



**HAL**  
open science

## Friction and jamming in dry granular flows

Frédéric da Cruz

► **To cite this version:**

Frédéric da Cruz. Friction and jamming in dry granular flows. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. English. NNT: . pastel-00000946

**HAL Id: pastel-00000946**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00000946>**

Submitted on 20 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Nationale des Ponts et Chaussées

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSÉES**

**Discipline : Matériaux et Structures**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Frédéric DA CRUZ**

février 2004  
*Version provisoire*

**Écoulement de grains secs :  
Frottement et blocage**

---

### **JURY**

M. Pierre MILLS	Examineur
M. Philippe COUSSOT	Directeur de thèse
M. François CHEVOIR	Conseiller d'étude
M. Lydéric BOCQUET	Rapporteur
M. Stéphane DOUADY	Rapporteur
M. Ivan IORDANOFF	Examineur



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État des connaissances</b>	<b>7</b>
1.1 Matériaux granulaires . . . . .	7
1.2 Interactions entre particules . . . . .	8
1.2.1 Contacts maintenus et collisionnels . . . . .	8
1.2.2 Contacts frictionnels . . . . .	10
1.3 Les trois états de la matière granulaire . . . . .	12
1.3.1 Rôle de la compacité . . . . .	13
1.3.2 Principe de dilatance . . . . .	14
1.3.3 Classification des régimes . . . . .	15
1.4 Statique et faibles déformations . . . . .	16
1.4.1 Frottement interne . . . . .	16
1.4.2 Réseau de contact . . . . .	17
1.5 Frottement effectif . . . . .	18
1.6 Géométries d'écoulement . . . . .	19
1.6.1 Distribution des contraintes . . . . .	19
1.7 Écoulements rapides de grains . . . . .	22
1.8 Écoulements denses . . . . .	24
1.8.1 Cellules de Cisaillement . . . . .	25
1.8.2 Plan incliné . . . . .	25
1.9 Blocage . . . . .	28
1.10 Bilan . . . . .	30
<b>I Cisaillement à vitesse imposée</b>	<b>33</b>
<b>2 Remarques préliminaires</b>	<b>37</b>
2.1 Méthode de simulation numérique . . . . .	39
2.2 Analyse dimensionnelle . . . . .	40
2.3 Nombre inertiel $I$ . . . . .	40
2.4 Préparation . . . . .	42
2.5 Recherche d'un état stationnaire . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Cisaillement homogène</b>	<b>45</b>
3.1	Mise en évidence de l'homogénéité . . . . .	45
3.1.1	Compacité . . . . .	45
3.1.2	Vitesse . . . . .	46
3.1.3	Comparaison avec des simulations à volume fixé . . . . .	47
3.1.4	Contraintes . . . . .	48
3.1.5	Système homogène . . . . .	50
3.1.6	Rugosité . . . . .	51
3.2	Comportement . . . . .	51
3.2.1	Dilatance . . . . .	52
3.2.2	Frottement effectif . . . . .	53
3.2.3	Transition quasi-statique dynamique . . . . .	55
3.3	Loi de comportement . . . . .	55
3.3.1	Pression . . . . .	56
3.3.2	Contrainte de cisaillement . . . . .	56
3.4	Étude paramétrique . . . . .	57
3.4.1	Effet du coefficient de frottement intergranulaire . . . . .	57
3.4.2	Effet du coefficient de restitution . . . . .	60
3.4.3	Comparaison avec la théorie cinétique . . . . .	61
3.5	Micromécanique . . . . .	62
3.5.1	Réseau de contacts . . . . .	63
3.5.2	Coordinnence . . . . .	64
3.5.3	Mobilisation du frottement . . . . .	67
3.5.4	Anisotropie des contacts . . . . .	69
3.6	Fluctuations . . . . .	71
3.6.1	Énergie cinétique . . . . .	71
3.6.2	Mouvements collectifs . . . . .	72
3.6.3	Vitesse . . . . .	73
3.6.4	Forces aux parois . . . . .	77
3.6.5	Frottement effectif . . . . .	78
3.6.6	Tenseur des contraintes . . . . .	78
3.7	Limite du cisaillement homogène . . . . .	81
3.7.1	Proximité de la paroi . . . . .	81
3.7.2	Effet de la polydispersité . . . . .	83
3.7.3	Grand système de grains peu rigides . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Systèmes hétérogènes</b>	<b>91</b>
4.1	Prédiction de la loi de frottement . . . . .	91
4.1.1	Cisaillement plan avec gravité . . . . .	91
4.1.2	Cisaillement annulaire . . . . .	92
4.2	Cisaillement plan avec gravité . . . . .	93
4.2.1	Localisation . . . . .	93
4.2.2	Dilatance et frottement effectif . . . . .	96
4.2.3	Nouveau nombre adimensionnel . . . . .	98

---

4.2.4	Micromécanique . . . . .	99
4.2.5	Orientation relative de la gravité par rapport aux pa- rois mobiles . . . . .	101
4.3	Cisaillement annulaire . . . . .	104
4.3.1	Simulations numériques . . . . .	104
4.3.2	Expérience . . . . .	107
4.3.3	Mesure du couple . . . . .	113
4.3.4	Effet d'une surcharge . . . . .	114
4.3.5	Loi de comportement . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Bilan et conclusion</b>	<b>123</b>
<b>II</b>	<b>Cisaillement à force imposée</b>	<b>127</b>
<b>6</b>	<b>Seuils et hystérésis</b>	<b>131</b>
6.1	Plan incliné . . . . .	131
6.1.1	Cas du grain unique . . . . .	131
6.1.2	Hauteur de départ et hauteur d'arrêt . . . . .	133
6.1.3	Écoulement stationnaire uniforme . . . . .	138
6.1.4	Comportement près de l'arrêt . . . . .	139
6.1.5	Conséquence pour le frottement effectif . . . . .	143
6.1.6	Rôle du nombre inertiel . . . . .	144
6.2	Cisaillement annulaire . . . . .	148
6.2.1	Boucle d'hystérésis . . . . .	150
6.2.2	Comportement autour de l'arrêt . . . . .	153
<b>7</b>	<b>Dynamique de l'arrêt</b>	<b>159</b>
7.1	Bifurcation de viscosité . . . . .	159
7.1.1	Cisaillement annulaire . . . . .	160
7.1.2	Plan incliné . . . . .	162
7.2	Effet rebond . . . . .	165
7.3	Micromécanique . . . . .	167
<b>8</b>	<b>Bilan</b>	<b>173</b>
<b>III</b>	<b>Synthèse et Modélisation</b>	<b>177</b>
<b>9</b>	<b>Synthèse des résultats</b>	<b>181</b>
9.1	Loi de comportement . . . . .	181
9.1.1	Frottement et dilatance . . . . .	181
9.1.2	Interprétation élémentaire de la loi de frottement . . .	182
9.1.3	Fluctuations de vitesse . . . . .	184
9.2	Écoulement sur plan incliné . . . . .	185

9.2.1	Loi d'échelle . . . . .	185
9.2.2	Arrêt de l'écoulement . . . . .	185
9.2.3	Effet de la paroi . . . . .	186
9.3	Généralisation aux fluides particulaires . . . . .	188
9.3.1	Expériences . . . . .	188
9.3.2	Discussion . . . . .	189
9.4	Longueur de corrélation . . . . .	192
<b>10</b>	<b>Pistes de modélisation</b>	<b>195</b>
10.1	Variable interne . . . . .	195
10.1.1	Fluides thixotropes : Équation cinétique . . . . .	195
10.1.2	Frottement des roches : Équation cinétique . . . . .	196
10.1.3	Milieus granulaires : Équation de Landau-Ginzburg . . . . .	197
10.2	Rhéologie non-locale . . . . .	199
10.3	Influence de la rugosité . . . . .	203
10.3.1	Un grain . . . . .	203
10.3.2	Une couche . . . . .	208
10.4	Conclusion . . . . .	217
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>219</b>
	<b>Annexes</b>	<b>223</b>
<b>A</b>	<b>Méthodes de simulation numérique discrète</b>	<b>225</b>
A.1	Dynamique moléculaire . . . . .	225
A.2	Dynamique des contacts . . . . .	229
A.3	Conclusion . . . . .	231
<b>B</b>	<b>Calcul du tenseur des contraintes</b>	<b>233</b>
B.1	Moment interne d'un grain . . . . .	234
B.2	Cas d'une assemblée de N grains . . . . .	236
B.3	Définition du tenseur des contraintes . . . . .	237
<b>C</b>	<b>Méthode de prise des moyennes</b>	<b>239</b>
C.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	239
C.2	Coordonnées polaires . . . . .	241
<b>D</b>	<b>Outils expérimentaux</b>	<b>243</b>
D.1	Le plan incliné . . . . .	243
D.2	Rhéométrie IRM . . . . .	247

---

<b>E</b>	<b>Détails des résultats</b>	<b>249</b>
E.1	Courbes $H_{Stop}(\theta)$ et $H_{Start}(\theta)$ . . . . .	249
E.2	Frottement et nombre de Froude . . . . .	255
E.3	Dynamique de l'arrêt . . . . .	256
	<b>Références</b>	<b>261</b>





# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude du frottement et du blocage dans les écoulements granulaires. Les matériaux granulaires sont des matériaux extrêmement courants [63]. En particulier, ils représentent une grande partie des matériaux du génie civil et de l'environnement (ciments, sables, granulats...). Ils jouent un rôle important dans de nombreux phénomènes naturels comme les avalanches de débris, les éboulements rocheux ou encore les mouvements de dunes. Leur aptitude à l'écoulement représente aussi un enjeu économique non négligeable, puisque les matériaux granulaires sont très répandus dans l'industrie (poudres, graines...), où se posent des problèmes d'acheminement et de stockage.

Du fait de la complexité de ces matériaux, nous allons limiter notre champ d'investigation, en considérant des assemblées de grains secs, sans cohésion. Ceci signifie que nous négligeons l'influence éventuelle du fluide interstitiel, et que les grains n'interagissent que par contact direct (collisions, frottement). Nous excluons donc les forces de cohésion (van der Waals pour les poudres, ou ponts capillaires dans les matériaux granulaires humides [161, 72, 17, 78]) ou encore les effets électrostatiques [196]. On ne considère donc que des grains assez gros (de diamètre supérieur à quelques centaines de microns) dans un fluide peu visqueux tel que l'air. De plus, nous nous limitons à des ensembles de particules de forme bien définie (sphérique<sup>1</sup>) et dont les propriétés micromécaniques (coefficient de restitution et de frottement) sont bien maîtrisées. Par ailleurs, nous allons considérer des assemblées de grains de faible polydispersité (une trop forte distribution de taille engendre des problèmes de ségrégation qui sont l'objet d'études spécifiques [63, 171]).

Dans le cas des matériaux granulaires secs, la rhéologie n'est commandée que par les transferts de quantité de mouvement et la dissipation d'énergie intervenant dans les contacts directs entre grains et avec les parois. Mais en dépit de l'apparente simplicité de ce système, le comportement des matériaux granulaires modèles s'avère très riche [38, 159, 57, 84, 63, 87, 170, 191, 22], et présente des analogies avec les différents états de la matière selon les sollicitations.

---

<sup>1</sup>Sauf exception de sables anguleux

Effectivement, on peut trouver les matériaux granulaires sous au moins trois états [91], comme dans un sablier (Fig. 1) :

- Dans le régime dilué [74, 28], le comportement du milieu est celui d'un gaz dense dont la description théorique peut se faire par analogie avec la théorie cinétique.
- Une assemblée de grains formant un tas est semblable à un solide. Il est alors possible de décrire le matériau granulaire dans le cadre de la mécanique des sols [134, 174].
- Enfin, dans le cas intermédiaire, lors d'écoulements denses, les milieux granulaires se comportent comme un liquide. Comme pour les états de la matière, c'est cet état "liquide" qui s'avère être le plus difficile à appréhender.



FIG. 1 – *Le sablier : illustration des trois états de la matière granulaire. Dans le compartiment inférieur, le tas de grain se comporte comme un solide, sur lequel on observe des avalanches de grains où le matériau se comporte comme un liquide. A la sortie de l'orifice, on observe un écoulement rapide analogue à un gaz.*

## Enjeux

Nous nous intéressons dans cette thèse à la question du blocage des écoulements granulaires, c'est à dire à la transition d'un écoulement dense à un état solide; on parlera aussi d'arrêt de l'écoulement. Cette sorte de transi-

tion de phase est l'objet de grands débats dans la communauté mécanicienne et physicienne [106]. Elle présente des enjeux pour l'industrie : lors du stockage et de l'acheminement de matériaux granulaires le blocage de trémie ou de conduite peut s'avérer extrêmement dommageable. La compréhension du démarrage et de l'arrêt d'un écoulement granulaire sur une pente représente aussi un enjeu important pour la gestion et la prévention des risques naturels [64, 8, 70]. Le "boxing day" du 26 décembre 1997 [83] illustre bien l'importance d'avoir une bonne compréhension de la rhéologie des matériaux granulaires jusqu'à l'arrêt (Fig. 2). Ce jour-là, suite à une éruption volcanique, le dôme et tout un pan d'un volcan de l'île Montserrat s'écroulent provoquant une avalanche de débris, suivie d'un coulée pyroclastique<sup>2</sup> plus mobile qui atteint rapidement la mer. Ce qui provoque un tsunami qui se propage le long des côtes de Montserrat. On comprend que la longueur d'arrêt de l'écoulement est un facteur déterminant pour l'ampleur des dégâts occasionnés.



FIG. 2 – Île de Montserrat. Écoulement granulaire ayant atteint la mer.

### Caractéristiques de la transition liquide-solide

Les situations de blocage sont diverses. Elles dépendent du type de matériau granulaire mis en jeu, de la géométrie de l'écoulement, et surtout des sollicitations mécaniques : vitesse ou force imposée, inclinaison de la pente, vibrations... Dans le cas d'écoulements confinés en trémies et en conduites verticales, c'est le rapport de taille entre les grains et l'ouverture qui détermine en grande partie la formation d'arches ou de voûtes, susceptibles d'arrêter l'écoulement [189]. Jenike [195, 94] a proposé une méthode de di-

---

<sup>2</sup>Une coulée pyroclastique est constituée de particules (cendres, lapilli et blocs) distribuées entre une partie basale dense et un nuage dilué et turbulent.

mensionnement d'un silo de façon à éviter la formation d'arche. Il peut être aussi nécessaire d'apporter de l'énergie par vibration pour briser les voûtes et améliorer l'écoulement. Dans certaines géométries, on observe la coexistence de zones en écoulement et de zones statiques (appelées zones mortes dans les silos). Les bandes de cisaillement, d'une largeur de l'ordre d'une dizaine de taille de grains [118, 149], sont aussi des zones fluides entre deux zones solides.

### Rôle du frottement

Le blocage est intimement lié au frottement du matériau. Un simple patin sur un plan incliné montre le rôle du frottement pour décrire la mise en mouvement et l'arrêt d'une masse sur une pente. Dans le cas des avalanches de débris, le frottement de la masse de grains sur le flanc de la montagne joue effectivement un rôle déterminant sur la propagation de celle-ci. Il s'agit cette fois-ci d'un frottement macroscopique [1, 90] différent du frottement microscopique entre deux grains. Sur un plan incliné, la transition solide-fluide correspond à un angle maximal de stabilité  $\theta_{Start}$ , à partir duquel se déclenche une avalanche. L'inclinaison est alors réduite à une valeur inférieure  $\theta_{Stop}$ , l'angle de repos. L'hystérésis de seuil peut être associé à la différence entre le frottement statique et le frottement dynamique.

### Problématique

On s'aperçoit, après cet inventaire non exhaustif, que les situations de blocage que l'on rencontre dans la nature ou dans l'industrie sont très variées. La richesse du comportement des matériaux granulaires et les phénomènes physiques qu'ils engendrent suscitent donc de nombreuses questions fondamentales : Que vaut le frottement effectif d'un matériau granulaire ? Quelle est l'origine de l'hystérésis de seuil ? Quel est le rôle des conditions aux limites ? La localisation du cisaillement est-elle liée à l'hétérogénéité des contraintes dans le milieu ?

### Approche envisagée

Afin d'avoir une meilleure compréhension des phénomènes physiques qui régissent le blocage des matériaux granulaires, nous avons orienté ce travail de recherche vers l'étude rhéologique de matériaux modèles, simples et bien caractérisés.

La même démarche de modélisation a été adoptée vis à vis de la géométrie d'écoulement. Couplée au moteur de l'écoulement (gravité, mouvement imposé ou force imposée à une paroi), elle joue un rôle non négligeable sur l'aptitude à l'écoulement d'un matériau granulaire. Étant donnée la grande variété de géométries qui existent, nous nous sommes efforcés de choisir des

géométries simples, dont les propriétés et les paramètres sont bien maîtrisés, afin de mettre en évidence les principes physiques de base du blocage.

Nous commençons par des situations de cisaillement à vitesse imposée où il n'y a pas à proprement parler de blocage, puis nous étudions des situations à force imposée. Afin d'étudier le comportement et en particulier le frottement à proximité de l'arrêt, nous commençons par la géométrie de cisaillement à vitesse imposée la plus simple : le cisaillement plan sans gravité. Puis, nous introduisons une hétérogénéité de contrainte, via le cisaillement plan avec gravité puis le cisaillement annulaire (ou géométrie de Couette). Pour étudier le blocage lui-même, il est nécessaire de travailler à contrainte imposée. Nous avons choisi d'étudier les deux géométries suivantes : le cisaillement annulaire et le plan incliné. Bien que ces deux approches (vitesse imposée - force imposée) soient liées, nous adoptons ce découpage afin de présenter nos résultats.

Ainsi, l'étude est menée à partir de systèmes modèles en introduisant graduellement des éléments de complexité. Ce travail se situe donc à la frontière entre les recherches plus "amont" sur la transition fluide - solide dans les matériaux "fragiles", et les essais plus ou moins réalisables sur matériaux réels. Les expériences sur matériaux modèles (rhéométrie - IRM) et les simulations numériques discrètes constituent deux voies d'étude, au niveau macroscopique (frottement en fonction du taux de cisaillement) et microscopique (profils de vitesse, mobilisation du frottement ...), pour identifier et mesurer les caractéristiques robustes et reproductibles, isoler les influences déterminantes, et discuter les expériences sur matériau réel (lorsqu'elles sont possibles). Ceci a suscité un effort important de développement d'outils de simulation numérique et de techniques d'imagerie.

## Annnonce du plan

Nous commençons par une vue d'ensemble des connaissances acquises ces dernières années sur les matériaux granulaires et notamment sur leur comportement près de la transition vers l'arrêt (Chapitre 1).

Dans une première partie, nous mesurons l'évolution des grandeurs tant macroscopiques (frottement, dilatance...) que microscopiques (coordinence, mobilisation du frottement...) dans la transition progressive entre le régime quasistatique et le régime dynamique à vitesse imposée. Nous commençons par une situation de cisaillement homogène, avant d'aborder l'effet d'une hétérogénéité de contraintes.

Dans la deuxième partie, nous étudions le comportement du matériau granulaire cette fois-ci à contrainte imposée. Nous mettons alors en évidence une transition nette de l'état fluide vers l'état solide, et nous examinons l'évolution des différentes grandeurs physiques précédentes au voisinage de

cette transition. Deux géométries sont étudiées, le cisaillement annulaire et le plan incliné.

La troisième partie a pour objet une synthèse et une comparaison des deux parties précédentes vis à vis du problème du blocage des écoulements granulaires. Elle propose aussi quelques pistes de modélisation sur l'influence des corrélations dans le système et le rôle du piégeage initié à la paroi.

# Chapitre 1

## État des connaissances

Ce premier chapitre a pour objet de donner quelques informations générales sur les matériaux granulaires utiles pour l'étude du frottement et du blocage. Ainsi on commence par décrire ces matériaux à l'échelle microscopique (l'échelle du contact entre grains). On décrit ensuite leur comportement en statique, puis en écoulement, notamment à proximité de l'arrêt.

Cette présentation est loin d'être exhaustive et nous nous sommes limités aux points qui nous seront les plus utiles. Les lecteurs désireux d'avoir une vision plus complète des choses sont invités à se reporter aux références suivantes [150, 146, 43, 11, 63, 91].

### 1.1 Matériaux granulaires

Dans cette thèse on appellera matériau (ou milieu) granulaire un matériau formé d'une collection de particules macroscopiques de taille supérieure à environ  $100 \mu\text{m}$ . Cela signifie qu'elles sont visibles à l'oeil nu, par opposition aux milieux mésoscopiques ou microscopiques. Cette taille peut aller jusqu'au mètre, si l'on songe à des blocs rocheux. Ils ont donc des dimensions qui s'étendent sur plusieurs ordres de grandeur. Cette limitation sur la taille des particules correspond à une limitation quant au type d'interactions existant entre les grains : nous nous intéresserons à des assemblées de grains non browniens qui interagissent par contact et en l'absence d'interactions cohésives de type van der Waals. La température thermodynamique n'a donc pas d'influence sur la physique de ces matériaux.

Les matériaux granulaires ont la particularité d'être biphasiques : il s'agit d'une phase solide dispersée dans une phase liquide ou gazeuse. La phase solide est composée d'objets macroscopiques. En fait, ce sont les interactions au sein d'une même phase et entre les deux phases qui sont à l'origine de l'extrême variété des comportements observés. Dans la suite, on néglige le fluide interstitiel et on parle alors de matériau granulaire sec.



Les grains ont des formes quelconques, toutefois afin de simplifier le problème, on considère dans la suite, le cas de sphères en dimension 3 (3D) et de disques en dimension 2 (2D), de diamètre  $d$  (rayon  $R$ ) et de masse  $m$ .

## 1.2 Interactions entre particules

Dans le cas des grains secs non cohésifs (qui font l'objet de cette étude), les propriétés du matériau dépendent de la nature des interactions des particules entre elles (voir [11] pour une discussion des interactions grain air). Les interactions se résument alors à des contacts directs, qui constituent les mécanismes élémentaires de transfert de quantité de mouvement et de dissipation de l'énergie.

### 1.2.1 Contacts maintenus et collisionnels

#### Modèle de Hertz

Considérons deux billes sphériques en contact sur lesquelles on impose une force normale  $N$ . Au niveau du contact, les deux sphères vont se déformer légèrement. On cherche alors la relation entre la force  $N$  et l'écrasement  $\delta$ . Sous l'hypothèse que les deux sphères sont élastiques, il est possible de calculer exactement l'état de contraintes (calcul réalisé par Hertz en 1880). Nous nous contenterons ici d'un raisonnement approché. Au niveau du contact nous connaissons la relation contrainte ( $\sigma$ ) - déformation ( $\varepsilon$ ) donnée par la loi de Hooke :  $\sigma = E\varepsilon$ , où  $E$  est le module d'Young. La contrainte est de l'ordre de  $N/a^2$  où  $a$  est le rayon de la surface de contact (Fig. 1.1). Pour estimer les déformations, nous avons besoin de connaître la taille de la zone affectée par l'écrasement. On peut se convaincre que la déformation s'étend autour du contact dans une région de rayon  $a$  (ce sont les propriétés des équations de l'élasticité qui permettent de justifier ce raisonnement). L'ordre de grandeur de la déformation est donc  $\delta/a$ . On trouve donc :  $N \simeq Ea\delta$ . Or en considérant le triangle rectangle OAB, on montre que pour de petites déformations,  $a \simeq \sqrt{2\delta R}$ . On trouve donc que :

$$N = k\delta^{\frac{3}{2}} \quad (1.1)$$

avec  $k \simeq E\sqrt{2R}$ . Le calcul exact de Hertz indique que  $k$  est aussi fonction du coefficient de Poisson.

En dimension deux, on a plutôt :

$$N = k\delta \quad (1.2)$$

Dans le cas de milieux granulaires, le contact entre particules peut rester actif pendant une durée significative, on parle alors de contact maintenu. En écoulement, on s'attend à ce que les contacts s'ouvrent et se ferment

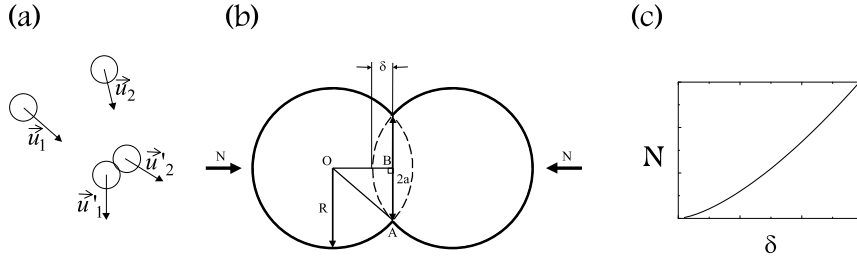


FIG. 1.1 – (a) Collision entre deux particules. (b) Déformations élastiques lors d'un contact entre deux sphères. (c) Variation de la force normale en fonction de l'écrasement.

fréquemment. Le cas élémentaire est la collision binaire, mais il peut aussi y avoir des situations de contact multiple. De façon générale, on parlera de collision lorsqu'il y a une variation brutale de la vitesse relative au point de contact. Le modèle de Hertz permet la description du contact, en particulier le calcul de la durée de la collision  $\tau_c$  et de l'interpénétration maximale  $\delta_m$  en fonction de la vitesse relative d'impact  $v_i$  :

$$\begin{cases} \tau_c = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}} & \text{et} & \delta_m = \frac{\tau_c v_i}{\pi} & \text{pour des disques} \\ \tau_c = 2,94 \sqrt{\frac{m^2}{k^2 v_i}} & \text{et} & \delta_m = \frac{\tau_c v_i}{2,94} & \text{pour des sphères} \end{cases}$$

Notons qu'en dimension deux la durée de la collision est indépendante de la vitesse d'impact. Ce modèle de contact est à la base de certaines méthodes de simulation numérique (voir Annexe A).

### Le coefficient de restitution

Le raisonnement précédent est valide tant que les vitesses de déformation sont faibles par rapport à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le milieu. Lors d'une collision entre deux particules, ce n'est souvent pas le cas, et la description des évolutions des contraintes et déformations devient un problème très complexe. Nous nous contenterons d'introduire le concept de coefficient d'inélasticité ou coefficient de restitution  $e$ , introduit par Newton en 1687.

Considérons une bille rentrant en collision à la vitesse  $v_i$  contre un plan. Alors la vitesse après rebond sera  $v_r = -ev_i$ . Cette différence de vitesse provient de la dissipation d'énergie qui se produit lors du choc, on a donc  $e < 1$ . L'origine de la perte d'énergie cinétique est multiple [66] : déformation plastique, rayonnement en ondes de surface, en modes de vibration propres

de la bille... Le coefficient de restitution est typiquement égal à 0.9 pour de l'acier, 0.6 pour de l'aluminium. Le coefficient dépend légèrement de la vitesse d'impact. Mais l'approximation  $e$  constant est suffisante pour décrire de nombreux phénomènes. L'existence de dissipation lors des collisions est au cœur des propriétés des écoulements granulaires rapides. Plus généralement lors de la collision entre deux particules comme sur la figure 1.1 (a), la règle de collision reliant les vitesses après le choc et avant le choc s'écrit en prenant en compte l'inélasticité :

$$(\vec{u}'_2 - \vec{u}'_1)_n = -e(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)_n \quad (1.3)$$

où l'indice  $n$  indique que l'on a projeté sur l'axe  $\vec{n}$  normal à la collision.

Ainsi, à l'échelle microscopique les particules lors d'un choc normal sont caractérisées par deux paramètres : le coefficient de raideur  $k$  et le coefficient de restitution  $e$ .

## 1.2.2 Contacts frictionnels

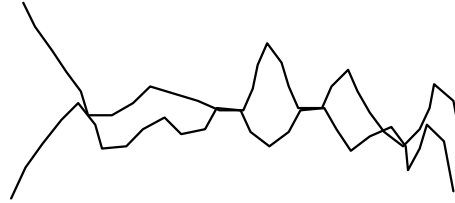
### Lois de Coulomb

Les lois macroscopiques empiriques régissant la friction entre deux solides ont été établies à l'aide d'expériences de patin glissant sur un solide. Les expériences historiques de Léonard de Vinci, puis de Guillaume d'Amontons conduisent aux observations suivantes pour la friction entre deux solides :

- Partant du repos, il faut une force tangentielle  $|T| = \mu_s N$  pour mettre en mouvement un patin.  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique,  $N$  la force normale.
- Une fois en mouvement, la norme de la force de friction est égale à  $|T| = \mu_d N$ .  $\mu_d$  est le coefficient de friction dynamique.
- $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont des constantes ne dépendant que de la nature des matériaux en contact avec typiquement  $1 \gtrsim \mu_s > \mu_d \gtrsim 0.1$ .

Il est d'usage de baptiser l'ensemble de cette description "lois de Coulomb" parce que ce dernier en fit une généralisation aux matériaux granulaires [41].

Cette description est bien souvent suffisante pour décrire nombre de phénomènes. Il convient toutefois de noter que  $\mu_{d,s}$  = constantes sont des approximations et des phénomènes comme le vieillissement statique (augmentation de  $\mu_s$  avec l'âge du contact [16]) ou l'affaiblissement cinétique (diminution de  $\mu_d$  avec la vitesse de glissement [23]) sont observés. Notons enfin que les lois de Coulomb distinguent le coefficient de frottement statique  $\mu_s$ , qui décrit la résistance à vaincre pour la mise au mouvement à partir du repos, du coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ , qui décrit la force qu'il faut appliquer pour maintenir une vitesse de glissement constante. On a  $\mu_s > \mu_d$ , ceci signifie que la force nécessaire au mouvement du patin peut être inférieure à celle de mise en mouvement. L'origine microscopique des

FIG. 1.2 – *Zoom sur un contact.*

lois de frottement macroscopique trouve une explication sommaire dans la description suivante.

### Interprétation microscopique

A l'échelle microscopique, les surfaces sont rugueuses (Fig. 1.2). Le contact ne se produit donc que pour un nombre limité d'aspérités et la distance entre les éléments de surface correspondants est si faible que ceux-ci interagissent par le biais de forces attractives (interaction de van der Waals, ...) [184]. On comprend donc, que pour des températures usuelles, les deux mécanismes microscopiques du frottement sont, d'une part, l'adhérence due aux forces attractives et, d'autre part, le cisaillement des aspérités.

Sous l'action d'une force normale  $N$  (le poids de l'objet par exemple), chaque aspérité se déforme. La surface de contact effective  $A_{eff}$  étant beaucoup plus petite que la surface apparente, la contrainte exercée au niveau de chaque aspérité est supérieure au seuil de plasticité du matériau  $p$ . Elles se déforment donc à pression constante  $p$  jusqu'à supporter la force normale  $N$

$$N = A_{eff} p \quad (1.4)$$

Afin de séparer les deux objets, il est nécessaire d'exercer une force tangentielle  $T$  suffisante pour rompre l'ensemble des liaisons établies au niveau des aspérités. Bowden et Tabor ont montré que cette force est proportionnelle à la surface de contact effective [21] :

$$T = A_{eff} s \quad (1.5)$$

où  $s$  caractérise la résistance moyenne au cisaillement du matériau. En remplaçant  $A_{eff}$  par son expression (1.4) dans (1.5), on obtient que la force tangentielle exercée sur les surfaces afin de les séparer est proportionnelle à la force normale

$$T = \mu N \quad (1.6)$$

avec  $\mu = \frac{\xi}{p}$ . Ainsi, le coefficient de frottement est indépendant de la surface en contact. Il est uniquement fonction des caractéristiques mécaniques des matériaux.

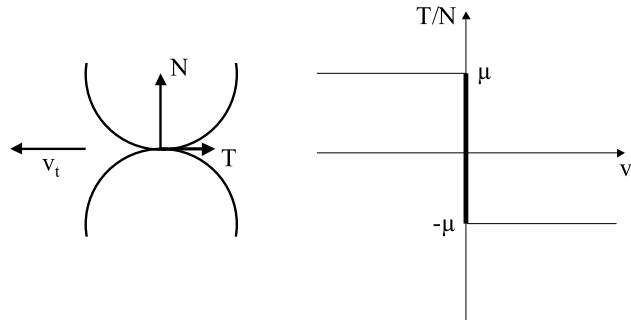


FIG. 1.3 – *Loi de contact tangentielle.*

Il n'y a pas lieu d'entrer dans une étude plus détaillée de ces phénomènes, qui relève de la physique du contact [96]. Toutefois, afin de décrire le contact entre deux particules, nous adopterons les lois de Coulomb. La figure 1.3 résume la loi de contact tangentielle entre deux particules :  $|\frac{T}{N}| \leq \mu$ . Il y a inégalité si la vitesse tangentielle au point de contact ( $v_t$ ) est nulle (contact "roulant"), égalité sinon (contact "glissant").

### 1.3 Les trois états de la matière granulaire

Les milieux granulaires se comportent de façon très différente [91] selon le mode de sollicitation (Fig. 1.4). Un ensemble de grains posés sur une table peut former un tas statique. Malgré des contraintes de cisaillement présentes dans le tas, le milieu reste sans mouvement et se comporte donc comme un solide. Dans ce régime, le système est dominé par les interactions de contact entre les grains. A l'autre extrême, si l'on secoue énergiquement un sac de billes, le milieu devient très agité avec des particules bougeant dans tous les sens et interagissant par collisions. Dans ce régime que l'on appelle collisionnel, le milieu ressemble à un gaz. Enfin entre les deux, on observe, comme dans un sablier par exemple, des écoulements denses, où les particules interagissent à la fois par collision et contacts frictionnels de longue durée.

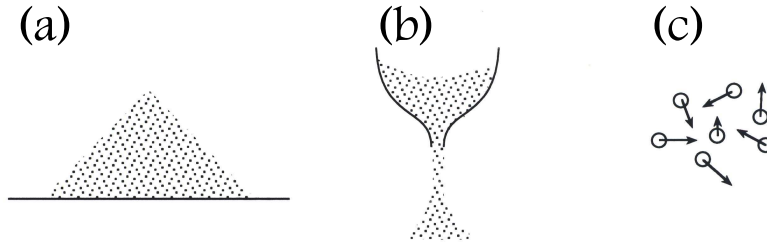


FIG. 1.4 – Les milieux granulaires peuvent se comporter comme un solide (a), un liquide (b) ou un gaz (c) selon le mode de sollicitation. Figure extraite de [144].

### 1.3.1 Rôle de la compacité

La compacité, ou fraction volumique, notée  $\nu$ , nous renseigne sur le taux de remplissage d'un volume donné. Il s'agit du volume des grains sur le volume total du matériau granulaire. On comprend facilement que si la compacité augmente, le milieu va se bloquer. C'est donc un paramètre important de l'étude du blocage.

La figure 1.5 illustre la relation qui existe entre la structure du matériau et la compacité dans le cas d'un milieu constitué de sphères ou de disques. Aux faibles compacités (milieu dilué), les grains sont séparés les uns des autres (mais entrent en contact lors des collisions). Il s'agit d'une fluide désordonné qui correspond au régime collisionnel. Lorsque la compacité augmente, le milieu devient dense. Dans le cas de particules monodisperses, l'état cristallin est atteint pour  $\nu = 0.74$  pour des sphères et  $\nu = 0.91$  pour des disques. Mais en fait l'état "solide" est atteint pour des compacités plus faibles. Le milieu se compacte jusqu'à une compacité maximale  $\nu_M$  dite d'empilement désordonné compact ; pour des sphères dures  $\nu_M = 0.64$  et pour des disques  $\nu_M = 0.82$ .

Dans le régime d'écoulement dense, pour des questions d'encombrement stérique, il s'établit un réseau de contacts entre grains, dont la densité peut être mesurée par la coordinnence  $Z$  (c'est-à-dire le nombre moyen de contacts par grain). En terme de connexité de ce réseau, on peut ainsi définir une compacité  $\nu_m$ , à partir de laquelle le réseau s'étend à travers tout l'échantillon, ce qui évoque un seuil de percolation. On parle alors d'empilement désordonné lâche. Dans un écoulement, il faut plutôt retenir l'image d'une percolation dynamique ou "brassée", dans la mesure où ce réseau est en constante réorganisation. Des mesures de cette compacité critique réalisées

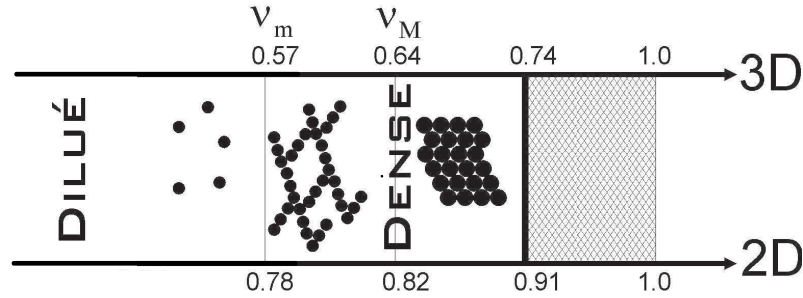


FIG. 1.5 – Structure et compacité des milieux granulaires (2D et 3D).

par simulation numérique du cisaillement simple d'assemblées de disques ou de sphères monodisperses [2, 115] ont donné  $\nu_m = \frac{\pi}{4} \approx 0,78$  pour des disques, et  $\nu_m = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$  pour des sphères (structure cubique simple). D'autres expériences numériques [138], concernant la stabilité d'empilements de sphères, montrent plutôt que  $\nu_m \approx 0,57$ . En terme de coordinence, on aurait pour les cas des disques  $Z = 3$  à  $\nu_m$  et  $Z = 4$  à  $\nu_M$  [85].

Dans la suite, nous traiterons uniquement des écoulements denses de grains, c'est à dire des écoulements caractérisés par une compacité proche de  $\nu_m$ . Notons qu'Azanza avait proposé une classification des régimes d'écoulement de disques monodisperses (cinétique, collisionnel, dense, bloc) en fonction de leur compacité [11]. Dans cette étude, les écoulements bidimensionnels étaient qualifiés de denses pour une compacité entre 0,6 et 0,82.

Notons enfin qu'une polydispersité suffisante (supérieure à 15% selon [114]) empêche la cristallisation.

### 1.3.2 Principe de dilatance

Lors de la mise en mouvement d'un empilement dense, les grains doivent se désenchevêtrer. Le mouvement relatif des grains va donc induire une diminution de la compacité comme schématisé sur la figure 1.6. Le premier à mettre en évidence ce phénomène a été O. Reynolds en 1885 [162]. Le phénomène de la dilatance de Reynolds dépend bien entendu des conditions initiales. Partant d'un empilement lâche, les grains n'ont pas à se désenchevêtrer et il n'y a pas de dilatance. Une contractance peut en revanche être observée.

Lorsque la vitesse de cisaillement augmente, on peut s'attendre à une intensification de la dilatation du milieu granulaire, car il s'ajoute à l'effet géométrique précédent un effet dynamique associé aux collisions entre grains, qui engendre une pression interne.

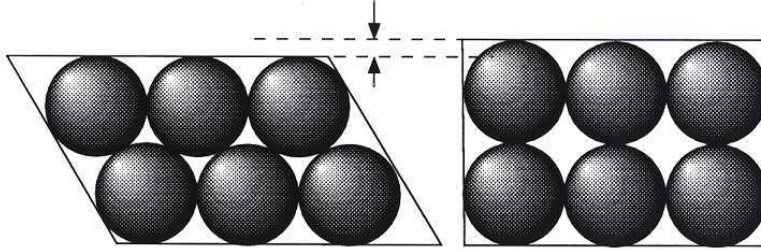


FIG. 1.6 – Principe de dilatance de Reynolds.

### 1.3.3 Classification des régimes

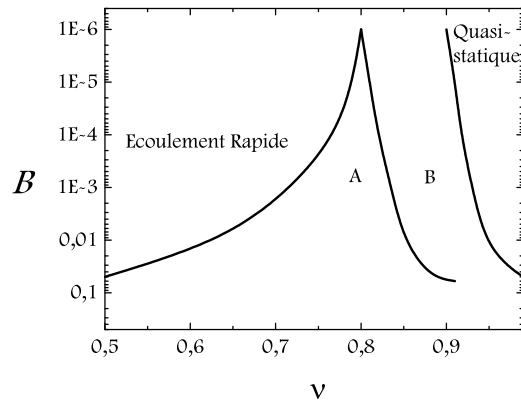


FIG. 1.7 – Classification des régimes [12]. Échelle semi-log. A correspond au régime de collision multiple et B au régime de chaîne de force intermittente.

Babic *et al.* [12, 29] proposent une classification des régimes d'écoulement par rapport à la compacité  $\nu$ , mais aussi par rapport à un autre nombre sans dimension  $B$  qui compare le temps de collision entre particules au temps de vol libre. Ce nombre prend en compte l'élasticité des grains ; il s'écrit :

$$B = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{E/\rho_p}} \quad (1.7)$$



où  $\dot{\gamma}$  est le taux de cisaillement,  $d$  le diamètre des grains,  $E$  leur module d'Young et  $\rho_p$  leur masse volumique.  $\nu$  et  $B$  définissent un espace des paramètres qui permet la classification des écoulement en quatre régimes (Fig. 1.7).

Dans le régime quasistatique, les forces sont supportées par les chaînes de forces. Dans le régime transitoire B, lorsque la compacité diminue ou lorsque  $B$  augmente, les chaînes de forces deviennent intermittentes : elles sont en permanence détruites et générées par le mouvement des grains. Le régime A, pour une compacité plus faible ou un nombre  $B$  plus grand, est le régime des collisions multiples. Enfin, pour des compacités encore plus faibles, ou si on augmente encore  $B$ , le mouvement des particules devient encore plus agité. C'est le régime des collisions binaires.

## 1.4 Statique et faibles déformations

Nous nous intéressons ici à une assemblée statique de grains où les grains interagissent à travers des contacts maintenus frottants. C'est le régime étudié par les mécaniciens des sols, à la fois pour des problèmes de stabilité (talus...) et pour des problèmes de tassement (fondations...) [134].

### 1.4.1 Frottement interne

Le test classique pour étudier les faibles déformations d'un matériau granulaire, mis au point par les mécaniciens des sols, est l'essai triaxial. L'échantillon est placé dans une cellule cylindrique soumise à une contrainte normale axisymétrique sur le cylindre (équivalente à une pression) et à une contrainte verticale selon l'axe du cylindre. Le matériau est soumis à une différence de contraintes normales et se déforme. On mesure la déformation axiale et la déformation volumique. En pratique, c'est le taux de déformation axiale qui est contrôlé. Lorsque la déformation axiale augmente, on observe une augmentation du déviateur des contraintes, puis un palier correspondant à une déformation plastique. L'état initial (dense ou lâche) introduit quelques nuances, particulièrement pour ce qui est de la déformation volumique (contractance ou dilatance respectivement). En grande déformation, les états de contrainte et de volume tendent vers un état d'équilibre indépendant des conditions initiales, appelé état critique ou de plasticité parfaite [174], caractérisé par sa densité qui ne dépend que de la contrainte moyenne. Dans la mesure où les déformations élastiques sont très faibles devant les déformations plastiques, on peut utiliser un modèle rigide-plastique (plutôt qu'un modèle élasto-plastique).

Avant d'atteindre l'état critique, on peut aussi observer la rupture du matériau par localisation de la déformation. Le critère de rupture ( $F(\underline{\sigma}) = 0$ ) définit l'état de contrainte où l'on atteint le régime plastique. Si ce critère n'évolue pas, on parle de plasticité parfaite. Le critère de rupture de Mohr-Coulomb peut être utilisé en première approximation. Ce critère énonce

qu'un point d'un matériau granulaire est stable si pour tout couple d'orientation  $(\vec{n}, \vec{t})$ , les contraintes normales et tangentielles vérifient l'inégalité stricte :

$$|\sigma_t| < \sigma_n \tan \phi \quad (1.8)$$

Lorsque l'égalité est atteinte ( $|\sigma_t| = \sigma_n \tan \phi$ ), le matériau s'apprête à glisser dans la direction  $\vec{t}$ . Le critère s'écrit donc  $F(\underline{\sigma}) = |\sigma_t| - \sigma_n \tan \phi$ .  $\phi$  est appelé angle de frottement interne du matériau (de l'ordre de  $30^\circ$  dans les sols). Ce critère est analogue à la loi de Coulomb locale, mais l'angle de frottement interne dépend non seulement du coefficient de frottement  $\mu$  entre grains, mais aussi de la forme des grains et de la géométrie de l'empilement (granulométrie, compacité).

#### 1.4.2 Réseau de contact

Les empilement de grains sont caractérisés par un réseau de contact qui transmet les forces. La statistique de la répartition des forces a fait l'objet de nombreux travaux de recherche [131, 157, 152, 108]. Les premières expériences permettant de visualiser ce réseau de contact ont été réalisées par Dantu [56], sur des assemblées bidimensionnelles de cylindres. Elles avaient révélé que, dans un empilement, le moindre désordre (distribution de taille des grains en particulier) introduit une distribution très hétérogène des forces de contact.

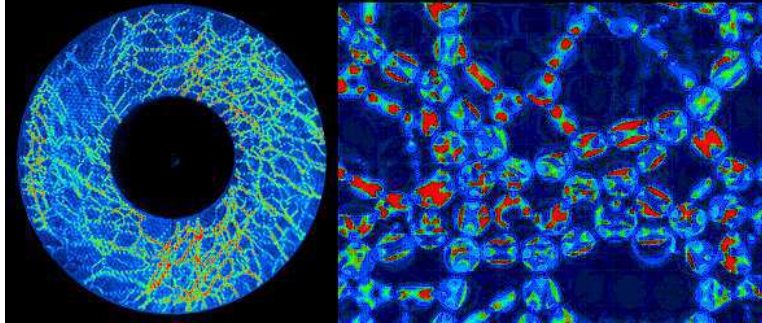


FIG. 1.8 – Mise en évidence du réseau de contact par photoélasticimétrie [86]

Ce réseau porte les forces de contact [155, 154]. Tant les simulations numériques [182, 152], que les expériences de grains photo-élastiques [86, 131, 108] montrent clairement des fluctuations spatiales et temporelles du réseau des contacts (Fig. 1.8). Ces fluctuations spatio-temporelles ont été mesurées expérimentalement ou numériquement au niveau des parois de confi-

nement [2, 193, 135, 176, 119]. Les forces entre grains présentent deux lois de distribution différentes selon qu'elles sont supérieures ou inférieures à la valeur moyenne [157]. Alors que le nombre de "fortes forces" décroît exponentiellement avec l'intensité de la force, le nombre de "faibles forces" est indépendant de celle-ci. Ainsi le réseau des contacts peut être décomposé en deux sous réseaux.

Au repos, les voûtes, en reportant les forces vers les parois, sont responsables de la saturation de la pression au sein d'une colonne de grains [139]. La dynamique de ces voûtes (formation et rupture des chaînes de force) est très importante pour comprendre comment l'orifice de sortie régule le débit dans les silos [22]. De plus, une densification du réseau de contact ainsi qu'une augmentation conjointe du nombre moyen de coordination conduit à des situations de blocage [137, 2].

Dans le régime des faibles déformations [40], on observe, pour des grains frottants ou non, une courbe contrainte-déformation en forme d'escalier. Chaque marche élémentaire est composée d'un intervalle stable où le réseau des contacts supporte les contraintes sans entraîner de mouvements. Cela reste vrai jusqu'à ce qu'une force de contact devienne négative, alors le contact s'ouvre, entraînant le réarrangement du système et par conséquent un incrément de déformation. Le mouvement s'arrête à nouveau lorsqu'un contact se ferme et qu'un nouvel état d'équilibre est atteint. Lorsqu'on regarde le champ de vitesse d'un tel système, on remarque des vortex complexes qui s'étendent à l'ensemble du système [167, 153]. Bien que chaque configuration d'équilibre soit rigide, une petite perturbation de contrainte entraîne un réarrangement des contacts. Ces réarrangements sont des événements qui sont non locaux, et qui touchent donc l'ensemble du système.

Dans les écoulements denses, ce réseau de contact reste important. Il est alors constitué de particules qui restent en contact prolongé, c'est à dire qui n'interagissent pas par des collisions quasi-instantanées. La proportion relative des contacts maintenus et des collisions a été discutée dans des expériences [117] et des simulations numériques [58, 12]. L'analyse quantitative a montré que pour un taux de cisaillement assez élevé, le nombre de contacts maintenus est relié de façon non-triviale à la compacité, au taux de cisaillement et à la pression de confinement [112, 58, 175, 12]. Par ailleurs, sous cisaillement, ce réseau de contact est fortement anisotrope avec des orientations préférentielles dans la direction du cisaillement et de la pesanteur.

## 1.5 Frottement effectif

Nous avons indiqué que le frottement microscopique joue un rôle important vis à vis du comportement des matériaux granulaires. Dans le régime quasistatique, le frottement interne permet de définir le critère de rupture. En fait, il est possible de généraliser la notion de frottement interne ou effec-

tif à l'ensemble des régimes d'écoulement. D'une manière générale, on définit le frottement effectif  $\mu^*$  dans un matériau granulaire comme étant le rapport des contraintes tangentielles ( $\tau$ ) sur les contraintes normales ( $\sigma$ ) :

$$\mu^* = \frac{\tau}{\sigma} \quad (1.9)$$

La variation du frottement effectif avec le taux de cisaillement nous renseigne sur la loi de comportement du milieu granulaire. Le frottement effectif a donc fait l'objet de nombreuses études : certains auteurs ont montré que celui-ci augmente avec le taux de cisaillement [139, 188, 172, 47, 79], d'autres qu'il diminue avec la pression [59, 128].

Certains travaux analysent les relations entre le frottement et le blocage [164], à travers des modèles décrivant l'interaction d'un système de patin et de ressort avec un ensemble d'aspérités. Il est alors possible de prédire un hystérésis et une transition brutale.

Il paraît donc important d'avoir une bonne compréhension du frottement effectif dans un matériau granulaire afin de pouvoir étudier le blocage.

## 1.6 Géométries d'écoulement

L'écoulement peut être confiné (conduite verticale, cisaillement annulaire...) ou à surface libre (plan incliné, écoulement sur socle meuble...). La figure 1.9 résume les six géométries d'intérêt pour l'étude des écoulements granulaires.

### 1.6.1 Distribution des contraintes

Commençons par décrire la distribution des contraintes dans le matériau, que l'on peut déduire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v} \right) = \rho \vec{F} + \overrightarrow{div} \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.10)$$

où  $\rho = \rho_p \nu$  est le densité apparente du fluide,  $\vec{F}$  la résultante des forces en volume et  $\underline{\underline{\Sigma}}$  le tenseur des contraintes. On choisit alors le repère des coordonnées de telle façon que l'axe porté par  $\vec{e}_x$  ou  $\vec{e}_\theta$  soit dans la direction de l'écoulement. De plus, nous faisons l'hypothèse que l'on peut considérer le matériau granulaire comme un fluide incompressible. Il nous est alors possible de donner la distribution des contraintes dans chacune des géométries qui nous intéresse.

En cisaillement plan sans gravité, il n'y a pas de force en volume et en dimension deux l'équation de la quantité de mouvement se réduit à :

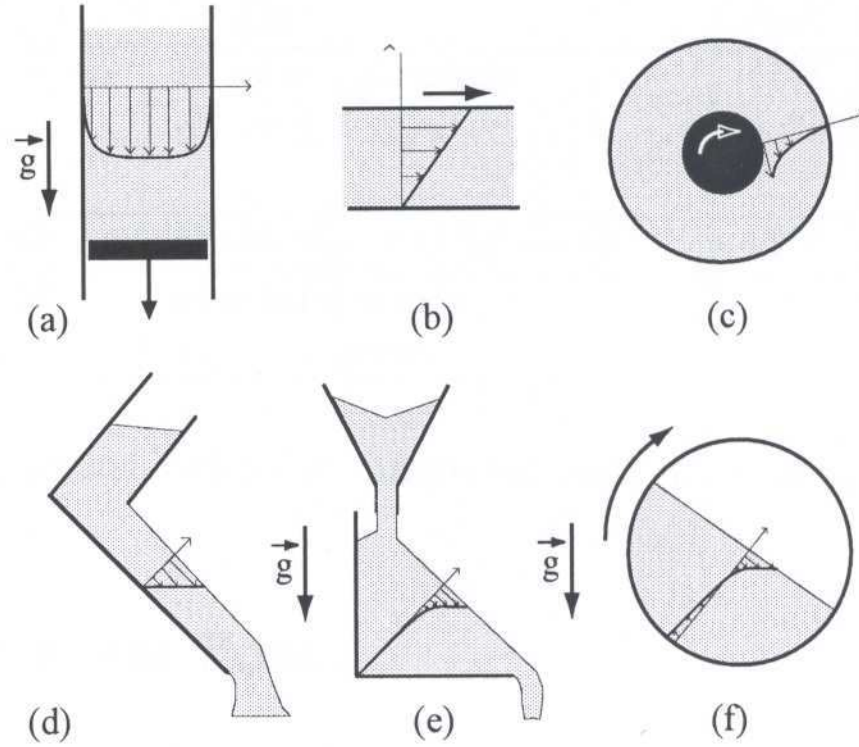


FIG. 1.9 – Six géométries d'écoulement : (a) la conduite verticale, (b) le cisaillement plan, (c) le cisaillement annulaire, (d) le plan incliné, (e) le socle meuble, (f) le tambour tournant. Les géométries (b), (c) et (d) feront l'objet d'une étude détaillée dans les chapitres suivants. Figure extraite de [118].

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \Sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} \quad (1.12)$$

Dans le cas d'écoulement stationnaire uniforme, les dérivées par rapport au temps et à la direction de l'écoulement  $x$  sont nulles. De plus, puisqu'il n'y a pas de mouvement selon  $y$ , on a  $v_y = 0$ . Les équations précédentes se réduisent donc à :

$$0 = \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} \quad (1.13)$$

$$0 = \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} \quad (1.14)$$

On trouve donc que la contrainte normale et la contrainte de cisaillement sont des constantes. Il s'agit donc d'un système homogène. Cela signifie, en particulier, que  $\mu^*(y) = \frac{\Sigma_{xy}}{\Sigma_{yy}} = Cst$ .

Si maintenant on introduit la gravité selon  $y$ , il faut ajouter un terme de force de volume à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Après simplification, on obtient :

$$0 = \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} \quad (1.15)$$

$$-\rho g = \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} \quad (1.16)$$

On a donc  $\Sigma_{xy}(y) = Cst$  et  $\Sigma_{yy}(y) = \rho g(H - y)$ ,  $H$  étant l'épaisseur de l'écoulement. Le système présente donc une hétérogénéité de contrainte.

Le cas du plan incliné est analogue à celui du cisaillement plan sauf que l'écoulement est incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à la gravité. On a alors :

$$-\rho g \cos \theta = \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} \quad (1.17)$$

$$-\rho g \sin \theta = \frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y} \quad (1.18)$$

soit :

$$\Sigma_{xy} = \rho g \cos \theta (H - y) \quad (1.19)$$

$$\Sigma_{yy} = \rho g \sin \theta (H - y) \quad (1.20)$$

On trouve alors, comme pour le cisaillement plan sans gravité, que  $\mu^*(y) = \tan \theta = Cst$ .

Enfin, dans le cas du cisaillement annulaire, il est plus commode d'utiliser les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . L'équation de conservation de la quantité de mouvement se réécrit alors :

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (1.21)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \frac{\partial \Sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\Sigma_{r\theta}}{r} \quad (1.22)$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire uniforme ( $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) sans écoulement radial ( $v_r = 0$ ), les équations précédentes se réduisent à :

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (1.23)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Sigma_{r\theta}) \quad (1.24)$$

On trouve donc que  $\Sigma_{r\theta}(r) = \frac{Cst}{r^2}$ , par contre la contrainte radiale  $\Sigma_{rr}(r)$  reste indéterminée. La distribution des contraintes en cisaillement annulaire est donc hétérogène.

## 1.7 Écoulements rapides de grains

Nous abordons ici le régime gazeux pour lequel le milieu granulaire est très agité. Trouver les équations constitutives pour ce régime a fait l'objet de nombreuses études ces 20 dernières années [74, 28, 76, 95].

Des milieux granulaires agités peuvent être obtenus en vibrant verticalement une boîte contenant des billes [67], ou sur un plan fortement incliné [11].

L'analogie avec un gaz est due à Ogawa en 1978 [136]. Il fut le premier à introduire la notion de température granulaire que l'on définit comme la moyenne du carré des fluctuations de vitesses. Si on décompose la vitesse instantanée d'une particule en une vitesse moyenne plus une partie fluctuante :  $\vec{v}_i = \vec{v}_{moy} + \delta\vec{v}$ , la température granulaire est définie comme  $T = \langle \delta\vec{v}^2 \rangle$ . Cette analogie avec un gaz permet alors de s'inspirer de la théorie cinétique des gaz denses pour formuler des équations constitutives pour les écoulements de milieux granulaires. La différence fondamentale entre un gaz granulaire et un gaz moléculaire est la dissipation d'énergie lors des collisions. Nous avons vu que cette perte d'énergie peut être décrite par un coefficient de restitution  $e$ . Pour rester dans un état agité il faut injecter de l'énergie continuellement puisqu'elle est perdue à l'échelle des grains.

Dans des situations denses ( $\nu \rightarrow \nu_m$ ) l'approche heuristique proposée par Haff en 1983 [76] permet de cerner l'origine microscopique des coefficients de transport. On considère un ensemble de particules de diamètre  $d$  et de densité  $\rho_p$ . Une hypothèse de base pour la théorie cinétique est que les particules interagissent uniquement lors de collisions binaires et instantanées. Pour décrire la densité du milieu granulaire nous utiliserons dans la suite la distance moyenne interparticule  $s$  plutôt que la compacité  $\nu$ . La relation entre  $s$  et  $\nu$  se trouve en écrivant simplement qu'une particule occupe un volume proportionnel à  $(s + d)^3$  et que pour  $s = 0$  on a  $\nu = \nu_m$ . On trouve alors :

$$\frac{\nu}{\nu_m} = \frac{1}{(1 + s/d)^3} \quad (1.25)$$

L'hypothèse de milieu dense en terme de distance interparticule signifie  $s \ll d$ . Elle nous permet de nous affranchir des effets de compressibilité. Nous allons donc nous intéresser à un gaz de particules proches les unes des autres, qui s'agitent et se cognent dans la cage formée par leurs voisines.

Avec ces hypothèses on peut écrire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour ce gaz en fonction des grandeurs moyennes que sont la densité du milieu :  $\rho = \rho_p \nu$ , la vitesse moyenne  $\vec{v}_{moy}$  et la température granulaire  $T$ .

Nous allons raisonner sur les transferts qui ont lieu lors des collisions pour déterminer la dépendance de la pression et de la viscosité avec la densité et la température. Si  $\delta v = \sqrt{T}$  est l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse, alors le temps entre deux collisions pour une particule est égal au temps qu'il faut pour parcourir la distance interparticule  $s$  c'est à dire  $\frac{s}{\delta v}$ . Le nombre de collisions par unité de temps sera donc de l'ordre de  $\frac{\delta v}{s}$ .

Afin de déterminer la pression, il faut considérer le milieu dans un écoulement moyen. Une particule s'agit dans la cage formée par ses voisines et transfère la quantité de mouvement  $m\delta v$  à chaque collision. La pression est la contrainte qui résulte de ces transferts :

$$P \simeq \frac{m\delta v \times \delta v/s}{d^2} \quad (1.26)$$

soit :

$$P \simeq \rho_p \frac{d}{s} T \quad (1.27)$$

On retrouve la variation linéaire de la pression avec la température du gaz.

