



**HAL**  
open science

# Modélisation du gonflement des argiles et de ses effets sur les ouvrages de stockage souterrain.

Jérôme Gaombalet

► **To cite this version:**

Jérôme Gaombalet. Modélisation du gonflement des argiles et de ses effets sur les ouvrages de stockage souterrain.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 2004. Français. NNT: . pastel-00000854

**HAL Id: pastel-00000854**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00000854>**

Submitted on 29 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée en vue de l'obtention du titre de

**Docteur de l'Ecole Polytechnique**

Spécialité :  
Mécanique

par

**Jérôme GAOMBALET**

Sujet de la thèse :

**LE GONFLEMENT DES ARGILES ET SES EFFETS  
SUR LES OUVRAGES SOUTERRAINS DE STOCKAGE**

Soutenue le 26 mars 2004 devant le jury composé de Messieurs :

Pierre BEREST	Président
Olivier COUSSY	Rapporteur
Isam SHAHROUR	Rapporteur
Hormoz MODARESSI	Examineur
Alain MILLARD	Examineur
Ahmad POUYA	Directeur de thèse



# REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé dans la préparation de cette thèse.*

*Tout d'abord, je voudrais remercier Mehdi Ghoreychi qui, en tant que directeur du G.3S à l'époque, m'y a accueilli quand je cherchais un stage de D.E.A., puis, un an après, m'y a proposé un poste passionnant d'ingénieur numéricien. Plus tard, c'est lui qui m'a soufflé l'idée de travailler sur le phénomène de gonflement. Mes travaux ont beaucoup bénéficié de son approche concrète et pragmatique de la mécanique des roches. Je lui dois beaucoup.*

*Pierre Bérest, qui l'a remplacé à la direction de G.3S, m'a encouragé et a accepté que je libère une partie de mon temps de travail d'ingénieur pour me consacrer à mes travaux pourtant en marge des contrats que nous effectuions. Je l'en remercie. Il m'a par ailleurs fait l'honneur de présider mon jury, ce qui me touche profondément.*

*J'en profite pour remercier les autres membres de mon jury de thèse. Isam Shahrouf et Olivier Coussy ont accepté d'être rapporteur de mes travaux. Cette rude tâche leur a été infligée pendant les vacances de Noël ; j'en suis désolé, et je les remercie pour leur lecture minutieuse. M. Coussy a par ailleurs proposé que nous discutions de certains points un mois avant ma soutenance. Il m'a beaucoup éclairé, et je lui en suis très reconnaissant. Ses remarques encourageantes sur mon travail m'ont rempli de fierté. Enfin, je remercie vivement MM. Hormoz Modaressi et Alain Millard qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury.*

*Ma compréhension du phénomène de gonflement au niveau le plus fin doit beaucoup aux discussions approfondies que j'ai eues avec Muriel Barbier-Gasc et Philippe Cosenza. Je leur exprime ici toute ma gratitude.*

*Ma thèse n'aurait pu se faire sans le soutien des membres de G.3S ou du L.M.S. Je voudrais remercier d'abord Kun Su, Pirouz Navidi et Habibou Maitournam pour leur aide précieuse en programmation, Hanan Kharkhour pour son opiniâtreté aussi communicative que sa bonne humeur et les nombreuses discussions que nous avons eues sur les argiles raidées, Ayumi Kurose et Laurent Malinsky pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans la préparation de la soutenance, Serge Chanchole pour ses conseils précieux et ses explications claires des protocoles expérimentaux. Un grand merci aussi à Sophie Keyser et Liliane Quéru pour leur aide et leur gentillesse quotidienne. Je n'oublierai pas les autres, sans qui le G.3S n'aurait pas été un lieu si sympathique : Behrooz Bazargan, François Coste, Stéphane Vahida, Anis Bounenni, Rose Hamza, Pierre Valli, Daniel Théval et René Herbez.*

*Je voudrais également remercier Pierre Habib, président du G.I.P. G.3S au moment où j'ai commencé cette thèse, pour les conseils éclairants qu'il m'a donnés. Quand, aux deux tiers de ma thèse, j'ai dû quitter G.3S pour aller travailler à l'Andra, il m'a donné un dernier conseil, très simple, sous la forme d'un ordre : celui de finir à tout prix ce travail de thèse, au risque sinon de le regretter ma vie entière. Pierre, je te remercie de m'avoir accordé ta confiance.*

*Ahmad Pouya a dirigé ma thèse, après avoir dirigé mon stage de D.E.A.. Il fallait bien que ce soit lui et pas un autre, pour me permettre de terminer ce travail. Il a su m'insuffler son énergie et sa détermination dans les moments difficiles et me guider vers les questions qui méritaient attention. Ses conseils, tant au niveau de la physique que des mathématiques, prodigués aux étapes clefs de mes travaux, ont été plus que nécessaires. Je tiens à le remercier pour tout ce qu'il m'a apporté. Ahmad, merci et encore merci.*

*Enfin, un énorme merci à ma famille. Une bonne partie de cette thèse s'est déroulée après mon départ de G.3S, et donc chez moi. Je sais que cela a été dur parfois pour vous trois, et je vous remercie de tout mon cœur pour votre aide et votre amour. Une mention spéciale pour Gaspard et ses « dessins-courage » (trois ans et demi à l'époque des faits). Catherine, Gaspard et Violette, merci. Merci aussi à mes parents et à ceux de Catherine, ainsi qu'aux amis qui m'ont soutenu dans les derniers mois.*



# TABLE DES MATIERES

<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>3</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX .....</b>	<b>7</b>
<b>LISTE DES FIGURES.....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>13</b>
<b>CHAPITRE I STOCKAGE SOUTERRAIN DE DECHETS RADIOACTIFS .....</b>	<b>17</b>
I.1 PROBLEMATIQUE .....	17
I.2 LE CONCEPT DE STOCKAGE SOUTERRAIN .....	18
I.2.1 Site de stockage souterrain.....	18
I.2.2 Le système de confinement.....	20
I.3 VERS LE CHOIX D'UN SITE.....	20
I.3.1 Les critères de choix.....	20
I.3.2 Les étapes du choix.....	21
I.3.3 Les sites favorables.....	21
I.4 L'ARGILE DANS LE STOCKAGE .....	24
I.4.1 Le milieu géologique .....	24
I.4.2 Les barrières ouvragées .....	25
I.5 CONCLUSION.....	26
<b>CHAPITRE II LES ARGILES.....</b>	<b>29</b>
II.1 PRESENTATION .....	29
II.2 MICROSTRUCTURE ET INTERACTION AVEC L'EAU .....	30
II.2.1 Microstructure des argiles .....	30
II.2.2 L'interaction eau-argile .....	36
II.3 PROPRIETES MACROSCOPIQUES .....	37
II.3.1 Argiles tendres et argiles raides.....	37
II.3.2 Propriétés mécaniques caractéristiques des argiles .....	38
II.3.3 L'argile en tant que milieu poreux.....	39
II.3.4 Gonflement, retrait et dessiccation.....	40
II.3.5 Conclusion.....	42
<b>CHAPITRE III MODELES DE COMPORTEMENT THM DES ARGILES .....</b>	<b>43</b>
III.1 INTRODUCTION .....	43
III.2 HYPOTHESES .....	44
III.3 EQUATION D'EQUILIBRE MECANIQUE .....	44
III.4 ELASTICITE.....	45
III.4.1 Loi de comportement élastique.....	45
III.4.2 Poroélasticité .....	45
III.4.3 Loi de comportement et paramètres poroélastiques.....	50
III.5 COMPORTEMENT IRREVERSIBLE INSTANTANE DES ARGILES .....	52
III.5.1 Notations.....	52
III.5.2 Modèles d'élastoplasticité pour les argiles plastiques.....	57
III.5.3 Endommagement et rupture des argiles raides .....	61
III.6 COMPORTEMENT DIFFERE : VISCOPLASTICITE.....	69
III.7 PHENOMENES THERMIQUES .....	73
III.8 ASPECTS HYDRAULIQUES.....	73
III.8.1 Diffusion de fluide en milieu poreux saturé .....	74
III.8.2 Transport.....	79
III.9 ARGILITES DE L'EST .....	80
III.9.1 Caractéristiques poroélastiques des argilites .....	81
III.9.2 Endommagement et rupture .....	83
III.9.3 Comportement différé.....	94

III.10	ARGILE DE BOOM.....	99
III.10.1	Modèle de Rousset.....	100
III.10.2	Modèle du SCK/CEN.....	102
III.11	ARGILE REMANIEE POUR BARRIERES OUVRAGEES .....	103
III.11.1	Objectif.....	103
III.11.2	Difficultés .....	104
III.11.3	Modèle « ingénieur ».....	105
III.12	CONCLUSION .....	108
<b>CHAPITRE IV GONFLEMENT DES ARGILES.....</b>		<b>111</b>
IV.1	INTRODUCTION .....	111
IV.2	ARGILES ET CONTRAINTES EFFECTIVES.....	111
IV.2.1	Mise en évidence du phénomène de gonflement-retrait .....	112
IV.2.2	Gonflement et pression osmotique.....	113
IV.2.3	Le gonflement selon la théorie de la double couche diffuse (DCD).....	118
IV.2.4	Forces de répulsion et d'attraction.....	123
IV.2.5	Gonflement et réorganisation.....	126
IV.2.6	Gonflement libre et pression de gonflement.....	127
IV.3	MODELE PROPOSE.....	131
IV.3.1	Choix d'un modèle « utilisable ».....	131
IV.3.2	Théorie de la double couche .....	132
IV.3.3	Cas de feuillets parallèles : potentiel et pression de gonflement .....	137
IV.3.4	Loi de gonflement microscopique.....	158
IV.3.5	Passage micro-macro.....	161
IV.3.6	Contrainte effective .....	162
IV.3.7	Loi de comportement macroscopique.....	163
IV.4	CONCLUSION .....	165
<b>CHAPITRE V PROBLEMATIQUE DU TRANSFERT.....</b>		<b>167</b>
V.1	LES TRANSFERTS POSSIBLES .....	167
V.2	PRECISIONS SUR LE PROBLEME POSE.....	168
V.3	DIFFICULTE THEORIQUE.....	169
V.4	DEMARCHE THERMODYNAMIQUE GENERALE.....	171
V.5	CINEMATIQUE ET OUTILS MATHEMATIQUES.....	173
V.6	PREMIERE APPROCHE : LA « THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX POREUX ».....	175
V.6.1	Présentation .....	175
V.6.2	Obtention d'un système fermé .....	175
V.6.3	Formulation rattachée au squelette.....	177
V.6.4	Démarche thermodynamique .....	177
V.6.5	Intervention de la mécanique pour le calcul de $P_{ext}$ .....	178
V.6.6	Application des deux principes thermodynamiques .....	181
V.6.7	Inégalité de Clausius-Duhem .....	183
V.7	DEUXIEME APPROCHE : LA THEORIE DES MELANGES .....	186
V.7.1	Démarche thermodynamique .....	187
V.7.2	Vitesse barycentrique et extension du premier principe de la thermodynamique .....	187
V.7.3	Application du premier principe et approximations.....	189
V.7.4	Relation de Gibbs et second principe de la thermodynamique .....	192
V.7.5	Remarque .....	194
V.8	DISCUSSION ET MODELE PROPOSE.....	195
V.8.1	Comparaison des formules.....	195
V.8.2	Discussion .....	196
V.8.3	Modèle proposé.....	199
V.8.4	Conséquences.....	204
V.8.5	Relations phénoménologiques.....	205
V.8.6	Principe d'aboutissement aux lois de transport.....	206
<b>CHAPITRE VI APPLICATIONS NUMERIQUES.....</b>		<b>207</b>
VI.1	INTRODUCTION .....	207
VI.2	LE CODE DE CALCUL ANTHYC .....	207
VI.2.1	Les Volumes Finis dans Anthyc.....	209

VI.2.2	<i>Possibilités du code</i> .....	212
VI.2.3	<i>Conclusion</i> .....	214
VI.3	GONFLEMENT D'UNE B.O. EN ARGILE GONFLANTE.....	215
VI.3.1	<i>Matériaux</i> .....	216
VI.3.2	<i>Géométrie et maillage</i> .....	219
VI.3.3	<i>Phasage des calculs, conditions initiales et aux limites</i> .....	220
VI.3.4	<i>Etude</i> .....	223
VI.3.5	<i>Calcul en poroélasticité (non linéaire)</i> .....	224
VI.3.6	<i>Prise en compte de la chimie – massif élastique</i> .....	228
VI.3.7	<i>Endommagement du massif : plasticité parfaite</i> .....	234
VI.3.8	<i>Massif viscoplastique</i> .....	241
VI.4	CAS D'UN MASSIF EN RUPTURE.....	242
VI.4.1	<i>Loi de comportement du massif</i> .....	243
VI.4.2	<i>Creusement</i> .....	243
VI.4.3	<i>Evolution avant la date t=10 ans</i> .....	244
VI.4.4	<i>Evolution après la date t=10 ans</i> .....	245
VI.5	CONCLUSION.....	248
	<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>249</b>
	<b>SELECTION BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	<b>253</b>
	<b>ANNEXE A</b> .....	<b>261</b>
	<b>ANNEXE B</b> .....	<b>267</b>
	<b>ANNEXE C</b> .....	<b>286</b>
	<b>ANNEXE D</b> .....	<b>289</b>
	<b>ANNEXE E</b> .....	<b>297</b>





## LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU III-1 : PARAMETRES POROELASTIQUES DES ARGILITES DE L'EST .....	82
TABLEAU III-2 : PARAMETRES DES CRITERES DE HOEK ET BROWN IDENTIFIES POUR LA RUPTURE ET L'INITIATION DE L'ENDOMMAGEMENT DES ARGILITES DE L'EST.....	84
TABLEAU III-3 : PARAMETRES DES CRITERES IDENTIFIES PAR G.3S POUR L'INITIATION DE L'ENDOMMAGEMENT, LA RUPTURE ET LA RESISTANCE RESIDUELLE DES ARGILITES DE L'EST.....	86
TABLEAU III-4 : PARAMETRES POUR LA PART VISCOPLASTIQUE DE L'ARGILE DE BOOM (SELON DJERAN ET AL. 1994).....	102
TABLEAU III-5 : PARAMETRES DU MODELE DE CAM-CLAY MODIFIE POUR L'ARGILE DE BOOM (MOL, BELGIQUE) .....	103
TABLEAU III-6 : PARAMETRES DU MODELE DE TYPE CAM-CLAY MODIFIE MIS AU POINT POUR L'ARGILE FO-CA, AVEC DEPENDANCE VIS-A-VIS DU DEGRE DE SATURATION.....	107
TABLEAU IV-1 : SENSIBILITE DANS LE CAS D'UN AJUSTEMENT DU POTENTIEL.....	152



## LISTE DES FIGURES

FIGURE I-1 : EXEMPLE D'ARCHITECTURE D'ENSEMBLE DES INSTALLATIONS SOUTERRAINES DE STOCKAGE.....	19
FIGURE I-2 : SCHEMA DE PRINCIPE DU LABORATOIRE SOUTERRAIN DE BURE, DANS LA MEUSE (SOURCE : QUOTIDIEN OUEST-FRANCE). .....	24
FIGURE I-3 : SCHEMA DE LA BARRIERE OUVRAGEE ARGILEUSE, CONSTITUEE DE BLOCS. ....	26
FIGURE II-1 : A) UNITE TETRAEDRIQUE A CŒUR DE SILICIUM; B) SCHEMA D'UNE COUCHE DE TETRAEDRE [Si4 O10 (OH)2]6- AVEC ARRANGEMENT HEXAGONAL. ....	31
FIGURE II-2 : A) UNITE OCTAEDRIQUE B) STRUCTURE EN COUCHE A BASE D'OCTAEDRE DE BRUCITE Mg(OH)2 OU DE GIBBSITE Al(OH)3. ....	32
FIGURE II-3: ASSEMBLAGE D'UNE COUCHE OCTAEDRIQUE ET D'UNE COUCHE TETRAEDRIQUE POUR UNE ARGILE TO (1:1). ....	32
FIGURE II-4 : REPRESENTATION SCHEMATIQUE DE QUELQUES GROUPES DE MINERAUX ARGILEUX TO (1:1) ET TOT (2:1). ....	34
FIGURE II-5 : DESCRIPTION DES DIFFERENTS NIVEAUX DE POROSITE DANS LES ARGILES (D'APRES GRIFFITH ET JOS, 1991). ....	36
FIGURE II-6 : COURBES SCHEMATIQUES ISSUES D'UN ESSAI DE GONFLEMENT-RETRAIT LIBRE : (A): INDICE DE VIDES-INDICE D'EAU , (B) : TENEUR EN EAU-SUCCION ;(C) : COURBE DE RETENTION (SORPTION-DESORPTION). ....	41
FIGURE III-1 : RESULTAT TYPIQUE D'UN ESSAI TRIAXIAL SUR UNE ARGILE PLASTIQUE.....	52
FIGURE III-2 : COURBE SCHEMATIQUE D'UN RESULTAT D'ESSAI DE COMPRESSION SUR UNE ARGILE PEU COMPACTEE. ....	58
FIGURE III-3 : SURFACE DE CHARGE DU MODELE DE CAM-CLAY DANS LE DIAGRAMME PQ.....	59
FIGURE III-4 : SCHEMA DES PHASES DE COMPORTEMENT D'UNE ROCHE LORS D'UN ESSAI DE COMPRESSION UNIAXIALE OU TRIAXIALE.....	62
FIGURE III-5 : CRITERE TYPIQUE D'INITIATION DE L'ENDOMMAGEMENT OU DE RUPTURE DES ARGILES RAIDES DANS LE PLAN (P,Q).....	63
FIGURE III-6 : SCHEMA D'UNE COURBE DE FLUAGE MONOPALIER PRESENTANT LES TROIS PHASES DE FLUAGE.....	71
FIGURE III-7 : VISUALISATION DANS L'ESPACE DES CONTRAINTES PRINCIPALES DU CRITERE CARACTERISTIQUE DE HOEK ET BROWN DEFINI POUR LES ARGILITES DE L'EST ; (A) VUE GLOBALE ; (B) SECTION DANS LE PLAN DEVIATORIQUE P=CONSTANTE.....	85
FIGURE III-8 : VISUALISATION DANS L'ESPACE DES CONTRAINTES PRINCIPALES DU CRITERE MINIMUM DEFINI PAR G.3S POUR LES ARGILITES DE L'EST ; (A) VUE GLOBALE ; (B) SECTION DANS LE PLAN DEVIATORIQUE P=CONSTANTE. ....	87
FIGURE III-9 : CRITERES D'INITIATION DE L'ENDOMMAGEMENT DES ARGILITES DE L'EST DANS LE PLAN (P,Q).....	88
FIGURE III-10 : CONTRAINTES PRINCIPALES APRES CREUSEMENT POUR LE CRITERE DE H&B. ....	89
FIGURE III-11 : CONTRAINTES PRINCIPALES APRES CREUSEMENT POUR LE CRITERE D'INITIATION DE L'ENDOMMAGEMENT DE G3S (CRITERE ELASTOPLASTIQUE PARFAIT). ....	89
FIGURE III-12 : CRITERES MINIMAUX D'INITIATION DE L'ENDOMMAGEMENT, .....	90
FIGURE III-13 : EVOLUTION DE LA LIMITE D'ELASTICITE ENTRE RUPTURE ET ETAT RESIDUEL ; ECROUISSAGE NEGATIF.....	92
FIGURE III-14 : CONTRAINTES PRINCIPALES APRES CREUSEMENT AVEC LA LOI D'ENDOMMAGEMENT ET DE RUPTURE DE G3S COMPLETE. ....	94
FIGURE III-15 : RESULTATS D'UN ESSAI DE FLUAGE MULTIPALIER SUR UN ECHANTILLON D'ARGILITE. ....	95
FIGURE III-16 : CONTRAINTES PRINCIPALES APRES 100 ANS AVEC LA LOI DE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE DES ARGILITES DE L'EST (AVEC LES PARAMETRES DE LA LOI DE 1999). ....	98
FIGURE III-17 : CONTRAINTES PRINCIPALES APRES 100 ANS AVEC LE MODELE COMPLET ELASTOVISCOPLASTIQUE AVEC ENDOMMAGEMENT ET RUPTURE POUR LES ARGILITES. ....	99
FIGURE III-18 : VARIATION DU SEUIL VISCOPLASTIQUE AVEC LE PARAMETRE D'ECROUISSAGE.....	102
FIGURE III-19 : COURBE DE RETENTION DE L'ARGILE FO-CA OBTENUE PAR LE MODELE .....	106

FIGURE III-20 : COMPARAISON D'UN CALCUL EFFECTUE AVEC LE MODELE DE CAM-CLAY MODIFIE POUR LA B.O. ET LES RESULTATS EXPERIMENTAUX. ....	107
FIGURE III-21 : EVOLUTION DU PRODUIT BS AVEC LA SUCCION S, POUR LE MODELE DE CAM-CLAY MODIFIE DE LA B.O.....	108
FIGURE IV-1 : DECOMPOSITION DE LA SUCCION EN COMPOSANTES MATRICIELLE ET OSMOTIQUE. ....	115
FIGURE IV-2: DISTRIBUTION DES IONS PRES DE LA SURFACE DES CRISTALLITES SELON LA THEORIE DE LA DOUBLE COUCHE (D'APRES MITCHELL, 1993).....	133
FIGURE IV-3: DECROISSANCE DU POTENTIEL ELECTRIQUE EN FONCTION DE LA DISTANCE AU FEUILLET. (A)ABSCISSE X. (B) ECHELLE LOG POUR L'ABSCISSE. ....	137
FIGURE IV-4 : DISTRIBUTION DU POTENTIEL ELECTRIQUE ENTRE DEUX FEUILLETS PARALLELES.....	138
FIGURE IV-5 : EVOLUTION DE LA PRESSION DE GONFLEMENT AVEC LA DISTANCE INTERFEUILLETS 2H. ....	142
FIGURE IV-6 : RAPPORT, POUR PLUSIEURS VALEURS DE POTENTIEL EN SURFACE, DE LA PRESSION DE GONFLEMENT APPROXIMEE AUX GRANDES VALEURS DE H SUR LA PRESSION FICTIVE OBTENUE DANS LE CAS D'UN SEUL FEUILLET. ....	144
FIGURE IV-7 : PRESSION DE GONFLEMENT CALCULEE POUR $\Gamma=0,1C/m^2$ ET $C=0,1M$ . COMPARAISON AVEC LES APPROXIMATIONS $P^{h \rightarrow \infty}$ ET $P^{h \rightarrow 0}$ .....	146
FIGURE IV-8 : PRESSIONS DE GONFLEMENT .....	147
FIGURE IV-9 : POTENTIELS MILIEU FONCTION DE $\zeta = \frac{hC}{\Gamma}$ (CAS D'IONS MONOVALENTS). SUPERPOSITION DES COURBES POUR UN MEME RAPPORT $C/\Gamma^2$ .....	148
FIGURE IV-10 : ENCADREMENT DU POTENTIEL MILIEU .....	152
FIGURE IV-11 : RAPPORT $\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$ EN FONCTION DE LA MI-DISTANCE H, DANS LE CAS D'UNE CHARGE SURFACIQUE $\Gamma = -0,1C/m^2$ ET POUR DIFFERENTES CONCENTRATIONS ENTRE 1MOL/L ET $10^{-5}$ MOL/L.....	153
FIGURE IV-12 : PRESSION DE GONFLEMENT EN FONCTION DE LA MI-DISTANCE H, DANS LE CAS D'UNE CHARGE SURFACIQUE $\Gamma = -0,1C/m^2$ ET POUR DIFFERENTES CONCENTRATIONS ENTRE 1 MOL/L ET $10^{-5}$ MOL/L. ...	154
FIGURE IV-13 : RAPPORT $P_{gft}/P^{sin gle}$ OBTENU POUR $\Gamma = -0,1C/m^2$ , AVEC DEUX VALEURS DE LA CONCENTRATION. ....	155
FIGURE IV-14 : EVOLUTION DU PARAMETRE $\gamma$ AVEC LE RAPPORT $C/\Gamma^2$ .....	156
FIGURE IV-15 : EVOLUTION DE $P_{gft}$ EN FONCTION DE $C$ POUR PLUSIEURS MI-DISTANCES $h$ ENTRE FEUILLETS. ....	158
FIGURE IV-16 : EVOLUTION DE LA PRESSION DE GONFLEMENT AVEC $C$ (EN MOL/L) ET H (EN M), POUR UNE CHARGE DE FEUILLETS $\Gamma = 0,1C/m^2$ (CAS D'IONS MONOVALENTS). ....	159
FIGURE IV-17 : PRESSION DE GONFLEMENT EN FONCTION DE H POUR $C=0,001MOL/L$ ; INFLUENCE DE LA CHARGE DE SURFACE.....	159
FIGURE IV-18 : EVOLUTION DE LA MI-DISTANCE INTERFEUILLETS H AVEC LA CONCENTRATION, EN FONCTION DES FORCES D'ATTRACTION, DANS UNE EXPERIENCE DE GONFLEMENT LIBRE (LA PRESSION DE GONFLEMENT MICROSCOPIQUE RESTE CONSTANTE).....	161
FIGURE VI-1 : CHOIX POSSIBLES DES CELLULES ET DES NOEUDS DE CALCUL EN VF.....	210
FIGURE VI-2 : EVOLUTION DE L'INDICE DES VIDES DANS DES CYCLES DE CHARGE-DECHARGE MECANIQUE ET HYDRIQUE OBTENUE AVEC LE MODELE NON LINEAIRE EN PUISSANCE. COMPARAISON A UN RESULTAT D'ESSAI SUR L'ARGILE FO-CA.....	218
FIGURE VI-3 : MODELE 2D AXISYMETRIQUE .....	219
FIGURE VI-4 : MAILLAGE UTILISE (ZOOM) POUR L'ETUDE DU GONFLEMENT-RETRAIT DE LA B.O. VISUALISATION DES ZONES CORRESPONDANT AUX DIFFERENTS MATERIAUX.....	219
FIGURE VI-5 : SCHEMA DU PHASAGE, ET MATERIAUX « ACTIVES » CORRESPONDANTS .....	221
FIGURE VI-6 : CONDITIONS AUX LIMITES POUR L'ENSEMBLE DES CALCULS.....	223
FIGURE VI-7 : EVOLUTION EN FONCTION DU TEMPS DE LA PRESSION DE PORES EN TROIS POINTS DE LA BARRIERE OUVRAGEE (CALCUL POROELASTIQUE).....	224
FIGURE VI-8 : COUPES DU CHAMP DE PRESSION A DIFFERENTES DATES(CALCUL POROELASTIQUE). ....	225
FIGURE VI-9 : COMPOSANTES PRINCIPALES DU CHAMP DE CONTRAINTES A L'ISSUE DU CREUSEMENT ELASTIQUE(CALCUL POROELASTIQUE).....	226

FIGURE VI-10 : COUPES DES CONTRAINTES A DIFFERENTES DATES (CALCUL POROELASTIQUE).....	227
FIGURE VI-11 : EVOLUTION DE LA CONTRAINTE RADIALE DANS LA B.O. (A R = 0,8 R <sub>i</sub> ).....	228
FIGURE VI-12 : CONTRAINTE RADIALE A R=0,8R <sub>i</sub> ; COMPARAISON, DANS LE CAS D'UN MASSIF ELASTIQUE, DU CALCUL HMC SANS VARIATION SIGNIFICATIVE DE C AVEC LE CALCUL HM. ....	229
FIGURE VI-13 : AMPLITUDE DE LA VARIATION DE LA CONCENTRATION DANS LE CAS 1, POUR UN MASSIF ELASTIQUE.....	229
FIGURE VI-14 : EVOLUTION DE LA CONTRAINTE RADIALE DANS LA B.O. PENDANT LES CENT PREMIERES ANNEES AVEC UN MASSIF ELASTIQUE.....	230
FIGURE VI-15 : EVOLUTION DE LA PRESSION DE GONFLEMENT MICROSCOPIQUE AVEC LA CONCENTRATION .....	231
FIGURE VI-16 :EVOLUTION DE LA CONCENTRATION DANS LA B.O. (A R=0,8M) AU COURS DU TEMPS. ....	231
FIGURE VI-17 : EVOLUTION DE LA CONTRAINTE RADIALE DANS LA B.O. AU COURS DU TEMPS AVEC UN MASSIF ELASTIQUE.....	232
FIGURE VI-18 : PROFILS DES COMPOSANTES DES CONTRAINTES A LA DATE T=5.10 <sup>4</sup> ANS DANS LES TROIS CAS DE CALCUL AVEC MASSIF ELASTIQUE. ....	233
FIGURE VI-19 : PROFILS DES CHAMPS DE CONTRAINTES ET DE PRESSION A L'ISSUE DU CREUSEMENT POUR UN MASSIF ENDOMMAGEABLE.....	234
FIGURE VI-20 : PROFIL DU CHAMP DE PRESSION A DIFFERENTES DATES AVANT REMPLISSAGE DE LA GALERIE DANS LE CAS D'UN MASSIF ENDOMMAGEABLE. ....	235
FIGURE VI-21 : PROFILS DES CHAMPS DE CONTRAINTES ET DE PRESSION A LA DATE DE MISE EN PLACE DES MATERIAUX DANS LA GALERIE POUR UN MASSIF ENDOMMAGEABLE. ....	235
FIGURE VI-22 : EVOLUTION DE LA CONTRAINTE RADIALE DANS LA B.O. AU COURS DU TEMPS AVEC UN MASSIF ENDOMMAGEABLE.....	236
FIGURE VI-23 : PROFIL DES CONTRAINTES ET DE LA PRESSION DANS LE CAS 1 A LA DATE T=20ANS (MASSIF ENDOMMAGEABLE).....	236
FIGURE VI-24 : EVOLUTION DE LA ZONE ENDOMMAGEE ET DES ZONES EN CHARGE AU COURS DU TEMPS DANS LE CAS 1. ....	237
FIGURE VI-25 : EVOLUTION DE LA ZONE ENDOMMAGEE ET DES ZONES EN CHARGE AU COURS DU TEMPS DANS LE CAS 2. ....	238
FIGURE VI-26 : PROFIL DES CONTRAINTES ET DE LA PRESSION DANS LE CAS 2 A LA DATE T=1000ANS (MASSIF ENDOMMAGEABLE).....	238
FIGURE VI-27: COUPES DE LA CONTRAINTE LONGITUDINALE A DIFFERENTES DATES DANS LE CAS 2 ; ACTION DE L'ENDOMMAGEMENT.....	239
FIGURE VI-28 : EVOLUTION AU COURS DU TEMPS DU DEPLACEMENT RADIAL EN PAROI DE GALERIE.....	239
FIGURE VI-29 : COUPE RADIALE DES CONTRAINTES DANS LE CAS 3 A LA DATE T=1000 ANS (MASSIF ENDOMMAGEABLE).....	240
FIGURE VI-30 : EVOLUTION AU COURS DU TEMPS DU DEPLACEMENT RADIAL EN PAROI DE GALERIE (MASSIF ELASTOVISCOPLASTIQUE).....	241
FIGURE VI-31 : EVOLUTION DE LA CONTRAINTE RADIALE DANS LA B.O. AU COURS DU TEMPS AVEC UN MASSIF ELASTOVISCOPLASTIQUE. ....	242
FIGURE VI-32 : PROFILS DES CONTRAINTES ET DE LA PRESSION DE PORES A L'ISSUE DU CREUSEMENT NON DRAINE DANS LE CAS D'UN MASSIF EN RUPTURE. ....	244
FIGURE VI-33 : PROFILS DE LA PRESSION A DIF.....	245
FIGURE VI-34 : PROFILS DES CONTRAINTES A LA DATE DE MISE EN PLACE DE LA B.O. DANS LE CAS D'UN MASSIF EN RUPTURE.....	245
FIGURE VI-35 : EVOLUTION DES ZONES ENDOMMAGEE, EN RUPTURE ET RESIDUELLE DANS LE CAS D'UN MASSIF EN RUPTURE, SANS ACTION DE B.O.....	246
FIGURE VI-36 : PROFILS DES CONTRAINTES A DIFFERENTES DATES DANS LE CAS D'UN MASSIF EN RUPTURE, SANS ACTION DE B.O.....	247
FIGURE VI-37 : PROFILS DES CONTRAINTES A LA DATE T=100 ANS, DANS LE CAS D'UN MASSIF EN RUPTURE, AVEC GONFLEMENT DE LA B.O. ....	248



## INTRODUCTION GENERALE

Le travail qui est présenté dans ce document a été réalisé au laboratoire G.3S (Groupement pour l'étude des Structures Souterraines de Stockage) de l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau. Le G.3S est un G.I.P. (Groupement d'Intérêt Public) fonctionnant grâce à la réalisation de contrats de recherches industrielles. Ces recherches, à caractère expérimental ou de modélisation numérique, portent pour la plupart sur les roches intéressant le stockage souterrain, de déchets radioactifs en particulier. L'accent est mis sur les différents couplages thermohydromécaniques (THM) susceptibles d'intervenir, au champ proche comme au champ lointain.

J'ai commencé ma carrière de chercheur à G.3S en tant qu'ingénieur numéricien chargé de développer un code de calcul (baptisé Anthyc). J'ai été amené à réaliser un certain nombre de projets de recherche (de modélisation numérique), et à participer au dépouillement de certains résultats d'essais lorsque ceux-ci nécessitaient la mise en œuvre de méthodes numériques. Mes recherches ont ainsi commencé du point de vue de l'ingénieur. En parallèle, j'ai commencé une thèse de doctorat sur le thème du gonflement des argiles et de ses effets sur les ouvrages souterrains. Mon intérêt personnel m'a amené à aborder certaines questions sur un plan plus fondamental, ce qui a conduit aux travaux présentés dans cette thèse. Toutefois, le souci d'application m'a conduit à dégager des résultats pouvant répondre aux besoins de l'ingénieur. Ces résultats sont utilisés au dernier chapitre.

Cette thèse est bien évidemment liée à la problématique du stockage de déchets radioactifs. Le stockage souterrain profond des déchets radioactifs pose des problèmes complexes et variés à nombre de chercheurs spécialistes des sciences de la terre et de la chimie. L'objectif fondamental de sûreté est de parvenir à confiner la radioactivité des déchets sur de très longues durées (de l'ordre de  $10^6$  ans), durées sur lesquelles il faut donc pouvoir prévoir le transport des radionucléides. Les disciplines concernées sont, entre autres, la géochimie, la chimie des matériaux, la géologie, l'hydrogéologie. Par ailleurs, le stockage nécessite de trouver la bonne roche hôte du stockage. Sa perméabilité doit être la plus faible possible, et on doit également pouvoir y construire les ouvrages de stockage. La géomécanique est concernée par ces dernières questions.



Les problèmes posés sont aussi divers que spécifiques. Pour en désigner un, en rapport avec le travail de thèse, imaginons qu'une roche soit jugée favorable, du point de vue de ses propriétés géochimiques et hydrauliques par exemple, pour le stockage. Une des questions posées est de savoir comment faire pour qu'elle conserve ces propriétés malgré le creusement et l'exploitation du site. Des idées sont émises pour que le massif retrouve au plus tôt l'état de contraintes dans lequel il se trouve avant creusement. On pense par exemple à utiliser, dans certaines galeries de stockage, des argiles dites « gonflantes » qui, par absorption de l'eau provenant du massif, vont gonfler et — on le souhaite — pousser les parois de galeries et participer ainsi à ce retour du massif à son état de contraintes avant le creusement. Le dernier chapitre (chapitre VI) traite de ces problèmes.

Cette thèse porte sur le gonflement des argiles mais aussi, plus généralement, sur les milieux argileux en rapport avec le stockage. Que ce soit comme roche hôte du stockage, ou comme barrière ouvragée à l'intérieur des galeries de stockage, les argiles intéressent le stockage par leurs propriétés (faible perméabilité, possibilité de cicatrisation, propriétés de rétention des radionucléides...). Nous allons nous intéresser à différents types d'argiles, naturelles ou remaniées (dans le cas des B.O.), d'un point de vue rhéologique, dans le but d'aboutir à des lois de comportement permettant de reproduire un certain nombre de phénomènes identifiés. Cela sera fait au travers d'une étude bibliographique. Il s'agira essentiellement d'obtenir des modèles utilisables pour le calcul : il n'est pas question, ici, de chercher à avoir des modèles qui tiennent compte de tous les effets ; nous verrons que cela nous laisse encore un bon nombre de phénomènes couplés à étudier.

Le premier chapitre de ce Mémoire est une présentation du concept de stockage en formation géologique profonde. Nous expliquons les différents critères de choix d'un site, et les étapes qui en découlent. Nous faisons une revue rapide des roches susceptibles d'intéresser le stockage, puis présentons plus en détail les argiles dans le stockage, en raison de l'intérêt particulier porté par certains pays pour ces matériaux.

Le deuxième chapitre est consacré aux argiles. On rappelle que sous ce terme se cache un large spectre de matériaux. Ils sont examinés au niveau microscopique, une spécificité de leur comportement étant liée à la microstructure. Puis nous présentons leur comportement macroscopique, du point de vue des phénomènes.

Le chapitre suivant aborde la formulation en équations des couplages Mécanique/transport dans les milieux poreux en général, mais appliquée aux argiles. Nous nous focalisons sur trois types d'argiles : une argile *raide* (celle de l'Est), une argile plastique (l'argile de Boom, à Mol, en Belgique), et une argile remaniée qui est celle pressentie en France pour les barrières ouvragées.

Le chapitre IV est consacré aux argiles gonflantes. Ces argiles sont susceptibles de voir leur volume augmenter sous l'effet d'échanges hydriques, ou diminuer, et ce phénomène est appelé gonflement-retrait. Au travers d'une étude bibliographique, nous tentons d'examiner l'ensemble des processus susceptibles d'intégrer le phénomène de gonflement-retrait dont certains aspects semblent parfois un peu flous. Notre analyse nous conduit à proposer une loi de comportement pour le gonflement-retrait. Ce chapitre concerne essentiellement la Mécanique.

Le modèle de comportement intégrant le gonflement fait intervenir la concentration des ions présents en solution dans l'eau interstitielle. Du point de vue du transport, de l'eau comme des ions, la recherche de modèles cohérents nous a conduit à mener une réflexion relativement en amont par rapport à nos objectifs initiaux. Ces aspects « transfert », abordés de manière simple au chapitre II, sont revus au chapitre V où nous remettons en question certains modèles concernant le transport des solutions en milieux poreux.

Le dernier chapitre concerne le calcul numérique. Il débute par une description succincte du code de calcul. On montre comment les équations décrites dans le document — et les équations THMC couplées en milieu poreux en général — sont traitées dans le code de calcul, selon un principe simple, mais à notre avis original, qui est d'utiliser une « équation générique » pour les aspects transport. Puis nous réalisons quelques applications (modélisation numérique) au champ proche de notre modèle de gonflement-retrait dans un contexte de stockage.

Certaines parties de ce travail ont été reportées dans les annexes pour assurer une plus grande cohérence du texte central. Ces annexes sont diverses et inégales. L'annexe A donne une recette pour construire des critères de plasticité de type courbe intrinsèque (présentés au chapitre III). L'annexe B est issue d'une étude menée pour l'Andra, et présente un modèle d'argile gonflante (pour B.O.) déterminé par une approche « ingénieur », pour servir des calculs où la B.O. ne devait pas être étudiée, mais son action sur la roche devait être réaliste. C'est néanmoins un modèle qui a son intérêt. L'annexe C rappelle quelques notions de base sur l'eau des sols et des roches, et la D décrit les Volumes Finis du code. L'annexe E, la plus longue, traite de différents aspects du modèle de Lemaitre en viscoplasticité.



# CHAPITRE I STOCKAGE SOUTERRAIN DE DECHETS RADIOACTIFS

## *1.1 Problématique*

Le problème de la gestion à long terme des déchets radioactifs à haute activité, qui concerne l'ensemble des pays industriels qui se sont dotés de moyens de production d'électricité nucléaire (mais le même problème se pose pour les déchets nucléaires militaires), se caractérise par la nécessité d'assurer un confinement suffisant de la radioactivité produite par ces déchets pendant une très longue période (typiquement cent mille à un million d'années). La solution retenue par tous ces pays est l'enfouissement dans des couches géologiques profondes. Parfois (c'est le cas en France), d'autres solutions sont étudiées en parallèle, qui sont plus destinées à réduire le volume de ces déchets (cas des recherches sur la transmutation), ou à stocker temporairement en surface ou sub-surface (par exemple le temps nécessaire pour que décroisse notablement la chaleur dégagée par les déchets), qu'à réellement remplacer le stockage définitif en profondeur.

L'enfouissement des déchets radioactifs à haute activité en formation géologique profonde est envisagé depuis une vingtaine d'années en France pour assurer un objectif précis : la protection de l'homme et de l'environnement à court et à long terme, en prenant en considération les droits des générations futures. De cet objectif, appelé « objectif fondamental de sûreté » d'un stockage souterrain, découle un certain nombre de critères de sûreté que devra remplir un éventuel site de stockage de déchets radioactifs. Ceux-ci ont fourni les bases de conception du stockage, ainsi que la méthodologie qu'il faudra suivre pour faire la démonstration de la sûreté du stockage. Nous détaillerons ces aspects plus tard.

Le stockage souterrain de déchets radioactifs a donc pour but unique de confiner la radioactivité, c'est-à-dire interdire ou limiter, à un niveau suffisamment faible pour que ses conséquences soient acceptables, le transfert des matières radioactives vers l'environnement. Ici, on entend par « conséquences acceptables » des expositions aux rayonnements ionisants inférieures à des limites définies par la réglementation en vigueur : dans l'hypothèse d'une évolution sans accident, la limite est fixée à une fraction (un sixième) de l'exposition moyenne annuelle d'un individu par due à la radioactivité naturelle ; dans l'hypothèse d'évènements aléatoires, le caractère acceptable des expositions individuelles sera apprécié au cas par cas selon les situations envisagées (séisme, forage intrusif, ...).

Pour atteindre cet objectif, le système de confinement en formation géologique profond a été défini, constitué de trois barrières successives :

1. les colis de déchets, constitué d'une matrice, d'un conteneur et d'un surconteneur,
2. les barrières ouvragées,
3. la barrière géologique.

Ce concept multibarrières est motivé par un principe de précaution en cas de défaillance d'une des barrières. De plus, ces barrières ont des rôles complémentaires, le massif devant a priori assurer le confinement à long terme (néanmoins, les deux autres barrières devront être conçues pour être aussi efficaces et durables que possibles, compte tenu de leurs rôles mais aussi de l'état des connaissances techniques et des facteurs économiques). Globalement, ces barrières auront pour fonctions :

1. de protéger les déchets (de l'eau, des actions humaines intrusives),
2. de retarder, pendant le délai nécessaire à une décroissance radioactive suffisante des radionucléides concernés, le transfert vers la biosphère des substances radioactives éventuellement relâchées par les déchets.

## ***1.2 Le concept de stockage souterrain***

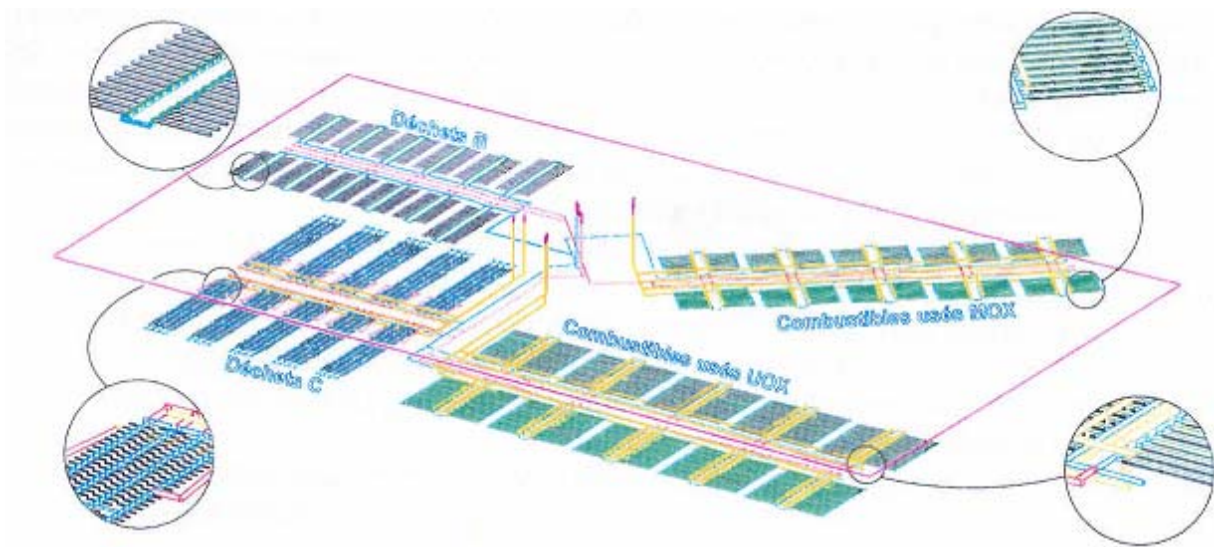
### **1.2.1 Site de stockage souterrain**

On prévoit que les architectures de stockage seront situées à des profondeurs allant de 200m à 1000m : en deçà, ce serait trop dangereux pour l'homme et l'environnement, et au delà on ne sait pas assurer la faisabilité à des coûts non prohibitifs ; en France, on préfère restreindre les bornes à [400m,700m].

Ces installations seront constituées par exemple d'un réseau de galeries, dites d'accès et de manutention, desservant des séries de puits verticaux ou de galeries horizontales dans lequel(le)s seront disposé(e)s les déchets. L'extension horizontale d'un stockage pourra être de quelques kilomètres carrés. On accèdera à ces structures au moyen de puits verticaux. On préfère en limiter le nombre, même si le stockage sera assez étendu, de peur que ces puits ne constituent des chemins préférentiels pour la remontée des radionucléides. Un puits supplémentaire sera sans doute prévu pour l'aéragé des galeries, important pendant toute la phase d'exploitation.

Les structures de stockage seront sans doute découpées en différents modules. Les modules pourront par exemple être distingués entre eux par la nature des déchets qui y seront stockés. En France, par exemple, il est sans doute prévu de séparer les déchets (parmi ceux à vie longue) selon plusieurs types :

- Les déchets faiblement exothermiques (déchets B),
- Les combustibles usés (UOX,MOX, ...),
- Les déchets C, issus de la vitrification des combustibles usés,
- Les déchets issus du retraitement (URE, combustibles à l'Uranium de REtraitement).



*Figure I-1 :Exemple d'architecture d'ensemble des installations souterraines de stockage.*

On distingue généralement deux phases dans la vie du site, de durée complètement inégales. La première est la phase de réalisation et d'exploitation des ouvrages. Elle comprend d'abord le creusement proprement dit des puits, des galeries d'accès et de manutention, et des alvéoles de stockage, avec mise en place progressive d'un soutènement adapté. Puis il y aura la mise en place des colis, qui se fera peut-être en parallèle avec la poursuite du creusement. Ensuite, on fermera les galeries ou puits de stockage, mais il devrait subsister une activité de contrôle, donc les galeries de manutention seront encore accessibles. Cette première phase durera vraisemblablement quelques dizaines d'années, peut-être jusqu'à cent ou deux cents ans. Elle sera suivie d'un remblayage intégral des galeries et puits d'accès. Vient alors la deuxième phase (l'isolement des substances radioactives), que l'on veut assurer pendant plus de cent mille ans.

## **I.2.2 Le système de confinement**

Il faudra que le stockage ainsi conçu et réalisé permette l'isolement des déchets en retardant le transfert vers la biosphère des substances radioactives éventuellement relâchées par les déchets. Le confinement des déchets sera assuré par trois barrières successives, qui auront un rôle a priori complémentaire mais dont le nombre permettra de minimiser les risques en cas de défaillance de l'une d'elles. Dans l'ordre depuis les déchets jusqu'à la biosphère, ces barrières sont :

- les colis de déchets,
- les barrières ouvragées qui seront mises en place pour combler les vides entre les colis et les parois internes des puits ou tunnels de stockage,
- le milieu géologique.

Le scénario le plus probable d'évolution sera d'abord la dissolution des colis de déchets, puis le transport des radionucléides, relâchés par les déchets ou générés par décroissance radioactive, dans la barrière ouvragée puis dans les eaux souterraines. C'est ce transport qu'il faut ralentir.

## **I.3 Vers le choix d'un site**

### **I.3.1 Les critères de choix**

Le rôle de la barrière géologique est de retarder et de limiter le retour éventuel dans la biosphère des radionucléides, pour que les critères radiologiques de rayonnement soient satisfaits à tout instant. Il est admis que la circulation des eaux souterraines était le facteur essentiel susceptible de remettre en cause le freinage du transfert des radionucléides libérés par les déchets enfouis dans le sous-sol. Le premier critère de choix de la « roche hôte » sera donc lié à la prévision que l'on peut faire des mouvements d'eau au sein de celle-ci au cours du temps. Il restreint le choix du milieu à des roches pratiquement anhydres (sel gemme) ou faiblement perméables (granite peu fissuré, argile, ..).

A ce critère de nature hydrogéologique se rajoute un critère lié à la notion de *site* de stockage : il faudra démontrer que le massif est stable des points de vue géologique et tectonique, et que les architectures de stockage sont économiquement réalisables, ce qui fait intervenir les caractéristiques mécaniques propres de la roche concernée.

L'étanchéité doit être assurée sur plusieurs dizaines de milliers d'années. Il faut pouvoir garantir que les qualités initiales de la roche, vis-à-vis du critère de sûreté, ne seront pas dégradées par les

ouvrages et le stockage, ou alors que la roche possède des atouts pour retrouver ses propriétés jugées intéressantes. Les roches plastiques sont alors privilégiées : on espère que le fluage permettra une fermeture des fissures créées par exemple par les ouvrages et le stockage.

### **I.3.2 Les étapes du choix**

Vers le choix d'un site, la première étape est la reconnaissance d'un site, faisant intervenir plusieurs disciplines des géosciences : géologie, hydrogéologie, géomécanique et géochimie. Cette étape doit permettre de proposer une représentation du fonctionnement initial du milieu géologique.

La deuxième étape consiste en la construction d'un laboratoire souterrain, permettant l'approfondissement des connaissances par la réalisation d'essais en place (in situ).

La troisième étape consiste en l'extrapolation des connaissances acquises à l'emprise du stockage. Le problème de l'enfouissement a ceci d'original que la sûreté du stockage doit être assurée sur des durées plus longues, de plusieurs ordres de grandeur, que les plus longs essais envisageables. Un ordre de grandeur des durées concernées est  $10^5$  années, beaucoup plus donc que la durée de vie des ouvrages humains les plus anciens. La preuve de la faisabilité d'un stockage passe ainsi forcément par la modélisation numérique.

En géomécanique, par exemple, les trois phases ci-dessus correspondent aux trois axes majeurs de recherche, caractérisés par les essais de laboratoire, les essais in situ et la modélisation. Naturellement, les itérations sont nécessaires entre ces différentes phases, pour caractériser de plus en plus finement les phénomènes observés et réussir à capter peut-être les phénomènes très lents peu accessibles par l'expérience seule.

### **I.3.3 Les sites favorables**

Pour ce qui concerne la roche hôte du site, il est clair que l'objectif de sûreté se traduit par le choix d'un massif présentant une très faible perméabilité ainsi qu'un très faible gradient de charge hydraulique, puisque le principal vecteur de transport des radionucléides est l'eau contenue dans le massif. A ce critère de nature hydrogéologique se rajoute un critère lié à la notion de *site* de stockage : il faudra démontrer que le massif est stable des points de vue géologique et tectonique, et que les



architectures de stockage sont économiquement réalisables, ce qui fait intervenir les caractéristiques mécaniques propres de la roche concernée.

Le critère de sûreté a conduit à la recherche de sites dans lesquels la circulation de l'eau est la plus faible. En 1987, quatre sites avaient été retenus, correspondant à quatre milieux distincts : l'argile, le granite, le sel gemme et le schiste, qui possèdent a priori des propriétés intéressantes eu égard de la circulation des eaux souterraines (Bérest, 1989).

Aujourd'hui, un site a été choisi, dans une couche argileuse située dans l'est du Bassin Parisien. L'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (Andra) a entamé sur place les travaux de creusement du laboratoire de recherche souterrain. L'Andra est censée trouver un deuxième site, dans un milieu distinct (a priori le granite).

Nous allons présenter, succinctement, les avantages et inconvénients de chacune des roches sus citées, hormis du schiste pour lequel nous ne possédons pas d'informations (et qui ne semble étudié par aucun des pays concernés par l'enfouissement de déchets).

#### ***1.3.3.a Le sel gemme :***

Le sel gemme est très répandu dans le sous-sol. Son exploitation, de très longue date, pour les besoins de l'alimentation, de l'industrie chimique, pour le déneigement des routes ou encore pour réaliser les stockages souterrains de gaz et de pétrole, font qu'on dispose pour ce milieu d'une très grande expérience de réalisation d'ouvrages souterrains profonds. Même si un enfouissement de déchets se distingue d'un ouvrage minier classique, le volume considérable de connaissances acquises est un atout certain. Le sel gemme est un des milieux d'accueil envisagés par l'Allemagne.

Du point de vue de la circulation, c'est, à première vue, extrêmement simple dans le cas du sel gemme : celui-ci est fortement soluble, et l'existence même d'un gisement conservé depuis des millions d'années signifie que l'eau ne circule pas.

En réalité, le sel gemme contient de l'eau sous forme de saumure, contenue aux interfaces entre les grains et dans des vacuoles au sein des cristaux (Bérest, 1989). Cette saumure peut se déplacer par des mécanismes lents, généralement accompagnés de dissolution-recristallisation. Des essais de laboratoire et in situ permettent par ailleurs d'affirmer que le sel gemme est perméable au gaz et à la saumure (Cosenza, 1996), ce qui remet en question l'« imperméabilité » du sel. Cette perméabilité semble toutefois être inférieure à  $10^{-20} \text{ m}^2$ .

L'étanchéité du site doit être conservée lors du creusement des ouvrages, puis pendant plusieurs dizaines de milliers d'années. La réalisation des ouvrages dans le sel, nous l'avons dit, ne devrait pas poser de problème. En revanche, la phase thermique nécessite une attention toute particulière. Le sel gemme est généralement fortement viscoplastique, et la vitesse de fluage peut être multipliée par cent entre 20°C et 100°C. Les problèmes apparaîtront certainement dans la phase de refroidissement (Bérest, 1989), car ce dernier, s'il est trop rapide, est susceptible, en raison du comportement irréversible de la roche, de générer des tractions, et donc des discontinuités puisque les roches résistent mal à la traction.

Le sel gemme présente par ailleurs l'avantage de posséder une conductivité thermique élevée, favorable à une bonne dissipation de la chaleur dégagée par les conteneurs.

#### ***1.3.3.b Le granite :***

Les principaux avantages d'une telle solution sont liés à des caractéristiques mécaniques très élevées du granite, et à son imperméabilité. Cela est vrai pour du granite sain. Généralement, le granite est une roche fissurée : ce matériau, très fragile, n'a pas la capacité à récupérer d'éventuelles déformations d'origine tectonique.

L'Andra envisage, nous l'avons dit, de porter son attention sur les roches granitiques pour le choix éventuel d'un deuxième site. Depuis une dizaine d'années, de nombreuses études ont montré l'attention toute particulière à porter sur le caractère fracturé de ces milieux.

#### ***1.3.3.c L'argile :***

L'argile fait partie des milieux potentiellement favorables. D'abord, les matériaux argileux possèdent des perméabilités très faibles. De plus, on leur attribue de bonnes capacités de rétention des radioéléments, ce qui est considéré comme un atout en terme de sûreté. Enfin, une dernière propriété des argiles, mécanique cette fois, est tout a fait essentielle pour atteindre les objectifs de sûreté à long terme : c'est leur plasticité, qui permettra, on l'espère, la fermeture des cavités de stockage et des éventuelles fractures créées par les ouvrages et l'échauffement.

Mais les argiles ont également des propriétés jugées défavorables. En comparaison du sel gemme ou du granite, leur résistance mécanique est jugée faible. En supposant que l'on puisse mettre en

œuvre des techniques connues pour construire des ouvrages de stockage souterrain à un coût raisonnable, il faut ensuite garantir la stabilité de ces ouvrages pendant des dizaines d'années, et l'étanchéité pendant des milliers d'années.

En France, le choix s'est porté sur une roche argileuse. Il en est de même en Belgique. Ces deux argiles sont radicalement différentes. Nous les étudions dans le cadre de cette thèse.

## **I.4 L'argile dans le stockage**

### **I.4.1 Le milieu géologique**

L'intérêt de l'argile a été rapidement mis en évidence par certains pays européens qui possèdent dans leur sous-sol des formations argileuses de puissance suffisante (Belgique, Italie et France).

En France, l'Andra étudie actuellement de manière active une couche argileuse du Callovo-Oxfordien située dans la Meuse. Un décret du 3 août 1999 a autorisé dans cette formation l'installation et l'exploitation d'un laboratoire de recherche souterrain (figure I-1).

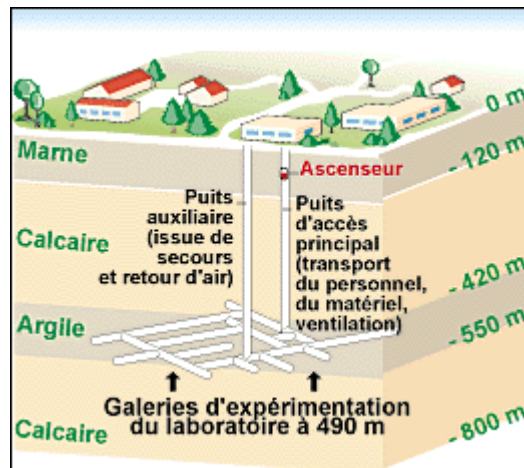


Figure I-2 : Schéma de principe du laboratoire souterrain de Bure, dans la Meuse (source : quotidien Ouest-France).

L'organisme analogue de l'Andra en Belgique, l'ONDRAF, a confié la mission de recherche sur l'enfouissement au Centre pour l'Energie Nucléaire (SCK•CEN). Ce dernier, a entamé, depuis plus de vingt ans, la phase du laboratoire souterrain dans une formation argileuse (argile de Boom)

appartenant à l'étage Rupélien, à l'intérieur du centre, à Mol. Ce laboratoire, et l'argile de Boom en général ont déjà fait l'objet d'un très important programme d'essais et de modélisation.

Les deux argiles dont il est question présentent des caractéristiques radicalement différentes. L'une, en France, est une argile raide, possédant des caractéristiques mécaniques relativement élevées pour une argile, mais qui présente une rupture fragile. L'autre est très déformable, et l'on compte beaucoup sur son éventuelle capacité à colmater les fissures créées par les ouvrages.

## **I.4.2 Les barrières ouvragées**

La barrière ouvragée (B.O., ou B.O.V. pour « de voisinage ») jouera un rôle prépondérant de par sa position même : celui d'interface entre les colis et le massif. C'est le dernier rempart avant le milieu géologique.

Le choix du matériau constitutif de la B.O. sera donc fait conformément à des critères très rigoureux, qui sont typiquement susceptibles d'être respectés avec une argile : très faible perméabilité, bonnes capacités de colmatage, capacités de rétention des radionucléides, mais aussi bonne conductivité thermique pour éviter les forts gradients de température.

L'intérêt de certaines argiles, en plus de leur propriétés plastiques, réside dans ce qu'on appelle leur aptitude au gonflement. Ce gonflement permettra, on l'espère, le comblement des vides mais aussi un retour plus rapide vers un état mécanique du site similaire à celui avant creusement des ouvrages (annulation des écarts entre les contraintes principales).

Signalons néanmoins que certaines B.O. seront sans doute réalisées en béton. Le choix d'une B.O. en argile gonflante est pressenti pour les déchets fortement exothermiques, pour lesquels on craint une perte des propriétés des bétons en cas d'échauffement trop fort (les bétons à hautes performances (B.H.P.) sont coûteux...). Les B.O. argileuses auront de plus pour fonction de limiter l'arrivée d'eau vers les colis et donc la lixiviation de ces derniers.

En cas de B.O. argileuse, celle-ci sera constituée de blocs qui seront assemblés dans les galeries de stockage (figure I-2). Les colis seront ensuite introduits au centre, mécaniquement. Une tentative de mise en place des colis a été faite par les Belges (par le GIE EURIDICE en charge du creusement du laboratoire souterrain à Mol).

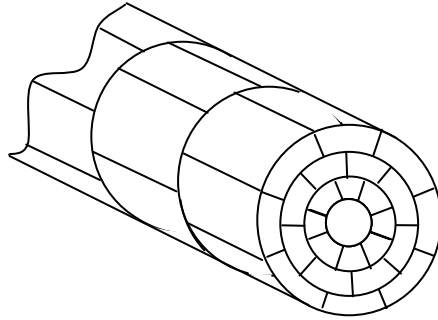


Figure I-3 : Schéma de la barrière ouvragée argileuse, constituée de blocs.

Le matériau des B.O. argileuses sera constitué d'argile remaniée et compactée. Notons que l'argile remaniée servira également de matériau de remplissage en certains endroits des galeries de manutention et des puits d'accès : ce matériau formera les scellements destinés à reconstituer autant que possible les performances initiales du milieu géologique et à limiter le relâchement vers les accès du stockage, qui constituent a priori un chemin préférentiel.

## **1.5 CONCLUSION**

Le problème de l'enfouissement des déchets radioactifs est sans doute l'un des plus originaux qu'il ait été donné à l'homme de résoudre (ou qu'il se soit lui-même donné, d'ailleurs). Il s'agit tout simplement de construire un ouvrage — le stockage —, de telle manière qu'on puisse espérer que le confinement sera assuré pour le prochain million d'années. Dans ce contexte, tout phénomène, fût-il extrêmement lent ou quasi-imperceptible, se doit d'être examiné.

Les argiles et les roches argileuses sont incontestablement très intéressantes dans le cadre d'un stockage de déchets à vie longue, à la fois comme barrière ouvragée ou comme barrière naturelle géologique. Comme le sel, elles possèdent a priori la capacité de réaliser autour des ouvrages de stockage un autocolmatage. Elles possèdent de plus plusieurs propriétés qui, nous l'avons vu, intéressent le stockage.

Mais les problèmes posés par le stockage sont complexes, et soulèvent nombre de questions quant à la possibilité de pouvoir prédire, un jour, le comportement d'un stockage. Le défi doit pourtant être relevé.

Parmi les difficultés, pour les argiles, on peut citer par exemple la tenue à long terme des capacités de rétention des radionucléides, capacités susceptibles d'être altérées à la suite de transformations

minéralogiques dues par exemple à l'échauffement ou tout simplement au temps. Plus en rapport avec des préoccupations mécaniciennes, on doit se poser la question de la tenue des ouvrages, mais aussi de la conservation de l'aptitude au gonflement recherché chez les argiles pour assurer certaines fonctions dans le stockage.

Pour pouvoir estimer l'évolution des propriétés des argiles, il faut tout d'abord les identifier, les caractériser, et réussir à modéliser l'influence des paramètres géochimiques par exemple sur ces propriétés. Concernant le gonflement, nous savons qu'il n'est pas indépendant de la nature du fluide interstitiel. Aller au-delà d'une telle affirmation est malheureusement bien plus difficile.

Au chapitre suivant, nous faisons un voyage au cœur des argiles, avant d'en faire le tour pour décrire certaines de leur propriétés macroscopiques. Nous parlerons notamment de l'aptitude au gonflement de certaines argiles (smectites, ...) et du phénomène de gonflement/retrait des argiles.



# CHAPITRE II LES ARGILES

## II.1 Présentation

Il existe plusieurs définitions des argiles. Le terme « argile » n'aura pas le même sens en mécanique des roches, en physique du sol, ou en poterie ; il désigne, selon les cas, un ensemble d'espèces minérales, une famille de roches, une catégorie de sols ou encore une classe granulométrique. Sous cette appellation générique se cache donc une grande variété de matériaux, dont le point commun est de posséder des *minéraux argileux*, qui sont eux de nature bien précise (à base de silicates) et dont la structure confère à ces matériaux — comparativement à d'autres types de sols ou de roches — des propriétés bien spécifiques quant à leur interaction avec l'eau.

Les minéraux argileux sont des silicates hydratés (il s'agit généralement de silicates d'aluminium, mais parfois de silicates de magnésium), dont la structure feuilletée les a fait se ranger dans la famille des *phyllosilicates*. Selon la famille de minéral argileux considérée, les particules les plus fines peuvent être constituées d'un feuillet ou d'un assemblage de quelques feuillets, et leur taille est très faible, de l'ordre de 2 à 5  $\mu\text{m}$  ; ces dimensions sont caractéristiques des *particules argileuses* et ne se retrouvent pas dans d'autres minéraux.

En fait, le terme « argile » a un double sens : il désigne à la fois les minéraux argileux eux-mêmes, et les sols et roches contenant une assez grande quantité de particules argileuses. En Mécanique des Sols, on définit la fraction argileuse d'un sol comme étant la teneur en particules de moins de 2 à 5  $\mu\text{m}$  de diamètre. La matériau est lui-même qualifié d'argile s'il contient plus de 50% de minéraux argileux (et une faible quantité de matières organiques).

Les argiles sont souvent perçues comme des matériaux tendres. Tel n'est pas toujours le cas : il existe beaucoup de sites d'argiles dites « raides » (c'est le cas pour les argilites de l'est du Bassin Parisien), dont les caractéristiques mécaniques sont très élevées et qui remettent en cause une telle vision (qui est encore celle des dictionnaires actuels).

L'étude bibliographique qui va suivre va nous permettre de mieux cerner ces matériaux argileux, dont les propriétés particulières peuvent s'avérer intéressantes à plus d'un titre en matière de stockage de déchets radioactifs. Par exemple, de par leur constitution à base de particules très fines, certaines argiles présentent une bonne capacité de rétention des radioéléments, sont très peu perméables (parfois qualifiées d'imperméables par les hydrogéologues). Plusieurs argiles sont plastiques ou présentent un



comportement viscoplastique, ce qui permet de penser à une cicatrisation possible des éventuelles fissures engendrées au champ proche des ouvrages. En outre, en raison de leur caractère hydrophile, de leur structure et de leur texture (nous reviendrons sur ces aspects), certains matériaux argileux sont qualifiés de « gonflants » car, au simple contact de l'eau, leur volume peut augmenter sensiblement ; de tels matériaux sont envisagés pour la B.O. autour des déchets. En revanche, à l'opposé du gonflement — et en raison d'une perte d'eau — on pourrait selon les cas observer des diminutions de volume (on parle alors de *retrait* du matériau) à l'origine d'une fissuration.

## **II.2 Microstructure et interaction avec l'eau**

### **II.2.1 Microstructure des argiles**

Les argiles proviennent de l'altération et de la dégradation des roches : altération physique sous l'effet des variations de température, et surtout altération chimique au contact de l'eau qui permet la dégradation en particules très fines. Les conditions dans lesquelles cette dégradation a eu lieu, ainsi que l'état d'avancement de cette dégradation peuvent expliquer la grande diversité des argiles (Jackson & Sherman 1953, cités par Grunberger 1995). De par leur origine détritique et leur nature granulaire, la structure des sédiments argileux est complexe ; la compréhension des mécanismes de déformation de ces matériaux, dans lesquels la chimie de l'eau tient une place prépondérante, passe nécessairement par la connaissance précise de la microstructure.

#### **II.2.1.a Terminologie**

Avant d'entrer dans les détails de la minéralogie des argiles, il nous semble utile de rappeler la terminologie associée pour éviter toute confusion : un terme donné est parfois utilisé pour désigner plusieurs niveaux structuraux différents, et deux termes différents sont parfois employés pour désigner le même niveau.

La cellule de base (*unit cell*, en anglais) des minéraux argileux est appelée **cristallite**. Elle est constituée d'un **feuillelet** (*layer*) et d'un **interfeuillelet** (*interlayer*) appelé aussi **espace interfoliaire**. Chaque feuillelet est lui-même formé de la superposition de deux ou trois **couches** (*sheets*) cristallisées (c'est-à-dire dans lesquelles les atomes, solides à température ordinaire, sont régulièrement distribués). L'interfeuillelet est constitué de fluide (d'eau) assurant une liaison électrochimique entre les feuillelets. Il

existe différents types de liaisons interfeuillet, liées notamment à des phénomènes de substitutions isomorphiques à la surface des cristallites.

Une **particule** d'argile résulte de l'empilement face-à-face de quelques cristallites élémentaires ; elle n'est formée parfois que d'un seul cristallite (d'ailleurs, en anglais, le terme *particle* désigne bien souvent le cristallite lui-même). Il arrive aussi que le terme cristallite soit lui-même employé pour désigner un empilement de plusieurs feuillets, c'est-à-dire ce que nous avons nous-mêmes qualifiés de particule. Nous allons voir que ces cristallites peuvent s'assembler de manières très diverses.

Des différentes possibilités d'empilement des couches dans les feuillets, de substitutions isomorphiques, de liaisons interfeuillet et enfin d'arrangement spatial des cristallites résulte la grande diversité de structures et de propriétés des argiles.

### II.2.1.b Structure de base

Le cristallite (ou unité structurale) est composé d'un feuillet et d'un interfeuillet. Un feuillet est formé de deux ou trois couches. Il existe deux types de couches :

- **La couche tétraédrique** (figure II.1) est formée de tétraèdre  $\text{Si}^{4+}$  entouré de quatre anions  $\text{O}^{2-}$  aux sommets. Son épaisseur est  $4,6 \text{ \AA}$  et son bilan des charges est  $-1$  ;

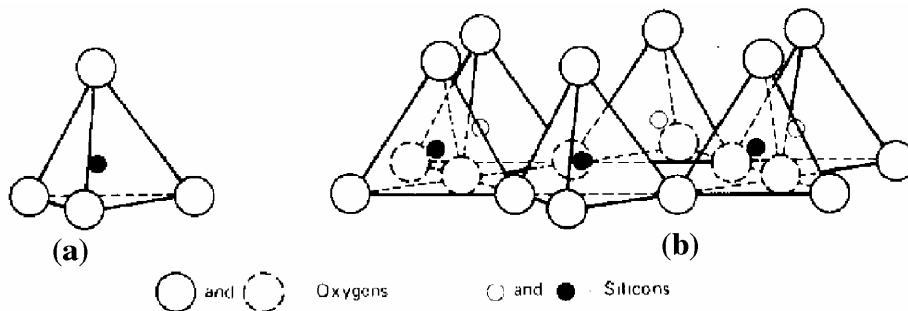


Figure II-1 : a) Unité tétraédrique à cœur de silicium; b) Schéma d'une couche de tétraèdre  $[\text{Si}_4 \text{O}_{10} (\text{OH})_2]^{6-}$  avec arrangement hexagonal.

- **La couche octaédrique** (figure II.2) est constituée par  $Al^{3+}$  ou  $Mg^{2+}$  entourés de six groupes hydroxyle  $OH^-$ . Son épaisseur est  $5,05 \text{ \AA}$  et son bilan des charges  $+1$ .

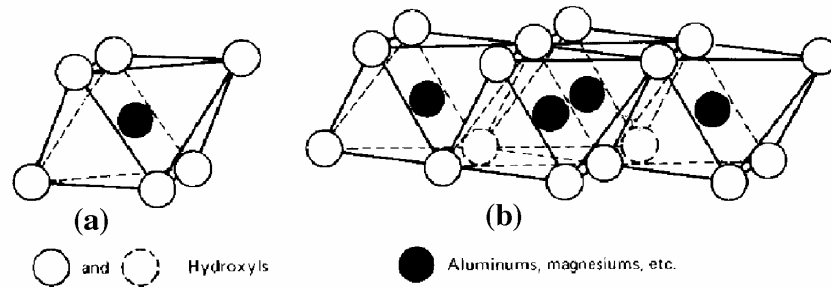


Figure II-2 : a) Unité octaédrique b) Structure en couche à base d'octaèdre de Brucite  $Mg(OH)_2$  ou de Gibbsite  $Al(OH)_3$ .

Suivant l'ordre d'empilement des couches octaédriques (O) et tétraédriques (T), les minéraux argileux sont classés en deux types :

- **Le type de feuillets TO ou 1:1** formé d'une couche tétraédrique T et d'une couche octaédrique O (figure II-3). Ces argiles, dont l'unité structurale de base est dissymétrique, sont représentées par le groupe des kaolinites et des serpentites, ces dernières étant beaucoup plus rares ;
- **Le type de feuillets TOT ou 2:1** formé d'une couche octaédrique O entourée de deux couches tétraédriques T. Ces argiles, qui présentent une unité structurale de base symétrique, comportent de nombreux groupes (illites, smectites, interstratifiés, chlorites, vermiculites) dont la structure et les propriétés sont très variables.

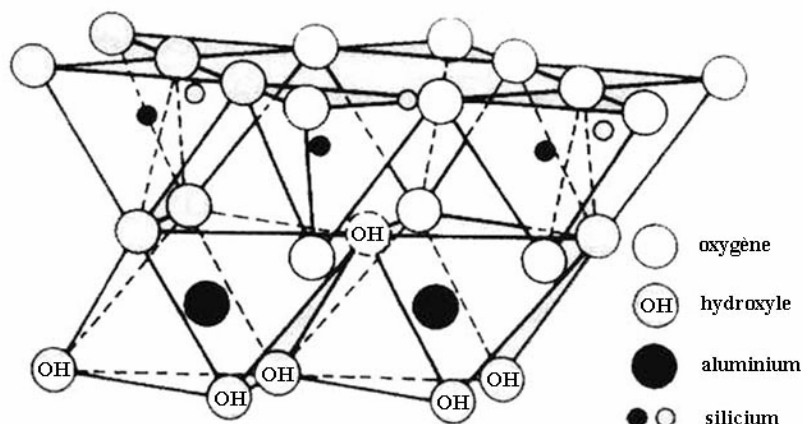


Figure II-3: Assemblage d'une couche octaédrique et d'une couche tétraédrique pour une argile TO (1:1).

Dans chacun des deux feuillets décrits précédemment, le cation peut être remplacé par un cation de taille voisine (pour « tenir » dans le site octaédrique ou tétraédrique), mais pas nécessairement de même valence. On parle de **substitution isomorphe** car les dimensions du feuillet restent quasi inchangées. Ces substitutions entraînent alors un excès de charges négatives à la surface des feuillets. Cette électronégativité des feuillets est une des caractéristiques fondamentales des argiles. L'électroneutralité est obtenue par adsorption de cations compensateurs à la surfaces des feuillets : cations ( $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Mg^{2+}$ ,  $Ca^{2+}$ ,  $Fe^{2+}$ ...) provenant du fluide.

Par ailleurs, les bords des cristallites possèdent aussi des charges localisées car ils correspondent à des ruptures de liaisons. La charge des tranches de cristallites dépend alors du pH (Grunberger 1995) : elle est négative en milieu basique, et positive en milieu acide (en raison de la fixation de protons  $H^+$  sur des ions  $O^{2-}$  présents sur ces bords). Nous verrons plus loin que cela a une incidence sur l'assemblage des cristallites.

### *II.2.1.c Classification des argiles*

Au sein même d'une couche ou entre deux couches successives d'un même feuillet, les liaisons inter atomiques sont des liaisons de valence primaire très fortes. Entre deux feuillets successifs, ces liaisons sont en général 10 à 100 fois moins fortes que les précédentes en raison des cations adsorbés : il s'agit de liaisons hydrogène et de forces d'attraction électrostatiques et de Van der Waals.

On sait que la molécule d'eau, à cause de sa dissymétrie, agit comme un dipôle électrique : le centre de gravité des charges négatives est différent de celui des charges positives. Les cations en solution sont entourés de molécules d'eau « captives » avec lesquels ils ont des liaisons ion-dipôle : on parle de sphère d'hydratation ou de solvatation.

Les cations adsorbés à la surface des feuillets peuvent l'être d'au moins trois façons différentes (Charlet et Schlegel 1999). Lors des substitutions au sein d'un feuillet, la charge est délocalisée au niveau d'atomes superficiels, créant de véritables sites d'attraction des cations à la surface, sous forme de cavités. Un grand nombre de cations, entourés de leurs sphères d'hydratation, sont attirés par la surface chargée négativement, en raison des seules forces électrostatiques, et restent à proximité de cette surface : on parle alors de couche diffuse, dont nous parlerons plus en détail plus tard. Lorsqu'un cation s'approche de la surface, il peut aussi être littéralement capté par ces sites de surface. Dans certains cas, le cation reste entouré de molécules d'eau d'hydratation et vient s'accoler à la surface, par des liaisons hydrogènes et, essentiellement, électrostatiques ; on dit qu'il forme un complexe de sphère externe, ou complexe hors sphère (CHS). Les forces d'attraction mises en jeu

diminuent rapidement avec la distance, donc un assemblage est d'autant plus stable (donc d'autant mieux lié) que la distance entre charge positive et négative est faible. Ainsi, lorsque le cation compensateur a des dimensions proches de celles des cavités de surface, l'excès de charge négative de la surface provoque la déshydratation du cation compensateur qui vient ensuite s'enchaîner à l'interface entre les feuillets, formant ce qu'on appelle un complexe de sphère interne (CSI). Un CSI est évidemment plus stable qu'un CHS, lui même plus stable qu'une liaison purement électrostatique de couche diffuse.

Du type de feuillets et de la nature de ces liaisons vont dépendre les propriétés — et la classification — des argiles. La figure II-4 donne une description schématique des différents minéraux argileux. A la lumière des informations précédentes, nous allons expliquer brièvement la composition et la structure des principaux minéraux.

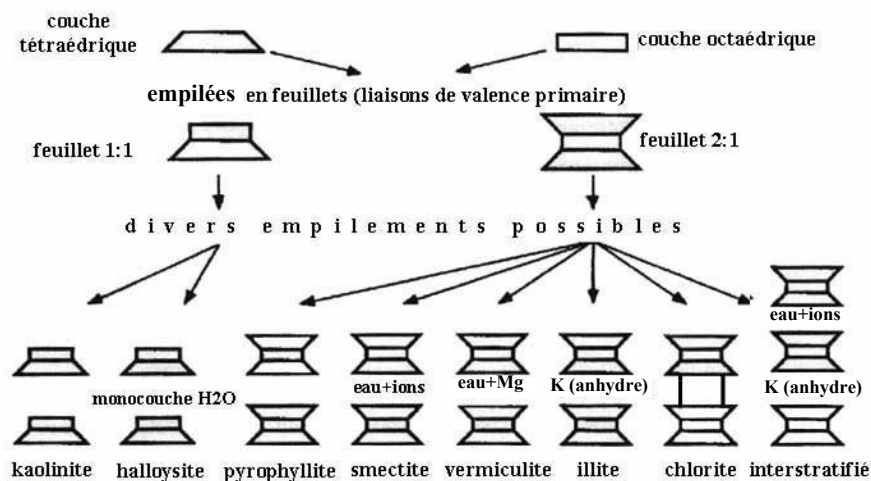


Figure II-4 : Représentation schématique de quelques groupes de minéraux argileux TO (1:1) et TOT (2:1).

Dans la famille des argiles 1:1, on distingue le groupe des kaolinites et celui des serpentinites (beaucoup plus rares, et dont nous ne parlerons pas). Chez les kaolinites, il y a en fait très peu de substitutions isomorphes, et la liaison face-à-face entre feuillets est assurée par des liaisons H entre les atomes d'oxygène de la base de la couche T et les atomes d'hydrogène du groupement hydroxyle de la couche O du feuillet suivant, et bien sûr à des liaisons de Van der Waals. Ces liaisons sont suffisamment fortes pour empêcher l'adsorption d'eau interfoliaire.

Les argiles 2:1 comportent de nombreux groupes, en raison des différentes liaisons possibles entre deux feuillets successifs — liaisons assurées par les cations compensateurs — :

- Dans le cas des illites, le cation compensateur est, nous l'avons dit, l'ion potassium  $K^+$  qui forme un CSI avec les deux feuillets entre lesquels il se trouve ; cette liaison des feuillets par

le potassium anhydre est si forte que les molécules d'eau ne parviennent pas à s'engager entre les feuillets.

- Lorsque le cation compensateur est majoritairement le magnésium  $Mg^{2+}$ , les hydroxyles interfeuillets arrivent à se réunir latéralement pour former avec cet ion une couche octaédrique supplémentaire, donnant naissance à un assemblage de type TOT-O très stable qui caractérise le groupe des chlorites. Ce type est parfois désigné 2:2.
- Les cations compensateurs des smectites sont le sodium  $Na^+$ , le calcium  $Ca^{2+}$  et en plus petite quantité potassium  $K^+$  et magnésium  $Mg^{2+}$ . Na et Ca forment des CHS, assurant une liaison interfeuillets plus faible, ce qui autorise l'adsorption de cations hydratés supplémentaires, et notamment de molécules d'eau (qui doivent être perçues ici comme des protons hydratés), par attraction électrostatique. Plusieurs couches d'eau peuvent ainsi être adsorbées entre les feuillets. Les argiles smectiques présentent une triple instabilité (Foucault & Raoult 1992) : *dégradation* (désorganisation des feuillets) par hydrolyse, ou au contraire *aggradation* au contact d'eaux interstitielles chargées d'un cation de potassium (fixation d'ions par CSI et transformation en illite : illitisation) ou de magnésium (réorganisation des feuillets et chloritisation), enfin par *déshydratation*.
- Les interstratifiés sont formés par l'alternance plus ou moins régulière de feuillets de natures différentes (par exemple illite-smectite, illite-chlorite, ...).

#### **II.2.1.d Organisation des argiles**

Les cristallites élémentaires peuvent, comme nous venons de le voir, s'assembler les uns avec les autres. On dit alors qu'il y a *coagulation* des cristallites, ou *floculation*. Les assemblages précédents, qui ont donné lieu à la classification des argiles, sont des assemblages face-à-face (*face to face*, FF) des cristallites. Le terme utilisé pour désigner ce type de coagulation est « agrégation », aboutissant à des particules selon notre terminologie. Mais il y a deux autres modes d'association des cristallites : côté à face (*edge to face*, EF) et côté à côté (*edge to edge*, EE), conduisant à des agglomérats (souvent appelés agrégats par les mécaniciens des sols, terme employé à juste titre car il y a bien en réalité mélange non homogène de minéraux divers, mais que nous préférons éviter ici puisque l'agrégation conduit à un empilement ordonné). Les agglomérats sont eux-mêmes organisés en assemblages.

A ces différents niveaux d'organisation correspondent quatre types de porosité différents (figure II-5) : porosité intra-particule (entre deux cristallites FF), porosité inter-particule (ou intra-agglomérat), porosité intra-assemblage, et porosité inter-assemblage.

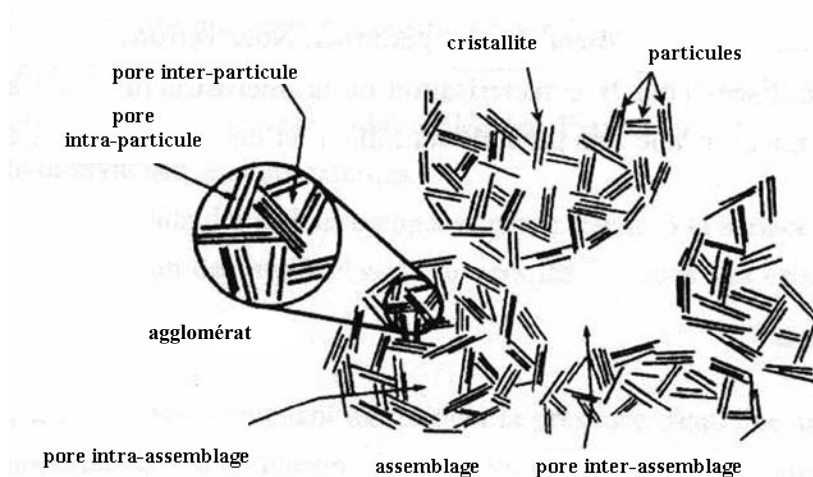


Figure II-5 : Description des différents niveaux de porosité dans les argiles (d'après Griffith et Jos, 1991).

Les deux types de coagulation sont des phénomènes complexes dépendant de la minéralogie et de la forme des cristallites en présence, mais aussi beaucoup du pH de la solution interstitielle (dont va dépendre la charge des cotés), de sa composition et des concentrations des différents ions métalliques.

## II.2.2 L'interaction eau-argile

Selon la force des liens unissant les feuillets d'argiles, ceux-ci autorisent ou non l'arrivée d'eau dans l'espace interfoliaire. Nous avons vu, avec la classification des argiles, que chez certaines argiles (kaolinites, illites), l'eau ne peut s'engager entre les feuillets. Ces argiles sont faiblement gonflantes. En revanche, dans les smectites, la faible liaison entre feuillets fait que chaque espace interfeuillelet peut s'hydrater ; les smectites font partie des argiles dites « gonflantes ». L'amplitude du gonflement dépend de l'état initial, bien sûr, et des contraintes appliquées, néanmoins la prise d'eau peut être telle que le matériau voit son volume multiplié par vingt.

Ainsi, dans certaines argiles, l'eau peut littéralement s'engouffrer dans l'espace interfeuillelet. Les feuillets s'écartent, et la liaison entre deux feuillets parallèles doit alors être assurée différemment, par exemple grâce à des liens transverses (associations EF ou EE). Il en résulte une réorganisation complète de la matrice solide (Tessier, 1978). Cette réorganisation est sans doute le premier des deux points essentiels permettant de distinguer le gonflement des argiles gonflantes du gonflement d'un autre matériau poreux.

Le deuxième fait essentiel du gonflement est que l'interaction eau-argile est liée aux ions présents dans l'eau. Les cations présents en solution sont attirés vers les surfaces des feuillets d'argiles

chargées négativement ; ils sont par ailleurs repoussés de ces surfaces par la force osmotique qui tend à uniformiser la concentration en cations dans la solution. Il résulte de ces deux effets opposés une certaine distribution des cations au voisinage des feuillets. De même, les anions, qui sont repoussés électrostatiquement par les feuillets, mais repoussés vers ceux-ci par osmose, ont une distribution spatiale particulière au voisinage des feuillets. Il en résulte que la distribution des ions dans l'espace interfoliaire est en général différente de celle dans les gros pores, ce qui se traduit par une différence entre les pressions osmotiques « internes » et « externes » aux particules, et donc par des forces exercées sur les feuillets et qui tendent à les écarter. Nous verrons plus loin les modèles utilisés pour estimer ces pressions osmotiques. Néanmoins, cela permet de comprendre l'origine du gonflement des argiles.

La différence entre les pressions osmotiques « internes » et « externes » aux particules est souvent appelée « pression de gonflement microscopique ». Nous l'étudierons dans le cas simple de feuillets parallèles. Nous verrons qu'elle est liée, entre autre, à l'écartement entre les feuillets et à la concentration de la solution.

## ***II.3 Propriétés macroscopiques***

### **II.3.1 Argiles tendres et argiles raides**

Du point de vue du comportement et des propriétés mécaniques, les roches argileuses se situent entre les sols et les roches. Certaines roches argileuses sont « tendres » et très déformables ; on parle alors d'argiles « plastiques ». D'autres sont peu déformables, et présentent un comportement plus fragile que ductile au delà de la limite d'élasticité : ces argiles sont dites raides.

De manière générale (voir Rousset, 1988), les argiles dites plastiques présentent une teneur en argile et en eau importante, tandis que les argiles « raides » sont marquées par la présence de carbonates et de quartz qui leur confèrent ce type de comportement. Mais cette tendance n'est pas toujours confirmée : le caractère déformable ou non des roches argileuses est lié à la minéralogie mais aussi à l'état de compaction du matériau. A grande profondeur (quelques centaines de mètres), les argiles sont souvent très compactes. Leur porosité et leur teneur en eau sont alors faibles, tandis qu'elles sont peu déformables et que leur résistance mécanique est élevée.

Ainsi, minéralogie, teneur en eau et profondeur du dépôt sont des indicateurs forts pour le classement des roches argileuses parmi les argiles plastiques ou raides. Il est toutefois difficile de fixer



précisément ces critères. Rousset (1988) et Ghoreychi (1997) ont néanmoins tenté une analyse des corrélations entre le comportement mécanique et les caractéristiques de la roche. Il ressort de leurs analyses que :

- la transition entre le matériau tendre et le matériau induré peut être caractérisée par le module d'Young, la résistance mécanique et le caractère ductile ou fragile.
- le module d'Young est bien corrélé avec la teneur en eau et donc la porosité.

### **II.3.2 Propriétés mécaniques caractéristiques des argiles**

Les roches argileuses présentent toujours, à des degrés divers, les comportements suivants : plasticité, viscoplasticité, endommagement. Du moins les essais mettent-ils en évidence des déformations irréversibles et, par suite, des comportements que l'on peut décrire par ces termes.

Du point de vue du comportement à court terme, il est souvent difficile de juger s'il s'agit de plasticité ou d'endommagement. Les deux théories permettent en général de décrire les phénomènes observés, et le choix de l'une ou de l'autre dépend souvent de l'emploi qu'on veut faire des lois ainsi mises en place. Ainsi, bien souvent, c'est la plasticité qui prime dans les lois utilisées au niveau des calculs d'ouvrages.

Pour les argiles raides, on peut penser qu'il s'agit plutôt d'endommagement dans la mesure où :

- les essais rapides de laboratoire mettent généralement en évidence une augmentation de volume irréversible, signe pour les roches de l'apparition d'un endommagement diffus ;
- les déformations irréversibles s'accompagnent souvent d'une perte de résistance et des propriétés élastiques (mais tel n'est pas toujours le cas pour les argiles raides) ;
- des chargements plus marqués conduisent à la rupture, qu'on peut évidemment plus facilement qualifier d'endommagement que de plasticité.

En fait, les mécanismes microscopiques qui se traduisent par les déformations irréversibles ne sont pas toujours bien compris pour les roches, et le choix de la bonne théorie à appliquer est délicat. Il est en général difficile de juger, entre plasticité et endommagement, quel phénomène est effectivement le bon. Ces phénomènes sont parfois couplés dans les modèles rhéologiques. Parfois aussi, l'endommagement est décrit en utilisant le formalisme de la plasticité.

Par ailleurs, pratiquement toutes les roches argileuses présentent un comportement différé irréversible (Rousset, 1988). Ce comportement est très marqué pour des argiles plastiques, nettement moins pour des argiles raides. Du fait de l'existence de déformations résiduelles après décharge, il ne

s'agit pas (du moins pas seulement) de viscoélasticité, mais plutôt de viscoplasticité. Cette viscoplasticité ne doit pas non plus être confondue avec la consolidation ou le comportement différé lié à la dissipation de la pression de pores.

Nous verrons au chapitre suivant différents modèles utilisés pour décrire l'ensemble de ces comportements. Nous ne tenterons pas alors d'identifier quelle théorie (plasticité, endommagement) est la mieux adaptée, et nous nous contenterons de présenter les modèles.

### **II.3.3 L'argile en tant que milieu poreux**

Deux approches sont utilisées pour les argiles : soit le matériau est considéré comme un milieu bi ou multiphasé composé d'un squelette solide et de pores remplis de fluide(s), soit le matériau est assimilé globalement à un solide auquel s'applique la mécanique des milieux continus.

Dans la pratique, le choix de l'une ou l'autre de ces approches dépend, pour une roche argileuse, du type de problème étudié et de la nature de la roche. De manière générale, on peut penser que la prise en compte du (des) fluide(s) est indispensable lorsque la roche est tendre ou lorsque les problèmes étudiés font intervenir des effets différés, tandis que la mécanique classique est adaptée pour l'étude de phénomènes à court terme pour des argiles raides. Mais cela n'est pas une règle stricte, et la question est toujours posée de savoir s'il faut utiliser une approche mécanique ou hydromécanique pour les argilites de l'Est par exemple (Kharkhour, 2002).

Plusieurs phénomènes, tels que la consolidation des sols et des roches, la dissipation de la pression interstitielle, les phénomènes d'imbibition/dessiccation, de gonflement/retrait, ou d'autres, intrinsèquement liés à la présence de fluides dans les pores (fissuration hydraulique, dilatation différentielle dans un four à micro-ondes), ne peuvent évidemment être étudiés sans une approche multiphasique. Ces phénomènes, qui relèvent de processus hydromécaniques couplés, ont d'autant plus d'importance que la teneur en eau est élevée ; plusieurs aussi sont liés à la perméabilité. Les argiles raides, dotés de porosités et de perméabilités très faibles, sont en général moins exposés à ces processus, du moins à court terme.

Toutefois, pour les sols en général et dans la plupart des cas pour les roches, l'argile est considéré comme un milieu poreux auquel on applique les préceptes et les théories, à cheval entre la théorie des mélanges et de la mécanique des milieux continus.

### II.3.4 Gonflement, retrait et dessiccation

Nous avons vu que les mécanismes microscopiques expliquant le phénomène de gonflement-retrait, observé pour certaines argiles, sont d'origine physico-chimique. Du point de vue macroscopique, ce phénomène est lié à la prise ou au départ d'eau (c'est-à-dire la variation de la teneur en eau). Les argiles sont ainsi souvent qualifiées de roches hydrophiles. Sur ce point, on ne sait pas forcément affirmer si c'est l'arrivée d'eau qui provoque le gonflement, ou bien si c'est le gonflement qui permet l'arrivée d'eau. Barbour et al. (1989) expliquent que les deux phénomènes coexistent :

- l'eau est susceptible de s'introduire dans un échantillon d'argile sous l'effet de gradients osmotiques ; l'arrivée d'eau induit une augmentation de volume.
- l'arrivée d'eau provoque une évolution de la solution interstitielle (en terme de concentration des différents solutés), et influe sur l'interaction eau-argile expliquée plus haut dans un sens qui provoque l'écartement des feuillets et donc le gonflement, l'eau s'engouffrant dans l'espace ainsi créé.

Le premier phénomène n'est pas spécifique aux argiles ; le deuxième l'est. Toutefois, lorsqu'on évoque le phénomène de gonflement, on oublie parfois qu'il intègre ces deux aspects.

Par ses deux aspects ci-dessus, le phénomène de gonflement-retrait est lié à l'état énergétique de l'eau. Il peut se produire aussi bien à l'état saturé qu'à l'état non saturé. C'est un aspect qu'on perd souvent de vue. Les essais qui permettent d'obtenir des cycles de gonflement/retrait sont appelés des essais d'« imbibition-drainage », « humectation-dessiccation » ou bien encore « sorption-désorption » (figure II-6). Ils sont réalisés en mettant des échantillons d'argiles dans des enceintes à hygrométrie contrôlée, c'est-à-dire des enceintes d'air humide dont on sait régler le degré d'humidité relative. Ce type d'essais est généralement pratiqué pour des milieux non saturés, et les courbes obtenues sont des courbes qu'on ne rencontre d'habitude que dans des manuels traitant de ces milieux. De fait, on oublie souvent que les argiles peuvent rester saturées jusqu'à des valeurs très faibles de l'humidité relative ; deux choses contribuent à cet état de fait :

- une roche argileuse fortement compactée présente essentiellement de petits pores, et peut d'après la loi de Laplace (ou Jurin) rester saturée dans une ambiance « non saturée » ;
- la présence de solutés divers dans l'eau interstitielle, ainsi que la relation eau-roche particulière des argiles abaisse fortement l'activité de l'eau de la roche, renforçant le phénomène précédemment décrit.

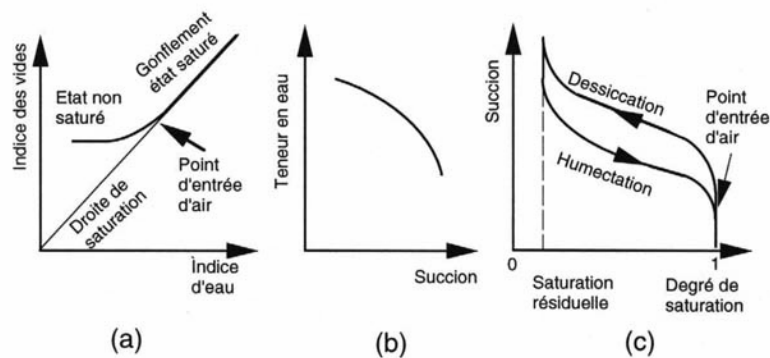


Figure II-6 : Courbes schématiques issues d'un essai de gonflement-retrait libre :  
 (a) : indice de vides-indice d'eau , (b) : teneur en eau-succion ;(c) : courbe de rétention (sorption-désorption).

Une roche argileuse peut ne commencer à se désaturer qu'à une forte succion, d'autant plus forte que les pores sont petits. En deçà de ce seuil, le cadre de la mécanique des milieux poreux (Coussy, 1991) peut s'appliquer en général. Lorsque le matériau est désaturé en revanche, la mécanique des milieux poreux non saturés, qui permet de tenir compte de phénomènes de capillarité, n'est vraisemblablement pas adaptée car, dans ce domaine des fortes succions, d'autres phénomènes (électrostatiques, d'adsorption) entrent en jeu dans les processus.

En même temps que le matériau argileux prend de l'eau, il gonfle. Si le gonflement est empêché, des contraintes se développent, qui peuvent être importantes. On parle alors de pression de gonflement. Pour caractériser le gonflement-retrait des argiles, nous avons les essais cités plus haut qui sont appelés en Mécanique essais de gonflement libre. Il existe aussi des essais de gonflement sous contrainte, réalisés souvent à ment, destinés entre autre à mesurer la (les) pressions(s) de gonflement. Tout comme l'amplitude du gonflement dans un essai de gonflement libre, la pression de gonflement d'une argile donnée va dépendre de l'état initial du matériau.

Notons enfin que le gonflement d'une roche argileuse dépendra non seulement de la minéralogie des constituants argileux, mais aussi de la texture (Bauer-Plaindoux et al., 1998), soit de l'agencement de ces minéraux parmi les autres constituants de la roche. Ainsi, une roche argileuse dont le constituant argile est gonflant peut ne pas présenter de gonflement macroscopique. C'est le cas des siltites du Gard, qui contiennent de la smectite et ne présentent aucune aptitude au gonflement, tandis que les argilites de l'Est sont qualifiées de gonflantes alors que les minéraux argileux qu'elle contient sont faiblement gonflants (à base d'illite).

### **II.3.5 Conclusion**

Nous avons expliqué, dans leur ensemble, les phénomènes susceptibles d'intervenir dans le comportement d'une roche argileuse. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter quelques modèles simples de ces différents phénomènes. Nous porterons une attention particulière au gonflement auquel nous consacrerons un chapitre indépendant.

# CHAPITRE III      MODELES DE COMPORTEMENT THM DES ARGILES

## **III.1 Introduction**

Au chapitre précédent, nous avons évoqué différents types de comportements possibles pour les argiles. Ici, nous allons tenter de mettre en revue différents modèles simples qui ont été utilisés pour décrire les argiles, au niveau mécanique. Ensuite nous décrirons les phénomènes thermique (de manière succincte) et hydraulique.

