigma}_\theta + S_{13}\dot{\sigma}_z \quad (66)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta^e = S_{12}\dot{\sigma}_r + S_{22}\dot{\sigma}_\theta + S_{23}\dot{\sigma}_z \quad (67)$$

$$\dot{\epsilon}_z^e = S_{13}\dot{\sigma}_r + S_{23}\dot{\sigma}_\theta + S_{33}\dot{\sigma}_z \quad (68)$$

qui, compte tenu de la condition $\dot{\epsilon}_z^e = 0$, conduit à

$$\dot{\epsilon}_r^e = \left(S_{11} - \frac{S_{13}^2}{S_{33}}\right)\dot{\sigma}_r + \left(S_{12} - \frac{S_{13} \cdot S_{23}}{S_{33}}\right)\dot{\sigma}_\theta \quad (69)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta^e = \left(S_{12} - \frac{S_{13} \cdot S_{23}}{S_{33}}\right)\dot{\sigma}_r + \left(S_{22} - \frac{S_{23}^2}{S_{33}}\right)\dot{\sigma}_\theta \quad (70)$$

$$\dot{\epsilon}_z^e = 0 \quad (71)$$

On écrit ensuite que

$$\text{tr } \underline{\dot{\epsilon}} = \text{tr } \underline{\dot{\epsilon}}^e + \text{tr } \underline{\dot{\epsilon}}^p \quad (72)$$

Comme $\text{tr } \underline{\dot{\epsilon}}^p = 0$, l'égalité ci-dessus se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{\dot{u}}{r} = A_0 \dot{\sigma}_r + B_0 \dot{\sigma}_\theta \quad (73)$$

avec $A_0 = S_{11} + S_{12} - (S_{13} + S_{23}) S_{13}/S_{33}$ et $B_0 = S_{12} + S_{22} - (S_{13} + S_{23}) S_{23}/S_{33}$

L'intégration de (73) entre l'instant de début de la plasticité ($p_c = p_c^*$) et l'instant actuel correspondant à la valeur actuelle de p_c , conduit à l'expression du champ de déplacement dans la zone plastique :

$$\frac{u(r)}{r} = H_1 + H_2 \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) + H_3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \quad (74)$$

avec $H_1 = \left(A_0(a + 3) + B_0(1 - a)\right) \sigma_0^j / (4(a + 1))$, $H_2 = (A_0 + B_0) \sigma_0^j / 2$ et $H_3 = -\left(H_1 + \sigma_0^j / (2\bar{\mu}(a + 1))\right)$

Nous achevons ainsi l'étude élastoplastique de la galerie pour les matériaux de Tresca.

Retour sur la validité des solutions.

La solution analytique a été construite en considérant trois hypothèses :

- la contrainte σ_z est intermédiaire, et ce durant tout le processus de chargement et en tout point de la zone plastique. On montre que cette condition impose que

$$\frac{p_0}{C_j} < \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu) \cdot \sin 2\alpha} \quad (75)$$

- le régime plastique du massif rocheux est régi par celui des joints, c'est-à-dire :

$$\sigma_0^j = C_j / \sin 2\alpha < \sigma_0^r = 2C_r \quad (76)$$

- on a plastification effective du massif, soit encore :

$$\frac{p_0}{C_j} > \frac{2}{(a+1)(\sin 2\alpha)} \quad (77)$$

Illustration.

La solution analytique construite auparavant va être maintenant illustrée en adoptant un jeu de données qui satisfait les conditions (75-77).

Le jeu de données de *référence* est le suivant :

★ *État de contraintes initial* : $p_0 = 4 \text{ MPa}$

★ *Matrice rocheuse* : $E_r = 10 \text{ GPa}$, $\nu_r = 0.30$, $C_r = \sigma_0^r / 2 = 5 \text{ MPa}$

★ *Joints* : $k_n = 5 \text{ GPa/m}$, $k_t = 1 \text{ GPa/m}$, $C_j = 0.75 \text{ MPa}$, $\alpha = 15^\circ$. L'espacement des joints est pris égal à $\ell = 0.1 \times R$.

Il convient de signaler que le choix de la valeur de p_0 revient à fixer la profondeur de la galerie. Typiquement, le poids volumique d'une roche est de l'ordre de 20 kN/m^3 , ce qui situe la galerie à une profondeur d'environ 200 m. Mathématiquement, la justification de la démarche d'homogénéisation requiert la condition $\ell \ll R$. Cependant, nous considérons que la valeur $\ell = 0.1 \times R$ est suffisamment petite pour que l'ingénieur ait recours à cette démarche.

La solution analytique est illustrée pour le jeu de données de *référence* à travers :

- La figure (7) qui représente les courbes de convergence-confinement des massifs sain et fracturé.
- Le profil du déplacement radial en fonction de la distance à l'axe du tunnel (figure (8)).
- Le profil des contraintes en fonction de la distance à l'axe du tunnel (figure (9)).

L'observation de ces figures, notamment la figure (7), montre clairement l'effet affaiblissant des joints sur la réponse globale du massif. En effet, on peut montrer que le comportement du massif sain (en l'absence de joints) demeurerait *purement élastique* pour le jeu de données considéré. La convergence finale ($p_c = 0$) correspondante serait de l'ordre de 0.52%. La présence des joints

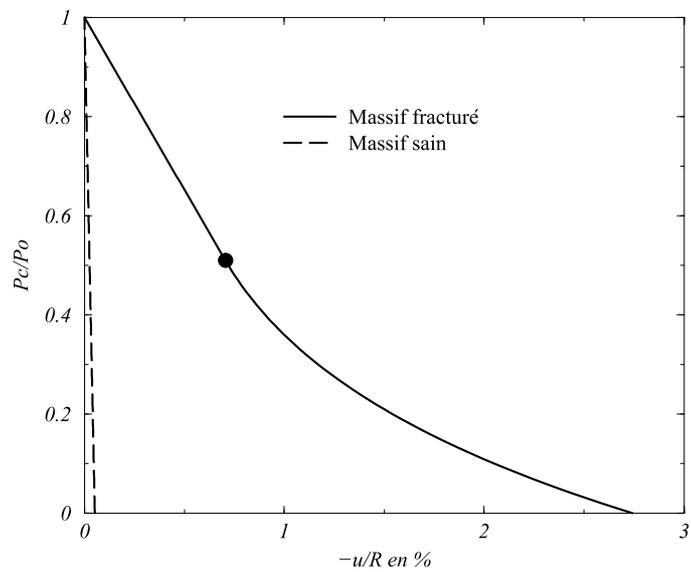


FIG. 7: Courbe de convergence-confinement.

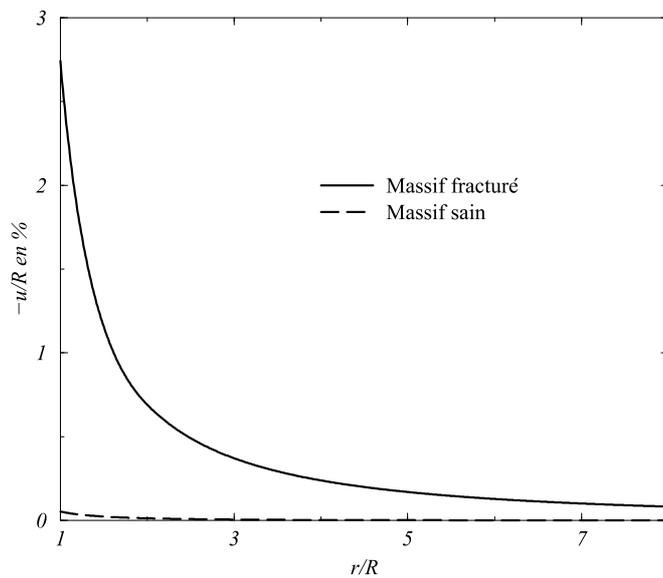


FIG. 8: Déplacement radial dans les massifs sain et fracturé pour $p_c = 0$.

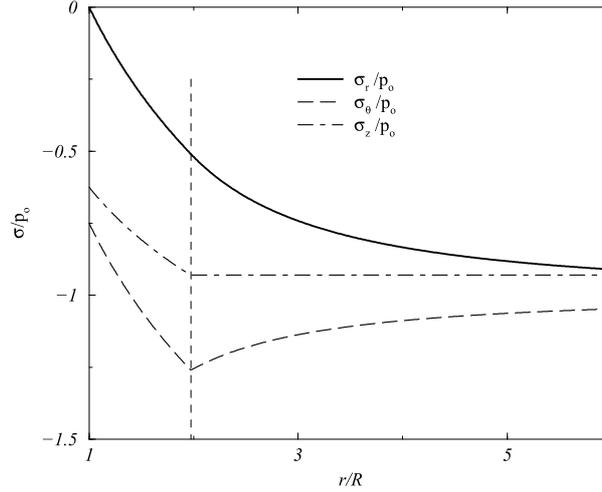


FIG. 9: Contraintes dans le massif fracturé pour $p_c = 0$.

agrandit significativement la déformabilité du milieu, la convergence finale en paroi du tunnel atteignant 2.8%.

Nous allons maintenant examiner l'effet de certains paramètres de la microstructure sur le comportement global de l'ouvrage. Conscients du caractère académique du problème considéré, les résultats présentés ci-après n'ont pour seul objectif que celui de dégager des tendances qualitatives. Gardant fixés tous les autres paramètres (jeu de données de référence), chacune des figures (10-12) ci-dessous illustre la sensibilité du comportement global de l'ouvrage à un des paramètres dont on fait varier la valeur autour de celle de référence.

On se borne ici à examiner l'influence de la cohésion des joints C_j , de l'espacement inter-joints ℓ et de l'inclinaison α . L'effet des autres paramètres tels que la rigidité de la matrice ou celle des joints est illustré en annexe **B**. Notons la grande sensibilité de la convergence du tunnel à l'inclinaison α . Ceci est conforme au fait que la plasticité du milieu rocheux n'est plus affectée par celles des joints pour les petites inclinaisons (voir condition (76)).

2.3.2 Constituants de Mohr-Coulomb

Le massif rocheux fracturé est maintenant supposé constitué d'une matrice rocheuse et des joints dont la plasticité est décrite par des critères de Mohr-Coulomb. Comme en **2.3.1**, on se place dans l'hypothèse où la contrainte σ_z est intermédiaire. Le critère de la matrice peut alors être mis sous la forme :

$$f^r(\underline{\sigma}) = N_\varphi (\sigma_r - H_r) - (\sigma_\theta - H_r) \quad (78)$$

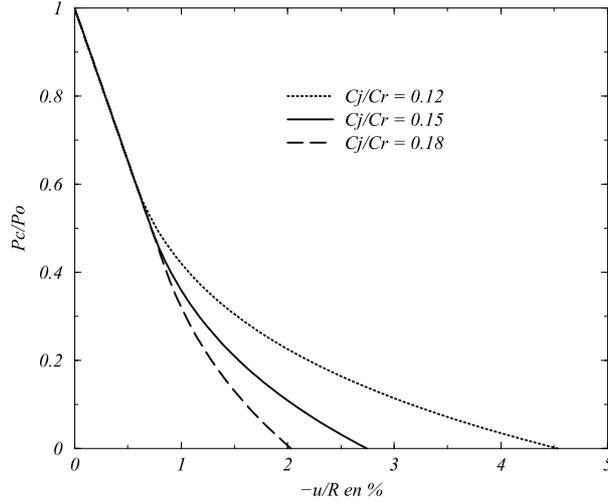


FIG. 10: Effet de la cohésion des joints sur la convergence du massif.

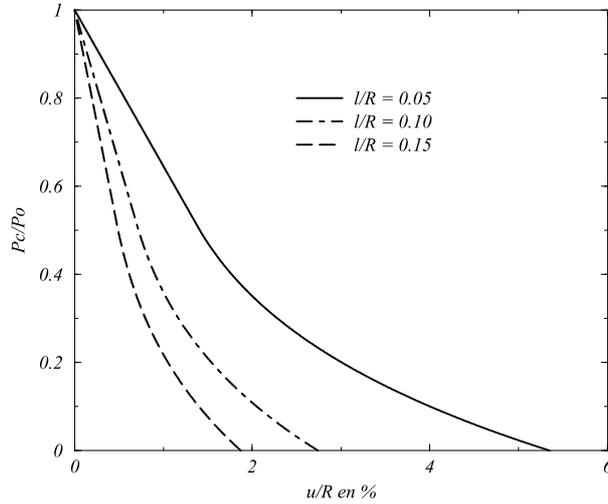


FIG. 11: Effet de l'espaceur inter-joints sur la convergence du massif.

avec $N_\varphi = (1 + \sin \varphi_r)/(1 - \sin \varphi_r)$, $\sigma_0^r = 2 C_r (\cos \varphi_r)/(1 - \sin \varphi_r) = (N_\varphi - 1) H_r$ et $H_r = C_r \cot \varphi_r$.

Adoptant la même valeur de la cohésion C_j et la même valeur de l'angle de frottement φ_j pour les deux familles de joints, le critère correspondant s'écrit :

$$f^j(\underline{\sigma}) = |\tau| + \sigma \tan \varphi_j - C_j \leq 0 \quad (79)$$

Il est facile de montrer que les critères des deux familles de joints admettent la même expression en termes de contraintes $\underline{\sigma}$:

$$f^j(\underline{\sigma}) = |\sigma_r - \sigma_\theta| \frac{\sin 2\alpha}{2} + (\sigma_r \sin^2 \alpha + \sigma_\theta \cos^2 \alpha) \tan \varphi_j - C_j \leq 0 \quad (80)$$

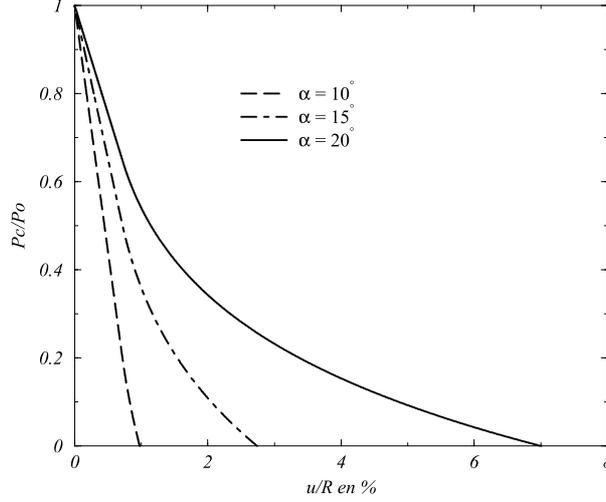


FIG. 12: Effet de l'orientation des joints sur la convergence du massif.

Distinguant les deux situations $\sigma_r \leq \sigma_\theta$ et $\sigma_\theta \leq \sigma_r$, on peut réécrire (80) sous la forme :

$$f^j(\underline{\sigma}) = \begin{cases} N_t(\sigma_r - H_j) - (\sigma_\theta - H_j) \leq 0 & \text{si } \sigma_\theta \leq \sigma_r \\ N'_t(\sigma_\theta - H_j) - (\sigma_r - H_j) \leq 0 & \text{si } \sigma_r \leq \sigma_\theta \end{cases}$$

où l'on a noté $H_j = C_j \cot \varphi_j$, $N_t = \tan \alpha / \tan(\alpha - \varphi_j)$ et $N'_t = \tan(\alpha + \varphi_j) / \tan \alpha$. On a supposé par ailleurs que $\alpha > \varphi_j$. Nous reviendrons un peu plus loin sur la signification de cette condition.

Comme pour la matrice, on introduit également la notation

$$\sigma_0^j = (N_t - 1) H_j \quad (81)$$

Représentation géométrique du domaine d'élasticité macroscopique \mathcal{C}^{hom}

Rappelons tout d'abord que $F^{hom}(\underline{\sigma}) = \max[f^r(\underline{\sigma}), f^r(\underline{\sigma})]$.

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)$, le domaine d'élasticité de la matrice est simplement le cône de Coulomb. Celui des joints est délimité par les plans \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 : \quad N_t(\sigma_r - H_j) - (\sigma_\theta - H_j) = 0 \quad (82)$$

$$\mathcal{D}_2 : \quad N'_t(\sigma_\theta - H_j) - (\sigma_r - H_j) = 0 \quad (83)$$

Comme dans le cas de Tresca, on se place dans la situation où la plasticité du milieu homogénéisé est affectée (au sens de l'affaiblissement) par la présence des joints. Dans l'optique du régime plastique ($\sigma_\theta < \sigma_z < \sigma_r$) dans lequel nous construisons la solution analytique, cela suppose que

le plan \mathcal{P}_1 tronque le domaine \mathcal{C}^r . On peut montrer que si $\alpha < \varphi^j$, alors cette situation est impossible.

Les figures (13) et (14) donnent une représentation du domaine $\mathcal{C}^{hom} = \mathcal{C}^r \cap \mathcal{C}^j$ dans le cas particulier où les deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 tronquent \mathcal{C}^r .

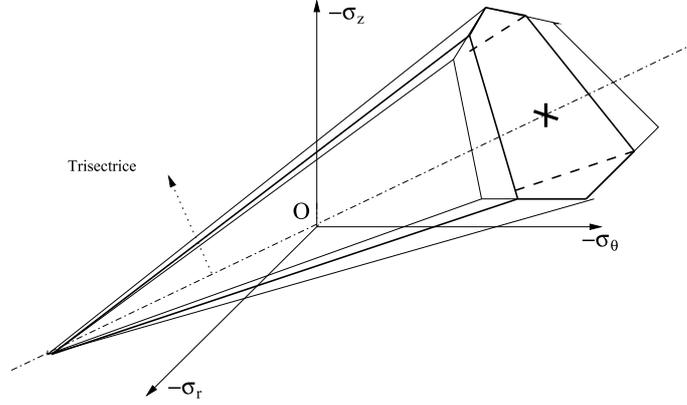


FIG. 13: Domaine d'élasticité macroscopique dans l'espace des contraintes principales

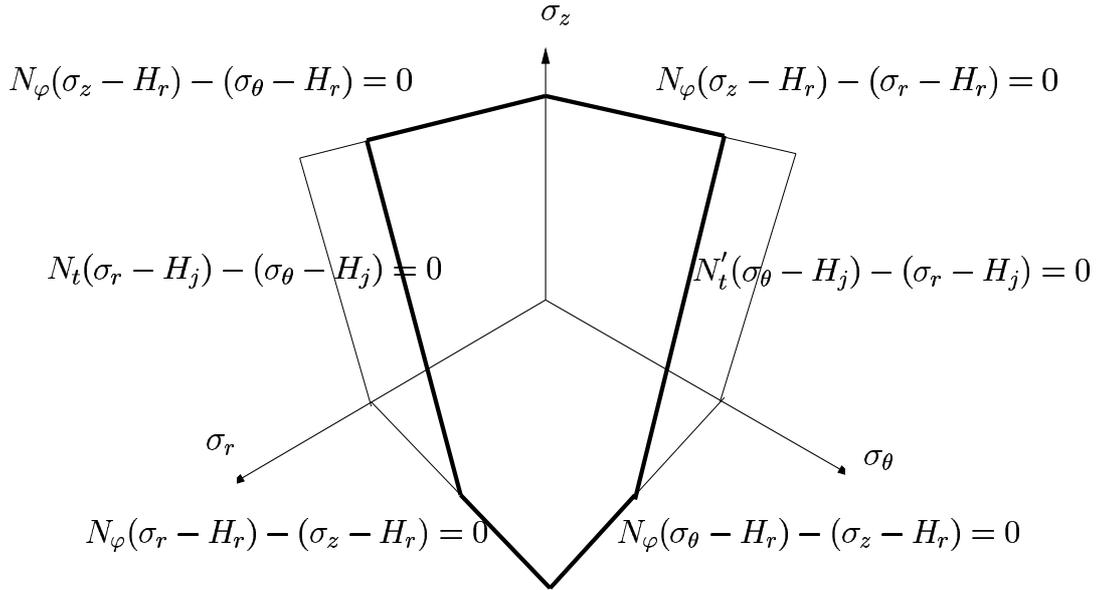


FIG. 14: Section du domaine d'élasticité macroscopique dans un plan déviatorique.

Revenons maintenant à la résolution du problème en phase élastoplastique.

Le taux de convergence U^* et la pression de confinement p_c^* marquant l'amorce de la plastification sont donnés par :

$$U^* = \frac{(N_t - 1)p_0 - \sigma_0^j}{2\bar{\mu}(a + N_t)} \quad (84)$$

$$p_c^* = \frac{(a + 1)p_0 - \sigma_0^j}{a + N_t} \quad (85)$$

p_c^* étant nécessairement positif, la condition d'apparition de la plasticité est :

$$\frac{p_0}{\sigma_0^j} \geq \frac{1}{a+1} \quad (86)$$

En phase élastoplastique, le massif entourant la galerie se scinde, comme nous l'avons vu précédemment, en deux domaines. On désigne le rayon plastique par ρ .

Etude du domaine élastique ($r > \rho$). Raisonnant comme dans le cas de constituants de Tresca, on obtient directement l'expression du champ de déplacement dans cette zone :

$$\frac{u(r)}{r} = -\frac{N_t - 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{2\bar{\mu}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \quad (87)$$

Les champs de déformation et de contrainte sont respectivement donnés par :

$$\epsilon_r = a \frac{N_t - 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{2\bar{\mu}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \quad (88)$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{N_t - 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{2\bar{\mu}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} \quad (89)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad (90)$$

et

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{N_t - 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{p_0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} - 1 \quad (91)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{p_0} = -a \frac{N_t - 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{p_0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} - 1 \quad (92)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = (1 - a)\nu \frac{N_t - 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{p_0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{a+1} - 1 \quad (93)$$

Etude du domaine plastique ($R \leq r \leq \rho$). Compte tenu des hypothèses précédentes, notamment la condition $\sigma_\theta < \sigma_z < \sigma_r$, le critère de plasticité dans cette zone s'écrit :

$$F^{hom}(\underline{\sigma}) = N_t(\sigma_r - H_j) - (\sigma_\theta - H_j) \leq 0 \quad (94)$$

L'équation d'équilibre, compte tenu de la condition de saturation du critère, s'écrit

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + (1 - N_t) \frac{\sigma_r}{r} = -\frac{\sigma_0^j}{r} \quad (95)$$

Intégrant l'équation ci-dessus en prenant en compte la condition $\sigma_r(R) = -p_c$, on obtient

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{H_j}{p_0} - \frac{p_c + H_j}{p_0} \left(\frac{r}{R} \right)^{N_t-1} \quad (96)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{p_0} = \frac{H_j}{p_0} - N_t \frac{p_c + H_j}{p_0} \left(\frac{r}{R} \right)^{N_t-1} \quad (97)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = (2\nu) \frac{H_j}{p_0} + (2\nu - 1) - (1 + N_t)\nu \frac{p_c + H_j}{p_0} \left(\frac{r}{R} \right)^{N_t-1} \quad (98)$$

Le rayon plastique délimitant la couronne plastifiée s'obtient en exprimant la continuité du vecteur contrainte à la traversée de la surface $r = \rho$, soit :

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{a + 1}{a + N_t} \frac{p_0 + H_j}{p_c + H_j} \right)^{\frac{1}{N_t-1}} \quad (99)$$

Champ de déplacement dans la zone plastique

Les relations (64) restant toujours valables, le taux de déformation plastique s'écrit, compte tenu de (94)

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda}^j \frac{\partial F^{hom}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = N_t \dot{\lambda}^j \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \dot{\lambda}^j \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (100)$$

$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_r^e$, $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_\theta^e$ et $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_z^e$ sont toujours donnés par (66), (67) et (68), respectivement.