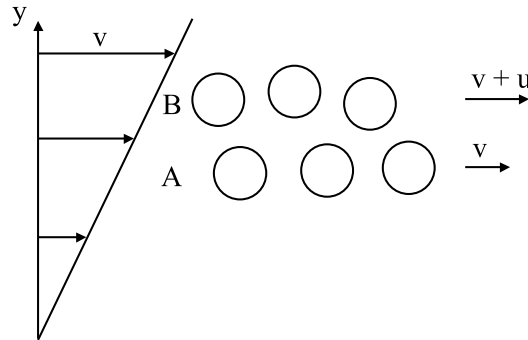


FIG. 1.10 – Gradient de vitesse uniforme pour le calcul de la viscosité.

Pour obtenir l'expression de la viscosité  $\eta$  pour un écoulement rapide, on considère un gradient de vitesse uniforme  $dv/dy = \dot{\gamma} = Cst$  (Fig 1.10). Une



particule de la couche A possède une vitesse relative  $u = d\dot{\gamma}$  par rapport à la couche B. Elle transfère sa quantité de mouvement  $mu$  lors de la collision avec la couche B. La contrainte tangentielle  $S = \eta\dot{\gamma}$  qu'exerce la couche A sur la couche B est donc :

$$\tau \simeq \frac{mu \times \delta v/s}{d^2} \quad (1.28)$$

On obtient donc pour la viscosité :

$$\eta \simeq \rho_p d^2 \frac{\sqrt{T}}{s} \quad (1.29)$$

La dépendance avec la racine carré de la température est celle des gaz.

Dans le cas du cisaillement simple, la vitesse s'écrit  $\vec{v} = \dot{\gamma}y\vec{e}_x$ . On cherche une solution pour laquelle la température est uniforme dans l'échantillon. L'équation de l'énergie se réduit alors à l'équilibre entre travail des forces visqueuses et dissipation ce qui nous donne pour la température  $T \propto \dot{\gamma}^2$ . On peut alors montrer que la pression  $P$  et la contrainte de cisaillement  $S$  s'écrivent :

$$P = f_1(\nu)\rho_p d^2 \dot{\gamma}^2 \quad (1.30)$$

$$S = f_2(\nu)\rho_p d^2 \dot{\gamma}^2 \quad (1.31)$$

où les  $f_i$  sont des fonctions de la compacité qui divergent lorsque  $\nu \rightarrow \nu_{max}$ .

Cette configuration simple met en évidence le couplage entre la température et l'écoulement. Plus on cisaille un milieu, plus la température d'équilibre est grande, et donc la pression et la viscosité sont grandes.

L'expérience a été réalisée en 1954 par Bagnold [13] bien avant le développement de la théorie cinétique. L'expérience consiste en une cellule de type Couette (deux cylindres concentriques) remplie d'une suspension de particules dans un fluide iso densité. Le cisaillement est induit par la rotation d'un des deux cylindres, et des capteurs aux parois mesurent alors la contrainte tangentielle et normale. A faible cisaillement, le comportement est de type visqueux. Par contre, à fort cisaillement les collisions entre grains deviennent prépondérantes et Bagnold trouve alors un régime collisionnel où la pression et la contrainte de cisaillement sont décrites par les équations précédentes. Il définit aussi un frottement dynamique  $\frac{S}{P} = \tan(\phi_D)$ , où  $\phi_D(\nu)$  est l'angle de frottement dynamique.

## 1.8 Écoulements denses

Les écoulements denses de grains peuvent être considérés comme la phase "liquide" des matériaux granulaires. Le régime d'écoulement dense fait l'objet à l'heure actuelle de nombreuses recherches ; les équations constitutives

ne sont pas encore établies [118, 146, 150]. Toutefois, notre étude ne portant que sur le cisaillement (plan et annulaire) et le plan incliné, nous nous contenterons ici de présenter quelques résultats marquants observés dans ces trois géométries. Nous renvoyons aux références [118, 146] pour une revue détaillée des six géométries d'écoulement précédentes.

### 1.8.1 Cellules de Cisaillement

Le cisaillement plan sans gravité est la géométrie la plus simple que l'on peut imaginer. L'écoulement est obtenu entre deux parois rugueuses parallèles. A cause de la gravité, il est difficile d'obtenir un système homogène expérimentalement [79, 173], toutefois ceci est possible numériquement. La plupart des résultats de la littérature sont obtenus par simulation numérique en imposant la vitesse (sauf [194] où la contrainte est imposée) et en mesurant la contrainte de cisaillement [3, 89, 176, 197, 188, 12]. La plupart des simulations sont bidimensionnelles, sauf [29].

La cellule de cisaillement annulaire est la géométrie classique utilisée pour l'étude rhéologique des fluides complexes. Les matériaux granulaires ont fait l'objet à la fois d'études expérimentales [18, 24, 130, 86, 193, 119] et numériques [112, 175]. Tardos [187] mesure et discute des contraintes au sein du matériau. Il ressort de ces études que le profil de vitesse est localisé près du cylindre intérieur. Les ajustements avec des fonctions exponentielles sont possibles, par contre, pour des particules qui ne sont pas sphériques un ajustement avec une fonction gaussienne est préférable [130].

### 1.8.2 Plan incliné

Les écoulements sur un plan incliné sont des événements que l'on rencontre souvent parmi les écoulements géophysiques. Une revue détaillée des études expérimentales et numériques pourra être consultée dans [150, 11]. En outre, deux études numériques récentes et très complètes ont été effectuées par Ertas et Silbert [180, 177, 179, 65, 178] (systèmes de l'ordre de 10000 sphères assez élastiques en 2D ou 3D) et par Prochnow [150] (systèmes de l'ordre de 5000 disques rigides en 2D).

La première observation est l'existence d'un seuil d'écoulement. En effet, un empilement de grains ne peut être incliné que jusqu'à un angle  $\theta_{start}$  dit angle de stabilité maximale ou encore angle statique (c'est-à-dire correspondant à une transition statique-dynamique), au-delà duquel se déclenche une avalanche. L'inclinaison est alors réduite à une valeur inférieure  $\theta_{stop}$ , angle de repos ou encore angle dynamique (c'est-à-dire correspondant à une transition dynamique-statique). L'écart entre ces deux angles est de quelques degrés. Les valeurs typiques vont de  $25^\circ$  (billes de verre) à  $40^\circ$  (sable anguleux). L'existence de ces deux angles met en évidence la nature hystérétique des matériaux granulaires. Sur un plan incliné, l'écoulement d'une fine couche

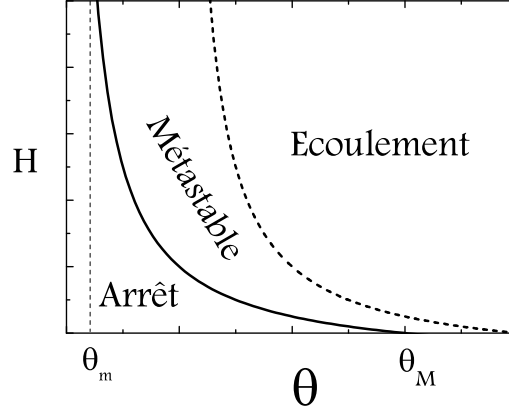


FIG. 1.11 – Épaisseur d'arrêt ( $H_{Stop}(\theta)$  en trait plein) et de démarrage ( $H_{Start}(\theta)$  en tireté) en fonction de  $\theta$ .

(dont l'épaisseur  $H$  est de l'ordre de grandeur d'une dizaine de grains) s'arrête pour un angle d'inclinaison  $\theta$ . Ceci permet de tracer la courbe  $H_{stop}(\theta)$  (la hauteur d'arrêt en fonction d'un angle d'inclinaison donné) [148, 54, 143]. Cette courbe dépend de la rugosité du socle sur lequel a lieu l'écoulement [75]. Les deux courbes  $H_{Stop}(\theta)$  et  $H_{Start}(\theta)$  de la figure 1.11 divisent l'espace des paramètres  $(H, \theta)$  en trois régions : une région où l'écoulement est impossible ( $H < H_{Stop}$ ), une région métastable où il peut exister soit une couche en écoulement, soit une couche statique ( $H_{Stop} < H < H_{Start}$ ) et une région où l'écoulement est obligatoire ( $H > H_{Start}$ ). Dans le régime d'écoulement, l'écoulement est stationnaire et uniforme pour des inclinaisons modérées et il devient accéléré pour des inclinaisons plus importantes.

En dehors des caractéristiques mécaniques des grains, l'écoulement est gouverné par trois paramètres : l'inclinaison, le débit (et le mode d'alimentation) et la rugosité du socle. Sur un socle lisse, l'écoulement est localisé à la paroi, et n'est ni stationnaire ni uniforme [111, 62, 98, 140, 185].

Dans le régime d'écoulement stationnaire uniforme, si l'on suppose un régime collisionnel (équations 1.30 et 1.31), les équations 1.19 et 1.20 permettent de prédire le profil de vitesse. A compacité constante, la pression de la couche de grain est proportionnelle à  $H - y$ , on a alors  $\frac{dV}{dy} \sim \sqrt{H - y}$  ce qui donne un profil de vitesse  $V(y)$  variant en  $y^{3/2}$ , de type Bagnold. Les simulations numériques [150, 180, 178] indiquent que le profil de vitesse est effectivement de ce type :

$$\frac{v(y)}{\sqrt{gd}} = A(\theta) \frac{(H^{3/2} - (H - y)^{3/2})}{d^{3/2}} \quad (1.32)$$

mais le préfacteur  $A(\theta)$  met en évidence un effet de seuil. Les mesures systématiques de la vitesse moyenne  $U = \langle v(y) \rangle$  ont permis de mettre en évidence une loi d'échelle entre le nombre de Froude ( $\frac{U}{\sqrt{gH}}$ ) et la hauteur de l'écoulement adimensionnée par  $H_{stop}$  [150, 179, 143] :

$$\frac{U}{\sqrt{gH}} = \alpha + \beta \frac{H}{H_{stop}(\theta)} \quad (1.33)$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent des caractéristiques du système. Notons que pour les billes de verre  $\alpha = 0$ .

Étant donné que  $\tan \theta = \mu^*$ , le frottement effectif est obtenu en remplaçant  $\theta$  dans (1.33) et en inversant la relation [148, 143]. Il est alors possible de mesurer le frottement effectif en fonction du nombre de Froude. Toutefois, étant donné que la loi d'échelle précédente prédit une vitesse non nulle pour  $H = H_{Stop}$ , la mesure ne peut se faire pour  $Fr < \beta$ . Il faut alors proposer un raccordement [142]. Pour une hauteur donnée, le frottement varie notablement avec le nombre de Froude. Il augmente avec la vitesse et tend vers une valeur asymptotique pour les grandes vitesses (Fig. 1.12). Par contre, il diminue avec  $H$ .

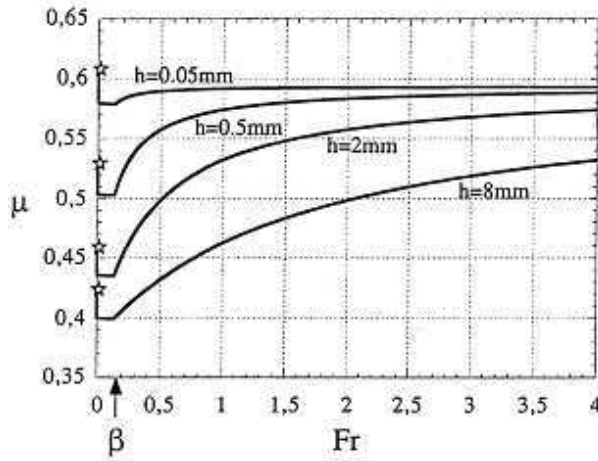


FIG. 1.12 – Variation du coefficient de frottement avec le nombre de Froude  $Fr$  pour différentes épaisseurs  $H$ , dans le cas de billes de verre sur plan incliné [148].

Des approches hydrodynamiques proposées récemment [148, 61, 172] permettent de décrire l'écoulement sur un plan incliné et l'écoulement sur un tas. Savage et Hutter [172], s'inspirant des équations de Saint Venant pour

les couches minces, ont proposé une approche hydrodynamique consistant à moyenniser sur l'épaisseur les équations de conservation. En faisant ainsi, le seul paramètre qui reste inconnu est le coefficient de frottement effectif  $\mu^*$  au socle. La connaissance de la variation du frottement effectif est donc une information importante pour la modélisation des écoulements sur plan incliné [148, 143] et pour des applications à des cas réels [82, 132, 83].

L'exemple des écoulements sur plan incliné montre que des approches hydrodynamiques permettent de décrire les écoulements denses jusqu'à l'arrêt. Cependant, leur généralisation à d'autres géométries (socle meuble, conduite verticale...) reste un objet de débat. Par ailleurs, ces approches ne décrivent pas les mécanismes physiques responsables du blocage.

## 1.9 Blocage

Quelles sont les variables pertinentes vis à vis du blocage des matériaux granulaires ? La transition de phase fluide-solide usuelle est bien décrite par la thermodynamique, et est gérée par la température et/ou la densité.

Si, en prolongeant les intuitions thermodynamiques, on peut naturellement retenir la densité du matériau granulaire, en revanche, la température thermodynamique devra être remplacée par une température effective.

Si les fluctuations de vitesse constituent une variable naturelle de la description des écoulements granulaires dilués, leur rôle est plus difficile à modéliser dans le cas des écoulements denses où existent de nombreux contacts maintenus. La définition même de ces fluctuations pose question [156], car elles dépendent de l'échelle d'analyse. A l'échelle de l'écoulement dans son ensemble, on mesurera les fluctuations associées à des mouvements de blocs, dont les particules ont des mouvements et des vitesses corrélés [129, 58]. A l'échelle d'un grain, les fluctuations de vitesse sont associées aux mouvements de la particule dans sa cage, formée par ses plus proches voisines, mouvements analogues à ceux d'une molécule d'un liquide soumise à l'agitation thermique. La température effective d'un milieu granulaire pourrait donc être associée à des mécanismes de réarrangement des grains, par exemple sous l'effet de vibrations [55].

Mais surtout, la transition fluide-solide dépend aussi des sollicitations mécaniques. Il a ainsi été récemment proposé [106] d'ajouter une troisième variable responsable de la transition : c'est l'état de contrainte auquel est soumis le matériau. C'est ainsi qu'un matériau granulaire se mettra à couler lorsque le critère de rupture de Coulomb est atteint. Ceci fournit alors un diagramme de phase conceptuel pour le blocage des matériaux granulaires (Fig. 1.13).

Cette dernière observation pour les matériaux granulaires secs vaut plus généralement pour des systèmes constitués d'assemblées d'éléments en interaction (particules, grains, bulles), c'est à dire des pâtes au sens large

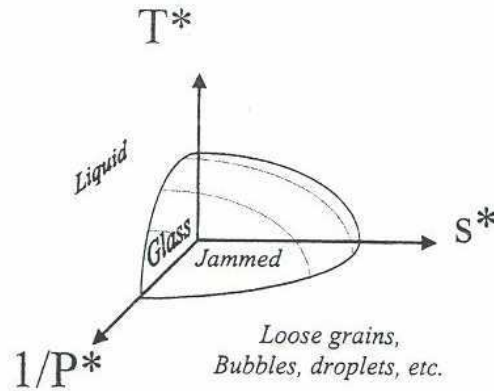


FIG. 1.13 – Diagramme de phase schématique. Extrait de [107]

(suspensions colloïdales, mousses, émulsions, suspensions concentrées non browniennes...). L'idée usuelle est que ces matériaux sont des fluides à seuil, c'est à dire qu'ils ne s'écoulent pas pour une contrainte inférieure à une contrainte seuil, puis commencent à s'écouler au-delà, mais avec une vitesse qui augmente depuis zéro.

Passons aux mécanismes du blocage. Dans une situation d'écoulement donnée, la distribution des contraintes macroscopiques est connue au sein du matériau en écoulement. Le matériau granulaire est alors considéré comme un milieu continu. Nous avons vu cependant qu'à l'échelle microscopique du réseau de contact, le matériau est loin d'être homogène : le réseau de contacts (coordinnence, forces de contact, mobilisation du frottement) est très fluctuant, à la fois dans l'espace et dans le temps.

Il est clair que c'est à l'échelle de ce réseau de contact que se jouent les mécanismes de blocage. Sous certaines sollicitations, les grains vont former des chaînes de force le long des directions de compression [68]. Ce réseau de chaînes de forces peut alors supporter la contrainte de cisaillement indéfiniment. Ce squelette solide est cependant extrêmement sensible aux perturbations, et des réarrangements sont susceptibles de se produire sous l'effet de petits incréments des contraintes [40]. Ce constat a donné lieu à la définition des matériaux "fragiles" [32, 34, 33], qui englobe une classe plus large que les matériaux granulaires, puisqu'il s'agit des matériaux dont la structure interne est susceptible de se bloquer sous contraintes dans des états instables. Cela englobe les suspensions colloïdales, les mousses et les émulsions. La validité du diagramme conceptuel de blocage pour l'ensemble de ces matériaux fragiles est actuellement l'objet de nombreuses recherches.

Des tentatives ont été faites pour décrire cette transition avec des outils de la physique statistique, en faisant l'analogie avec les transitions de phase à l'équilibre et la transition vitreuse (divergence du temps de relaxation, phénomènes de vieillissement) [192, 181].

D'autres travaux ont analysé les mécanismes de blocage à partir de considérations géométriques (formation de voûtes au voisinage d'un orifice) [198, 189] ou à partir des fluctuations. Le modèle proposé par Le-maître [105, 104], par analogie avec la transition élastoplastique dans les solides amorphes, repose sur l'idée que le cisaillement macroscopique résulte de l'activation des réarrangements locaux à l'échelle mésoscopique. La fréquence de mise à jour des processus microscopiques est déterminée par les fluctuations de vitesse. Dans un autre modèle, inspiré du modèle de Eyring pour la viscosité des liquides [147], les réarrangements en un certain point de l'écoulement sont activés par les réarrangements dans une autre zone, et c'est l'échelle des fluctuations de contrainte qui joue le rôle de la température.

Nous voulons enfin signaler des travaux qui concernent plutôt l'analyse de la micromécanique du matériau granulaire. Ainsi, le blocage se signifierait par l'apparition d'un plateau dans la distribution des faibles forces [137]. La thèse de Staron [182] analyse plutôt les mécanismes microscopiques de déblocage, et montre que pour une contrainte critique, une certaine population des contacts, qualifiés de "sensibles" (et définis par la façon dont le frottement est mobilisé), percolent, ce qui déclenche une avalanche.

## 1.10 Bilan

La mise en évidence de ce nouveau type de transition de phase dans les matériaux fragiles, et du diagramme de phase généralisé en fonction des trois paramètres compacité, fluctuations et contraintes, a suscité de nombreuses recherches ces toutes dernières années dans la communauté physicienne [107].

Il n'en reste pas moins qu'une description semi-macroscopique du phénomène de blocage dans les matériaux granulaires fait toujours défaut. Ainsi, la réponse à la question "Qu'est ce qui gère le blocage?" reste encore assez confuse.

Nous souhaitons ainsi éclaircir le rôle du type de sollicitation appliqué au matériau (vitesse ou force appliquée, distribution des contraintes, conditions aux limites), déterminer les bonnes variables qui gèrent le comportement près de la transition. Nous insisterons en particulier sur l'étude des nombres sans dimension, tel le frottement effectif.

Nous pensons qu'une telle étude doit mêler des informations macroscopiques obtenues expérimentalement (rhéométrie classique, vitesse à la surface libre d'un écoulement sur plan incliné), et des informations microscopiques à l'intérieur du matériau (par IRM) et à l'échelle du réseau de contact (par simulations numériques discrètes).

La première partie de notre étude concerne le cisaillement à vitesse imposée, et va mettre en évidence les grandeurs physiques nécessaires à la compréhension du comportement du matériau près de l'arrêt. La deuxième partie aborde le comportement à force imposée, ce qui permet d'étudier directement la transition fluide-solide. Le manuscrit se termine par une synthèse de nos résultats, et par quelques pistes de modélisation.





Première partie

Cisaillement à vitesse imposée



**D**ans cette partie, on se propose d'aborder le problème du blocage et du frottement des écoulements granulaires en étudiant le cisaillement à vitesse imposée par simulation numérique discrète et une expérience de rhéométrie. Dans ce cas, le matériau ne se bloque pas ; toutefois, cette situation a l'avantage de créer des écoulements ayant une vitesse aussi faible que souhaitée. Cela permet d'étudier le matériau pour de faibles taux de déformation (c'est à dire dans le régime quasi statique) et ainsi de pouvoir étudier son comportement lorsqu'il est proche de l'arrêt.

Après quelques remarques préliminaires sur les systèmes étudiés (chapitre 2), nous commençons par étudier la géométrie de cisaillement la plus simple possible (à savoir le cisaillement plan sans gravité) pour laquelle la distribution des contraintes est homogène à l'intérieur de la couche cisailée (chapitre 3). La possibilité de bien contrôler l'état de cisaillement du matériau va permettre une mesure détaillée de la loi de comportement. Remarquons que cette géométrie modèle, d'intérêt pour la tribologie [88] et pour la compréhension du glissement des failles à l'origine des tremblements de terre [3, 128], a déjà fait l'objet de nombreuses études [29, 81, 176, 59, 197, 188, 12, 48].

Dans un deuxième temps (chapitre 4), nous allons étudier l'effet d'une hétérogénéité des contraintes, à travers deux situations, le cisaillement plan avec gravité et le cisaillement annulaire. Dans le premier cas, la contrainte de cisaillement est constante et la pression varie, alors que dans le second, c'est l'inverse. Nous montrerons alors dans quelle mesure les résultats mis en évidence en cisaillement homogène restent valables.



## Chapitre 2

### Remarques préliminaires

**N**ous commençons par présenter les deux systèmes étudiés (Fig. 2.1). Bien que les géométries soient différentes, ces deux systèmes partagent de nombreuses caractéristiques en commun. Il s'agit de milieux granulaires bidimensionnels soumis à un cisaillement à vitesse imposée, en l'absence de gravité (la gravité sera ajoutée au paragraphe 4.2).

Le matériau granulaire est constitué d'une assemblée de  $n$  disques polydisperses de diamètre moyen  $d$  ( $\pm 20\%$ , sauf au paragraphe 3.7.3), de masse moyenne  $m$  et de masse volumique  $\rho_p$ . Ces particules sont caractérisées par un coefficient de frottement  $\mu$  (on parlera de frottement intergranulaire ou microscopique, par opposition au frottement effectif ou macroscopique) et un coefficient de restitution  $e$ .

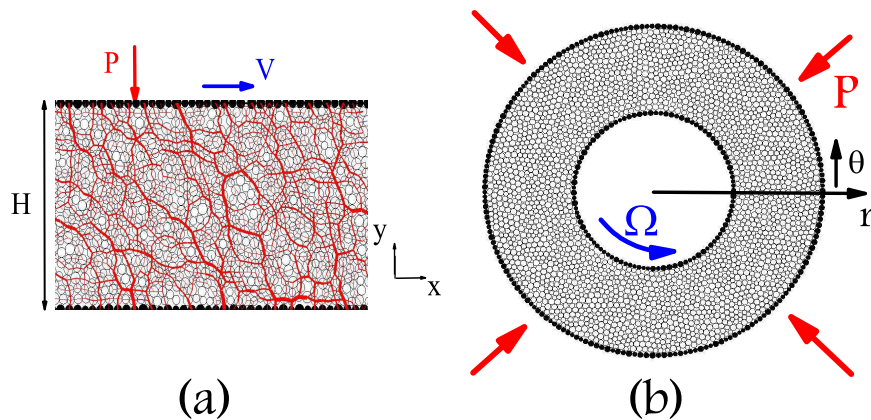


FIG. 2.1 – Les deux géométries de cisaillement étudiées. (a) Cisaillement plan. (b) Cisaillement annulaire.

Dans la géométrie de cisaillement plan, le matériau est cisailé entre deux parois rugueuses parallèles distantes de  $H$ . Une des parois est fixée et l'autre se déplace à une vitesse imposée  $V$ . On note  $x$  la direction de l'écoulement et  $y$  la direction orthogonale. Des conditions aux limites périodiques sont appliquées selon la direction  $x$  de l'écoulement : les écoulements sont simulés à l'intérieur d'une fenêtre de longueur  $L$  (toujours supérieure ou égale à 40 grains). Cette taille nous paraît suffisante pour ne pas avoir d'effet de longueur de la cellule ; c'est du moins ce qui est observé dans le cas d'un plan incliné bidimensionnel [150].

Dans le cas du cisaillement annulaire, on simule tout le système : il n'y a pas de conditions aux limites périodiques. Le matériau est cisailé entre deux anneaux rugueux de rayon  $R_i$  et  $R_e$  ( $H = R_e - R_i$ ). On impose la vitesse à la paroi de l'anneau intérieur (via la vitesse de rotation  $\Omega$ ). On utilise alors les coordonnées cylindriques  $r$  et  $\theta$ .

Dans les deux cas, la rugosité des parois est constituée de grains jointifs ayant les mêmes caractéristiques que les grains en écoulement (même polydispersité et mêmes propriétés mécaniques). En cisaillement plan, l'origine de la coordonnée dans la direction orthogonale à l'écoulement est prise au centre des particules collées à la paroi fixe. En annulaire, elle est prise au centre du cylindre intérieur.

Une caractéristique importante de nos simulations est que la pression  $P$  est contrôlée (nous évoquerons plus tard des simulations menées par une autre équipe, cette fois-ci à volume imposé). Les grains exercent une force normale  $N$  sur les parois. Le contrôle de la pression  $P$  se fait en autorisant la dilatation du matériau ( $H$  n'est pas fixée) par le mouvement de l'une des parois (la paroi mobile dans le cas du cisaillement plan et la paroi fixe dans le cas du cisaillement annulaire). A chaque pas de temps, la vitesse normale  $v_n$  de cette paroi est déterminée de la façon suivante :  $v_n = (Pl - N)/g_p$ , où  $g_p$  est un coefficient d'amortissement visqueux et  $l$  la longueur de la paroi ( $l = L$  pour le cisaillement plan et  $l = 2\pi R_e$  pour le cisaillement annulaire). L'équilibre est obtenu quand  $P = N/l$ . L'ensemble des paramètres du système est résumé dans le tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Paramètres des systèmes simulés. Grandeurs adimensionnées (voir § 2.2).

	$n$	$L$	$R_i$	$R_e$	$H$	$g_p$
cisaillement plan	900 - 5000	40 - 100	-	-	20 - 100	100
cisaillement annulaire	2700	-	10	30	20	100

## 2.1 Méthode de simulation numérique

Le cisaillement du matériau est simulé par la méthode de dynamique moléculaire adaptée aux milieux granulaires [49] (voir annexe A). Le modèle de contact est caractérisé par le coefficient de restitution normal  $e$  (défini pour les collisions binaires) et le coefficient de frottement  $\mu$ . En accord avec le modèle de Hertz décrit au chapitre 1, la force de contact normale entre deux grains est la somme de deux termes :

- Une force élastique linéaire  $F_n^e = k_n \delta_n$ , où  $\delta_n$  est la déformation normale, et  $k_n$  est le coefficient de raideur normale. Cette force est nulle si le contact est ouvert.
- Une force de dissipation visqueuse  $F_n^v = g_n \dot{\delta}_n$ , décrivant l'inélasticité ( $g_n$  est un coefficient d'amortissement visqueux).

La force de contact tangentielle est une force élastique linéaire limitée par le critère de Coulomb :

$$\begin{cases} F_t = & k_t \delta_t \\ \dot{\delta}_t = & \begin{cases} |v_t| - \mu F_n^e \\ 0 \end{cases} \end{cases} \text{ si } |k_t \delta_t| \begin{cases} < \\ \geq \end{cases} \mu F_n^e$$

où  $\delta_t$  est le déplacement tangentiel relatif,  $v_t$  la vitesse relative tangentielle et  $k_t$  le coefficient de raideur tangentiel (on choisit toujours  $k_t = k_n/2$  [29]). La valeur du coefficient d'amortissement  $g_n$  est directement reliée au coefficient de restitution  $e$  et au coefficient de raideur normale  $k_n$  par la relation  $g_n = 2\alpha\sqrt{mk_n}$ , où  $\alpha$  est le coefficient de dissipation  $\alpha = -\ln(e)/(\pi^2 + \ln^2(e))^{\frac{1}{2}}$ . Les paramètres mécaniques des particules sont résumés dans le tableau 2.2.

TAB. 2.2 – Paramètres du matériau simulé. Grandeurs adimensionnées (voir § 2.2).

	polydispersité <sup>a</sup>	$\mu$	$e$	$k_n$ <sup>b</sup>
cisaillement plan	$\pm 0\%$ à $\pm 50\%$	0 à 0.8	0.1 - 0.9	$10^3$ à $10^5$
cisaillement annulaire	$\pm 20\%$	0.4	0.1	$10^4$

<sup>a</sup>Sauf précision, les résultats sont présentés pour une polydispersité de  $\pm 20\%$ .

<sup>b</sup>Sauf précision, les résultats sont présentés pour  $k_n = 10^4$ .

Le temps de collision est donné par  $\tau_c = \sqrt{\pi^2 m / (2k_n(1 - \alpha^2))}$ . Le pas de temps de la simulation est choisi égal à  $\tau_c/100$ .



## 2.2 Analyse dimensionnelle

Les résultats sont systématiquement présentés en grandeurs adimensionnées, à partir des échelles naturelles de longueur ( $d$ ), de temps ( $\tau_c$ ) et de masse ( $m$ ) du système simulé.

En plus des paramètres locaux décrivant l'interaction entre les grains ( $\mu$  et  $e$ ), le système est caractérisé par trois nombres sans dimension :

- i) Le premier  $\frac{g_p}{\sqrt{mk_n}}$  est associé au mouvement normal de la paroi contrôlant la pression. Une valeur petite signifie que l'échelle de temps des fluctuations de  $H$  est imposée par le matériau et non par la paroi, et que la paroi "colle" au matériau.
- ii) Le second  $\frac{P}{k_n}$  décrit la rigidité des grains. Il correspond aussi à la déformation  $\delta_n$  de grains soumis à une pression de confinement  $P$ .
- iii) Le troisième  $\frac{V}{H} \sqrt{\frac{m}{dP}}$  réunit les trois paramètres globaux décrivant le cisaillement (la vitesse  $V$ , la pression  $P$  et l'épaisseur  $H$ ). L'état de cisaillement dépend uniquement de la combinaison de ces trois paramètres.

Le premier nombre sans dimension est toujours petit dans nos simulations (sa valeur maximale est 0.6). Nous n'avons pas étudié son influence car nous considérons qu'elle est faible dans cette gamme (effet de matériau plus que de paroi).

Sauf au paragraphe 3.7.3, le choix de  $P$  et de  $k_n$  est tel que  $P/k_n < 2.5 \cdot 10^{-3}$ . Il a été montré que l'on se trouve alors dans la limite des grains rigides [167], c'est à dire que le comportement macroscopique ne devrait plus dépendre de ce nombre. Nous verrons cependant son influence sur certaines grandeurs locales (§ 3.5.2).

Dans la suite de notre étude, nous allons donc nous intéresser à l'effet du troisième nombre sans dimension et des paramètres mécaniques  $e$  et  $\mu$ .

## 2.3 Nombre inertiel $I$

Le troisième nombre sans dimension caractérise l'état de cisaillement. Il s'agit d'un nombre global, à l'échelle du système. Nous allons maintenant construire un analogue local.  $V/H$  correspondant au taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , on va donc définir le nombre sans dimension suivant :

$$I = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{P}} \quad (2.1)$$

Ce nombre correspond en fait à la racine carrée du rapport entre l'inertie des grains  $ma$  (où  $a$  est l'accélération) et la force moyenne  $F$  subie par les grains.  $a$  est estimée par  $d\dot{\gamma}^2$  et  $F$  par  $Pd^2$ , de sorte que  $ma/F = m\dot{\gamma}^2/Pd$ . Avant adimensionnement, on a donc en dimension trois (avec  $m = \rho_p \frac{\pi d^3}{6}$ ) :

$$I = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{m}{Pd}} \quad (2.2)$$

En dimension deux, la force est estimée par  $Pd$ , dans ce cas on a (avec  $m = \rho_p \frac{\pi d^2}{4}$ ) :

$$I = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{m}{P}} \quad (2.3)$$

Ce nombre sans dimension mesure le rôle de l'inertie et sera donc nommé nombre inertiel dans la suite. Nous allons voir qu'il joue un rôle essentiel pour l'étude de nos systèmes. Ainsi, une petite valeur de  $I$  (petit  $V$  et/ou grand  $P$ ) correspond à un régime où l'inertie des grains ne compte pas : c'est le régime "quasi-statique". A l'inverse, une grand valeur de  $I$  (petit  $P$  et/ou grand  $V$ ) correspond au régime "inertiel" ou encore "dynamique". Faire varier  $I$  permet d'étudier la transition entre ces deux régimes. Ainsi la gamme de nombre inertiel exploré s'étend de  $6 \cdot 10^{-4}$  à 0.3.

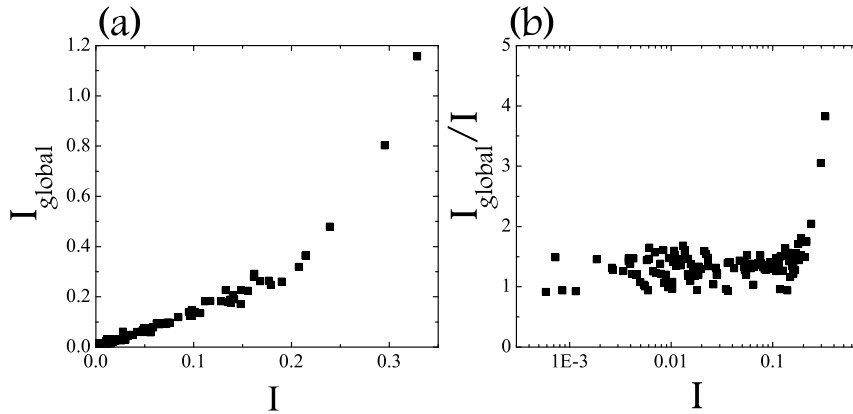


FIG. 2.2 – Comparaison entre  $I$  et  $I_{\text{global}}$  pour l'ensemble des systèmes étudiés en cisaillement plan. (a)  $I_{\text{global}}$  fonction de  $I$ . (b) Rapport des deux mesures du nombre inertiel en fonction de  $I$ . Échelle log.

Dans un système homogène, en l'absence de vitesse de glissement à la paroi, les deux définitions, locale et globale, sont équivalentes, mais dans un système hétérogène, il faut prendre en compte les variations du nombre inertiel local  $I(y)$ . On doit donc distinguer a priori :

$$I(y) = \frac{\dot{\gamma}(y)}{\sqrt{P(y)}} \quad (2.4)$$

$$I_{global} = \frac{V/H}{\sqrt{P}} \quad (2.5)$$

Dans le cas particulier du cisaillement plan, où la pression est constante dans la couche, on définit  $I = \langle I(y) \rangle$ , la valeur moyenne étant prise au cœur du matériau, en éliminant les 5 premières couches près des parois. La figure 2.2 compare  $I$  et  $I_{global}$ . Pour les valeurs de  $I$  inférieures à 0.2 (on verra dans la suite que c'est la gamme qui nous intéresse), les deux grandeurs sont à peu près égales. La petite différence que l'on observe est due à une petite vitesse de glissement à la paroi. L'écart mesure la différence entre le taux de cisaillement moyen au cœur de la couche et le taux de cisaillement macroscopique mesuré par  $\frac{V}{H}$ . Pour  $I > 0.2$ , l'écart augmente considérablement. C'est le signe que le système n'est plus homogène. On en aura la preuve lors de la mesure des profils de vitesse au paragraphe 3.1.

Dans la suite, on choisira de travailler soit avec  $I$  dans le cas d'un cisaillement homogène (cisaillement plan sans gravité), soit avec  $I(y)$  dans le cas d'un cisaillement hétérogène (cisaillement plan avec gravité, cisaillement annulaire).

Remarquons qu'il est possible de construire d'autres nombres sans dimension. Ainsi, Campbell [29] propose  $\frac{k_n}{\dot{\gamma}}$ , ce qui est lié au rapport des deux nombres que l'on a défini précédemment  $\frac{k_n}{\dot{\gamma}} \sim \frac{k_n}{P} \frac{1}{I^2}$ . Dans le cas du plan incliné, certains auteurs proposent le nombre de Coulomb  $C_0 = \frac{\dot{\gamma}^2 d^2}{gH}$  [43], où  $g$  est la gravité et  $H$  l'épaisseur de la couche de grains.

## 2.4 Préparation

Le premier type de préparation (celui que l'on a utilisé le plus souvent) consiste à partir d'une configuration initiale où les disques sont disposés aléatoirement, sans contact et immobiles entre les deux parois éloignées, ce qui permet d'atteindre une compacité moyenne de 0.5, puis on commence la compression tout en cisillant à faible vitesse. Le milieu se compacte jusqu'à ce que la réaction exercée par les grains sur les parois égale la pression imposée.

Le deuxième type de préparation consiste à partir d'une compacité très élevée (de l'ordre de 0.81), obtenue par un dépôt aléatoire suivi d'une compaction cyclique sans frottement, puis on introduit le frottement et on impose la vitesse de cisaillement souhaitée.

Ces deux modes de préparation permettent de partir soit d'un état lâche (le premier), soit d'un état dense (le second). Plus ponctuellement, nous avons aussi utilisé un troisième mode de préparation consistant à partir d'un profil de vitesse localisé près de l'une ou l'autre des parois. Nous y reviendrons plus tard.

## 2.5 Recherche d'un état stationnaire

Dans les deux cas, on recherche un état d'écoulement stationnaire, caractérisé par les paliers de l'énergie cinétique totale et de l'épaisseur de l'écoulement (Fig. 2.3). Au bout d'un temps suffisant, les deux types de préparation (lâche ou dense) conduisent au même état stationnaire (même énergie cinétique, même épaisseur, même compacité et même  $I$ ). Il n'y a donc pas d'effet de la préparation sur les caractéristiques macroscopiques de l'écoulement (et il en est de même des caractéristiques microscopiques analysées plus loin). Par contre, l'état stationnaire obtenu dépend fortement du nombre inertiel.

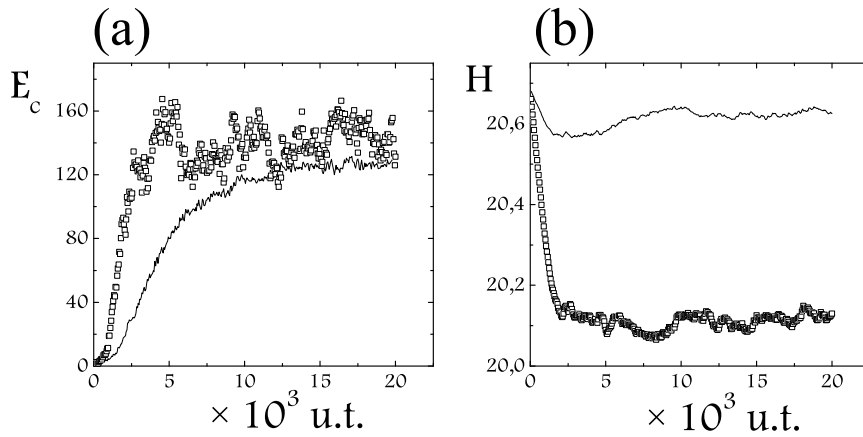


FIG. 2.3 – Influence de  $I$  (carrés  $I = 0.03$ , ligne  $I = 0.1$ ) sur l'évolution temporelle de l'énergie cinétique (a) et de la hauteur de la paroi mobile (b). (Cisaillement plan :  $H = 20$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ )

Lorsqu'un état stationnaire est atteint, la simulation numérique se poursuit sur une durée de plusieurs dizaines de milliers d'unités de temps ( $1 \text{ u.t.} = \tau_c$ ), soit quelques millions de pas de temps. Ceci correspond à un déplacement relatif de deux couches adjacentes de quelques dizaines à quelques milliers de grains, selon le taux de cisaillement appliqué. Dans l'état stationnaire, on considère alors que les grandeurs d'intérêt (positions, vitesses, forces...) ont un comportement moyen indépendant du temps et de la direction de l'écoulement. En conséquence, on procède à une double moyenne, dans l'espace (selon la direction de l'écoulement) et dans le temps (en considérant 200 instants successifs, séparés entre eux de 50 unités de temps).

Ce sont ces méthodes de préparation et de mise en place que nous avons utilisées pour étudier le cisaillement homogène (Chap. 3) et hétérogène (Chap. 4) d'une assemblée de grain.

## Chapitre 3

# Cisaillement homogène : Cisaillement plan sans gravité

**D**ans ce chapitre, nous nous intéressons exclusivement au cisaillement plan sans gravité, c'est à dire à la situation la plus simple d'un cisaillement homogène. L'étude approfondie de cette situation va nous permettre de mesurer la loi de comportement du matériau, et d'obtenir des informations sur sa microstructure et sur les fluctuations. Dans le chapitre suivant, nous nous demanderons dans quelle mesure ces conclusions restent valables pour une situation de cisaillement hétérogène (cisaillement plan avec gravité, cisaillement annulaire).

Indiquons d'emblée l'un des résultats très importants de ce chapitre : parmi les nombres sans dimension qui gèrent le système, le seul paramètre pertinent pour étudier la rhéologie est le nombre inertiel  $I = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{P}}$ .

### 3.1 Mise en évidence de l'homogénéité

Nous allons commencer par discuter les profils de compacité, vitesse et contraintes.

#### 3.1.1 Compacité

Le profil de compacité  $\nu(y)$  met en évidence une structuration près des parois (*i.e.* le milieu est organisé en couches) (Fig. 3.1 (a)). Mais on remarque toutefois que la compacité reste constante au centre, ce qui permet de définir une compacité moyenne interne  $\langle \nu \rangle$ . Celle-ci augmente légèrement lorsque  $I$  diminue. Nous nous restreignons à l'étude des systèmes denses, correspondant à une compacité moyenne supérieure à 0.7, ou encore à  $I$  inférieur à 0.2.

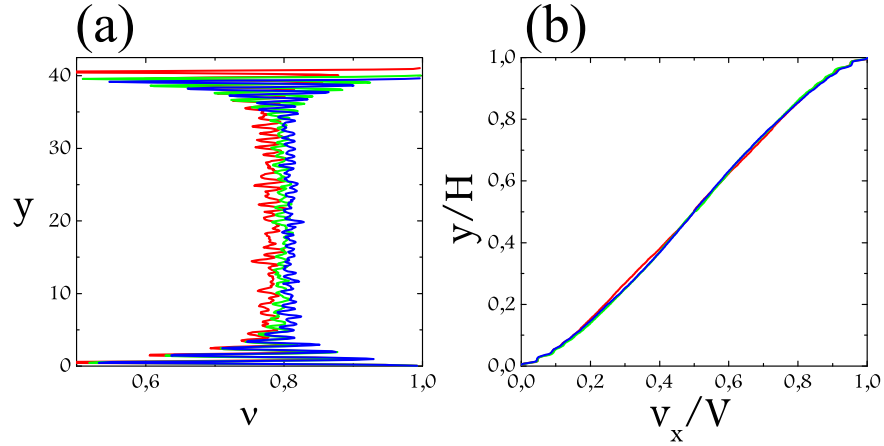


FIG. 3.1 – Profils de compacité  $\nu(y)$  (a) et de vitesse normalisée  $\frac{v_x}{V}$  (b) pour différents  $I$ . En rouge  $I = 1.3 \cdot 10^{-1}$ , en vert  $I = 5 \cdot 10^{-2}$  et en bleu  $I = 10^{-2}$ . ( $H \approx 40$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ )

### 3.1.2 Vitesse

Le profil de vitesse  $v_x(y)$  (Fig. 3.1 (b)) met en évidence le fait que le milieu est entièrement cisailé. Il n'y a pas de localisation de l'écoulement près de la paroi mobile. En fait les profils de vitesse sont quasiment linéaires, sauf dans les régions proches des parois. On a donc un cisaillement homogène.

A partir du profil de vitesse, on détermine le profil de taux de cisaillement (Fig. 3.2 (a)) :  $\dot{\gamma}(y) = dv_x(y)/dy$ . Ayant un profil de vitesse linéaire on obtient un profil de taux de cisaillement constant au centre. On observe toutefois une légère courbure du profil qui correspond aux effets de parois. De la même manière que pour les autres grandeurs, on peut définir une valeur moyenne du taux de cisaillement au centre. C'est cette valeur qui permet le calcul de  $I$ .

Nous pouvons aussi mesurer le profil de vitesse de rotation moyenne  $\omega(y)$  (Fig. 3.2 (b)). On observe la relation simple suivante :

$$\omega(y) = -\frac{1}{2}\dot{\gamma}(y) \quad (3.1)$$

Cette relation est analogue à celle obtenue en hydrodynamique pour un fluide. Elle a été observée dans de nombreuses simulations numériques d'écoulement, tant en 2D qu'en 3D [150, 112, 193, 11, 60, 115, 30, 31], et dans les déformations quasi-statiques (rotation moyenne égale à la demi-distorsion) [27]. Elle a été mise en évidence dans le cas du plan incliné [150]. Ce résultat

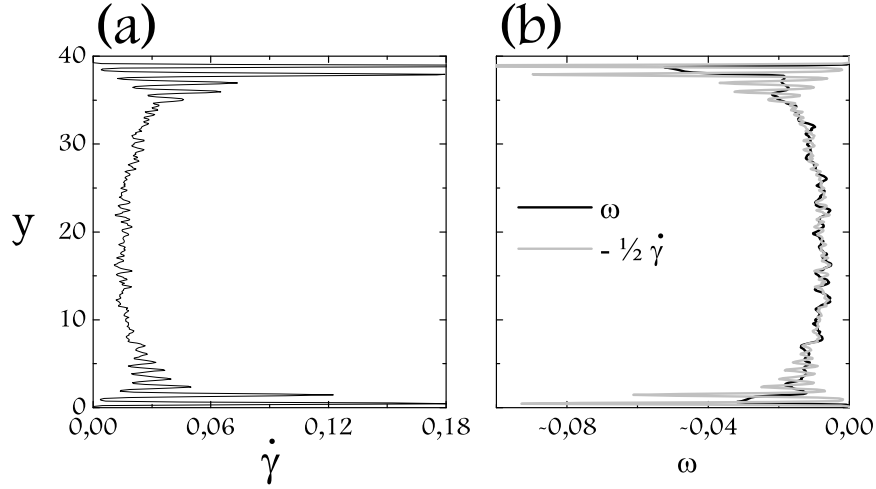


FIG. 3.2 – (a) Profil du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}(y)$ . (b) Profils de vitesse de rotation moyenne  $\omega(y)$  et demi gradient de vitesse de translation. ( $I = 2.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\mu = 0.4$  et  $e = 0.1$ )

semble donc indépendant de la géométrie et caractéristique des écoulements granulaires denses. Des déviations existent cependant dans les toutes premières couches près des parois.

### 3.1.3 Comparaison avec des simulations à volume<sup>1</sup> fixé

La figure 3.3 compare nos résultats (simulations à pression contrôlée PC) avec ceux de simulations à volume fixé VF, menées par Ivan Iordanoﬀ [118, 51, 89, 88], dont les paramètres sont résumés dans le tableau 3.1. Elle montre que les profils ne sont pas affectés par les conditions aux limites. La structuration en couche près des parois pour les simulations PC n'est que le résultat d'une discrétisation plus fine.

TAB. 3.1 – Paramètres des simulations bidimensionnelles à volume fixé [89]

	$n$	$L$	$H$	grains
Volume fixé	900 - 1400	50	15	sphères ( $d \pm 10\%$ )

<sup>1</sup>C'est un abus de langage pour parler de simulation à aire fixée.



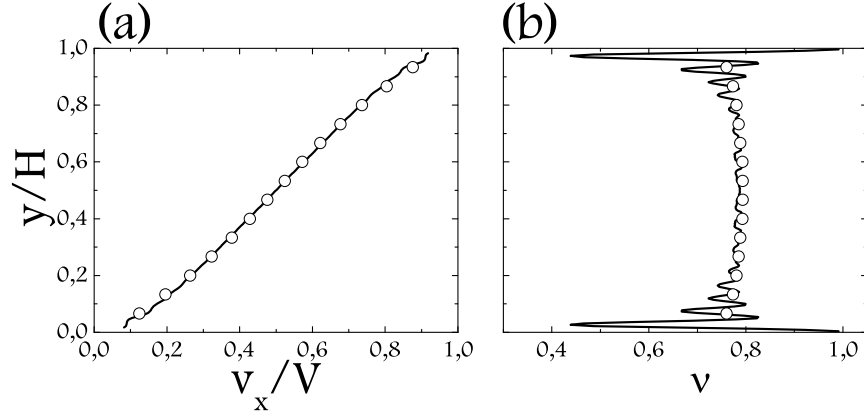


FIG. 3.3 – Comparaison de simulations à volume fixé VF et à pression contrôlée PC (a) Profils de vitesse normalisée. (b) Profils de compacité. Cercle VF  $H = 15, e = 0.8$ . Courbe PC  $H = 20, e = 0.1$ . ( $I = 0.2, \mu = 0$ )

### 3.1.4 Contraintes

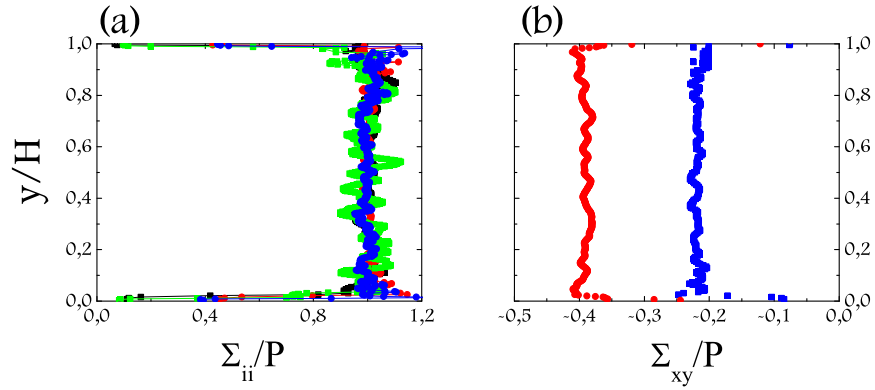


FIG. 3.4 – Profils des composantes du tenseur des contraintes, normalisées par la pression  $P$ , pour différents  $I$ . (a) En noir et en bleu  $\Sigma_{xx}(y)$  et  $\Sigma_{yy}(y)$  pour  $I = 7.3 \cdot 10^{-4}$ . En vert et en rouge  $\Sigma_{xx}(y)$  et  $\Sigma_{yy}(y)$  pour  $I = 2.4 \cdot 10^{-1}$ . (b) En bleu  $\Sigma_{xy}(y)$  pour  $I = 7.3 \cdot 10^{-4}$  et en rouge  $\Sigma_{xy}(y)$  pour  $I = 1.3 \cdot 10^{-1}$ . ( $H = 40, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

Par les mêmes techniques de prise de moyenne que pour la compacité ou la vitesse, on peut calculer les profils des différentes composantes du tenseur des contraintes, selon la formulation de Moreau [126] (voir Annexe B) au sein de l'écoulement.

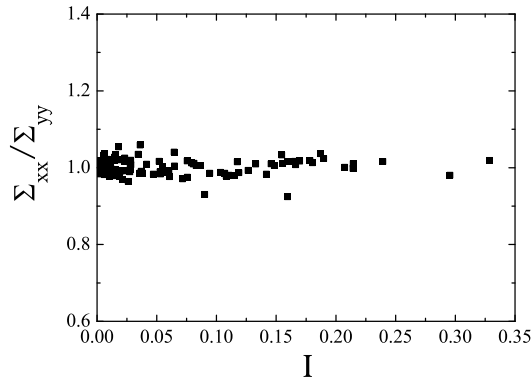


FIG. 3.5 – Variation du rapport des contraintes normales en fonction de  $I$ .

La figure 3.4 représente les profils des composantes  $\Sigma_{xx}$ ,  $\Sigma_{yy}$  et  $\Sigma_{xy}$  du tenseur des contraintes (normalisées par la pression  $P$ ). On observe que le tenseur des contraintes est constant selon  $y$ , comme attendu. Les figures 3.4 (a) et 3.5 montrent, de plus, que la composante  $\Sigma_{xx}$  est égale à la composante  $\Sigma_{yy}$  quel que soit le nombre inertiel. Ce résultat a aussi été mis en évidence pour les écoulements denses sur plan incliné [150, 178]. C'est une information importante pour les modélisations de type Saint-Venant [148, 61], pour décrire les variations d'épaisseur le long de l'écoulement.

Une deuxième observation est l'existence de déviations dans les 2 ou 3 premières couches près des parois. La figure 3.4 (b) indique que, comme attendu, la contrainte de cisaillement est constante au sein de la couche cisailée, avec toutefois des déviations dans les premières couches près des parois. Mais surtout, cette figure montre que le rapport de la contrainte de cisaillement sur la pression augmente avec le nombre inertiel. C'est un point capital sur lequel nous reviendrons au paragraphe 3.2. Nous analyserons plus en détail les différentes contributions au tenseur des contraintes au paragraphe 3.6.

Disposant des profils de taux de cisaillement et de pression au sein de l'écoulement, nous pouvons maintenant calculer le profil du nombre inertiel  $I(y)$  (Fig. 3.6). Celui-ci oscille dans les 5 premières couches près des parois et est approximativement constant dans le cœur de la couche cisailée.

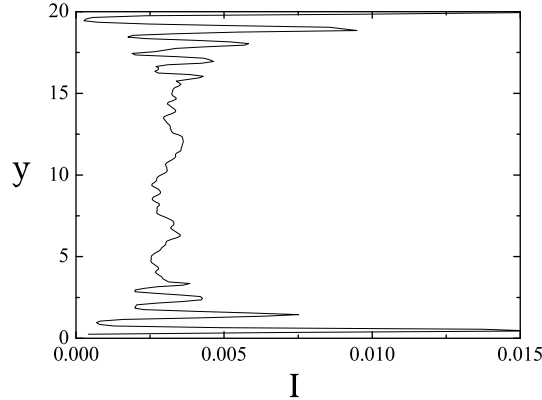


FIG. 3.6 – Profil du nombre inertiel  $I(y)$ . ( $H = 20$ ,  $e = 0.1$  et  $\mu = 0.4$ )

### 3.1.5 Système homogène

La première observation inattendue est donc l'absence de localisation (Fig. 3.3 (a)). Ceci contraste avec les observations de [3, 116, 48]. Nous verrons dans la suite (chapitre 4) qu'une hétérogénéité de contraintes conduit à une localisation du cisaillement. Nous verrons aussi qu'une localisation est observée lorsque les grains sont assez mous, ou encore lorsqu'ils sont monodisperses. Nous devons aussi indiquer que lorsque  $I$  est assez faible, l'écoulement présente des intermittences (voir § 3.6).

Nous avons testé l'influence d'une localisation forcée du cisaillement, en choisissant de partir d'un profil localisé par la gravité, et en regardant comment il évolue en l'absence de gravité. Nous avons systématiquement observé que ce profil relaxe vers un profil linéaire.

De façon générale, aussi bien pour la compacité, la vitesse que les contraintes, on observe des comportements particuliers au voisinage des parois, d'une part une structuration dans les 5 premières couches, d'autre part des déviations au comportement moyen (vitesse de rotation, composantes du tenseur des contraintes) dans les 2 premières couches. Nous y reviendrons au paragraphe 3.5. Ainsi, toutes les grandeurs moyennes sont mesurées dans la région centrale de la cellule de cisaillement (en excluant les cinq couches proches des parois).

L'homogénéité du milieu est un avantage important pour l'étude de la loi de comportement du matériau (effectivement il n'existe que très peu de systèmes homogènes dans le cas des matériaux granulaires et l'hétérogénéité de l'écoulement complique souvent l'étude de ceux-ci). Ces états homogènes

permettent une mesure directe de la loi de comportement à travers deux grandeurs fondamentales : la dilatance et le frottement effectif.

### 3.1.6 Rugosité

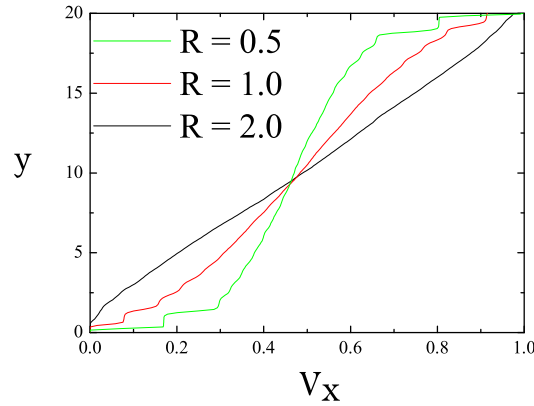


FIG. 3.7 – Influence de la rugosité sur le profil de vitesse. ( $I_{global} = 0.03, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

Quelques simulations ont été faites pour tester l'influence de la rugosité, en prenant des grains collés aux parois deux fois plus petits ( $R = 0.5$ ) ou deux fois plus grands ( $R = 2$ ). La figure 3.7 montre que ce rapport de taille a une incidence sur la vitesse de glissement. Elle est notable pour  $R = 0.5$  et diminue lorsque  $R$  augmente. Les particules proches des parois restent alors piégées et ont donc une vitesse nulle. Pour une plus ample discussion, nous renvoyons aux études sur plan incliné [75] et en conduite verticale [150]. Du fait de l'existence de cette vitesse de glissement, le taux de cisaillement diminue avec  $R$ , donc  $I$  diminue lorsque la rugosité diminue (voir § 3.2). Toutefois le système reste homogène au cœur.

## 3.2 Comportement

La loi de comportement décrivant l'écoulement d'assemblées denses de grains secs est l'objet de débats [146]. Toutefois la mesure du coefficient de frottement effectif et de la dilatance permet d'avoir accès à celle-ci. Nous allons donc mesurer les dépendances de la dilatance, puis du frottement effectif, en fonction du nombre inertiel  $I$ , ce qui constitue l'effet dominant. Nous étudierons les dépendances en fonction des autres paramètres au paragraphe suivant.

### 3.2.1 Dilatance

Afin que l'écoulement puisse se produire, le milieu doit se dilater. C'est cette dilatation que l'on mesure à travers les variations de la compacité  $\nu$  (moyennée sur l'épaisseur dans la région centrale de l'écoulement), en fonction des différents paramètres du système.

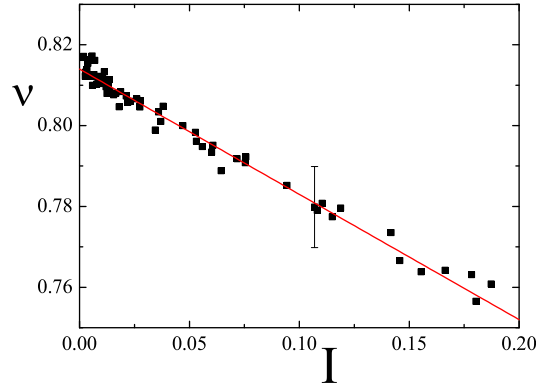


FIG. 3.8 – Variation de la compacité en fonction de  $I$ . ( $\mu = 0.4$  et  $e, H, \frac{P}{kn}$  variables.)

On mesure ainsi les dépendance de la compacité en fonction du nombre inertiel (Fig. 3.8). Lorsque  $I$  augmente, c'est à dire lorsque le taux de cisaillement augmente et/ou la pression diminue, le milieu se dilate légèrement. Cette tendance est plus prononcée pour  $I > 0.2$ . Pour  $I < 0.2$ , la compacité est une fonction linéaire du nombre inertiel :

$$\nu(I) = \nu_{max} - aI \quad (3.2)$$

avec  $\nu_{max} = 0.81$  et  $a = 0.3$  (pour  $\mu = 0.4$ ).