D'un point de vue de la mécanique, la présence de fluides dans les pores agit sur le comportement mécanique du milieu poreux, puisque ces fluides supportent une part des contraintes au sein du matériau : la déformation est affectée par le fluide. Certains auteurs conservent néanmoins une approche mécanique pure. D'autres utilisent le concept de contrainte effective. Nous faisons la distinction lorsque c'est nécessaire, mais pas si notre objectif est d'évoquer un concept donné, ou un type de loi donné, indépendamment de sa prise en compte dans les modèles. De plus, nous présentons le concept de contrainte sous la forme plus d'un historique que d'une analyse. Notre intention est sur ce point de montrer l'engouement que peut provoquer ce concept, qui est celui au travers duquel nous intégrons le gonflement au chapitre IV.

Comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, il existe une grande diversité d'argiles, concernant la mécanique tout du moins. Des différences marquées apparaissent entre les argiles des Mécaniciens des Sols et les marnes argileuses très indurées. Même entre deux argiles profondes, les différences peuvent être notables. Au niveau du comportement élastique, par exemple, les modules d'Young peuvent varier de quelques 200 MPa à peine (pour l'argile de Boom, située à Mol en Belgique, par exemple, d'après Barnichon, 1998) jusqu'à plus de 40GPa (argilites de Tournemire, d'après Ramambasoa, 2000). On classe souvent les argiles profondes en deux grandes catégories :

- Les argiles molles, appelées aussi argiles plastiques, pour lesquelles la teneur en eau est élevée (Rousset, 1988) ;
- Les argiles raides, à faible teneur en eau.

## III.2 Hypothèses

Pour l'étude des phénomènes THM intervenant dans un milieu poreux en général, nous utiliserons comme variables principales la température  $T$  (°C ou K), la pression de pores  $P$  (MPa) et le déplacement  $\underline{\xi}$  (en m), ou de manière équivalente la déformation  $\underline{\varepsilon}$  (sans unité).

Nous ferons toujours l'Hypothèse des Petites Perturbations en Mécanique. Sous cette hypothèse, la déformation s'écrit :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{\xi} + {}^t\underline{\nabla}\underline{\xi}) \quad (\text{équation de liaison}) \quad (\text{III.1})$$

Nous faisons de plus l'hypothèse de partition des déformations en :

- une déformation élastique  $\underline{\varepsilon}^e$  réversible,
- une déformation d'origine thermique (ou dilatation thermique)  $\underline{\varepsilon}^T$  réversible,
- une déformation irréversible instantanée ( $\underline{\varepsilon}^i$ ) quand elle existe : il s'agira parfois de plasticité ( $\underline{\varepsilon}^p$ ), ou d'endommagement ( $\underline{\varepsilon}^{end}$ ).
- une déformation différée irréversible (viscoplastique) quand elle existe :  $\underline{\varepsilon}^{vp}$ .

On écrit ainsi :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^T + \underline{\varepsilon}^i + \underline{\varepsilon}^{vp} \quad (\text{III.2})$$

## III.3 Equation d'équilibre mécanique

L'équilibre mécanique est régi par :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{f} = 0 \quad (\text{III.3})$$

où :

$\underline{\sigma}$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy (en MPa),

$\underline{f}$  est la densité massique des forces de volumes au point considéré (en N.kg<sup>-1</sup>),

$\rho$  est la masse volumique (en kg.m<sup>-3</sup>).

## III.4 Elasticité

### III.4.1 Loi de comportement élastique

En mécanique des milieux continus, la partie élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est reliée à la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  par la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0 = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e, \quad (\text{III.4})$$

$\underline{\underline{H}}$  désignant le tenseur de Hooke et  $\underline{\underline{\sigma}}_0$  la contrainte initiale.

### III.4.2 Poroélasticité

#### III.4.2.a La notion de contrainte effective

Pour les milieux poreux, on remplace souvent la contrainte dans (III.4) par la contrainte effective. La notion de contrainte effective, depuis son introduction par Karl Terzaghi en 1925, est à la base de la poromécanique. Le principe, dans le cas simple d'un milieu poreux saturé, en est le suivant : les déformations du milieu dépendent, a priori, de la contrainte mécanique appliquée  $\sigma$ , et de la pression  $P$  du fluide à l'intérieur des pores (interstitiel) ; on imagine aisément les actions opposées de ces deux chargements, par exemple que cette pression interne tend à forcer la dilatation des pores tandis que la contrainte externe agit dans le sens de leur fermeture. Aussi Terzaghi (voir Terzaghi, 1965) a-t-il postulé que la déformation est liée à la différence entre contrainte appliquée et pression, ce qu'il a nommé contrainte effective  $\sigma'$  :

$$\sigma' = \sigma - P. \quad (\text{III.5})$$

En d'autres termes, l'idée de Terzaghi était que la contrainte appliquée se répartissait de manière additive entre, d'une part, la contrainte dans le solide, et d'autre part la pression dans le fluide. En fait, la relation (III.5) s'est avérée valable dans le cas de sols granulaires saturés (cadre dans lequel elle fut d'ailleurs définie), et dans un certain nombre d'autres cas. Terzaghi avait alors fait l'hypothèse d'un



fluide incompressible. Coussy (1991) a montré que l'hypothèse de Terzaghi reposait également implicitement sur l'incompressibilité de la matrice solide.

Plus tard, Maurice Biot (1941), s'attachant à formuler une théorie tridimensionnelle en poroélasticité à partir de considérations énergétiques, montre la nécessité d'introduire, en plus des coefficients habituels en élasticité (coefficients de Lamé ou leurs équivalents), deux coefficients supplémentaires pour décrire un milieu poreux isotrope. L'un d'eux, noté  $b$  et appelé maintenant coefficient de Biot (l'autre étant le module de Biot), généralise la notion de contrainte effective par la relation (voir Coussy, 1991) :

$$\sigma' = \sigma - bP. \quad (\text{III.6})$$

Dès lors, la contrainte effective n'est plus perçue comme celle affectant le solide, mais bien comme celle responsable de la déformation du milieu, le coefficient de Biot étant une caractéristique du matériau, mesurable expérimentalement, à l'instar du coefficient de Poisson.

Selon les mécaniciens des sols, les relations (III.5) et (III.6) expriment que les déformations du milieu poreux saturé ne dépendent plus des deux variables indépendantes que sont la contrainte et la pression, mais d'une seule variable, combinaison linéaire des deux autres. En réalité, bien sûr, il y a toujours deux variables indépendantes, mais l'usage veut que, lorsqu'on parle d'une formulation « par variables indépendantes », cela signifie que la contrainte effective est une fonction plus complexe de ses arguments (ici contrainte et pression). Nous nous conformons à cet usage, bien qu'il provienne certainement d'une erreur (ancienne) de vision des phénomènes laissant croire que contrainte et pression seraient liés (comme lors d'un essai non drainé par exemple).

Toujours est-il que l'intérêt des formulations précédentes tient dans leur simplicité. Même la loi de Terzaghi (III.5), valable pour une grande classe de sols, est toujours très utilisée en mécanique des sols. Aussi les chercheurs ont-ils souvent cherché à étendre ces lois simples aux cas plus complexes des milieux polyphasiques, des milieux non saturés (sans doute un peu à part parmi les précédents), des argiles ...

#### ***III.4.2.b Cas de plusieurs fluides***

L'extension des formules précédentes au cas où plusieurs fluides coexistent dans l'espace interstitiel conduit à l'expression suivante, avec sommation sur les indices répétés :

$$\sigma' = \sigma - b_i P_i, \quad (\text{III.7})$$

dans laquelle l'indice  $i$  fait référence au fluide  $i$ .

Généralement, le coefficient de Biot étant considéré comme une caractéristique du milieu poreux, indépendant donc des fluides rencontrés, chaque coefficient  $b_i$  est relié au coefficient de Biot par une formule empirique, ou de façon théorique via par exemple le degré de saturation.

Par exemple, dans le cas de fluides non miscibles, si  $\phi$  désigne la porosité, et  $\phi_i$  la part de volume occupée par le fluide  $i$  (sa fraction volumique), la saturation volumique pour le fluide  $i$  est donnée par :

$$s_i = \frac{\phi_i}{\phi}, \quad (\text{III.8})$$

et la formule (III.7) peut être ramenée à :

$$\sigma' = \sigma - b(s_i P_i), \quad (\text{III.9})$$

qui exprime que chaque terme  $s_i P_i$  joue le rôle d'une pression partielle.

Dans le cas de fluides miscibles dans une des phases (liquide ou gazeuse), on n'utilise généralement qu'une seule pression pour l'ensemble de la phase. Dans le cadre d'un calcul d'ouvrage, il est nécessaire de fermer le système par des équations d'écoulement de chaque fluide ; s'il s'agit de gaz miscibles, on fait généralement l'hypothèse de gaz parfaits, et alors la pression de la phase est directement la somme des pressions  $P_i$  des gaz en question ; si en revanche on a affaire à des liquides miscibles, on ne considère plus qu'une seule phase fluide pour les écoulements, et on définit la concentration d'une substance dans l'autre.

Les formules précédentes sont utilisées par exemple dans le cas de l'air et de l'eau (milieu non saturé), de l'huile, de l'eau et du gaz (gisements pétroliers), ou bien, dans le cas de fluides miscibles, dans le cas de la saumure. Nous n'évoquons pas le transport de polluants pour lequel les études sont purement hydrauliques.

Ces approches ne tiennent pas compte des interactions que les fluides peuvent avoir avec le solide, ni en général entre elles.

### **III.4.2.c Milieux non saturés**

Ils constituent une classe à part parmi les milieux à écoulement polyphasique, et ont largement intéressés les mécaniciens, notamment des sols, à partir de la deuxième moitié du 20<sup>e</sup> siècle. Les

ménisques capillaires engendrent, contrairement aux pressions interstitielles positives, une attraction entre les grains. Cette succion capillaire peut être reliée à la pression via l'expression :

$$S = P_a - P_e, \quad (\text{III.10})$$

où  $S$  est la succion capillaire (parfois appelée, de façon impropre, succion matricielle),  $P_a$  la pression de l'air, et  $P_e$  celle de l'eau. Prenant la pression atmosphérique comme référence, et supposant que la pression de l'air lui est égale (ce qui est vrai au dessus de la frange capillaire), on parle alors de pression négative. En plus de la capillarité, et bien que les forces mises en jeu soient de nature différente (électrostatique), l'eau liée se trouve dans un état énergétique quantifiable également en terme de pression négative, ou de succion. En outre, il y a normalement trois variables indépendantes ( $\sigma, P_a, P_e$ ), mais l'égalité de  $P_a$  avec la pression de référence conduit les auteurs à ne plus considérer que deux variables :  $(\sigma - P_a)$ , renommée « contrainte totale nette » (c'est la part de la contrainte en excès par rapport à la pression atmosphérique), et  $(P_a - P_e)$  appelée succion (bien qu'il s'agisse, rappelons-le, uniquement de la part de la succion d'origine capillaire, soit en fait la pression capillaire).

Si on voulait appliquer la formule (III.9), en notant  $s_r$  le degré de saturation d'eau (indice  $r$  pour « relatif »), et en supposant que  $b = 1$  pour les sols, on obtiendrait simplement :

$$\sigma' = (\sigma - P_a) + s_r(P_a - P_e), \quad (\text{III.11})$$

Mais cette expression ne marche visiblement pas. Bishop (1959) propose une forme approchée de cette expression :

$$\sigma' = (\sigma - P_a) + \chi(P_a - P_e), \quad (\text{III.12})$$

où  $\chi$  est un paramètre variant de 0 pour les sols secs à 1 pour les sols saturés. Puis il établit, sur la base d'expériences (Bishop & Donald, 1961), une relation  $\chi = g(s_r)$  permettant de valider cette expression.

Très vite, cette relation simple a été remise cause pour les sols non saturés. Jennings et Burland (1962) mettent en évidence expérimentalement le phénomène d'effondrement : un échantillon sous contrainte constante, et initialement non saturé, est remouillé ; son volume diminue de façon brutale, alors que le modèle de Bishop prévoit son augmentation. Les auteurs exhibent un exemple pour lequel  $\chi = -2$ , montrent que la valeur de  $\chi$  dépend du chemin suivi dans l'espace  $(\sigma - P_a, P_a - P_e)$ . Ces

remarques sont en accord avec les phénomènes d'hystérésis (observables en partie dans les courbes de rétention, voir de Marsily 1981).

Par la suite, les nombreux auteurs ont utilisé une approche dite « en variables indépendantes » pour la mise au point de lois de comportement mécanique des sols non saturés. On peut citer par exemple Matyas et al. (1968), Alonso et al. (1990), Thomas et al. (1995). Nous devons remarquer la chose suivante : ces auteurs traitent tous d'un problème qui est différent de ce que nous avons évoqué tout d'abord à propos d'une forme simple pour la contrainte effective ; en effet, il s'agit toujours de compaction ou de rupture, c'est-à-dire à la limite du domaine d'élasticité (nous reviendrons plus en détail sur ce sujet lorsque nous étudierons le cas des argiles remaniées) ; dans le domaine élastique, en revanche, bien qu'aucun de ces auteurs ne l'admette pour autant (puisque cela irait sans doute à l'encontre de leur but), il n'est pas fait mention de phénomène qui remette fondamentalement en question l'expression (III.12). C'est un peu comme si on affirmait qu'une loi de comportement élastique n'est pas valable pour un matériau élastoplastique. D'ailleurs, en poroplasticité classique, personne n'affirme que la contrainte effective exprimée par (III.6) est valable également en plasticité.

Aujourd'hui, les mécaniciens des sols réutilisent davantage la contrainte effective (i.e. des formules simples du type de celle de Bishop), et la distinction des phénomènes réversibles et irréversibles est clairement posée. On pourra se reporter par exemple à Coussy et al. (1998). Certains auteurs prolongent le discours prônant l'approche par variables indépendantes (au sens impropre défini ci-avant) : Wei et al. (1998) prennent en compte l'énergie de l'interface liquide/gaz et montrent que si l'on souhaite utiliser la formule simplifiée de Bishop (III.12), alors le coefficient  $\chi$  dépend de manière complexe des fractions volumiques air et eau, de l'extension de l'interface, et des gradients de ces quantités.

#### ***III.4.2.d Conclusions***

La contrainte effective, initialement introduite comme étant la contrainte agissant sur le solide, a rapidement évolué vers son sens actuel, à savoir : la grandeur qui est responsable de la déformation (du solide). La simplicité de son expression sous la forme d'une combinaison linéaire a largement contribué à sa diffusion de par le monde, et son acceptation sous cette forme. Si les polémiques à propos de la validité de cette expression sont fondées, il n'en reste pas moins que le souci de simplicité des chercheurs, face au grand nombre de problèmes complexes rencontrés dans les milieux poreux, fait qu'elle s'ancre dans la mécanique des sols et des roches comme la formule de base.

L'intérêt de cette expression, outre sa simplicité, sa validité relativement étendue (nous ne l'avions pas dit jusque là, mais cela va de soi puisqu'elle perdure) et son applicabilité dans de nombreux domaines, c'est aussi son aspect visuel : pour un problème donné, on peut voir tout de suite quel phénomène non mécanique intervient dans la déformation.

### III.4.3 Loi de comportement et paramètres poroélastiques

Après cette analyse de la notion de contrainte effective en Mécanique des Sols et des Roches, nous revenons à la convention de signe habituelle en Mécanique, pour laquelle la contrainte est notée positivement en traction et négativement en compression. De même, pour les déformations, un allongement et une dilatance seront comptés positivement.

En poroélasticité, le tenseur de contrainte totale  $\underline{\underline{\sigma}}$  se partage en (relation de Biot) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} - b P \underline{\underline{1}} \quad (\text{III.13})$$

où :

$b$  est le coefficient de Biot,

$P$  est la pression interstitielle,

$\underline{\underline{\sigma'}}$  est le tenseur des contraintes effectives relié à la déformation élastique par :

$$d\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{H}}_o : d\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \quad (\text{III.14})$$

$\underline{\underline{H}}_o$  désignant le tenseur de Hooke d'élasticité (en conditions drainées).

Pour un matériau saturé, les essais mécaniques « non drainés » désignent les essais pour lesquels il n'y a pas de variation de masse, donc pas de perte ni de gain d'eau interstitielle. Ils permettent d'accéder à des caractéristiques dites non drainées (module d'Young et d'incompressibilité non drainés  $E_{nd}$  et  $K_{nd}$ , coefficient de Poisson non drainé  $\nu_{nd}$ ), ainsi qu'à des paramètres tels que le coefficient de Skempton  $B_s$ . Les essais « drainés » sont ceux pour lesquels la pression interstitielle est imposée aux bords des échantillons ; lorsque (quand cela est possible) que la variation de masse s'annule, on a accès aux caractéristiques drainées.

Les essais drainés et non drainés, ainsi que les mesures de porosité, permettent en général de caractériser le comportement poroélastique. Dans le cas d'un comportement isotrope, quatre

coefficients permettent de fixer la loi poroélastique. Les différents paramètres poroélastiques sont reliés par les relations rassemblées ci-après.

Module d'incompressibilité drainé  $K_o$ , non drainé  $K_{nd}$ , et des grains solides  $K_s$  :

$$K_o = K_{nd} - b^2 M \quad ; \quad 0 < K_o < K_{nd} < K_s \quad (III.15)$$

Coefficient de Biot  $b$  :

$$b = 1 - \frac{K_o}{K_s} \quad ; \quad 0 \leq b \leq 1 \quad (III.16)$$

Module de Biot  $M$  :

$$\frac{1}{M} = \frac{b - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f} \quad (III.17)$$

Coefficient de Skempton  $B_s$  :

$$B_s = \frac{M b}{K_{nd}} \quad , \quad 1 - \frac{K_o}{K_{nd}} < B_s < 1 \quad (III.18)$$

Coefficients de Poisson drainé  $\nu_o$  et non drainé  $\nu_{nd}$  :

$$\nu_o = \frac{1}{2} - \frac{3G}{6K_o + 2G} \quad \text{et} \quad \nu_{nd} = \frac{1}{2} - \frac{3G}{6K_{nd} + 2G} \quad (III.19)$$

avec,  $G$  est le module de cisaillement défini par :

$$G = \frac{E_{nd}}{2(1 + \nu_{nd})} = \frac{E_o}{2(1 + \nu_o)} \quad (III.20)$$

Module de Young drainé  $E_o$  :

$$E_o = 3K_o(1 - 2\nu_o) \quad (III.21)$$

Selon les paramètres que l'on considère comme connus (ou à peu près connus), il y a plusieurs façons d'en déduire les autres paramètres ; certaines conduisent à des équations du 2<sup>ème</sup>, voire du 4<sup>ème</sup> degré, avec la difficulté ensuite d'éliminer les solutions qui ne sont pas bonnes, surtout quand il s'agit de déterminer les domaines de validité des paramètres vis à vis des conditions (31) et (32). Il y a une possibilité d'écrire  $b$  de manière unique en fonction d'autres paramètres, via la formule :

$$b = \frac{\phi(K_s - K_{nd})(K_s - K_f)}{\phi K_s(K_s - K_f) + K_f(K_{nd} - K_s)} \quad (III.22)$$

où  $K_f$  désigne le module d'incompressibilité de l'eau ( $K_f \approx 2000$  MPa).

### III.5 Comportement irréversible instantané des argiles

La figure III-1, tirée de Rousset (1988) montre les résultats d'un essai de cycles réguliers charge – décharge réalisés à l'appareil triaxial sur des éprouvettes d'argile de Boom. Il y a clairement apparition de déformations irréversibles. On constate de plus que la variation de volume associée est faible. Cela permet de dire qu'il ne s'agit pas d'endommagement mais d'un comportement analogue à la plasticité (ou viscoplasticité) des matériaux monophasés.

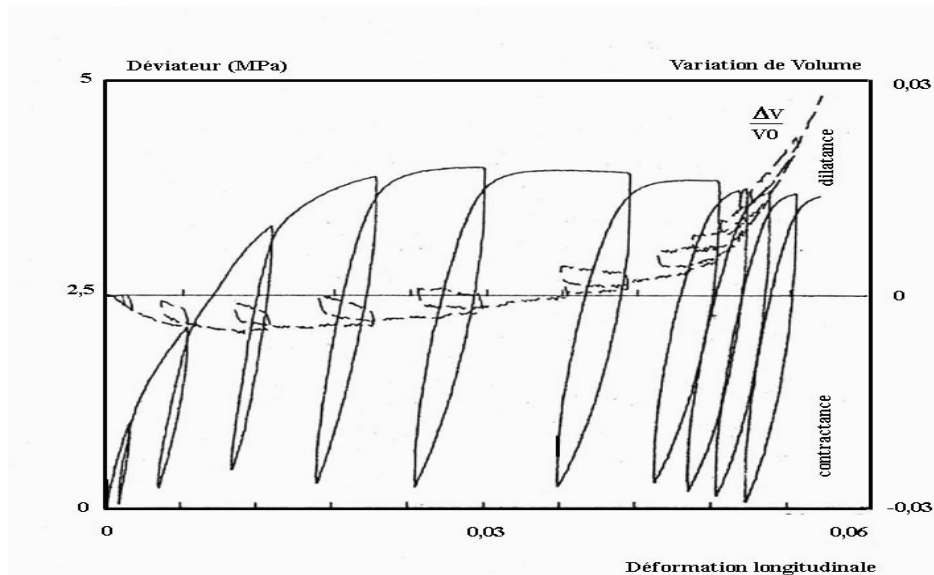


Figure III-1 : Résultat typique d'un essai triaxial sur une argile plastique (argile de Mol en Belgique)

Le comportement plastique est très prononcé pour les argiles plastiques. Son amplitude est plus faible pour les argiles raides. Pour ces dernières, d'ailleurs, l'attribution des déformations irréversibles instantanées à la plasticité ou à l'endommagement fait souvent l'objet de discorde. Nous développons cet aspect au §II.5.3.

#### III.5.1 Notations

Les différents modèles présentés ci-après, tant pour les aspects instantanés que différés, vont faire intervenir de manière récurrente différentes quantités et un certain formalisme qu'il est préférable de définir dans un premier temps, pour plus de clarté.

### III.5.1.a Contrainte déviatorique et invariants des contraintes

Quand un matériau est supposé isotrope au cours de son évolution, toute fonction scalaire du seul tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$ , comme par exemple des critères et potentiels en plasticité et viscoplasticité, peut s'exprimer en fonction des seuls invariants des contraintes, donnés par les relations suivantes :

$$I_1 = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^3) \quad (\text{III.23})$$

La contrainte moyenne  $\sigma_m$  est la moyenne des contraintes dans trois directions orthogonales ; elle vaut :

$$\sigma_m = I_1 / 3 \quad (\text{III.24})$$

La partie sphérique de  $\underline{\underline{\sigma}}$  est par définition le tenseur isotrope  $\sigma_m \underline{\underline{1}}$ .

La partie déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , appelée aussi déviateur de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , est le tenseur  $\underline{\underline{s}}$  défini par :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}} \quad (\text{III.25})$$

qui est de trace nulle.

Le premier invariant de  $\underline{\underline{s}}$  est, par définition, nul :

$$J_1 = \text{tr} \underline{\underline{s}} = 0 ; \quad (\text{III.26})$$

les deux autres, désignés par  $J_2$  et  $J_3$  :

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^2) = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \quad J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^3) \quad (\text{III.27})$$

sont souvent préférés à  $I_2$  et  $I_3$ .



En Mécanique des Sols et des Roches, on utilise généralement des termes dérivés de ces invariants :

- la contrainte moyenne  $\sigma_m$  ou la contrainte moyenne de compression :

$$p = -\sigma_m \quad (p > 0 \text{ en compression}) ; \quad (\text{III.27})$$

- la contrainte équivalente de Von Mises, notée  $\sigma_{eq}$  ou  $q$  :

$$q = \sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} ; \quad (\text{III.28})$$

- un paramètre adimensionnel  $J_m$  appelé géométrie des contraintes, compris entre -1 et 1, décrivant l'état de la contrainte déviatorique. Si le déviateur  $\underline{\underline{s}}$  est non nul,  $J_m$  est défini par :

$$J_m = \frac{3\sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot J_2^{3/2}} = \frac{27 \cdot J_3}{2 \cdot q^3} \quad (\text{III.29})$$

Le paramètre  $J_m$  permet de savoir si la structure est globalement en extension ou en compression, et ce dans le cas où le déviateur est non nul ; en conservant la convention des compressions négatives,  $J_m$  est positif en extension, négatif en compression.

Dans le cas où le déviateur  $\underline{\underline{s}}$  est nul, c'est-à-dire si on applique une contrainte isotrope, nous avons  $J_m = 0$ . Il convient de rappeler qu'à l'inverse, une valeur de  $J_m = 0$  ne signifie pas nécessairement que l'état de contrainte est isotrope (par exemple,  $J_m = 0$  en paroi d'une galerie circulaire creusée en milieu infini, si la contrainte initiale avant creusement est isotrope).

$J_m$  est lié à l'angle de Lode  $\theta$ , et on a  $J_m = \sin 3\theta$ .

Nous utiliserons enfin la notion de contraintes principales : il s'agit des valeurs propres de la matrice 3x3 représentant le tenseur des contraintes. On les notera dans la suite  $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$ , toujours avec la convention des tractions positives.

### **III.5.1.b Correspondance en contrainte effective**

Quand on utilise la contrainte effective  $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + bP\underline{\underline{1}}$ , les invariants sont notés, selon le même ordre que ci-avant,  $I'_1$ ,  $I'_2$  et  $I'_3$ . De même, la contrainte effective moyenne et celle de compression sont notées  $\sigma'_m$  et  $p'$  respectivement. Enfin,  $\underline{\underline{\sigma}}'$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  ont le même déviateur  $\underline{\underline{s}}$ .

### III.5.1.c Formalisme de la plasticité

La plasticité est ici expliquée pour un milieu continu pour lequel la représentation des efforts intérieurs peut être donnée par l'expression du champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Pour un milieu poreux, ce champ de contraintes est remplacé par le couple  $(\underline{\underline{\sigma}}, P)$ .

Le formalisme de la plasticité peut être résumé (Salençon, 1994) comme étant schématiquement une réponse aux deux questions suivantes :

- Quand y a-t-il plasticité ?
- Comment le matériau se déforme-t-il plastiquement ?

La réponse à la première question est donnée par la notion de seuil : on admet l'existence d'un domaine, dans l'espace des contraintes, à l'intérieur duquel le matériau est (par exemple) élastique. Ce domaine peut être décrit par une fonction scalaire  $f$  de  $\underline{\underline{\sigma}}$  telle que :  $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$  à l'intérieur du domaine,  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  sur la frontière, et  $f(\underline{\underline{\sigma}}) > 0$  à l'extérieur.

La plupart des matériaux plastiques sont dits écrouissables. Cela signifie que le seuil de plasticité (ou la limite du domaine d'élasticité) évolue quand le matériau se plastifie. On traduit ce phénomène en faisant dépendre la fonction  $f$  de manière indirecte de la déformation plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ , en l'exprimant sous la forme  $f(\underline{\underline{\sigma}}, E)$  où  $E$  est une variable décrivant l'état d'écrouissage.

On parle d'écrouissage du matériau si, lorsque la contrainte croît, le matériau se plastifie, mais en même temps le matériau se consolide, tant et bien que la déformation ne peut progresser que si la sollicitation augmente. Ainsi, le domaine élastique s'accroît. En plasticité, donc, l'écrouissage exprime que le domaine élastique se modifie et s'étend jusqu'au dernier niveau de sollicitation qui a fait se plastifier le matériau. L'état  $f > 0$  n'est donc jamais atteint. Ce constat est à la base de la théorie, pour laquelle  $f$  est astreinte à rester toujours négative ou nulle, et on appelle **critère de plasticité** la condition  $f = 0$ . Dans la pratique, on désigne en fait la fonction  $f$  elle-même par critère de plasticité.

Pour être plus précis, l'écrouissage est dit positif lorsque le domaine d'élasticité s'accroît, et négatif dans le cas contraire. Certains matériaux se plastifient sans écrouissage : on parle alors de plasticité parfaite.

Enfin, on dit que le matériau est en charge (respectivement en décharge) lorsque, la sollicitation  $\underline{\underline{\sigma}}$  se trouvant sur la frontière du domaine, on donne une variation  $d\underline{\underline{\sigma}}$  dirigée vers l'extérieur (resp. vers l'intérieur) du domaine. Le critère  $f$  est ainsi parfois appelé **fonction de charge**, et la frontière du domaine dénommée **surface de charge**.

La règle d'écoulement plastique est la manière mathématique de répondre à la deuxième question. Il y a déformation plastique uniquement en cas de charge. On décrit généralement la règle d'écoulement sous la forme d'une loi en vitesses du type :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{III.30})$$

où :

- $g$  est le potentiel dont dérive la règle d'écoulement,
- $\lambda$  est un scalaire, appelé multiplicateur plastique, supposé linéaire en  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ , dépendant a priori de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de l'état d'écrouissage  $E$ , et tel que :

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \\ \lambda = 0 & \text{si } f < 0 \text{ ou } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

On parle de **loi associée** lorsque le potentiel correspond au critère. En un point régulier de la frontière,  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  est ainsi d'après (III.30) colinéaire à la normale extérieure de la frontière du domaine non plastique en  $\underline{\underline{\sigma}}$ . C'est la règle de normalité (qui « associe » la règle d'écoulement au critère). En un point singulier de la frontière, toutes les directions appartenant au cône des normales extérieures sont possibles pour  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$ . Si, de plus, la fonction de charge est convexe (ainsi que le domaine), on dit que le matériau est dit **standard** ; il vérifie alors le principe du travail plastique maximal énoncé par Hill (1950) cité par Salençon (1994).

En charge, la condition  $\dot{f} = 0$  est parfois appelée **relation de consistance**. Elle permet, dans le cas d'un matériau standard à écrouissage positif, de déterminer la valeur du multiplicateur plastique.

## III.5.2 Modèles d'élastoplasticité pour les argiles plastiques

### III.5.2.a Caractéristiques générales

De manière générale (Su, 1998 ; Charlez, 1994), les sols et les argiles plastiques présentent un comportement élastoplastique tel que :

- L'élasticité est fortement non linéaire, caractérisée par une évolution exponentielle du module d'incompressibilité avec la contrainte (ou la déformation élastique) ;
- Sous l'effet d'un chargement, isotrope comme déviatorique, l'argile est susceptible de se plastifier et présente un écrouissage qui évolue de manière exponentielle avec le chargement.

Les modèles les plus répandus permettant de décrire le comportement élastoplastique des argiles plastiques sont des modèles appartenant à la famille « Cam Clay », développés au départ par l'université de Cambridge pour la Mécanique des Sols. Ces modèles, utilisés pour des argiles peu compactes, utilisent en général l'indice des vides  $e$  comme variable en lieu et place de la déformation linéarisée (et l'indice des vides plastique  $e_p$  au lieu de la déformation volumique plastique ou de la distorsion plastique, comme variable interne pour l'évolution de l'écroissage). L'indice des vides est le rapport du volume de pores sur le volume de solide ; il est relié à la porosité  $\phi$  par la relation :

$$e = \frac{\phi}{1 - \phi} \quad (\text{III.32})$$

Les courbes contrainte-déformation sont souvent tracées dans le repère  $(\log p', e)$ . Nous présentons figure III-2 une courbe schématique issue d'essais de compression obtenus avec une argile plastique. On distingue deux pentes caractéristiques : une pente  $\lambda$  de consolidation, et une pente élastique  $\kappa$  appelée parfois pente de gonflement. Ces pentes sont reproduites par les modèles utilisés en mécanique des sols.

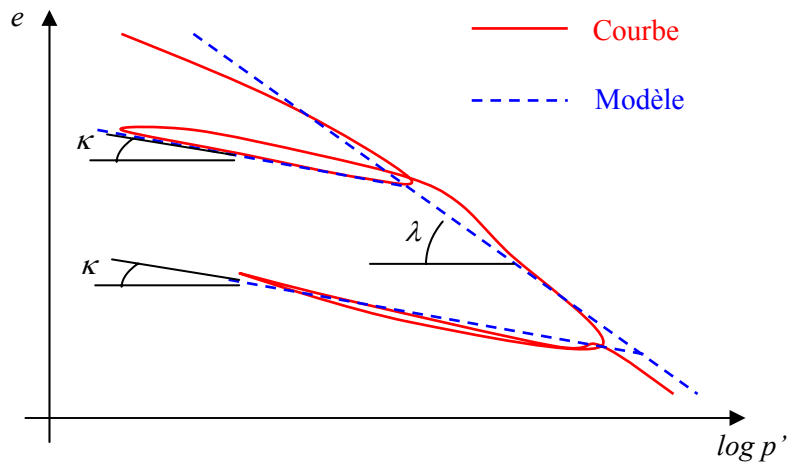


Figure III-2 : courbe schématique d'un résultat d'essai de compression sur une argile peu compactée.

### III.5.2.b Modèle de « Cam Clay Modifié »

Le modèle le plus connu est sans doute le modèle dit de « Cam Clay Modifié ». Il est basé sur l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Nous le décrivons en fonction à la fois des variables indice des vides  $e$  et déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Le matériau est élastoplastique :  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ . En outre, la déformation est pilotée par la contrainte effective  $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + bP$ .

La présentation que nous faisons de ce modèle n'est pas habituelle. Elle peut sembler quelque peu obscure pour ce qui concerne la part élastique du comportement. Toutefois, elle permet d'éviter certaines inconsistances mathématiques dans les relations, généralement liées à la limite du modèle aux faibles chargement (problème de logarithmes).

Les propriétés mécaniques sont supposées isotropes. Le coefficient de Poisson drainé  $\nu_o$  est supposé constant, et le modèle relie de manière affine le module d'incompressibilité drainé  $K_o$  à la contrainte effective moyenne  $\sigma'_m = -p'$ , exprimée par la loi incrémentale suivante :

$$dK_o = -\gamma d\sigma'_m = \gamma dp' , \quad (\text{III.33})$$

où  $\gamma$  est un paramètre dont l'expression sera précisée plus loin. Le module d'Young drainé  $E_o$  varie de manière homothétique avec  $K_o$  puisque leur rapport est fonction uniquement de  $\nu_o$  constant. La déformation élastique volumique  $\varepsilon_v^e = tr \underline{\underline{\varepsilon}}^e$  est alors donnée sous forme incrémentale par :

$$d\varepsilon_v^e = \frac{d\sigma'_m}{K_o(\sigma'_m)} . \quad (\text{III.34})$$

La plasticité du modèle est standard : critère et potentiel plastiques sont identiques, et définissent un domaine d'élasticité de forme elliptique dans le plan  $(p', q)$  qui évolue avec la déformation plastique (écrouissage). La fonction de charge est exprimée sous la forme :

$$f(p', q, p_{cr}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{q^2}{m^2} + (p' - p_{cr})^2 - p_{cr}^2 \right] \quad (\text{III.35})$$

Ce modèle dépend donc de deux paramètres  $m$  et  $p_{cr}$ . Le premier, appelé « pente de l'état critique », reste constant lors de toute évolution du matériau et sépare, sur la frontière du domaine élastique, les domaines de comportement plastique contractant et dilatant. Le second ( $p_{cr}$ ) est une force d'écrouissage. Dans le plan  $(p', q)$ , les ellipses correspondant aux différentes valeurs de  $p_{cr}$  (figure III-3) passent par l'origine, présentent leur maximum pour  $p' = p_{cr}$ , et interceptent l'axe des abscisses pour une valeur  $p' = p_{cons} = 2 p_{cr}$  qui correspond à la limite d'élasticité courante du matériau sous chargement hydrostatique, et est appelée « pression de consolidation ».

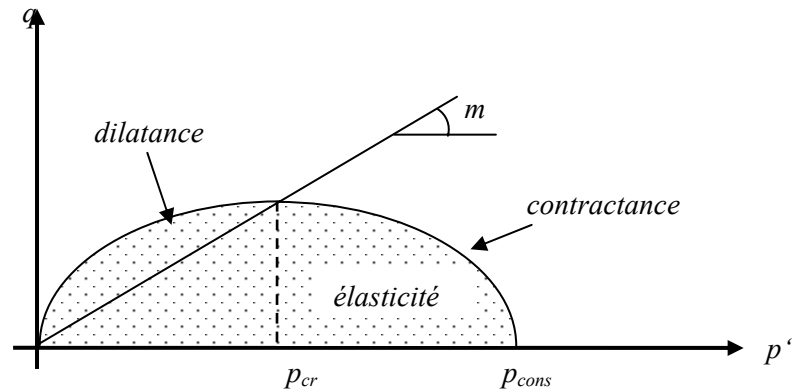


Figure III-3 : surface de charge du modèle de Cam-Clay dans le diagramme  $pq$ .

La loi d'écrouissage est donnée par une loi d'évolution exponentielle de  $p_{cr}$  avec la déformation plastique :

$$\frac{dp_{cr}}{p_{cr}} = -\tau d\varepsilon_v^p \quad (\text{III.36})$$

où  $\varepsilon_v^p$  désigne la déformation plastique volumique, et  $\tau$  est un paramètre.

Dans la pratique, l'état critique est obtenu lorsque la résistance résiduelle du matériau est atteinte. Le paramètre  $m$  est ainsi relié, dans le modèle, à l'angle de frottement résiduel  $\varphi_r$  de la roche :

$$m = \frac{6 \sin \varphi_r}{3 - \sin \varphi_r} \quad (\text{III.37})$$

Pour relier les paramètres  $\gamma$  et  $\tau$  aux pentes caractéristiques  $\kappa$  et  $\lambda$ , nous considérons une expérience fictive. Soit un échantillon de matériau, consolidé au préalable à une pression de consolidation  $P_c$ . On soumet ce matériau à un chargement de compression isotrope croissant.

Au début de l'essai (fictif), le matériau est libre de contrainte. Son module d'incompressibilité drainé initial est noté  $\hat{K}_o$ . Au cours du chargement, le chargement  $p'$  croît, et le module d'incompressibilité drainé  $K_o$  vaut, en intégrant (III.33) :

$$K_o = \hat{K}_o + \gamma p' = \gamma(p' + p'_0) \quad (\text{III.38})$$

où  $p'_0$  est un paramètre que nous appellerons « pression de référence ».

Tant que  $p'$  est inférieur à la pression de consolidation  $P_c$ , le comportement est purement élastique. L'intégration de (III.34), depuis l'état initial jusqu'à la contrainte  $p'$ , donne avec (III.38) et  $\sigma'_m = -p'$ , :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e = -\frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{p' + p'_0}{p'_0} \right) \quad (\text{III.39})$$

quand le chargement dépasse  $P_c$ , le matériau s'écroute selon la loi incrémentale (III.36), soit, après intégration :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p = -\frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{p' + p'_0}{p'_0} \right) - \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{p' + p'_0}{P_c + p'_0} \right) \quad (\text{III.40})$$

On note  $e_0$  l'indice des vides initial. L'indice des vides peut être relié à la déformation (d'après l'HPP) par la relation :

$$\varepsilon_v = \frac{e - e_0}{1 + e_0} \quad (\text{III.41})$$

Utilisant l'indice des vides au lieu de la déformation, les relations (III.39) et (III.40) deviennent :

$$\bullet \text{ Si } p' < P_c, e = e_0 - \frac{1+e_0}{\gamma} \ln\left(\frac{p' + p'_0}{p'_0}\right) \quad (\text{III.42})$$

$$\bullet \text{ Si } p' > P_c, e = e_0 - \frac{1+e_0}{\gamma} \ln\left(\frac{P_c + p'_0}{p'_0}\right) - \left(\frac{1+e_0}{\gamma} + \frac{1+e_0}{\tau}\right) \cdot \ln\left(\frac{p' + p'_0}{P_c + p'_0}\right) \quad (\text{III.43})$$

Selon les expressions (III.42) et (III.43), la courbe d'indice des vides en fonction du logarithme de  $(p' + p'_0)$  présente effectivement deux pentes constantes. L'identification des paramètres est immédiate :

$$\kappa = \frac{1+e_0}{\gamma} \quad \text{et} \quad \lambda = \left(\frac{1+e_0}{\gamma} + \frac{1+e_0}{\tau}\right),$$

soit encore :

$$\gamma = \frac{1+e_0}{\kappa} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa}. \quad (\text{III.44})$$

### III.5.3 Endommagement et rupture des argiles raides

Pour les argiles raides, qui présentent une rupture fragile, on qualifie le comportement irréversible avant-rupture d'endommagement plutôt que de plasticité, même si souvent la théorie de la plasticité est appliquée en raison de sa simplicité, en regard de la théorie de l'endommagement dont les modèles sont plus difficiles à implanter dans des codes de calcul.

#### III.5.3.a Généralités

On distingue l'endommagement, phénomène de micro-fissuration induisant une dilatance visible expérimentalement, de la rupture, caractérisée par des macro-fissures et à partir de laquelle les propriétés du matériau, tant élastiques que de résistance, sont susceptibles d'être considérablement dégradées (expérimentalement, le critère de rupture est le lieu des pics de contraintes). Entre endommagement et rupture, les propriétés du matériau peuvent également évoluer.



Lors d'essais uniaxiaux et triaxiaux avec chargement croissant, le matériau présente une évolution en trois étapes (figure III-4) :

- 1) une phase élastique quasi-linéaire ;
- 2) une phase d'endommagement au delà d'un certain seuil de chargement, correspondant à l'initiation et à l'évolution d'une micro-fissuration du matériau et caractérisée par une augmentation de volume irréversible (dilatance irréversible), ou encore par une augmentation de volume total de l'échantillon en compression et une accélération de la dilatation en extension ;
- 3) une rupture du matériau correspondant à la résistance maximale du matériau sous le chargement imposé, et suivie d'une perte de résistance immédiate, celle-ci atteignant sa valeur dite "résiduelle".

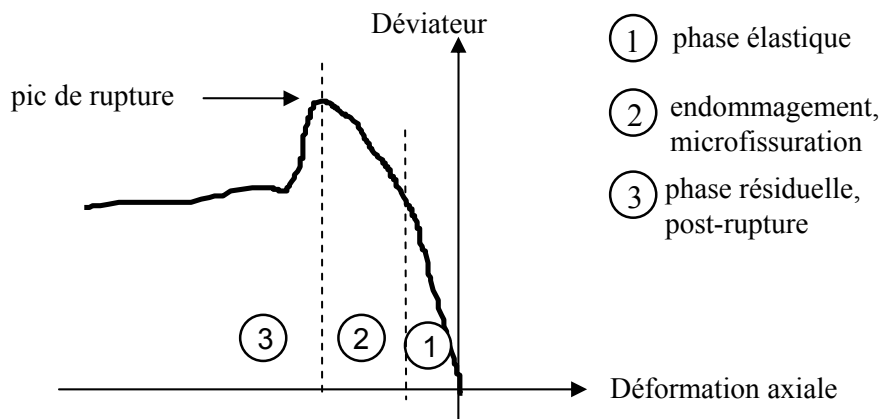


Figure III-4 : Schéma des phases de comportement d'une roche lors d'un essai de compression uniaxiale ou triaxiale.

L'endommagement et la rupture surviennent pour les argiles raides au delà d'un certain seuil de déviateur (un seuil pour l'initiation de l'endommagement, et un seuil pour la rupture). Ce seuil augmente avec la contrainte moyenne de compression  $p$ , mais ce d'autant plus faiblement que  $p$  est élevée. Les critères d'endommagement et de rupture, exprimés dans le plan « contrainte normale-contrainte de cisaillement » ( $\sigma, \tau$ ) (plan de Mohr) ou « contrainte moyenne- contrainte déviatorique », sont d'allure parabolique (figure III-5). Ils ne doivent donc être assimilés à des droites (critère de Mohr-Coulomb ou celui de Drucker-Prager) que dans un intervalle limité de la contrainte moyenne. Précisons, en outre, que pour les roches argileuses, comme pour la plupart des géomatériaux, l'initiation de l'endommagement et de la rupture est précoce en extension par rapport à la compression. Ce phénomène peut être pris en compte par exemple à l'aide de la géométrie des contraintes  $J_m$ .

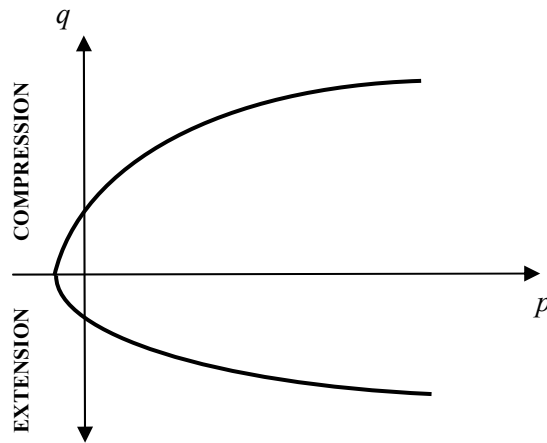


Figure III-5 : critère typique d'initiation de l'endommagement ou de rupture des argiles raides dans le plan  $(p,q)$

### III.5.3.b Théories utilisées

Deux approches s'offrent pour la mise au point de la loi d'endommagement d'une argile raide : celle habituellement considérée comme étant l'approche classique d'endommagement (Lemaitre & Chaboche , 1985), utilisant la variable d'endommagement  $D$ , et une approche fondée sur le formalisme de la plasticité.

Dans l'approche classique, la variable  $D$ , définie comme étant une densité surfacique de discontinuités de la matière, décrit globalement la présence de microdéfauts. Cette variable est nulle pour le matériau vierge ( $D = 0$ ), et vaut une valeur critique à la rupture ( $D = D_c \leq 1$ ). Elle conduit directement à la notion de contrainte effective  $\underline{\tilde{\sigma}}$  qui représente la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts ( à ne pas confondre avec la contrainte effective définie dans le cadre de la mécanique des milieux poreux), et qui vaut :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{1 - D} , \text{ avec } 0 \leq D < D_c . \quad (\text{III.45})$$

Cette approche permet de rendre compte de l'évolution des propriétés élastiques au cours de l'endommagement. Plusieurs modèles (proches entre eux) ont été mis au point par Shao et Lydzba (1999), Chiarelli (2000) et Aublivé (2001) dans le cadre de la mécanique des milieux poreux.

L'approche fondée sur le formalisme de la plasticité offre l'avantage d'être plus simple, et permet de reproduire correctement les essais, même si les mécanismes responsables d'un endommagement sont distincts de ceux de la plasticité ; en effet, les premiers sont liés à la fissuration alors que la plasticité traduit une déformation continue du matériau. C'est d'ailleurs pour cette raison que dans le formalisme classique de la plasticité, les propriétés élastiques sont considérées constantes. Tel n'est pas rigoureusement le cas des argiles raides, même si les propriétés élastiques évoluent peu, notamment dans la phase précédant la rupture. Nous privilégions cette approche.

### ***III.5.3.c Choix du type de critère***

La détermination d'expressions mathématiques pour définir des surfaces de charges (comme les critères d'endommagement, de rupture et de résistance résiduelle) est une étape nécessaire préalable à la modélisation numérique.

Bien souvent, le trajet de charge imposé par l'expérimentation est très spécifique, la géométrie de l'échantillon souvent cylindrique impose aussi une symétrie radiale du chargement. En raison du nombre insuffisant d'essais ou du caractère "tronqué" des informations qu'on peut en tirer, la mise en place de critères nécessite de faire :

- des hypothèses sur le comportement : on suppose par exemple que le critère ne dépend que de la contrainte, ou bien que le matériau est isotrope ;
- des choix arbitraires : typiquement, des essais triaxiaux ne permettent pas de connaître le rôle de la contrainte principale intermédiaire  $\sigma_{II}$  dans le critère ; il faut donc faire le choix de faire intervenir ou non  $\sigma_{II}$  dans la loi lors de l'extrapolation 3D.

#### **forme du critère**

Il ressort de la plupart des résultats expérimentaux que la contrainte moyenne (ou le confinement) a une certaine influence lorsqu'elle est faible, puis de moins en moins d'influence en augmentant ; c'est-à-dire que, du côté des très grandes pressions, on tend vers un critère ne dépendant que du déviateur.

Ensuite, le choix de l'équation du critère dépend de l'usage qu'on veut faire du modèle rhéologique : on cherchera à l'adapter au mieux à la gamme de contraintes qui seront a priori rencontrées dans les modélisations à effectuer.

Ainsi, sur une large gamme de contrainte moyenne, on choisira plutôt un critère non linéaire (parabole, hyperbole...) de façon à tenir compte de la diminution progressive de l'influence de la

contrainte moyenne lorsque celle-ci augmente en valeur absolue. En revanche, sur une faible plage de contrainte moyenne, on pourra se contenter d'une droite.

N.B. : si on veut garder un vocabulaire adapté aux critères de type courbe intrinsèque, on peut remplacer le terme de "contrainte moyenne" par l'expression "contrainte principale la plus faible en valeur absolue" ; mais le sens est le même. En fait, dans le domaine des compressions fortes ( $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I \leq 0$ ), c'est  $|\sigma_I|$  qui est la contrainte principale la plus faible en valeur absolue. On

voit bien que  $p \geq \frac{|\sigma_I| + |\sigma_{II}| + |\sigma_{III}|}{3} \geq |\sigma_I|$ , de sorte que si  $|\sigma_I|$  est grand, p aussi est grand. A

l'inverse, on a :

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \geq \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{\sqrt{2}} ; \quad (\text{III.46})$$

Lorsque p augmente, son influence sur le déviateur limite q diminue, donc  $\sigma_I - \sigma_{III}$  augmente de moins en moins vite, ce qui signifie que  $|\sigma_I|$  augmente aussi. Ainsi, les deux expressions sont équivalentes dans ce contexte.

Dans ce choix, il faut garder à l'esprit que le critère sera exprimé sans doute en contrainte effective et que, pour un état de contrainte donné, une évolution du champ de pression interstitielle induit une variation de la contrainte effective moyenne ; par exemple, l'écoulement dans une galerie fera augmenter la contrainte effective moyenne. Par ailleurs, le comportement viscoplastique ira certainement dans le sens d'une diminution de la contrainte moyenne, du moins en paroi des ouvrages. Il faut aussi tenir compte d'autres aspects, tels le chargement thermique, les effets de structures susceptible de rentrer dans le domaine de la traction. La variation de la contrainte moyenne peut donc se faire dans les deux sens, sur une plage relativement incertaine étant donné la complexité des phénomènes et couplages intervenant. Un critère non linéaire est donc plus adapté dans notre cas.

### **critères de type courbe intrinsèque**

Les critères dits "de type courbe intrinsèque" sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :

- 1° - il ne font intervenir que les contraintes principales extrêmes ;
- 2° - on compare  $\sigma_I - \sigma_{III}$  à une fonction de  $\sigma_I + \sigma_{III}$ .

On a alors :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - g(\sigma_I + \sigma_{III}) . \quad (\text{III.47})$$

En se plaçant dans le plan de Mohr, on remarque que :

$R = (\sigma_I - \sigma_{III})/2$  est le rayon du cercle de Mohr, et

$-\xi = (\sigma_I + \sigma_{III})/2$  est l'abscisse du centre de ce cercle.

Le critère peut donc se mettre sous la forme (à un facteur 1/2 près) :

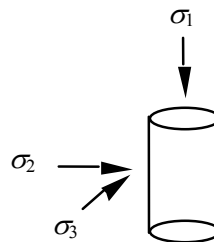
$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = R - R(\xi) , \quad \text{avec} \quad R(\xi) = \frac{1}{2} g(-2\xi).$$

Ainsi, la condition d'état limite  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  exprime une relation entre le rayon du cercle de Mohr correspondant à  $\underline{\underline{\sigma}}$  et l'abscisse du centre de ce cercle : les cercles de Mohr limites ont donc une enveloppe. Le critère est donc caractérisé par la donnée graphique de cette enveloppe, et donc par une courbe  $|\tau| = h(\sigma)$  dans le plan de Mohr. D'où son caractère "intrinsèque". On pourra se reporter à Salençon (1994) pour quelques notions plus précises sur les courbes intrinsèques, et à l'annexe A pour la détermination de la fonction h.

### détermination expérimentale

Lors d'un essai de compression triaxiale, l'état de contrainte, supposé uniforme dans un échantillon cylindrique, dépend de deux paramètres seulement ; les contraintes principales dans l'échantillon sont :

- $\sigma_2 = \sigma_3 \leq 0$  radiale ;
- $\sigma_1 \leq \sigma_3$  axiale.



Pour un essai de compression uniaxiale, la contrainte radiale, généralement appelée  $\sigma_3$ , est nulle.

Il est clair que ces deux types d'expériences ne peuvent en aucune manière permettre de décider si la contrainte principale intermédiaire intervient ou non dans le critère recherché. Cela veut dire qu'on peut décider :

- soit de faire intervenir la contrainte principale intermédiaire dans l'expression du critère (ce choix se fait bien souvent par celui d'une expression dans le plan  $(p,q)$ ),
- soit de ne pas tenir compte de la contrainte principale intermédiaire ; cela signifie qu'on décide de rechercher un critère du type courbe intrinsèque, fonction uniquement des contraintes principales

majeure et mineure, tels les critères de Tresca, de Mohr-Coulomb ou celui de Hoek & Brown, critère parabolique souvent utilisé en géomécanique.

Les essais triaxiaux d'extension sont des essais pour lesquels la contrainte axiale  $\sigma_1$  est moins forte que la contrainte de confinement, en valeur absolue :  $\sigma_3 \leq \sigma_1 \leq 0$ . Ils peuvent permettre, eux, de décider si le critère est ou non du type courbe intrinsèque. Mais la procédure, si elle n'est pas compliquée, n'est pas intuitive et nécessite de procéder pour ainsi dire par l'absurde.

En général, lorsque les courbes en compression et en extension sont différentes dans le plan  $(p,q)$ , il est classique de penser que  $p$  et  $q$  sont insuffisants pour décrire le critère et donc que le tenseur complet était nécessaire, excluant ainsi la possibilité d'un critère de type courbe intrinsèque. Or, si le critère est de type courbe intrinsèque, alors on obtient forcément deux courbes distinctes dans le plan  $(p,q)$  lorsqu'on trace les courbes en compression et en extension.

Par contre, un critère de type courbe intrinsèque fournit dans le plan de Mohr deux courbes confondues en compression et en extension, tandis qu'un critère dans lequel intervient  $\sigma_{II}$  donnera deux courbes distinctes. Ainsi, lorsqu'on cherche à montrer que  $\sigma_{II}$  intervient dans le critère, une possibilité est de procéder par l'absurde en supposant que le critère est du type courbe intrinsèque puis en montrant que tel n'est pas le cas puisque les courbes obtenues en compression et en extension sont différentes.

Enfin, indiquons que des essais dits au "vrai triaxial" existent, dans lesquelles les éprouvettes sont cubiques et on peut faire varier indépendamment les trois contraintes principales. Ce type d'essais permettrait bien évidemment d'observer l'influence de  $\sigma_{II}$  sur les critères d'initiation et d'évolution de l'endommagement, de rupture et de résistance résiduelle des argilites de l'Est. Mais ces essais sont bien plus complexes que les essais classiques, et délicats à mettre en oeuvre. D'autres essais peuvent aussi indiquer l'influence de  $\sigma_{II}$ , comme ceux de torsion, de cisaillement, ou encore ceux sur tube (mais dans ce cas, il faut faire un calcul, après avoir supposé une loi).

### **conséquences du choix du critère sur le calcul de structure**

La conséquence pour la modélisation d'ouvrages est fortement dépendante du fait qu'on choisisse une expression dans le plan  $(\sigma_{III}, \sigma_I)$  (ou indifféremment dans le plan de Mohr  $(\sigma, \tau)$ ) ou dans le plan  $(p,q)$ .

Pour montrer cela, nous allons nous appuyer sur un exemple simple. Imaginons une série d'essais de compression triaxiale conduisant au critère de rupture suivant :

$$\text{« rupture si } |\sigma_I| \geq 7|\sigma_3| + R_c \text{ »}$$

- Si on choisit un critère de type courbe intrinsèque, avec

$$\begin{aligned}\sigma_I &= -|\sigma_3|, \\ \sigma_{III} &= -|\sigma_1|,\end{aligned}$$

le critère s'écrit :

$$f_1(\underline{\underline{\sigma}}) = 7\sigma_I - \sigma_{III} - R_c \quad (\text{Mohr-Coulomb})$$

- Si on opte pour une expression dans le plan  $(p,q)$ , on a dans les conditions de l'essai :

$$\begin{aligned}p &= \frac{|\sigma_1| + 2|\sigma_3|}{3}, \quad (\text{car } p \text{ est positif en compression}) \\ q &= |\sigma_1| - |\sigma_3|,\end{aligned}$$

et le critère devient cette fois :

$$f_2(\underline{\underline{\sigma}}) = q - 2p - \frac{R_c}{3}$$

Les deux critères  $f_1$  et  $f_2$  obtenus, et fournissant la même courbe pour un champ de contrainte dans les conditions de l'essai triaxial, conduisent en revanche à des résultats bien différents lorsqu'on s'intéresse à un ouvrage souterrain : prenons le cas d'une galerie circulaire ; on suppose les contraintes initiales isotropes, de valeur  $\sigma_0$ , et la galerie assez profonde pour faire l'hypothèse de symétrie cylindrique autour de l'axe de galerie.

La contrainte en paroi s'écrit, dans le repère cylindrique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2\sigma_0 & \\ & & \sigma_0 \end{bmatrix}_{(r,\theta,z)}$$

On en déduit aisément que :

- 1)  $q = \sqrt{3}.p$  donc le critère  $f_2$  n'est jamais violé, quelle que soit la profondeur ;
- 2)  $\sigma_I = 0$  et  $\sigma_{III} = 2.\sigma_0$ , alors le critère  $f_1$  indique une rupture dès que  $\sigma_0 = \frac{1}{2}R_c$ .

### **III.6 Comportement différé : viscoplasticité**

Les solides viscoplastiques sont ceux qui, comme les solides plastiques, présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations, mais qui subissent un écoulement de fluage, fonction du temps, sous chargement ; c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'équilibre possible. Rappelons que les mécanismes généralement invoqués pour ce type de comportement ont été expliqués pour les métaux. Pour ce qui concerne les roches, on se demande encore si on peut utiliser les mêmes approches. Toujours est-il que les phénomènes macroscopiques observés (fluage, déformation permanente, ...) sont du même type, de sorte que l'utilisation du formalisme associé est possible.

Les roches argileuses présentent un comportement viscoplastique, plus ou moins marqué selon que l'argile est tendre ou indurée. Ce comportement est parfois assimilé à de la viscoélasticité ; la présence de déformations résiduelles en décharge montre qu'il s'agit bien d'un comportement irréversible.

La consolidation d'un matériau ou la dissipation de la pression interstitielle en condition drainée peuvent également conduire à des déformations différées, qui ne doivent pas être confondues avec celles résultant de la viscoplasticité. De ces deux phénomènes, le deuxième peut être mis à l'écart en réalisant des essais non drainés. Tel a été le cas à G.3S pour les essais de caractérisation de la viscoplasticité depuis 1995, par exemple sur les argilites de l'Est. De plus, si l'on a la chance d'observer des déformations différées sans variation de volume, on peut affirmer qu'il ne s'agit pas de consolidation.

Les modèles viscoplastiques proposés pour les matériaux argileux reposent sur les résultats d'expériences macroscopiques menées en laboratoire et, s'il en existe, sur les essais in situ. Concernant les essais de laboratoire, il s'agit notamment d'essais de fluage et, dans une moindre mesure, de relaxation. Les expériences montrent, de manière classique, que les vitesses de déformation viscoplastique sont amplifiées de manière non linéaire par l'augmentation de la température et de la contrainte. Les essais d'écrouissage sont, à notre connaissance, peu pratiqués, ce qui s'explique pour les argiles raides par les très faibles vitesses de déformation qu'il faudrait pouvoir imposer, impossibles à atteindre (à G.3S, du moins, pour l'ensemble des argiles raides étudiées).



De manière générale, la viscoplasticité est décrite via une loi d'évolution de la vitesse  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}^{vp}}}$  de déformation viscoplastique  $\underline{\underline{\varepsilon^{vp}}}$  du type :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}^{vp}}} = A(T) \cdot \left\langle \frac{F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon^{vp}}})}{F_0} \right\rangle^n \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{III.48})$$

où :

- $A(T)$  (en  $s^{-1} \cdot \text{MPa}^{-n}$ ) est un paramètre lié à la viscosité du matériau, et dépendant de la température exprimée en Kelvin (K),
- $F$  est le critère de viscoplasticité pouvant être fonction de la contrainte, de la pression  $P$  et/ou de la déformation viscoplastique (écrouissage),
- $F_0$  est un facteur de normalisation (MPa),
- $G$  est le potentiel d'écoulement viscoplastique, qui peut être distinct du critère dans une loi non associée,
- $n$  est un paramètre décrivant la non linéarité du comportement vis-à-vis de la contrainte,
- $\langle \rangle$  désigne la valeur positive de son contenu.

Certaines argiles présentent un comportement différé quel que soit le niveau de sollicitation, c'est-à-dire même pour un faible chargement déviatorique. C'est la raison pour laquelle leur comportement est parfois confondu avec de la viscoélasticité. Les modèles utilisés pour ces matériaux font partie de la famille de Maxwell sans seuil : ces modèles admettent que le seuil de viscoplasticité est nul. A l'inverse, les modèles avec seuil les plus utilisés sont ceux de la famille de Bingham ; le seuil de sollicitation viscoplastique est susceptible d'évoluer avec la déformation viscoplastique. Ce sont les deux familles de modèles les plus utilisées pour les roches argileuses, mais il n'existe bien sûr aucun modèle universel, chaque matériau ayant son propre comportement rhéologique ; des modèles très compliqués sont parfois développés, comme nous en verrons par la suite.

Lors d'un essai de fluage monophasique, en fonction de la contrainte appliquée (souvent déviatorique), on peut observer trois phases de fluage (figure III-6) :

- une phase pendant laquelle le fluage est ralenti ; c'est le *fluage primaire* ;
- une phase pendant laquelle la vitesse de fluage semble constante ; c'est le *fluage secondaire* ;
- une phase pendant laquelle le fluage s'accélère ; c'est le *fluage tertiaire*, qui se termine par la rupture du matériau.

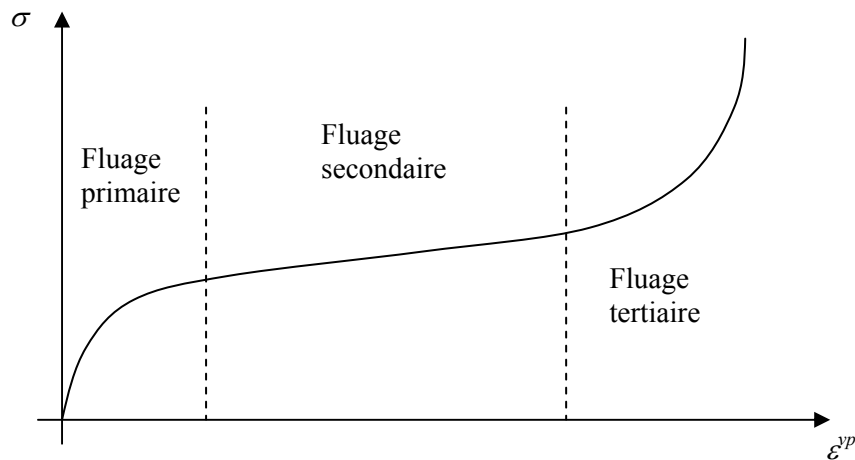


Figure III-6 : schéma d'une courbe de fluage monophasier présentant les trois phases de fluage.

La « décélération » du fluage observée pendant la phase de fluage primaire peut être reproduite de plusieurs manières :

1. soit en admettant l'existence d'un comportement viscoélastique en sus de la viscoplasticité,
2. soit en admettant la superposition de deux mécanismes viscoplastiques (et même d'un troisième pour le fluage tertiaire observé après (vraisemblablement) endommagement,
3. soit en utilisant une loi de comportement viscoplastique dite « écouissable » (Lemaitre et al., 1985).

Généralement (pour les métaux), la diminution de la vitesse de fluage est associée au durcissement, et donc à l'écrouissage du matériau (écrouissage positif, évidemment). Nous avons vu, en élastoplasticité, que l'écrouissage exprime que le domaine élastique se modifie et s'étend jusqu'au dernier niveau de sollicitation qui a fait se plastifier le matériau. De sorte que le critère de plasticité reste négatif ou nul. En élastoviscoplasticité, c'est un peu différent, puisque le critère peut être positif (positivité qui est d'ailleurs le moteur de l'écoulement). On dit que le matériau s'écrouit lorsque, dans un essai de fluage, on observe une décélération du fluage sous chargement donné. Bien évidemment, cela constitue une extrapolation du terme « écouissage » au phénomène observé, et il faut faire intervenir le temps pour comprendre le sens de cette extrapolation, c'est-à-dire raisonner en vitesse de fluage : pour une même sollicitation, l'évolution des déformations se fait de plus en plus difficilement, de plus en plus lentement. La vitesse de fluage est fonction de la déformation viscoplastique atteinte.

Pour certains matériaux visqueux, il s'agit effectivement d'écrouissage tel qu'on le comprend habituellement : le domaine élastique évolue, le seuil de fluage se rapproche progressivement de la contrainte appliquée ; et la vitesse de fluage diminue parce qu'elle est directement fonction de l'écart entre contrainte et seuil. En notant  $\sigma$  la contrainte appliquée,  $\sigma_y$  le seuil, on peut exprimer ce comportement par une loi du type :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = f(\sigma - \sigma_y, T), \quad (\text{III.49})$$

(où  $T$  est la température), dans laquelle le seuil évolue avec la déformation viscoplastique :  $\sigma_y = g(\varepsilon^{vp})$ . Il s'agit dans ce cas de lois d'écrouissage cinématique, ou de lois dites d'écrouissage-viscosité additives, ou bien sûr d'une combinaison de ces deux types d'écrouissage (Lemaitre et al., 1985). Les modèles de type Bingham sont de ce type.

Pour d'autres matériaux, on ne constate pas forcément d'évolution du domaine purement élastique, et pourtant il y a diminution de la vitesse. C'est pour ce type de cas que le terme écrouissage est une extrapolation du vocable habituel. Pour décrire dans ce cas le fait que la vitesse diminue avec le fluage, on cherche généralement une expression du genre :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = f(\sigma, T) \cdot h(\varepsilon^{vp}), \quad (\text{III.50})$$

où  $h$  est une fonction décroissante de  $\varepsilon^{vp}$  (appelée loi d'écrouissage-viscosité multiplicative, ou forme produit). Une loi de ce type, très connue, est la loi dite de Menzel & Schreiner (cités par Pouya 1991) en Allemagne, ou loi de Lemaître en France, qui entre dans la famille de Maxwell sans seuil.

Dans les faits, la différence entre les deux types de modèles (Bingham ou Maxwell) apparaît dans les essais de relaxation, ou en décharge dans les essais de fluage. Dans les modèles de type Bingham, la relaxation de la contrainte s'arrête lorsque celle-ci rejoint le seuil, tandis qu'elle est totale pour un modèle de type Maxwell. De même, dans un essai de fluage, si après un ou plusieurs paliers de fluage sous chargement croissant, on diminue progressivement la contrainte, le fluage peut s'estomper pour un modèle de type Bingham (parce que la contrainte sera passée en deçà du seuil), alors qu'avec un matériau de type Maxwell le fluage repart après une période dite « d'hésitation au fluage ».

Mais la vérification expérimentale de cet aspect n'est pas aisée : le fluage et la relaxation deviennent de plus en plus lents, voire imperceptibles sous faible sollicitation pour des argiles raides. Et le manque de connaissance des mécanismes microscopiques induisant le fluage des argiles (tout comme leur plasticité) fait que les deux familles de modèles sont toujours employées sans que l'on puisse décider de la prévalence de l'une d'elle.

### **III.7 Phénomènes thermiques**

Comme dans la plupart des géomatériaux, il est admis que la conduction de la chaleur est le mode prépondérant de transfert thermique au sein des argiles. De plus, tant que le milieu reste saturé, ce processus est découplé des processus hydraulique et mécanique (Giraud, 1993 ; Ghoreychi, 1999).

L'équation de transfert thermique est alors obtenue à partir d'une part de la loi de Fourier, et d'autre part de l'équation de conservation de la chaleur. Elle est simple, est se trouve être valable pour la plupart des matériaux susceptibles d'intervenir dans un contexte de stockage ; aussi, puisqu'elle servira pour les modélisations qui feront intervenir des sources de chaleur (les déchets), nous l'écrivons avec un terme source :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\underline{\lambda}_T \cdot \underline{\nabla} T) + Q_v(t) \quad (\text{III.51})$$

où :

$c$  est la capacité calorifique spécifique du matériau (en  $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ),

$\underline{\lambda}_T$  est le tenseur de conductivité thermique (en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ),

$Q_v(t)$  est un terme de production de chaleur interne (en  $\text{W.m}^{-3}$ ).

Les barrières ouvragées qui seront fabriquées en argile seront probablement mises en place dans les alvéoles de stockage à l'état insaturé : on compte sur leurs propriétés de gonflement par absorption d'eau en provenance du massif pour combler les vides existant lors de leur mise en place. La conductivité thermique de ces argiles est fortement dépendante de la teneur en eau. Des études sont menées sur ce point dans le cadre de l'exercice international Décovalex (Decovalex III, essai in situ Febex à Grimsel, Suisse) auquel participe G.3S.

### **III.8 Aspects hydrauliques**

Contrairement au transfert thermique, le transfert de masse en milieu poreux est en général fortement couplé avec les phénomènes mécanique et thermique. Notamment, vu les très faibles perméabilités des argiles raides notamment, l'effet d'une perturbation mécanique (creusement de l'ouvrage par exemple) sur le champ de pression interstitielle peut être très fort et ne saurait être négligé : les roches sont en effet susceptibles de se désaturer en paroi et jusqu'à une certaine distance, avec pour conséquence une rupture en paroi.

D'un point de vue chimique, l'eau à l'intérieur des pores est une solution contenant des ions. Le transfert de masse de fluide est le seul pris en compte en poromécanique classique ; nous devons tenir compte du transfert de masse des solutés lorsque ceux-ci seront importants (pour le gonflement, par exemple).

Il y a deux approches pour aboutir aux équations de transfert de masse en milieu poreux. A l'approche de la théorie des milieux poreux (Coussy, 1991), qui est présentée en partie au chapitre V, nous préférons une approche plus concrète développée par les hydrogéologues (de Marsily, 1981).

### III.8.1 Diffusion de fluide en milieu poreux saturé

#### III.8.1.a Variation de porosité

Nous devons établir deux relations qui seront utiles dans la suite. La première relie la variation de la porosité à la déformation et au solide. La deuxième relie la variation de porosité à la déformation et au fluide. Cette deuxième relation n'est valable que parce que le milieu est saturé.

Considérons un volume élémentaire  $V$  de milieu poreux, qu'on suit selon le mouvement du squelette solide, dont  $V_v$  est le volume de vide, et  $V_s = V - V_v$  est le volume de solide. La porosité  $\phi$  est la fraction de volume de matériau occupée par l'espace interstitiel (les vides) :

$$\phi = \frac{V_v}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} \quad (\text{III.52})$$

première relation :

D'après (III.52), nous avons :

$$\frac{\dot{\phi}}{1 - \phi} = \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{V}_s}{V_s}$$

On note  $\rho_s$  la masse volumique de solide contenu dans le volume. La masse de solide du volume  $V$  étant constante, on peut facilement établir que :

$$\frac{\dot{V}_s}{V_s} = - \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s}$$

En outre, si on note  $\varepsilon_v$  la déformation volumique, on a par définition :

$$\frac{\dot{V}}{V} = \dot{\varepsilon}_v$$

Finalement :

$$\frac{\dot{\phi}}{1-\phi} = \dot{\varepsilon}_v + \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} \quad (\text{III.53})$$

deuxième relation :

Le matériau étant supposé saturé, l'espace poral est entièrement occupé par le fluide, donc le volume de vide est aussi le volume de fluide  $V_f$ . En notant respectivement  $M_f$  et  $\rho_f$  la masse de fluide contenue dans le volume et sa masse volumique, on a alors :

$$V_v = V_f = \frac{M_f}{\rho_f} \quad (\text{III.54})$$

La dérivée logarithmique de (III.52) conduit alors à la deuxième relation :

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{M}_f}{\rho_f V} - \phi \left( \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} + \dot{\varepsilon}_v \right) \quad (\text{III.55})$$

### ***III.8.1.b Equation de transfert de masse de fluide en milieu poreux saturé***

Le transfert de masse dans les milieux poreux est régi par les lois de conservation de masse (de fluide et de solide), et par un modèle décrivant le mécanisme de transfert (diffusion ou autre).

Les équations de conservation de masse pour un milieu poreux ont fait l'objet de nombreuses tentatives, qui se heurtent notamment aux difficultés suivantes :

- La discontinuité des propriétés à l'interface fluide solide,
- Le manque de relation évidente entre porosité volumique, porosité cinématique et porosité cinématique de surface.

Nous ne reviendrons pas plus sur ces difficultés, qui ne sont toujours pas résolues. La deuxième est en général contournée en supposant l'égalité de ces trois porosités. La première difficulté est autrement plus complexe à aborder. On admet généralement que les lois de conservation de masse s'écrivent :

$$\text{Conservation de masse de fluide : } \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \phi) + \text{div}(\rho_f \phi \underline{v}_f) = 0 \quad (\text{III.56})$$

$$\text{Conservation de masse de solide : } \quad \frac{\partial}{\partial t}[\rho_s(1-\phi)] + \text{div}[\rho_s(1-\phi)\underline{v}_s] = 0 \quad (\text{III.57})$$

où  $\underline{v}_s$  et  $\underline{v}_f$  désignent respectivement les vitesses du solide et du fluide par rapport à un repère fixe.

En développant l'égalité (III.55) et en la divisant par  $\rho_f \phi$  on obtient :

$$\frac{1}{\rho_f} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho_f + \underline{\text{grad}}(\rho_f) \cdot \underline{v}_f \right] + \frac{1}{\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \phi + \underline{\text{grad}}(\phi) \cdot \underline{v}_f \right] + \text{div}(\underline{v}_f) = 0 \quad (\text{III.58})$$

Généralement, le modèle de transfert (loi de Darcy par exemple) est défini pour le milieu considéré comme immobile. Si le milieu est en mouvement, on considère le modèle valable dans le mouvement du squelette solide. On suit donc l'élément de solide, et on va exprimer la variation des quantités en suivant le mouvement du solide. La dérivée utilisée est une dérivée par rapport au squelette solide, mais la grandeur qu'on dérive n'est pas forcément rattachée au squelette. Il s'agit toutefois de la dérivée par rapport au milieu poreux dans son mouvement (puisque'on l'identifie à celui de son squelette solide), et l'on utilisera pour cette raison les notations de dérivée totale.

Contrairement à  $\rho_f$ , grandeur rattachée au fluide, la porosité  $\phi$  est une grandeur liée aux particules solides. En effet, le volume élémentaire  $V$  du milieu poreux est défini par rapport aux particules solides (et contient toujours les mêmes), et la porosité définie par (III.52) est liée à  $V$  et  $V_s$ . La dérivée de  $\phi$  en suivant le milieu poreux correspond donc à sa dérivée totale. Quoiqu'il en soit, nous écrivons dans les deux cas :

$$\dot{\rho}_f \equiv \frac{d\rho_f}{dt} = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\rho_f) \cdot \underline{v}_s \quad (\text{III.59})$$

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\phi) \cdot \underline{v}_s \quad (\text{III.60})$$

et la relation (III.57) devient :

$$\frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_f} \underline{\text{grad}}(\rho_f)(\underline{v}_f - \underline{v}_s) + \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{\phi} \underline{\text{grad}}(\phi)(\underline{v}_f - \underline{v}_s) + \text{div}(\underline{v}_f) = 0 . \quad (\text{III.61})$$

De même pour le solide, en développant (III.55) et divisant par  $\rho_s(1-\phi)$  on obtient :

$$\frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} - \frac{\dot{\phi}}{1-\phi} + \text{div}(\underline{v}_s) = 0 . \quad (\text{III.62})$$

Faisant maintenant appel aux relations (III.53) et (III.55) établies précédemment sur les variations de porosité, les relations (III.60) et (III.61) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\dot{M}_f}{\phi \rho_f V} - \dot{\varepsilon}_v + \frac{1}{\rho_f} \underline{\text{grad}}(\rho_f)(\underline{v}_f - \underline{v}_s) + \frac{1}{\phi} \underline{\text{grad}}(\phi)(\underline{v}_f - \underline{v}_s) + \text{div}(\underline{v}_f) = 0 \quad (\text{III.63})$$

$$- \dot{\varepsilon}_v + \text{div}(\underline{v}_s) = 0 \quad (\text{III.64})$$

En retranchant (III.63) de (III.62) et en multipliant par  $\rho_f \phi$ , on trouve :

$$- \frac{\dot{M}_f}{V} = \underline{\text{grad}}(\phi)(\underline{v}_f - \underline{v}_s) \rho_f + \phi \cdot \text{div}(\underline{v}_f - \underline{v}_s) \rho_f + \phi \cdot \underline{\text{grad}}(\rho_f)(\underline{v}_f - \underline{v}_s) , \quad (\text{III.65})$$

soit enfin :

$$\frac{\dot{M}_f}{V} = -\text{div}[\rho_f \phi (\underline{v}_f - \underline{v}_s)] \quad (\text{III.66})$$

On définit généralement l'apport de masse fluide par :

$$\dot{m}_f = \frac{\dot{M}_f}{V} \quad (\text{III.67})$$

ce qui conduit à l'équation classique de conduction de masse fluide en milieux poreux :

$$\dot{m}_f = -\text{div}[\rho_f \phi (\underline{v}_f - \underline{v}_s)] \quad (\text{III.68})$$

Il est à noter que la relation (III.68) a été obtenue uniquement à partir des lois de conservation de masse (III.56) et (III.57), et de l'hypothèse de milieu saturé (relation (III.54)), d'où son caractère très général. Elle est indépendante de tout modèle de comportement.



Introduisons maintenant une hypothèse sur le modèle de diffusion en supposant qu'il est donné par la loi de Darcy :

$$\text{Loi de Darcy : } \phi(\underline{v}_f - \underline{v}_s) = -\frac{1}{\mu} \underline{\underline{K}}(\underline{\text{grad}} p + \rho_f \underline{g}) \quad (\text{III.69})$$

Dans cette formule,  $\mu$  est le coefficient de viscosité du fluide,  $\underline{\underline{K}}$  est le tenseur de perméabilité intrinsèque du milieu et  $\underline{g}$  est l'accélération de la pesanteur. En reportant (III.69) dans (III.68), on trouve la relation fondamentale régissant la diffusion dans le milieu poreux :

$$\dot{m}_f = \text{div} \left[ \frac{\rho_f}{\mu} \underline{\underline{K}}(\underline{\text{grad}} p + \rho_f \underline{g}) \right] \quad (\text{III.70})$$

On appelle vecteur courant de masse fluide la quantité :

$$\underline{M} = \rho_f \phi(\underline{v}_f - \underline{v}_s) \quad (\text{III.71})$$

et l'expression (III.68) s'écrit encore :

$$\dot{m}_f = -\text{div}(\underline{M}) \quad (\text{III.72})$$

Afin de faire apparaître des variables plus communes (pression, déformation ou contrainte, température...), il faut faire intervenir les lois de comportement du fluide et du milieu poreux. Tout d'abord, utilisant (III.54), l'apport de masse fluide (III.67) s'écrit :

$$\dot{m}_f = \frac{\dot{\rho}_f V_f + \rho_f \dot{V}_f}{V} = \dot{\rho}_f \phi + \rho_f \phi \frac{\dot{V}_v}{V_v} \quad (\text{III.73})$$

Connaissant la loi d'état du fluide, il est aisé d'exprimer  $\dot{\rho}_f$  en fonction, typiquement, de la pression et de la température. La variation du volume de pores est plus délicate à obtenir. En thermoporoélasticité, on peut la relier aux variations de pression, de température, et de contrainte. On préfère généralement utiliser la déformation à la contrainte. On aboutit à (Charlez, 1991) :

$$\frac{\dot{p}}{M} + b \dot{\varepsilon}_v - 3\alpha_m \dot{T} = -\text{div}(\underline{M}) \quad (\text{III.74})$$

où  $\alpha_m$  est appelé coefficient de dilatation linéique différentiel (entre le fluide et la matrice).

En présence de déformations irréversibles, la relation précédente est modifiée. La part de porosité irréversible est en général relié de manière linéaire aux déformations irréversibles. Par exemple, en thermoélastoviscoporoélasticité, on aura (Coussy, 1991) :

$$\frac{\dot{p}}{M} + b \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}^e + \beta^p \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}^p + \beta^v \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}^v - 3\alpha_m \dot{T} = -\operatorname{div}(\underline{M}) \quad (\text{III.75})$$

En présence de solutés, la variation de volume des pores peut être également induite par la chimie. Cosenza (1996) ajoute dans le cas du sel gemme un terme lié aux réactions de dissolution-recristallisation.

### III.8.2 Transport

Le transport de soluté s'intègre dans le cadre des transferts de fluides miscibles. On ne considère qu'une seule phase fluide (l'eau des pores), et on définit la concentration d'une substance dans l'autre : par exemple, la concentration d'eau salée dans l'eau douce, ou plus simplement de sel dans l'eau (de Marsily, 1981). On appelle *transport en solution* ce type de déplacement, la variable principale étant la concentration  $C$  (en mol/l) ou indifféremment la masse volumique (en kg/m<sup>3</sup>).

#### III.8.2.a Loi de transfert de masse de soluté en milieu poreux saturé

Nous attribuons, comme c'est l'usage, l'indice « 1 » au soluté :  $M_1$  désigne sa masse dans le volume  $V$  de milieu poreux,  $\rho_1$  sa masse volumique,  $\underline{v}_1$  sa vitesse par rapport à un repère fixe. Il occupe, comme le fluide, tout l'espace poral, et les opérations sont identiques à celles effectuées précédemment pour le fluide. On aboutit à :

$$\dot{m}_1 = -\operatorname{div}(\underline{M}_1) \quad (\text{III.76})$$

où  $\dot{m}_1$  est l'apport de masse de soluté défini par :

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{M}_1}{V} \quad (\text{III.77})$$

et  $\underline{M}_1$  est le vecteur courant de masse de soluté :

$$\underline{M}_1 = \rho_1 \phi (\underline{v}_1 - \underline{v}_s) \quad (\text{III.78})$$

Pour exprimer l'apport de masse de soluté, on utilise les lois d'état du soluté, du fluide et la loi de comportement du milieu poreux.

$$\dot{m}_1 = \dot{\rho}_1 \phi + \rho_1 \phi \frac{\dot{V}_v}{V_v} \quad (\text{III.79})$$

Dans l'expression (III.79), on retrouve la variation du volume de pores. Une part de cette variation peut être liée, nous l'avons signalé plus avant, au soluté. Nous ne tiendrons pas compte de cet aspect dans l'équation de transport, même lorsque nous aborderons l'étude du gonflement.

### **III.8.2.b Modes de transfert**

Une analyse détaillée des moteurs du transport, restreinte aux aspects qui nous intéressent (typiquement : transport non réactif, sans échange, en négligeant les phénomènes d'adsorption...), est faite au chapitre V. Indiquons simplement ici qu'on distingue classiquement trois mécanismes principaux qui sont la convection par le fluide, la diffusion moléculaire liée au mouvement brownien, et la dispersion cinématique liée à l'hétérogénéité des vitesses du fluide au sein du milieu poreux. Les deux derniers mécanismes sont généralement pris en compte sous la forme d'une loi de Fick, avec un tenseur dit « de dispersion ». Le modèle de transfert est alors de la forme :

$$\underline{M}_1 = \underline{M}_1^{conv} + \underline{M}_1^{disp}, \quad \text{avec} \quad \underline{M}_1^{conv} = \rho_1 \underline{M}_f \quad \text{et} \quad \underline{M}_1^{disp} = -\underline{D} \cdot \underline{grad}(\rho_1) \quad (\text{III.80})$$

## **III.9 Argilites de l'Est**

D'après la loi Bataille de 1991, la France doit faire le choix d'au moins deux sites, dans des milieux différents, pour les recherches sur le stockage de déchets à long terme. Aujourd'hui, un site a été choisi, dans une roche argileuse située dans l'est du Bassin Parisien, entre la Meuse et la Haute-Marne (dans les argilites du Callovo-Oxfordien). A l'Andra, et dans les organismes de recherche désignés par l'Andra pour des études mécaniques, cette roche s'appelle désormais « argilites de l'Est ».

Les argilites de l'Est sont constitués, en moyenne, de 40% d'argile, 25 à 30% de quartz, 20 à 30% de carbonates, plus d'autres constituants en quantité inférieure à 10% (pyrite, mica, dolomite, halite, gypse). Les minéraux présents dans la fraction argileuse sont du type :

- Interstratifiés illite/smectite      50 à 80%
- Chlorite
- Illite
- kaolinite

La porosité de la roche est réduite (9 à 18%), de même que la teneur en eau (3 à 9%). La perméabilité très faible, estimée sur la base de mesures qui se sont révélées extrêmement délicates, et doit être inférieure à  $10^{-20}$  m<sup>2</sup>.

Les argilites de l'Est comptent parmi les argiles raides présentant des caractéristiques relativement élevées pour une roche argileuse. Les caractéristiques THM et lois de comportement rapportées ici s'appuient sur des essais de laboratoire réalisés sur des échantillons provenant du site, prélevés par des prestataires de l'Andra.

### **III.9.1 Caractéristiques poroélastiques des argilites**

Au cours des essais uniaxiaux et triaxiaux à court terme réalisés au laboratoire, les pesées des échantillons n'ont pas révélé de perte de masse. Ce sont donc les caractéristiques poromécaniques non drainées qui ont été mesurées ( $E_{nd}$ ,  $\gamma_{nd}$ ,  $K_{nd}$ ). Les coefficients du couplage hydromécanique ont ensuite été estimés à partir des valeurs des propriétés non drainées mesurées au laboratoire et sur la base des relations générales valables en poroélasticité.

Une anisotropie des propriétés élastiques a été constatée, de l'ordre de 15%. C'est aussi l'ordre de grandeur de la dispersion des résultats entre les différents essais. Par ailleurs, la variation des propriétés élastiques est, compte tenu toujours de la dispersion des résultats, négligeable dans la phase précédant la rupture. Le choix a donc été fait au G.3S de prendre pour hypothèse que les propriétés élastiques des argilites sont isotropes et constantes, à moins de se placer au delà du pic de résistance (mais cela supposerait des sollicitations mécaniques relativement élevées).

La moyenne obtenue sur la population d'essais conduit aux résultats suivants :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{module d'Young : } E_{nd} = 4900 \text{ MPa} \\ \text{coefficient de Poisson : } \nu_{nd} = 0,3 \end{array} \right. \quad (\text{III.81})$$

Les deux autres caractéristiques souvent utilisées sont le coefficient et le module de Biot  $b$  et  $M$  respectivement. Le coefficient de Biot des argilites est estimé entre 0,4 et 0,8 (Boutéca et al., 1999 ; Gasc-Barbier, 2002), avec une valeur moyenne :

$$b = 0,65. \quad (\text{III.82})$$

Quant au module de Biot, il n'a pas été estimé. Le module de Biot  $M$  intervient également dans l'équation hydraulique ; sa détermination sera rendue possible par ajustement de mesures in situ appropriées (pulse test, par exemple), quand de telles mesures seront disponibles.

Kharkhour (2002) fait une analyse des propriétés hydromécaniques des argilites. Choissant d'utiliser une valeur de porosité de 14% (moyenne), elle fait varier la valeur de module de solide, et trouve que la valeur  $K_s = 4810$  MPa donne le coefficient de Biot ci-dessus via (III.22). Elle en déduit une valeur raisonnable du Module de Biot :

$$M = 5672 \text{ MPa}, \quad (\text{III.83})$$

valeur que nous prendrons par la suite.

Les autres paramètres, déduits des précédents, sont rassemblés avec ces derniers dans le tableau III-1 ci-dessous.

Dénomination	Paramètre	Valeur
Module de Young non drainé	$E_o$	4900 MPa
Coefficient de Poisson non drainé	$\nu_o$	0,3
Module de compressibilité non drainé	$K_{nd}$	4083 MPa
Coefficient de Biot	$b$	0,65
Porosité	$\phi$	0,14
Module de solide	$K_s$	4810 MPa
Module de Biot	$M$	5672 MPa
Module de compressibilité drainé	$K_o$	1687 MPa
Module de Young drainé	$E_o$	4120 MPa
Coefficient de Poisson drainé	$\nu_o$	0,09
Coefficient de Skempton	$B_s$	0,77

Tableau III-1 : paramètres poroélastiques des argilites de l'Est

### III.9.2 Endommagement et rupture

Deux types de critères ont été choisis pour décrire les seuils d'initiation de l'endommagement et de la rupture des argilites de l'Est. Ces critères sont "paraboliques", dans le sens où leurs représentations dans l'espace des contraintes principales sont des ogives. Ces ogives sont fermées du côté des tractions.

L'un, le critère de Hoek et Brown, est apparenté aux critères de Tresca et Coulomb (courbe intrinsèque) : la section de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales par un plan "p = constante" est un hexagone (non régulier).

L'autre, écrit dans le plan (p,q), est plus proche de critères comme celui de Von Misès et Drucker-Prager en ce sens que la frontière est régulière, ce qui se révèle avantageux pour certains calculs (écoulement normal à la surface).

#### III.9.2.a Critère de Hoek et Brown

Comme nous l'avons dit, ce critère est de type courbe intrinsèque ; il s'écrit, avec les notations que nous avons adopté dans le repère des contraintes principales :

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sqrt{-m.R_c.\sigma_I + s.R_c^2} \quad . \quad (III.84)$$

avec :

$R_c$  : résistance à la compression simple

$s$  : paramètre du modèle, décrivant l'état de fissuration du matériau

( $s = 1$  pour une roche non ou peu fissurée)

$m$  : paramètre de courbure de la parabole

Le choix du critère de Hoek et Brown, très fréquent en mécanique des roches et souvent fait par les bureaux d'études, résulte généralement de la facilité d'ajustement des paramètres du critère à partir d'expériences de compression et de traction uniaxiales.  $R_c$  est la résistance à la compression simple du matériau sain, tandis que  $\frac{s}{m}.R_c$  est la pression de cohésion (voir annexe A).

Un calage des essais de laboratoire effectués en 1995 et 1996 effectué pour des couples particuliers de valeurs de confinement (pour  $\sigma_3 = 0$ , et  $\sigma_3 = 12$  MPa correspondant à la contrainte moyenne théorique au niveau du futur laboratoire souterrain) a permis de donner des critères moyens de rupture pour les argilites de l'Est. Par ailleurs, l'identification du rapport des déviateurs correspondant à l'initiation de l'endommagement et à la rupture pour un confinement donné a permis de définir les paramètres d'un critère de Hoek et Brown moyen pour l'endommagement. Bien évidemment, le paramètre  $R_c$  n'a plus la même signification pour le critère d'initiation de l'endommagement : il désigne la limite de linéarité en compression simple. Les paramètres identifiés pour les critères d'initiation de l'endommagement et de rupture des argilites de l'Est sont rassemblés dans le tableau III-2.

De plus, des caractéristiques plus faibles ont été obtenues en prenant les valeurs correspondant au quantile à 20% (i.e. les valeurs pour lesquelles 20% des échantillons ont des caractéristiques plus faibles). Les valeurs correspondantes des paramètres sont également données dans le tableau III-2, sous le nom de valeurs caractéristiques. En annexe A, on donne une représentation de ces critères dans le plan de Mohr. En figure III-7, nous donnons une vue 3D du critère d'endommagement caractéristique dans l'espace des contraintes principales.

Critère de Hoek et Brown	ENDOMMAGEMENT		RUPTURE	
	valeurs moyennes (*)	valeurs caractéristiques	valeurs moyennes (*)	valeurs caractéristiques
$R_c$	12,30	5,80	22,00	12,00
m	0,83	1,11	1,26	1,59
s	1,00	1,00	1,00	1,00

(\*) sur la population disponible définie par  $\sigma_3 = 0$ , et  $\sigma_3 =$  contrainte moyenne in situ

*Tableau III-2 : Paramètres des critères de Hoek et Brown identifiés pour la rupture et l'initiation de l'endommagement des argilites de l'Est.*

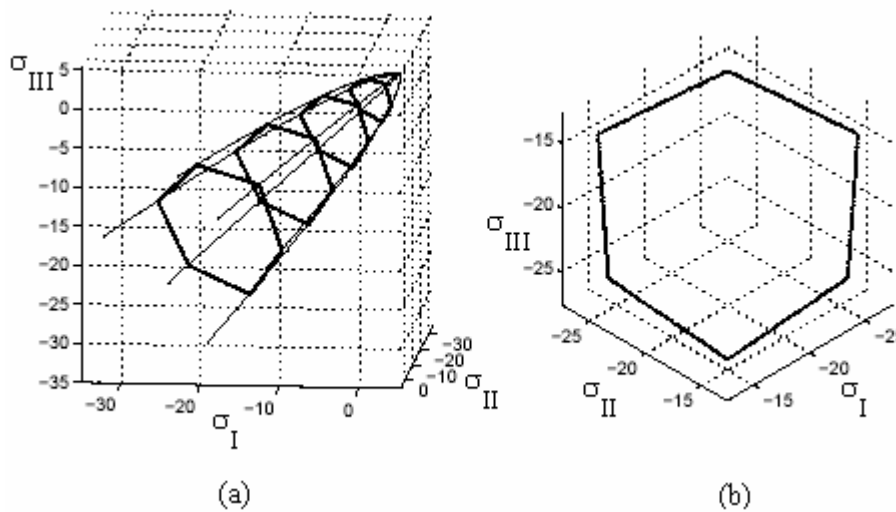


Figure III-7 : Visualisation dans l'espace des contraintes principales du critère caractéristique de Hoek et Brown défini pour les argilites de l'Est ; (a) vue globale ; (b) section dans le plan déviatorique  $p=\text{constante}$ .

Le critère de Hoek&Brown, avec ces valeurs de paramètres, est le critère de référence à l'Andra pour l'endommagement et la rupture des argilites de l'Est (voir Andra, 1999).

### III.9.2.b Critère de G.3S

G.3S a proposé, sur la base des résultats d'essais effectués au laboratoire, un critère d'initiation de l'endommagement, un critère de rupture et un critère de résistance résiduelle (Ghoreychi, 1997). Ces critères sont exprimés en fonction des invariants des contraintes.

Concernant les critères de rupture et de résistance résiduelle, il faut signaler la résistance maximum n'a pas pu être atteinte lors des essais d'extension axiale, de sorte que seuls les critères en compression et traction ont pu être déterminés expérimentalement. Il a donc été fait des extrapolations supplémentaires :

- rupture : pour obtenir une expression du critère de rupture en extension, il a été supposé que le rapport entre les critères d'initiation de l'endommagement et de rupture était le même en extension qu'en compression (et implicitement aussi pour les autres valeurs de  $J_m$ ) ;
- résistance résiduelle : il existe un point où les critères de rupture et de résistance résiduelle se rejoignent. Ce point a été déterminé en compression. G.3S a donc envisagé un critère tel que ce point limite existe en extension et compression pour la même valeur de la contrainte moyenne.



Enfin, rappelons que le critère d'initiation de l'endommagement et le critère de rupture ont été pris de forme parabolique (pour une valeur de  $J_m$  donnée), tandis que le critère de résistance résiduelle a été choisi linéaire de sorte à pouvoir rejoindre le critère de rupture.

Pour chacun des critères, il a été défini un critère moyen (basé sur la moyenne des points correspondant à un confinement  $\sigma_3$  donné), mais aussi un critère minimum et un critère maximum correspondant respectivement aux enveloppes inférieure et supérieure du nuage de point dans le plan  $(p,q)$ . Les expressions des critères et les paramètres correspondant sont donnés dans le tableau III-3.

Nature du critère		ENDOMMAGEMENT	RUPTURE	RESISTANCE RESIDUELLE
EXPRESSION		$q^2 = \alpha_{end}(J_m) \cdot p$	$q^2 = \alpha_{pic}(J_m) \cdot p + \beta_{pic}$	$q = \alpha_{rés}(J_m) \cdot p$
paramètres	minimum	$\alpha_{end}(J_m) = 7,45 - 1,65 J_m$	$\alpha_{pic}(J_m) = 18,55 - 8,65 J_m$ $\beta_{pic}(J_m) = 15,4 - 7,2 J_m$	$\alpha_{rés}(J_m) = 0,72 - 0,18 J_m$
	maximum	$\alpha_{end}(J_m) = 34,15 - 25,25 J_m$	$\alpha_{pic}(J_m) = 43,95 - 28,75 J_m$ $\beta_{pic}(J_m) = 56,4 - 43,8 J_m$	$\alpha_{rés}(J_m) = 1,32 - 0,5 J_m$
	moyen	$\alpha_{end}(J_m) = 18,25 - 11,05 J_m$	$\alpha_{pic}(J_m) = 31,1 - 18,8 J_m$ $\beta_{pic}(J_m) = 25,8 - 15,6 J_m$	$\alpha_{rés}(J_m) = 0,98 - 0,33 J_m$

Tableau III-3 : Paramètres des critères identifiés par G.3S pour l'initiation de l'endommagement, la rupture et la résistance résiduelle des argilites de l'Est.

Le seuil d'initiation de l'endommagement a été volontairement négligé par G.3S. Cette hypothèse repose sur le fait que la résistance à la traction des argilites de l'Est s'est révélée très faible, sur le faible nombre d'essais de traction uniaxiale réalisés. Le seuil d'endommagement étant inférieur à cette résistance devient alors négligeable. Cette hypothèse est courante en Mécanique des Sols et des Roches. Bien des modèles dits "no tension" adoptent cette hypothèse, dans la mesure où le risque d'une rupture à long terme provoquée par une traction pure n'est pas réellement négligeable pour les géomatériaux.