Exprimant l'égalité $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$ en composantes, on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{d\dot{u}(r)}{dr} + N_t \frac{\dot{u}(r)}{r} = A_1 \dot{\sigma}_r + B_1 \dot{\sigma}_\theta \quad (101)$$

avec $A_1 = S_{11} + N_t S_{12} - \frac{S_{13}^2}{S_{33}} - \frac{N_t S_{13} S_{23}}{S_{33}}$ $B_1 = S_{12} + N_t S_{22} - \frac{S_{13} S_{23}}{S_{33}} - \frac{N_t S_{23}^2}{S_{33}}$

Sachant que les expressions de σ_r et σ_θ sont données par (96) et (97), l'intégration de (101) conduit à :

$$\frac{du(r)}{dr} + N_t u(r) = (A_1 + B_1)(H_j + p_0) - (A_1 + N_t B_1) \frac{a + 1}{a + N_t} (H_j + p_0) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{N_t-1} \quad (102)$$

La solution de cette équation différentielle, après avoir assuré la continuité du déplacement à l'interface $r = \rho$, est :

$$\frac{u(r)}{r} = J_1 + J_2 \left(\frac{r}{\rho} \right)^{N_t-1} + J_3 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{N_t+1} \quad (103)$$

$$\text{avec } J_1 = \frac{(A_1+B_1)(H_j+p_0)}{N_{t+1}} \quad J_2 = -\frac{A_1+N_t}{2N_t} \frac{B_1}{a+N_t} (H_j+p_0) \quad J_3 = -\left(J_1 + J_2 + \frac{(N_t-1)(H_j+p_0)}{2(a+N_t)\bar{\mu}} \right)$$

Retour sur la validité des solutions proposées.

La condition d'intermédiarité de σ_z implique :

$$\frac{p_0}{C_j} < \frac{(1-\nu)(N_t-1) \cdot \cot \varphi^j}{1-2\nu} \quad (104)$$

Le régime plastique du milieu est contrôlé par celui des joints si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$N_t < N_\varphi \quad (105)$$

et

$$\sigma_0^j < \sigma_0^r \quad (106)$$

A ces conditions, il faut rajouter celle donnée par (86) qui exprime la plastification du milieu.

Illustration.

La solution analytique construite dans le cas de constituants de Coulomb va être maintenant illustrée en adoptant un jeu de données, dit de *référence*, compatible avec les conditions (86) et (104-106).

★ *État de contraintes initial* $p_0 = 4$ MPa

★ *Matrice rocheuse* : $E_r = 10$ GPa, $\nu_r = 0.30$, $C_r = 5$ MPa, $\varphi^r = 40^\circ$

★ *Joints* : $k_n = 5$ GPa/m, $k_t = 1$ GPa/m, $C_j = 0.75$ MPa, $\varphi^j = 30^\circ$, $\alpha = 50^\circ$, $\ell = 0.1 \times R$.

Les figures (15), (16) et (17) présentent respectivement, la courbe de convergence-confinement du massif, les profils du déplacement radial et des contraintes pour $p_c = 0$. Les remarques faites dans le cas de constituants de Tresca demeurent valables ici. L'observation de la figure (15) montre bien l'effet affaiblissant des joints sur la réponse globale du massif. En effet, le comportement du massif sain (en l'absence de joints) demeurerait *purement élastique* pour le jeu de données considéré, avec une convergence finale ($p_c = 0$) de l'ordre de 0.52%, alors que celle du massif fracturé atteint 7%.

On trouvera en annexe **B** une étude portant sur l'influence de certains paramètres de la microstructure sur la réponse du massif fracturé.

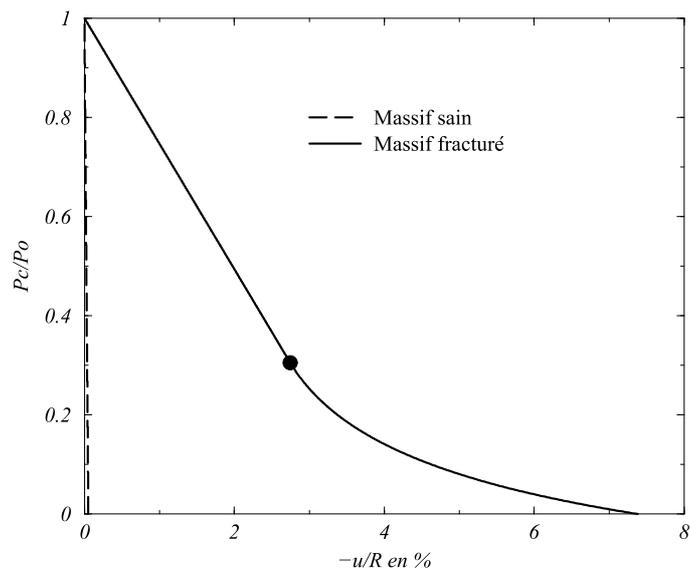


FIG. 15: Courbe de convergence-confinement du massif.

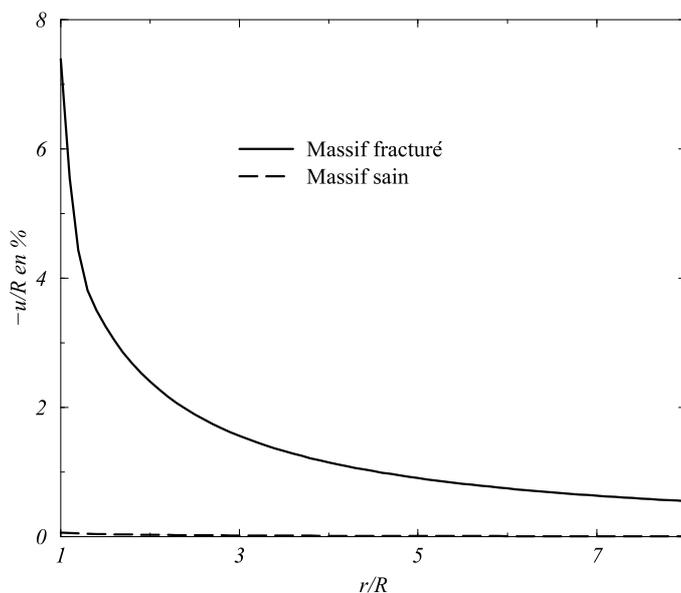


FIG. 16: Profil du déplacement radial dans le massif pour $p_c = 0$.

3 Commentaires conclusifs

Nous venons d'achever la résolution analytique du problème de la convergence d'une galerie profonde en milieu rocheux fracturé. Le premier objectif de la démarche est clairement atteint. Rappelons que celui-ci consistait à illustrer la résolution par voie analytique d'un problème d'évolution élastoplastique défini sur un ouvrage en tant que milieu homogénéisé. L'analogie avec le traitement du même problème posé sur un milieu homogène classique est également mise en évidence.

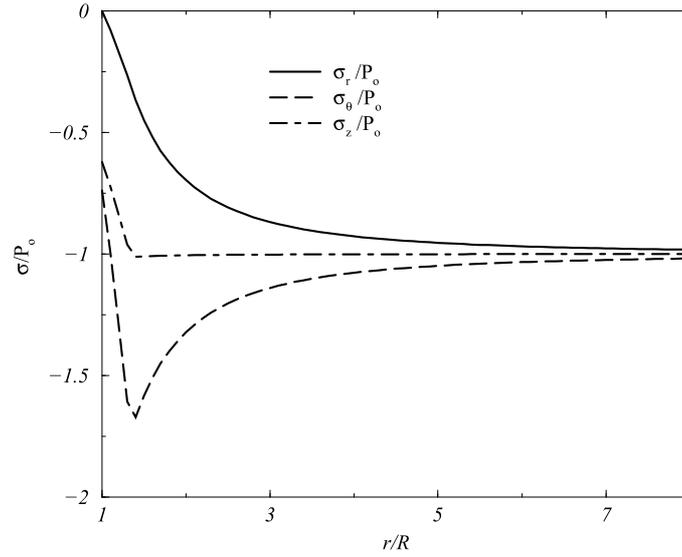


FIG. 17: Contraintes dans le massif pour $p_c = 0$.

On dispose ainsi d'une solution de référence pour valider des codes de calculs numériques. Il s'agit bien-entendu du second objectif de la démarche. Celui-ci nous paraît essentiel dans l'optique de l'élaboration d'un outil de calcul par éléments finis incorporant le comportement élastoplastique homogénéisé. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

On garde à l'esprit le caractère académique du réseau de fracturation considéré. Cependant, hormis cet exemple, nous ne disposerions pas de solution pour qualifier notre code numérique.

CHAPITRE 4

Un outil pour l'analyse par éléments
finis des ouvrages en roches fracturées

Sommaire

- 1.** Introduction

- 2.** Méthode des éléments finis pour le milieu homogénéisé
 - 2.1 Position du problème d'évolution élastoplastique
 - 2.2 Discrétisation temporelle et formulation variationnelle
 - 2.3 Discrétisation par éléments finis du problème incrémental

- 3.** Démarche de résolution
 - 3.1 Projection sur le domaine d'élasticité \mathcal{C}^{hom}
 - 3.2 Algorithme de résolution en élastoplasticité

- 4.** Validation de l'outil numérique
 - 4.1 Poinçonnement d'un massif homogène
 - 4.2 Convergence d'un tunnel en milieu rocheux fracturé : comparaison avec la solution analytique du chapitre 3

1 Introduction

Mettant en œuvre un raisonnement micro-mécanique, un modèle de comportement macroscopique en élastoplasticité pour les milieux rocheux fracturés, a été formulé au second chapitre.

A l'instar du modèle direct, ce modèle ne peut être utilisé en dehors de situations académiques, que s'il est implémenté dans un code de calcul de structures directement utilisable par l'ingénieur. Dans cette optique, on s'attachera dans ce chapitre à décrire les éléments nécessaires à l'élaboration d'un outil de calcul par éléments finis, destiné à l'analyse en élastoplasticité des structures en milieux rocheux et incorporant le comportement homogénéisé.

En fait, il s'agira bien entendu d'adapter la démarche classique de résolution des problèmes de mécanique par la méthode des éléments finis en élastoplasticité, au cadre du comportement formulé auparavant. Il faut souligner la spécificité de celui-ci :

- *anisotropie* du comportement tant en élasticité qu'en plasticité ;
- caractère *multi-potentiel* pour la règle d'écoulement plastique, telle que décrite par la relation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \sum_{j=1,p} \dot{\lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\lambda}^r \geq 0, \dot{\lambda}^j \geq 0 \quad (1)$$

établie en section 4 du chapitre 2.

Ces deux traits, principalement le second, sont à la source de difficultés lors du traitement numérique. En effet, l'algorithme de résolution en plasticité qui sera mis en œuvre, nécessite de procéder à la projection d'états de contrainte sur le domaine d'élasticité \mathcal{C}^{hom} . Cette opération sort du cadre classique de comportements usuels lorsqu'il s'agit de celui décrit par plusieurs potentiels plastiques. Le traitement numérique de cet aspect est quasi inexistant dans la littérature, tout au moins sur le plan de sa mise en œuvre pratique. On peut se référer à Crisfield (1991) où cette problématique est évoquée. En fait, la démarche qu'on proposera pour faire face à cette difficulté constitue une première approche qui demeure perfectible en terme d'amélioration de la convergence de l'algorithme de résolution en plasticité.

On commence par rappeler la formulation variationnelle du problème d'élastoplasticité discrétisé en temps. On présente ensuite la démarche qui conduit à la modélisation par éléments finis pour aboutir à la forme algébrique du problème discrétisé en temps et en espace.

L'algorithme de résolution est décrit en insistant sur l'étape de projection sur le domaine d'élasticité.

Le code numérique mis au point sera alors validé à travers deux exemples :

- le poinçonnement d'un massif homogène (absence de joints) en déformation plane ;
- la convergence d'un tunnel en milieu rocheux fracturé, problème traité analytiquement au chapitre 3.

Dans toute la suite, il est sous-entendu que le matériau réel est remplacé par le matériau homogène équivalent. Ainsi, si \mathcal{S} désigne une structure construite en milieu rocheux fracturé et soumise à un chargement donné, \mathcal{S} fera aussi référence dans notre propos à la structure de même géométrie, soumise au même chargement mais constituée du matériau homogénéisé.

Les notations utilisées ici pour décrire le comportement du milieu rocheux sont celles introduites lors du second chapitre.

2 Méthode des éléments finis pour le milieu homogénéisé

La formulation d'un problème d'évolution élastoplastique requiert l'écriture des équations d'équilibre, de la loi de comportement, des conditions aux limites ainsi que des conditions initiales. La résolution d'un tel problème n'est possible analytiquement que lorsque la géométrie et le chargement sont suffisamment simples. Le recours aux méthodes de résolution par voie numérique s'impose fréquemment à l'ingénieur. Parmi ces méthodes, la méthode des éléments finis fournit un cadre systématique pour la construction de solutions approchées. Il s'agira ici d'introduire les concepts clés de cette méthode. Pour une description détaillée, on pourra se référer, par exemple, à Touzot et Dhett (1984), Zienkiewicz and Taylor (1994a,b) et Batoz et Dhett (1995), Simo et Hughes (1998), Crisfield (1991).

2.1 Position du problème d'évolution élastoplastique

Soit une structure \mathcal{S} construite en milieu rocheux fracturé occupant un domaine géométrique $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ de bord $\partial\Omega$. Cette structure est soumise à un chargement défini à tout instant $t \in [0, T]$ par la donnée :

- de forces de volume $\rho(\underline{x})\underline{F}(\underline{x}, t)$ en tout point \underline{x} de Ω ;
- de forces de surface $\underline{T}^d(\underline{x}, t)$ appliquées sur une partie S_T de $\partial\Omega$;
- de déplacements $\underline{\xi}^d(\underline{x}, t)$ imposés sur une partie S_ξ de $\partial\Omega$, telle que S_T et S_ξ forment une partition de $\partial\Omega$, indépendante du temps :

$$\partial\Omega = S_T \cup S_\xi \quad , \quad S_T \cap S_\xi = \emptyset \quad (2)$$

On a supposé ci-dessus que les conditions aux limites en effort et en déplacement sont prescrites

sur les mêmes domaines S_T et S_ξ pour toutes les composantes. Il s'agit bien-entendu d'une facilité d'écriture et non d'une restriction de la généralité du propos.

Se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations, il s'agit de déterminer à chaque instant $t \in [0, T]$, le couple de champs $(\underline{\sigma}(t), \underline{\xi}(t))$ solution en contrainte et déplacement du problème d'évolution élastoplastique défini par :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}, t) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{équilibre local}) \quad (3)$$

$$\underline{\dot{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\zeta}^{hom} : (\underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, t) - \underline{\dot{\xi}}^p(\underline{x}, t)) \quad (\text{loi de comportement}) \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{\xi}}^p = \dot{\lambda}^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\sigma}} + \sum_{j=1, p} \dot{\lambda}^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\sigma}} \\ \dot{\lambda}^r \geq 0, \dot{\lambda}^j \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{règle d'écoulement plastique}) \quad (5)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_T \quad (\text{C.L en effort}) \quad (6)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\xi}^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_\xi \quad (\text{C.L en déplacement}) \quad (7)$$

$$\underline{\sigma}(t = 0) = \underline{\sigma}_0 \quad (\text{état initial correspondant à } \underline{\xi} = 0) \quad (8)$$

où $\underline{\xi}$ est la déformation associée au champ de déplacement $\underline{\xi}$, et $\underline{n}(\underline{x})$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point \underline{x} .

Rappelons que les multiplicateurs plastiques $(\dot{\lambda}^r, \dot{\lambda}^j)$ sont astreints à satisfaire les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda}^\alpha \geq 0 \quad , \quad f^\alpha(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}^\alpha f^\alpha(\underline{\sigma}) = 0 \quad \alpha = r, j \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (9)$$

Nous renvoyons à Halphen et Salençon (1987) pour les aspects liés à l'existence et à l'unicité de la solution de ce problème d'évolution dont la structure fait ressortir sa nature incrémentale, en vertu de la forme de la loi de comportement. Dans l'optique d'une résolution numérique, le processus de chargement devra donc être discrétisé dans le temps.

La partition S_T et S_ξ de $\partial\Omega$ étant fixée indépendante du temps, on représentera le processus de chargement du système par un vecteur $\underline{Q}(t)$ comprenant la valeur à l'instant t , des efforts volumiques, des forces surfaciques et des déplacements imposés.

2.2 Discrétisation temporelle et formulation variationnelle

Comme mentionnée auparavant, la démarche générale de résolution numérique du problème d'évolution élastoplastique nécessite une discrétisation dans le temps du chargement. Le problème d'évolution est donc ramené à une succession de problèmes incrémentaux :

- 1- on suppose connue la solution du problème à l'instant t , soient $\underline{\sigma}(t)$, $\underline{\xi}(t)$ et $\underline{\varepsilon}^p(t)$;
- 2- on cherche à déterminer la solution du problème à l'instant $t' = t + \Delta t$, résultant de l'application de l'incrément de chargement

$$\Delta \underline{Q} = \underline{Q}(t') - \underline{Q}(t) \quad (10)$$

appliqué entre les instants t et t' . La variation d'une grandeur \mathcal{M} entre les instants t et t' est notée

$$\Delta \mathcal{M} = \mathcal{M}(t') - \mathcal{M}(t) \quad (11)$$

et sa dérivée par rapport au temps est évaluée par un schéma d'intégration implicite :

$$\dot{\mathcal{M}}(t') = \frac{\Delta \mathcal{M}}{\Delta t} \quad (12)$$

La détermination des champs $\underline{\sigma}(t')$, $\underline{\xi}(t')$, $\underline{\varepsilon}^p(t')$ solutions à l'instant t' , revient donc à déterminer les incréments correspondants. Ces derniers sont solutions du problème incrémental résultant de l'application de $\Delta \underline{Q}$ et défini par les équations suivantes :

$$\operatorname{div} \Delta \underline{\sigma} + \rho \Delta \underline{F} = 0 \quad (13)$$

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{C}^{hom} : (\Delta \underline{\varepsilon} - \Delta \underline{\varepsilon}^p) \quad (14)$$

$$\Delta \underline{\varepsilon}^p = \Delta \lambda^r \frac{\partial g^r}{\partial \underline{\sigma}} + \sum_{j=1,p} \Delta \lambda^j \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\sigma}} \quad \Delta \lambda^r \geq 0, \Delta \lambda^j \geq 0 \quad (15)$$

$$\Delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \Delta \underline{T}^d \quad \text{sur } S_T \quad (16)$$

$$\Delta \underline{\xi} = \Delta \underline{\xi}^d \quad \text{sur } S_\xi \quad (17)$$

les multiplicateurs plastiques $\Delta \lambda^r$ et $\Delta \lambda^j$ devant satisfaire les conditions de Kuhn-Tucker analogues à celles décrites par (9). Les gradients de g et g' dans (15) sont à prendre en $\underline{\sigma}(t')$.

Les équations de la plasticité étant non linéaires, il s'ensuit que pour un incrément $\Delta \underline{Q}$ donné, le problème défini par (13-17) nécessite une résolution numérique *itérative*.

Pour cet objectif, on procède tout d'abord à la dualisation des équations d'équilibre (13). Cette opération consiste à multiplier ces dernières par un champ de déplacement virtuel $\hat{\underline{\xi}}$ quelconque, défini sur Ω et compatible avec des données nulles en déplacement sur S_ξ :

$$\hat{\underline{\xi}}(\underline{x}) = 0 \quad \text{sur } S_\xi \quad (18)$$

On a ainsi

$$(\text{div } \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \rho \Delta \underline{\underline{F}}) \cdot \hat{\underline{\xi}} = 0 \quad \implies \quad \int_{\Omega} \text{div } \Delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \Delta \underline{\underline{F}} \cdot \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega = 0 \quad (19)$$

On obtient à l'issue d'une intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\sigma}} : \text{grad } \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \Delta \underline{\underline{F}} \cdot \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega + \int_{S_T} \Delta \underline{\underline{T}}^d \cdot \hat{\underline{\xi}} \, dS \quad (20)$$

On injecte dans cette dernière relation, l'expression de $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ donnée par la loi de comportement (14) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{C}^{hom} : \text{grad } \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \Delta \underline{\underline{F}} \cdot \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega + \int_{S_T} \Delta \underline{\underline{T}}^d \cdot \hat{\underline{\xi}} \, dS \\ &\quad \forall \hat{\underline{\xi}} \quad (21) \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p : \mathcal{C}^{hom} : \text{grad } \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega \end{aligned}$$

La solution en déplacement $\Delta \underline{\underline{\xi}}$ du problème incrémental est solution du problème variationnel défini par (21), auquel il faut adjoindre les conditions aux limites (17).

Comme on le verra dans la suite, cette forme variationnelle du problème est bien adaptée pour une discrétisation par éléments finis.

2.3 Discrétisation par éléments finis du problème incrémental

On procède tout d'abord à la discrétisation spatiale de la géométrie du système. Cela consiste à subdiviser le domaine Ω en un nombre fini m de mailles (où éléments polyédriques), notés Ω_e , $1 \leq e \leq m$. Le recouvrement de Ω par le maillage peut être exact ou approché.

Les nœuds d'une maille sont les sommets de l'élément ainsi qu'éventuellement des points supplémentaires situés sur les côtés et à l'intérieur. On note n le nombre total de nœuds du maillage.

Le principe de la méthode de résolution par éléments finis consiste à rechercher une solution approchée, qu'on continuera à noter abusivement $\Delta \underline{\underline{\xi}}$, du problème variationnel (21) en explorant les champs dont la restriction à chaque élément est une fonction polynômiale des coordonnées. Plus précisément, on définit $\Delta \underline{\underline{\xi}}$ à partir de ses valeurs prises aux nœuds du maillage. On note \underline{u}_e le vecteur contenant les déplacements nodaux de l'élément Ω_e . La restriction de $\Delta \underline{\underline{\xi}}$ à cet élément s'écrit comme l'interpolation suivante

$$\forall \underline{x} \in \Omega_e \quad \Delta \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e \quad (22)$$

où \mathbf{N}_e désigne la matrice des *fonctions de formes* polynômiales en \underline{x} .

Pour exprimer de manière commode la forme variationnelle discrétisée, on adopte la notation matricielle classiquement utilisée en éléments finis. Se fixant un repère orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, les tenseurs $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ et $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ sont représentés par des vecteurs $\Delta \underline{\sigma}$ et $\Delta \underline{\varepsilon}$:

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} \longleftrightarrow \Delta \underline{\sigma} \quad \text{avec} \quad {}^t \Delta \underline{\sigma} = \{\Delta \sigma_{11}, \Delta \sigma_{22}, \Delta \sigma_{33}, \Delta \sigma_{12}, \Delta \sigma_{23}, \Delta \sigma_{31}\} \quad (23)$$

et

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \longleftrightarrow \Delta \underline{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad {}^t \Delta \underline{\varepsilon} = \{\Delta \varepsilon_{11}, \Delta \varepsilon_{22}, \Delta \varepsilon_{33}, 2\Delta \varepsilon_{12}, 2\Delta \varepsilon_{23}, 2\Delta \varepsilon_{31}\} \quad (24)$$

On associe également à $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ (de manière analogue à $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$) un vecteur $\Delta \underline{\varepsilon}^p$. Le tenseur \mathcal{C}^{hom} est alors représenté par une matrice carrée \mathbf{C}^{hom} symétrique de dimension 6, appelée matrice d'élasticité, telle que

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{C}^{hom} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \longleftrightarrow \Delta \underline{\sigma} = \mathbf{C}^{hom} \cdot \Delta \underline{\varepsilon} \quad (25)$$

Le tenseur de déformation $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ est calculé par dérivation de $\Delta \underline{\xi}$. Compte tenu de (22), il vient :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_e \quad \Delta \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbf{B}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e \quad (26)$$

où \mathbf{B}_e est une matrice formée à partir des dérivées des fonctions de formes.

Explorant les champs virtuels $\hat{\underline{\xi}}$ dans le même espace (i.e même interpolation) que $\Delta \underline{\xi}$, l'égalité variationnelle (21) conduit alors au système algébrique suivant :

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \underline{U} = \Delta \underline{\mathbf{F}}^{ex} + \Delta \underline{\mathbf{F}}^p \quad (27)$$

où on a noté

- $\Delta \underline{U}$: vecteur global des incréments de déplacements nodaux, défini comme l'ensemble des composantes des incréments de déplacements élémentaires \underline{u}_e ;

- \mathbf{K} : matrice de rigidité globale du système, définie par

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{C}^{hom} \cdot \mathbf{B}_e \, d\Omega \quad (28)$$

- $\Delta \underline{\mathbf{F}}^{ex}$: vecteur force extérieure global correspondant à l'application du chargement $\Delta \underline{Q}$

$$\Delta \underline{\mathbf{F}}^{ex} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \rho \Delta \underline{\mathbf{F}} \, d\Omega + \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e \cap S_T} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \Delta \underline{\mathbf{T}}^d \, dS \quad (29)$$

- $\Delta \underline{\mathbf{F}}^p$: vecteur des forces plastiques

$$\Delta \underline{\mathbf{F}}^p = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{C}^{hom} \cdot \Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \, d\Omega \quad (30)$$

Dans le système algébrique (27), la déformation plastique $\Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ dans l'élément Ω_e est inconnue. Il s'ensuit que le vecteur $\Delta \underline{\mathbf{F}}^p$ est une inconnue du problème. En fait, on devrait écrire $\Delta \underline{\mathbf{F}}^p(\Delta \underline{U})$. La détermination de $\Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ nécessite donc la résolution du système non linéaire (27), auquel il faut ajouter les conditions aux limites (17). Ces dernières, traduites en termes de conditions sur les déplacements nodaux, fixent la valeur de certaines composantes de $\Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.