Nous avons aussi calculé l'écart type de  $\nu(y)$  à la valeur moyenne  $\nu$  dans cette région. C'est cet écart qui sert pour la barre d'erreur de la figure 3.8 (elle est indépendante de  $I$ ).

Il est à noter qu'une faible dilatance a des conséquences importantes sur le réseau de contact. Les faibles  $I$  correspondent au régime quasi-statique, associé à un réseau dense de contacts maintenus [167]. Le régime dynamique apparaît pour des nombres inertiels importants. Dans ce régime, le réseau de contacts a cédé la place aux collisions binaires entre particules (voir § 3.5).

### 3.2.2 Frottement effectif

Le coefficient de frottement effectif est une grandeur fondamentale pour l'étude des écoulements granulaires denses. Il a donc été mesuré dans diverses géométries [139, 148, 187]. Celui-ci peut être défini soit comme le rapport de la force de cisaillement sur la force normale à la paroi  $\mu_p^* = \frac{T}{N}$ , soit comme le rapport des contraintes tangentielles sur les contraintes normales au sein du matériau  $\mu^* = \frac{\Sigma_{xy}}{P}$ . Les deux définitions donnent approximativement la même chose, les fluctuations sont toutefois plus importantes à la paroi (Fig. 3.9) et d'une façon générale  $\mu_p^* > \mu^*$ .

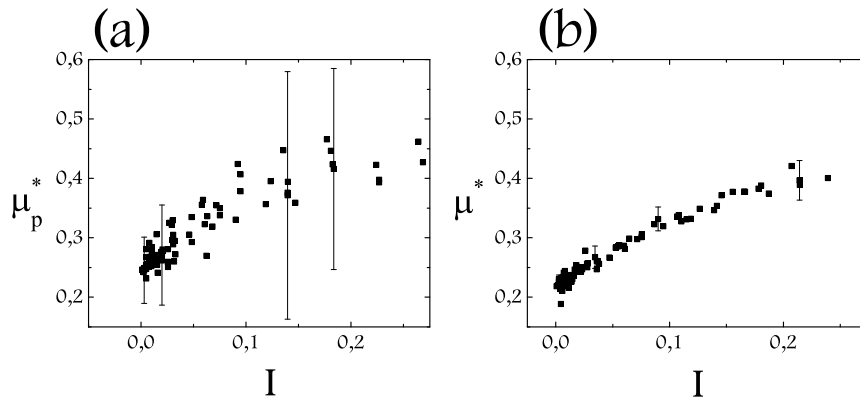


FIG. 3.9 – Variation du coefficient de frottement effectif en fonction de  $I$ . (a) À la paroi. (b) Dans la couche en écoulement.

Comme pour la compacité, on peut mesurer le frottement effectif (moyenné sur la durée de l'écoulement et dans l'épaisseur de la couche) en fonction du nombre inertiel. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart type lorsqu'on fait une statistique sur l'épaisseur pour  $\mu^*$ . Dans le cas du frottement effectif à la paroi, la moyenne et l'écart type ne sont pris que sur la durée de la simulation (pas de moyenne spatiale). C'est ce qui peut expliquer que la dispersion des mesures de frottement effectif soit plus importante à la paroi qu'au cœur de l'écoulement (Fig. 3.9). Ces deux grandeurs varient de la même manière avec  $I$ . On note toutefois que le frottement à la paroi semble légèrement supérieur à celui mesuré dans la couche en écoulement. Les fluctuations rendent cette comparaison délicate, mais c'est peut être là une indication importante pour comprendre le rôle des parois vis à vis du blocage.

Nous citons à ce stade une information complémentaire sur le frottement effectif à la paroi, qui a trait à l'influence de la rugosité (Fig. 3.10). Ces

mesures, faites pour un même  $I_{global}$  (c'est à dire un même couple  $(V, P)$ ), montrent que le frottement augmente avec la rugosité (au moins dans la gamme considérée). Cependant, l'effet est subtil, car la rugosité modifie la vitesse de glissement à la paroi, ce qui change le  $I_{local}$ , et donc finalement le frottement effectif conformément à la courbe mesurée sans variation de la rugosité (Fig. 3.9 (b)). Ceci montrerait que le frottement effectif à la paroi ne dépend que du  $I_{local}$ , et non de la rugosité, cependant nous n'avons pas mené une étude suffisamment poussée pour pouvoir conclure.

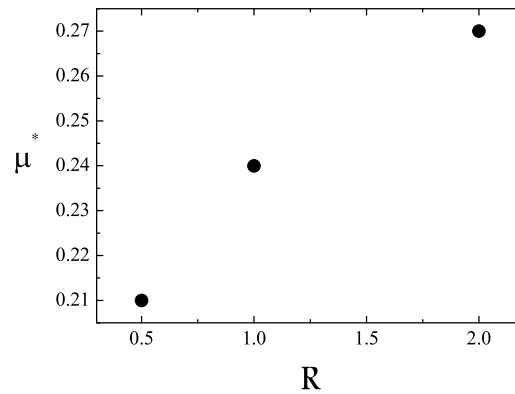


FIG. 3.10 – Coefficient de frottement effectif à la paroi en fonction de la rugosité, toutes choses égales par ailleurs (ie même  $V$ , même  $P$ ).

Par la suite, seuls les résultats concernant le frottement effectif à l'intérieur de la couche seront présentés.

La figure 3.11 représente la variation du coefficient de frottement effectif  $\mu^*$  en fonction de  $I$ . Elle montre que  $\mu^*$  augmente à partir de  $\mu_s = \tan \phi$ , où  $\phi$  devrait correspondre à l'angle de frottement interne de Mohr-Coulomb dans l'état critique de la mécanique des sols [134]. On observe que le frottement effectif varie linéairement avec  $I$  :

$$\mu^* = \mu_s + bI \quad (3.3)$$

avec  $\mu_s = 0.22$  et  $b = 1.0$ , pour  $\mu \neq 0$ .

La figure 3.11 (b) indique que le frottement effectif ne varie plus pour  $I < 10^{-2}$ . Pour des plus grandes valeurs de  $I$ , les variations du frottement effectif avec le taux de cisaillement ou la pression deviennent significatives [3, 12]. On observe toutefois une tendance à la saturation pour les très grandes valeurs de  $I$  ( $> 0.2$ ).

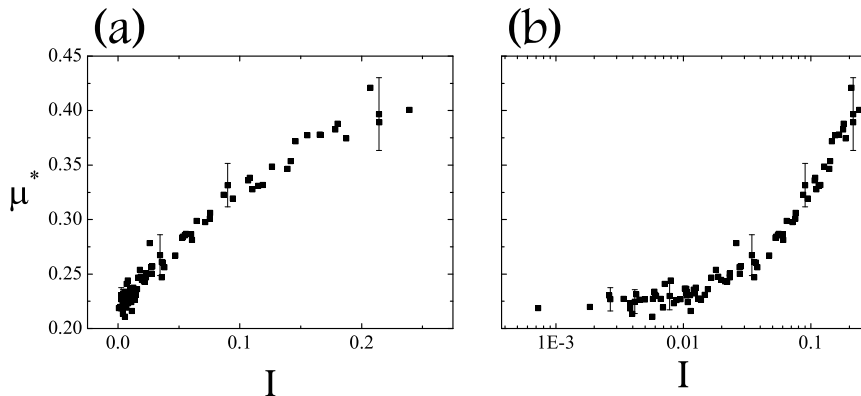


FIG. 3.11 – Variation du coefficient de frottement effectif en fonction de  $I$ . (a) en échelle linéaire. (b) en échelle logarithmique.

### 3.2.3 Transition quasi-statique dynamique

En résumé, dans le régime quasi-statique, correspondant aux petites valeurs du nombre inertiel ( $I < 10^{-2}$ ), le milieu est très dense, proche de la compacité maximale et le frottement effectif est indépendant du cisaillement. Les grandes valeurs du nombre inertiel ( $I > 0.2$ ) correspondent au régime dynamique. La dilatance devient plus importante et le frottement effectif sature. La transition entre les deux régimes se fait de manière progressive. On parlera alors de régime intermédiaire ( $10^{-2} < I < 0.2$ ). C'est dans ce régime intermédiaire que l'on observe les variations linéaires de la compacité et du frottement avec  $I$  (equ. 3.2 et 3.3).

## 3.3 Loi de comportement

Nous allons maintenant montrer en quoi les dépendances de la compacité et du frottement en fonction de  $I$  permettent de déduire la loi de comportement du matériau. Nous allons pour cela utiliser les lois linéaires mises en évidence, ce qui limite la validité de la loi de comportement présentée ici à  $I < 0.2$ . Dans le principe, on peut tout aussi bien déduire la loi de comportement pour  $I$  plus élevé, mais elle prendra alors une forme différente. On rentre cependant alors dans le régime décrit par la théorie cinétique (voir § 3.4).



### 3.3.1 Pression

En reprenant la définition de  $I = \dot{\gamma}/\sqrt{P}$  et le fait que la compacité varie linéairement avec le nombre inertiel, on trouve que :

$$P = a^2 \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)^2} \quad (3.4)$$

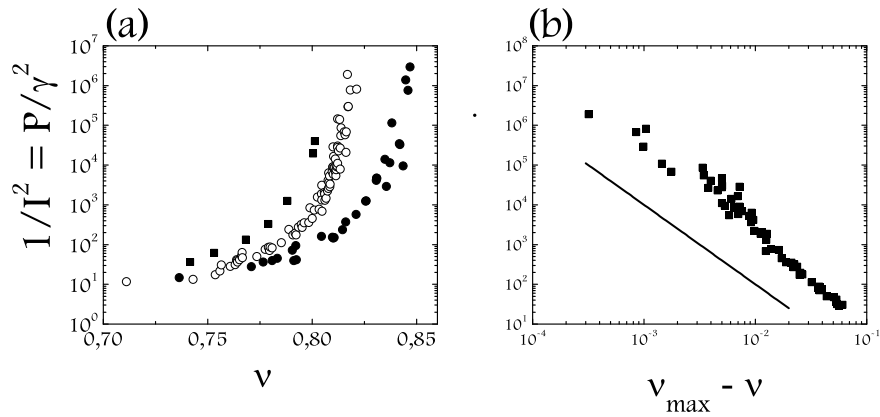


FIG. 3.12 –  $\frac{1}{I^2}$  ou encore  $\frac{P}{\dot{\gamma}^2}$  en fonction de la compacité  $\nu$  (a) (cercle noir  $\mu = 0$ , cercle blanc  $\mu = 0.4$ , carre noir  $\mu = 0.8$ ), de  $(\nu_{max} - \nu)$  (b). La droite indique une pente de  $-2$ .

La figure 3.12 (a) indique une divergence de  $\frac{P}{\dot{\gamma}^2}$  lorsque  $\nu \rightarrow \nu_{max}$ . La figure 3.12 (b) montre qu'il y a un bon accord entre l'équation 3.4 et les mesures. On remarque cependant que l'exposant est légèrement différent de 2. Ceci n'est pas significatif, car cette courbe est sensible au choix de  $\nu_{max}$ . En outre, dans le régime dynamique on note une diminution de cet exposant vers une valeur plus proche de 2.

### 3.3.2 Contrainte de cisaillement

De la même manière, en utilisant cette fois-ci le fait que le coefficient de frottement effectif ( $\Sigma_{xy}/P = S/P$ ) est une fonction linéaire de  $I$ , on obtient :

$$S = \mu_s P + ba \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)} \quad (3.5)$$

ou encore :

$$S = ab \frac{\nu^* - \nu}{(\nu_{max} - \nu)^2} \dot{\gamma}^2 \quad (3.6)$$

avec  $\nu^* = \nu_{max} + \frac{a\mu_s}{b}$  ( $\nu^* \approx 0.86$ ).

On remarque ainsi que la loi de comportement dépend du taux de cisaillement au carré et d'une fonction de la compacité qui diverge pour  $\nu_{max}$ . On note aussi qu'il est possible de faire une décomposition de la contrainte de cisaillement en un terme frictionnel ( $\mu_s P$ ) et un autre collisionnel ( $ba \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)}$ ). Cette loi de comportement est donc analogue à celle observée par Bagnold (chapitre 1).

### 3.4 Étude paramétrique

Jusqu'à présent, nous avons présenté des résultats sans discussion de l'effet des paramètres microscopiques. Nous nous attachons dans cette partie à décrire l'effet du coefficient de frottement intergranulaire et du coefficient de restitution sur la variation de la compacité et du frottement effectif avec  $I$ .

#### 3.4.1 Effet du coefficient de frottement intergranulaire

Le frottement entre particules a une influence notable sur la compacité. La compacité reste une fonction linéaire décroissante de  $I$ , mais les deux paramètres  $\nu_{max}$  et  $a$  deviennent fonction du coefficient de frottement intergranulaire (Fig. 3.13 (a)) :

$$\nu = \nu_{max}(\mu) - a(\mu)I \quad (3.7)$$

La figure 3.13 (b) montre que  $\nu_{max}(\mu)$  est une fonction décroissante de  $\mu$ . Ceci montre que la compacité maximale en écoulement n'a pas une signification purement géométrique, mais dépend du matériau. Par contre  $a$  n'a pas de variation simple. On a ainsi  $a = 0.38$  pour  $\mu = 0.0$ ,  $0.31$  pour  $\mu = 0.4$  et  $0.37$  pour  $\mu = 0.8$ .

Pour ce qui concerne la variation du frottement effectif avec le nombre inertiel, l'effet de  $\mu$  sur  $\mu^*$  est moins significatif, hormis le cas où le frottement entre grains est nul. La figure 3.14 (qui est la même que la figure 3.11 avec un code de couleur selon le frottement intergranulaire) montre la variation du frottement effectif avec  $I$  pour différents  $\mu$  ( $\mu = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ).

Cette figure montre clairement que la valeur du coefficient de frottement microscopique  $\mu$  n'a pas d'effet sur le frottement effectif. La figure 3.15 (a) montre plus précisément la variation du frottement effectif en fonction du frottement intergranulaire pour un  $I$  donné. Il y a une variation brutale entre  $\mu = 0$  et  $\mu = 0.2$ , mais au delà de  $\mu = 0.2$  le frottement effectif reste constant. Cette variation atteint un facteur deux aux faibles  $I$ , et diminue ensuite.

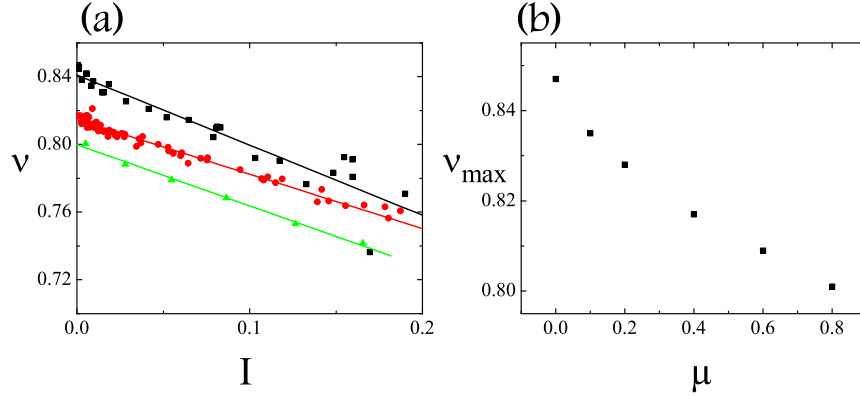


FIG. 3.13 – (a) Variation de la compacité en fonction de  $I$  et de  $\mu$ . En noir  $\mu = 0.0$ , en rouge  $\mu = 0.4$  et en vert  $\mu = 0.8$ . (b) Variation de la compacité maximale  $\nu_{\max}$  en fonction de  $\mu$ .

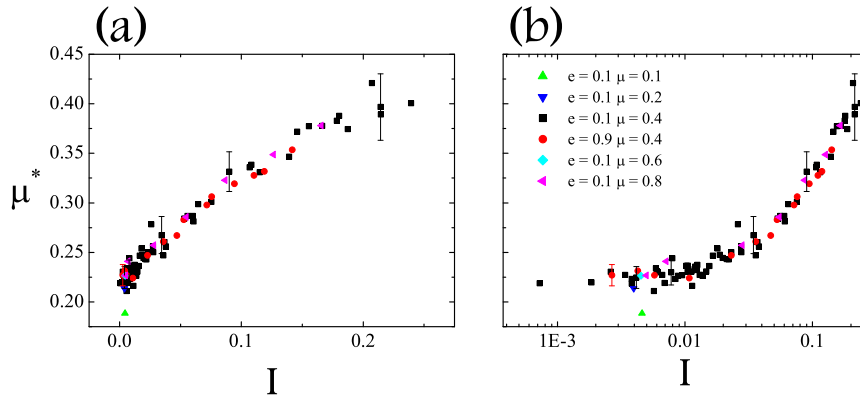


FIG. 3.14 – Coefficient de frottement effectif en fonction de  $I$ , pour  $\mu \neq 0$ . (a) représentation linéaire. (b) représentation logarithmique.

Ainsi, dans le cas où le frottement entre grains est nul ( $\mu = 0$ ), la courbe du frottement effectif en fonction de  $I$  est modifiée. Elle garde la même allure mais est décalée vers des valeurs de frottement plus faibles (Fig. 3.15 (b)). Dans ce cas et pour des nombres inertiels  $I < 0.1$ , l'équation 3.3 reste la même, mais les paramètres  $b$  et  $\mu_s$  sont modifiés. On a alors  $b = 1.62$  et

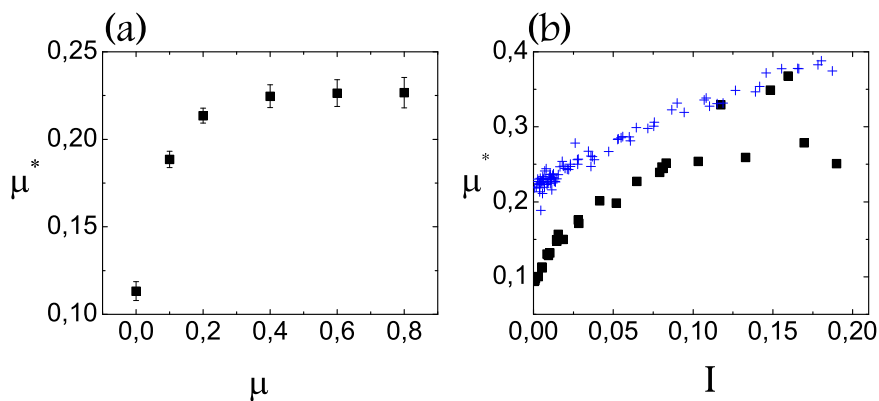


FIG. 3.15 – (a) Coefficient de frottement effectif en fonction du coefficient de frottement intergranulaire pour  $I = 4 \cdot 10^{-3}$  et  $e = 0.1$ . (b) Coefficient de frottement effectif en fonction de  $I$ . Les carrés noirs correspondent aux grains sans frottement, et les croix aux grains frottants.

$\mu_s = 0.11$ . Ainsi le cas des grains non frottants apparaît comme un cas singulier, qu'il faut traiter à part. Aux plus grandes valeurs de  $I$ , il apparaît des déviations qui sont liées à la nature du matériau, et qui feront l'objet du paragraphe suivant.

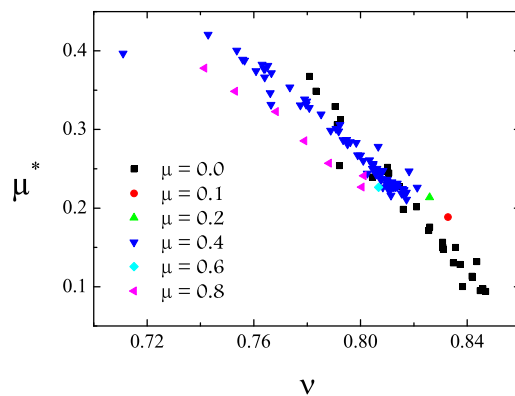


FIG. 3.16 – Coefficient de frottement effectif en fonction de la compacité.

Compte tenu des variations conjointes de la compacité et du frottement effectif en fonction du frottement intergranulaire, il est tentant de représenter le frottement effectif, non en fonction de  $I$ , mais de la compacité (Fig. 3.16). Cette nouvelle représentation des résultats met en évidence une courbe maîtresse regroupant l'ensemble des données. Cette courbe est constituée de zones complémentaires, forte compacité pour les grains non frottants, et plus faible compacité pour les grains frottants. Il est remarquable qu'une petite variation de compacité (de l'ordre de 10%) suffise à induire une variation du frottement d'un facteur 4! Remarquons aussi que la diminution du frottement effectif avec la compacité n'est pas vraiment intuitive.

### 3.4.2 Effet du coefficient de restitution

La figure 3.14 montre qu'il n'y a pas d'effet du coefficient de restitution sur la courbe du frottement effectif pour un coefficient de frottement intergranulaire non nul. Par contre, la figure 3.15 (b) indique un effet pour  $\mu = 0$  et  $I$  grand. Nous avons donc étudié spécifiquement cet effet du coefficient de restitution dans la limite des grains non frottants, aussi bien pour la compacité que pour le frottement effectif (figure 3.17). Sur cette figure sont représentées les données issues de deux types de simulations différentes, nos simulations à pression contrôlée et les simulations à volume fixé menées par I. Jordanoff [89], dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 3.1.

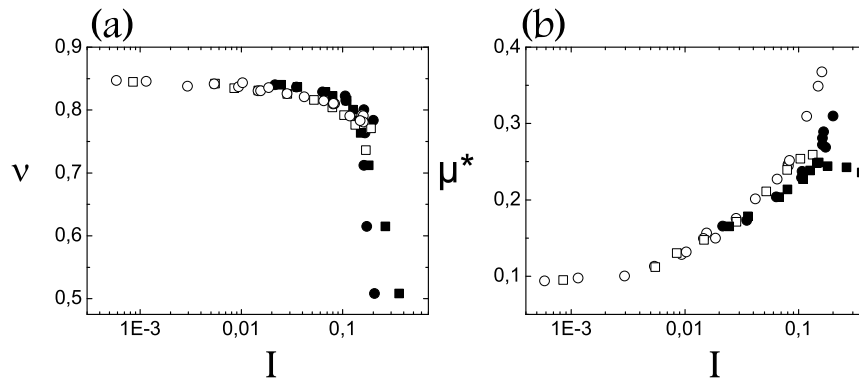


FIG. 3.17 – Influence de  $I$  et de  $e$  pour  $\mu = 0$  [51] (a) Compacité (b) Frottement. En blanc les simulations à pression contrôlée, en noir celles à volume fixé. Carré  $e = 0.9$ , cercle  $e = 0.1$  ( $H$  variable).

Ces deux types de simulations donnent les mêmes résultats. Les conditions aux limites n'ont donc pas d'influence sur les grandeurs macroscopiques

comme la dilatance (Fig. 3.17 (a)) ou le frottement effectif (Fig. 3.17 (b)). Ces figures représentent les résultats obtenus lorsque l'on fait varier le coefficient de restitution  $e$  (système très dissipatif  $e = 0.1$  et système peu dissipatif  $e = 0.9$ ). On observe que  $e$  n'a pas d'influence sur ces grandeurs macroscopiques pour les faibles valeurs de  $I$  ( $I < 0.1$ ). Par contre, pour  $I > 0.1$ , le comportement du matériau dépend de sa nature (fortement ou faiblement dissipatif).

En ce qui concerne la compacité, on observe dans tous les cas une chute rapide de celle-ci lorsqu'on atteint le régime dynamique. Cette chute est d'autant plus rapide que le matériau est plus dissipatif ( $e = 0.1$ ).

En ce qui concerne le frottement effectif, on n'observe pas d'effet de  $e$  pour les petits  $I$ , mais une dépendance très marquée pour les grands  $I$  ( $I > 0.1$ ). La courbe du frottement effectif en fonction de  $I$  n'est plus universelle. Contrairement aux matériaux dissipatifs, le frottement effectif sature ou diminue lorsque  $e \rightarrow 1$ . Nous allons voir que ceci correspond à une transition vers un régime collisionnel, susceptible d'être décrit par la théorie cinétique.

### 3.4.3 Comparaison avec la théorie cinétique

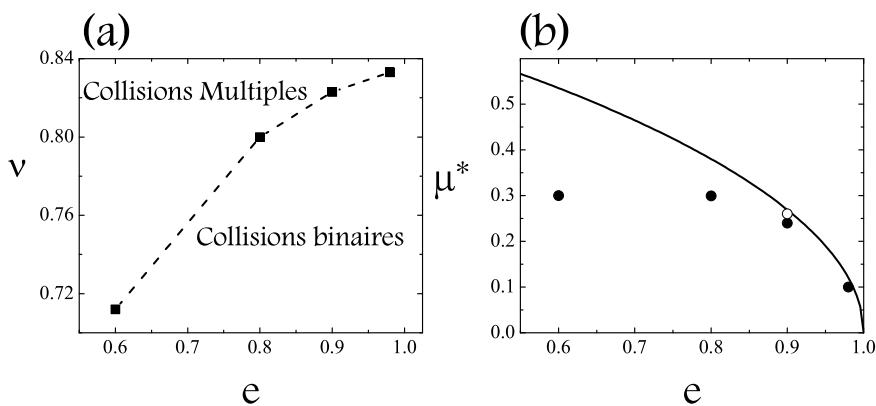


FIG. 3.18 – (a) Transition entre le régime de collision multiple et le régime de collision binaire en fonction du coefficient de restitution et de la compacité [89]. (b) Prédiction de la théorie cinétique pour le frottement effectif. La courbe correspond à la prédiction et les cercles noirs indiquent les résultats obtenus en simulation à volume fixé et le cercle blanc à pression fixée.

En effet, l'analyse de la durée moyenne des contacts, menée par I. Iordanoﬀ [89], permet de délimiter les régimes de collisions multiples (faible  $e$  et forte compacité, c'est à dire faible  $I$ ) et de collision binaire ( $e \rightarrow 1$  et faible compacité, c'est à dire grand  $I$ ) (Fig. 3.18 (a)).

On peut estimer le coefficient de frottement eﬀectif dans le cadre de la théorie cinétique (pour  $I$  grand,  $\mu = 0$  et  $e \sim 1$ ), dans la situation simple d'un cisaillement homogène. Le frottement eﬀectif est alors obtenu en écrivant l'équation bilan de l'énergie, qui se résume, en l'absence de gradient de température (système homogène), à l'équilibre entre le travail de la contrainte de cisaillement  $S$  et la dissipation  $\Gamma$  due aux chocs entre particules  $S\dot{\gamma} = \Gamma$ . La contrainte de cisaillement, la pression et le taux de dissipation d'énergie s'expriment en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , des fluctuations de vitesse  $T = \delta v^2$ , et d'une fonction de la compacité  $F(\nu)$  :

$$P = A_P F(\nu) T \quad (3.8)$$

$$S = A_S F(\nu) T^{\frac{1}{2}} \dot{\gamma} \quad (3.9)$$

$$\Gamma = A_\Gamma F(\nu) T^{\frac{3}{2}} \quad (3.10)$$

De ce système d'équations, on tire aisément la valeur du frottement eﬀectif, qui dépend de  $e$  :

$$\mu^*(e) = \frac{\sqrt{A_S A_\Gamma}}{A_P} \quad (3.11)$$

Les trois préfacteurs sont parfaitement connus dans le cadre de la théorie cinétique [11], on obtient donc :

$$\mu^*(e) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi + 8}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - e^2} \quad (3.12)$$

C'est cette courbe que nous avons tracée sur la figure 3.18 (b). Elle montre un bon accord pour  $e > 0.8$ . Les diﬀérences observées sont peut être dues à l'influence des parois qui introduisent des gradients de fluctuations et qui fixent les conditions aux limites (vitesse de glissement, fluctuations aux parois ...).

### 3.5 Micromécanique

En plus des grandeurs macroscopiques que nous venons de discuter, les simulations numériques nous donnent accès à des informations microscopiques : la coordinence, la mobilisation du frottement ou encore la distribution des angles de contact.

### 3.5.1 Réseau de contacts

Nous représentons sur les figures 3.19 et 3.20 les réseaux de contact dans les deux régimes extrêmes, quasi-statique (très faible  $I$ ) et dynamique (grand  $I$ ). Nous observons ainsi que le régime quasi-statique est caractérisé par un réseau de contacts maintenus dense. La distribution du nombre de contacts par particule est représentée sur la figure 3.21 (a). La majorité des particules ont trois ou quatre contacts, et le nombre moyen de contacts par particule est proche de 3.5.

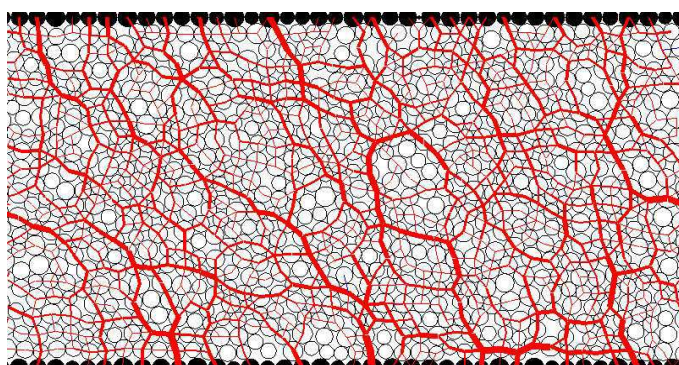


FIG. 3.19 – Image du réseau de contacts dans le régime quasi-statique ( $I = 10^{-2}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).

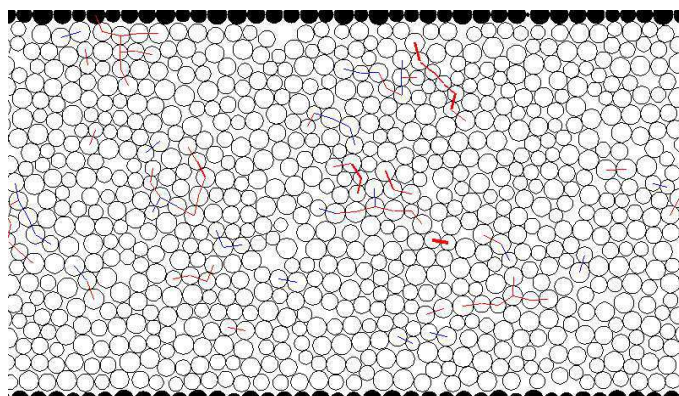


FIG. 3.20 – Image du réseau de contacts dans le régime dynamique ( $I = 0.2$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).



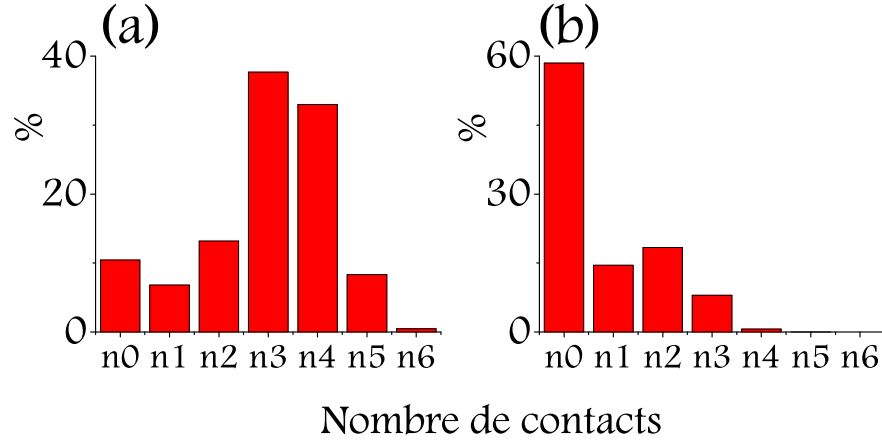


FIG. 3.21 – *Distribution des contacts.* (a) Pour  $I = 0.01$ , régime quasi-statique. (b) Pour  $I = 0.2$ , régime dynamique.

Le réseau de contacts dense disparaît progressivement lorsque  $I$  augmente. La figure 3.20 met en évidence un régime de collisions multiples qui vont devenir des collisions binaires (cf. paragraphe précédent). La figure 3.21 (b) montre que dans ce régime, la majorité des particules n'a pas de contact, les autres ayant un, deux ou trois contacts. Le nombre moyen de contact chute à 0.7.

### 3.5.2 Coordinece

On peut mesurer la coordinece  $Z$ , c'est à dire le nombre moyen de contacts par grain, en fonction du nombre inertiel ou de la compacité. La coordinece est une fonction de  $I$ , mais elle a aussi une forte dépendance vis à vis du coefficient de frottement  $\mu$ , du coefficient de restitution  $e$  et du paramètre de rigidité  $P/k_n$ . Par contre la taille du système ainsi que la rugosité des parois ne semblent avoir aucun effet.

D'une manière générale,  $Z$  augmente lorsque  $I$  diminue (Fig. 3.22 et 3.23), et tend vers sa valeur maximale  $Z_{max}$  pour  $I \rightarrow 0$ . La figure 3.22 indique – pour un jeu de paramètres microscopiques donné – que la coordinece diminue lorsque  $I$  augmente. Un ajustement possible est le suivant :

$$Z = Z_{max} - a'I^\alpha \quad (3.13)$$

nous avons tracé cet ajustement sur les figures 3.23 (a) et (b), qui regroupent l'ensemble des résultats pour un  $P/k_n$  donné et permettent de discuter l'influence des coefficients de restitution et de frottement.

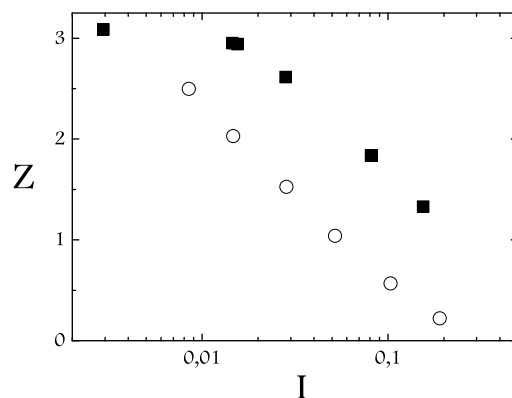


FIG. 3.22 – Variation de la coordinence en fonction de  $I$  ( $\mu = 0$  et  $P/k_n = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ). Échelle semi-log. Effet de  $e$ . Cercles  $e = 0.9$ , carrés  $e = 0.1$

Les figures 3.22 et 3.23 (a) et (b) montrent que la coordinence augmente lorsque le coefficient de restitution diminue, ce qui est assez intuitif (sauf si l'on considère qu'en parallèle la compacité n'est pas affectée). Elles montrent aussi que la coordinence diminue lorsque le frottement intergranulaire augmente.

Au total, on constate que l'exposant de la loi de puissance est peu dépendant des coefficients de frottement et de restitution ( $\alpha \sim \frac{1}{2}$ ). Par contre,  $Z_{max}$  et  $a'$  dépendent des caractéristiques mécaniques des grains.

Les ajustements des différentes courbes donnent accès à la variation de  $Z_{max}$  en fonction de  $P/k_n$ . La figure 3.24 (a) indique que la coordinence maximale augmente significativement avec  $P/k_n$ , ce qui est assez intuitif.

Il est aussi possible de mesurer l'effet du coefficient de frottement sur la coordinence. Comme nous ne possédons pas assez de données pour étudier l'effet sur  $Z_{max}$ , nous avons choisi de regarder la variation de la coordinence en fonction de  $\mu$ , pour un nombre inertiel petit ( $I = 4 \cdot 10^{-3}$ ). Cette fois-ci, la coordinence diminue de manière linéaire lorsque le coefficient de frottement intergranulaire augmente (Fig. 3.23 (b)).

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe sur la dilatance, il existe une relation de bijection simple entre la compacité et le nombre inertiel. On peut donc représenter les données en traçant la coordinence en fonction de la compacité (Fig. 3.25). En combinant les ajustements précédemment mis en évidence, d'une part pour la compacité en fonction de  $I$ , d'autre part pour la coordinence en fonction de  $I$ , on est conduit à utiliser l'ajustement suivant (avec  $\alpha = 1/2$ ), qui fonctionne assez bien :

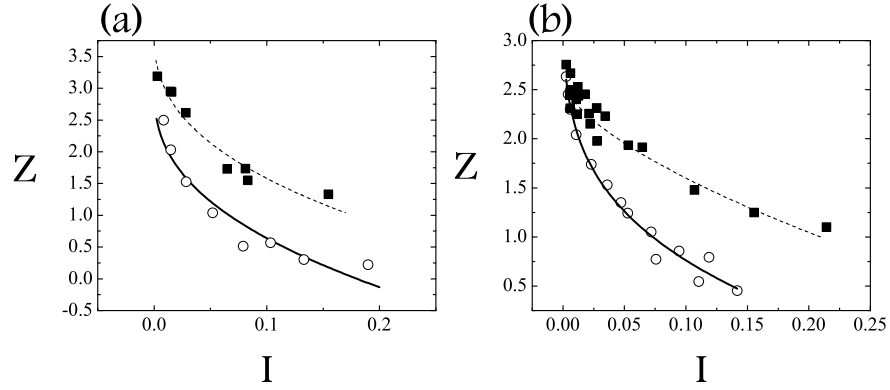


FIG. 3.23 – Variation de la coordonnée en fonction de  $I$ , ( $P/k_n = 10^{-4}$  et  $e = 0.1$  carrés noirs,  $e = 0.9$  cercles). (a)  $\mu = 0.0$ . Ajustements  $Z = 3.75 - 7.11I^{0.51}$  en tireté,  $Z = 3.00 - 6.04I^{0.41}$  en trait plein. (b)  $\mu = 0.4$ . Ajustements  $Z = 2.84 - 3.80I^{0.48}$  en tireté,  $Z = 2.60 - 5.48I^{0.50}$  en trait plein.

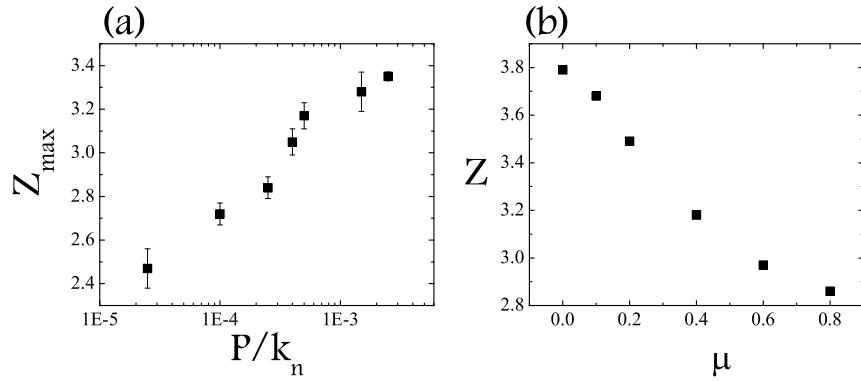


FIG. 3.24 – Variation de la coordonnée en fonction des caractéristique des grains. (a)  $Z_{max}$  fonction de  $P/k_n$  ( $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$  et  $I \rightarrow 0$ ). Les barres d'erreurs sont calculées par la méthode des moindres carrés sur les données ajustées. (b)  $Z$  fonction de  $\mu$  ( $e = 0.1$ ,  $P/k_n = 2.5 \cdot 10^{-3}$  et  $I = 4 \cdot 10^{-3}$ ).

$$Z = Z_{max}\left(\frac{P}{k_n}, e, \mu\right) - A\left(\frac{P}{k_n}, e, \mu\right)(\nu_{max}(\mu) - \nu)^\alpha \quad (3.14)$$

où  $A = \frac{a'}{a^\alpha}$ .

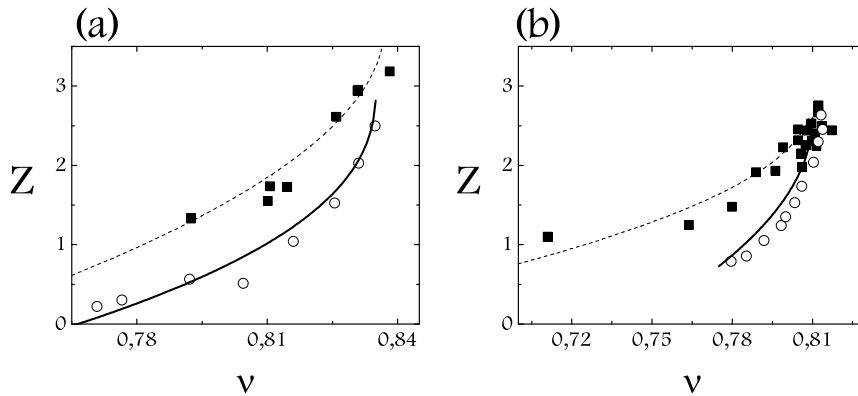


FIG. 3.25 – Variation de la coordinnence en fonction de la compacité et ajustements ( $P/k_n = 10^{-4}$ ,  $e = 0.1$  carrés noirs,  $e = 0.9$  cercles). (a)  $\mu = 0.0$ . (b)  $\mu = 0.4$ .

En résumé, l'approche de la coordinnence maximale près de l'arrêt se fait selon une loi de puissance. On observe alors une très forte variation de  $Z$  pour une petite variation de  $\nu$ . De plus, on insiste sur le fait que la coordinnence n'est pas une simple fonction de la géométrie, à travers la compacité, mais qu'elle dépend aussi des caractéristiques microscopiques des grains.

### 3.5.3 Mobilisation du frottement

Au sein de la population des contacts qui vient d'être discutée, nous voulons maintenant introduire une distinction entre les contacts "glissants" pour lesquels le frottement est entièrement mobilisé, et les autres contacts. Cette distinction est un peu différente de celle proposée par [194], qui sépare les contacts "fluides" (collisionnels, contacts maintenus glissants), des contacts "solides" (contacts maintenus non glissants).

Nous définissons donc une "coordinnence glissante" ( $Z_g$ ), égale au nombre moyen des contacts glissants par grain. Remarquons que cette notion n'a de sens que dans les assemblées de grains frictionnels.

Il est là aussi possible de mesurer la coordinnence glissante comme une fonction du nombre inertiel (Fig. 3.26). On observe tout d'abord que pour les faibles valeurs du nombre inertiel, la coordinnence glissante augmente avec  $I$ . Même si dans la gamme de  $I$  étudiée, elle semble partir d'une valeur non nulle, nous verrons au paragraphe 7.3 qu'elle chute à zéro à l'arrêt. Par

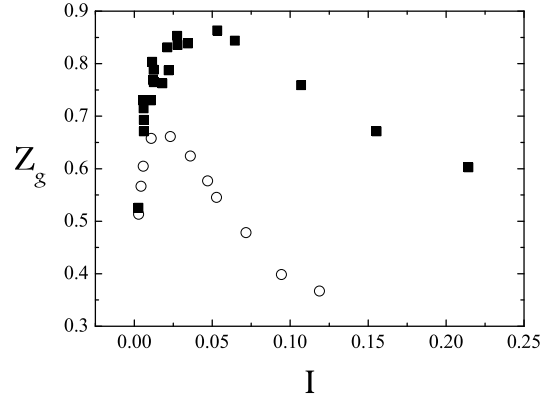


FIG. 3.26 – Variation de la coordonnée glissante en fonction de  $I$ . Carrés noirs  $e = 0.1$ , cercles blancs  $e = 0.9$  ( $P/k_n = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu = 0.4$ ).

ailleurs, au delà d'une certaine valeur du nombre inertiel  $I_{zg}$ , elle diminue, ce qui peut se comprendre dans la mesure où la coordonnée  $Z$  diminue lorsque  $I$  augmente. De plus, la figure 3.26 indique que le maximum de la coordonnée glissante, i.e. le couple  $I_{zg}$  et  $Z_g(I_{zg})$ , dépend du coefficient de restitution  $e$ .

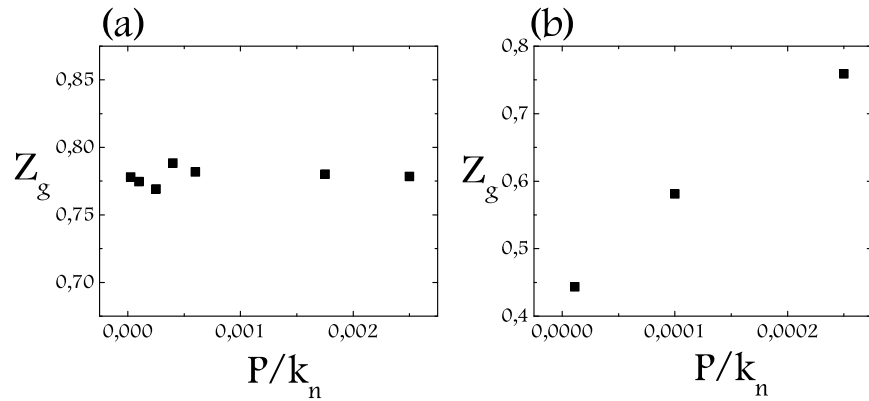


FIG. 3.27 – Variation de la coordonnée glissante en fonction de  $\frac{P}{k_n}$ . (a)  $I = 10^{-2}$  ( $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ) (b)  $I = 10^{-1}$  ( $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).

La figure 3.27 montre l'effet de la rigidité des grains (décrite par le nombre adimensionnel  $P/k_n$ ) sur la coordinnence glissante. Il n'y a pas d'effet lorsque le matériau est proche de l'arrêt ( $I$  petit), mais une augmentation significative de  $Z_g$  avec  $P/k_n$  dans le régime dynamique.

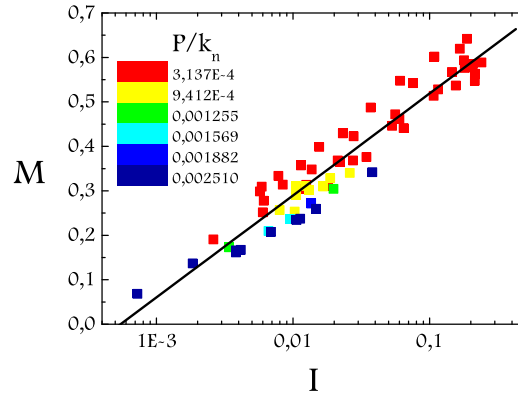


FIG. 3.28 – Mobilisation du frottement en fonction de  $I$ , pour différentes rigidités de contact et ajustement par une loi de puissance.

Il est tentant d'étudier le rapport de la coordinnence glissante sur la coordinnence, c'est à dire la proportion de contacts glissants parmi l'ensemble des contacts, ou encore la proportion de contacts pour lesquels le frottement est complètement mobilisé. Nous appelons donc  $M = \frac{Z_g}{Z}$  la mobilisation du frottement. La figure 3.28 montre les variations de  $M$  en fonction de  $I$ . On observe une loi de puissance du type :

$$M \sim aI^b \quad (3.15)$$

avec  $a \sim 1$  et  $b \sim \frac{1}{4}$ . Cette tendance est en première approximation indépendante de  $P/k_n$  ; plus précisément la mobilisation est plus importante lorsque la rigidité des grains augmente. Nous insistons sur le fait que la dépendance de  $M$  avec  $I$  est monotone, contrairement à la dépendance de  $Z_g$  qui présente un maximum. Les deux grandeurs fondamentales sont donc  $Z$  et  $M$ ,  $Z_g$  étant une grandeur dérivée.

#### 3.5.4 Anisotropie des contacts

Une troisième grandeur nous informant sur la distribution des contacts dans le système concerne l'orientation de ces contacts. La figure 3.21 montre que cette distribution est très vraisemblablement anisotrope. Nous avons donc mesuré la distribution des angles de contact  $\rho(\theta)$ . La figure 3.29 (a)

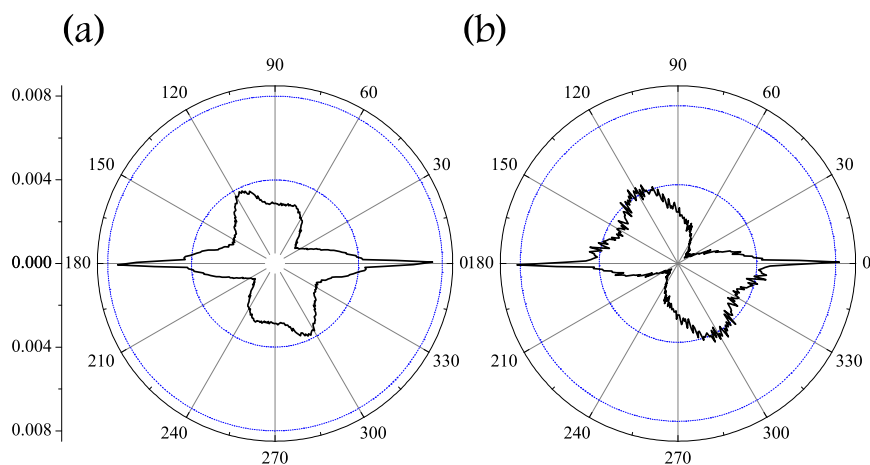


FIG. 3.29 – *Distribution normalisée de l'angle de contact* (a)  $I = 7.3 \cdot 10^{-4}$   
(b)  $I = 2.1 \cdot 10^{-1}$

correspond à la limite 'quasi-statique' et la figure 3.29 (b) à la limite 'dynamique'. D'une manière générale les deux courbes sont similaires, bien que la coordonnée s'effondre lorsqu'on passe du premier régime au second. On observe bien des angles privilégiés, en premier lieu des pics très fins à  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , dans la direction de l'écoulement, dont on peut penser qu'il s'agit d'un artefact lié à la géométrie de cisaillement plan. Mais, de plus, on remarque une deuxième plage de contacts privilégiés qui évolue entre le régime quasi-statique et le régime dynamique. Pour le discuter, nous allons adopter une image très simplifiée d'un milieu structuré en couches. Dans le premier régime, cette plage se situe environ entre  $60^\circ$  et  $120^\circ$ . De fait,  $120^\circ$  correspond approximativement à la direction de compression sous cisaillement, qui doit favoriser la création de contacts "intercouches". La plage entre  $60^\circ$  et  $120^\circ$  correspondrait à une phase de roulement. Dans le régime dynamique, on note que le pic vers  $75^\circ$  disparaît au profit de la plage autour de  $150^\circ$ , i.e. dans la direction de compression. On peut penser que dans le régime 'quasi-statique' les grains roulent plus longtemps les uns par dessus les autres, alors que dans le régime 'dynamique' les contacts se font préférentiellement lors des chocs et donc les grains ne roulent que très peu. La plus faible mobilisation du frottement dans le régime quasi-statique pourrait être associée à ces phases de roulement, donc sans glissement.

## 3.6 Fluctuations

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement à des grandeurs moyennées dans l'espace et dans le temps. Cependant, dans les systèmes étudiés, ces grandeurs présentent des fluctuations importantes. Nous allons successivement discuter les fluctuations des vitesses, puis des forces.

### 3.6.1 Énergie cinétique

La Fig. 3.30 (a) représente les fluctuations relatives de l'énergie cinétique globale en fonction du temps. On observe d'une part des variations à basse fréquence, d'autre part des pics. De plus, on observe que ces fluctuations relatives augmentent lorsque  $I$  diminue (Fig. 3.30 (b)), selon la loi de puissance suivante :

$$\frac{\Delta E_c}{\langle E_c \rangle} = \begin{cases} \frac{c}{I_0} & \text{pour } I < I_0 \\ \frac{c}{I} & \text{pour } I > I_0 \end{cases}$$

où  $I_0$  définit, de manière plus ou moins précise, la limite entre le régime quasi statique et le régime dynamique. De plus on remarque que les fluctuations relatives d'énergie cinétique saturent, dans le régime quasi-statique, autour d'une constante  $\frac{c}{I_0}$  légèrement plus petite que 1.

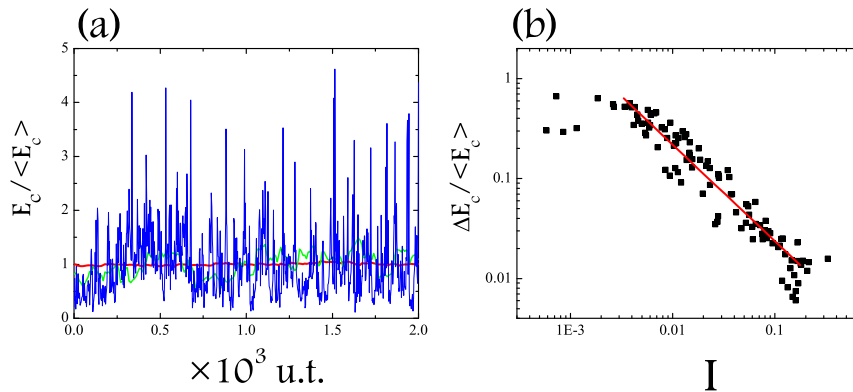


FIG. 3.30 – (a) Énergie cinétique relative en fonction du temps. En rouge  $I = 1.1 \cdot 10^{-1}$ , en vert  $I = 1.4 \cdot 10^{-2}$  et en bleu  $I = 7 \cdot 10^{-4}$ . ( $H = 20$ ,  $e = 0.1$  et  $\mu = 0.4$ ). (b) Fluctuations relatives de l'énergie cinétique en fonction de  $I$ . En rouge, une droite de pente -1.



### 3.6.2 Mouvements collectifs

Pour des nombres inertiel très petits ( $I < 10^{-3}$ ), la visualisation du mouvement des grains et les profils de vitesse instantanés (Fig. 3.31), indiquent que le milieu oscille entre différents états : soit seule une couche mince de grains est entraînée par la paroi en mouvement, soit c'est l'ensemble des grains qui est entraîné dans un écoulement bouchon, et pour passer d'un état à l'autre, le système est cisailé d'une manière assez homogène sur toute son épaisseur. Les deux états extrêmes durent très peu de temps, et nous semblent correspondre aux pics de la figure 3.30, les états de cisaillement plus homogènes correspondants aux variations de plus basse fréquence.

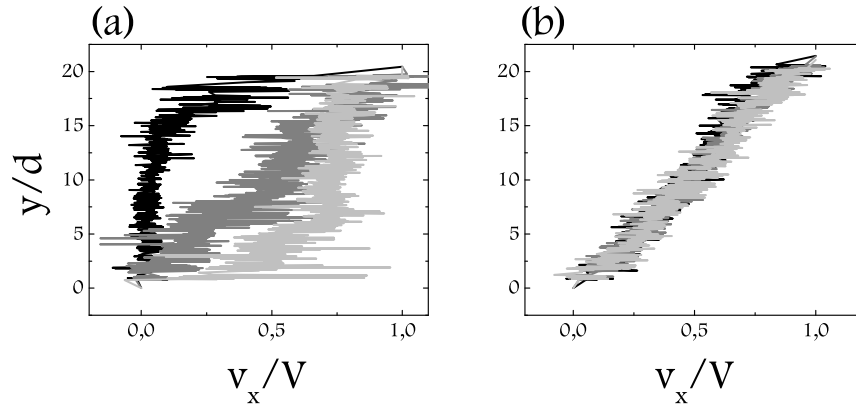


FIG. 3.31 – Profil de vitesse instantané pour (a)  $I = 10^{-3}$ . (b)  $I = 10^{-1}$ . ( $H = 20, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

Ainsi, l'écoulement semble intermittent pour les nombres inertiels petits (Fig. 3.31 (a)), alors qu'il est continu et stationnaire pour les  $I$  plus grands (Fig. 3.31 (b)). Ce sont ces intermittences de l'écoulement qui provoquent les variations rapides de l'énergie cinétique. Nous venons donc de mettre en évidence des mouvements collectifs des grains dans le régime quasi-statique.

Nous présentons maintenant des images du champ de vitesse instantané (Fig. 3.32). On remarque ainsi l'apparition, dans le régime quasi statique, de petits "vortex" qui ne durent pas dans le temps. Ceux-ci disparaissent dans le régime dynamique. A ce champ de vitesse instantané, on peut retirer le champ moyen, et on obtient alors le champ des fluctuations de vitesse. On observe alors des corrélations spatiales importantes, sous la forme de rouleaux de taille comparable (3 à 4 grains de diamètre). Ceux ci semblent persister dans le temps dans le régime dynamique (les figures 3.33 (c) et (d) correspondent à des instants peu éloignés). On observe aussi des événements

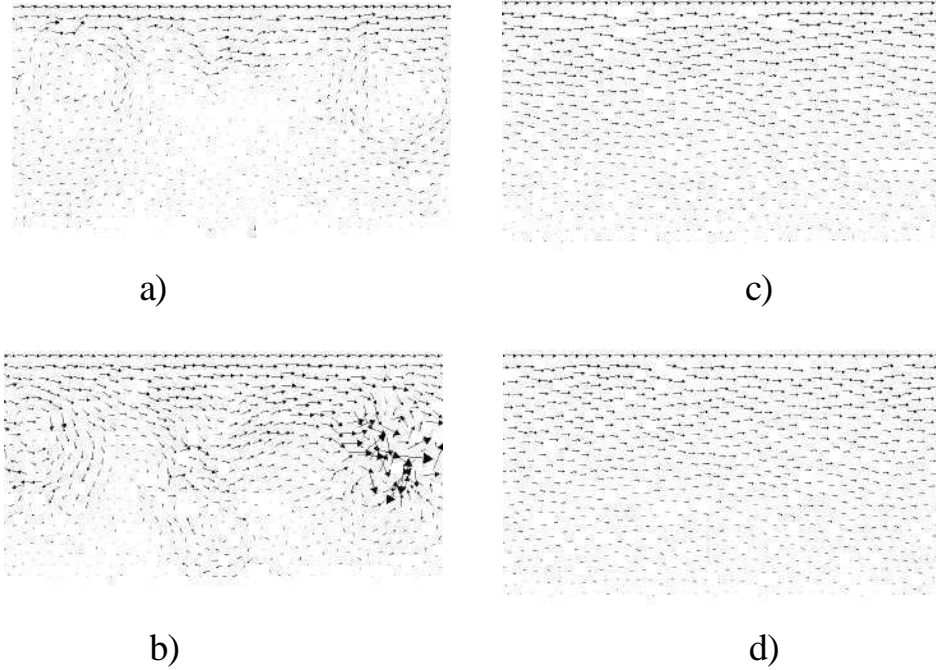


FIG. 3.32 – *Champs de vitesse instantanée. Les images (a) et (b) correspondent au régime 'quasi-statique', (c) et (d) au régime 'dynamique'.*

catastrophiques localisés comme sur la figure 3.33 (b). Cette observation de mouvements corrélés des grains rappelle les observations que l'on trouve dans les références suivantes [167, 19, 156, 130]. De telles corrélations peuvent avoir des conséquences importantes pour la rhéologie, sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 9. Nous en sommes restés à des observations qualitatives, mais c'est un sujet qui mériterait une étude plus approfondie.

### 3.6.3 Vitesse

Nous voulons maintenant discuter les fluctuations des vitesses de translation  $\delta v$  et de rotation  $\delta \omega$  des particules. Celles-ci sont définies comme l'écart quadratique à la valeur moyenne :

$$\delta \bar{v}^2(y) = \langle \bar{v}(y)^2 \rangle - \langle \bar{v}(y) \rangle^2 \quad (3.16)$$

$$\delta \bar{\omega}^2(y) = \langle \bar{\omega}(y)^2 \rangle - \langle \bar{\omega}(y) \rangle^2 \quad (3.17)$$

Ces fluctuations de vitesse correspondent à une notion de température granulaire étendue aux écoulements denses.