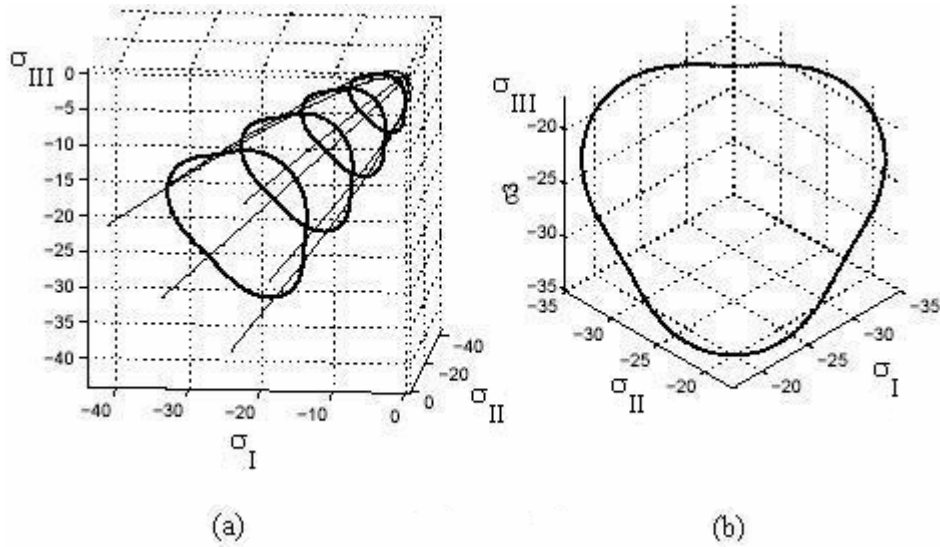


Figure III-8 : Visualisation dans l'espace des contraintes principales du critère minimum défini par G.3S pour les argilites de l'Est ; (a) vue globale ; (b) section dans le plan déviatorique  $p=\text{constante}$ .

### III.9.2.c Comparaison des critères dans un plan

Nous pouvons comparer les critères dans le plan  $(p,q)$ . Pour obtenir l'équivalent de l'expression de Hoek et Brown dans le plan  $(p,q)$ , on écrit que lors des essais, on a :

- $q = \sigma_I - \sigma_{III}$ ,
- $p = \left| \frac{\sigma_{III} + 2.\sigma_I}{3} \right|$  en compression,
- $p = \left| \frac{\sigma_I + 2.\sigma_{III}}{3} \right|$  en extension (il s'agit d'une extrapolation, le critère de Hoek et Brown des argilites n'ayant pas été déterminé à partir des essais d'extension).

On aboutit au critère équivalent de Hoek et Brown en les variables  $p,q$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{COMPRESSION : } q = \frac{1}{2} \left( -\frac{m.R_c}{3} + \sqrt{\left(\frac{m.R_c}{3}\right)^2 + 4.(m.R_c.p + s.R_c^2)} \right) \quad \text{(III.85)} \\ \text{EXTENSION : } q = \left( -\frac{m.R_c}{3} + \sqrt{\left(\frac{m.R_c}{3}\right)^2 + (m.R_c.p + s.R_c^2)} \right) \quad \text{(III.86)} \end{array} \right.$$

On voit bien qu'il s'agit de paraboles dans le plan  $(p,q)$ , tout comme dans le plan  $(\sigma_{III}, \sigma_I)$ . La différence avec les expressions de G.3S réside dans la forme des courbes au voisinage de leurs

sommets (pour  $q=0$ ) : les critères de G.3S vont se traduire en courbes présentant une tangente verticale en leur sommet, ce qui n'est pas le cas des critères de Hoek et Brown.

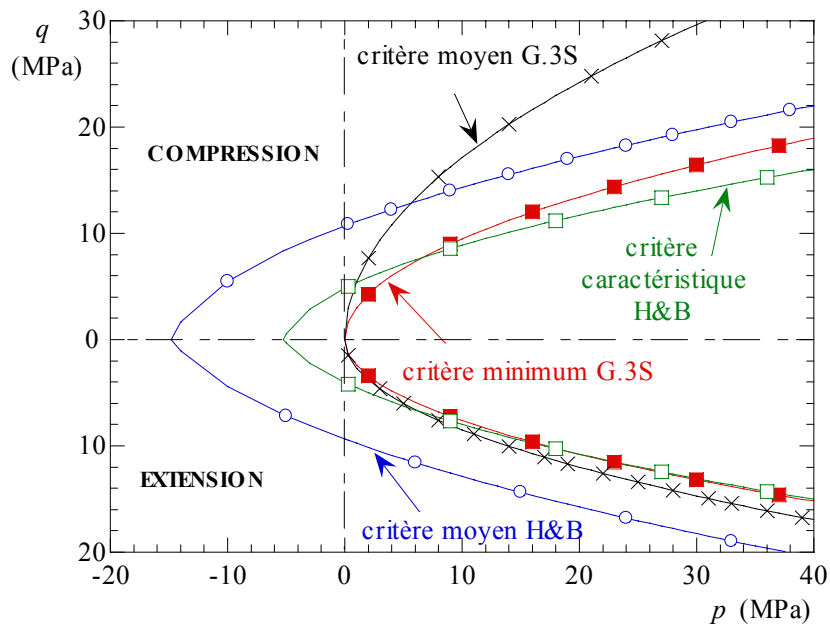


Figure III-9 : Critères d'initiation de l'endommagement des argilites de l'Est dans le plan  $(p,q)$ .

Les représentations, dans le plan  $(p,q)$ , des deux types de critères d'initiation de l'endommagement identifiés précédemment sont données figure III.9 ; nous comparons d'une part les critères moyens, d'autre part les critères utilisés pour les modélisations (critère minimal pour G.3S, critère caractéristique pour Hoek et Brown). Le critère de Hoek et Brown adopté offre une limite en traction relativement élevée, tandis que le critère adopté par G.3S pour l'endommagement ne va pas, nous l'avons souligné, dans le domaine des tractions. Les courbes représentant les critères moyens sont également relativement éloignées.

Les deux critères les plus pessimistes, qui sont généralement ceux utilisés dans les modélisations du champ proche des ouvrages de stockage (pour se placer du côté de la sécurité), sont assez proches l'un de l'autre, surtout dans la marge de contraintes moyennes susceptibles d'être rencontrées sur le site à une profondeur se situant entre 450m et 500m (de l'ordre de 8-12 MPa). On peut sans doute critiquer les critères de Hoek&Brown dans le domaine des tractions, étant donné la faible résistance à la traction observée sur les quelques essais effectués.

### III.9.2.d Comparaison des critères dans un calcul d'ouvrages

Pour une comparaison des deux critères les plus pessimistes, on considère un tunnel non soutenu creusé à une profondeur de 500 m dans le massif dont le comportement est supposé élastoplastique parfait. La contrainte avant creusement est supposée isotrope, et vaut à cette profondeur  $\sigma_0 = -12$  MPa. Les calculs effectués sont 1D axisymétriques, en assimilant le massif à un cylindre creux infiniment long de rayon interne 1m et externe 50m. Les résultats sont donnés aux figures III-10 et III-11 pour les critères H&B et G.3S respectivement.

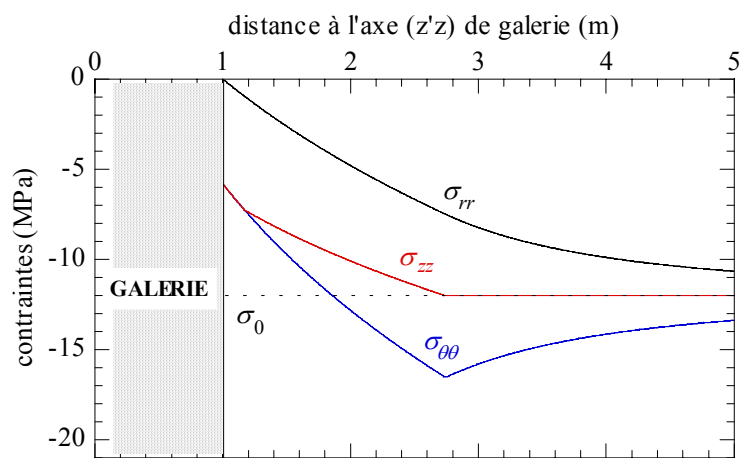


Figure III-10 : Contraintes principales après creusement pour le critère de H&B.

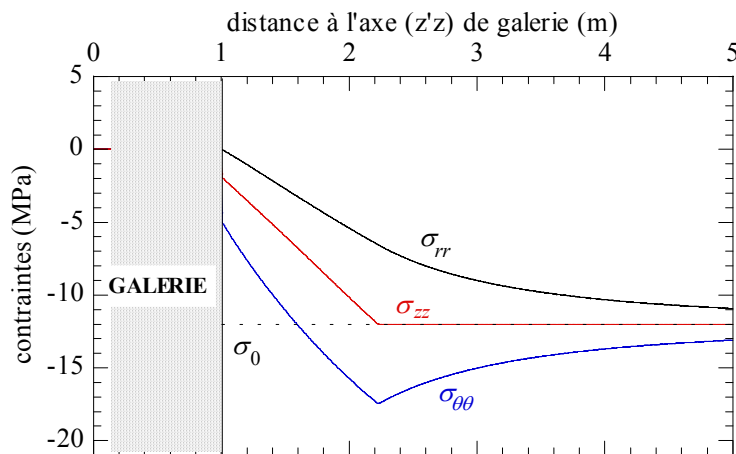


Figure III-11 : Contraintes principales après creusement pour le critère d'initiation de l'endommagement de G3S (critère élastoplastique parfait).

### III.9.2.e Evolution du critère

Nous faisons désormais le choix des critères mis au point à G.3S. Les critères d'initiation de l'endommagement, de rupture et de résistance résiduelle précédemment définis constituent la surface de charge, qui évolue au cours du chargement. Nous utilisons les critères les plus pessimistes. Ils sont représentés figure III.12.

Les critères de résistance maximum (rupture) et de résistance résiduelle se rejoignent au seuil de  $p = 34\text{MPa}$  en compression. En deçà de ce seuil, on observe un écrouissage positif jusqu'à rupture (où la résistance est maximum), puis négatif, et enfin nul lorsque la résistance résiduelle est atteinte ; c'est-à-dire un écrouissage en trois phases. Au delà de ce seuil, la rupture fragile observée au cours du radoucissement devient ductile, et la résistance résiduelle n'a plus de sens puisqu'il n'existe plus de diminution de résistance. On obtient alors un écrouissage nul ou positif : la règle d'écoulement est alors définie exclusivement par le critère de rupture, en tant que fonction de charge éventuellement associée à un écrouissage positif.

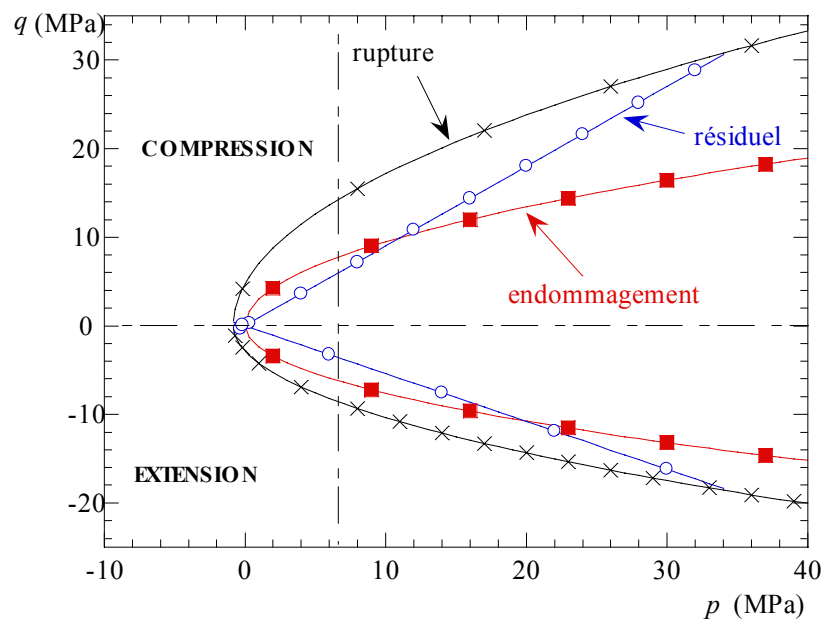


Figure III-12 : Critères minimaux d'initiation de l'endommagement, de rupture et résiduel des argilites de l'Est.

C'est bien sûr l'endommagement qui influe sur l'écrouissage. Plusieurs possibilités sont offertes quant au choix du paramètre interne à introduire dans le modèle. Nous avons opté pour la distorsion plastique définie par :

$$\gamma^{end} = \int_0^t \dot{\gamma}^{end} dt \text{ avec } \dot{\gamma}^{end} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{end} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{end}} \quad , \quad (III.87)$$

où  $\underline{\underline{e}}^{end} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{end} - \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^{end})\underline{\underline{1}}$  est la partie déviatorique du tenseur  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{end}$ . Il y a écouissage positif tant que la distorsion plastique est inférieure à la distorsion plastique calculée au pic de rupture du matériau, notée  $\gamma_{pic}$ . L'évolution des paramètres du critère a été choisie linéaire entre le critère d'initiation de l'endommagement et le critère de rupture, atteint lorsque  $\gamma^{end} = \gamma_{pic} = 0,007$ . La phase post-rupture dépend de la contrainte moyenne, par rapport à la valeur  $\hat{p} = 34$  MPa. Pour une contrainte moyenne  $p > \hat{p}$ , il n'y a pas d'écrouissage négatif, donc pas de phase 2 ; si  $p < \hat{p}$ , il y a un écouissage négatif jusqu'à ce qu'on atteigne la distorsion correspondant à la phase résiduelle  $\gamma_{res} = 0,015$ . Ensuite, le matériau est considéré comme élastoplastique parfait.

La fonction de charge peut alors se mettre sous la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \gamma^{end}) = q^{k(J_m, \gamma^{end})} - \alpha(J_m, \gamma^{end})p - \beta(J_m, \gamma^{end}) \quad (III.88)$$

**Phase 1** : si  $0 \leq \gamma^{end} \leq \gamma_{pic}$ ,

$$a) \alpha(J_m, \gamma^{end}) = (1 - \chi)\alpha_{end}(J_m) + \chi.\alpha_{pic}(J_m), \text{ et } \beta(J_m, \gamma^{end}) = \chi.\beta_{pic}(J_m), \text{ où } \chi = \frac{\gamma^{end}}{\gamma_{pic}} ;$$

$$b) k(J_m, \gamma^{end}) = 2 .$$

**Phase 2** : si  $\gamma_{pic} \leq \gamma^{end} \leq \gamma_{res}$  et  $p < \hat{p}$ ,

$$a) \alpha(J_m, \gamma^{end}) = (1 - \chi)\alpha_{pic}(J_m) + \chi.\alpha_{res}(J_m), \quad \text{et } \beta(J_m, \gamma^{end}) = (1 - \chi)\beta_{pic}(J_m),$$

$$\text{où } \chi = \frac{\gamma^{end} - \gamma_{pic}}{\gamma_{res} - \gamma_{pic}} ;$$

b) Entre rupture et état résiduel, on passe d'un critère parabolique à un critère linéaire. La loi initiale prévoyait une évolution linéaire de l'exposant  $k(J_m, \gamma^{end})$  du déviateur en fonction de la distorsion, entre  $\gamma_{pic}$  et  $\gamma_{res}$ . Nous avons été amenés à modifier quelque peu cet aspect, pour avoir toujours un écouissage négatif. Le raccord des critères de rupture et résiduel est donné par le point  $(\hat{p}, \hat{q})$  où  $\hat{q}$  est calculé par l'un quelconque de ces deux critères. Nous choisissons de faire évoluer l'exposant  $k(J_m, \gamma^{end})$  de manière à toujours passer par ce point :

$$k(J_m, \gamma^{end}) = \frac{\ln[\alpha(J_m, \gamma^{end})\hat{p} + \beta(J_m, \gamma^{end})]}{\ln \hat{q}} , \quad (III.89)$$

ce qui suffit, du moins visuellement, à assurer que l'écroutissement entre rupture et état résiduel sera toujours négatif (figure III.13). La preuve, par le calcul de  $df/d\gamma^{end}$ , n'a pas été faite, et est compliquée.

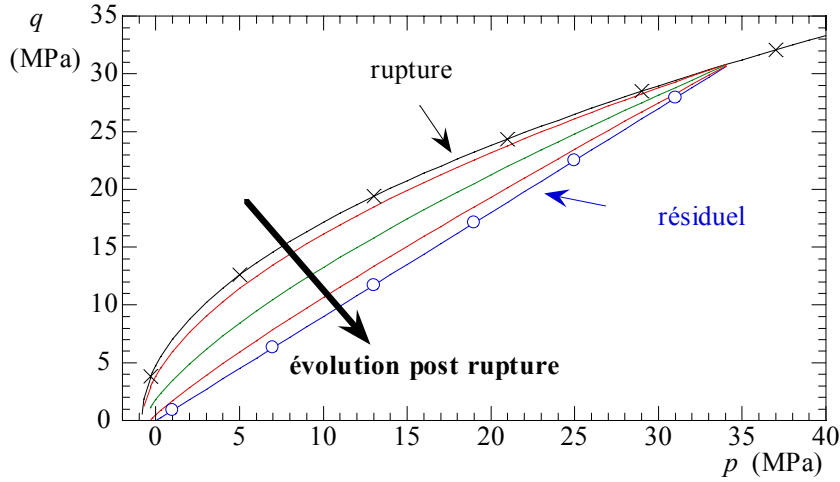


Figure III-13 : Evolution de la limite d'élasticité entre rupture et état résiduel ; écroutissement négatif.

**Phase 3** : pas d'écroutissement ; les paramètres n'évoluent plus.

- a) si  $p < \hat{p}$  et  $\gamma_{pic} \geq \gamma_{res}$ , la surface de charge correspond au critère résiduel ;
- b) si  $p > \hat{p}$ , la surface de charge correspond au critère de rupture

### III.9.2.f Règle d'écoulement

Nous utilisons le formalisme de la plasticité. La loi utilisée est une loi associée, donnée par :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{end} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (III.90)$$

Les trois invariants de la contrainte intervenant dans le potentiel (=critère), sa dérivée par rapport au tenseur des contraintes s'exprime par :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial J_m} \frac{\partial J_m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (III.91)$$

$$\text{avec : } \frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = -\frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \quad ; \quad \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2q} \underline{\underline{s}} \quad ; \quad \frac{\partial J_m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{9}{2q^2} \left( \frac{3}{q} \underline{\underline{t}} - J_m \underline{\underline{s}} \right) \quad (III.92)$$

où  $\underline{\underline{t}}$  est le déviateur du carré de  $\underline{\underline{s}}$  :

$$\underline{\underline{t}} = \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{s}}^2 - \frac{2}{9} q^2 \underline{\underline{1}} \quad (III.93)$$

On peut vérifier la cohérence du modèle d'un point de vue thermodynamique. Le raisonnement qui suit est classique. Nous l'avons emprunté à Thorel (1996), et adapté au potentiel utilisé. Ecrivons la *puissance volumique de dissipation d'endommagement* en petites déformations linéarisées :

$$\dot{\Phi}^{end} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{end} = \dot{\lambda} \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{III.94})$$

Pour un milieu isotrope, l'expression de cette puissance volumique dissipée est donnée par le calcul suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{end} = \dot{\lambda} \underline{\underline{\sigma}} : \left( \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial J_m} \frac{\partial J_m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) = \dot{\lambda} \underline{\underline{\sigma}} : \left( \frac{\partial f}{\partial q} \frac{3}{2q} \underline{\underline{s}} + \frac{\partial f}{\partial p} \left( -\frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \right) + \frac{\partial f}{\partial J_m} \frac{9}{2q^2} \left( \frac{3}{q} \underline{\underline{t}} - J_m \underline{\underline{s}} \right) \right)$$

On calcule les différents produits contractés :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = -3p ; \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{2}{3} q^2 ; \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{t}} = \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{t}} = \frac{2}{9} q^3 J_m . \quad (\text{III.95})$$

Il en résulte que le dernier terme entre parenthèses s'annule, et on obtient l'expression suivante, qui est générale puisque nous n'avons pas encore exprimé le potentiel (la seule condition en est l'hypothèse d'isotropie du comportement du matériau) :

$$\dot{\Phi}^{end} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{end} = \dot{\lambda} \left( q \frac{\partial f}{\partial q} + p \frac{\partial f}{\partial p} \right) \quad (\text{III.96})$$

Utilisant maintenant l'expression (III.88) du potentiel, nous obtenons :

$$\dot{\Phi}^{end} = \dot{\lambda} \cdot [kq^k - \alpha p] \quad (\text{III.97})$$

où  $k = k(J_m, \gamma^{end}) > 1$  et  $\alpha = \alpha(J_m, \gamma^{end})$ .

- quand il n'y a pas endommagement,  $f < 0$  donc  $\dot{\lambda} = 0$  et  $\dot{\Phi}^{end} = 0$  ;
- quand le matériau s'endommage, nous avons :
  - \*  $\dot{\lambda} > 0$
  - \*  $f = 0 = q^k - \alpha \cdot p$

alors :

$$\dot{\Phi}^{end} = \dot{\lambda} \cdot [(k-1)q^k + f] = \dot{\lambda} \cdot (k-1)q^k \geq 0 . \quad (\text{III.98})$$

La dissipation volumique est donc positive dans tous les cas, en accord avec le second principe de la thermodynamique.



### III.9.2.g Creusement d'un ouvrage

Comme nous l'avons fait pour comparer les deux critères présentés plus haut, nous effectuons un calcul avec le critère complet d'endommagement et de rupture dans le cas d'une galerie de section circulaire dans le massif d'argilites supposé infini. Le profil du champ de contraintes obtenu est présenté figure III-14. La zone endommagée est moins étendue que dans le cas élastoplastique parfait, en raison de l'écroûissage positif entre initiation de l'endommagement et rupture. La valeur de l'indicateur de rupture (la distorsion  $\gamma_{pic}$ ) n'est pas atteinte dans ce calcul, et il n'y a pas d'écroûissage négatif. Tel aurait été le cas une cinquantaine de mètres plus en profondeur.

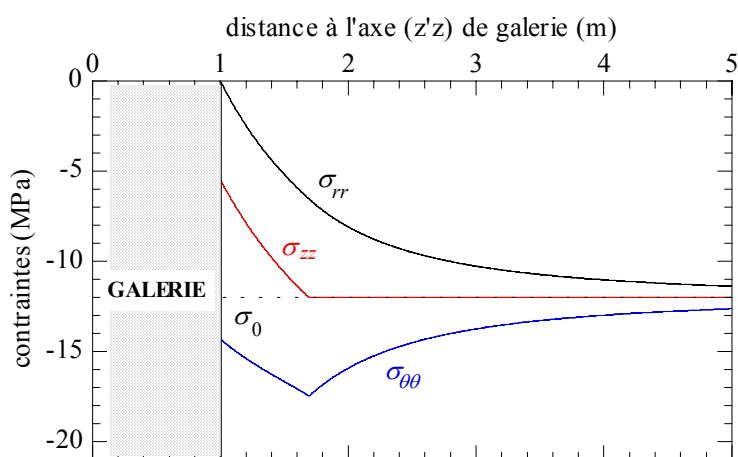


Figure III-14 : Contraintes principales après creusement avec la loi d'endommagement et de rupture de G3S complète.

## III.9.3 Comportement différé

### III.9.3.a Loi proposée

Différentes campagnes d'essais de caractérisation mécanique des argilites ont été réalisées à G.3S depuis 1995 (Gasc-Barbier, 2002). Une première loi de comportement différée a été proposée en 1997 (Ghoreychi, 1997). Les courbes de fluage issues des essais réalisés au laboratoire laissaient difficilement entrevoir une stabilisation de la vitesse de fluage, sauf peut-être dans certains cas. Ainsi, le fluage semble toujours se ralentir, à palier de contrainte fixé (figure III.15).

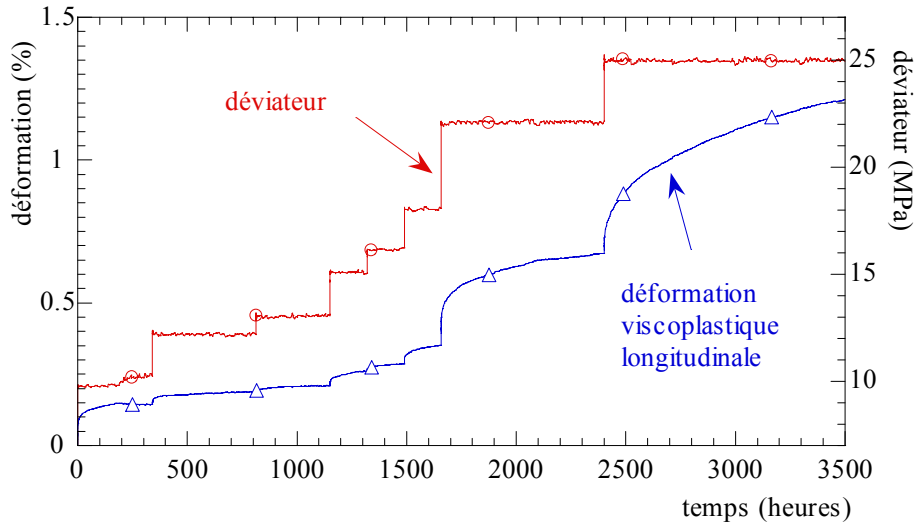


Figure III-15 : Résultats d'un essai de fluage multipalier sur un échantillon d'argilite.

Il a donc été fait le choix de modéliser ce fluage primaire, bien que l'accélération de fluage (fluage tertiaire) apparaissait dans certains cas, et de ne pas tenir compte d'un éventuel écoulement à vitesse de fluage constante. Ce choix était, à l'époque, justifié par la simplicité de l'identification par la loi d'Andrade

$$\varepsilon = c.t^\beta \quad , \quad (III.99)$$

compte tenu du très grand nombre d'essais réalisés, mais aussi par le peu de paramètres du modèle, ce qui est agréable dans un contexte où déjà beaucoup de phénomènes sont à prendre en compte (et on sait que les simplifications sont nombreuses). Il s'agit donc d'une loi d'écrouissage-viscosité multiplicative du type (III.50) faisant intervenir une fonction puissance du paramètre mesurant l'écrouissage. Il s'agit en l'occurrence de la distorsion viscoplastique définie par :

$$\gamma^{vp} = \int_0^t \dot{\gamma}^{vp} dt \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}} \quad , \quad (III.100)$$

Par ailleurs, G.3S a montré que seul le déviateur intervient de manière significative. La manière la plus simple d'écrire la forme de loi tridimensionnelle permettant d'intégrer cet aspect est sans doute d'utiliser la contrainte équivalente de Von Misès  $\sigma_{eq}$  (ou  $q$ ). En outre, le seuil de fluage est très faible. Il est négligé dans le modèle.

L'ensemble de ces remarques a abouti à une loi de comportement différé des argilites de l'Est de type loi de Lemaitre ou de Menzel-Schreiner, ou encore L.M.S. :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = A(T) \cdot \left( \frac{\sigma_{eq}}{q_0} \right)^n \cdot (\gamma^{vp})^m \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad , \quad (III.101)$$

pour laquelle les paramètres sont :

- $n (\geq 1)$  : un paramètre décrivant l'action du déviateur des contraintes,
- $m (\leq 0)$  : définissant l'écroutissage du matériau,
- $q_0 = 1 \text{ Mpa}$ ,
- $A(T)$  (en  $(\text{MPa})^{-n} \cdot \text{s}^{-1}$ ) : un paramètre lié à la viscosité du matériau, et dépendant de la température,
- $T$  : la température, exprimée en Kelvin (K).

### III.9.3.b Identification des paramètres

Dans le cas d'un essai de fluage monopalier sur bâti de fluage, sous confinement  $\sigma_3$  et contrainte axiale  $\sigma_1$ , le déviateur vaut  $\sigma_{eq} = |\sigma_1 - \sigma_3|$  et l'évolution de la déformation viscoplastique axiale  $\varepsilon_{vp1}$  se calcule aisément :

$$\varepsilon_{vp1}(t) = [(1-m) \cdot A(T) \cdot \sigma^n t]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (\text{III.102})$$

soit encore (c'est la loi d'Andrade) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{vp1} = a \cdot \sigma^\alpha \cdot t^\beta \\ \text{avec :} \\ \alpha = \frac{n}{1-m}, \quad \beta = \frac{1}{1-m} \quad \text{et} \quad a = [(1-m) \cdot A]^{\frac{1}{1-m}} \end{array} \right. \quad (\text{III.103})$$

Lorsque les déformations viscoplastiques sont élevées, la détermination des paramètres est relativement aisée dans un repère  $(\log \dot{\varepsilon}, \log t)$ . Mais le fluage, dans le cas des argilites est très faible, et il est difficile procéder à des mesures de déformations très faibles de façon précise. L'étude en vitesses s'est révélée infructueuse. Nous avons mis au point (voir annexe E) un petit programme d'ajustement par moindres carrés du triplet de paramètres  $(n, m, A(T))$ . Mais cet ajustement, réalisé sur les déformations au lieu des vitesses, nécessite de soustraire au préalable la déformation élastique à la déformation totale, ce qui, compte tenu des incertitudes sur les valeurs des paramètres élastiques, a une forte influence sur le calage des paramètres.

En annexe E, nous décrivons comment les ajustements sont réalisés, et comment le modèle de Lemaître peut être intégré dans un code de calcul.

En 1999, les différents calages opérés ont mené — avec plus ou moins de satisfaction — à un jeu de triplet  $(n, m, A(T))$  donné ci-après (formule (III.104)), la dépendance en température restant encore à examiner plus précisément (la vitesse de référence  $A$  est donnée à température ambiante) :

$$n = 6,8 \quad ; \quad m = -2,7 \quad ; \quad A = 1,3 \cdot 10^{-25} \text{ (MPa)}^{-n} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{(III.104)}$$

Utilisant ce couple de valeurs  $(n, m)$  pour ajuster les essais en température, Gasc-Barbier cherche une loi de variation de  $A(T)$  de type Arrhénius

$$A(T) = A_0 \exp\left(-\frac{B}{T}\right), \quad \text{(III.105)}$$

et trouve les paramètres suivants :

$$A_0 = 1,16 \cdot 10^{-14} \text{ (MPa)}^{-n} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad B = 7580 \text{ K} \quad \text{(III.106)}$$

Nous retenons les paramètres de 1999 (formules III.104 et III.106) pour les calculs. Mais ceux-ci ont été revus plusieurs fois, car les paramètres sont très sensibles au mode d'ajustement choisi ainsi qu'au mode opératoire utilisé pour l'ajustement ; sensibilité liée au fluage très lent des argilites. En 2002, Gasc-Barbier refait un calage des paramètres sur l'ensemble des essais à température ambiante réalisés depuis 1995. Elle obtient un nouveau jeu de paramètres :

$$n = 4,3 \quad ; \quad m = -1,7 \quad ; \quad A = 2,5 \cdot 10^{-23} \text{ (MPa)}^{-n} \cdot \text{s}^{-1}$$

La loi proposée a eu le mérite de pouvoir servir de base afin d'effectuer les premières modélisations numériques de concepts de stockage. Mais elle implique un ralentissement du fluage qui semble être infirmé par des essais plus récents d'une plus durée (essai monopulier sur plus d'un an initié en 2002).

Il a été prouvé (Gasc-Barbier, 2002 ; Kharkhour, 2002) que le fluage de ce matériau induit une perte de résistance. Kharkhour (2002) met au point une loi de comportement couplée endommagement / viscoplasticité, utilisant la variable  $D$  d'endommagement. Son modèle est fondé sur celui de Kachanov.

### III.9.3.c Creusement d'un ouvrage

Comme précédemment, nous simulons le creusement d'une galerie dans le massif supposé cette fois élastoviscoplastique. La loi utilisée est celle de 1999 (formule III.104). Nous montrons figure III.16 une coupe du champ de contraintes après 100 ans. Les contraintes sont fortement relaxées par rapport à leur état juste après creusement pour lequel les contraintes seraient données par un calcul élastique.

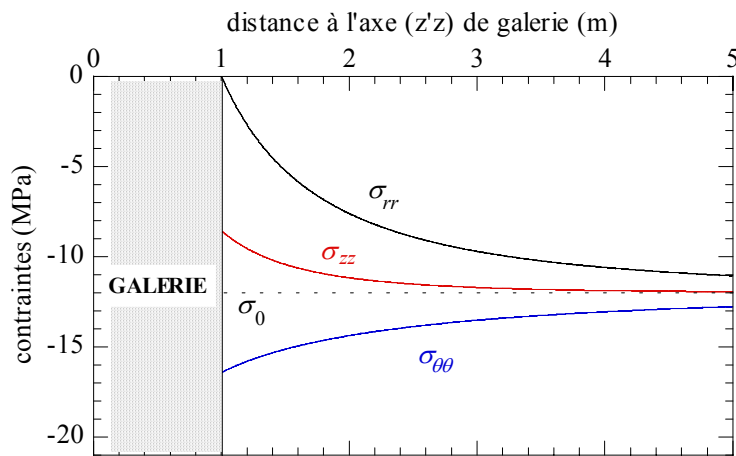


Figure III-16 : Contraintes principales après 100 ans avec la loi de comportement viscoplastique des argilites de l'Est (avec les paramètres de la loi de 1999).

Il est communément admis que, pour le matériau de Lemaitre comme pour celui de Norton-Hoff (cas  $m=0$ ), le champ de contraintes tend vers une limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous menons une discussion à ce sujet en annexe E. Par exemple, l'écart  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$  en paroi à l'état limite vaut celui du cas élastique divisé par le paramètre  $\alpha = \frac{n}{1-m}$  donné en formule (III.103). La contrainte orthoradiale limite vaut alors -13 MPa. On constate sur la figure que l'état limite n'est pas atteint au bout de 100 ans. En particulier, le paramètre  $m$  utilisé rend l'évolution lente.

Sur la figure suivante (figure III-17), nous montrons le résultat d'un calcul élastoviscoplastique avec endommagement, également 100 ans après creusement. Les contraintes à l'issue du creusement apparaissent en pointillé sur la figure.

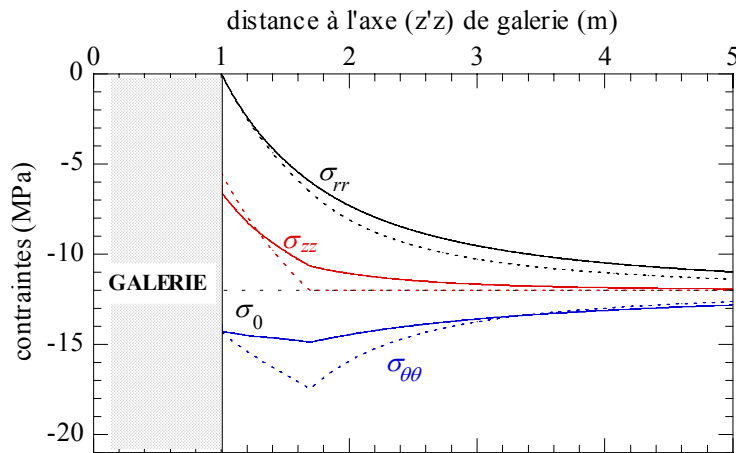


Figure III-17 : Contraintes principales après 100 ans avec le modèle complet élastoviscoplastique avec endommagement et rupture pour les argilites.

### III.10 Argile de Boom

La Belgique possède depuis vingt ans un laboratoire souterrain dans une formation argileuse profonde, l'argile de Boom, qui se présente sous la forme d'une couche homogène d'épaisseur voisine de 100 mètres. Le laboratoire souterrain est situé à Mol. Nous allons présenter ci-dessous le comportement de cet argile auquel nous nous intéressons plus loin lors de la discussion du modèle de gonflement.

L'argile de Boom est formée de 25% de minéraux relativement grossiers (quartz, feldspath, pyrite...) et de 75% d'argile (Manfroy , 1984 cité par Rousset, 1988). Cette fraction argileuse se décompose de la façon suivante :

- Smectite            54%
- Illite                23%
- Kaolinite           18%
- Chlorite            4%

L'argile présente une porosité moyenne de 37%, et une teneur en eau moyenne de 22%. Sa masse volumique avoisine 2000 kg/m<sup>3</sup>. Cette argile fait partie des argiles plastiques. En fait, son comportement est marqué par une viscoplasticité forte et rapide, à tel point que certains modèles utilisés pour cette argile sont élastoplastiques.

Plusieurs modèles ont été développés (Barnichon, 1998). Nous en présentons deux : un modèle mis au point par Rousset (1988) sur la base d'expériences réalisées à G.3S, et un modèle proposé par le

SCK/CEN dans le cadre du dernier programme d'instrumentation et de recueil de données in situ CLIPLEX (Clay Instrumentation Program and Experimentation) réalisé dans le laboratoire. G.3S était impliqué dans une des tâches de ce programme, consistant à la réalisation de calculs numériques associés au programme, dans le cadre d'un Benchmark numérique (exercice d'intercomparaison de codes).

### III.10.1 Modèle de Rousset

Rousset propose pour l'argile de Boom un modèle rhéologique de matériau monophasique ; le rôle joué par les écoulements n'est pas pris en compte, mais son modèle est compatible avec l'étude expérimentale qu'il a menée puisque tous ses essais ont été réalisés en condition non drainée. Ce modèle a été repris par Djéran et al. (1994) et Barnichon (1998).

Il s'agit d'un modèle élastoviscoplastique avec écrouissage. Il permet de rendre compte de plusieurs aspects du comportement observés lors des essais à court et long terme :

- apparition de déformations irréversibles dès le début des essais,
- déformations irréversibles importantes, et déformations élastiques faibles,
- effets différés très marqués,
- effet de la contrainte moyenne sur la résistance du matériau,
- augmentation de la résistance pour des petites déformations (écrouissage positif),
- perte de résistance pour de grandes déformations (radoucissement, ou écrouissage négatif),
- dilatance pour des déformations importantes.

Le tenseur des déformations est décomposé en une partie élastique linéaire et une partie viscoplastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} . \quad (\text{III.107})$$

### III.10.1.a Caractéristiques élastiques

Le comportement élastique est supposé isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Ce dernier vaut en moyenne :

$$\nu = 0,3. \quad (\text{III.108})$$

Le choix d'une valeur pour le module d'Young est plus délicate, en raison d'une dispersion élevée apparue lors des essais (valeurs comprises entre 300 et 2000 MPa), mais aussi parce que  $E$  diminue quand les déformations irréversibles augmentent. L'auteur retient néanmoins la valeur :

$$E = 1430 \text{ MPa}. \quad (\text{III.109})$$

### III.10.1.b Viscoplasticité

La loi de comportement viscoplastique du modèle est de la forme :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \langle f(\underline{\sigma}, \zeta) \rangle^n \frac{\partial \underline{g}^{vp}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{III.110})$$

où  $\eta$  est la viscosité (en fait, la viscosité est régie à la fois par  $\eta$  et  $n$ ),  $\zeta$  est le paramètre d'écrouissage isotrope donné sous la forme d'une déformation viscoplastique équivalente :

$$\zeta = \int_0^t \sum |\dot{\varepsilon}_i^{vp}| dt \quad (\text{III.111})$$

Le critère viscoplastique  $f$  est un critère de Mohr-Coulomb (cohésion  $C_f$ , angle de frottement  $\varphi_f$ ), dont la cohésion évolue avec le paramètre d'écrouissage  $\zeta$  selon la courbe représentée en figure III-18 :

$$C_f = \begin{cases} \frac{\zeta}{\varepsilon_0} c_{pic} & si \ 0 \leq \zeta \leq \varepsilon_0 \\ c_{pic} & si \ \varepsilon_0 \leq \zeta \leq \varepsilon_1 \\ c_{pic} + \frac{\zeta - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} (c_{res} - c_{pic}) & si \ \varepsilon_1 \leq \zeta \leq \varepsilon_2 \\ c_{res} & si \ \varepsilon_2 \leq \zeta \end{cases} \quad (\text{III.112})$$

où  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des paramètres de la loi d'écrouissage (figure III-18).



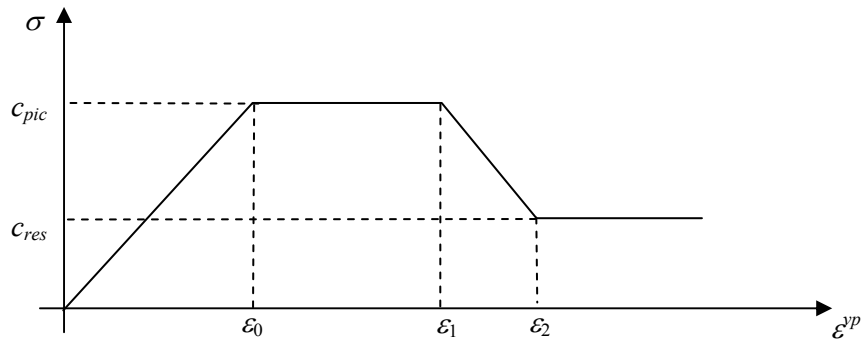


Figure III-18 : Variation du seuil viscoplastique avec le paramètre d'écroissage

Le potentiel d'écoulement  $g$  est défini également par une loi de Mohr-Coulomb dont seul compte l'angle de frottement  $\phi_g$  pour l'écoulement. L'ensemble des valeurs de ces paramètres, issus de Djéran et al. (1994), est donné dans le tableau III-4.

Paramètre	Valeur
$\phi^{vp}$	4°
$c_{pic}$	0,12 MPa
$c_{res}$	0,03 MPa
$\epsilon_0$	2,5%
$\epsilon_1$	3,5%
$\epsilon_2$	5,0%
$\eta$	300 MPa <sup>4</sup> ·day
$n$	4
$\phi_g$	4°

Tableau III-4 : paramètres pour la part viscoplastique de l'argile de Boom (selon Djéran et al. 1994)

### III.10.2 Modèle du SCK/CEN

SCK/CEN (Centre pour l'Energie Nucléaire belge) propose pour l'argile de Boom un modèle proélastoplastique de type Cam-Clay modifié (voir Labiouse et al.,1998), faisant intervenir la

contrainte effective de Terzaghi (avec  $b=1$ ). Cela revient à supposer le solide incompressible ( $K_s$  est infini). Dans ce cas, le module de Biot est donné par la formule suivante déduite de (III.17) :

$$M = \frac{K_f}{\phi} \quad (\text{III.113})$$

Les paramètres du modèle sont réunis dans le tableau III-5 ci-dessous.

Dénomination	Paramètre	Valeur
Pente de consolidation normale	$\lambda$	0,13
Pente de gonflement élastique	$\kappa$	0,02
Pression de consolidation	$P_{\text{cons}}$	6 MPa
Angle de frottement résiduel	$\varphi_r$	21°
Coefficient de Poisson drainé	$\nu_o$	0,2

Tableau III-5 : paramètres du modèle de Cam-Clay Modifié pour l'argile de Boom (Mol, Belgique)

Le module d'Young drainé de la roche intacte vaut  $E_o = 332$  MPa, et la porosité initiale prise pour le modèle est de 39%. Le module d'incompressibilité de l'eau est pris égal à  $K_f = 2$  GPa. On en déduit, par (III.113) la valeur du module de Biot :

$$M = 5128 \text{ MPa} \quad (\text{III.114})$$

A partir des données précédentes, on calcule les caractéristiques mécaniques non drainées :

$$E_{\text{nd}} = 411 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \nu_{\text{nd}} = 0,487 \quad (\text{III.115})$$

### III.11 Argile remaniée pour barrières ouvragées

#### III.11.1 Objectif

L'étude THM d'un massif au champ proche des galeries de stockage nécessite une prise en compte correcte de l'incidence de la barrière ouvragée (B.O.). Cela nécessite de pouvoir évaluer la pression qui se développe dans la B.O. due à la forte aptitude au gonflement du matériau Fo-Ca.

Au moment de sa mise en place, la B.O. argileuse Fo-Ca est partiellement saturée en eau. Elle va se saturer progressivement avec l'arrivée d'eau en provenance du massif. C'est ce processus de saturation

qui va provoquer le gonflement de la B.O. ; gonflement qui sera partiellement empêché par le massif, d'où le développement, en parallèle du gonflement, d'un confinement de la B.O. qui va ainsi exercer une pression sur la paroi de la galerie.

### III.11.2 Difficultés

Le comportement THM de l'argile remaniée Fo-Ca envisagée pour constituer la barrière ouvragée entourant les déchets est complexe et doit être traité en toute rigueur dans un cadre qui intègre la Mécanique des Milieux Poreux saturés et non saturés. Alonso et al. (1990), de l'Université Polytechnique de Catalogne (UPC, Espagne), ont mis au point un modèle de comportement pour certaines argiles non saturées applicable à la bentonite. C'est un modèle à contraintes mécanique et hydrique indépendantes, dérivé du modèle de Cam-Clay Modifié. Leur modèle permet en outre de prendre l'évolution de la fonction de charge avec la température (écrouissage thermique). Il permet enfin de tenir compte du comportement des sols non saturés et, en particulier, des sols compactés :

- existence d'un domaine « sous-consolidé » et reproduction du phénomène d'effondrement qui semble associé à cette sous-consolidation,
- augmentation du domaine élastique avec la contrainte de compression ou la pression négative (suction).

Un des intérêts majeurs du modèle de UPC est qu'il permet de reproduire des effets tels que l'effondrement (« *collapse* »), qui désigne une diminution de volume accompagnant l'humidification d'un sol. On pourra se reporter à Biarez (1992), Fleureau (1993) ou Modaressi et al. (1994) pour une tentative d'explication par les forces de capillarité. Pour certains chemins de chargement, les résultats d'essais tracés dans le plan ( $\log p'$ ,  $e$ ) montrent un comportement purement élastique au-delà du seuil de plasticité défini par le critère, puis un effondrement qui permet de rejoindre la droite de consolidation dite « normale » (NC) du matériau (qui est, telle que définie en Mécanique des Sols, celle obtenue par un chargement isotrope un tel que le rapport des contraintes principales reste constant, comme à l'œdomètre par exemple). En fait, ce phénomène est fonction du chemin de chargement hydro-mécanique suivi, et traduit simplement le fait que les modèles de type Cam-Clay sont insuffisants. La prise en compte d'un écrouissage par la suction, indépendante de la contrainte mécanique, est alors nécessaire. Retenons toutefois que l'effondrement n'intervient que si on dépasse la courbe NC de consolidation normale.

Le modèle sus-mentionné est un modèle très poussé, mais qui ne prévoit pas le passage au cas d'un milieu saturé. Par ailleurs, l'accord du modèle avec le comportement de l'argile Fo-Ca n'est pas

complètement démontré, faute d'un nombre suffisant d'essais. Dans un rapport de la Commission Européenne, Volckaert et al. (1996) présentent un certain nombre de résultats d'essais hydro-mécaniques du CEA sur l'argile Fo-Ca. Ce rapport illustre bien, vis-à-vis par exemple du modèle développé par UPC, le fait que les données disponibles sont insuffisantes pour caractériser un modèle couplé en milieu non saturé :

- il n'y a pas d'essai de désaturation,
- seule l'influence de la contrainte moyenne est observée,
- il n'y a pas de série de cycles charge-décharge,
- l'état saturé n'est pas étudié.

Par ailleurs, dans le modèle de UPC, la pente élastique  $\kappa$  n'évolue pas avec la teneur en eau du matériau. Alonso et al. (1990) sont conscients de cet aspect, qui ne reflète pas toujours la réalité, mais préfèrent s'y maintenir. Dans les courbes issues des essais précédemment cités sur l'argile Fo-Ca, la pente élastique semble néanmoins très fortement dépendante de la teneur en eau.

### **III.11.3 Modèle « ingénieur »**

Nous avons été amené, dans le cadre d'une étude menée à G.3S, à réaliser des calculs faisant intervenir la BO argileuse. L'argile remaniée Fo-Ca qui sera (éventuellement) utilisée sera une argile compactée. Plusieurs méthodes de compactage sont à l'étude. Le compactage de ces blocs constituant la B.O. est prévu avec une contrainte moyenne de compression comprise entre 60 et 200 MPa, c'est-à-dire avec un coefficient de sécurité nettement suffisant pour éviter tout problème d'effondrement après humidification du matériau en place. Nous avons donc fait le choix de mettre au point un modèle plus simple que le modèle de UPC pour l'argile Fo-Ca, de type Cam-Clay, qui permette de rendre compte de l'action de la B.O. sur le massif étudié dans différentes modélisations.

Le modèle que nous proposons est développé en annexe B. Il est caractérisé par une loi de comportement de type « Cam-Clay Modifié » dont les paramètres dépendent, de manière réversible, du degré de saturation  $\bar{s}$  (tableau III-6). En particulier, la pente élastique varie avec la saturation, ainsi que le coefficient de Biot du liquide (selon une loi de type (III.11) ou (III.12)).

Les résultats des expériences ne permettent pas de définir une loi pour le milieu saturé. Nous n'avons pas fait d'extrapolation aux valeurs de pression positives, et choisi d'exprimer les coefficients en fonction du degré de saturation (qui n'évolue plus dès lors que le matériau est saturé) plutôt qu'en fonction de la pression (ce qui aurait permis une extrapolation).

Le degré de saturation  $\bar{s}$  est supposé dépendre de manière bi-univoque de la pression négative (la succion  $S$ ). L'ajustement des résultats d'essais peut se mettre sous la forme :

$$\bar{s} = \bar{s}_{res} + (1 - \bar{s}_{res}) \exp(-aS^d) \quad , \quad (III.116)$$

avec :  $\bar{s}_{res} = 0,4$  ;  
 $a = 5 \cdot 10^{-2}$  ;  
 $d = 0,55$  .

La courbe de rétention obtenue est présentée en figure III-19 ci-dessous. En réalité, l'ajustement est valable dans le domaine des succions inférieures à 150 MPa. Au-delà, il s'agit d'une extrapolation, de même que la valeur de la saturation résiduelle n'est sans doute pas  $\bar{s}_{res}$  . Lors de la mise en place, la B.O. présentera une saturation de l'ordre de 70%. Le dégagement de chaleur des déchets fortement exothermiques est susceptible de faire baisser la teneur en eau de la B.O. ; en parallèle, celle-ci va absorber l'eau en provenance du massif. La compétition de ces deux phénomènes sera sans doute en défaveur du modèle, si le degré de saturation atteint la limite  $\bar{s}_{res}$  . Mais les essais n'offrent pas plus d'indication sur la saturation minimale. De plus, la prise en compte de la thermique n'est pas faite dans le modèle.

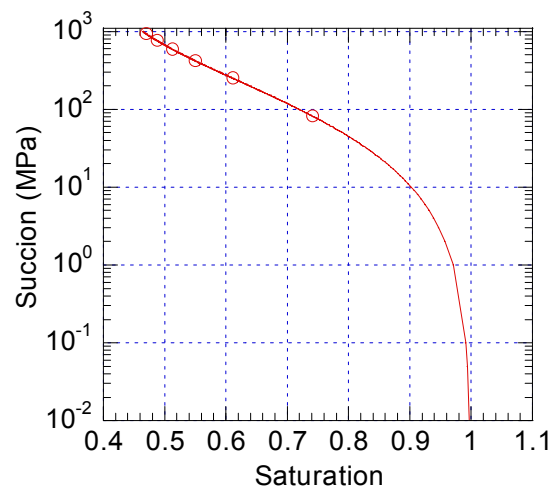


Figure III-19 : Courbe de rétention de l'argile Fo-Ca obtenue par le modèle

Dénomination	Paramètre
Pente de consolidation normale	$\lambda = 0,22$
Pente de gonflement élastique	$\kappa = 0,113 \left( \frac{\bar{s} - \bar{s}_{res}}{1 - \bar{s}_{res}} \right) - 0,014$
Coefficient de Biot	$b = 0$ si $\bar{s} < \bar{s}_1$ $b = \left( \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{1 - \bar{s}_1} \right)^3$ sinon, où $\bar{s}_1 = 0.55$
Indice des vides avant compactage	$e_0 = 1,35$
Pression de référence	$p'_0 = 0,1$ MPa
Pression de consolidation	$P_{cons} = 60$ MPa
Pente de l'état critique	$m = 1$
Coefficient de Poisson drainé	$\nu_o = 0,2$

Tableau III-6 : paramètres du modèle de type Cam-Clay Modifié mis au point pour l'argile Fo-Ca, avec dépendance vis-à-vis du degré de saturation.

L'accord avec les courbes expérimentales est très satisfaisant. Un cas est présenté figure III.20, où nous avons reproduit une courbe issue des expériences présentées dans l'annexe B. Le modèle n'en reste pas moins un simple modèle « ingénieur ».

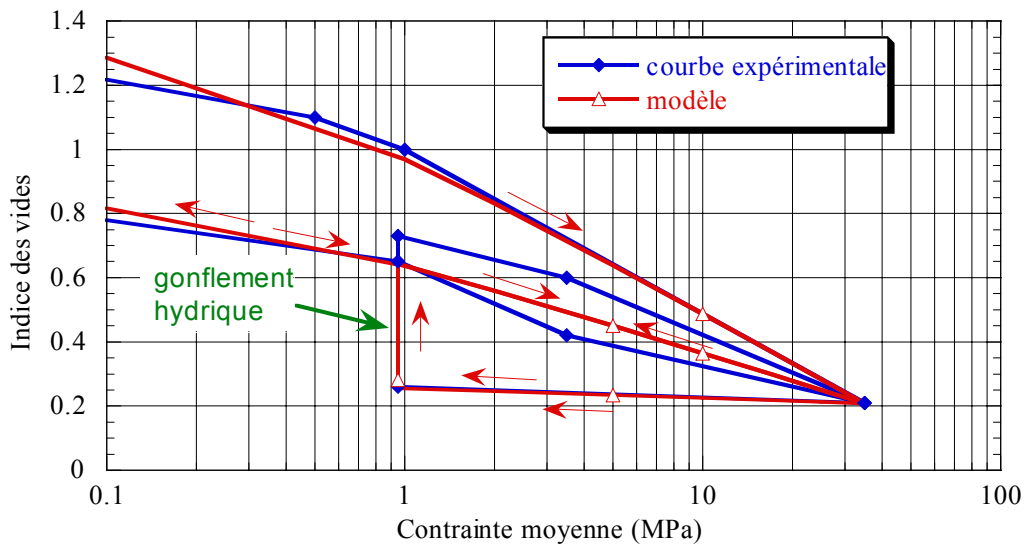


Figure III-20 : Comparaison d'un calcul effectué avec le modèle de Cam-Clay modifié pour la B.O. et les résultats expérimentaux.

Remarquons que le modèle, bien qu'il ne soit pas à « variables indépendantes », permet de reproduire le phénomène d'effondrement. Pour expliquer cela, reprenons l'usage des contraintes positives en compression. Dans le domaine non saturé, la contrainte effective est donnée par :

$$\sigma' = \sigma + bS. \quad (\text{III.117})$$

La relation exponentielle entre le degré de saturation et la succion implique que le produit  $bS$  intervenant dans (III.117) croît puis décroît en fonction de la succion (figure III.21). Lorsqu'on humidifie le matériau initialement sec ( $S > 150$  MPa par exemple), la succion va diminuer. Le produit  $bS$  et la contrainte effective vont donc augmenter ; le matériau est alors susceptible de se plastifier.

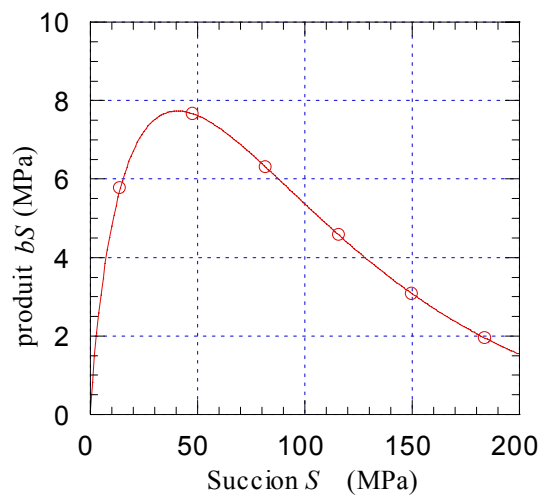


Figure III-21 : Evolution du produit  $bS$  avec la succion  $S$ , pour le modèle de Cam-Clay modifié de la B.O.

### III.12 Conclusion

Si nous ne voulions pas tenir compte du phénomène de gonflement-retrait, nous aurions à ce stade un ensemble de modèles permettant d'étudier les couplages THM dans plusieurs types d'argiles. C'est avec certains de ces modèles que les études pour l'Andra ont par exemple été réalisées à G.3S.

Les calculs présentés dans le cas d'une galerie creusée dans les argilites de l'Est ont été effectués avec un code de calcul que nous avons développé. Nous le présentons au chapitre VI, en introduction aux modélisations.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier le gonflement. Quand nous avons commencé nos recherches sur le sujet, certaines notions avancées ne paraissaient pas toujours très claires. Nous avons

souhaité repasser en revue plusieurs aspects de ce phénomène. Cela explique aussi pourquoi nous avons tenu à préciser ici un certain nombre de notions relativement en amont par rapport à l'objectif en question, concernant la notion de contrainte effective : au chapitre suivant, la contrainte effective est prolongée en intégrant le phénomène de gonflement.





# CHAPITRE IV GONFLEMENT DES ARGILES

## *IV.1 Introduction*

L'objectif, dans ce chapitre, est de comprendre les difficultés liées à la modélisation du gonflement, et de définir un modèle. L'entreprise n'est pas simple, car les difficultés sont de plusieurs ordres. Tout d'abord des difficultés de compréhension du phénomène au niveau macroscopique : comme nous l'avons expliqué au chapitre II, on peut difficilement affirmer quel phénomène, entre l'arrivée d'eau et le gonflement, précède l'autre. Ensuite, au niveau microscopique, il n'y a pas consensus sur les forces prépondérantes mises en action dans le mécanisme de gonflement. Un mécanisme est souvent mis en avant, consistant en la répulsion électrostatique des feuillets d'argiles et expliqué dans le cadre de la théorie de la double couche diffuse. Le problème posé par ce mécanisme réside dans sa forte non linéarité et sa difficile mise en œuvre dans un modèle pour le calcul.

Guidés par une revue d'un ensemble d'articles et d'ouvrages traitant du phénomène de gonflement-retrait, notamment du point de vue de la modélisation, nous faisons un choix quant au mécanisme que nous privilégions. Nous nous focalisons ici sur les aspects mécaniques, avec pour résultat une loi de comportement mécanique faisant intervenir les autres phénomènes (hydraulique, chimique, ..). Les aspects hydrauliques, qui nous ont amené à soulever d'autres difficultés, font l'objet du chapitre suivant.

Partant du principe que les argiles non gonflantes peuvent raisonnablement être décrites par la poromécanique classique, nous nous intéressons dans ce chapitre aux études concernant les argiles dites gonflantes. Les études du comportement mécanique de ces argiles sont nombreuses. Elles consistent généralement (comme pour les milieux non saturés), à essayer de généraliser le concept fédérateur de « contrainte effective ».

Dans ce chapitre, comme lorsque nous avons fait un retour sur le concept de contrainte effective au chapitre III, le terme « contrainte » désignera la contrainte moyenne, et sera comptée positive en compression, de manière à nous conformer à l'usage des géomécaniciens. Nous noterons  $\sigma$  cette « contrainte ».

## IV.2 Argiles et contraintes effectives

Pour ce qui concerne les argiles (prenons le cas d'une argile saturée), l'expression (III.6) de la contrainte effective ne permet plus de rendre compte de la relation eau-argile spécifique intervenant au niveau le plus fin. Nous allons nous focaliser sur une argile gonflante, et tenter, en parallèle d'une revue bibliographique sur le sujet, de faire ressortir combien le phénomène de gonflement-retrait des argiles est difficile à appréhender.

### IV.2.1 Mise en évidence du phénomène de gonflement-retrait

Dans sa thèse, Tessier (1984) explique que : « le gonflement des argiles apparaît au cours de l'humectation, lorsque, partant d'un volume  $V_1$ , on aboutit à un volume  $V_2 > V_1$ . ». Cet énoncé pourrait tout aussi bien s'appliquer à n'importe quel matériau poreux. De fait, il n'exprime pas en quoi le gonflement des argiles est qualitativement différent de celui d'une éponge. Bien évidemment, la différence est bien expliquée par ailleurs dans sa thèse, mais cette phrase résume bien une certaine façon de modéliser le gonflement.

L'auteur s'intéresse à plusieurs types d'argiles, et montre que certaines gonflent plus (bien plus) que d'autres. Le retrait est le phénomène inverse du gonflement. Les expériences de gonflement-retrait sont réalisées en appliquant une succion aux échantillons ; ceux-ci sont petits, et on attend suffisamment longtemps pour égaliser les succions internes et externes aux échantillons. Par ailleurs, il n'y a pas de contrainte mécanique appliquée.

Au cours de la dessiccation, son analyse le conduit à comparer les variations de volume aux succions correspondantes. Il utilise pour cela la contrainte effective :

$$\sigma' = \sigma^n + S. \quad (\text{IV.1})$$

où  $\sigma^n$  est la contrainte mécanique (il s'agit en fait de la contrainte nette), et  $S$  est la succion. Les échantillons ne sont pas soumis à une contrainte mécanique, et la contrainte effective se réduit à la succion.

Le problème, avec cette formule, qui est tout à fait suffisante dans ce contexte non mécanique où elle n'est qu'un support, c'est justement qu'elle ne traduit pas la spécificité du comportement des minéraux argileux. Elle ne peut être qualifiée de loi de comportement (même simplifiée) des minéraux argileux : elle ne rend pas compte du rôle, démontré par ailleurs dans l'ouvrage, du cation

compensateur, a savoir par exemple qu'une montmorillonite sodique gonfle plus qu'une montmorillonite calcique.

En revanche, le type d'expériences menées constitue effectivement la manière la plus simple pour mettre en évidence le gonflement d'une argile. Aussi est-ce la technique la plus utilisée. Mais il faut bien comprendre que cela conduit parfois à l'émission de lois de comportement dans lesquelles la déformation est liée à la contrainte et à la pression (ou la succion). Dès lors, on peut être porté à croire qu'elles seraient valables quel que soit le fluide utilisé, ce qui est faux.

Lahlou (1991) met au point une loi de comportement hydromécanique pour l'argile Fo-Ca, sur la base d'essais triaxiaux. Il s'agit d'un modèle élastoplastique de type Cam Clay modifié dans lequel un terme de la fonction de charge dépend de la succion.

Daupley (1997) étudie expérimentalement le gonflement d'une argile raide : l'argilite de Tournemire (Aveyron). Son interprétation mécanique du phénomène le conduit à montrer que le fait de prendre en compte, ou non, les interactions entre l'eau et les particules argileuses ne modifie pas le caractère fondamental reliant la succion et le gonflement. Aussi interprète-t-il ses essais dans le cadre de la poroélasticité linéaire, bien que, d'une part, il ait mis en évidence l'existence d'effets osmotiques ainsi que le rôle du chimisme et de la concentration de la solution en contact avec l'échantillon dans des essais de gonflement, et d'autre part qu'il soit conscient de phénomènes (du type DCD) bien spécifiques aux argiles.

En fait, les essais réalisés sur le gonflement des argiles permettent de relier l'état énergétique de l'eau dans les échantillons et la quantité observée (volume, pression de gonflement, degré de saturation, ...). Bien souvent, l'eau dans les échantillons d'argile se trouve être soumise à une pression négative, une succion. De ce fait, les essais sur le gonflement des argiles sont généralement effectués en contrôlant la contrainte mécanique et la succion. Cela peut mener à ne plus considérer que ces deux grandeurs (autrement dit contrainte et pression) lors de la mise au point d'une loi de comportement d'une argile. Dès lors, on occulte le rôle des solutés qui est non négligeable.

## **IV.2.2 Gonflement et pression osmotique**

Certains auteurs considèrent que le gonflement est un phénomène lié à l'osmose. On parle souvent du rôle de la succion osmotique plutôt que de la pression osmotique, parce que la majorité des recherches sur le sujet concerne les sols non saturés (selon les auteurs ; nous dirons de préférence « à

pression négative »). Mais nous utiliserons indifféremment les deux appellations pour désigner le phénomène.

La succion osmotique est liée à la présence de solutés dans l'eau de la roche ou du sol ; généralement du sel. Plus qu'à un chargement mécanique, elle fait référence au fait que les caractéristiques mécaniques d'un milieu donné sont susceptibles d'être modifiées par un changement de la concentration.

Si on se réfère au phénomène d'osmose, on comprend bien que la présence de sel dans l'eau des pores a tendance à abaisser le niveau énergétique de l'eau, ce qui va dans le sens d'une attraction plus forte entre les particules (ou une répulsion moins forte), donc contribue à une cohésion plus grande.

La succion est alors généralement décomposée en deux termes (Fredlund et al., 1993) qui sont la succion matricielle  $(P_a - P_w)$  et la succion osmotique  $\pi_{osm}$  :

$$S = (P_a - P_w) + \pi_{osm} \quad (IV.2)$$

Tel qu'ainsi perçu, ce phénomène est a priori en mesure d'expliquer le phénomène de gonflement spécifique aux argiles : si un échantillon d'argile est plongé dans de l'eau distillée, celle-ci va, en entrant dans l'échantillon, diluer l'eau interstitielle et diminuer les forces d'attraction interparticulaires et provoquer le gonflement. C'est de cette manière qu'on explique le gonflement des sols argileux après la pluie. On traduit cet aspect par une variation de  $\pi_{osm}$ .

Dans l'expression (IV.2) ci avant, le terme  $P_w$  désigne non plus la pression de l'eau  $P_e$  comme dans l'expression (III.10) du chapitre III, mais la pression de la solution. S'il en était autrement, une variation de la concentration de la solution interstitielle (comme dans l'exemple précédent) entraînerait non seulement une évolution des propriétés (donc de  $\pi_{osm}$ ), mais aussi une évolution de l'état énergétique du constituant eau, à savoir  $P_e$ . La succion matricielle est donc bien distincte de la succion capillaire.

Fredlund et al. (1993) indiquent que la pression osmotique est largement associée à la théorie de la double couche diffuse (DCD) en vigueur pour les argiles. Ils en donnent néanmoins une définition, formulée d'abord par Aitchison (1965, cité par les auteurs), qui, nous le verrons plus tard, ne peut pas correspondre à cette théorie.

Pour bien comprendre cette définition, nous imaginons l'exemple, illustré par la figure IV.1, où on considère 3 bocaux :

- Le premier contient un échantillon d'argile, saturé ou non par de l'eau du sol (c'est-à-dire une solution différente de l'eau pure) à une pression  $P_w$ , et de l'air humide à pression atmosphérique en équilibre thermodynamique avec l'eau dans l'échantillon. On note  $H_{r1}$  l'humidité relative de l'air, et  $P_{v1}$  la pression de vapeur dans le bocal 1. On note  $P_e$  la pression de l'eau pure dans l'échantillon (qui est forcément négative dans cette configuration, c'est-à-dire inférieure à la pression atmosphérique, en raison des phénomènes capillaires ou d'adsorption).
- Le deuxième bocal contient la même solution (du sol) que l'échantillon, mais libre, et de l'air humide en équilibre dont  $H_{r2}$  désigne l'humidité relative et  $P_{v2}$  la pression de vapeur. On note  $P_2$  la pression de la solution, et  $P_{e2}$  la pression partielle de l'eau dans la solution).
- Le troisième bocal contient de l'eau pure libre en équilibre avec de l'air humide. Humidité relative et pression de vapeur sont cette fois  $H_{r3}$  et  $P_{v3}$  respectivement.  $P_3$  y désigne la pression de l'eau liquide.

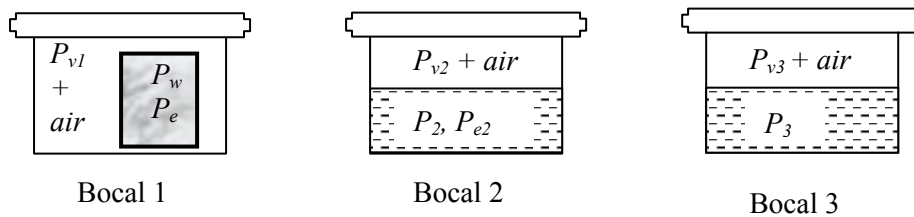


Figure IV-1 : Décomposition de la succion en composantes matricielle et osmotique.

L'air est à pression atmosphérique  $P_a$  dans les trois bocaux. On sait que dans les bocaux 2 et 3, les interfaces liquide-air étant planes, on a égalité des pressions de liquide et de gaz, c'est-à-dire que les liquides sont à pression atmosphérique :

$$P_2 = P_3 = P_a \quad (IV.3)$$

Mais, dans le bocal 2, il s'agit de la solution du sol, donc le potentiel chimique de l'eau (i.e. du constituant eau, du solvant) y est inférieur au potentiel chimique de l'eau dans le bocal 3 ; il en va donc de même pour les vapeurs d'eau :

$$P_{v2} < P_{v3}, \text{ ou encore } H_{r2} < H_{r3}$$

On note ensuite que, par définition (et toujours parce que l'interface eau-air est plane),  $P_{v3}$  est en fait la pression de vapeur saturante  $P_{vs}$  et  $H_{r3} = 100 \%$ .

La succion totale dans l'échantillon, telle que définie par la loi de Kelvin si on considère l'eau incompressible (voir annexe C), est donnée par :

$$S = -\frac{\rho_e RT}{M_v} \ln\left(\frac{P_{v1}}{P_{vs}}\right) \quad (\text{IV.4})$$

Examinons maintenant les composantes matricielle et osmotique de la succion :

- La succion matricielle  $S_m$  est la part de la succion associée au rapport de la pression partielle de vapeur en équilibre avec l'eau du sol sur la pression partielle de vapeur en équilibre avec une solution de composition identique à l'eau du sol, mais libre. Dans notre exemple, il s'agit du rapport  $\frac{P_{v1}}{P_{v2}}$ .

- La succion osmotique  $\pi_{osm}$  est liée au rapport de la pression de vapeur en équilibre avec une solution de composition identique à l'eau du sol sur la pression partielle de vapeur en équilibre avec de l'eau pure libre (pression de vapeur saturante). Dans l'exemple, il s'agit du rapport  $\frac{P_{v2}}{P_{v3}} = \frac{P_{v2}}{P_{vs}}$ .

Il vient immédiatement, dans le cas de notre exemple, la décomposition suivante, tirée de (IV.4) :

$$S = -\frac{\rho_e RT}{M_v} \ln\left(\frac{P_{v1}}{P_{v2}}\right) - \frac{\rho_e RT}{M_v} \ln\left(\frac{P_{v2}}{P_{v3}}\right) \quad (\text{IV.5})$$

où le premier terme du second membre désigne la succion matricielle  $S_m$ , tandis que le second correspond à la succion osmotique  $\pi_{osm}$  :

$$S_m = -\frac{\rho_e RT}{M_v} \ln\left(\frac{P_{v1}}{P_{v2}}\right) \quad (\text{IV.6})$$

$$\pi_{osm} = -\frac{\rho_e RT}{M_v} \ln\left(\frac{P_{v2}}{P_{v3}}\right) \quad (\text{IV.7})$$

Si on applique les relations thermodynamiques reliant les pressions d'eau (leur état énergétique, si on préfère) liquide et gazeuse (la relation de Clapeyron donnant l'égalité des potentiels chimiques à l'équilibre), on peut encore écrire :

$$S_m = P_{e2} - P_e \quad (\text{IV.8})$$

$$\pi_{osm} = P_3 - P_{e2} \quad (\text{IV.9})$$

La relation (IV.9) montre clairement que la pression osmotique a son sens habituel en thermodynamique, puisque l'écart des pressions partielles d'eau est exactement, à température constante, l'écart des potentiels chimiques (au volume molaire près et parce que l'on a supposé l'eau incompressible).

Par ailleurs, la définition de la succion matricielle et son expression sous la forme (IV.6) expriment que celle-ci résulte exclusivement des phénomènes capillaires : si on a une solution (bocal 2) et qu'on la met dans le sol (bocal 1), les pores agissent comme des tubes capillaires.

On est maintenant en mesure de toucher du doigt le problème. La succion, dans notre exemple, peut finalement s'écrire :

$$S = (P_{e2} - P_e) + \pi_{osm}, \quad (IV.10)$$

expression quelque peu différente de (IV.2). La différence porte sur le terme matriciel. Utilisant (IV.3), on voit qu'égaliser (IV.2) et (IV.10) revient à écrire :

$$P_a - P_w = P_{e2} - P_e,$$

soit encore, puisque  $P_2 = P_a$  d'après (IV.3) :

$$P_2 - P_{e2} = P_w - P_e. \quad (IV.11)$$

Dans (IV.11), chaque membre de l'égalité désigne la différence entre la pression de la solution et la pression partielle du constituant eau dans la solution : c'est la pression du soluté. Ainsi, (IV.11) exprime le fait que la pression thermodynamique du soluté est la même en solution dans l'eau libre et dans l'échantillon (le sol), ou de manière équivalente que les potentiels chimiques des ions en solution sont les mêmes dans la solution libre et dans le sol. Ce n'est pas vrai dans les argiles pour lesquelles la charge électrique des feuillets modifie le potentiel chimique des ions en solution (il s'agit en fait du potentiel électrochimique). Dans les argiles :

- L'égalité (IV.11) n'est plus valide, donc la succion matricielle ne vaut en toute rigueur pas  $(P_a - P_w)$  qui est par définition la pression capillaire, bien que la succion matricielle résulte directement, nous l'avons dit, de phénomènes capillaires ;
- Si on utilise l'expression (IV.5) pour la succion, la succion matricielle contient la part reliée à la théorie de la DCD généralement attribuée à la succion osmotique  $\pi_{osm}$ .



- Si on utilise la décomposition (IV.2), il faut bien voir que le terme matriciel  $(P_a - P_w)$  est bien cette fois la pression (ou succion) capillaire, et la succion « osmotique »  $\pi_{osm}$  contient (nous l'avons expliqué dans l'exemple du gonflement des sols argileux après la pluie) toute l'information liée au(x) soluté(s). Mais dans ce cas  $\pi_{osm}$  ne correspond plus à la pression osmotique au sens conventionnel, ni à sa définition via (IV.7).

Ainsi, on se rend compte qu'il n'y a pas correspondance, dans le cadre de la théorie de la DCD pour les argiles, entre la définition des succions matricielle et osmotique et leurs expressions via (IV.2).

### IV.2.3 Le gonflement selon la théorie de la double couche diffuse (DCD)

L'explication du gonflement par les auteurs qui se réfèrent au phénomène de la double couche (diffuse, selon la théorie de Gouy-Chapman) n'est qu'une explication partielle. Mais elle permet de mettre en œuvre des formes d'homogénéisations intéressantes. Elle permet aussi de bien montrer que la pression de gonflement n'est pas la pression osmotique, bien que certains auteurs l'appellent ainsi, ce qui peut porter à confusion. Il faut bien voir que le phénomène d'osmose peut exister dans n'importe quel milieu poreux, aussi le fameux gonflement des argiles ne saurait se réduire à un gonflement par osmose.

Considérons un système formé de deux feuillets parallèles et d'une solution interfoliaire que nous supposons en équilibre avec une solution extérieure. On suppose de plus que la distribution des ions dans l'espace interfeuillets est régie par la théorie de la DCD. En conséquence, la concentration moyenne en cations de la solution interfoliaire est plus élevée que celle de la solution externe, et celle en anions est moins élevée. Par suite, les pressions des solutions interne et externe ne sont pas forcément les mêmes.

#### IV.2.3.a Approche micro-macro

Bolt (1956) utilise le terme de *pression osmotique* pour qualifier les pressions en excès par rapport à celle de l'eau pure, à la fois dans la solution interne et externe. Dans la solution interne, la concentration en ions variant avec la distance aux feuillets, la pression osmotique n'y est pas constante, mais l'auteur, citant Verwey et Overbeek (1948), dit qu'on peut montrer que la force agissant sur les feuillets (en plus de la pression d'eau) est égale à la pression osmotique dans le plan médian entre les deux feuillets, qu'il qualifie de *pression osmotique effective*. La « pression de

gonflement » est alors égale à la différence entre la pression osmotique effective (dans le plan médian) et la pression osmotique dans la solution externe. Il explique que, dans la pratique, cette solution externe est par exemple celle se trouvant dans les gros pores. Utilisant la loi de Van't Hoff, la pression de gonflement s'écrit alors en première approximation :

$$P_{gft} = RTC \left( \frac{C_{median}}{C} + \frac{C}{C_{median}} - 2 \right) \quad (IV.12)$$

où  $C$  est la concentration de la solution dans les gros pores, et  $C_{median}$  celle en cations dans le plan médian. La théorie de la DCD lui permet d'obtenir une relation entre la distance interfeuillet  $2h$  et  $C_{median}$ , sous l'hypothèse qu'anions et cations ont même valence  $z$  :

$$z\sqrt{\beta C}(x_0 + h) = 2\sqrt{C/C_{median}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - (C/C_{median})^2 \sin^2 u}}, \quad (IV.13)$$

relation dans laquelle  $\beta$  et  $x_0 = 4/z\beta\Gamma$  sont des paramètres de l'argile dépendant l'une de la température et l'autre de la densité de charge surfacique  $\Gamma$  des feuillets.

Enfin, prenant le cas d'une argile dont les feuillets seraient tous parallèles et tels que la distance entre deux feuillets successifs soit toujours la même, il relie cette distance  $2h$  à l'indice des vides  $e_v$ , via une approximation (cette relation étant selon lui la plus discutable) :

$$h = \frac{e_v}{\rho_s s} \quad (IV.14)$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique de l'argile, et  $s$  la surface spécifique (i.e. surface totale par unité de masse).

Cet ensemble de trois relations conduit à une relation entre pression de gonflement et indice des vides, qui peut être tabulée. Pour  $h$  suffisamment grand, cette relation est quasiment linéaire dans le plan  $(e, \log P_{gft})$  selon :

$$\log \left( \frac{P_{gft}}{RTC} \right) = \log 64 - 0,4343 \left\{ 2z\sqrt{\beta C} \left( x_0 + \frac{e_v}{\rho_s s} \right) \right\} \quad (IV.15)$$

L'auteur compare ensuite les calculs issus de son modèle avec des résultats expérimentaux. Il observe un décalage qui le mènent à discuter le bien fondé de ses hypothèses. Selon lui, néanmoins, il y a un bon accord avec l'expérience.

Par ailleurs, ses expériences sont faites en appliquant une pression mécanique que l'auteur identifie à la pression de gonflement de la manière suivante : selon lui, l'eau des « gros pores » est l'eau qu'on peut expulser de l'échantillon lors d'une compression, tandis que l'eau interfoliaire est considérée comme liée. Ainsi, lors de l'application d'une charge (une pression mécanique), une certaine quantité d'eau « libre » des gros pores est expulsée, jusqu'à ce que la pression de gonflement égale la pression appliquée. La pression de gonflement est donc celle qui empêche la poursuite du retrait. Pour comprimer plus l'argile, il faut appliquer une compression légèrement supérieure à  $P_{gft}$ , c'est-à-dire au moins égale. On peut relever une ambiguïté dans son explication des phénomènes. Comment se fait-il que la pression de gonflement évolue alors que la pression osmotique dans les gros pores reste la même et que l'auteur considère que l'eau interfoliaire, « adsorbée », n'est pas expulsée, ce qui implique qu'il n'y a pas non plus modification de la pression osmotique effective ? En fait, et cela transparaît clairement lorsqu'il lie l'indice des vides (donc la teneur en eau, le milieu étant saturé) à la distance interfeuillet, l'auteur utilise sans l'avouer l'idée que l'eau interfoliaire est elle aussi expulsée (dans son modèle, il n'y a même que de l'eau interfoliaire), et que c'est justement la variation de la quantité d'eau « adsorbée » qui est responsable de la variation de  $P_{gft}$ .

Sa vision nous semble relativement correcte, même s'il semble avoir quelques difficultés à accepter le fait que l'eau entre les feuillets puisse être facilement mobilisable. Toutefois l'auteur n'aborde pas le fait que des forces peuvent entrer en jeu, autres que la différence de pression osmotique. Notons qu'ici la force vue comme responsable du gonflement est différente de la pression osmotique  $\pi_{osm}$ . On voit naître l'idée que ce n'est pas l'eau qui, via son état énergétique influencé par la présence d'un soluté, exerce une succion agissant sur la cohésion entre les particules : en plus de cet aspect, il y a des forces de nature purement électrostatique, dont découle la pression de gonflement. Celle-ci est néanmoins indissociable de la présence d'ions en solution dans l'eau du sol ou de la roche, tout comme la pression osmotique, ce qui explique sans doute qu'on regroupe parfois les deux sous le même nom. Nous avons vu, au paragraphe IV.2.2, que cela conduit parfois à des erreurs.

L'intérêt du modèle précédent réside dans sa tentative de prédire, à partir de considérations à l'échelle microscopique (théorie de la double couche), le comportement mécanique à l'échelle macroscopique. Ce passage micro-macro se fait via (IV.14). Cette formule, Bolt la considère justement comme étant la plus discutable, sans préciser pourquoi. On peut supposer qu'il pense au problème suivant : cette formule suppose, nous l'avons dit, qu'il n'y a que de l'eau interfoliaire, donc pas de gros pores où la solution serait en équilibre avec l'eau externe ; auquel cas, une pression de gonflement due au phénomène de double couche ne saurait exister au sein du matériau puisqu'elle repose sur l'idée que, dans le matériau, coexistent à la fois de l'eau entre les feuillets et de l'eau dans les gros pores (c'est la différence des pressions osmotiques de ces deux solutions).

#### IV.2.3.b Théorie des milieux poreux « chimiquement actifs »

Dormieux et al. (1995) et Coussy et al.(1997, 1998b) présentent une démarche analogue en l'intégrant dans le cadre de la poroélasticité non linéaire au niveau macroscopique. Ils considèrent le cas d'un échantillon plongé dans une solution d'eau et de sel. Ils proposent un modèle à deux échelles.

Au niveau microscopique, les auteurs étudient comme Bolt (1956) le cas de feuillets parallèles. Ils aboutissent à l'expression (IV.12) pour la pression de gonflement « microscopique », qui n'est plus pour eux une approximation car ils se placent dans la limite de mélanges idéaux (au sens thermodynamique), et sans invoquer la présence de gros pores. Ils expliquent que la pression de gonflement « microscopique » est une fonction  $P_{gfi}(C, h)$  décroissante de  $h$  et de la concentration  $C$ . Ils définissent un coefficient :

$$\eta = \frac{C_{median}}{C} \quad (IV.16)$$

qui mesure, dans (IV.12), l'intensité de  $P_{gfi}$ . Surtout, il traduit la présence d'interactions électrostatiques :  $\eta$  vaut 1 s'il n'y a pas d'interaction entre la solution et la roche, et est différent de 1 (en fait supérieur) sinon ; en ce sens,  $\eta$  est en quelque sorte un coefficient d'activité de (la solution dans) l'argile. Ils établissent (toujours sous les mêmes hypothèses d'idéalité), une relation alternative :

$$\frac{\partial P_{gfi}}{\partial P_{sel}} = \frac{\partial(h/\eta)}{\partial h} - 1 \quad (IV.17)$$

où  $P_{sel}$  désigne la pression thermodynamique du sel dans la solution externe.

Au niveau macroscopique, ils réintroduisent le coefficient  $\eta$  par la considération suivante : dans l'argile, parmi les cations, on distingue ceux qui doivent contrebalancer l'électronégativité des feuillets, et les autres dont la concentration égale celle des anions (toujours pour des raisons d'électroneutralité) et qui peuvent, au même titre que les anions, se déplacer ; la concentration moyenne en sel dans les pores est donc la concentration en anions.  $1/\eta$  étant le rapport de la concentration en anions (donc de la solution interne) sur la concentration de la solution externe, c'est aussi, par proportionnalité, le rapport des masses volumiques du sel dans l'échantillon et à l'extérieur.

La thermodynamique des milieux poreux leur permet d'aboutir aux lois de comportement incrémentales des argiles « chimiquement actives », où les auteurs se limitent, par souci de clarté, à un comportement mécanique élastique (non linéaire) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\Sigma + P_e) = K_o d\varepsilon - b_{sel} dP_{sel} \quad (a) \\ \frac{dm_e}{\rho_e} = d\varepsilon + \frac{dP_e}{M_e} \quad (b) \\ d(\phi/\eta) = b_{sel} d\varepsilon + \frac{dP_{sel}}{M_{sel}} \quad (c) \end{array} \right. \quad (IV.19)$$

où  $\Sigma$  est la contrainte, cette fois positive en traction,  $\phi$  est la porosité,  $\varepsilon$  est la déformation linéarisée,  $K_o$  est le module d'incompressibilité drainé, et les coefficients  $b_{sel}$  et  $M_{sel}$ , qui peuvent être qualifiés respectivement de coefficient et module de Biot relatifs au constituant sel, sont reliés notamment au coefficient  $\eta$  via les relations de Maxwell.  $P_{sel}$  est la pression thermodynamique de la solution externe, reliée en fait (dans l'hypothèse d'une solution idéale) à la concentration par la loi de Van't Hoff. Le solide est supposé incompressible dans le modèle qui prolonge le concept de contrainte effective par

$$d\sigma' = d\sigma - dP_e - b_{sel} dP_{sel} \quad (IV.20)$$

où nous avons repris  $\sigma = -\Sigma$  positif en compression de sorte à pouvoir rester cohérent avec les expressions précédentes de la contrainte effective.

Nous pouvons constater que le solide (les feuillets) est supposé incompressible dans le modèle. Cela permet aux auteurs, en définissant la pression de gonflement « macroscopique »  $P_{GFT}$  comme étant la pression mécanique à appliquer pour empêcher le gonflement lors d'une variation de la concentration (externe), d'aboutir à la relation :

$$\frac{\partial P_{GFT}}{\partial P_{sel}} = \frac{\partial(\phi/\eta)}{\partial \phi} - 1 \quad (IV.21)$$

qui est le pendant macroscopique de la relation (IV.17). On remarquera en outre que  $P_{GFT} = P_{GFT}(P_{sel}, \phi)$ . Ils montrent enfin que l'égalité entre les pressions de gonflement micro et macro repose sur la formule (IV.14), c'est-à-dire sur l'hypothèse que les feuillets sont parallèles. L'avantage de leur approche, par rapport à Bolt (1956), est que les deux approches, microscopique et macroscopique, sont indépendantes, de sorte que leur modèle macroscopique ne repose pas sur le

parallélisme entre les feuillets, et constitue un modèle en soi, directement utilisable sous réserve d'en déterminer les coefficients (coefficient et Module de Biot relatifs au sel) et  $P_{GFT}$ . Ces quantités sont, dans leur approche, reliées au coefficient  $\eta$ . Ils proposent, pour obtenir les fonctions  $b_{sel}$  et  $M_{sel}$ , de calculer numériquement  $\eta$  en fonction de  $P_{sel}$ ; malheureusement, le calcul proposé repose directement sur la théorie de la double couche et donc sur le parallélisme entre feuillets.

#### **IV.2.3.c Conclusion**

Nous savions depuis le chapitre II (§II.2.2) que le phénomène de gonflement était indissociable de l'interaction entre la solution interstitielle et l'argile. Nous avons maintenant une précision supplémentaire : concernant l'arrivée d'eau entre les feuillets, le potentiel chimique du soluté ne saurait être oublié, car c'est précisément l'écart entre les potentiels chimiques des ions « internes » et « externes » qui est responsable du gonflement au niveau des particules. De fait, dans l'expression de la contrainte effective (et indépendamment de la forme qu'on veut lui donner), il faudra tenir compte du soluté. La façon de le faire est, à ce stade, difficile à préciser dans la mesure où d'autres forces que les forces de répulsion électrostatique existent, et que le gonflement résulte, notamment pour les sols, avant tout d'une réorganisation.

#### **IV.2.4 Forces de répulsion et d'attraction**

Dans les modèles faisant intervenir la théorie de la double couche, les forces agissant sur deux particules se réduisent à des forces de répulsion. En toute logique, dans les tentatives d'explication des observations macroscopiques par l'étude au niveau microscopique, on pourrait s'attendre à ce que les auteurs prennent également en compte l'existence de forces d'attraction inter particulaires. L'existence même de la floculation, et donc par exemple de particules d'argiles, sont la preuve de l'existence de ces forces d'attraction ; de nombreux auteurs estiment qu'il s'agit des forces de van der Waals. Sans ces forces d'attraction, la théorie de Gouy prévoit que les feuillets (parallèles) se repoussent à l'infini. Dans les modèles précédents, la pression de gonflement microscopique est une fonction décroissante de  $h$ , qui s'annule à l'infini ; elle est en fait rapidement très faible, ce qui permettrait de la considérer nulle à partir d'un certain écartement entre les feuillets, mais ce choix serait bien entendu arbitraire.

On peut remarquer, dans le modèle précédent (Dormieux, 1995 et Coussy 1997, 1998b), que l'absence de terme d'attraction ne pose pas forcément de problème au niveau macroscopique : l'incrément de l'un quelconque des chargements induit un incrément de déformation, et il n'y a pas de

tendance à une déformation infinie, pour peu qu'on ne cherche pas à déterminer les coefficients au travers de la théorie microscopique. Auquel cas, on pourrait supposer les forces d'attraction implicites, et intégrées dans les différents coefficients (en particulier le coefficient de Biot  $b_{sel}$ ).

De nombreux auteurs ont trouvé justifié d'intégrer les termes d'attraction dans la description macroscopique, dans la mesure où elles interviennent, au niveau microscopique, à la même échelle que les forces de répulsion électrostatiques. Cependant, dès lors qu'ils ont fait ce choix, qualitativement plus fondé, ils se heurtent à la difficulté d'exprimer plus avant ces forces. Le modèle de la double couche diffuse offrait cet avantage que la pression de gonflement pouvait être « aisément » calculée. Les forces de van der Waals pourraient l'être également sous les mêmes hypothèses de parallélisme entre les feuillets, mais les auteurs ne se sont pas intéressés à cet aspect dans la mesure où, en réalité, on observe tout type de coagulation (particules, agglomérats, assemblages).

Lambe (1960) a sans doute le premier suggéré que la contrainte totale dans les argiles soit prise comme étant la somme d'une contrainte interparticulaire  $\sigma_i$ , de la pression de pore  $P_w$ , et de contraintes de répulsion  $R$  et d'attraction  $-A$  d'origine électrochimique :

$$\sigma = \sigma_i + P_w + R - A, \quad (\text{IV.22})$$

le terme  $\sigma_i$  étant vu comme le responsable de la déformation du squelette (ce que nous aurions appelé contrainte effective). L'auteur conserve pour la contrainte effective la définition de Terzaghi, ce qui fit l'objet de nombreuses critiques (voir Hueckel 1992). Par ailleurs, l'égalisation de la contrainte effective et de  $\sigma_i$  fut tout autant critiquée par Barbour & Fredlund (1989a,b), ceux-ci expliquant que la composante  $R - A$  n'est pas directement mesurable (à l'instar de la contrainte mécanique et la pression de pores) et donc ne saurait être considérée comme une composante de contrainte (effective). Toujours est-il que, si l'on conserve le principe que la contrainte effective est celle responsable des déformations, elle s'identifie en effet ici à  $\sigma_i$  et la relation (IV.22) conduit à écrire la relation (que nous voyons, rappelons-le, d'un point de vue purement qualitatif) :

$$\sigma' = \sigma - P_w - (R - A). \quad (\text{IV.23})$$

Dans les sols argileux, même saturés, le niveau énergétique de l'eau du sol est généralement inférieur — en terme de pressions — à la pression atmosphérique (tel n'est pas forcément le cas pour les roches argileuses, à plus grande profondeur). Aussi les mécaniciens des sols ont d'abord utilisé les

mêmes formules que pour les milieux non saturés. Puis les interactions eau-argile spécifiques ont été rajoutées, conduisant à (Seedsman, 1993) :

$$\sigma' = \sigma - P_a + \alpha(P_a - P_w) - (R - A) \quad (\text{IV.24})$$

où le paramètre  $\alpha$  est empirique, au même titre que le  $\chi$  de Bishop (1959). Seedsman (1993) indique que le terme  $R - A$  est intégré pour couvrir les pressions cristalline et osmotique. Selon lui, ce terme contrôle essentiellement la résistance des argiles, et peut être ignoré dans la plupart des études de type géomécaniques, sauf sans doute lorsqu'il y a des différences significatives de compositions chimiques entre la solution de la roche argileuse et celle du fluide introduit (ou en contact).

Barbour & Fredlund (1989a) proposent, à la place du terme  $R - A$ , de prendre plutôt la pression osmotique  $\Pi$  (reliée au terme  $\pi_{osm}$  du paragraphe IV.2.2) comme variable d'état dans les équations, parce que, selon eux, on observe en pratique les variations de volume en fonction des variations de la pression osmotique (via les variations de concentration). Il s'agit là de la pression osmotique de la solution extérieure, et c'est justement ce qui les intéresse : elle est directement mesurable. L'hypothèse sous-jacente est bien entendu que les variations de  $R - A$  et de  $\Pi$  sont liées, et la relation doit s'écrire de manière incrémentale, prolongeant la contrainte effective à :

$$d\sigma' = d\sigma - dP_w + \alpha_\pi d\Pi . \quad (\text{IV.25})$$

Dans (IV.25),  $\alpha_\pi$  est un coefficient à déterminer, mais est a priori positif. La pression osmotique  $\Pi$  est approximée par la loi de Van't Hoff, et doit donc être rapprochée à la pression thermodynamique  $P_{sel}$ . Si l'on compare (IV.25) et (IV.20), on remarque une différence de signe, mais cela ne doit pas troubler : si, dans (IV.25), on utilise la relation (valable pour une solution idéale) :

$$P_w = P_e + P_{sel} , \quad (\text{IV.26})$$

on obtient une forme analogue à (IV.25) :

$$d\sigma' = d\sigma - dP_w + (1 - b_{sel})dP_{sel} . \quad (\text{IV.27})$$

Cette comparaison montre que les auteurs se sont ramenés à des équations permettant notamment d'éviter l'écriture de la composante d'attraction des forces  $R - A$ . Cette composante est censée s'intégrer, au cas par cas, dans le coefficient  $\alpha_\pi$ .



## IV.2.5 Gonflement et réorganisation

Les différents modèles que nous venons de voir, s'ils constituent une avancée en tentant d'introduire la concentration de la solution (via la pression de l'électrolyte), sont loin de prédire correctement le comportement de telle ou telle argile. Tessier (1984) explique que le gonflement des argiles est lié à l'évolution de l'organisation du matériau argileux au niveau le plus fin. Les arrangements possibles sont très divers : empilements parfaits des feuillets, empilements en forme d'escalier ou de terrasse pour former des édifices de grande extension latérale, arrangements EF ou EE conduisant à la création de gros pores.

Pour un ingénieur, la pression de gonflement, comprise comme étant la force appliquée pour empêcher le gonflement (au même titre que la pression osmotique est la surpression à appliquer à la solution pour empêcher le flux de solvant pur à travers la membrane semi-perméable dans une expérience d'osmose), et que nous notons  $P_{GFT}$ , est le paramètre important, qu'elle soit égale ou non à la pression de gonflement calculée dans la théorie de la double couche. Mais il est nécessaire, pour une meilleure compréhension, de considérer comment les forces autres que la répulsion de la double couche contribuent à cette pression de gonflement macroscopique.

Reprenons le problème au départ. Les expériences de gonflement libre montrent que le gonflement s'arrête à un certain niveau. D'où la prise en compte nécessaire de forces d'attraction pour une modélisation correcte. Il semble, nous l'avons vu plus haut, que cela soit une entreprise difficile. Qui plus est, nous avons dit précédemment que les auteurs désignent généralement les forces de Van der Waals comme étant les forces d'attraction qui compensent la répulsion. Van Olphen (1977) explique qu'on ne peut se limiter à invoquer ces forces : en effet, les forces de van der Waals décroissent très rapidement, et ne permettent plus d'expliquer l'existence d'argiles à l'équilibre dont les feuillets sont relativement espacés. Il propose dans ce cas d'expliquer l'équilibre par d'autres forces qui sont les forces de liaisons transverses dues à d'occasionnelles particules non parallèles ; ces liaisons sont possibles en raison de l'attraction des côtés des feuillets chargés positivement par les faces chargées négativement. Ceci signifierait qu'il y a certainement toujours des liaisons transverses (c'est-à-dire des arrangements EF). Il indique qu'un petit nombre de liaisons EF permet de compenser la répulsion. Ce nombre de liaisons transverses n'étant malheureusement pas connu, il conclut qu'il est impossible d'évaluer la force d'attraction correspondant à un espacement en feuillets donné ; du coup, on n'a pas non plus accès à la force de répulsion. Un argument en faveur de son hypothèse de liens transverses est qu'un gonflement est observé lorsqu'on ajoute, dans la solution, du phosphate qui inverse la charge des tranches (côtés). Cette hypothèse de liens transverses, dont l'apparition en un lieu donné est

essentiellement aléatoire, permet par ailleurs d'expliquer pourquoi les expériences de gonflement-retrait sur des argiles présentent des hystérésis.

L'auteur explique que, lorsque que l'on applique une pression de confinement au matériau, la matrice argileuse reprend une partie des efforts (notamment au travers de ces liens transverses) ; ainsi la force appliquée est certainement supérieure à la seule force de répulsion interfeuillet. Ainsi la pression de gonflement  $P_{GFT}$  ne saurait permettre de mesurer la répulsion de la double couche.

Nous ne sommes pas tout à fait d'accord avec sa vision des choses :  $P_{GFT}$  est, idéalement, la pression à appliquer pour qu'il n'y ait pas de déformation (lors d'une expérience de mesure de  $P_{GFT}$ ) ; cela signifie que la structure est censée ne pas être modifiée au cours de l'expérience, autrement dit qu'il n'y a pas apparition de nouvelles liaisons transverses ni modification des forces de Van der Waals ; seules les forces de répulsion sont modifiées et, donc, ce sont exactement ces dernières qui sont compensées par  $P_{GFT}$ .

Cependant, l'existence même de pores dont la taille avoisine  $1\ \mu\text{m}$  (Tessier, 1984), que nous avons désignés par macropores pour les opposer à l'espace interfeuillet, indique que des phénomènes se produisent à une distance beaucoup plus grande que celle que l'on a coutume de considérer dans les argiles lors de la prise en compte d'un phénomène de type couche diffuse (de l'ordre de 10 nm). Il explique néanmoins que le mécanisme qui se produit, faisant apparaître des macropores, est directement lié à la force de répulsion entre les feuillets : cette force peut en effet provoquer un clivage des particules au niveau de l'espace interfoliaire ; les particules se divisent. Puis les feuillets se réorganisent par chevauchement, donnant des édifices de grande extension selon le plan des feuillets. Cela est possible pour les smectites Ca, Mg, ou encore Na si la concentration est forte. Ceci est en accord avec l'hypothèse des liens transverses. Dans le cas de smectites Na de solution diluée, la forte répulsion interfoliaire ne permet pas cette réorganisation ; aussi, l'eau y est-elle essentiellement interfoliaire (l'arrêt du processus de gonflement dans ce cas doit être expliqué autrement).

## **IV.2.6 Gonflement libre et pression de gonflement**

Dans la suite, nous parlerons d'état hydrique de la solution interstitielle pour évoquer indifféremment l'état énergétique de l'eau et/ou de l'électrolyte dans la solution interstitielle (les potentiels chimiques). Dans un essai relatif au gonflement/retrait d'une argile, pour une variation donnée des conditions du fluide en contact avec l'échantillon (gaz ou liquide), on attend un certain

temps de manière à pouvoir supposer que l'équilibre thermodynamique est atteint ; l'état hydrique correspond alors aux conditions hydriques extérieures.