Nous allons décrire maintenant l'algorithme itératif adopté pour résoudre le problème (27).

3 Démarche de résolution

La résolution numérique implémentée dans l'outil numérique mis au point, repose sur l'algorithme de plasticité tel que proposé par Nguyen (1977). Cet algorithme de nature itérative, consiste pour chaque itération à résoudre un problème élastique à déformation anélastique imposée, suivi d'un retour sur le critère (*return mapping*). C'est cette dernière opération de projection qu'on va décrire dans la section suivante.

3.1 Projection sur le domaine d'élasticité \mathcal{C}^{hom}

L'algorithme de plasticité qu'on se propose de mettre en œuvre dans le cadre de l'analyse par éléments finis des structures en milieux rocheux fracturés, nécessite de pouvoir calculer la projection sur le domaine d'élasticité \mathcal{C}^{hom} , de n'importe quel état de contrainte.

Il s'agit là d'une opération assez classique pour les milieux ordinaires, c'est-à-dire les milieux dont la plasticité est décrite par un critère et un potentiel usuels (typiquement Mohr-Coulomb ou Drucker Prager).

Par contre, comme mentionné en introduction de ce chapitre, en raison du caractère multi-potentiel de la règle d'écoulement plastique du milieu homogénéisé, cette opération de projection requiert un traitement spécifique. Bien que perfectible, la stratégie que nous développons ci-après nous semble assez original.

Le milieu rocheux est constitué de $p+1$ composantes : la matrice rocheuse (indice r) et p familles de joints (indice $j = 1, \dots, p$). Par commodité, nous introduisons la nouvelle indexation numérique α_i , $i = 1, 2, \dots, (p+1)$, pour désigner chacun des constituants :

→ α_1 fera référence à la matrice rocheuse, c'est-à-dire remplacera l'indice r ;

→ pour $j = 2, \dots, p + 1$, α_j fera référence au joint numéro $j - 1$.
Ainsi $f^r = f^{\alpha_1}$ et $f^{j-1} = f^{\alpha_j}$ pour $j \geq 2$.

Soit $\underline{\underline{\sigma}}$ un état de contrainte donné. La projection, notée $\underline{\underline{\sigma}}^*$, de $\underline{\underline{\sigma}}$ sur le convexe d'élasticité est définie comme suit :

- Si $F^{hom}(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$, alors $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}$. Cette configuration correspond à la situation (1) de la figure 1. L'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ correspond localement à un régime élastique pour le milieu rocheux.
- Si $F^{hom}(\underline{\underline{\sigma}}) > 0$, alors la projection est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - \mathcal{C}^{hom} : \sum_{i=1}^{p+1} \dot{\lambda}^{\alpha_i} \frac{\partial g^{\alpha_i}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*) & \dot{\lambda}^{\alpha_i} \geq 0 \\ F^{hom}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \max_i \{ f^{\alpha_i}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \} = 0 & \underline{\underline{\sigma}} \\ F^{hom} = 0 & (2) \end{cases} \quad (31)$$

Les $\dot{\lambda}^{\alpha_i} \geq 0$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions $f^{\alpha_i}(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$. L'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ (situation (2) de la figure 1) correspond localement à un régime plastique pour le milieu rocheux.

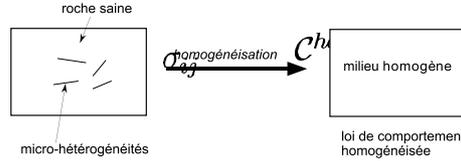


FIG. 1: Projection sur le convexe d'élasticité.

Compte tenu de la définition $F^{hom}(\underline{\underline{\sigma}})$, il existe donc ℓ , avec $\ell \in \{1, \dots, p + 1\}$, composantes du milieu rocheux pour lesquelles $\underline{\underline{\sigma}}$ correspond localement à un régime "plastique". Recourant, si besoin, à une renumérotation des composantes, on a

$$\begin{cases} f^{\alpha_i}(\underline{\underline{\sigma}}) \geq 0 \implies \dot{\lambda}^{\alpha_i} \geq 0 & \forall i \in \{1, \dots, \ell\} \\ f^{\alpha_i}(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \implies \dot{\lambda}^{\alpha_i} = 0 & \forall i \in \{\ell + 1, \dots, p + 1\} \end{cases} \quad (32)$$

Au lieu de projeter $\underline{\underline{\sigma}}$ sur $\mathcal{C}^{hom} = \bigcap_{i=1}^{p+1} \mathcal{C}^{\alpha_i}$, il s'agit donc de projeter sur le convexe $\bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{C}^{\alpha_i}$. La stratégie qu'on adopte consiste à construire la projection sur "l'arête" (dans l'espace \mathcal{R}^6)

commune aux ℓ convexes \mathcal{C}^{α_i} . C'est à dire qu'on exprime la nullité de tous les $f^{\alpha_i}(\underline{\sigma}^*)$. Les équations (31) deviennent alors

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma} - \mathcal{C}^{hom} : \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\lambda}^{\alpha_i} \frac{\partial g^{\alpha_i}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}^*) & \dot{\lambda}^{\alpha_i} \geq 0 \quad (6 \text{ relations}) \\ f^{\alpha_i}(\underline{\sigma}^*) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\} & (\ell \text{ relations}) \end{cases} \quad (33)$$

Il s'agit d'un système de $6 + \ell$ équations scalaires portant sur $6 + \ell$ inconnues : les 6 composantes de $\underline{\sigma}$ et les ℓ multiplicateurs de Lagrange. Ce système étant non linéaire, on va construire une solution approchée. On effectue, pour cela, un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $\underline{\sigma}$ de chacune des ℓ fonctions f^{α_i} :

$$0 = f^{\alpha_i}(\underline{\sigma}^*) \simeq f^{\alpha_i}(\underline{\sigma}) - \sum_{j=1}^{\ell} \dot{\lambda}^{\alpha_i} \frac{\partial f^{\alpha_i}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) : \mathcal{C}^{hom} : \frac{\partial g^{\alpha_j}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) \quad (34)$$

Une telle approximation est justifiée si $\underline{\sigma}$ est assez proche du domaine \mathcal{C}^{hom} . En pratique, cela nécessite de procéder par incréments de chargement suffisamment petits.

De plus on adopte l'approximation suivante

$$\frac{\partial f^{\alpha_i}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) : \mathcal{C}^{hom} : \frac{\partial g^{\alpha_j}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}^*) \simeq \frac{\partial f^{\alpha_i}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) : \mathcal{C}^{hom} : \frac{\partial g^{\alpha_j}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, \ell\} \quad (35)$$

si bien qu'on dispose finalement d'un système linéaire de ℓ équations régissant les multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\dot{\lambda}} = \mathbf{B} \quad (36)$$

où $\underline{\dot{\lambda}}$ est le vecteur de \mathcal{R}^{ℓ} contenant les multiplicateurs de Lagrange. \mathbf{A} est la matrice carrée $\ell \times \ell$ dont le terme (i, j) est

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial f^{\alpha_i}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) : \mathcal{C}^{hom} : \frac{\partial g^{\alpha_j}}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) \quad (37)$$

Le vecteur \mathbf{B} contient les ℓ termes $f^{\alpha_i}(\underline{\sigma})$.

Après résolution du système linéaire (36), on dispose d'une valeur approchée pour chacun des ℓ multiplicateurs $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$. Deux situations peuvent se présenter :

Situation (a) :

Les $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$ ainsi déterminés sont effectivement tous positifs (figure 2). On les retient donc pour la solution approchée de (31) et la projection $\underline{\sigma}^*$ est donnée par

$$f^{\alpha_2} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \simeq \underline{\underline{\sigma}} - \mathcal{C}^{hom} : \sum_{i=1}^{p+1} \dot{\lambda}^{\alpha_i} \frac{\partial g^{\alpha_i}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \frac{\partial g^{\alpha_1}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \underline{\underline{\sigma}} \quad (38)$$

Le procédé de détermination de la projection de l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est terminé.

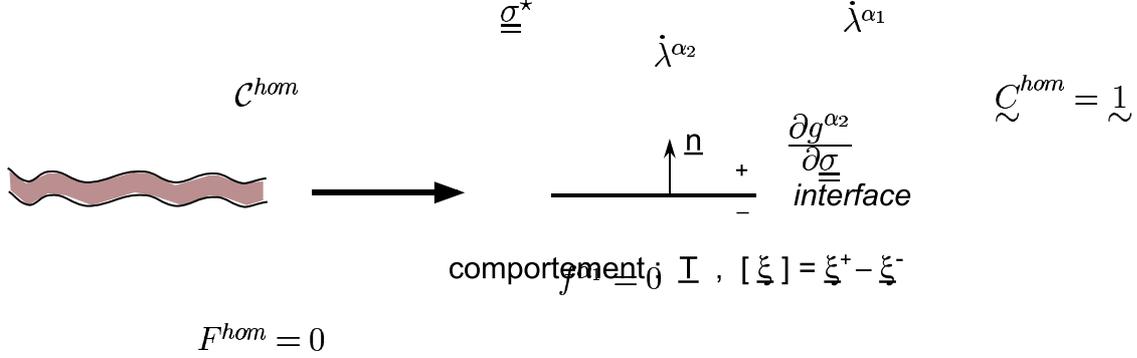


FIG. 2: Illustration de la situation (a) dans le cas $\ell = 2 : \dot{\lambda}^{\alpha_1} > 0$ et $\dot{\lambda}^{\alpha_2} > 0$.

Situation (b) :

Certains des multiplicateurs $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$ déterminés par résolution de (36) sont strictement négatifs (figure 3). Supposons alors que

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^{\alpha_i} > 0 & i \in \{1, \dots, \ell'\} \\ \dot{\lambda}^{\alpha_i} \leq 0 & i \in \{\ell'+1, \dots, \ell\} \end{cases} \quad \underline{\underline{\sigma}} \quad (39)$$

$$\frac{\partial g^{\alpha_1}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

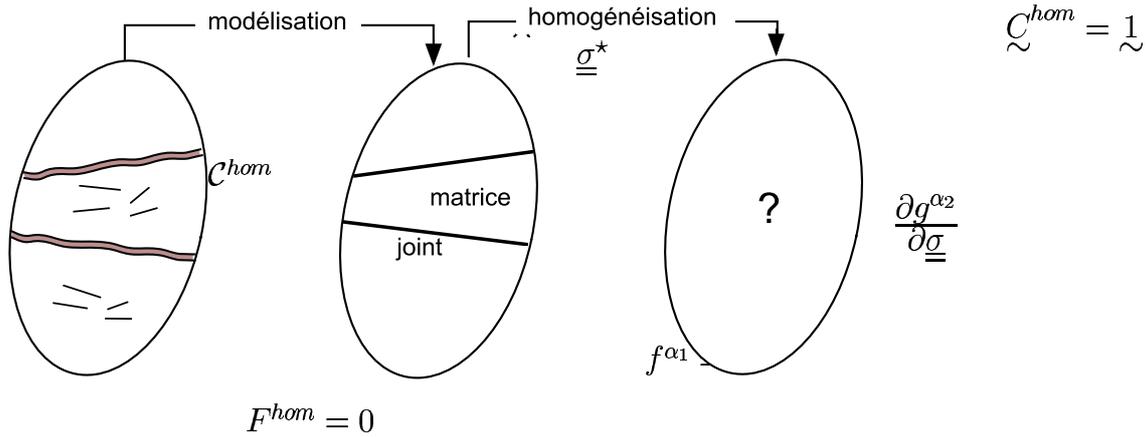


FIG. 3: Illustration de la situation (b) dans le cas $\ell = 2 : \dot{\lambda}^{\alpha_1} > 0$ et $\dot{\lambda}^{\alpha_2} < 0$.

On affecte alors la valeur zéro aux $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$ négatifs. Il s'agira en fait de projeter $\underline{\underline{\sigma}}$ sur le convexe $\bigcap_{i=1}^{\ell'} \mathcal{C}^{\alpha_i}$ (et non sur $\bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{C}^{\alpha_i}$ comme supposé).

On recommence alors l'opération décrite auparavant pour évaluer les $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$ pour $i \in \{1, \dots, \ell'\}$. On arrête le procédé lorsque au terme de cette évaluation, tous les $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$ sont positifs.

Ce processus itératif pour déterminer la projection d'un état de contrainte sur le convexe \mathcal{C}^{hom} est incorporé dans l'outil numérique mis au point dans le cadre de cette thèse.

Mise en œuvre pour l'analyse par éléments finis de structures en milieux rocheux fracturés, cette technique s'est avérée satisfaisante. Toutefois, des problèmes de convergence de l'algorithme apparaissent parfois lorsque le chargement extérieur devient très important.

Remarque :

On s'est limité au cas où les constituants du milieu rocheux sont décrits par des critères de plasticité et des potentiels de type Mohr-Coulomb. Ces derniers présentent des points singuliers. Pour évaluer leur gradient en ces points, on a adopté la technique proposée dans Owen and Hinton (1980) qui consiste à considérer en ces points des critères et potentiels de Drucker-Prager.

3.2 Algorithme de résolution en élastoplasticité

Nous revenons maintenant à la détermination numérique de l'incrément de déplacement $\Delta \underline{\xi}$ engendré par l'application de l'incrément de chargement $\Delta \underline{Q}$.

Le principe de la construction d'une solution approchée, fondée sur la discrétisation par éléments finis, a été décrit en section 2. Cette solution est caractérisée par le vecteur $\Delta \underline{U}$ contenant tous les déplacements aux noeuds du maillage. Rappelons que ce vecteur est régi par le système d'équations non linéaires

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \underline{U} = \Delta \underline{\mathbf{F}}^{ex} + \Delta \underline{\mathbf{F}}^p \quad (40)$$

et les conditions aux limites (17) qui fixent certaines des composantes de $\Delta \underline{U}$.

On va examiner dans la suite l'algorithme itératif qui permet d'évaluer $\Delta \underline{U}$. Le principe d'un tel algorithme tel que présenté dans Nguyen (1977) est le suivant. Tout d'abord on suppose le champ $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ connu à l'itération i , et par suite le vecteur $\Delta \underline{\mathbf{F}}^p$. On effectue un calcul élastique à *déformation imposée* pour obtenir une approximation à cette itération de $\Delta \underline{U}$. L'algorithme d'intégration appliqué en tous les points du maillage, fournit une estimation de $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ et donc de $\Delta \underline{\mathbf{F}}^p$. Ce dernier devient une donnée pour l'itération $i + 1$.

Plus précisément :

(1) • On initialise le processus itératif en adoptant $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p(\underline{x}) = 0$ en tout point, c'est-à-dire $\Delta \underline{\mathbf{F}}_0^p = 0$ (donnée pour l'itération 1).

(2) • Au début de l'itération i , on suppose le champ $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p$ connu, c'est-à-dire $\Delta\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{i-1}^p$ connu. On résoud le problème élastique à déformation anélastique $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p$ imposée, défini par

$$\mathbf{K} \cdot \Delta\underline{U}_i = \Delta\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{ex} + \Delta\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{i-1}^p \quad (41)$$

(on rappelle que $\Delta\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{ex}$ est complètement déterminé par la donnée de l'incrément de chargement $\Delta\underline{Q}$). La prise en compte des conditions aux limites en déplacement (17) est assurée en modifiant certains termes de la rigidité ainsi que du vecteur second membre. Nous renvoyons à Touzot et Dhett (1984) pour une description détaillée de cette technique.

La solution $\Delta\underline{U}_i$ du système (41) constitue une estimation du champ de déplacement $\Delta\underline{\xi}$ à l'itération i . On peut donc calculer une estimation du champ de déformation $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ à la même itération, soit $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i$. Le champ de contrainte associé par la loi de comportement élastique s'écrit :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i = \mathbf{C}^{hom} : (\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) \quad (42)$$

Notons que $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i$ est bien statiquement admissible pour le problème considéré (à la discrétisation près), mais non nécessairement plastiquement admissible.

On introduit à ce stade l'état de contrainte auxiliaire $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}$ défini par :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au} = \mathbf{C}^{hom} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i = \Delta\underline{\underline{\sigma}}_i + \mathbf{C}^{hom} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p \quad (43)$$

Le principe de l'évaluation de l'estimation de la déformation plastique $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p$ à l'itération i découle de la mise en œuvre de l'algorithme d'intégration locale que nous décrivons ci-après.

Pour chaque \underline{x} fixé, on construit la projection sur \mathcal{C}^{hom} , au sens défini en section 3.1, de l'état de contrainte auxiliaire $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}$. On désigne cette projection par $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^*$.

→ Si $F^{hom}(\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}(\underline{x})) \leq 0$, alors $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^*(\underline{x})$ coïncide avec $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}(\underline{x})$ et tous les multiplicateurs de Lagrange $\dot{\lambda}^{\alpha_i}$ sont nuls. Dans ce cas, on adopte pour estimation $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p(\underline{x}) = 0$ au point \underline{x} considéré.

→ Si $F^{hom}(\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}(\underline{x})) > 0$, on détermine par le processus itératif décrit lors la section précédente, la projection $\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^*(\underline{x})$ ainsi que les multiplicateurs $\dot{\lambda}^{\alpha_i} \geq 0$, avec $i \in \{1, \dots, p+1\}$. Rappelons que seuls certains de ces multiplicateurs sont non nuls. On adopte dans ce cas l'estimation

$$\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{p+1} \dot{\lambda}^{\alpha_i} \frac{\partial g^{\alpha_i}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}(\underline{x})) \quad (44)$$

si bien que

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^*(\underline{x}) = \Delta\underline{\underline{\sigma}}_i^{au}(\underline{x}) - \mathbf{C}^{hom} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p(\underline{x}) \quad (45)$$

L'interprétation géométrique de cette estimation est donnée par la figure 4.

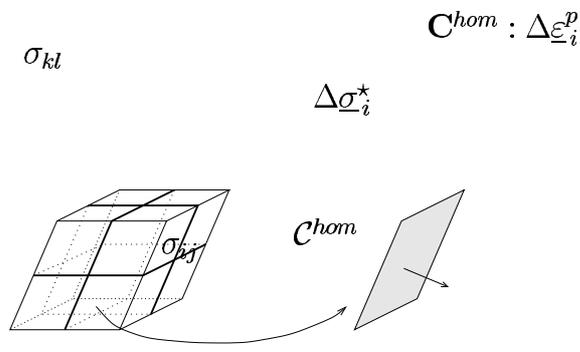


FIG. 4: Interprétation géométrique de l'estimation de $\Delta \underline{\varepsilon}_i^p$.

Répétant cet algorithme d'intégration locale pour tous les points \underline{x} , on dispose ainsi de l'évaluation à l'itération i , du champ des déformations plastiques $\Delta \underline{\varepsilon}_i^p$. Ce dernier permet de calculer le vecteur $\Delta \underline{F}_i^p$.

(3) • Si le critère de convergence est vérifié, les champs actuels $\Delta \underline{U}_i$, $\Delta \underline{\sigma}_i$, $\Delta \underline{\varepsilon}_i^p$ sont réputés être la solution du problème incrémental discrétisé. Sinon, on itère au point (2) (Eq. (41)) en faisant $i \leftarrow i + 1$.

D'un point de vue théorique, Nguyen (1977) a montré que lorsque, pendant tout le trajet de chargement, le chargement demeure inférieur à la charge limite, cet algorithme converge au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta \underline{U}_i = \Delta \underline{U} \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta \underline{\sigma}_i = \Delta \underline{\sigma} \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta \underline{\varepsilon}_i^p = \Delta \underline{\varepsilon}^p \end{array} \right. \quad (46)$$

En pratique, la convergence numérique n'est vérifiée qu'à une précision fixée. On définit un critère de convergence en se donnant une tolérance TOL sur l'erreur commise à l'itération i . On exprime la convergence locale comme suit :

$$\max_{\text{points de Gauss}} \frac{F^{hom}(\Delta \underline{\sigma}_i)}{\sigma_0} \leq TOL \quad (47)$$

Rappelons que les points de Gauss sont les points du maillage où les contraintes et déformations sont évaluées. σ_0 est une grandeur caractéristique pour les contraintes lorsque le critère est saturé. On adopte dans notre code numérique, la cohésion de la matrice rocheuse comme valeur de σ_0 , et une tolérance $TOL = 10^{-5} - 10^{-3}$.

4 Validation de l'outil numérique

Le code numérique de calcul par éléments finis a été développé pour traiter les problèmes de structures en milieux rocheux fracturés (regardés comme des milieux homogénéisés). Son domaine d'application est limité au cadre axisymétrique et en déformation plane. La qualification d'un tel outil passe préalablement par sa validation sur une série d'exemples pour lesquels on dispose de solutions analytiques. On a choisi deux exemples :

- 1) le poinçonnement d'un massif homogène (absence de joints) ;
- 2) la convergence d'une galerie souterraine creusée dans un massif contenant deux familles de joints. Il s'agit là du cas académique traité analytiquement lors du troisième chapitre.

4.1 Poinçonnement d'un massif homogène

On examine le problème de poinçonnement d'un *massif homogène non pesant* en déformation plane parallèlement au plan (x, y) . La fondation superficielle, supposée rigide, a une largeur B (figure 5). Sa longueur selon la direction perpendiculaire est considérée comme très grande devant B . On impose à la fondation un déplacement vertical $-\delta \underline{e}_y$, avec $\delta \geq 0$. Le contact entre la fondation et le massif est supposé sans frottement. Le comportement de la roche constituant le massif est élastique linéaire isotrope, parfaitement plastique. On adopte une loi plastique associée décrite par le critère de coulomb, C_r étant la cohésion et φ_r l'angle de frottement.

Le processus de chargement consiste à augmenter de manière monotone, à partir de zéro, la valeur de δ . On s'intéresse alors à la réponse de la structure à travers la loi $R = R(\delta)$, où $-R \underline{e}_y$ désigne l'effort résultant (par unité de longueur transversale) appliqué par le poinçon sur le massif. La contrainte σ_{yy} est singulière au coin du poinçon. Le calcul de R par simple sommation (pondérée par la longueur des éléments en contact avec la fondation) des valeurs prises par cette contrainte aux points de Gauss, peut s'avérer erroné. En fait on procède comme suit. Pour un incrément de chargement défini par $\Delta\delta$, on évalue l'incrément ΔR en appliquant le théorème des travaux virtuels (ttv) avec le champ $\hat{\underline{\xi}}$ construit par interpolation à partir de :

$$\begin{cases} \hat{\underline{\xi}} = -\underline{e}_y & \text{aux noeuds appartenant à } \mathcal{I} \\ \hat{\underline{\xi}} = \underline{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (48)$$

où \mathcal{I} désigne l'ensemble des noeuds du maillage situés à l'interface poinçon/massif. L'expression du ttv pour un tel champ s'écrit :

$$\int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\sigma}} : \text{grad } \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega = \int_{S_B} \Delta \underline{T} \cdot \hat{\underline{\xi}} \, dS = - \int_{S_B} \Delta \sigma_{yy} \, dS = \Delta R \quad (49)$$

S_B désignant l'interface poinçon/massif. Dans le formalisme des éléments finis, le membre de gauche de l'égalité précédente s'écrit :

$$\int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\sigma}} : \text{grad } \hat{\underline{\underline{\xi}}} \, d\Omega = \hat{\underline{\underline{\xi}}} \cdot \left[\mathbf{K} \cdot \Delta \underline{U} - \Delta \underline{\mathbf{F}}^p \right] \quad (50)$$

D'où

$$\Delta R = \hat{\underline{\underline{\xi}}} \cdot \left[\mathbf{K} \cdot \Delta \underline{U} - \Delta \underline{\mathbf{F}}^p \right] \quad (51)$$

c'est-à-dire que ΔR se calcule à partir de la solution en déplacement du problème incrémental par simple sommation des termes pris sur les éléments en contact avec le poinçon.