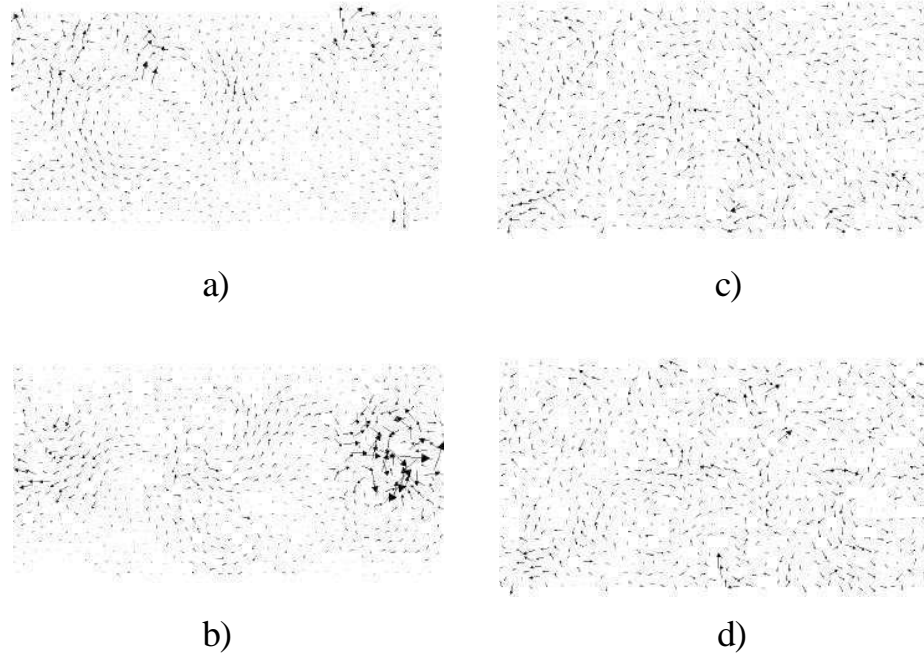


FIG. 3.33 – *Champs des fluctuations de vitesse instantanée. Les images (a) et (b) correspondent au régime 'quasi-statique', (c) et (d) au régime 'dynamique'.*

Cependant, compte tenu de l'observation des mouvements collectifs, on aurait pu tout aussi bien adopter une autre définition, consistant à analyser les fluctuations à une échelle de temps plus courte (c'est à dire autour des écoulements instantanés du type écoulement bouchon). Les fluctuations seraient alors naturellement plus petites. Notre définition prend en compte à la fois les petites fluctuations autour du mouvement moyen et les grandes fluctuations associées aux mouvements collectifs. Les deux définitions doivent converger dans le régime dynamique, mais on peut s'attendre à une différence dans le régime quasi-statique. Une analyse approfondie a été menée par Radjaï, ce qui l'a conduit à parler de "granulence" [156].

Remarquons aussi que la grandeur considérée est locale (*i.e.* fonction de  $y$ ). On peut alors tracer les profils des fluctuations de vitesse ( $\delta v$  ou  $\delta \omega$ ) pour un  $I$  donné (Fig. 3.34). Ces deux figures indiquent que, comme les autres grandeurs, les fluctuations de vitesse sont constantes au centre de la couche. S'agissant d'un régime dynamique, on observe que le milieu est agité – "chauffé" – par les parois [150, 130, 58, 193]. Cet effet s'accroît encore pour des  $I$  plus grands [89], mais au contraire diminue pour des  $I$  plus faibles.

Dans la suite, on raisonne sur la valeur à peu près constante, dans la partie centrale de l'écoulement, en retirant les 5 premières couches près des parois.

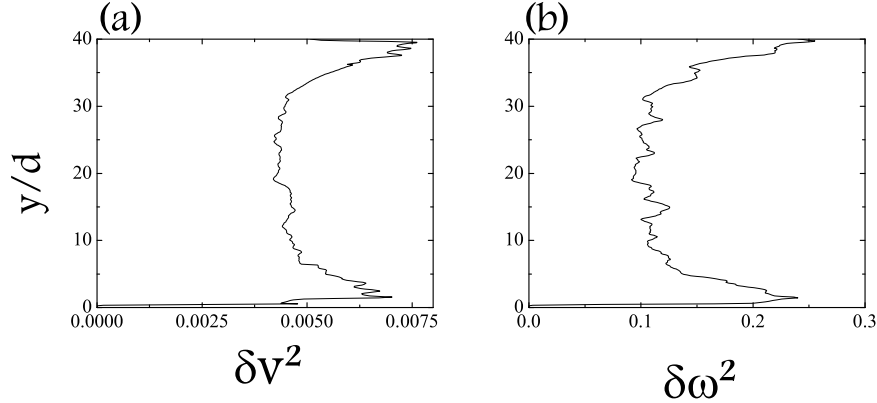


FIG. 3.34 – Profil de fluctuations de vitesse (a) Vitesse de translation. (b) Vitesse de rotation. ( $e = 0.1, \mu = 0.4, I = 0.1$ )

L'analyse dimensionnelle suggère de regarder les variations de la quantité  $\frac{\delta v}{\dot{\gamma}}$  (en utilisant l'échelle de vitesse naturelle  $\dot{\gamma}$ ) en fonction de  $I$ , plutôt que  $\delta v(I)$ . L'échelle de vitesse naturelle pour la vitesse de rotation est aussi  $\dot{\gamma}$ , puisque la vitesse de rotation moyenne est proportionnelle au taux de cisaillement (§ 3.1). Nous avons donc tracé les variations de ces deux quantités en fonction du nombre inertiel sur la figure 3.35.

Ces figures mettent en évidence l'existence de deux lois d'échelle indépendantes des paramètres du système. Ces lois sont de la forme :

$$\frac{\delta v}{\dot{\gamma}} \propto I^{-\beta} \quad (3.18)$$

avec  $\beta \simeq \frac{1}{2}$  et :

$$\frac{\delta \omega}{\dot{\gamma}} \propto I^{-\varepsilon} \quad (3.19)$$

avec  $\varepsilon \simeq \frac{1}{3}$ .

Cela signifie que les fluctuations de vitesse sont plus prononcées dans le régime "quasi-statique", où l'on observe les intermittences. Remarquons que ces fluctuations relatives de vitesse sont très importantes (de 1 à 10!). En comparaison, selon les équations (3.8) à (3.10), la théorie cinétique prédit que :

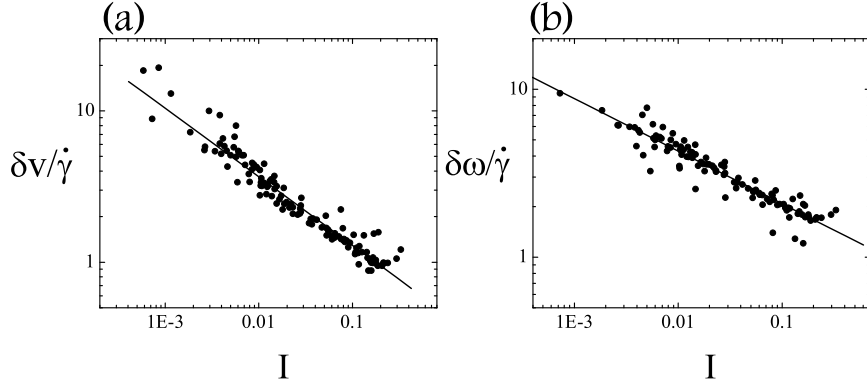


FIG. 3.35 – *Fluctuations de vitesse en fonction de I. (a) Vitesse de translation. (b) Vitesse de rotation. (Sont représentés ici l'ensemble des systèmes étudiés).*

$$\frac{\sqrt{T}}{\dot{\gamma}} = \sqrt{\frac{A_s}{A_\Gamma}} \quad (3.20)$$

soit  $\sqrt{\frac{\pi+8}{32(1-e^2)}} = 1.3$ , pour  $e = 0.9$ , ce qui correspond à ce que l'on mesure dans le régime dynamique.

De même, la vitesse de rotation varie énormément autour de sa valeur moyenne, les fluctuations sont 4 à 20 fois plus grandes que la vitesse de rotation moyenne (Fig. 3.35 (b)).

Il est maintenant possible d'interpréter les variations des fluctuations relatives d'énergie cinétique en fonction de  $I$  (Fig.3.30), en tenant compte des considérations précédentes sur le mouvement collectif des grains et des fluctuations relatives de vitesse. L'énergie cinétique moyenne, dans les deux régimes quasi statique et dynamique, est dominée par l'énergie cinétique de vitesse de translation et s'écrit donc :  $\langle E_c \rangle \sim \frac{\langle \nu \rangle \rho}{2} \int_0^H (\dot{\gamma} y)^2 dy$ . Dans les deux régimes, on a :  $\langle E_c \rangle \sim \frac{\dot{\gamma}^2 H^3}{6}$ . Or le taux de cisaillement moyen est  $\frac{V}{H}$ , donc  $\langle E_c \rangle \sim \frac{V^2 H}{6}$ .

Comme nous l'avons vu, dans le régime quasi statique, il y a apparition d'intermittences où alternent des mouvements en bloc et des situations où quasiment tous les grains sont arrêtés. Dans ce cas, les fluctuations d'énergie cinétique sont de l'ordre de :  $\Delta E_c \sim \frac{H V^2}{2}$ . On a bien :

$$\frac{\Delta E_c}{\langle E_c \rangle} = Cst \sim 1 \quad (3.21)$$

dans le régime quasi statique, où ont lieu les intermittences.

Dans le régime dynamique, les fluctuations d'énergie cinétique se déduisent des fluctuations de vitesse de translation :  $\Delta E_c \approx \frac{\langle v \rangle \rho}{2} \int_0^H \delta v^2 dy$ . En utilisant la loi d'échelle observée précédemment pour les fluctuations de vitesse de translation, on obtient :  $\Delta E_c \sim \dot{\gamma}^2 H I^{-1}$ . On a alors :

$$\frac{\Delta E_c}{\langle E_c \rangle} \sim \frac{1}{H^2 I} \quad (3.22)$$

On retrouve bien la décroissance en  $1/I$  observée à la figure 3.30 (b). On note toutefois une dépendance en  $H$ . La figure 3.36 met en évidence cette dépendance d'une manière qualitative.

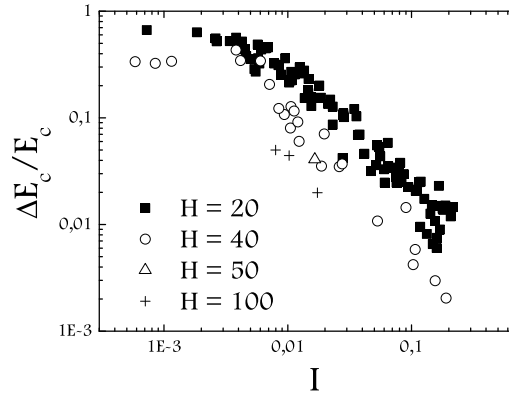


FIG. 3.36 – Fluctuations relatives d'énergie cinétique en fonction du nombre inertiel. Effet de  $H$ .

### 3.6.4 Forces aux parois

Après avoir discuté les fluctuations des grandeurs cinématiques, nous abordons le cas des forces, et en premier lieu des forces aux parois.

La simulation permet de mesurer les forces normales et tangentielles résultantes sur les parois de la cellule de cisaillement. On peut alors tracer ces forces, normalisées par la force normale imposée à la paroi en mouvement (Fig. 3.37). Ainsi, la force tangentielle normalisée moyenne correspond au frottement effectif à la paroi  $\mu_p = \frac{T}{P}$ . On observe de plus que les fluctuations sont de plus en plus importantes lorsque le nombre inertiel augmente. Ainsi, si elles ne représentent que quelques pourcents pour les  $I$  faibles, elles peuvent atteindre un facteur 3 à 4 dans le régime dynamique. On trouve une étude des fluctuations de contrainte dans [2, 193, 119].

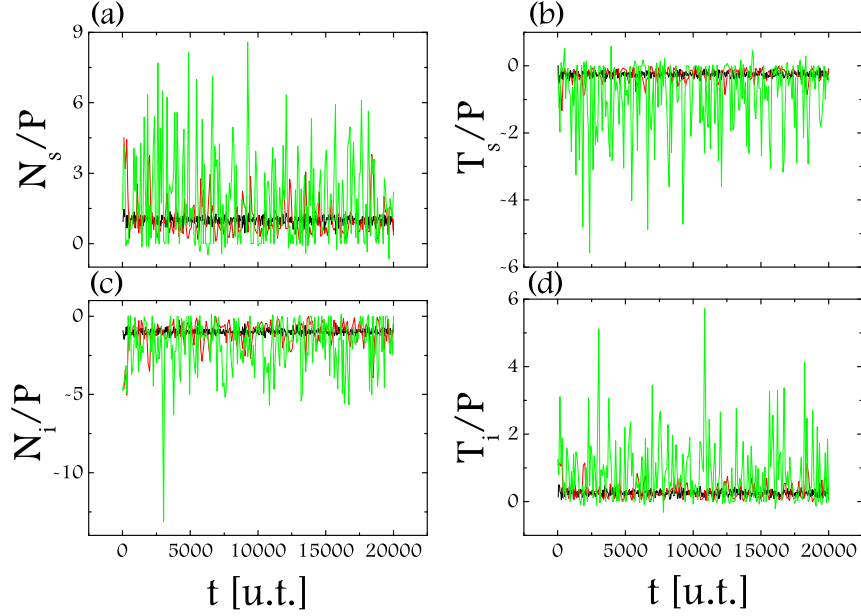


FIG. 3.37 – Forces normales (a et c) et tangentielles (b et d) normalisées par la pression sur les parois de la cellule (haut a,b, [indice s] bas c,d [indice i]) en fonction du temps pour différents  $I$  (en noir  $I = 7 \cdot 10^{-4}$ , en rouge  $I = 2 \cdot 10^{-2}$ , en vert  $I = 2 \cdot 10^{-1}$ ).

### 3.6.5 Frottement effectif

La figure 3.38 représente les fluctuations relatives du frottement effectif à la paroi. On remarque qu'elles diminuent quand  $I$  diminue. On remarque aussi que les fluctuations du frottement aux parois sont plus importantes que les fluctuations spatiales (selon  $y$ ) mesurées en interne.

### 3.6.6 Tenseur des contraintes

Selon le résultat établi par Moreau [126] (voir annexe B), le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , symétrique par construction, est la somme de trois contributions :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^c + \underline{\underline{\Sigma}}^f + \underline{\underline{\Sigma}}^r \quad (3.23)$$

Le premier terme ("contact") est le terme usuel en statique, associé aux efforts de contacts entre grains. Le deuxième terme ("fluctuations") est le tenseur de Reynolds usuel en mécanique des fluides, associé aux fluctuations

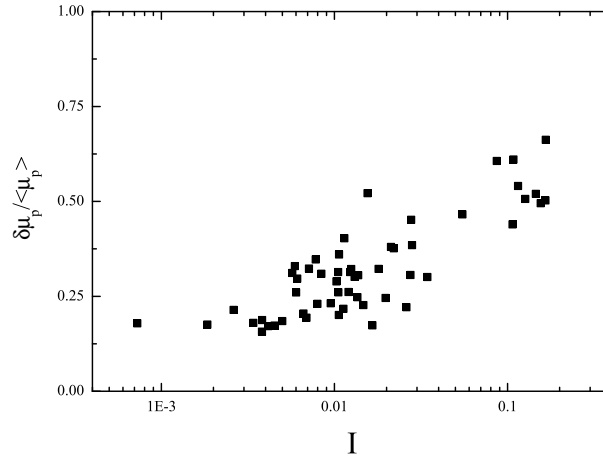


FIG. 3.38 – Fluctuation relative du coefficient de frottement à la paroi en fonction de  $I$ .

de vitesse des grains. Le troisième terme ("rotation") est inhabituel. Il est lié à la rotation propre des grains :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^{N_i} \text{Sym}(\vec{f}^c \otimes \vec{r}^c) \quad (3.24)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^f = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N m_i \delta \vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i \quad (3.25)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^r = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \underline{\underline{Id}} \quad (3.26)$$

La figure 3.39 montre que dans la gamme du paramètre  $I$  explorée, seule la partie "contact" est significative. On a  $\underline{\underline{\Sigma}} \simeq \underline{\underline{\Sigma}}^c$ . Les termes liés aux fluctuations de vitesse et à la rotation des particules ne deviennent significatifs que pour les grandes valeurs de  $I$  (supérieur à 0.3) (Fig. 3.39 (b)). On remarque sur la figure (b) que le poids relatif des termes de fluctuation et de rotation augmente avec  $I$ , selon une loi de puissance :

$$\frac{\underline{\underline{\Sigma}}^f}{\underline{\underline{\Sigma}}} \sim I \quad (3.27)$$

$$\frac{\underline{\underline{\Sigma}}^r}{\underline{\underline{\Sigma}}} \sim I^{\frac{4}{3}} \quad (3.28)$$

Ces lois de puissance s'expliquent tout simplement par les lois de puissance observées pour les fluctuations de vitesse de translation et de rota-



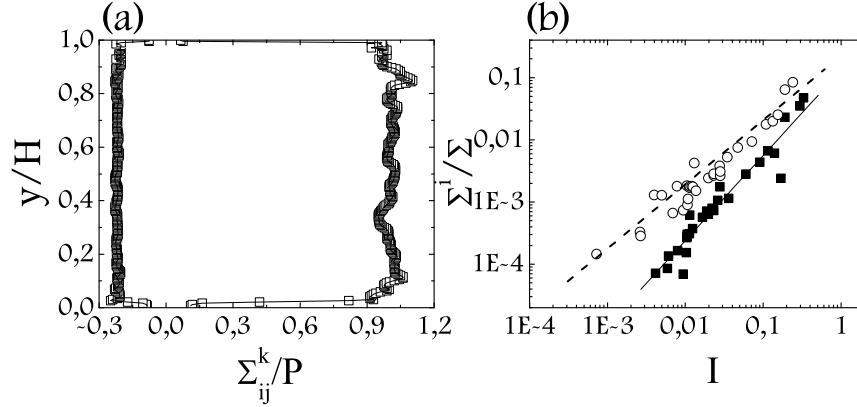


FIG. 3.39 – Importance relative des différentes contributions du tenseur des contraintes. (a) Carrés ouverts : tenseur des contraintes total, courbe : partie "contact" du tenseur ( $I = 0.02$ ) (b) Poids relatif des différentes contributions au tenseur des contraintes. Les carrés noirs correspondent à la partie "rotation", les cercles ouverts à la partie "fluctuations". La droite en trait tireté indique une pente 1 et la droite en trait plein indique une pente  $\frac{4}{3}$ .

tion (les fluctuations de vitesse de rotation étant dominantes devant la rotation moyenne). Étant donné l'écriture des différents termes du tenseur des contraintes on a pour la partie "fluctuations" :

$$\frac{\Sigma^f}{\Sigma} \sim \frac{\delta v^2}{P} \quad (3.29)$$

En utilisant la loi d'échelle equ. 3.18, on retrouve bien la loi de puissance (equ. 3.28). Il en va de même pour la partie "rotations", où cette fois-ci il faut tenir compte du fait que  $\omega \sim \delta\omega$ , puisque même pour les grands  $I$ , les fluctuations de vitesse de rotation sont beaucoup plus grandes que la vitesse de rotation moyenne. On a alors :

$$\frac{\Sigma^r}{\Sigma} \sim \frac{\delta\omega^2}{P} \quad (3.30)$$

En utilisant la loi d'échelle equ. 3.19, on retrouve là aussi la loi de puissance précédente (equ. 3.28).

En conclusion de cette partie, on doit insister sur l'importance des fluctuations dans les écoulements denses proches de l'arrêt. Les fluctuations relatives de vitesse augmentent à proximité de l'arrêt. Par contre les fluctuations relatives des composantes du tenseur des contraintes diminuent.

### 3.7 Limite du cisaillement homogène

Comme nous venons de le voir, le cisaillement plan sans gravité, dans la limite des grains rigides, se révèle être un système modèle homogène. Toutefois il existe des limites à cette homogénéité. Nous discutons successivement l'influence des parois, de la polydispersité et de la rigidité des grains sur le caractère homogène ou non de l'écoulement.

#### 3.7.1 Proximité de la paroi

Précédemment nous avons déjà remarqué l'influence des parois sur les profils des différentes grandeurs mesurées. Ainsi, si la rugosité n'a pas d'effet notable sur le caractère homogène de l'écoulement, on remarque cependant que les profils évoluent rapidement aux abords des parois. On remarque en particulier que les profils de vitesse ne sont plus tout à fait linéaires à proximité des parois : ils s'incurvent. Ceci est d'autant plus notable pour les systèmes épais, mais la longueur d'influence des parois est toujours de l'ordre de 5 diamètres de grain. Nous avons donc cherché à tester l'homogénéité de nos systèmes pour des épaisseurs petites ( $H \approx 5$ ).

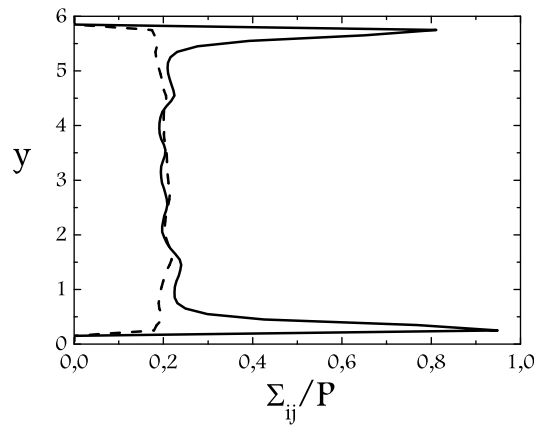


FIG. 3.40 – Profil du frottement effectif. En trait tireté  $\frac{\Sigma_{xy}}{\Sigma_{xx}}(y)$  et en trait plein  $\frac{\Sigma_{yx}}{\Sigma_{yy}}(y)$ . ( $H = 6, e = 0.1, \mu = 0.4, I = 0.03$ )

Des variations rapides, ou même des discontinuités des grandeurs mesurées s'observent dans les deux premières couches de grains en contact avec la paroi. On remarque ainsi que dans la couche la plus proche de la paroi on a :  $\Sigma_{xx} \neq \Sigma_{yy}$  (Fig. 3.40).

On comprend bien que ces couches sont particulières puisqu'elles sont le siège de frustrations de rotations. Ces frustrations sont liées au fait que les particules des parois sont immobiles et donc ne tournent pas.

Ces systèmes peu épais ( $H \simeq 6$ ) sont structurés sur toute l'épaisseur. On peut observer cette structuration en couches sur les profils de compacité, de vitesse et du nombre inertiel (Fig. 3.41).

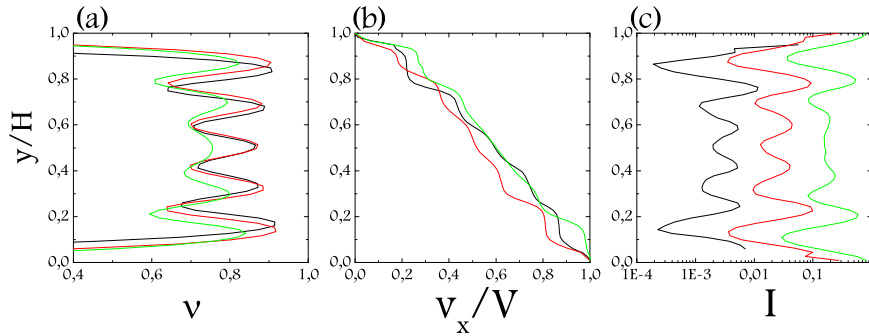


FIG. 3.41 – Profil au sein de petits systèmes. En noir  $I_{global} = 0.003$ , en rouge  $I_{global} = 0.03$  et en vert  $I_{global} = 0.21$  (a) Profil de compacité. (b) Profil de vitesse. (c) Profil du nombre inertiel. ( $H \simeq 6, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

Pour ces petits systèmes, nous avons aussi cherché à mesurer la compacité et le frottement effectif en fonction du nombre inertiel. Pour ce faire, nous avons mesuré ces grandeurs ( $\nu, \mu^*, I$ ) dans une unique couche au centre de l'écoulement. Les figures 3.42 (a) et (b) indiquent le comportement du matériau pour des systèmes peu épais. On note la grande similitude entre ces courbes et celles obtenues pour des épaisseurs plus importantes ( $H > 40$ ) (Fig. 3.8 et 3.11). On retrouve les variations linéaires de la compacité et du frottement effectif avec  $I$ , que ce soit pour un coefficient de frottement intergranulaire nul ou non. Les paramètres restent quasiment les mêmes ( $a \sim 1, b \sim 0.3, \mu_s \sim 0.2$  pour  $\mu = 0.4$  et  $\mu_s \sim 0.1$  pour  $\mu = 0$ , voir equ. 3.2 et equ. 3.3). Comme on pouvait s'y attendre, on note que la compacité maximale est affectée par la structuration en couches. Ainsi, elle est plus faible que dans les systèmes épais ( $\nu_{max}(\mu = 0) = 0.82$  au lieu de 0.84 et  $\nu_{max}(\mu = 0.4) = 0.78$  au lieu de 0.81).

En résumé, l'analyse des petits systèmes indique que la perturbation liée aux parois est très localisée. Elle se limite aux première et deuxième couches de grains près des parois. Et bien que les petits systèmes soient entièrement structurés, cette structuration n'a que peu d'effet sur le comportement du

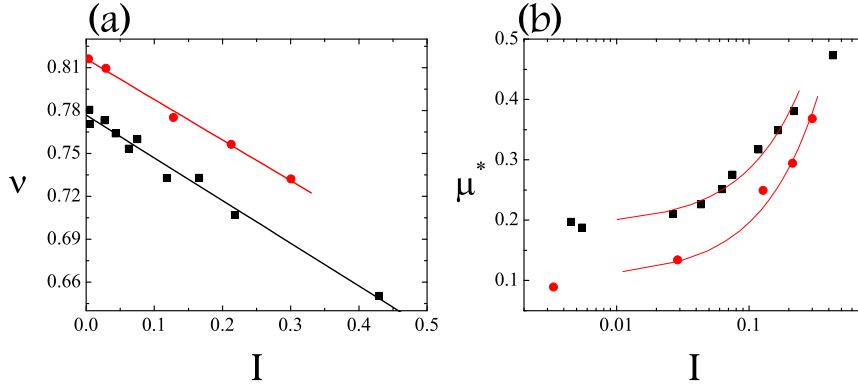


FIG. 3.42 – (a) Compacité fonction de  $I$  et ajustement linéaire. (b) Frottement effectif fonction de  $I$  et ajustement linéaire (Échelle semi-log). Les carrés  $\mu = 0.4$  et les cercles  $\mu = 0$  ( $H = 6, e = 0.1$ )

matériau. Ainsi la structuration en couche qui s'étend sur cinq couches dans les systèmes plus épais ne perturbe pas les mesures.

### 3.7.2 Effet de la polydispersité

Il nous a paru intéressant de regarder l'effet de la polydispersité vis à vis du caractère homogène des écoulements en cisaillement plan sans gravité. Nous avons augmenté la polydispersité jusqu'à 50%, ceci n'a pas d'effet sur le comportement du matériau. Par contre, les systèmes monodisperses, ou faiblement monodisperses sont des cas singuliers où apparaît une localisation du cisaillement. La figure 3.43 (a) montre que le système cristallise au niveau des parois. Le matériau n'est cisailé que sur une dizaine de couches au centre de la cellule. C'est aussi ce que l'on observe sur le profil de vitesse (Fig. 3.43 (b)). Dans la partie proche de la paroi mobile, les grains se déplacent en bloc, alors qu'ils sont à l'arrêt du côté de la paroi fixe. On note toutefois que dans la partie cisailée le profil reste linéaire.

L'analyse du tenseur des contraintes fournit d'autres renseignements. A la différence des systèmes homogènes précédents, les composantes du tenseur des contraintes ne sont plus constantes dans l'épaisseur. Les figures 3.44 (a) et (b) montrent que les variations de  $\Sigma_{yy}$  et de  $\Sigma_{xy}$  avec  $y$  restent faibles et sont liées à la structuration en couches présente dans le matériau cristallisé. Par contre la composante  $\Sigma_{xx}$  varie de manière significative avec  $y$ . De même, le profil de frottement effectif n'est pas constant (Fig. 3.45 (b)). On note en particulier que  $\Sigma_{xx} \neq \Sigma_{yy}$ , ce qui est une différence majeure par rapport aux

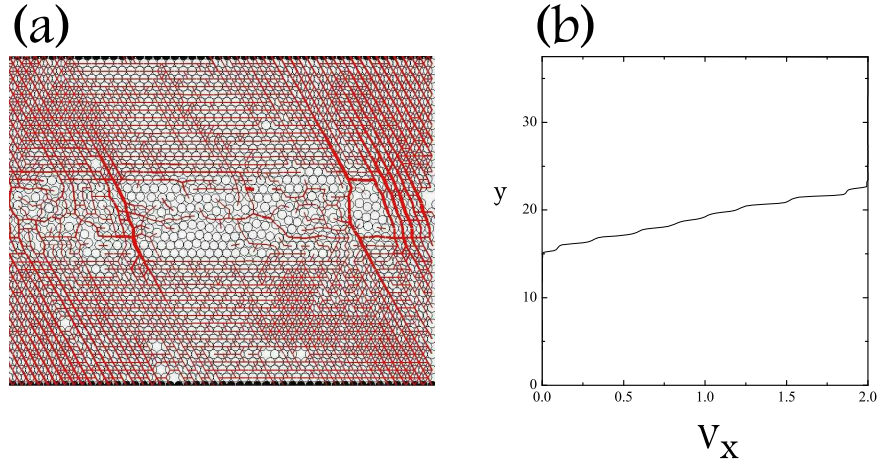


FIG. 3.43 – (a) Image d'un système monodisperse. (b) Profil de vitesse correspondant ( $I_{global} = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).

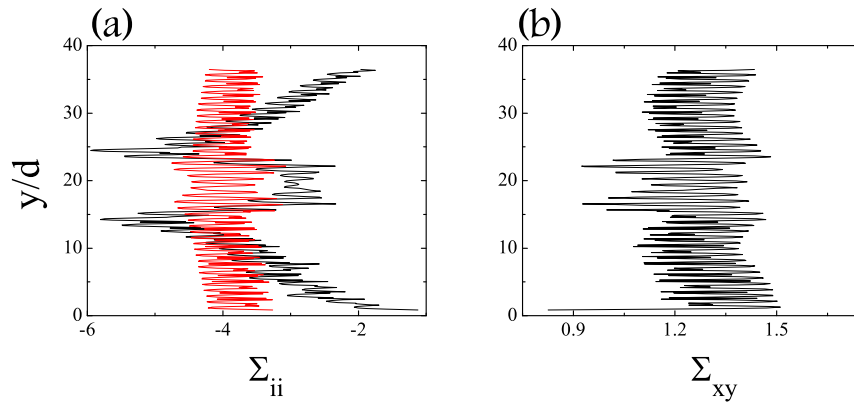


FIG. 3.44 – Tenseur des contraintes pour un système monodisperse : (a) En noir  $\Sigma_{xx}(y)$ , en rouge  $\Sigma_{yy}(y)$ . (b)  $\Sigma_{xy}(y)$  ( $I_{global} = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).

autres systèmes que nous avons étudiés (homogène ou même hétérogène). On peut aussi remarquer sur la figure 3.45 (a), que les limites de la zone cisailée correspondent aux pics de  $\frac{\Sigma_{xx}}{\Sigma_{yy}}$ .

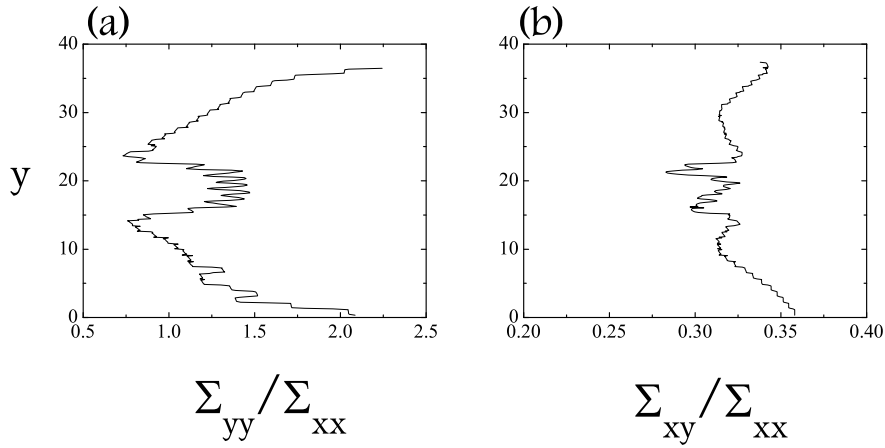


FIG. 3.45 – Profil du rapport des composantes du tenseur des contraintes : (a) Rapport des composantes normales. (b) Rapport des composantes tangentielles et normales ( $I_{global} = 2.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).

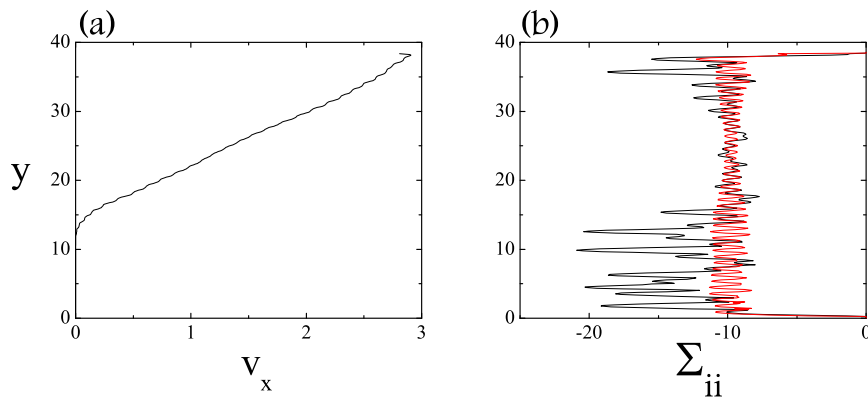


FIG. 3.46 – Polydispersité de 5%. (a) Profil de vitesse. (b) Profil des composantes normales du tenseur des contraintes. En noir  $\Sigma_{xx}$  et en rouge  $\Sigma_{yy}$  ( $I = 2.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ).

Pour des systèmes ayant une polydispersité de 1%, les mêmes remarques (cristallisation, localisation, anisotropie des contraintes) peuvent être faites. Dans ce cas, les profils des contraintes sont plus bruités.

Toutefois, si on continue d'augmenter la polydispersité (à 5%), la localisation du cisaillement se fixe sur la paroi mobile (Fig. 3.46(a)). La zone cisailée devient plus importante ; dans ce cas, elle atteint les trois quarts de l'épaisseur. Le désordre introduit par la polydispersité empêche le milieu de cristalliser. On peut alors penser qu'il est plus facile de cisailier le matériau, il est donc cisailé sur une épaisseur plus importante. Pour des polydispersités encore plus élevées (ce qui est le cas dans l'ensemble de notre étude), le matériau est cisailé sur toute son épaisseur.

### 3.7.3 Grand système de grains peu rigides

On peut penser que si on s'éloigne de la limite des grains rigides, le système risque de ne plus être homogène. En effet dans le cas de grains mous, une perturbation de déformation ne se propage pas aussi loin, ce qui pourrait conduire à localiser le cisaillement près de la paroi mobile. Nous avons donc testé cette hypothèse vis à vis de grands systèmes ( $H = 100$ ) composés d'une assemblée de grains ayant un coefficient de rigidité plus petit ( $k_n = 10^3$  au lieu de  $k_n = 10^4$ ).

Nous avons alors distingué deux cas : Dans le premier, la pression imposée est faible, de telle manière que le paramètre caractérisant la rigidité des grains  $\frac{P}{k_n}$  est égal à  $10^{-3}$ . Ainsi le système reste dans la limite des grains rigides. On observe alors que le matériau est entièrement cisailé sur son épaisseur. Les figures 3.47 (a), (b) et (c) représentant les profils de vitesse, du nombre inertiel et du coefficient de frottement effectif indiquent que le matériau est soumis à un cisaillement homogène. Ainsi ce système se place encore dans la limite des grains rigides.

Afin de tester l'hypothèse précédente, dans le deuxième cas, nous avons augmenté la pression de telle sorte que  $\frac{P}{k_n} = 2.5 \cdot 10^{-2}$ . Cette fois-ci nous obtenons un état stationnaire où le matériau n'est pas cisailé sur toute son épaisseur. Les profils des figures 3.48 (a), (b) et (c) montrent effectivement que le matériau n'est plus cisailé d'une manière homogène : il y a localisation du cisaillement. On peut penser que la localisation est induite par la faible rigidité des grains.

Comme pour les systèmes que nous avons étudiés précédemment, on peut mesurer les différentes grandeurs physiques en fonction du nombre inertiel. Mais ici, nous prendrons en compte les variations de  $I$  et des autres grandeurs avec  $y$ , les mesures sont donc faites localement. On mesure alors une grandeur physique à la côte  $y$  en fonction de  $I(y)$ . Il nous faut aussi faire la remarque suivante : ce système se situe clairement dans le régime quasi-statique, puisque  $I_{global} = 2 \cdot 10^{-4}$ , ce qui est en dessous de la gamme que nous avons explorée dans le cas du cisaillement homogène.

Toutefois nous remarquons que les variations de différentes grandeurs avec  $I$  restent similaires à celles observées dans le cas du cisaillement homogène. C'est ce que montrent les figures 3.49 (a) et (b) pour la compacité et

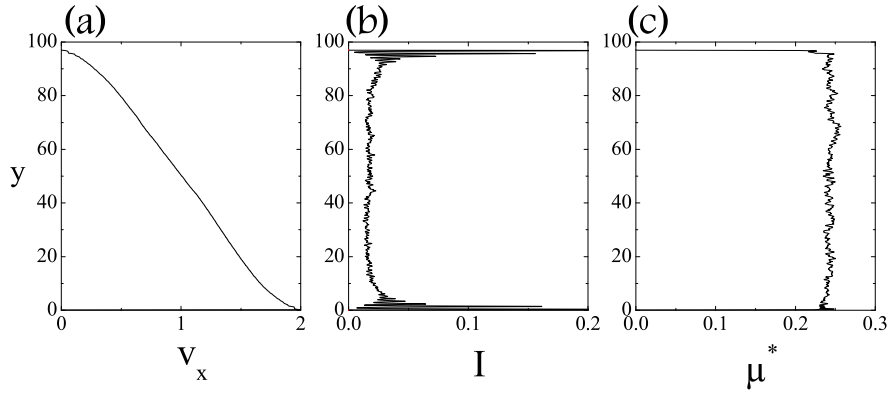


FIG. 3.47 – Grains mous – Faible pression ( $k_n = 10^3, P = 1$ ). (a) Profil de vitesse. (b) Profil du nombre inertiel. (c) Profil du coefficient de frottement effectif. ( $I = 2 \cdot 10^{-2}, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

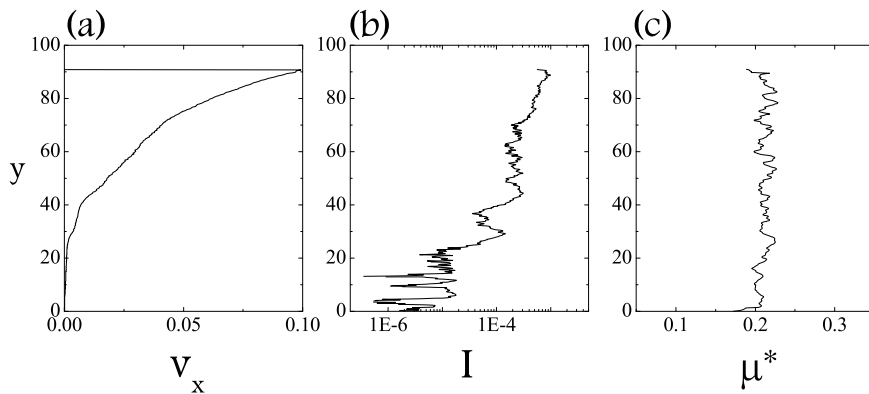


FIG. 3.48 – Grains mous – Forte pression ( $k_n = 10^3, P = 25$ ). (a) Profil de vitesse. (b) Profil du nombre inertiel. (Échelle log.) (c) Profil du coefficient de frottement effectif. ( $I = 2 \cdot 10^{-4}, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

le frottement effectif en fonction de  $I$ . Ainsi on observe sur la figure (a) que la compacité est toujours une fonction linéaire légèrement décroissante de  $I$ . Cependant, la compacité maximale est plus élevée. La figure 3.49 (b) indique



que les mesures faites localement dans ce système complètent parfaitement celles obtenues dans le cas des systèmes homogènes.

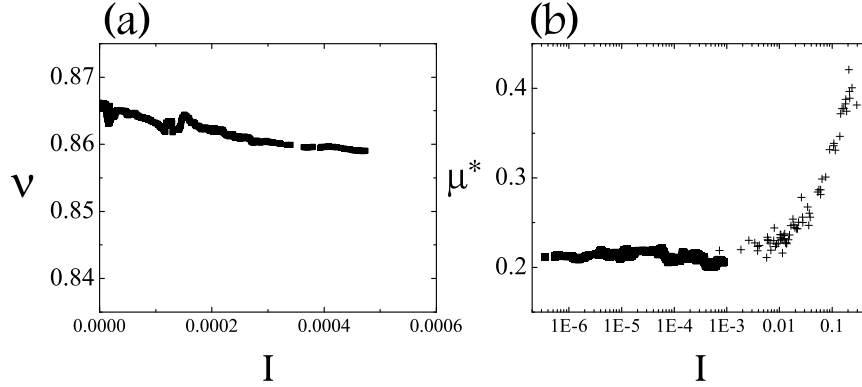


FIG. 3.49 – (a) Compacité en fonction de  $I$ . (b) Frottement effectif en fonction de  $I$ . Les carrés noirs correspondent aux mesures effectuées dans le cas d'un système de grains mous ( $\frac{P}{k_n} = 2.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $I = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ), les croix correspondent aux mesures effectuées dans les systèmes homogènes ( $\frac{P}{k_n} > 2.5 \cdot 10^{-3}$ ). Échelle semi-log.

Les figures 3.50 (a), (b) et (c) montrent que les observations microscopiques faites dans le cas de systèmes homogènes restent qualitativement valables. Ainsi on observe bien que les fluctuations de vitesse augmentent lorsque  $I$  diminue. De même, on retrouve le fait que la mobilisation du frottement augmente avec le nombre inertiel. Toutefois, on remarque que concernant les fluctuations de vitesse, les lois d'échelle que nous avons mises en évidence ne sont plus les mêmes ( $\beta \rightarrow \frac{7}{4}$  et  $\varepsilon \rightarrow \frac{5}{4}$ ). En outre, on note que les fluctuations saturent pour les très petits  $I$ . Les différences que l'on observe ici avec le cas du cisaillement homogène s'expliquent peut être par le fait que l'on n'étudie pas la même gamme de nombre inertiel.

Il existe peut être encore d'autres gammes de paramètres qui permettent au cisaillement de se localiser, mais notre but n'est pas de déterminer avec précision les limites du cisaillement homogène. Une étude plus détaillée des limites du cisaillement homogène pourrait être faite. Nous voulons plutôt montrer qu'en cisaillement plan il est possible d'obtenir des états internes homogènes pour une large gamme de paramètres, à partir du moment où l'on n'étudie pas un système monodisperse. Enfin, l'exemple précédent montre que l'analyse ( $\mu^*(I)$  et  $\nu(I)$ ) que nous avons effectuée dans le cadre du cisaillement homogène reste valable pour des systèmes qui localisent, pourvu

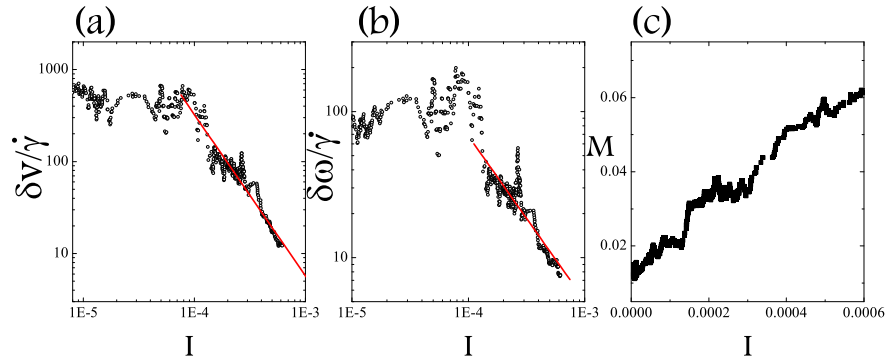


FIG. 3.50 – (a) Fluctuations de vitesse de translation relative en fonction de  $I$ . La droite indique une pente de  $-7/4$ . (b) Fluctuations de vitesse de rotation relative en fonction de  $I$ . La droite indique une pente de  $-5/4$ . (c) Mobilisation du frottement en fonction de  $I$ . ( $I = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ )

que l'on remplace les grandeurs étudiées par leur valeur locale. Nous verrons au chapitre 4 qu'il est possible d'étendre cela à d'autres systèmes hétérogènes. Nous avons donc étudié deux systèmes modèles : le cisaillement plan avec gravité et le cisaillement annulaire.



## Chapitre 4

# Systemes hétérogènes

**N**ous abordons maintenant les systèmes qui présentent une hétérogénéité de contrainte, du fait soit de la géométrie (cisaillement annulaire), soit d'un gradient de pression dû à la gravité (cisaillement plan avec gravité). Alors nous ne pouvons plus faire les moyennes spatiales sur les différentes grandeurs d'intérêt. L'analyse se fera donc localement, ce qui est un avantage non négligeable du point de vue numérique. En effet, une seule simulation numérique permet alors de balayer une gamme du nombre inertiel sur plusieurs décades. Mais voyons tout d'abord quelles prédictions il est possible de faire en étendant les résultats obtenus en cisaillement homogène au cisaillement hétérogène.

### 4.1 Prédiction de la loi de frottement

Nous avons mesuré dans le cas du cisaillement homogène la variation du frottement effectif en fonction du nombre inertiel, c'est ce que l'on a appelé la loi de frottement effectif. La connaissance de cette loi et de la distribution des contraintes dans une géométrie donnée, permet de prédire le profil de  $I(y)$  et donc le profil de vitesse dans cette géométrie.

Les variations de  $\mu^*(I)$  peuvent être ajustées par une loi linéaire :

$$\mu^*(I) = \mu_s + bI \quad (4.1)$$

Le taux de cisaillement s'écrit alors :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{b} \left( \frac{S}{\sqrt{P}} - \mu_s \sqrt{P} \right) \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Cisaillement plan avec gravité

En cisaillement plan avec gravité (cas de la figure 4.1 (a)) les contraintes s'écrivent :

$$P(y) = P_0 + \rho_p \nu g(H - y) \quad (4.3)$$

$$S(y) = Cst \quad (4.4)$$

où  $P_0$  est la pression imposée à la paroi du haut <sup>1</sup> et  $H$  l'épaisseur en écoulement (l'origine étant prise en bas). On a donc :

$$\dot{\gamma} = \frac{\sqrt{P_0 + \rho_p \nu g(H - y)}}{b} \left( \frac{S}{P_0 + \rho_p \nu g(H - y)} - \mu_s \right) \quad (4.5)$$

soit :

$$v_x(y) = \frac{\sqrt{P_0 + \rho_p \nu g(H - y)}}{b} \left( 2S - \frac{2}{3} \mu_s (P_0 + \rho_p \nu g(H - y)) \right) + Cst \quad (4.6)$$

Lorsque  $\mu < \mu_s$   $I = 0$ , le taux de cisaillement ou la vitesse sont nuls (l'équation précédente est valable tant que  $v_x > 0$ , au delà on a  $v_x = 0$ ). Ceci correspond donc à une localisation du cisaillement. La constante est telle que  $v_x(y = H) = V$ .

#### 4.1.2 Cisaillement annulaire

Dans le cas du cisaillement annulaire, la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$S = \frac{C}{r^2} \quad (4.7)$$

Toutefois, la contrainte normale reste indéterminée. Nous faisons l'hypothèse qu'elle est constante  $P = Cst$ . Dans ce cas on obtient :

$$\dot{\gamma} = \frac{\sqrt{P}}{b} \left( \frac{C}{Pr^2} - \mu_s \right) \quad (4.8)$$

soit :

$$v_\theta(r) = \frac{\sqrt{P}}{b} \left( \frac{C \ln(r)}{P} - \mu_s \frac{r}{2} \right) + Cst \quad (4.9)$$

Comme dans le cas précédent cette relation n'est valable que pour  $v(\theta) > 0$ , ceci correspond donc à une localisation du cisaillement. Comme précédemment, il faudrait tenir compte des conditions aux limites  $v_\theta(r = R_i) = \Omega R_i$ .

Nous allons maintenant regarder si ces prédictions se vérifient. On se propose donc d'aborder le cisaillement plan avec gravité dans un premier temps, puis on étudiera le cisaillement annulaire.

<sup>1</sup>On notera dans la suite  $P_0$  la pression imposée, afin de la différencier de la pression dans le matériau  $P$ .

## 4.2 Cisaillement plan avec gravité

Cette géométrie est exactement la même que celle que nous venons d'étudier dans le chapitre précédent. La différence est que l'on a placé la cellule de cisaillement dans un champ gravitationnel  $\vec{g}$  perpendiculaire au taux de cisaillement. Selon les simulations,  $g$  varie entre 0.2 et 5 en unités adimensionnées. La gravité définit naturellement le haut et le bas de la cellule de cisaillement. Alors, on doit distinguer quatre cas selon la position (haut ou bas) de la paroi imposant le cisaillement et de la paroi imposant la pression. La figure 4.1 représente ces quatre configurations. Sauf précision, c'est la situation (a) où la paroi imposant la vitesse et la pression est en haut, qui a été étudiée.

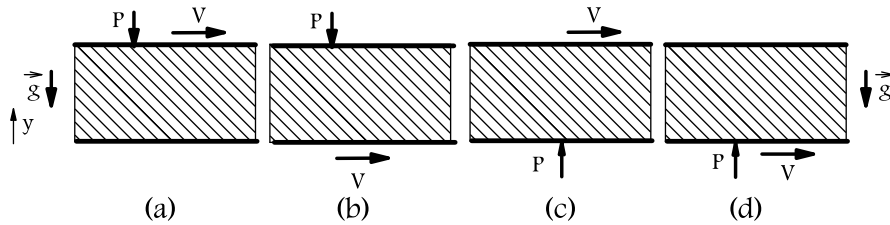


FIG. 4.1 – Différentes orientations de la gravité par rapport aux parois imposant le cisaillement ou la pression.

### 4.2.1 Localisation

Comme pour le cisaillement plan sans gravité, nous avons mesuré les profils de différentes grandeurs. Pour un couple gravité et pression ( $g, P_0$ ) donné, on obtient les profils de compacité et de vitesse des figures 4.2 (a) et (b). On observe alors des profils analogues à ceux de Volfson *et al.* [194] pour des simulations similaires.

Le profil moyen de compacité (Fig. 4.2 (a)) indique que la compacité n'est pas constante dans le matériau. Elle est presque constante et très élevée ( $\nu \approx 0.84$ ) dans les 20 premières couches proches du bas. Dans la vingtaine de couches suivantes, elle diminue de façon significative pour atteindre une compacité de 0.78. Le matériau s'est donc dilaté uniquement dans sa partie supérieure pour pouvoir s'écouler.

Le profil de vitesse (Fig. 4.2 (b)) indique effectivement que le cisaillement est localisé sur une dizaine de couches de grains près de la paroi supérieure. C'est là une différence majeure avec le cisaillement plan sans gravité. C'est ici l'hétérogénéité de contraintes qui est responsable de la localisation.

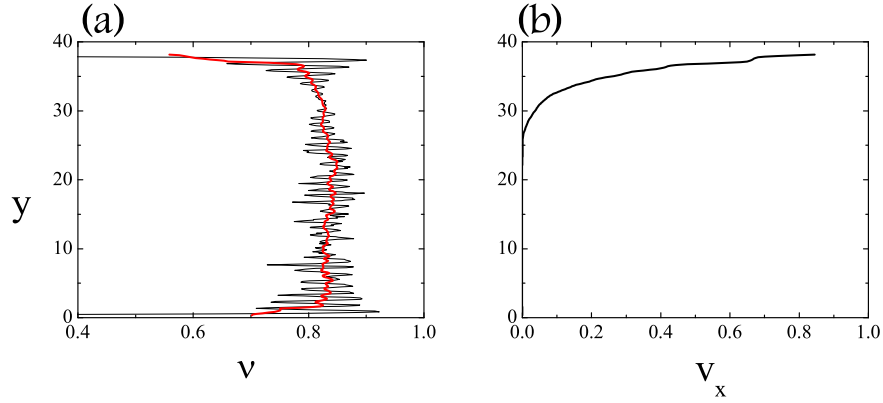


FIG. 4.2 – (a) Profil de compacité. En trait plus épais un profil moyenné sur 2 grains. (b) Profil de vitesse. ( $e = 0.1, \mu = 0.4, V = 1, P_0 = 25$  et  $g = 1$ )

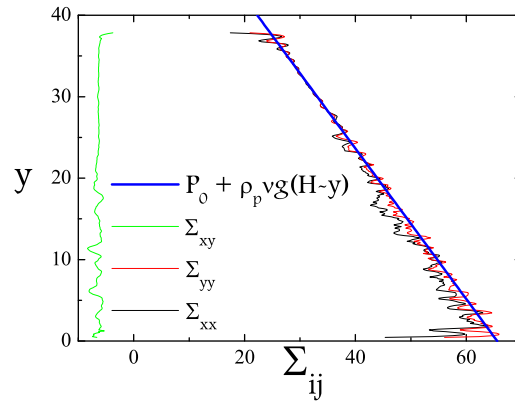


FIG. 4.3 – Profil des composantes du tenseur des contraintes. Comparaison avec la conservation de la quantité de mouvement. ( $e = 0.1, \mu = 0.4, V = 1, P_0 = 25$  et  $g = 1$ )

En cisaillement plan avec gravité, on sait que la pression dans le matériau s'écrit  $P(y) = P_0 + \nu \rho_p g (H - y)$ . C'est effectivement ce que montre la figure 4.3. Comme attendu, on observe bien la conservation de la quantité de mouvement : la composante tangentielle du tenseur des contraintes reste

constante et la composante normale augmente linéairement avec la profondeur. Remarquons encore que  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}$ .

En outre, la figure 4.4 montre que les profils de vitesse semblent exponentiels, du moins dans leur partie supérieure. Le profil de taux de cisaillement semble lui aussi exponentiel, avec une structuration en couche proche de la paroi du haut.

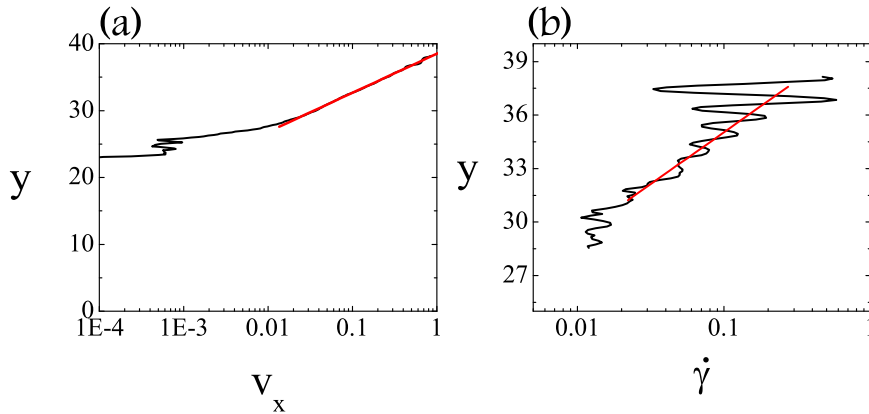


FIG. 4.4 – (a) Profil de vitesse. Échelle semi-log. (b) Profil du taux de cisaillement. (Droite de pente 0.4)

A partir de ces grandeurs, on peut alors calculer le profil du nombre inertiel, qui doit varier comme :

$$I(y) = \frac{\dot{\gamma}_0 \exp(\frac{y}{\lambda})}{\sqrt{P_0 + \nu \rho_p g (H - y)}} \quad (4.10)$$

avec  $\dot{\gamma}_0$  et  $\lambda$  des paramètres qui s'ajustent pour le profil de taux de cisaillement,  $\lambda$  correspondant à la largeur de la bande de cisaillement. De même, il est possible de calculer le coefficient de frottement effectif, il doit varier comme :

$$\mu(y) = \frac{\Sigma_{xy}}{P_0 + \nu \rho_p g (H - y)} \quad (4.11)$$

La figure 4.5 indique que ce sont bien ces variations qui sont observées. Remarquons toutefois que pour les couches les plus profondes (c'est à dire  $y \rightarrow 0$  ou encore  $I \rightarrow 0$ ) les fluctuations deviennent de plus en plus importantes.

Pour résumer, l'introduction de la gravité crée une hétérogénéité de contraintes qui a pour conséquence la localisation du cisaillement. Le système est alors



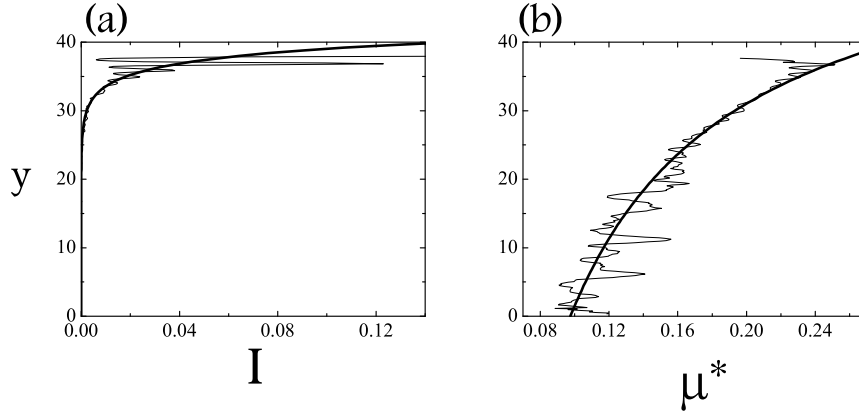


FIG. 4.5 – (a) Profil du nombre inertiel et comparaison l’ajustement (equ. 4.10). (b) Profil du coefficient de frottement effectif et comparaison avec l’ajustement (equ. 4.11).

hétérogène, mais il est toujours possible de définir les grandeurs d’intérêt pour l’étude de l’écoulement d’un point de vue local.

#### 4.2.2 Dilatance et frottement effectif

On se propose donc ici de retrouver la loi sur la dilatance et le frottement effectif à partir des valeurs locales  $I(y)$ ,  $\mu^*(y)$  et  $\nu(y)$ . Il est possible de mesurer  $\nu(I(y))$ , ou encore  $\mu^*(I(y))$ , que l’on notera plus simplement dans la suite  $\nu(I)$  et  $\mu^*(I)$ .

Les figures 4.6 (a) et (b) indiquent, pour le système étudié précédemment, la variation de la dilatance et du frottement effectif en fonction du nombre inertiel. La figure 4.6 (a) montre que la compacité diminue linéairement avec  $I$ . La petite remontée que l’on voit lorsque  $I \rightarrow 0$  n’est pas significative. En fait, l’insert de la figure 4.6 (a) indique que cela est dû à la dispersion des mesures aux très faibles  $I$ . Ainsi, il nous est donc impossible de mesurer avec précision la compacité aux toutes petites valeurs de  $I$ . La méthode de dynamique moléculaire utilisée ici n’est pas adaptée pour l’étude des systèmes statiques (ou quasi statiques avec des  $I < 10^{-4}$ ). Des méthodes adaptées ont été développées par G. Combe et J.N. Roux [40].