Toujours d'un point de vue du vocabulaire utilisé, nous parlerons d'humidification (ou humectation, ou encore hydratation) pour désigner, dans un essai, toute action destinée à provoquer un gonflement. Il peut s'agir par exemple d'une diminution de la concentration d'un sel dans la solution externe, mais il s'agit en tout état de cause d'une action tendant à provoquer un flux d'eau vers l'échantillon. C'est donc bien une humidification. De même, une dessiccation sera une action inverse.

On appelle pression de gonflement, par analogie avec la pression osmotique dans une expérience d'osmose, la pression mécanique qu'il faut appliquer à un échantillon donné pour empêcher son gonflement lorsqu'il est soumis à des variations de son état hydrique susceptibles de le provoquer.

On parle de gonflement/retrait libre d'un échantillon lorsque celui-ci, toujours soumis à des variations de son état hydrique, est libre de se déformer (autrement dit lorsque aucune contrainte mécanique n'est appliquée, autre que la pression de la solution extérieure).

L'ingénieur utilise des définitions différentes : la pression de gonflement considérée est la pression mécanique empêchant le gonflement lorsque l'échantillon est mis au contact de l'eau (à la pression atmosphérique). De la même façon, le gonflement libre correspond pour l'ingénieur à celui observé au contact de l'eau (encore une fois à la pression atmosphérique). Ces définitions sont directement utilisables dans les applications d'ingénieurs, par exemple pour étudier le phénomène de gonflement généralement observé au radier d'un tunnel (c'est à cet endroit que, par gravité, l'eau d'exhaure supposée à la pression atmosphérique, est mise en contact avec le terrain encaissant). En fait, ces définitions ne constituent qu'une restriction de celle que nous avons données ci avant à un cas particulier d'état hydrique, simple à mettre en œuvre dans les essais, et surtout en bon rapport avec les conditions extérieures considérées dans les problèmes d'ingénieur tel celui évoqué.

Les problèmes de désaturation et de fissuration en paroi des tunnels, phénomènes dont la cause vraisemblable est le contact avec l'air des galeries, conduisent naturellement à utiliser les définitions les plus globales de gonflement libre et pression de gonflement (les premières que nous avons données).

La pression de gonflement d'un sol est déterminée sur cellule triaxiale ou à l'œdomètre ; pour un échantillon donné, même si l'on se limite à des phénomènes réversibles, la valeur obtenue dépendra de son état hydrique au début de l'essai (Philipponnat, 1991) : par exemple, si les conditions hydriques imposées correspondent à l'état hydrique initial de la solution interstitielle, il n'y aura pas de tendance

au gonflement donc pas de pression à appliquer pour l'empêcher, d'où une pression de gonflement nulle ; autrement dit, la pression de gonflement n'est pas une caractéristique intrinsèque du sol, et il faut faire attention à cet aspect lors de la mise au point d'un modèle rhéologique.

Par ailleurs, la pression de gonflement dépend également du chargement mécanique initial (Robert et al., 1997). Cet aspect est un peu différent du précédent au sens où c'est la définition même de la pression de gonflement qui est remise en cause. Cela a conduit à plusieurs procédures d'essais (certaines normalisées) conduisant à autant de définitions possibles de la pression de gonflement ; en voici deux :

- L'essai de gonflement dit « à volume constant » : dans ce cas, la contrainte mécanique initiale est nulle (au poids du piston près ; il s'agit de la contrainte en excès par rapport à la pression atmosphérique) ; lors de l'humidification, au contact d'une eau distillée, et si on interdit toute déformation, il se développera une pression sur le piston, qui atteindra, à l'équilibre une valeur  $\sigma_g$  appelée pression de gonflement à volume constant.
- L'essai Huder-Amberg : cet essai est censé permettre de déterminer la pression minimale qu'il faudrait appliquer avant humidification pour que cette dernière ne provoque pas de gonflement. On obtient ainsi  $\sigma_G$  qu'on appelle la pression de gonflement au sens Huder-Amberg.

Si l'on considère que les phénomènes mis en jeu sont réversibles, les deux pressions de gonflement ci-dessus sont a priori différentes. Un raisonnement simple permet de montrer que  $\sigma_G$  est supérieure à  $\sigma_g$  : en effet,  $\sigma_G$ , appliquée avant hydratation, conduit à une diminution de volume ; ensuite, puisque l'humectation ne provoque pas de variation de volume, cela signifie que le volume final est inférieur au volume initial (avant application de  $\sigma_G$ ) ; ainsi, par rapport à l'état initial, et pour une même humectation,  $\sigma_G$  conduit à une diminution de volume tandis que  $\sigma_g$  conserve le volume constant, donc  $\sigma_G > \sigma_g$ .

C'est  $\sigma_g$  qui est considérée communément comme étant la pression de gonflement. L'essai Huder-Amberg a lui pour principal intérêt de faire apparaître une relation entre contrainte appliquée et déformation,  $\sigma_G$  n'étant qu'un point caractéristique de la courbe en question. Il existe des variantes à l'essai Huder-Amberg, tel par exemple l'essai AFNOR P94\_091. Tout comme on pourrait décider que c'est  $\sigma_G$  qui est la pression de gonflement, on imagine bien qu'à chaque type d'essai pourrait être attribué une définition de la pression de gonflement. Il faut donc faire attention à cet aspect.

Il existe une réelle ambiguïté dans l'utilisation du terme « pression de gonflement ». Revenons au modèle de Dormieux et al. (1995) et Coussy et al.(1997, 1998b). Dans ce modèle, la pression de gonflement est une fonction de la porosité et de la concentration du fluide en contact avec l'échantillon :  $P_{GFT} = P_{GFT}(P_{sel}, \phi)$ . Le solide est considéré comme étant incompressible dans le modèle. Analysons maintenant un cas particulier d'essai de gonflement « à volume constant », qui donne lieu à  $\sigma_g$ , à l'aide du modèle. Au début de l'essai, l'échantillon est à l'air ; il s'agit d'air humide, formé d'air pur et de vapeur d'eau : il n'y a pas d'électrolyte. Ensuite, l'échantillon est soumis à une variation du degré d'humidité : il n'y a toujours pas d'électrolyte en jeu dans le phénomène. Par ailleurs, on maintient le volume constant. Puisque le solide est incompressible, la porosité n'a donc pas varié. Cela signifie que, selon le modèle, on a conservé à la fois  $P_{sel}$  et  $\phi$  constants au cours de l'essai. Donc, d'après le modèle utilisé, il n'y a pas dans cet essai de création de  $P_{GFT}$ . C'est donc que la pression de gonflement au sens du modèle n'est pas la même que  $\sigma_g$ . Dans ce cas, il faut décider qui, de  $\sigma_g$  ou de  $P_{GFT}$  est la pression de gonflement.

En réalité, dans l'essai, le chargement appliqué est une variation de l'état énergétique de l'eau pure, ou plus simplement une variation de la pression du constituant eau ; à l'équilibre, la pression d'eau dans l'échantillon a donc augmenté. D'après le modèle (équation (IV.19b)), cela implique que de l'eau est effectivement entrée dans l'échantillon. On peut tirer des conclusions de cette analyse :

1. Si de l'eau est effectivement rentrée dans l'échantillon, alors la concentration de la solution interne a été modifiée au cours de l'essai, alors que  $P_{sel}$ , qui désigne la pression thermodynamique de l'électrolyte externe (nulle ici), n'a pas varié. Selon la théorie de la couche diffuse, on pourrait prendre en compte une pression de gonflement résultant de phénomènes osmotiques, mais celle-ci serait différente de  $P_{GFT} = P_{GFT}(P_{sel}, \phi)$ .
2. Puisque la pression d'eau augmente dans l'échantillon, celui-ci aura tendance à « gonfler », qu'il existe ou non des interactions de type physico-chimiques entre le fluide interstitiel et la roche. Autrement dit, même s'il s'agit d'une argile gonflante, il y a forcément dans  $\sigma_g$  une part liée à la seule variation de pression de l'eau.

L'analyse précédente a permis de clarifier certains points. Tout d'abord, la pression de gonflement  $\sigma_g$ , au sens où on l'entend généralement, ne se restreint pas aux seules interactions physico-chimiques dans les argiles. Telle n'est d'ailleurs pas sa vocation. En fait, elle permet d'intégrer, dans

une relation contrainte-déformation, l'action globale du fluide résultant d'une humidification. Dans sa définition initiale, l'humidification considérée était supposée réalisée par mise en contact avec une eau pure. La définition première de la pression de gonflement que nous avons utilisée permet d'intégrer ce cas particulier. Le deuxième point est que, lors de la mise au point d'un modèle, il faudra pouvoir prendre en compte le fait que la concentration interne ne dépend pas uniquement de la concentration externe. Enfin, dernier point, il semblerait que, dans l'essai précédent, deux phénomènes coexistent : en premier, une action de l'eau qui rentre dans l'échantillon sous l'effet du gradient de potentiel chimique entre eau externe et interne ; puis en second une action, résultant de l'interaction argile-solution interne, possible puisque la concentration a évolué du fait de l'entrée d'eau pure. Cette deuxième action est spécifique aux argiles.

### ***IV.3 Modèle proposé***

#### **IV.3.1 Choix d'un modèle « utilisable »**

Une loi de comportement pour un matériau argileux gonflant doit tenir compte des aspects physico-chimiques, et l'on ne peut se restreindre à une loi hydromécanique. Il faut tenir compte de la présence des solutés.

Notre objectif est d'obtenir un modèle qui puisse être intégré dans un code de calcul. Dans cette optique, la plupart des approches que nous avons vu étant qualitatives, seuls les approches « micro-macro » intégrant la théorie de Gouy de la DCD au niveau microscopique offrent une possibilité de mise au point d'une loi. C'est vers ce type d'approche que s'est porté notre choix, avec pour objectif d'aboutir à une loi intégrable dans un code de calcul numérique.

La base de notre modèle est donc la théorie de la DCD qui offre l'avantage d'être claire, même si sa mise en œuvre en pratique est délicate. Comme les auteurs, nous faisons au passage l'hypothèse restrictive que les feuillets sont parallèles de façon à pouvoir faire des calculs. Le passage micro-macro se fait en reliant la distance entre les feuillets à la porosité au moyen de considérations physiques simples présentées par Dormieux et al., et aboutissant à la formule (IV-14), bien que Bolt la juge discutable.

La loi (IV-15) proposée par Bolt (1956) n'est valable que lorsque les feuillets sont relativement éloignés. Dans le cas contraire, aucune relation mathématique n'a été proposée : la détermination de la pression de gonflement microscopique doit se faire soit numériquement, soit en utilisant des tables (résultant par exemple de calculs numériques). Vis-à-vis de la prise en compte du gonflement dans un

calcul de structures, les tables peuvent constituer une alternative intéressante à une loi mathématique explicite. Nous nous sommes néanmoins attachés à trouver une loi, plus satisfaisante pour l'esprit et plus facilement utilisable. Compte tenu des fortes non linéarités rencontrées, la détermination de cette loi s'est en revanche révélée laborieuse.

## **IV.3.2 Théorie de la double couche**

### *IV.3.2.a Présentation*

Les interactions entre les particules d'argiles chargées négativement et le fluide composé d'eau et d'ions en solution, peuvent être interprétées physiquement par le modèle de la double couche diffuse, développé par Gouy et Chapman au début du 20<sup>e</sup> siècle. Ce modèle considère que les cations compensateurs sont soumis à deux forces de directions opposées :

- l'attraction électrostatique de la surface de la particule d'argile chargée négativement (cristallite) ;
- une force osmotique de répulsion des cations de la surface des cristallites. Cette répulsion est due au fait que la concentration des cations est plus forte à la surface des cristallites que dans le reste de la solution.

A l'équilibre, la distribution des cations dans le milieu a la forme d'une double couche électrique diffuse avec un gradient de concentration négatif vers l'extérieur des cristallites. Suivant le même mécanisme, les anions en solution sont affectés par un gradient de concentration inverse de celui des cations (figure A-1).

Moyennant certaines hypothèses, qui ne sont justifiées que dans des cas très particuliers, ce modèle permet de calculer les forces entre particules parallèles, et d'en déduire théoriquement les pressions de gonflement et les mouvements du fluide dans certaines variétés d'argile. Ainsi, les mécanismes physico-chimiques des interactions entre feuillets minéraux et fluide interstitiel peuvent être reliés à des propriétés macroscopiques telles que la variation de volume, la pression de fluide, et la contrainte totale.

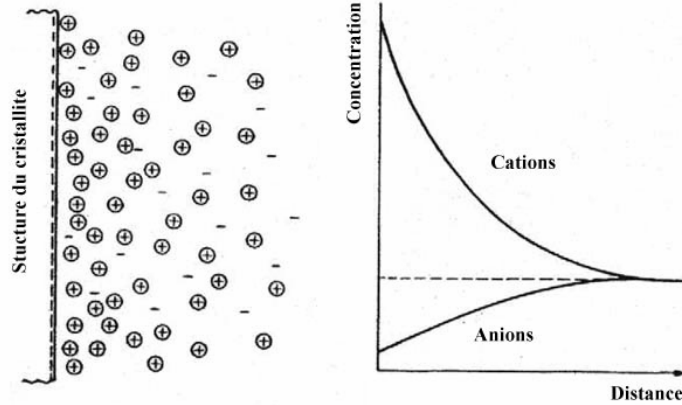


Figure IV-2: Distribution des ions près de la surface des cristallites selon la théorie de la double couche (d'après Mitchell, 1993).

Le profil de concentration n'est pas calculable de manière analytique dans le cas général. Plus exactement, le seul cas pour lequel on a une solution analytique est celui d'un seul feuillet (ou de feuillets suffisamment éloignés pour qu'il n'y ait pas d'interaction). Israelachvili (1992, cité par Ramambasoa 2000) donne une solution analytique dans le cas de deux feuillets parallèles sous l'hypothèse forte qu'il n'y a que des cations dans la solution.

#### IV.3.2.b Equation différentielle de couche diffuse

Quand l'équilibre est établi dans la couche diffuse, la concentration moyenne en ions en un point est, selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann, fonction de l'énergie électrostatique moyenne en ce point. En notant  $\Psi(x)$  le potentiel à une distance  $x$  de la surface chargée, le théorème de Boltzmann s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_- = n_-^\infty \cdot \exp\left(\frac{z_- e \Psi(x)}{kT}\right) \\ n_+ = n_+^\infty \cdot \exp\left(\frac{-z_+ e \Psi(x)}{kT}\right) \\ \rho = e(z_+ n_+ - z_- n_-) \end{array} \right. \quad (\text{IV.28})$$

où  $n_+$  et  $n_-$  sont les densités volumiques en cations et anions respectivement,  $n_+^\infty$  et  $n_-^\infty$  leurs valeurs respectives loin de la surface chargée. Ces densités sont exprimées en nombres d'ions par  $\text{m}^3$ .  $z_+$  et  $z_-$  sont les valences des ions,  $e$  désigne la charge électrique élémentaire,  $k$  la constante de



Boltzmann,  $T$  la température et  $\rho$  la densité locale de charge. Loin de la surface chargée, la densité de charge est nulle, alors  $z_+ n_+^\infty = z_- n_-^\infty$ .

Le potentiel électrique et la densité de charge sont liés par l'équation de Poisson-Boltzmann, soit, dans le cas unidimensionnel :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (\text{IV.29})$$

où  $\varepsilon$  désigne la constante diélectrique du fluide (permittivité relative) et  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide.

La combinaison des équations précédentes mène à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{z_+ e n_+^\infty}{\varepsilon\varepsilon_0} \left[ \exp\left(\frac{z_- e\Psi(x)}{kT}\right) - \exp\left(\frac{-z_+ e\Psi(x)}{kT}\right) \right] \quad (\text{IV.30})$$

On fait généralement l'hypothèse que les ions présents en solution, cations comme anions, ont la même valence. On sait par expérience que la valence des ions de même signe que la surface chargée (en l'occurrence, les anions) n'a que peu d'influence sur le résultat. Par contre, supposer que tous les cations présents aient même valence est une hypothèse restrictive. Elle permet néanmoins de fixer les idées, et surtout de poursuivre la résolution.

On fait donc l'hypothèse  $z_+ = z_- = z$ . Alors nécessairement  $n_+^\infty = n_-^\infty$  pour que la solution soit électriquement neutre à l'infini. On note  $n^\infty$  cette densité d'ions loin de la surface chargée. L'équation différentielle (IV.30) devient :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{2ze n^\infty}{\varepsilon\varepsilon_0} \operatorname{sh}\left(\frac{ze\Psi(x)}{kT}\right) \quad (\text{IV.31})$$

En multipliant chaque membre de l'équation (IV.31) par  $\Psi'$ , on peut l'intégrer une fois. Auparavant, toutefois, il est utile d'adimensionner ; nous faisons le même changement de variable que Van Olphen (1977) :

$y = \frac{ze\Psi(x)}{kT}$	$y_0^s = \frac{ze\Psi(0)}{kT}$	(IV.32)
et	$\xi = \theta x$ avec $\theta^2 = \frac{2z^2 e^2 n^\infty}{\varepsilon\varepsilon_0 kT}$ .	

Ceci simplifie l'équation (IV.31) en :

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = sh(y) \quad (IV.33)$$

Une première intégration donne :

$$\frac{dy^2}{d\xi} = 2ch(y) + \delta, \text{ avec } \delta \text{ constante à déterminer.} \quad (IV.34)$$

Les feuillets étant chargés négativement, l'espace interfeuille est chargé positivement.  $\rho$  est donc positif. On en déduit par (IV.29) et (IV.31) que  $\Psi$  (et donc  $y$ ) est négatif. Or on sait que  $\Psi$  diminue en intensité lorsqu'on s'éloigne du feuillet. Le signe de sa dérivée est donc connu (positif), et on obtient :

$$\frac{dy}{d\xi} = \sqrt{2ch(y) + \delta} \quad (IV.35)$$

#### IV.3.2.c Cas d'un seul feuillet

Dans le cas d'un seul feuillet, la solution analytique est connue : sachant que pour  $\xi = \infty$ ,  $\frac{dy}{d\xi} = 0$  et  $y = 0$ ,

$$\frac{dy}{d\xi} = \sqrt{2ch(y) - 2} = -2sh\left(\frac{y}{2}\right) \quad (IV.36)$$

La seconde intégration, avec la condition à la limite  $\Psi = \Psi(0)$  ou  $y = y_0^s$  en  $\xi = 0$ , donne :

$$e^{y/2} = \frac{e^{y_0^s/2} + 1 + \left(e^{y_0^s/2} - 1\right)e^{-\xi}}{e^{y_0^s/2} + 1 - \left(e^{y_0^s/2} - 1\right)e^{-\xi}} \quad (IV.37)$$

Par ailleurs, l'électroneutralité de la double couche assure que la charge électrique du feuillet est compensée par celle de la solution. Si on note  $\Gamma$  la densité surfacique de charge de la surface, on a :

$$\Gamma = -\int_0^{\infty} \rho(x) dx = -\varepsilon\varepsilon_0 \left[ \frac{d\Psi}{dx} \right]_{x=0} \quad (\text{IV.38})$$

La charge est donc liée à la pente initiale de la fonction exprimant le potentiel. Le calcul donne :

$$\Gamma = \sqrt{8n^{\infty} \varepsilon\varepsilon_0 kT} \operatorname{sh} \left( \frac{y_0^s}{2} \right) \quad (\text{IV.39})$$

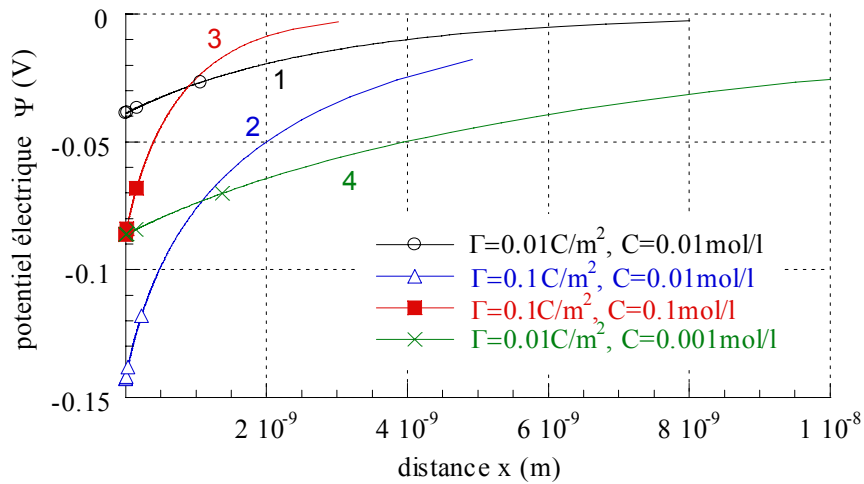
On voit dans (IV.39) que, dans le cas d'un seul feuillet, la charge du feuillet est directement liée à la valeur du potentiel à la surface, via la densité en ions à l'infini  $n^{\infty}$ .

On présente, figure IV-3 a et b, l'évolution du potentiel avec la distance pour plusieurs valeurs de la charge et de la concentration respectivement, et une valence des ions  $z=1$ . La seule différence entre les figures a et b est l'échelle de l'abscisse, en  $\log$  sur la figure II-2b. Par ailleurs,  $C$  (en mol/l) désigne la concentration loin de la surface chargée, et est reliée à  $n^{\infty}$  par le nombre d'Avogadro  $\mathcal{A}$  :

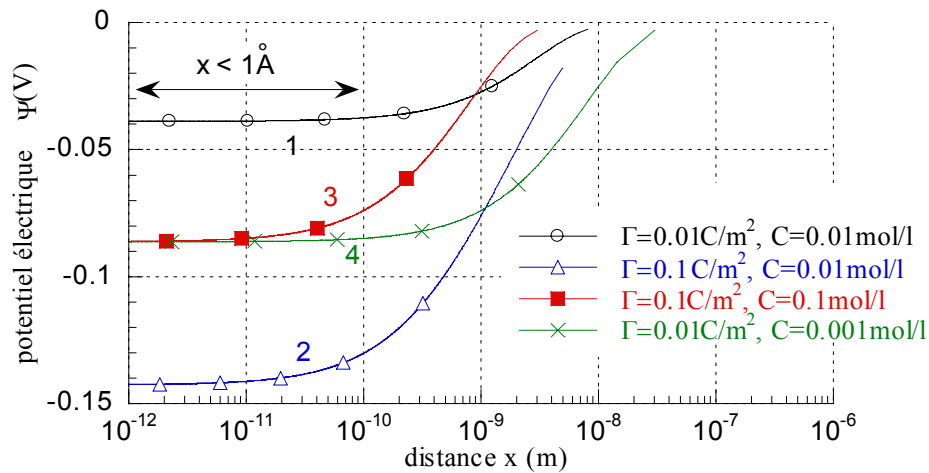
$$n^{\infty} = 10^3 \mathcal{A} C \quad (\text{IV.40})$$

Tout d'abord, plusieurs points simples sont à signaler d'après l'analyse des courbes :

- Courbes 1 et 2 : pour une même concentration, le potentiel en surface est d'autant plus fort que la charge du feuillet est grande ;
- Courbes 1 et 4 (ou 2 et 3) sur la figure a : la charge du feuillet est proportionnelle à la pente initiale ;
- Courbes 3 et 4 : à potentiel en surface donné (même rapport  $\Gamma/\sqrt{n^{\infty}}$ ), la valeur du potentiel à une distance  $x$  fixée décroît fortement lorsque la concentration augmente (ce qui est caractérisé par la pente initiale puisque, forcément, en parallèle, la charge  $\Gamma$  diminue).



(a)



(b)

Figure IV-3: Décroissance du potentiel électrique en fonction de la distance au feuillet. (a) Abscisse  $x$ . (b) Echelle log pour l'abscisse.

### IV.3.3 Cas de feuillets parallèles : potentiel et pression de gonflement

#### IV.3.3.a Présentation

Nous donnons en figure IV-4 un schéma de la distribution du potentiel électrique dans le cas de deux feuillets parallèles. Les deux doubles couches se mélangent. On en déduit immédiatement que les potentiels s'en trouvent modifiés par rapport au cas d'un seul feuillet. De fait, la symétrie du système

assure que la dérivée de  $\Psi$  s'annule au niveau du plan médian, et non plus à l'infini comme précédemment. Il y a interaction des deux doubles couches diffuses.

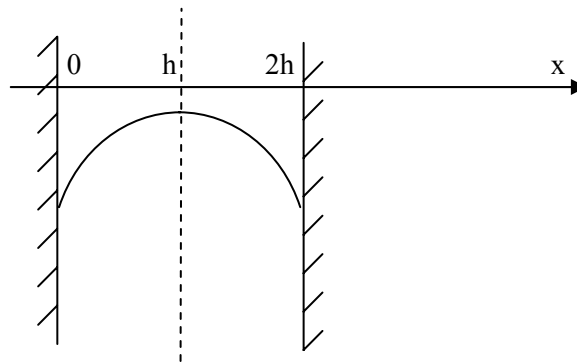


Figure IV-4 : Distribution du potentiel électrique entre deux feuillets parallèles

Cette interaction est à l'origine de la pression de gonflement. On peut voir les choses de la manière suivante : Imaginons un système formé de deux feuillets en suspension. Lorsque ces feuillets se rapprochent l'un de l'autre sous l'effet de leur mouvement brownien, leurs doubles couches interfèrent, ce qui modifie la distribution des ions dans chacune des doubles couches et conduit à une augmentation de l'énergie libre du système. Il faut donc fournir au système un travail pour pouvoir rapprocher les deux particules. Autrement dit, les deux particules se repoussent. Cette situation est semblable à celle de deux aimants de même polarité que l'on tente de rapprocher. Par ailleurs, la force de répulsion agissant sur les deux feuillets peut être calculée directement à partir de la distribution des ions au niveau du plan médian (voir §IV-2.3.a).

#### IV.3.3.b Charge de surface et potentiel

Nous avons utilisé les notions de potentiel de surface et de charge surfacique, et vu le lien qui existe entre eux. Toutefois, il faut se demander, car cela induit fortement la distribution des ions dans la double couche, si un feuillet d'argile est plutôt à potentiel constant, à charge constante ou si à la fois sa charge et son potentiel sont amenés à varier. Par exemple, l'effet d'une évolution de la concentration sur le potentiel de surface ou la charge de surface dépend du type de double couche considéré. Cela est vrai dans le cas d'une seule double couche, pour laquelle la formule (IV.39) montre que  $\Psi(0)$  est lié à  $\Gamma/\sqrt{n^\infty}$ . L'effet est encore plus fort dans le cas de deux doubles couches.

Il existe des sols et des roches qui sont plutôt à potentiel constant. Dans ce cas, en fait, la double couche existe du fait de l'adsorption de certains ions spécifiques en surface des particules ; le potentiel

en surface est alors lié à la concentration de ces ions spécifiques (Van Olphen 1977). Dans ce cas, une variation de la concentration des ions de la double couche, qui ne sont pas ces ions spécifiques, n'a pas d'effet sur le potentiel en surface (tant qu'ils n'interagissent pas avec les ions spécifiques). Ces milieux sont dits à potentiels constants dans la mesure où généralement l'eau du sol ne contient pas (ou peu) de ces ions spécifiques.

Dans le cas des argiles, la charge de surface résulte des substitutions isomorphes au sein même des feuillets, et cette charge est fixée. Elle peut être modifiée par différents cations compensateurs. Ainsi, si la solution contient ces cations spécifiques, la charge de surface est susceptible d'évoluer. Toutefois, plus la Capacité d'Echange Cationique de l'argile est grande, plus les cations compensateurs sont mobilisables, et l'on reste alors dans une configuration de type charge fixe. On parle généralement pour les argiles, notamment les argiles gonflantes qui possèdent une CEC élevée, de la charge de surface plutôt que d'un éventuel potentiel de surface. Nous conservons cette hypothèse dans la suite. Cependant cette hypothèse n'est pas la plus simple : dans le cas de feuillets parallèles, c'est l'hypothèse potentiel constant qui est en effet plus facile à modéliser.

#### IV.3.3.c Calcul de la pression de gonflement

On considère le cas de deux feuillets parallèles, distants de  $2h$ . La pression de gonflement, responsable de la répulsion des feuillets parallèles, est donnée par la différence entre la pression osmotique dans le plan médian et la pression osmotique dans la solution externe. Elle est donnée par :

$$P_{gft} = kT \left[ (\tilde{n}_+ - n_+^\infty) + (\tilde{n}_- - n_-^\infty) \right] \quad (IV.41)$$

où  $\tilde{n}_+$  et  $\tilde{n}_-$  désignent les densités respectives en cations et anions au niveau du plan médian. La détermination de  $P_{gft}$ , dans l'hypothèse où les feuillets sont parallèles, passe donc par celle des densités en ions et donc du potentiel électrique  $\tilde{\Psi}$  au niveau de ce plan médian.

On conserve l'hypothèse de valence identique pour tous les ions.  $n^\infty$  ( $= n_+^\infty = n_-^\infty$ ) désigne la densité des ions loin des feuillets, c'est-à-dire dans les gros pores ou bien dans une solution externe qui serait en équilibre. Utilisant (IV.28) pour l'expression des densités d'ions, la formule (IV.41) devient sous ces hypothèses :

$$P_{gft} = 2kTn^\infty \left( ch \frac{ze\tilde{\Psi}}{kT} - 1 \right) = 4kTn^\infty sh^2 \left( \frac{ze\tilde{\Psi}}{2kT} \right) \quad (IV.42)$$

#### IV.3.3.d Problème de détermination du potentiel électrique médian

La distance entre les feuillets est  $2h$ . L'origine des axes est choisie au niveau d'un des feuillets, tel que présenté en figure IV-4. Au niveau du plan médian entre les feuillets, la symétrie du problème assure que la pente de la distribution du potentiel s'annule :

$$\text{en } x = h, \quad \frac{dy}{d\xi} = 0. \quad (\text{IV.43})$$

La charge de surface  $\Gamma$  est liée de la même manière que dans le cas d'un seul feuillet à la pente du potentiel :

$$\Gamma = -\int_0^h \rho(x) dx = -\varepsilon \varepsilon_0 \left[ \frac{d\Psi}{dx} \right]_{x=0}. \quad (\text{IV.44})$$

On pose par ailleurs

$$\tilde{y} = \frac{ze\tilde{\Psi}}{kT} \quad \text{en } x = h, \quad \text{et } y_0 = \frac{ze\Psi(0)}{kT} \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{IV.45})$$

où  $\tilde{\Psi}$  est la valeur du potentiel milieu.

Compte tenu de (IV.43) et (IV.45), l'équation (IV.35) peut se réécrire :

$$\frac{dy}{d\xi} = \sqrt{2(ch(y) - ch(\tilde{y}))} \quad (\text{IV.46})$$

En intégrant encore, on obtient la relation intégrale suivante :

$$\int_{y_0}^{\tilde{y}} \frac{dy}{\sqrt{2(ch(y) - ch(\tilde{y}))}} = \int_0^{\theta h} d\xi = \theta h \quad (\text{IV.47})$$

Ici s'arrête la résolution analytique. Pour trouver  $\tilde{\Psi}$  ( ou de manière alternative  $\tilde{y}$  ), valeur du potentiel milieu qui nous intéresse pour la détermination de  $P_{gft}$ , il faut résoudre numériquement (IV.46) ou (IV.47) ou utiliser des tables pour l'évaluation de (IV.47).

Pour des feuillets à potentiel constant, donc à  $z$  fixé, la formule (IV.47) est intéressante car elle permet d'obtenir  $\tilde{y}$  en fonction du produit  $\theta h$ , donc du produit  $\sqrt{n^\infty} h$ . Dès lors, on peut fixer arbitrairement une des variables  $n^\infty$  ou  $h$ , et étudier l'évolution du potentiel milieu en fonction de l'autre de façon à dégager une loi d'évolution.

Dans le cas de feuillets à charge fixée, le plus simple est d'intégrer numériquement (IV.46).  $\Gamma$  n'est pas cette fois liée au potentiel en surface comme dans le cas d'un seul feuillet ; l'introduction de (IV.46) dans (IV.44) nous donne en effet :

$$\Gamma = -\sqrt{4n^\infty \varepsilon \varepsilon_0 k T} \sqrt{(ch(y_0) - ch(\tilde{y}))} \quad (\text{IV.48})$$

$ch(\tilde{y})$  est nécessairement strictement supérieur à 1 dans (IV.48), sinon on retrouve le cas d'un seul feuillet. On déduit alors de (IV.48) et (IV.39) que le potentiel en surface est toujours plus grand en valeur absolue que dans le cas du feuillet seul, pour une charge donnée. Remarquons en outre que l'expression (IV.48) exprime le fait que le second membre est une constante quand la charge est fixée.

### IV.3.3.e Détermination numérique du potentiel milieu et de la pression de gonflement

Le principe de résolution est simple. Il s'agit d'intégrer numériquement (IV.46) pour des couples donnés ( $\Gamma, n^\infty$ ). Il n'y a pas d'alternative : on ne peut pas, comme lorsque le potentiel de surface est constant, fixer  $h$  au lieu de  $n^\infty$ .

$\Gamma$  étant fixée, on connaît la pente initiale ; mais  $\Psi(0)$  (ou  $y_0$ ) est arbitraire. Pour une valeur  $y_0$  choisie, on connaît alors immédiatement grâce à (IV.48) la valeur du potentiel milieu, et  $P_{gft}$  par (IV.42), mais on n'a pas  $h$ . Pour l'obtenir, on intègre (IV.46) jusqu'à ce que  $\frac{dy}{d\xi} = 0$  : on a alors atteint le plan médian  $x = h$  d'après (IV.43). On peut vérifier que la valeur du potentiel réduit  $y$  obtenue lorsque la dérivée s'annule est bien celle de  $\tilde{y}$  (ou  $\tilde{\Psi}$ ) obtenue par (IV.48).

Figure IV-5, nous présentons quelques courbes de  $P_{gft}$  obtenues pour différents couples ( $\Gamma, n^\infty$ ) dans le cas d'ions monovalents ( $z = 1$ ). Sur la figure IV-5a, on note la forte décroissance de la pression de gonflement lorsque les feuillets s'écartent. En figure IV-5b, où nous avons pris une échelle logarithmique pour la pression, nous constatons que, comme annoncé par Bolt (1956), la relation liant  $\log P_{gft}$  et l'écartement devient affine pour les grandes valeurs de  $h$ . Enfin, figure IV-5c, avec une échelle log-log, il apparaît clairement que pour les faibles valeurs de  $h$ , c'est la relation ( $P_{gft}, 1/h$ ) qui devient affine.



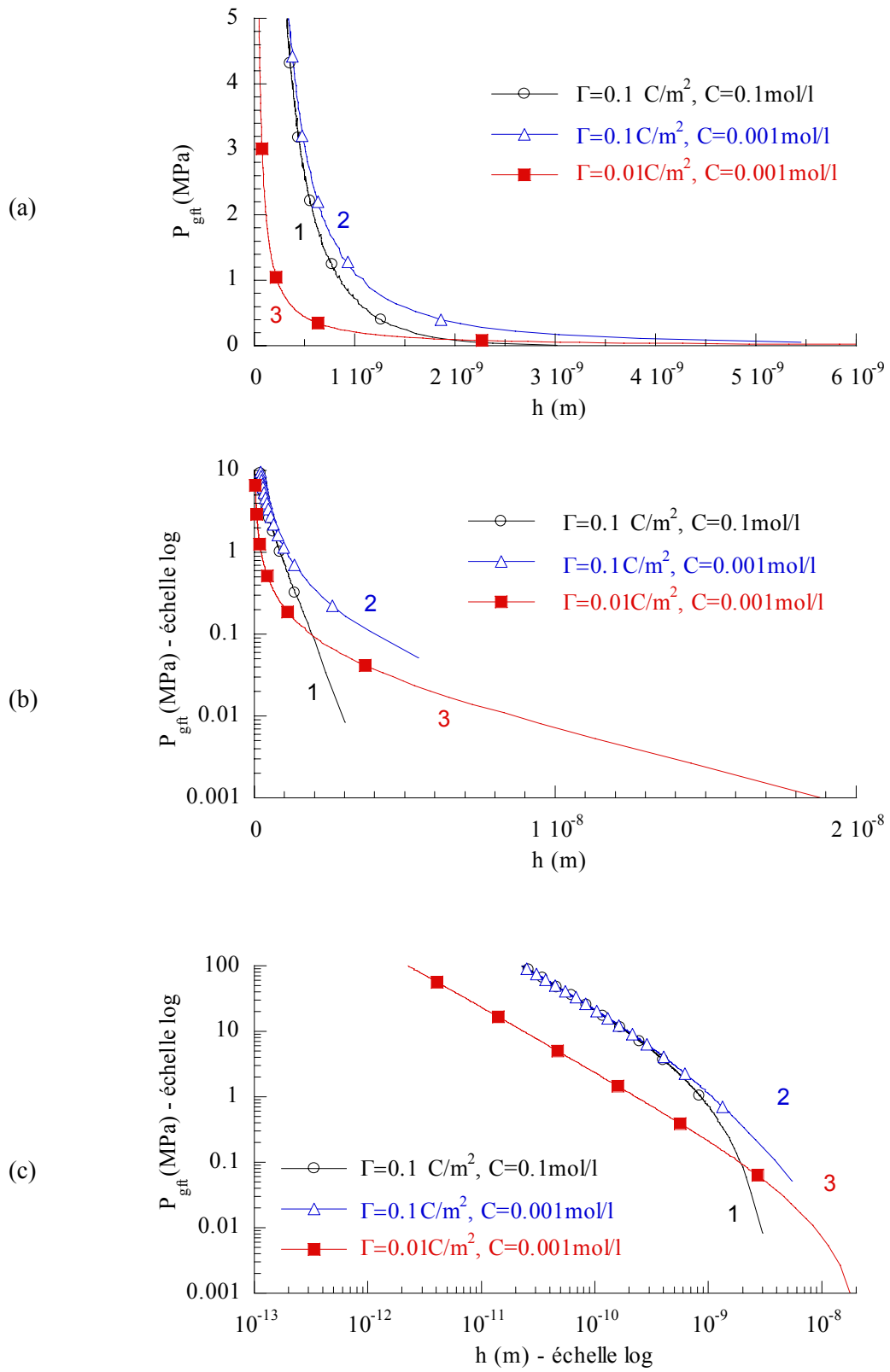


Figure IV-5 : Evolution de la pression de gonflement avec la distance interfeuillets  $2h$ .

- **Approximation aux grandes valeurs de  $h$  :**

Quand les feuillets s'écartent, l'interaction entre les feuillets est faible. Les deux doubles couches (c'est-à-dire la distribution des ions des deux systèmes) ne sont pratiquement pas perturbées l'une par l'autre, et se superposent. Autrement dit, l'écart de densité en cations, par rapport à  $n^\infty$ ,  $n_+ - n^\infty$ , à une distance  $x$  d'un feuillet (et donc  $2h - x$  de l'autre) tend lorsque  $h$  grandit vers la somme des écarts de densités que donnerait un feuillet seul aux distances  $x$  et  $2h - x$ . Au niveau du plan médian, on a donc 2 fois l'écart qu'on aurait avec un seul feuillet à la distance  $h$ . Le potentiel en  $h$  dans le cas d'un seul feuillet tendant vers 0 lorsque  $h$  grandit, un rapide calcul montre que  $\tilde{\Psi}$  devient égal à 2 fois la valeur du potentiel en  $h$  calculé pour un feuillet seul.

Utilisant l'expression (IV.37) du potentiel réduit dans le cas d'un feuillet, on a donc lorsque  $h$  devient grand :

$$\tilde{y} \cong 8\omega_0^s e^{-\theta h} \quad \text{avec} \quad \omega_0^s = \frac{e^{y_0^s/2} - 1}{e^{y_0^s/2} + 1}$$

où  $y_0^s$  est le potentiel en surface qu'il y aurait dans le cas d'un seul feuillet, donné par (IV.37) :

$$\frac{y_0^s}{2} = \operatorname{arg sh} \left( \frac{\Gamma}{\sqrt{8n^\infty \varepsilon \varepsilon_0 kT}} \right).$$

Un formulaire de trigonométrie hyperbolique permet de simplifier un peu les formules, puisque :

$$\omega_0^s = \frac{\sqrt{\Lambda^2 + 1} - 1}{\Lambda}, \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{\Gamma}{\sqrt{8n^\infty \varepsilon \varepsilon_0 kT}}. \quad (\text{IV.49})$$

Avec l'approximation précédente, et en notant  $P^{h \rightarrow \infty}$  l'approximation aux grandes valeurs de  $h$ , l'expression (IV.42) de la pression de gonflement conduit à :

$$P_{gft} \cong P^{h \rightarrow \infty} = 64kTn^\infty \omega_0^s{}^2 e^{-2\theta h} \quad \text{pour } h \text{ grand} \quad (\text{IV.50})$$

Aux grandes valeurs de  $h$ , et donc au niveau des faibles interactions, la valeur du potentiel est 2 fois celle obtenue dans le cas d'un feuillet seul. La pression de gonflement tend donc vers (IV.50), soit quatre fois la pression  $P^{sin\,gle}$  qu'on obtiendrait si on appliquait la formule (IV.42) avec un seul feuillet. Cette dernière opération n'a bien sûr pas de sens physique, puisqu'il n'y a pas de répulsion exercée dans le cas d'un feuillet seul, mais elle est mathématiquement faisable : nous présentons, figure IV-6, le rapport  $P^{h \rightarrow \infty} / P^{sin\,gle}$ . La valeur du potentiel réduit au milieu  $y^{sin\,gle}$  est obtenue à l'aide de (IV.37) avec  $\xi = h\theta$ , et la pression  $P^{sin\,gle}$  peut être calculée, en appliquant (IV.42) et IV.49), via :

$$P^{sin\,gle} = 16kTn^\infty \left\{ \frac{e^{-\theta h}}{1/\omega_0^s - \omega_0^s e^{-2\theta h}} \right\}^2 \quad (IV.51)$$

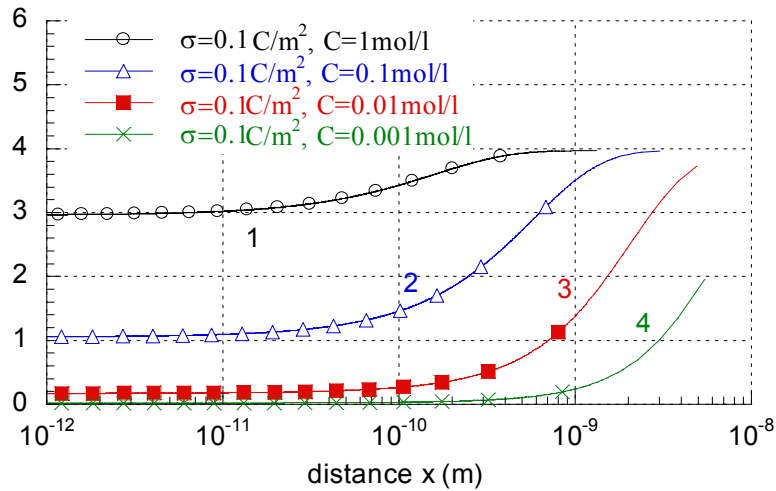


Figure IV-6 : Rapport, pour plusieurs valeurs de potentiel en surface, de la pression de gonflement approximée aux grandes valeurs de  $h$  sur la pression fictive obtenue dans le cas d'un seul feuillet.

En prenant le logarithme décimal de l'expression (IV.50) de la pression de gonflement, et en remplaçant  $\theta$  par sa valeur donnée dans (IV.32) :

$$\log\left(\frac{P_{gft}}{RTC}\right) = \log 64 - 2z \left( \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3 e^2 \mathcal{A}}{\epsilon \epsilon_0 k T}} C \frac{e_v}{\rho_s s} - \frac{1}{z} \log\left(\frac{1}{\omega_0^s}\right) \right) \quad (IV.52)$$

- **Approximation aux petites valeurs de  $h$  :**

Quand les feuillets se rapprochent,  $P_{gft}$ ,  $\tilde{\Psi}$ , et donc aussi  $\Psi(0)$  (ou  $y_0$ ) deviennent très grands en valeur absolue. Ils tendent vers l'infini quand  $h$  tend vers 0. Etant donné que  $\sqrt{(ch(y_0) - ch(\tilde{y}))}$  est borné d'après (IV.48), il en va de même pour  $sh(y_0) - sh(\tilde{y})$ . L'écart est calculable d'après (IV.48) et les formules de trigonométrie hyperbolique.

Si, au lieu d'intégrer le terme  $\frac{d^2\Psi}{dx^2}$  dans l'expression (IV.44) de la charge surfacique  $\Gamma$ , on le remplace par son expression (IV.31), on obtient :

$$\Gamma = -\int_0^h \rho(x) dx = \varepsilon \varepsilon_0 \int_0^h \frac{d^2\Psi}{dx^2} dx = (2n^\infty z e) \int_0^h sh(y) dx \quad (IV.53)$$

On peut alors montrer facilement que  $sh(y)$  dans l'intégrale est remplaçable par sa valeur  $sh(\tilde{y})$  en  $x = h$ , ce qui conduit à :

$$\Gamma \cong 2n^\infty z e sh(\tilde{y}) h$$

L'équivalent aux fortes interactions (aux faibles valeurs de  $h$ ) du potentiel réduit milieu en découle. De même pour la pression de gonflement :

$$\tilde{y} \cong \ln\left(-ze \frac{hn^\infty}{\Gamma}\right) \quad \text{et} \quad P_{gft} \cong P^{h \rightarrow 0} = -\frac{\Gamma k T}{ze h} \quad \text{aux faibles valeurs de } h \quad (IV.54)$$

Selon (IV.54), lorsque les feuillets sont rapprochés, la pression de gonflement ne varie pas avec la concentration.

- **Remarque :**

Nous possédons deux courbes limites pour  $P_{gft}$ , données par les expressions précédentes de  $P^{h \rightarrow \infty}$  et  $P^{h \rightarrow 0}$ . Mais nous devons ajuster la courbe de  $P_{gft}$  pour les valeurs intermédiaires. Une possibilité d'ajustement est de chercher à trouver une fonction qui permette de passer de la fonction  $P^{h \rightarrow 0}$  vers la fonction  $P^{h \rightarrow \infty}$ . Nous présentons sur la figure IV-7 un résultat de pression de gonflement déterminée numériquement, ainsi que les deux approximations  $P^{h \rightarrow \infty}$  et  $P^{h \rightarrow 0}$  déterminées aux faibles et fortes interactions respectivement.

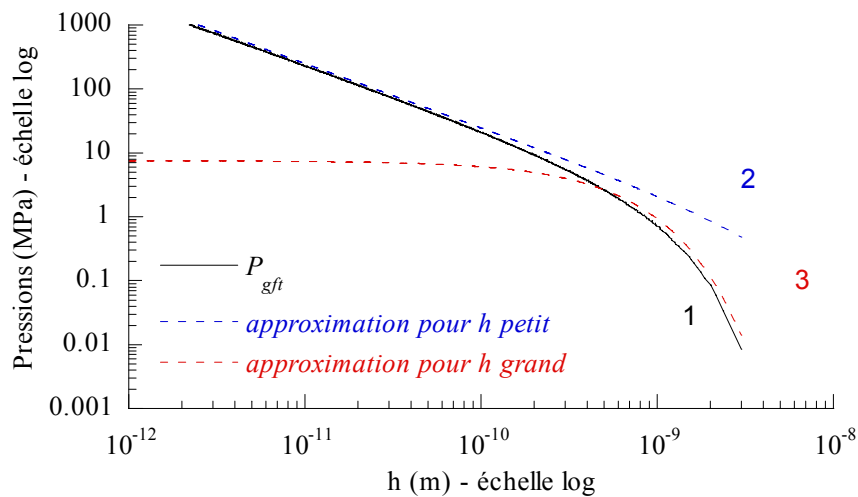


Figure IV-7 : Pression de gonflement calculée pour  $\Gamma=0,1C/m^2$  et  $C=0,1M$ .

Comparaison avec les approximations  $P^{h \rightarrow \infty}$  et  $P^{h \rightarrow 0}$ .

On voit figure IV-7 que  $P_{gft}$  ne reste pas entre les deux courbes limites : aux grandes valeurs de  $h$ ,  $P_{gft}$  devient en effet plus faible que  $P^{h \rightarrow \infty}$ . Cela signifie que l'approximation  $P^{h \rightarrow \infty}$  n'est valable, pour le choix de  $\Gamma$  et  $C$  utilisé, qu'à plus grande distance. L'interpolation simple n'est donc pas possible. De plus, les valeurs de  $P_{gft}$  qui nous intéressent se trouvent dans cette plage de distances ( $h$  compris entre 10 et 50 Å).

#### IV.3.3.f Principe d'obtention d'une loi de gonflement selon la théorie de Gouy

- **Objectif et contraintes :**

Pour obtenir une loi donnant la pression de gonflement microscopique  $P_{gft}$  utilisable dans un code de calcul, la seule possibilité est d'ajuster un ensemble de courbes de  $P_{gft}$  en fonction de  $h$ . Cela va conduire a priori à autant d'ajustements que de couples  $(\Gamma, C)$  choisis, pour une valence d'ions donnée. Ces ajustements doivent être réalisés de sorte qu'on puisse établir un lien entre eux, et qu'on puisse faire varier la charge  $\Gamma$ , et surtout la concentration  $C$ , de manière continue. C'est une entreprise délicate car les ajustements doivent être satisfaisants sur plusieurs ordres de grandeur de  $h$ , et donc plusieurs ordres de grandeur de  $P_{gft}$ . La présence de termes exponentiels interdit le moindre faux pas.

- **Etendue de l'ajustement :**

Pour l'ajustement de  $P_{gft}$ , nous pouvons considérer que la courbe se découpe en trois phases :

- Phase 1 : pour  $h$  petit, elle est quasiment confondue avec  $P^{h \rightarrow 0}$ ,
- Phase 2 : aux valeurs intermédiaires de  $h$ , nous avons une phase de décroissance à ajuster,
- Phase 3 : pour  $h$  grand, elle est quasiment exponentielle, avec  $P^{h \rightarrow \infty}$  comme fonction asymptote.

Considérons la figure IV-8, où sont tracées trois courbes de pression de gonflement correspondant à différentes valeurs de la charge surfacique et de la concentration. Un trait pointillé vertical est tracé, à une certaine distance  $\hat{h}$ . A cette distance  $\hat{h}$ , chaque courbe se trouve dans une phase différente.

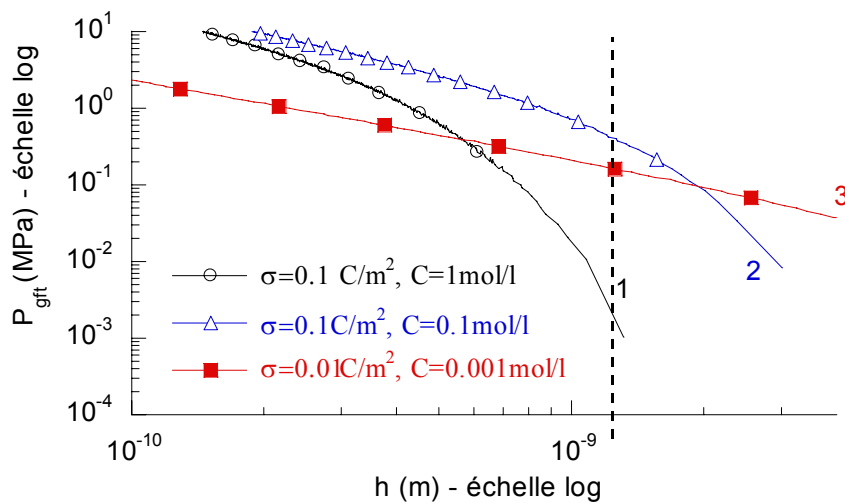


Figure IV-8 : Pressions de gonflement

Pour obtenir un ajustement des courbes de  $P_{gft}$  qui soit valable pour une large gamme de valeurs de charges  $\Gamma$ , de concentrations externes  $C$  et de distances  $h$ , il faut donc nécessairement que l'ajustement soit bon dans chacune des phases précédemment décrites.

- **Procédure d'obtention d'une loi pour la pression de gonflement :**

La procédure d'obtention d'une loi de pression de gonflement microscopique s'avère a priori délicate. Restreignons cette procédure au cas d'ions monovalents. Nous cherchons alors à obtenir une expression de  $P_{gft}$  fonction de trois paramètres :  $\Gamma$ ,  $C$  et  $h$ . Pour cela, nous possédons un ensemble de courbes qui, pour des valeurs distinctes de  $\Gamma$  et de  $C$ , donnent l'évolution de  $\tilde{\Psi}$  (ou de  $P_{gft}$ ) lorsque  $h$  varie. Chacune de ces courbes peut conduire à un ajustement du type  $\hat{P}_{gft} = f_{\Gamma,C}(h)$ . Si l'on veut aboutir à une formulation compacte de la loi finale, il s'agit de trouver des fonctions ajustées

$f_{\Gamma,C}$  qui soient cohérentes entre elles, c'est-à-dire qui soient de la même forme, ou du moins qu'elles permettent de passer de l'une à l'autre de manière continue lorsqu'on fait varier  $\Gamma$  et/ou  $C$ .

#### IV.3.3.g Utilisation d'une invariance du potentiel électrique médian

- **Remarque préliminaire :**

D'après (IV.52), le potentiel milieu  $\tilde{\Psi}$  tend vers une fonction de  $\frac{hC}{\Gamma}$  lorsque  $h$  tend vers 0. Cette

quantité  $\zeta = \frac{hC}{\Gamma}$  peut être décomposée comme le produit de deux quantités :

1.  $\sqrt{C}/\Gamma$  qui fixe la valeur du potentiel en surface dans le cas d'un feuillet seul,
2. et  $h\sqrt{C}$  qui fixe l'évolution avec la distance dans le cas d'un feuillet seul.

Ces deux quantités jouent donc un rôle particulier aux faibles distances. Par ailleurs, elles fixent clairement le potentiel aux grandes distances. Nous avons donc cherché à savoir si elles n'étaient pas suffisantes pour décrire l'évolution du potentiel milieu.

- **Constataion sur les courbes numériques :**

Nous donnons, figure IV-9, quelques courbes d'évolution de  $\tilde{\Psi}$  avec  $\zeta = \frac{hC}{\Gamma}$ . Deux courbes semblent se superposer ; elles correspondent au même rapport  $C/\Gamma^2$ . Cette superposition est confirmée pour tous les cas où ce rapport est le même. Cela suggère une invariance de  $\tilde{\Psi}$ .

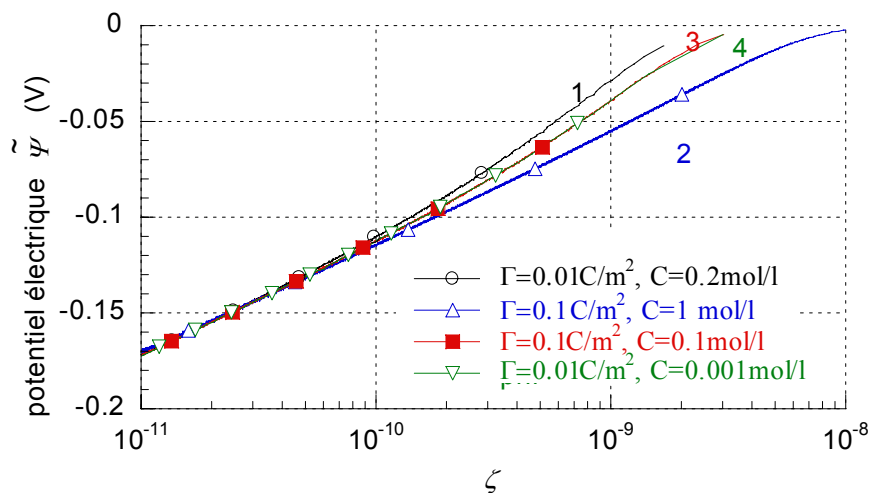


Figure IV-9 : Potentiels milieu fonction de  $\zeta = \frac{hC}{\Gamma}$  (cas d'ions monovalents).

Superposition des courbes pour un même rapport  $C/\Gamma^2$ .

• **Propriété d'invariance du potentiel milieu :**

Le potentiel  $\Psi$  est solution d'un système  $(S)$  réunissant l'équation (IV.31) et les conditions aux limites (IV.43) et (IV.44). Fixant la valence des ions, la permittivité et la température, on peut réécrire ce système sous la forme :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = aC \operatorname{sh}(b\Psi(x)) \\ \frac{d\Psi}{dx}(x=0) = r\Gamma \\ \frac{d\Psi}{dx}(x=h) = 0 \end{array} \right. \quad (IV.55)$$

où  $a, b$  et  $r$  sont des constantes du système. Notons  $(S)_{\{\Gamma, C, h\}}$  ce système.

La solution  $\Psi$  de  $(S)_{\{\Gamma, C, h\}}$  est alors, en un point  $x$  de l'espace, une fonction a priori des paramètres  $\Gamma$ ,  $C$  et  $h$ , et du point  $x$  :

$$\Psi(x) = \Psi(\Gamma, C, h, x). \quad (IV.56)$$

Pour  $\lambda$  un réel donné fixé, posons :

$$\hat{x} = \lambda x \text{ et } \Phi(\hat{x}) = \Psi(\Gamma, C, h, x). \quad (IV.57)$$

Dès lors,  $\frac{d\Phi}{d\hat{x}} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\Psi}{dx}$ ,  $\frac{d^2\Phi}{d\hat{x}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\Psi}{dx^2}$ , et on montre ainsi que  $\Phi$  est solution du système  $(S)_{\{\Gamma/\lambda, C/\lambda^2, \lambda h\}}$ . Autrement dit :

$$\forall x, \quad \Psi(\Gamma, C, h, x) = \Psi\left(\Gamma/\lambda, C/\lambda^2, \lambda h, \lambda x\right) \quad (IV.58)$$

La relation (IV.58) est également vérifiée lorsque  $x = h$ , c'est-à-dire pour les potentiels milieu  $\tilde{\Psi}$  pour lesquels elle devient :

$$\tilde{\Psi}(\Gamma, C, h) = \tilde{\Psi}\left(\Gamma/\lambda, C/\lambda^2, \lambda h\right) \quad (IV.59)$$

Adoptons les notations suivantes :

$$\hat{\Gamma} = \Gamma/\lambda, \quad \hat{C} = C/\lambda^2 \text{ et } \hat{h} = \lambda h. \quad (IV.60)$$



La relation (IV.59) devient :

$$\tilde{\Psi}(\Gamma, C, h) = \tilde{\Psi}(\hat{\Gamma}, \hat{C}, \hat{h}). \quad (\text{IV.61})$$

Définissons alors :

$$\beta_1 = h\Gamma, \quad \beta_2 = \frac{C}{\Gamma^2}, \quad \text{et leurs homologues } \hat{\beta}_1 = \hat{h}\hat{\Gamma} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{C}}{\hat{\Gamma}^2}. \quad (\text{IV.62})$$

Le potentiel milieu peut être écrit en fonction de ces nouvelles variables, une d'une quelconque des trois variables initiales  $\Gamma$ ,  $C$  ou  $h$ . Par exemple :

$$\tilde{\Psi}(\Gamma, C, h) = F(\Gamma, \beta_1, \beta_2). \quad (\text{IV.63})$$

D'après (IV.61) et (IV.63), on obtient alors la relation suivante sur  $F$  :

$$F(\Gamma, \beta_1, \beta_2) = \tilde{\Psi}(\Gamma, C, h) = \tilde{\Psi}(\hat{\Gamma}, \hat{C}, \hat{h}) = F(\hat{\Gamma}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2).$$

Or  $\hat{\beta}_1 = \hat{h}\hat{\Gamma} = (\lambda h)(\Gamma/\lambda) = \beta_1$  ; de même que  $\hat{\beta}_2 = \beta_2$ . On en déduit, pour  $F$ , que :

$$F(\Gamma, \beta_1, \beta_2) = F(\hat{\Gamma}, \beta_1, \beta_2) = F(\lambda\Gamma, \beta_1, \beta_2)$$

On a ainsi montré que :

$$\forall \lambda, \quad F(\Gamma, \beta_1, \beta_2) = F(\lambda\Gamma, \beta_1, \beta_2), \quad (\text{IV.64})$$

ce qui prouve en fait que la fonction  $F$  ne dépend pas de  $\Gamma$ , mais dépend seulement des deux variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Autrement dit, à valence des ions, permittivité et température fixées, **le potentiel milieu  $\tilde{\Psi}$  ne dépend que de deux variables.**

Pour autoriser la réduction du nombre de variables dont dépend l'expression de  $\tilde{\Psi}$ , nous avons choisi les variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . D'autres couples de variables sont possibles, pourvu que ces variables soient invariantes dans le passage de  $(\Gamma, C, h)$  vers  $(\Gamma/\lambda, C/\lambda^2, \lambda h)$ .

Par exemple, la variable  $\zeta = \frac{hC}{\Gamma}$  est une variable utilisable pour réduire le nombre de variables. En particulier,  $\tilde{\Psi}$  est une fonction du couple  $(\zeta = \frac{hC}{\Gamma}, \beta_2 = \frac{C}{\Gamma^2})$ . Sur la figure IV-9, où les courbes sont tracées en fonction de  $\zeta$ , les courbes distinctes correspondent donc à des valeurs distinctes de  $\beta_2$ , tandis que celles pour lesquelles  $\beta_2$  est le même doivent théoriquement être confondues. C'est effectivement le cas.

- **Simplification de la recherche d'une loi pour la pression de gonflement :**

Si l'on fixe les valeurs de la valence des ions, de la permittivité et de la température, le potentiel milieu n'est donc une fonction que de deux variables, au lieu des trois initialement prévues ( $\Gamma$ ,  $C$  et  $h$ ). Cela simplifie largement la recherche d'une loi ajustée pour  $\tilde{\Psi}$  ou pour  $P_{gft}$ . Dans la pratique, la démarche à suivre peut être celle-ci :

1. on prend un ensemble de courbes du potentiel  $\tilde{\Psi}$  (ou de la pression de gonflement  $P_{gft}$ ) correspondant à des valeurs distinctes de  $\beta_2 = \frac{C}{\Gamma^2}$ ,
2. on réalise pour chaque courbe un ajustement dont on détermine les paramètres ;
3. enfin, on détermine des lois d'évolution des paramètres trouvés avec  $\beta_2$ .

L'étape 2 est sans doute la plus délicate, car il s'agit avant tout de trouver une formule de fonction d'ajustement qui puisse permettre de coller, via une évolution d'un certain nombre (si possible réduit) de paramètres, à chacune des courbes qu'on se donne à ajuster.

- **Ajustements :**

Nous avons essayé plusieurs types d'ajustements, pour le potentiel électrique  $\tilde{\Psi}$  et pour  $P_{gft}$ . Pour  $\tilde{\Psi}$ , il y a deux avantages qui conduisent à deux méthodes distinctes. Nous les présentons rapidement, avant de passer à l'ajustement de  $P_{gft}$  qui est celui que nous avons finalement retenu.

Nous présentons quatre courbes, figure II-9. Celle de  $\Psi(0)$ , potentiel en surface, qui évolue avec la distance, celle de  $\tilde{\Psi}$ , mais aussi deux courbes représentatives de deux potentiels fictifs, à savoir :

- Le potentiel obtenu si l'on avait qu'un seul feuillet, noté  $\Psi^{sin\ glé}$ ,
- Le potentiel, noté  $\bar{\Psi}$ , calculé à partir du potentiel  $\Psi(0)$  en surface, mais avec la formule (IV.37) valable pour un feuillet seul.

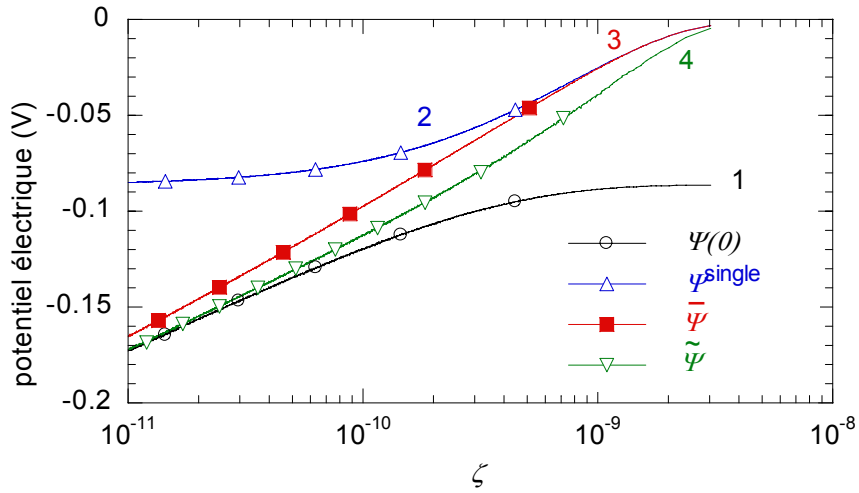


Figure IV-10 : Encadrement du potentiel milieu

Nous voyons que  $\Psi(0)$  tend, quand les feuillets s'écartent, vers sa valeur dans le cas d'un feuillet seul (correspondant à la valeur initiale  $\Psi_0^{single}$  de la courbe  $\Psi^{single}$ ). Le potentiel milieu  $\tilde{\Psi}$  est très proche de  $\Psi(0)$  aux faibles distances, puis s'en écarte rapidement lorsque  $\Psi(0)$  se stabilise. On sait qu'il tend vers 2 fois  $\Psi^{single}$  ; donc aussi vers 2 fois  $\bar{\Psi}$  qui rejoint  $\Psi^{single}$ .

La première méthode consiste à bien ajuster la courbe de  $\Psi(0)$ , puis immédiatement en déduire le potentiel milieu  $\tilde{\Psi}$  par la formule (IV.48). Le problème est que l'ajustement de  $\Psi(0)$  en fonction de  $h$  doit être extrêmement précis à l'endroit où  $\Psi(0)$  tend vers  $\Psi_0^{single}$ . Le tableau IV-1 suivant donne une indication sur la sensibilité liée à la valeur du potentiel en surface. Nous avons pris le cas  $\Gamma = -0,1 \text{ C/m}^2$ ,  $C = 0,1 \text{ mol/l}$ ,  $z = 1$  ; avec ces valeurs,  $\Psi_0^{single}$  vaut  $86,305 \text{ mV}$ .

$\Psi(0)$ (V)	$\Psi(0)/\Psi_0^{single}$	$\tilde{\Psi}$ (V)	$P_{gft}$ (MPa)	$\bar{\Psi}$ (V)	$\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$
-0.087183	1.0101	-0.025276	0.26675	-0.015534	1.6271
-0.087098	1.0092	-0.024048	0.23956	-0.014516	1.6567
-0.087013	1.0082	-0.022847	0.21465	-0.013901	1.6436
-0.086929	1.0072	-0.021498	0.18856	-0.013160	1.6336
-0.086844	1.0062	-0.020025	0.16229	-0.012157	1.6472
-0.086760	1.0052	-0.018435	0.13645	-0.011117	1.6582
-0.086675	1.0043	-0.016668	0.11064	-0.010123	1.6465
-0.086590	1.0033	-0.014689	0.08523	-0.0086509	1.6980

Tableau IV-1 : sensibilité dans le cas d'un ajustement du potentiel.

On peut constater qu'une différence de 0,7% sur  $\Psi(0)$ , par exemple entre la première et la dernière ligne du tableau, conduit à une différence de 78% sur  $\tilde{\Psi}$  et plus de 300% sur  $P_{gft}$ .

L'autre méthode consiste à utiliser  $\bar{\Psi}$ , qui ne présente pas la même sensibilité aux variations de  $\Psi(0)$  car on n'utilise pas (IV.48) pour le calcul. La méthode consiste à ajuster  $\Psi(0)$ , à en déduire  $\bar{\Psi}$  par application de (IV.37), puis à ajuster le rapport  $\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$  qui passe de 1 aux faibles distances à 2 aux grandes distances.

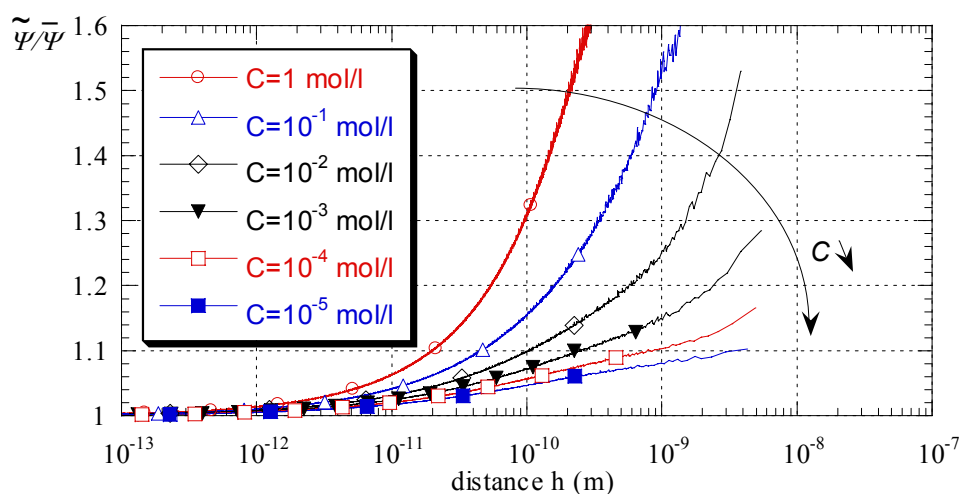


Figure IV-11 : Rapport  $\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$  en fonction de la mi-distance  $h$ , dans le cas d'une charge surfacique  $\Gamma = -0,1 \text{ C/m}^2$  et pour différentes concentrations entre  $1 \text{ mol/l}$  et  $10^{-5} \text{ mol/l}$ .

Nous présentons figure IV-11 le rapport  $\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$  calculé, avec  $\Gamma = -0,1 \text{ C/m}^2$ , pour différentes valeurs de la concentration entre  $1 \text{ mol/l}$  et  $10^{-5} \text{ mol/l}$  (avec un ordre de grandeur de la concentration entre chaque courbe). Les courbes sont assez simples pour les fortes concentration, et le sont moins aux faibles concentrations. Nous avons réussi à trouver un ajustement propre de ces courbes, sous la forme de fonctions dont les paramètres varient avec  $\beta_2 = \frac{C}{\Gamma^2}$ . Malheureusement, cette fois encore, le moindre écart de la fonction d'ajustement par rapport à  $\tilde{\Psi}$  devient gênant ; on peut remarquer sur la figure IV-12 que, pour une distance  $h$  fixée, la pression de gonflement semble tendre vers une valeur limite lorsque la concentration diminue : les courbes de  $P_{gft}$  calculées pour les concentrations  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  et  $10^{-5} \text{ mol/l}$  sont quasiment confondues. Ce sont justement celles pour lesquelles l'ajustement est délicat, et nous ne sommes pas parvenus à trouver un ajustement de  $\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$  qui soit à la fois

relativement simple et qui suivent correctement les courbes correspondant à chaque valeur de la concentration.

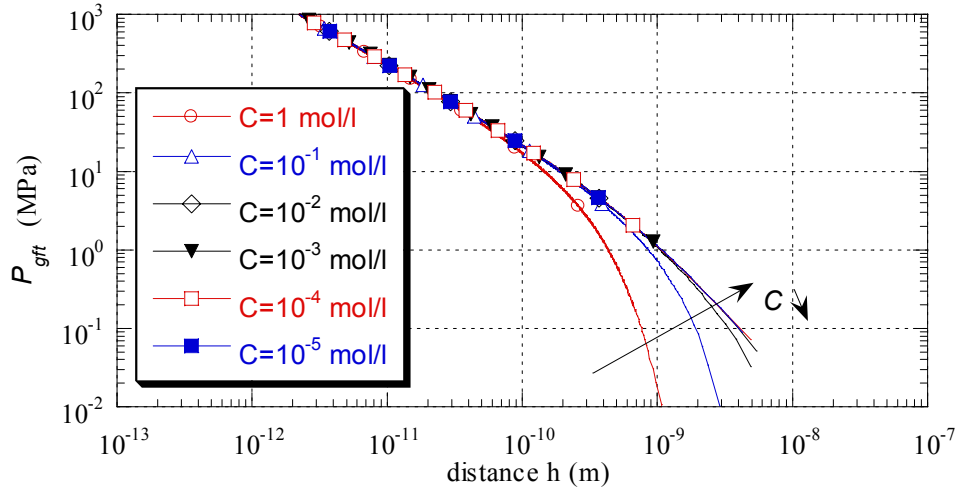


Figure IV-12 : Pression de gonflement en fonction de la mi-distance  $h$ , dans le cas d'une charge surfacique  $\Gamma = -0,1 C/m^2$  et pour différentes concentrations entre  $1 \text{ mol/l}$  et  $10^{-5} \text{ mol/l}$ .

L'ajustement finalement réalisé l'a été directement sur les courbes de  $P_{gft}$ . Ici, une autre difficulté survient, qui est que  $P_{gft}$  ne présente pas la même propriété d'invariance que  $\tilde{\Psi}$  puisque, dans la formule (IV-42) donnant l'expression de  $P_{gft}$  en fonction de  $\tilde{\Psi}$ , la concentration  $C$  intervient (au travers de la densité d'ions  $n^\infty$ ).

Nous avons alors choisi d'étudier le rapport  $P_{gft}/P^{sin gle}$ . En effet, sous les mêmes conditions de valence des ions, permittivité et température fixées, le potentiel  $\Psi^{sin gle}$  possède (en  $x = h$ ) la même propriété d'invariance que  $\tilde{\Psi}$ . Il en découle que  $P_{gft}/P^{sin gle} = sh^2\left(\frac{ze\tilde{\Psi}}{2kT}\right) / sh^2\left(\frac{ze\Psi^{sin gle}}{2kT}\right)$  possède la même propriété.

Etudions  $P^{sin gle}$ . Appliquant les formules (IV.39) et (IV.42), on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0} P^{sin gle}(x) = \frac{\Gamma^2}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad (\text{IV.65})$$

La valeur de  $P^{single}$  à la surface est donc indépendante de la concentration, comme  $P_{gft}$  aux faibles valeurs de  $h$ . Lorsque l'écartement des feuillets se réduit, le rapport  $P_{gft}/P^{single}$  tend donc, dans le plan  $(\log P_{gft}, \log h)$  vers une droite dont la pente ne dépend que de la charge. Aux grandes distances, nous avons vu que  $P_{gft}/P^{single}$  tend vers la valeur 4 (formules (IV.50), (IV.51) et figure IV-6). De manière à réduire le nombre de paramètres dont vont dépendre les ajustements, nous étudions donc  $P_{gft}/P^{single}$ , dont nous présentons les courbes correspondant à deux concentrations différentes, toujours pour  $\Gamma = -0,1 \text{ C/m}^2$ , en figure IV-13. On voit que les courbes, que nous avons extrapolées pour les grandes distances, se rejoignent aux faibles comme aux grandes distances. Les courbes décroissent dans un premier temps, passent par un minimum qui dépend de  $\beta_2 = \frac{C}{\Gamma^2}$ , puis croissent jusqu'à la valeur limite 4 à l'infini.

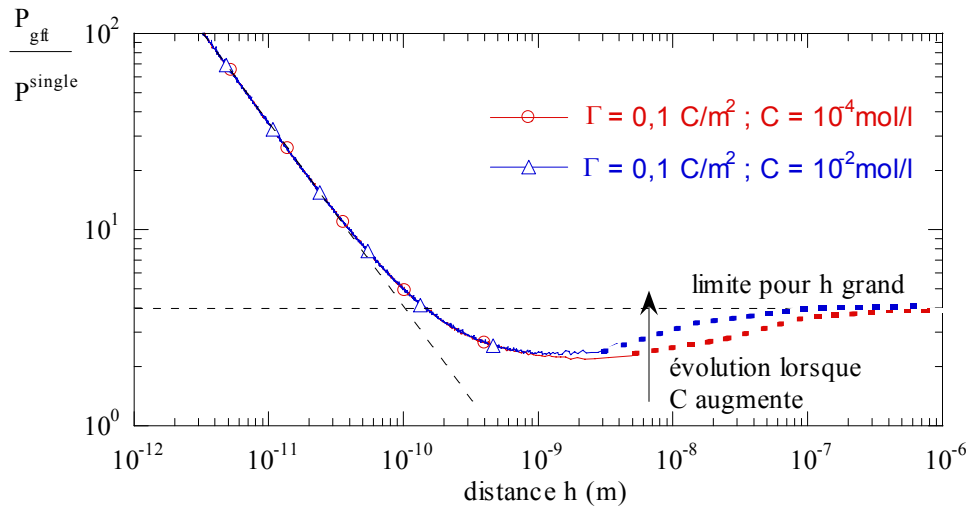


Figure IV-13 : Rapport  $P_{gft}/P^{single}$  obtenu pour  $\Gamma = -0,1 \text{ C/m}^2$ , avec deux valeurs de la concentration.

Pour l'ajustement, nous avons déterminé, pour l'ensemble des courbes représentatives de  $P_{gft}/P^{single}$  obtenues numériquement, une fonction simple  $\Phi_1$  qui les ajuste aux faibles distances, qui reste toujours en dessous, et qui tend vers une valeur constante  $\beta$  aux grandes distances. Enfin, pour chaque courbe, on obtient un ajustement en multipliant  $\Phi_1$  par une fonction  $\Phi_2$  qui évolue de la valeur 1 aux faibles distances vers la valeur  $4/\beta$  aux grandes distances :

1.  $\Phi_1(d)$  est pris de la forme  $\frac{A}{B}\left(1 + \frac{B}{d}\right)$  qui est proche de  $\frac{A}{d}$  lorsque  $d$  tend vers 0, et tend vers

$$\beta = \frac{A}{B} \text{ pour } d \text{ grand,}$$

2.  $\Phi_2(d)$  est de la forme  $v_2 - (v_2 - v_1)\exp(-\gamma d^k)$  avec  $v_1 = 1$  et  $v_2 = 4/\beta$ .

Nous sommes parvenus à trouver des ajustements qui utilisent le même paramètre  $k$  en exposant dans l'exponentielle de  $\Phi_2$ . Ainsi, seul le paramètre  $\gamma$  évolue en fonction de  $\frac{C}{\Gamma^2}$ . L'obtention d'une loi d'évolution pour  $\gamma$  s'est révélée simple, grâce une fonction analogue à  $\Phi_2$  (figure IV-14).

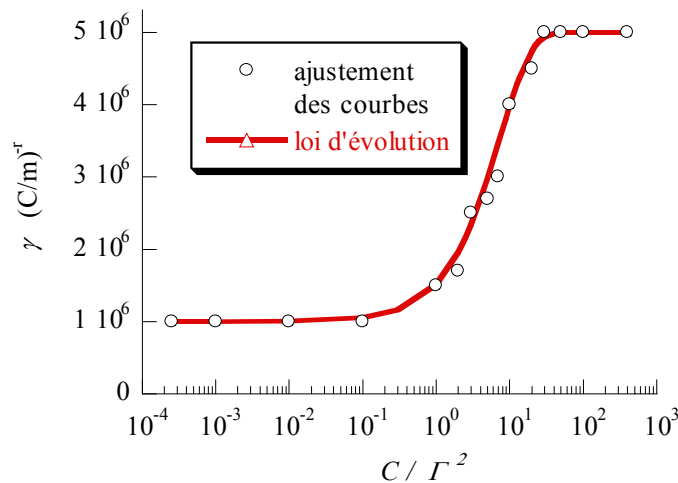


Figure IV-14 : Evolution du paramètre  $\gamma$  avec le rapport  $C/\Gamma^2$ .

• **Loi finale pour la pression de gonflement :**

Les courbes numériques et les ajustements ont été réalisés pour des valeurs fixées des paramètres suivants :

- Constante diélectrique de l'eau  $\varepsilon = 80$ ,
- Température 20°C, soit  $T = 293 \text{ K}$ ,
- Valence 1 des ions (ions monovalents).

Selon la procédure d'ajustement suivie, l'expression finale de l'ajustement  $\hat{P}_{\text{gft}}$  de la pression de gonflement est donnée sous la forme du produit de trois fonctions (formule (IV.66)).

$$\widehat{P}_{gft} = F_1(\Gamma, h) \cdot F_2(\Gamma, C, h) \cdot P^{single}(\Gamma, C, h)$$

où :

- $F_1(\Gamma, h) = \Phi_1(|\Gamma| h)$ ,

avec  $\Phi_1(d) = \frac{A}{B} \left(1 + \frac{B}{d}\right)$ , où  $A = \frac{63}{70} \cdot \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e}$  et  $B = 1,8 \cdot 10^{-11}$

- $F_2(\Gamma, C, h) = v_2 - (v_2 - v_1) \exp\left(-\gamma(\Gamma, C) |\Gamma h|^m\right)$  (IV.66)

avec  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 4B/A$ ,  $m = 0,8$ ,

et  $\gamma(\Gamma, C) = 5 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6 \exp\left(-0,137 \frac{C}{\Gamma^2}\right)$

- $P^{single} = 16RTC \left\{ \frac{e^{-\theta h}}{1/\omega_0^s - \omega_0^s e^{-2\theta h}} \right\}^2$ ,

où :

- $\omega_0^s = \frac{\sqrt{A^2 + 1} - 1}{A}$ , avec  $A = \frac{\Gamma}{\sqrt{8\varepsilon\varepsilon_0 RTC}}$

- $\theta = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3 z^2 e^2 \mathcal{A} C}{\varepsilon\varepsilon_0 kT}}$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $P^{single} \rightarrow \frac{\Gamma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$  d'après (IV.65). L'ajustement  $\widehat{P}_{gft}$  tend donc vers :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{P}_{gft} = \frac{A}{z|\Gamma|h} \cdot \frac{\Gamma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{63}{70} \cdot \frac{kT\Gamma}{zeh}$$

c'est-à-dire  $P^{h \rightarrow 0}$ , au coefficient  $\frac{63}{70}$  près qui est un coefficient correcteur inclus dans la fonction  $\Phi_1$  pour obtenir un bon ajustement au-delà d'un angström d'écartement quelle que soit la charge surfacique au-delà de  $10^{-4} \text{ C/m}^2$ .

Dans l'expression ajustée (IV.66) de la pression de gonflement microscopique, la concentration  $C$  apparaît de manière claire dans le terme  $P^{single}$ , et de manière non linéaire via les termes  $F_2$  et  $A$ . On peut écrire :

$$\widehat{P}_{gft} = \alpha_C(\Gamma, C, h) \cdot C \tag{IV.67}$$



Dans une loi de comportement macroscopique, ce sont les dérivées partielles de la pression de gonflement qui ont un intérêt. Les expressions (IV.66) n'autorisent pas une forme simple des dérivées de la pression de gonflement ajustée. Nous avons recours à la dérivée numérique.

### IV.3.4 Loi de gonflement microscopique

#### IV.3.4.a *Domaine de validité*

Nous possédons une loi obtenue par ajustement de courbes numériques. L'erreur relative de l'ajustement est inférieure à  $10^{-2}$  pour une mi-distance interfeuillet  $h$  comprise entre 1 et  $70 \text{ \AA}$ . La charge de feuillet  $\Gamma$  doit être supérieure à  $10^{-4} \text{ C/m}^2$  et la concentration  $C$  telle que le rapport  $\sqrt{C}/\Gamma$  soit compris entre  $2,5 \cdot 10^{-4}$  et 400. Cette plage peut à notre avis être aisément étendue.

#### IV.3.4.b *Evolution en fonction de la concentration*

Nous aurions pu tracer plus tôt des courbes de  $P_{\text{gft}}$  en fonction de  $C$  pour une distance donnée, en agissant par interpolation. Il est néanmoins plus satisfaisant de posséder une formule analytique. Nous montrons en figure IV-15 quelques courbes obtenues par application de notre loi, pour  $\Gamma = -0,1 \text{ C/m}^2$  et pour différentes valeurs de  $h$ .

On notera sur ces courbes qu'il y a clairement une pression de gonflement maximale pour chaque valeur de l'écartement des feuillets.

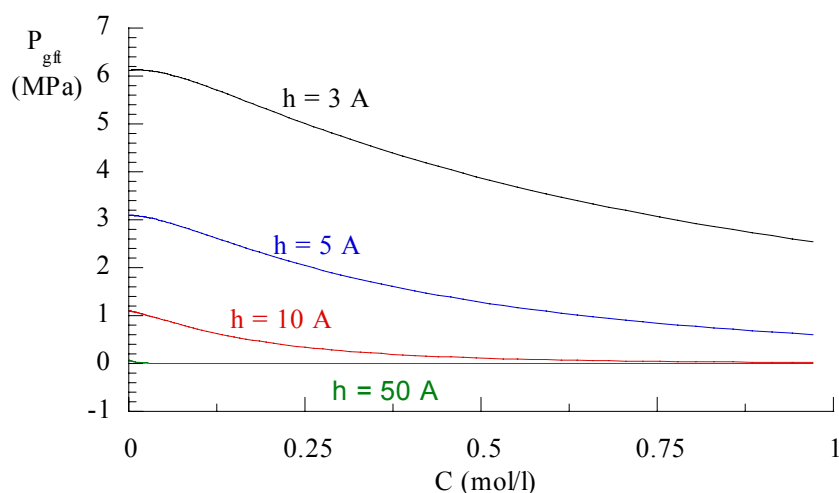


Figure IV-15 : Evolution de  $P_{\text{gft}}$  en fonction de  $C$  pour plusieurs mi-distances  $h$  entre feuillets.

Une vue tridimensionnelle de la pression de gonflement en fonction de la distance et de la concentration est donnée en figure IV-16, pour une valence 1 et une charge des feuillets de  $0,1 \text{ C/m}^2$ .

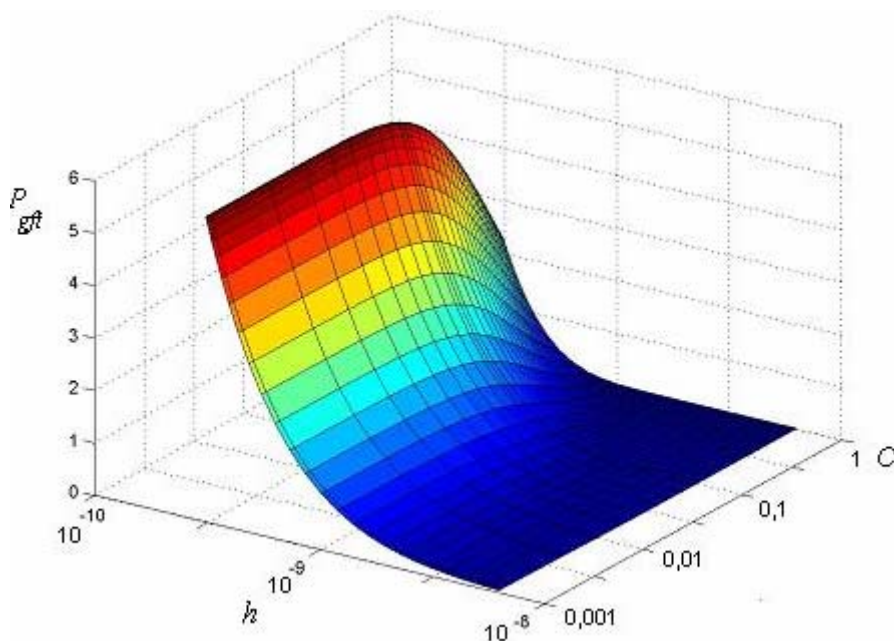


Figure IV-16 : Evolution de la pression de gonflement avec  $C$  (en mol/l) et  $h$  (en m), pour une charge de feuillets  $\Gamma = 0,1 \text{ C/m}^2$  (cas d'ions monovalents).

#### IV.3.4.c Influence de la charge surfacique des feuillets

Nous avons tracé, figure IV-17, trois courbes de pressions de gonflement en fonction de la distance entre feuillets obtenues pour trois valeurs différentes de la charge surfacique  $\Gamma$ , et pour une même valeur de la concentration « externe ». Il est clair que la charge surfacique des feuillets est un paramètre important du gonflement.

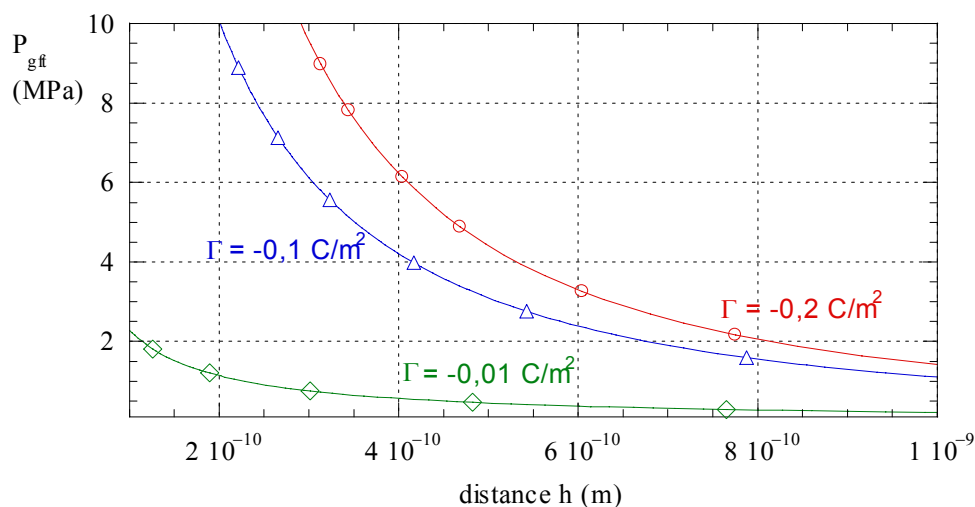


Figure IV-17 : Pression de gonflement en fonction de  $h$  pour  $C=0,001 \text{ mol/l}$  ; influence de la charge de surface.

#### ***IV.3.4.d Gonflement libre***

Considérons un échantillon d'argile saturée en contact avec une solution saline à la pression atmosphérique. Si la concentration  $C$  de la solution est abaissée, l'échantillon gonfle alors que la pression externe reste constante.

Cela signifie qu'au cours de l'expérience, les forces dues aux interactions eau-argile n'ont pas varié. Dans notre modèle, qui n'intègre pas d'expression pour les forces d'attraction, nous devons traduire cela par le fait que la pression de gonflement microscopique n'a pas évolué au cours de l'expérience.

Au début de l'expérience, les feuillets présentent un écartement fonction, d'après (IV-14), de la porosité et de la surface spécifique. Selon la concentration initiale, à cet écartement initial correspond une pression de gonflement microscopique initiale. Puisque l'équilibre mécanique est assuré, cette pression initiale peut s'interpréter comme étant celle qui s'oppose aux forces d'attraction. Inversement, puisque notre modèle ne permet pas une prise en compte plus fine de ces forces d'attractions, nous pouvons les supposer égales — mais opposées — à celles résultant de la pression de gonflement initiale ; et les exprimer comme telles.

Pour simuler une telle expérience au niveau microscopique, nous faisons varier la concentration et cherchons la mi-distance  $h$  telle que la pression de gonflement reste constante. La loi que nous possédons n'est malheureusement pas directement inversible, et la valeur de  $h$  doit être calculée numériquement (dichotomie par exemple). Nous montrons, figure IV-18a et b, le résultat d'un tel calcul. Nous voyons que l'attraction, en fait la pression de gonflement initiale, a une influence sur le gonflement : plus  $P_{gfi}$  est faible, plus l'influence de la concentration est grande sur le gonflement.

On peut remarquer, sur la figure IV-18b où l'on a choisi une échelle logarithmique pour la concentration, qu'il y a dans chaque cas un gonflement maximal atteint aux faibles concentrations. C'est le gonflement qu'on aurait en mettant l'échantillon en contact avec une eau pure.

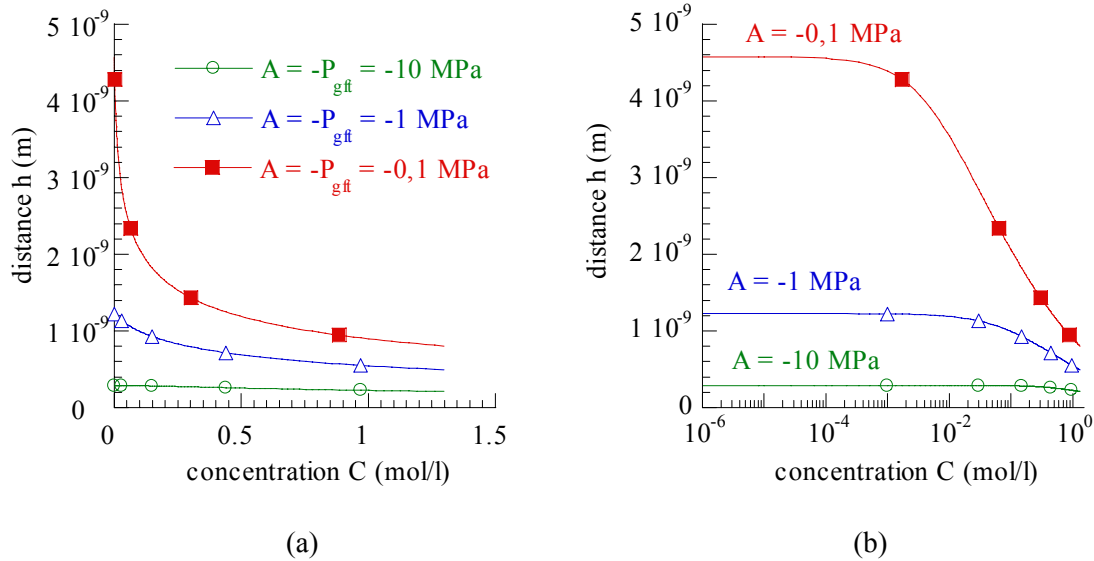


Figure IV-18 : Evolution de la mi-distance interfeuillets  $h$  avec la concentration, en fonction des forces d'attraction, dans une expérience de gonflement libre (la pression de gonflement microscopique reste constante).

### IV.3.5 Passage micro-macro

La formule (IV-14) qui met en relation la distance interfeuillets  $2h$  d'une argile et l'indice des vides  $e_v$ , est issue d'un raisonnement classique repris dans la plupart des articles traitant du lien entre gonflement des argiles et théorie de la double couche diffuse. Nous le reprenons, sur la base des explications de Yong et al. (1975, cités par Dormieux et al. 1995).

Considérons un volume  $V$  d'argile, partagé en volume de vide  $V_v$  et de solide  $V_s$ . Notant  $\phi$  la porosité, la fraction volumique occupée par le solide (les feuillets d'argiles) est  $\phi_s = 1 - \phi$ . L'indice des vides est donné par :

$$e_v = \frac{V_v}{V_s} = \frac{\phi}{1 - \phi} \quad (\text{IV.68})$$

Si  $S_f$  est la surface d'un feuillet, alors l'espace interstitiel qui lui est rattaché (de part et d'autre) est  $2S_f h$ . Si  $N_f$  représente le nombre de feuillets de feuillets argileux dans le volume  $V$ , le volume de vide  $V_v$  est alors donné par  $V_v = 2S_f h N_f$  et la porosité par  $\phi = \frac{2S_f h N_f}{V}$ .

Par ailleurs,  $2S_f N_f$  représente la surface totale des feuillets dans le volume  $V$  de milieu poreux. C'est donc la surface offerte par les feuillets qui occuperaient un volume  $V_s$  si l'argile n'était constituée que de solide. La surface spécifique  $s$  est définie comme étant la surface possible d'échange de cation compensateur par unité de volume d'argile solide pure. Si on note  $\rho_s$  la masse volumique de solide (des minéraux argileux), on a alors  $s = \frac{2S_f N_f}{\rho_s V_s}$ . On en déduit :

$$h = d \frac{\phi}{1 - \phi} = de_v \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{\rho_s s} \quad (\text{IV.69})$$

L'approche théorique ci-dessus n'est valable que si l'argile est pure, homogène (dimensions des feuillets et espaces interfeuillets identiques), et les feuillets parallèles. Si l'argile n'est pas pure, et contient une fraction  $\theta$  de minéraux argileux, ceux-ci occupent un volume  $\theta V_s$  et le paramètre  $d$  ci-dessus peut sans doute être remplacé par :

$$d = \frac{1}{\rho_s s \theta} \quad , \quad (\text{IV.70})$$

à condition que la surface spécifique soit déterminée de manière théorique. Dans la pratique, une roche argileuse contient plusieurs minéraux argileux dont la surface spécifique varie, et la charge spécifique globale est estimée sur la base de mesures de la Capacité d'Echange Cationique (CEC). Elle intègre alors le fait que la roche n'est pas une argile pure et on peut revenir à l'expression (IV.69) de  $d$ .

### IV.3.6 Contrainte effective

Nous avons déterminé une loi de pression de gonflement microscopique pour les matériaux argileux. Elle dépend de l'hypothèse forte que les feuillets sont parallèles. Sous l'hypothèse qu'un passage micro-macro est faisable, on aboutit à une expression de la pression de gonflement macroscopique fonction de la porosité (ou de l'indice des vides) et de la concentration « externe ». Cette concentration représente celle d'une solution qui serait en équilibre avec un échantillon de milieu poreux. C'est aussi la concentration dans les gros pores.

Les forces agissant sur la déformation du milieu sont dans notre approche :

- La contrainte mécanique  $\sigma$ ,
- La pression de la solution interstitielle  $P_w$ ,
- La pression de gonflement macroscopique  $P_{GFT}$ .

Dans la limite des solutions idéales, la pression de la solution interstitielle pourrait se décomposer elle-même en la pression thermodynamique de l'eau pure et la pression osmotique des ions dans les gros pores.

La contrainte effective s'écrit sous forme incrémentale, avec la convention précédente de contraintes positives en compression :

$$d\sigma' = d\sigma - bdP_w - b_{GFT}dP_{GFT} \quad (IV.71)$$

où  $b$  et  $b_{GFT}$  sont des coefficients de Biot.

Le coefficient  $b_{GFT}$  a été rajouté pour, éventuellement, ajuster l'expression du gonflement dans le cadre d'un passage micro-macro basé, par exemple, sur des essais. Ici, en fait, nous prenons  $b_{GFT} = 1$  :

$$d\sigma' = d\sigma - bdP_w - dP_{GFT} \quad (IV.72)$$

### IV.3.7 Loi de comportement macroscopique

Nous reprenons désormais la convention de signes standard, pour laquelle les contraintes sont positives en traction. La relation (IV.72), en changeant les signes, devient :

$$d\sigma' = d\sigma + bdP_w + dP_{GFT} \quad (IV.73)$$

Partant de (IV.73), une relation liant la déformation du milieu à la contrainte effective peut être écrite, sous la forme :

$$Kd\varepsilon = d\sigma + \widehat{b}dP_w + dP_{GFT} \quad (IV.74)$$

où  $K$  est un module d'incompressibilité.