Afin de valider le module de plasticité du code numérique, on compare l'estimation de la charge limite obtenue numériquement à celle, théorique, donnée par une approche de calcul à la rupture (voir à cet effet Salençon (1983)). Rappelons que l'expression de la charge limite R^+ est :

$$R^+ = B C_r / \tan \varphi_r \left[e^{\pi \tan \varphi_r} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_r}{2} \right) - 1 \right] \quad (52)$$

Elle est obtenue à l'aide du mécanisme de ruine de Prandtl.

Par symétrie, seule la moitié de la géométrie est discrétisée (figure 5). Le maillage est constitué de 345 éléments Q9 (quadrangles à 9 noeuds). Les données correspondant aux calculs numériques sont :

module de Young : $E_r = 2.5 \text{ GPa}$
 coefficient de Poisson : $\nu_r = 0.25$
 cohésion : $C_r = 0.3 \text{ MPa}$
 angle de frottement : $\varphi_r = 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$
 état initial naturel.

Il est bien-entendu que ni les caractéristiques élastiques, ni l'état initial n'affectent la valeur de la charge limite.

On représente sur la figure 6 l'évolution du rapport R/BC_r en fonction du tassement normalisé δ/B , pour les différentes valeurs de l'angle de frottement de la roche. Ces courbes montrent que les valeurs de la charge limite sont évaluées numériquement avec une très bonne précision. En effet, l'écart entre les valeurs numériques et théoriques données par (52) est d'environ 4.2% pour $\varphi_r = 25^\circ$, 4.5% pour $\varphi_r = 30^\circ$ et 4.5% pour $\varphi_r = 35^\circ$. Les temps de calculs pour atteindre la charge limite sont importants. Ils croissent avec la valeur de φ_r (jusqu'à 3 heures sur station de travail SUN ultra 5). Ceci est lié à l'algorithme de plasticité pour lequel la matrice de rigidité est gardée constante tout au long du trajet de chargement.

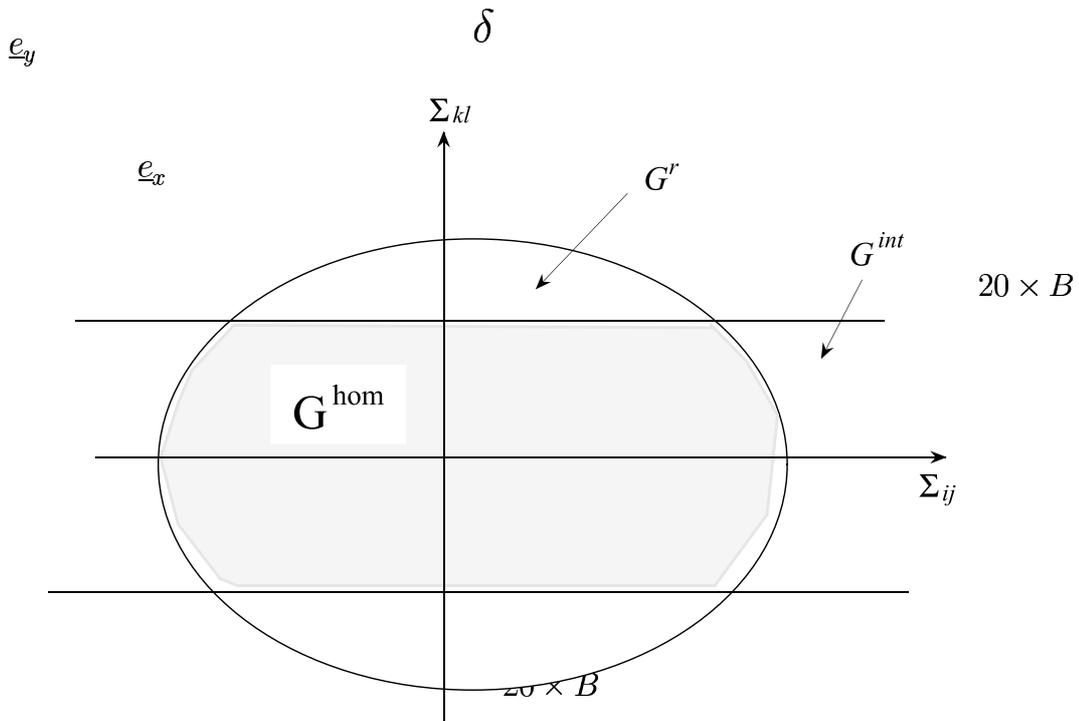


FIG. 5: Poinçonnement d'un massif homogène. Géométrie du modèle discrétisé.

4.2 Convergence d'un tunnel en milieu rocheux fracturé : comparaison avec la solution analytique du chapitre 3

En guise de second exemple de validation de l'outil numérique, on examine maintenant la convergence d'une galerie souterraine, de section circulaire (rayon R), creusée à grande profondeur dans un massif rocheux. Ce dernier est traversé par un réseau de deux familles de joints de caractéristiques mécaniques identiques.

Il s'agit de la situation académique traitée par voie analytique lors du 3ème chapitre. Nous ne revenons pas sur les hypothèses très simplificatrices à la base de la solution analytique.

Le massif est initialement (avant creusement de la galerie) le siège de contraintes homogènes et isotropes : $\underline{\underline{\sigma}}_0 = -p_0 \underline{\underline{1}}$. La paroi du tunnel est soumise à une pression p_c valant initialement p_0 , et qui décroît progressivement vers la valeur zéro. Cette décroissance est adoptée pour simuler de manière simplifiée l'effet du front de taille (Panet (1995)).

Rappelons que la cellule de base est idéalisée comme représentée sur la figure 7, afin de conserver la condition de symétrie de révolution à l'échelle macroscopique. Cette situation très académique pour le schéma de fracturation n'a été considérée que dans le but de construire une solution analytique pour qualifier la viabilité du code numérique. Ce problème présente l'avantage de constituer un cas test à la fois pour le module élastique et le module plastique de l'outil numérique.

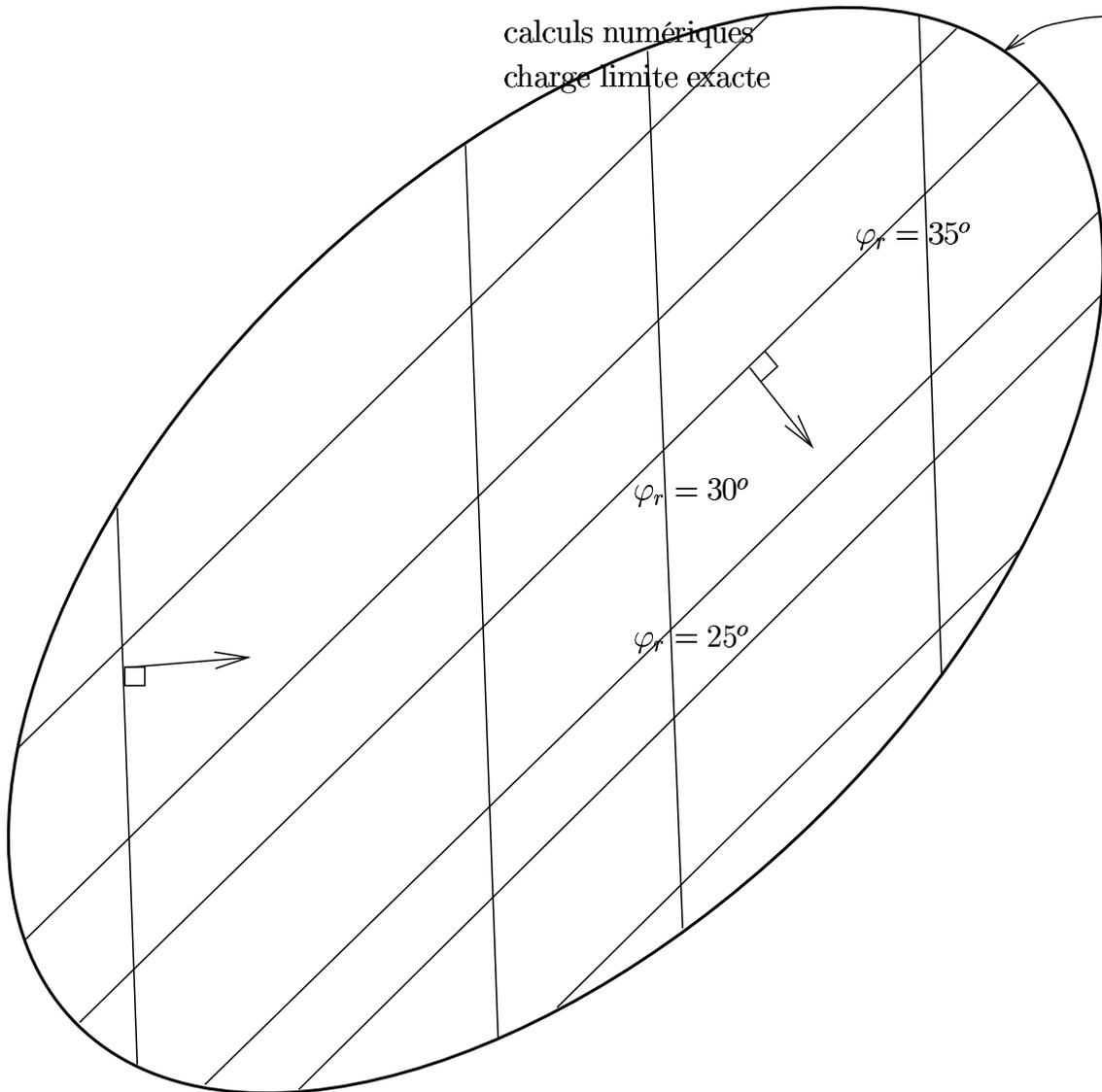


FIG. 6: Poinçonnement d'un massif homogène. Courbes de chargement.

Numériquement le problème est traité comme un problème axisymétrique. Le maillage utilisé, schématisé sur la figure 8, comprend 100 éléments Q9 correspondant à 603 noeuds. Le rayon extérieur est pris suffisamment grand ($100 \times R$) afin de modéliser au mieux un milieu infini. Par ailleurs, les déplacements suivant la direction \underline{e}_z sont imposés à une valeur nulle pour satisfaire les conditions de symétrie de révolution.

Les valeurs des paramètres adoptés pour les calculs numériques sont :

Matrice rocheuse : $E_r = 10 \text{ GPa}$, $\nu_r = 0.3$, $C_r = 5 \text{ MPa}$, $\varphi_r = 40^\circ$ (plasticité associée)

Joints : $k_n = 5 \text{ GPa/m}$, $k_t = 1 \text{ GPa/m}$, $C_j = 0.75 \text{ MPa}$, $\varphi_j = 30^\circ$ (plasticité associée), $\alpha = 50^\circ$, $\ell = 0.1 R$

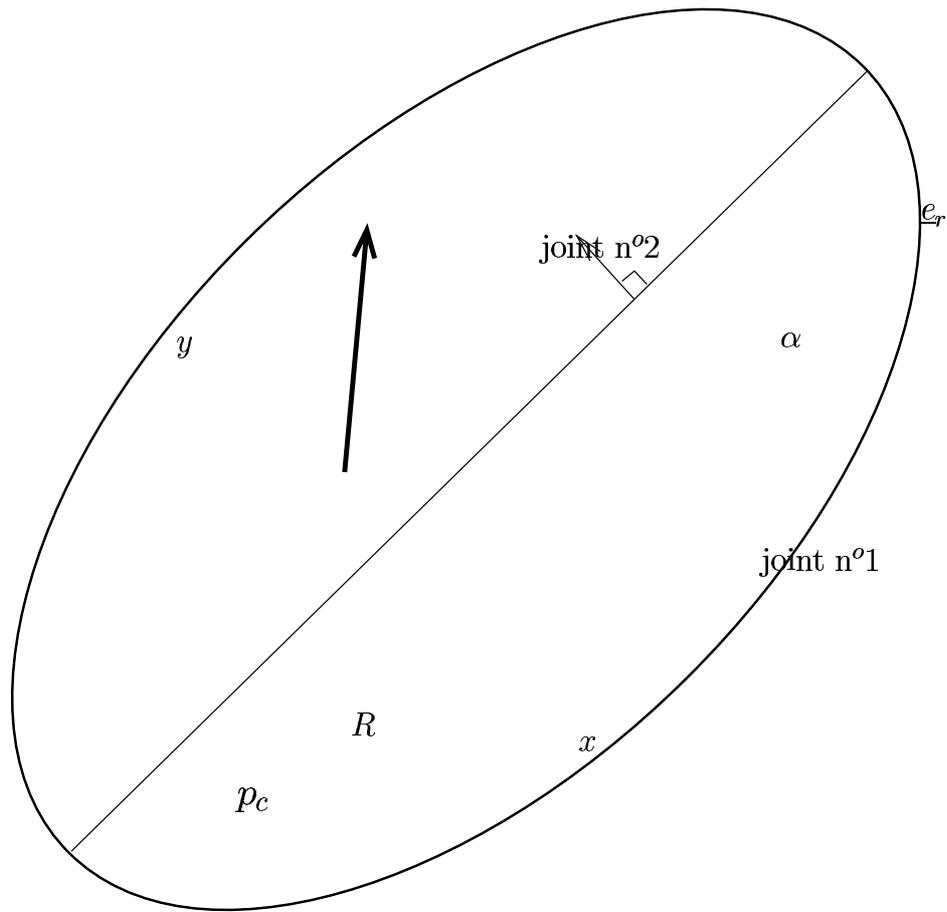


FIG. 7: Géométrie du tunnel et cellule de base idéalisée.

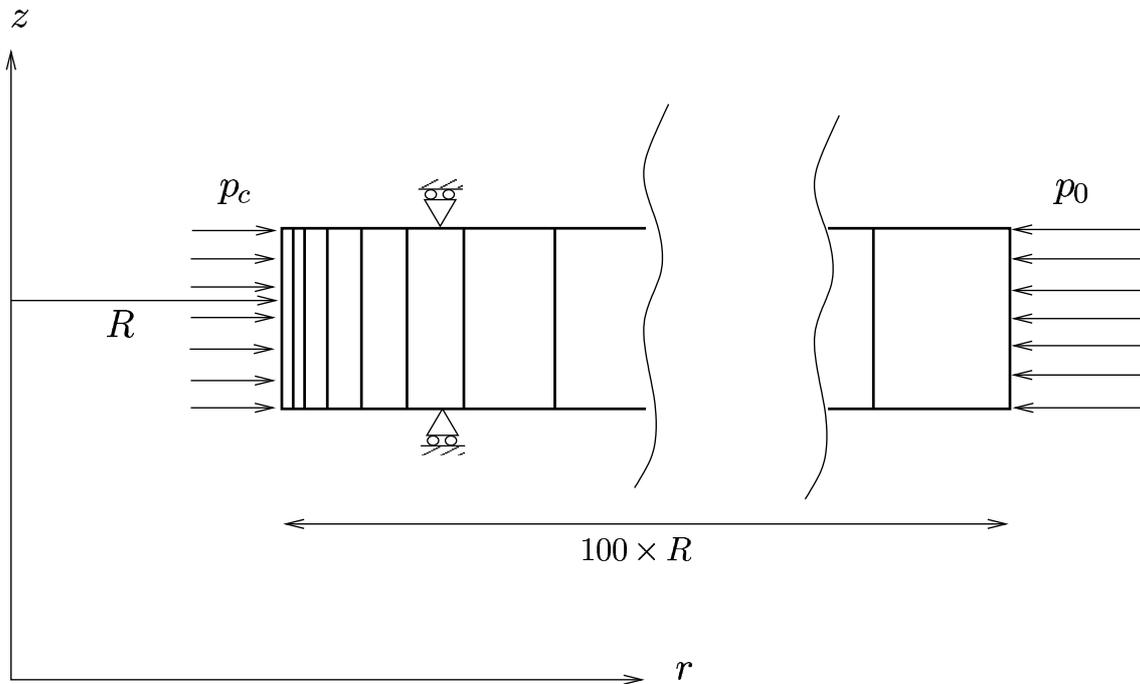


FIG. 8: Maillage du modèle.

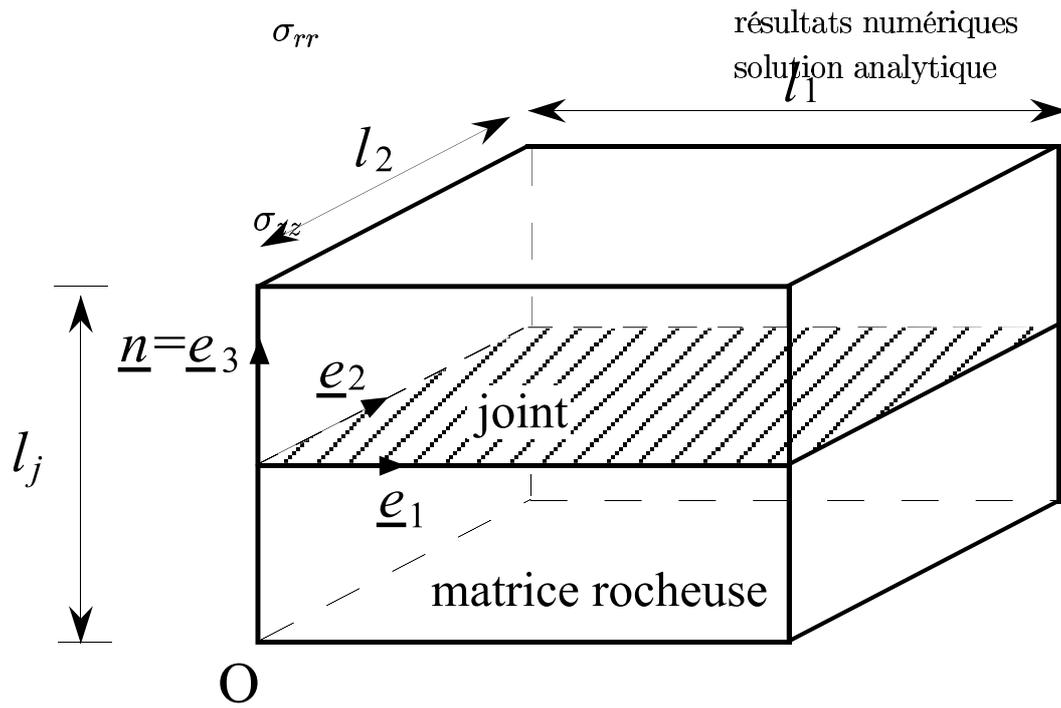


FIG. 10: Profil des contraintes dans le massif.

5 Références

- Crisfield M.A., 1991. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2 : Advanced topics, John Wiley & Sons.
- Panet M., 1995. *Le calcul des tunnels par la méthode de convergence-confinement*. Presses des Ponts.
- Salençon J., 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses des Ponts.
- Owen J. and Hinton E., 1980. *Finite element in plasticity - Theory and practice*. Pinebridge press.
- Nguyen Q.S., 1977. *On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration*. Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, 817-832.
- Halphen B. et Salençon J., 1987. *Elasto-plasticité*. Presses des Ponts.
- Touzot G. et Dhatt G., 1984. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, Paris.
- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., 1994a. *The finite element method*. vol. 1, McGraw-Hill.
- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., 1994b. *The finite element method - Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*. vol. 2, McGraw-Hill.
- Batoz J.L. et Dhatt G., 1995. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, Paris.

CHAPITRE 5

Applications de l'outil numérique

Sommaire

- 1.** Tunnel profond en déformation plane
 - 1.1 Cas d'une seule famille de joints : fracturation (J1)
 - 1.2 Cas de deux familles de joints : fracturation (J2)

- 2.** Fondation superficielle sur un massif fracturé
 - 2.1 Cas d'une famille de joints
 - 2.2 Massif traversé par deux familles perpendiculaires de joints

- 3.** Commentaires

Un outil de calculs par éléments finis des ouvrages en milieux rocheux fracturés a été développé et validé au chapitre précédent. Il incorpore le comportement élastoplastique homogénéisé formulé lors du chapitre 2. Sur le plan numérique, l'apport essentiel réside dans le développement d'une méthode itérative pour la projection d'états de contrainte sur le domaine d'élasticité \mathcal{C}^{hom} .

L'objet de ce chapitre est de mettre en œuvre cet outil numérique pour l'analyse en plasticité de deux ouvrages typiques.

1 Tunnel profond en déformation plane

Nous présentons ici l'analyse en élastoplasticité d'un tunnel excavé dans un milieu rocheux traversé par un réseau régulier de joints. Deux schémas pour la fracturation seront considérés dans cette section : une seule famille de joints et deux familles de joints. On utilisera les notations (J0), (J1) et (J2) pour faire référence respectivement, aux situations :

- massif homogène (absence de joints) ;
- massif traversé par une seule famille de joints ;
- massif traversé par deux familles de joints.

Plus précisément, on considère un tunnel circulaire de rayon R , creusé dans un massif rocheux fracturé à une profondeur $H \gg R$ (figure 1). L'état de contrainte initial est supposé isotrope $\underline{\underline{\sigma}}_0 = -p_0 \underline{\underline{1}}$.

Le chargement du système est défini par une pression uniforme p_c appliquée sur la paroi du tunnel. Le processus de chargement est prescrit à partir de p_c en faisant décroître de façon monotone sa valeur de $p_c = p_0$ à $p_c = 0$.

Le constituant matrice rocheuse est supposé isotrope. Son élasticité est linéaire caractérisée par E_r (module de Young) et ν_r (coefficient de Poisson). Sa plasticité est décrite par un critère de Mohr-Coulomb de cohésion C_r et angle de frottement φ^r . La règle d'écoulement plastique, non associée, est caractérisée par l'angle de dilatance ψ^r .

L'élasticité des joints est linéaire avec k_n et k_t comme raideurs normale et tangentielle. Leur plasticité est non associée et définie par un critère de Mohr-Coulomb. On note par φ^j et ψ^j respectivement les angles de frottement interne et de dilatance correspondant.

Le problème est traité en déformation plane parallèlement à Oxy .

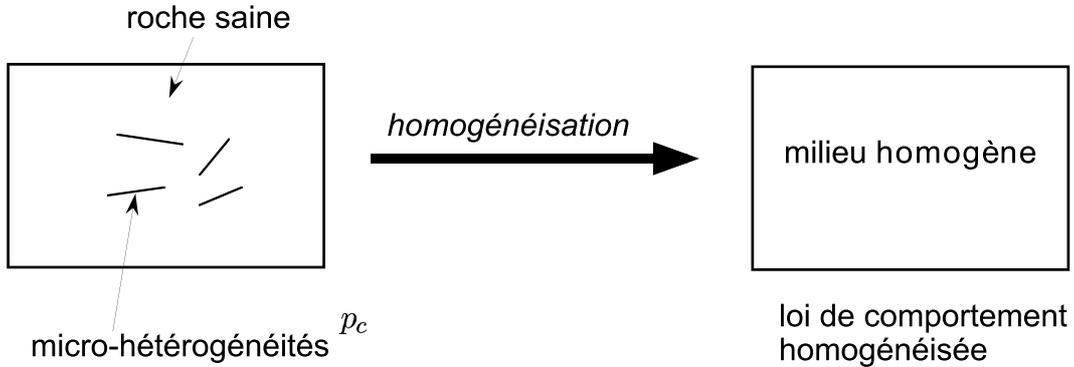


FIG. 1: Géométrie du problème et cas considérés pour la fracturation.

1.1 Cas d'une seule famille de joints : fracturation (J1)

Géométriquement, les joints sont des plans horizontaux normaux à la direction \underline{e}_y . ℓ désigne l'espacement entre deux joints successifs.

En vertu de la symétrie matérielle du problème, seul un quart de la géométrie est discrétisé. Le maillage utilisé (représenté sur la figure 2), de dimensions $25R \times 25R$, comporte 800 quadrangles Q9, soient 3321 nœuds. Outre la pression sur la paroi du tunnel, les conditions aux limites imposées sur le contour du modèle sont :

$$\alpha \in \{x, y\} \quad \begin{cases} \underline{T} = -p_0 \underline{e}_\alpha & \text{pour } \alpha = 25R \\ \xi_\alpha = 0, \underline{T} \parallel \underline{e}_\alpha & \text{pour } \alpha = 0 \end{cases}$$

Pour chaque valeur fixée de p_c , on résoud numériquement le problème d'élastoplasticité posé sur la géométrie discrétisée.