Notons toutefois que l’on retrouve un comportement tout à fait analogue à celui observé en cisaillement plan sans gravité. Même pour un système hétérogène, la compacité varie linéairement avec le nombre inertiel. Cependant,

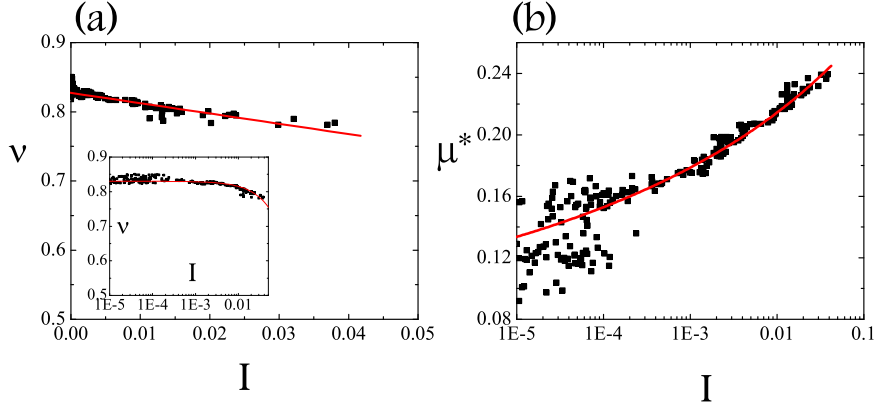


FIG. 4.6 – (a) Variation de la compacité en fonction de  $I$ , et ajustement par une droite. En insert échelle semi log. (b) Variation du frottement effectif en fonction de  $I$  et comparaison avec l'ajustement (equ. 4.12). Échelle semi log. ( $P_0 = 2.5, \mu = 0.4, e = 0.1$ )

on ne retrouve pas quantitativement la même courbe. Par exemple, pour un même  $\mu$ , la compacité décroît plus rapidement en présence de gravité.

Il en va de même pour le frottement effectif en fonction de  $I$ . Celui-ci augmente avec  $I$  à partir d'une valeur  $\mu_s$  d'une manière analogue à ce qui a été observé en cisaillement homogène. Ce comportement se déduit d'ailleurs des équations 4.10 et 4.11 :

$$\mu(I) = \frac{\Sigma_{xy}}{P_0 + \rho_p \nu g (H - I^{-1}(y))} \quad (4.12)$$

On observe sur la figure 4.6 (b) une très bonne correspondance entre ce résultat, représenté par la courbe et les mesures effectuées au sein du matériau. Cependant, on note encore la dispersion des mesures pour les faibles valeurs de  $I$ . En outre, l'équation 4.12 et l'expression de  $I(y)$  suggèrent une variation logarithmique du frottement effectif avec  $I$ . Toutefois, la gamme de  $I$  explorée en cisaillement homogène ne permet pas de discriminer une variation linéaire ou logarithmique.

Les figures 4.7 (a) et (b) comparent  $\nu(I)$  et  $\mu^*(I)$  avec et sans gravité. On remarque une assez bonne correspondance pour  $\nu(I)$ , mais un écart pour  $\mu^*(I)$ . On rappelle que le frottement effectif en cisaillement sans gravité s'écrit  $\mu^* = \mu_s + bI$ , avec  $\mu_s = 0.22$  et  $b = 1$ , pour des grains frottants. Dans le cas avec gravité, la variation du frottement effectif semble plutôt logarithmique et  $\mu_s = 0.14$ , toutefois, le comportement qualitatif reste similaire.

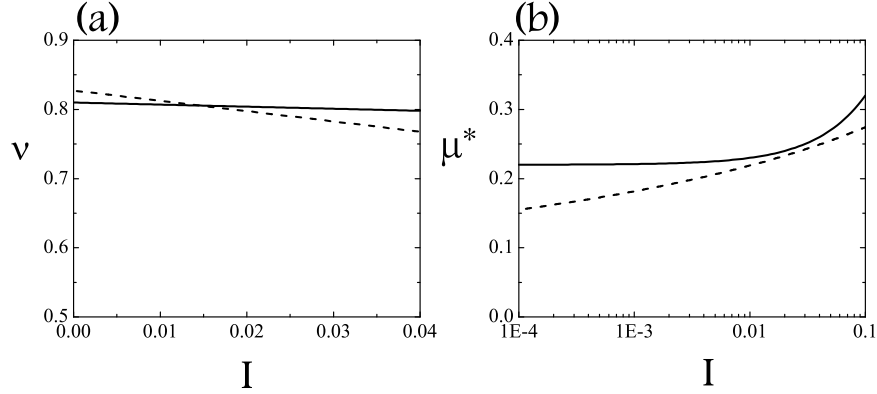


FIG. 4.7 – Variation en fonction de  $I$  (a) de la compacité, (b) du frottement effectif. Échelle semi log. En trait plein sans gravité, en tireté avec gravité.

Ainsi, bien que le système soit hétérogène, le comportement du matériau, déterminé par la variation de la compacité et du frottement avec le nombre inertiel, reste similaire à celui observé pour un cisaillement homogène. Toutefois on observe des déviations quantitatives des grandeurs mesurées par rapport à leurs valeurs prises pour un système homogène.

### 4.2.3 Nouveau nombre adimensionnel

On s'aperçoit que les déviations dépendent du couple  $(P, g)$ . En fait, en introduisant la gravité, on introduit un nouveau paramètre. L'analyse dimensionnelle suggère donc l'utilisation d'un nouveau nombre adimensionnel :

$$G_p = \frac{\rho_p g d}{P_0} \quad (4.13)$$

Celui-ci compare donc la pression associée à la gravité avec la pression imposée. Les profils de vitesse (Fig. 4.8) varient avec  $G_p$ . Ils indiquent que la largeur de la bande de cisaillement augmente lorsque  $G_p$  diminue.

En ajustant les profils par une fonction exponentielle du type :

$$v_x(y) = v_0 \exp\left(-\frac{H-y}{\lambda}\right) \quad (4.14)$$

On peut estimer la largeur de la bande de cisaillement par  $\lambda$ . La figure 4.9 montre les variations de cette longueur en fonction de  $G_p$ . On observe une loi de puissance :

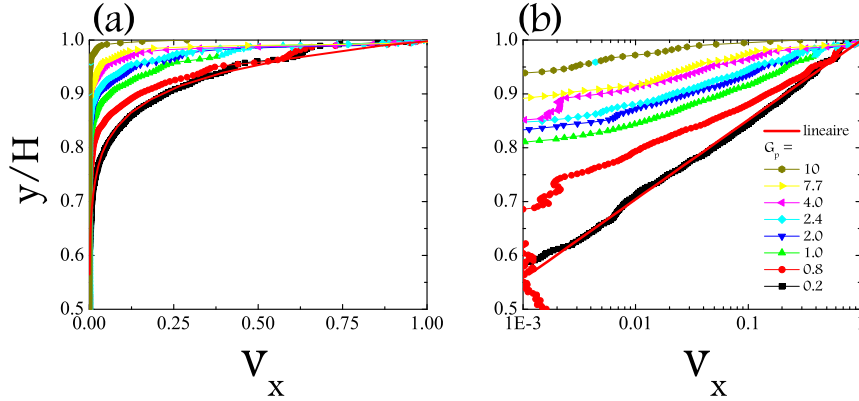


FIG. 4.8 – Profil de vitesse pour différents  $G_p$ . (a) Échelle linéaire. (b) Échelle logarithmique. ( $H = 40, e = 0.1, \mu = 0.4$ )

$$\lambda = \lambda_0 G_p^{-\chi} \quad (4.15)$$

avec  $\lambda_0 = 3$  et  $\chi = 0.5$ . On note en particulier que la longueur de la bande de cisaillement diverge pour  $G_p \rightarrow 0$ . Ainsi, dans le cas d'un écoulement d'épaisseur finie  $H$ , il existe un moment où  $\lambda \rightarrow H$ . Cela correspond au moment où le système ne sent plus l'effet de la gravité.

Il nous est possible de mesurer la dilatance et le frottement effectif en fonction du nombre inertiel, selon la valeur de  $G_p$ . On obtient alors la figure 4.10. Ainsi, on retrouve bien le fait que pour une valeur de  $G_p$  quelconque on a un comportement similaire pour la compacité et le frottement effectif. On remarque aussi que les données paraissent plus bruitées pour les systèmes avec gravité, ce qui est particulièrement visible sur la figure 4.10 (a). En fait cela est dû à la mesure locale des différentes grandeurs. La figure 4.10 (b) indique que le nombre sans dimension  $G_p$  détermine la forme exacte de la courbe de frottement en fonction de  $I$ . Ainsi pour un système soumis à la gravité, le frottement effectif est une fonction à la fois de  $I$  et de  $G_p$ . Pour les faibles valeurs de  $G_p$ , la gravité est écrantée, on obtient une courbe  $\mu^*(I)$  analogue à celle sans gravité. Lorsque  $G_p$  augmente  $\mu^*$  diminue pour les faibles valeurs du nombre inertiel.

#### 4.2.4 Micromécanique

Pour finir, notons l'influence de la gravité sur la micromécanique du système en regardant la coordonnée  $Z$ , la mobilisation du frottement  $M$  et les

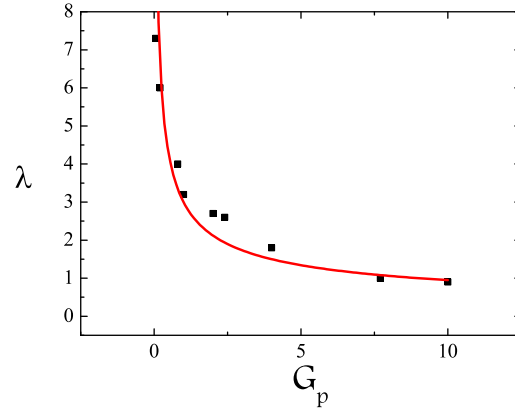


FIG. 4.9 – Largeur de la bande de cisaillement en fonction de  $G_p$ . La courbe correspond à un ajustement en loi de puissance (equ. 4.15).

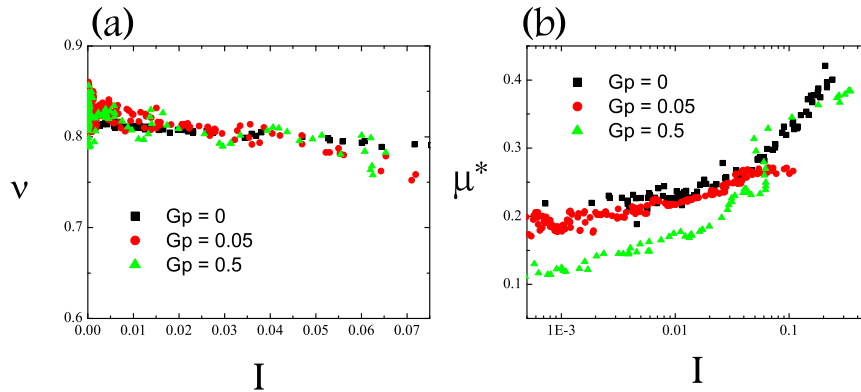


FIG. 4.10 – (a) Variation de la compacité en fonction de  $I$ . (b) Variation du frottement effectif en fonction de  $I$ . Échelle semi log.

fluctuations relatives de vitesse. Les figures 4.11 (a) et (b) représentent les profils de coordinance et de mobilisation du frottement respectivement, pour un système donné (le même que celui des figures 4.2 (a) et (b)). On remarque que comme pour les autres grandeurs, celles-ci varient notablement dans la zone de cisaillement. Dans la zone de cisaillement, la coordinance chute à 0 et la mobilisation augmente.

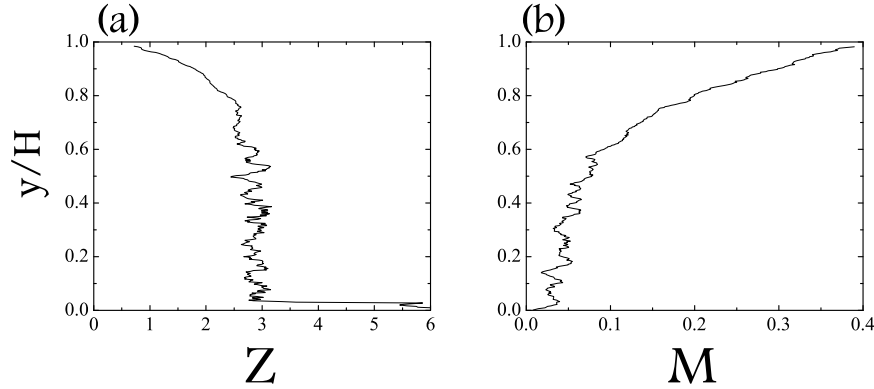


FIG. 4.11 – (a) Profil de coordinnence. (b) Profil de mobilisation de frottement. ( $H = 40, e = 0.1, \mu = 0.4, G_p = 0.1$ )

Cependant, cette variation de la coordinnence et de la mobilisation du frottement est directement et uniquement liée à la variation du nombre inertiel. En effet, on remarque sur les figures 4.12 (a) et (b) que le nombre  $G_p$  n'a que peu d'influence sur ces grandeurs microscopiques. Les observations faites en cisaillement sans gravité pour la coordinnence restent pour ainsi dire inchangées. La mobilisation du frottement est légèrement modifiée, mais la variation de la mobilisation avec  $I$  reste qualitativement la même avec ou sans gravité.

Les figures 4.13 (a) et (b) indiquent que pour un système hétérogène il existe toujours une loi d'échelle entre les fluctuations relatives de vitesse et le nombre inertiel. Toutefois, on remarque que dans ce système les exposants de la loi d'échelle sont modifiés, pour la vitesse de translation on a 0.6 au lieu de 0.5 et pour la vitesse de rotation on a 0.5 au lieu de 0.3.

Ainsi, il semble que les grandeurs macroscopiques comme le frottement, ainsi que les lois d'échelle des fluctuations de vitesse dépendent à la fois du nombre inertiel et de  $G_p$ , alors que les grandeurs microscopiques comme la coordinnence et la mobilisation du frottement dépendent de  $I$  et faiblement de  $G_p$ .

#### 4.2.5 Orientation relative de la gravité par rapport aux parois mobiles

On se propose ici de décrire l'effet de l'orientation de la gravité par rapport à la paroi imposant la pression et par rapport à la paroi imposant la

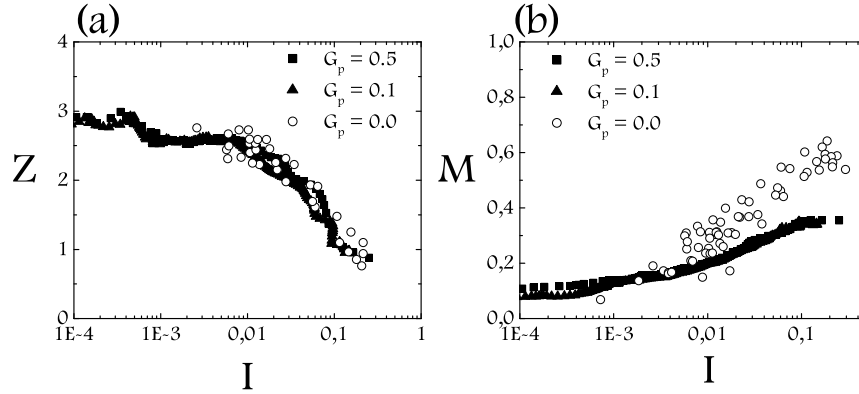


FIG. 4.12 – Variation en fonction de  $I$ , pour différents  $G_p$  de la coordinence (a) et de la mobilisation du frottement (b).

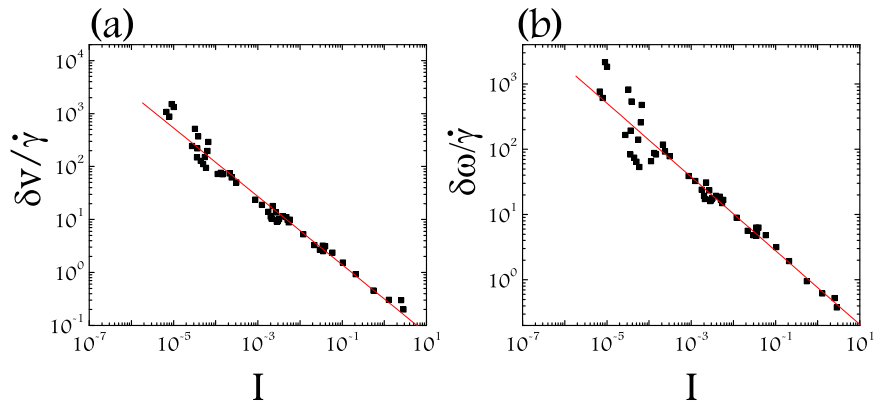


FIG. 4.13 – Variation en fonction de  $I$  des fluctuations relatives de vitesse (a) et de vitesse de rotation (b). Les droites indiquent une pente de  $-0.6$  et  $-0.5$  respectivement. ( $H = 40, e = 0.1, \mu = 0.4, G_p = 0.5$ )

vitesse. Pour des valeurs des paramètres équivalentes nous avons regardé les quatre cas de figures schématisés sur la figure 4.1.

La figure 4.14 indique que le cisaillement localise toujours en haut. L'endroit où la localisation du cisaillement se produit est donc déterminé uni-

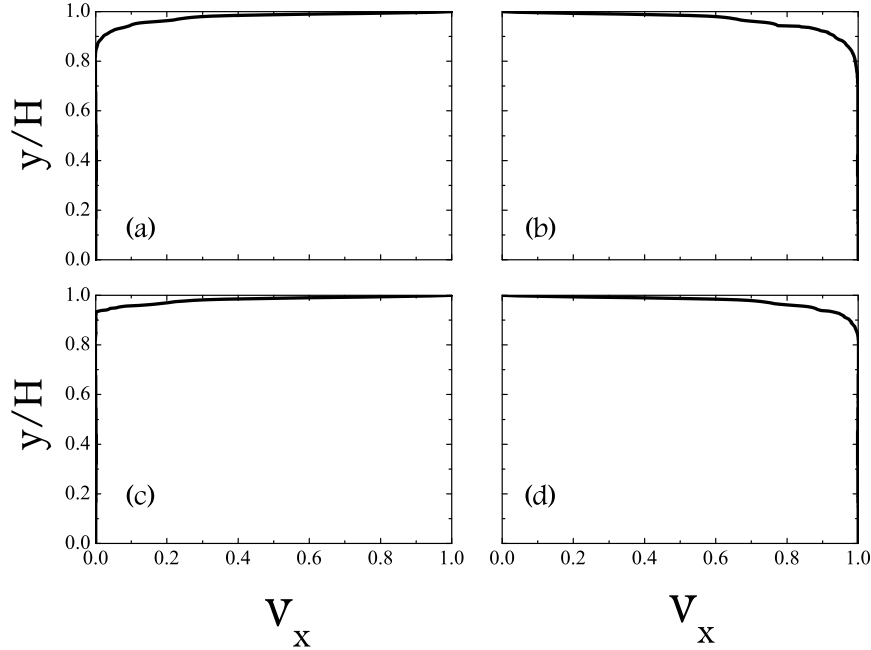


FIG. 4.14 – Profil de vitesse pour les différentes configurations. Les lettres correspondent aux configurations. ( $H = 40, \mu = 0.4, e = 0.1, G_p = 0.5, I = 1.6 \cdot 10^{-2}$ )

quement par le sens de la gravité. La symétrie du cisaillement homogène en cisaillement plan sans gravité est brisée par l'introduction de la gravité.

En résumé, nous avons montré que la gravité introduit une hétérogénéité qui est responsable de la localisation du cisaillement. Dans ce cas, le matériau est décrit par une loi de frottement effectif  $\mu^*(I)$  qui est analogue à celle obtenue en cisaillement plan sans gravité. Toutefois celle-ci dépend du nombre  $G_p$  qui traduit le rapport entre la pression liée à la gravité et la pression imposée. La courbe  $\mu^*(I)$  se décale vers les faibles valeurs du frottement lorsque  $G_p$  augmente. Ceci constitue une information importante pour les systèmes soumis à la gravité. En particulier, ceci signifie que le seuil d'arrêt sur un plan incliné est affecté par la pression. Le seuil d'arrêt n'est donc pas le même proche de la surface libre ou proche du socle. Nous reviendrons sur cette application au plan incliné dans la troisième partie.



### 4.3 Cisaillement annulaire

Un deuxième système simple présentant une hétérogénéité de contraintes est le cisaillement annulaire. Cette géométrie, appelée aussi cellule de Couette, est une géométrie courante en rhéométrie. Nous montrons ici qu'il est possible de retrouver dans cette géométrie les principaux résultats mis en évidence en cisaillement plan sans gravité.

Notons dès à présent que cette géométrie a fait l'objet à la fois d'une étude numérique et d'une étude expérimentale. La différence entre l'expérience et la simulation vient de ce qu'expérimentalement on n'impose pas la pression radiale.

#### 4.3.1 Simulations numériques

A la différence du cisaillement plan avec gravité, c'est la géométrie annulaire qui introduit l'hétérogénéité de contraintes. La distribution de contrainte est alors donnée par (chapitre 1) :

$$\Sigma_{r\theta} = \frac{Cst}{r^2} \quad (4.16)$$

$$-\rho_p \nu \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (4.17)$$

Afin de déterminer les variations du tenseur des contraintes, le calcul de celui-ci doit tenir compte du passage aux coordonnées polaires (Voir Annexe C). On observe alors les profils de contraintes représentés sur les figures 4.15 (a) et (b).

Comme on s'y attendait la contrainte tangentielle varie en  $1/r^2$  avec ici un constante qui vaut  $Cst = 1105$ . On observe également le fait que  $\Sigma_{rr} = \Sigma_{\theta\theta}$  comme dans toutes les autres géométries que nous avons étudiées (cisaillement plan, plan incliné [partie II]). Cette observation implique une variation de  $\Sigma_{rr}$  avec  $r$ . On n'observe pas une telle variation. Mais la dérivée de  $\Sigma_{rr}$  varie comme  $\frac{v_\theta^2}{r}$  qui est une quantité très petite dès que l'on s'éloigne du cylindre intérieur. Il est donc difficile d'observer les variations de  $\Sigma_{rr}$  avec  $r$ . On note toutefois l'existence de déviations au niveau des deux dernières couches de grains près des parois. Mais près du cylindre intérieur il ne nous est pas possible de distinguer les effets de paroi des effets liés à l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

L'hétérogénéité de la contrainte de cisaillement s'accompagne d'une localisation du cisaillement. C'est ce qu'indiquent les profils de vitesse des figures 4.16 (a) et (b). Afin de simplifier les notations, nous avons classé les profils en fonction de  $I_{global} = \frac{V}{H\sqrt{P}}$  ( $I_{local}$  varie dans un système hétérogène).

On observe sur ces figures que pour un  $I_{global}$  suffisamment grand ( $\geq 2 \cdot 10^{-2}$ ) il n'y a pas d'effet de ce dernier sur la forme du profil : celui-ci reste

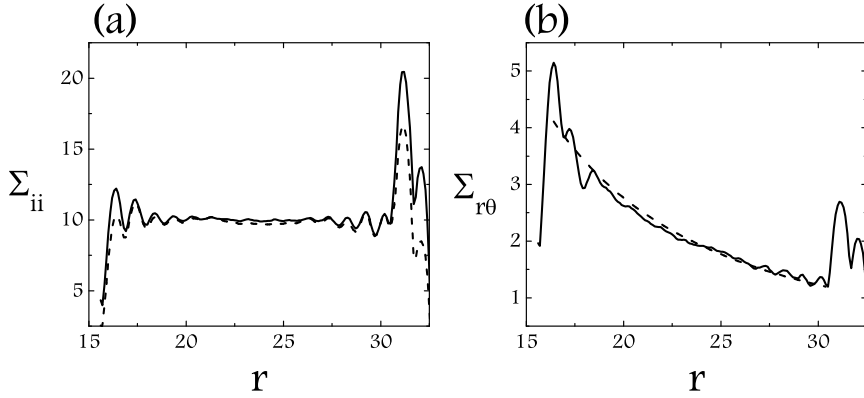


FIG. 4.15 – Profil de contrainte en géométrie annulaire. ( $\mu = 0.4, e = 0.1, V = 5, P = 10$ ). (a)  $\Sigma_{rr}(r)$  en trait plein et  $\Sigma_{\theta\theta}(r)$  en tireté. (b)  $\Sigma_{r\theta}(r)$  en trait plein et ajustement (equ. 4.16) en tireté.

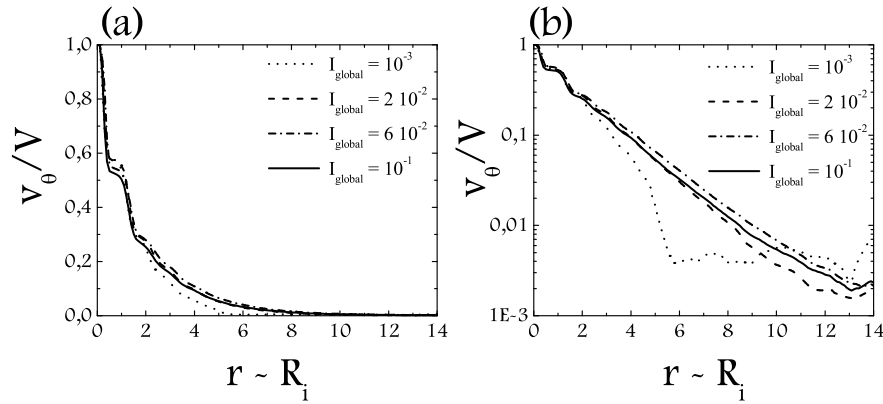


FIG. 4.16 – Profil de vitesse en géométrie annulaire. ( $\mu = 0.4, e = 0.1$ ). (a) Échelle linéaire. (b) Échelle semi-log.

en première approximation exponentiel. Remarquons qu'un ajustement par une loi de puissance est tout aussi possible. Par contre, on remarque que pour  $I_{global} = 10^{-3}$  le profil est différent. Pour les faibles valeurs de  $I_{global}$ , le profil de vitesse semble décroître avec  $r$  plus rapidement. On note aussi que

pour des valeurs de  $r$  suffisamment grandes, la vitesse des particules semble constante. Toutefois, cela n'est pas forcément significatif; en effet, il s'agit ici de vitesse inférieure à  $10^{-3}$ , les particules soumises à de telles vitesses peuvent être considérées comme immobiles. On peut aussi penser que ces particules sont immobiles la plupart du temps mais soumises à des fluctuations de vitesse importantes (ce qui est le cas dans le régime quasi statique) ce qui nous donne une vitesse moyenne non nulle. On peut penser que loin du cylindre en rotation l'écoulement est intermittent et les mouvements se font par blocs [130, 99].

Pour  $I_{global} \geq 2 \cdot 10^{-2}$ , la forme des profils semble être exponentielle :

$$V_{\theta}(r) = 2\pi R_i \Omega \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) \quad (4.18)$$

où  $\lambda$  est la largeur de la bande de cisaillement. Les ajustements des profils précédents donnent une valeur de 2 pour  $\lambda$ . Il s'en suit que le taux de cisaillement est lui aussi exponentiel, puisque  $\dot{\gamma}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(Vr)$ . On a :

$$\dot{\gamma}(r) = V_{\theta}(r) \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (4.19)$$

En utilisant l'équation précédente, il nous est possible de calculer  $I(r)$ . De la même manière en reprenant l'équation 4.16 on peut calculer le profil du coefficient de frottement effectif. Les figures 4.17 (a) et (b) comparent les valeurs mesurées aux calculs. On observe un bon accord entre les deux, ce qui valide l'hypothèse de profil exponentiel pour le taux de cisaillement.

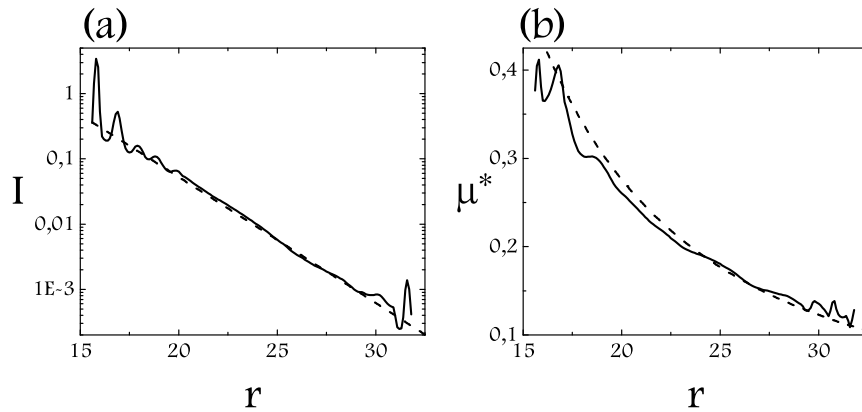


FIG. 4.17 – (a) Profil du nombre inertiel. Trait plein mesure, trait tireté calcul. (b) Profil du coefficient de frottement effectif. Trait plein mesure, trait tireté calcul.

Il nous est aussi possible de tracer les profils de compacité en géométrie annulaire. Les figures 4.18 représentent des profils de compacité pour différents  $I_{global}$ . On note sur ces figures comme pour le cisaillement plan une structuration en couches près des parois. En outre, on observe que la compacité diminue notablement du côté du cylindre intérieur lorsque le cisaillement devient plus important. À la différence des autres systèmes étudiés, nous remarquons donc une forte dilatation du milieu au niveau de la paroi mobile. Nous verrons dans la suite que cette forte dilatation est aussi observée expérimentalement.

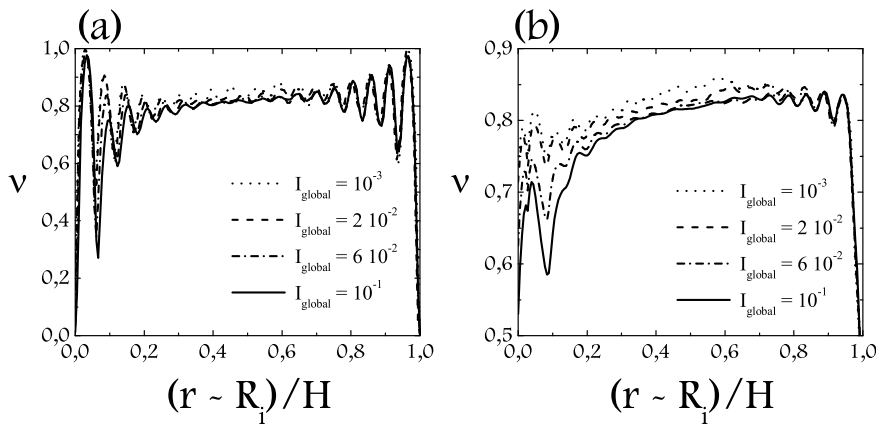


FIG. 4.18 – Profil de compacité en géométrie annulaire. (a) Discretisation fine. (b) Lissage sur deux tailles de grains.

La figure 4.19 (a) indique que si on augmente encore  $I_{global}$ , la compacité chute à zéro à proximité de la paroi mobile. On remarque aussi que la largeur de la bande de cisaillement augmente (Fig. 4.19 (b)), pour des valeurs de  $I_{global}$  grandes. Ainsi, on a  $\lambda \simeq 3.0$  pour  $I_{global} < 10^{-1}$ , mais  $\lambda \simeq 5.5$  pour  $I_{global} = 0.3$  et  $\lambda \simeq 6.0$  pour  $I_{global} = 0.7$ . Ceci est en accord avec les observations de Losert [110] qui remarque à partir d'un taux de cisaillement critique une augmentation de la largeur de la bande de cisaillement avec le taux de cisaillement apparent.

### 4.3.2 Expérience

Nous avons eu la possibilité de mener des expériences en géométrie de Couette. En fait, deux types d'expériences ont été effectuées avec la même cellule de cisaillement.

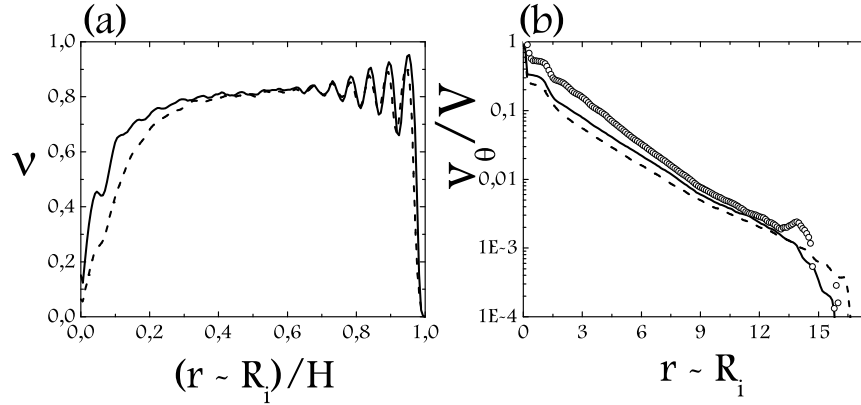


FIG. 4.19 – Profil de compacité (a) et de vitesse (b) pour  $\Omega = 0.1 \text{tr/u.t.}$ . En symbole  $I_{global} = 0.1$ , en noir  $I_{global} = 0.3$ , en tireté  $I_{global} = 0.7$ .

La cellule de cisaillement est constituée de deux cylindres concentriques. C'est le cylindre intérieur qui tourne à la vitesse  $\Omega$ . Celui-ci est recouvert d'une rugosité composée de grains collés. Le cylindre extérieur est quant à lui immobile; il peut être pour certaines expériences recouvert d'une rugosité composée de grains collés. La pression radiale n'est pas contrôlée et on autorise la dilatation verticale. Les grains que nous avons utilisés ont été soit des graines de moutarde de 2 mm de diamètre, soit des billes de verre de 350 – 390  $\mu\text{m}$ . La figure 4.20 résume les dimensions du système.

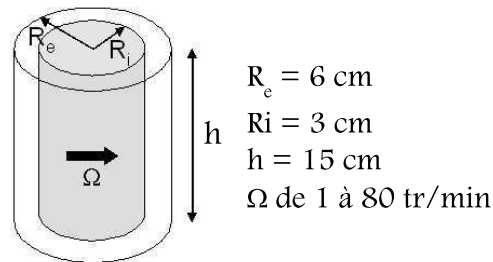


FIG. 4.20 – Cellule de Couette expérimentale.

Ainsi la cellule de Couette est une cellule de cisaillement annulaire tridimensionnelle (3D). Le passage au 3D soulève des questions sur la distributions des contraintes dans le matériau. En effet, il faut tenir compte de la pression verticale  $P(z)$  (on choisit  $z$  orienté vers le bas).

Dans un silo, on sait que la pression sature lorsque  $z$  augmente, c'est l'effet Janssen. Ceci s'explique par le fait que la pression verticale est redirigée vers les parois. On a alors  $\Sigma_{rr} = kP(z)$ , où  $k$  est le facteur de redirection des contraintes. Dans ce cas on a :  $\Sigma_{r\theta} = k\mu^*P(z)$ .

Pendant, dans un écoulement en géométrie de Couette la situation n'est pas aussi claire. Comment évolue la pression avec  $z$ ? Existe-t-il un effet Janssen? Certains auteurs [187] donnent quelques réponses à ces questions. A travers les expériences de mesures du couple nous discuterons de la variation du couple avec  $z$ . Au paravent nous discuterons de l'évolution de la compacité et des profils de vitesse en fonction du taux de cisaillement.

### *Rhéométrie classique*

Le premier type d'expérience a consisté à regarder l'évolution de la hauteur de grains dans la cellule de cisaillement en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur, après un précisaillement de  $50 \text{ s}^{-1}$ . Ces expériences ont été réalisées au Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure de Paris, avec les billes de verre. Nous avons utilisé un rhéomètre qui permet le contrôle de la vitesse du cylindre intérieur. La cuve extérieure étant transparente, on peut alors mesurer la hauteur  $h$  et donc la compacité effective moyenne à chaque instant, puisque  $\nu = \frac{4r^3 M_v}{3h(R_e^2 - R_i^2)m}$ , où  $M_v$  est la masse de grains versée,  $m$  la masse d'une bille et  $r$  son diamètre. Nous avons tracé sur la figure 4.21 la variation de la compacité en fonction du taux de cisaillement apparent à la paroi  $\dot{\gamma}_p$  calculé de la manière suivante :

$$\dot{\gamma}_p = \frac{\Omega R_i}{d} \quad (4.20)$$

Les barres d'erreur de la figure correspondent à l'erreur systématique de  $0.5\text{mm}$  que l'on fait lorsqu'on mesure la hauteur de grains.

La figure 4.21 indique que pour toute une gamme de taux de cisaillement apparent la compacité n'est pas affectée notablement par celui-ci. Dans cette gamme de taux de cisaillement, on observe à la surface libre que la bande de cisaillement a une largeur constante de quelques grains.

On note aussi l'existence d'un taux de cisaillement critique (aux alentours de  $2500 \text{ s}^{-1}$ ) à partir duquel la compacité chute de manière significative. Il est alors possible d'identifier un nombre inertiel critique correspondant au taux de cisaillement critique. On peut estimer  $P$  par  $\rho_p \nu gh$ . On trouve alors  $I_c \approx 1$ . Ce qui est l'ordre de grandeur de  $I$  à laquelle se produit la transition vers le régime collisionnel (Fig. 3.17).

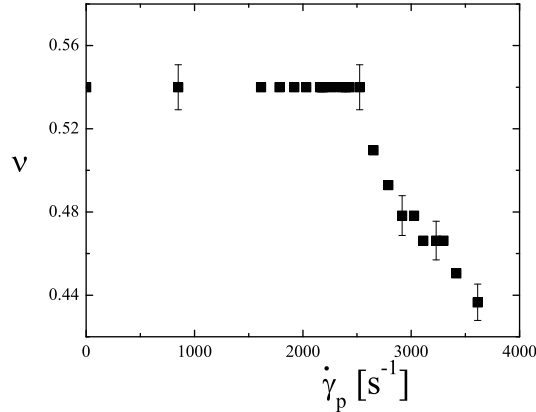


FIG. 4.21 – Variation de la compacité avec le taux de cisaillement apparent.

Au delà de ce taux de cisaillement critique, on observe à la surface libre que la largeur de la bande de cisaillement augmente jusqu'à être aussi large que l'entrefer. On verra dans la deuxième partie que cette décompaction est liée à un changement de régime.

### ***Rhéométrie IRM***

Le deuxième type d'expérience permet d'obtenir les profils de vitesse à l'intérieur de la cellule de cisaillement. L'expérience consiste à introduire la cellule de cisaillement à l'intérieur d'un imageur par résonance magnétique (IRM), le moteur du rhéomètre étant déporté à l'extérieur. Nous avons cette fois-ci travaillé avec les graines de moutarde. En effet, celles-ci contiennent de l'huile et ainsi suffisamment de proton pour que l'on puisse obtenir un signal RMN. Une méthode spécifique de vélocimétrie IRM [46] permet alors de mesurer le profil de vitesse (Voir Annexe D).

Les figures 4.22 (a) et (b) représentent les profils de vitesse normalisée obtenue par cette méthode avec un Couette à surface libre à différentes hauteurs  $z$  ( $z$  étant la côte du système de coordonnées cylindrique). Ces figures montrent clairement que pour des hauteurs entre 3 et 12 cm il n'y a pas d'effet lié à la hauteur. Ceci semble indiquer que l'on se situe dans le régime quasistatique. Dans la suite, la mesure du profil de vitesse se fait donc au milieu de la cellule. On remarque aussi que cette technique de vélocimétrie IRM est sensible à la structuration en couche, visible à proximité du cylindre intérieur. La figure 4.23 présente une comparaison d'un profil de vitesse numérique et d'un profil expérimental. On remarque qu'ils sont similaires, ce

qui valide les simulations. Ceci indique qu'il n'y a pas d'effet majeur lié au passage en dimension trois.

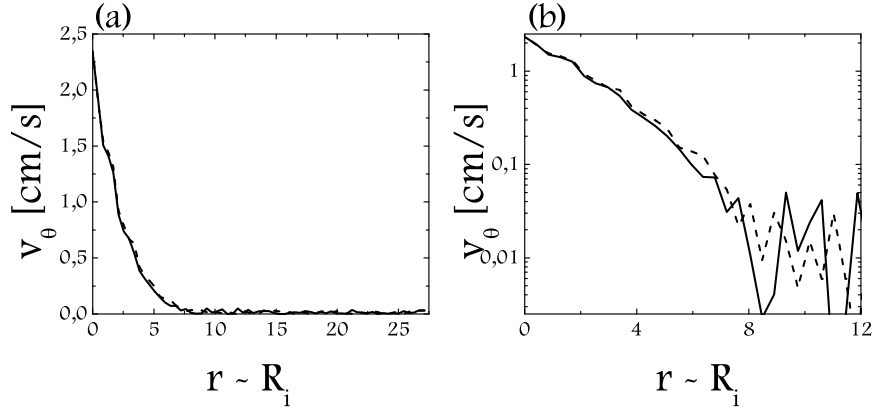


FIG. 4.22 – Profil de vitesse, pour des coupes à différentes hauteurs ( $\dot{\gamma}_p = 11s^{-1}$ ). En trait plein  $z = 3$  cm, en tiretés  $z = 12$  cm. (a) Échelle linéaire. (b) Échelle log.

Nous avons fait varier la rugosité du cylindre intérieur, en collant des billes de verre de 4 mm, deux fois plus grosse que les graines. On observe alors que cela n'a que peu d'influence sur la forme du profil de vitesse.

Nous avons aussi fait varier la vitesse de rotation du cylindre intérieur ( $\Omega = 1$  à 80 *tr/min* soit  $\dot{\gamma}_p = 8 s^{-1}$  à  $128 s^{-1}$ ). Les figures 4.24 indiquent que pour la gamme de vitesse étudiée<sup>2</sup> la forme des profils n'est pas affectée par le taux de cisaillement. Comme pour les simulations numériques, ceux-ci ont une forme exponentielle (equ. 4.18).

Ce résultat a déjà été mis en évidence par d'autres méthodes de vélocimétrie IRM ou encore par imagerie à la surface libre [18, 130]. Les figures 4.25 présentent une comparaison des différents résultats parus dans la littérature ces dernières années [118]; le détail de ces expériences est donné dans le tableau. Ces expériences sont faites pour des taux de cisaillement variables et des entrefers différents, cependant les profils de vitesse et la taille de la bande de cisaillement sont qualitativement similaires. Nous pensons toutefois, que l'obtention d'un profil dont la forme est indépendante du taux de cisaillement vient de la gamme de taux de cisaillement explorée (de 1 à 200  $s^{-1}$ ), ou plutôt de la gamme de  $I$  de l'ordre de  $10^{-4}$  à 0.2 (correspondant au

<sup>2</sup>Nous sommes limités par la méthode de vélocimétrie IRM qui n'est pas adaptée aux vitesses supérieures à 0.3 m/s. De plus, la vitesse maximale du rhéomètre est d'une centaine de tours par minute.



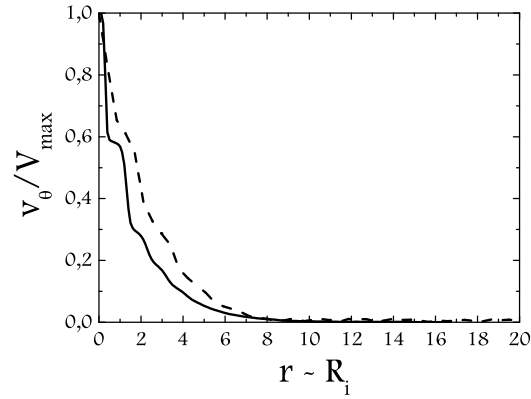


FIG. 4.23 – Profil de vitesse normalisé. En trait plein simulation numérique ( $\mu = 0.4$ ,  $e = 0.1$ ,  $I_{globale} = 0.1$ ), en tiretés expérience IRM ( $\dot{\gamma}_p = 32 \text{ s}^{-1}$ ,  $I_{global} = 0.05$ ).

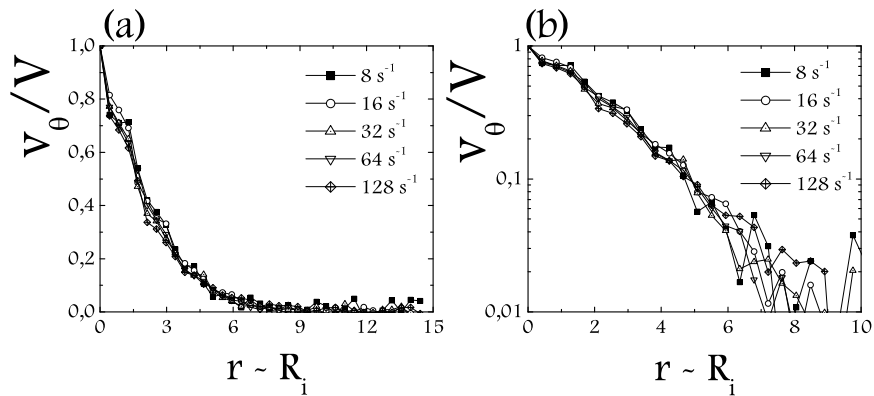


FIG. 4.24 – Profil de vitesse, pour différentes vitesses de rotation. La légende indique le taux de cisaillement apparent à la paroi. (a) Échelle linéaire. (b) Échelle log.

régime quasi statique). Cependant, comme le suggèrent les simulations numériques, les expériences sur la variation de la compacité et les observations de Losert [110], il est possible qu'au delà d'un taux de cisaillement apparent

suffisamment grand la taille de la bande de cisaillement, et donc la forme du profil change.

TAB. 4.1 – Les différentes expériences de cisaillement annulaire. IRM : Imagerie par Résonance Magnétique, IR : Imagerie Rapide. Dans les expériences CA3, le matériau granulaire peut être fluidisé.

nom	Type	Particules	$R_i/d$	$R_e/d$	$h/d$	$\dot{\gamma}_p$ [ $s^{-1}$ ]	Réf.
CA1	IRM	moutarde ( $d = 2$ mm)	15	32.5	80	$8 \rightarrow 128$	-
CA2a	IRM	moutarde ( $d = 1.8$ mm)	14	23	33	$25 \rightarrow 50$	[130]
CA2b	IRM	pavot ( $d = 0.8$ mm)	32	51	75	$25 \rightarrow 50$	[130]
CA3	IR	verre ( $d = 1$ mm)	68	84	-	$1.7 \rightarrow 171$	[18]

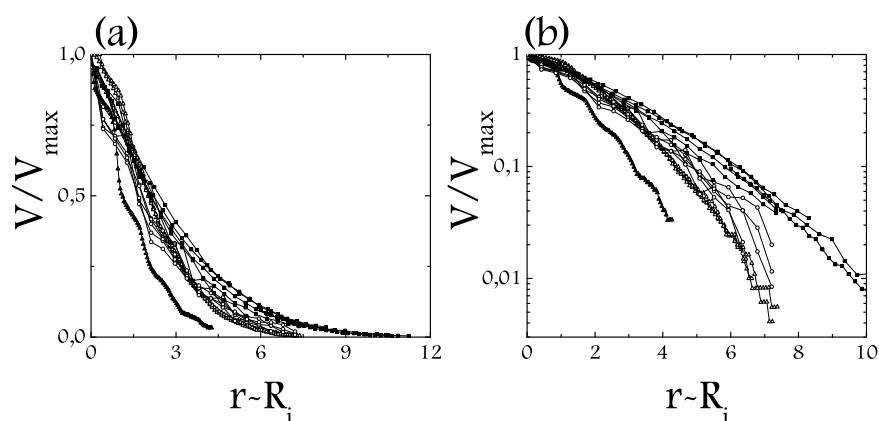


FIG. 4.25 – Profil de vitesse (cercles blancs CA1, triangles noirs CA2a, carrés noirs CA2b, triangle blancs CA3). (a) Échelle linéaire. (b) Échelle semi-log.

### 4.3.3 Mesure du couple

En plus des profils de vitesse, les expériences précédentes ont permis la mesure du couple par le rhéomètre. Nous avons donc mesuré le couple en fonction du taux de cisaillement apparent et de la pression imposée.

Auparavant nous avons voulu tester l'influence de la hauteur  $h$  sur le couple. La figure 4.26 montre que le couple varie en  $h^2$ , ce qui signifie que la pression au sein du matériau peut être considérée comme une pression hydrostatique.

Si on considère que les contraintes tangentielles sont entièrement déterminées par la pression ( $\Sigma_{r\theta} = k\mu^*P(z)$ ), on peut prévoir l'évolution du couple avec  $h$  en prédisant celle de  $P(z)$ . En effet, le couple ne varie pas de la même manière selon que l'on considère que l'on a une pression hydrostatique dans le milieu ( $P(z) \sim z$ ) ou qu'il existe un effet Janssen, c'est à dire que les contraintes sont redirigées vers les parois ce qui implique qu'elles saturent à partir d'une certaine profondeur ( $P(z) \sim Cst$ ). Le couple s'écrit de la façon suivante en fonction de la contrainte :

$$C = 2\pi R_i^2 \int_0^h \Sigma_{r\theta} dz \quad (4.21)$$

soit :

$$C = 2\pi k\mu^* R_i^2 \int_0^h P(z) dz \quad (4.22)$$

Il s'ensuit que le couple devrait varier comme la hauteur  $h^2$  dans le cas d'une pression hydrostatique et comme  $h$ , si il existe un effet Janssen en cisaillement. Ainsi, un matériau granulaire cisailé dans une cellule de Couette n'est pas soumis à l'effet Janssen. La figure 4.26 indique que l'on retrouve bien le résultat de Tardos [186]. Cela s'explique par le fait qu'en cisaillement, le frottement au niveau des parois est mobilisé dans la direction de l'écoulement, horizontalement, et non verticalement. Les contraintes verticales ne sont donc pas redirigées vers les parois. La pression au sein du matériau peut donc être considérée comme une pression hydrostatique.

Fort de ce constat, nous avons alors regardé l'effet du taux de cisaillement apparent  $\dot{\gamma}_p$  sur le couple. La figure 4.27 (a) indique que le couple n'est pas sensible à  $\dot{\gamma}_p$ , du moins dans la gamme étudiée. Les barres d'erreur correspondent à l'écart type temporel calculé sur la durée de la mesure. Ceci est en accord avec les observations de Tardos [187] qui indique que le couple est indépendant du taux de cisaillement si le matériau est autorisé à se dilater. Nous verrons dans la deuxième partie que cela indique un régime d'écoulement particulier, qui doit correspondre à l'observation précédente de profil de vitesse indépendant du taux de cisaillement apparent. Nous verrons alors qu'il existe un autre régime où les dépendances avec le taux de cisaillement sont notables.

#### 4.3.4 Effet d'une surcharge

Afin de pouvoir comparer l'expérience avec les simulations numériques nous avons cherché à mieux contrôler la pression. Nous avons placé une sur-

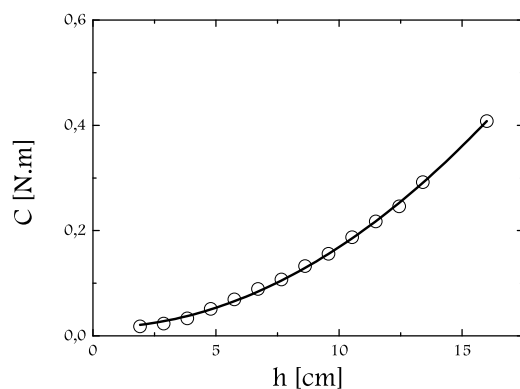


FIG. 4.26 – Variation du couple en fonction de la hauteur de grains dans la cellule de cisaillement; la courbe correspond à un ajustement avec une parabole.

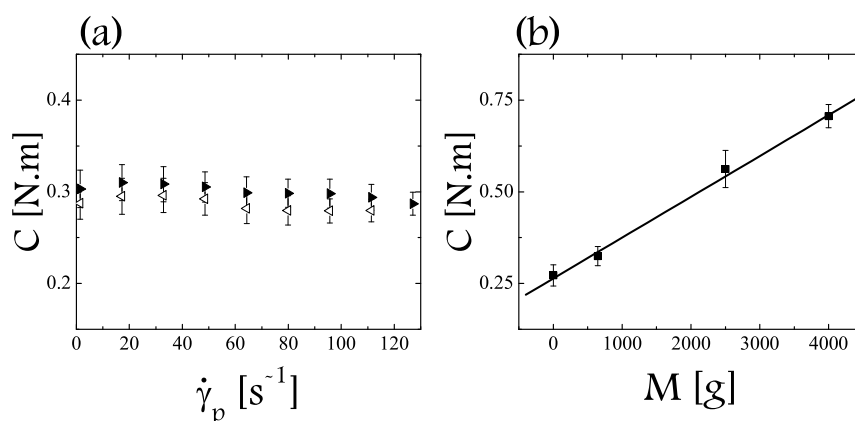


FIG. 4.27 – Variation du couple en fonction (a) du taux de cisaillement apparent (en noir on augmente progressivement la vitesse, en blanc on la diminue), (b) de la surcharge ( $\dot{\gamma}_p = 64 s^{-1}$ ). La droite correspond à un ajustement linéaire.

charge qui appuie sur la surface libre de la cellule de cisaillement (Fig. 4.28). La surcharge varie de 0g à 4000g ce qui peut multiplier la pression  $P$  au sein du matériau par un facteur 2. On fait alors l'hypothèse que la pression

verticale est redistribuée horizontalement. On contrôlerait ainsi la pression radiale dans la cellule. Le couple varie alors linéairement avec la surcharge (Fig. 4.27 (b))

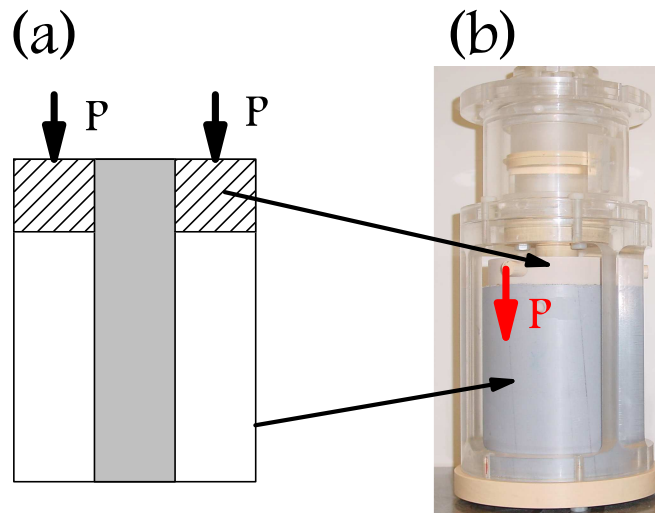


FIG. 4.28 – Cellule de cisaillement confinée. (a) Schéma 2D. (b) Photographie du dispositif.

Il nous est alors possible de mesurer les profils de vitesse pour différentes pressions (Fig. 4.29). On remarque ici que dans la gamme de pression explorée il n'y a pas d'influence de la pression sur la forme des profils. Les profils restent exponentiels et la largeur de la bande de cisaillement reste inchangée.

La connaissance du couple et le contrôle de la pression permet d'évaluer un coefficient de frottement effectif. Il nous est donc maintenant possible de mesurer  $\mu^*(I)$  à la fois du point de vue numérique et du point de vue expérimental.

#### 4.3.5 Loi de comportement

Comme nous l'avons vu pour le cisaillement plan, la mesure de la dilatance et du frottement effectif en fonction de  $I$  donne accès à la loi de comportement du matériau. Il faut remarquer qu'en cisaillement annulaire les mesures se font avec les grandeurs locales, car le système est hétérogène. Une seule simulation permet donc d'explorer plusieurs décades de  $I$ .

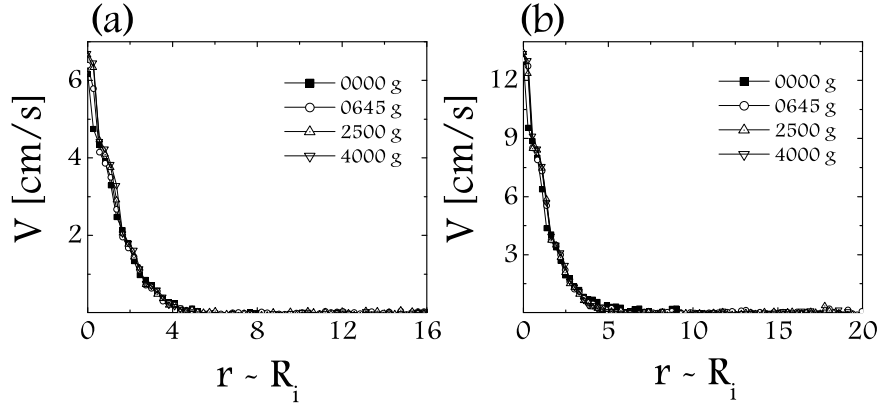


FIG. 4.29 – Profil de vitesse, pour différentes compressions. (a)  $\dot{\gamma}_p = 32 \text{ s}^{-1}$ . (b)  $\dot{\gamma}_p = 64 \text{ s}^{-1}$ .

### Dilatance et frottement effectif

La figure 4.30 compare les variations de la compacité avec le nombre inertiel pour les deux géométries : le cisaillement plan sans gravité et le cisaillement annulaire. On observe que la forme de la courbe reste linéaire, toutefois la pente change, elle est plus importante dans le cas du cisaillement annulaire.

Notons la ressemblance entre ces courbes (Fig. 4.30, ainsi que 3.17 (a)) et la partie constante de la courbe expérimentale de la dilatance en fonction du taux de cisaillement apparent (Fig. 4.21). Ainsi, il existe un régime d'écoulement stationnaire où la compacité varie très peu (les expériences ne doivent pas être sensibles à cette variation) : c'est le régime intermédiaire. Il est différent du régime dynamique ou collisionnel, associé à une décroissance rapide de la compacité avec  $I$  (ou  $\dot{\gamma}_p$ ). Il est aussi différent du régime quasi statique, qui est lui caractérisé par des écoulements intermittents. Les expériences de rhéométrie pour des faibles taux de cisaillement montrent que l'écoulement se fait par à coup, on observe alors du stick slip [133].

Il est aussi possible de mesurer le frottement effectif en fonction du nombre inertiel. D'un point de vue expérimental, la connaissance de la pression verticale nous renseigne sur la pression de confinement radiale (en faisant l'hypothèse d'une pression hydrostatique). Le couple s'écrit alors :

$$C = 2\pi R_i^2 \int_0^h \Sigma_{r\theta}(z) dz \quad (4.23)$$

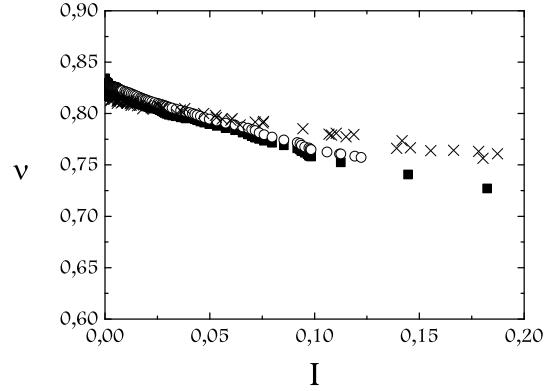


FIG. 4.30 – Variation de la compacité en fonction de  $I$ . Comparaison entre le cisaillement plan (croix), et deux situations de cisaillement annulaire (cercles  $I_{global} = 0,06$ , carrés noirs  $I_{global} = 0,02$  ).

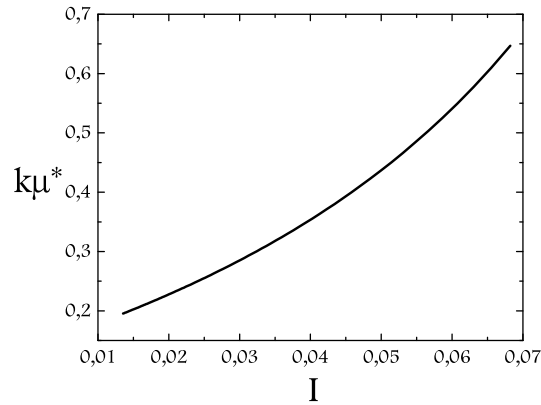


FIG. 4.31 – Variation du frottement effectif en fonction de  $I$  – Expériences. Résultat obtenu en considérant une variation linéaire du couple avec  $M$ .