Si l'on souhaite par contre relier la contrainte effective aux variables directement mesurables (contrainte  $\sigma$ , pression  $P_w$  et concentration  $C$ ), nous sommes en mesure d'écrire :

$$d\varepsilon = \frac{1}{K_o}(d\sigma + bdP_w - \beta_c dC) \quad (IV.75)$$

Dans cette expression,  $K_o$  est un module d'incompressibilité isopression et isoconcentration.

### Mesure de la pression de gonflement dans un essai isopression

Si nous effectuons une expérience à pression constante et à volume constant, nous avons :

$$\begin{cases} d\varepsilon = 0 \\ dP_w = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.76})$$

En reportant (IV.76) dans (IV.75), on obtient :

$$d\sigma = \beta_c dC \quad (\text{IV.77})$$

Lorsque C diminue, par exemple, il faut augmenter la contrainte de compression pour maintenir le volume constant. C'est une des définitions de la pression de gonflement macroscopique  $P_{GFT}$ . Ainsi, on peut écrire :

$$dP_{GFT} = -d\sigma = -\beta_c dC \quad (\text{IV.78}),$$

et le coefficient  $\beta_c$  (qui est positif) peut être identifié à :

$$\beta_c = -\frac{\partial P_{GFT}}{\partial C} \quad (\text{IV.79})$$

### Lien des autres coefficients avec la pression de gonflement

Les coefficients autres que  $\beta_c$  dépendent également de la pression de gonflement. En effet, dans le cadre du passage micro-macro retenu, la pression de gonflement macroscopique est fonction des variables macroscopiques suivantes : porosité  $\phi$  et concentration C.

Si le solide est incompressible, la porosité n'est fonction que de la déformation. Aussi, nous pouvons distinguer deux cas :

- Solide incompressible :

$$dP_{gft} = \frac{\partial P_{GFT}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial C} dC \quad (\text{IV.80})$$

- Solide compressible :

$$dP_{gft} = \frac{\partial P_{GFT}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial C} dC + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial P_w} dP_w \quad (\text{IV.81})$$

Dans le cas le plus général (formule IV.81), la formule (IV.74) donne :

$$Kd\varepsilon = d\sigma + \left(\hat{b} + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial P_w}\right)dP_w + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial \varepsilon}d\varepsilon + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial C}dC$$

soit :

$$\left(K - \frac{\partial P_{GFT}}{\partial \varepsilon}\right)d\varepsilon = d\sigma + \left(\hat{b} + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial P_w}\right)dP_w + \frac{\partial P_{GFT}}{\partial C}dC \quad (IV.82)$$

A la lumière de (IV.82), on voit que les coefficients autres que  $\beta_c$  dans (IV.75) dépendent de la pression de gonflement macroscopique  $P_{GFT}$ . Notamment, le module d'incompressibilité est susceptible de varier notablement avec la concentration et la déformation :

$$K_o = K - \frac{\partial P_{GFT}}{\partial \varepsilon} \quad (IV.83)$$

Dans les modèles classiques utilisés pour les argiles gonflantes (Cam-Clay par exemple), on retrouve la dépendance des caractéristiques élastiques avec la déformation. Coussy et al. (1998) expliquent qu'il est possible, dans certains cas, de prendre directement :

$$K_o = -\frac{\partial P_{GFT}}{\partial \varepsilon} \quad (IV.84)$$

## IV.4 Conclusion

Nous avons vu plusieurs aspects du phénomène de gonflement-retrait des argiles, notamment du point de vue sa mise en œuvre dans le comportement mécanique. Certains points n'ont pas été évoqués, tel le « gonflement cristallin » (Seedsman, 1993) lié à l'adsorption de molécules d'eau en surface des feuillets, sous forme par exemple de CHS et CSI expliqués au chapitre II (§II.2.1.c), et les modèles qui en découlent (modèle de Helmholtz, modèle de Stern combinant le précédent et la théorie de la DCD.). Ces aspects ont cependant une influence sur le gonflement.

Parmi les modèles abordés, nous avons pu distinguer deux approches pour la modélisation du comportement des argiles :

- une approche théorique précise, qui utilise des hypothèses à l'échelle microscopique et tente un passage micro-macro ;
- une approche phénoménologique qui tente d'intégrer l'interaction eau-argile sous la forme de contraintes additionnelles  $R - A$ .



De ces deux approches, aucune en fait n'offrait de réelle loi de comportement de matériau gonflant utilisable pour les calculs. Les approches micro-macro en étaient le plus proches, mais se heurtaient à une difficulté : l'absence de loi pour la pression de gonflement. Il est vrai que son évolution, avec la charge des feuillets, la concentration et la distance interfeuillets, est fortement non linéaire.

Notre travail a constitué en la détermination d'une loi pour la pression de gonflement microscopique calculable par la théorie de la DCD. Nous nous sommes efforcés de couvrir une large plage pour trois paramètres importants intervenant :

- la charge surfacique des feuillets,
- la concentration de la solution,
- la distance interfeuillets.

Le gonflement lié à la DCD s'intègre dans l'ensemble des aspects du gonflement qui sont spécifiques aux argiles. Le phénomène de gonflement-retrait inclut aussi, nous l'avons dit, la part de gonflement liée à l'arrivée d'eau dans le matériau, et que Barbour et Fredlund (1989a) appellent « gonflement induit par osmose ». Au chapitre suivant, nous considérons les aspects hydrauliques : l'eau d'une argile est en fait une solution, et nous allons voir que le transfert d'une solution en milieu poreux est aussi un problème ouvert.

# CHAPITRE V PROBLEMATIQUE DU TRANSFERT

## ***V.1 Les transferts possibles***

Dans une expérience de gonflement, les mesures effectuées sur l'échantillon avant et après humidification (ou dessiccation) montrent qu'il y a un gain (respectivement une perte) de masse, prouvant qu'il y a eu transfert hydrique. On est certain du transfert du constituant eau. On l'est moins pour le (ou les) soluté(s). Si l'on utilise une méthode de chargement par imposition d'une pression de vapeur, on sait que les ions en solution dans l'échantillon ne peuvent s'échapper ; par contre, si l'échantillon est mis en contact avec une solution liquide, il est difficile d'estimer si des ions sont échangés entre l'échantillon et la solution extérieure. En d'autres termes, il est difficile de savoir si les argiles permettent ces transferts, si elles agissent comme des membranes semi-perméables ou si la réalité est intermédiaire.

Par ailleurs, une question essentielle à laquelle on aimerait répondre est de savoir qui est le moteur de tel ou tel transfert. Visiblement, le mouvement de l'eau n'est pas provoqué uniquement par un gradient de pression. Il serait bon de pouvoir déterminer l'importance relative des ions en solution, de la température, bref des différents phénomènes — susceptibles d'évoluer dans un sol ou une roche — agissant sur l'écoulement. De même pour le mouvement des ions. Cette question est aujourd'hui toujours ouverte, parce que ces aspects sont difficiles à vérifier expérimentalement et que du point de vue théorique les problèmes qu'elle soulève sont complexes, à la limite de ce qu'on sait traiter en thermodynamique.

Enfin, un objectif important pour nous est de clarifier ces aspects tout en conservant comme variables celles que l'ingénieur utilise. La thermodynamique va nous conduire à utiliser des notions telles que celle de potentiel chimique, mais nous nous efforcerons, au moins à terme, d'aboutir à des formulations en pressions (et température), bien que certains auteurs estiment que le potentiel chimique est une variable préférable à la pression. Il s'agit surtout d'être clair, de manière à savoir ce qu'on mesure lorsqu'on mesure une pression dans les argiles, à quoi correspond une hygrométrie imposée en termes de pressions, ... l'ensemble dans le but ultime de faire des calculs d'ingénieur.

## **V.2 Précisions sur le problème posé**

Dans le cas le plus simple, on peut ne considérer que le cas d'un seul fluide (« l'eau du sol ») dans l'espace interstitiel. Cette solution est constituée d'eau pure et d'ions en solution, et il n'y a aucune raison de penser que ces différents constituants se déplacent à la même vitesse. Prenons le cas d'un tunnel sans revêtement : en paroi, le massif est au contact de l'air ambiant composé d'air sec et de vapeur d'eau ; selon le degré d'humidité, il y a un transfert d'eau entre l'air humide et le massif, mais les ions présents dans le massif ne peuvent pas traverser la paroi qui joue le rôle d'une membrane semi-perméable ; dans ce cas, il est clair que les constituants de l'eau de la roche n'ont pas un mouvement commun. Si l'on souhaite appliquer à notre milieu les principes de la thermodynamique, il faut en toute rigueur tenir compte de chaque constituant dans son mouvement propre, et c'est principalement ce qui pose problème, comme nous allons le voir par la suite.

Précisons maintenant ce que nous étudions. Jusque là, pour expliquer le gonflement, nous avons invoqué les phénomènes électrochimiques à l'échelle microscopique, via principalement des différences de pression de solution entre micropores (espace interfeuilletés) et macropores. A cette échelle, les mouvements d'eau et d'ions sont liés à des gradients de potentiel électrochimiques. Néanmoins, dans les gros pores, le potentiel électrochimique se réduit (sauf en bordure des pores) au potentiel chimique. On peut donc considérer deux échelles : l'échelle microscopique que nous venons d'évoquer, et une échelle macroscopique pour laquelle le VER contient un grand nombre de pores. On imagine alors un phénomène à deux échelles : le premier, au niveau macroscopique pour lequel on peut négliger les phénomènes électriques, et pour lequel les transferts d'eau et d'ions sont liés à des gradients de pression, de concentration et de température, et le second au niveau microscopique (en deçà du VER) où nous supposons les transferts instantanés. Cela s'intègre dans une démarche naturelle qui consiste, pour le VER, à faire l'hypothèse d'équilibre local sans laquelle nous ne pourrions envisager d'utiliser l'instrument thermodynamique. A l'échelle macroscopique, donc, tout se passe comme si le fluide était chimiquement inerte vis-à-vis du solide.

Le choix de modélisation que nous venons d'adopter permet au moins de ne pas confondre les différents problèmes. Celui que nous abordons ici n'a rien à voir avec le gonflement, aussi était-il important de bien préciser notre propos : la difficulté théorique à laquelle nous allons faire face est liée au seul fait du mélange, et s'applique tout aussi bien à n'importe quel milieu poreux dans lequel circule un mélange : mélange eau-sel (saumure) dans le sel, mélange de gaz (par exemple de l'air humide),...et nous laisserons même de côté (pour un temps) le solide pour ne nous intéresser qu'au mélange dans la phase fluide.

Nous trouvons dans la littérature deux manières de traiter thermodynamiquement le problème des milieux poreux saturés par un mélange. La première constitue un prolongement de la thermodynamique des milieux poreux de Biot (1941) par Coussy (1991). Comme nous le verrons, cette approche ne tient pas compte des interactions entre les constituants du mélange, du fait d'une extrapolation rapide du cas d'un fluide simple traversant les pores. La seconde (Jamet 1991) est l'application pure et simple de la théorie des mélanges (Fer 1971, Vidal et al. 1994). Elle n'est utilisable que si l'on peut assimiler le milieu poreux à un fluide.

En terme de résultat, c'est l'inégalité de Clausius-Duhem que nous considérons. Nous allons voir que les formulations données par ces deux approches sont à peine différentes. C'est pourtant cette légère différence qui nous a préoccupés au départ. Finalement, nous avons compris le fond du problème, qui est simple : en présence d'un mélange, lorsque les constituants de la phase fluide ont des vitesses différentes (c'est-à-dire dès qu'intervient la diffusion dans la phase fluide), on ne sait pas appliquer les principes de la thermodynamique. Nous devons donc nous contenter d'une adaptation. La solution que nous proposerons, après avoir analysé les deux méthodes actuelles, en constitue une alternative à notre avis plus correcte.

### **V.3 Difficulté théorique**

Avant que les choses ne soient trop décortiquées, et afin de bien tracer la difficulté au cours des paragraphes qui vont suivre, il est important d'expliquer où intervient cette difficulté. Elle intervient lors de l'écriture du premier principe de la thermodynamique.

Le premier principe de la thermodynamique postule que la variation d'énergie totale d'un système fermé pendant un temps  $dt$  peut se décomposer en deux parties : l'apport de chaleur  $dQ$  et la quantité d'énergie mécanique échangée  $dW$  :

$$dE = dQ + dW . \tag{V.1}$$

En mécanique, on préfère une formulation faisant intervenir les dérivées. Sans plus de précision pour l'instant (le problème du choix de la dérivée est discuté plus avant), nous écrivons que la « dérivée » de l'énergie est égale à la somme du taux de chaleur reçue  $\overset{o}{Q}$  et de la puissance des efforts extérieurs  $P_{\text{ext}}$ .

Laissons pour l'instant de côté le format d'écriture, qui a son importance, et concentrons-nous sur le fond : l'utilisation des deux principes de la thermodynamique a pour but de compléter, par les équations énergétiques, l'ensemble des équations théoriques du mouvement. Dans cette optique, l'écriture des principes n'a d'intérêt que si l'on sait expliciter les termes intervenant ; pour ce qui est du premier principe, il faut donc pouvoir écrire ce que sont la quantité de chaleur reçue et la puissance des efforts extérieurs.

La difficulté réside dans l'écriture de la puissance des efforts extérieurs. Nous détaillerons par la suite la manière de procéder dans chacune des deux méthodes que nous allons exposer, mais nous pouvons donner l'idée du problème. De manière très générale, et en l'absence de phénomènes magnétiques, le terme  $P_{ext}$  se décompose en deux intégrales :

- La première intégrale est une intégrale de volume représentant la puissance développée par les efforts extérieurs massiques (efforts de gravité par exemple), et ne pose pas de problème particulier ;
- La seconde intégrale est une intégrale de surface représentant la puissance des forces de contact à la frontière du volume délimitant le système considéré. L'écriture de cette puissance va dépendre, en chaque point de la surface, de la valeur du tenseur des contraintes en ce point. La difficulté vient du fait que, dans le cas d'un milieu complexe, on ne connaît pas forcément ce tenseur des contraintes.

Pour l'instant, nous avons simplement indiqué où et comment intervient la difficulté, sans en montrer les conséquences. A ce stade, il est difficile d'en dire plus sans rentrer dans le détail des deux méthodes que nous allons exposer. D'abord, parce que ces méthodes sont basées sur des visions différentes du milieu poreux. Ensuite parce qu'à cette difficulté s'ajoute un certain nombre d'hypothèses plus ou moins fortes qui cachent le problème. Par ailleurs, des problèmes de choix d'expression par un seul ou par plusieurs tenseurs de contraintes dans un milieu à plusieurs sont soulevés par les différents auteurs (Fer 1971, Coussy 1991), mais relativement à d'autres préoccupations que nous qualifierons de plus mécaniciennes (par exemple dans le cadre d'une description du milieu poreux comme un milieu continu) ; ils sont donc soulevés au moment de l'écriture des équations mécaniques, puis oubliés. Or nous nous focalisons sur le problème de la diffusion des constituants fluides. C'est donc au moment de l'écriture des principes thermodynamiques qu'il nous a semblé utile d'en parler.

## V.4 Démarche thermodynamique générale

Pour une plus grande clarté, il est utile de préciser le fonctionnement global de la thermodynamique macroscopique. Les systèmes que nous allons considérer sont, grossièrement, des mélanges dont chaque constituant est animé d'un mouvement propre. Ce sont les systèmes ouverts les plus généraux, car, quelle que soit l'échelle considérée (au delà du VER, bien sûr, dans une démarche de type homogénéisation), et quel que soit le domaine (fixe ou mobile) auquel on se rattache, ce domaine verra passer un flux relatif à certains constituants à travers sa frontière. Or, si on sait aujourd'hui exprimer le second principe de la thermodynamique pour des systèmes ouverts, on ne sait pas faire de même, sauf cas particuliers, pour le premier principe. Au final, donc, on ne sait appliquer l'ensemble de ces deux principes de la thermodynamique que pour des systèmes fermés auquel il est impératif, en théorie, de se ramener. Les deux méthodes que nous allons exposer constituent les deux façons de gérer ce problème.

Rappelons que la thermodynamique classique traite de systèmes en équilibre, pour lesquels il est possible de particulariser des sous-systèmes où les différentes propriétés (telles que la température, la pression, la masse volumique ...) sont uniformes. Or, de manière générale, nous avons ici affaire à des milieux continus en mouvement, se trouvant de fait dans des états hors équilibre et dont les propriétés dépendent de la position  $\underline{x}$  et du temps. Cette difficulté est surmontée en faisant l'hypothèse de l'équilibre local qui revient à étendre à ces systèmes, localement, les relations valables à l'équilibre thermodynamique. Prigogine (1999) explique qu'en effet, dans leur immense majorité, les systèmes hors équilibre sont localement proches de l'équilibre et que cette hypothèse est fondée.

Nous supposerons l'absence de phénomènes électromagnétiques, ce qui est a priori faux au niveau microscopique du fait des interactions électriques eau-argile dans les feuillets, mais valable au niveau du VER pour lequel la particule est supposée électriquement neutre. Cette hypothèse est importante car elle permet de simplifier considérablement le problème pour nous concentrer sur le seul fait du mélange. Dans ce cadre d'un milieu continu (hétérogène) électriquement neutre, les variables énergie interne, énergie libre, et entropie sont additives et donc la somme de celles de leurs parties constitutives. Ceci étant vrai, que le milieu soit ou non neutre, pour les autres variables extensives (volume, nombre de moles ou masses...), nous pouvons écrire que toute quantité extensive  $G$  de la matière contenue dans un domaine  $\Omega$  du milieu est donc de l'une des formes équivalentes suivantes :

$$G = \int_{\Omega} g(\underline{x}, t) d\Omega \quad \text{ou} \quad G = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) g_m(\underline{x}, t) d\Omega \quad (\text{V.2})$$

où  $g$  est la densité volumique de  $G$ ,  $g_m$  sa densité massique et  $\rho$  la masse volumique apparente locale.

Le premier principe exprime la conservation de l'énergie de l'ensemble {système + milieu extérieur}, et ce, nous l'avons dit, pour un système fermé, c'est-à-dire un système limité par une surface au travers de laquelle peuvent s'effectuer des échanges énergétiques sous forme de travail mécanique ou de chaleur, mais de constitution fixée. De manière naturelle, pour un milieu continu, le premier principe est exprimé sous la forme d'un bilan de puissances. Si l'on désigne par  $\dot{X}$  le taux de variation, en suivant le système, d'une quantité  $X$  rattachée au système pendant un temps infinitésimal  $dt$ , il vient :

$$\dot{E} = P_{méca} + P_{cal} \quad (\text{V.3})$$

où  $E$  désigne l'énergie totale du système, et  $P_{méca}$  et  $P_{cal}$  sont respectivement les puissances mécanique et calorifique reçues par le système.

L'énergie totale  $E$  est la somme d'une énergie interne  $U$ , « observable » à l'échelle microscopique, et d'une énergie externe dépendant du mouvement macroscopique et observable à cette échelle : c'est l'énergie mécanique, elle-même décomposable en énergies cinétique  $K$  et potentielle  $E_p$  (si elle existe). Ces diverses formes d'énergies propres au système dépendent de son état et sont donc des fonctions d'état.

Souvent, l'énergie potentielle est prise en compte dans l'expression du travail des forces externes, ce que nous ferons, si bien que V.3 peut se réécrire :

$$\dot{U} + \dot{K} = P_{méca} + P_{cal} \quad (\text{V.4})$$

Il convient à ce stade de distinguer la part des actions mécaniques qui se traduisent par une variation d'énergie interne. Selon les cas rencontrés, deux cas se présentent :

- Soit, ce qui peut se faire dans certains cas, on sait formuler ce que vaut  $\dot{U}$ , et on en déduit  $\dot{K}$ , et donc le théorème de l'énergie cinétique, ce qui est accessoire puisque c'est  $\dot{U}$  qui nous intéresse. Par exemple, dans le cas d'un milieu continu simple, on sait que l'énergie interne s'accroît par absorption de chaleur et travail de déformation. Cette démarche est plus intuitive, car elle suppose de savoir à l'avance quelles sont les actions (tant internes qu'externes) qui agissent sur la variation d'énergie interne. Elle est moins naturelle ;
- Soit on sait écrire directement ce que vaut le taux de variation de l'énergie cinétique  $\dot{K}$  (via les équations de la mécanique que l'on a su formuler) ; on en déduit alors  $\dot{U}$ .

A partir de l'expression de  $\dot{U}$ , on en déduit la forme locale de la conservation de l'énergie écrite soit pour la densité volumique d'énergie interne, soit pour sa (ou ses) densité(s) massique(s), le choix de l'une ou l'autre des formulations dépendant fortement de la vision qu'on a du milieu.

La suite de la démarche thermodynamique consiste à écrire le second principe. Nous ne pouvons pas le détailler ici car il est formulé de deux façons différentes dans les deux méthodes : ceci est dû au fait que, dans l'un des cas (dans la méthode de Coussy 1991), on a réellement affaire à un système fermé, tandis que le système reste ouvert dans l'autre cas (en théorie des mélanges). Nous l'exposerons au cas par cas.

Le second principe, sous sa forme actuelle (voir Prigogine & al., 1999), postule l'existence d'une fonction  $S$ , appelée entropie, qui est une fonction d'état comme  $U$ , et qui est aussi extensive (additive). De plus, elle est telle que la variation d'entropie entre deux instants est la somme de deux termes :

- Un terme qui est la part de variation de l'entropie due aux échanges d'énergie et de matière avec l'extérieur (uniquement d'énergie si le système est vraiment fermé),
- Un terme représentant la variation d'entropie due aux processus irréversibles internes au système, et qui est toujours positif.

Il ne faut pas se méprendre : « irréversibles » signifie en fait « spontanés ». Le fait que cette génération interne d'entropie soit positive va imposer un certain nombre de conditions sur la transformation ; ainsi, le second principe va permettre d'indiquer, parmi les transformations possibles données par le premier principe, lesquelles sont effectivement réalisables. Il aboutira à une inégalité (souvent appelée inégalité de Clausius-Duhem) qui, pour ce qui nous concerne, conditionnera le sens des flux de masse des différents constituants (et du flux de chaleur).

## **V.5 Cinématique et outils mathématiques**

Considérons un volume  $\Omega(t)$  de milieu poreux, à l'échelle macroscopique. A l'échelle inférieure, nous avons supposé être au-delà du VER ; ainsi, dans un volume géométrique  $d\Omega(t)$ , nous avons un mélange de constituants  $\alpha$  dont les grandeurs sont supposées continues et occupant chacun une fraction de volume  $\phi^\alpha d\Omega(t)$ .



Chaque constituant  $\alpha$  peut être défini, d'un point de vue purement cinématique, indépendamment des autres. On note  $\rho^\alpha$  sa masse volumique (à l'état pur),  $\underline{v}^\alpha$  sa vitesse, et on peut définir une dérivée de transport relativement à ce constituant :

$$\frac{d^\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}^\alpha \cdot \underline{grad} \quad (\text{V.5})$$

Nous définissons par ailleurs, pour chaque constituant  $\alpha$ , sa masse volumique apparente  $\rho_a^\alpha$  comme le rapport de la masse de constituant contenu dans  $d\Omega(t)$  rapportée au volume total  $d\Omega(t)$  occupé par le mélange. C'est cette masse volumique apparente qui intervient naturellement dans les équations de conservation dans un mélange. Elle est reliée à la masse volumique vraie par :

$$\rho_a^\alpha = \rho^\alpha \cdot \phi^\alpha \quad (\text{V.6})$$

C'est à partir de l'équation de continuité, qui traduit la conservation de la masse, que l'on va établir l'ensemble des équations qui régissent le mouvement du milieu. On aura, pour le constituant  $\alpha$  :

$$\frac{d^\alpha}{dt} (\rho_a^\alpha d\Omega(t)) = 0 \quad (\text{V.7})$$

Il est utile de posséder les outils mathématiques de calcul de la variation d'une intégrale de volume. Considérons une quantité extensive  $G$  de la matière contenue dans un domaine  $\Omega(t)$  de frontière  $\Sigma(t)$ . Lorsque  $G$  est représentée par sa densité volumique  $g$ , on a la formule classique de la dérivée particulière un suivant un des milieux continus  $\alpha$  :

$$\frac{d^\alpha}{dt} G = \frac{d^\alpha}{dt} \int_{\Omega(t)} g \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial g}{\partial t} \, d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} g \underline{v}^\alpha \cdot \underline{n} \, d\Sigma(t) = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \underline{v}^\alpha) \right] \, d\Omega(t) \quad (\text{V.8})$$

Lorsque  $G$  est rattachée à un constituant  $\alpha$  particulier, elle peut être exprimée à l'aide de sa densité massique  $g_m^\alpha$ . On a alors :

$$G = \int_{\Omega} \rho^\alpha(\underline{x}, t) \phi^\alpha \cdot g_m^\alpha(\underline{x}, t) \, d\Omega \quad \text{ou} \quad G = \int_{\Omega} \rho_a^\alpha(\underline{x}, t) g_m^\alpha(\underline{x}, t) \, d\Omega \quad , \quad (\text{V.9})$$

et la dérivée particulière de l'intégrale  $G$  en suivant le constituant  $\alpha$  s'écrit, en vertu de (V.7) :

$$\frac{d^\alpha}{dt} G = \frac{d^\alpha}{dt} \int_{\Omega} \rho_a^\alpha(\underline{x}, t) g_m^\alpha(\underline{x}, t) \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{d^\alpha}{dt} (g_m^\alpha) \rho_a^\alpha \, d\Omega \quad (\text{V.10})$$

En particulier, si  $G$  est la masse de constituant  $\alpha$  dans le volume  $\Omega(t)$  de milieu poreux, sa densité volumique est la masse volumique apparente  $\rho_a^\alpha$ . En appliquant la formule (V.8), on obtient sous forme locale l'équation habituelle de conservation de la masse de constituant  $\alpha$ , qu'on peut obtenir aussi directement à partir de (V.7) :

$$\frac{\partial \rho_a^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a^\alpha \underline{v}^\alpha) = 0 \quad (\text{V.11})$$

## **V.6 Première approche : la « thermodynamique des milieux poreux »**

### **V.6.1 Présentation**

Cette approche est celle de Coussy (1991) qui a fourni à l'approche énergétique de Biot (1941) un cadre cohérent. Il serait bien trop long de tout reprendre ici, et l'on pourra se reporter à son ouvrage pour plus de détails. Nous allons tenter d'expliquer cette démarche en décrivant les résultats de l'auteur et en expliquant comment la difficulté liée aux mélanges n'a pas été résolue.

Nous devons préciser que les équations qui suivent n'ont pas toutes été extraites d'un document de l'auteur, mais déduites de son exposé. Dans Coussy (1991), l'auteur suit cette démarche dans le cas d'un seul fluide saturant, supposé pur. Il l'applique ensuite pour un mélange, et ne soulève pas la difficulté qui se pose dans ce cas. Pour ne pas écrire trop d'équations (il y en a déjà beaucoup), nous appliquons strictement la démarche au cas d'un mélange en phase fluide, comme cela a certainement été pensé par Coussy, vu ses résultats. Nous reviendrons sur cette remarque en section V.6.7.

### **V.6.2 Obtention d'un système fermé**

De manière à pouvoir écrire les différentes lois de conservation dans un milieu poreux, Coussy (1991) a inventé une dérivée qui permet de calculer entre deux instants successifs la variation d'une quantité physique extensive attachée à toute la matière contenue dans le domaine considéré. Il l'a appelée *dérivée matérielle*.

L'idée est la suivante : dans le cas d'un milieu continu classique (monophasique), la dérivée particulière était l'outil adéquat pour le calcul de cette variation ; pour un milieu poreux, il fallait tenir compte du fait que le squelette et les fluides ont des vitesses différentes. La dérivée matérielle permet cela en sommant les dérivées particulières de chaque espèce dans son mouvement.

Rappelons comment est définie cette dérivée matérielle. Considérons pour cela l'intégrale de volume  $I$  d'une grandeur extensive  $G$  de densité volumique  $g$ . En un point géométrique  $\underline{x}$  du volume  $\Omega(t)$ , à l'instant  $t$ , coïncident en même temps des particules de chaque espèce  $\alpha$ . On peut alors dire que la valeur  $g$  de cette grandeur  $G$  est, de par la nature extensive de  $G$ , la somme de contributions  $g^\alpha$  venant de chaque espèce (chaque valeur  $g^\alpha$  peut être comprise comme étant celle que prendrait la densité de grandeur  $g$  si on considérait l'espèce  $\alpha$  toute seule dans le volume  $d\Omega(t)$ , en supposant qu'elle reste dans le même état que dans le mélange) :

$$g(\underline{x}, t) = \sum_{\alpha} g^{\alpha}(\underline{x}, t) \quad (\text{V.12})$$

La quantité  $I$  peut alors s'écrire sous la forme d'une somme :

$$I = \sum I^{\alpha} \text{ avec } I^{\alpha} = \int_{\Omega} g^{\alpha}(\underline{x}, t) d\Omega$$

En raison du caractère extensif de  $G$ , la variation de  $I$  n'est autre que la somme des variations des quantités  $I^{\alpha}$  calculées en suivant chaque constituant séparément. C'est, par définition, la dérivée matérielle de  $I$ , notée  $\frac{D}{Dt}(I)$  :

$$\frac{D}{Dt}(I) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} g(\underline{x}, t) d\Omega(t) = \sum_{\alpha} \frac{d^{\alpha}}{dt} \int_{\Omega(t)} g^{\alpha}(\underline{x}, t) d\Omega(t) \quad (\text{V.13})$$

Si l'on utilise les densités massiques (plus pratiques pour une comparaison des méthodes), en notant  $g_m^{\alpha}$  la densité de  $G$  par unité de masse de constituant  $\alpha$ , on aura de manière analogue :

$$I = \sum I^{\alpha} \text{ avec } I^{\alpha} = \int_{\Omega(t)} \rho_a^{\alpha}(\underline{x}, t) g_m^{\alpha}(\underline{x}, t) d\Omega,$$

et

$$\frac{D}{Dt}(I) = \sum \frac{d^{\alpha}}{dt} I^{\alpha} = \sum_{\alpha} \int_{\Omega(t)} \rho_a^{\alpha} \cdot \frac{d^{\alpha}}{dt} (g_m^{\alpha}) d\Omega(t). \quad (\text{V.14})$$

Pour l'application du premier principe de la thermodynamique, cette dérivée matérielle est particulièrement adaptée puisqu'elle permet, entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t+dt$ , de suivre toute la matière contenue à l'instant  $t$  dans un domaine donné ; ainsi cela permet, pendant cet intervalle de temps infinitésimal, de considérer un système (localement) fermé.

### V.6.3 Formulation rattachée au squelette

Si la dérivée matérielle est parfaite pour l'écriture des équations de conservation, il n'en reste pas moins que l'auteur s'intéresse avant tout aux déformations du squelette. Aussi privilégie-t-il dans la description la cinématique du squelette, et les mouvements des fluides interstitiels sont définis par rapport à celui du squelette. Nous notons  $\underline{v}^s$  la vitesse du squelette solide, le volume géométrique lui étant alors explicitement rattaché.

En notant  $\underline{w}^\alpha = \underline{v}^\alpha - \underline{v}^s$  les vitesses relatives des constituants autres que le squelette, et en utilisant les expressions (V.8) et (V.10), les formules (V.13) et (V.14) peuvent s'écrire respectivement sous les formes (V.15) et (V.16) :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} g \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial g}{\partial t} \, d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} g \cdot \underline{v}^s \cdot \underline{n} \, d\Sigma(t) + \int_{\Sigma(t)} \sum_{\alpha \neq s} g^\alpha \underline{w}^\alpha \cdot \underline{n} \, d\Sigma(t) \quad (\text{V.15})$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} g \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \cdot \underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_m^\alpha g_m^\alpha \underline{w}^\alpha) \right] d\Omega(t) \quad (\text{V.16})$$

Par ailleurs, une autre formulation de l'équation (V.16) est :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} g \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{d^s g}{dt} + g \cdot \text{div}(\underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_m^\alpha g_m^\alpha \underline{w}^\alpha) \right] d\Omega(t) \quad (\text{V.17})$$

### V.6.4 Démarche thermodynamique

A ce système localement fermé, l'auteur applique, successivement, le premier puis le second principe de la thermodynamique, après avoir précisé l'expression de la puissance calorifique (ou taux de chaleur reçue).

L'auteur fait l'hypothèse que la chaleur est transmise uniquement par conduction. Par ailleurs, il peut exister des sources de chaleur extérieures au système et réparties dans le volume. Le taux de chaleur reçue s'écrit alors sous la forme :

$$Q^\circ = - \int_{\Sigma(t)} \underline{q} \cdot \underline{n} \, d\Sigma(t) + \int_{\Omega(t)} r \, d\Omega(t), \quad (\text{V.18})$$

où l'on a supposé que la chaleur reçue par contact (conduction) peut être représentée par un champ de vecteur courant de chaleur  $\underline{q}$ .

Par ailleurs, il est clair que la dérivée matérielle correspond au taux de variation, en suivant le système, d'une quantité donnée, taux que nous avons défini à la section V.4. C'est donc la dérivée matérielle qu'il faut utiliser dans l'expression du **premier principe** qui s'écrit alors :

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D(U + K)}{Dt} = P_{\text{ext}} + Q^\circ \quad (\text{V.19})$$

Le système étant fermé, le **second principe** dit que la dérivée matérielle de l'entropie  $S$  contenue dans  $\Omega(t)$  vérifie l'inégalité :

$$\frac{DS}{Dt} \geq - \int_{\Sigma(t)} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} \, d\Sigma(t) + \int_{\Omega(t)} \frac{r}{T} \, d\Omega(t) \quad (\text{V.20})$$

où le second membre représente le taux d'entropie fourni par l'extérieur à  $\Omega(t)$ .

### V.6.5 Intervention de la mécanique pour le calcul de $P_{\text{ext}}$

Il est nécessaire, pour la suite, de se donner une représentation des efforts dans le milieu poreux, de manière à pouvoir relier la puissance des efforts exercés  $P_{\text{ext}}$  et la dérivée de l'énergie cinétique. Une démarche naturelle consiste à considérer le milieu poreux comme un tout, et à écrire les équations de la mécanique (équations de conservation de la quantité de mouvement ou bien, sous forme locale, équation de la dynamique) pour une particule de milieu poreux en tant que milieu continu.

Dans cette démarche, l'auteur considère des efforts extérieurs de deux types : des forces de contrainte s'exerçant à la frontière  $\Sigma(t)$  d'une parcelle  $\Omega(t)$ , représentées par une densité surfacique  $\underline{T}(x, t, \underline{n})$  dépendant de la normale  $\underline{n}$  extérieure à  $\Sigma(t)$ , et des forces de volume. Ces efforts

s'appliquent à toute la matière, tant solide que fluide, contenue dans  $\Omega(t)$ . Un résultat classique connu sous le nom du « lemme du tétraèdre » montre l'existence d'un tenseur d'ordre deux, noté  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ , tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n}) \text{ sur } \Sigma(t) \quad (\text{V.21})$$

et qui permet de rendre compte des efforts intérieurs dans l'ensemble du milieu poreux ; pour cette raison,  $\underline{\underline{\sigma}}$  est appelé *tenseur des contraintes totales*.

Concernant les forces de volume, ce sont des forces à distance proportionnelles à la masse ; dès lors, il faut a priori tenir compte de la partition du milieu selon chacun de ses constituants. Ceci est d'autant plus vrai que, pour l'écriture des équations de la mécanique, les cinématiques interviennent et que chaque constituant a un mouvement propre. Les forces de volumes sont donc données par leurs densités massiques  $\underline{F}_m^\alpha$ . On écrit les accélérations  $\underline{a}^\alpha$  des constituants :

$$\underline{a}^\alpha = \frac{d^\alpha}{dt}(\underline{v}^\alpha) = \frac{\partial \underline{v}^\alpha}{\partial t} + \underline{v}^\alpha \cdot \underline{\text{grad}}(\underline{v}^\alpha) \quad (\text{V.22})$$

L'équation de la dynamique pour le milieu poreux s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \sum \rho_a^\alpha (\underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha) = 0 \quad (\text{V.23})$$

En multipliant l'équation (V.23) par un champ de vitesses  $\underline{V}^*$ , réel ou virtuel, et en l'intégrant sur le volume  $\Omega(t)$ , on obtient ce qu'on qualifie de Principe des Travaux Virtuels (PTV) :

$$\int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V}^*) d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \left( \sum \rho_a^\alpha \underline{a}^\alpha \right) \cdot \underline{V}^* d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \left( \sum \rho_a^\alpha \underline{F}_m^\alpha \right) \cdot \underline{V}^* d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} \underline{T} \cdot \underline{V}^* d\Sigma(t) \quad (\text{V.24})$$

Dans l'équation (V.24), on voit en particulier apparaître au second membre la puissance des efforts extérieurs  $P_{\text{ext}}(\underline{V}^*)$  dans le mouvement du milieu poreux dans son ensemble à une vitesse  $\underline{V}^*$ .

On voit bien que pour écrire ce que vaut réellement la puissance des efforts extérieurs  $P_{\text{ext}}$  dans le mouvement réel, l'expression  $P_{\text{ext}}(\underline{V}^*)$  n'est pas la bonne car elle suggère un mouvement commun de l'ensemble des constituants à une vitesse  $\underline{V}^*$ , ce qui n'est précisément pas le cas. Il faut, par linéarité,

rajouter en plus les puissances des efforts extérieurs  $P_{ext}^\alpha(\underline{v}^\alpha - \underline{V}^*)$  développées dans le mouvement relatif de chaque constituant par rapport au mouvement d'ensemble à la vitesse  $\underline{V}^*$ .

Pour le calcul de  $P_{ext}^\alpha(\underline{v}^\alpha - \underline{V}^*)$ , la partition des efforts extérieurs que nous venons de donner se révèle encore insuffisante puisque le vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n})$  représente les efforts de contact du milieu dans son ensemble. L'auteur est donc conduit à se donner une représentation des efforts sur la frontière faisant apparaître ceux s'exerçant sur chaque constituant. L'auteur introduit, de manière équivalente, une représentation des efforts intérieurs propres à chacun des constituants (vus comme des milieux continus) de sorte que le tenseur des contraintes totales soit la moyenne des tenseurs de contraintes de chaque constituant. Ainsi, en notant  $\underline{\underline{\sigma}}^\alpha(\underline{x}, t)$  le tenseur des contraintes dans le milieu  $\alpha$ , on pourra écrire :

- Dans le volume :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum \phi^\alpha \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \quad (\text{V.25})$$

- A la surface, de normale extérieure  $\underline{n}$  :

$$\underline{T} = \sum \underline{T}^\alpha \quad \text{avec} \quad \underline{T}^\alpha = \phi^\alpha \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \cdot \underline{n} \quad (\text{V.26})$$

On peut maintenant écrire complètement la puissance des efforts extérieurs  $P_{ext}$ . Choissant comme mouvement « commun » le mouvement du squelette ( $\underline{V}^* = \underline{v}^s$ ), elle s'écrit :

$$P_{ext} = P_{ext}(\underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} P_{ext}(\underline{w}^\alpha) \quad (\text{V.27})$$

où, pour chaque constituant  $\alpha$  différent du solide,

$$\begin{aligned} P_{ext}^\alpha(\underline{w}^\alpha) &= \int_{\Omega(t)} \rho_a^\alpha \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} \underline{T}^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha d\Sigma(t) \\ &= \int_{\Omega(t)} [\rho_a^\alpha \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha + \text{div}(\phi^\alpha \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha)] d\Omega(t). \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

Il vient, en utilisant (V.24) :

$$\begin{aligned} P_{ext} &= \int_{\Omega(t)} [\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}^s) + (\sum \rho_a^\alpha \underline{a}^\alpha) \cdot \underline{v}^s] d\Omega(t) \\ &\quad + \sum_{\alpha \neq s} \int_{\Omega(t)} [\rho_a^\alpha \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha + \text{div}(\phi^\alpha \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha)] d\Omega(t) \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

## V.6.6 Application des deux principes thermodynamiques

De par leur caractère extensif, les énergies interne et cinétique de la matière contenue dans  $\Omega(t)$  peuvent être écrites en utilisant leurs partitions selon chaque constituant.

L'énergie interne s'écrit :

$$U = \int_{\Omega(t)} u \, d\Omega(t) = \sum \int_{\Omega(t)} \rho_a^\alpha u_m^\alpha \, d\Omega \quad (\text{V.30})$$

où chaque  $u_m^\alpha$  désigne la densité d'énergie interne par unité de masse de constituant  $\alpha$ , et  $u = \sum \rho_a^\alpha u_m^\alpha$  la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux.

Utilisant la forme finale (équation V.17) de la dérivée matérielle d'une intégrale de volume, on obtient immédiatement celle de l'énergie interne :

$$\frac{DU}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u \underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_a^\alpha u_m^\alpha \underline{w}^\alpha) \right] d\Omega(t) \quad (\text{V.31})$$

$$\frac{DU}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{d^s u}{dt} + u \cdot \text{div}(\underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_a^\alpha u_m^\alpha \underline{w}^\alpha) \right] d\Omega(t) \quad (\text{V.32})$$

L'énergie cinétique vaut quant à elle :

$$K = \sum \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_a^\alpha \underline{v}^{\alpha 2} \, d\Omega, \quad (\text{V.33})$$

et il est facile d'établir que sa dérivée matérielle est donnée par :

$$\frac{DK}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left( \sum \rho_a^\alpha \underline{a}^\alpha \right) \underline{v}^s \, d\Omega(t) + \sum_{\alpha \neq s} \int_{\Omega(t)} \rho_a^\alpha \underline{a}^\alpha \underline{w}^\alpha \, d\Omega(t) \quad (\text{V.34})$$



### V.6.6.a Premier principe

Les expressions (V.29) de  $P_{\text{ext}}$ , (V.18) de  $Q^\circ$ , et celles (V.32) et (V.34) des dérivées matérielles des énergies internes et cinétique étant données, on applique le premier principe (V.19). On obtient, écrit directement sous forme locale (et eulérienne) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u \underline{v}^s) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} [\rho_a^\alpha (\underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha) \cdot \underline{w}^\alpha + \text{div}(\phi^\alpha \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha - \rho_a^\alpha u_m^\alpha \underline{w}^\alpha)] - \text{div} \underline{q} + r \quad (\text{V.35})$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{d^s u}{dt} + u \cdot \text{div}(\underline{v}^s) &= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}^s) \\ &+ \sum_{\alpha \neq s} [\rho_a^\alpha (\underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha) \cdot \underline{w}^\alpha + \text{div}(\phi^\alpha \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha - \rho_a^\alpha u_m^\alpha \underline{w}^\alpha)] - \text{div} \underline{q} + r \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

### V.6.6.b Second principe

Pour le second principe, on donne la forme de l'entropie  $S$  contenue dans  $\Omega(t)$  qui, comme  $U$ , est additive :

$$S = \int_{\Omega(t)} s \, d\Omega(t) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega(t)} \rho_a^\alpha s_m^\alpha \, d\Omega \quad (\text{V.37})$$

où chaque  $s_m^\alpha$  désigne l'entropie massique du constituant  $\alpha$ , et  $s = \sum \rho_a^\alpha s_m^\alpha$  la densité volumique d'entropie du milieu poreux. On a également, grâce à l'équation V.16 :

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(s \underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_a^\alpha s_m^\alpha \underline{w}^\alpha) \right] d\Omega(t). \quad (\text{V.38})$$

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{d^s s}{dt} + s \cdot \text{div}(\underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_a^\alpha s_m^\alpha \underline{w}^\alpha) \right] d\Omega(t). \quad (\text{V.39})$$

L'application du second principe (équation V.20) conduit sous forme locale à :

$$\frac{d^s s}{dt} + s \cdot \text{div}(\underline{v}^s) + \sum_{\alpha \neq s} \text{div}(\rho_a^\alpha s_m^\alpha \underline{w}^\alpha) + \text{div}\left(\frac{\underline{q}}{T}\right) - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (\text{V.40})$$

L'identité  $\text{div}\left(\frac{\underline{q}}{T}\right) = \frac{1}{T} \text{div}(\underline{q}) + \underline{q} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{T}\right)$ , et l'expression de  $\text{div} \underline{q} - r$  donnée dans (V.35)

permettent de réécrire, en multipliant l'inégalité par T positive :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}}(\underline{v}^s) + T \frac{d^s s}{dt} - \frac{d^s u}{dt} + (Ts - u) \cdot \text{div}(\underline{v}^s) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} T \\ + \sum_{\alpha \neq s} [ \rho_a^\alpha (\underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha) \cdot \underline{w}^\alpha + T \text{div}(\rho_a^\alpha s_m^\alpha \underline{w}^\alpha) + \text{div}(\phi^\alpha \underline{\sigma}^\alpha \cdot \underline{w}^\alpha - \rho_a^\alpha u_m^\alpha \underline{w}^\alpha) ] \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

### V.6.7 Inégalité de Clausius-Duhem

Pour comprendre la suite, il faut savoir que l'auteur veut aboutir à l'inégalité de Clausius-Duhem dans laquelle va apparaître un certain nombre de termes communément appelés *dissipations* qui représentent (au facteur T près) les taux de génération d'entropie liés à chaque aspect du comportement :

- Une dissipation dite « intrinsèque »  $\mathcal{D}1$ , qui provient du « travail non compensé » et traduit les irréversibilités locales du matériau vu comme un tout ;
- Des dissipations qui proviennent de la diffusion des constituants d'une part, de la propagation de la chaleur d'autre part, et qui traduisent des irréversibilités globales. Nous les nommons respectivement « dissipation chimique »  $\mathcal{D}2$  et « dissipation thermique »  $\mathcal{D}3$ .

Concernant la dissipation intrinsèque, il faut normalement passer à une formulation lagrangienne pour pouvoir l'identifier et l'exploiter pleinement. Tel n'est pas notre but et nous indiquerons directement quels termes lui correspondent. Par ailleurs, la dissipation thermique est facilement identifiable. Il reste la dissipation chimique, pour l'écriture de laquelle l'auteur fait trois hypothèses, que nous allons discuter.

Première hypothèse de Coussy :

Coussy admet que le tenseur des contraintes dans les fluides sont isotropes, ce qui revient à négliger les phénomènes de viscosité et les interactions entre les fluides et la matrice solide. Concernant les argiles, ces interactions interviennent à l'échelle des feuilletts, bien en deçà de l'échelle à laquelle on se place. Quant à la viscosité, elle peut raisonnablement être négligée étant donné les vitesses très lentes d'écoulement auxquelles on peut s'attendre. Les contraintes dans les fluides se résument alors à des pressions :

$$(HC1) : \quad \underline{\underline{\sigma}}^\alpha = -p^\alpha \underline{\underline{1}} \quad (\text{pour } \alpha \neq s) \quad (V.42)$$

Introduisant par ailleurs le vecteur *courant relatif de masse de constituant*  $\alpha$  :

$$\underline{M}^\alpha = \rho_a^\alpha \underline{w}^\alpha = \rho^\alpha \phi^\alpha \underline{w}^\alpha \quad , \quad (V.43)$$

l'hypothèse (HC1) permet de faire apparaître les pressions  $p^\alpha$  dans l'expression (V.41) qui devient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}^s) + T \frac{d^s s}{dt} - \frac{d^s u}{dt} + (Ts - u) \cdot \text{div}(\underline{v}^s) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\nabla} T \\ + \sum_{\alpha \neq s} \left\{ \left( \underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha \right) \cdot \underline{M}^\alpha + T \text{div} \left( s_m^\alpha \underline{J}^\alpha \right) - \text{div} \left[ \left( \frac{p^\alpha}{\rho^\alpha} + u_m^\alpha \right) \cdot \underline{M}^\alpha \right] \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (V.44)$$

Le postulat de l'état local permet à l'auteur d'identifier chaque pression  $p^\alpha$  à la pression thermodynamique du constituant  $\alpha$ . Cela lui permet alors d'introduire le potentiel chimique de chaque constituant (c'est-à-dire son enthalpie libre massique) :

$$\mu^\alpha = u_m^\alpha + \frac{p^\alpha}{\rho^\alpha} - Ts_m^\alpha. \quad (V.45)$$

Introduisant aussi l'énergie libre volumique du milieu poreux dans son ensemble :

$$f = u - Ts \quad , \quad (V.46)$$

on obtient finalement l'inégalité recherchée :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}^s) - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s f}{dt} - f \cdot \text{div}(\underline{v}^s) - \sum_{\alpha \neq s} \mu^\alpha \text{div}(\underline{M}^\alpha) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\nabla} T \\ + \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha - \underline{\nabla} \mu^\alpha - s_m^\alpha \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{M}^\alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (V.47)$$

Dans cette expression la dissipation  $\mathcal{D}2$  s'identifie à :

$$\mathcal{D}2 = \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha - \nabla \mu^\alpha - s_m^\alpha \nabla T \right) \cdot \underline{M}^\alpha \quad (\text{V.48})$$

Deuxième hypothèse de Coussy :

L'auteur fait de plus l'hypothèse que chaque constituant  $\alpha$  dans la phase fluide vérifie les équations d'état :

$$(\mathcal{HC}2) : \quad \mu^\alpha = \mu^\alpha(p^\alpha, T) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \mu^\alpha}{\partial p^\alpha} = \frac{1}{\rho^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu^\alpha}{\partial T} = -s_m^\alpha. \quad (\text{V.49})$$

Il aboutit ainsi à sa formulation de la dissipation  $\mathcal{D}2$ , que nous ne retiendrons pas mais qui est à la fois plus simple et plus parlante au mécanicien car elle fait intervenir les pressions au lieu du potentiel chimique :

$$\mathcal{D}2 = \sum_{\alpha \neq s} \left[ \rho^\alpha \left( \underline{F}_m^\alpha - \underline{a}^\alpha \right) - \nabla p^\alpha \right] \cdot \phi^\alpha \underline{w}^\alpha \quad (\text{V.50})$$

L'hypothèse ( $\mathcal{HC}2$ ) ne convient pas pour un mélange : elle suggère que chaque constituant est complètement indépendant des autres, ce qui n'est pas le cas en réalité ; en effet, dans un mélange, le potentiel chimique d'un constituant, c'est-à-dire d'une espèce donnée dans une phase (liquide ou gazeuse), dépend de la pression de l'ensemble du mélange dans la phase et non de sa pression partielle, de la température, mais aussi et surtout de la fraction massique des autres constituants.

Troisième hypothèse de Coussy :

Cette hypothèse est inhérente à la démarche suivie par l'auteur. Nous avons écrit ci avant un ensemble d'équations pour le cas d'un mélange au sein même de la phase fluide. **En réalité, l'auteur suit cette démarche dans le cas d'un seul fluide saturant**, supposé pur ; puis il étend rapidement ses résultats au cas de plusieurs phases fluides, et enfin présente le cas d'un mélange en phase fluide pour lequel il introduit un mouvement moyen du mélange, et un mouvement relatif des constituants (fluides) par rapport à ce mouvement moyen (une diffusion en phase fluide) décrit par une loi de Fick. Ce faisant, il fait implicitement l'hypothèse ( $\mathcal{HC}3$ ) que les pressions  $p^\alpha$ , qui correspondent, par leur définition précédente ( $\mathcal{HC}1$ ) et la partition (équation V.25) du tenseur des contraintes, à des pressions au sein du mélange fluide dans les pores (soit, au facteur  $\frac{\phi^\alpha}{1-\phi^s}$  près, des pressions partielles), sont

aussi les pressions des constituants  $\alpha$  lorsqu'ils sortent du mélange. **Tel n'est a priori le cas que si l'on suppose que le mélange est idéal.**

En toute rigueur, on devrait, lors de l'écriture des termes la puissance des efforts extérieurs, considérer les flux possibles des constituants fluides purs, mélangés deux à deux, trois à trois ... et ainsi de suite jusqu'au nombre total de constituants en phase fluide, avec à chaque fois une pression correspondante. Ceci dit, on comprend bien que cela devient vite inextricable, d'autant plus qu'on ne sait pas calculer la pression d'un mélange dans un volume en fonction des pressions qu'aurait chaque constituant s'il était seul dans ce même volume, dès lors que ces constituants ont des interactions.

Les trois hypothèses précédentes se rejoignent pour une seule et même conclusion : ce modèle permet de traiter les cas de fluides non miscibles dans les pores ou bien les cas de mélanges de gaz, dans l'hypothèse limite des gaz parfaits. Dans le cas de mélanges stricts, dont on ne peut faire abstraction dans les argiles puisque leurs propriétés en dépendent, jusqu'à leur cohésion, le modèle n'est pas pleinement satisfaisant. Coussy et al. (1998c) affirment avoir étendu le cadre de la thermodynamique des milieux poreux au cas des mélanges non idéaux dans Dormieux et al. (1995), mais dans leur cas, le caractère non-idéal de la solution est lié à l'interaction avec le solide, à travers le coefficient  $\eta$  donné par (IV.16) ; en fait, au niveau thermodynamique, ils ne semblent pas modifier leurs hypothèses en ce qui concerne l'interaction des fluides.

## ***V.7 Deuxième approche : la théorie des mélanges***

Cette théorie, dont l'applicabilité à un très grand nombre de domaines de la physique et de la chimie est largement reconnue (voir Prigogine & al., 1999), est principalement axée sur les fluides. Certains auteurs (Jamet 1991, Fargue 2001) la considèrent comme valable pour les milieux poreux tels que, justement, les argiles, dont les pores sont si fins que ces milieux poreux sont assimilables à des solutions. Fargue (2001) va jusqu'à affirmer que la vision de Coussy (1991), indépendamment du type de fluide interstitiel, n'est valable que si les pores sont suffisamment gros. Nous n'allons pas entrer dans ce débat.

Nous allons présenter cette théorie beaucoup plus rapidement que la précédente, d'abord parce qu'un certain nombre d'outils mathématiques a déjà été défini, et ensuite parce que, en dehors de

certain points fondamentaux que nous soulignerons, le processus est souvent le même. Puis nous expliquerons pourquoi cette approche n'est sans doute pas valable pour les solides.

Au niveau des équations, nous ne particularisons plus un constituant : ce qui était précédemment le solide redevient ici un constituant comme les autres.

### V.7.1 Démarche thermodynamique

Cette théorie est, répétons-le, dédiée aux fluides. C'est important car toute la démarche en découle :

- Bien qu'il s'agisse d'un mélange, les constituants sont intimement liés au niveau le plus fin auquel on peut se placer pour pouvoir adopter une description continue, et forment un ensemble cohérent semblable à un milieu continu simple. Il est donc justifié de vouloir appliquer les principes de la thermodynamique à un tel milieu de la même façon que pour un milieu continu. Cela va conduire à la notion de vitesse barycentrique, vitesse d'ensemble du mélange, autour de laquelle est construite tout le raisonnement.
- Par ailleurs, pour un fluide, on a pour habitude d'écrire, à la place du second principe de la thermodynamique, une autre équation ; elle peut revêtir deux formes différentes, mais nous présenterons la plus courante, souvent appelée *relation de Gibbs* ou *équation fondamentale*. Elle est une combinaison des deux principes de la thermodynamique, mais surtout elle est une conséquence de l'hypothèse d'équilibre local. Elle permet, et sans doute est-ce une des raisons pour lesquelles cette vision est très utilisée, de formuler directement localement ce que vaut la variation d'entropie. Puis, par une simple intégration par parties sur un volume, on obtient d'une part une intégrale de surface correspondant au flux d'entropie, soit encore à la variation d'entropie due aux échanges avec l'extérieur, et d'autre part une intégrale de volume provenant des processus irréversibles internes.

### V.7.2 Vitesse barycentrique et extension du premier principe de la thermodynamique

Décrivons le problème posé. On a un mélange hétérogène qu'on veut décrire comme un milieu continu. Dans le cas d'un milieu continu simple, on admet généralement qu'en suivant un domaine matériel, aussi petit soit-il du moment qu'on puisse y considérer les variables comme continues, on a un système fermé auquel on sait appliquer les principes thermodynamiques. Il suffit pour cela de suivre le mouvement du fluide, et on utilise les dérivées particulières pour exprimer cela.

Dans le cas du mélange, on est face à un milieu localement ouvert pour lequel on ne sait pas écrire le premier principe. Et cela quel que soit le constituant auquel on se rattache. Les initiateurs de cette théorie (probablement de Groot & Mazur, 1961, cités par Fer, 1971) ont alors cherché un mouvement qui permettrait de dire que le système se comporte comme un système fermé, tout en conservant les dérivées particulières, si pratiques.

L'équation de conservation de la masse de chaque constituant, lorsqu'il n'y a pas de réaction chimique, a été donnée par l'équation V.11 :

$$\frac{\partial \rho_a^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho_a^\alpha \underline{v}^\alpha) = 0. \quad (\text{V.51})$$

On note alors

$$\rho = \sum \rho_a^\alpha \quad (\text{V.52})$$

la masse volumique du mélange, et on définit la vitesse barycentrique  $\underline{V}$  du mélange par :

$$\rho \underline{V} = \sum_\alpha \rho_a^\alpha \underline{v}^\alpha. \quad (\text{V.53})$$

Si on somme par rapport à l'indice  $\alpha$  les égalités (V.51), on obtient la propriété suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{V}) = 0, \quad (\text{V.54})$$

qui exprime la conservation de la masse du mélange dans le mouvement à la vitesse barycentrique. On peut d'ailleurs constater que c'est le seul mouvement pour lequel la masse volumique globale  $\rho$  obéit à une équation de continuité identique à celle qu'on aurait pour un milieu continu simple.

Ce mouvement à la vitesse barycentrique est un mouvement moyen par rapport au mouvement de chacun des constituants : c'est par définition le *mouvement de convection*. On caractérise naturellement le mouvement relatif de chaque constituant en introduisant les *vitesses de diffusion*

$$\underline{v}^\alpha - \underline{V}, \quad (\text{V.55})$$

et les *flux de diffusion*

$$\underline{J}^\alpha = \rho_a^\alpha (\underline{v}^\alpha - \underline{V}) \quad , \quad (\text{V.56})$$

définition dont il résulte immédiatement l'égalité suivante, valable uniquement parce que  $\underline{V}$  est la vitesse barycentrique :

$$\sum_\alpha \underline{J}^\alpha = 0. \quad (\text{V.57})$$

Nous ne nous intéressons pas aux réactions chimiques, toutefois il est intéressant de savoir que même dans le cas d'un mélange réactif, on obtiendrait l'équation (V.54) alors que les équations de conservation de masse de chaque constituant seraient, elles, modifiées par l'apparition de termes sources. **On se trouve donc bien en présence d'un mouvement bien particulier, le seul de cette espèce, pour lequel un système localement ouvert se comporte, du point de vue massique du moins, comme un système localement fermé.** Et cela qu'il y ait ou non diffusion, et qu'il y ait ou non réactions chimiques.

L'ensemble des propriétés remarquables de ce mouvement barycentrique, rajouté au fait qu'on ne saurait pas comment agir autrement (nous avons vu précédemment, au §V.6.7, la situation inextricable à laquelle conduirait le calcul de la puissance des efforts extérieurs), a conduit à **postuler que, thermodynamiquement parlant, un système localement ouvert a, dans le mouvement barycentrique, les mêmes propriétés que s'il était fermé.** En particulier, si  $\frac{d}{dt}$  désigne la dérivée de transport dans le mouvement barycentrique, le premier principe s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = P_{ext} + Q^\circ, \quad (\text{V.58})$$

où  $U$  et  $K$  sont les quantités d'énergies respectivement interne et cinétique contenus dans un volume  $\Omega(t)$  de mélange,  $P_{ext}$  est la puissance des efforts extérieurs et  $Q^\circ$  le taux de chaleur reçue pendant l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$  par la matière contenue dans le volume se déplaçant à la vitesse barycentrique.

### V.7.3 Application du premier principe et approximations

Fer (1971) utilise les densités massiques. Ainsi l'énergie interne  $U$  de la matière renfermée dans  $\Omega(t)$  peut se mettre sous la forme

$$U = \int_{\Omega(t)} \rho \cdot u_m d\Omega(t) \quad , \quad (\text{V.59})$$

$u_m$  étant l'énergie interne massique, qui dépend des variables d'état, en particulier des fractions massiques de chaque constituant définies par :

$$Y^\alpha = \frac{\rho_a^\alpha}{\rho} \quad (\text{V.60})$$

En vertu de la conservation de la masse (V.54), la dérivée de  $U$  s'écrit simplement :



$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \cdot u_m d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \cdot \frac{du_m}{dt} d\Omega(t) \quad (\text{V.61})$$

En vertu de (V.57), l'énergie cinétique peut se décomposer sous la forme :

$$K = \sum \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_a \cdot \underline{v}^{\alpha 2} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \cdot \underline{V}^2 d\Omega + \sum \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_a \cdot (\underline{v}^{\alpha} - \underline{V})^2 d\Omega \quad (\text{V.62})$$

L'auteur choisit de ne conserver que la première intégrale du membre de droite, c'est-à-dire d'écrire que l'énergie cinétique massique vaut  $\frac{1}{2} \underline{V}^2$ , ce qui revient à négliger le carré des vitesses de diffusion :

$$K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \cdot \underline{V}^2 d\Omega \quad (\text{V.63})$$

Bien qu'on puisse raisonnablement admettre que les vitesses de diffusions sont faibles devant la vitesse d'ensemble, l'approximation précédente est difficile à justifier dans la mesure où ce n'est pas l'énergie cinétique mais sa variation qui intervient dans (V.58). Toutefois, dans le cadre quasi-statique qui nous préoccupe, cela n'a pas une grande importance.

En conservant les mêmes notations que précédemment pour les forces massiques et les efforts surfaciques, la puissance des efforts extérieurs appliqués est prise égale à

$$P_{ext} = \int_{\Omega(t)} \sum \rho_a \underline{F}_m^{\alpha} \cdot \underline{v}^{\alpha} d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} \underline{T} \cdot \underline{V} d\Sigma(t) . \quad (\text{V.64})$$

Si l'on compare cette expression à (V.24) ou (V.29), on constate qu'elle est à mi-chemin entre ces deux expressions. En fait,  $P_{ext}$  dans (V.64) contient d'une part la puissance des efforts surfaciques dans le mouvement barycentrique, d'autre part la puissance des forces massiques dans le mouvement réel. En toute rigueur, pour respecter l'hypothèse faite dans l'expression du premier principe (V.58), la puissance des forces massiques devrait s'écrire dans le mouvement barycentrique  $\int_{\Omega(t)} (\sum \rho_a \underline{F}_m^{\alpha}) \cdot \underline{V} d\Omega(t)$ , formule sur laquelle on retombe dès lors que les forces massiques  $\underline{F}_m^{\alpha}$  sont identiques pour tous les constituants (comme le sont les efforts de gravité).

Pour ce qui concerne les efforts surfaciques, dans l'expression (V.64) notons que le problème est largement simplifié puisque, considérant le système constitué du volume  $\Omega(t)$  évoluant à la vitesse barycentrique, les auteurs ne se préoccupent pas de la puissance des efforts surfaciques développée dans les mouvements relatifs. Il n'est donc pas utile de chercher à formuler un tenseur des contraintes pour chaque constituant. Ce sont justement ces termes qui, rappelons-le, posent problème dans l'approche de Coussy. Par ailleurs, ce sont aussi ces termes qui permettraient de faire apparaître le potentiel chimique des constituants. En théorie des mélanges, on procède autrement.

Le tenseur des contraintes du mélange est toujours noté  $\underline{\underline{\sigma}}$ . L'équation de la dynamique est écrite en faisant le même type d'approximation que pour l'énergie cinétique : en négligeant la dérivée du carré des vitesses de diffusions. Ce faisant, on obtient :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \sum \rho_a^\alpha \underline{F}_m^\alpha = \rho \frac{dV}{dt} \quad (\text{V.65})$$

L'application du premier principe (V.58), dans lequel on utilise l'expression (V.59) de l'énergie cinétique, l'expression (V.61) de la dérivée de l'énergie interne, l'expression (V.64) de la puissance des efforts extérieurs, l'expression (V.18) de  $Q^\circ$ , et l'équation de la dynamique (V.65), conduit à l'expression locale :

$$\rho \frac{du_m}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}(\underline{V})}} - \text{div} \underline{q} + r + \sum_\alpha \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{J}^\alpha \quad (\text{V.66})$$

On suppose généralement que le tenseur des contraintes dans le mélange fluide se met sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{1} + \underline{\underline{\tau}}. \quad (\text{V.67})$$

où  $\underline{\underline{\tau}}$  est une part liée à la viscosité du fluide, qui s'annule lorsque le fluide est au repos. L'équation de l'énergie (V.66) devient alors :

$$\rho \frac{du_m}{dt} = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\text{grad}(\underline{V})}} - p \cdot \text{div}(\underline{V}) - \text{div} \underline{q} + r + \sum_\alpha \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{J}^\alpha \quad (\text{V.68})$$

## V.7.4 Relation de Gibbs et second principe de la thermodynamique

Le cheminement que nous allons suivre n'est pas le plus instructif, et masque un peu l'origine de la génération d'entropie ; mais c'est le plus classique, et c'est aussi celui donné par les créateurs de la théorie (de Groot & Mazur, 1961, cités par Fer, 1971). Dans la suite, nous supposons explicitement que le mélange est un fluide. Dans ce cas, l'énergie interne massique à l'équilibre est une fonction des variables entropie massique  $s_m$ , masse volumique et fractions massiques  $Y^\alpha$ . La *relation de Gibbs* dit que la variation d'énergie interne massique entre deux états d'équilibre infiniment proches est :

$$du_m = T ds_m - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{\alpha} \mu^\alpha dY^\alpha \quad (\text{V.69})$$

où  $T$  est la température,  $p$  la pression thermodynamique du fluide, et  $\mu^\alpha$  le potentiel chimique massique du constituant  $\alpha$ .

L'hypothèse de l'équilibre local consiste à étendre à un système hors équilibre cette relation qui est valable que le système soit ouvert ou fermé, pourvu que la masse soit invariable (donc dans le référentiel barycentrique), et on a :

$$\frac{du_m}{dt} = T \frac{ds_m}{dt} - p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{\alpha} \mu^\alpha \frac{dY^\alpha}{dt} \quad (\text{V.70})$$

La définition (V.60) des fractions massiques, et les formules (V.51), (V.54) et (V.56) permettent de calculer  $\frac{dY^\alpha}{dt}$  (en utilisant les dérivées particulières) :

$$\frac{dY^\alpha}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{div} \underline{J}^\alpha, \quad (\text{V.71})$$

et on obtient à partir de l'équation (V.70) :

$$\rho \frac{du_m}{dt} = \rho T \frac{ds_m}{dt} - p \cdot \text{div} \underline{V} - \sum_{\alpha} \mu^\alpha \cdot \text{div} \underline{J}^\alpha \quad (\text{V.72})$$

A l'aide de la valeur (V.68) de  $\rho \frac{du_m}{dt}$ , on trouve sous forme locale :

$$\rho \frac{ds_m}{dt} = \frac{1}{T} \underline{\tau} : \underline{\text{grad}}(\underline{V}) - \frac{1}{T} \cdot \text{div} \underline{q} + \frac{r}{T} + \sum_{\alpha} \frac{\mu^\alpha}{T} \cdot \text{div} \underline{J}^\alpha + \sum_{\alpha} \frac{1}{T} \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{J}^\alpha \quad (\text{V.73})$$

Sachant que la dérivée de  $S$  dans le mouvement barycentrique vaut

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\Omega(t)} \rho \cdot \frac{ds_m}{dt} d\Omega(t) \quad , \quad (\text{V.74})$$

on explicite alors l'intégrale du second membre en donnant à  $\rho \frac{ds_m}{dt}$  sa valeur (V.73) et en intégrant par parties les termes où figurent une divergence. On peut ainsi distinguer deux contributions à la variation d'entropie :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt} \quad (\text{V.75})$$

où :

✓  $\frac{d_e S}{dt}$  résulte de l'interaction du système avec l'extérieur ; il contient naturellement les intégrales de surface, et bien sûr le terme dû aux sources réparties dans le volume mais qu'on sait extérieures :

$$\frac{d_e S}{dt} = - \int_{\Sigma(t)} \frac{q \cdot \underline{n}}{T} d\Sigma(t) + \int_{\Sigma(t)} \sum_{\alpha} \frac{\mu^{\alpha}}{T} \underline{J}^{\alpha} \cdot \underline{n} d\Sigma(t) + \int_{\Omega(t)} \frac{r}{T} d\Omega(t) \quad (\text{V.76})$$

✓  $\frac{d_i S}{dt}$  provient des phénomènes purement internes, et résulte donc de la génération d'entropie :

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{1}{T} \underline{\tau} : \underline{\underline{grad(V)}} + \underline{q} \cdot \underline{\underline{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) + \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{T} \underline{F}_m^{\alpha} - \nabla \left( \frac{\mu^{\alpha}}{T} \right) \right) \cdot \underline{J}^{\alpha} \right] d\Omega(t) \quad (\text{V.77})$$

D'après le second principe de la thermodynamique, la génération d'entropie est strictement positive :

$$\frac{1}{T} \underline{\tau} : \underline{\underline{grad(V)}} + \underline{q} \cdot \underline{\underline{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) + \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{T} \underline{F}_m^{\alpha} - \nabla \left( \frac{\mu^{\alpha}}{T} \right) \right) \cdot \underline{J}^{\alpha} > 0 \quad (\text{V.78})$$

Comme nous l'avons fait pour la théorie des milieux poreux, nous pouvons, en multipliant par la température, faire apparaître les dissipations :

$$\underline{\tau} : \underline{\underline{grad(V)}} - \frac{q}{T} \cdot \underline{\underline{grad(T)}} + \sum_{\alpha} \left( \underline{F}_m^{\alpha} - T \cdot \underline{\nabla} \left( \frac{\mu^{\alpha}}{T} \right) \right) \cdot \underline{J}^{\alpha} > 0 \quad (\text{V.79})$$

Nous noterons  $\mathcal{D}'_2$  la dissipation chimique qui vaut cette fois :

$$\mathcal{D}'_2 = \sum_{\alpha} \left( \underline{F}_m^{\alpha} - \underline{\nabla}(\mu^{\alpha}) + \frac{\mu^{\alpha}}{T} \underline{\nabla}(T) \right) \cdot \underline{J}^{\alpha} \quad (\text{V.80})$$

### V.7.5 Remarque

Comme nous venons de le voir, la théorie utilise la relation de Gibbs, écrite ici pour un fluide. Cette relation est obtenue par combinaison des deux principes. Elle repose sur deux idées essentielles :

1. la première est que l'énergie interne, fonction d'état, n'est fonction, hormis l'entropie, que de variables d'état observables ;
2. la deuxième idée est qu'il existe toujours, pour le système considéré, un chemin réversible menant d'un état donné vers un autre.

Ces deux idées, qu'on peut voir comme des conditions de validité de la relation de Gibbs, ne sont malheureusement pas satisfaites pour une large classe de matériaux. Par exemple, lorsque l'on traite des irréversibilités pour un matériau solide (plasticité, viscoplasticité, endommagement ...), celles-ci sont considérées comme intrinsèques, au sens où l'état actuel du matériau dépend essentiellement des transformations irréversibles qu'il a subies ; dans ce cas, les déformations irréversibles interviennent comme variables internes dont dépend l'énergie interne, et de plus il n'existe pas nécessairement de transformation réversible menant au même état actuel.

## V.8 Discussion et modèle proposé

### V.8.1 Comparaison des formules

Les deux approches nous ont fourni deux expressions de la dissipation chimique,  $\mathcal{D}2$  dans (V.50) et  $\mathcal{D}'2$  dans (V.80), qui sont légèrement différentes. Laissant de côté les accélérations, d'abord parce qu'elles n'interviennent pas dans un modèle quasi-statique mais aussi parce qu'elles ont été volontairement délaissées dans la deuxième théorie, on rappelle :

✓ En théorie des milieux poreux :

$$\mathcal{D}2 = \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m^\alpha - \underline{\nabla} \mu^\alpha - s_m^\alpha \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{M}^\alpha \quad (\text{V.81})$$

✓ En théorie des mélanges :

$$\mathcal{D}'2 = \sum_{\alpha} \left( \underline{F}_m^\alpha - \underline{\nabla}(\mu^\alpha) + \frac{\mu^\alpha}{T} \underline{\nabla}(T) \right) \cdot \underline{J}^\alpha \quad (\text{V.82})$$

Normalement, nous devrions comparer les deux inégalités de Clausius-Duhem (V.47) et (V.79) obtenues dans les deux approches<sup>(\*)</sup>. Toutefois, nous nous limitons à la comparaison des dissipations chimiques. Cela mérite une explication, pour laquelle une analyse physique évitera bien des calculs :

✓ L'examen des inégalités (V.47) et (V.79) montre que la dissipation (ou de manière équivalente la génération d'entropie) se compose de deux sortes de facteurs : d'une part la dissipation intrinsèque (ou travail non compensé), qui exprime des irréversibilités locales, et d'autre part les termes qui proviennent de la propagation de la chaleur et de la diffusion, qui ont été obtenus par des intégrations par parties et constituent en quelque sorte des irréversibilités globales. On peut donc, de manière licite, séparer ces deux types de dissipations et n'analyser que les irréversibilités globales, puisque le problème s'y trouve. Nous devrions aussi, en toute rigueur, enlever les produits  $\sum_{\alpha} \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{M}^\alpha$  et  $\sum_{\alpha} \underline{F}_m^\alpha \cdot \underline{J}^\alpha$  des expressions (V.81) et (V.82)

que nous allons comparer car ils font normalement partie intégrante, en tant que « travail de diffusion », du travail non compensé.

---

<sup>(\*)</sup> On peut par ailleurs se demander pourquoi le taux d'entropie fourni par l'extérieur contient, dans la deuxième méthode et non dans la première, un terme lié au flux de potentiel chimique. Tout simplement, nous avons dans la deuxième méthode un système ouvert, alors qu'il était fermé dans l'approche « milieux poreux ».

- ✓ Concernant maintenant les dissipations d'origine « globale » : dans (V.47) et (V.79), les dissipations thermiques sont clairement identiques ; il reste donc à comparer les dissipations chimiques.

La manière la plus simple pour comparer (V.81) et (V.82) est d'imaginer le cas particulier pour lequel le mouvement du solide se confond avec le mouvement barycentrique. Auquel cas le courant de masse de constituant  $\alpha$  défini dans l'approche milieux poreux se confond avec le flux de diffusion donné dans l'approche « mélanges » :  $\underline{M}^\alpha = \underline{J}^\alpha$ . On constate alors que les deux dissipations sont égales sous la condition

$$-s_m^\alpha = \frac{\mu^\alpha}{T}, \quad (V.83)$$

ce qui n'est manifestement pas le cas d'après la définition (V.45) du potentiel chimique.

## V.8.2 Discussion

On peut se poser la question justifiée de savoir si la différence entre les dissipations n'est pas liée au fait que les systèmes thermodynamiques étudiés sont différents. En effet, dans un cas le milieu ouvert est le milieu continu allant à la vitesse du squelette solide, alors que dans l'autre cas il s'agit du milieu continu qui se déplace à la vitesse barycentrique. Toutefois, si c'était la seule difficulté, on devrait pouvoir assez aisément passer d'une expression à l'autre.

La théorie des mélanges est, rappelons-le, beaucoup utilisée dans les milieux poreux. Le problème n'est donc pas le fait de milieux différents. Nous l'avons présentée dans le cas d'un fluide uniquement pour bien nous focaliser sur la démarche adoptée. On pourra trouver des exemples d'application de cette théorie aux milieux poreux dans Jamet (1991), Fargue (2001), Ruiz et al. (1998), Ghassemi et al. (2002) et notamment dans la plupart des articles traitant de thermodiffusion.

Tout d'abord, il faut bien comprendre que les deux théories exposées ci-dessus reposent sur des visions différentes. Fargue (2001) compare les deux méthodes du point de vue de l'application du premier principe. Sans pour autant dénigrer l'une quelconque de ces deux approches, il pense que la théorie des mélanges est plus adaptée si le milieu poreux peut être assimilé à un milieu continu comme peut l'être un fluide, c'est-à-dire quand les pores sont très fins comme dans les argiles, tandis que la thermodynamique des milieux poreux est valable si les pores sont suffisamment gros et assimilables à des canaux. Il est vrai que dans cette dernière, la distinction entre le solide et le fluide est plus tranchée que dans l'application de la théorie des mélanges pour laquelle, justement, le solide et le fluide sont

considérés comme formant un mélange. L'auteur croit néanmoins que si ces deux formulations sont incompatibles, un raccord doit néanmoins être possible entre leurs solutions.

Dans sa comparaison, Fargue (2001) n'évoque pas le cas d'un mélange en phase fluide. Dans notre cas, l'incompatibilité repose tout autant sur les solutions que les formulations. En réalité, si les dissipations obtenues sont différentes, c'est bien parce que les méthodes utilisées et les hypothèses formulées sont différentes.

En terme de méthodes tout d'abord, les potentiels chimiques n'apparaissent pas de la même manière dans les deux méthodes. En théorie des mélanges, ils interviennent lors de l'application de la relation de Gibbs supposée valable dans le référentiel barycentrique (hypothèse d'équilibre local). En thermodynamique des milieux poreux, les potentiels chimiques sont reconstruits à partir des énergies internes massiques, entropies massiques et pressions  $p^\alpha$  des constituants dans la phase fluide. Au passage, Coussy (1991) fait l'hypothèse que le potentiel chimique  $\mu^\alpha$  de chacune des espèces ne dépend que de la pression  $p^\alpha$  de celle-ci et de la température, ce qui n'est vrai, dans le cas d'un mélange, que si c'est un mélange de gaz parfaits.

Il est difficile de trancher pour l'une ou l'autre méthode. Ce qui est certain, c'est qu'il se pose un réel problème lors de l'application du premier principe dans les deux cas. C'est vrai en théorie des mélanges, où on décide de faire comme si le système était fermé alors qu'il ne l'est pas : il y a diffusion ; d'ailleurs, l'application de la relation de Gibbs puis du second principe fait apparaître dans le taux externe d'entropie un terme lié à la diffusion des constituants. C'est également vrai en thermodynamique des milieux poreux dans le cas d'un mélange en phase fluide pour lequel on ne sait pas écrire correctement la puissance des efforts extérieurs dans le mouvement relatif des constituants par rapport au squelette. Dans le cas de la théorie des milieux poreux, le problème avait été soulevé par Ramambasoa (2001), mais ce dernier n'a sans doute pas donné une réponse correcte.

Indépendamment des hypothèses faites dans l'une ou l'autre théorie, il nous semble clair que la principale difficulté porte sur l'écriture de la puissance des efforts extérieurs, notamment celle due aux efforts de contact. L'écriture de cette puissance va dépendre, en chaque point de la surface, de la valeur du tenseur des contraintes en ce point. La difficulté vient du fait que, dans le cas d'un milieu complexe, on ne connaît pas forcément ce tenseur des contraintes.



Coussy (1991) suppose que la puissance développée dans le mouvement relatif de chacun des constituants interstitiels par rapport au solide peut s'écrire :

$$P_{\text{ext}}^{\alpha}(\underline{v}^{\alpha} - \underline{v}^s) = \int_{\Sigma(t)} \phi^{\alpha} p^{\alpha}(\underline{v}^{\alpha} - \underline{v}^s) d\Sigma(t),$$

formule qui n'est acceptable que s'il n'y a pas d'interaction entre les constituants en phase fluide et le solide, ainsi qu'entre les constituants eux-mêmes. Dans le mélange, même en admettant que les contraintes subies par chaque constituant se réduisent à des pressions, on ne peut pas négliger l'interaction des constituants, sauf si l'on fait l'hypothèse de gaz parfaits. De Boer (1995) écrit le bilan d'énergie pour chaque espèce indépendamment, et fait à chaque fois intervenir un terme supplémentaire sensé refléter l'action des autres constituants. Cependant, en sommant les différents bilans pour obtenir un bilan global, il explique que la somme des interactions est nulle et retombe sur un bilan analogue à celui de Coussy (1991).

En théorie des mélanges, le bilan est réalisé dans le mouvement barycentrique, et non en suivant l'ensemble des constituants. Aussi n'apparaissent pas ces termes de puissances développées dans les mouvements de diffusion. On pourrait penser qu'il s'agit d'une simplification induite par le « postulat d'extension du premier principe ». En fait, les différents auteurs choisissent de prendre en compte une partie de ces puissances, à savoir les termes liés aux efforts volumiques (qui ne devraient en toute rigueur pas apparaître dans le bilan) ; cela laisse penser que l'exclusion des termes dus aux efforts de contact n'est pas une conséquence mais plutôt la raison qui a poussé les auteurs à faire ce postulat. Si tel est le cas, ce choix est compréhensible.

Nous avons donc présenté deux théories, avec leurs avantages et leurs faiblesses, qui ne conduisent pas tout à fait au même résultat en terme de force thermodynamique responsable du flux de masse des constituants.

Il faut maintenant proposer un modèle thermodynamique pour le cas d'un mélange en milieu poreux. Comme nous l'avons déjà dit, l'approche « thermodynamique des milieux poreux » classique n'est pas satisfaisante dans le cas d'un fluide constitué d'un mélange au sens strict. Par ailleurs, nous avons aussi indiqué que la « théorie des mélanges » n'est applicable que pour un fluide, en raison de l'utilisation de la formule de Gibbs<sup>(\*)</sup>, et non pour un milieu poreux dans toute sa généralité. Notre idée est donc d'essayer de combiner ces deux approches, chose que nous pouvons réaliser très simplement sur la base des développements précédents.

---

(\*) On peut étendre l'utilisation de cette théorie aux matériaux pour lesquels tout état est atteignable par un chemin réversible (élasticité).

### V.8.3 Modèle proposé

L'analyse précédente ne permet en aucun cas de savoir quel modèle est le plus adapté pour l'étude de mélanges en milieux poreux. Par contre, une chose est certaine : pour l'étude de milieux tels que les argiles, pour lesquels l'état énergétique de l'eau semble largement influencé par la présence des ions, un modèle de type « gaz parfaits » ne peut plus convenir.

Le modèle que nous avons construit se situe à mi-chemin entre les deux modèles précédents. Comme en mécanique des milieux poreux, nous privilégions le mouvement du solide. Dans la phase fluide néanmoins, le traitement est celui de la théorie des mélanges avec prise en compte d'une vitesse barycentrique du mélange fluide. Ceci n'est possible que dans la mesure où nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas, au niveau du VER, d'interaction solide/fluide.

Considérons donc un milieu poreux constitué d'un squelette solide, et d'un fluide occupant l'espace poral, ce fluide étant en réalité un mélange de plusieurs constituants. Rappelons que, par hypothèse, il n'y a pas d'interaction du fluide avec le solide au niveau où nous nous plaçons ; par ailleurs, des interactions existent entre les constituants du mélange, mais il n'y a pas de réactions chimiques.

Nous allons suivre d'une part le squelette à la vitesse  $\underline{v}^s$ , d'autre part l'ensemble du fluide à sa vitesse barycentrique que nous notons  $\underline{V}^f$ . Ce faisant, nous nous rapprochons de la méthode de la théorie des mélanges puisque nous aurons affaire à un système ouvert auquel nous allons appliquer le premier principe de la thermodynamique comme s'il était fermé. Remarquons d'ailleurs qu'un tel système est fermé du point de vue massique.

La vitesse barycentrique du fluide est simplement définie en ne tenant compte que des constituants dans la phase fluide :

$$\underline{V}^f = \frac{\sum_{\alpha \neq s} \rho_a^\alpha \underline{v}^\alpha}{\rho_a^f}, \quad (\text{V.84})$$

où

$$\rho_a^f = \sum_{\alpha \neq s} \rho_a^\alpha \quad (\text{V.85})$$

est clairement la masse volumique apparente du fluide dans le milieu poreux.

Par suite, nous introduisons, pour définir le mouvement relatif des constituants au sein du fluide, les vitesses de diffusion dans le fluide

$$\underline{v}^\alpha - \underline{V}^f, \quad (\text{V.86})$$

et les flux de diffusion au sein du fluide

$$\underline{N}^\alpha = \rho_a^\alpha (\underline{v}^\alpha - \underline{V}^f). \quad (\text{V.87})$$

Nous avons, comme pour les flux de diffusion  $\underline{J}^\alpha$  en théorie des mélanges (sauf qu'ici la somme porte sur les seuls constituants du fluide), une relation de fermeture sur les flux de diffusion :

$$\sum_{\alpha \neq s} \underline{N}^\alpha = 0. \quad (\text{V.88})$$

Nous faisons immédiatement les hypothèses suivantes :

✓ Les contraintes dans le fluide se réduisent à une pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^f = -p \underline{1}. \quad (\text{V.89})$$

✓ Les forces massiques sont supposées identiques pour tous les constituants, ce qui évite l'ambiguïté levée par la formule (V.64). On note  $\underline{F}_m$  ces efforts qui sont, par exemple, ceux de gravité.

✓ Nous laissons de côté l'énergie cinétique, qui n'a qu'un intérêt mineur dans notre exposé.

### Premier principe :

Considérant un volume  $\Omega(t)$  de milieu poreux, constitué entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t+dt$  d'un squelette à la vitesse  $\underline{v}^s$ , et d'un mélange fluide de vitesse barycentrique que nous notons  $\underline{V}^f$ , tout se passe comme si nous avions un milieu poreux constitué d'un squelette et d'un fluide simple (au lieu d'un mélange), auquel nous pouvons appliquer le premier principe comme en théorie des milieux poreux, ainsi que tout le bagage mathématique associé, en particulier la dérivée matérielle (qui, physiquement, perd son sens initial puisque justement on ne suit plus toute la matière contenue, du moins concernant le fluide). Il est sans doute préférable, à la place de « dérivée matérielle », de reprendre l'appellation « taux de variation ».

Dans cette optique, le taux de variation de l'énergie interne contenue dans le volume  $\Omega(t)$  s'écrit :

$$\frac{DU}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{d^s u}{dt} + u \cdot \text{div}(\underline{v}^s) + \text{div}[\rho_a^f u_m^f (V^f - \underline{v}^s)] \right] d\Omega(t) \quad (\text{V.90})$$

où  $u_m^f$  désigne l'énergie interne massique du mélange fluide, et où la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux peut se mettre sous la forme  $u = \rho_a^s u_m^s + \rho_a^f u_m^f$ .

Dans l'application du premier principe, l'expression de la puissance des efforts extérieurs est modifiée, compte tenu du fait qu'on élimine les accélérations mais surtout par la puissance développée dans le mouvement relatif :

$$P_{ext} = \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}^s) d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} [\rho_a^f \underline{E}_m \cdot (\underline{V}^f - \underline{v}^s) - \text{div}(\phi p \cdot (\underline{V}^f - \underline{v}^s))] d\Omega(t) \quad (\text{V.91})$$

L'expression du premier principe, sous forme locale, devient :

$$\frac{d^s u}{dt} + u \cdot \text{div}(\underline{v}^s) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}^s) + \underline{E}_m \cdot \underline{M}^f - \text{div} \left[ \left( \frac{p}{\rho^f} + u_m^f \right) \cdot \underline{M}^f \right] - \text{div} \underline{q} + r \quad (\text{V.92})$$

$$\text{où} \quad \rho^f = \frac{\rho_a^f}{\phi} \quad (\text{V.93})$$

désigne la masse volumique vraie du mélange fluide, et

$$\underline{M}^f = \rho_a^f (\underline{V}^f - \underline{v}^s) = \rho^f \phi (\underline{V}^f - \underline{v}^s) \quad (\text{V.94})$$

est le courant (ou flux) relatif de masse fluide par rapport au squelette.

On sait que cette application du premier principe n'est pas correcte puisque le système considéré est en réalité ouvert. Néanmoins, l'erreur ne porte que sur la partie fluide, et surtout on sait que la portée de cette erreur ne peut être que faible puisqu'elle suit une méthodologie (celle de la théorie des mélanges) maintes fois utilisée dans de nombreux domaines de la physique. Par ailleurs, elle possède l'avantage d'éviter l'écriture d'un terme (la puissance des efforts extérieurs développée dans les mouvements relatifs de chacun des constituants) qu'on ne connaît pas.

Second principe :

L'écriture du second principe ne devrait pas être ardue après les développements (détaillés) présentés plus haut. La seule difficulté à surmonter est la description du taux d'entropie fourni par l'extérieur au système. On sait en effet, le système n'étant pas réellement fermé, qu'il n'est pas seulement lié aux échanges thermiques, et on sait aussi qu'on ne peut avoir recours à la relation de Gibbs pour l'ensemble du milieu poreux, car il n'existe pas forcément de chemin réversible entre deux états.

En fait, le bilan est relativement simple : il faut tenir compte de la variation d'entropie due aux échanges de chaleur avec l'extérieur, et celle due aux échanges de matière avec l'extérieur. Le taux externe d'entropie  $\dot{S}_{ext}$  vaut donc :

$$\dot{S}_{ext} = - \int_{\Sigma(t)} \frac{q \cdot n}{T} d\Sigma(t) + \int_{\Omega(t)} \frac{r}{T} d\Omega(t) + \int_{\Sigma(t)} \sum_{\alpha \neq s} \frac{\mu^\alpha}{T} N^\alpha \cdot n d\Sigma(t) \quad (V.95)$$

Le taux de variation d'entropie s'écrit naturellement, avec  $s_m^f$  densité massique d'entropie du fluide :

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{d^s s}{dt} + s \cdot \text{div}(\underline{v}^s) + \text{div} \left[ \rho_a^f s_m^f (\underline{V}^f - \underline{v}^s) \right] \right] d\Omega(t) \quad (V.96)$$

Le second principe postule que le taux de variation d'entropie est supérieur au taux d'entropie fourni par l'extérieur :

$$\frac{DS}{Dt} \geq \dot{S}_{ext} \quad (V.97)$$

Le même chemin que celui suivi en thermodynamique des milieux poreux conduit, en faisant intervenir l'expression (V.46) de l'énergie libre de l'ensemble, à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}^s) - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s f}{dt} - f \cdot \text{div}(\underline{v}^s) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\nabla} T \\ & + \underline{F}_m \cdot \underline{M}^f - \text{div} \left[ \left( \frac{p}{\rho^f} + u_m^f \right) \cdot \underline{M}^f \right] + T \text{div} (s_m^f \underline{M}^f) \\ & - \sum_{\alpha \neq s} \mu^\alpha \text{div}(\underline{N}^\alpha) + \sum_{\alpha \neq s} \left( -\underline{\nabla} \mu^\alpha + \frac{\mu^\alpha}{T} \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{N}^\alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (V.98)$$

On introduit l'enthalpie libre massique du fluide :

$$\underline{g}_m^f = \underline{u}_m^f + \frac{P}{\rho^f} - T s_m^f, \quad (\text{V.99})$$

ainsi que l'identité suivante résultant de (V.88) :

$$\sum_{\alpha \neq s} \underline{F}_m \cdot \underline{N}^\alpha = 0, \quad (\text{V.100})$$

et l'inégalité (V.98) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}^s) - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s f}{dt} - f \cdot \text{div}(\underline{v}^s) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\nabla} T \\ & + \underline{F}_m \cdot \underline{M}^f - \text{div}(\underline{g}_m^f \cdot \underline{M}^f) - s_m^f \underline{\nabla} T \cdot \underline{M}^f \\ & - \sum_{\alpha \neq s} \mu^\alpha \text{div}(\underline{N}^\alpha) + \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m - \underline{\nabla} \mu^\alpha + \frac{\mu^\alpha}{T} \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{N}^\alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{V.101})$$

Nous pouvons apprécier ici l'intérêt qu'il y a à manipuler des enthalpies libres plutôt qu'un autre potentiel thermodynamique (énergie interne, énergie libre ou enthalpie), car le potentiel chimique de chaque constituant  $\alpha$  s'identifie avec son enthalpie libre massique :

$$\rho_a^f \underline{g}_m^f = \sum_{\alpha \neq s} \rho_a^\alpha \mu^\alpha \quad (\text{V.102})$$

Par ailleurs, rappelons l'égalité suivante, valable par définition des entropies massiques :

$$\rho_a^f s_m^f = \sum_{\alpha \neq s} \rho_a^\alpha s_m^\alpha \quad (\text{V.103})$$

$\underline{M}^\alpha$  désignant toujours, comme dans (V.43), le courant relatif de masse de constituant  $\alpha$  par rapport au mouvement du squelette, nous sommes amenés à définir pour le constituant  $\alpha$  un autre flux, lié au mouvement relatif de l'ensemble de la phase fluide par rapport au squelette. Ce mouvement est unique, mais conduit pour chaque constituant  $\alpha$  à ce que l'on peut appeler le flux convectif de constituant qui vaut :

$$\underline{Q}^\alpha = \rho_a^\alpha (\underline{V}^f - \underline{v}^s) \quad (\text{V.104})$$

Les égalités (V.102), (V.85) et (V.103), ainsi que (V.104), permettent de réécrire (V.101) sous la forme :

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}^s) - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s f}{dt} - f \cdot \text{div}(\underline{v}^s) - \sum_{\alpha \neq s} \mu^\alpha \text{div}(\underline{M}^\alpha) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\nabla} T \\ & + \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m - \underline{\nabla} \mu^\alpha - s_m^\alpha \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{Q}^\alpha + \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m - \underline{\nabla} \mu^\alpha + \frac{\mu^\alpha}{T} \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{N}^\alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{V.105})$$

Dans l'expression (V.105), les termes  $\mu^\alpha \text{div}(\underline{M}^\alpha)$  s'intègrent dans la dissipation intrinsèque. Concernant la dissipation chimique, elle s'écrit donc ici :

$$\mathcal{D}''_2 = \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m - \underline{\nabla} \mu^\alpha - s_m^\alpha \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{Q}^\alpha + \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m - \underline{\nabla} \mu^\alpha + \frac{\mu^\alpha}{T} \underline{\nabla} T \right) \cdot \underline{N}^\alpha \quad (\text{V.106})$$

On voit clairement apparaître dans l'expression (V.106) la part liée à la convection, pour laquelle la force thermodynamique est analogue à celle obtenue en thermodynamique des milieux poreux, et la part liée à la diffusion au sein du fluide correspondant aux résultats de la théorie des mélanges. Ainsi, cette dissipation a deux contributions distinctes de par les forces thermodynamiques qui s'y trouvent :

- ✓ Une dissipation liée au mouvement relatif d'ensemble du mélange fluide par rapport au squelette, pour laquelle les forces thermodynamiques sont (hormis les forces de volumes) les gradients isothermes de potentiels chimiques  $\underline{\nabla}_T \mu^\alpha = \underline{\nabla} \mu^\alpha + s_m^\alpha \underline{\nabla} T$  ;
- ✓ Une dissipation liée à la diffusion au sein du fluide, où les forces sont cette fois liées aux termes

$\underline{\nabla} \left( \frac{\mu^\alpha}{T} \right)$  qui impliquent, même dans l'hypothèse de découplage la plus restrictive, que les

flux de constituants sont dépendants du gradient de température.

## V.8.4 Conséquences

D'une manière générale, si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire, les différences précédemment relevées dans les différents termes de dissipation chimique n'ont pas forcément de conséquences notables. En effet, l'inégalité de Clausius-Duhem portant sur la somme des dissipations (mécanique, thermique, chimique), chaque flux est a priori une fonction de toutes les forces thermodynamiques qui interviennent dans l'inégalité.

Cependant, il arrive bien souvent qu'on simplifie le problème en découplant les phénomènes. Dans l'hypothèse de découplage la plus restrictive, on écrit qu'un flux est fonction uniquement de la force thermodynamique qui lui est conjuguée. Cela revient à écrire que chaque dissipation est positive. Si l'on fait, par souci de simplicité, un tel choix, alors les différentes formulations ont des conséquences

non négligeables puisque la théorie des milieux poreux permet de rendre les flux de masse complètement indépendants de la thermique, tandis que la théorie des mélanges (et la notre) n'autorise pas ce découplage.

En pratique, il est peu de cas pour lesquels ces différences peuvent jouer un rôle important. Tout d'abord parce que la thermodynamique n'est qu'un guide : le choix de coupler ou non les phénomènes intervient après, en fonction des phénomènes que l'on veut étudier. Ensuite parce que les termes de couplages sont généralement faibles. De plus les coefficients sont difficilement mesurables.

En termes d'applications, il faut bien évidemment se demander quelle erreur peut induire le fait de négliger l'action de la thermique sur les flux d'espèces. Le phénomène dont il est question est connu sous le nom d'effet Soret, ou thermodiffusion (solutale), et l'une de ses applications concrètes est la séparation d'espèces initialement mélangées sous l'effet d'un gradient de température.

### V.8.5 Relations phénoménologiques

Utilisant les expressions (V.104) des flux convectifs  $\underline{Q}^\alpha$ , la dissipation chimique (V.106) s'écrit :

$$\mathcal{D}''_2 = (\underline{V}^f - \underline{v}^s) \sum_{\alpha \neq s} \rho_a^\alpha (\underline{F}_m - \nabla_T \mu^\alpha) + \sum_{\alpha \neq s} \left( \underline{F}_m - T \nabla \left( \frac{\mu^\alpha}{T} \right) \right) \cdot \underline{N}^\alpha, \quad (\text{V.107})$$

soit encore :

$$\mathcal{D}''_2 = -\underline{w}^f \left[ \left( \sum_{\alpha \neq s} \rho_a^\alpha \nabla_T \mu^\alpha \right) - \rho_a^f \underline{F}_m \right] - \sum_{\alpha \neq s} T \nabla \left( \frac{\mu^\alpha}{T} \right) \cdot \underline{N}^\alpha, \quad (\text{V.108})$$

où  $\underline{w}^f$  est la vitesse relative de l'ensemble du fluide par rapport au squelette :

$$\underline{w}^f = \underline{V}^f - \underline{v}^s \quad (\text{V.109})$$

On rappelle que  $\phi$  désigne la porosité (connectée) du milieu poreux, et que la masse volumique du mélange est donnée par  $\rho^f = \frac{\rho_a^f}{\phi}$  d'après (V.93). Nous définissons par ailleurs, pour chaque constituant du mélange, sa masse volumique au sein du fluide — qui correspond à sa concentration — par :

$$\rho_1^\alpha = \frac{\rho_a^\alpha}{\phi} \quad (\text{V.110})$$



Introduisant les relations (V.93) et (V.110) dans l'expression (V.108) de  $\mathcal{D}'^2$ , on écrit que cette dissipation est positive :

$$\mathcal{D}'^2 = -\phi_{\underline{w}}^f \left[ \left( \sum_{\alpha \neq s} \rho_1^\alpha \underline{\nabla}_T \mu^\alpha \right) - \rho^f \underline{F}_m \right] - \sum_{\alpha \neq s} T \underline{\nabla} \left( \frac{\mu^\alpha}{T} \right) \underline{N}^\alpha \geq 0. \quad (\text{V.111})$$

Dans l'hypothèse de découplage la plus restrictive, la positivité de chacun des termes de  $\mathcal{D}'^2$  dans (V.111) suggère les lois suivantes :

✓ Pour le mouvement d'ensemble (la convection) :

$$\phi_{\underline{w}}^f = -\underline{k} \left[ \left( \sum_{\alpha \neq s} \rho_1^\alpha \underline{\nabla}_T \mu^\alpha \right) - \rho^f \underline{F}_m \right] \quad (\text{V.112})$$

où  $\underline{k}$  est un tenseur lié à la perméabilité (et d'ordre 2 symétrique) ;

✓ Pour la diffusion :

$$\underline{N}^\alpha = -\underline{L}^\alpha \cdot \underline{\nabla} \left( \frac{\mu^\alpha}{T} \right) \text{ pour chaque constituant } \alpha, \quad (\text{V.113})$$

où  $\underline{L}^\alpha$  est un tenseur lié au transport diffusif du constituant.