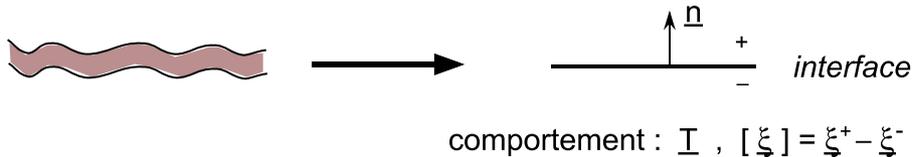


FIG. 2: Géométrie du problème et cas considérés pour la fracturation.

Les valeurs adoptées pour les calculs numériques sont :

État initial : $p_0 = 5 \text{ MPa}$

Matrice rocheuse : $E_r = 2 \text{ GPa}$, $\nu_r = 0.25$, $C_r = 1.0 \text{ MPa}$, $\varphi_r = 30^\circ$, $\psi_r = 20^\circ$

Joints : $k_n = 50 \text{ GPa/m}$, $k_t = 5 \text{ GPa/m}$, $C_j = 0.0 \text{ MPa}$, $\varphi_j = 30^\circ$, $\psi_j = 10^\circ$, $\ell = 0.02 R$

On constate que lorsque p_c diminue suffisamment, les deux constituants matrice rocheuse et joints sont en régime plastique. D'un point de vue numérique, nous n'avons pas obtenu une convergence satisfaisante (pour la valeur de $TOL = 10^{-3}$) de l'algorithme de plasticité lorsque $p_c = 0$. Pour cette raison, nous écartons les résultats correspondants et nous nous bornerons à donner ceux relatifs à $p_c \geq 0.1 \text{ MPa}$ (i.e $p_c/p_0 \geq 0.02$) pour lesquels on a bien convergence de l'algorithme.

La présence des joints induit une anisotropie du comportement global. Ceci est illustré clairement lorsqu'on examine la déformée (amplifiée cinq fois) de la paroi du tunnel pour $p_c/p_0 = 0.02$ (figure 3).

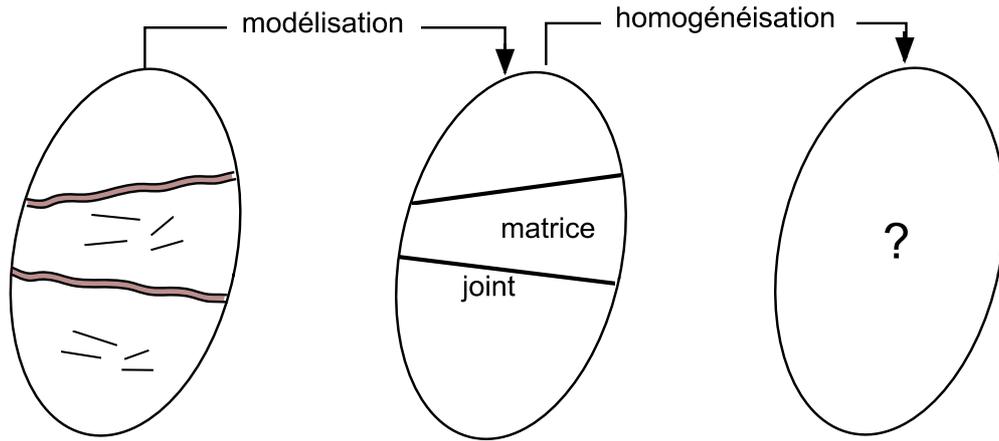


FIG. 3: Déformée du tunnel : massifs sain (J0) et fracturé (J1).

On introduit les points $P(x = R, y = 0)$ et $C(x = 0, y = R)$. On fera référence à ces deux points en utilisant les terminologies abusives de pied du tunnel et clé du tunnel. La convergence en clé est plus importante qu'en pied du tunnel. Ceci est dû en grande partie à l'ouverture des joints en "limite en traction" au voisinage de la clé. Comme la cohésion des joints est nulle, ceci exprime que dans cette région la contrainte σ_{yy} est proche de zéro pour des valeurs non nulles de la pression p_c en paroi.

Cette anisotropie peut être mieux quantifiée en examinant les variations, en fonction de la pression en paroi, du rapport :

$$\rho = \frac{\xi_y(C)}{\xi_x(P)} \quad (1)$$

des déplacements radiaux en clé et en pied du tunnel. On constate sur la figure 4 que ce rapport peut atteindre des valeurs supérieures à deux.

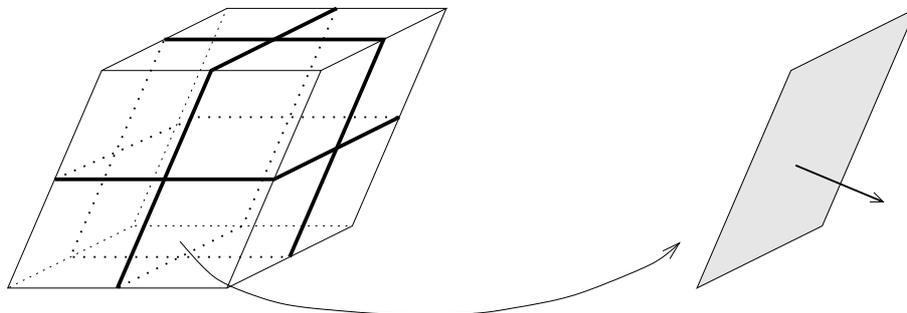


FIG. 4: Rapport entre les déplacements en clé et en pied de la paroi du tunnel.

Le fait que ρ soit supérieur à l'unité peut être expliqué de manière qualitative en remarquant que :

* en raison des symétries, les directions principales de la contrainte, le long des axes Ox et Oy , sont justement \underline{e}_x , \underline{e}_y et \underline{e}_z . Il s'ensuit que le long de ces axes, le vecteur contrainte agissant sur les joints s'écrit $\underline{T} = \sigma_{yy}\underline{e}_y$. Ainsi les joints ne sont soumis qu'à une contrainte normale (cission nulle).

* en phase élastique, représentée par le plateau sur la figure 4, le module d'élasticité homogénéisé C_{1111}^{hom} dans la direction \underline{e}_x est supérieur à C_{2222}^{hom} correspondant au module d'élasticité homogénéisé dans la direction \underline{e}_y : $C_{1111}^{hom}/C_{2222}^{hom} \simeq 1.42$ pour le jeu de données adopté.

Pour achever cette étude, on examine les variations du déplacement en clé du tunnel (normalisé par le rayon de celui-ci) $-\xi_y(C)/R$ durant le processus de chargement caractérisé par la décroissance du rapport p_c/p_0 . La figure 5 illustre en fait la courbe de convergence-confinement du tunnel définie relativement au déplacement du point C . On observera que la convergence maximale obtenue pour le massif fracturé est quatre fois plus importante que celle obtenue pour le massif sain.

Ce problème a été traité par Xiao *et al.* (1994) par une méthode numérique combinant éléments finis et éléments de frontière. Ces auteurs remplacent le milieu fracturé par un milieu équivalent modélisé de manière heuristique. Leurs résultats, également reportés sur la figure 5, s'écartent de nos résultats numériques pour $p_c \rightarrow 0$.

1.2 Cas de deux familles de joints : fracturation (J2)

Le réseau de fracturation est maintenant constitué de joints horizontaux et verticaux (figure 1), formant une maille carrée de côté ℓ . L'espacement entre deux joints successifs est donc le même

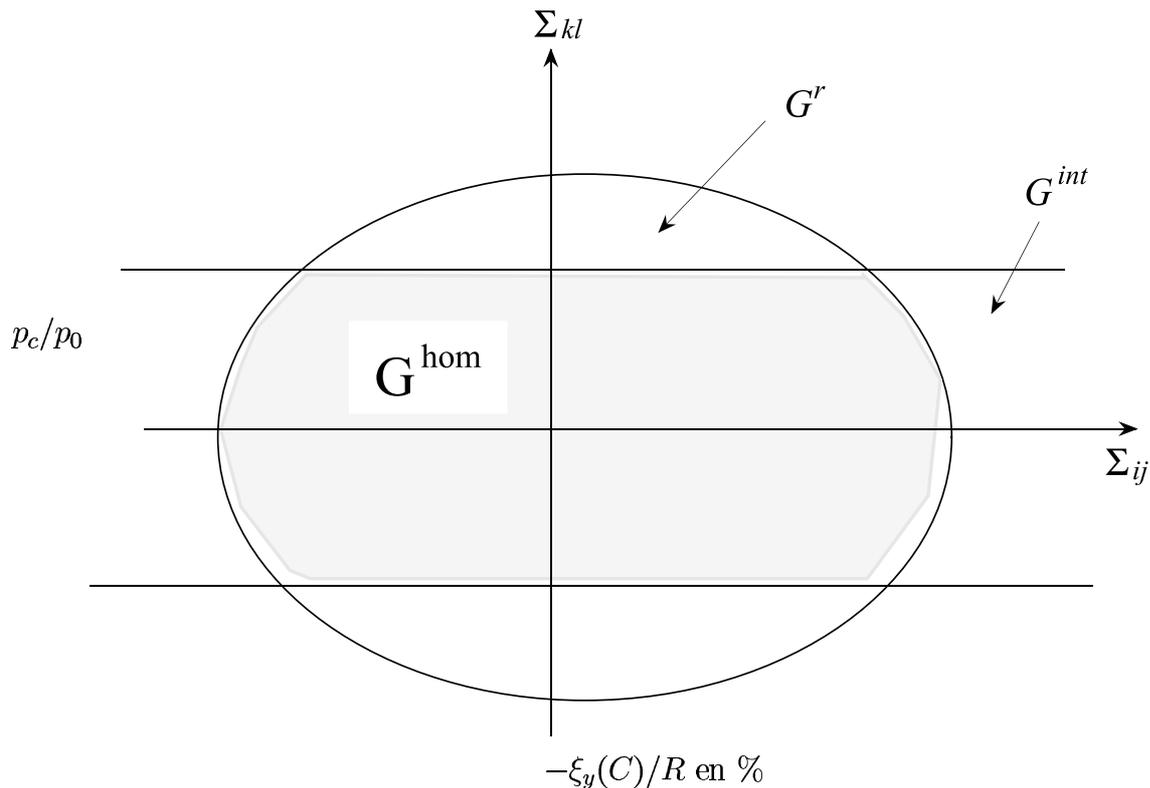


FIG. 5: Courbes de convergence-confinement du tunnel.

pour les deux familles.

Comme en **1.1**, seul un quart de la géométrie est discrétisé en raison des symétries du problème. Le maillage représenté sur la figure 2 est réutilisé pour les calculs numériques par éléments finis. Ceci souligne au passage l'intérêt pratique de recourir à la démarche d'homogénéisation lorsqu'elle se justifie.

On suppose en outre que les caractéristiques mécaniques des deux familles de joints sont identiques : (k_n, k_t) pour les raideurs élastiques, C_j pour la cohésion, (φ^j, ψ^j) pour les angles de frottement interne et de dilatance.

On reprend le même jeu de données que celui adopté pour les calculs en **1.1**.

Au fur et à mesure que la valeur de p_c diminue, on observe d'abord la plastification des joints horizontaux et verticaux, puis celle de la matrice rocheuse. Là encore, nous n'avons pas obtenu une convergence satisfaisante de l'algorithme de plasticité lorsque $p_c = 0$. Nous nous bornerons donc à donner les résultats relatifs à $p_c \geq 0.015\text{MPa}$ (i.e $p_c/p_0 \geq 0.003$) pour lesquels on a convergence de l'algorithme.

La visualisation de la déformée (amplifiée cinq fois) de la paroi du tunnel pour $p_c/p_0 = 0.003$ (figure 6) permet d'illustrer l'anisotropie du comportement global induite par les joints. L'intensité des déplacements de la paroi du tunnel est très affectée par le nombre de famille de joints. Le rapport ρ , défini par (1), des déplacements radiaux en clé et en pied du tunnel vaut bien évidemment l'unité pour toutes valeurs de p_c .

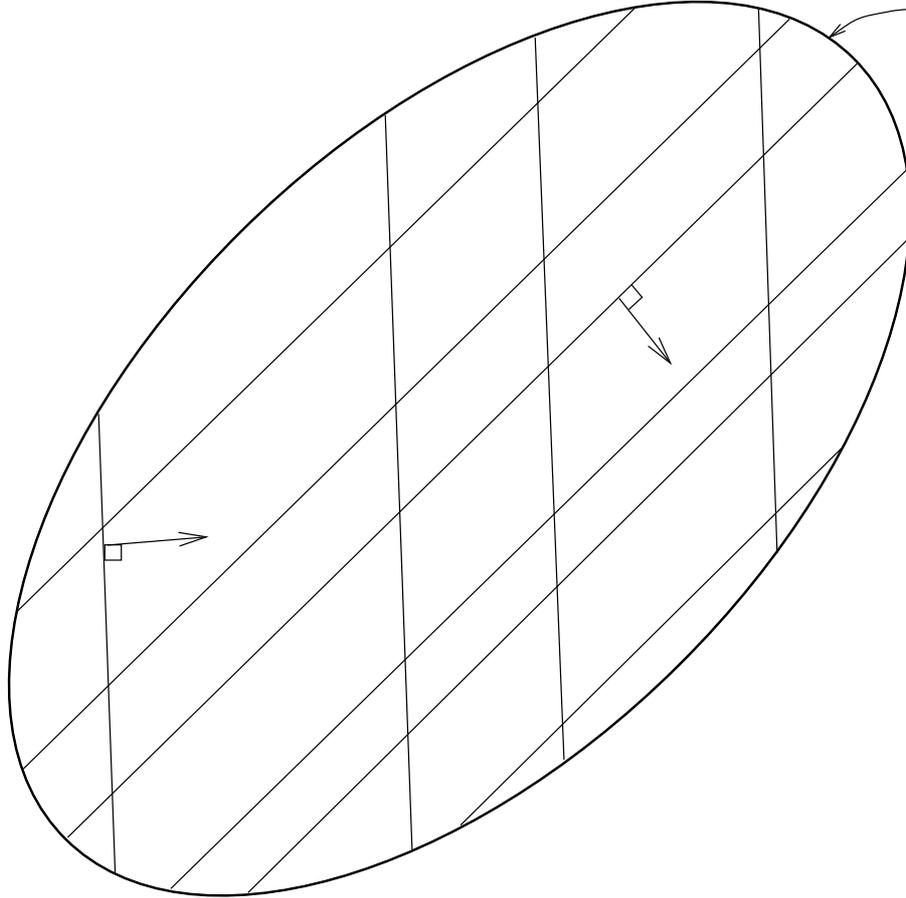


FIG. 6: Déformée du tunnel : massifs sain (J0) et fracturé (J2).

La courbe de convergence-confinement du tunnel définie relativement au déplacement radial du point C est illustrée sur la figure 7. Il s'agit des variations du déplacement $-\xi_y(C)$ en clé du tunnel (normalisé par le rayon R), en fonction de la pression en paroi p_c normalisée par p_0 . La convergence maximale obtenue pour le massif fracturé (J2) est environ dix fois plus importante que celle obtenue pour le massif sain.

Comme pour le cas de fracturation (J1), nos résultats numériques sont supérieurs à ceux prédits par Xiao *et al.* (1994) lorsque $p_c \rightarrow 0$.

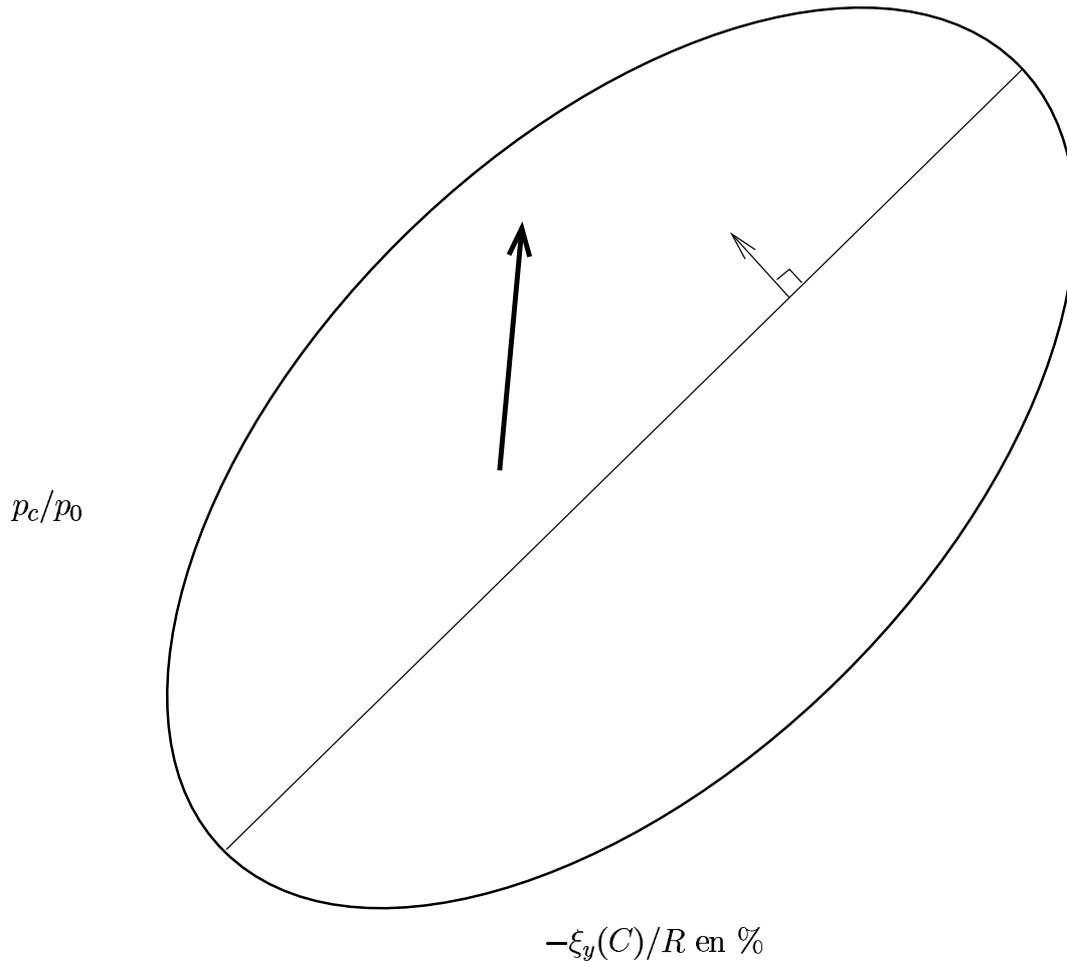


FIG. 7: Courbes de convergence-confinement du tunnel.

2 Fondation superficielle sur un massif fracturé

En guise de seconde application de l'approche numérique, on s'intéresse au poinçonnement d'un massif fracturé semi-infini et *non pesant*, par l'intermédiaire d'une fondation superficielle. La largeur de celle-ci est notée B . La longueur de la fondation suivant la direction Oz (figure 8) est supposée très grande vis à vis de la largeur B .

On impose à la fondation un déplacement de translation vertical descendant $-\delta \underline{e}_y$, avec $\delta \geq 0$. Le contact entre celle-ci et le massif le long de l'interface $\{y = 0, |x| \leq B/2\}$ est considéré sans frottement.

Le processus de chargement du système consiste à augmenter, à partir de zéro, la valeur de δ .

La réponse du massif à la sollicitation ainsi définie est analysée dans le cadre des *déformations planes* parallèlement au plan (x, y) .

L'état initial du massif est naturel : le champ de contrainte est identiquement nul pour $\delta = 0$.

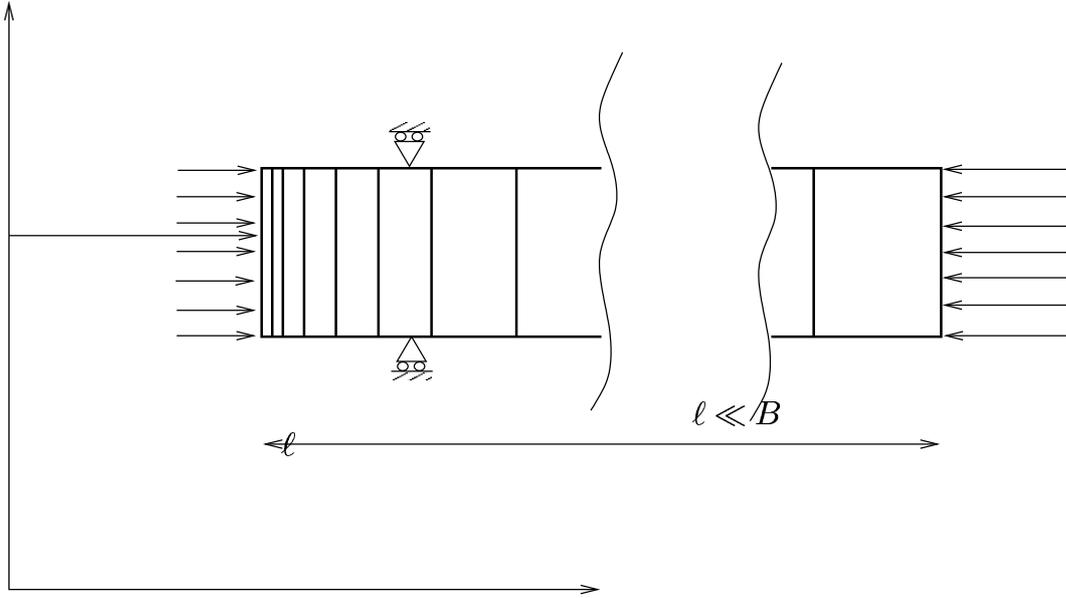


FIG. 8: Poinçonnement d'un massif fracturé semi-infini.

2.1 Cas d'une seule famille de joints

Le réseau de fracturation est défini par une seule famille de joints parallèles, inclinés d'un angle θ par rapport à la direction horizontale Ox . L'espacement entre deux joints successifs ℓ est suffisamment petit pour justifier le recours à la démarche d'homogénéisation.

L'élasticité du constituant matrice rocheuse, linéaire et isotrope, est caractérisée par le module de Young E_r et le coefficient de Poisson ν_r . Celle des joints, également linéaire, est caractérisée par les raideurs k_n et k_t .

En ce qui concerne le comportement plastique, la plasticité des deux constituants, associée, est décrite par des critères de Mohr-Coulomb. On note (C_r, φ_r) et (C_j, φ_j) les couples cohésion/angle de frottement correspondant à chacun des constituants.

La résolution numérique du problème d'évolution élastoplastique défini par le processus $\delta = 0 \nearrow \delta(t)$ utilise le maillage représenté sur la figure 9. Il est composé de 2883 noeuds et 690 éléments quadratiques Q9. Remarquons que la présence des joints introduit une dissymétrie dans le problème, nous empêchant de nous restreindre à l'étude de la moitié de la géométrie ($x \geq 0$). Il est donc nécessaire de la discrétiser entièrement.

Les conditions aux limites imposées sur la base inférieure du maillage, ainsi que sur les deux faces latérales sont compatibles avec une interface lisse.