Or  $\Sigma_{r\theta}(z) = k\mu^*P(z) = k\mu^*(P_0 + \rho_p\nu gz)$ , où  $P_0 = \frac{Mg}{\pi(R_e^2 - R_i^2)}$  et  $k$  le facteur de redirection des contraintes, ce qui donne :

$$k\mu^*(M) = \frac{C(M)}{2\pi R_i^2 (P_0(M)h + \rho_p\nu g \frac{h^2}{2})} \quad (4.24)$$

De la même manière, le nombre inertiel varie avec la surcharge de la façon suivante :

$$I(M) = \dot{\gamma}_p \sqrt{\frac{m}{(P_0(M) + \rho_p \nu gh)d}} \quad (4.25)$$

$\rho_p$  est choisie égale à la densité de l'eau. Nous avons tracé sur la figure 4.31  $k\mu^*(I)$ , en considérant que le couple varie linéairement avec la surcharge  $M$  (Fig. 4.27 (b)). Cette figure semble montrer que le frottement effectif augmente avec  $I$ . De plus, la forme de la courbe est comparable à ce qui est obtenu en simulation numérique (Fig. 4.32). Toutefois, nous n'avons accès qu'au produit  $k\mu^*$ , or les valeurs de  $k\mu^*$  augmentent au moins deux fois plus rapidement que ce à quoi on pourrait s'attendre. Ceci est peut être lié aux variations de  $k$  avec  $I$ .

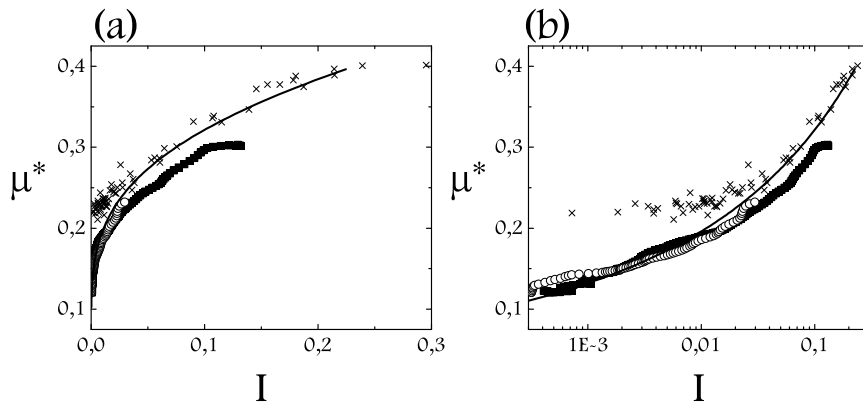


FIG. 4.32 – Variation du frottement effectif en fonction de  $I$ . Comparaison avec le cisaillement plan sans gravité (croix), et deux situations de cisaillement annulaire (cercles blancs  $I_{global} = 0.02$ , carrés noirs  $I_{global} = 0.1$ ). La courbe représente la variation du frottement calculée à partir des profils ajustés des contraintes et des vitesses. (a) Échelle linéaire. (b) Échelle log.

La figure 4.32 compare la mesure par simulation numérique de  $\mu^*(I)$  en cisaillement annulaire et en cisaillement plan. On remarque que les courbes sont qualitativement similaires, surtout pour les grandes valeurs du nombre inertiel, par contre la gamme de  $I$  exploré change. La courbe en trait plein de la figure 4.32 représente un ajustement effectué en faisant l'hypothèse que le profil de vitesse est exponentiel (equ. 4.19 et 4.16). On observe un bon accord entre les mesures et cet ajustement. Toutefois, l'ajustement n'est pas valable pour les grandes valeurs de  $I$  puisqu'il n'y a pas de saturation



comme l'indiquent les mesures. Ceci correspond aux limites de l'hypothèse d'un profil exponentiel de vitesse avec une bande de cisaillement constante.

De plus, la figure 4.32 montre que les mesures faites en cisaillement annulaire sont en accord qualitatif de celles effectuées en cisaillement plan. Cependant, le seuil d'arrêt défini par  $\mu_s$  n'est pas le même pour le cisaillement plan et pour le cisaillement annulaire. La variation du frottement est du type :

$$\mu^*(I) = \mu_s + bI^\alpha \quad (4.26)$$

avec  $\alpha \neq 1$ .

Ces variations du frottement effectif et de la compacité en fonction du nombre inertiel observé en cisaillement annulaire correspondent à la loi de comportement suivante :

$$P = a^2 \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)^2} \quad (4.27)$$

$$S = \mu_s P + ba^{2-\alpha} \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)^{2-\alpha}} \quad (4.28)$$

Cette loi est presque la même que celle établie pour le cisaillement plan. À ceci près que les valeurs de  $\mu_s$ ,  $a$ ,  $b$  et des exposants sont différentes. Toutefois, cette loi de comportement n'est valable que pour le régime intermédiaire ( $10^{-3} \lesssim I \lesssim 0.1$ ). Il s'ensuit que la loi de comportement pour le cisaillement annulaire n'est que peu modifiée par rapport à celle du cisaillement plan. Dans le régime intermédiaire, la loi de comportement du matériau est qualitativement la même en cisaillement plan ou annulaire. Cependant, des déviations apparaissent pour des petites valeurs du nombre inertiel.

### Micromécanique

Pour finir, nous avons voulu savoir si les observations microscopiques faites en cisaillement plan restaient valables en cisaillement annulaire. Nous avons donc regardé l'évolution de la coordinence, de la mobilisation du frottement et des fluctuations de vitesse en fonction du nombre inertiel.

Les figures 4.33 (a) et (b) indiquent que les lois de puissance mises en évidence en cisaillement plan restent valables en cisaillement annulaire. On observe toutefois, pour la mobilisation du frottement, une déviation pour les faibles valeurs de  $I$ .

Les figures 4.34 (a) et (b) montrent quant à elles l'existence en cisaillement annulaire de loi l'échelle entre les fluctuations de vitesse relatives et le nombre inertiel. Cependant, l'exposant de ces lois est modifié par la géométrie de l'écoulement. Ainsi on trouve que les fluctuations de vitesse de translation varie comme  $\delta v \sim \dot{\gamma}^{0.4}$ . L'exposant 0.4 est identique à ce qui a

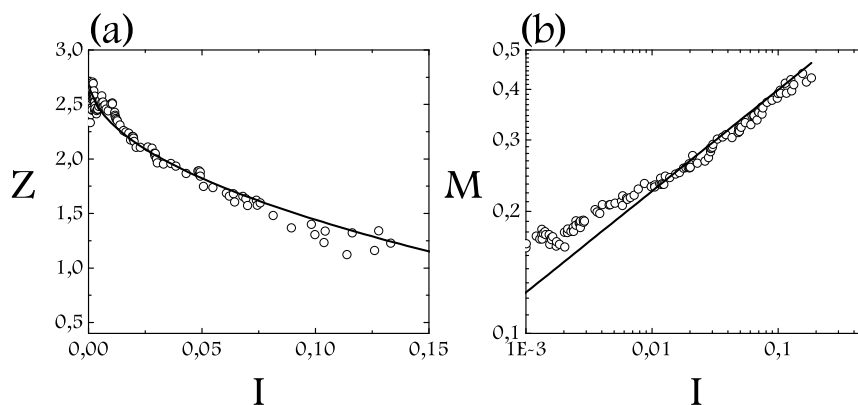


FIG. 4.33 – (a) Coordinnence en fonction de  $I$  et ajustement avec la loi de puissance 3.14. (b) Mobilisation du frottement en fonction de  $I$ . La droite indique une pente de 0.25.

été obtenu expérimentalement [18, 130]. Comme pour le cisaillement plan, l'exposant de la loi de puissance pour les fluctuations relatives de vitesse de translation est plus petit que celui des vitesses de rotation. Mais, d'une manière générale en cisaillement annulaire, l'exposant de la loi l'échelle pour les fluctuations de vitesse est plus petit que celui obtenu dans le cas du cisaillement plan.

Ainsi, ce qui a été observé en cisaillement homogène s'observe d'une manière qualitative en cisaillement hétérogène (cisaillement plan avec gravité et cisaillement annulaire). On observe toutefois des déviations quantitatives, essentiellement pour les petites et grandes valeurs du nombre inertiel. Cependant dans le régime intermédiaire, la loi de comportement déterminée pour le cisaillement plan reste valable.

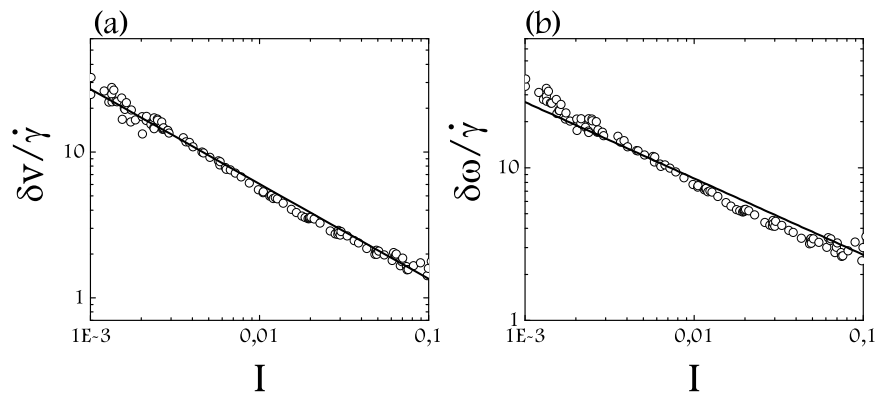


FIG. 4.34 – *Fluctuations de vitesse relatives en fonction de I. (a) Vitesse de translation. Comparaison avec une droite de pente -0.6. (b) Vitesse de rotation. Comparaison avec une droite de pente -0.5. ( $I_{global} = 0.1$ )*

## Chapitre 5

# Bilan et conclusion

TAB. 5.1 – Récapitulatif des différents paramètres étudiés.

$I$	$e$	$\mu$	$\frac{P}{k_n}$	$G_p$
$6 \cdot 10^{-4} \rightarrow 0.3$	0.1 - 0.9	0.0 $\rightarrow$ 0.8	$4 \cdot 10^{-6} \rightarrow 2.5 \cdot 10^{-2}$	0 $\rightarrow$ 10

**N**ous venons de voir à travers cette partie que l'état de cisaillement d'un matériau granulaire est principalement déterminé par la connaissance du nombre inertiel  $I$ , traduisant le rapport des forces d'inertie sur les forces de pression. Les faibles  $I$  correspondent au régime quasi statique ( $I \lesssim 10^{-2}$ ). Les grandes valeurs de  $I$  ( $\gtrsim 0.1$ ) correspondent au régime dynamique ou collisionnel (Tab. 5.1). La loi de comportement se déduit alors de la variation de la compacité et du frottement effectif avec ce nombre (Fig. 5.1 (a) et (b)).

La transition entre les régimes quasi statique et dynamique est progressive, et correspond au régime intermédiaire. C'est dans ce régime intermédiaire que la loi de comportement prend la forme simple décrite précédemment. En particulier, la pression au sein du milieu est une pression du type Bagnold. De plus, dans le régime intermédiaire, la loi de comportement semble indépendante de la géométrie et du type de matériaux (faiblement ou fortement dissipatif). On remarque, en particulier, que dans le régime intermédiaire la loi de comportement est qualitativement la même, que le système soit homogène ou hétérogène. Dans le cas d'écoulements soumis à la gravité, il faut toutefois introduire un autre nombre adimensionnel  $G_p$  traduisant le rapport des forces de pesanteur sur les forces de pression.

Pour les faibles valeurs de  $I$ , dans le régime quasi statique, on observe des déviations à la loi de comportement. Dans ce régime, les fluctuations relatives de vitesse sont extrêmement importantes (Fig. 5.2 (a)) et l'écoulement se fait alors de manière intermittente. De plus, la coordinence augmente vers sa valeur limite et la mobilisation du frottement semble chuter à 0 lorsque  $I$

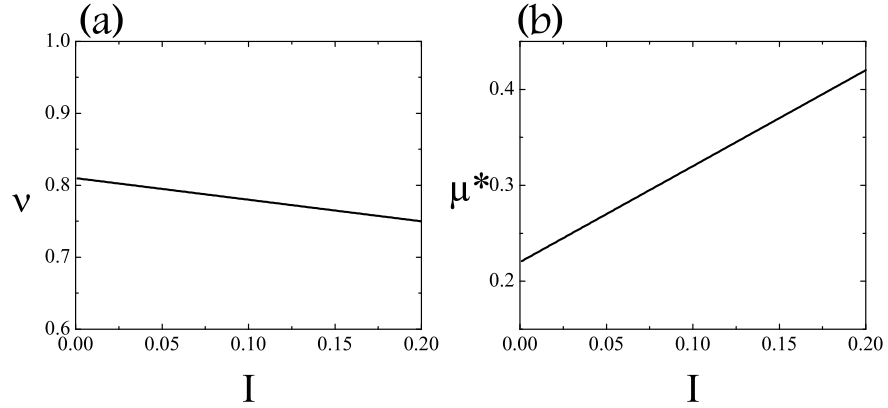


FIG. 5.1 – Variation qualitative en fonction du nombre inertiel de la compacité (a), et du frottement effectif (b). (Schéma indicatif)

tend vers 0 (Fig. 5.2 (b)). Ces deux grandeurs dépendent des caractéristiques du matériau.

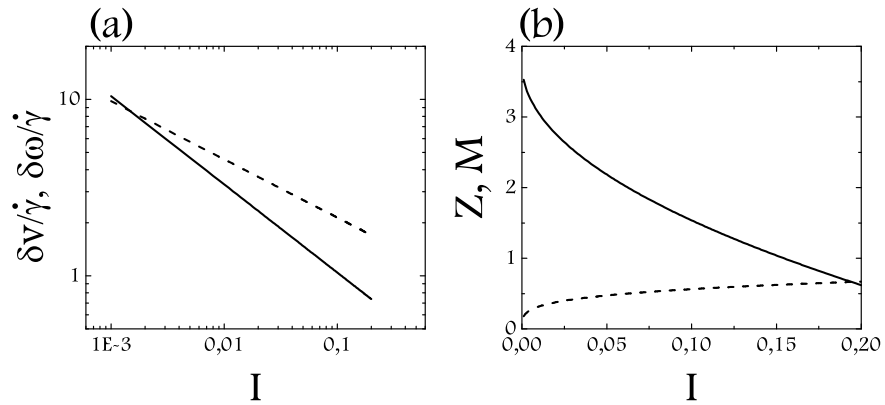


FIG. 5.2 – Schéma des dépendances avec le nombre inertiel (a) des fluctuations de vitesse de translation (trait plein) et de rotation (tiretés) et (b) de la coordinnence  $Z$  (trait plein) et de la mobilisation du frottement (tiretés). (Schéma indicatif)

Pour les grandes valeurs de  $I$ , dans le régime dynamique, la loi de comportement dépend du caractère dissipatif du matériau. Il est alors possible d'avoir une description de l'écoulement dans le cadre de la théorie cinétique.

Quelque soit le régime les fluctuations vérifient des lois de puissances en fonction de  $I$ . L'exposant de ces lois de puissances ne semble dépendre que de la géométrie de l'écoulement.

Comme nous l'avons vu, il est possible d'étendre la loi de comportement observée dans la géométrie simple de cisaillement plan, à d'autres géométries (cisaillement annulaire). Pour ce qui est du cisaillement annulaire, les mesures expérimentales des profils de vitesse et de la compacité en fonction du taux de cisaillement apparent indiquent que la plupart des expériences sont faites dans le régime intermédiaire.

Cependant, cette description ne suffit pas, notamment pour décrire l'hystérésis entre le démarrage et l'arrêt (Chapitre 1). Afin de décrire la transition vers l'arrêt d'un écoulement granulaire, nous avons mené des expériences à force imposée, ce qui fait l'objet de la deuxième partie de ce document.



Deuxième partie

Cisaillement à force imposée





**L**es simulations à vitesse imposée nous ont permis de déterminer la loi de comportement, notamment la variation du frottement effectif près de l'arrêt. Toutefois, elles ne permettent pas d'étudier la transition « fluide-solide ». Nous abordons donc dans cette partie l'étude de cette transition à travers des expériences et des simulations à force imposée.

Nous avons considéré les deux géométries de Couette et du plan incliné. Nous verrons que ces deux géométries font apparaître des comportements tout à fait similaires, le plan incliné pouvant être considéré comme un rhéomètre.

Nous aborderons dans un premier temps (chapitre 6) l'étude des seuils d'écoulement à travers des expériences de rampes de contrainte (Couette) ou d'inclinaison (plan incliné). Dans un deuxième temps (chapitre 7), nous nous attacherons à décrire la dynamique de l'arrêt.



## Chapitre 6

# Seuils et hystérésis

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les matériaux granulaires peuvent être comparés à des fluides à seuil : l'écoulement n'est possible que pour une contrainte suffisamment élevée. Nous avons alors remarqué l'existence d'un hystérésis entre le démarrage et l'arrêt de l'écoulement. Ceci fera l'objet de cette partie à travers des expériences sur plan incliné et en cisaillement annulaire.

### 6.1 Plan incliné

#### 6.1.1 Cas du grain unique

Nous considérons d'abord un plan bidimensionnel rugueux incliné d'un angle  $\theta$ , sur lequel s'écoule un grain. Ce système extrêmement simple a le mérite de mettre en évidence l'existence d'un seuil de mise en écoulement différent du seuil d'arrêt. Ceci a fait l'objet d'expériences menées par Quartier *et al.* [151]. Pour notre part, nous avons étudié ce système par des simulations numériques discrètes.

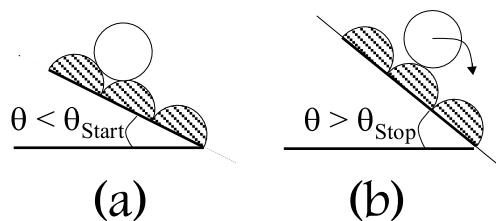


FIG. 6.1 – Un grain sur une pente rugueuse, (a) au repos, (b) en écoulement.

La figure 6.1 représente le système simulé. On note en particulier que la rugosité est constituée de grains jointifs en tous points identiques à celui qui s'écoule. Au repos, le grain se trouve bloqué entre deux grains de la rugosité. Le grain quittera le piège formé par ces deux grains lorsque l'angle  $\theta$  sera supérieur à  $\theta_{Start}$ . Un simple argument géométrique permet alors de déterminer le seuil d'écoulement  $\theta_{Start} = \frac{\pi}{6}$ .

Accéléré par la gravité et ralenti par les chocs et le frottement sur le socle, le grain atteint une vitesse stationnaire  $V(\theta)$ , dans un certain intervalle d'inclinaison (pour des inclinaisons plus élevées, le grain est accéléré). La figure 6.2 indique les résultats obtenus numériquement pour le système précédent. Elle montre que si l'on diminue l'inclinaison, le grain ralentit et s'arrête brutalement (il y a une plage de vitesse inaccessible) pour une inclinaison  $\theta_{Stop} = 5.5^\circ$  d'origine dynamique. Cette figure est tout à fait analogue à celle obtenue expérimentalement par Quartier [151].

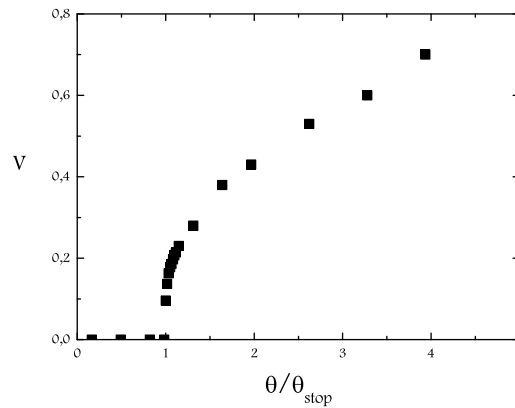


FIG. 6.2 – Vitesse du grain en fonction de la pente. Pour de plus grandes pentes, le grain est accéléré et on ne peut plus définir de vitesse stationnaire. Vitesse adimensionnée par  $\sqrt{gd}$ .

Le modèle proposé par celui-ci et sur lequel nous reviendrons au paragraphe 10.3.1, permet de décrire ce comportement, en faisant jouer un rôle prépondérant au piégeage du grain par la rugosité. Lorsque l'inclinaison diminue, le grain subit de plus en plus l'influence de la rugosité, et lorsque sa vitesse devient inférieure à la vitesse de libération des pièges, il s'arrête. La rugosité conduit ainsi à l'hystérésis entre  $\theta_{Start}$  et  $\theta_{Stop}$ .

### 6.1.2 Hauteur de départ et hauteur d'arrêt

Considérons maintenant l'écoulement d'une couche d'épaisseur  $H$  sur un plan incliné de  $\theta$ . Il faut que le socle soit suffisamment rugueux pour accrocher l'écoulement (non glissement), sans quoi toute la couche coule en bloc. Les seuils d'écoulement dépendent alors de l'inclinaison mais aussi de l'épaisseur. On définit donc des épaisseurs de démarrage  $H_{Start}(\theta)$  et d'arrêt  $H_{Stop}(\theta)$ , représentées sur la figure 6.3. L'épaisseur d'arrêt, mesurée pour divers couples matériau-rugosité [165, 53, 143], est décrite par :

$$\frac{H_{Stop}(\theta)}{d} = B \frac{\theta_M - \theta}{\theta - \theta_m} \quad (6.1)$$

Les paramètres  $\theta_m$  et  $\theta_M$  (bornes pour un écoulement épais ou mince) et  $B$  (longueur d'influence de la rugosité) dépendent du couple matériau-rugosité (en dimension deux, ils sont d'ordre  $\theta_m \approx 13^\circ$ ,  $\theta_M \approx 35^\circ$  et  $B/d \approx 1$  et en dimension trois  $\theta_m \approx 25^\circ$ ,  $\theta_M \approx 40^\circ$  et  $B/d \approx 5$ ).  $\theta_m$  est l'angle d'arrêt d'une couche infiniment épaisse (il peut être assimilé à l'angle de frottement interne du matériau  $\phi$ ).

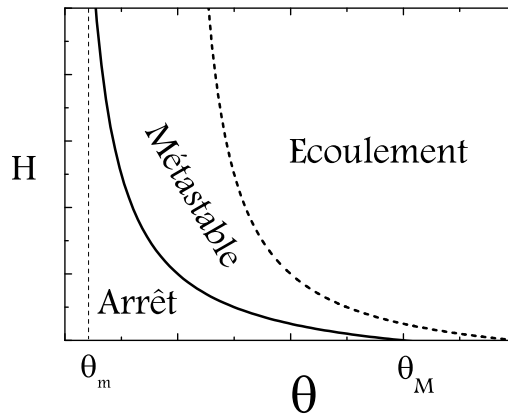


FIG. 6.3 – Épaisseur d'arrêt ( $H_{Stop}(\theta)$  en trait plein) et de démarrage ( $H_{Start}(\theta)$  en tireté) en fonction de  $\theta$ .

Un modèle rhéologique simple [37] permet de justifier la forme de la courbe  $H_{Stop}(\theta)$ . Les simulations numériques de M. Prochnow [150] montrent que la compacité  $\nu$  est constante dans l'épaisseur de la couche en écoulement. Dans ce cas, la conservation de la quantité de matière indique que  $N(y) = a(H - y)$  avec  $a = \rho_p \nu g$ . De même, la conservation de la quantité de mouvement indique que  $S(y) = \tan(\theta)N(y)$ . Pour la plage d'angle étudiée, nous considérerons que  $\tan(\theta) \approx \theta$ . On a donc :

$$S(y) = a\theta(H - y) \quad (6.2)$$

Trois forces s'opposent au mouvement et constituent l'expression de  $S(y)$ .

- La première, notée  $S^F$ , est liée au frottement dynamique entre les grains. Par analogie avec le frottement de Coulomb, on écrira :  $S^F = \tan(\phi)N(y) \approx \phi N(y)$  où  $\tan(\phi)$  est le coefficient de frottement interne du matériau.
- La deuxième, notée  $S^C$ , est liée aux chocs entre les grains. Contrairement au premier terme, elle dépend du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  (fréquence des chocs). On peut donc l'écrire sous la forme  $\eta\dot{\gamma}$ , comme pour un fluide newtonien, où la viscosité  $\eta$  peut elle-même dépendre du taux de cisaillement.
- La troisième, notée  $S^p$ , est liée à l'effet de piégeage des grains dans la rugosité. On peut penser que ce piégeage disparaît pour un angle élevé baptisé  $\theta_M$ . Dans une analyse au premier ordre de l'inclinaison, on écrira  $S^p = b(\theta_M - \theta)$ . On peut par ailleurs penser que cette force de piégeage est maximum près de la paroi et s'atténue lorsque l'on s'éloigne.

Au socle, on a donc :

$$S(0) = S^p(0) + S^C(0) + S^F(0) \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow \theta N(0) = b(\theta_M - \theta) + \eta\dot{\gamma}(0) + aH\phi \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(0) = \frac{a(\theta - \phi)H + b(\theta - \theta_M)}{\eta} \quad (6.5)$$

Ce taux de cisaillement s'annule au socle pour :

$$H = H_{Stop}(\theta) = \frac{b(\theta_M - \theta)}{a(\theta - \phi)} \quad (6.6)$$

On suppose alors que le taux de cisaillement s'annule rapidement depuis le socle jusqu'en haut de la couche (remontée de la rugosité).

Par contre, la dynamique du départ est encore mal comprise. Du fait de sa ressemblance avec la courbe  $H_{Stop}(\theta)$ , nous donnerons à la courbe  $H_{Start}(\theta)$  la même forme mathématique mais avec des paramètres  $B$ ,  $\theta_m$  et  $\phi$  différents.

### **Mode opératoire**

Nous avons donc procédé à des mesures systématiques de ces courbes  $H_{Stop}(\theta)$  et  $H_{Start}(\theta)$  pour différents types de matériaux (Tab. 6.1) et différents types de rugosité (trois moquettes dont l'état de surface changeait notablement la taille des pièges). Pour ce qui est des matériaux, nous avons voulu choisir un sable particulièrement anguleux (Fig. 6.4) afin qu'il se différencie bien des autres matériaux.

TAB. 6.1 – Matériaux utilisés.

billes de verre	graines de moutarde	sables anguleux
$d = 1.5 \text{ mm}$	$d = 2 \text{ mm}$	$0.87 < d < 1.04$ ou $1.04 < d < 1.2 \text{ mm}$

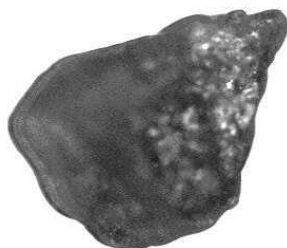


FIG. 6.4 – Photographie d'un grain de sable.

Nous avons utilisé un plan incliné alimenté par un réservoir (voir annexe D et figure 6.5) de  $2 \text{ m}$  de long sur  $70 \text{ cm}$  de large, en espérant ainsi s'affranchir des effets de bord. L'inclinaison et sa vitesse de variation sont contrôlées par un vérin. L'écoulement est filmé par une caméra numérique haute résolution ( $1280 \times 1024$ ) à 24 images par seconde. Les outils d'imagerie (décrits dans l'annexe D) permettent alors la mesure de la vitesse de l'écoulement, de la hauteur, ainsi que de l'incertitude sur ces grandeurs.

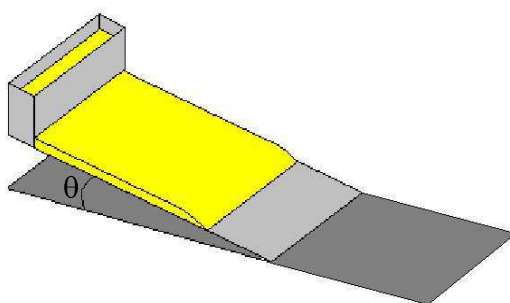


FIG. 6.5 – Schéma du plan incliné.

Les mesures d'épaisseur d'arrêt sont généralement obtenues en diminuant l'inclinaison d'un écoulement stationnaire d'épaisseur connue jusqu'à l'angle



d'arrêt. Pour l'angle de départ, on incline une couche immobile de grains d'épaisseur connue jusqu'au départ. Pour éviter de devoir remplir trop souvent le réservoir du plan incliné, nous avons suivi une démarche plus économe en grains (Fig. 6.6). On part d'une couche immobile de hauteur connue et uniforme. On augmente l'inclinaison du plan jusqu'à l'écoulement. On a ainsi le premier point de la courbe de départ ( $H_{Start}$ ). L'écoulement n'étant pas alimenté par le réservoir, l'épaisseur de la couche diminue jusqu'à arriver à la hauteur d'arrêt. On a alors le premier point de la courbe d'arrêt ( $H_{Stop}$ ). On peut recommencer l'opération tant qu'il reste une épaisseur non nulle de matériau.

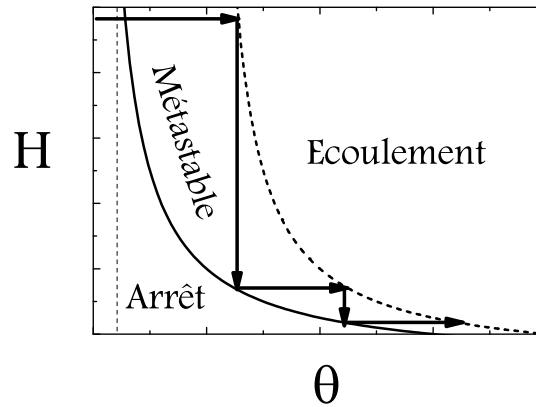


FIG. 6.6 – Mesures de  $H_{Stop}$  et  $H_{Start}$ . Protocole opératoire. En trait plein  $H_{Stop}$ , en trait tireté  $H_{Start}$ .

### Mesures et résultats

A titre d'exemple, nous ne présenterons ici que deux séries de données (Fig. 6.7 et 6.8). L'ensemble des résultats se trouve dans l'annexe E. Les courbes sont des courbes d'ajustement, en trait plein pour l'arrêt et en tiretés pour le départ.

Les courbes de démarrage et d'arrêt obtenues sont du même type que celles mesurées par O. Pouliquen [143] et S. Douady [54]. Cette série de mesures valide donc notre dispositif expérimental et notre mode opératoire. Les résultats sont reproductibles à différentes dates, ce qui indique que les grains ne s'altèrent pas et que les fluctuations de température et d'humidité atmosphérique ne modifient pas de façon notable le comportement des ma-

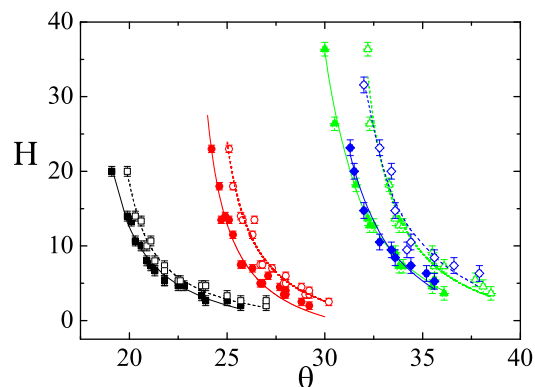


FIG. 6.7 – Mesures de  $H_{Stop}$  et  $H_{Start}$  pour différents matériaux et même rugosité (moquette ayant la rugosité la plus importante). En symboles opaques et en trait plein, mesure et ajustement de  $H_{Stop}$ . En symbole ouvert et en trait tireté, mesure et ajustement de  $H_{Start}$ . En noir les billes de verre, en rouge les graines de moutarde, en vert le sable de grande taille et en bleu le sable de taille moyenne.

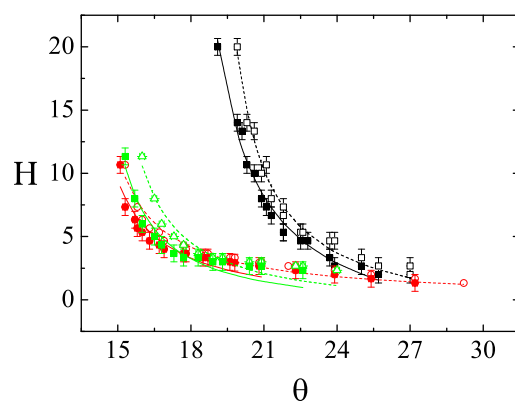


FIG. 6.8 – Mesures de  $H_{Stop}$  et  $H_{Start}$  pour différentes rugosités et même matériau (billes de verre). En symboles opaques et en trait plein, mesure et ajustement de  $H_{Stop}$ . En symbole ouvert et en trait tireté, mesure et ajustement de  $H_{Start}$ . En noir la rugosité la plus grande, en vert la plus faible, en rouge la rugosité intermédiaire.

tériaux. Au vu de l'ensemble des résultats, on peut remarquer les tendances suivantes :

- Les courbes du verre et des graines de moutarde sont relativement proches par rapport à celles des deux sables. Malgré la différence de taille des grains de sable fins et gros, leurs courbes d'arrêt et de démarrage sont confondues. L'effet de taille des grains est négligeable par rapport à l'effet de leur angularité.
- Pour les sables, un changement de rugosité n'a que peu d'effet. Il faut se placer sur une surface très lisse (une planche en bois) pour avoir une différence notable des courbes d'arrêt et de départ. Par contre, pour les grains sphériques (verre et moutarde), les différentes rugosités modifient notablement ces courbes. Si la rugosité est trop faible, les grains roulent dessus et l'écoulement stationnaire n'est jamais observé. C'est le cas pour les graines de moutarde sur la moquette la moins rugueuse ou pour les sphères sur le bois. L'effet de la rugosité est important pour un matériau à grains sphériques mais limité pour des grains anguleux.

Nous pouvons reformuler ces deux observations :

- Pour des matériaux anguleux, la contrainte de piégeage des grains dans la rugosité est faible par rapport aux contraintes liées aux chocs entre grains et au frottement entre grains.
- Pour des grains sphériques, l'effet de piégeage joue un rôle important.

Ainsi, les courbes d'arrêt ( $H_{Stop}(\theta)$ ) et de départ ( $H_{Start}(\theta)$ ) résument les conditions d'écoulement propres à un matériau et à la rugosité sur laquelle il s'écoule.

### 6.1.3 Écoulement stationnaire uniforme

Dans le régime stationnaire d'écoulement au-dessus du seuil, les dépendances de la vitesse adimensionnelle à la surface de l'écoulement (nombre de Froude  $Fr$ ) en fonction de  $H$  et de  $\theta$  s'expriment sous la forme d'une loi d'échelle, mise en évidence par O. Pouliquen [143] et confirmée par simulations numériques [150, 180] :

$$Fr(\theta, H) = \frac{V(H, \theta)}{\sqrt{gH}} = \beta \frac{H}{H_{Stop}(\theta)} \quad (6.7)$$

Remarquons que l'on peut aussi écrire cette loi en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_{stop}}$  :

$$Fr(\theta, H) = \beta + \frac{\beta H \theta_{Stop}}{B(\theta_M - \phi)} \left( \frac{\theta}{\theta_{Stop}} - 1 \right) \quad (6.8)$$

On note aussi que cette loi d'échelle ne prédit pas une vitesse nulle pour  $H = H_{Stop}(Fr = \beta)$ , mais plutôt que la vitesse diminue progressivement jusqu'à  $H = 0$ . Ce qui n'est pas observé.

Dans la suite, nous utiliserons systématiquement la vitesse à la surface de l'écoulement pour déterminer le nombre de Froude. Ceci introduit un facteur environ deux par rapport aux mesures d'O. Pouliquen qui utilise plutôt la vitesse moyenne dans l'épaisseur.

#### 6.1.4 Comportement près de l'arrêt

En fait, la loi d'échelle est vérifiée pour  $H > kH_{Stop}$ , avec  $k$  un facteur numérique dépendant du matériau qui vaut environ 1.5. Nous avons étudié l'écart à cette loi pour des épaisseurs d'écoulement inférieures, s'approchant de la hauteur d'arrêt (Fig. 6.9 (a)). Des mesures des corrections à la loi d'échelle près du seuil ont été réalisées [165], soit directement pour des billes de verre (Fig. 6.9 (b)), soit au niveau du front arrière d'un écoulement dont l'alimentation en matériau était coupée (écoulement stationnaire mais non uniforme).

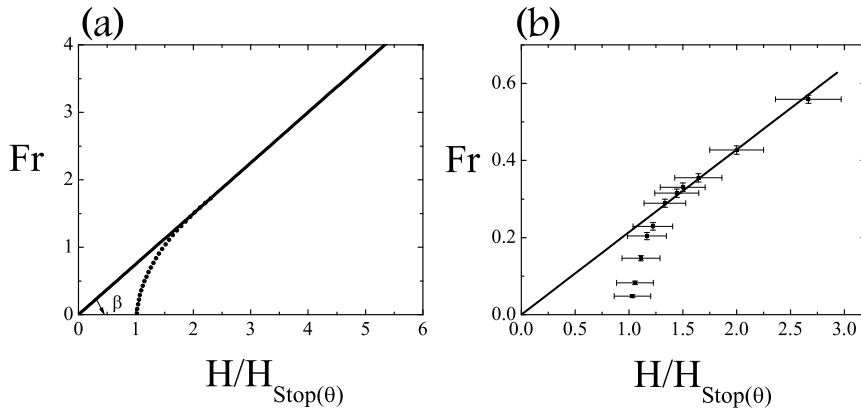


FIG. 6.9 – Limite de la loi d'échelle. (a) Représentation schématique. (b) Mesure pour des billes de verre de 1.5 mm de diamètre, pour la plus grosse rugosité. La droite correspond à la loi d'échelle. ( $\theta = 23.2^\circ$ ,  $H_{Stop} = 6$  mm,  $H$  variable).

On retrouve la loi d'échelle pour  $H$  suffisamment grand. La droite passant par ces points passe par zéro et a une pente de 0,25. Celle trouvée par O. Pouliquen pour des billes plus petites a une pente de  $2 * 0,136 = 0,272$ . Nous n'avons réalisé les mesures que pour un seul angle.

Les mesures pour  $H$  voisin de  $H_{Stop}$  sont, à notre connaissance, inédites. On observe bien l'écart à la loi d'échelle soupçonné. Nous avons donc poursuivi les recherches sur le sable qui permet une mesure de la hauteur par

coupe laser. L'inconvénient du sable est qu'il est difficile d'obtenir un écoulement stationnaire et uniforme de faible vitesse. Pour contourner cette difficulté, nous avons testé le mode opératoire du front arrière décrit par la figure 6.10.

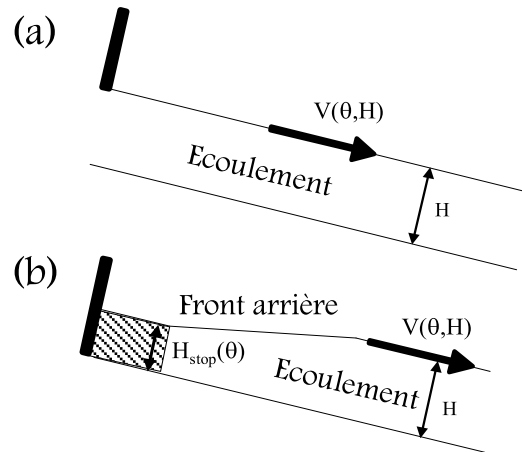


FIG. 6.10 – Mode opératoire du front arrière. (a) Situation où l'écoulement est alimenté par le réservoir. (b) Alimentation stoppée. Le front arrière correspond à la zone transitoire encore en écoulement.

La procédure expérimentale est alors la suivante : on coupe l'arrivée de grains d'un écoulement stationnaire uniforme, ce qui crée un front arrière qui fait la transition entre l'écoulement stoppé et l'écoulement aval. Les mesures sont alors réalisées en un point fixe du front arrière. On a donc accès pendant environ une seconde à  $Fr(t)$  et  $\frac{H}{H_{stop}}(t)$ , soit  $Fr(\frac{H}{H_{stop}})$  en éliminant la variable  $t$ .

Le front arrière comporte donc toutes les hauteurs (et vitesses associées) comprises entre  $H$  et  $H_{stop}(\theta)$ . Mais les mesures prises dans le front arrière (Fig. 6.11) sont des mesures de hauteur et de vitesse d'un écoulement non uniforme dans le référentiel du plan incliné. Nous nous appuyerons sur deux hypothèses pour exploiter ces couples hauteur-vitesse :

- Il nous semble que le front arrière se déplace à vitesse constante et identiquement à lui-même. Dans le référentiel de ce front (référentiel en translation par rapport au référentiel du plan), l'écoulement est stationnaire mais pas uniforme.
- En surface, nous observons à la fois une diminution de l'épaisseur (de  $H$  à  $H_{stop}$ ) et de la vitesse (de  $V(H, \theta)$  à 0) dans la zone du front. Cependant, on ne sait pas ce qu'il en est dans le volume. Des expé-

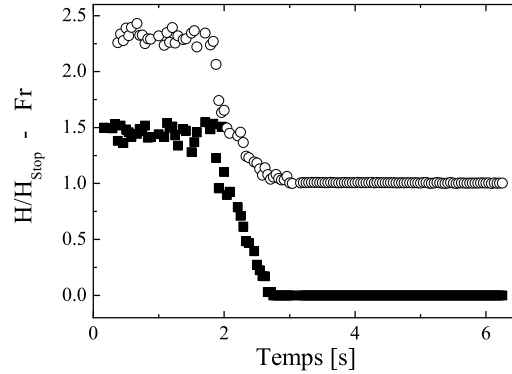


FIG. 6.11 – Variation du nombre de Froude et de la hauteur au passage du front arrière. Les carrés noirs correspondent aux nombres de Froude et les cercles à  $\frac{H}{H_{Stop}}$ .

riences [7] indiqueraient l'existence de zone statique au voisinage d'un socle très rugueux, mais cela reste sujet à controverse. Nous ferons l'hypothèse d'une transition abrupte de toute la couche lorsque  $H$  atteint  $H_{Stop}$ .

En faisant correspondre les données  $H(t)$  et  $V(t)$  pour chaque  $t$ , on obtient la figure 6.12 représentant la variation du nombre de Froude en fonction de la hauteur adimensionnée (les barres d'erreurs représentées correspondent aux erreurs maximum). Pour des valeurs de  $\frac{H}{H_{Stop}}$  suffisamment grandes, la figure 6.12 indique que la loi d'échelle est vérifiée. La pente  $\beta$  de la loi d'échelle est deux fois et demi plus élevée pour le sable (0,62) que pour le verre (0,25). Cette différence n'est pas choquante compte - tenu de la grande différence de comportement déjà observée dans les mesures d'épaisseur d'arrêt et de départ entre ces deux matériaux.

L'ajustement des zones décroissantes des courbes  $Fr(t)$  et  $H(t)/H_{Stop}(\theta)$  (Fig. 6.11) par des fonctions simples, respectivement des polynômes d'ordre un et deux, permet de déterminer une fonction unique  $f$ , telle que  $Fr = f\left(\frac{H}{H_{Stop}}\right)$  (courbe en trait plein sur la figure 6.12). Ceci permet d'éliminer une partie du bruit lié aux mesures expérimentales.

De plus, la figure 6.12 semble indiquer qu'il y a une variation continue du nombre de Froude avec l'épaisseur. Toutefois, des mesures directes [158] (c'est à dire en écoulement stationnaire uniforme), effectuées au plus près de l'arrêt indiquent, pour une épaisseur donnée, une transition brutale, c'est à dire une discontinuité de la vitesse au moment de l'arrêt (Fig. 6.13). Les expériences de dynamique de l'arrêt, au chapitre suivant, indiquent effectivement une

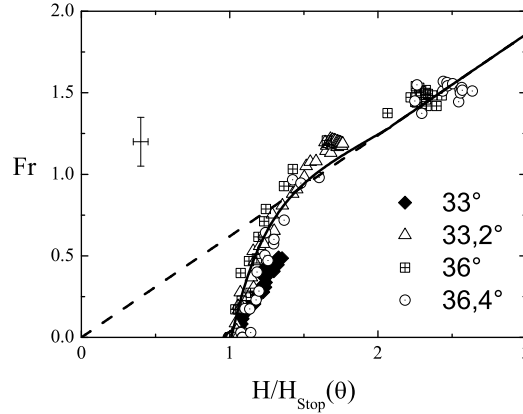


FIG. 6.12 – Nombre de Froude en fonction de  $\frac{H}{H_{Stop}}$ . Les différentes séries de données correspondent à différentes inclinaisons. La droite en tiretés correspond à la loi d'échelle et la courbe en trait plein représente  $f\left(\frac{H}{H_{Stop}}\right)$ .

transition brutale. Comme nous l'avons vu, la loi d'échelle peut s'écrire aussi

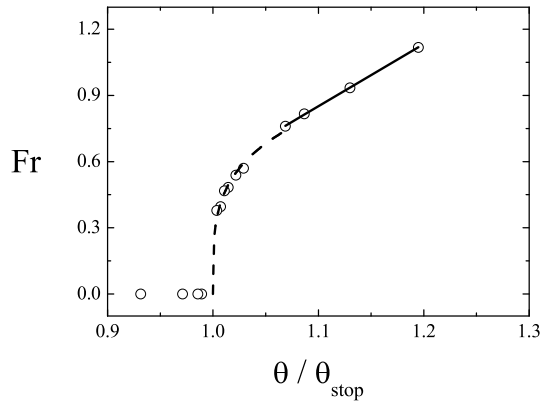


FIG. 6.13 – Nombre de Froude en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_{Stop}}$ , à proximité du seuil. La droite en tiretés représente l'équation 6.9 et la courbe en trait plein correspond à la loi d'échelle.

en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_{Stop}}$ . La figure 6.13 permet aussi de retrouver le coefficient  $\beta$ . La variation brutale du nombre de Froude avec  $\theta$  est ajustée par une loi de puissance du type :

$$Fr(\theta) = A \left( \frac{\theta}{\theta_{Stop}} - 1 \right)^\alpha \quad (6.9)$$

avec  $\alpha = 0.26$ .

Notons que cette courbe est analogue à celle que nous avons obtenue numériquement dans le cas du grain unique (Fig. 6.2). Ce qui nous permet d'insister sur l'observation d'une transition brutale, c'est à dire d'une discontinuité de vitesse au moment de l'arrêt.

### 6.1.5 Conséquence pour le frottement effectif

La connaissance de la variation du nombre de Froude avec la hauteur adimensionnée  $H/H_{Stop}$  proche de l'arrêt permet une détermination précise du coefficient de frottement pour les faibles vitesses. Or, les variations du frottement effectif en fonction de l'épaisseur du matériau et de la vitesse de l'écoulement sont des informations importantes pour modéliser l'écoulement de grains sur une pente [148, 61], à partir des équations de Saint Venant.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les équations de Saint Venant consistent à moyenner les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sur l'épaisseur de l'écoulement. Ces équations ne laissent qu'un seul paramètre à déterminer pour caractériser l'écoulement : le coefficient de frottement effectif au socle qui dépend de l'épaisseur et de la vitesse ( $\mu^*(H, V)$ ). O.Pouliquen [143] a mesuré ce coefficient  $\mu^*(H, Fr)$  pour des écoulements stationnaires sur plan incliné, mais uniquement pour des valeurs de  $H/H_{Stop}$  suffisamment grandes. Nous avons cherché à obtenir les variations du frottement effectif au socle pour des écoulements près de l'arrêt ( $\frac{H}{H_{Stop}} \rightarrow 1$ ).

Étant donné que pour un écoulement stationnaire uniforme sur un plan incliné on a  $\mu^* = \tan \theta \approx \theta$ , on obtient à partir de l'équation 6.1 :

$$\mu^*(H, Fr) = \frac{f^{-1}(Fr)B\theta_M + \phi H}{f^{-1}(Fr)B + H} \quad (6.10)$$

avec  $Fr = f(\frac{H}{H_{Stop}})$ ,  $f$  étant une fonction inversible définie à partir des mesures. Les mesures près de l'arrêt permettent de déterminer cette fonction pour les petites valeurs du nombre de Froude.

Dans le cas des mesures effectuées par la méthode du front arrière, l'écoulement n'est pas uniforme. Dans ce cas, la gravité ne compense plus exactement les frottements, on a alors :

$$\tan \theta - \mu^* \approx K \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (6.11)$$

$K$  est le facteur de proportionnalité entre la pression verticale et la pression horizontale ( $K \approx 1$ , d'après les observations dans différentes géométries qui



indiquent que  $\frac{\Sigma_{xx}}{\Sigma_{yy}} \approx 1$ ). Les fronts arrière que nous avons étudiés font environ 50 cm de long et 5 mm d'épaisseur, donc  $dh/dx \approx 0,01$ . Cette valeur est relativement importante au vu de la variation de  $\mu^*(Fr)$ . Toutefois, notre hypothèse de travail est que la contribution du gradient de pression est négligeable par rapport aux effets de la gravité et du frottement effectif. Cette hypothèse revient à considérer le front arrière comme un écoulement uniforme. C'est une hypothèse forte, mais il semble que cela n'a que peu d'influence sur les résultats, puisque par cette méthode de front arrière on retrouve des résultats analogues à ceux d'O.Pouliquen [143].

Les figures 6.14 (a) et (b) indiquent les variations du coefficient de frottement effectif en fonction du nombre de Froude et de la hauteur d'écoulement. Nous n'indiquons ici que les ajustements des courbes expérimentales par l'équation 6.10. La figure (a) a été obtenue pour les billes de verre et la figure (b) pour le sable de taille moyenne. En fait, la forme de ces courbes reste inchangée pour différents couples matériau-rugosité (voir Annexe E).

On remarque aussi que le raccordement jusqu'à  $Fr = 0$  se fait de manière progressive par la fonction qui est déterminée expérimentalement par la méthode du front arrière. Cependant, si on considère les mesures en écoulement stationnaire uniforme qui indiquent une transition abrupte (Fig. 6.13), il n'y a pas de raccordement possible, puisque toute une plage de nombre de Froude est inaccessible.

Enfin, on observe bien sur ces courbes l'hystérésis de seuil entre le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  et le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  (déduit de  $H_{Start}$ ), avec  $\mu_d < \mu_s$ .

### 6.1.6 Rôle du nombre inertiel

Les figures 6.14 (a) et (b) mettent en évidence l'effet notable de l'épaisseur sur le frottement effectif. Le frottement effectif au socle augmente lorsque l'épaisseur diminue, c'est à dire lorsque la pression au socle diminue. Notons que la pression au socle s'écrit  $P = \rho g H$ , on a donc  $Fr \propto \frac{V}{\sqrt{P}}$ . Si l'on suppose le taux de cisaillement constant, le nombre inertiel global s'écrit :

$$I \simeq \frac{Fr}{H} \quad (6.12)$$

$H$  étant adimensionnée par le diamètre des grains. Il est donc possible de tracer le frottement effectif en fonction du nombre inertiel (Fig. 6.15). Cette figure indique qu'il existe un nombre inertiel critique, fonction de  $H$ , en dessous duquel le matériau s'arrête.

Le fait de tracer le frottement au socle en fonction du nombre inertiel permet de remettre à l'échelle l'ensemble des courbes. On note aussi que la courbe a une forme similaire à celle que l'on obtient en cisaillement plan.

Afin de comparer ce résultat à ce qui a été obtenu par d'autres auteurs dans une géométrie de plan incliné tridimensionnel, tant du point de vue

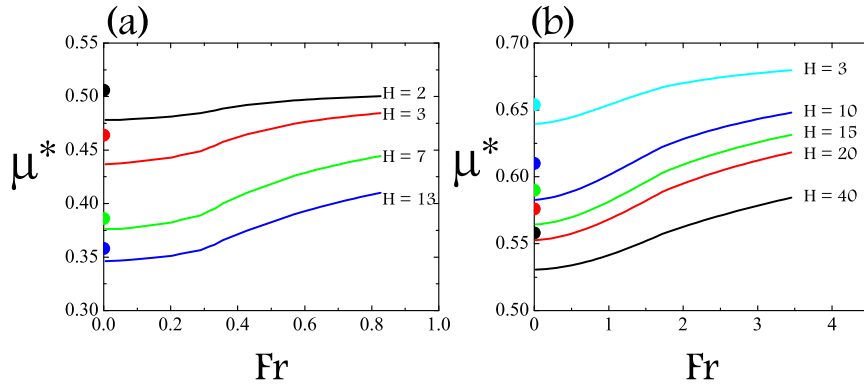


FIG. 6.14 – Coefficient de frottement effectif en fonction de la hauteur et du nombre de Froude obtenu pour les billes de verre (a) et le sable de taille moyenne (b). Ajustement avec equ. 6.10. Les points correspondent aux coefficients de frottement statique  $\mu_s = \tan \theta_{start}$ .

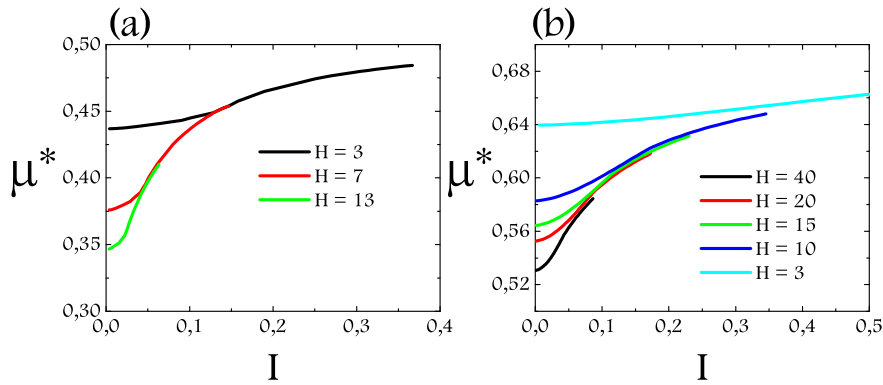


FIG. 6.15 – Coefficient de frottement effectif en fonction du nombre inertiel global obtenu pour les billes de verre (a) et le sable de taille moyenne (b).

expérimental (Pouliquen [143]) que numérique (Silbert [180]), nous avons tracé sur la figure 6.16 les variations du frottement effectif en fonction du nombre inertiel global. On observe alors un très bon accord entre les deux expériences pour un même type de matériau (billes de verres), mais aussi

un bon accord avec les simulations numériques de sphères. Ceci valide le fait

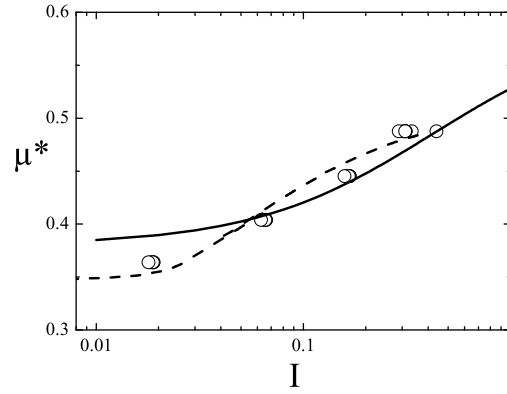


FIG. 6.16 – Coefficient de frottement effectif en fonction du nombre inertiel global pour un plan incliné 3D. La courbe en tiretés correspond aux mesures que l'on a effectuées sur les billes de verre, la courbe continue correspond aux mesures d'O. Pouliquen sur des billes de verres ( $d = 0.5\text{mm}$  [148]) et les cercles correspondent aux mesures déduites des simulations numériques de Silbert [180].

que le nombre inertiel est le bon nombre pour décrire le cisaillement d'un matériau granulaire.

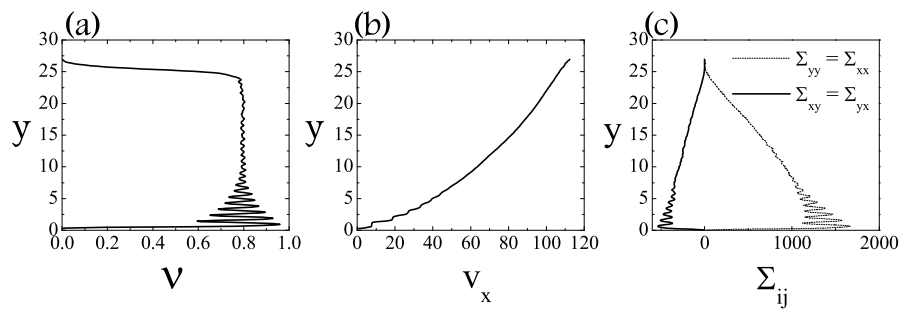


FIG. 6.17 – Profil de compacité (a), de vitesse (b) et de contrainte (c), pour un plan incliné bidimensionnel. ( $H = 25, \theta = 18^\circ$ ). Résultats de M. Prochnow [150].

Nous avons aussi mesuré le frottement effectif en fonction de  $I$  à travers les simulations numériques de M.Prochnow [150]. Il s'agit ici d'un plan incliné bidimensionnel simulé par la méthode de dynamique des contacts. Les profils de compacité, de vitesse et de contraintes sont représentés sur la figure 6.17 pour une inclinaison donnée. La connaissance de ces profils permet de faire cette fois-ci une mesure locale du nombre inertiel. Il est alors possible de tracer le profil du nombre inertiel pour une couche de grains en écoulement sur un plan incliné. La figure 6.18 représente la variation de ces profils en fonction de l'inclinaison pour des écoulements de même épaisseur.

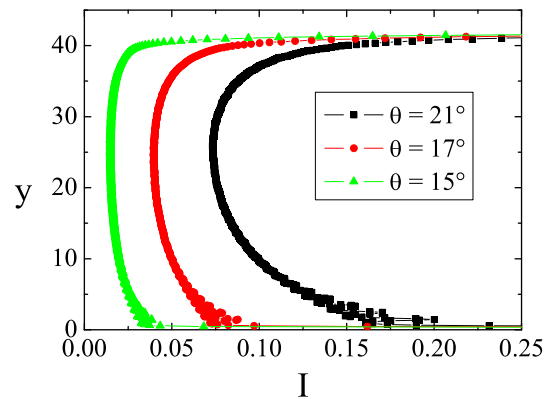


FIG. 6.18 – Profil du nombre inertiel pour un plan incliné bidimensionnel, pour différentes inclinaisons. ( $H = 40$ ).

Cette figure indique que le nombre inertiel augmente avec l'inclinaison, ce qui correspond au fait que le matériau est plus fortement cisailé pour des inclinaisons élevées. Elle montre aussi qu'en première approximation, on peut considérer le profil de  $I$  comme constant au centre de la couche de grains. L'augmentation de  $I$  près de la surface libre a un effet du nombre  $G_p$  qui traduit le rapport des forces de pression sur les forces de gravité (voir § 4.2.3 et § 9.2.2). Dans la suite, on ne tiendra pas compte des zones proches de la surface libre. Par contre, on note l'existence de déviations importantes près du socle.

La figure 6.19 présente une comparaison entre les mesures de frottement sur plan incliné et en cisaillement plan. Notons ici que l'on compare des résultats issus de deux méthodes de simulation différentes : la dynamique des contacts (plan incliné) et la dynamique moléculaire (cisaillement plan). Cependant, on a vérifié en comparant des systèmes identiques simulés par

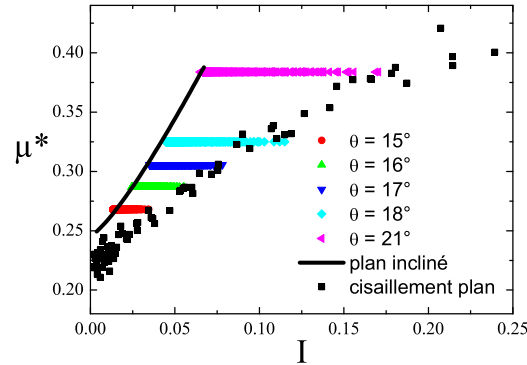


FIG. 6.19 – Coefficient de frottement effectif en fonction du nombre inertiel pour des systèmes bidimensionnels. La courbe (plan incliné) et les carrés noirs (cisaillement plan sans gravité) correspondent aux mesures pour des nombres inertiels globaux. Les symboles de couleur correspondent aux mesures locales.

l'une ou l'autre méthode que la méthode de simulation n'a pas d'influence sur la mesure du frottement effectif et du nombre inertiel.