### V.8.6 Principe d'aboutissement aux lois de transport

L'exploitation des relations (V.112) et (V.113) nécessite l'expression des potentiels chimiques en fonction des variables qui nous intéressent, à savoir la pression de fluide  $p$  (qui correspond à  $P_w$  définie au chapitre IV), les concentrations des solutés (c'est-à-dire leurs masses volumiques dans le mélange fluide), et la température.

Nous n'avons pas réalisé ce travail. Il faut pour cela se donner une expression du potentiel chimique, et introduire des hypothèses sur le mélange (idéal, dilué, ...). Une telle étude est menée par Ruiz et al. (1998) dans le cas isotherme. L'intervention de la thermique complique un peu les choses. La poursuite de ce travail n'est pas forcément vitale pour l'objectif visé qui concerne le phénomène de gonflement-retrait. L'intérêt d'un tel travail n'en est pas amoindri, même dans la pratique pour qui traiterait de thermodiffusion. Les études traitant de ces aspects et intéressant le stockage de déchets (pour ceux dégageant de la chaleur) ne sont pas rares.

# CHAPITRE VI APPLICATIONS NUMERIQUES

## **VI.1 Introduction**

Comme pour tout problème d'évolution en milieu poreux, la modélisation numérique des argiles gonflantes implique la résolution de l'équation d'équilibre mécanique et de plusieurs équations décrivant les phénomènes de transfert intervenant.

Le développement numérique que nous avons réalisé, permettant la résolution de problèmes complexes faisant intervenir le gonflement, s'inscrit dans un cadre plus large que celui de cette thèse. Il s'agissait en premier lieu de doter G.3S d'un code numérique robuste permettant la modélisation des différents couplages entre le comportement mécanique et les phénomènes de transfert en milieu poreux mis en jeu dans le plus possible de cas. Autrement dit, tout type de couplage était à prévoir.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les différents phénomènes peuvent être fortement couplés entre eux. La mise en œuvre de ces couplages a pu être réalisée dans le cadre des développements que nous avons réalisés pour le Groupement.

Dans ce chapitre, nous présentons le code de calcul de G.3S, appelé Anthyc. Ce code, développé en Volumes Finis (VF) et en Eléments Finis (EF), permet de traiter un grand nombre de phénomènes THMC couplés en milieu poreux et/ou fracturé, et autorise un grand nombre de non linéarités tant pour la mécanique que pour les phénomènes de transfert. Nous avons essayé de rassembler ici un ensemble de faits résumant les apports du code. Une présentation plus avancée, d'un point de vue technique, est donnée en annexe D.

## **VI.2 Le code de calcul Anthyc**

Comme nous l'avons déjà mentionné, le développement du code dépasse largement le cadre de la présente thèse. L'idée de départ était de disposer d'un code de calcul adapté à l'étude de la problématique de stockage souterrain, en milieu poreux, notamment en ce qui concerne les différents couplages entre les phénomènes de transfert (thermique, hydrauliques, de masse...) et le comportement mécanique (voir Gaombalet et Su, 1998). Le code devait devenir le code du

Groupement (le G.I.P. G.3S); de fait, il devait être suffisamment souple et accessible au développement et à l'utilisation par des chercheurs et ingénieurs qui n'étaient pas forcément spécialistes en informatique ou en analyse numérique. Enfin, le code devait être conçu et structuré de manière suffisamment générale pour pouvoir, le cas échéant, introduire facilement de nouveaux aspects (couplages, non linéarités, lois de comportement...) intervenant à plus ou moins long terme dans la problématique du stockage (architecture, réversibilité, sûreté...).

Avant cela, le Groupement avait déjà développé en interne une première version du code, en Différences Finies (DF). Il autorisait alors des calculs 2D sur des géométries simples, les faces des mailles devant être parallèles aux axes ; cela commençait à devenir gênant vis-à-vis de certaines études que G.3S entamait, pour lesquelles des maillages écossais étaient peu adaptés. Après analyse des possibilités offertes, il a semblé préférable, plutôt que de tenter une généralisation des DF au cas de maillages quelconques, de changer de méthode de discrétisation.

Le choix s'est d'abord porté sur les Volumes Finis (VF). D'abord, par souci d'originalité par rapport à un code aux Eléments Finis (EF) classique, ensuite parce que les VF sont connus pour être une méthode plus adaptée que des EF pour la résolution de problèmes de transport. En mécanique des fluides, les EF sont en effet inadaptés pour la résolution de problèmes où apparaissent des ondes de choc et/ou de raréfaction, ce qu'autorisent DF et VF. Sans aller si loin (nous ne prévoyions pas dans les milieux poreux à gérer des discontinuités telles qu'en mécanique des fluides), les VF sont plus adaptés pour gérer les problèmes de transport en milieu poreux en raison notamment des phénomènes convectifs ; pour de tels aspects, si l'on veut conserver une approche de type EF, les Eléments Finis Mixtes (EFM) ou Mixtes Hybrides (EFMH) sont sans doute préférables.

Ainsi, ce sont notamment les phénomènes de transfert qui nous ont guidé en premier lieu vers les VF. Notre idée était que les VF, par leur formulation, permettaient d'assurer localement les propriétés de conservation des équations de transfert tandis que les EF n'assurent qu'une conservation globale sur tout le domaine. Les VF ont également été mis en œuvre pour la partie mécanique. Ce dernier aspect, et le principe de discrétisation utilisé (que nous expliquerons par la suite), ont fait de la méthode implémentée des VF nouveaux et uniques en leur genre.

Dans un deuxième temps, nous sommes revenus vers les EF. Cela ne tient pas, remarquons le, à un éventuel constat d'échec des VF. Les VF mis en œuvre sont d'ordre 1 en espace. Ils sont plus précis que des DF ou des EF du même ordre ; pour des maillages écossais, on peut montrer facilement qu'ils sont équivalents à des DF d'ordre 2. Toutefois, le traitement des phénomènes non linéaires en mécanique, tels que plasticité et viscoplasticité, imposait parfois (comme c'est le cas pour des EF d'ordre 1) une finesse de maillage telle que cela en devenait prohibitif en terme de maillage. Le

passage à des VF d'ordre 2 impliquait alors de tout réinventer. Il était plus rapide de passer aux EF pour lesquels les bibliothèques existaient. Nous avons donc développé des EF d'ordre 1 et 2 dans le code qui offre ainsi le choix de la méthode de résolution.

Nous n'avons pas développé de méthode croisée VF/EF, en raison notamment des couplages : une réflexion serait à mener sur la question car si les EF (d'ordre 2) sont, selon notre expérience, adéquats pour la mécanique, ils sont moins adaptés que les VF pour le traitement de phénomènes de transfert en cas de convection.

## VI.2.1 Les Volumes Finis dans Anthyc

### VI.2.1.a Méthode des VF

- **Principe**

Les VF sont fréquemment utilisés pour résoudre numériquement les équations de transfert dans les géomatériaux (plus adaptés que les EF pour la convection), ainsi qu'en dynamique des gaz (avec utilisation de « flux numériques » spécifiques).

L'idée de base est très simple. Les équations de transfert font toujours intervenir un terme de divergence. On note  $F$  le terme à l'intérieur de la divergence ; il s'agit par exemple du vecteur courant de chaleur pour la thermique, du courant de masse pour l'hydraulique et le transport des solutés. Une intégration par parties (la formule d'Ostrogradski-gauss) permet de transformer l'intégrale sur le volume de la divergence en intégrale du flux sur le contour du volume. Le principe des VF consiste à discrétiser directement les équations sous cette forme « intégrée » sur le contour, et permettent ainsi de gagner un ordre de dérivation par rapport aux DF.

Notons que les remarques précédentes sont aussi valables pour la mécanique. L'intégrale de la divergence du champ de contraintes est ainsi ramenée à une somme des forces sur le contour du volume considéré.

- **Discrétisation spatiale**

On construit un petit volume, parfois appelé cellule, autour de chaque nœud de la discrétisation. Pour un phénomène donné, la discrétisation fournit ainsi équation par nœud.

Nous voyons, figure V-1, deux manières différentes de définir les cellules sur un maillage donné. Le maillage présenté est d'ordre 1 au sens des EF (c'est-à-dire que la connectivité est la même que pour des EF1).

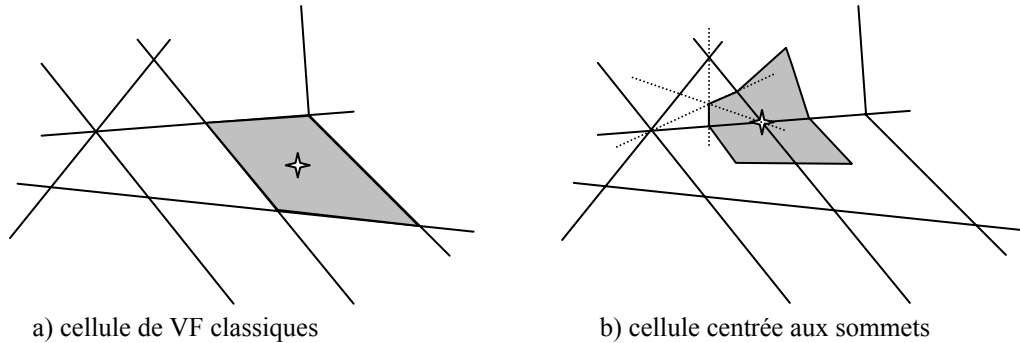


Figure VI-1 : Choix possibles des cellules et des noeuds de calcul en VF.

Sur la figure VI-1a, la cellule est une maille, et le point choisi pour la discrétisation est un point intérieur à la maille, typiquement le barycentre ; ce point est appelé naturellement *noeud* (de calcul), à ne pas confondre avec les « noeuds » du maillage appelés *sommets*. Souvent, on rajoute également comme noeuds les centres des mailles de frontières (faces en 3D et arêtes en 2D) pour une meilleure prise en compte des conditions aux limites. Les VF classiques utilisent ce découpage pour lequel les faces, auxquelles sont rattachés les flux, sont simples. Dans ce cas, deux noeuds sont toujours séparés par une face.

En figure V-1b, les noeuds correspondent aux sommets des mailles, et les cellules sont construites autour. Dans le cas présenté, l'union des cellules forme une partition du domaine global ; ce n'est pas une nécessité (les cellules pourraient se recouvrir), mais c'est préférable pour minimiser la taille du système à résoudre. On remarquera qu'une cellule n'a pas nécessairement une forme simple : c'est un polygone en 2D (resp. polyèdre en 3D), possédant jusqu'à 2 fois plus d'arêtes (resp. 3 fois plus de faces) qu'il y a de mailles autour d'un noeud.

La première méthode est la méthode classique. C'est la plus simple à mettre en oeuvre, et permet une résolution plus rapide. La deuxième est néanmoins plus adaptée dès lors qu'il y a une discontinuité dans les propriétés (liée, par exemple, à un changement de matériau), car le maillage est généralement construit de sorte que les interfaces entre matériaux se confondent avec les bords des mailles. Prenons l'exemple simple de la thermique : la discrétisation conduit au calcul de l'intégrale

$\int (\underline{\lambda \cdot \nabla T})_n$  sur le contour des cellules. Avec les VF classiques, on a à calculer ces intégrales sur des faces correspondant à une interface entre matériaux, lieu où la conductivité n'est pas connue. Tel n'est pas le cas avec le second type de VF.

#### ***VI.2.1.b Méthode mise en oeuvre dans Anthyc***

Les VF classiques, comme les DF, n'utilisent pas de fonctions d'interpolation. C'est compréhensible en dynamique des gaz par exemple, car les fonctions de forme imposent, par essence, une forme aux champs résultats. Cela fait la force des VF qui permettent de résoudre, nous l'avons dit des problèmes très complexes de saut (ondes de chocs...), mais rend parfois délicat, ou très approximatif, le calcul de termes différents (typiquement, tout ce qui n'est pas un flux). Par exemple, l'intégrale sur une cellule d'un terme source est approximée par le produit de la valeur de la source au noeud par le volume de la cellule.

Anthyc, en revanche, a été créé initialement pour résoudre des problèmes THM et THMC en milieux poreux, pour lesquels on sait que les solutions en température, pression, déplacements, concentrations... sont continues. Nous avons dès lors fait le choix d'utiliser des fonctions de forme pour la discrétisation spatiale. Ceci permet le calcul aisé et précis des dérivées et des termes autres que les flux (ainsi, bien sûr, que les flux). Nous avons choisi les éléments les plus classiques, de type Polynômes de Lagrange de degré 1 (P1), avec utilisation d'éléments de référence. Pour les termes autres que les termes de divergence (il s'agit, nous allons le voir, des différents termes de couplages et des dérivées temporelles), il n'y a bien sûr pas transformation en intégrales sur le contour, et leur intégration se fait directement, et la méthode de discrétisation pour ces termes s'appelle collocation par sous domaine. La méthode mise en oeuvre dans Anthyc est donc une méthode mixte collocation par sous domaines / Volumes Finis.

Nous avons choisi de prendre des cellules centrées aux sommets pour les VF. Il y a deux raisons principales à ce choix :

- ✓ tout d'abord, ce choix permettait de revenir facilement aux EF si nos VF se révélaient désastreux, puisque seule la construction des matrices élémentaires serait à changer ;
- ✓ ensuite, pour pouvoir facilement prendre en compte plusieurs matériaux (le choix des cellules confondues avec les mailles n'est pas, nous l'avons expliqué, adapté pour ces cas).

## VI.2.2 Possibilités du code

### VI.2.2.a Equations génériques

Les processus intervenant dans les études de milieux poreux sont toujours des processus de transfert, couplés avec le comportement mécanique du géomatériau. De manière à pouvoir d'une part rester très général, et d'autre part enrichir de manière simple le code par la prise en compte de nouveaux phénomènes, ce dernier a été écrit en utilisant des équations génériques pour le transport et la Mécanique.

- **Equation générique de transport**

L'équation qui a été introduite pour les phénomènes de transfert l'a été pour pouvoir prendre en compte tout phénomène de transfert, tout type de couplage avec un autre phénomène de transfert intervenant ainsi qu'avec la Mécanique. Cette « équation générique de transport » permet a priori :

- ✓ tout choix de variables de transport ;
- ✓ tout type de couplage entre ces variables, et avec la mécanique ;
- ✓ tout type d'anisotropie des coefficients ;
- ✓ tout type de non linéarité des coefficients.

Considérons un problème d'évolution faisant intervenir  $N$  variables de transport  $X_1, \dots, X_N$ , et la Mécanique. L'équation générique s'écrit pour la variable  $i$  (avec convention de sommation sur les indices répétés dans les produits contractés) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^1 \cdot \underline{\operatorname{grad}}(X_j) + \underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^2 \cdot X_j) + \underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^3 \cdot \underline{\operatorname{grad}}(X_j) + \underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^4 \cdot (X_j - \overline{X_j}) + \underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^5 \\ = \underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^6 \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\lambda}_{j \rightarrow i}^7 \cdot X_j) + \delta_{k \rightarrow i}^1 : \frac{\partial}{\partial t} (\delta_{k \rightarrow i}^2 \underline{Z}_k) \end{aligned} \quad (\text{VI.1})$$

où :

- ✓ les tenseurs  $\underline{Z}_k$  sont des déformations (totale, réversible, ou irréversibles), les termes  $\delta_{k \rightarrow i}^1$  et  $\delta_{k \rightarrow i}^2$  représentant l'action de la Mécanique sur l'équation  $i$  ;
- ✓ les scalaires ou tenseurs (d'ordre 1 ou 2) «  $\lambda_{j \rightarrow i}^m$  » sont des coefficients désignant l'action du champ  $j$  sur l'équation  $i$  pour un couplage dont le type est donné par l'exposant  $m$  : diffusif, convectif, ...

✓ les scalaires  $\overline{X}_j$  sont des valeurs de référence (concentration à saturation, etc...).

Vis-à-vis de l'introduction des données, de manière à faciliter l'utilisation du code par un non spécialiste, un certain nombre de phénomènes ont été mis en avant (thermique, hydrauliques, mécanique), et certains paramètres ont été figés a priori (viscosité, densité et compressibilité de l'eau par exemple). Mais il suffit à l'utilisateur de déclarer, via des codes, qu'il désire introduire ses propres phénomènes et ses propres paramètres, dépendant ou non des inconnues du problème, pour qu'il se retrouve complètement libre de ses choix.

- **Aspect mécanique**

Du point de vue mécanique, les lois constitutives du matériau sont écrites indifféremment via les concepts de contrainte totale ou de contrainte effective :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}_i P_i \quad (\text{VI.2})$$

Par ailleurs, le code est écrit dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On postule une partition du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  en parties élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ , irréversible  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$  (plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ , viscoplastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ ) et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^i$  pour les déformations éventuellement liées à la variable de transfert  $i$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{irr} + \sum \underline{\underline{\varepsilon}}^i \quad (\text{VI.3})$$

De manière générale, on postule  $\underline{\underline{\varepsilon}}^i = \underline{\underline{\alpha}}^i (X_i - X_i^0)$  où  $X_i^0$  désigne la valeur initiale de la variable de transfert considérée.

Influence des phénomènes de transfert :

Selon les cas, l'action d'un phénomène de transfert sur la Mécanique peut être traduite par une contrainte (par exemple les pressions partielles dans les pores) ou par une déformation (telle la dilatation thermique). L'utilisateur a le choix de cette action, via une clé en entrée pour indiquer que la prise en compte dans la loi de Hooke généralisée se fait au moyen d'une pression ou bien comme une déformation.

Irréversibilités :

Le code permet de prendre en compte des comportements mécaniques non linéaires de type plastique et/ou viscoplastique. Ceux-ci peuvent être traités en terme de contrainte totale ou de



contrainte effective (plastique et/ou viscoplastique), les différents paramètres pouvant dépendre de n'importe quelle variable. Kharkhour (2002) a étudié la possibilité de mise en œuvre d'un modèle couplé viscoplasticité/endommagement (au sens de la théorie de l'endommagement).

### ***VI.2.2.b Possibilités offertes***

Le code Anthyc, de par sa formulation « générique », permet le traitement couplé de nombreux problèmes d'évolution pour les milieux poreux. En dehors de l'action des phénomènes mécaniques irréversibles, les couplages en question sont directs pour les coefficients diagonaux comme non diagonaux. Les propriétés des matériaux peuvent être anisotropes et non linéaires. Bien évidemment, les hétérogénéités du milieu liées à la présence de plusieurs matériaux peuvent être prises en compte. Enfin, l'introduction d'éléments de joints de degré 1 ou 2 en EF permet l'étude de milieux fracturés et de milieux à double porosité.

Face à ce grand nombre de possibilités et de paramètres, le code a été conçu avec un souci de convivialité pour l'utilisateur.

Dans sa version actuelle, le code permet de traiter les cas de régimes transitoires ou stationnaires thermique et hydraulique (avec plusieurs phases fluides) dans les milieux poreux. La chimie ne disposant pas encore d'un formalisme bien établi, son traitement est moins figé (au niveau de l'introduction des données) que celui des phénomènes précédents. Concernant les milieux fracturés, certaines études réalisées pour l'Andra ont permis de figer certains points au niveau de la mécanique (élasticité, plasticité) et de l'hydraulique ; les autres phénomènes sont encore en chantier.

Au sein d'un même calcul, il est possible de simuler des scénarios phasés : phase de creusement, enlèvement et/ou rajout de matériaux sur une période, creusement progressif (avec activation/désactivation de mailles), évolution de propriétés en fonction du temps pour prendre en compte des matériaux dont les lois rhéologiques n'ont pas été formulées à moyen ou long terme.

## **VI.2.3 Conclusion**

Le code Anthyc est devenu progressivement le code de calcul de G.3S et a remplacé au sein du Groupement d'autres codes tels que CESAR-LCPC, Castem, GEOMECH. Il dépasse clairement le cadre de la présente thèse. A la section suivante, nous utilisons le code pour faire quelques applications numériques relatives aux argiles dans le stockage et au modèle de gonflement.

### **VI.3 Gonflement d'une B.O. en argile gonflante**

Une loi de comportement hydrochimicomécanique a été proposée pour les argiles gonflantes. Nous allons la mettre en oeuvre ici. L'objectif visé est de montrer les conséquences de la prise en compte – ou non – des effets d'une évolution de la concentration (et, nous le verrons ensuite, de la température) sur le phénomène de gonflement dans un calcul d'ouvrages. Aussi allons nous nous limiter à des ouvrages simples, laissant de côté les effets de structure.

Nous considérerons le cas d'une galerie de stockage de déchets située à 500m de profondeur dans le massif d'argilites, milieu supposé infini. Le massif est supposé homogène et isotrope avant le creusement de l'ouvrage. Dans la galerie, les matériaux mis en place sont, du contenant au contenu (ordre de mise en place) :

- De l'argile gonflante
- Un chemisage en acier (manchon dans lequel on glisse les colis)
- Les colis de déchets.

La galerie sera supposée suffisamment longue pour que l'on puisse faire l'hypothèse, dans un plan perpendiculaire à l'axe, des déformations planes. Les modélisations sont réalisées en axisymétrie, si bien que l'hypothèse précédente ramène l'ensemble à des problèmes unidimensionnels, ou 2D avec déformations longitudinales empêchées.

Il s'agira donc de modélisations 2D axisymétriques faisant intervenir quatre matériaux dont nous allons présenter les caractéristiques avant de passer aux calculs proprement dit.

Les calculs sont menés en plusieurs phases. Cela est nécessaire, car ils s'agit de calculs faisant intervenir les phénomènes mécaniques, hydraulique, transport de masse de soluté / gonflement, et, pour finir, thermique. S'ils ne sont pas trop compliqués, leur analyse peut l'être en raison du nombre de phénomènes intervenant, des couplages intervenants, et des lois de comportement non linéaires utilisées pour la B.O. et le massif. Le phasage se rapporte au comportement supposé des argilites.

## VI.3.1 Matériaux

### VI.3.1.a Les argilites

Elles ont déjà été présentées au chapitre II. La prise en compte successive des différents aspects de son comportement mécanique détermine le phasage évoqué ci avant.

Nous distinguerons les trois comportements suivants :

- Elastique
- Elastoplastique parfait en prenant comme critère (et potentiel) le critère d'initiation de l'endommagement
- Elastoviscoplastique

En particulier, le caractère elastoplastique parfait (item 2) n'est envisagé que pour mieux comprendre les aspects charge / décharge du massif liés aux écoulements et au gonflement.

Par ailleurs, la loi d'endommagement / rupture proposée au chapitre III ne sera étudiée qu'en section VI.4.

Concernant les paramètres de transport de masse de soluté, nous prenons un tenseur de diffusion moléculaire isotrope :

$$\underline{\underline{D}}_a = d_a \underline{\underline{1}} \text{ avec } d_a = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}, \quad (\text{VI.4})$$

tandis que la porosité accessible au soluté est prise égale à celle pour le solvant eau. De plus, la convection par le fluide est prise en compte, de la manière simple proposée au chapitre III, mais nous n'en étudierons pas les effets spécifiques (qui nous semblent mineurs ici).

### VI.3.1.b Les déchets et le colisage

Puisque l'on ne s'intéresse pas à l'oxydation des métaux (colisage, colis) ni au relâchement de radio nucléides, le seul intérêt de la prise en compte de ces matériaux réside dans la production de chaleur par les déchets, soit dans l'étude en température de la section VI.4.

D'un point de vue mécanique, ces deux matériaux sont supposés élastiques :

- Chemisage en acier :
  - Module d'Young :  $E_{ac} = 200 \text{ GPa}$

- Coefficient de Poisson :  $\nu_{ac}=0,3$
- Colis de déchets :
  - Module d'Young :  $E_{dc}=3800$  MPa
  - Coefficient de Poisson :  $\nu_{dc}=0,3$

Les valeurs choisies pour les déchets n'ont que peu d'intérêt : le déplacement radial en paroi interne de la B.O. sera géré par la seule interaction colisage / B.O., et sera de fait quasiment nul.

L'ensemble {déchets+colisage} est supposé imperméable. Ceci n'est sans doute valable que les 300 premières années du stockage, mais n'a certainement pas d'effet notable des points de vue mécanique et hydrique.

### ***VI.3.1.c La barrière ouvragée***

Au chapitre III, nous avons présenté une loi de comportement de type Cam-Clay pour cette argile, que nous avons été amené à mettre au point pour des calculs réalisés pour l'Andra. Nous n'utiliserons pas cette loi qui, comme c'est souvent le cas pour les modèles de Cam-Clay, est relativement délicate à utiliser dans un calcul d'ouvrage. Cette loi « Cam-Clay ingénieur » combine une élasticité non linéaire avec un régime hydraulique non linéaire à cause de l'évolution du coefficient de Biot.

Difficulté : Le modèle est élastoplastique avec, notamment, une élasticité (fortement) non linéaire. Les caractéristiques élastiques peuvent être exprimées en fonction de l'état de contraintes ou des tenseurs de déformation. Imaginons le traitement numérique d'un cas simple : une compression isotrope croissante d'échantillon. Si le calcul est piloté en contraintes, les traitements numériques des parties élastiques et plastiques sont indépendants. En revanche, si l'on veut reproduire le cas d'un essai à déplacement contrôlé, le traitement numérique est plus délicat et il faut simuler des incréments de chargement très petits dès lors que l'on atteint le seuil de plasticité.

Dans le cas qui nous préoccupe, l'argile Fo-Ca formant la B.O. sera fortement compactée, et l'on est certain de rester dans le domaine d'élasticité. Mais le problème que nous venons d'évoquer existe dans nos calculs du fait de l'existence d'un autre matériau présentant un comportement irréversible : le massif, en contact avec la B.O. Dans les calculs que nous allons montrer, la B.O. se situe dans un état intermédiaire entre déplacements imposés et contrainte imposée. Du fait du comportement du massif, nous devons éviter que les caractéristiques élastiques de la B.O. ne varient fortement au cours des itérations plastiques, modifiant l'état contraintes/déformations à l'interface B.O. / massif.

Nous utilisons une loi de comportement élastique non linéaire de non linéarité moins prononcée (en  $|\sigma_m|^k$  avec  $k < 1$ ), comme cela est souvent pratiqué pour les argiles :

✓ Module d'Young drainé :  $E_b = E_0 \left| \frac{\sigma_m}{p_0} \right|^k$ , avec  $E_0 = 190$  Mpa,  $k = 0,5$  et  $p_0 = 1$  MPa

✓ Coefficient de Poisson drainé :  $\nu_b = 0,33$

En outre, nous prenons un coefficient de Biot  $b_b = 0,1$  et un Module de Biot  $M_b = 1670$  MPa. La porosité initiale du matériau saturé à 70% est prise égale à  $\phi_b^0 = 22\%$ . Sur la figure suivante (figure VI-2), nous confrontons le modèle à l'un des essais présentés en annexe B, dans un calcul de compression à l'œdomètre pour vérifier a minima la cohérence du comportement élastique.

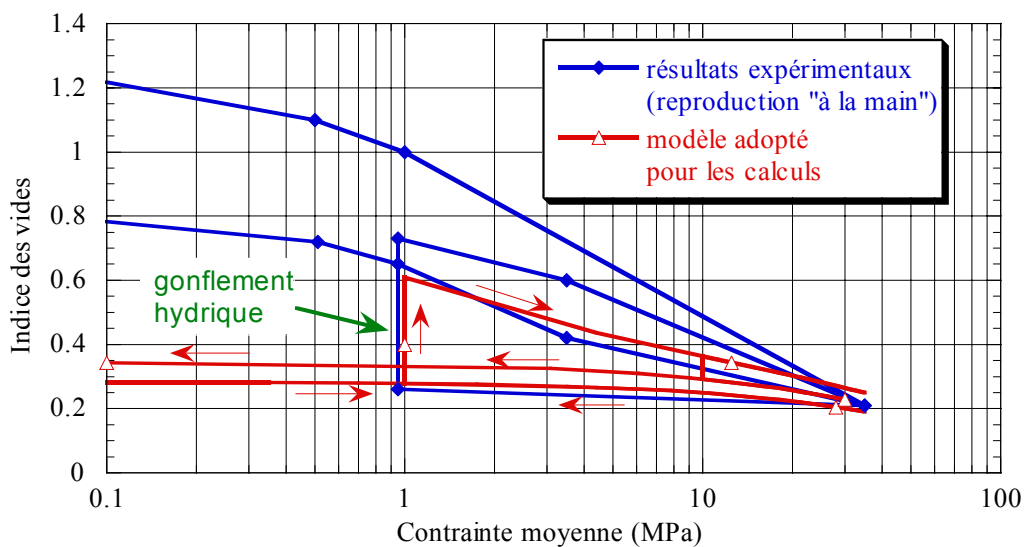


Figure VI-2 : Evolution de l'indice des vides dans des cycles de charge-décharge mécanique et hydrique obtenue avec le modèle non linéaire en puissance. Comparaison à un résultat d'essai sur l'argile Fo-Ca.

Concernant le soluté, nous faisons les mêmes hypothèses que pour le massif, avec pour la diffusion :

$$\underline{D}_b = d_b \underline{1} \text{ avec } d_b = 7,7 \cdot 10^{-10} \text{ m/s,} \quad (\text{VI.5})$$

Pour le gonflement, nous considérons une surface spécifique de l'argile :

$$s_b = 580 \text{ m}^2/\text{g} \quad , \quad (\text{VI.6})$$

et la masse volumique de solide, qui a été estimée en annexe B, vaut :

$$\rho_{sb} = 2700 \text{ kg/m}^3. \quad (\text{VI.7})$$

### VI.3.2 Géométrie et maillage

Comme nous l'avons dit, le cas de calcul est unidimensionnel en coordonnées cylindriques. Les calculs numériques sont donc réalisés en axisymétrie. La géométrie est présentée en figure VI-3 Le massif est modélisé jusqu'à un rayon extérieur de 50 mètres. Le rayon étant désigné par  $r$ , nous avons :

- $0 \leq r \leq 0,22$  m : les colis de déchets
- $0,22 \text{ m} \leq r \leq 0,3$  m : le chemisage
- $0,3 \text{ m} \leq r \leq 1$  m : la B.O. argileuse
- $1 \text{ m} \leq r \leq 50$  m : l'argilite

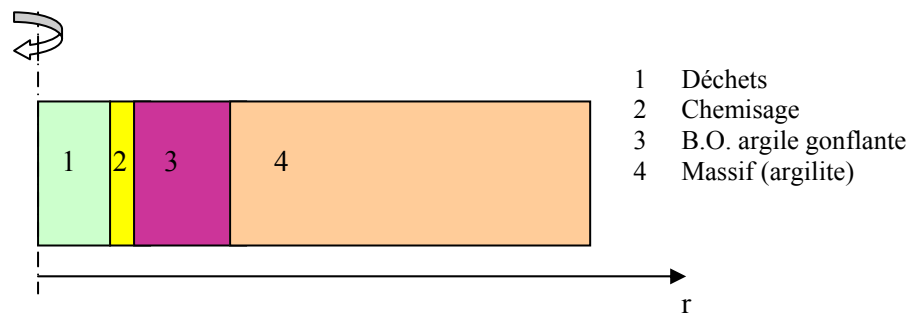


Figure VI-3 : Modèle 2D axisymétrique

La discrétisation spatiale utilisée est de type éléments finis d'ordre 2. Le maillage est constitué de 337 éléments, et 1688 nœuds (quadrilatères à 8 nœuds). Un zoom du maillage, jusqu'à  $r = 5$  m, est montré en figure VI-4. Nous montrons en même temps sur cette figure les différents zones correspondant aux matériaux pris en compte.

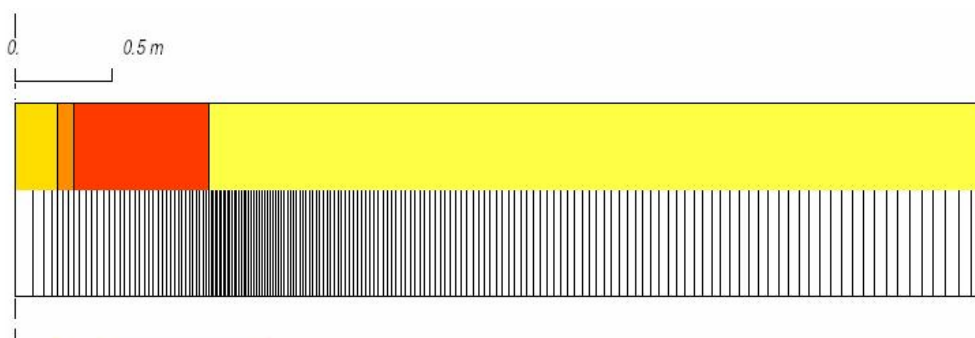


Figure VI-4 : Maillage utilisé (zoom) pour l'étude du gonflement-retrait de la B.O. Visualisation des zones correspondant aux différents matériaux.

### VI.3.3 Phasage des calculs, conditions initiales et aux limites

Chaque calcul est décomposé en trois phases :

- une phase de creusement,
- une phase d'évolution avant la mise en place des matériaux dans la galerie,
- l'évolution après remplissage de la galerie.

#### VI.3.3.a Creusement

Le creusement de la galerie est supposé instantané, et donc non drainé. On note  $R_i$  le rayon de la galerie.  $R_i = 1$  m. Pour  $r < R_i$ , on simule le creusement par « désactivation » des mailles : on remplace le matériau « argilite » par un matériau « air » dont les propriétés mécaniques sont quasi-nulles ( $E = 10^{-20}$  MPa,  $\nu = 0$ ). Du point de vue du transport le caractère non drainé du creusement est rendu en considérant le matériau air comme étant imperméable. Le parement de galerie devient alors une limite interne où les flux de masse sont nuls.

#### VI.3.3.b Evolution avant remplissage de la galerie

Au niveau d'un stockage, il est vraisemblable que toutes les galeries de stockage d'un même module seront creusées avant qu'on ne mette le moindre déchet. Ensuite, ces galeries seront toutes remplies et le module scellé. Certaines galeries attendront donc un certain nombre d'années avant que les déchets y soient disposés.

Nous avons supposé que la galerie n'est remplie qu'au bout de 10 ans. Pendant cette période, il y a sans doute un revêtement provisoire (béton projeté), mais cela n'est pas certain. Nous n'en considérons pas. Dans la galerie, il y a de l'air, dont l'humidité relative est supposée valoir 86 %, correspondant à une succion de 20MPa (voir annexe C). Le massif, s'il ne l'est pas déjà du fait du creusement, va donc progressivement se désaturer. Les champs de déplacement et de contraintes s'en trouvent affectés. L'humidité relative dans la galerie est supposée fixe.

### VI.3.3.c Evolution après mise en place des matériaux dans la galerie

A la date  $t=10$  ans, on met en place, de manière supposée instantanée, la B.O. argileuse, le chemisage et les déchets. Au niveau numérique, cela se traduit par une réaffectation de matériaux aux mailles situées dans la zone de la galerie (abscisse des nœuds  $\leq R_i$ ).

- Sous l'effet de l'arrivée d'eau depuis le massif, la B.O. a tendance à gonfler, du simple fait de son comportement hydro-mécanique.
- Par ailleurs, l'eau en provenance du massif transporte des solutés. Ceux-ci se déplacent également par diffusion, et peuvent aller vers la B.O. ou vers le massif, selon le gradient envisagé. Nous étudions l'effet des solutés sur le gonflement.

Cette troisième phase est envisagée sur  $5.10^4$  ans.

### VI.3.3.d Schéma du phasage envisagé

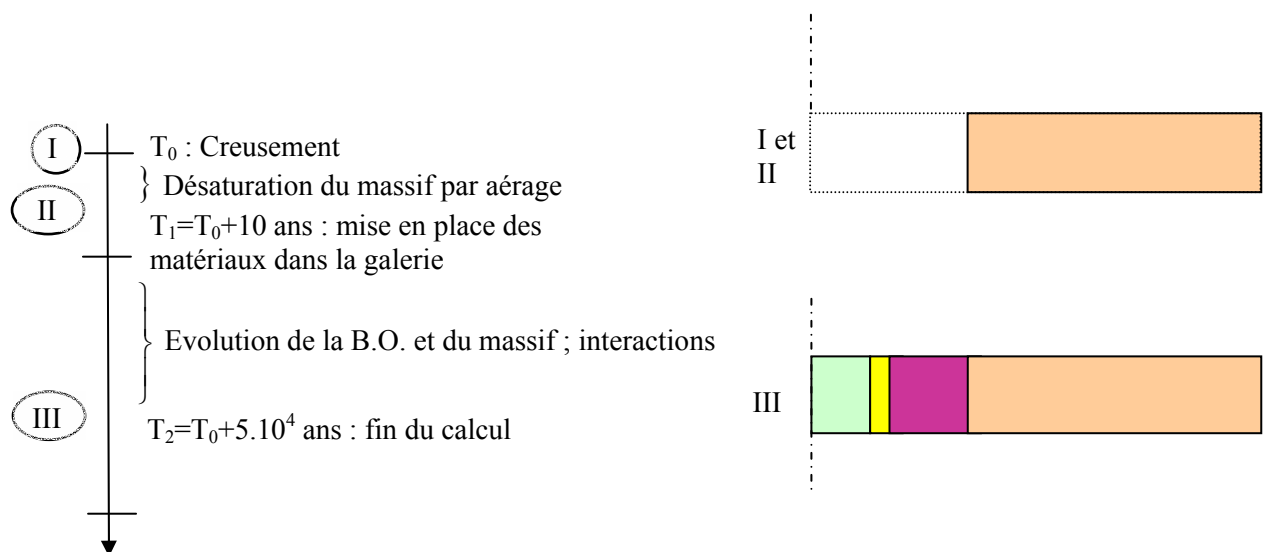


Figure VI-5 : Schéma du phasage, et matériaux « activés » correspondants



### VI.3.3.e Conditions initiales

Les conditions initiales désignent, pour le massif, son état avant creusement, et pour les autres matériaux leur état lors de la mise en place en galerie. Nous utiliserons les indices  $a$  pour l'argilite,  $b$  pour la B.O.,  $c$  pour le chemisage et  $d$  pour les déchets.

#### Massif :

La contrainte initiale (i.e. avant creusement) dans le massif est isotrope et vaut :

$$\underline{\underline{\sigma}}_a^0 = \sigma_a^0 \underline{\underline{1}} \text{ avec } \sigma_a^0 = -12 \text{ MPa} \quad (\text{VI.8})$$

La pression interstitielle qui y règne est la pression hydrostatique, nous la supposons uniforme :

$$P_a^0 = 5 \text{ MPa} \quad (\text{VI.9})$$

Quant à la concentration, on lui affectera deux valeurs distinctes selon le cas de calcul :

- Cas 1 :  $C_a^0 = 1 \text{ mol/l}$
- Cas 2 :  $C_a^0 = 1 \text{ mol/l}$
- Cas 3 :  $C_a^0 = 10^{-5} \text{ mol/l}$

#### Barrière ouvragée :

Lors de sa mise en place, la B.O. est supposée saturée à 70%, ce qui correspond à une pression négative  $P_b^0 = -100 \text{ MPa}$ . Elle est libre de contrainte :  $\sigma_b^0 = 0 \text{ MPa}$  ; et sa concentration dépendra, comme pour le massif, du cas de calcul envisagé :

- Cas 1 :  $C_b^0 = 1 \text{ mol/l}$
- Cas 2 :  $C_b^0 = 10^{-5} \text{ mol/l}$
- Cas 3 :  $C_b^0 = 1 \text{ mol/l}$

#### Chemisage et déchets (colis) :

Lors de leur mise en place, ils sont libres de contrainte :  $\sigma_d^0 = \sigma_c^0 = 0 \text{ MPa}$ .

### VI.3.3.f Conditions aux limites :

Elles sont particulièrement simples, les cas étant en réalité 1D :

- ✓ Sur les bords perpendiculaires à l'axe de galerie (bords haut et bas sur la figure VI-3), le déplacement normal est empêché, et l'on y impose un flux de masse nul pour l'eau et le soluté (figure VI-6)
- ✓ Au niveau du rayon extérieur  $R_e$ , les valeurs de la contrainte normale (radiale), de la pression et de la concentration sont prises égales à leurs valeurs respectives initiales.

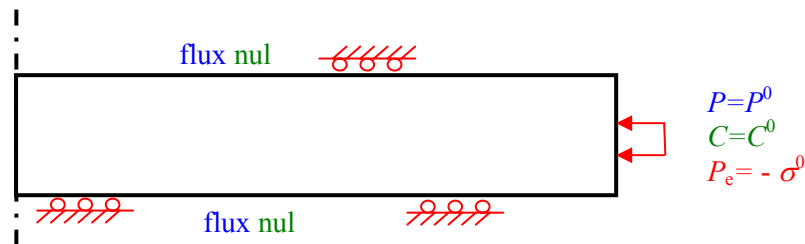


Figure VI-6 : Conditions aux limites pour l'ensemble des calculs

### VI.3.4 Etude

Comme nous l'avons souligné plus haut, nous faisons une variation sur les propriétés mécaniques du massif. Dans cette partie, nous considérons trois comportements possibles :

- ✓ massif élastique,
- ✓ massif endommageable (avec plasticité parfaite),
- ✓ massif elastoviscoplastique.

Pour chaque comportement envisagé, nous considérons trois cas de calculs dépendant des concentrations dans le massif et la B.O. :

- 1<sup>er</sup> cas : le massif et la B.O. ont sensiblement la même concentration,
- 2<sup>ème</sup> cas : la concentration du massif est plus élevée que dans la B.O.
- 3<sup>ème</sup> cas : la concentration du massif est moins élevée que dans la B.O.

Ainsi, pour chaque type de comportement envisagé pour le massif, on étudiera l'effet d'une augmentation ou d'une baisse de concentration dans la B.O. sur l'ouvrage.

Au préalable, nous examinons les résultats d'un calcul hydromécanique, le massif étant élastique. L'ensemble est poroélastique non linéaire (loi de comportement non linéaire de la B.O.). Ce calcul sert de base pour l'analyse des autres calculs.

### VI.3.5 Calcul en poroélasticité (non linéaire)

#### VI.3.5.a Evolution de la pression de pores

L'évolution de la pression de pores au cours des cent premières années est donnée figure VI-7. pour trois points : à  $r=0,3$  mètre,  $r=0,8$  mètre et  $r=1$  mètre. Le rayon  $r=0,3$  m correspond à la paroi interne de la B.O., après sa mise en place. Le rayon  $r=0,8$  m correspond à un point plus à l'intérieur de la B.O. Ce point sera le point dit « de référence » dans la suite. Pour ces deux points, les pressions avant la date  $t=10$  ans sont en fait les pressions équivalentes à l'humidité relative dans la galerie. A la date de mise en place, elles passent à la valeur de pression initiale dans la B.O., c'est-à-dire la pression équivalente à la succion initiale. Ensuite, sous l'effet de l'arrivée d'eau du massif, ces pressions augmentent – plus lentement, c'est normal, en paroi interne de la B.O.

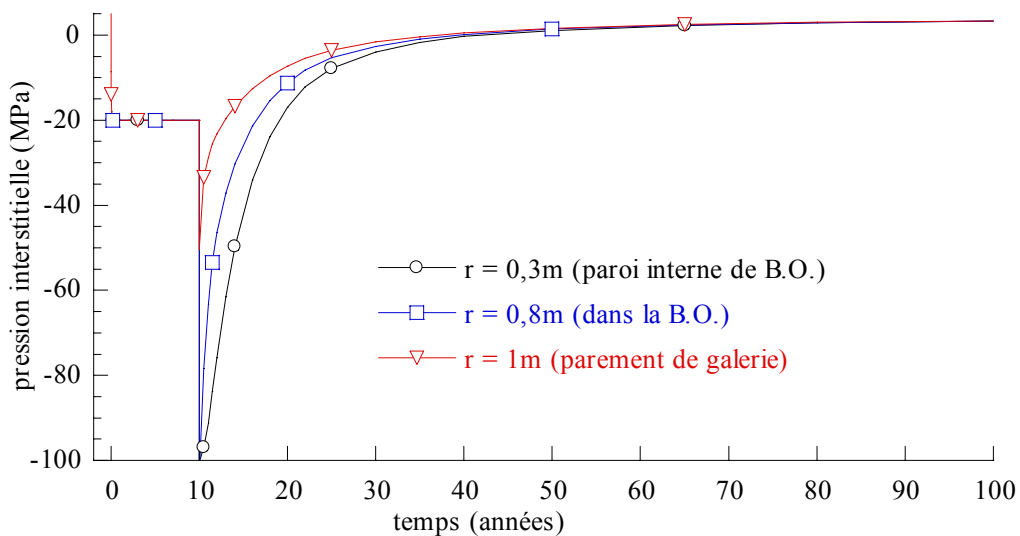


Figure VI-7 : Evolution en fonction du temps de la pression de pores en trois points de la barrière ouvragée (calcul poroélastique).

Nous montrons, figure VI-8 , les profils du champ de pression interstitielle à différentes dates, dans la galerie (i.e. la B.O.) et au voisinage, jusqu'à  $r=5$  mètres.

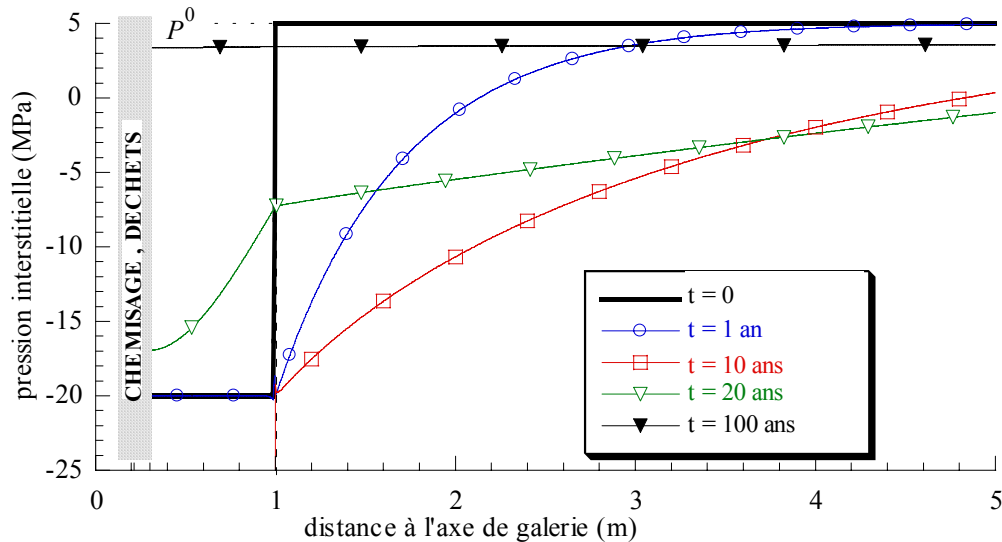


Figure VI-8 : Coupes du champ de pression à différentes dates (calcul poroélastique).

En cinq ans l'ensemble {B.O. + massif} est resaturé et la pression minimum à la date 100 ans est de 3,37 MPa, soit la pression hydrostatique initiale. C'est rapide, et lié notamment au fait que nous ne prenons pas en compte ici la baisse de la perméabilité au fluide liée à la désaturation due au creusement (pour ce qui concerne le massif).

Remarquons en outre que la pression interstitielle est peu affectée par le creusement (figure VI.8) bien que le coefficient de Biot des argilites soit élevé ( $b_a=0,65$ ), car les argilites sont raides et se déforment peu.

### VI.3.5.b Contraintes

Le champ de contraintes à l'issue du creusement est donné figure VI-9. Nous montrons les composantes radiales  $\sigma_{rr}$ , orthoradiale  $\sigma_{\theta\theta}$  et longitudinale  $\sigma_{zz}$  ( $z'z'$  étant l'axe de galerie) qui correspondent aux contraintes principales. C'est un profil classique, qu'on obtiendrait par un calcul mécanique seul puisque le creusement est non drainé (il est instantané).

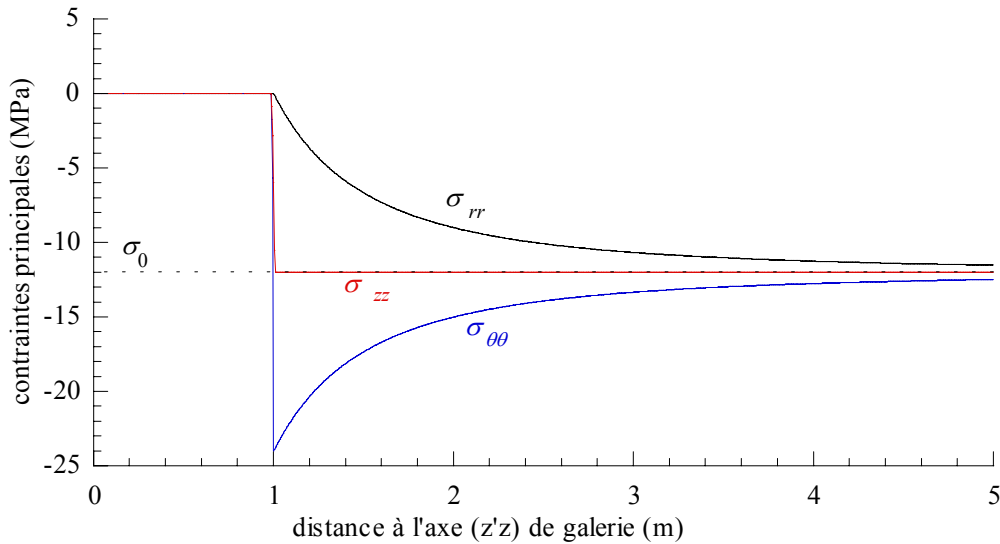


Figure VI-9 : Composantes principales du champ de contraintes à l'issue du creusement élastique (calcul poroélastique).

Ensuite, le champ de contraintes évolue du fait du drainage du massif par la galerie dans un premier temps, puis par la B.O. après sa mise en place. Les figures VI-10a,b,c donnent les profils des contraintes principales à différentes dates :

- immédiatement après le creusement, du fait de l'humidité relative qui impose une succion en parement de galerie, les contraintes évoluent fortement ; la contrainte longitudinale devient une traction au voisinage de la paroi (figure VI-10b) ; la contrainte orthoradiale en prend le chemin. Tel aurait été le cas si la succion exercée en paroi avait été plus forte. Puis les contraintes évoluent vers un état qui serait atteint lorsque le champ de pression interstitielle se stabiliserait avec cette même condition « limite » en pression au niveau du parement. Tel n'est pas le cas en raison de la mise en place de la B.O.
- Après la mise en place à la date  $t=10$  ans, la B.O. draine le massif mais exerce sur lui en parallèle un effort normal qui tend à ramener le champ de contrainte proche de son état avant le creusement.

Le retour du massif à son état hydromécanique initial dépend notamment de la contrainte normale exercée en parement. On voit, figure VI-10a, qu'elle est de l'ordre de 7,2 MPa à la date  $t=20$  ans et 8,5 MPa à la date  $t=50\ 000$  ans ; Ainsi 80% de la pression exercée l'est dix ans après remplissage de la galerie.

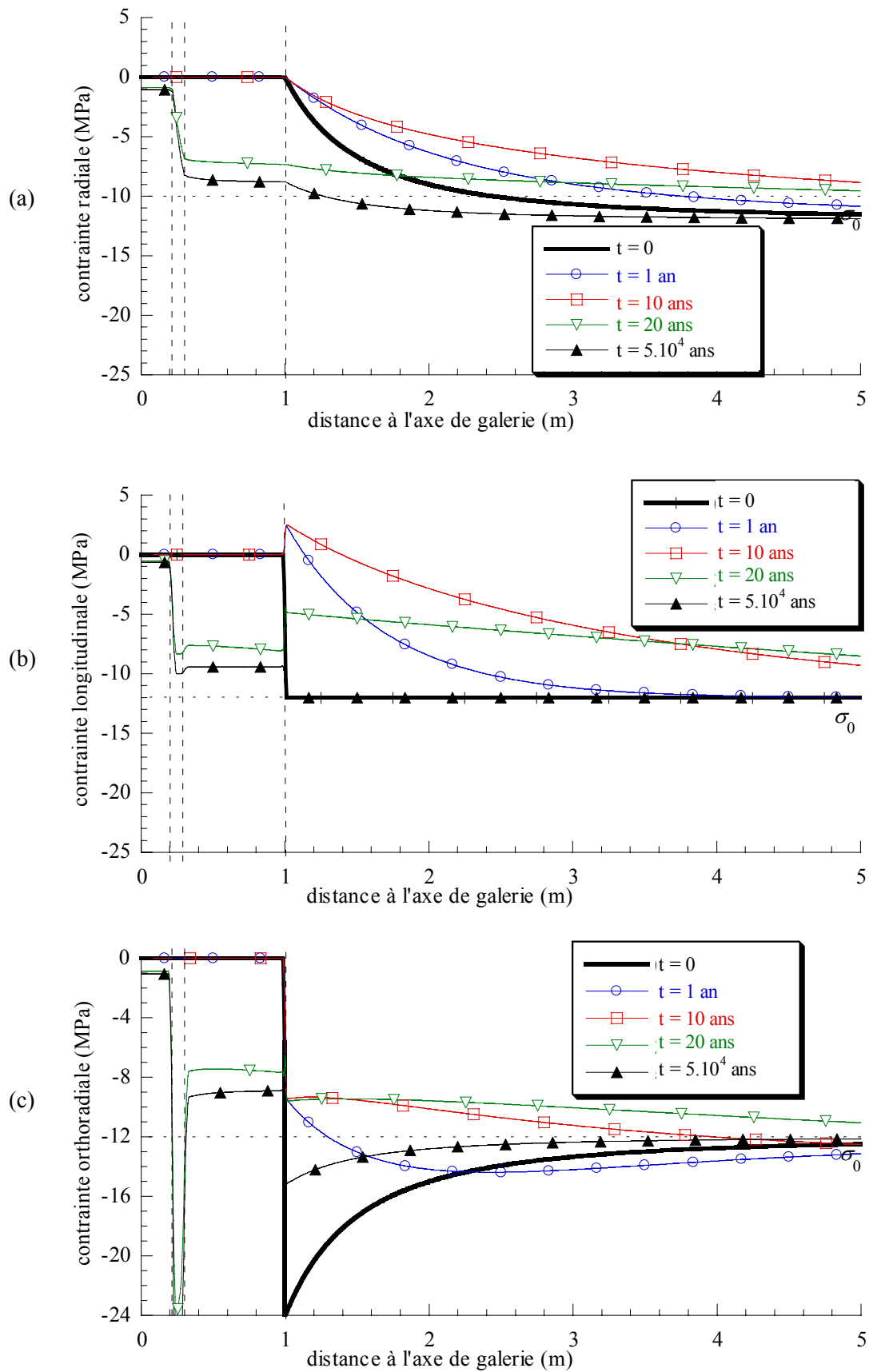


Figure VI-10 : Coupes des contraintes à différentes dates (calcul poroélastique).

Nous montrons, figure VI-11, l'évolution de la contrainte radiale au point de référence, proche du parement à  $r=0,8$  mètre. (la contrainte radiale en parement en est très proche). On constate en effet sur cette figure que l'effort de gonflement (hydrique) de la B.O. est intégral au terme de 100 ans. Ici encore, cet effet est lié à la montée rapide de la pression dans la B.O., du fait d'une perméabilité considérée constante.

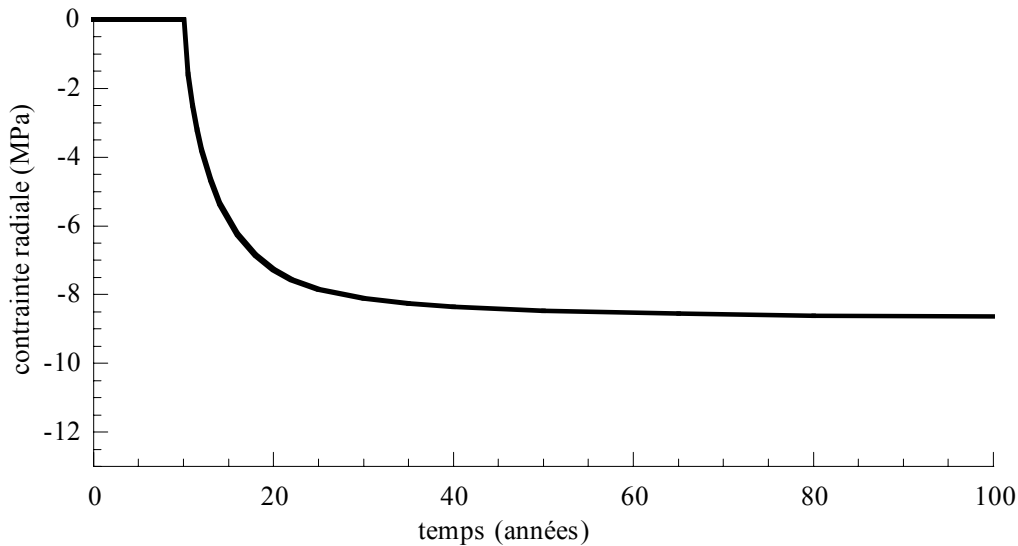


Figure VI-11 : Evolution de la contrainte radiale dans la B.O. (à  $r = 0,8 R_j$ ).

### VI.3.6 Prise en compte de la chimie – massif élastique

#### VI.3.6.a Concentration « fixe »

Nous faisons, rappelons le, trois calculs correspondant à trois scénarios d'évolution de la concentration dans la B.O.. Le cas 1, correspondant à une égalité des concentrations initiales entre le massif et la barrière ouvragée, doit donner des résultats proches de ceux du calcul poroélastique. L'évolution de la contrainte radiale au point de référence à  $r=0,8$  m peut être comparée entre ces deux calculs (figure VI-12).

En intensité, on voit que dans un premier temps la contrainte radiale obtenue dans le calcul faisant intervenir la concentration est légèrement plus forte que celle obtenue par le calcul hydromécanique, puis elle devient plus faible (également légèrement).

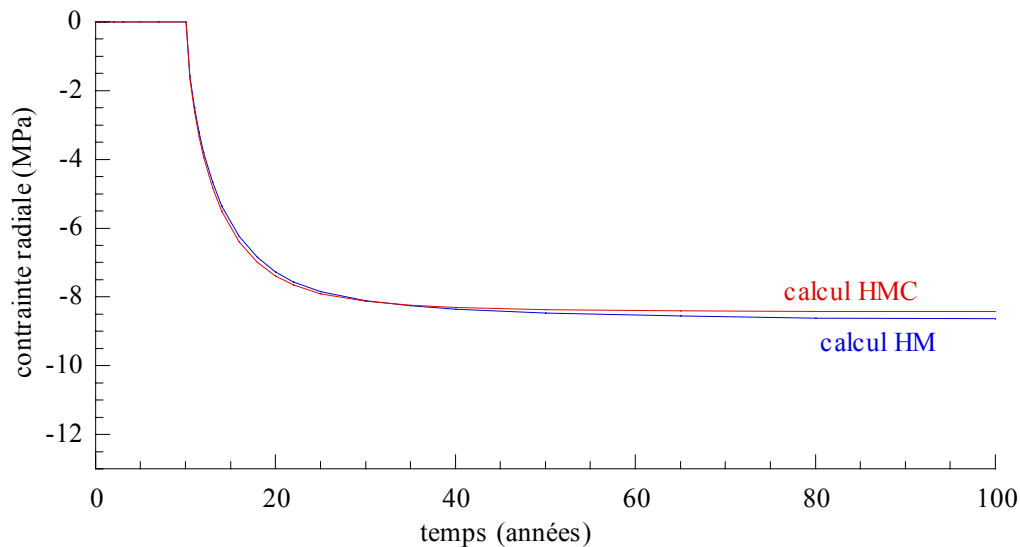


Figure VI-12 : Contrainte radiale à  $r=0,8R_i$ ; comparaison, dans le cas d'un massif élastique, du calcul HMC sans variation significative de  $C$  avec le calcul HM.

L'analyse de la différence observée passe par l'observation des concentrations. On peut constater figure VI-13, où l'on a tracé l'évolution de la concentration  $C$  au point de référence, que l'écart des contraintes radiales de la figure précédente est clairement lié à l'évolution de  $C$ .

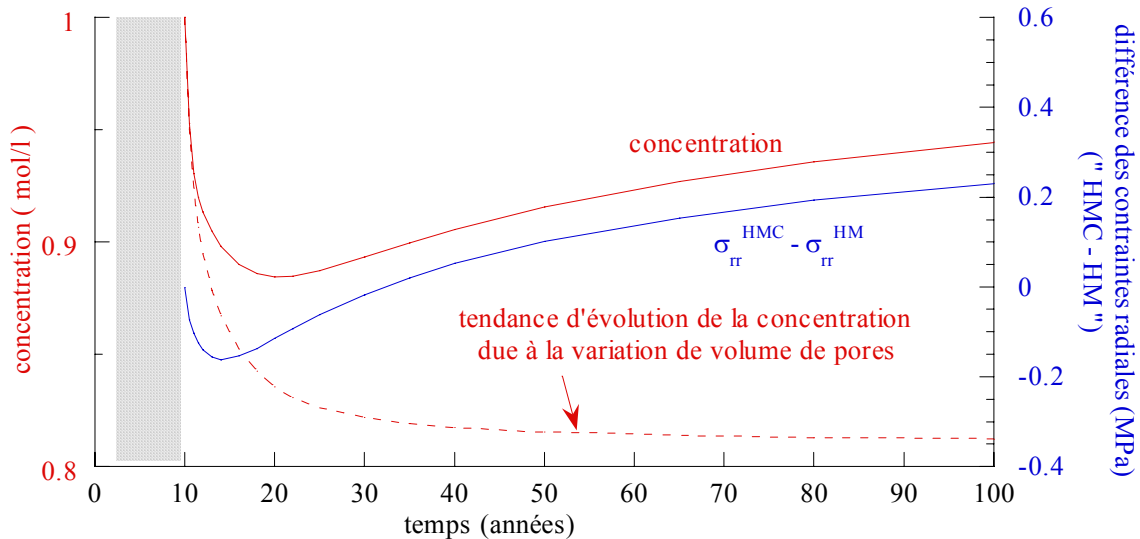


Figure VI-13 : Amplitude de la variation de la concentration dans le cas 1, pour un massif élastique.

La concentration n'est en effet pas fixe : elle diminue en raison de l'augmentation du volume des pores liée à l'augmentation de pression (ainsi qu'à la déformation, mais dans une moindre mesure ; le moteur, ici, est l'arrivée d'eau). Nous avons tracé, sur la même figure, la part d'évolution de la concentration liée à celle de l'espace poral. S'il n'y avait pas d'apport de soluté depuis le massif, la concentration baisserait de presque 20%. Dans notre cas, la chute est d'environ 12%, puis la



concentration remonte. La baisse de la concentration entre la date de mise en place et la date  $t=20$ ans génère une pression de gonflement. Le volume de la B.O. augmente et celle-ci perd ainsi une part de son potentiel de gonflement. Lorsque la concentration remonte, on ne rejoint donc pas la courbe obtenue avec le calcul purement hydromécanique.

### VI.3.6.b Evolution de la concentration

Nous montrons, figure VI-14, l'évolution pendant les 100 premières années de la contrainte au point de référence obtenue pour les trois cas de calcul considérés. Nous avons reporté (ce que nous ferons de manière systématique) le résultat du calcul poroélastique.

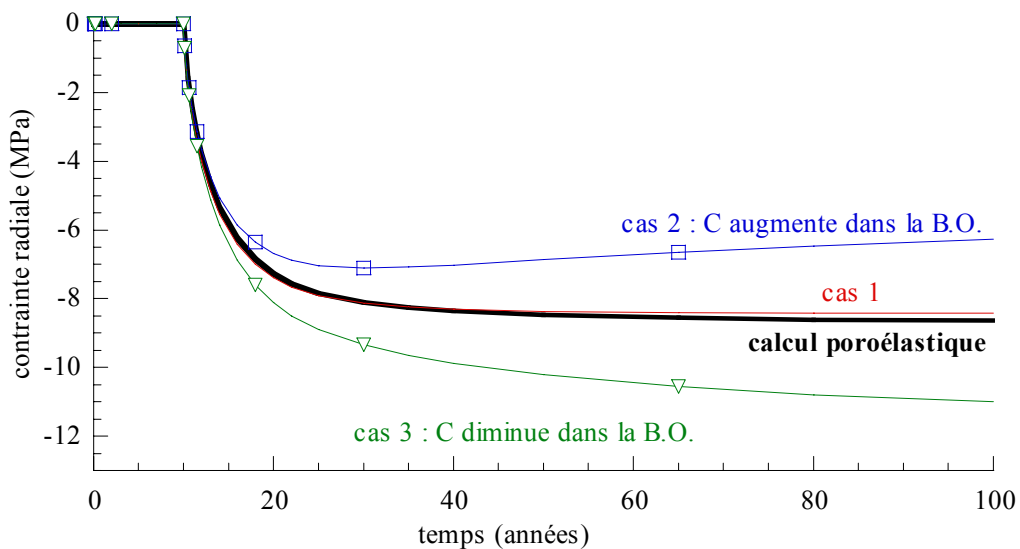


Figure VI-14 : Evolution de la contrainte radiale dans la B.O. pendant les cent premières années avec un massif élastique.

L'effet de la pression de gonflement, que nous étudions ici à travers celui de la concentration, apparaît clairement sur la figure : lorsque la concentration augmente dans la B.O., la pression de gonflement diminue ainsi que la contrainte (en valeur absolue) ; si la concentration diminue, l'effort de la B.O. sur le massif sera au contraire augmenté.

Par rapport à l'évolution de la contrainte dans le cas 1, signalons que la courbe obtenue dans le cas 3 (lorsque  $C$  diminue) se détache légèrement plus que celle du cas 2 (dans un rapport de 1,2). Avec les valeurs choisies de la masse volumique et de la surface spécifique la mi-distance interfeuillelet  $h$  est approximativement  $2 \text{ \AA}$  (elle varie un peu du fait du gonflement, même si ce dernier est faible). Nous donnons, figure VI-15, l'évolution de la pression de gonflement microscopique avec la concentration

pour cette valeur  $h=2 \text{ \AA}$ . On constate une décroissance forte pour des valeurs de concentrations comprises entre  $C = 0,2 \text{ mol/l}$  et  $C = 1 \text{ mol/l}$ .

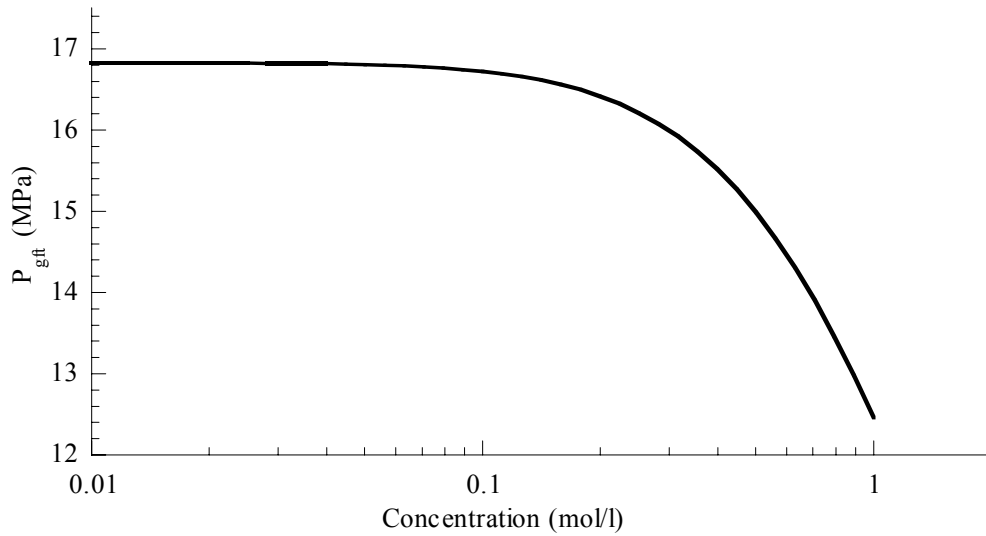


Figure VI-15 : Evolution de la pression de gonflement microscopique avec la concentration

Sur la figure suivante (figure VI-16), nous pouvons voir l'évolution de la concentration au point de référence dans les cas de calcul 2 et 3. Dans le cas 2, il faut approximativement 5 ans pour que la concentration atteigne  $0,1 \text{ mol/l}$ , valeur à partir de laquelle l'évolution de la concentration se fait sentir en terme de gonflement ou de retrait. Dans le cas 3, en revanche, on est directement dans l'intervalle de valeurs de concentrations dans lequel la pression de gonflement varie fortement. Ainsi, l'effet de la concentration sur la pression de gonflement macroscopique intervient plus tard dans le cas 2. Cela explique pourquoi le cas 3 se détache un peu plus du cas 1 que le cas 2.

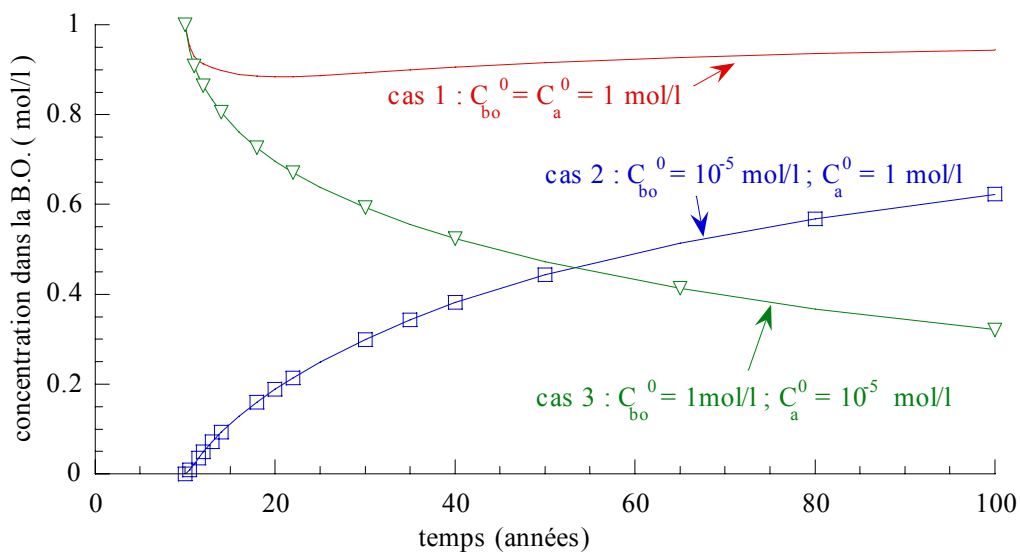


Figure VI-16 : Evolution de la concentration dans la B.O. (à  $r=0,8m$ ) au cours du temps.

Dans le cas de figure choisi, cet effet est faible, mais révèle que l'écart par rapport au calcul hydro-mécanique intervient au moment où la concentration traverse l'intervalle de forte variation de la pression de gonflement microscopique.

Les valeurs de contraintes données par les calculs à concentration variable ne sont pas encore stabilisées à la date  $t=100$  ans. Nous pouvons visualiser, figure VI-17, les mêmes contraintes dans la B.O. qu'en figure VI-14, mais dans un diagramme en fonction de  $\log t$ , et jusqu'à 50 000 ans.

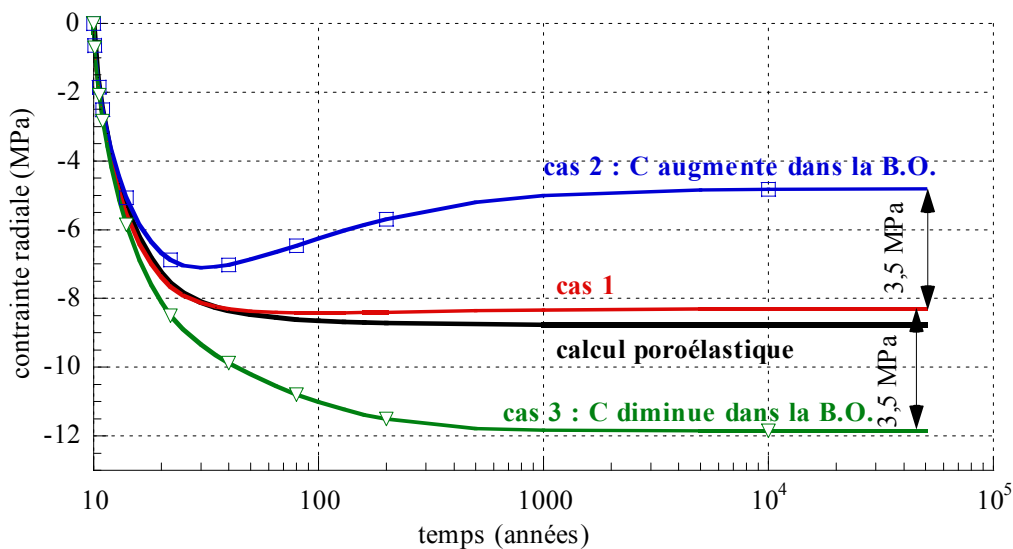


Figure VI-17 : Evolution de la contrainte radiale dans la B.O. au cours du temps avec un massif élastique.

On peut noter que la stabilisation des contraintes est particulièrement lente. Elle est fonction de l'évolution de la concentration. A la fin du calcul, l'intervalle de concentration pour lequel  $\partial P_{gt} / \partial C$  est fort est intégralement traversé dans les cas 2 et 3, et l'on voit que l'écart en valeur absolue par rapport au cas 1 est identique pour les cas 2 et 3.

Pour terminer l'examen des cas « massif élastique », nous donnons, figure VI-18a,b,c, des coupes du champ de contraintes à la fin (date  $t = 50000$  ans) pour les trois cas étudiés, composante par composante. Dans le cas 3, l'objectif consistant à retrouver l'état de contrainte avant creusement est atteint. Il ne l'est pas dans l'autre cas (cas 2). En section VI.3.7, nous allons examiner les conséquences dans le cas d'un massif susceptible de s'endommager.

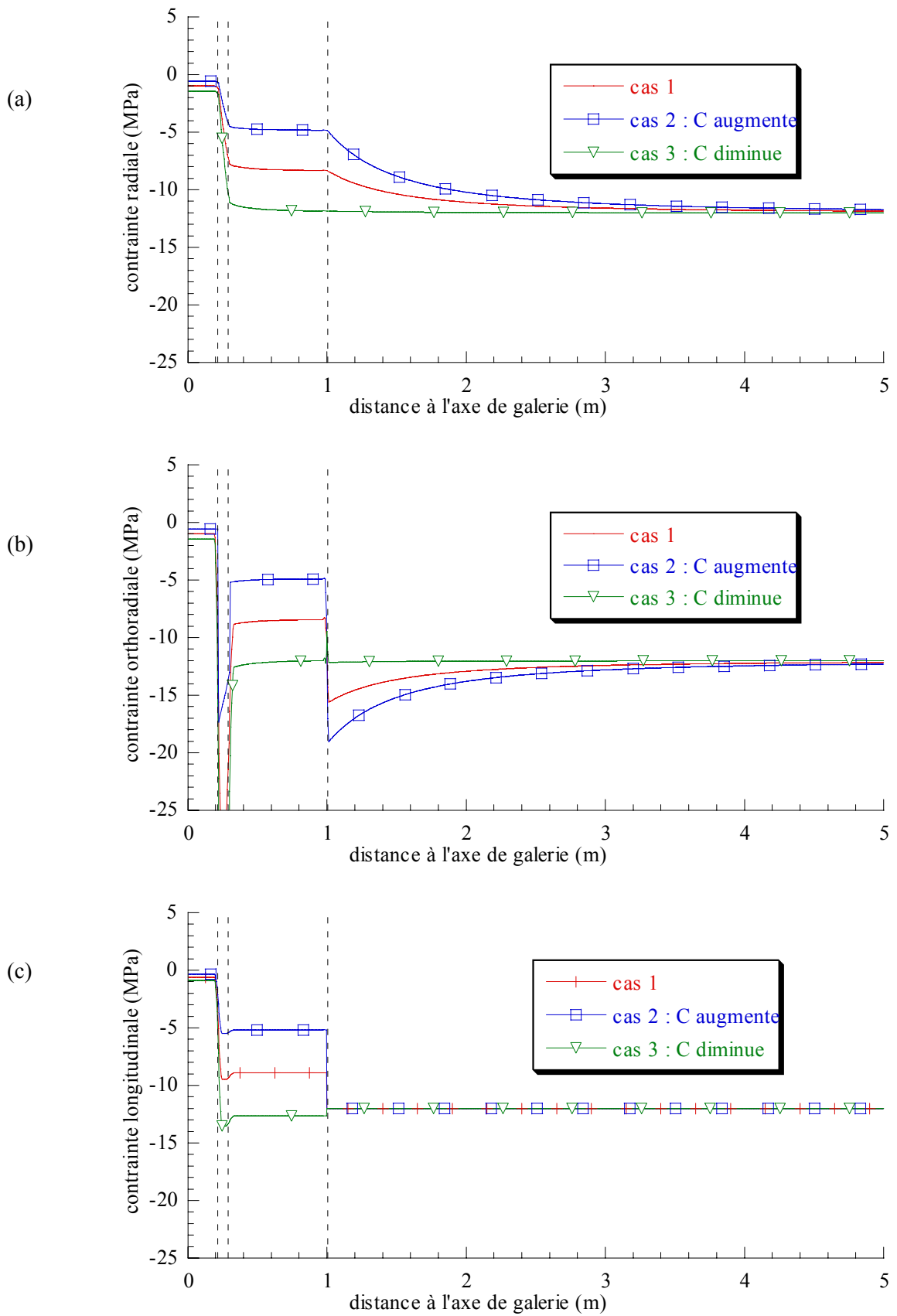


Figure VI-18 : Profils des composantes des contraintes à la date  $t=5.10^4$  ans dans les trois cas de calcul avec massif élastique.

### VI.3.7 Endommagement du massif : plasticité parfaite

Nous supposons le massif endommageable, c'est-à-dire, dans notre approche, présentant un comportement plastique. La plasticité est supposée parfaite (il n'y a pas d'écroutissage).

#### VI.3.7.a Evolution avant la date $t=10$ ans

Le champ de contraintes à l'issue du creusement est le même que pour un calcul mécanique seul. Il est présenté à la figure VI-19. La pression de pores, directement reliée à la déformation volumique dans ce calcul en conditions non drainées, est montrée sur la même figure. La chute de pression est forte, en raison des valeurs élevées des coefficients hydromécaniques ( $b=0,65$  et  $M=5672$  MPa).

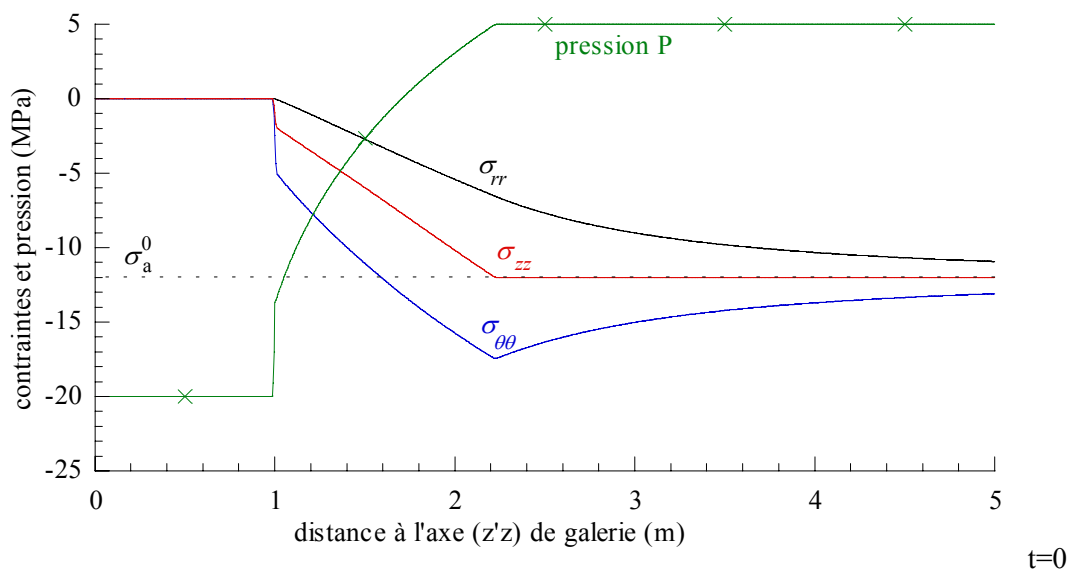


Figure VI-19 : Profils des champs de contraintes et de pression à l'issue du creusement pour un massif endommageable.

Avant la mise en place de la B.O., la pression en paroi diminue jusqu'à la valeur  $-20$ MPa imposée par l'air dans la galerie. La baisse de pression est effective dans l'ensemble du massif (figure VI.20). En général, on craint l'endommagement supplémentaire créé par une remontée des pressions qui diminue la contrainte moyenne. Ici, c'est la chute de pression due à la succion exercée en paroi qui va endommager encore le massif.

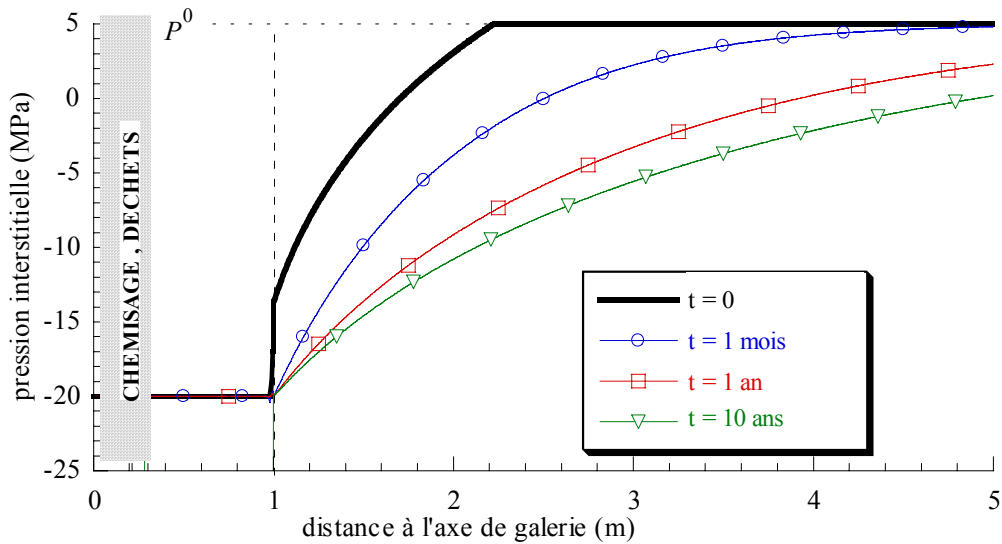


Figure VI-20 : Profil du champ de pression à différentes dates avant remplissage de la galerie dans le cas d'un massif endommageable.

La figure VI-21 donne les profils du champ de pressions et de contraintes lors de la mise en place des matériaux dans la galerie (en fait juste après mise en place comme on peut le constater d'après le champ de pression dans la galerie) : les contraintes sont fortement modifiées ; en particulier la contrainte longitudinale, qui passait en traction dans le cas d'un massif élastique, est relaxée. C'est par elle qu'a lieu un endommagement supplémentaire, et que la zone endommagée s'étend. Nous observerons par la suite l'évolution de cette zone.

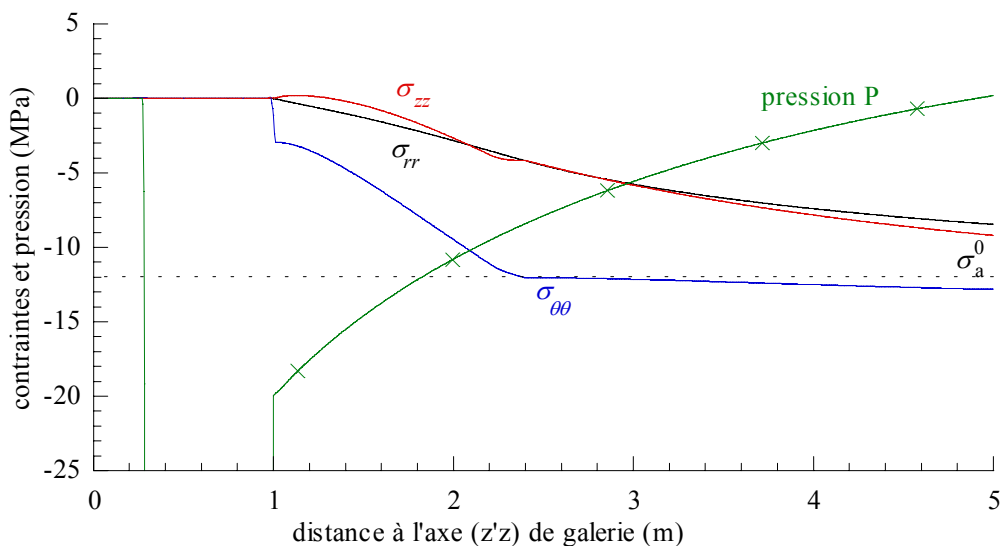


Figure VI-21 : Profils des champs de contraintes et de pression à la date de mise en place des matériaux dans la galerie pour un massif endommageable.

### VI.3.7.b Evolution après la date $t=10$ ans

Observons l'évolution de la contrainte radiale au point de référence (figure VI-22). Elle s'écarte, dans le cas 2, des évolutions obtenues précédemment avec un massif élastique : dans le cas 2, la contrainte radiale est plus forte pour le massif présentant de l'endommagement.

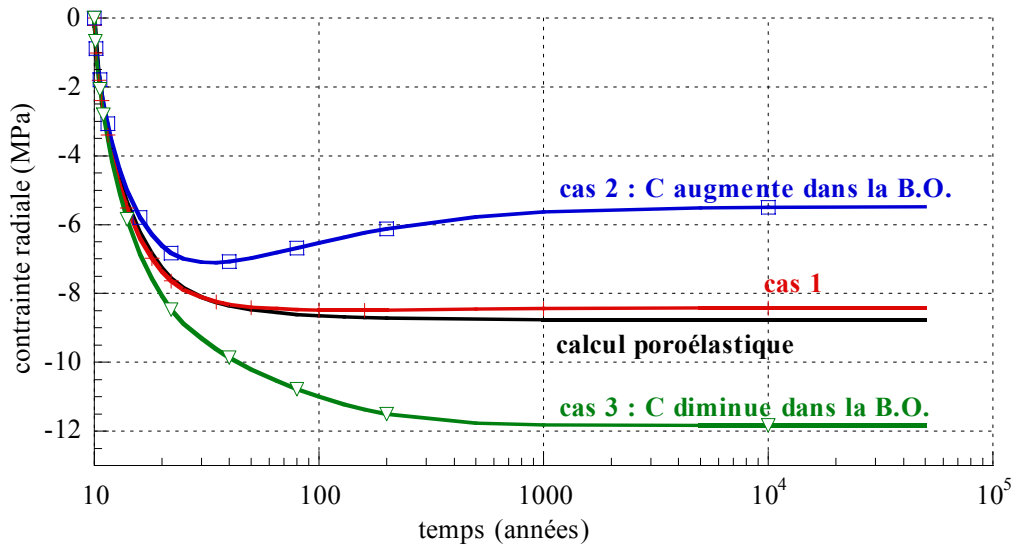


Figure VI-22 : Evolution de la contrainte radiale dans la B.O. au cours du temps avec un massif endommageable.

En fait, il y a aussi une légère différence dans le cas 1 entre les figures VI-22 et VI-17. Observons, dans le cas 1 pour le calcul avec endommagement, le champ de contrainte à la date  $t=20$  ans (figure VI-23). On peut constater que la contrainte orthoradiale n'est plus contrainte principale mineure au voisinage de la galerie. Il y a une rotation forte du tenseur des contraintes, et les efforts sont reportés longitudinalement.

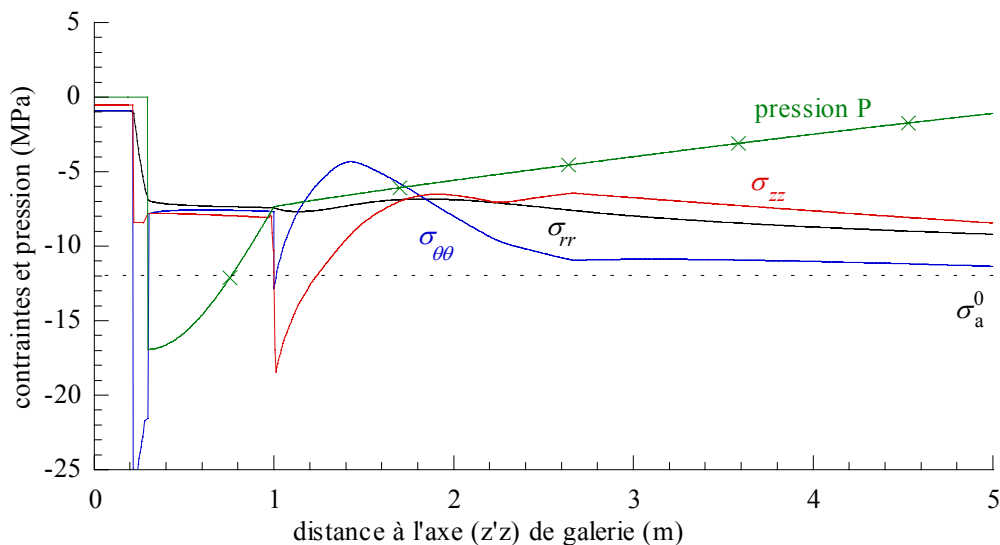


Figure VI-23 : Profil des contraintes et de la pression dans le cas 1 à la date  $t=20$ ans (massif endommageable).

On montre, figure VI-24, l'évolution au cours du temps de la zone endommagée dans le cas 1. On remarque au passage qu'avant la date  $t=10$  ans, il y a deux périodes d'endommagement : le premier mois après creusement, il y a baisse de pression en paroi, depuis la valeur due au creusement jusqu'à la valeur imposée par l'humidité relative dans la galerie, mais la pression a tendance à remonter dans le voisinage, du fait du flux d'eau depuis l'extérieur lié au gradient de pression ; l'endommagement est lié à la remontée des pressions dans le voisinage, et l'on voit que la zone proche de la paroi passe, elle, en décharge ; dans un deuxième temps, la baisse de pression est effective dans l'ensemble du massif, et force la contrainte longitudinale vers le domaine des tractions, ce qui provoque un endommagement supplémentaire. Après la date de mise en place, le scénario précédent est répété, à ceci près que la pression en parement n'est plus imposée. Le massif est en décharge jusqu'à la date  $t=20$  ans approximativement. L'évolution des contraintes dans la B.O. est alors identique à celle du cas élastique. Ensuite, la remontée des pressions réamorçait l'endommagement en paroi de galerie, ce qui se traduit par une dilatation du massif qui pousse sur la B.O. ; l'endommagement est faible, et la différence en terme de contraintes dans la B.O. est faible.

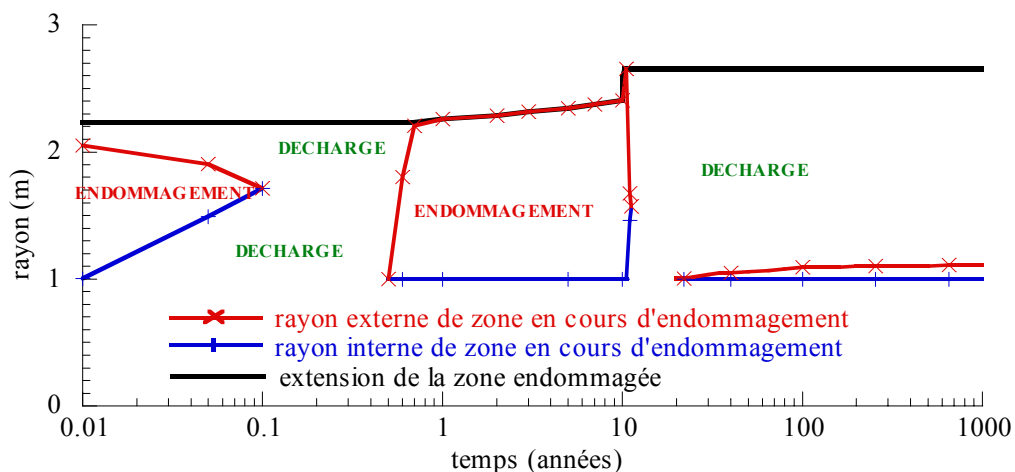


Figure VI-24 : Evolution de la zone endommagée et des zones en charge au cours du temps dans le cas 1.

Dans le cas 2 (augmentation de la concentration dans la B.O.), la différence est, nous l'avons dit, plus marquée. La figure VI-25 donne l'évolution de la zone endommagée dans ce cas. On constate en effet sur cette figure que l'extension de la zone en cours d'endommagement après la date  $t=20$  ans est plus grande que dans le cas 1.



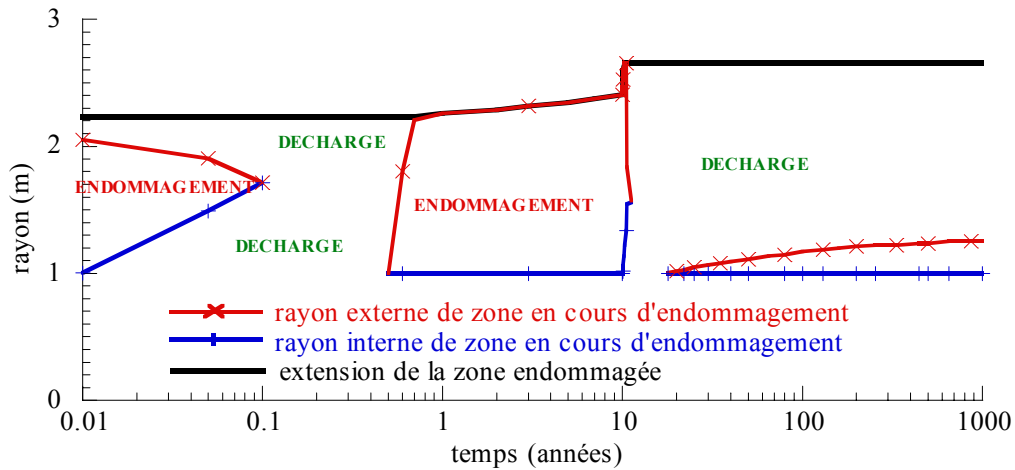


Figure VI-25 : Evolution de la zone endommagée et des zones en charge au cours du temps dans le cas 2.

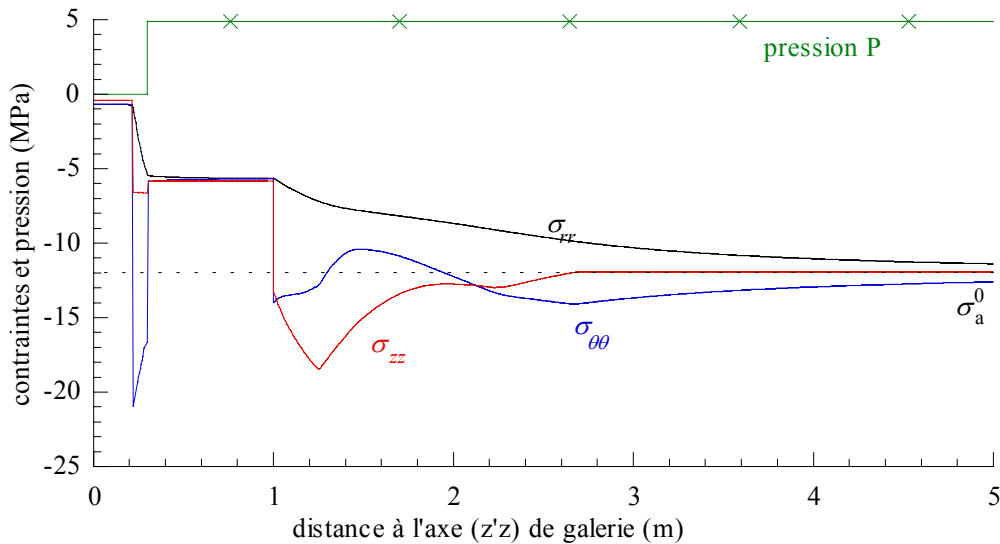


Figure VI-26 : Profil des contraintes et de la pression dans le cas 2 à la date  $t=1000$ ans (massif endommageable).

L'action de l'endommagement sur les contraintes est visible en figure VI-26 où nous présentons une coupe à la date  $t=1000$  ans, dans le cas 2. Sur la figure VI-27, nous avons tracé le profil de la contrainte axiale dans le même cas à différentes dates. Il est clair sur cette figure que c'est le report des efforts selon l'axe de la galerie (augmentation en intensité de  $\sigma_{zz}$ ) qui va provoquer l'endommagement supplémentaire. Cette évolution de  $\sigma_{zz}$  vers un endommagement supplémentaire est compensée en partie par la poussée de la B.O.. Le cas 2 est celui pour lequel l'action de la B.O. est la moins forte ; c'est donc dans ce cas que l'endommagement est le plus marqué après la mise en place. Dans le cas 1, l'endommagement est faible, et il est nul dans le cas 3.

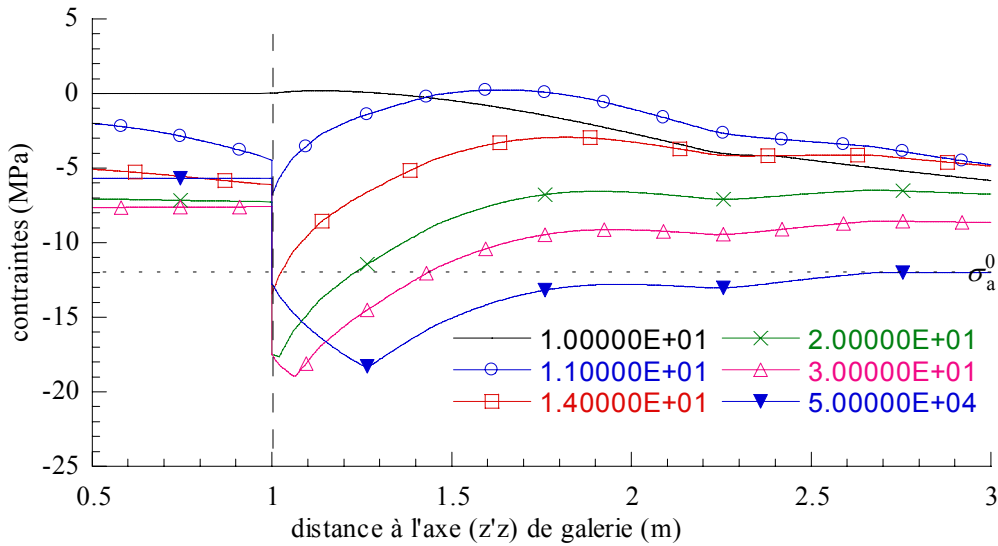


Figure VI-27: Coupes de la contrainte longitudinale à différentes dates dans le cas 2 ; action de l'endommagement.