La réponse globale du massif est décrite par les courbes $R(\theta) = f(\delta, \theta)$ (figure 10) où $-R(\theta) \underline{e}_y$

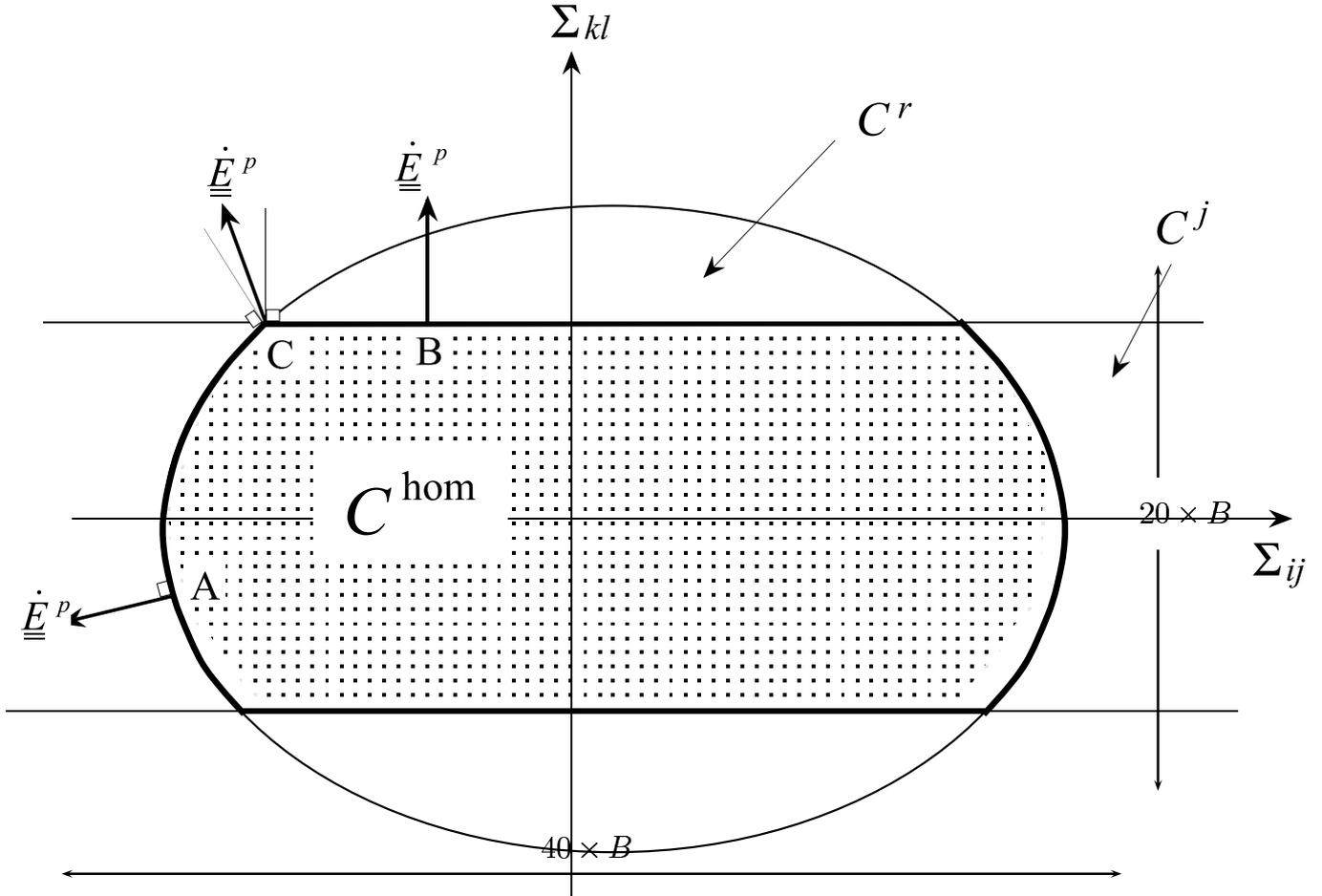


FIG. 9: Poinçonnement d'un massif fracturé : maillage utilisé pour les calculs numériques.

est l'effort résultant (par unité de longueur transversale) appliqué par la fondation sur le massif, pour une inclinaison θ des joints donnée dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Les valeurs numériques des paramètres utilisés sont :

Matrice rocheuse : $E_r = 2.5 \text{ GPa}$, $\nu_r = 0.25$, $C_r = 1.0 \text{ MPa}$, $\varphi_r = \psi_r = 35^\circ$

Joints : $k_n = 50 \text{ GPa/m}$, $k_t = 50 \text{ GPa/m}$, $C_j = 0.1 \text{ MPa}$, $\varphi_j = \psi_j = 35^\circ$, $\ell = 0.1 B$

La figure 10 donne les courbes de chargement du massif pour différentes valeurs de l'inclinaison θ des joints. D'une manière générale, cette figure montre que les joints affectent significativement la réponse globale du massif, à la fois en terme de déformabilité qu'en terme de résistance (charge limite). Cet effet n'est pas monotone avec la valeur de l'inclinaison θ .

massif sain $\theta = 90^\circ$

$\theta = 60^\circ$

$\theta = 0^\circ$

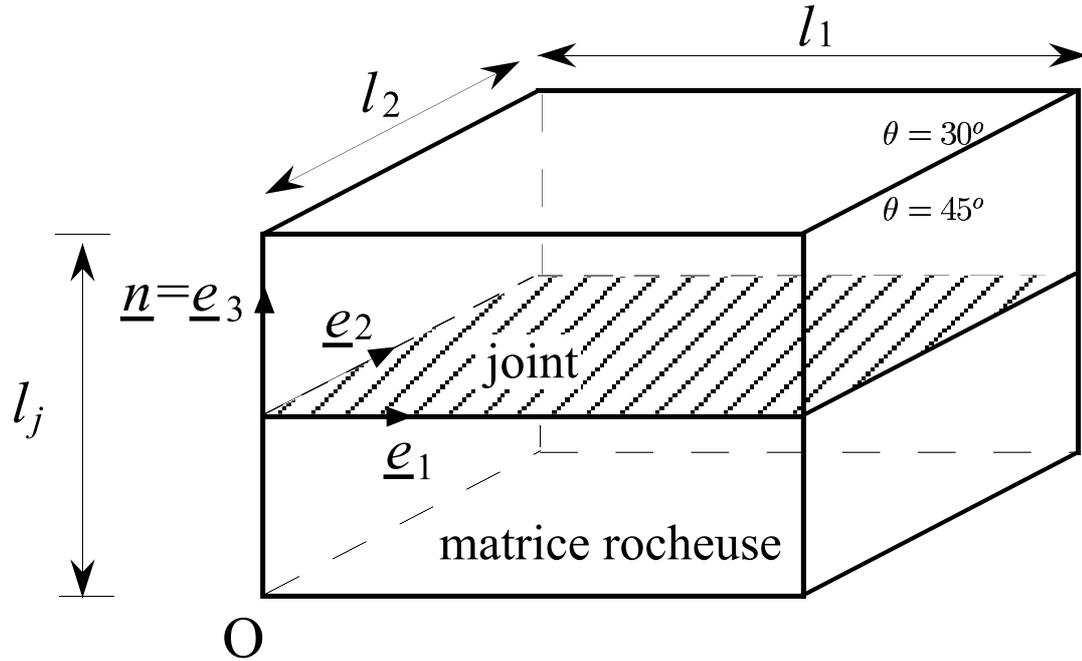


FIG. 10: Poinçonnement d'un massif fracturé : courbes de chargement.

Remarque. Il faut signaler que pour des valeurs de la déformation δ/B supérieures à 10% (seuil choisi arbitrairement), on doit s'interroger sur la validité de la démarche qui consiste à analyser le problème sous l'hypothèse des petites perturbations. Cependant, la figure 10 montre que de tels niveaux de déformation ne sont atteints que lors de la phase écoulement plastique libre.

On va examiner maintenant de manière plus détaillée l'impact des joints sur le comportement global du massif en analysant plus particulièrement le régime élastique et celui correspondant à l'écoulement plastique libre. La phase élastoplastique, située entre les deux régimes précédents, étant plus difficile à quantifier.

2.1.1 Raideur élastique du massif

Partant de la valeur $\delta = 0$, la réponse du massif est purement élastique tant que δ reste inférieur à une certaine valeur δ^e , constituant la limite élastique. Pour le jeu de données considéré, la valeur de δ^e est quasiment indépendante de θ .

En premier lieu, il faut signaler que les joints réduisent l'étendue de la phase élastique. Pour le jeu de données considéré, la valeur de δ^e est divisée par cinq par rapport à la situation du massif sain.

Dans cette phase de déformations réversibles, l'effort R est proportionnel à δ . On peut donc

définir une raideur globale K_g du massif pour le problème de poinçonnement par :

$$K_g = \frac{R/B}{\delta/B} \quad (2)$$

Cette raideur dépend bien évidemment de θ . Les variations de K_g , normalisé par la raideur K_g^0 correspondant à la situation du massif sain, sont représentées sur la figure 11. Il s'agit d'une fonction croissante avec l'inclinaison des joints. La faible réduction (au maximum 30%) de la raideur globale engendrée par la présence des joints, peut s'expliquer ici par les valeurs relativement importantes de k_n et k_t adoptées pour les calculs.

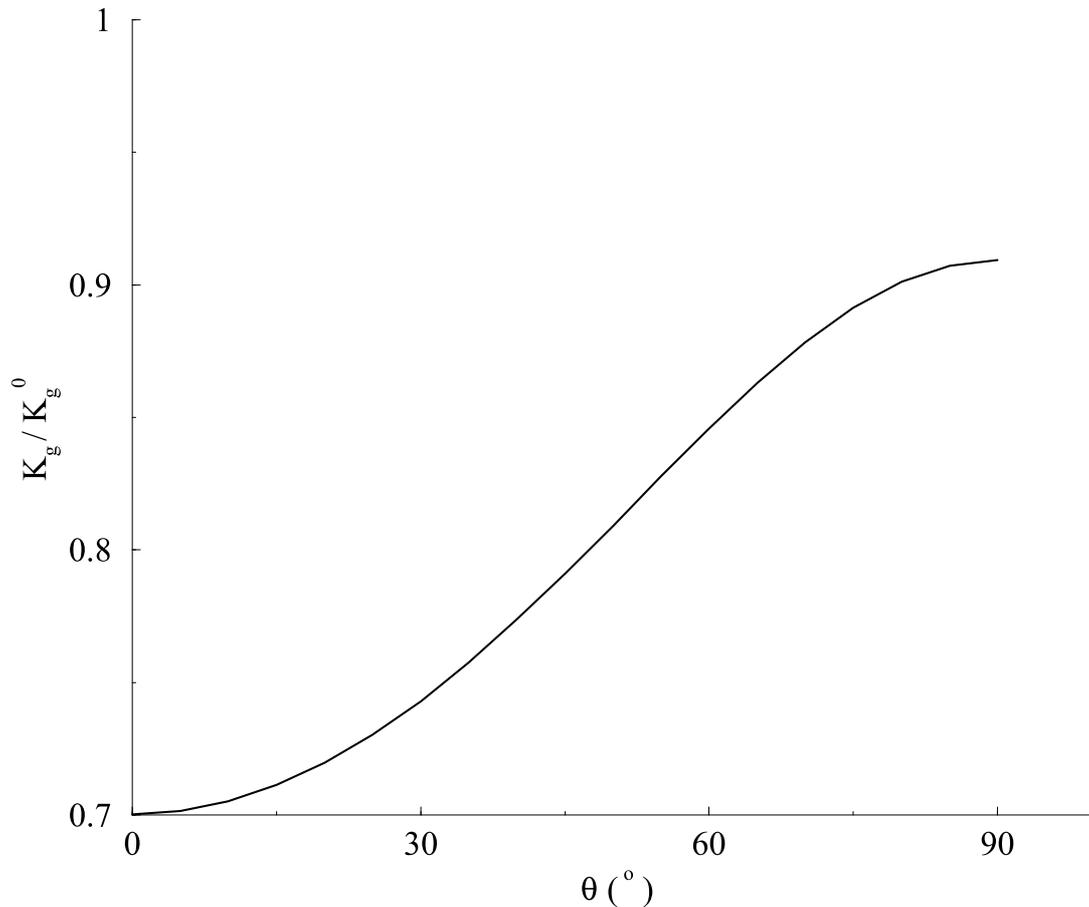


FIG. 11: Raideur globale du massif pour le problème du poinçonnement.

2.1.2 Capacité portante

Après la phase de comportement élastoplastique qui correspond à l'écroutissement du milieu, on observe une phase d'écoulement plastique libre. Cette dernière est illustrée sur les courbes de chargement de la figure 10 par le plateau atteint par la valeur de la force R . Il s'agit donc de

l'estimation numérique de la charge limite $R_l(\theta)$. Dans le cadre du comportement parfaitement plastique et associé adopté pour les constituants du milieu rocheux, la valeur de $R_l(\theta)$ peut être obtenue directement par un raisonnement de calcul à la rupture. En particulier, $R_l(\theta)$ ne dépend que des caractéristiques de résistance (C_r, φ^r) et (C_j, φ^j) des constituants (Salençon (1983)).

Ce problème de détermination de $R_l(\theta)$ a été traité par Yu and Sloan (1994). Ces auteurs déterminent numériquement un minorant de $R_l(\theta)$ en mettant en œuvre une approche statique par l'intérieur du calcul à la rupture. Plus précisément, la géométrie est discrétisée par des éléments triangulaires, au sein desquels le champ de contrainte est une fonction affine des coordonnées x et y . La condition de résistance est écrite intuitivement sous la forme :

$$\forall \underline{x} \quad f^r [\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0 \quad \text{et} \quad f^j [\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0 \quad (3)$$

ce qui correspond en fait à la définition du critère de résistance macroscopique (voir **chapitre 2**).

Les auteurs procèdent ensuite à une *linéarisation par l'intérieur* des critères f^r et f^j .

La détermination d'un minorant de $R_l(\theta)$ revient alors à la résolution d'un problème via une technique de programmation linéaire. Le champ de contrainte solution du problème numérique est ensuite étendu à l'infini par une procédure appropriée, afin d'assurer le statut de borne inférieure pour l'estimation de la charge limite obtenue.

On a reporté sur la figure 12, les estimations numériques de la charge limite obtenues par notre code, ainsi que celles dues à Yu and Sloan (1994). On observe tout d'abord que ces dernières, qui constituent des minorants de $R_l(\theta)$, sont bien inférieures à nos estimations. L'approche en déplacement sur laquelle est basée notre approche numérique conduit bien évidemment à des majorants pour $R_l(\theta)$, en raison du caractère non rigoureusement statiquement admissible des champs de contraintes résultant d'une telle approche. Les valeurs exactes de $R_l(\theta)$ sont donc encadrées par les estimations de la figure 12.

Le tableau ci-dessous précise, pour quelques valeurs de l'inclinaison θ , les écarts entre les résultats¹ des deux approches.

	E.F	Yu and Sloan (1994)	écart (%)
$\theta = 0^\circ$	42.5	37.5	13.5
$\theta = 30^\circ$	26.5	20.5	29
$\theta = 60^\circ$	44	38	16
$\theta = 90^\circ$	47	42.5	10.5

TAB. 1: Charge limite d'un poinçon sur un massif fracturé.

¹les valeurs de $R_l(\theta)$ ont été arrondies.

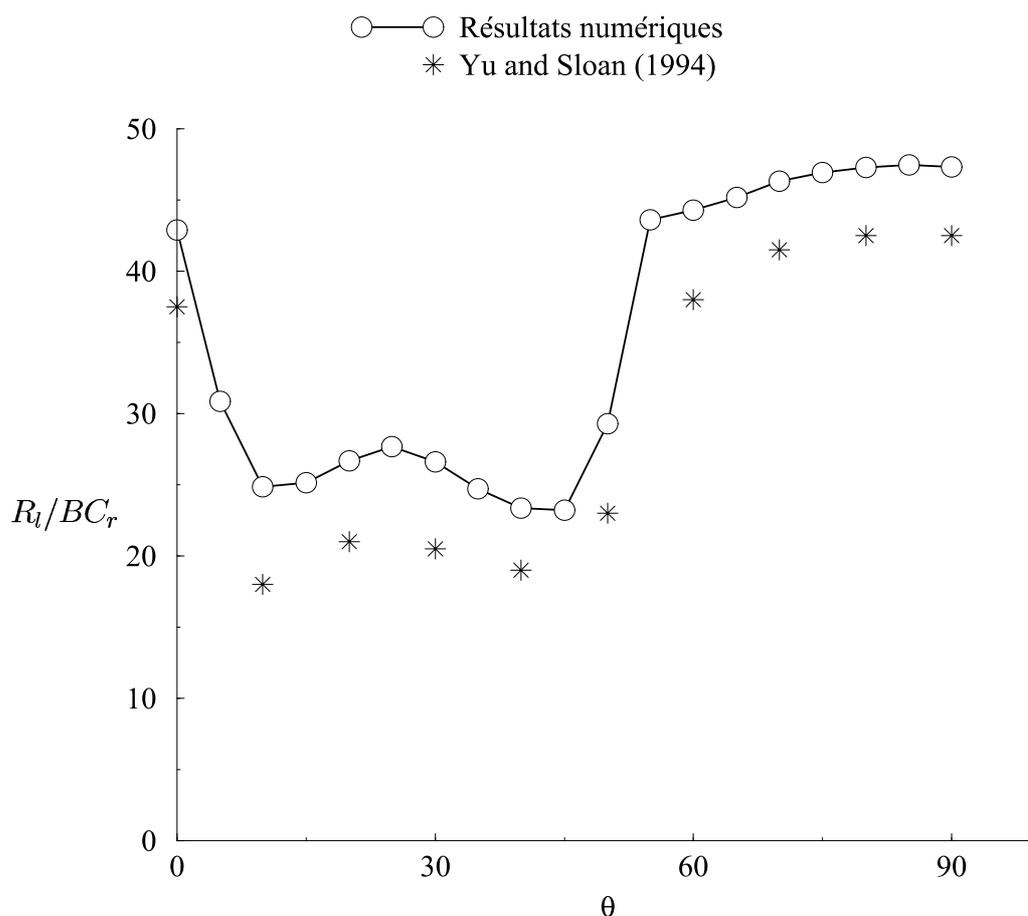


FIG. 12: Capacité portante en fonction de l'inclinaison des joints.

La figure 12, et le tableau ci-dessus le confirme, montre que les écarts entre l'approche statique et l'approche par éléments finis en déplacement sont importants dans la gamme $\theta \in [10^\circ, 50^\circ]$. Il semble raisonnable d'avancer que les résultats des deux approches peuvent être améliorés en utilisant, par exemple, des discrétisations géométriques plus fines. En dehors de cet intervalle, les écarts sont quasiment tous inférieurs à 15%.

2.2 Massif traversé par deux familles perpendiculaires de joints

Par rapport à la situation étudiée en section 2.1, le massif est maintenant traversé par un réseau de deux familles de joints perpendiculaires, formant une maille carrée de côté ℓ . L'orientation de la fracturation est définie par l'angle θ entre les joints de la famille 1 et la direction horizontale, comme représenté sur la figure 13.

Les caractéristiques mécaniques des deux familles de joints sont *identiques*. Comme en 2.1, on adopte pour les constituants matrice rocheuse et joints, des comportements plastiques de type

Mohr-Coulomb avec des règles d'écoulement associées.

Par ailleurs, le maillage de la figure 9 est encore utilisé pour les calculs numériques. Il s'agit, comme mentionné pour le problème de la convergence du tunnel, d'un avantage de la démarche d'homogénéisation.

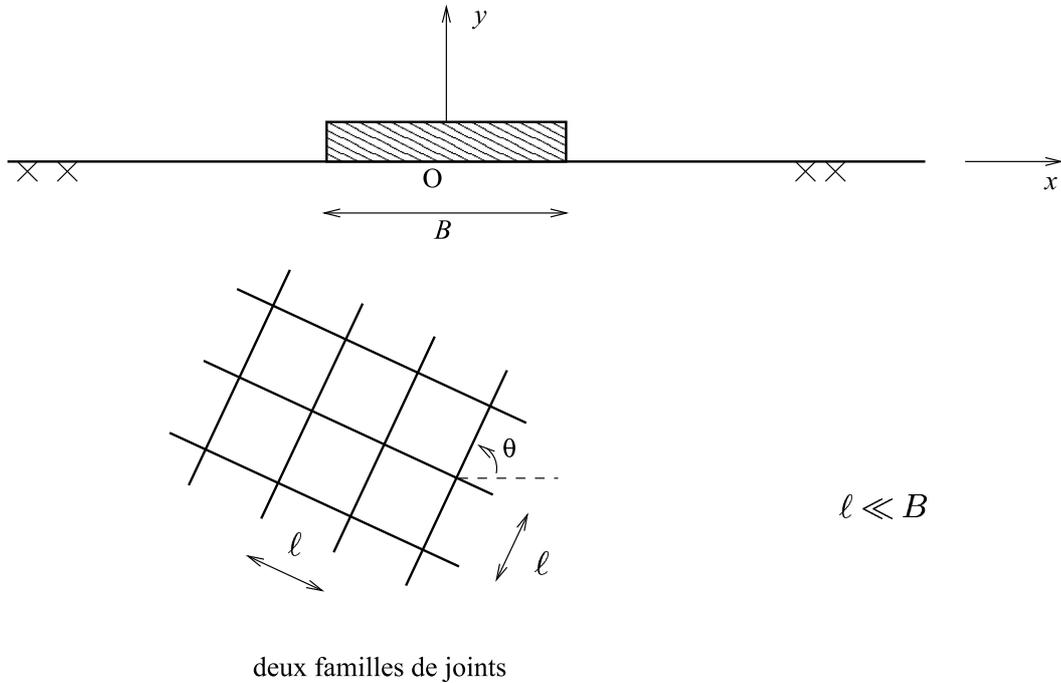


FIG. 13: Fondation sur un massif traversé par deux familles de joints.

Le processus de chargement est identique à celui défini dans la situation d'une famille de joints. Les calculs sont effectués avec les données numériques suivantes :

Matrice rocheuse : $E_r = 2.5 \text{ GPa}$, $\nu_r = 0.25$, $C_r = 0.3 \text{ MPa}$, $\varphi_r = \psi_j = 30^\circ$

Joints : $k_n = 5 \text{ GPa/m}$, $k_t = 5 \text{ GPa/m}$, $C_j = 0.075 \text{ MPa}$, $\varphi_j = \psi_j = 20^\circ$, $\ell = 0.1 B$

On représente sur la figure 14 les courbes de chargement $R(\theta) = f(\delta)$ du massif pour diverses valeurs de l'inclinaison θ . Remarquons qu'en raison de la structure particulière du schéma de fracturation et de l'identité des caractéristiques mécaniques des joints des deux familles, la réponse du massif est identique pour θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$. Cette figure illustre bien l'affaiblissement significatif du milieu rocheux dû à la présence des joints. A titre de comparaison, le régime d'écoulement plastique pour le massif sain, non représenté ici (voir figure 6 du chapitre 4), est atteint pour une

valeur de la réaction R de l'ordre de $31 B C_r$, soit environ trois fois celle prédite pour le massif fracturé.

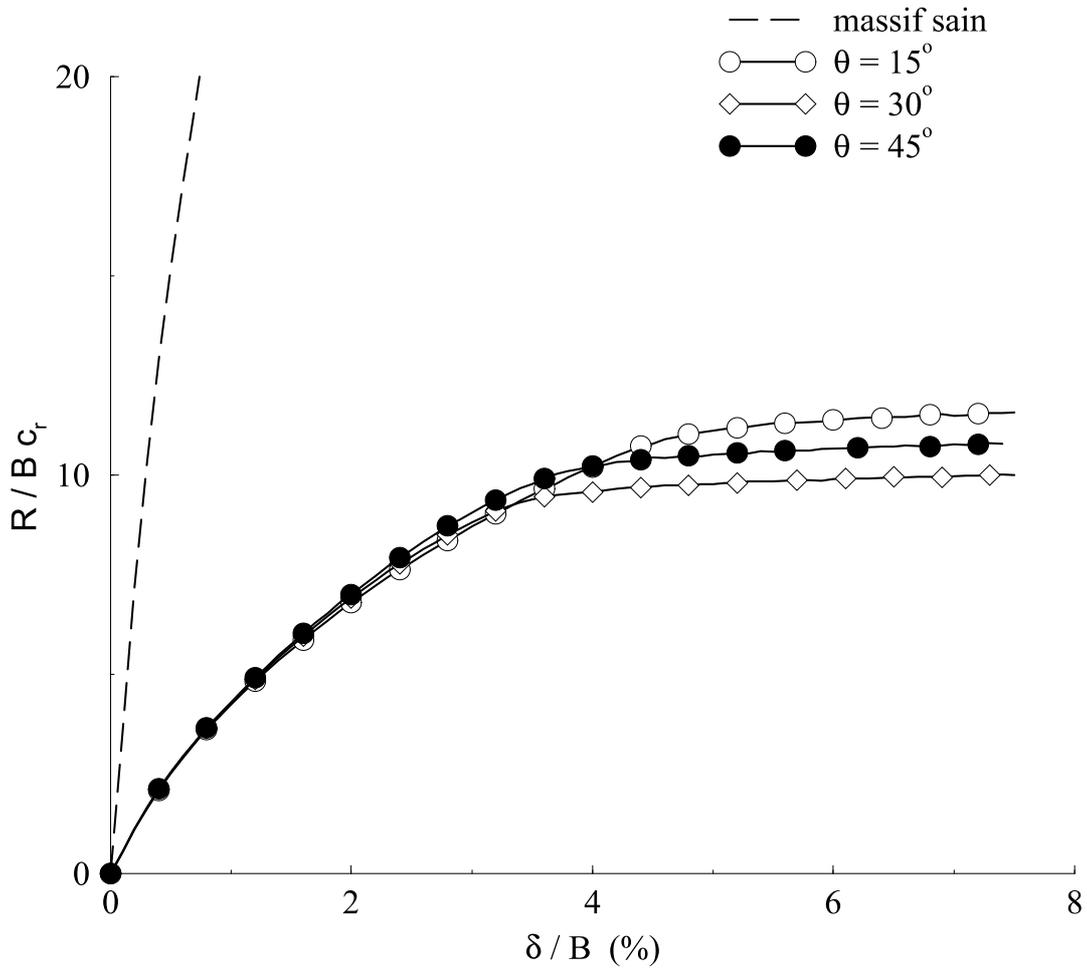


FIG. 14: Courbes de chargement du massif traversé par deux familles de joints perpendiculaires.