On remarque alors que le frottement effectif varie qualitativement de la même manière dans les deux géométries. Toutefois, le frottement en fonction du nombre inertiel global est plus faible en cisaillement plan que pour le plan incliné. Si, par contre, on tient compte des variations de  $I(y)$ , on remarque que pour un coefficient de frottement donné (c'est à dire pour un angle  $\theta$  donné) on balaye une gamme de  $I$  qui s'étend de la valeur globale mesurée au centre de l'écoulement à la valeur au socle. On note alors que la valeur au socle correspond à la valeur de  $I$  en cisaillement plan pour un même frottement effectif.

Notons enfin que cette diminution du frottement effectif avec la pression rejoint les observations de J.Dent [59]. J.Dent explique que ce serait cette diminution du coefficient de frottement interne avec la pression qui serait responsable du déclenchement des avalanches dans les couches de neige profonde.

## 6.2 Cisaillement annulaire

Il est aussi possible d'observer cet hystérésis de seuil en rhéométrie à contrainte contrôlée, dans une géométrie de Couette (cisaillement annulaire, géométrie analogue à celle utilisée à vitesse imposée dans la première partie).

Les essais ont été réalisés avec un rhéomètre Bohlin C-VOR (Fig. 6.20) équipé d'un scissomètre (six pales, diamètre = 2,5 cm, hauteur = 4,5 cm) ou d'un cylindre intérieur rugueux (diamètre = 2,4 cm, hauteur = 3,4 cm) inséré dans une cuve rugueuse (diamètre = 3,7 cm, hauteur = 6,0 cm). Dans la suite, on appelle  $R_i$  et  $R_e$  le rayon du cylindre intérieur (ou du scissomètre) et le rayon de la cuve. La hauteur du cylindre est notée  $h$ . Les résultats sont identiques avec les deux géométries. La géométrie du scissomètre a permis de tester qu'il n'y a pas d'effet de glissement sur le cylindre intérieur. De plus, cette géométrie est réputée pour être un très bon équivalent de la géométrie de Couette [14].



FIG. 6.20 – Photographies du rhéomètre et des deux géométries utilisées.

La distribution de la contrainte de cisaillement est hétérogène dans cette géométrie, de sorte que le taux de cisaillement n'est pas homogène. À la différence des simulations numériques de cisaillement annulaire à vitesse imposée (voir § 4.3), la pression radiale n'est pas contrôlée. De plus, le matériau granulaire au repos n'est pas confiné, et peut donc se dilater verticalement sous cisaillement. De récentes expériences ont montré, pour des faibles dilatations dues à une fluidisation, que ceci ne change pas significativement le profil de vitesse [109]. Nous ne présentons que les grandeurs macroscopiques : contrainte en fonction du taux de cisaillement apparent  $\dot{\gamma}_p$  (voir § 4.3). La gamme de contrainte et de taux de cisaillement étudiée ici correspond à celle étudiée en rhéométrie IRM ( $\sigma$  quelques centaines de Pa et  $\dot{\gamma}_p$  de environ 10 à 100  $s^{-1}$ ).

Notons aussi que pour éviter de perdre de la matière lors de certaines expériences, nous avons placé un couvercle transparent au dessus de la cuve contenant le matériau. Le couvercle se trouvant à quelques  $mm$  de la surface

libre, il autorise une légère dilatance du milieu. Toutefois, pour des régimes fortement cisailés, il bloque la dilatance du matériau. On observe, cependant, un comportement similaire entre les expériences avec et sans couvercle.

Les matériaux sont des billes de polystyrène (diamètre = 200 – 300  $\mu m$ ), deux types de billes de verre (350 – 390  $\mu m$  et 500  $\mu m$ ) ainsi que du sable de Fontainebleau (une centaine de  $\mu m$ ) pour lesquels les résultats se sont révélés qualitativement similaires. Il existe, toutefois, une différence notable dans la loi de comportement entre les billes et le sable de Fontainebleau. Ceci peut s'expliquer par le fait que le sable est composé de particules dont la forme et la taille (entre 100 et 200  $\mu m$ ) est quelconque, alors que les billes sont de forme sphérique et peu polydisperse.

De façon à ne pas être dépendant du mode de mise en place de l'échantillon dans le rhéomètre, on précisaille vigoureusement le matériau (fort taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = 50 \text{ s}^{-1}$  pendant 10 s) jusqu'à atteindre un état stationnaire dans lequel l'ensemble du matériau semble en écoulement (on l'observe à la surface libre). Les mesures sont effectuées immédiatement après sans temps de repos.

### 6.2.1 Boucle d'hystérésis

Un essai typique consiste à faire une rampe de contrainte en montée puis en descente. La contrainte est augmentée logarithmiquement, avec un arrêt de une à quelques secondes pour chaque valeur de contrainte. Ainsi une rampe de contrainte a une durée de quelques secondes à plusieurs centaines de secondes. On mesure alors le couple instantané, sans nécessairement avoir atteint un régime stationnaire.

Les figures 6.21 (a) et (b) indiquent les rhéogrammes obtenus lors d'un tel essai pour des billes de polystyrène et des billes de verre. Afin de pouvoir comparer les rhéogrammes pour des matériaux différents (dont la taille des particules sont différentes), nous présenterons les rhéogrammes contraintes  $\sigma$  en fonction du taux de cisaillement apparent à la paroi  $\dot{\gamma}_p$ . Il est donc nécessaire de convertir les grandeurs mesurées par le rhéomètre (couple  $C$  et vitesse de rotation  $\Omega$ ), de la manière suivante :

$$\sigma = \frac{C}{2\pi R_i^2 h} \quad (6.13)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega R_i}{R_e - R_i} = \dot{\gamma}_p \frac{d}{R_e - R_i} \quad (6.14)$$

$$\dot{\gamma}_p = \frac{\Omega R_i}{d} \quad (6.15)$$

Les figures 6.21 (a) et (b) indiquent l'existence d'un seuil d'écoulement, observé à la montée, et d'un seuil d'arrêt, observé à la descente. Cet hystérésis de seuil est observé pour l'ensemble des matériaux que l'on a étudié. Les

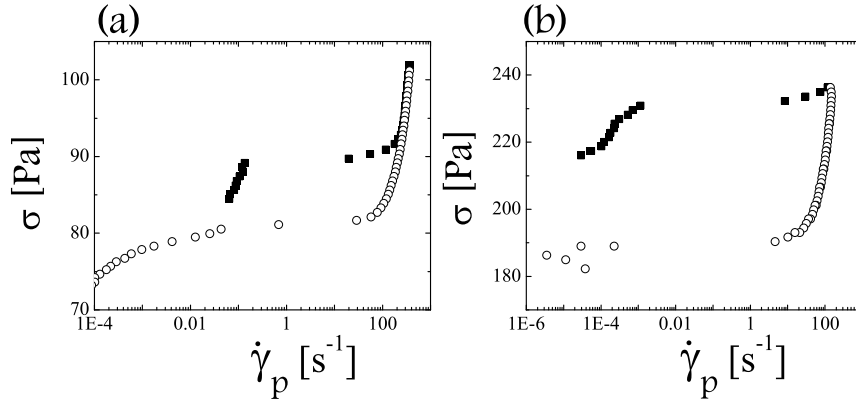


FIG. 6.21 – Rhéogramme (en noir la montée, en blanc la descente) (a) Billes de polystyrène ( $200\ \mu\text{m}$ ). Rampe entre  $75$  et  $107\ \text{Pa}$  en  $60\ \text{s}$  (montée) et descente en  $60\ \text{s}$ . (b) Billes de verre ( $500\ \mu\text{m}$ ). Rampe entre  $180$  et  $238\ \text{Pa}$  en  $30\ \text{s}$  et descente en  $30\ \text{s}$ .

figures 6.22 (a) et (b) montrent clairement cet hystérésis pour le sable et les billes de verre. Du fait de la forme de ces courbes, on peut parler de boucle d'hystérésis.

Les figures 6.22 (a) et (b) montrent les résultats obtenus pour des essais effectués à plusieurs heures d'intervalle. On vérifie ainsi la reproductibilité des expériences. On remarque en particulier que le comportement du matériau (loi de comportement  $\sigma(\dot{\gamma})$  dans le régime liquide) et le seuil d'arrêt sont bien reproductibles. Par contre, le seuil de mise en écoulement est sensible aux conditions extérieures (vibrations, préparation, ...) et donc n'est pas reproductible.

En outre, la figure 6.23 indique que la vitesse de la rampe n'a pas d'effet sur le régime d'écoulement. Par contre, on observe que le seuil d'arrêt est modifié pour des vitesses de rampe élevées. Effectivement, si on diminue trop rapidement la contrainte on mesure des vitesses qui sont liées à la dynamique de l'arrêt du matériau (voir Chap. 7). Ainsi le seuil d'arrêt ne peut être défini que pour des vitesses de rampe suffisamment faibles.

Remarquons enfin que le taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}_p$ ) critique, pour lequel le milieu granulaire est dans sa "phase liquide", varie notablement : entre environ  $100$  et  $10000\ \text{s}^{-1}$  selon le type de matériau. En exprimant la masse d'un grain et la pression au sein du matériau, cette gamme de  $\dot{\gamma}_p$  peut être directement reliée au nombre inertiel  $I$  :



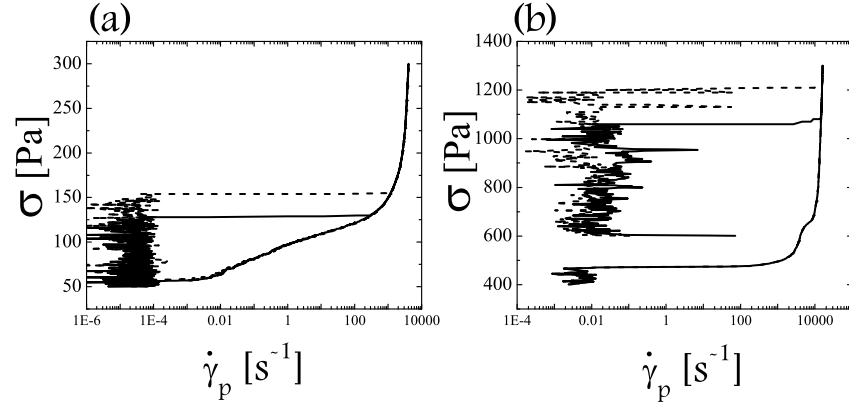


FIG. 6.22 – Rhéogramme pour 2 essais identiques en trait tiré et en trait plein. (a) Billes de verre (370  $\mu m$ ). Rampe de 50 à 300 Pa en 900 s (montée) et 900 s (descente). (b) Sable de Fontainebleau (100  $\mu m$ ). Rampe de 600 à 1300 Pa en 50 s, de 1300 à 400 Pa en 75 s.

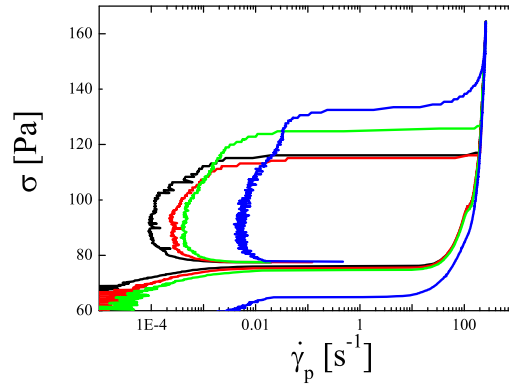


FIG. 6.23 – Effet de la vitesse de la rampe : En noir montée et descente en 940 s, en rouge 470 s, en vert 352 s et en bleu 29 s. Billes de polystyrène (200  $\mu m$ ).

$$I = \dot{\gamma}_p \sqrt{\frac{\pi}{6\nu}} \sqrt{\frac{d^2}{gh}} \quad (6.16)$$

Pour une hauteur  $h$  de 5 cm, on a  $I \approx 1.4\dot{\gamma}_p d$ . La gamme de  $I$  critique est autour de 1.

### 6.2.2 Comportement autour de l'arrêt

Les observations font apparaître différents régimes.

Le premier régime – contrainte croissante et faible taux de cisaillement – correspond à un régime où on peut qualifier le matériau de solide élastoplastique. Pour de petites contraintes, on observe une augmentation progressive du taux de déformation apparent moyen, par petits à-coup. On peut penser qu'il s'agit de changements irréversibles de configuration [40, 102, 133].

Puis pour une contrainte critique  $\sigma_{SL}$ , on observe la transition solide-fluide. Il y a alors une augmentation brutale du taux de déformation (plusieurs décades). Ceci correspond au deuxième régime caractérisé par le plateau du rhéogramme (pour la valeur  $\sigma_{SL}$ ).

Comme nous l'avons remarqué, cette contrainte critique dépend de facteurs extérieurs. En fait, sous contrainte, le matériau présente une extrême sensibilité aux perturbations, ainsi, il se mettra brutalement en écoulement s'il ressent une légère vibration (produite par le rhéomètre par exemple). Une vibration contrôlée (une petite tape sur la table du rhéomètre) permet de déclencher l'écoulement toujours à la même contrainte. Il est aussi possible que la vitesse de la rampe affecte le seuil d'écoulement, mais il est impossible de différencier cette cause de perturbations extérieures. Toutefois, on peut penser que pour des vitesses de rampe suffisamment lentes, l'effet de la vitesse de la rampe est négligeable. Enfin, on a remarqué que le seuil d'écoulement est modifié par la préparation du système. En particulier, si l'on ne précisaillie pas le matériau, plus la compacité initiale sera grande plus la contrainte critique sera élevée. Afin de s'affranchir de cette sensibilité, nous avons systématiquement cisailé fortement le matériau avant l'essai. Étant donné que le système est extrêmement sensible aux faibles perturbations (les vibrations provenant du rhéomètre), nous n'avons pas pu étudier le seuil d'écoulement avec précision.

On remarque de plus que cette transition solide-fluide est associée à une chute de la force normale mesurée sur l'axe de rotation du rhéomètre dans la direction verticale (Fig. 6.24). On observe effectivement que la force normale chute (de 17 à 5 u.a.), lorsque le milieu se met en écoulement. Dans le même temps, on observe à la surface libre, que le matériau vient occuper l'ensemble de l'espace disponible dans la cuve qui est fermée par un couvercle. Il semble que l'on peut associer cette variation rapide de la force normale avec la chute de la compacité en écoulement observée lorsque le matériau se met en écoulement (voir chapitre 4).

Dans le troisième régime – pour des taux de cisaillement apparents et des contraintes élevés – le matériau se comporte comme un fluide. La transition entre le deuxième (plateau) et le troisième régime pourrait indiquer qu'il

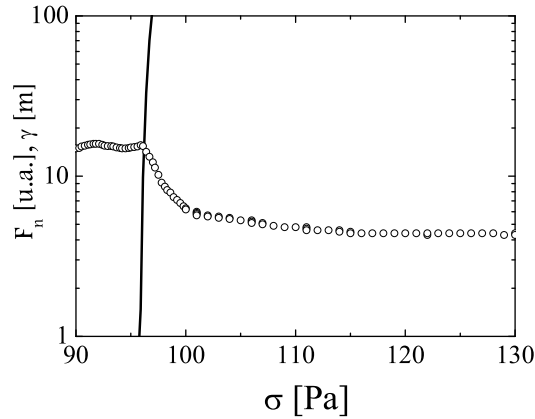


FIG. 6.24 – Variation de la force normale en fonction de la contrainte (les cercles). La courbe en trait plein correspond à la déformation en fonction de la contrainte, elle indique le seuil d'écoulement. Billes de polystyrène (200  $\mu\text{m}$ ). Montée de 80 à 130 Pa en 352 s.

y a un changement brusque de l'aspect de l'écoulement. Les observations faites à la surface libre semblent effectivement montrer que l'ensemble du matériau compris dans l'entrefer et non seulement la bande de cisaillement s'écoule dans le troisième régime. Ceci suggère qu'une couche de l'ordre de 25 particules est cisillée à un taux sensiblement plus grand que ce qui est observé dans la queue des profils de vitesse exponentielle. Cette valeur est sensiblement plus grande que celle trouvée pour des bandes de cisaillement typiques (autour de 10) [130, 109].

Dans ce troisième régime, la contrainte et le taux de cisaillement augmentent de concert. On remarque aussi que le comportement du matériau est réversible ; la courbe de descente est identique à la courbe de montée. Il n'y a donc pas d'effet mémoire : la loi de comportement  $\sigma(\dot{\gamma}_p)$  est unique ; elle ne dépend pas de la préparation du système, ni de la vitesse de la rampe de contrainte.

De plus, comme le montrent les figures 6.25 (a) et (b), on observe que la loi de comportement est une loi de puissance du type :

$$\sigma = a\dot{\gamma}_p^\beta \quad (6.17)$$

L'exposant  $\beta$  vaut 1.2 pour les billes de polystyrène et les billes de verre, et 1.7 pour le sable de Fontainebleau. Ces valeurs correspondent à un comportement rhéoépaississant. Des expériences rhéométriques effectuées à vitesse imposée indiquent également une transition d'un régime indépendant

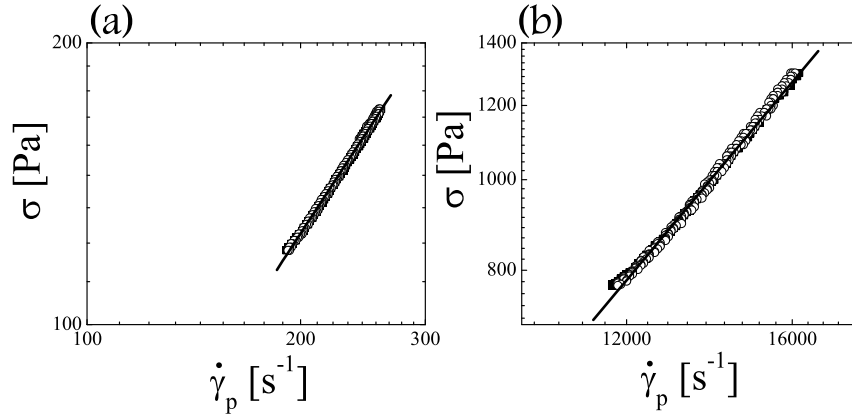


FIG. 6.25 – Contrainte en fonction du taux de cisaillement apparent : loi de comportement dans le régime fluide. (a) Billes de polystyrène. En blanc vitesse de rampe rapide, en noir vitesse de rampe lente. La droite correspond à une droite de pente 1.2. (b) Sable de Fontainebleau. En blanc vitesse de rampe rapide, en noir vitesse de rampe lente. La droite correspond à une droite de pente 1.7.

du taux de cisaillement à un régime pour lequel la contrainte varie en loi de puissance avec le taux de cisaillement [5, 186, 47, 79, 173]. Les expériences et les simulations [12] donnent un exposant qui varie entre 0 et 2. La valeur des exposants mesurée pour les billes et le sable est intermédiaire entre la valeur correspondante à un fluide newtonien (1), et celle correspondante à une loi du type Bagnold (2).

Si on diminue la contrainte depuis le régime fluide, on peut définir un quatrième régime. Bien que l'on soit sous la valeur de la contrainte critique de transition solide-fluide, le matériau reste dans un état fluide. Ce régime est donc tout à fait analogue au troisième régime. On a toujours une relation contrainte - taux de cisaillement bien définie. La courbe est là aussi réversible : si on réaugmente la contrainte, on passe par les mêmes états. A nouveau, il n'y pas d'effet de mémoire, ni de la vitesse de la rampe, si celle-ci est suffisamment faible. En outre, l'écoulement est stable : dans ce régime, si on fixe une contrainte, on définit un taux de cisaillement, et inversement.

Il est à noter que dans ce régime, on observe un décrochement du taux de cisaillement apparent. La figure 6.26 présente un agrandissement des rhéogrammes dans cette zone. On observe ainsi que pour une contrainte donnée le taux de cisaillement diminue rapidement, mais le matériau ne s'arrête pas, il reste fluide. Ce décrochement correspond au moment où le matériau, se

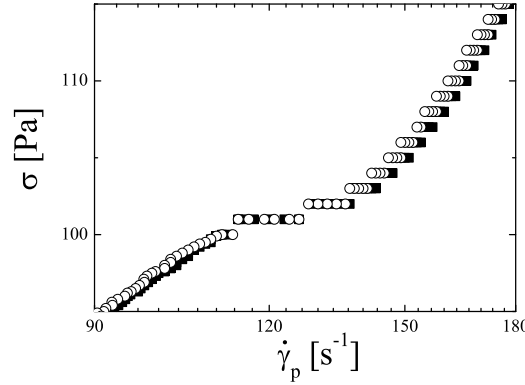


FIG. 6.26 – Variation du taux de cisaillement en fonction de la contrainte : décrochement. En noir vitesse de rampe élevée, en blanc vitesse de rampe lente. Billes de polystyrène.

compactant sous gravité, n'est plus en contact avec le couvercle transparent. Ceci est donc lié à l'augmentation brutale de la compacité, lorsque le milieu ralentit. Notons que l'on observe aussi une variation de la force normale pour cette valeur de la contrainte. En dessous de celle-ci, le milieu continue donc de s'écouler, mais on observe cette fois-ci que l'écoulement ne concerne qu'une petite bande de cisaillement proche du cylindre intérieur.

Enfin, en dessous d'une certaine contrainte critique,  $\sigma_{LS}$ , on observe la transition fluide-solide correspondant au deuxième plateau du rhéogramme. On remarque, en particulier l'hystérésis de seuil  $\sigma_{LS} < \sigma_{SL}$  analogue à ce qui est observé sur plan incliné, c'est à dire une chute soudaine du taux de cisaillement.

Pour résumer, il faut remarquer que la boucle d'hystérésis décrit le comportement du matériau dans son état solide et fluide. Les transitions solide fluide et fluide solide sont associées à une variation brusque du taux de cisaillement pour deux contraintes critiques :  $\sigma_{LS}$  et  $\sigma_{SL}$ . Ces transitions correspondent aux plateaux du rhéogramme; ceux-ci indiquent que pour une contrainte donnée ( $\sigma_{LS}$  ou  $\sigma_{SL}$ ) il existe toute une gamme de taux de cisaillement. Ceci rappelle les mesures de couple effectuées à vitesse imposée (Chap. 2) : le couple reste constant pour toute une gamme de vitesse de rotation. Nous pensons que les observations à vitesse imposée d'un profil de vitesse exponentiel avec localisation du cisaillement dans une petite bande près du cylindre de rotation [130, 109] sont faites pour des taux de cisaillement correspondants au plateau du rhéogramme à force imposée. Effectivement les expériences à vitesse imposées sont faites pour des taux de

cisaillement apparent à la paroi  $\dot{\gamma}_p$  inférieurs à  $200 \text{ s}^{-1}$ , or les expériences à contraintes imposées semblent indiquer un changement de régime pour des taux de cisaillement supérieurs.

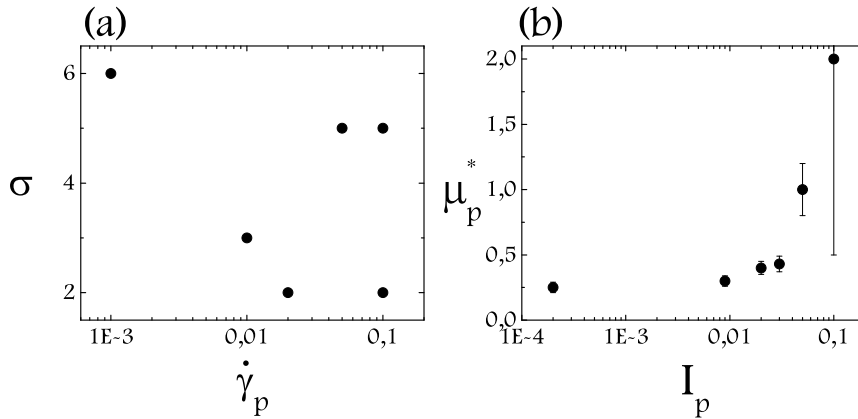


FIG. 6.27 – Simulations numériques à vitesse imposée bidimensionnelles. (a) Contrainte en fonction de  $\dot{\gamma}_p$ . (b) Frottement effectif en fonction du nombre inertiel apparent à la paroi.

Nous avons voulu comparer ces observations avec les simulations de cisaillement annulaire à vitesse imposée, que l'on a déjà traitées au chapitre 4. Pour une simulation donnée, nous avons calculé la contrainte à la paroi du cylindre intérieur  $\sigma$ , ainsi que le taux de cisaillement apparent à la paroi  $\dot{\gamma}_p$ . L'ensemble des simulations permet alors de tracer  $\sigma(\dot{\gamma}_p)$  (Fig. 6.27 (a)). La figure obtenue n'est pas très significative : Il n'y a pas de relation simple entre la contrainte et le taux de cisaillement. En fait, les simulations étant effectuées à pression contrôlée, nous avons tracé sur la figure 6.27 (b) la variation du frottement effectif à la paroi  $\frac{\sigma}{P}$  en fonction du nombre inertiel apparent à la paroi  $I_p = \frac{\dot{\gamma}_p}{\sqrt{P}}$ . On observe alors un plateau analogue à celui observé sur les rhéogrammes des expériences à contraintes imposées. Le plateau correspond aux simulations où la bande de cisaillement est constante (Fig. 4.16), alors que l'augmentation du frottement avec  $I_p$  est associée aux simulations dont la bande de cisaillement est plus grande (Fig. 4.19 (b)).

Notons toutefois que ces grandeurs sont moyennées dans le temps et que l'écart à la moyenne est d'une dizaine de pourcents sur le plateau (sur la figure 6.27 (b), les barres d'erreurs correspondent à l'écart type). Cependant, l'écart à la moyenne peut atteindre plusieurs fois la valeur moyenne pour les points en dehors du plateau. Ceci correspond au fait que la compacité diminue fortement près de la paroi intérieure pour ces simulations (Fig. 4.19

(a)), les contacts parois particules sont alors moins nombreux et plus erratiques, ce qui induit des fluctuations de contraintes importantes. Afin de s'affranchir de telles fluctuations il faudrait simuler des systèmes beaucoup plus grands. Ceci ne permet donc pas de conclure sur la variation de la largeur de la bande de cisaillement. Toutefois, nous avançons l'hypothèse que la largeur de la bande de cisaillement est constante dans le régime quasi statique correspondant au plateau, et que par contre elle varie avec le taux de cisaillement dans le régime fluide.

Afin d'élucider, d'un point de vue physique, la transition solide-liquide pour ces matériaux, il semble crucial d'obtenir des profils de vitesse par des techniques spécifiques (RMN, rayon X, diffusion de lumière) pour des plus grands taux de cisaillement, et d'établir ainsi la correspondance de ces données avec la rhéométrie conventionnelle.

## Chapitre 7

# Dynamique de l'arrêt

On se propose dans ce chapitre d'aborder la question de la dynamique de l'arrêt. Comme nous l'avons fait remarquer au chapitre précédent, le quatrième régime correspondant à la phase fluide de l'écoulement est un régime stable. Nous avons alors remarqué que le matériau s'arrête à partir d'une contrainte critique  $\sigma_{LS}$ , qui dépend légèrement de la vitesse à laquelle la rampe de contraintes est effectuée. Nous nous intéressons maintenant à la dynamique de l'arrêt. L'expérience en géométrie annulaire consiste à faire varier brusquement la contrainte autour de  $\sigma_{LS}$ . Nous verrons ensuite qu'il est possible de faire l'expérience sur plan incliné en variant brusquement l'inclinaison autour de  $\theta_{Stop}$ . Ces informations expérimentales seront complétées par des informations de simulations numériques.

### 7.1 Bifurcation de viscosité

Lors d'une expérience de rampe de contraintes, l'écoulement d'un matériau granulaire s'arrête en dessous d'une contrainte critique  $\sigma_{LS}$ , qui dépend légèrement de la vitesse à laquelle la rampe de contraintes est effectuée (Fig. 6.23). Afin de déterminer avec précision la valeur de cette contrainte critique, nous avons, à partir de l'état fluide, effectué des rampes de contrainte décroissante jusqu'à une certaine contrainte maintenue pendant un temps relativement long (plusieurs minutes). On s'affranchit ainsi des effets liés à la vitesse de la rampe de contraintes. Ceci permet donc de définir les points de fonctionnement (couple taux de cisaillement/contrainte) pour lesquels le matériau continue de s'écouler.

Les figures 7.1 (a) et (b) représentent les résultats obtenus dans le cas des billes de polystyrène. Afin de situer ces résultats par rapport aux boucles d'hystérésis, nous avons tracé sur la figure 7.1 (a) la courbe noire qui correspond à une boucle d'hystérésis faite pour une vitesse de rampe faible. On remarque sur la figure (b) que lorsque l'on maintient la contrainte pour des valeurs supérieures à 82,5 Pa, le matériau continue de s'écouler indéfiniment.



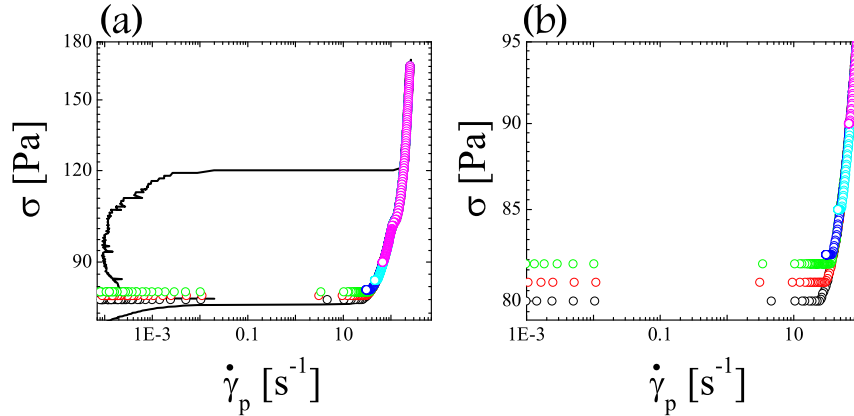


FIG. 7.1 – Variation du taux de cisaillement en fonction de la contrainte. Rampe décroissante de contrainte avec contrainte maintenue à 90 Pa (symbole rose), 85 Pa (symbole cyan), 82,5 Pa (symbole bleu), 82 Pa (symbole vert), 81 Pa (symbole rouge), 80 Pa (symbole noir). (a) Rhéogramme. La courbe noire correspond à une vitesse de rampe faible. (b) Agrandissement. (Billes de polystyrène)

Par contre, on s'aperçoit que le matériau s'arrête en dessous de 82 Pa. Le seuil d'arrêt se situe donc entre 82 Pa et 82,5 Pa, ce qui est une valeur légèrement supérieure à celle que l'on déduit de la boucle d'hystérésis. Ces expériences montrent clairement que l'on ne peut pas négliger la dynamique de l'arrêt.

Afin d'étudier plus en détail la dynamique du matériau lors de la transition fluide-solide, nous avons effectué un autre type d'expérience en géométrie annulaire et sur le plan incliné.

### 7.1.1 Cisaillement annulaire

Nous avons étudié le transitoire au voisinage du seuil en géométrie annulaire. Pour cela, après le précisaillement initial, on place le matériau dans un état fluide au-dessus de la contrainte critique solide fluide  $\sigma_{SL}$  (soit en imposant un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_0$  élevé, soit en imposant une contrainte  $\sigma_0 > \sigma_{SL}$ ), puis on change soudainement la contrainte à une valeur  $\sigma$ , et on mesure l'évolution dans le temps du taux de cisaillement. Les figures 7.2, obtenues pour les différents matériaux étudiés, montrent que si  $\sigma > \sigma_{LS}$ , alors le matériau reste fluide et le taux de cisaillement évolue vers une nouvelle valeur non nulle. En revanche, si  $\sigma < \sigma_{LS}$ , le matériau va finalement

s'arrêter, mais le temps d'arrêt est extrêmement sensible à  $\sigma_{LS} - \sigma$ . Il existe donc une plage de taux de cisaillement qui ne peut pas être atteinte de façon stable. Pour  $\sigma < \sigma_{LS}$ , même pour une toute petite différence, le taux de cisaillement chute à zéro. On prédit donc que là où le taux de cisaillement devient inférieur à un taux de cisaillement critique  $\dot{\gamma}(\sigma_{LS}) = \dot{\gamma}_c$ , le matériau transite dans l'état solide. C'est ce comportement que l'on appelle bifurcation de viscosité. On remarque aussi, sur les figures 7.2 (a) et (c), une lente déformation résiduelle dans l'état solide.

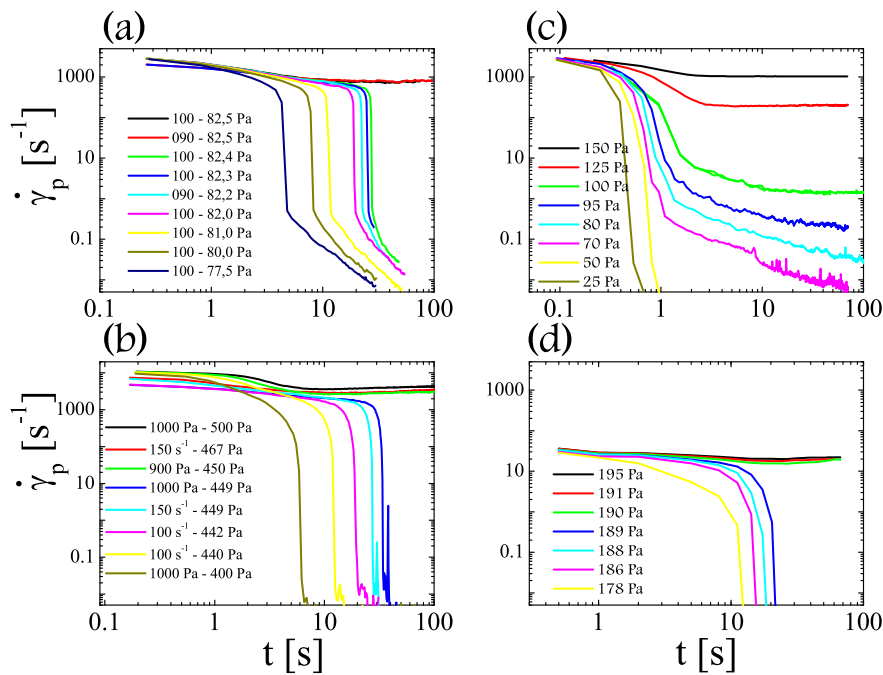


FIG. 7.2 – Variation du taux de cisaillement en fonction du temps pour (a) les billes de polystyrène (la légende indique la contrainte initiale et la contrainte finale), (b) le sable de Fontainebleau (la légende indique la contrainte initiale ou le taux de cisaillement initial et la contrainte finale), les billes de verre (contrainte initiale de 200 Pa) (c) 500  $\mu\text{m}$  et (d) 370  $\mu\text{m}$ .

Notons que la contrainte critique  $\sigma_{LS}$  pour laquelle la bifurcation de viscosité se produit correspond au plateau de contrainte dans nos essais de rampe. La petite différence qui existe entre la valeur de la contrainte définie par le plateau et celle mesurée par les expériences de bifurcation de viscosité, est due au fait que la vitesse de la rampe affecte l'arrêt du matériau. Pour des vitesses de rampe rapides la dynamique de l'arrêt est imposée par la rampe

et non intrinsèque au matériau. La contrainte critique  $\sigma_{LS}$  pour laquelle la bifurcation se produit est très exactement la même que celle que l'on mesure sur les figures 7.1 (a) et (b).

De plus, remarquons que ce comportement (temps d'arrêt dépendant de la contrainte appliquée) n'est pas un effet lié à l'inertie du cylindre intérieur du rhéomètre. Effectivement, si on applique une contrainte nulle ( $\sigma = 0$ ) l'arrêt se produit en un temps très rapide (moins d'un dixième de seconde). Les temps d'arrêt que l'on mesure ici sont de plusieurs dizaines de seconde. C'est donc bien le matériau qui impose sa dynamique au système.

Ainsi, la transition fluide-solide en fonction de la contrainte appliquée est discontinue : l'écoulement n'est stable qu'au-dessus d'une contrainte critique, ou encore d'un taux de cisaillement critique.

### 7.1.2 Plan incliné

Nous avons aussi voulu mesurer cette dynamique de l'arrêt sur plan incliné, tant du point de vue expérimental [158] que numérique. Dans cette géométrie, le changement brusque d'inclinaison est équivalent au changement brusque de contrainte en cisaillement annulaire.

#### *Expériences*

Les expériences sont réalisées à l'aide du plan incliné et des graines de moutarde ( $d = 2 \text{ mm}$ ) utilisés pour la mesure des courbes  $H_{Stop}(\theta)$ . La rugosité du plan est constituée de la moquette la plus rugueuse. Les outils d'imagerie permettent la mesure de la vitesse à la surface par autocorrélation d'image. Le dispositif du plan incliné, ainsi que les outils d'imagerie sont décrits en Annexe D.

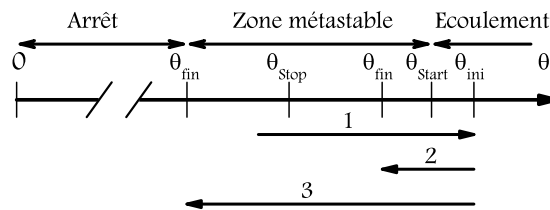


FIG. 7.3 – *Protocole* : Nous commençons par aller vers un état stationnaire (1) puis on diminue l'inclinaison soit vers un nouvel état stationnaire (2), soit vers l'arrêt (3).

Toutes les expériences ont été faites pour une même ouverture du réservoir (fixée à  $30 \text{ mm}$ ). Ceci fixe une épaisseur  $H$  à peu près constante,

d'ordre 18  $mm$ , soit  $H/d \approx 9$ . Les mesures à proximité du seuil ont été réalisées selon le protocole suivant (Fig. 7.3) : on se place dans un écoulement stationnaire uniforme à une inclinaison  $\theta_{ini}$  au-delà de  $\theta_{Start}(H)$  (état considéré comme ne présentant pas d'effet mémoire puisqu'on est au-dessus de la plage métastable). On lance l'enregistrement vidéo et immédiatement on diminue l'inclinaison jusqu'à  $\theta_{fin}$  autour de  $\theta_{Stop}(H)$ . Cette variation de l'inclinaison est faite à une vitesse  $\dot{\theta}$  aussi rapide que possible, et constante dans toutes les expériences. On appelle  $\Delta\theta = \theta_{ini} - \theta_{fin}$ . L'enregistrement mesure l'évolution de la vitesse jusqu'à un nouvel écoulement stationnaire (si  $\theta_{fin} > \theta_{Stop}$ ) ou jusqu'à l'arrêt (si  $\theta_{fin} < \theta_{Stop}$ ). Les valeurs expérimentales sont les suivantes :  $\theta_{Stop} = 27.7^\circ - \theta_{Start} = 29^\circ - \theta_{ini} = 29.2^\circ - \dot{\theta} = 1.2^\circ/s$  et  $\theta_{fin}$  varie de  $28.7^\circ$  à  $25.5^\circ$ , ou encore  $\Delta\theta$  varie de  $0.5^\circ$  à  $3.7^\circ$ .

La figure 7.4 (a) montre l'effet de  $\Delta\theta$  sur la dynamique de l'arrêt. Ces courbes sont des courbes lissées des données brutes, qui sont présentées en annexe E. La résolution de la méthode de mesure de la vitesse ( $0,5 \text{ mm/s}$ ) suffit pour mettre en évidence le phénomène souhaité. On observe en effet une bifurcation de viscosité autour de  $\theta_{Stop}$  qui est l'analogue de  $\sigma_{LS}$  dans le cas du cisaillement annulaire. On observe aussi la sensibilité du temps d'arrêt en fonction de  $\Delta\theta$  : il varie entre 4 et 10 secondes. Il existe donc une plage de vitesse qui ne peut pas être atteinte de façon stable. On peut penser qu'un dispositif de contrôle de l'inclinaison plus précis et plus rapide permettrait d'étendre cette gamme, d'une part en diminuant abruptement l'inclinaison vers l'horizontale conduisant à un arrêt très rapide, et d'autre part en choisissant  $\theta_{fin}$  très proche de  $\theta_{Stop}$  conduisant à un arrêt beaucoup plus lent.

### *Simulations*

Nous avons effectué des simulations numériques discrètes afin de reproduire la bifurcation de viscosité. Le système simulé par dynamique moléculaire est un plan incliné bidimensionnel ayant une longueur de 40 grains avec des conditions aux limites périodiques. C'est un plan rugueux dont le socle est constitué de grains jointifs ayant les mêmes caractéristiques que les grains en écoulement.

La couche de grains en écoulement d'épaisseur  $H$  (12, 20 et 40 diamètres de grains) est constituée de disques frottants ( $\mu = 0.4$ ) de diamètre moyen  $d$  ( $\pm 20\%$ ) et de masse  $m$ . De plus, le système simulé est un système fortement dissipatif ( $e = 0.1$ ).  $k_n$  est choisi égal à  $10^4$ , soit  $P/k_n = 2 \cdot 10^{-3}$  au socle ( $H = 20$ ), de telle sorte que le système peut être considéré dans la limite des grains rigides. Les différentes grandeurs sont adimensionnées par les échelles naturelles de temps ( $\sqrt{d/g}$ ), de longueur ( $d$ ) et de masse ( $m$ ).

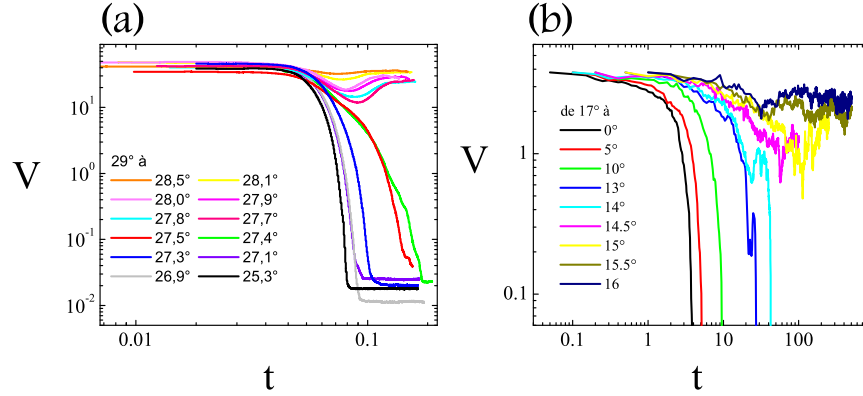


FIG. 7.4 – Bifurcation de viscosité sur plan incliné. (a) Expériences (Graine de moutarde  $d = 2$  mm,  $H = 9$ ). (b) Simulations ( $H = 20$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ). Vitesse et temps adimensionnés par  $\sqrt{gd}$  et  $\sqrt{\frac{d}{g}}$ .

Il nous est alors possible de mesurer  $\theta_{Stop}$ , en diminuant l'inclinaison progressivement jusqu'à l'arrêt. On obtient :  $\theta_{stop}(H = 12) = 14.7^\circ$ ,  $\theta_{stop}(H = 20) = 14.25^\circ$  et  $\theta_{stop}(H = 40) = 14.0^\circ$ .

Le protocole de la simulation numérique est le même que celui de l'expérience : à partir d'un écoulement stationnaire uniforme, on diminue l'inclinaison d'un angle  $\Delta\theta$ . On mesure alors la vitesse moyenne de la couche superficielle de grains en fonction du temps. Les résultats issus des simulations pour les trois épaisseurs ( $H = 12, 20$  et  $40$ ) sont similaires, nous ne présenterons donc que ceux pour lesquels  $H = 20$ . La figure 7.4 (b) montre l'effet de  $\Delta\theta$  sur la dynamique de l'arrêt. Le comportement du matériau est tout à fait similaire à celui observé expérimentalement. On observe une extrême sensibilité du temps d'arrêt à  $\Delta\theta$ , ainsi qu'une plage de vitesse qui ne peut être atteinte de façon stable.

Il faut aussi remarquer que l'énergie cinétique moyenne par particule évolue exactement de la même manière que la vitesse à la surface libre (Fig. 7.5). La bifurcation de viscosité n'est donc pas uniquement localisée à la surface.

De plus, les simulations permettent de mesurer l'évolution des profils de vitesse en fonction du temps lors de l'arrêt (Fig. 7.6). On observe alors que la vitesse diminue progressivement, mais on remarque aussi que l'arrêt s'amorce à partir du socle. Ceci correspond aux observations faites par Silbert [178]. C'est un point important que les modélisations doivent pouvoir prédire.

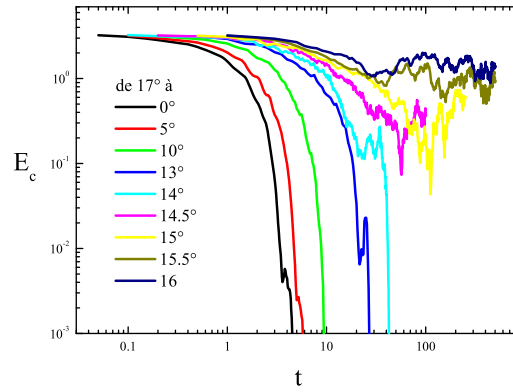


FIG. 7.5 – *Bifurcation de viscosité sur plan incliné (simulation). Variation de l'énergie cinétique en fonction du temps pour différents changements d'inclinaison. L'énergie est adimensionnée par  $mgd$  et le temps par  $\sqrt{\frac{d}{g}}$ .*

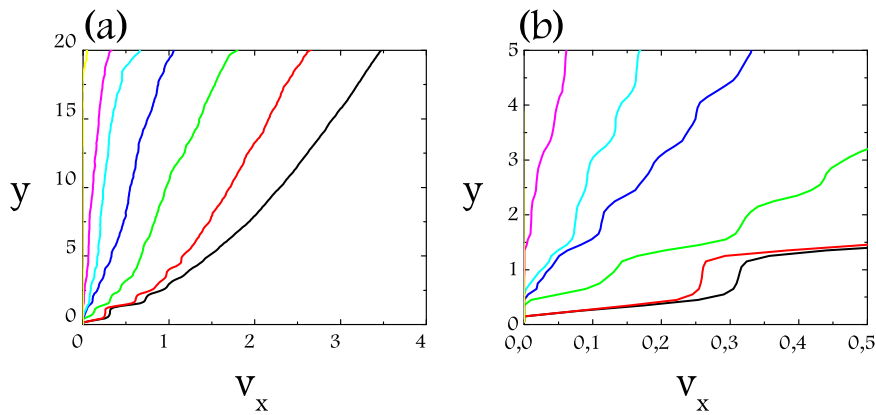


FIG. 7.6 – *Transition vers l'arrêt. Variation du profil de vitesse avec le temps. En noir, profil de vitesse dans l'état stationnaire, en couleur profil à différents instants séparés de  $2\sqrt{\frac{d}{g}}$ . (b) Agrandissement près du socle de (a). ( $H = 20, \Delta\theta = 12^\circ$ )*

## 7.2 Effet rebond

En outre, ces expériences de bifurcation de viscosité ont mis en évidence un phénomène nouveau. Effectivement, on remarque que les courbes des

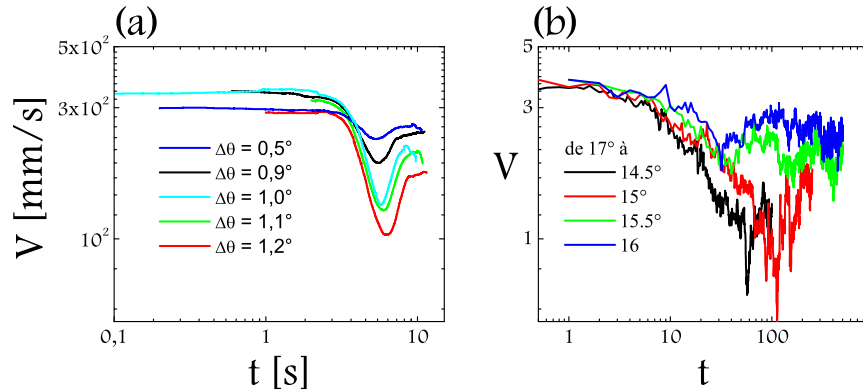


FIG. 7.7 – Effet rebond sur plan incliné. Variation de la vitesse en fonction du temps. Les diminutions de l'inclinaison sont telles que l'inclinaison finale est très proche de  $\theta_{stop}$ . Échelle log-log. (a) Expérience (graines de moutarde  $H = 9$ ). (b) Simulation ( $H = 20, e = 0.1, \mu = 0.4, k_n = 10^4$ ).

figures 7.4 présentent un minimum, pour des inclinaisons finales ( $\theta_{fin}$ ) supérieures à  $\theta_{stop}$ . On a ainsi l'impression que le matériau hésite à s'arrêter : il commence par ralentir, puis se met à accélérer jusqu'à atteindre un nouvel état stationnaire. Nous avons donc baptisé cet effet "effet rebond". Les figures 7.7 (a) et (b) représentent un agrandissement des figures 7.4 (a) et (b). Elles montrent clairement que l'effet rebond ne se manifeste que pour des inclinaisons proches du seuil.

Nous avons vérifié la très bonne reproductibilité de cette observation. De plus, on observe aussi cet effet en géométrie annulaire dans le cas du stable de Fontainebleau (voir Fig. 7.8). Là aussi, on observe ce comportement près du seuil, lorsque la contrainte imposée finale  $\sigma$  est légèrement supérieur à  $\sigma_{LS}$ . Notons, cependant que cet effet est moins visible en géométrie annulaire avec les billes de verre ou de polystyrène. Nous avons aussi étudié l'influence de la vitesse de variation de l'inclinaison, ou de la contrainte, sur ce phénomène. Dans la plage disponible de  $\dot{\theta}$ , nous avons observé un étalement de l'effet mais non sa disparition (le creux de la courbe devient plus large lorsque  $\dot{\theta}$  ou  $\dot{\sigma}$  diminue).

Sur plan incliné, la mesure de la variation de la hauteur (Fig. 7.9 (a)) lors de l'effet rebond indique une augmentation brusque de celle-ci au moment de la réaccélération du matériau, puis la hauteur revient à sa valeur initiale alors que l'écoulement redevient stationnaire. Cette variation de hauteur correspond à une variation de compacité de l'ordre de 10%, ce qui est

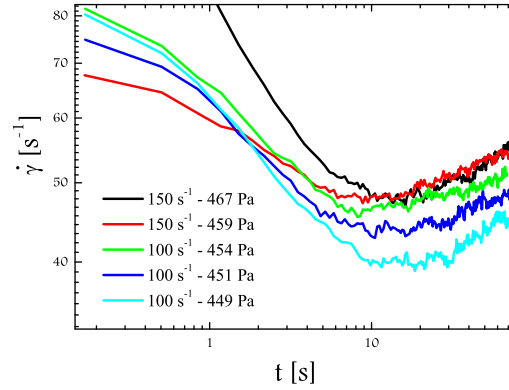


FIG. 7.8 – *Effet rebond en cisaillement annulaire. Variation du taux de cisaillement en fonction du temps. Les diminutions de contrainte sont telles que la contrainte finale est très proche de  $\sigma_{LS}$ .*

très significatif. Cependant, les simulations numériques ne mettent pas en évidence une telle variation de hauteur. Cette observation reste donc objet d'interrogation. Par contre, les profils de vitesse (Fig. 7.9 (b)) obtenus par simulation lors de l'effet rebond indique un freinage important suivi par une réaccélération du matériau près du socle.

Nous ne disposons pas de tous les éléments pour discuter ce phénomène. S'il est possible d'en rendre compte dans le cadre de modèle (voir § 10.3.1), mais nous ne sommes pas capables à ce stade de comprendre l'origine physique de ce comportement.

### 7.3 Micromécanique

Dans un milieu granulaire, l'origine de la bifurcation de viscosité est à chercher dans l'évolution du réseau de contact (coordinence, mobilisation du frottement) près du seuil d'écoulement [177, 182, 137, 183]. Les simulations numériques de bifurcation de viscosité sur plan incliné permettent d'avoir accès à ces grandeurs microscopiques (évolution temporelle de la compacité, du nombre inertiel, de la coordinence, de la mobilisation du frottement et des fluctuations de vitesse).

Nous commençons par discuter de l'évolution des profils de compacité en fonction du temps, lors de l'arrêt. La figure 7.10 indique une légère augmentation de la compacité lors de l'arrêt. La compacité moyenne au centre augmente de 2%. Malheureusement, les profils de compacité sont trop bruités pour pouvoir discuter l'évolution de cette compacité lors de l'arrêt.



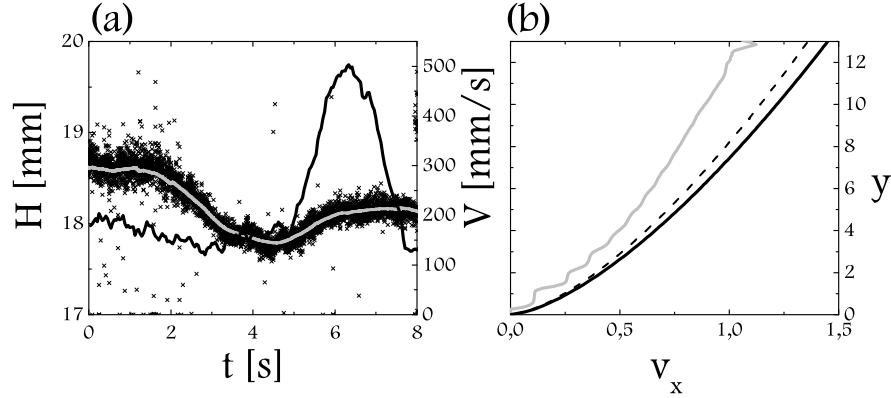


FIG. 7.9 – *Effet rebond sur plan incliné. Variation en fonction du temps (a) de la vitesse et de la hauteur (expérience sur graines de moutarde), les croix correspondent aux mesures de vitesse brutes, la courbe grise est un lissage de ces mesures et la courbe noir représente la hauteur; (b) du profil de vitesse. En trait plein noir le profil ajusté dans l'état stationnaire initial, en gris un profil instantané après le changement de pente et en tiretés le profil ajusté dans l'état stationnaire final (simulation numérique 2D,  $H = 20$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $k_n = 10^4$ ).*

Au paragraphe 6.1.6, nous avons montré des profils du nombre inertiel en régime stationnaire (Fig. 6.18). On avait observé alors que ce profil est constant (sauf près du socle et de la surface libre). Les figures 7.11 (a) et (b) représentent la dynamique du nombre inertiel lors de l'arrêt pour deux systèmes de tailles différentes ( $H = 20$  et  $H = 40$ ). Même si les données sont aussi bruitées, on constate une diminution générale de  $I$ . Quelque soit l'épaisseur du système, on observe bien que l'arrêt ( $I \rightarrow 0$ ) est initié au socle et se propage rapidement vers le haut. Ces figures suggèrent qu'il y a un effet de taille : Pour une couche épaisse le système explore des  $I$  plus petits. On peut donc penser qu'il existe un nombre inertiel critique qui dépend de  $H$ . On remarque enfin que la valeur du nombre inertiel reste relativement élevée près de la surface libre et cela même longtemps après le changement de pente. Ces observations suggèrent que le seuil d'arrêt est plus faible à la surface qu'au socle (voir § 9.2.2). Notons qu'il y a là deux effets différents :

- La paroi rugueuse initie le blocage.
- Il y a un gradient du seuil de blocage dans le matériau massif.

Nous allons maintenant analyser des grandeurs plus fines : fluctuation, coordinence et mobilisation du frottement.

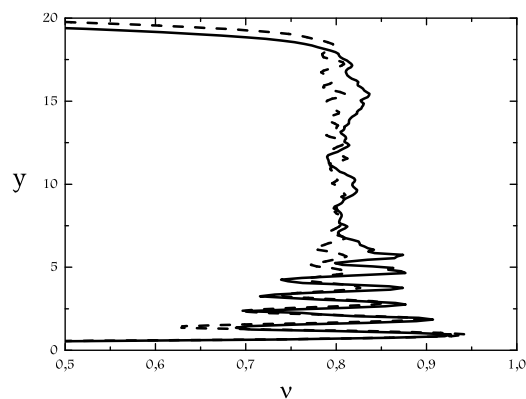


FIG. 7.10 – Comparaison d'un profil de compacité en écoulement stationnaire (tireté) avec un profil à l'arrêt (trait plein). Simulation numérique 2D,  $H = 20$ ,  $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $k_n = 10^4$ ,  $\Delta\theta = 5^\circ$ .

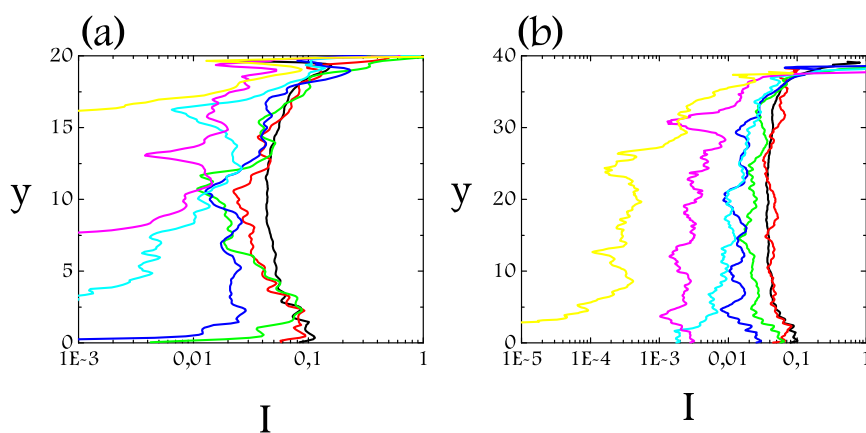


FIG. 7.11 – Variation du profil du nombre inertiel au cours du temps lors de l'arrêt. En noir, profil mesuré dans l'état stationnaire, en couleur profils mesurés à différents instants successifs séparés de  $\sqrt{\frac{d}{g}}$ . (a)  $H = 20$ , (b)  $H = 40$ . ( $e = 0.1$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $k_n = 10^4$ ,  $\Delta\theta = 5^\circ$ )

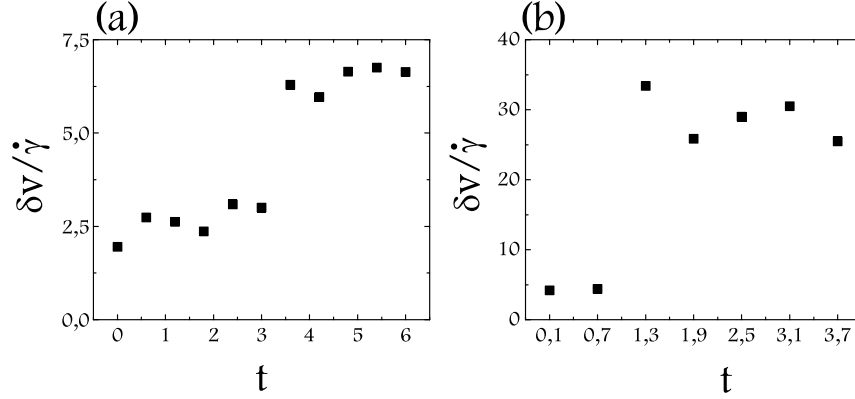


FIG. 7.12 – Variation des fluctuations de vitesse relatives moyennées dans l'épaisseur en fonction du temps. Le temps est adimensionné par  $\sqrt{\frac{d}{g}}$ . (a)  $H = 20$ , (b)  $H = 12$ . ( $e = 0.1, \mu = 0.4, k_n = 10^4, \Delta\theta = 12^\circ$ )

Premièrement, nous analysons l'évolution dans le temps des fluctuations relatives de vitesse  $\frac{\delta v}{\dot{\gamma}}$  (Fig. 7.12 (a) et (b)), moyennées au sein de la couche ( $t = 0$  correspond au changement d'inclinaison  $\Delta\theta$ ). Dans une première phase où le matériau ralentit,  $\frac{\delta v}{\dot{\gamma}}$  reste sensiblement constant (même si le taux de cisaillement diminue), puis on observe une brusque augmentation des fluctuations relatives (d'un facteur 2 pour  $H = 20$  à 6 pour  $H = 12$ ), exactement au moment de l'arrêt. Au delà le matériau à "l'arrêt" subit encore des petites déformations très bruitées mais cependant, les fluctuations relatives moyennées dans la couche restent bien définies. Qualitativement, ceci semble montrer qu'il existe des niveaux de fluctuations de vitesse différents dans l'état fluide et dans l'état solide. Cette observation s'accorde bien avec le fait que les fluctuations relatives de vitesse augmentent dans le régime quasi statique en cisaillement plan (Fig. 3.35 (a)) : dans la phase de ralentissement  $I$  varie approximativement entre 0.05 et 0.01, ce qui correspond à  $\frac{\delta v}{\dot{\gamma}}$  variant entre 2 et 3. Puis  $I$  chute soudainement sous  $10^{-3}$ , de sorte que  $\frac{\delta v}{\dot{\gamma}} \sim 10$ .