Le massif a donc plus tendance à pousser la B.O. dans le cas 2. Cela se traduit par une différence plus marquée avec les calculs « avec massif élastique » dans le cas 2. Le vocable « tendance à pousser » est utilisé ici pour ne pas dire que le massif pousse plus la B.O. dans le cas 2 que dans le cas 1 ou le cas 3. C'est manifestement le contraire qui se passe. Cette remarque nous conduit à analyser les déplacements en paroi (c'est-à-dire la convergence de la galerie, puisque  $R_i=1$  m). Ils sont donnés en figure VI-28, à partir de la date  $t=10$  ans. Sur cette figure, nous avons tracé les déplacements obtenus par le calcul hydromécanique, les calculs avec massif élastique et ceux avec endommagement. A la date de mise en place, les déplacements sont pris nuls, c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte des convergences antérieures (notamment celle due à l'endommagement causé par le creusement).

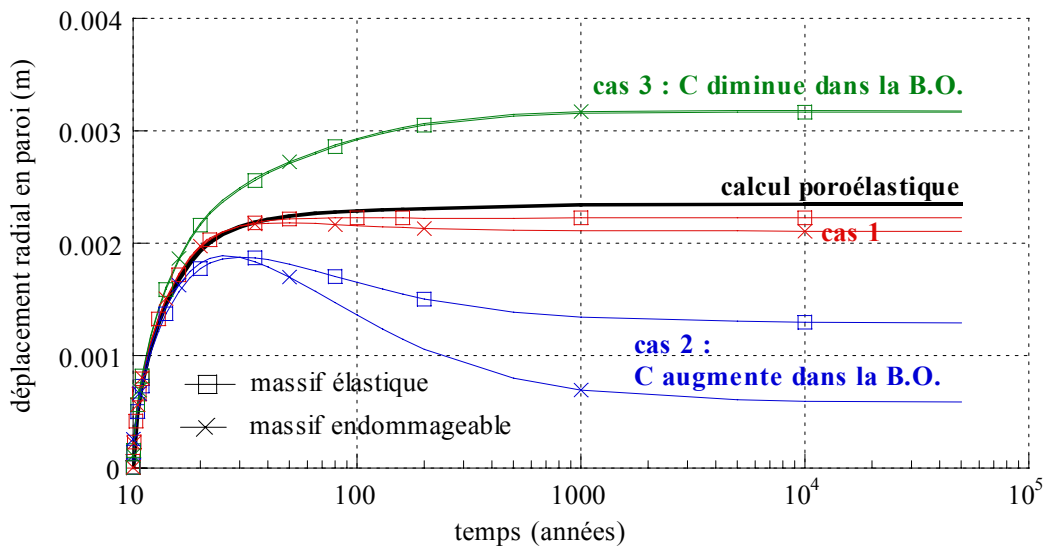


Figure VI-28 : Evolution au cours du temps du déplacement radial en paroi de galerie.

Immédiatement après mise en place (nous n'avons pas considéré de jeu entre la B.O. et le massif), la pression de gonflement exercée par la B.O. fait augmenter le rayon de galerie. La figure VI-27 corrobore notre analyse dans les cas 1 et 2 : on peut observer le décalage lié à la reprise de l'endommagement.

Dans le cas 3, la baisse de concentration dans la B.O. génère une pression de gonflement suffisante pour éviter l'endommagement lié à la remontée de la pression de pores. Nous montrons, figure VI-29, le profil du champ de contraintes à la date  $t=1000$  ans : le massif reste en décharge malgré une contrainte axiale forte, car les autres composantes des contraintes ont également regagné en intensité.

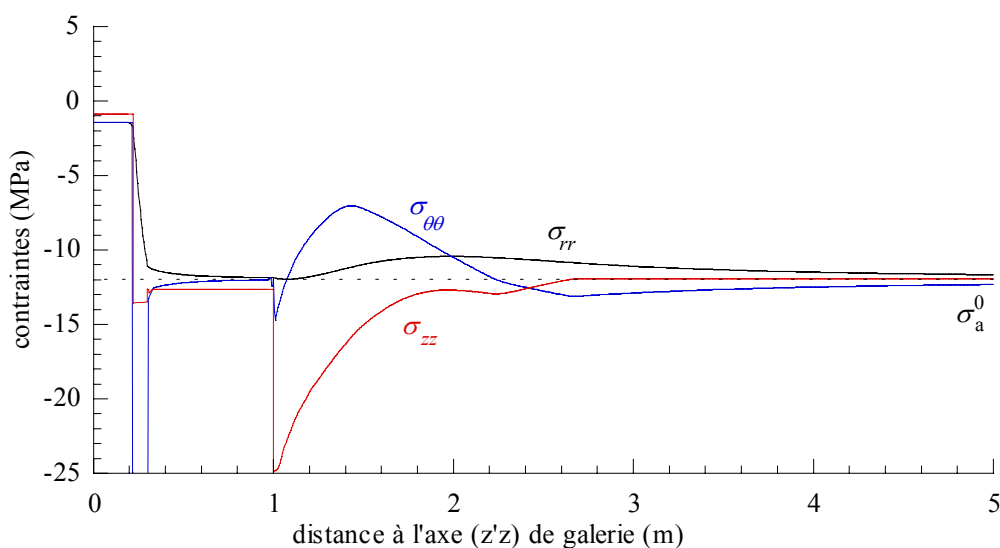


Figure VI-29 : Coupe radiale des contraintes dans le cas 3 à la date  $t=1000$  ans (massif endommageable).

### VI.3.7.c Conclusion de l'étude pour le massif endommageable

Le cas 3, pour lequel la pression de gonflement est la plus forte, est le plus favorable pour éviter un endommagement supplémentaire. Si la pression exercée par la B.O. n'est pas assez forte, une évolution de l'endommagement est envisageable.

Dans le cas 2, le retrait du matériau B.O., même faible, peut avoir des conséquences en terme d'endommagement du massif. Ce retrait n'est pas prédictible si l'on ne tient pas compte de la contribution du soluté à la pression de gonflement.

### VI.3.8 Massif viscoplastique

Le comportement mécanique différé du massif contribue à la convergence de la galerie et donc à une contrainte radiale plus élevée entre le massif et la B.O. Nous pouvons observer, figure VI-30, l'évolution du déplacement en parement de galerie pour les trois cas considérés. La convergence est lente, mais effective.

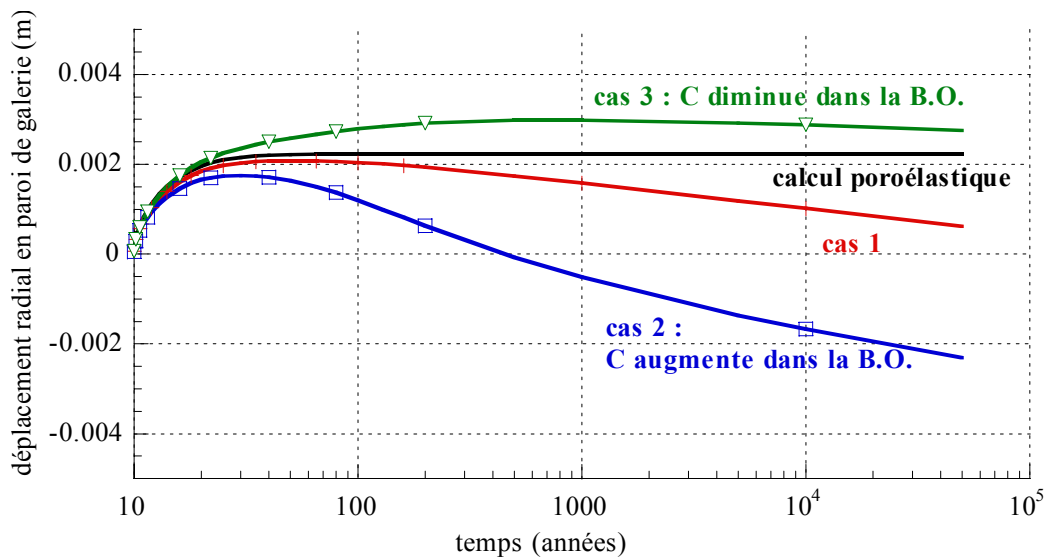


Figure VI-30 : Evolution au cours du temps du déplacement radial en parement de galerie (massif élastoviscoplastique).

L'action de la viscoplasticité sur la contrainte radiale dans la B.O. est visible figure VI-31. L'interprétation des résultats observés est particulièrement simple. La loi de fluage est une loi sans seuil dont le moteur est le déviateur des contraintes. Dans le cas 3, le gonflement de la B.O. donne « rapidement » une contrainte radiale proche de celle avant creusement dans le massif. Le déviateur est alors petit et le massif ne va plus bouger, ou peu. Dans les autres cas, le massif flue de manière à ramener les contraintes vers leur état avant creusement, c'est-à-dire isotrope. Ceci explique que la contrainte radiale dans la B.O. tende dans ce cas à rejoindre celle du cas 3. Cette action, et la vitesse de convergence (voir figure VI-30) est plus marquée dans le cas 2 puisque l'on est plus loin de l'état de contraintes isotropes.

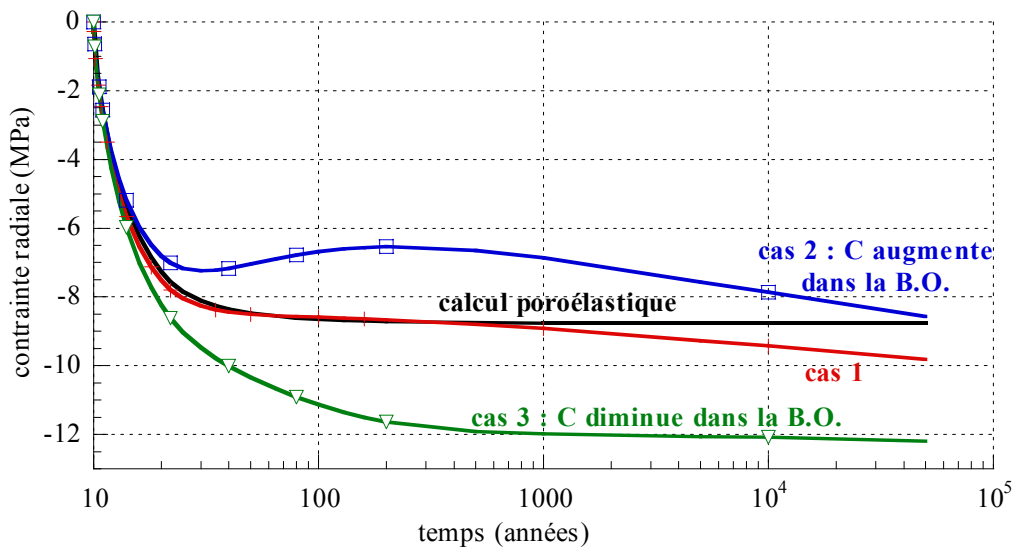


Figure VI-31 : Evolution de la contrainte radiale dans la B.O. au cours du temps avec un massif élastoviscoplastique.

#### VI.4 Cas d'un massif en rupture

La loi de comportement instantané que nous avons adoptée au chapitre III pour les argilites de l'Est, pour l'endommagement, est une loi élastoplastique avec écrouissage par la déformation d'endommagement. L'écrouissage est positif jusqu'à la rupture, et négatif ensuite jusqu'à l'état résiduel du matériau.

Nous cherchons à savoir si le gonflement de la B.O. est ou non bénéfique dans le cas où le matériau, lors de la mise en place des matériaux dans la galerie, présente déjà une zone en rupture autour de la galerie.

La loi de comportement instantané que nous avons adoptée au chapitre III pour les argilites de l'Est, pour l'endommagement, est une loi élastoplastique avec écrouissage par la déformation d'endommagement. L'écrouissage est positif jusqu'à la rupture, et négatif ensuite jusqu'à l'état résiduel du matériau.

Nous cherchons à savoir si le gonflement de la B.O. est ou non bénéfique dans le cas où le matériau, lors de la mise en place des matériaux dans la galerie, présente déjà une zone en rupture autour de la galerie.

## VI.4.1 Loi de comportement du massif

Nous avons vu au chapitre III que le creusement de la galerie, à une profondeur de 500 mètres, ne provoque pas la rupture des argilites par un calcul mécanique seul. Il en serait de même ici. Nous avons fait ce calcul, et il n'apparaît de zone post-rupture ni au creusement, ni après.

Cela serait une bonne chose, que de pouvoir annoncer en effet que les argilites de l'est ne seront que faiblement endommagées par le creusement. Mais nous n'étudions pas le massif, et nous forçons l'apparition d'une zone en rupture. Pour ce faire, nous avons la possibilité soit de nous placer à une plus grande profondeur, soit de modifier le critère utilisé.

Nous faisons ce deuxième choix. Bien qu'il s'agisse des critères minimaux identifiés pour l'initiation de l'endommagement et la rupture, nous pouvons toujours invoquer l'effet d'échelle, selon lequel les caractéristiques mécaniques in situ seront certainement plus faibles que celles mesurées en laboratoire. Ce faisant, nous multiplions par 2/3 les paramètres du critère minimum de rupture, par rapport à leur valeur dans le tableau III-3.

## VI.4.2 Creusement

Nous montrons, figure VI-32, le champ de contraintes et de pressions au champ proche, après creusement de la galerie. On distingue sur cette figure quatre zones :

- ✓ une zone dans laquelle le massif se trouve dans son état résiduel (jusqu'à  $r = 1,34$  m), que nous qualifions de zone résiduelle,
- ✓ une zone où le massif est en rupture, mais n'a pas encore atteint l'état résiduel, que nous pouvons appeler « zone post-rupture », pour la distinguer de la précédente, jusqu'à  $r = 1,65$  m,
- ✓ une zone endommagée de  $r = 1,65$  m à  $r = 3$  m ; dans cette zone, la distorsion n'a pas atteint sa valeur à la rupture,
- ✓ et enfin, une zone élastique, au delà de  $r = 3$  m.

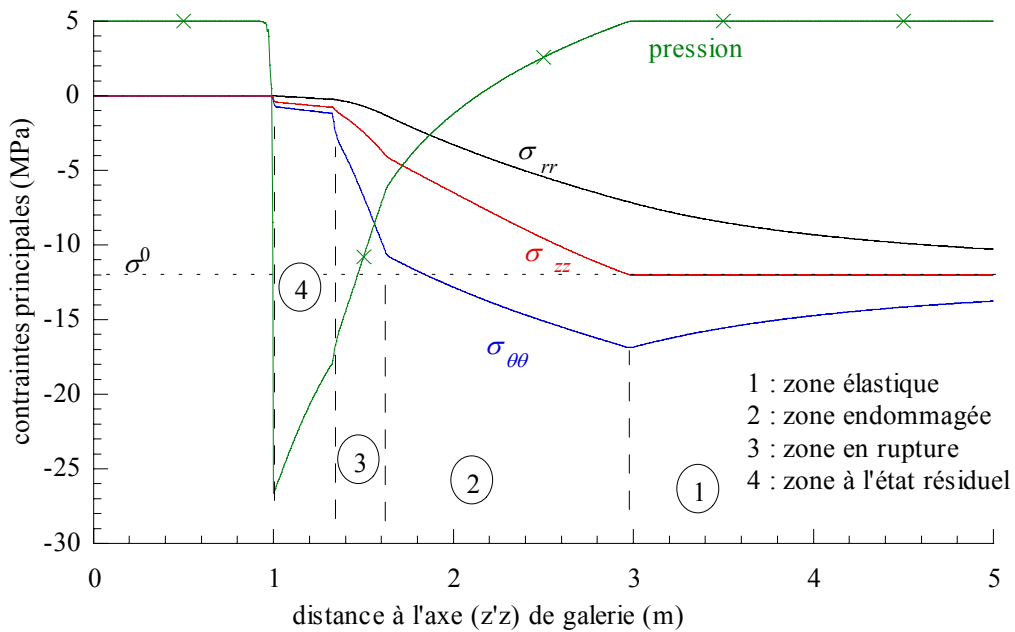


Figure VI-32 : Profils des contraintes et de la pression de pores à l'issue du creusement non drainé dans le cas d'un massif en rupture.

La chute de pression interstitielle est forte, et la pression atteint  $P_w = -26,6$  MPa en parement, du fait du couplage hydromécanique.

### VI.4.3 Evolution avant la date $t=10$ ans

Notre analyse est rapide, car le comportement du massif, et sa réaction aux variations de pression, n'est pas ce qui nous préoccupe dans cette étude. Toutefois elle devrait être aisément comprise, grâce aux cas de calculs précédents.

Observons le champ de pression, figure VI-33. Au contraire des cas précédents, la pression ici n'a tendance qu'à remonter au voisinage proche du parement, puisque la pression imposée est supérieure à la pression interstitielle dans la roche. Cela provoque un endommagement supplémentaire, même en parement, depuis le creusement jusqu'à  $t=10$  ans. La zone endommagée s'étend progressivement, comme nous le verrons dans la section suivante. Le profil des contraintes lors de la mise en place de la B.O. est montré, figure VI.34.

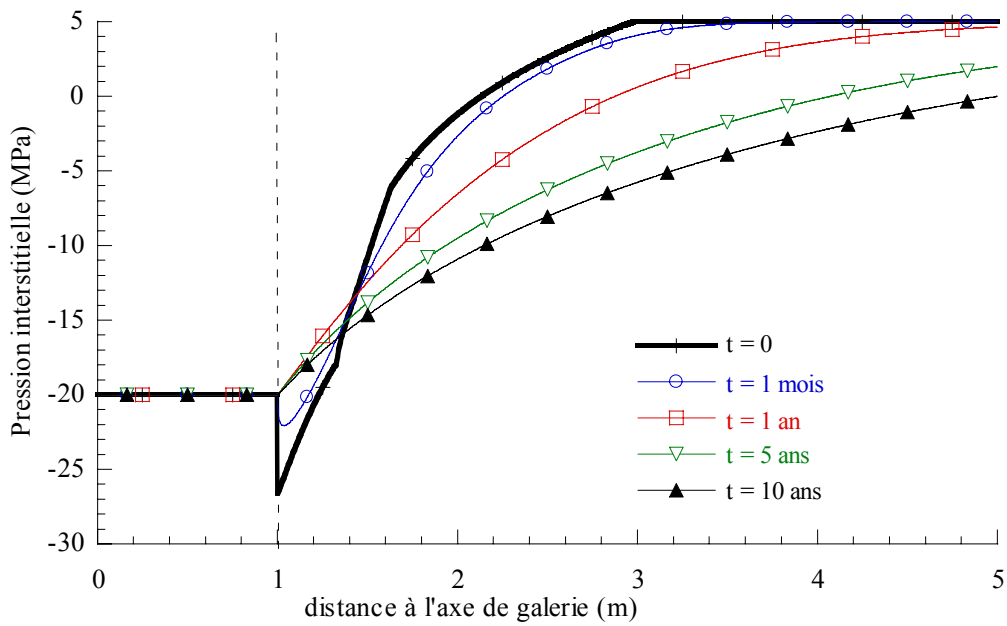


Figure VI-33 : Profils de la pression à dif

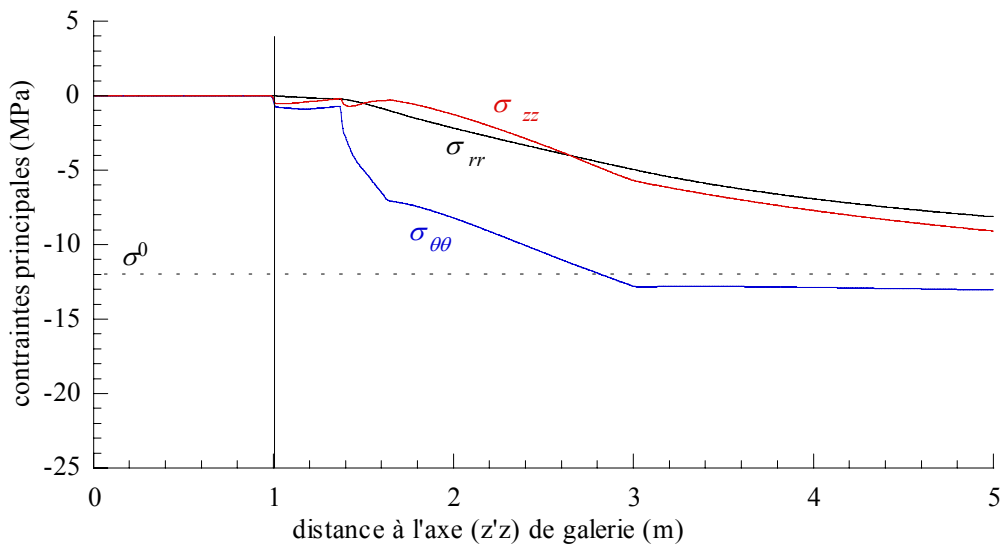


Figure VI-34 : Profils des contraintes à la date de mise en place de la B.O. dans le cas d'un massif en rupture.

## VI.4.4 Evolution après la date t=10 ans

### VI.4.4.a Simulation d'une action nulle de la B.O.

Le cas le plus défavorable est obtenu si la B.O. n'exerce aucun effort sur le massif. Un tel cas est possible s'il y a beaucoup de jeu entre les blocs de bentonite et entre la B.O. et le massif, lors de la



mise en place. Nous simulons un tel cas. Nous conservons toutefois l'hypothèse d'un drainage du massif par la B.O. initialement non saturée.

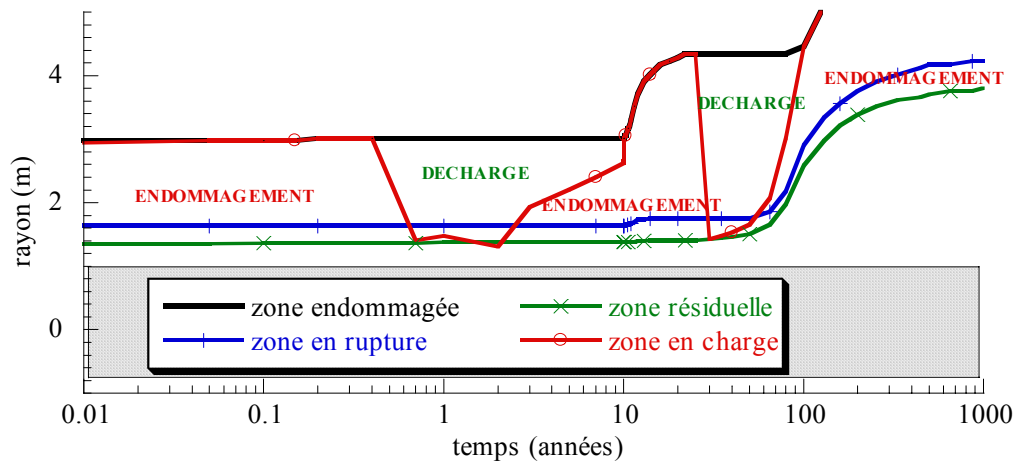


Figure VI-35 : Evolution des zones endommagée, en rupture et résiduelle dans le cas d'un massif en rupture, sans action de B.O.

Nous montrons, figure VI-34, l'évolution de la zone endommagée et des zones post-rupture et résiduelle sur la durée de la simulation. La B.O., par succion exercée sur le massif crée un endommagement supplémentaire, dû, nous l'avons expliqué, à la contrainte axiale qui tend à être une traction. Cet effet se combine avec l'action inverse de l'eau en provenance du massif (de la zone élastique), qui diminue la contrainte moyenne. Cela dure un certain temps, car le massif, en s'endommageant, tend également à baisser la pression. Pendant une quinzaine d'années, il y a une compétition de ces effets qui prolonge l'endommagement. Cet endommagement est néanmoins faible, et la zone en rupture évolue peu. Le massif est ensuite déchargé jusqu'à  $t = 30$  ans environ, date à partir de laquelle la remontée de la pression interstitielle agit sur les contraintes en paroi ; le massif est alors en charge dans la zone résiduelle, et (par redistribution des contraintes) un nouvel endommagement se produit.

Comme on peut le constater, l'extension des zones endommagée, en rupture et résiduelle ne s'arrête que parce que le calcul est arrêté. L'action de l'endommagement sur les contraintes est forte, comme on peut le constater figure VI-36, où nous montrons des coupes des contraintes à différentes dates.

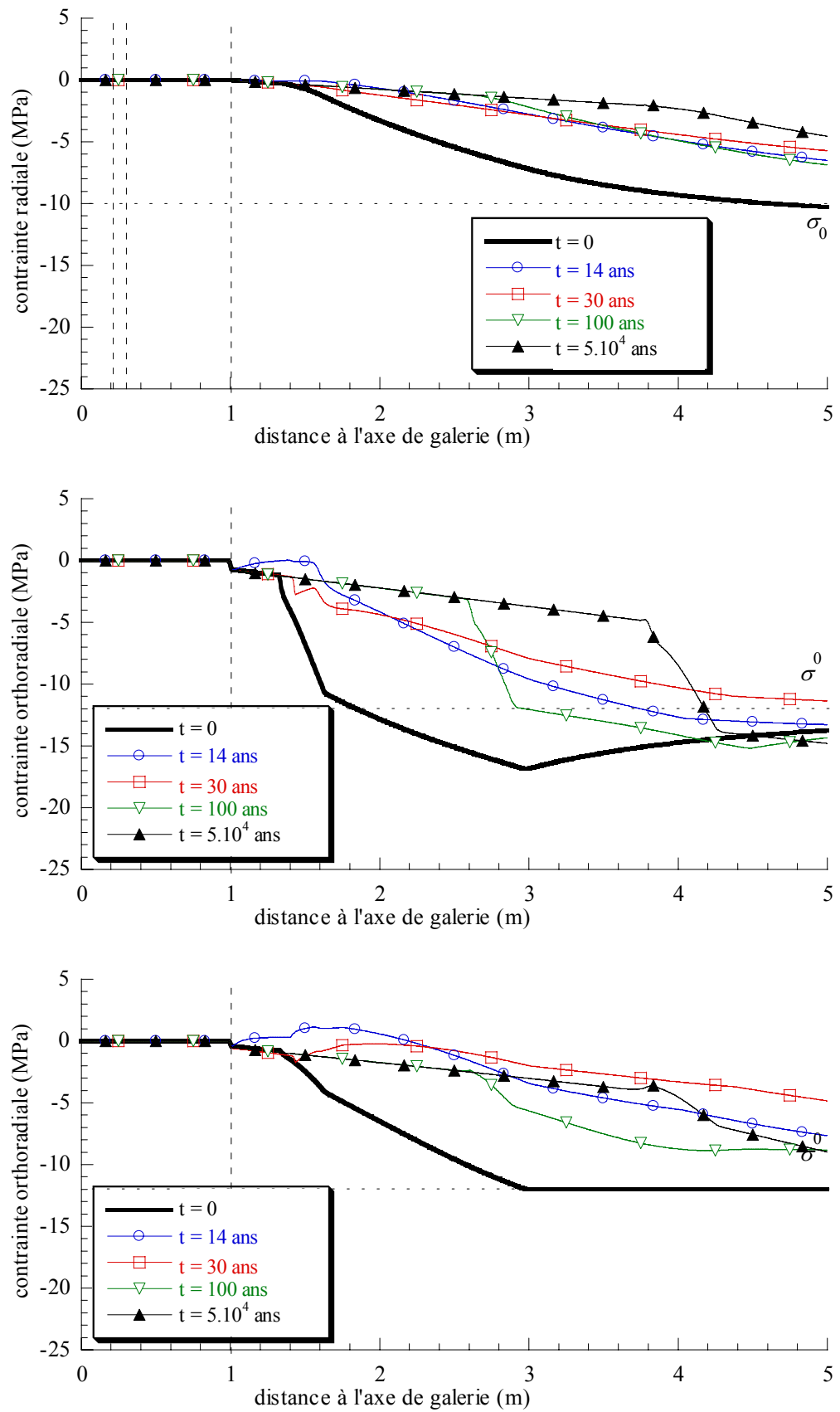


Figure VI-36 : Profils des contraintes à différentes dates dans le cas d'un massif en rupture, sans action de B.O.

#### VI.4.4.b Gonflement de la B.O.

Après ce scénario catastrophe, nous envisageons un gonflement de la B.O. Nous prenons le cas donnant le gonflement le plus fort, c'est-à-dire lorsque la concentration diminue dans la B.O.

Le résultat est simple : tout se passe bien dans ce cas. Nous montrons, figure VI.37, un profil du champ de contrainte à  $t=100$  ans.

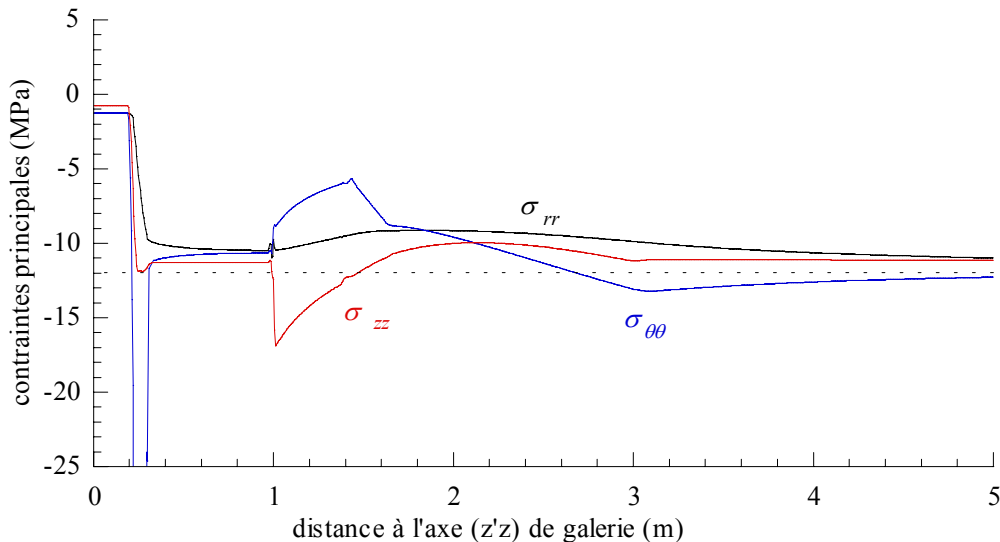


Figure VI-37 : Profils des contraintes à la date  $t=100$  ans, dans le cas d'un massif en rupture, avec gonflement de la B.O.

### VI.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé dans des calculs le modèle de gonflement-retrait mis au point au chapitre IV. Le modèle a été intégré dans le code de calcul que nous avons développé pour le G.3S. Nous avons d'abord présenté le code, qui représente une part cachée mais non négligeable de ce travail. Puis nous avons mis en œuvre le modèle dans une série de calculs à géométrie simple, simulant le cas d'une galerie de stockage, dans les argilites, où est placée une B.O. en argile gonflante.

Le modèle fonctionne bien. Il permet de trouver des cas de retraits de la B.O., alors qu'un calcul hydromécanique seul ne peut prédire un tel résultat dans le cas d'étude envisagé. Nous montrons que la prise en compte du gonflement-retrait peut changer de manière notable les résultats.

Le cas d'application choisi a permis d'observer les conséquences en terme d'action de la B.O. sur le massif et le comportement résultant de ce dernier. Une analyse a été menée sur ce point, bien que le comportement du massif ne soit ici qu'un support. Cela a permis la réalisation de calculs qui, même sur une géométrie simple comme celle utilisée, peuvent être délicats à mener.

## CONCLUSION GENERALE

L'un des apports de ce travail est sans doute l'expression sous forme utilisable de la pression de gonflement. Celle-ci concerne les forces générées par l'interaction eau/roche spécifiques aux argiles. Elle a été intégrée dans un modèle de comportement hydrochimicomécanique (HMC) des argiles puis utilisée pour des calculs.

La loi de pression de gonflement a été construite dans le cadre de la théorie de la double couche diffuse (DCD). Ce concept est largement repris dans la littérature pour expliquer le phénomène de gonflement-retrait des argiles, et des expériences ont montré un bon accord avec les résultats expérimentaux dans plusieurs cas (Bolt 1956 ; Mitchell 1976 cité par Coussy et al. 1998). Cependant, la théorie de la DCD n'est pas mise en œuvre dans des calculs de structure faisant intervenir des argiles gonflantes. Du moins n'avons nous pas trouvé de telles applications. Une des raisons à cela est que la théorie de la DCD n'est pas pratique d'utilisation ; l'évaluation de la pression de gonflement par cette théorie passe par la résolution, dans les cas les plus simples, de la fameuse équation de Poisson-Boltzmann. Cette résolution est numérique ; de plus, nous avons vu qu'elle ne peut pas être directe dans le cas de feuillets à charge constante, comme c'est le cas probablement pour les argiles qui concernent le stockage. Il faut alors, dans une modélisation numérique intégrant le phénomène de gonflement-retrait selon cette théorie, recourir à des tables de valeurs calculées au préalable. A moins de disposer d'une expression mathématique issue d'un ajustement fiable. C'est maintenant le cas.

Notre expression de la pression de gonflement microscopique  $P_{gft}$ , valable sur une grande plage de valeurs de la charge de surface, de la distance interfeuillets, et de la concentration, fournit la possibilité de faire des calculs de structure intégrant le phénomène de gonflement-retrait. Nous pouvons espérer qu'une telle expression sous forme de loi, tellement plus accessible que la théorie initiale, permettra plus d'études intégrant les argiles gonflantes.

Sur cette base, nous avons adopté un modèle de comportement macroscopique HMC proche de celui proposé par Coussy et al. (1998). Au niveau microscopique, la pression de gonflement  $P_{gft}$  est une fonction fortement non linéaire de l'écartement entre feuillets et de la concentration. Dans un passage micro-macro dû à Bolt (1956), la pression de gonflement macroscopique correspondante  $P_{GFT}$  est fonction de la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , de la pression interstitielle dans les gros pores  $P_w$ , et de la concentration en solutés dans l'eau des pores, notée  $C$ . L'expression d'une loi de comportement pour

une argile gonflante sous forme incrémentale fait donc intervenir les dérivées partielles de la pression de gonflement par rapport à ces variables, notamment la concentration. Partant de l'expression de  $P_{gfi}$ , les dérivées partielles sont calculables analytiquement, mais le plus simple reste la dérivée numérique dans un code de calcul.

La recherche de l'expression de  $P_{gfi}$  est largement détaillée au chapitre IV, et fournit en quelque sorte la recette à suivre pour étendre l'ajustement réalisé. Si l'ensemble se révèle pertinent, une telle extension doit être réalisée en température, à d'autres valeurs de la valence des ions, mais aussi en fonction de la constante diélectrique du fluide, susceptible d'évoluer de manière notable par exemple au voisinage d'un stockage d'hydrocarbures. En particulier, concernant le stockage de déchets fortement exothermiques, l'effet de la thermique est incontournable.

Une étude du phénomène de gonflement-retrait d'une argile dans un contexte de stockage a été proposée au chapitre VI. L'argile gonflante constitue dans cette étude la barrière ouvragée (B.O.) dans une galerie de stockage. La roche hôte est l'argilite de l'Est du Bassin Parisien. Nous avons en premier lieu cherché à montrer l'intérêt de la prise en compte de la chimie dans le phénomène de gonflement-retrait.

L'étude a été découpée en plusieurs calculs, de manière à faire une analyse plus fine des différents phénomènes et couplages mis en jeu. Elle a permis de distinguer la part de gonflement d'origine purement hydrique et celle due à la pression de gonflement d'origine physico-chimique (à savoir, électrostatique, dans le cadre de la théorie de la DCD). Elle a permis aussi d'observer le phénomène de retrait dans un cas d'étude pour lequel une modélisation purement hydromécanique ne permet pas de le prévoir.

La question est souvent posée de savoir si la B.O., sous l'effet de la chaleur dégagée par les déchets fortement exothermiques, conservera ses propriétés de rétention des radionucléides d'une part, et de gonflement d'autre part. Concernant le deuxième point, le cas de retrait observé permet d'étendre la question à tous les cas de figure pour lesquels une argile gonflante est envisagée pour assurer une fonction de gonflement dans un stockage de déchets radioactifs (B.O., serremments et ancrages en argile gonflante destinés à « sceller » le stockage). Dès lors, la prise en compte du phénomène de gonflement lié à l'évolution du (des) soluté(s) prend tout son sens.

L'ensemble des modélisations a permis d'intégrer les différents aspects du comportement de la roche hôte (les argilites de l'Est). On constate qu'une augmentation de la concentration dans la B.O., créant un retrait de cette dernière, fait se diminuer l'action de la B.O. sur le massif et est susceptible d'endommager le massif. A l'inverse, le gonflement dû à une baisse de la concentration n'a que des effets bénéfiques.

L'écriture des équations régissant le transfert de masse de fluide, constitué d'un mélange, en milieu poreux nous a amené à nous poser la question de la validité des théories existantes appliquées à un milieu poreux dans lequel circule un mélange. Nous examinons la théorie habituelle utilisée en mécanique des milieux poreux, ainsi que la théorie des mélanges, au chapitre V. Nous constatons que la première théorie n'est pas valide dans le cas où le fluide interstitiel est un mélange au sens strict. Quant à la deuxième, elle n'est, en toute rigueur, pas applicable si le milieu poreux ne peut pas être assimilé à un fluide.

L'exposé du chapitre V est long, pour expliquer une différence entre les résultats de ces deux théories qui tient en deux lignes, mais cela est nécessaire pour dérouler l'ensemble du bagage thermodynamique utilisé, qui est, il est vrai, lourd.

En terme de résultat, l'écart entre les deux théories est observable sur les dissipations, c'est-à-dire après application du second principe de la thermodynamique. Mais la difficulté théorique soulevée concerne en fait l'application du premier principe, et plus exactement l'écriture du travail des forces externes associées aux mouvements relatifs des fluides.

Nous proposons, après discussion, une solution alternative qui combine les deux théories susmentionnées. Cette solution n'a pas été mise en œuvre dans nos modélisations pour plusieurs raisons. La première est que cela concerne un sujet, la thermodiffusion, qui nous aurait éloigné de notre étude. Ce sujet a sa place dans le contexte d'un stockage (voir Soler,1999), et sans doute est-il fondamental pour le problème de la sûreté à long terme, mais il est clairement axé sur le transport, tandis que ce sont les phénomènes mécaniques qui nous préoccupent en premier chef. La deuxième raison, qui a son importance, est tout simplement que le travail n'est pas totalement achevé. Les objectifs fixés au début du chapitre V n'ont pas tous été atteints. Par exemple, l'expression finale utilisant la pression de fluide en lieu et place du potentiel chimique du constituant eau (le solvant) n'a pas été donnée. Ruiz et al. (1998) réalisent ce travail dans le cas isotherme, et montrent par exemple que le potentiel osmotique n'agit pas, comme on le pense souvent, sur le transport du fluide dans son ensemble (dans la limite des solutions diluées), mais sur le constituant eau. Un tel travail doit être réalisé dans le cas non isotherme.



## SELECTION BIBLIOGRAPHIQUE

- Alcoverro J., (2001)**, Decovalex III, task1 : Modelling of febex in-situ test, part b : Thermohydromechanical analysis of the bentonite behavior, Rev.1, UPC, 2001.
- Alonso E.E., Gens A. & Josa A., (1990)**, *A constitutive model for partially saturated soils*, Géotechnique 40 (3), pp. 405-430.
- Andra, (1999)**, Référentiel Géologique, rapport référencé à l'Andra A RP ADS 99-005.
- Atkins W., (1997)**, Physical chemistry , Oxford University Press (Eds.).
- Aublivé N., Djéran-Maigre I., Chiarelli A.S., Cabrillac R. & Su K, (2001)**, *Modélisation rhéologique des Argilites de l'Est*, XV<sup>ème</sup> Congrès français de mécanique, Septembre 2001.
- Barbour S. L. & Fredlund D. G., (1989a)**, *Mechanisms of osmotic flow and volume change in clay soils*, Can. Geotech. J. 26, pp 551-562.
- Barbour S. L. & Fredlund D. G., (1989b)**, *Physico-chemical state Variables for Clays Soils*, 12<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro, pp 1839-1843.
- Barnichon J.D. (1998)**, *Contribution of the bounding surface plasticity to the simulation of gallery excavation in plastic clays*. 5<sup>th</sup> International Workshop on Key Issues in Waste Isolation Research, Barcelona, Dec 2-4.
- Bauer-Plaindoux C., Tessier D.& Ghoreychi M., (1998)**, Propriétés mécaniques des roches argileuses carbonatées : importance de la relation calcite-argile, C.R. Acad. Sci. Paris, série IIa, 326.
- Biarez J., Fleureau J.M. & Bard E., (1992)**, Compactage : analogies entre les lois de comportement des argiles, sables, cokes et autres solides divisés, Matériaux & Techniques N°9-10
- Biot M.A., (1941)**, *General theory of three-dimensional consolidation*. J. Appl. Phys., vol 12, pp.155-164.
- Bishop A.W., (1959)**, *The principle of effective stress*, Teknisk Ukeblad ,n°39, pp.859-863.
- Bishop A.W. & Donald I.B., (1961)**, *The experimental study of partly saturated soil in the triaxial apparatus*, Proc. 5<sup>th</sup> ICSMFE (1), pp13-21, Paris.



- Bolt G.H., (1956)**, Physico-chemical analysis of the compressibility of pure clay, *Géotechnique* 6(2), pp 86-93.
- Boutéca M., Sarda J.-P., Vincke O., Longuemare P. & Berner E., (1999)**, *Réflexions sur l'origine du coefficient de Biot des argilites au cours d'un chargement mécanique*, Journées Scientifiques Andra, Nancy, EDP Sciences, pp. 381-396, 7-9 décembre 1999.
- Charlet L. & Schlegel M., (1999)**, La capacité d'échange des sols. Structure et charges à l'interface eau/particule , C.R. Acad. Agric. Fr., Vol. 85 (2), pp 7-24.
- Charlez Ph. A., (1991)**, Rock Mechanics, vol.1, Ed. Technip.
- Charlez Ph. A., (1994)**, *Exemple de modèle poroplastique : le modèle de Cam-Clay*, Ecole de Mécanique des Milieux Poreux (organisée par le CFMR), Ed. « Sciences de la Terre », ISBN 2-85555-049-1.
- Chiarelli A.S. , (2000)**, Etude expérimentale et modélisation du comportement mécanique de l'Argilite de l'Est , thèse de doctorat de l'Université de Lille.
- Cosenza P., (1996)**, Sur les couplages entre comportement mécanique et processus de transfert de masse dans le sel gemme, Thèse de l'Université Paris VI.
- Coussy O., (1991)**, Mécanique des Milieux Poreux , Editions Technip, Paris.
- Coussy O., Dangla P. & Dormieux L. (1997)**, *Un modèle d'argile gonflante à deux échelles*, St-Venant Symposium, pp.53-58.
- Coussy O., Eymard R. & Lassabatère T. (1998)**, *Constitutive Modeling of Unsaturated Drying Deformable Materials*, J. Eng. Mech., June 1998, pp.658-666.
- Coussy O., Dangla P., Dormieux L. & Lemarchand E. (1998b)**, *A two scale modelling of a swelling clay*, Poromechanics – A tribute to Maurice A. Biot, Thimus et al. (Eds), pp.53-58.
- Coussy O., Dormieux L. & Detournay E. (1998c)**, *From mixture theory to Biot's approach for porous media*, Int. J. Solids Structures Vol. 35, N° 34-35, pp.4619-4635.
- de Boer R., (1995)**, *Some issues in the macroscopic porous media theory*, Festschrift für Professor Siekmann, Universität-GH Essen.
- de Boer R., (2000)**, *Theory of porous media*, Springer (Eds.).
- de Groot S.R. & Mazur P., (1961)**, Non-equilibrium thermodynamics, Amsterdam, 1<sup>st</sup> ed. North-Holland Pub. Cy.
- de Marsily G., (1981)**, Hydrogéologie quantitative , Ed. Masson, Paris.
- Dennery F.M., (1995)**, Précis de thermodynamique rationnelle , Ed. Masson, 229 p.

- Djaoua M. & Suquet P., (1984)**, Evolution quasistatique des milieux Visco-Plastiques de Maxwell-Norton, Math. Meth. Appl. Sci. 6, pp192-205.
- Djéran I., Bazargan B., Giraud A. & Rousset G., (1994)**, *Etude expérimentale du comportement thermo-hydro-mécanique de l'argile de Boom*, G3S, Rapport final n°94-002, contrat ONDRAF-G3S.
- Dormieux L., Barboux P., Coussy O. & Dangla P. (1995)**, *A macroscopic model of the swelling phenomenon of a saturated clay*, Eur. J. Mech., A/Solids, 14(6), pp 981-1004.
- Dudeck M., (1993)**, Thermodynamique – Les irréversibilités , Ed. Eska, 262 p.
- Fargue D., (2001)**, *Sur le premier principe de la thermodynamique (remarques sur sa mise en pratique)*, Ann. Fondation L. de Broglie, Vol 26 N° spécial, pp 189-196.
- Fer F., (1971)**, Thermodynamique macroscopique : tome 2, Systèmes ouverts, Eds Gordon&Breach, 234 p.
- Fleureau J.M., (1993)**, Rhéologie des Sols Non Saturés, Notes de cours du DEA « Comportement des Géostrucures dans leur environnement » de l'ECP.
- Foucault A. & Raoult J.F., (1992)**, Dictionnaire de géologie, 3<sup>ème</sup> édition, Masson, Paris.
- Fredlund D.G. & Rahardjo H., (1993)**, Soil mechanics for unsaturated soils, J. Wiley & Sons (Eds).
- Gaombalet J. & Su K., (1998)**, *A numerical code for computation of transport phenomena coupled with mechanics in porous media*, Application of Numerical Methods to Geotechnical Problems : Proc. of the 4<sup>th</sup> Eur. Conf. Num. Meth. Geotech. Eng. (Numge 98), Udine, Italy, 14-16 Octobre 1998, Annamaria Cividini (Eds), Springer Verlag Wien, ISBN 321183141X
- Gasc-Barbier M., (2002)**, Etude des phénomènes de déformation de roches argileuses profondes : apport de la microstructure et des analyses pétrophysiques, Thèse de l'Université Paris VI.
- Ghassemi A. & Diek A., (2002)**, *Porothermoelasticity for swelling shales*, J. Petroleum Science and Engineering 34, pp. 123-135.
- Ghoreychi M. (1990)**, conception et dimensionnement de l'essai in situ destiné à l'étude thermomécanique du champ proche d'un puits de stockage (C.P.P.S.), Rapport LMS-X, contrat ANDRA n° 624 RP LMS 90-007.
- Ghoreychi M., (1997)**, Comportement rhéologique et couplages thermo-hydro-mécaniques dans les argilites de l'Est : expériences macroscopiques et analyse microscopiques, Journées Scientifiques Andra, Bar-le-Duc, EDP Sciences, pp. 109-126, 20-21 octobre 1997.

- Ghoreychi M., (1999)**, *Comportement thermo-hydro-mécanique des argilites de l'Est et son incidence sur les ouvrages souterrains*, Journées Scientifiques Andra, Nancy, EDP Sciences, pp. 397-418, 7-9 décembre 1999.
- Giraud A., (1993)**, *Couplages Thermo-Hydro-Mécaniques dans les Milieux Poreux peu perméables : Application aux Argiles Profondes*, Thèse ENPC.
- Griffiths F.J. & Joshi R.C., (1990)**, *Clay fabric response to consolidation*, Applied Clay Sciences, Vol. 5, pp.37-66.
- Grunberger D., (1995)**, Etude expérimentale de l'évolution des microstructures et des propriétés physiques et mécaniques des argiles au cours de la compaction, Thèse Université de Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc, 20 Décembre 1995.
- Halphen B., (1978)**, *Problèmes quasistatiques en viscoplasticité*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.
- Hueckel T., (1992)**, On effective stress concepts and deformation in clays subjected to environmental loads : Discussion, Can. Geotech. J. 29, pp 1120-1125.
- Huerre P., (1992)**, Mécanique des milieux continus. Tome 4 : Mécanique des fluides. Ecole Polytechnique, ISBN 2-7302-0284-6.
- Jamet P.-V., (1991)**, Sur certains aspects du couplage en milieu poreux entre les champs de température et de concentration – Approche par la thermodynamique des processus irréversibles et modélisation de l'effet thermogravitationnel dans les solutions binaires, Thèse de l'ENSMP.
- Jennings J.E.B. & Burland J.B., (1962)**, *Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils*, Géotechnique 12 (2), pp.125-144.
- Kharkhour H., (2002)**, Modélisation des couplages thermo-hydro-mécaniques et de l'endommagement des roches viscoplastiques dans le contexte du stockage de déchets radioactifs, Thèse de l'Ecole des Mines de Paris.
- Labieuse V. et Giraud A., (1998)**, *Analytical solutions for the undrained response of a poro-elasto-plastic medium around a cylindrical opening*, Poromechanics, Thimus et al. (eds), Balkema, Rotterdam: 439-444.
- Lahlou R., (1991)**, Etude du comportement d'une argile gonflante et développement d'une cellule triaxiale autonome. Application au stockage des déchets radioactifs, Thèse de l'université d'Orléans.

- Lambe T. W., (1960)**, *A mechanistic picture of shear strength in clay*, Proceedings of the ASCE Research Conference on Shear Strength of Cohesive Soils, University of Colorado, Boulder, Co., pp 555-580.
- Lassabatere T., (1994)**, Couplages hydromécaniques en milieux poreux non saturés avec changement de phase – Application au retrait de dessiccation, Thèse ENPC.
- Lemaître J. et Chaboche J.L., (1985)**, Mécanique des matériaux solides, Ed. Dunod, ISBN 2-10 001397-1.
- Low P. F., (1987)**, *The clay-water interface*, Proc. Int. Conf., Denver, Clay Minerals Soc., pp. 247-256
- Lions J.L., (1968)**, Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Ed. Dunod, Paris.
- Manfroy P. et al., (1984)**, *Expérience acquise à l'occasion de la réalisation d'une campagne géotechnique dans une argile profonde*, CEC/WEQ Workshop on the design and instrumentation of the in situ experiments in underground laboratories for radioactive waste disposal, Brussels, Mai 1984.
- Matyas E.L. & Radhakrishna H.S., (1968)**, *Volume change characteristics of partially saturated soils*, Géotechnique, 18, pp.432-448
- Mitchell J.K., (1991)**, *Conduction phenomena : from theory to geotechnical practice*, Géotechnique, Vol 41, N° 3, pp. 299-340.
- Modaressi A. & Abou-Bekr N. (1994)**, *A unified approach to model the behavior of saturated and unsaturated soils*, Proc. Of the 8<sup>th</sup> Int. Conf. Comp. Meth. & Adv. In Geomech., H.J. Siriwardane et M.M. Zaman (Eds.), Balkema.
- Nguyen Quoc-Son, (2000)**, Stabilité et mécanique non linéaire, Ed. Hermes Sc., Paris, ISBN 2-7462-0085-6.
- Philipponnat G., (1991)**, *Retrait-gonflement des argiles, proposition de méthodologie*, Revue Française de Géotechnique n°57, pp. 5-22.
- Pouya A., (1991)**, Comportement rhéologique du Sel Gemme – Application à l'étude des excavations souterraines ; Thèse ENPC.
- Prigogine I. & Kondepudi D., (1999)**, Thermodynamique – Des moteurs thermiques aux structures dissipatives, Ed. Odile Jacob, ISBN 2-7381-0646-3.
- Ramambasoa N., (2001)**, Etude du comportement hydromécanique des argilites – Application au site de Tournemire, Thèse de l'Ecole Polytechnique.

- Richet P., (2000)**, Les bases physiques de la thermodynamique, Ed. Belin, 464 p.
- Robert A., Saïtta A., (1997)**, *Modélisation numérique des effets de gonflement dans les ouvrages souterrains*, Tunnels et Ouvrages Souterrains n°143, sept.-oct. 1997, pp. 301-306.
- Ruiz T. & Bénét J.C., (1998)**, *Potentiels de transport d'une solution diluée en milieu poreux*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série II b, pp. 415-421.
- Rousset G., (1988)**, Comportement mécanique des argiles profondes – Application au stockage de déchets radioactifs, Thèse ENPC.
- Salençon J., (1992)**, Mécanique des milieux continus. Tome 1 : Concepts généraux., Ecole Polytechnique, ISBN 2-7302-0250-1.
- Salençon J., (1994)**, Introduction à l'élasto-plasticité et au calcul à la rupture ; Cours de l'Ecole Polytechnique.
- Seedsman R.W., (1993)**, *Characterizing clay shales*, comprehensive Rock Eng. Principles, Practice and Projects, Brown, Fairhurst and Hoek (Eds), Pergamon press, 3, pp. 151-165.
- Shao J.F. et Lydzba D., (1999)**, *Un modèle d'endommagement poroélastique pour milieux poreux saturés*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série II b, pp. 1305-1310.
- Soler J.M., (2001)**, The effect of coupled transport phenomena in the Opalinus Clay and implications for radionuclide transport, J. Contaminant Hydrology 53, pp. 63-84.
- Su K.,(1998)**, Résultats des essais hydro-mécaniques réalisés par G.3S sur des marnes de Salthome (Angleterre),rapport interne G.3S n°98-006 réalisé pour GDF.
- Terzaghi K., (1965)**, Theoretical soil mechanics, New York ; London ; Sydney : John Wiley (Eds.).
- Tessier D., (1978)**, Etude de l'organisation des argiles calciques. Evolution au cours de la dessiccation, Annales Agronomiques, Vol. 29, N° 4, pp. 319-355.
- Tessier D., (1984)**, Etude expérimentale de l'organisation des matériaux argileux. Hydratation, gonflement et structuration au cours de la dessiccation et de la réhumectation, Thèse de l'université de Paris VII.
- Thomas H.R., Alonso E. E. & Gens A. (1995)**, *Modelling thermo/hydraulic/mechanical processes in the containment of nuclear waste*, Unsaturated Soils, Alonso & Delage (Eds)
- Thorel L., (1996)**, Plasticité et endommagement du sel gemme, Thèse ENPC.
- Van Olphen H., (1977)**, An introduction to clay colloid chemistry, 2<sup>nd</sup> Ed, Wiley interscience, New York.
- Vidal C., Dewel G. et Borckmans P. (1994)**, Au delà de l'équilibre, Hermann (Eds), ISBN 2-7056-6236-7.

- Vilar M.V. et al, (1998)**, *Bentonite : origin, properties and fabrication of blocks*, Febex, Enresa Publication Technica, Num. 05/98.
- Volckaert G. et al, (1996)**, Thermal-hydraulic-mechanical and geochemical behaviour of the clay barrier in radioactive waste repositories (model development and validation), European Commission, EUR 16744 EN, pp209-243.
- Vouille G., Tijani S.M. & de Grenier F., (1981)**, *Experimental determination of the rheological behavior of Tersanne rock salt*, Proc. Of the First Conf. On “the Mechanical Behaviour of Salt”, Pennsylvania State University.
- Wei C.-F. & Muraleetharan K. K. (1998)**, *Thermodynamic basis for the use of two independent stress state variables in unsaturated soil mechanics*, Poromechanics – A tribute to Maurice A. Biot, Thimus et al. (Eds), pp. 165-170.
- Wróbel M.A., (1997)**, *Heat and mass flows coupled with stress in a continuous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 40, N° 1, pp. 191-207.
- Yong R.N. & Warkentin B.P., (1975)**, *Soil Properties and Behaviour*, Elsevier, Amsterdam.



# ANNEXE A CRITERES DE TYPE ‘COURBE INTRINSEQUE’

## A.1 Courbes intrinsèques

Les critères dits “de type courbe intrinsèque” s’écrivent, dans l’espace des contraintes principales  $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$  :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - g(\sigma_I + \sigma_{III}) . \tag{A.1}$$

Dans le plan de Mohr :

$$R = (\sigma_I - \sigma_{III})/2 , \tag{A.2}$$

est le rayon du cercle de Mohr, et

$$-\xi = (\sigma_I + \sigma_{III})/2 , \tag{A.3}$$

est l’abscisse du centre de ce cercle.

Le critère peut donc se mettre sous la forme (à un facteur 1/2 près) :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = R - R(\xi) , \quad \text{avec} \quad R(\xi) = \frac{1}{2} g(-2\xi) . \tag{A.4}$$

Un critère  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  exprime ainsi une relation entre le rayon du cercle de Mohr correspondant à  $\underline{\underline{\sigma}}$  et l’abscisse du centre de ce cercle. La courbe définissant le critère dans le plan de Mohr est donc l’enveloppe des cercles de Mohr d’équation  $R = R(\xi)$  . C’est la courbe intrinsèque d’équation :

$$|\tau| = h(\sigma) , \tag{A.5}$$

qui comporte deux branches symétriques par rapport à l’axe  $\sigma$  (figure A.1).

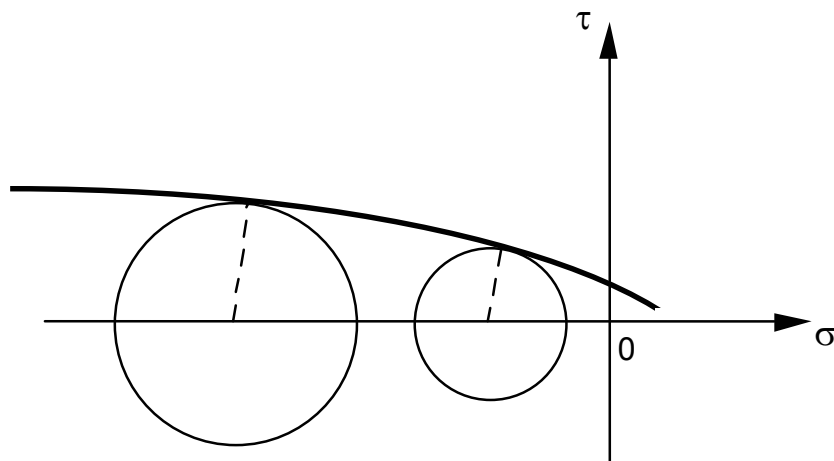


Figure A.1 : Courbe intrinsèque



## A.2 Equation de la courbe

Pour déterminer les équations de courbes intrinsèques à partir de l'expression en  $(\sigma_{III}, \sigma_I)$ , il faut se donner un paramètre.

Choisissons par exemple  $\xi$ . L'ensemble des points  $M(\sigma, \tau)$  appartenant à l'enveloppe sera donc donné par :

$$\begin{cases} \sigma = A(\xi) \\ \tau = B(\xi) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Considérons la fonction suivante :

$$G(\sigma, \tau, \xi) = (\sigma + \xi)^2 + \tau^2 - R^2(\xi). \quad (\text{A.7})$$

Pour  $\xi$  fixé, l'ensemble des points du cercle limite est alors caractérisé par l'équation :

$$G(\sigma, \tau, \xi) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Pour tout  $\xi$ , le point de la courbe intrinsèque  $M(A(\xi), B(\xi))$  est aussi point du cercle limite. On a donc :

$$\boxed{\forall \xi, \quad G(A(\xi), B(\xi), \xi) = 0} \quad (\text{A.9})$$

On déduit de (A.9) que :

$$\frac{d(G(A(\xi), B(\xi), \xi))}{d\xi} = 0,$$

soit encore :

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \tau} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Il reste à écrire la propriété des enveloppes, à savoir ici que la courbe intrinsèque est partout tangente aux cercles limites. On traduit cette propriété en écrivant que le vecteur tangent  $\vec{t}$  à l'enveloppe au point  $M(A(\xi), B(\xi))$  et la normale au cercle  $\vec{n}$  ont leur produit scalaire nul.

Avec  $\vec{t} = \left( \frac{\partial A}{\partial \xi}, \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)$  et  $\vec{n} = \left( \frac{\partial G}{\partial \sigma}, \frac{\partial G}{\partial \tau} \right)$ , il vient :

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \tau} \frac{\partial B}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{A.11})$$

On déduit, par soustraction des formules (A.10) et (A.11) que :

$$\boxed{\forall \xi, \frac{\partial G}{\partial \xi}(A(\xi), B(\xi), \xi) = 0} \quad (\text{A.12})$$

Les équations (A.9) et (A.12) permettent de définir complètement la courbe intrinsèque :

- on tire de (A.12) et (A.7) que  $2(A(\xi) + \xi) - 2R(\xi) \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0$  ,

c'est-à-dire :

$$A(\xi) = -\xi + R(\xi) \frac{\partial R}{\partial \xi} = -\xi + \frac{\partial(R^2/2)}{\partial \xi} \quad (\text{A.13})$$

- de même, en utilisant (A.7) et (A.13), (A.9) se traduit par :  $\left( R(\xi) \frac{\partial R}{\partial \xi} \right)^2 + B^2 - R^2 = 0$

d'où 
$$|B(\xi)| = \sqrt{R^2 - \left( R \frac{\partial R}{\partial \xi} \right)^2}$$

(A.14)

Ainsi, la courbe intrinsèque, paramétrée par  $\xi$  , est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma(\xi) = -\xi + R.R' \\ |\tau(\xi)| = R\sqrt{1 - R'^2} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

## A.3 Applications

### A.3.1 Critère de Tresca

Pour le critère de Tresca, la fonction de charge s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 . \quad (\text{A.16})$$

Donc  $R(\xi) = \frac{1}{2}\sigma_0$  est constante.

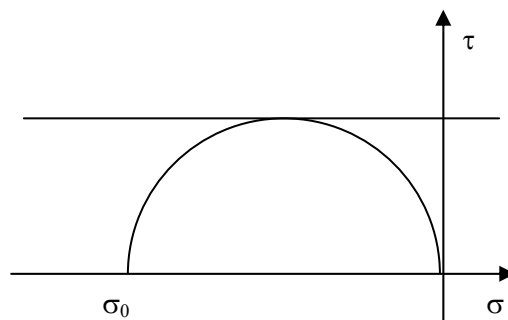
L'expression (A.15) nous fournit immédiatement la courbe intrinsèque sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} \sigma(\xi) = -\xi \\ |\tau(\xi)| = \frac{1}{2}\sigma_0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

On obtient alors l'expression  $|\tau| = h(\sigma)$  recherchée :

$$|\tau(\sigma)| = \frac{1}{2}\sigma_0 \quad (\text{A.18})$$

La courbe intrinsèque se compose de deux droites parallèles à l'axe  $\sigma$ . Confondant  $\tau$  et  $|\tau|$ , on trace une seule droite dans le plan (figure A.2).



**Figure A.2 :** Représentation du critère de Tresca dans le plan de Mohr

### A.3.2 Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb est exprimé dans l'espace des contraintes principales par :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \varphi - 2 C \cos \varphi . \quad (\text{A.19})$$

La même démarche que pour le critère de Tresca permet d'aboutir à une expression  $|\tau| = h(\sigma)$  pour la courbe intrinsèque. On obtient l'expression bien connue :

$$|\tau| = C - \sigma \cdot \text{tg} \varphi \quad (\text{A.20})$$

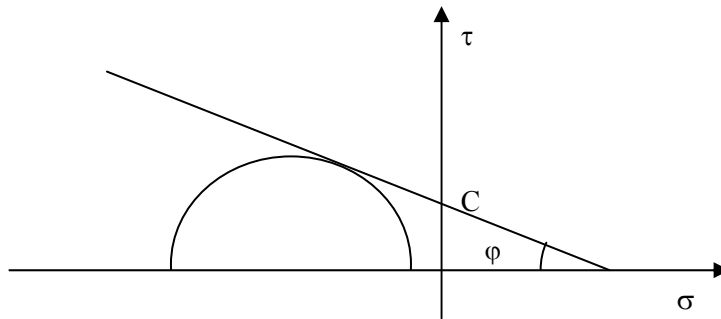


Figure A.3 : Critère de Mohr-Coulomb

### A.3.3 Critère de Hoek et Brown

Ecrivons le critère de Hoek et Brown :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sqrt{-m.R_c.\sigma_I + s.R_c^2}$$

$$\begin{aligned} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \Leftrightarrow (\sigma_I - \sigma_{III})^2 = -m.R_c.\sigma_I + s.R_c^2 \\ & \Leftrightarrow R^2 = m.R_c.(\xi - R) + s.R_c^2 \\ & \Leftrightarrow R^2 + m.R_c.R - m.R_c.\xi - s.R_c^2 = 0 \end{aligned}$$

L'équation  $R(\xi)$  est donnée par une équation du second degré ; la solution existe pour les valeurs

$-\xi \leq \frac{s}{m}.R_c$  (pression de cohésion), et  $R$  est la racine positive :

$$R = \frac{1}{2} \left[ -m.R_c + \sqrt{(m.R_c)^2 + 4(m.R_c.\xi + s.R_c^2)} \right] \quad (\text{A.21})$$

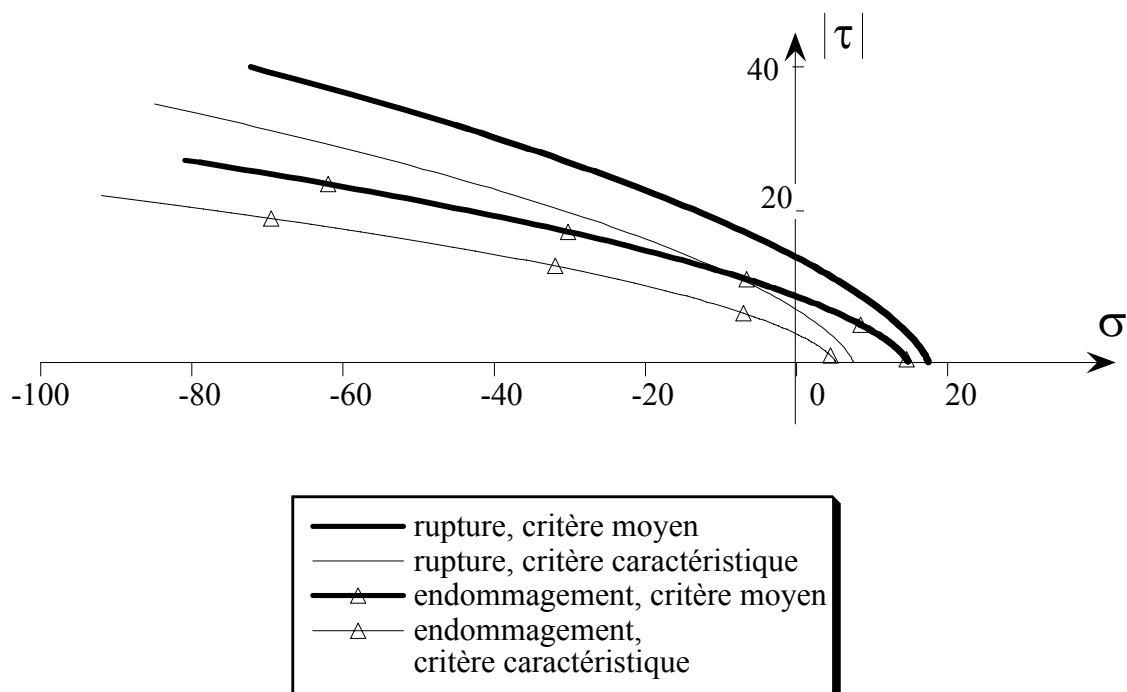
Cette dernière expression permet d'obtenir l'équation paramétrique de la courbe intrinsèque représentant le critère de Hoek et Brown dans le plan de Mohr.

Nous avons tracé les critères d'endommagement et de rupture identifiés par le bureau d'étude Coyne et Bellier et rappelés dans le tableau A.1 ; les courbes obtenues sont présentées en figure A.4.

	Critère de Hoek et Brown	ENDOMMAGEMENT		RUPTURE	
		valeurs moyennes (*)	valeurs caractéristiques	valeurs moyennes (*)	valeurs caractéristiques
ZONE A	$R_c$	16,20	12,30	28,00	22,00
	m	4,62	1,40	6,85	2,10
	s	1,00	1,00	1,00	1,00
ZONES B,C	$R_c$	12,30	5,80	22,00	12,00
	m	0,83	1,11	1,26	1,59
	s	1,00	1,00	1,00	1,00

(\*) sur la population disponible définie par  $\sigma_3 = 0$ , et  $\sigma_3 =$  contrainte moyenne in situ

**Tableau A.1 : Paramètres des critères de Hoek et Brown identifiés pour la rupture et l'initiation de l'endommagement des argilites de l'Est**



**Figure A.4 : Critères identifiés par Coyne et Bellier représentés dans le plan de Mohr.**

# ANNEXE B LOI DE COMPORTEMENT HYDRO-MECANIQUE POUR UN MATERIAU DE B.O. : L'ARGILE FO-CA.

## ***B.1 But de l'étude***

Au moment de sa mise en place, la barrière ouvragée argileuse Fo-Ca est partiellement saturée en eau. Elle va se saturer progressivement avec l'arrivée d'eau depuis le massif. Ce processus de saturation va provoquer le gonflement de la barrière ouvragée, gonflement qui sera empêché par le massif, d'où le développement, en parallèle du gonflement, d'un confinement de la barrière ouvragée qui va ainsi exercer une pression sur la paroi de la galerie (via les voussoirs).

Le comportement hydro-mécanique de la barrière ouvragée est complexe et se traite dans le cadre de la mécanique des milieux non saturés (voir Alonso et al., 1990). Dans la mesure où nous ne cherchons pas à modéliser finement l'intérieur de la galerie de stockage, et compte tenu d'une part de ce que le comportement THM couplé du Fo-Ca n'a fait, à notre connaissance, que l'objet d'études partielles, et d'autre part de ce que les données disponibles sont insuffisantes pour caractériser un modèle couplé en milieu non saturé, nous proposons d'utiliser un modèle "saturé équivalent" qui va permettre de caractériser l'action de la barrière ouvragée sur les voussoirs à travers :

- son gonflement,
- la pression qu'elle exerce sur les voussoirs.

Le modèle présenté, construit à partir des résultats d'essais sur le matériau Fo-Ca présentés dans Volckaert et al. (1996), est simple et en accord avec les expériences (dans la limite des informations disponibles).

## **B.2 La barrière ouvragée de référence**

En France, c'est une argile provenant d'un gisement du Bassin Parisien, de type smectite et référencée Fo-Ca, qui est étudiée comme matériau de référence pour les barrières ouvragées. Après extraction, le matériau Fo-Ca est séché puis broyé en poudre.

Pour sa mise en oeuvre dans un stockage, le matériau doit être compacté. Différents procédés de compactage ont été testés, à partir de poudre plus ou moins saturée en eau. A l'état saturé, la poudre initiale présente une teneur en eau de 18%.

Le procédé actuellement retenu est celui d'un compactage uniaxial et/ou isostatique (dans des conditions "œdométriques"), sous forte contrainte (supérieure à 60 MPa), à partir de poudre partiellement saturée (ayant une teneur en eau de 10-12%), car il permet semble-t-il d'obtenir les meilleures performances tant mécaniques qu'hydrauliques. C'est pour ce matériau compacté que nous construisons le modèle équivalent.

## **B.3 Relation contrainte-déformation-teneur en eau du Fo-Ca**

### **B.3.1 Description d'expériences réalisées au CEA**

Nous décrivons succinctement les résultats d'essais de compaction uniaxiale effectués à l'œdomètre au CEA sur le Fo-Ca. Les différentes courbes que nous donnons sont issues d'un rapport de la Commission Européenne (Volckaert et al. 1996) ; elles donnent les évolutions de l'indice de vide  $e$  avec la contrainte (soit contrainte moyenne, soit contrainte verticale). En petites déformations, l'évolution de la déformation volumique est similaire car elle dépend linéairement de l'indice de vide.

Initialement, on a de la poudre plus ou moins saturée en eau (voir figures B-1, B-2 et B-3 ci-dessous). On applique une contrainte axiale, jusqu'à une contrainte  $\sigma_{max}$  (la poudre est compactée), et on peut observer que le trajet de charge est assimilable à une droite dans ces diagrammes  $(\ln|\sigma_m|, e)$ . Ensuite est effectuée une série de décharges-charges en deçà de la contrainte  $\sigma_{max}$  : on reste sur une autre droite dans le diagramme  $(\ln|\sigma_m|, e)$ . Donc le comportement est élastique non linéaire en deçà de la contrainte  $\sigma_{max}$  appelée **pression de consolidation**. De plus, le comportement est fonction de la teneur en eau.

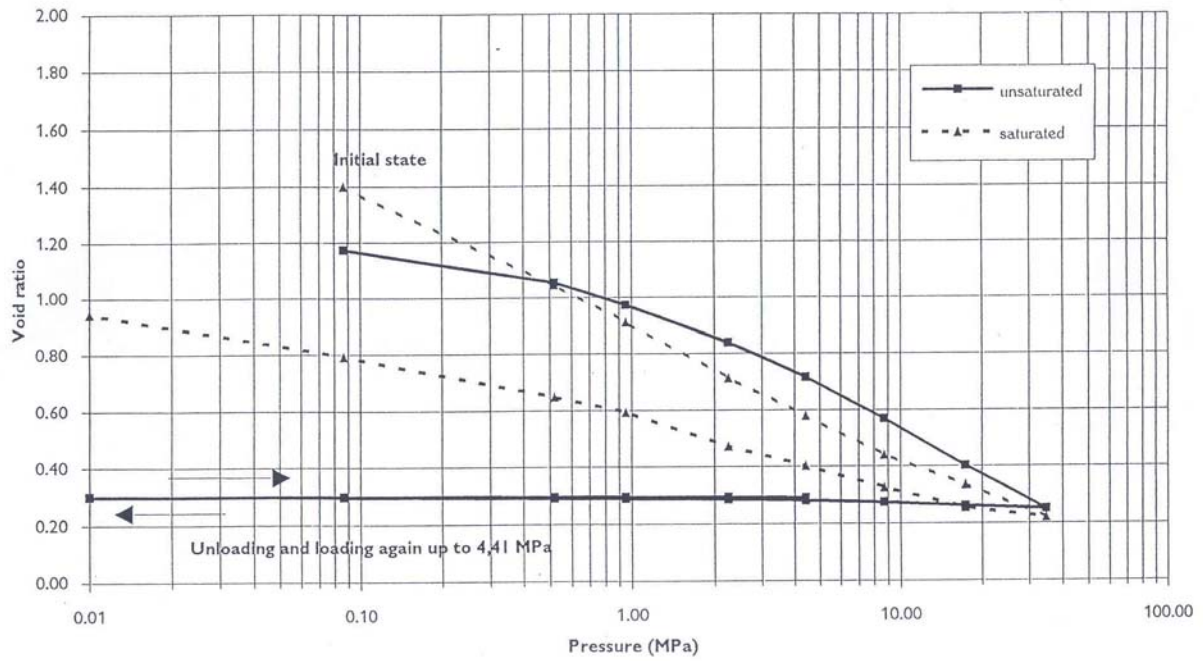


Figure B-1 : Résultats d'essais du C.E.A.

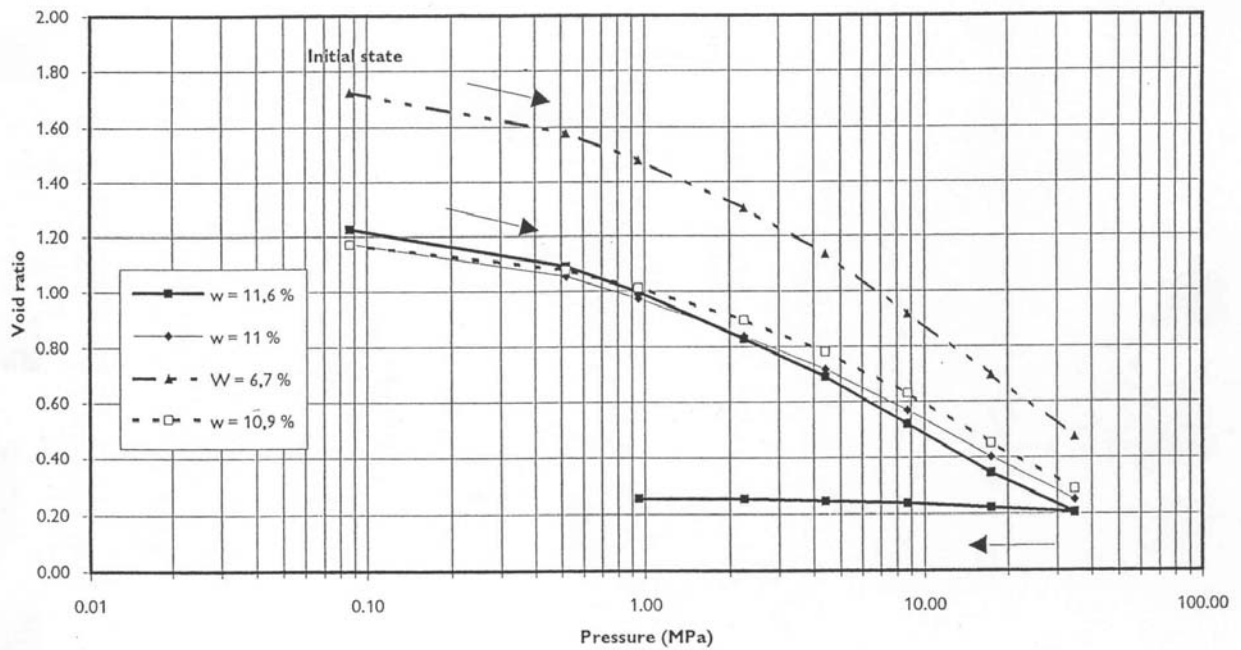
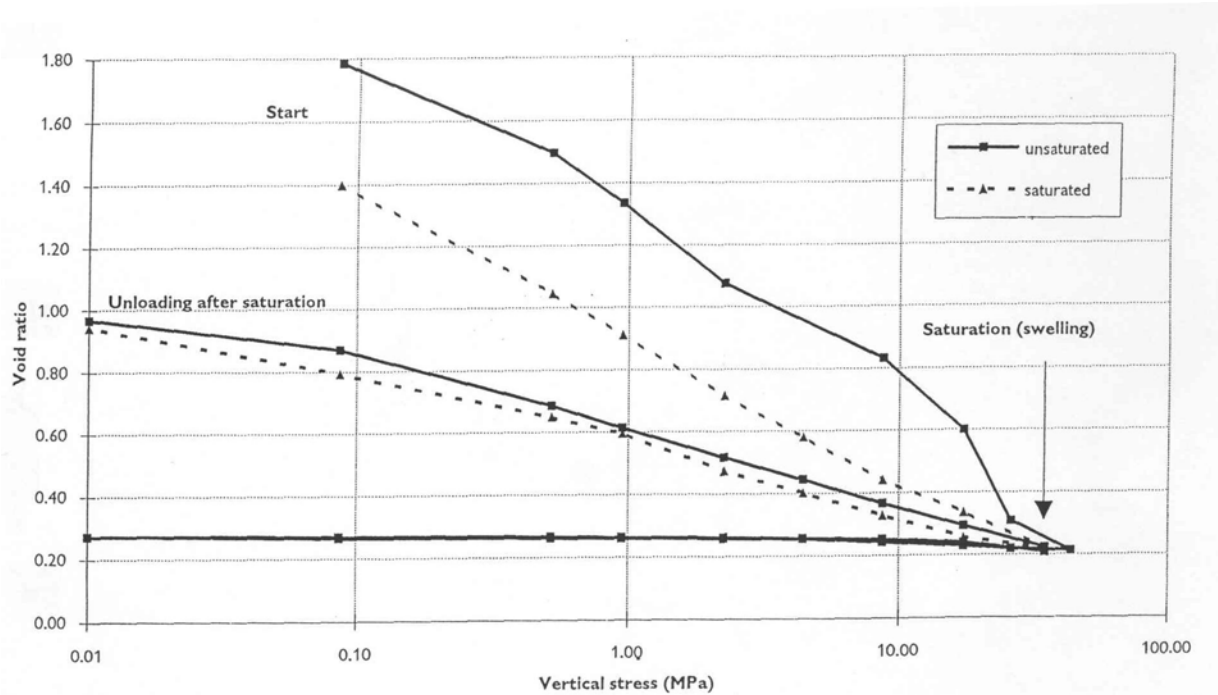
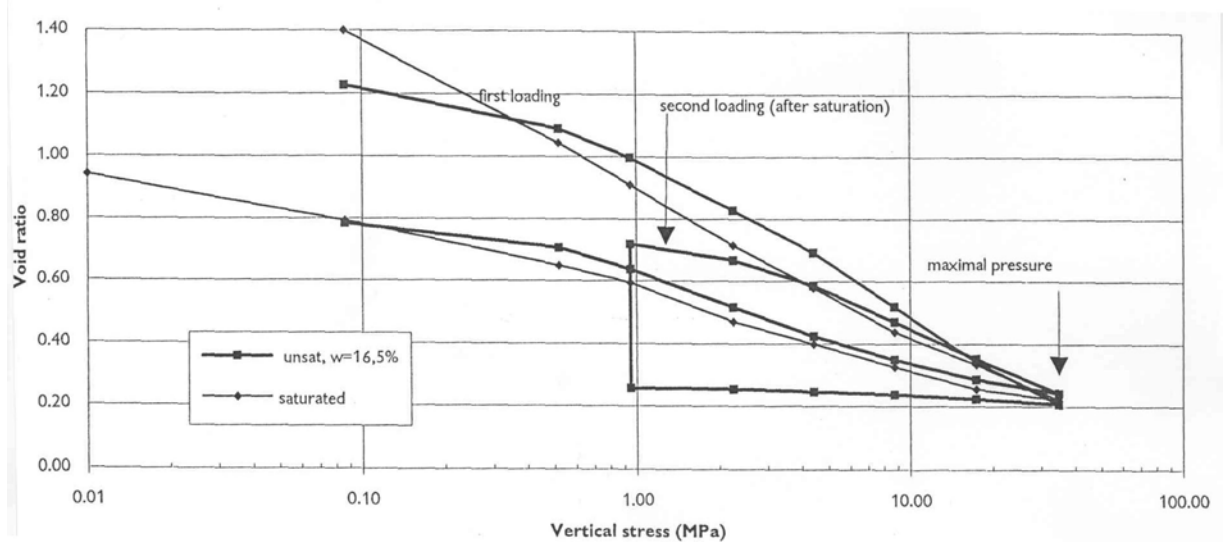


Figure B-2





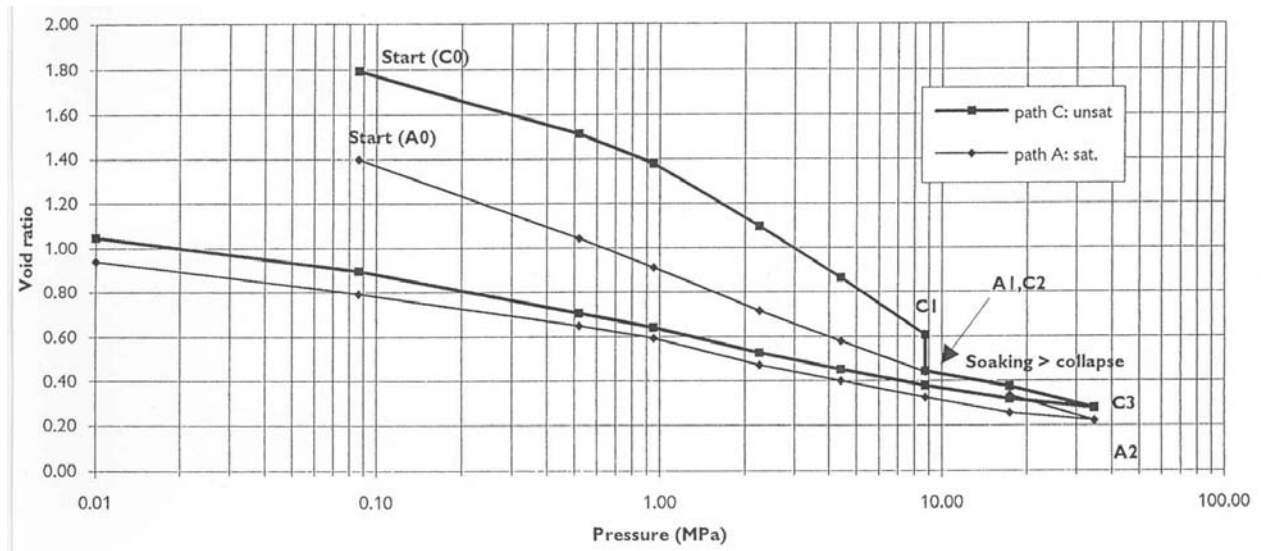
**Figure B-3**



**Figure B-4**

Sur la figure B-4 ci-dessus, on part d'une poudre partiellement saturée, qu'on compacte, puis on décharge partiellement et on sature l'argile en eau : l'indice de vide augmente avec l'apport d'eau, et on dépasse l'indice de vide obtenu en décharge pour l'argile initialement saturée. Ensuite on recharge : on

voit qu'on rejoint la courbe de premier chargement de l'argile initialement saturée. Ensuite, on effectue à nouveau une série décharges-charges : on remarque qu'on reste un peu au-dessus de la courbe de décharge de l'argile initialement saturée.



**Figure B-5**

Sur la figure B-5, on part d'une poudre non saturée et on sature au milieu du trajet de premier chargement ; comme précédemment, on rejoint la courbe de l'argile saturée.

### B.3.2 Interprétation

Par rapport à l'ensemble des expériences présentées dans Volckaert et al. (1996), nous avons volontairement omis certains aspects, tel par exemple l'effondrement, car a priori la B.O. sera compactée avec un coefficient de sécurité suffisant pour éviter un tel phénomène. Il est clair, en première approche, que le Fo-Ca présente un comportement hydro-mécanique irréversible, de type poroplastique.

Il y a trois aspects qui n'apparaissent pas dans les essais réalisés. Tout d'abord, on comprend ce qui se passe si on sature progressivement l'argile, mais aucun renseignement ne peut être obtenu sur le comportement si on diminue la teneur en eau. **Nous supposons que ce phénomène est réversible.** D'autre part, on ne connaît pas non plus ce qui se passe si, après compaction puis décharge, on recharge jusqu'à dépasser la contrainte  $\sigma_{max}$ . En outre, les essais réalisés ne permettent pas de savoir si le comportement plastique dépend ou non de la contrainte déviatorique effective.

Nous allons mettre en place un modèle permettant de considérer les différents aspects du comportement du Fo-Ca évoqués plus haut, en essayant de limiter autant que possible le nombre de paramètres.

## **B.4 Modèle poroplastique simplifié pour le matériau Fo-Ca**

Pour un état de saturation donné, nous choisissons, parmi les différentes expressions disponibles, celle du modèle de Cam-Clay modifié (voir Charlez, 1994 ; Su, 1998) qui intègre une physique à notre avis réaliste et est en accord avec les résultats d'expériences décrits ci-dessus. Nous rajoutons à ce modèle une dépendance réversible des paramètres au degré de saturation (ou la teneur en eau initiale) du matériau, de façon à être conforme à l'expérience.

Remarque :

Avant de mettre en place notre loi de comportement, il convient de préciser que dans le document de la Commission Européenne (Volckaert et al., 1996), les différentes courbes décrivant les résultats d'essais œdométriques sont données en fonction de la teneur en eau. Il s'agit en fait de la valeur initiale de la teneur en eau du matériau, et non de la valeur au cours de l'expérience. En effet, au cours des essais mentionnés, la teneur en eau varie : les essais sont drainés ; et toute compression fait décroître le volume global et le volume des pores (l'indice de vide diminue), ce qui implique une fuite du fluide interstitiel, c'est-à-dire une baisse de la teneur en eau.

Nous faisons l'hypothèse que le degré de saturation est directement liée à la succion. Suivant cette hypothèse, la saturation du matériau ne varie pas puisque les essais sont drainés. Nous retenons donc ce paramètre, plutôt que la teneur en eau.

### **B.4.1 Modèle de comportement élastique**

La représentation des résultats d'essais dans le plan  $(\ln|\sigma_m|, e)$  incite à prendre une loi d'état non linéaire, proche de celle de Cam-Clay modifiée proposée par l'Université de Cambridge et décrite par exemple par Su K. (1998) : à degré de saturation en eau, noté  $s$ , constant, l'indice de vide  $e$  diminue linéairement avec le logarithme de la contrainte effective moyenne "de compression"  $p'$ , soit :

$$e_e = e_0 - \kappa(s) \cdot \ln(p'), \quad (\text{B.1})$$

relation dans laquelle  $\kappa(s)$  est un "coefficient de gonflement" dépendant directement de la saturation  $s$ , et  $e_0$  est l'indice de vide initial pour cette valeur de la saturation de l'argile et l'état de consolidation considéré.

Cette dépendance en  $s$  nous oblige à raisonner de manière incrémentale, et (B.1) devient :

$$de^e = -\kappa(s) \cdot \frac{dp'}{p'}, \quad (\text{B.2})$$

Notons que nous faisons dès maintenant une première hypothèse en supposant une loi de cette forme en contrainte effective, puisque les figures donnent une évolution en terme de contrainte totale. Cette hypothèse n'est pas limitative : au contraire, on pourra, si nécessaire, décider de la valeur du coefficient de Biot.

Écriture de la loi contrainte-déformation :

On note  $V_t$  un volume élémentaire du matériau poreux ; il se décompose en  $V_v$  le volume de vides et  $V_s$  le volume de solide :  $V_t = V_v + V_s$ . Les variables sont notées avec un exposant "0" dans leur état initial.

• la porosité est donnée par : 
$$\phi = \frac{V_v}{V_t} ; \quad (\text{B.3})$$

• l'indice de vide  $e$  est défini par : 
$$e = \frac{V_v}{V_s} ; \quad (\text{B.4})$$

• la déformation volumique  $\varepsilon_v = tr \underline{\underline{\varepsilon}}$  vérifie : 
$$d\varepsilon_v = \frac{dV_t}{V_t} . \quad (\text{B.5})$$

On déduit des relations (B.3) et (B.4) que :

$$e = \frac{\phi}{1 - \phi} \quad \text{ou encore} \quad \phi = \frac{e}{1 + e} . \quad (\text{B.6})$$

On effectue les dérivées logarithmiques de (B.3), (B.4) et (B.6) :

• (B.3)  $\Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} = \frac{dV_v}{V_v} - \frac{dV_t}{V_t} \Rightarrow \frac{dV_v}{V_v} = \frac{dV_t}{V_t} + \frac{d\phi}{\phi}$

• (B.4)  $\Rightarrow \frac{de}{e} = \frac{dV_v}{V_v} - \frac{dV_s}{V_s} \Rightarrow \frac{de}{e} = \frac{dV_t}{V_t} + \frac{d\phi}{\phi} - \frac{dV_s}{V_s}$  (B.7)

• (B.6)  $\Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} = \frac{de}{e} - \frac{de}{1+e} \Rightarrow \frac{de}{1+e} = \frac{de}{e} - \frac{d\phi}{\phi} = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{dV_s}{V_s}$

On note  $m_s$  la masse du squelette solide, et  $\rho_s$  la masse volumique du solide. On a alors :

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s}, \text{ donc } \frac{dV_s}{V_s} = -\frac{d\rho_s}{\rho_s} \quad (m_s \text{ ne variant pas}). \quad (\text{B.8})$$

Les relations (B.7) et (B.8) permettent de relier  $e$  et  $\varepsilon_v$  par la relation incrémentale suivante :

$$\frac{de}{1+e} = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{d\rho_s}{\rho_s} = d\varepsilon_v - \frac{d\rho_s}{\rho_s} \quad (\text{B.9})$$

puisque  $V_t = V_t^0 \cdot (1 + \varepsilon_v)$  par définition.

En supposant le solide incompressible, la relation (B.9) s'intègre aisément :

$$\varepsilon_v = \frac{e - e^0}{1 + e^0} \quad (\text{B.10})$$

L'inversion de la relation (B.1) donne alors une loi d'état de type exponentiel, soit, en supposant l'évolution élastique :

$$p' = p'^0 \left\{ \exp[-r(s) \cdot \varepsilon_v^e] - 1 \right\} \quad r(s) = \frac{1 + e^0(s)}{\kappa(s)}, \quad (\text{B.11})$$

où  $\varepsilon_v^e = tr \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ . Donc on retrouve bien une loi de type Cam-Clay si la teneur en eau ne varie pas. Comme le dit Charlez (1994), il y a une contradiction dans ce modèle dans la mesure où une telle loi ne peut dériver d'une énergie libre quadratique, alors que le modèle fait l'hypothèse des petites perturbations.

Cette relation permet de déterminer la variation du module de compressibilité avec la teneur en eau et la déformation. La valeur du coefficient de Poisson sera supposée constante :

$$\nu = 0,2 \quad (\text{B.12})$$

## B.4.2 Modèle de comportement plastique

La loi de comportement du matériau Fo-Ca est supposée poroplastique et le matériau standard : la règle d'écoulement est normale (loi associée). Dans le plan  $(p', q)$ , où  $q$  désigne la contrainte équivalente de Von

Mises  $q = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij} - p')(\sigma_{ij} - p')}$ , la surface de charge s'écrit directement sous la forme  $F(p', q, s, \varepsilon_v^p)$ ,

où  $\varepsilon_v^p = tr \underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est la déformation plastique volumique. On considère pour  $F$  la fonction suivante :

$$F(p', q, s, \varepsilon_v^p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{q^2}{m(s)^2} + (p' - p_{cr}(s, \varepsilon_v^p))^2 - p_{cr}(s, \varepsilon_v^p)^2 \right] \quad (\text{B.13})$$

$m$  est une fonction scalaire de la saturation en fluide  $s$ ,

$p_{cr}$  (exprimée en MPa) est une pression critique évoluant avec  $\varepsilon_v^p$  et  $s$ .

Pour un degré de saturation constant, la loi est celle de Cam-Clay modifiée. Cela signifie que la valeur  $p' = 2 p_{cr}$  correspond à la pression de consolidation  $\sigma_{max}$  évoquée au §B-3-1. Cette pression est supposée correspondre à la limite d'élasticité courante du matériau sous chargement hydrostatique. Si  $p_{cr}$  augmente (resp. diminue), le domaine d'élasticité augmente (resp. diminue).

De manière à respecter notre volonté de retrouver le modèle Cam-Clay pour une saturation  $s$  constante, nous cherchons  $p_{cr}$  sous la forme :

$$p_{cr} = p_{cr}^0(s) \cdot \exp(-\alpha \cdot \varepsilon_v^p) \quad \varepsilon_v^p < 0 \text{ en compression} \quad (\text{B.14})$$

où  $p_{cr}^0(s)$  est la pression critique obtenue par la préconsolidation de l'argile et  $\alpha$  un paramètre du modèle à déterminer.

### B.4.3 Comparaison du modèle à l'expérience et détermination des paramètres

Le modèle de Cam-Clay est parfaitement adapté aux courbes observées, d'où notre choix. Pour preuve, essayons d'accorder le modèle avec l'expérience. Soit un matériau initialement consolidé sous une contrainte moyenne  $c^0$ . On considère un chargement hydrostatique croissant  $p'$ , à saturation constante.

Tant que  $p' < c^0$ , le comportement est purement élastique, autrement dit gouverné par l'équation (B.11) :

$$\varepsilon_v^e = \frac{-1}{r(s)} \ln\left(\frac{p' + p'^0}{p'^0}\right), \quad (\text{B.15})$$

d'où :

$$e = -\kappa(s) \cdot \ln\left(\frac{p' + p'^0}{p'^0}\right) + e^0(s). \quad (\text{B.16})$$

La pression  $p'^0$  s'interprète ici de la manière suivante : c'est la pression qui s'exerce en réalité lorsqu'on n'applique aucune contrainte, soit la pression atmosphérique  $p'^0 = 1 \text{ bar} = 0,1 \text{ MPa}$ ,  $e^0(s)$  étant justement l'indice des vides sous pression atmosphérique. Dans le domaine élastique, la courbe de  $e$  en fonction de  $\ln(p')$  est donc une droite de pente  $-\kappa$ , ce qui est conforme à l'expérience.

Pour  $p' > c^0$ , le matériau s'écroute (durcissement) et on a apparition d'une déformation plastique selon (B.14) ; on a alors :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p = -\frac{1}{r(s)} \ln\left(\frac{p' + p'^0}{p'^0}\right) - \frac{1}{\alpha} [\ln(p' + p'^0) - \ln(c^0 + p'^0)], \quad (\text{B.17})$$

En utilisant l'indice des vides  $e$ , on obtient :

$$e = e^0(s) - \kappa(s) \cdot \ln\left(\frac{p' + p'^0}{p'^0}\right) - \frac{1 + e^0(s)}{\alpha} [\ln(p' + p'^0) - \ln(c^0 + p'^0)],$$

qui s'écrit aussi :

$$e = e^0(s) - \kappa(s) \cdot \ln\left(\frac{c^0 + p'^0}{p'^0}\right) - \left[\kappa(s) + \frac{1 + e^0(s)}{\alpha}\right] \cdot [\ln(p' + p'^0) - \ln(c^0 + p'^0)] \quad (\text{B.18})$$

On voit alors qu'au-delà de la pression de consolidation, la courbe de  $e$  en fonction de  $\ln(p')$  est une droite de pente  $-\lambda$  avec :

$$\lambda(s) = \left[\kappa(s) + \frac{1 + e^0(s)}{\alpha}\right] \quad (\text{B.19})$$

Nous pouvons conclure que le modèle de Cam-Clay permet d'être conforme à l'expérience pour une valeur de la saturation constante. Les figures B-1 à B-5 vont nous permettre d'identifier pour certaines teneurs en eau les paramètres  $\kappa$ ,  $\lambda$ , et  $e^0$  qui nous donnent accès aux paramètres de notre modèle, hormis le terme  $m(s)$  qui sera étudié plus loin.

Notons que nous imposons, avec ce modèle, une évolution au-delà de la consolidation, qui n'est pas donnée par les expériences. Néanmoins, cette évolution semble la plus logique au vu de ces expériences.

#### B.4.4 Évolution avec la saturation en eau

Pour simplifier le modèle, et en l'absence de données quantitatives sur l'évolution avec le degré de saturation, nous supposons que les paramètres du modèle ( $\kappa$ ,  $\lambda$ , et  $e^0$ ) varient linéairement avec  $s$ .

Cela implique que nous imposons, là encore, une évolution qui n'est pas révélée par les expériences du CEA, à savoir lorsque la teneur en eau diminue.