Comme pour la situation d'une seule famille de joints, nous allons examiner maintenant la réponse globale du massif fracturé dans les deux régimes particuliers de déformations réversibles et de l'écoulement plastique libre.

Raideur élastique du massif

Dans la phase de déformations élastiques, l'effort R est proportionnel à δ . On caractérise la

réponse globale du massif par la raideur élastique globale K_g comme définie par (2).

Comme le suggéraient les courbes de chargement, on constate que pour le jeu de données considérés, K_g ne dépend quasiment pas de l'orientation des joints θ : $K_g \simeq 0.15 K_g^0$, K_g^0 étant la raideur du massif sain. Ce résultat quantifie bien le degré d'affaiblissement élastique du matériau par les joints.

Capacité portante

Il s'agit d'examiner ici l'impact des joints sur la valeur de la charge limite $R_l(\theta)$ du système considéré. Rappelons que celle-ci correspond à la valeur de la réaction correspondant à l'écoulement plastique libre.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés dans Maghous *et al.* (1998). Ces derniers proviennent de l'application de la méthode d'homogénéisation périodique en calcul à la rupture. Les auteurs ont mis en œuvre une approche cinématique à l'aide d'un mécanisme de Prandtl généralisé.

On a reporté sur la figure 15 nos résultats ainsi que ceux obtenus par les auteurs cités au-dessus.

Les deux approches prédisent une réduction substantielle de la capacité portante par rapport à la situation de massif sain. Ainsi en présence de joints, la valeur de $R_l(\theta)$ est environ trois fois moindre que celle de la situation sans joints, pour des inclinaisons voisines de 25° .

Les estimations prédites par Maghous *et al.* (1998) sont significativement supérieures aux nôtres. Les écarts dépassent même les 50% pour une inclinaison de joints égale à 10° . Ceci est bien entendu cohérent avec le statut de bornes supérieures des estimations calculées par les auteurs. Cependant, la comparaison suggère que d'autres mécanismes, autres que celui utilisé (Prandtl généralisé), doivent être explorés afin d'améliorer l'estimation de la charge limite.

3 Commentaires conclusifs

Les exemples d'application présentés dans ce chapitre appellent les commentaires suivants :

* L'outil numérique, incorporant le comportement élastoplastique homogénéisé des milieux à joints est fiable. Les simulations de deux problèmes dont la solution analytique est connue (cf chapitre 4.) ont été concluantes.

* L'algorithme de projection sur le domaine d'élasticité macroscopique, de nature itérative, sur lequel est fondé le module élastoplastique de l'outil numérique, semble suffisamment robuste. Les comparaisons avec d'autres approches numériques sur des problèmes assez complexes, tels que la simulation de la convergence d'un tunnel ou le calcul de la capacité portante d'une fondation

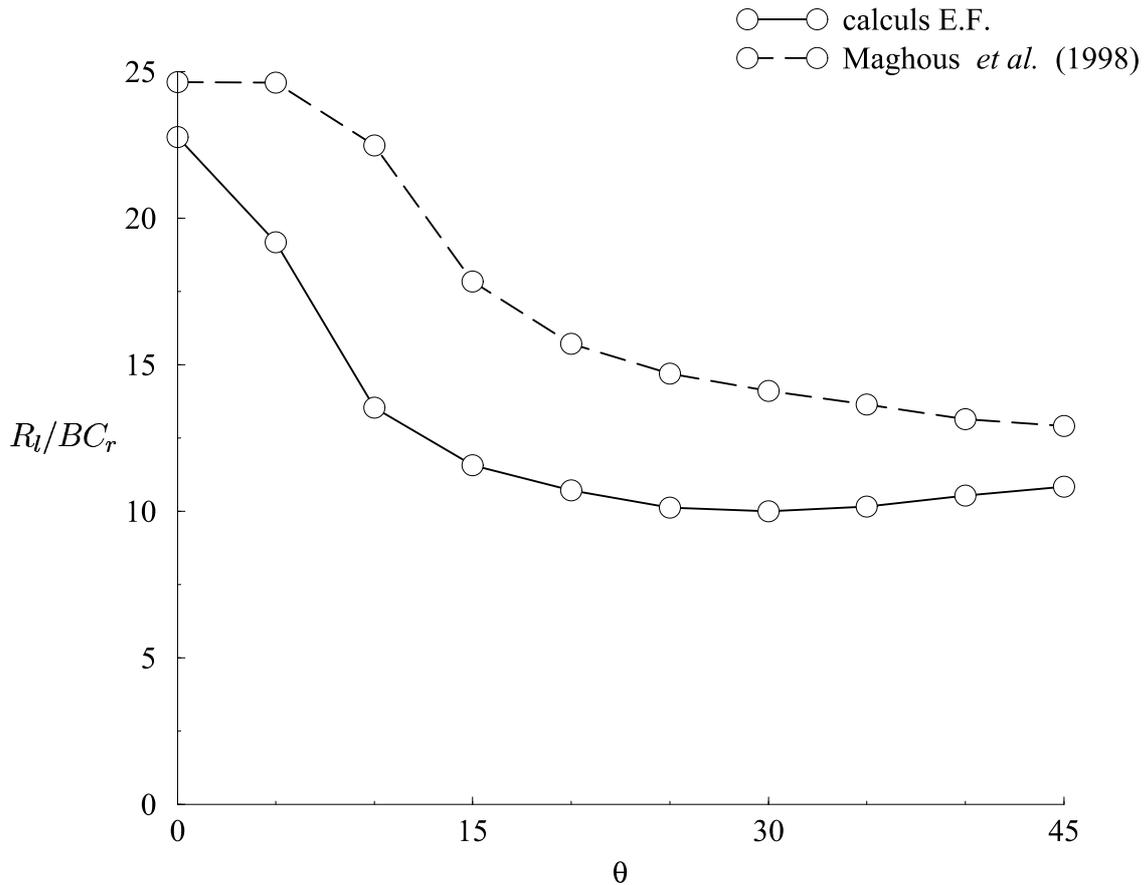


FIG. 15: Capacité portante en fonction de l'inclinaison des joints.

sur massif fracturé, en apportent la confirmation.

* D'un point de vue pratique, la démarche par homogénéisation présente l'avantage de pouvoir utiliser un même maillage de la géométrie indépendamment du schéma de fracturation considéré. Cela facilite l'étude de l'impact du nombre de familles de joints sur la réponse d'un massif fracturé.

* Bien qu'aucune des applications présentées ne fait intervenir le poids propre comme charge, le code numérique permet de prendre en compte l'effet de la pesanteur.

Ces commentaires mettant en évidence les points positifs de l'outil numérique, ne sauraient masquer ses limites. Celles-ci concernent essentiellement les problèmes de convergence numérique rencontrés lors de l'étude du tunnel (section 1). Bien qu'il s'agissait de situations sévères (cohésion des joints nulle, pression nulle en paroi du tunnel), l'effort numérique doit porter dans le futur sur ce point précis de convergence.

4 Références

Xiao B., Carter J.P. and Alhossein H., 1994. *Elastoplastic analysis of jointed rocks using a coupled finite element and boundary element method*. Int. J. Numer. Analytical Methods Geomech., 18, 445-466.

Salençon J., 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses des Ponts.

Yu H.S. and Sloan S.W., 1994. *Bearing capacity of jointed rock*. Proceeding of 8th Int. Conference : Computer Methods and Advances in Geomech., 2403-2408, West Virginia, May 1994, Balkema Publishers.

Maghous S., de Buhan P. and Bekaert A., 1998. *Failure design of jointed rock structures by means of a homogenization approach*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 3, 207-228.

CONCLUSION

Au terme de notre travail, il convient de présenter succinctement les résultats obtenus et d'esquisser les développements ultérieurs.

Conçue comme une approche alternative pour le calcul des ouvrages en milieux rocheux fracturés, la démarche d'homogénéisation tire avantage de la densité et la régularité du réseau de joints, fréquemment observées dans les massifs rocheux. Elle fournit un outil de calcul efficace pour analyser la stabilité et/ou la réponse en déplacement de tels ouvrages. Sa faisabilité a été clairement démontrée sur des problèmes types de mécanique des roches, qu'il s'agisse de la convergence d'une galerie souterraine ou du poinçonnement d'un massif.

L'étape clé sur laquelle repose ce travail réside dans la formulation complète du comportement homogénéisé du milieu à joints. Se plaçant à une échelle dans laquelle les joints sont la seule hétérogénéité considérée, et à partir d'hypothèses sur la géométrie des joints et sur le comportement mécanique de chaque constituant, il a été possible d'établir

- les équations d'état macroscopiques pour le comportement plastique d'un milieu à distribution périodique de joints, par résolution d'un problème d'évolution élastoplastique défini sur la cellule de base.
- et d'étendre les résultats obtenus au cas d'une distribution aléatoire de joints, en définissant le chargement du volume élémentaire représentatif par une contrainte homogène sur le bord.

En particulier, on a mis en évidence *l'absence d'écrouissage à l'échelle macroscopique* classiquement induit par le processus d'homogénéisation. Ce résultat est directement lié à l'hypothèse d'homogénéité de la matrice rocheuse et à la modélisation des joints comme des interfaces planes infinies.

Un effort important a été ensuite consacré à l'élaboration d'un code de calcul par éléments finis implémentant le comportement homogénéisé en plasticité. La difficulté résidait dans le caractère *multi-potentiel* de la règle d'écoulement. Cela a nécessité le développement d'un processus adapté pour déterminer la projection d'un état de contrainte donné sur le domaine d'élasticité. La procédure itérative proposée a été ensuite incorporée au sein de l'algorithme de plasticité.

Le code numérique mis au point permet de traiter des problèmes bidimensionnels. Dans sa version actuelle, le code est restreint au cas de constituants à élasticité linéaire et plasticité décrite par un critère de type Mohr-Coulomb associée ou non. Sa validation a été testée à l'aide de la solution analytique, construite au chapitre **2**, du problème de la convergence d'une galerie souterraine creusée dans un massif dont la fracturation est modélisée par un schéma académique.

Les exemples traités numériquement dans le dernier chapitre ont montré la pertinence et la fiabilité de la démarche quand il s'agit d'analyser la réponse d'ouvrages types pour le mécanicien des roches. Ils ont fourni par ailleurs l'opportunité de confronter nos résultats à ceux issus d'autres approches. Un prolongement immédiat de l'étude numérique consisterait à appréhender les effets d'échelle en faisant appel au code de calcul par éléments distincts UDEC, afin d'évaluer la manière dont la solution du problème hétérogène initial converge vers la solution du problème homogénéisé au fur et à mesure que l'espacement inter-joints diminue. Concrètement, cette étude permettrait de quantifier la valeur de l'espacement à partir de laquelle l'approche par homogénéisation en élastoplasticité devient pertinente.

Gardons à l'esprit que la validité d'une telle approche requiert que l'espacement entre deux joints successifs demeure très petite devant une grandeur caractéristique du problème considéré. A défaut, c'est à dire dans le cas d'un ouvrage comportant relativement peu de joints, il conviendra de recourir à une approche directe. Ceci souligne la complémentarité entre les approches directe et par homogénéisation.

Les principaux prolongements de ce travail sont à chercher dans les directions suivantes.

D'un point de vue théorique

- Enrichir le modèle de comportement des joints et de la matrice rocheuse par la prise en compte d'écaillage *ad hoc*. Pour les joints, nous pensons qu'il s'agira plutôt d'inclure dans le modèle les phénomènes d'endommagement consécutifs à la dégradation des épontes.

- Prendre en compte le couplage hydromécanique, principalement l'effet de la présence d'un fluide sous pression saturant les joints. Il s'agira de reformuler les équations d'état macroscopiques en poroplasticité.

D'un point de vue numérique

- Généraliser l'outil numérique pour prendre en compte l'élasticité non linéaire des constituants.
- Incorporer d'autres critères de plasticité pour les constituants. On pense bien évidemment aux critères de type Hoek et Brown (1988, 1992).
- Repenser la procédure de projection sur le domaine d'élasticité pour remédier aux problèmes de convergence numériques.

ANNEXES

Annexe A

NOTATIONS

On notera :

$\underline{\underline{\epsilon}}$: un tenseur d'ordre 2,

$\underline{\underline{\epsilon}}^e$: un tenseur d'ordre 4,

Tenseurs

$\underline{\underline{1}}$: tenseur unité,

$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\Sigma}}$: tenseur des contraintes,

$\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{E}}$: tenseur des déformations ,

$\underline{\underline{\epsilon}}^e, \underline{\underline{E}}^e$: tenseur des déformations élastiques,

$\underline{\underline{\epsilon}}^p, \underline{\underline{E}}^p$: tenseur des déformations plastiques,

$\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}$: tenseur des déformations totales virtuelles,

$\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}^e$: tenseur des déformations élastiques virtuelles,

$\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}^p$: tenseur des déformations plastiques virtuelles,

$\underline{\underline{\sigma}}_0$: tenseur des contraintes initiales,

$\underline{\underline{C}}^{hom}$: tenseur des modules élastiques du milieu homogénéisé,

$\underline{\underline{S}}^{hom}$: tenseur des complaisances élastiques du milieu homogénéisé,

$\underline{\underline{c}}^r$: tenseur des modules élastiques de la matrice rocheuse,

$\underline{\underline{s}}^r$: tenseur des complaisances élastiques de la matrice rocheuse,

$\underline{\underline{c}}^j$: tenseur d'élasticité du joint,

$\underline{\underline{s}}^j$: tenseur de souplesse du joint,

$\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{D}}$: taux de déformation,

Vecteurs

\underline{n} : normale extérieure unitaire,

$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$: vecteur contrainte,

$\underline{\xi}$: champ de déplacement,

$\underline{\hat{\xi}}$: champ de déplacement virtuel,

$\underline{\xi}^d$: champ de déplacements imposé,

$\rho \underline{F}$: forces volumiques,

\underline{T}^d : forces surfaciques,

$[\underline{\xi}]$: saut de déplacement à travers le joint,

$[\underline{\xi}]^e$: saut de déplacements élastiques à travers le joint,
 $[\underline{\xi}]^p$: saut de déplacements plastiques à travers le joint,

Scalaires

- *Relatifs à la matrice rocheuse*

E_r : module de Young,
 ν_r : coefficient de Poisson,
 λ_r, μ_r : coefficients de Lamé,
 $\dot{\lambda}^r$: multiplicateur plastique,
 $\dot{\Lambda}^r = \langle \dot{\lambda}^r \rangle$,
 $f^r(\underline{\sigma}) \leq 0$: critère de pasticité,
 $g^r(\underline{\sigma})$: potentiel plastique,
 C_r : cohésion,
 φ^r : angle de frottement interne,
 ψ^r : angle de dilatance,
 $N_\varphi = (1 + \sin \varphi^r)/(1 - \sin \varphi^r) = \tan^2(\pi/4 + \varphi^r/2)$: coefficient de butée,
 $\sigma_0^r = 2C_r \cos \varphi^r/(1 - \sin \varphi^r)$: résistance à la compression simple,
 $H_r = C_r \cot \varphi^r$: pression de cohésion ou seuil de traction,
 C^r : Domaine d'élasticité de la matrice,
 G^r : Domaine de résistance de la matrice.

- *Relatifs aux joints*

$f'^j(\underline{\sigma}) = f^j(\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n})$: critère de pasticité,
 $g'^j(\underline{\sigma}) = g^j(\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n})$: potentiel plastique,
 C_j : cohésion,
 φ^j : angle de frottement interne,
 ψ^j : angle de dilatance,
 α, θ : orientation d'une famille de joints par rapport à un axe de référence donné,
 $N_t = \tan \alpha / \tan(\alpha - \varphi^j)$,
 $H_j = C_j \cot \varphi^j$,
 $\sigma_0^j = (N_t - 1) \cdot H_j$,
 σ_n : contrainte normale,
 τ : contrainte tangentielle,
 k_n : raideur normale du joint,
 k_t : raideur tangentielle du joint,

ξ_0 : fermeture maximale du joint,
 \mathcal{C}^j : domaine d'élasticité,
 \mathcal{G}^j ou \mathcal{G}'^j ou G^j ou encore G'^j : domaine de résistance ,
 ℓ, ℓ_j : espacement inter-joints,
 a^j : surface spécifique d'une famille de joints,
 $\dot{\lambda}^j$: multiplicateur plastique,
 $\dot{\Lambda}^j = \langle \dot{\lambda}^j \rangle_{joint}$,

- *Relatifs au milieu homogénéisé*

B : largeur d'une fondation ,
 F^{hom} : critère d'élasticité ou de résistance macroscopique,
 G^{hom} : domaine de résistance macroscopique,
 G_{Σ}^{hom} : domaine de résistance macroscopique obtenu par l'approche statique du calcul à la rupture,
 G_D^{hom} : domaine de résistance macroscopique obtenu par l'approche cinématique du calcul à la rupture,
 \mathcal{C}^{hom} : domaine d'élasticité macroscopique,

- **Divers**

\mathcal{S} : une structure donnée,
 Ω : domaine géométrique occupé par \mathcal{S} ,
 $\partial\Omega$: bord de Ω ,
 $\Delta(.)$: accroissement de $(.)$,
 \mathcal{Q} : chargement,
 $\dot{\mathcal{M}}$: dérivée par rapport au temps t de la grandeur \mathcal{M} ,
 Ω_e : mailles ou élément polyédrique de Ω ,
 \underline{u}_e : vecteur des déplacements nodaux de l'élément Ω_e ,
 \mathbf{N}_e : matrice des fonctions de forme en un point \underline{x} ,
 $\underline{\sigma}$: Représentation vectorielle du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$,
 $\underline{\varepsilon}$: Représentation vectorielle du tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$,
 \mathbf{C}^{hom} : écriture matricielle du tenseur $\underline{\underline{C}}^{hom}$ ou matrice d'élasticité associée au tenseur des modules élastiques $\underline{\underline{C}}^{hom}$,
 \mathbf{B}_e : matrice formée à partir des dérivées des fonctions de forme de l'élément e ,
 \mathbf{K} : matrice de rigidité globale du système \mathcal{S} discrétisé en éléments finis,
 \mathbf{F}^{ex} : vecteur force extérieure correspondant l'application de \mathcal{Q} ,
 \mathbf{F}^p : vecteur des forces plastiques,

\underline{U} : vecteur des déplacements nodaux dans le repère global du système \mathcal{S} ,
 $\underline{\underline{\sigma}}^*$: projection de $\underline{\underline{\sigma}}$ sur le domaine d'élasticité,
 $\underline{\underline{\Lambda}}$: vecteur contenant les multiplicateurs de Lagrange,

Annexe B

COMPLEMENTS AU CHAPITRE 3

1. Etude des paramètres élastiques a et $\bar{\mu}$

Nous nous proposons de présenter ci-dessous, les résultats de l'étude des variations de a et du paramètre élastique $\bar{\mu}$ qui joue, pour le milieu homogénéisé, le même rôle que le module de cisaillement classique pour un milieu homogène (matrice rocheuse, par exemple). Le facteur $a = \sqrt{C_{2222}/C_{1111}}$, intervenant dans l'équation différentielle d'équilibre exprimée en termes de déplacements (voir chapitre 3) :

$$d^2 u(r)/dr^2 + du(r)/rdr - a^2 u(r)/r^2 = 0,$$

dépend de plusieurs paramètres : λ_r et μ_r de la roche saine ; k_n , k_t , les raideurs normale et tangentielle ; ℓ l'espacement et l'orientation α des joints. Sa variation en fonction de l'orientation, par exemple, donne (fig.1) :

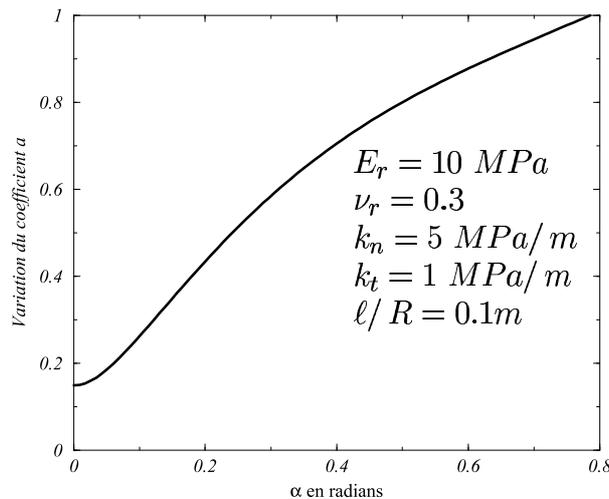


FIG. 1: Variations du coefficient a en fonction de l'orientation α des joints exprimée en radians

On remarque que le facteur a (fig.1 et fig.2), dans le domaine $\alpha \in [0, \pi/4]$ et pour un espacement ℓ/R fixé, est une fonction croissante de l'orientation α du joint (fig.1). Il prend la valeur unité lorsque $\alpha = \pi/4$. Cette valeur correspond aussi à celle du milieu homogène que nous simulons à partir du massif fracturé en faisant tendre les raideurs k_n et k_t vers l'infini.

Pour une orientation donnée a varie très peu en fonction de l'espacement ℓ/R , notamment pour $\alpha = 45^\circ$ il prend la valeur unité quelle que soit l'orientation.

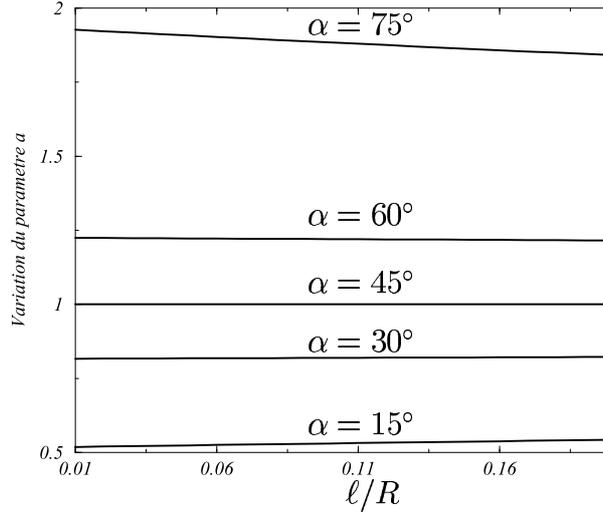


FIG. 2: Variation du coefficient a en fonction de l'espacement ℓ/R et de l'orientation α

Les variations de $\bar{\mu} = 0.5(\sqrt{C_{1111}C_{2222}} - C_{1122})$ en fonction de l'orientation α , pour les valeurs de référence adoptées (voir fig.1), sont présentées sur la figure (fig.3).