#### B.4.5 Le paramètre $m$

Comme pour le modèle de Cam-Clay modifié, le critère de plasticité est une ellipse dans le plan de la contrainte moyenne  $p'$  et de la contrainte équivalente  $q$ . Le sommet de l'ellipse se déplace sur une droite d'équation  $q = m.p'$ . Dans le modèle de Cambridge, le paramètre  $m$  est appelé pente de la droite critique car, lorsque cet état est atteint, le matériau ne manifeste plus aucune variation de volume.

Dans la pratique, cet état critique est obtenu lorsque la résistance résiduelle du matériau est atteinte.  $m$  est alors relié à l'angle de frottement résiduel  $\varphi_r$  de la roche :

$$m = \frac{6 \sin \varphi_r}{3 - \sin \varphi_r} \quad (\text{donc } 0 \leq m \leq 3) \quad (\text{B.20})$$

Le paramètre  $m$  est lié à  $\kappa$  et  $\lambda$  par l'intermédiaire de relations entre  $p'$ ,  $q$  et ces paramètres, données par exemple dans Su K. (1998) (voir aussi Charlez, 1994 et Bruneteau & Ghoreychi, 1997). Dans la pratique, la détermination de  $m$  est difficile, et nécessite par exemple d'attendre lors d'un essai œdométrique que le rapport contrainte horizontale/contrainte verticale (donc aussi le rapport  $q/p'$ ) tende



vers une valeur limite, en l'occurrence  $m$ . On admet souvent en Mécanique des Sols que le rapport contrainte horizontale/contrainte verticale reste constant, et cela permet de donner une valeur à  $m$ .

Dans notre cas, nous n'avons pas de données concernant le rapport contrainte horizontale/contrainte verticale lors des essais effectués par le CEA. A fortiori, il nous est impossible de déterminer une éventuelle évolution de  $m$  avec la teneur en eau. Pour les mêmes raisons, il n'est pas possible de déduire des essais la valeur du déviateur en fonction de la teneur en eau et de l'état des déformations volumiques élastiques et anélastiques. Souvent, la valeur de  $m$  est prise entre 1 et 1,7. Nous prendrons :

$$m = 1 . \quad (\text{B.21})$$

Cela signifie que la valeur de l'angle de frottement résiduel est faible ( $\varphi_r = 25,4^\circ$ ). Tel doit être a priori le cas d'une argile de type Fo-Ca.

Dans la mesure où la dépendance de la compaction en fonction du déviateur n'a pas été mise en exergue dans Charlez (1994), il est à noter que le critère donné dans (B.13) est hypothétique. Mais ce sont, en général, des modèles du type Cam-Clay qui sont utilisés pour ce type de courbes contrainte/indice de vide, et cela a motivé notre choix (voir aussi Gens, 1995). En général, et c'est le cas pour des argiles saturées ou non, il y a aussi une forte dépendance des comportements élastique et plastique à la température, mais les résultats des expériences disponibles ne nous permettent pas d'en tenir compte. Retenons tout de même que ceci risque d'entraîner une sous-évaluation de l'action mécanique de la B.O. sur le massif. Une étude plus poussée sera donc utile à l'avenir.

#### **B.4.6 Obtention d'une loi contrainte totale - pression - déformation**

Les figures B-6 à B-9 ci-dessous, issues de Volckaert et al. (1996), relient les grandeurs suivantes pour une contrainte appliquée nulle : la teneur en eau, la succion, la densité sèche, et le degré de saturation en eau.

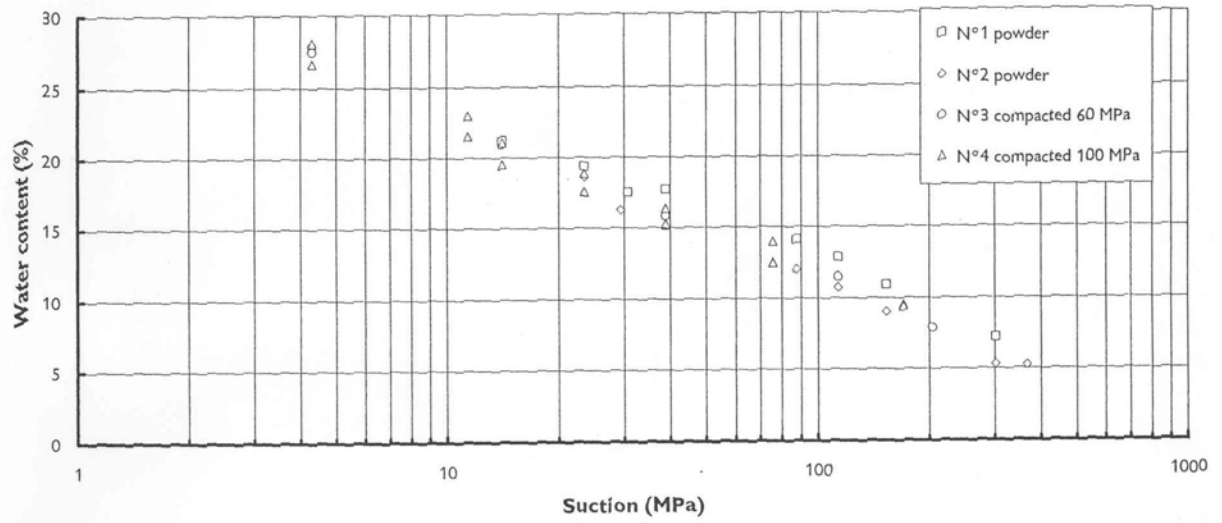


Figure B-6

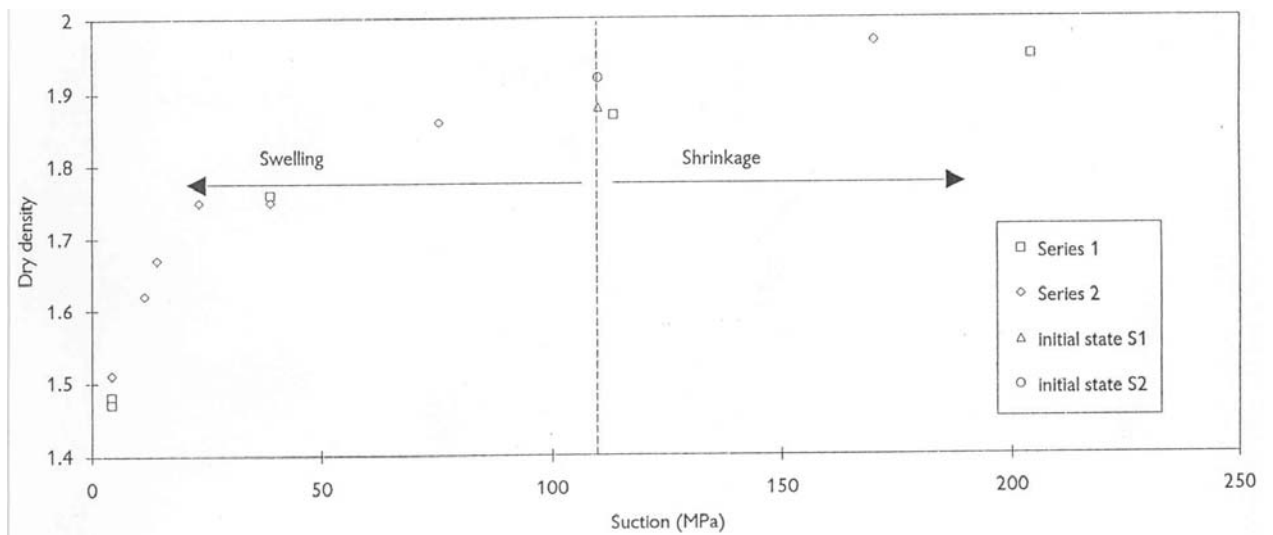


Figure B-7

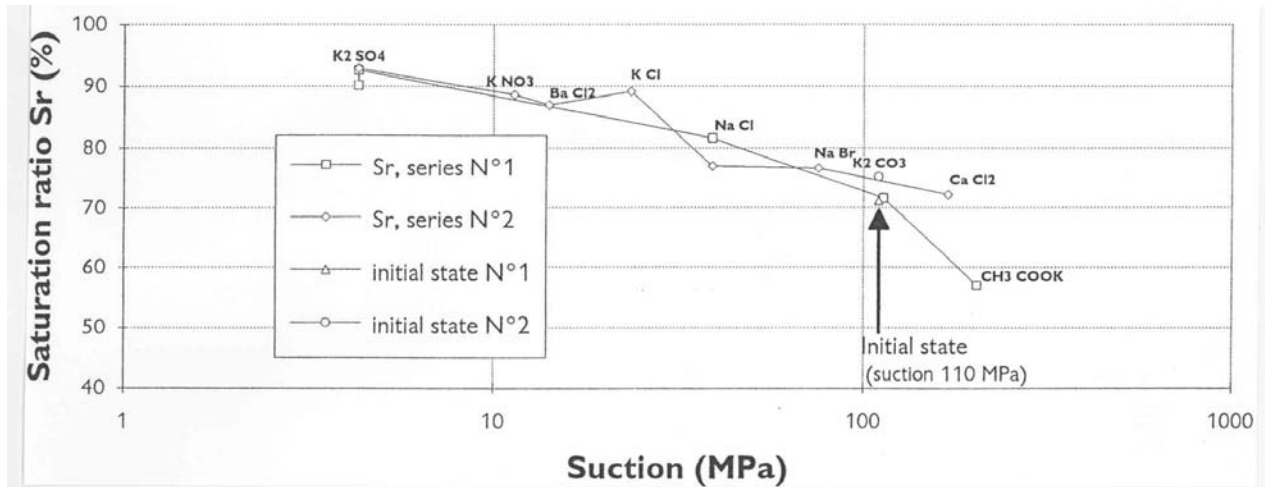


Figure B-8

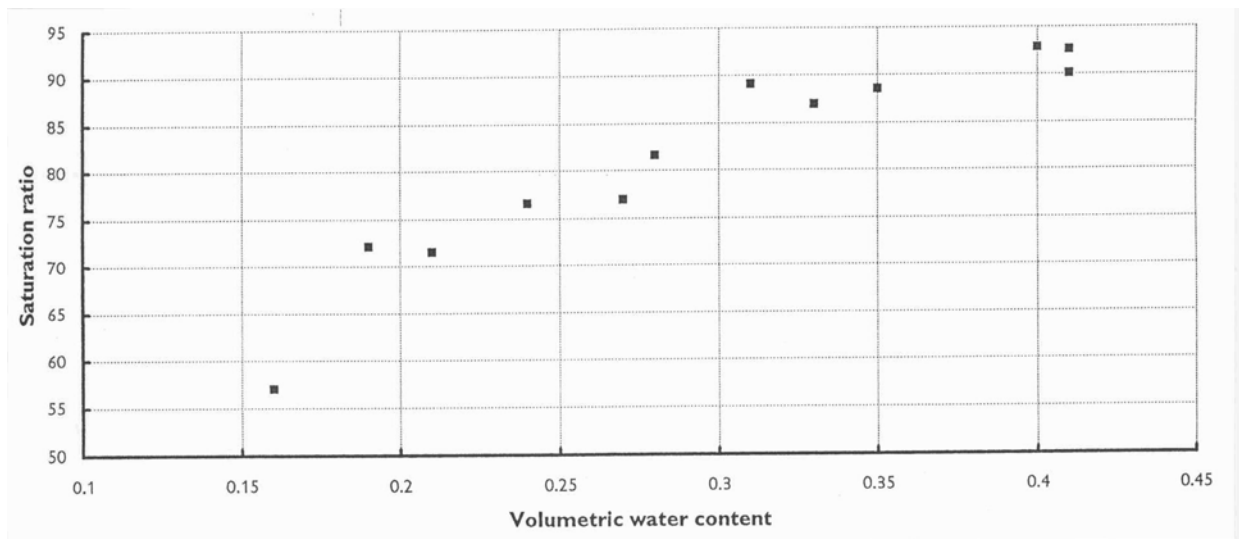


Figure B-9

On fait l'hypothèse, généralement adoptée, que **la saturation dépend exclusivement de la suction**. De manière à déterminer la loi reliant la saturation à la suction, on peut choisir d'ajuster une fonction sur la courbe de la figure B-8, ou bien d'utiliser les relations teneur en eau/suction (figure B-6) et densité sèche/suction (figure B-7), courbes pour lesquelles nous avons plus de points de mesures. C'est ce dernier choix qui est fait.

La succion est exprimée ici directement en terme de pression : elle vaut  $S = -P_f$ , où  $P_f$  est la pression de fluide (ce qui est vrai dans la mesure où l'on admet que le système n'est pas étanche à l'air).

La figure B-8 montre la relation existant entre le degré de saturation et la succion. Mais il y a très peu de points, et il nous semble préférable d'effectuer le calage :

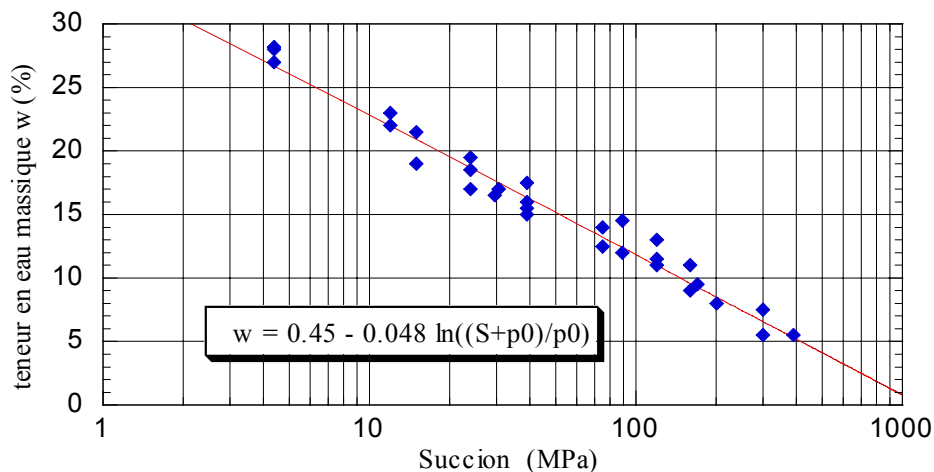
- de la courbe B-6 pour la teneur en eau,
- de la courbe B-7 pour la densité sèche,
- et de la courbe B-9,

puis nous obtiendrons  $s$  grâce aux relations existant entre les différentes grandeurs.

On remarque sur la courbe B-6 entre teneur en eau, notée  $w$ , et succion une relation de la forme :

$$w = w^0 - a \cdot \ln\left(\frac{S + p^0}{p^0}\right). \quad (\text{B.22})$$

où  $w^0$  constitue la teneur en eau pour une succion nulle. Par ajustement, on trouve les valeurs  $w^0 = 0,45$  et  $a = 0,048$ . Le résultat de l'ajustement est donné en figure B-10.



**Figure B-10 : ajustement de la loi de teneur en eau massique fonction de la succion**

La masse volumique sèche est notée  $\rho_d$  (d : dry), et définie par la relation suivante :

$$\rho_d = \frac{\rho}{1 + w} \quad (\text{B.23})$$

où  $\rho$  est la masse volumique totale du matériau poreux. La relation (B-23) va permettre de déterminer la masse volumique de solide, utile plus tard.

On reprend, comme en B-4.1, un volume élémentaire  $V_t = V_v + V_s$ . La teneur en eau  $w$  dans ce volume est définie comme le rapport de la masse de fluide sur la masse de solide dans le volume :

$$w = \frac{M_{fl}}{M_s} = \frac{\rho^{fl} \cdot V_{fl}}{\rho^s \cdot V_s} \quad (\text{B.24})$$

avec  $\rho^{fl}$  et  $\rho^s$  les masses volumiques respectives de fluide et de solide.

Le degré de saturation  $s$  est défini comme la portion de vide occupée par le fluide :

$$s = \frac{V_{fl}}{V_v} \quad (\text{B.25})$$

De fait, on relie teneur en eau et degré de saturation :

$$w = \frac{\rho^{fl} \cdot V_{fl}}{\rho^s \cdot V_s} = \frac{\rho^{fl}}{\rho^s} \cdot s \cdot \frac{V_v}{V_s}$$

soit :

$$w = \frac{\rho^{fl}}{\rho^s} \cdot s \cdot e \quad (\text{B.26})$$

où  $e$  est l'indice de vide défini par (B.4).

Lorsque l'argile est saturée en eau, le fluide occupe tout l'espace poreux connecté, donc  $V_{fl} = V_v$ .

Avec la définition (B-4) de l'indice de vide  $e$ , on a alors :

$$w = \frac{\rho^{fl} \cdot V_v}{\rho^s \cdot V_s} = \frac{\rho^{fl}}{\rho^s} e \quad \text{à saturation.} \quad (\text{B.27})$$

On remarque d'autre part que :

$$1 + w = 1 + \frac{\rho^{fl} \cdot V_{fl}}{\rho^s \cdot V_s} = \frac{\rho^s \cdot V_s + \rho^{fl} \cdot V_{fl}}{\rho^s \cdot V_s} = \frac{\rho \cdot V}{\rho^s \cdot V_s} = \frac{\rho}{\rho^s \cdot (1 - \phi)},$$

donc :

$$\rho_d = \rho^s \cdot (1 - \phi) = \frac{\rho_s}{1 + e} \quad (\text{B.28})$$

L'ajustement de la courbe reliant la teneur en eau massique  $w$  à la succion  $S$  a été réalisé. Par ailleurs, la figure B-8 relie le degré de saturation  $\bar{s}$  à la succion  $S$  pour de l'argile compactée à 60Mpa. Cette courbe peut être ajustée par la loi :

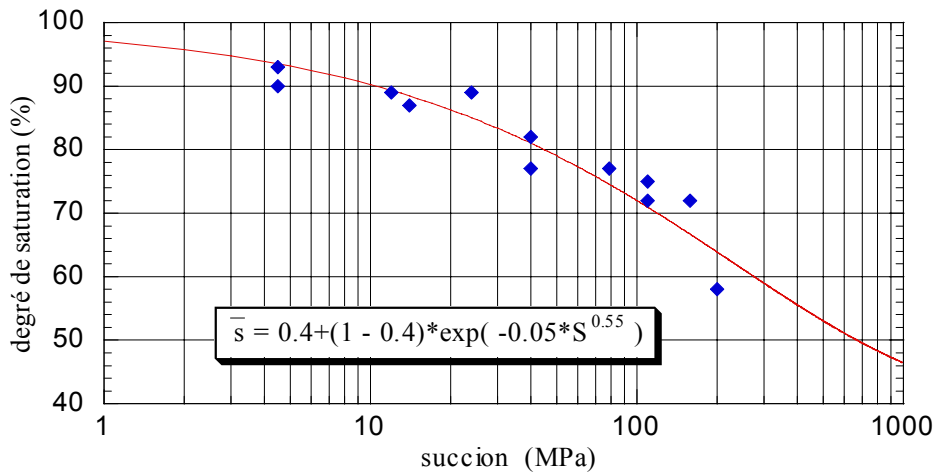
$$\bar{s} = \bar{s}_{res} + (1 - \bar{s}_{res}) \exp(-aS^b) \quad (B.29)$$

avec  $\bar{s}_{res} = 0.4$

$$a = 0.05$$

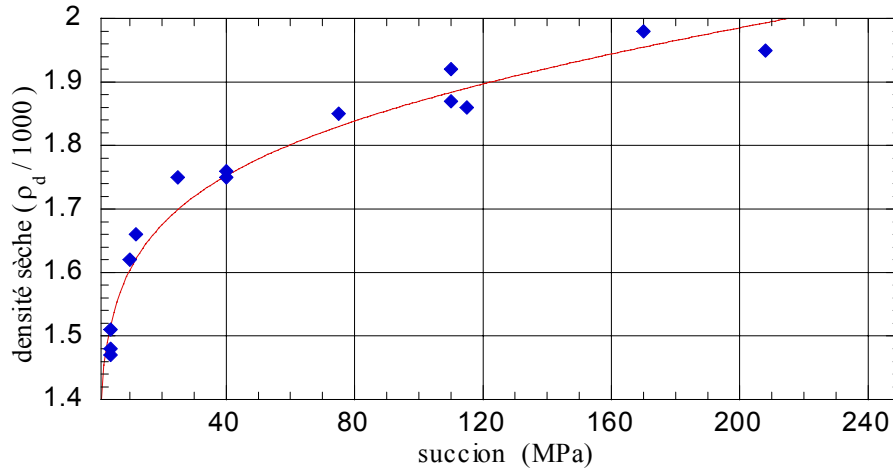
$$b = 0.55$$

Le résultat de l'ajustement est montré en figure B-11. Connaissant  $w$  et  $\bar{s}$ , on peut — à condition de connaître  $\rho_s$  — trouver l'évolution de l'indice des vides  $e$  via la formule (B-26), puis la masse volumique sèche  $\rho_d$  via (B-28).



**Figure B-11 : loi reliant le degré de saturation à la succion**

En procédant par tâtonnements, on trouve la valeur de  $\rho_s$  qui permet d'obtenir une densité sèche  $\rho_d/1000$  ajustant la courbe de la figure B-7 ; on trouve  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$ , et l'évolution correspondante de la densité sèche est donnée en figure B-12.



**Figure B-12 : comparaison de l'évolution de la densité sèche calculée avec les résultats de mesures.**

Les résultats des expériences réalisées par le C.E.A. ne permettent pas de définir une loi pour le matériau saturé. Nous ne faisons donc pas d'extrapolation de la loi précédemment définie.

### **B.5 Paramètres mécaniques du modèle**

Pentes caractéristiques :

L'ajustement des paramètres est effectué à partir des courbes expérimentales. On obtient les lois suivantes pour l'évolution de  $\kappa$  :

$$\kappa = 1,4 \cdot 10^{-2} + 0,113 \left( \frac{\bar{s} - \bar{s}_{res}}{1 - \bar{s}_{res}} \right) \quad (B.30)$$

$\lambda$  est quasiment constant et vaut :

$$\lambda = -0,22. \quad (B.31)$$

Coefficient de Biot :

La figure B-4 montre que le matériau gonfle lorsque la saturation augmente. Dans notre modèle, cela signifie que le coefficient de Biot  $b$  n'est pas nul.

Par ailleurs, la figure B-5 montre un cas d'effondrement. On peut rendre compte de ce phénomène en prenant un coefficient de Biot variable avec le degré de saturation ou la succion.

Nous trouvons la loi d'évolution de  $b$  :

- $b = 0$  si  $\bar{s} < 0,55$
- $b = \left( \frac{\bar{s} - 0,55}{1 - 0,55} \right)^3$  sinon

(B.32)

## **ANNEXE C POTENTIEL DE L'EAU**

### **C.1 Introduction**

L'eau interstitielle d'un matériau est soumise à des actions d'origine diverses (gravité, pression, capillarité, chimisme, adsorption) qui lui imposent un état énergétique. La variabilité de cet état énergétique au sein du matériau est à l'origine de mouvements spécifiques de l'eau interstitielle. La variation d'énergie d'une quantité unitaire d'eau depuis un état de référence de l'eau jusqu'à un point d'un sol ou d'une roche est appelée potentiel de l'eau. C'est un concept global qui permet de caractériser l'état énergétique de l'eau dans son ensemble, puisqu'il tient compte de l'effet combiné de l'ensemble des forces agissant sur l'eau du sol. Il permet de passer de manière continue de l'eau liée à l'eau libre, ou d'un milieu saturé à un milieu insaturé, ce qui explique que plusieurs mécaniciens aient tendance à l'utiliser (à travers le potentiel chimique) comme variable à part entière dans les modélisations.

Pour exprimer le niveau énergétique de l'eau du sol, on utilise parfois les expressions « pF », « humidité relative », « activité », « succion ». Nous allons rappeler les correspondances entre ces différentes grandeurs. Auparavant, nous évoquerons les concepts d'eau libre et d'eau liée, ainsi que les différentes forces agissant sur l'eau d'un sol ou d'une roche. Certains des phénomènes décrits, tels l'osmose ou la capillarité, le seront bien sûr plus clairement puisqu'on dispose à leur endroit d'une assise théorique claire.

### **C.2 Eau des sols et des roches**

#### **C.2.1 Eau liée**

L'eau liée est l'eau qui, dans les sols et les roches, est attachée à la surface des grains par le jeu des forces d'attraction moléculaire (de Marsily, 1981). Ces forces décroissent avec la distance de la molécule d'eau au grain. On distingue deux types d'eau liée :

- l'eau adsorbée qui forme une couche à la surface des grains, d'épaisseur allant jusqu'à  $0,1\mu\text{m}$  ; couche dans laquelle les propriétés de l'eau sont fortement modifiées du fait des forces d'attraction de ses molécules qui peuvent atteindre plusieurs dizaines de milliers de bars,
- au-delà de cette couche, mais à moins de  $0,5\mu\text{m}$  des grains solides, une eau soumise à une attraction non négligeable et qui reste immobile ; c'est généralement cette eau qu'on appelle l'eau liée, pour la distinguer de l'eau adsorbée.



Les phénomènes d'adsorption sont liés à la surface spécifique du milieu. Dans les argiles, ils sont particulièrement importants et réduisent fortement la mobilité de l'eau et des ions. Ils sont aussi, et cela peut troubler, liés à la capacité d'échange cationique (C.E.C.) : une argile dont la CEC est élevée possède une grande surface spécifique, ce qui limite le mouvement des ions en solution ; une CEC élevée n'est donc pas synonyme d'un grand nombre d'échanges (dans le temps).

## C.2.2 Eau libre

C'est l'eau qui n'est pas soumise à l'attraction des particules solides, soit à plus de  $0,5\mu\text{m}$ . Contrairement à l'eau liée, elle est susceptible de se déplacer sous l'effet de gradients de pression ou de la gravité, et est facilement mobilisable.

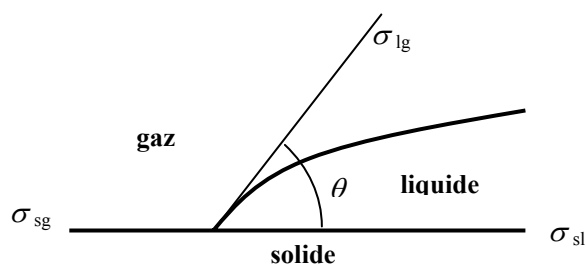
## C.2.3 Eau des milieux non saturés

Dans les milieux non saturés, l'eau est soumise, en plus des phénomènes précédents, aux phénomènes de capillarité liés à la présence de l'air, ou plus exactement d'une troisième phase en plus du solide et de l'eau.

### C.2.3.a Pression capillaire

A l'interface entre deux fluides, ou entre un fluide et un solide, il existe une tension superficielle engendrée par la différence entre la force d'attraction des molécules à l'intérieur de chaque phase et la force d'attraction des molécules à travers la surface de contact. La tension superficielle  $\sigma$  est une constante pour deux substances données, qui ne varie qu'avec la température.

Lors du contact de deux fluides entre eux et avec un solide  $s$ , il y a trois tensions superficielles en jeu. l'angle de raccordement  $\theta$  de l'interface entre les deux fluides, mesuré de  $0$  à  $180^\circ$  dans le fluide le plus dense, est relié à ces tensions superficielles. Prenons le cas d'un solide  $s$ , d'un liquide  $l$  et d'un gaz  $g$ . On note  $\sigma_{lg}$ ,  $\sigma_{sg}$  et  $\sigma_{sl}$  les tensions respectives aux interfaces liquide/gaz, solide/gaz et solide/liquide.

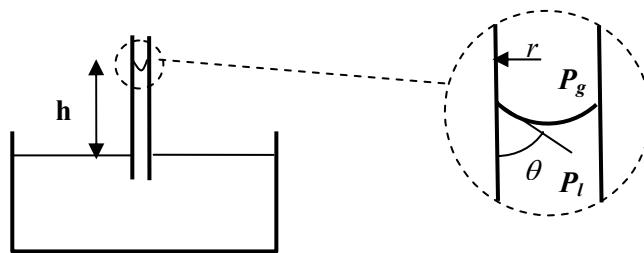


L'angle de contact est donné par la loi de Young :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}}$$

Lorsque ce rapport est supérieur à 1, il n'y a plus d'équilibre possible et l'un des fluides (le liquide, ici) se répand sur le solide. Si  $\theta < 90^\circ$ , le fluide est dit mouillant. C'est le cas de l'eau dans l'exemple ci-dessus. Si  $\theta > 90^\circ$ , le fluide est dit non mouillant.

De part et d'autre de l'interface air-eau, la pression n'est pas la même, du fait de la tension de surface. On appelle *pression capillaire* cette différence de pression. Dans le cas d'un tube fin, par exemple, l'interface liquide/gaz a la forme d'un ménisque incurvé vers la phase liquide. Pour minimiser son énergie, l'interface a tendance à diminuer sa surface et donc (dans ce cas) à redevenir plane : elle tire sur le liquide, dont la pression est ainsi plus faible que celle du gaz.



Dans le cas d'un tube à section circulaire de rayon  $r$ , la différence de pression entre le gaz et le liquide (pression capillaire) est donnée par la loi de Laplace (ou Jurin) :

$$P_g - P_l = \frac{2\sigma_{lg} \cos \theta}{r}$$

La pression capillaire peut être mesurée en hauteur de colonne d'eau. Plus le tube est fin, plus elle est grande. En théorie, elle peut être très forte, ce qui signifie que la pression de liquide peut être fortement négative. En fait, à basse pression, le liquide se vaporise.

### C.2.3.b Capillarité dans les sols et les roches

Dans les pores d'un sol ou d'une roche non saturé(e), des ménisques se forment dans les pores, à l'instar des tubes capillaires. Mais l'eau, du fait des phénomènes d'adsorption qui se superposent aux effets de capillarité, reste sous forme liquide même pour des valeurs élevées de pressions capillaires. La phase liquide se retrouve alors en traction sous l'action combinée de l'adsorption et de la capillarité.



## ANNEXE D LES VOLUMES FINIS DANS ANTHYC

### D.1 Introduction

Le code Anthyc est un code de calcul développé à G.3S pour la résolution des problèmes THMC en milieux poreux et/ou fissurés. Nous présentons ici certaines particularités du code, tels les volumes finis sur lesquels il est fondé en partie. Le code offre la possibilité d'utiliser l'une quelconque des méthodes parmi les éléments finis (EF) et les volumes finis (VF). Les VF en particulier rendent le code original, bien des codes traitant ces problématiques utilisant les EF. Nous allons présenter les VF, puis leur adaptation dans le code, avec une approche plus technique que dans le mémoire. Notons que les VF du code, en réalité une méthode mixte entre collocation par sous domaine et VF, sont uniques dans ce domaine d'application.

### D.2 Méthode des Volumes Finis

Les VF sont très simples dans leur principe de base, que nous exposons ; considérons une équation de transport écrite sous forme conservative :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(F(W)) = 0 \quad (\text{D.1})$$

où  $W$  est une variable (ou un ensemble de variables) conservative(s).

L'équation (D.1) n'est que la traduction d'une relation de conservation intégrale : pour tout volume fixe  $V$ , on déduit de (D.1), en utilisant la formule d'Ostrogradski-Gauss, que :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V W \right) + \int_{\partial V} F(W) \cdot n = 0 \quad (\text{D.2})$$

où  $n$  désigne la normale extérieure unitaire sur le bord  $\partial V$  du domaine  $V$ . L'identité (D.2) exprime que la variation de l'intégrale  $\int_V W$  est due au flux  $F = F(W) \cdot n$  sur la frontière.

De façon équivalente à (D.2), on peut aussi écrire des relations de conservation intégrales sur des volumes mobiles  $V(t)$ , du type :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{V(t)} W \right) + \int_{\partial V(t)} \psi \cdot n = 0 \quad (\text{D.2}')$$

Le principe des VF consiste en la discrétisation directe sous la forme (D.2) ou (D.2'), ce qui assure localement les propriétés de conservation.

La méthode des VF est largement utilisée en dynamique des gaz où elle se révèle incontournable. Dans ce domaine, les VF utilisés sont très évolués, et les flux physiques  $y$  sont remplacés par des flux numériques qui peuvent être très éloignés de l'intuition initiale. Il s'agit, rappelons le, de résoudre des problèmes d'ondes de choc ou de raréfaction.

Pour l'étude des milieux poreux, on peut se contenter pleinement des flux physiques. Par rapport aux différences finies (DF), les VF induisent le gain d'un ordre de dérivation. Par rapport aux EF, ils permettent d'assurer la conservation de manière locale.

### **D.3 Les VF dans le code Anthyc**

Le principe de discrétisation dans Anthyc est fondé, comme pour les VF, sur l'idée d'assurer la conservation de manière locale, et cela grâce à une formulation sous forme de différents flux sur le contour.

Les VF d'Anthyc sont en réalité une méthode mixte {Volumes Finis / Collocation par sous domaines}. Nous la décrivons, pour simplifier l'exposé, à travers un exemple simple.

Considérons le problème de Cauchy et aux limites suivant, défini sur un domaine  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t} + \text{div}(F(X)) = Q \quad \text{sur } \Omega \\ A(X) = A_d \quad \text{sur } \partial\Omega \\ X(M, t = 0) = X^0(M) \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

où  $X$  est une variable scalaire de diffusion,  $F$  un flux et  $Q$  un terme source.

La forme intégrale de (D.3a) s'écrit :

Pour toute fonction test  $\varphi$ ,

$$I = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial X}{\partial t} + \text{div}(F(X)) - Q \right] \varphi = 0 \quad (\text{D.4})$$

### D.3.1 Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale, on utilise une méthode identique à celle des EF. On note  $\Omega_a$  l'approximation du domaine  $\Omega$  ; elle est formée de  $N_e$  éléments, et de  $N_n$  nœuds (au sens des EF). On note de même  $D_a$  la discrétisation par EF de  $\Omega_a$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de formes qui seront utilisées pour l'approximation de la variable  $X$  sur le domaine  $\Omega_a$ . Les éléments utilisés sont de type Lagrange de degré 1, notés parfois *P1*.

On note  $\Phi_i$  les éléments de  $D_a$  : ce sont les fonctions de forme. La solution approchée  $X_a$  de  $X$  sera cherchée sous la forme

$$X_a = \sum_i^{N_n} \Phi_i X_i, \quad (\text{D.5})$$

où  $X_i$  est la valeur recherchée de  $X$  au nœud  $i$  de  $\Omega_a$ . L'approximation  $F_a$  de  $F(X)$  en découle, sous la forme :

$$F_a = \sum_i^{N_n} f(\Phi_i) X_i, \quad (\text{D.6})$$

On construit un maillage dual en définissant, autour de chaque nœud  $M_i$  de l'approximation, un petit volume  $C_i$  appelé cellule ou volume fini, comme le montre la figure D-1 ci-après. L'union de toutes les cellules forme une nouvelle partition de  $\Omega_a$ .

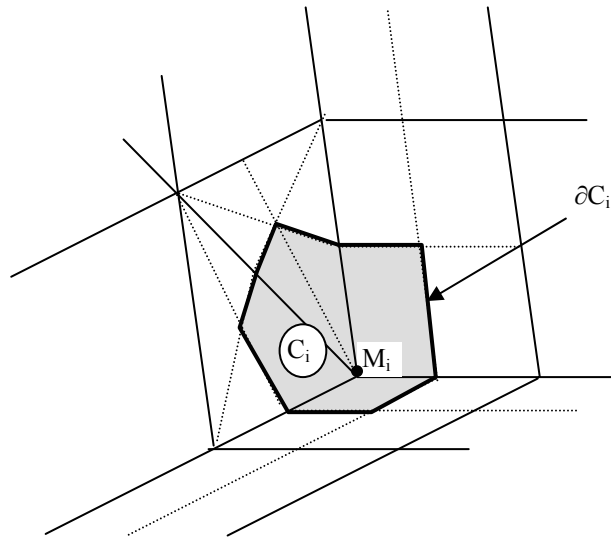


Figure D-1 : Cellule du nœud  $M_i$  dans le cas d'une approximation par éléments finis P1 dans Anthyc.

### D.3.2 Formulation faible

L'approximation  $I_a$  de la forme intégrale  $I$  de la formule (D.4) sur le domaine  $\Omega_a$  s'écrit :

$$I_a = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial X_a}{\partial t} + \text{div}(F_a) - Q_a \right] \cdot \varphi = 0, \text{ pour toute fonction test } \varphi. \quad (\text{D.7})$$

La méthode de Collocation par sous-domaines consiste à prendre pour fonctions-test les fonctions caractéristiques des sous-domaines  $C_i$ , (égales à 1 sur  $C_i$  et nulles ailleurs). On note  $\varphi_i$  ces fonctions caractéristiques :

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{en tout point de } C_i \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Avec les fonctions choisies, la forme faible discrétisée (D.7) s'écrit sous la forme d'une simple intégration de (D.3a) sur chaque petit volume  $C_i$  :

$$\int_{C_i} \frac{\partial X_a}{\partial t} + \int_{C_i} \text{div}(F_a) = \int_{C_i} Q_a \quad \forall i \in \{1, N_n\} \quad (\text{D.9})$$

Enfin, le principe des VF est appliqué en intégrant par parties le terme contenant la divergence. On obtient la formulation suivante :

$$\int_{C_i} \frac{\partial X_a}{\partial t} + \int_{\partial C_i} F_a \cdot n = \int_{C_i} Q_a \quad \forall i \in \{1, N_n\} \quad (\text{D.10})$$

### D.3.3 Obtention d'un système différentiel ordinaire

Utilisant l'approximation nodale (D.5), (D.6) on aboutit finalement de manière classique à un système différentiel ordinaire en temps, aux inconnues  $X_j$  :

$$\sum_j^{N_n} X_j \left( \int_{C_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \int_{\partial C_i} f(\Phi_j) n_i \right) = \int_{C_i} Q_a \quad , \quad \forall i \in \{1, N_n\} \quad (\text{D.11})$$

Il faut rajouter à ce système les conditions initiales et aux limites définies sur l'approximation  $\Omega_a$  et tirées de (D.3a,b) :

$$\begin{aligned} A_a(X) &= A_d \quad \text{sur } \partial\Omega_a \\ X_a(M, t=0) &= X_a^0(M) \quad \text{sur } \Omega_a \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

### D.3.4 Conclusion sur la discrétisation spatiale

On retiendra ici qu'il y a trois étapes correspondant à trois notions indépendantes, même si elles sont liées par l'objectif fixé par les VF :

1. la première étape est le choix des cellules et de l'approximation nodale (i.e. le choix des fonctions de forme décrivant l'espace des solutions pour  $X$  sur le domaine  $\Omega_a$ . A ce stade, on décide que l'on va chercher la solution dans un certain ensemble de fonctions, comme cela se fait en EF. Dès lors, on s'éloigne des VF pour lesquels, comme en DF, il n'y a pas d'approximation nodale.
2. la deuxième étape consiste à utiliser une méthode de collocation par sous-domaines ; cela signifie le choix de fonctions-test particulières. A partir d'une formulation faible donnée, on sait que de ce choix découle la méthode : par exemple, si l'on avait pris pour fonctions test les fonctions  $\Phi_i$  (et



après intégration par parties), cela aurait donné des EF. Le choix réalisé est bien sûr guidé par le but recherché qui est d'avoir une simple intégration.

3. la troisième étape est l'intégration par parties, qui comme en EF permet de gagner un ordre de dérivées et d'éviter ainsi les problèmes de conditions aux limites rencontrés avec des DF.

### D.3.5 Résolution temporelle

Le problème (D.11), (D.12) constitue un système différentiel d'ordre 1 en temps. Ce système peut être linéaire ou non linéaire de la forme :

$$[C].\frac{dU(t)}{dt} + [K].U(t) = S(t) \quad (D.13)$$

Ce système est résolu par une méthode d'intégration directe de type différences finies implicite/explicite ; un paramètre permet de choisir le type de résolution : implicite, explicite ou semi-implicite.

Dans le cas de problèmes non linéaires, le choix d'une résolution non explicite conduit bien sûr à celle d'un système non linéaire à chaque pas de temps. Pour le résoudre, une simple méthode de substitution est utilisée.

### D.3.6 Principe des VF pour la Mécanique dans Anthyc

L'équation d'équilibre mécanique s'écrit :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{\underline{f}} = 0 \quad (D.14)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes totales,  $\rho$  la masse volumique du milieu et  $\underline{\underline{f}}$  les efforts massiques.

Le principe est le même que pour le transport : la méthode consiste à assurer l'équilibre local de chaque volume de base  $C_i$  :

$$\int_{C_j} (\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{\underline{f}}) = 0 \quad (D.15)$$

Ici encore, on utilise la formule de la divergence :

$$\int_{\partial C_j} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} + \int_{C_j} \underline{\rho} \underline{f} = 0 \quad (\text{D.16})$$

Les équations (D.16) ci-dessus expriment que « la somme des efforts s'exerçant sur chaque volume  $C_j$  est nulle ».



# ANNEXE E LA LOI DE L.M.S. EN VISCOPLASTICITE

## E.1 Introduction

Les résultats des essais de fluage réalisés sur l’argilite de l’Est ont conduit, pour décrire le comportement différé de ce matériau, au choix de la loi de comportement viscoplastique de Lemaitre-Menzel-Schreiner. Elle est plus connue en France sous le nom de « loi de Lemaitre ».

Nous expliquons ici quel a été le principe de détermination des différents paramètres de cette loi pour l’argilite, et son implémentation dans un code de calcul. Ensuite, nous rappelons quelques résultats ou intuitions de résultats concernant l’évolution d’un matériau de L.M.S., et terminons par un résultat partiel que nous avons obtenu.

## E.2 Loi de Lemaitre

La loi de Lemaitre ou de Menzel-Schreiner, appartenant à la famille de Maxwell sans seuil, peut être perçue comme une extrapolation tridimensionnelle de la loi d’Andrade. Cette extrapolation est souvent réalisée en utilisant un potentiel de Von Misès, mais peut tout aussi bien être faite en choisissant un potentiel de type Tresca. Faisant le choix usuel, la loi peut s’écrire sous la forme suivante reliant la vitesse  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}$  de la déformation viscoplastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$  à la contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = A(T) \left( \frac{\sigma_{eq}}{q_0} \right)^n \cdot (\gamma^{vp})^m \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad , \quad (E.1)$$

où :

- $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$  est la contrainte équivalente de Von Mises,  $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$  désignant le déviateur des contraintes,
- $\gamma^{vp}$  est la distorsion viscoplastique définie par :

$$\gamma^{vp} = \int_0^t \dot{\gamma}^{vp} dt \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}} \quad , \quad (E.2)$$

et pour laquelle les paramètres sont :

- $n (\geq 1)$  : un paramètre décrivant l’action du déviateur des contraintes,
- $m (\leq 0)$  : définissant l’écrouissage du matériau,

- $q_0 = 1 \text{ MPa}$ ,
- $A(T)$  (en  $\text{s}^{-1}$ ) : un paramètre lié à la viscosité du matériau, et dépendant de la température,
- $T$  : la température, exprimée en Kelvin (K).

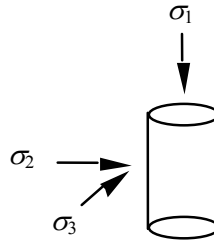
### E.3 Le cas des essais de fluage

#### E.3.1 La loi rapportée au cas unidimensionnel

Nous faisons en quelque sorte le chemin inverse de celui qui a été suivi depuis les essais jusqu'à la loi de comportement tridimensionnelle. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas d'un essai de fluage à l'appareil triaxial axisymétrique.

Lors d'un essai de compression triaxiale, l'état de contrainte, supposé uniforme dans un échantillon cylindrique, dépend de deux paramètres seulement ; les contraintes principales dans l'échantillon sont :

- $\sigma_2 = \sigma_3 \leq 0$  radiale ;
- $\sigma_1 \leq \sigma_3$  axiale.



Lors de l'analyse des résultats d'un essai triaxial, on fait l'hypothèse que les déformations ont même repère principal que les contraintes (direction 1 selon l'axe, directions 2 et 3 perpendiculairement à l'axe), et sont isotropes dans l'échantillon. En outre, selon la formule (E.1),  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}^{vp}}}$  est proportionnel à :

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3\underline{\underline{s}}}{2\sigma_{eq}}, \quad (\text{E.3})$$

c'est-à-dire au déviateur  $\underline{\underline{s}}$ , qui est de trace nulle. On a donc la relation suivante :

$$0 = \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}^{vp}}}) = \dot{\epsilon}_1^{vp} + \dot{\epsilon}_2^{vp} + \dot{\epsilon}_3^{vp} \quad . \quad (\text{E.4})$$

Par symétrie du chargement  $\sigma_2 = \sigma_3$ , on obtient par ailleurs que  $s_2 = s_3$ , et  $\dot{\epsilon}_2^{vp} = \dot{\epsilon}_3^{vp}$ , ce qui avec (5.9) permet d'écrire :

$$\underline{\underline{s}} = s_1 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1/2 & \\ & & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}^{vp}}} = \dot{\epsilon}_1^{vp} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1/2 & \\ & & -1/2 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{E.5})$$

Il en va de même pour la déformation viscoplastique, considérée comme nulle au début de l'essai (le matériau étant supposé vierge de tout fluage à cet instant). On constate alors que la distorsion viscoplastique s'identifie à  $|\varepsilon_1^{vp}|$ , ce qui permet d'écrire la loi unidimensionnelle en compression dans la direction 1 :

$$\dot{\varepsilon}_1^{vp} = -A(T) \left( \frac{\sigma_{eq}}{q_0} \right)^n \cdot |\varepsilon_1^{vp}|^m \quad . \quad (E.6)$$

Pour la suite de cette section, on utilisera les notations suivantes :  
 $\sigma$  désignera la valeur du déviateur en Mpa :

$$\sigma = \frac{\sigma_{eq}}{q_0} = |\sigma_1| - |\sigma_3| \quad (E.7)$$

la déformation viscoplastique axiale sera notée  $\varepsilon_{vp}$  :

$$\varepsilon_{vp} = |\varepsilon_1^{vp}| \quad (E.8)$$

Avec ces dernières notations, la loi unidimensionnelle se réécrit :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = A(T) \sigma^n \cdot \varepsilon_{vp}^m \quad . \quad (E.9)$$

### E.3.2 Expériences de fluage

Pour une expérience de fluage monopulier théorique, l'évolution de la contrainte (du déviateur) est donnée par :

$$\sigma(t) = \sigma H(t) \quad (E.10)$$

où H(t) est la fonction de Heavyside :

On considère une expérience de fluage multipaliers théorique sur un intervalle de temps  $[0, t_f]$ . On suppose les paliers instantanés, et on note  $t_k$  les instants de paliers de  $\sigma$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{p-1} < t_p = t_f \\ \forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \quad \sigma(t) = \sigma_k \quad \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}] \end{array} \right. \quad (E.11)$$

On sépare les variables dans (E.9) :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{vp}}{\varepsilon_{vp}^m} = A(T) \sigma^n \quad , \quad (E.12)$$

puis on intègre (E.12) :

$$\text{pour } k \in \{0, \dots, p-1\}, \text{ pour } t \in [t_k, t_{k+1}], \frac{\varepsilon_{vp}^{1-m}}{1-m} = A(T) \cdot \sum_{i=0}^k \sigma_i^n (t_{i+1} - t_i) . \quad (\text{E.13})$$

### E.3.3 Fluage monopalier

Dans le cas d'un seul palier, on obtient à partir de (5.15) :

$$\varepsilon_{vp} = [(1-m) \cdot A(T) \cdot \sigma^n (t_{i+1} - t_i)]^{\frac{1}{1-m}} , \quad (\text{E.14})$$

soit encore (c'est la loi d'Andrade) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{vp} = a \cdot \sigma^\alpha \cdot t^\beta \\ \text{avec :} \\ \alpha = \frac{n}{1-m} \\ \beta = \frac{1}{1-m} \\ a = [(1-m) \cdot A]^{\frac{1}{1-m}} \end{array} \right. \quad (\text{E.15})$$

### E.3.4 Détermination des paramètres de la loi L.M.S.

#### E.3.4.a La méthode des moindres carrés

C'est la méthode qui a été utilisée pour la majorité des tentatives de détermination des paramètres de la loi de Lemaitre, concernant les argilites de l'Est.

Considérons un essai de fluage multipaliers. La déformation viscoplastique axiale tirée de l'essai est notée  $\hat{\varepsilon}$ , et celle calculée est notée  $\varepsilon$ . Une méthode de type moindres carrés minimise, sur la durée de l'essai, l'écart entre les déformations de l'essai et celles calculées au sens d'une norme donnée utilisant le carré de la différence à chaque instant. Plusieurs normes sont possibles ; par exemple :

$$E_1 = \sum_k (\varepsilon_k - \hat{\varepsilon}_k)^2 \quad (\text{E.15})$$

ou bien

$$E_2 = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\varepsilon_k - \hat{\varepsilon}_k|^2 \quad (\text{E.16})$$

C'est généralement l'écart en solution  $E_1$  qui a été utilisé à G.3S. Néanmoins, la formule (E.16) permet de tenir compte de la durée des intervalles, si ceux-ci sont peu réguliers ; par exemple, lors d'un changement de palier, les instants de mesures sont plus rapprochés.

On suppose que le matériau n'a pas subi de déformations viscoplastiques au début de l'essai : pour  $t_0=0, \varepsilon_0=0$ . La déformation viscoplastique calculée à l'instant  $t_i$  vaut alors :

$$\varepsilon_i = \left[ (1-m)A \sum_{k=0}^{i-1} \sigma_k^n (t_{k+1} - t_k) \right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (\text{E.17})$$

On définit :

$$\delta_i = \left[ \sum_{k=0}^{i-1} \sigma_k^n (t_{k+1} - t_k) \right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (\text{E.18})$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \rightarrow \varepsilon_i &= a \cdot \delta_i, \text{ avec } a = [(1-m)A]^{\frac{1}{1-m}} \\ \rightarrow (\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i)^2 &= \delta_i^2 \cdot a^2 - 2\delta_i \hat{\varepsilon}_i \cdot a + \hat{\varepsilon}_i^2 \end{aligned}$$

Alors l'écart en solution défini par (E.15) s'écrit comme une simple équation du second degré en  $a$  :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left( \sum_i \delta_i^2 \right) a^2 - \left( \sum_i 2\delta_i \hat{\varepsilon}_i \right) a + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2 \\ \text{et } E_1 \text{ est minimum pour } a &= \frac{\sum_i \delta_i \hat{\varepsilon}_i}{\sum_i \delta_i^2} \quad (\text{E.19}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour un couple donné de valeurs des paramètres  $n$  et  $m$ , on trouve un unique paramètre  $a$  (donc  $A$ ) qui minimise l'écart. La méthode de détermination du triplet  $(n, m, A)$  en découle : on itère sur un ensemble de valeurs de  $n$  et  $m$ , et calcule pour chaque couple  $(n, m)$  la valeur de  $A$  qui minimise l'écart. Enfin, les valeurs de  $n$  et  $m$  choisies sont celles qui donnent l'écart minimum.

Avec cette méthode, aucune préférence n'est donnée à l'un quelconque des paramètres  $n$ ,  $m$  ou  $A$ . La méthode est très adaptable (par exemple, l'affectation de poids pour tenir compte préférentiellement de certains paliers, tel que les plus longs, est possible).



### E.3.4.b Autres méthodes

D'autres méthodes sont possibles. Par exemple, on sait que si le matériau suit effectivement une loi de type L.M.S., la déformation viscoplastique  $\hat{\varepsilon}$  vérifie les formules équivalentes (E.13) et (E.17). Donc  $\hat{\varepsilon}^{1-m}$  évolue, comme  $\sigma$ , par paliers. Cela suggère de donner une priorité au paramètre  $m$ , à chercher tel que  $\hat{\varepsilon}^{1-m}$  soit une fonction en escaliers du temps. On cherche ensuite les paramètres  $n$  et  $A$  par moindres carrés.

## E.4 Programmation du modèle LMS

L'implémentation du modèle dans un code de calcul nécessite l'utilisation d'une variable auxiliaire.

On a vu (formule (E.6)) que lors d'un essai de fluage,

$$\dot{\gamma}^{vp} = \dot{\varepsilon}_1^{vp} \text{ et que } \dot{\varepsilon}_1^{vp} = A \left( \frac{q}{q_0} \right)^n \varepsilon_1^m$$

c'est-à-dire :

$$\dot{\gamma}^{vp} = A \left( \frac{q}{q_0} \right)^n (\gamma^{vp})^m \text{ pour un essai de fluage.} \quad (\text{E.20})$$

L'équation (E.20) constitue la référence pour le passage en 3D.

On définit une variable  $\zeta$  associée à  $\gamma$  :

$$\zeta = \frac{1}{1-m} (\gamma^{vp})^{1-m} \quad (\text{E.21})$$

On a alors :

$$\dot{\zeta} = \frac{\dot{\gamma}^{vp}}{(\gamma^{vp})^n} = A \left( \frac{q}{q_0} \right)^n \quad (\text{E.22})$$

c'est-à-dire que  $\zeta$  ressemble à une déformation viscoplastique équivalente pour une loi de Norton-Hoff.

Alors :

- On calcule une variable auxiliaire  $\underline{\underline{\xi}}$ , par

$$\underline{\underline{\xi}} = A \left( \frac{q}{q_0} \right)_n \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} ; \quad (\text{E.23})$$

- On identifie  $\zeta$  et  $\xi_{eq} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\xi}} : \underline{\underline{\xi}}}$  ;

( $\zeta$  vérifie bien l'équation (E.22) dans le cas d'un essai de fluage, donc  $\gamma^{vp}$  vérifie l'équation (E.20)),

- A partir de  $\zeta$ , on calcule

$$\gamma^{vp} = [(1-m)\zeta]^{\frac{1}{1-m}} . \quad (\text{E.24})$$

L'équation (E.24) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eq}^{vp} &= [(1-m)\xi_{eq}]^{\frac{1}{1-m}} \\ \varepsilon_{eq}^{vp} &= (1-m)^{\frac{1}{1-m}} \cdot (\xi_{eq})^{\frac{1}{1-m}} \cdot \xi_{eq} \end{aligned}$$

Avec  $\beta = \frac{1}{1-m}$ , on a

$$\varepsilon_{eq}^{vp} = \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\beta} \cdot (\xi_{eq})^{\beta-1} \cdot \xi_{eq} \quad (\text{E.25})$$

C'est le rapport des deux quantités  $\varepsilon_{eq}^{vp}$ ,  $\xi_{eq}^{vp}$  qui nous intéresse :

On obtient la loi numérique par

$\underline{\underline{\xi}} = \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\beta} \cdot (\xi_{eq})^{\beta-1} \underline{\underline{\xi}}$	,	(E.26)
$\varepsilon_{ij}^{vp} = \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\beta} \cdot (\xi_{eq})^{\beta-1} \xi_{ij}$		

ce qui revient à écrire :

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{\varepsilon_{eq}^{vp}}{\xi_{eq}^{vp}} \underline{\underline{\xi}} \quad (\text{E.27})$$

## **E.5 Quelques résultats pour les ouvrages**

### **E.5.1 Introduction**

Les excavations souterraines profondes rencontrées en géotechnique subissent parfois des déformations différées importantes, associées à une évolution du champ de contraintes. Un des souhaits de l'ingénieur est de réussir à prévoir l'évolution à long terme des structures qu'il est amené à étudier, afin de répondre au mieux, par exemple, au problème de dimensionnement des revêtements qui peut être à prévoir. Pour des raisons économiques, ce dimensionnement doit être fait soigneusement : en effet, aux profondeurs considérées (typiquement de 400 à plus de 1500 m), il est inconcevable de réaliser économiquement un revêtement capable de reprendre la pression lithostatique en totalité.

En amont de ces problèmes de dimensionnement, d'ordre économique, se pose un problème mathématique, celui de la réponse à long terme d'un massif viscoplastique à une excavation. Une des questions les plus souvent posées est celle de la convergence, à long terme, du champ de contrainte vers un état limite. En effet, la seule réponse à cette question fournit un repère précieux pour les calculs en transitoire puisque, par exemple, dès que le champ de contrainte peut être considéré comme ayant atteint (quasiment) son état asymptotique, la suite du calcul peut alors se faire de manière analytique.

On s'intéresse ici à ce type de problèmes mathématiques ; à savoir, pour le cas d'un corps viscoplastique en état de fluage sous l'effet d'un chargement mécanique donné, l'existence d'un état asymptotique pour le champ de contrainte et le champ de vitesse de déplacement correspondant.

### **E.5.2 Définition du problème**

Considérons un corps élastoviscoplastique occupant un volume  $V$  dans l'espace et subissant des petites transformations quasistatiques (hypothèse **H1**) sous l'action de forces de volumes  $\underline{f}$  dans  $V$  et d'efforts et/ou déplacements imposés sur la frontière  $\partial V$  de  $V$ . Rappelons que, classiquement, les conditions aux limites (C.L.) sont la donnée, en chaque point de  $\partial V$  de normale  $\underline{n}$ , de trois composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs, contrainte  $\underline{T}(\underline{n})$  et déplacement  $\underline{\xi}$  ; en désignant par  $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$  les trois directions, éventuellement variables d'un point à l'autre, de ces composantes, on a avec des notations évidentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_i \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) = T_i^d \quad \text{sur } \partial_{T_i} V \\ \underline{\xi} \cdot \underline{u}_i = \xi_i^d \quad \text{sur } \partial_{\xi_i} V \end{array} \right. \quad (\text{E.28})$$

Ces sollicitations (densités volumiques de forces, conditions aux limites) peuvent en toute généralité dépendre du temps. Nous supposons dans la suite que tel n'est pas le cas et que la structure est soumise à des sollicitations constantes (hypothèse **H2**).

Dans la suite, nous noterons  $S_{\underline{T}} = \bigcup_{i(\underline{n})} \partial_{T_i} V$  l'ensemble des points de  $\partial V$  où des efforts sont imposés, et  $S_{\underline{\xi}} = \bigcup_{i(\underline{n})} \partial_{\xi_i} V$  l'ensemble des points de  $\partial V$  à déplacement imposé.

sous l'hypothèse **H1**, le tenseur de déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est relié linéairement au déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  de ce corps par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}}) \quad (\text{équation de liaison}) \quad (\text{E.29})$$

On suppose la partition de ces déformations en une part élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  et une part différée  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$  (viscoplastique). De plus, le comportement élastique est supposé linéaire (hypothèse **H3**). La loi de comportement mécanique, reliant  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  à la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$ , peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{\partial \Omega(\underline{\underline{\sigma}}, \chi)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\chi} = G(\underline{\underline{\sigma}}, \chi) \end{array} \right. \quad (\text{E.30})$$

où :

- $\underline{\underline{M}}$  est un tenseur d'ordre 4 à coefficients constants,
- $\Omega$  est une fonction positive (généralement prise nulle dans le domaine élastique) et convexe (hypothèse **H4**) du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$ , appelé potentiel viscoplastique,
- $\chi$  désigne un certain nombre de paramètres d'érouissage.

Eventuellement,  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{\Omega}}$  et  $\underline{\underline{G}}$  peuvent dépendre de la variable d'espace si le milieu n'est pas homogène. Les résultats exposés ici restent valables si tel est le cas.

Aux équations précédentes s'ajoute l'équation de la dynamique, qui se réduit, sous l'hypothèse **H1**, à l'équation d'équilibre :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{E.31})$$

Les équations (E.28) à (E.31) définissent, si on se donne un état initial, le problème d'évolution élastoviscoplastique quasistatique. Le problème consiste à trouver un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ , des variables d'écouissage  $\chi(\underline{x}, t)$  et un champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}, t)$  vérifiant ces équations.

On qualifie de S.A. (Statiquement Admissible) un champ de contraintes vérifiant l'équation d'équilibre et les C.L. en efforts sur  $\partial_{T_i} V$ , et de S.A.0 (Statiquement Admissible à Zéro) un champ de contraintes vérifiant les mêmes conditions pour la donnée  $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$  et  $T_i^d = 0$ . La différence entre deux champs S.A. est un champ S.A.0.

On appelle C.A. (Cinématiquement Admissible) un champ de déplacement vérifiant les C.L. en déplacement sur  $\partial_{\xi_i} V$ , ou implicitement un champ de déformation dérivant (par (2)) d'un tel champ de déplacement. Un champ sera C.A.0 si  $\xi_i^d = 0$ . La différence entre deux champs C.A. est un champ C.A.0.

Le problème posé peut donc être réécrit comme suit : trouver, parmi les champs de contraintes S.A. et les champs de déformations C.A., le (ou les) couple(s) qui sont reliés par la loi de comportement (E.30).

- *Propriété E.1*

Si  $\underline{\underline{\sigma}}_a$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_b$  sont deux champs de contraintes S.A., et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_c$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$  deux champs de déformations C.A., non forcément associés aux champs  $\underline{\underline{\sigma}}_a$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_b$ , on a :

$$\int_V (\underline{\underline{\sigma}}_a - \underline{\underline{\sigma}}_b) : (\underline{\underline{\varepsilon}}_c - \underline{\underline{\varepsilon}}_d) dv = \int_{\partial V} (\underline{\underline{T}}_a - \underline{\underline{T}}_b) : (\underline{\underline{u}}_c - \underline{\underline{u}}_d) dS = 0 \quad (\text{E.32})$$

Démonstration :

On écrit le théorème des travaux virtuels (TTV) :

$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in C^0\text{p.m. et } C^1\text{p.m.}$ , vérifiant l'équilibre et telle que  $\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{n}}$  soit continue à la traversée de toute surface de discontinuité, et

$\forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in C^0\text{p.m. et } C^1\text{p.m. sur } V$ ,

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dv = \int_V \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{u}} \, dv + \int_{\partial V} \underline{\underline{T}}^* : \underline{\underline{u}} \, dS$$

En appliquant le TTV, on a la première égalité :

$$\int_V (\underline{\underline{\sigma}}_a - \underline{\underline{\sigma}}_b) : (\underline{\underline{\varepsilon}}_c - \underline{\underline{\varepsilon}}_d) \, dv = \int_{\partial V} (\underline{\underline{T}}_a - \underline{\underline{T}}_b) : (\underline{\underline{u}}_c - \underline{\underline{u}}_d) \, dS$$

La deuxième égalité s'obtient du fait que  $\underline{\underline{T}}_{ai} - \underline{\underline{T}}_{bi} = 0$  sur  $\partial_{T_i} V$ , et  $\underline{\underline{u}}_{cj} - \underline{\underline{u}}_{dj} = 0$  sur  $\partial_{\xi_i} V$ .

- Propriété E.2

Dans le cas de sollicitations constantes, si  $\underline{\underline{\sigma}}^*(t)$  est S.A. à tout instant  $t$ , et  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  est C.A. à tout instant (indépendant ou non de  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ ), leurs vitesses  $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^*$  et  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$  sont à tout instant S.A.0 et C.A.0 respectivement. On a alors le résultat suivant, déduit de (2) :

$$\forall t, \forall \delta \underline{\underline{\sigma}} \in S.A.0, \forall \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \in S.A.0 : \int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \int_V \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^* : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \int_V \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^* : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (\text{E.33})$$

### E.5.3 Résolution du problème d'évolution

Lorsqu'un problème est posé, comme c'est le cas ici, de manière générale, la résolution de ce problème consiste en fait à déterminer l'existence d'au moins une solution pour ce problème. En effet, le volume  $V$  et sa frontière n'étant pas connus de manière explicite, ce n'est que dans un nombre très limité de cas qu'une solution est susceptible d'être exhibée.

Par ailleurs, on cherche à démontrer l'unicité de la solution. La démonstration de l'existence et de l'unicité est importante car elle permet d'affirmer que la détermination de l'état d'équilibre à un instant donné est possible dans le cadre des hypothèses faites.

Enfin, on cherche généralement, pour ces problèmes d'évolution, à démontrer la convergence du champ de contraintes vers un champ limite. Ce résultat est intéressant car rend possible l'évaluation de l'évolution à long terme d'une structure viscoplastique.

**E.5.3.a Existence**

- Problème partiel

A un instant donné, toutes les quantités  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\chi$  étant connues, on cherche à déterminer le champ de vitesse  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ . Pour être solution du problème, il doit vérifier les deux conditions suivantes :

- I)  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  est S.A.0
- II)  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = M \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$  est C.A.0

On peut montrer ici que le problème posé est équivalent au problème suivant :

Trouver  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  minimisant, parmi les champs  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*$  S.A.0., la fonctionnelle

$$W(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) = \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^*(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) dv + \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} dv \tag{E.34}$$

avec  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^*(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) = M \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}$

**Démonstration :**

On considère  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  solution de (I) et (II).

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^* = M \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}$$

Soit  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*$  S.A.0 et  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^*(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*)$  le champ associé par (E.34).

On calcule  $W(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*)$  :

$$\begin{aligned} W(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) &= \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^*(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) + \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} \\ &= \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* (M \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}) + \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} \\ &= \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* M \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* + \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} \\ &= \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* M \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* + \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - M \underline{\underline{\dot{\sigma}}}) \\ &= \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* M \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* - \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* M \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad \text{car} \quad \int_v \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = 0 \text{ d'après (E.33)} \end{aligned}$$

On voit qu'on peut réécrire  $W(\underline{\dot{\sigma}}^*)$  sous la forme

$$W(\underline{\dot{\sigma}}^*) = \frac{1}{2} \int_v (\underline{\dot{\sigma}}^* - \underline{\dot{\sigma}}) M (\underline{\dot{\sigma}}^* - \underline{\dot{\sigma}}) - \frac{1}{2} \int_v \underline{\dot{\sigma}} M \underline{\dot{\sigma}}$$

La deuxième intégrale est fixe. La première est une forme quadratique définie positive (car  $M$  l'est), qui possède un minimum (égal à 0) en  $\underline{\dot{\sigma}}^* = \underline{\dot{\sigma}}$ .  $W$  est donc bien minimum en  $\underline{\dot{\sigma}}$ .

Réciproquement, soit  $\underline{\dot{\sigma}}$  qui minimise  $W$  parmi les champs S.A.O

$\underline{\dot{\sigma}}$  vérifie (I)

$W$  est clairement une fonctionnelle convexe. C'est la même qu'en élasticité en remplaçant  $\underline{\dot{\sigma}}^*$  par  $\underline{\sigma}^*$  et  $\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}$  par un champ de déformation initial indépendant de  $\underline{\sigma}$ , par exemple d'origine thermique.

$W$  étant convexe, compte tenu de la structure d'espace affine de l'ensemble des champs S.A.O, son minimum correspond nécessairement à un (ou des) champs pour lesquels  $W$  est stationnaire.

On écrit la première variation de  $W$  en  $\underline{\dot{\sigma}}$  :

pour  $\delta \underline{\dot{\sigma}}^*$  S.A.O ,

$$0 = W_{,\dot{\sigma}} \cdot \delta \underline{\dot{\sigma}}^* = \int_v \underline{\dot{\sigma}} M \delta \underline{\dot{\sigma}}^* + \int_v \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} \cdot \delta \underline{\dot{\sigma}}^* = \int_v \underline{\dot{\varepsilon}} \cdot \delta \underline{\dot{\sigma}}^*$$

Cette équation implique que  $\underline{\dot{\varepsilon}}$  est nécessairement compatible, et intégrable en un champ de déplacement  $\underline{\xi}$  C.A.O, c'est-à-dire que  $\underline{\dot{\varepsilon}}$  est C.A.O. Donc  $\underline{\dot{\sigma}}$  vérifie (II).

En outre, l'existence et l'unicité d'un minimum pour  $W$  est assurée par des théorèmes classiques. Ainsi, le problème partiel possède une solution unique.

- Problème global

L'existence d'une solution pour le problème partiel ne suffit pas à affirmer qu'il en est de même pour le problème global. Cela dépend notamment des conditions initiales. Pouya (1991) donne un exemple pour lequel il n'y a pas de solution au problème d'évolution.

L'existence d'une solution au problème d'évolution a été démontrée dans certains cas ; par exemple par Djaoua & Suquet (1984) cités par Pouya (1991) dans le cas du matériau de Norton-Hoff.



### E.5.3.b Unicité

- Matériau sans écrouissage

Mandel (1974) a démontré l'unicité du champ de contraintes dans le cas d'un potentiel  $\Omega$  convexe, en l'absence d'écrouissage, au sens de la norme  $\|\cdot\|_M$  définie par :

$$\|\underline{\underline{\sigma}}\|_M = \left( \int_v \underline{\underline{\sigma}} M \underline{\underline{\sigma}} dv \right)^{1/2} \quad (\text{E.35})$$

La démonstration est la suivante :

Soient  $\underline{\underline{\sigma}}_1$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_2$  deux solutions du problème pour les mêmes données.

$\Omega$  étant convexe de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , on a :

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_2} \right) (\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2) \geq 0 \quad (\text{E.36})$$

En effet, la convexité de  $\Omega$  s'écrit :

$$\Omega(\underline{\underline{\sigma}}_a) - \Omega(\underline{\underline{\sigma}}_b) \geq \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_b} (\underline{\underline{\sigma}}_a - \underline{\underline{\sigma}}_b), \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}_a, \underline{\underline{\sigma}}_b \quad (\text{E.37})$$

avec (a,b) = (1,2) puis (a,b) = (2,1) :

$$\Omega(\underline{\underline{\sigma}}_1) - \Omega(\underline{\underline{\sigma}}_2) \geq \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_2} (\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2)$$

$$\Omega(\underline{\underline{\sigma}}_2) - \Omega(\underline{\underline{\sigma}}_1) \geq \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_1} (\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{\sigma}}_1)$$

d'où, en sommant les deux inégalités précédentes :

$$0 \geq \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_2} - \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_1} \right) (\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2)$$

On définit :

$$J(t) = \frac{1}{2} \|\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2\|_M = \frac{1}{2} \int_v (\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2) M (\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2) \quad (\text{E.38})$$

On dérive  $J$  par rapport au temps :

$$\dot{J}(t) = \int_v (\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2) M(\underline{\dot{\sigma}}_1 - \underline{\dot{\sigma}}_2) dv$$

Dans l'équation précédente, on remplace  $M \underline{\dot{\sigma}}_i$  ( $i=1,2$ ) par  $\underline{\dot{\varepsilon}}_i - \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}_i}$ , et en remarquant que  $\underline{\dot{\varepsilon}}_i$  est C.A.O., le terme correspondant disparaît d'après (E.33), et on trouve :

$$\dot{J}(t) = - \int_v (\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2) \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}_2} \right) dv$$

De la convexité de  $\Omega$  en  $\sigma$  (E.36), il résulte que  $\dot{J} \leq 0$ .  $J(t)$  est donc positif et décroissant. Or, à l'instant initial, les champs  $\sigma_i$ , purement élastiques, sont égaux. Par conséquent  $J$  est nul, de sorte que  $\underline{\sigma}_1$  et  $\underline{\sigma}_2$  sont égaux au sens de la norme  $\| \cdot \|_M$  à tout instant.

### Corollaire

Par le même biais, on a aussi le résultat suivant :

Si  $\underline{\sigma}_1$  et  $\underline{\sigma}_2$  sont distincts à l'instant initial (ce peut-être le cas s'il existe, initialement des déformations  $\underline{\varepsilon}_i^0$  — indépendantes de  $\underline{\sigma}_i$  —), alors  $\| \underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2 \|_M$  décroît vers une limite lorsque  $t$  tend vers l'infini.

La démonstration repose, comme précédemment, sur la propriété de « contractance » qui signifie que la distance entre deux solutions décroît dans le temps.

- Matériaux avec écrouissage
  - matériau standard généralisé
  - un cas particulier (SIMO)

## **E.5.4 Convergence vers un état limite**

Il s'agit de la convergence du champ de contraintes vers un champ limite constant (indépendant du temps). Elle est généralement difficile à prouver et on est bien souvent restreint à démontrer la convergence du champ des vitesses de contraintes vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ . Mais cela ne suffit bien

évidemment pas à assurer que le champ des contraintes tend lui même vers une limite, comme il a déjà été dit. Nous allons rappeler quelques résultats sur ces aspects.

#### E.5.4.a Convergence du champ des vitesses de contraintes

- Matériau sans écrouissage

Cette propriété a été démontrée par Mandel (1974) sous certaines hypothèses, et par Pouya (1991) avec d'autres hypothèses.

Dans les deux cas, on définit l'intégrale :

$$I = \int_V \Omega(\underline{\underline{\sigma}}) dv \quad (\text{E.39})$$

où  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(x, t)$  représente la solution du problème d'évolution, et on calcule  $\dot{I}$  :

$$\dot{I} = \int_V \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} dv \quad (\text{E.40})$$

En remplaçant  $\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$  par  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{M}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ , et en notant que le terme contenant  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$  disparaît d'après (E.33), il vient :

$$\dot{I} = - \int_V \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{M}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} dv = - \|\underline{\underline{\dot{\sigma}}}\|_M^2 \quad (\text{E.41})$$

$\dot{I}$  est donc négatif.  $\Omega$  étant positif partout,  $I$  l'est aussi. Ainsi,  $I$  est positive (donc bornée inférieurement) et décroissante dans le temps.  $I$  tend donc vers une limite quand  $t \rightarrow \infty$ .

Mandel utilise alors un lemme dû à Hadamard qui dit que si la dérivée seconde de  $I$  existe et est finie, alors  $\dot{I}$  tend vers zéro. De fait,  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  tend vers zéro au sens de la norme  $\|\cdot\|_M$ .

La démonstration de Pouya suppose simplement  $\Omega$  deux fois différentiable. C'est préférable, puisque cela impose des conditions sur  $\Omega$  qui est donné, plutôt que de supputer sur l'évolution de  $I$  qui est inconnue. Dans ce cas, nous avons :

$$\ddot{I} = -2 \int_V \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} dv \quad (\text{E.42})$$

On remplace, dans cette intégrale,  $\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  par  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^{vp}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} \right) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ . Par (E.33), le terme contenant  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  vaut zéro et il reste :

$$\ddot{I} = 2 \int_V \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} \right) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} dv \quad (\text{E.43})$$

Or, la convexité de  $\Omega$  (hypothèse **H4**) implique que la forme quadratique associée à  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2}$  soit positive, donc  $\ddot{I}$  l'est aussi. On obtient ainsi que  $\dot{I}$ , négatif et croissant, tend donc vers une limite. Celle-ci ne peut être que zéro puisque  $I$  converge.

- Matériaux avec écrouissage

Une extension de la démonstration a été faite par Nguyen Minh & Pouya (1991) pour une classe de matériaux écrouissables. Rappelons que dans ce cas le potentiel dépend d'un paramètre (éventuellement tensoriel)  $\chi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^{vp}} = \frac{\partial \Omega(\underline{\underline{\sigma}}, \chi)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\chi} = G(\underline{\underline{\sigma}}, \chi) \end{array} \right.$$

Comme précédemment, on définit l'intégrale :

$$I = \int_V \Omega(\underline{\underline{\sigma}}, \chi) dv \quad (\text{E.44})$$

mais sa dérivée  $\dot{I}$  dépend cette fois du paramètre d'écrouissage :

$$\dot{I} = - \int_V \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} dv + \int_V \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} dv \quad (\text{E.45})$$

On constate que dans le cas où  $\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} \leq 0$ , les deux termes du second membre de (E.45) sont négatifs.

Donc  $\dot{I}$  est négatif. En reprenant l'hypothèse émise par Mandel et le lemme d'Hadamard, on conclut que  $\dot{I}$  doit tendre vers zéro. Or il est la somme de deux termes de même signe : chacun de ces termes tend donc également vers zéro. Ce qui implique en particulier que  $\|\underline{\underline{\dot{\sigma}}}\|_H^2$  tend vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ .

Remarque :

La propriété  $\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} \leq 0$  n'a pas de sens spécifique en viscoplasticité. En revanche, dans le cas de la plasticité, elle décrit les matériaux à écrouissage positif : en effet, en plasticité, l'écrouissage exprime que le domaine élastique se modifie et s'étend jusqu'au dernier niveau de sollicitation qui l'a fait se plastifier. L'écrouissage est dit positif si, lorsque la contrainte croît, le domaine élastique s'accroît et donc la frontière de ce domaine ( $\Omega = 0$ ) se développe vers l'extérieur (cela s'exprime par  $\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \geq 0$ ). On voit alors que :

$$\Omega = 0 = \text{cste} \Rightarrow \dot{\Omega} = 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi},$$

ainsi, si  $\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} \leq 0$ , on a bien  $\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \geq 0$  donc cela définit un matériau à écrouissage positif. Cela n'est évidemment pas vrai en viscoplasticité pour laquelle on est autorisé à sortir du domaine d'élasticité.

#### ***E.5.4.b Convergence du champ de contraintes***

La convergence du champ des contraintes a été très peu démontrée. Elle a été faite par Halphen (1978) dans le cas d'un espace de solutions de dimension finie. Le cadre de son étude est même beaucoup plus large que celui que nous avons défini, d'abord parce qu'il intègre la plasticité, les contraintes thermiques et divers types d'écrouissages, ensuite parce qu'il s'intéresse à des sollicitations périodiques. Il montre que le champ de contrainte tend vers une sollicitation périodique de même périodicité que la sollicitation. Le cas des sollicitations constantes en est un cas particulier. En dimension infinie, Nguyen Minh & Pouya (1991) ont démontré la convergence champ des déviateurs des contraintes dans le cas des matériaux sans écrouissage, si le potentiel  $\Omega$  est strictement convexe. Dans deux cas particuliers (sphère creuse et cylindre creux soumis à des pressions internes et externes), cela suffit à démontrer que la partie sphérique des contraintes tend également vers une limite.

En présence d'écoulement, et en dehors de la restriction de la dimension finie, il n'existe pas de preuve de la convergence du champ de contraintes vers un état limite.

#### E.5.4.c Existence d'un état limite dans le cas sans écoulement

- Caractérisation

Mandel (1960) a montré que l'état limite des contraintes, s'il existe, rend  $I$  minimum parmi tous les champs S.A. .

En effet, à l'état limite  $\underline{\underline{\sigma}}_\infty$ , on écrit la variation  $\delta I$  pour un  $\delta \underline{\underline{\sigma}}$  S.A.0 :

$$\delta I = \int_V \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\infty} \delta \underline{\underline{\sigma}} dv \quad (E.46)$$

Or, à l'état limite,  $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}_\infty = 0$  donc  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_\infty = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\infty}$ . Comme  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_\infty$  est C.A.0,  $\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\infty}$  l'est et on a, d'après

(E.33),  $\delta I_{,\sigma_\infty} = 0$ . On en déduit que  $I$  est extremum.

$\Omega$  étant convexe, il s'agit d'un minimum :

$$\text{pour } \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A.}, I(\underline{\underline{\sigma}}) - I(\underline{\underline{\sigma}}_\infty) = \int_V \Omega(\underline{\underline{\sigma}}) - \Omega(\underline{\underline{\sigma}}_\infty) \geq \int_V \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\infty} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_\infty) dv = 0 \text{ d'après (E.33) car } \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_\infty$$

est S.A.0.

- Existence

$\Omega$  étant convexe,  $I$  est aussi convexe. De plus  $I \rightarrow \infty$  lorsque  $\|\underline{\underline{\sigma}}\|_\infty \rightarrow \infty$ . Alors l'existence d'un minimum pour  $I$  est assurée d'après un théorème dû à Lions (1968), cité par Nguyen Quoc-Son (2000). Si  $I$  est strictement convexe, ce minimum est unique.

Cela suffit à caractériser le déviateur de  $\underline{\underline{\sigma}}_\infty$  si  $\Omega$  est strictement convexe. La partie sphérique peut alors être déterminée de manière unique dès lors que  $S_{\underline{\underline{T}}}$  est de mesure non nulle (non démontré dans le cas général).

Notons que le champ  $\underline{\underline{\sigma}}_\infty$  ainsi déterminé constitue une solution constante du problème d'évolution, car  $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}_\infty = 0$  est S.A.0 à tout instant et  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_\infty$  est à tout instant C.A.0 .

#### ***E.5.4.d Récapitulation des résultats***

- *Matériau sans écrouissage*

Pour l'ensemble de ces résultats,  $\Omega$  est supposé convexe.

1. Si  $d^2 I/dt^2$  existe et est fini,  $\|\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\|_H \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  (Mandel) ;
2. Si  $\Omega$  est deux fois différentiable,  $\|\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\|_H \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  (Nguyen Minh & Pouya) ;
3.  $I$  possède un minimum sur l'espace des champs S.A. ;
4. Les champs  $\underline{\underline{\sigma}}$  réalisant le minimum de  $I$  sont des champs constants (Mandel) ;
5. Si  $\Omega$  est strictement convexe, le minimum de  $I$  est unique, et nécessairement son déviateur est celui de l'état limite s'il existe (Mandel et Pouya) ;
6. Si  $\Omega$  est strictement convexe, le champ de déviateur des contraintes converge vers celui de l'état constant qui constitue l'état limite (Pouya). La démonstration de ce résultat utilise les résultats 4 et 5, et l'hypothèse que  $\|\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\|_H \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  (par exemple si 1 ou 2 sont vérifiés).

- *Matériaux avec écrouissage*

Sous l'hypothèse  $\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} \leq 0$ , et si  $d^2 I/dt^2$  existe et est fini,  $\|\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\|_H \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  (Nguyen Minh & Pouya). On

ne peut rien affirmer d'autre pour l'instant. Dans la suite, nous nous focalisons sur la loi dite de Lemaitre-Menzel-Schreiner (L.M.S.) sur laquelle nous avons travaillé dans le cadre de cette thèse, et pour laquelle nous désirons pousser plus avant les résultats, convaincus que le champ de contraintes converge dans le cas d'un écrouissage positif.

## E.5.5 Le matériau de Lemaitre-Menzel-Schreiner (L.M.S.)

### E.5.5.a Loi de comportement

Le modèle est défini par :

$$\Omega(\underline{\underline{\sigma}}, \chi) = \frac{a^{1-m} \cdot q_0}{(1-m)(n+1)} \cdot \chi^{\frac{m}{1-m}} \cdot \left( \frac{q}{q_0} \right)^{n+1} \quad (\text{E.47})$$

$$\text{avec :} \quad \dot{\chi} = a^{1-m} \cdot \left( \frac{q}{q_0} \right)^n \quad (\text{E.48})$$

- $q$  est la contrainte équivalente de Von Misès :

$$q = \sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \quad (\text{E.49})$$

- Les paramètres de ce modèle sont les suivants :
  - $n (\geq 1)$  est un paramètre décrivant l'action des contraintes,
  - $m$  est un paramètre définissant l'érouissage du matériau,
  - $a$  est une constante dépendant en général de la température,
  - $q_0$  est une contrainte positive arbitraire et fixe.

Dans le cas d'un essai monopalier, on obtient l'expression suivante, en notant « 1 » la direction de l'axe de l'éprouvette :

$$\varepsilon_1^{vp}(t) = a \cdot \left( \frac{s_1}{q_0} \right)^{\frac{n}{1-m}} \cdot t^{1/(1-m)}, \quad (\text{E.50})$$

le paramètre  $\chi$  étant alors égal à  $(\varepsilon_1^{vp})^{1-m}$ .

#### Remarque :

En toute généralité, on a en fait :

$$\frac{d}{dt} (\chi^{1/(1-m)}) = \dot{\gamma} \quad (\text{E.51})$$

où  $\gamma$  est la distorsion viscoplastique :

$$\gamma = \int_0^t \dot{\gamma} dt \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp}} \quad (\text{E.52})$$



Il s'ensuit que, en l'absence de déformations viscoplastiques à l'instant initial, on obtient :

$$\chi = \gamma^{1-m} \quad (\text{E.53})$$

Nous référant à (E.50), on constate que :

- le cas  $m < 0$  correspond à un écrouissage positif et au fluage primaire,
- le cas  $m = 0$  correspond à celui sans écrouissage (fluage secondaire à vitesse constante),
- le cas  $0 < m < 1$  correspond à un écrouissage négatif et au fluage tertiaire.

Par ailleurs, dans (E.47), on retrouve bien le fait que le cas  $m = 0$  fait disparaître le paramètre d'écrouissage  $\chi$  dans l'expression du potentiel.  $\Omega$  se réduit alors au potentiel dit de Norton-Hoff (N.H.) :

$$\Omega(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{a \cdot q_0}{n+1} \left( \frac{q}{q_0} \right)^{n+1} \quad (\text{E.54})$$

Pour la loi de L.M.S., on peut aisément identifier dans quels cas la propriété  $\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} \leq 0$ , qui assure

$\dot{I} \leq 0$  dans (E.45), est vérifiée :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \dot{\chi} = \frac{m}{1-m} \cdot \frac{a^{2(1-m)} \cdot q_0}{(1-m)(n+1)} \cdot \chi^{\frac{2m-1}{1-m}} \left( \frac{q}{q_0} \right)^{2n+1}$$

On constate que la propriété est vérifiée pour  $m \leq 0$ . Le cas  $m = 0$  mis à part (c'est le matériau de N.H. sans écrouissage), cela correspond au cas de l'écrouissage positif, au sens de la viscoplasticité.

#### ***E.5.5.b Similitudes entre matériaux L.M.S. et N.H.***

Pouya (1991) a déterminé les équations d'évolution des contraintes et des déplacements pour les matériaux de N.H. et L.M.S. dans le cas du fluage de sphères creuses ou de tubes circulaires soumis à une différence de pression intérieur extérieur. Il s'est intéressé à un matériau aux propriétés élastiques isotropes et homogènes, dans le cas où il n'y a pas de déformations initiales. Utilisant les coordonnées cylindriques pour le tube, et les coordonnées sphériques pour la sphère, il a montré que, si le coefficient de Poisson  $\nu$  vaut 0,5 dans le cas du tube épais, les équations d'évolution pour la sphère et le tube peuvent se ramener à une forme unique moyennant le changement de variable  $\rho = 1/r^3$  et  $\rho = 1/r^2$  respectivement. Dans le cas du tube épais, précisons que le travail est effectué sous l'hypothèse des déformations planes ;

cette hypothèse, dans le cas où  $\nu = 0,5$ , permet que la composante axiale des contraintes reste toujours égale à la contrainte moyenne (et permet le calcul).

En l'absence d'écroutissement, c'est-à-dire pour N.H., il a montré que le champ de contraintes tend vers une limite au sens de la norme  $\|\cdot\|_{L_1}$ .

Utilisant les notations suivantes :

- $r_i$  désigne le rayon intérieur,  $r_e$  le rayon extérieur. De même,  $P_i$  et  $P_e$  sont respectivement les pressions intérieure et extérieure,
- On note  $d$  la « dimension » du problème :  $d = 2$  pour le tube, et  $d = 3$  pour la sphère,
- $n$  désigne le paramètre de la loi de N.H. définie par (E.54),

Le champ limite est alors donné dans le tableau suivant :

<p>Constantes :</p> $A = \left(3 - \frac{d}{2}\right) (P_e - P_i) \frac{(r_e \cdot r_i)^{d/n}}{r_e^{d/n} - r_i^{d/n}}$ $B = \frac{P_i \cdot r_i^{d/n} - P_e \cdot r_e^{d/n}}{r_e^{d/n} - r_i^{d/n}}$	
<p>Déviateur :</p> $s_\infty = \sigma_r - \sigma_\theta = \frac{1}{n} A \cdot \frac{I}{r^{d/n}}$	
<p><b>Tube épais (<math>\nu = 0,5</math>) :</b></p> $\underline{\underline{\sigma}}_\infty = \begin{pmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_\theta & \\ & & \sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \end{pmatrix}_{(r,\theta,z)}$	<p><b>Sphère :</b></p> $\underline{\underline{\sigma}}_\infty = \begin{pmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_\theta & \\ & & \sigma_\varphi = \sigma_\theta \end{pmatrix}_{(r,\theta,\varphi)}$
$\sigma_r = \frac{d-1}{d} A \cdot \frac{I}{r^{d/n}} + B$	
$\sigma_\theta = \left(\frac{d-1}{d} - \frac{1}{n}\right) A \cdot \frac{I}{r^{d/n}} + B$	

Le cas  $n = 1$  correspond au cas linéaire en contrainte. Le matériau de N.H. se réduit alors à celui de Maxwell. Dans ce cas, le champ de contraintes reste constant égal au champ élastique initial.

Remarque :

Les hypothèses choisies par Pouya pour son étude (propriétés élastiques homogènes et isotropes, et  $\nu = 0,5$  dans le cas du tube épais) lui ont permis de formuler une équation d'évolution du déviateur des

contraintes, à partir de laquelle il a trouvé que le déviateur limite est nécessairement de la forme  $C \frac{I}{r^{d/n}}$  ou  $C$  est une constante. La valeur de cette constante est ensuite déterminée en écrivant que  $\underline{\underline{\sigma}}_\infty$  est S.A. . On en déduit ensuite les différentes composantes du champ de contraintes.

Mais le déviateur limite  $\underline{\underline{s}}_\infty$  ainsi défini est l'unique déviateur qui minimise l'intégrale  $I$  définie par (E.39) pour les matériaux sans écrouissage, et  $\underline{\underline{s}}_\infty$  est indépendant des propriétés élastiques du matériau. On trouve aisément que le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_\infty$  déterminé ci-dessus est aussi nécessairement le champ de contraintes limite pour tous types de propriétés élastiques du matériau.

En particulier, on retiendra, pour le cas du tube épais, que c'est le champ limite même pour  $\nu \neq 0,5$ , fait que Pouya (1991) n'avait pas signalé. Il avait en fait démontré un résultat plus général que le cas très restreint où  $\nu = 0,5$ .

#### ***E.5.5.c Un résultat : l'existence d'un état constant pour L.M.S.***

Le fait que la loi de N.H. soit un cas particulier de celle de L.M.S., et les similitudes observées entre ces deux matériaux laisse penser que, dans le cas général du modèle de L.M.S., en cas d'écrouissage positif, le champ de contraintes tend également vers une limite. Nous n'avons pas pu démontrer ce résultat. Néanmoins, nous démontrons l'existence d'un champ de contrainte constant solution pour le matériau de L.M.S. .

Pour cela nous utilisons les deux lois (N.H. et L.M.S.), et adoptons les notations suivantes :

- pour le modèle de L.M.S., le potentiel viscoplastique paramétré par les constantes  $a, n$  et  $m$  est noté :

$$\Omega^{LMS}\{a, n, m\}(\underline{\underline{\sigma}}, \chi) = \frac{a^{1-m} \cdot q_0}{(1-m)(n+1)} \cdot [\chi\{a, n, m\}]^{\frac{m}{1-m}} \cdot \left(\frac{q}{q_0}\right)^{n+1} \quad (\text{E.55})$$

avec :

$$\dot{\chi}\{a, n, m\} = a^{1-m} \cdot \left(\frac{q}{q_0}\right)^n \quad (\text{E.56})$$

- pour le modèle de N.H., le potentiel viscoplastique paramétré par les constantes  $a$  et  $n$  est noté :

$$\Omega^{NH} \{a, n\}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{a \cdot q_0}{n+1} \left( \frac{q}{q_0} \right)^{n+1} \quad (\text{E.57})$$

La constante  $q_0$  est fixée pour l'ensemble de cette section.

- de la même manière, pour le matériau de N.H., on notera :

$$I^{NH} \{a, n\} = \int_V \Omega^{NH} \{a, n\}(\underline{\underline{\sigma}}) dv \quad (\text{E.58})$$

Pour démontrer le résultat annoncé, nous utilisons implicitement les deux propriétés suivantes :

- Propriété E.3

Pour le matériau de N.H. défini par son potentiel  $\Omega^{NH} \{a, n\}$ , le champ de déviateurs des contraintes converge vers un champ constant.

Cette propriété a été démontrée par Pouya (1991).

Démonstration :

$\underline{\underline{\sigma}} \mapsto \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}$  étant un produit scalaire,  $\underline{\underline{\sigma}} \mapsto q$  est une norme, donc convexe (d'après l'inégalité triangulaire) ; il en va de même pour  $\underline{\underline{\sigma}} \mapsto q^{n+1}$  qui est convexe pour  $n = 0$  et strictement convexe pour  $n > 0$ . Il en résulte que  $\Omega^{NH} \{a, n\}$  est strictement convexe dès lors que  $n > 0$ . De plus,  $\Omega^{NH} \{a, n\}$  est clairement deux fois différentiable si  $n \geq 1$ . On est donc placé dans le cadre des résultats 2, 4 et 5 du §E.5.4.d, c'est-à-dire l'ensemble des conditions pour lesquelles l'auteur a démontré la convergence du déviateur.

- Propriété E.4

Pour le matériau de N.H. défini par son potentiel  $\Omega^{NH} \{a, n\}$ , l'état limite est indépendant du paramètre  $a$ .

La démonstration de cette propriété est particulièrement simple en utilisant la caractérisation de l'état limite faite par Mandel.

Démonstration :

On considère deux potentiels de même paramètre  $n$  mais possédant des constantes  $a_1$  et  $a_2$  différentes :

$\Omega^{NH}\{a_1, n\}$  et  $\Omega^{NH}\{a_2, n\}$ . Soit  $\underline{\sigma}_{c1}$  l'état constant du problème d'évolution pour le potentiel  $\Omega^{NH}\{a_1, n\}$  :

Pour  $\delta\underline{\sigma}$  S.A.O,

$$\delta I^{NH}\{a_1, n\} = \int_V \frac{\partial \Omega^{NH}\{a_1, n\}}{\partial \underline{\sigma}_{c1}} \delta \underline{\sigma} \, dv = 0 .$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial \Omega^{NH}\{a_1, n\}}{\partial \underline{\sigma}_{c1}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{\partial \Omega^{NH}\{a_2, n\}}{\partial \underline{\sigma}_{c1}} ,$$

$$\text{donc} \quad \delta I^{NH}\{a_2, n\} = 0 .$$

Alors  $\underline{\sigma}_{c1}$  est aussi l'état constant du problème d'évolution pour le potentiel  $\Omega^{NH}\{a_2, n\}$ .

Il reste à démontrer la propriété annoncée pour le matériau de L.M.S. :

- Propriété E.5

L'existence et l'unicité d'une solution constante du problème d'évolution est équivalente pour les matériaux de N.H. et L.M.S..

Démonstration :

**Existence :**

Supposons que le problème d'évolution possède une solution constante pour les matériaux de N.H. . On se donne  $n \geq 1$ ,  $a$  et  $m < 1$ . Il s'agit de trouver une solution constante pour le matériau de L.M.S. avec la donnée du potentiel :

$$\Omega^{LMS}\{a, n, m\}(\underline{\sigma}, \chi) = \frac{a^{1-m} \cdot q_0}{(1-m)(n+1)} \cdot [\chi\{a, n, m\}]^{\frac{m}{1-m}} \cdot \left(\frac{q}{q_0}\right)^{n+1} \quad (\text{E.59})$$

avec :

$$\dot{\chi}\{a, n, m\} = a^{1-m} \cdot \left(\frac{q}{q_0}\right)^n . \quad (\text{E.60})$$

On désigne par problème 1 le problème d'évolution pour ce matériau.

Par ailleurs, on définit comme problème 2 le problème d'évolution posé pour le même volume, avec les mêmes forces de volumes et conditions aux limites que pour le problème 1, mais avec le matériau de N.H. ayant pour potentiel viscoplastique  $\Omega^{NH} \left\{ 1, \frac{n}{1-m} \right\}$ .

Par hypothèse, le problème 2 possède une solution constante. Soit  $\underline{\underline{\sigma}}_c$  cette solution.  $\underline{\underline{\sigma}}_c$  est S.A pour le problème 2 ; il l'est donc aussi pour le problème 1 (mêmes données en effort). La vitesse de déformation viscoplastique associée, égale à la vitesse de déformation totale est, elle, C.A.O (voir le §3.3.1) ; elle vaut :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_c^{vp} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_c} \Omega^{NH} \left\{ 1, \frac{n}{1-m} \right\} = \frac{(q_0)^{-n/(1-m)}}{n+1} \left( \frac{q_c}{q_0} \right)^{\frac{n}{1-m}} \cdot \frac{\partial q_c}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_c}$$

On considère alors la fonction linéaire du temps  $\chi_c(t) = a^{1-m} \left( \frac{q_c}{q_0} \right)^n \cdot t$ , où  $q_c$ , constante, est la contrainte équivalente de Von Misès de  $\underline{\underline{\sigma}}_c$ .  $\chi_c$  représente bien un paramètre d'écroissage possible pour  $\Omega^{LMS} \{a, n, m\}(\underline{\underline{\sigma}}_c, \chi)$  : celui tel que  $\chi(0) = 0$ . On calcule la déformation viscoplastique associée pour le problème 1 :

A tout instant  $t$  :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_1^{vp} &= \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_c} \Omega^{LMS} \{a, n, m\}(\underline{\underline{\sigma}}_c, \chi_c) &= \frac{a^{1-m} \cdot (q_0)^{-n}}{(1-m)(n+1)} \cdot [\chi\{a, n, m\}]^{\frac{m}{1-m}} \left( \frac{q_c}{q_0} \right)^n \cdot \frac{\partial q_c}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_c} \\ & &= \frac{a^{1-m} \cdot (q_0)^{-n}}{(1-m)(n+1)} \cdot \left[ a^{1-m} \left( \frac{q_c}{q_0} \right)^n \cdot t \right]^{\frac{m}{1-m}} \left( \frac{q_c}{q_0} \right)^n \cdot \frac{\partial q_c}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_c} \\ & &= \frac{a^{1-m} \cdot (q_0)^{-n}}{(1-m)(n+1)} \cdot [a^{1-m} \cdot t]^{\frac{m}{1-m}} \left( \frac{q_c}{q_0} \right)^{\frac{n}{1-m}} \cdot \frac{\partial q_c}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_c}. \end{aligned}$$

On constate que  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_1^{vp}$  est à tout instant proportionnel à  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_c^{vp}$  qui est C.A.O. Donc  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_1^{vp}$  est également C.A.O pour les mêmes données en déplacement sur le contour.

On a donc trouvé un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_c$  solution constante pour le problème 1 (matériau de L.M.S.).

La réciproque est immédiate.

**Unicité :**

Elle découle de la démonstration de l'existence. On a montré que la solution constante du problème 1 est également solution constante du problème 2, et réciproquement. Si le problème 2 (resp. 1) ne possède qu'une solution constante, il en sera de même pour le problème 1 (resp. 2).

Nous avons prouvé que l'existence d'une solution constante du problème d'évolution pour le matériau de N.H. implique (et est même équivalente) à celle d'une solution constante du même problème d'évolution pour le matériau de L.M.S. . D'après la propriété E.3, l'existence d'une solution constante est assurée pour le matériau de N.H. ; cela prouve l'existence de solutions constantes pour le matériau de L.M.S. .

Ces solutions constantes sont indépendantes des caractéristiques élastiques du matériau. Elles ne dépendent pas non plus de la constante  $a$  dans les expressions des potentiels viscoplastiques.

Par ailleurs, quand elle est unique, la solution constante pour le cas de L.M.S. avec les paramètres  $n$  et  $m$  correspond à celle du matériau de N.H. avec  $n' = \frac{n}{1-m}$ .