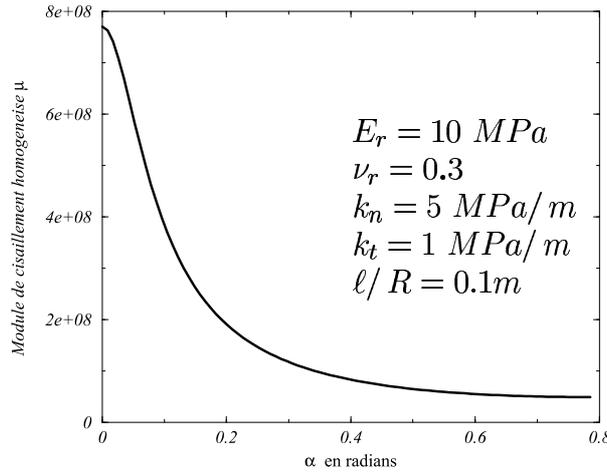


FIG. 3: Variations du paramètre élastique $\bar{\mu}$ en fonction de l'orientation

On constate que $\bar{\mu}$ est une fonction décroissante de l'orientation (fig.3) à ℓ/R fixé. Sa valeur maximale est atteinte pour $\alpha = 0$ et sa valeur minimale lorsque α tend vers $\pi/4$. Mieux, entre $\pi/6$ et $\pi/3$, sa valeur reste à peu près constante.

On montre aussi, dans ce domaine, que ce paramètre est indépendant du rapport k_n/k_t . C'est ce qui explique le même comportement élastique lorsque l'on fait varier le rapport k_n/k_t (fig.10) dans le cas des matériaux de Coulomb où l'on a pris comme angle d'orientation de référence $\alpha = 50^\circ (= \pi/3.6)$. La figure 2 montre que pour les angles complémentaires le facteur élastique $\bar{\mu}$ connaît la même variation en fonction de l'espacement. C'est dire que le comportement élastique du milieu homogénéisé est le même (même

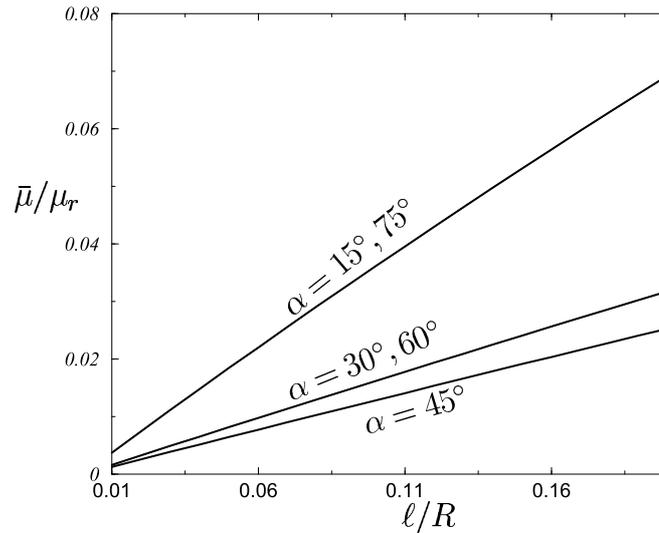


FIG. 4: Variations du paramètre élastique $\bar{\mu}$ rapporté à μ_r en fonction de l'espacement inter-joints rapporté au rayon ℓ/R et pour différentes inclinaisons des joints

convergence élastique finale notamment).

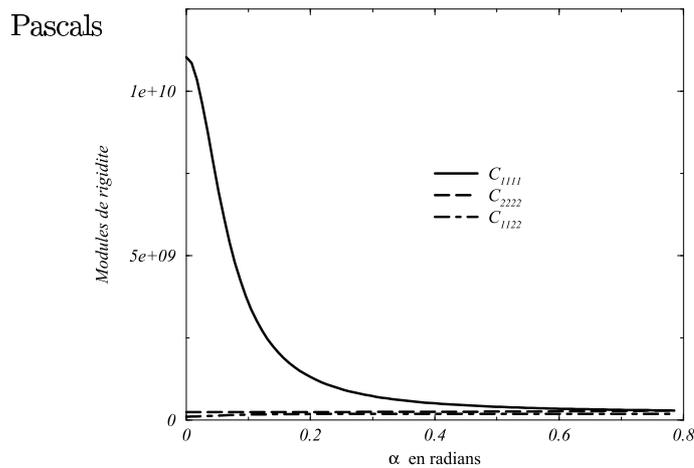


FIG. 5: Variations des modules de rigidité du matériau homogénéisé en fonction de l'orientation α

Si C_{1111} décroît nettement en fonction de l'orientation, ce n'est pas le cas des modules C_{2222} et C_{1122} qui semblent insensibles à la variation de l'orientation (fig.5).

2. Convergence de la galerie souterraine : courbes supplémentaires

2.1. Constituants de Tresca

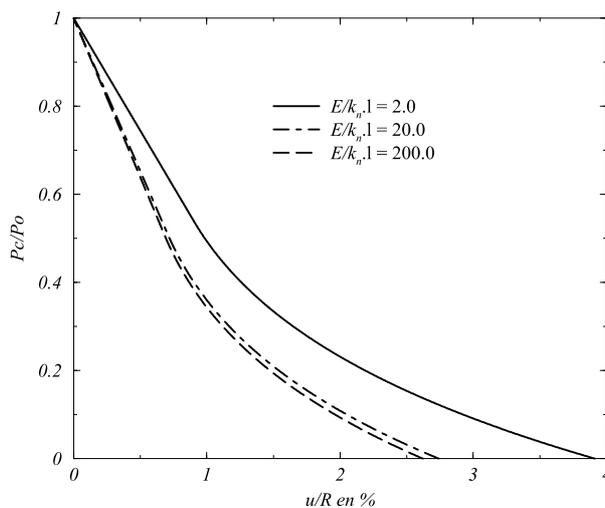


FIG. 6: Influence du module d'Young (Tresca)

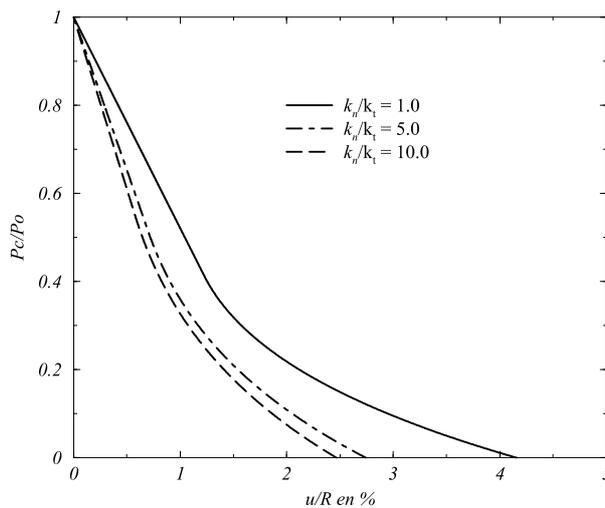


FIG. 7: Influence de la rigidité des joints (Tresca)

2.2. Constituants de Coulomb

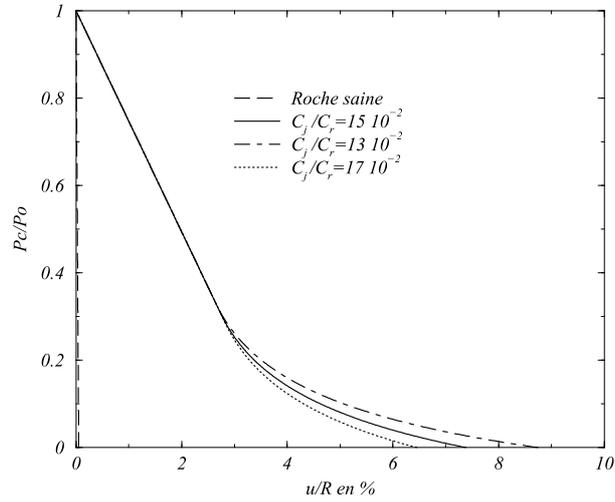


FIG. 8: Influence de la cohésion des joints (Coulomb)

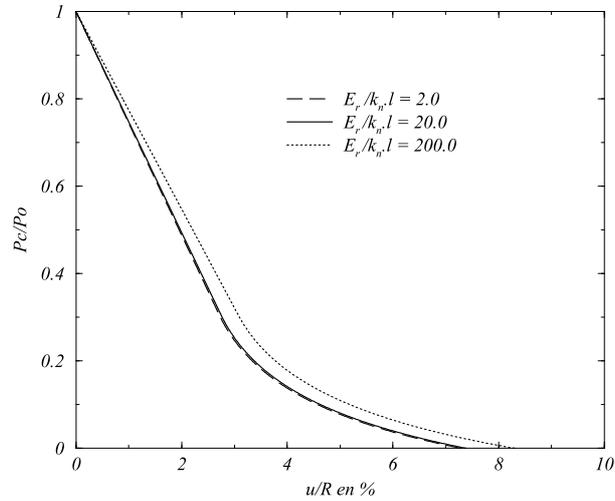


FIG. 9: Influence du module d'Young (Coulomb)

Comme dans le cas de constituants de Tresca, la convergence décroît en fonction du module de Young et du rapport k_n/k_t . Le comportement élastique (figure 10) est le même quel que soit le rapport k_n/k_t alors que pour les matériaux de Tresca (fig.7) , ce n'est pas le cas. Cette différence dans le comportement s'explique par la différence des orientations de référence ($\alpha = 15^\circ$ pour Tresca et $\alpha = 50^\circ$ pour Coulomb), elle-même liée au régime d'écoulement plastique envisagé durant tout le chargement ($\sigma_\theta < \sigma_z < \sigma_r$). En effet, on

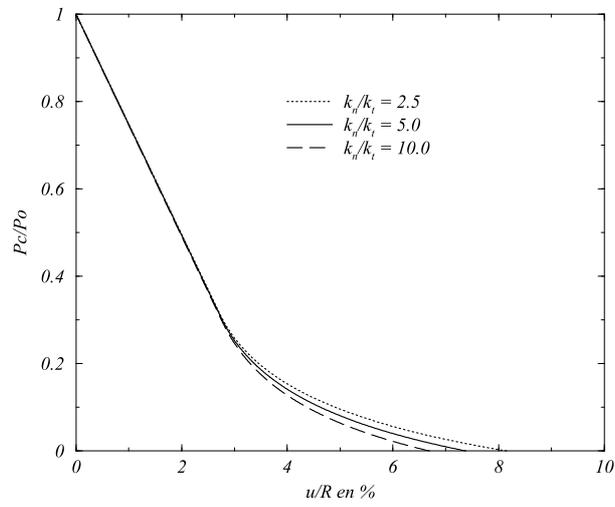


FIG. 10: Influence de la rigidité des joints (Coulomb)

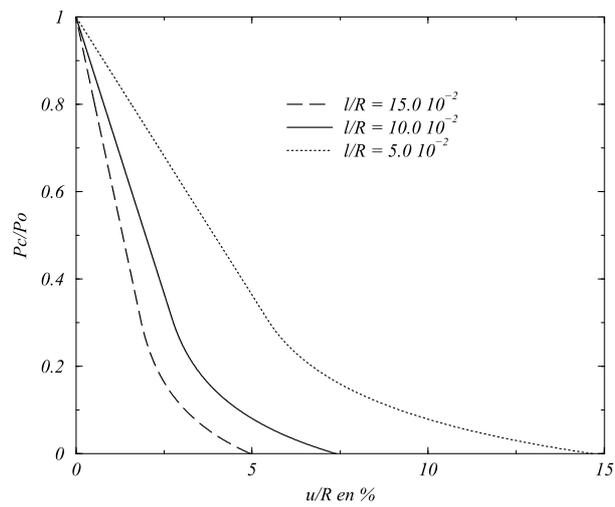


FIG. 11: Influence de l'espacement des joints (Coulomb)

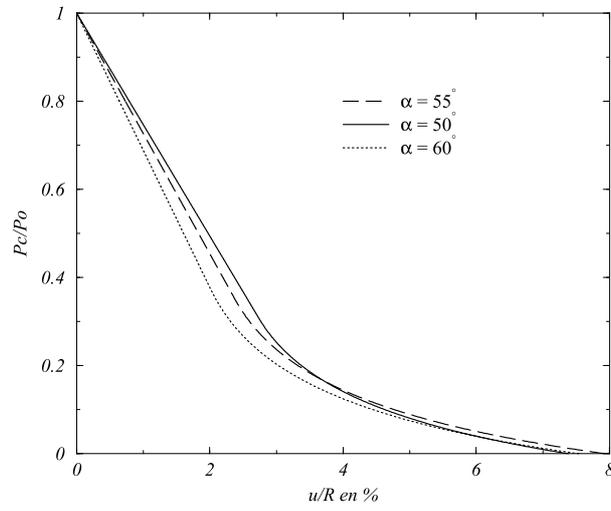


FIG. 12: Influence de l'orientation des joints (Coulomb)

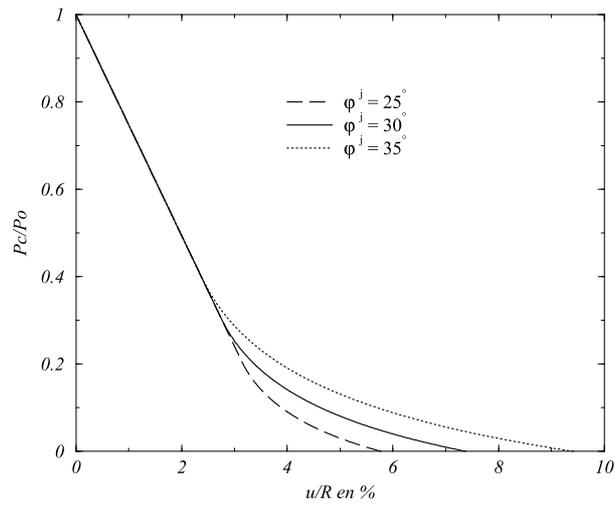


FIG. 13: Influence de l'angle de frottement interne des joints (Coulomb)

montre par une étude paramétrique que pour l'orientation de référence $\alpha = 50^\circ$, $\bar{\mu}$ est *indépendant* du rapport k_n/k_t . Cette indépendance se perd lorsque l'orientation est plus faible.

La convergence croît avec l'angle de frottement interne et décroît en fonction de la cohésion et de l'espacement.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Amadei B., Saeb S., 1990. *Constitutive models of rock joints*, Proc. Int. Symp. Rock Joints, Loen, Norway, pp. 587-594.

Bandis S.C., Lumbdsen A.C., Barton N.R., 1983. *Fundamentals of rock joint deformation*, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 20, n°6, pp. 249-268.

Barton N., 1973. *Review of a new shear strength criterion for rock joint*, Engineering geology, Vol. 7, pp. 287-332.

Barton N., Lien R., Lunde J., 1974. *Engineering Classification of Rocks Masses for the Design of Tunnel Support*, Rock Mechanics, Vol. 6, pp. 189-236.

Barton N., Choubey V., 1977. *The shear strength of rock joints in theory and practice*, Rock Mechanics, Vol. 10, pp. 1-54.

Batoz J.L. et Dhatt G., 1995. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, Paris.

Bazant Z.P. and Prat P., 1988. *Microplane model for brittle plastic material I. Theory II. Verification*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 114 : pp 1672-1702.

Belytschko T., Liu W.K. and Moran B. 2000 *Nonlinear Finite Element for Continua and Structures* John Wiley and Sons Ltd, Chichester.

Bornert M., Bretheau T. et Gilormini P. 2001 (sous la direction de) *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux 1 et 2* Hermès Sciences Publications, Paris.

Bekaert A. and Maghous S., 1996. *Three-dimensional yield strength properties of jointed rock mass as a homogenized medium*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1, 1-24.

Benjelloun Zahar H., 1991. *Etude expérimentale et modélisation du comportement hydro-mécanique des joints rocheux*, Thèse de l'Université de J. Fourier, Grenoble.

Bieniawski Z. T., 1973. *Engineering classification of jointed rock masses*, Trans. S. Afr. Instn. Civ. Engrs, Vol. 15, n°12, pp. 335-344.

Bieniawski Z. T., 1974. *Rock mechanics design in mining and tunneling*, A.A. Balkema, Rotterdam.

Bieniawski Z. T., 1979. *The Geomechanics Classification of rock masses and its application in tunneling*, Proc. 3rd Congr. Int. Soc. Rock Mech., Denver, Vol. 2, part A, pp. 27-32.

de Buhan P., 1986. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse Doctorat d'Etat, Université Paris VI, Paris.

de Buhan P. et Maghous S., 1997. *Comportement élastique non linéaire macroscopique d'un matériau comportant un réseau de joints*. C. R. Acad. Sci. Paris, 324, série II b, 209-218.

de Buhan P., Fréard J., Garnier D., Maghous S. *Failure properties of fractured rock masses as anisotropic homogenized media*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 128(8), 869-875.

Crisfield M.A., 1991. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2 : Advanced topics, John Wiley & Sons.

Cundall P.A., 1971. *A computer model for simulation progressive, large scale movements in blocky rock systems*, Int. Symp. on rock fracture ISRM, Nancy (France), Vol. 1, paper n° II-8.

Deere D.U., 1964. *Technical description of rock cores for engineering purposes*, Rock Mechanics and Rock Engineering, Vol. 1, pp, 17-22.

Deudé V., Dormieux L., Kondo D., Pensée V., 2002-a. *Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, IIb, 147-152.

Deudé V., Dormieux L., Kondo D., Maghous S., 2002-b. *Micromechanical approach to non linear poroelasticity - Application to cracked rocks*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 128(8), 848-855.

Dormieux L., Kondo D., 2004. *Approche micromécanique du couplage perméabilité - endommagement*. C. R. Mécanique, t. 332/2, 135-140.

Duffaut P., coordinateur, *Manuel de Mécanique des Roches Vol.1 : Fondements (2000) Vol.2 : Les Applications(2004)* Presses de l'École des Mines de Paris.

Fréard J., 2000. *Analyse de la stabilité des massifs rocheux fracturés par une méthode d'homogénéisation*, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Goodman R.E., 1974. *The mechanical properties of joints*, Proc. 3rd Cong. ISRM, Denver, vol. 1A, pp. 127-140.

Goodman R.E., 1976. *Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rock*, New York, West Publishing Compagny Goodman.

Goodman R.E., Bray J.W., 1976. *Toppling of rock slopes in rock engineering for foundations and slopes*, Special conference ASCE, Boulder, Colorado, Vol. 2, pp. 2001-234.

Goodman R.E., Shi G.H., 1985. *Block theory and its application to rock engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Goodman R.E., Shi G.H., 1989. *The key block of unrolled joint traces in developed maps of tunnel walls*, Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 13, pp. 131-158.

Halphen B. et Salenç J., 1987. *Elasto-plasticité*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Hart R., Cundall P.A., Lemos, 1988. *Formulation of a three-dimensional distinct element model - Part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 25, n°3, pp. 117-125.

Hill R., 1967. *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids, 15, 79-95.

Hoek E., 1968. *Brittle fracture of rock*, Rock Mechanics in Engineering Practice, John Wiley & Sons, London, pp. 93-124.

Hoek E., Brown E.T., 1980. *Empirical strength criterion for rock masses*, J. Geotech. Engrg. Div. Am. Soc. Civ. Engrs, Vol. 106, GT9, pp. 1013-1035.

Hoek E., 1983. *Strength of jointed rock masses*, Geotechnique 33, n°3, pp. 187-223.

Hoek E. and Brown E.T., 1988. *The Hoek-Brown failure criterion - a 1988 update*. Proc. 15th Canadian Rock Mechanics Symposium, Toronto, 31-38.

Hoek E. and Brown E.T., 1992. *A modified Hoek-Brown failure criterion for jointed rock masses*. Eurock'92, Thomas telford, London.

Hoek E., Carranza-Torres C. and Corkum B. 2002 *Hoek-Brown failure Criterion* In NARMS-TAC 2002, Hammah et al.(eds)University of Toronto, CANADA.

Hudson J.A., Editor-in Chief, 1994 *COMPREHENSIVE ROCK ENGINEERING, Principles, Practice and Projects. Vol.1 : Fundamentals, Vol.2 : Analysis and Design Methods, Vol.3 : Rock Testing and Characterization, Vol.4 : Excavation, Support and Monitoring, Vol.5 : Surface and Underground Project Case Histories* Pergamon Press, Oxford.

Maghous S., de Buhan P., Dormieux L., 2002. *Non-linear global elastic behaviour of a periodically jointed material*. Mechanics Research Communications, 29, 45-51.

Maghous S., de Buhan P. and Bekaert A., 1998. *Failure design of jointed rock structures by means of a homogenization approach*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 3, 207-228.

Mandel J., 1972. *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM lectures notes n° 97, Springer-Verlag.

Murrell S.A., 1965. *The effect of triaxial stress system on the strength of rock at atmospheric temperatures*, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Vol. 10, pp. 231-281.

Nemat-Nasser S. and Hori M., 1993 *Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials* North-Holland, Amsterdam.

Nguyen Q.S., 1977. *On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration*. Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, 817-832.

Nguyen T.S., Selvadurai A.P.S., 1998. *A model for coupled mechanical and hydraulic behaviour of a rock joint*, Int. J. Numer. Anal. Methods geomech., Vol. 22, pp. 29-48.

Owen J. and Hinton E., 1980. *Finite element in plasticity - Theory and practice*. Pine-bridge press.

Pande G.N., Beer G. and Williams J.R. 1990 *Numerical Methods in Rock Mechanics* John

Wiley and Sons, Chichester.

Panet M., 1995. *Le calcul des tunnels par la méthode convergence-confinement*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Pensée V., Dormieux L., Kondo D., Deudé V., 2002-a. *Poroélasticité d'un milieu mésosif-suré*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, IIb, 1-8.

Pensée V., Kondo D., Dormieux L., 2002-b. *A micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 128(8), 889-897.

Plesha M.E., 1987. *Constitutive models for rock discontinuities with dilatancy and surface degradation*, Int. J. Numer. Anal. Methods geomech., Vol. 11, pp. 345-362.

Salençon J., 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Salençon J., 1990. *An introduction to the yield design theory and its application to soils mechanics*. Eur. J. Mech. A/Solids, 9(5), 477-500.

Sanchez-Palencia E., 1980. *Non homogeneous media and vibration theory*. Lectures Notes in Physics, 127, Springer Verlag, Berlin.

Souley M., 1993. *Modélisation des massifs rocheux fracturés par la méthode des éléments distincts : Influence de la loi de comportement des discontinuités sur la stabilité des ouvrages*, Thèse de l'I.N.P.L., Nancy.

Simo J.C. and Hughes T.J.R. 1998 *Computational Inelasticity* Springer-Verlag, New-York, Inc.

Suquet P., 1982. *Plasticité et homogénéisation*, Thèse Doctorat d'Etat, Université Paris VI, Paris.

Suquet P., 1983. *Analyse limite et homogénéisation*. C. R. Acad. Sc., Paris, 296, 1355-1358.

Suquet P., 1985. *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*. Proceeding of the CISM lectures : Homogenization techniques for composite media, Springer-Verlag.

Tahiri A., 1992. *Modélisation des massifs rocheux fissurés par la méthode des éléments*

distincts, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Touzot G. et Dhatt G., 1984. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, Paris.

Warburton P.M., 1980. *A stereological interpretation of joint data trace*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., vol. 17, pp. 181-190.

Warburton P.M., 1981. *Vector stability analysis of an arbitrary polyhedral rock block with any number of free faces*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., vol. 18, pp. 415-427.

Wyllie D.C. 1992 *Foundations on Rocks* E & FN SPON, London 1992.

Xiao B., Carter J.P. and Alhossein H., 1994. *Elastoplastic analysis of jointed rocks using a coupled finite element and boundary element method*. Int. J. Numer. Analytical Methods Geomech., 18, 445-466.

Yu H.S. and Sloan S.W., 1994. *Bearing capacity of jointed rock*. Proceeding of 8th Int. Conference : Computer Methods and Advances in Geomech., 2403-2408, West Virginia, May 1994, Balkema Publishers.

Zaoui A., 1998. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'École Polytechnique, France.

Zienkiewicz O.C. and Pande G.N., 1977. *Time dependent multilaminar model of rocks—a numerical study of deformation and failure of rock masses*. International J. Num. Analt. Meth. Geomech. vol.1 pp.219–247.

Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., 1994a. *The finite element method*. vol. 1, McGraw-Hill.

Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., 1994b. *The finite element method - Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*. vol. 2, McGraw-Hill.