Pour le même système ( $H = 20$  et  $\Delta\theta = 12^\circ$ ) nous traçons l'évolution dans le temps du profil de coordonnée  $Z$  (Fig. 7.13). Comme pour les fluctuations, nous observons une transition brusque au moment précis de l'arrêt. La coordonnée reste constante pendant que le matériau ralentit. Contrairement au profil  $I(y, t)$ , on ne voit pas ici de transitoire fixé par la paroi. On observe toutefois un effet spécifique dans la première couche. La figure 7.14

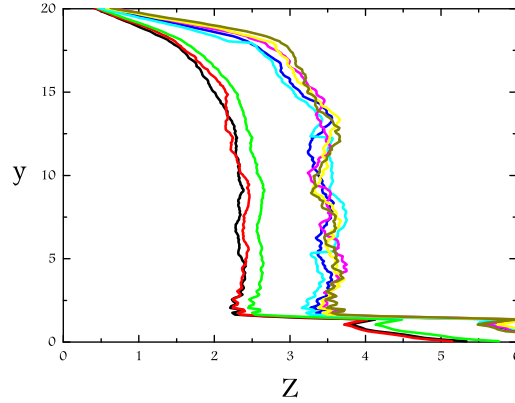


FIG. 7.13 – Variation du profil de coordinnence en fonction du temps. En noir le profil mesuré dans l'état stationnaire, en couleur profils mesurés à différents instants successifs séparés de  $\sqrt{\frac{d}{g}}$  après le changement de pente. ( $H = 20, e = 0.1, \mu = 0.4, k_n = 10^4, \Delta\theta = 12^\circ$ )

(a) montre l'évolution dans le temps de la coordinnence moyenne. Elle met en évidence une transition brusque, analogue à la bifurcation de viscosité (même dynamique). Il semble que la coordinnence moyenne à l'arrêt soit indépendante de  $\Delta\theta$ , et donc de la dynamique d'arrêt.

Toujours pour le même système, nous montrons enfin l'évolution dans le temps de la mobilisation du frottement  $M$  (Fig. 7.14 (b)) moyennée sur la couche (les profils  $M(y)$  sont approximativement constants). Comme pour les fluctuations et la coordinnence, on observe une chute brutale de  $M$  au moment précis de l'arrêt. La mobilisation reste constante pendant que le matériau ralentit (autour de 0.4, ce qui est cohérent avec  $I \sim 0.02$  cf. Fig. 3.28) puis chute à 0, ce qui a été observé par Silbert [180] pour des simulations numériques tridimensionnelles ( $H = 50$ ). Une mobilisation du frottement nulle signifie que la coordinnence glissante est nulle, c'est à dire que tous les contacts sont en dessous du seuil de frottement. Notons aussi que L. Staron [182] observe dans une couche de grains progressivement inclinée une augmentation de la mobilisation du frottement jusqu'à une valeur critique de l'ordre de 0.1 avant l'avalanche.

En résumé, notre analyse micromécanique a permis de mettre en évidence l'évolution du réseau de contact lors de la transition vers l'arrêt. Les trois grandeurs (fluctuation, coordinnence et mobilisation du frottement) ont des valeurs très différentes dans l'état fluide et dans l'état solide. La transition est brutale, et la dynamique de ces trois variables (en fonction de  $\Delta\theta$ ) est

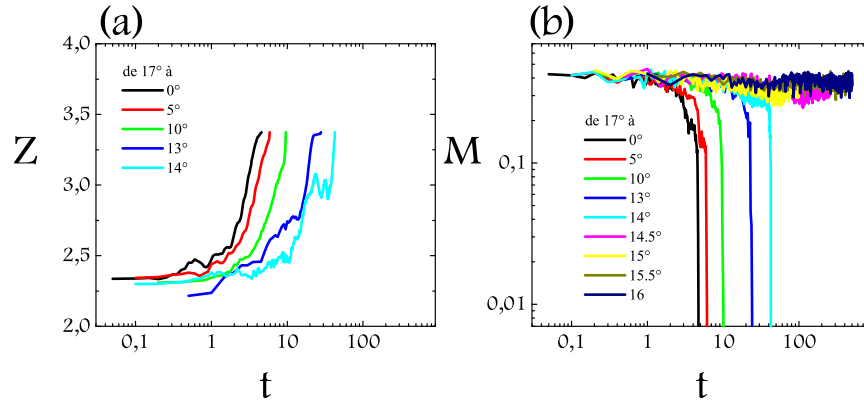


FIG. 7.14 – Variation en fonction du temps de la coordinence (a) et de la mobilisation du frottement (b) pour différent  $\Delta\theta$ . ( $H = 20, e = 0.1, \mu = 0.4, k_n = 10^4$ )

tout à fait analogue. La transition de blocage est donc associée à une transition microstructurale massive. Silbert [180] avait déjà mis en évidence la transition pour  $M$ , et il avait aussi étudié l'évolution de la distribution des forces (apparition d'un plateau aux faibles forces [69, 137]) et de la fonction de distribution radiale (dédoublage du deuxième pic [11], signature d'une structure amorphe). Nous avons complété cette étude par des informations sur la coordinence et sur les fluctuations.

## Chapitre 8

### Bilan

**A** travers cette partie, nous avons cherché à décrire le comportement mécanique d'un matériau granulaire lorsqu'il s'arrête de couler, tant en géométrie de Couette que sur plan incliné.

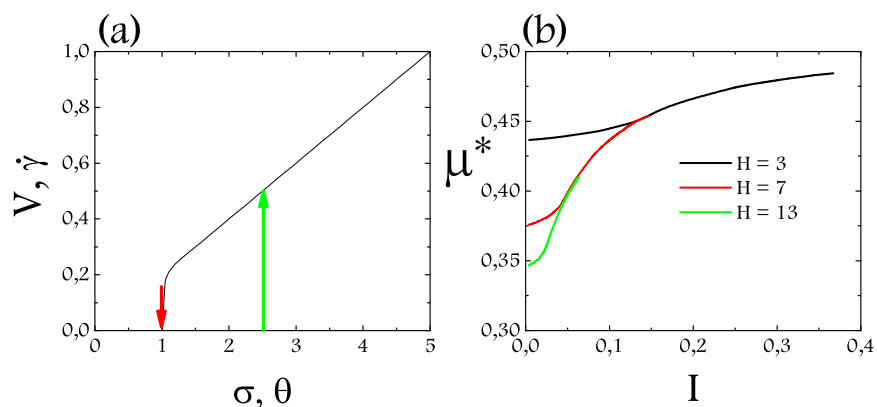


FIG. 8.1 – (a) Vitesse, taux de cisaillement en fonction de l'inclinaison ou de la contrainte. (b) Variation du frottement effectif en fonction du nombre inertiel sur plan incliné.

Les simulations et les expériences indiquent que la transition fluide solide se fait de manière brusque (Fig. 8.1 (a)). Il est aussi possible de mesurer l'évolution du frottement effectif en fonction du nombre inertiel à proximité de l'arrêt. La figure 8.1 (b) indique que la loi de frottement effectif est analogue à celle observée en cisaillement plan à vitesse imposée (Partie I). Cependant, on a montré qu'il existe des déviations notables. Nous verrons dans la partie suivante que celles-ci peuvent être liées à un effet de paroi.

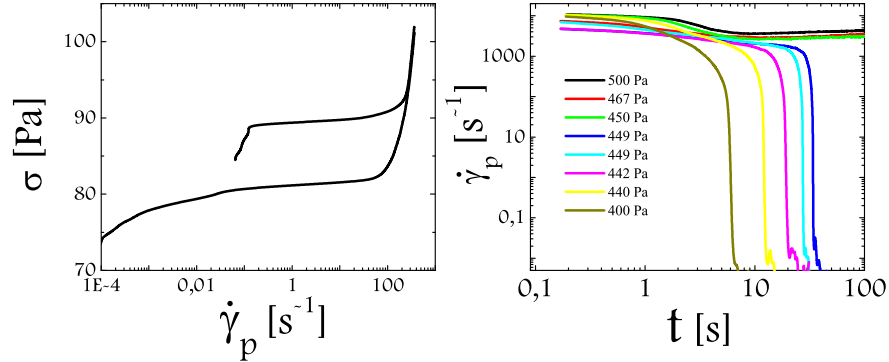


FIG. 8.2 – Comportement mécanique à proximité de l’arrêt : (a) Boucle d’hystérésis (billes de polystyrène). (b) Bifurcation de viscosité (sable de Fontainebleau) – la légende indique la contrainte  $\sigma$  finale.

Les figures 8.2 (a) et (b) résument le comportement du matériau granulaire lors de deux expériences de rhéométrie (en géométrie de Couette). La figure 8.2 (a) correspond à une expérience consistant à imposer une rampe de contrainte croissante puis décroissante. Elle indique l’existence d’un seuil d’écoulement, observé à la montée, et d’un seuil d’arrêt, observé à la descente. Cet hystérésis de seuils (Fig. 8.1 (a) et 8.2 (a)) est observé pour l’ensemble des matériaux que l’on a étudié. Du fait de la forme de ces courbes, on peut parler de boucle d’hystérésis. Cet hystérésis de seuils est tout à fait similaire à ce qui est observé sur plan incliné lorsque l’on mesure les courbes  $H_{Stop}$  et  $H_{Start}$ . Comme dans le cas du plan incliné, la figure 8.2 (a) indique aussi une transition brusque.

La figure 8.2 (b) résume l’étude du transitoire au voisinage du seuil. On place le matériau dans un état fluide au-dessus de la contrainte critique solide fluide  $\sigma_{SL}$ , puis on change soudainement la contrainte à une valeur  $\sigma$ . La figure 8.2 (b) représente alors l’évolution du taux de cisaillement apparent en fonction du temps. Elle montre que si  $\sigma > \sigma_{SL}$ , alors le matériau reste fluide,  $\sigma_{SL}$  correspondant au plateau de contrainte dans les boucles d’hystérésis. En revanche, si  $\sigma < \sigma_{SL}$ , le matériau va finalement s’arrêter, mais le temps d’arrêt est extrêmement sensible à la différence de contraintes :  $\sigma_{SL} - \sigma$ . Il existe donc une plage de taux de cisaillement qui ne peut pas être atteinte de façon stable, ce qui corrobore l’observation d’une transition brusque. On prédit donc que là où le taux de cisaillement devient inférieur à un taux de cisaillement critique  $\dot{\gamma}(\sigma_{SL}) = \dot{\gamma}_c$ , le matériau transite dans l’état solide. C’est ce comportement que l’on appelle bifurcation de viscosité. Ce

comportement observé à l'origine en géométrie de Couette, s'observe aussi sur plan incliné en variant brusquement l'inclinaison autour de  $\theta_{Stop}$ .

Ainsi, la transition fluide-solide en fonction de la contrainte appliquée est discontinue : l'écoulement n'est stable qu'au-dessus d'une contrainte critique, ou encore d'un taux de cisaillement critique.

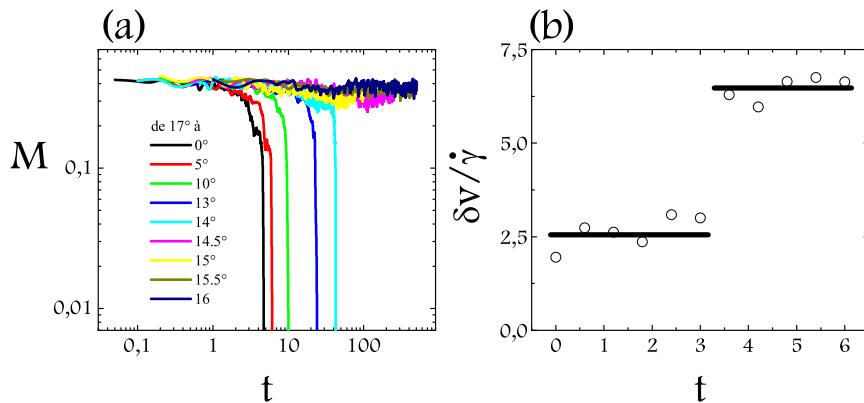


FIG. 8.3 – *Comportement micromécanique lors de l'arrêt sur plan incliné : (a) Variation de la mobilisation du frottement en fonction du temps et de  $\Delta\theta$ . (b) Évolution des fluctuations de vitesse. (Temps adimensionné par  $\sqrt{\frac{d}{g}}$ )*

Parallèlement à ces expériences, nous avons effectué des simulations numériques de plan incliné afin d'étudier l'évolution des grandeurs micromécaniques lors de l'arrêt. L'analyse micromécanique a permis de mettre en évidence l'évolution du réseau de contact lors de la transition vers l'arrêt. Les trois grandeurs (fluctuation, coordinence et mobilisation du frottement) ont des valeurs très différentes dans l'état fluide et dans l'état solide. Les figures 8.3 (a) et (b) montrent l'évolution dans le temps de la mobilisation du frottement et des fluctuations de vitesse lors du blocage. La figure (a) montre que la mobilisation du frottement chute brusquement à 0 lors de l'arrêt. Par contre, la figure (b) indique que les fluctuations relatives de vitesse augmentent notablement lors de cette transition.

Ainsi, la transition de blocage est brutale et associée à une transition microstructurale massive, où la mobilisation du frottement tend vers 0.





Troisième partie

Synthèse et Modélisation



**D**ans cette dernière partie, nous nous proposons de faire la synthèse des résultats obtenus à vitesse et à force imposée. Nous nous efforcerons, en particulier, de faire ressortir les idées importantes, communes à ces deux approches, qu'il faut prendre en compte pour proposer une modélisation de la transition de blocage pour les matériaux granulaires. Nous chercherons aussi à déterminer les liens qui existent entre les matériaux granulaires et d'autres fluides complexes.

Nous terminerons cette partie en évoquant quelques pistes de modélisations qui permettent de décrire l'arrêt d'un écoulement de grains secs (hystérésis de seuil, bifurcation de viscosité et dynamique de l'arrêt).



# Chapitre 9

## Synthèse des résultats

**D**ans ce chapitre, nous nous proposons de faire une synthèse des résultats marquants mis en évidence dans les deux parties précédentes. Dans un premier temps, on discute de la loi de comportement d'un matériau granulaire dense en écoulement stationnaire. Ensuite, on considère les conséquences des observations à vitesse et force imposée pour le plan incliné. Enfin on s'intéresse aux analogies entre les matériaux granulaires et d'autres fluides particuliers. Cette discussion nous conduit à mettre en évidence deux mécanismes importants dans le blocage des écoulements granulaires : le piégeage près d'une paroi rugueuse, et l'augmentation des corrélations dans le mouvement des grains.

### 9.1 Loi de comportement

#### 9.1.1 Frottement et dilatance

Comme nous l'avons vu, la loi de comportement peut se déduire de la variation de la compacité et du frottement effectif avec le nombre inertiel  $I$  (Fig. 9.1 (a) et (b)).

La loi de frottement est en accord avec les résultats de la littérature [139, 128, 188, 47] :  $\mu^*$  augmente avec le taux de cisaillement (ou encore avec la vitesse) et diminue avec la pression. Cette loi de frottement indique une transition progressive entre le régime quasi statique et dynamique. Dans le régime intermédiaire ( $0.01 < I < 0.2$ ), pour le cisaillement plan, la loi de comportement prend la forme simple suivante :

$$P = a^2 \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)^2} \quad (9.1)$$

$$S = \mu_s P + ba \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu_{max} - \nu)} \quad (9.2)$$

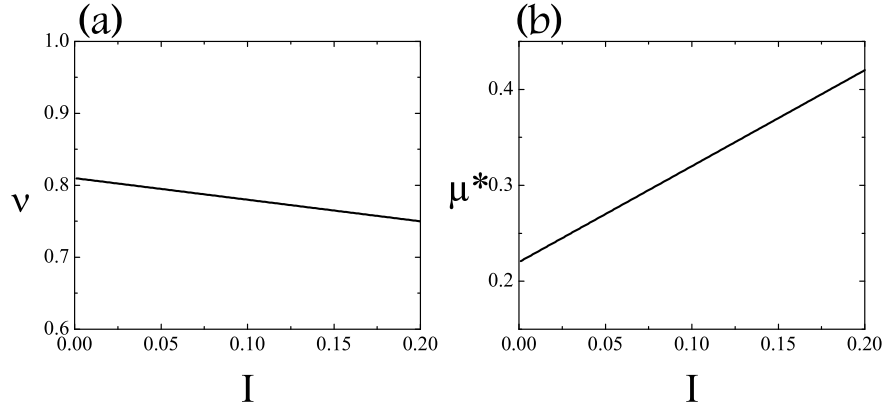


FIG. 9.1 – Schéma des dépendances avec le nombre inertiel de la compacité (a), et du frottement effectif (b).

Ceci indique que la compacité augmente pour atteindre la compacité maximale ( $\nu \rightarrow \nu_{max}$ ), lorsque le matériau s'arrête ( $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ). On remarque aussi que les contraintes dépendent du taux de cisaillement au carré et d'une fonction de la compacité qui diverge pour  $\nu_{max}$ . Cette loi de comportement est donc analogue à celle observée par Bagnold. L'expression de  $S$  correspond à une décomposition du tenseur des contraintes du type viscoplastique. Ceci semble indiquer que les modèles frictionnels – collisionnels [4, 122, 6, 98, 97, 169] peuvent être utilisés pour décrire les écoulements denses. La loi de comportement mesurée constitue une information précieuse dans les débats actuels [18].

De plus, on remarque que, dans le régime intermédiaire, la loi de comportement est qualitativement la même que le système soit homogène ou hétérogène. En particulier, la forme de la courbe de frottement effectif en fonction du nombre inertiel paraît "universelle" pour différentes tailles du système, pour différents  $P/k_n$ , pour différents  $e$  et même pour différents  $\mu$  dans la limite des faibles  $I$ .

### 9.1.2 Interprétation élémentaire de la loi de frottement

Contrairement à la loi de dilatance, la loi de frottement n'est pas intuitive (augmentation du frottement avec le taux de cisaillement ou quand la pression diminue). Une première interprétation élémentaire consiste à regarder l'évolution concomitante de la mobilisation du frottement  $M$  (Fig. 9.2 (b)). De fait, celle-ci augmente avec  $I$ , ce qui signifie que les contacts deviennent

glissants plutôt que roulants. Ainsi dans le régime dynamique, les contacts sont plus rares, mais le frottement microscopique y est complètement mobilisé. On mesure alors un frottement effectif élevé. Au contraire, dans le régime quasistatique, la coordinence est élevée mais les contacts sont plutôt roulants, le frottement est donc plus faible. Naturellement, cette analyse reste extrêmement schématique. Le frottement macroscopique n'a pas qu'une origine liée au frottement microscopique. Il a aussi une origine géométrique, liée à l'orientation des contacts  $\rho(\phi)$ . C'est ainsi que le frottement macroscopique d'une assemblée de grains non frottants n'est pas nul. De façon plus quantitative, on peut tenter d'exprimer le tenseur des contraintes moyen (la partie dominante associée aux forces de contact [voir § 3.1.4 et Annexe B]) dans un milieu cisailé de façon homogène en fonction des grandeurs micro-mécaniques  $N(\phi)$  et  $T(\phi)$  qui désignent les forces normales et tangentielles moyennes dans la direction  $\phi$ . Ainsi, dans l'hypothèse de non corrélation des forces de contact autour d'un grain, on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\nu}{\pi R} \langle \sum_c \vec{f}^c \otimes \vec{n}^c \rangle \quad (9.3)$$

$$= \frac{\nu Z}{\pi R} \int_0^{2\pi} \rho(\phi) [N(\phi) \vec{n}_\phi + T(\phi) \vec{t}_\phi] d\phi \quad (9.4)$$

où  $\nu$  est la compacité,  $Z$  la coordinence,  $R$  le rayon des grains et  $(\vec{n}_\phi, \vec{t}_\phi)$  le repère locale du contact dans la direction  $\phi$ . Pour éliminer la force normale moyenne  $N$ , on définit :  $\xi_N(\phi) = \frac{N(\phi)}{N}$ . On introduit alors le frottement en écrivant :

$$T(\phi) = \frac{T(\phi)}{N(\phi)} \xi_N = m^*(\phi) \xi_N(\phi) N \quad (9.5)$$

où  $m^*(\phi)$  désigne une mobilisation locale du frottement selon la direction  $\phi$ . On a donc :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\nu Z N}{\pi R} \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \xi_N(\phi) [\vec{n}_\phi \otimes \vec{n}_\phi + m^*(\phi) [\vec{t}_\phi \otimes \vec{t}_\phi]] d\phi \quad (9.6)$$

En conséquence, le frottement effectif s'écrit :

$$\mu^* = \frac{\xi_N C S + m^* \xi_N C^2}{\xi_N S^2 + m^* \xi_N S C} \quad (9.7)$$

où on a utilisé une notation condensée [150] du type :

$$\xi_N C S = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \xi_N(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \quad (9.8)$$

Cette expression (9.7) montre bien que le frottement macroscopique résulte à la fois de la mobilisation du frottement (à travers  $m^*$ ) mais aussi de la géométrie (à travers les intégrales sur les directions de contact).



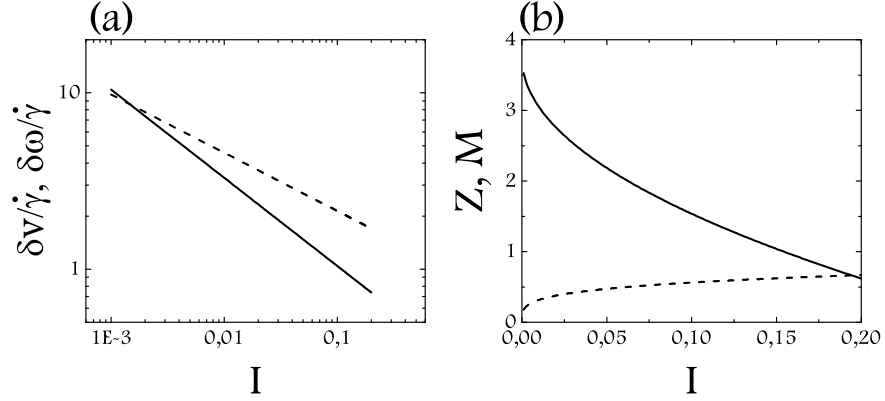


FIG. 9.2 – Variation qualitative en fonction du nombre inertiel (a) des fluctuations de vitesse de translation (trait plein) et de rotation (tiretés) et (b) de la coordonnée  $Z$  (trait plein) et de la mobilisation du frottement (tiretés). (Schéma indicatif)

Ainsi, si la distribution des contacts (ainsi que  $\xi_N$ ) est isotrope ( $\rho = Cste$ ,  $\xi_N = Cste$ ) alors  $\mu^* \sim m^*$ , le frottement effectif est déterminé par la mobilisation du frottement.

Si par contre, le frottement locale est nul (ce qui implique que  $m^* = 0$ ), mais que l'on suppose qu'il y a une direction privilégiée de contact ( $\rho(\phi) = \delta(\phi - \phi_0)$ , où  $\delta$  est la fonction de Dirac), alors  $\mu^* = |\tan(\pi - \phi_0)|$ .

La situation générale est évidemment intermédiaire. On croit qu'une mesure détaillée des grandeurs microscopiques ( $\rho$ ,  $\xi_N$ ,  $m^*$ ) doit permettre de remonter au frottement effectifs.

### 9.1.3 Fluctuations de vitesse

Nous avons montré que les fluctuations relatives de vitesse sont significatives dans le régime dense et qu'elles peuvent s'écrire comme une loi de puissance de  $I$  (Fig. 9.2(a)) :

$$\frac{\delta v}{\dot{\gamma}} \propto I^{-\beta} \quad (9.9)$$

ce qui peut se réécrire de la sorte :

$$\delta v \propto \dot{\gamma}^{1-\beta} P^{\frac{\beta}{2}} \quad (9.10)$$

où  $\beta = 0.5$  en cisaillement plan sans gravité et 0.6 en cisaillement hétérogène (cisaillement plan avec gravité et cisaillement annulaire). Il est possible de proposer une explication de la valeur de cet exposant dans le cas homogène [118]. Ainsi lorsque la pression est fixée dans le système, les fluctuations de vitesse varient comme  $\dot{\gamma}^{0.4}$ , en cisaillement annulaire. C'est ce qui est observé expérimentalement dans une géométrie de Couette [18, 130].

## 9.2 Écoulement sur plan incliné

Nous allons maintenant discuter si la loi de frottement effectif mesurée dans le cas du cisaillement homogène peut être appliquée au cas du plan incliné.

### 9.2.1 Loi d'échelle

La loi de frottement peut, en première approximation, s'écrire :

$$\mu^* = \mu_s + bI \quad (9.11)$$

Nous avons vu que cette loi de frottement, mise en évidence pour le cisaillement plan, reste qualitativement valable dans la géométrie du plan incliné. Dans ce cas,  $\mu^* = \tan \theta \approx \theta$ , donc  $\theta = \mu_s + bI$  soit  $\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{P}} = \frac{\theta - \Phi}{b}$ . Puisque  $\rho = Cst$ , la pression dans la couche varie comme  $(H - y)$ . On obtient alors :

$$\dot{\gamma} \sim (\theta - \Phi) \sqrt{H - y} \quad (9.12)$$

ce qui donne un profil de vitesse de Bagnold, et en conséquence la loi d'échelle suivante :

$$V \sim (\theta - \Phi) H^{\frac{3}{2}} \quad (9.13)$$

La loi de frottement effectif prédit la loi d'échelle observée expérimentalement [11] et le profil de vitesse de type Bagnold, observé numériquement [150].

### 9.2.2 Arrêt de l'écoulement

Commençons par remarquer que l'équation  $\mu^*(I) = \mu_s + bI$  permet de définir l'angle d'arrêt d'un écoulement sur un plan incliné. L'écoulement s'arrête ( $I = 0$ ) pour  $\tan \theta = \mu_s$  ou encore  $\theta = \phi$ .

Nous avons vu qu'en présence de gravité, la loi de frottement est légèrement modifiée : il faut alors introduire un deuxième nombre adimensionnel  $G_p$  traduisant le rapport des forces de pesanteur sur les forces de pression. En première approximation, on peut considérer que l'effet de  $G_p$  se limite à une diminution de  $\mu_s$  (Fig. 9.3 (a)).

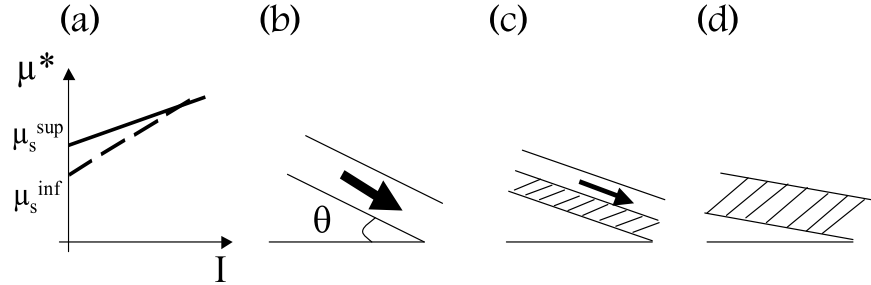


FIG. 9.3 – (a) Représentation schématique de la loi de frottement. En trait plein sans gravité, en tireté avec gravité. (b) Écoulement  $\tan \theta > \mu_s^{sup}$ . (c)  $\mu_s^{sup} < \tan \theta < \mu_s^{inf}$ . (d) Arrêt  $\tan \theta < \mu_s^{inf}$ .

La variation de la loi de frottement effectif avec  $G_p$  fournit un scénario pour l'arrêt de l'écoulement. On peut considérer, pour simplifier, que le matériau en écoulement se décompose en deux couches (Fig. 9.3 (b), (c) et (d)) : une proche du socle et une autre proche de la surface libre. La première est soumise à une forte pression et la seconde à une faible pression. La gravité est donc écrantée dans les couches de grains proches du socle ( $G_p$  petit) ; le comportement est alors déterminé par une courbe  $\mu^*(I)$  analogue à celle obtenue sans gravité.  $\mu_s$  et donc le seuil d'arrêt est plus élevé pour les couches proches du socle. Proche de la surface,  $G_p$  est plus grand et le comportement est alors décrit par une courbe  $\mu^*(I)$  qui est décalée vers les petites valeurs du frottement, le seuil d'arrêt y est plus faible. Cette analyse prédit donc que l'arrêt de l'écoulement s'effectue à partir du socle, ce qui est bien observé en simulation numérique (voir Partie II).

Par contre, cette analyse prévoit que l'écoulement se décompose en deux couches pour  $\mu_s^{inf} < \theta < \mu_s^{sup}$ . Ceci est en contradiction avec les observations expérimentales qui montrent un arrêt brusque pour un angle  $\theta_{stop}$  dépendant de  $H$ . On constate donc que la loi de frottement en cisaillement plan à vitesse imposée est insuffisante pour décrire l'arrêt.

### 9.2.3 Effet de la paroi

Une première observation concernant le cisaillement plan est une déviation du profil de Bagnold près de la surface libre et près du socle. Ceci se manifeste particulièrement sur les profils de  $I$ . La figure 9.4 (a) indique que les profils de  $I$  pour différentes inclinaisons se superposent, c'est à dire :

$$I(\theta, y) = f(y)g(\theta) \quad (9.14)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions distinctes. On remarque de plus que le nombre inertiel, et donc le taux de cisaillement, est plus élevé au socle. La conséquence est que lorsque l'on trace la loi de frottement sur plan incliné on obtient la courbe de la figure 9.4 (b). Pour chaque inclinaison, on a un segment correspondant à la plage de  $I$  mesurée, entre une valeur minimale au cœur de l'écoulement est une valeur maximale au socle.

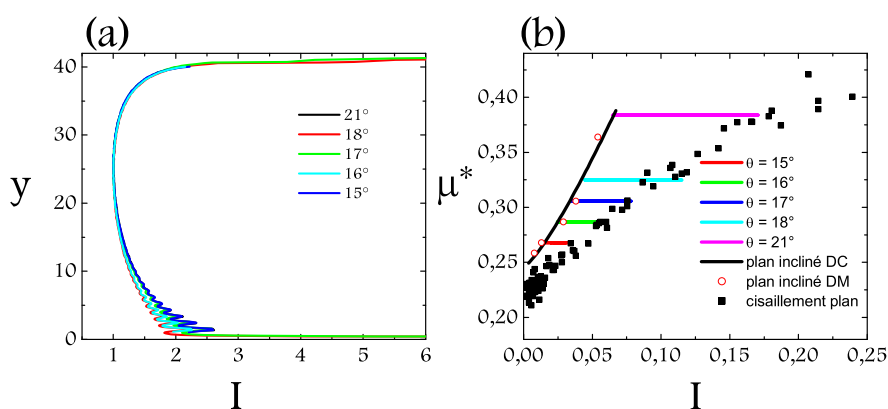


FIG. 9.4 – (a) Profil du nombre inertiel normalisé par le minimum. (b) Coefficient de frottement effectif en fonction du nombre inertiel pour des systèmes bidimensionnels. La courbe (plan incliné - méthode de dynamique des contacts) et les carrés noirs (cisaillement plan) correspondent aux mesures pour des nombres inertiels au cœur. Les segments de couleur correspondent aux mesures locales. Les cercles correspondent aux mesures effectuées sur plan incliné par la méthode de dynamique moléculaire.

La figure 9.4 (b) présente une comparaison entre les mesures de frottement sur plan incliné (par deux techniques de simulation numérique différentes, en excellent accord!) et les mesures de frottement en cisaillement plan. Comme nous l'avons montré, le frottement effectif varie qualitativement de la même manière dans les deux géométries. Toutefois, le frottement en fonction du nombre inertiel global (courbe noire) est plus faible en cisaillement plan que pour le plan incliné. Si on tient compte des variations de  $I(y)$ , on remarque que pour un coefficient de frottement donné (c'est à dire pour un angle  $\theta$  donné) on balaye une gamme de  $I$  qui s'étend de la valeur mesurée au centre de l'écoulement à la valeur au socle (segment de couleur).

Ces déviations de profil près de la paroi indiquent qu'une description complète doit sans doute prendre en compte un effet de la paroi. Nous avons montré que d'autres grandeurs présentent des déviations importantes à proximité des parois (dans toutes les géométries que nous avons étudiées). La paroi induit une structuration en couche et des frustrations de rotation. En particulier, dans les deux couches proches des parois le milieu n'est plus isotrope ( $\Sigma_{xx} \neq \Sigma_{yy}$ ) et la vitesse de rotation n'est plus égale au demi gradient de vitesse ( $\omega \neq \frac{\dot{\gamma}}{2}$ ). On peut penser qu'une description de type milieu de Cosserat est adaptée pour ces deux couches [123].

Nous ne chercherons pas à décrire exactement ce qui se passe près de la paroi, mais il faut noter que la rugosité de la paroi induit d'autres phénomènes : vitesse de glissement nulle, piégeage, hystérésis de seuil. Nous discuterons, au chapitre suivant, de l'effet de la rugosité de la paroi à travers des modèles de piégeage.

### 9.3 Généralisation aux fluides particuliers

Nous avons l'intention de montrer ici que la transition liquide-solide pour les matériaux granulaires présente de nombreuses similitudes, d'un point de vue mécanique, avec le comportement thixotrope d'autres fluides particuliers contenant des bulles (mousses) ou des gouttes (émulsions) [50].

#### 9.3.1 Expériences

Nous avons donc comparé le comportement d'une mousse (*Gilette*) et d'une émulsion [mayonnaise (*Amora*)] avec le comportement de matériaux granulaires. Pour ce faire nous avons réalisé les mêmes expériences de seuil et de bifurcation de viscosité en géométrie de Couette que celles évoquées aux chapitres 6 et 7. Ces expériences ont été en partie réalisées par Daniel Bonn.

Les figures 9.5 (a) et (b) présentent les résultats obtenus lors des expériences de seuil, en imposant une rampe de contrainte montante puis descendante. On mesure ainsi les variations du taux de cisaillement en fonction de la contrainte appliquée. Cette fois-ci, nous utilisons la définition classique du taux de cisaillement dans une géométrie de Couette :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega R_i}{R_e - R_i} = \frac{\dot{\gamma}_p d}{R_e - R_i} \quad (9.15)$$

Ces résultats indiquent l'existence des mêmes régimes d'écoulement que ceux observés pour les matériaux granulaires. On note en particulier l'hystérésis de seuil entre  $\sigma_{SL}$  et  $\sigma_{LS}$ , ainsi que l'existence d'un état liquide indépendant de l'histoire subie par le matériau.

Les expériences de bifurcation de viscosité résumées par les figures 9.6 (a) et (b) sont analogues à celles effectuées avec des matériaux granulaires.

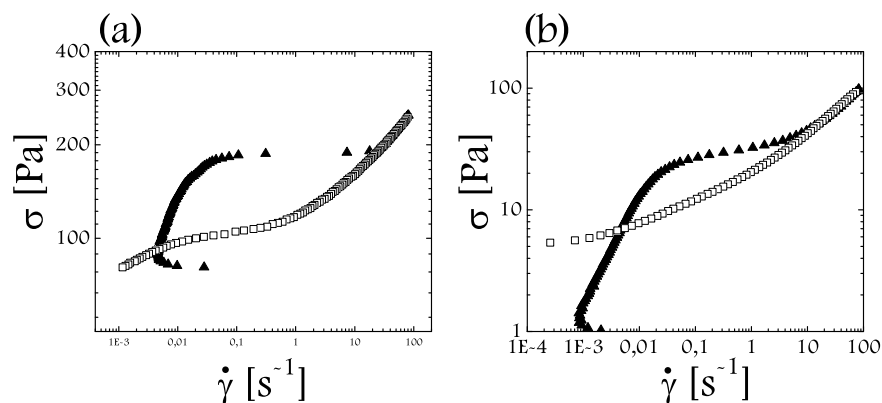


FIG. 9.5 – Contrainte en fonction du taux de cisaillement pour une rampe de contrainte : (a) mousse (Précisaillement  $200 \text{ s}^{-1}$  pendant 10 s, 20 s de repos), de 80 à 250 Pa, montée, en noir, pendant 120 s, descente, en blanc, pendant 120 s ; (b) émulsion (Précisaillement 150 Pa pendant 100 s, 120 s de repos), de 1 à 100 Pa, montée, en noir, pendant 240 s, descente, en blanc, pendant 240 s.

Après le précisaillement initial, on place le matériau dans un état fluide au-dessus de la contrainte critique solide fluide, puis on abaisse soudainement la contrainte. On observe que si  $\sigma > \sigma_{LS}$ , alors le matériau reste fluide, par contre si  $\sigma < \sigma_{LS}$ , le matériau s'arrête. Le temps d'arrêt est extrêmement sensible à  $\sigma_{LS} - \sigma$ . Pour ces matériaux, il existe une plage de taux de cisaillement qui ne pas être atteinte de façon stable, ce qui définit un taux de cisaillement critique.

### 9.3.2 Discussion

Ces résultats remettent en cause le modèle simple de transition liquide-solide considéré jusqu'ici pour les fluides à seuil et prouvent que tous les fluides particulaires montrent des similitudes mécaniques fortes autour de cette transition de blocage. Nos résultats prouvent que le comportement mécanique apparent des matériaux granulaires, des mousses et des émulsions est qualitativement semblable à celui d'un polymère, d'un gel ou d'un verre colloïdal. Bien que les origines microscopiques et les temps caractéristiques soient très différents, tous ces systèmes présentent un comportement apparent thixotrope : ils montrent une bifurcation de viscosité autour d'une contrainte critique. Ceci tend à montrer, comme le proposent Liu et Nagel [106], que les systèmes bloqués ont des propriétés mécaniques communes.

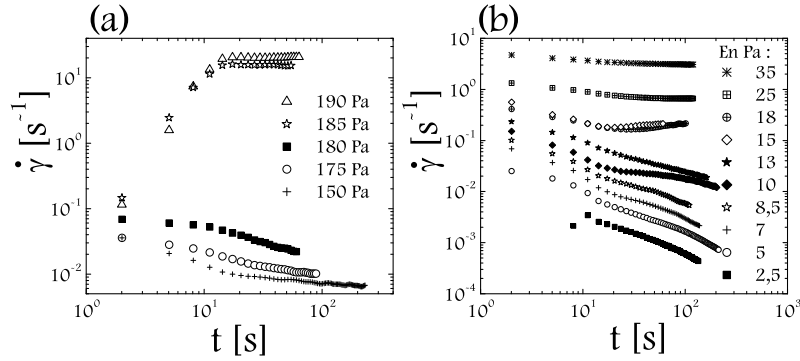


FIG. 9.6 – Taux de cisaillement en fonction du temps pour différentes contraintes : (a) mousse (Précisaillement  $200\text{s}^{-1}$  pendant 10 s, 20 s de repos); (b) émulsion (Précisaillement 150 Pa pendant 20 s, 20 s de repos).

De plus, nos mesures montrent clairement que l'on ne passe pas d'une manière continue d'un système bloqué à un système en écoulement : il existe une réelle discontinuité entre ces deux situations. Le plateau observé sur les rhéogrammes est la signature d'une transition [141, 36].

Toutefois, certaines observations sur les fluides particuliers semblent en contradiction avec ce qui est observé sur les matériaux granulaires. Ainsi, les simulations numériques de mousse en cisaillement plan sans gravité indiquent une localisation du cisaillement [100]. Nous pensons que ceci est cohérent avec nos observations sur des assemblées de grains mous, que nous n'avons abordées que d'un point de vue exploratoire (voir paragraphe 3.7.3). Nous avons alors constaté, contrairement au cas des grains rigides, une localisation du cisaillement. Notre interprétation était alors que les corrélations de mouvement sont à plus faible portée. C'est un sujet qui mériterait plus de réflexion.

De la même manière, une observation très importante en géométrie de Couette, pour les fluides thixotropes, est une rupture de pente dans le profil de vitesse [46]. Le taux de cisaillement passe brusquement d'une valeur non nulle à zéro pour un taux de cisaillement critique. Ceci semble en désaccord avec nos observations en géométrie de Couette de profils de vitesse exponentiels et d'une bande de cisaillement indépendante du taux de cisaillement [118, 130].

Nous voulons cependant indiquer plusieurs observations qui pourraient aller dans le sens d'un changement de régime pour une contrainte critique :

- D’abord, les simulations numériques semblent montrer une augmentation de la taille de la bande de cisaillement avec le taux de cisaillement (voir § 4.3.1).
- Ensuite, la figure 9.7 (a) semble indiquer une rupture de pente dans le cas du cisaillement plan avec gravité pour une pression faible.
- De plus, l’analyse microstructurale indique que les systèmes non bloqués ( $I$  grand) sont caractérisés par une majorité de contacts glissants et une mobilisation du frottement élevée, ce qui correspond à un frottement effectif élevé. Dans le cas du cisaillement plan à vitesse imposée et pression faible, la figure 9.7 (b) montre qu’en dessous d’un  $I$  critique de l’ordre de  $10^{-3}$ , le frottement n’est plus correctement défini. Les mesures du frottement effectif pour  $I < 10^{-3}$  correspondent à une partie du matériau où les mouvements sont bloqués ( $\mu < \mu_s$ ).
- Enfin, en cisaillement plan sans gravité, pour  $I < 10^{-3}$ , on observe des intermittences (voir § 3.6.2). Des observations analogues d’intermittences ont été faites dans des mousses et dans des émulsions [168].

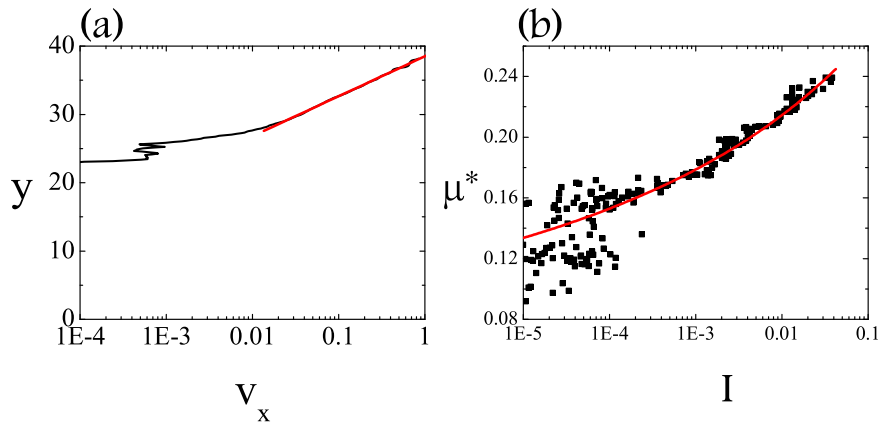


FIG. 9.7 – Cisaillement plan avec gravité ( $G_p = 0.5$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $e = 0.1$ ). (a) Profil de vitesse. La droite correspond à un ajustement exponentiel. (b) Frottement effectif en fonction de  $I$  et ajustement.

La conclusion de ces différentes observations est qu’il pourrait exister un nombre inertiel critique, sous lequel le matériau se bloque. Ainsi, en cisaillement annulaire, sous l’effet du cisaillement imposé par le cylindre intérieur, le matériau serait fluide dans une bande de cisaillement proche du cylindre intérieur, et il se déplacerait par blocs au-delà, de manière intermittente. La



mesure d'un profil de vitesse moyen lisserait la rupture de pente pour donner un profil de type exponentiel.

## 9.4 Longueur de corrélation

Un ingrédient intéressant pour la description du comportement au voisinage de l'arrêt a été suggéré lors de la rédaction de l'article commun du Groupe De Recherche Milieux Divisés [118]. L'approche consiste à introduire une longueur de corrélation  $l$ , qui serait reliée à la taille des blocs de grains qui se trouvent dans l'écoulement. Cette approche s'inspire des écoulements turbulents où l'on définit une viscosité turbulente égale à  $\rho l^2 \dot{\gamma}$ ; on a alors :

$$S = \rho l^2 \dot{\gamma}^2 \quad (9.16)$$

soit :

$$l^2(y) = \frac{S(y)}{\rho \dot{\gamma}^2(y)} = \frac{m \mu^*(y)}{d \rho I^2(y)} \Rightarrow l/d \approx \frac{\sqrt{\mu^*(I)}}{I} \quad (9.17)$$

Nous avons donc mesuré cette longueur de corrélation dans le cas du plan incliné et du cisaillement annulaire. Les figures 9.8 (a) et (b) représentent les résultats obtenus. Dans le cas du plan incliné, on observe que lorsque l'inclinaison s'approche de  $\theta_{stop}$ ,  $l \rightarrow H$ . Ceci signifie que lorsque l'écoulement ralentit la taille des blocs augmente et lorsque celle-ci devient comparable à l'épaisseur de la couche en écoulement, le matériau s'arrête. De la même manière, en cisaillement annulaire, on remarque que la longueur de corrélation  $l(r)$  augmente avec  $r$ . La valeur de  $l$  reste plus petite que la taille de l'entrefer à l'intérieur de la bande de cisaillement. Au delà,  $l$  est plus grand que l'entrefer et le matériau peut être considéré comme bloqué.

De plus, les mesures de cette longueur en cisaillement plan sans gravité montre que  $l > H$  lorsque les intermittences de l'écoulement apparaissent. Ceci semble indiquer que pour un nombre inertiel critique de l'ordre de  $10^{-2}$  pour  $H \approx 40$ , la taille des blocs dans l'écoulement est comparable à l'épaisseur de l'écoulement. On pense donc que pour ce  $I$  critique l'écoulement devrait s'arrêter à force imposée. A vitesse imposée, on force l'écoulement, et pour que celui-ci soit maintenu, il faut que les blocs de grains corrélés se brisent, ce qui conduit aux intermittences.

La description en terme de longueur de corrélation permet de décrire avec un même formalisme la transition vers l'arrêt pour le plan incliné et la géométrie de Couette, ainsi que dans d'autres géométries [118]. Cette description suggère de mesurer les corrélations proprement dites dans les écoulements granulaires pour mieux comprendre les mécanismes non locaux. La mesure des corrélations de mouvements des grains à la surface d'un écoulement sur plan incliné a été tout récemment menée par O. Pouliquen [145]. Elle montre une augmentation près du seuil d'écoulement. Reste à faire une mesure au

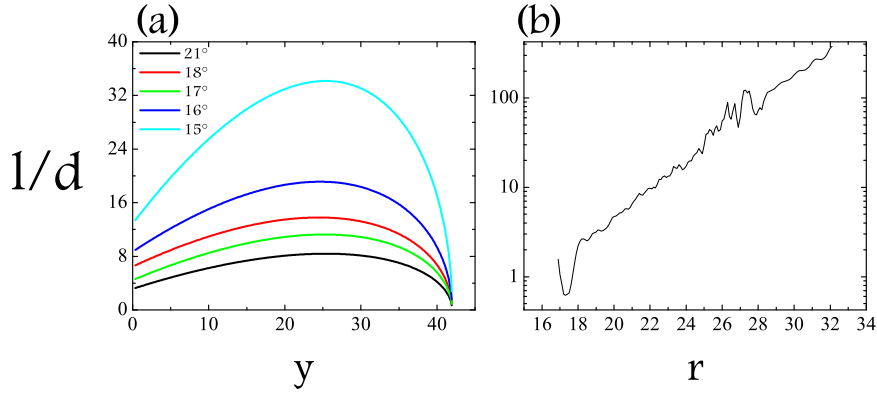


FIG. 9.8 – Longueur de corrélation  $l$  en fonction de  $y$  et de  $\theta$  dans un écoulement sur plan incliné (a), et en fonction de  $r$  pour  $I_{\text{global}} = 0.1$  dans un écoulement en géométrie de Couette (b).

sein de l'écoulement, ce qui est possible à l'aide des simulations numériques. Effectivement, des structures comme des voûtes, des blocs (amas de grains corrélés) et la dissipation non-locale due aux collisions multiples ont été observés expérimentalement ou numériquement [35, 69, 19, 156]. Ils ont motivé l'élaboration de plusieurs modèles non-locaux [147, 77, 121, 120]. À l'heure actuelle, aucun de ces modèles n'a réussi à rendre compte des propriétés des écoulements granulaires denses dans toutes les géométries. Des efforts sont encore nécessaires afin d'identifier l'origine et les conséquences de la non-localité.

En conclusion, les observations et les commentaires précédents indiquent des éléments importants dont il faut tenir compte pour la modélisation et la description de l'arrêt d'écoulements granulaires. Le chapitre suivant a pour objet de présenter quelques pistes de modélisation qui prennent en compte ces différentes remarques.



# Chapitre 10

## Pistes de modélisation

Le chapitre précédent nous a permis de dégager quelques idées importantes pour la description des écoulements granulaires près de l'arrêt. En effet, la plupart des modèles d'écoulement granulaire ne décrivent que le régime stationnaire et ne sont pas capables de décrire le comportement hystérétique près du seuil. Nous allons successivement examiner trois pistes de modélisation. La première piste consiste à introduire une variable interne de microstructure, et une équation d'évolution pour cette variable. La deuxième piste cherche à prendre en compte les effets de corrélation à travers un modèle de rhéologie non-locale. Enfin, la troisième piste montre comment l'introduction d'un mécanisme de piégeage dans la rugosité est à même de décrire le comportement hystérétique près du seuil.

### 10.1 Variable interne

#### 10.1.1 Fluides thixotropes : Équation cinétique

Nous commençons par décrire un modèle phénoménologique simple proposé pour les fluides thixotropes (suspensions colloïdales, mousses, émulsions) [44, 46, 45]. Dans ce modèle, la viscosité est une fonction de la structure instantanée du matériau, qui est le résultat de l'équilibre entre la restructuration interne du matériau, et la déstructuration sous cisaillement (qui dépend du taux de cisaillement instantané). Cette compétition conduit à une augmentation progressive et même une divergence de la viscosité sous faible cisaillement, lorsque la restructuration l'emporte sur la déstructuration : le système peut éventuellement cesser de s'écouler. Ceci définit donc un taux de cisaillement critique en dessous duquel c'est la restructuration qui l'emporte et conduit finalement à l'arrêt (courbe d'écoulement décroissante à faible taux de cisaillement). Pour des contraintes élevées, c'est la déstructuration qui domine conduisant à un état de faible viscosité. Ce modèle reproduit bien la bifurcation de viscosité (pour plus de détails voir Réf. [44]).

La structure instantanée du matériau est décrite par une variable interne  $\lambda$  dont dépend la viscosité. La loi de comportement du matériau est donnée par :

$$\sigma = \eta_0(1 + \lambda^n)\dot{\gamma} \quad (10.1)$$

avec  $\eta_0$  une viscosité caractéristique et  $n$  un paramètre propre au matériau. Cette variable interne évolue avec la structure au cours du temps, selon l'équation cinétique suivante :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\tau} - \alpha\lambda\dot{\gamma} \quad (10.2)$$

$\tau$  étant un temps caractéristique et  $\alpha$  un coefficient, tous deux dépendant des caractéristiques du matériau. Le premier terme de l'équation 10.2 correspond à la restructuration (vieillessement) ;  $\tau$  est donc le temps caractéristique de restructuration du matériau. Le deuxième terme correspond quant à lui à la déstructuration activée par le cisaillement (rajeunissement sous cisaillement).

### 10.1.2 Frottement des roches : Équation cinétique

Dans le cas du frottement entre deux roches, Ruina et Rice [23, 163] ont proposé un modèle phénoménologique, dans lequel le frottement dépend de la vitesse instantanée de glissement entre les deux roches  $v(t)$  et d'une variable interne  $\lambda$  :

$$\mu^*(v, \lambda) = \mu_0 + A \ln\left(\frac{v}{V_0}\right) + B \ln\left(\frac{\lambda V_0}{D_0}\right) \quad (10.3)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives, et  $\mu_0$  est la valeur du coefficient de frottement à la vitesse de référence  $V_0$ . La longueur  $D_0$  correspond, comme l'a proposé Dieterich [23], à la distance nécessaire pour renouveler la population des microcontacts.

Le terme  $A \ln(v)$  correspond à un "renforcement" du frottement, il traduit les variations instantanées de la force de frottement avec la vitesse.

Le terme  $B \ln(\lambda)$  décrit l'augmentation de la force de frottement avec la variable interne  $\lambda$ , dont l'équation cinétique est donnée par :

$$\dot{\lambda} = 1 - \frac{v\lambda}{D_0} \quad (10.4)$$

Lorsque la vitesse de glissement est nulle,  $\lambda = t$ ,  $\lambda$  s'interprète donc comme "l'âge de l'interface".

Dans le cas d'un glissement stationnaire, l'équation 10.3 se réécrit comme suit :

$$\mu^*(V) = \mu_0 + (A - B) \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad (10.5)$$

où  $V$  est la vitesse moyenne de glissement. Cette loi du frottement évoque la loi de frottement que l'on a mesuré  $\mu^* = \mu_s + bI$ .

Toutefois, cette loi ne fait intervenir que la vitesse et non la pression. Surtout,  $(A - B)$  est négatif, ce qui correspond à un effet de radoucissement, à l'origine d'une instabilité de type stick slip, à l'œuvre dans les failles responsables des tremblements de terre. Ces failles sont des couches granulaires d'une dizaine de grains d'épaisseur, avec une taille de grain d'ordre 100 à 500  $\mu m$ . Dans la phase de glissement, la vitesse est de l'ordre de 1  $m/s$  et la pression appliquée de l'ordre de 100 MPa. On trouve alors  $I < 10^{-3}$ , c'est à dire que l'on se trouve dans le régime quasistatique. Cependant, pour de plus forte vitesse de glissement (10  $m/s$ ) et des pressions plus faibles, on pourrait atteindre le régime intermédiaire de renforcement du frottement effectif.

### 10.1.3 Milieux granulaires : Équation de Landau-Ginzburg

La difficulté dans le cas des matériaux granulaires est de donner une origine physique à la variable interne  $\lambda$ . On peut penser que celle-ci est étroitement liée au réseau de contacts (coordination, mobilisation du frottement...). C'est ainsi que Volfson *et al.* [194] propose d'utiliser comme variable interne la fraction de contacts "solides" (maintenus non glissants). Les autres contacts ("fluides") sont les contacts collisionnels ou maintenus glissants. Cette variable vaut donc 0 dans l'état fluide (régime dynamique) et 1 dans l'état solide (régime statique). C'est une grandeur qui est analogue à la mobilisation du frottement que l'on a défini au paragraphe 3.5.

Ils utilisent ensuite une décomposition du tenseur des contraintes du type frictionnel (F) - collisionnel (C) (voir paragraphe 9.1.1) :

$$\begin{cases} P &= P^F + P^C \\ S &= S^F + S^C \end{cases}$$

Ils considèrent de plus que les proportions relatives sont fonction de cette variable interne :

$$\begin{cases} \frac{P^C}{P} &= q_P(\lambda) \\ \frac{S^C}{S} &= q_S(\lambda) \end{cases}$$

Une décomposition de ce type (avec pour variable interne la densité) a été proposée dans [150].

Considérant que dans les écoulements purement collisionnels, les contacts sont tous "fluides", et que dans le régime statique, les contacts sont tous "solides" (ce qui a bien été observé au paragraphe 3.5), il semble donc raisonnable de choisir, en première approximation :

$$q_{P,S} = 1 - \lambda \tag{10.6}$$

Les auteurs se placent ensuite dans un cadre général de description des transitions de phase du second ordre.  $\lambda$  s'interprète comme un paramètre d'ordre, qui vérifie une équation de Landau-Ginzburg :

$$\dot{\lambda} = D\nabla^2\lambda + F(\lambda, \delta) \quad (10.7)$$

Par rapport à l'équation cinétique du paragraphe précédent, cette équation contient un terme de diffusion, qui exprime qu'une variation dans l'espace du paramètre d'ordre a un certain coût ( $D$  est un coefficient de diffusion, d'ordre 1 car l'équation est adimensionnée). L'autre terme  $F$  apparaît comme une énergie libre, au sens de la thermodynamique.  $\delta$  s'interprète comme  $S/N$ , c'est à dire  $\theta$  sur un plan incliné ou  $\mu^*$  en cisaillement plan.

La fonction  $F(\lambda, \delta)$  doit rendre compte du comportement hystérétique, c'est à dire un comportement solide pour  $\delta < \delta_1$ , un comportement fluide pour  $\delta > \delta_2$ , et un état métastable pour  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ . Les simulations numériques permettent de mesurer  $F(\lambda, \delta)$  :

$$F(\lambda, \delta) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda^*\lambda + \lambda^{*2}f(\delta)) \quad (10.8)$$

avec  $f(\delta) = \exp(-A'(\delta^2 - \delta^{*2}))$  où  $\lambda^*$ ,  $\delta^*$  correspondent au paramètre d'ordre et au frottement effectif critiques de transition fluide-solide (0,6 et 0,26) et  $A' = 25$  est une constante d'ajustement. En conséquence, la relation  $\lambda(\delta)$  près de la transition fluide-solide est :

$$\lambda(\delta) = \lambda^*(1 - \sqrt{1 - f(\delta)}) \quad (10.9)$$

pour la branche stable.

Lorsque l'on cherche des solutions de l'équation 10.7, il est facile de montrer que dans l'intervalle  $0 < \delta < 1$ , il existe deux solutions stables  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$  correspondant aux états solide et liquide de l'écoulement et une solution instable  $\lambda = \delta$ . Dans le cas d'un écoulement sur un plan incliné ( $\delta = \theta$ ) on a toujours la solution  $\lambda = 1$ . Mais cette solution est instable au-delà d'une courbe  $H_{Start}(\theta)$ , qui correspond bien à la forme observée expérimentalement. Une étude plus complète (le lecteur est renvoyé aux Réf. [194, 10, 9]) donne aussi  $H_{Stop}(\theta)$ , et les zones correspondant aux types d'avalanches observées par A. Daerr [53]. Le modèle permet aussi de retrouver les instabilités de vortex mises en évidence par Y. Forterre [148, 71]. Il décrit aussi la transition continu-intermittent dans un tambour tournant. Par contre, ce modèle ne donne pas la loi d'échelle de Pouliquen.

Remarquons que les observations numériques de ces auteurs sont en bon accord avec les nôtres. Ils observent numériquement une variation de la capacité du type  $\nu = \nu_{max} + \ln(\lambda)/A$ , avec  $A = 100$ . On peut alors faire la correspondance entre  $I$  et  $\lambda$ , ce qui donne :

$$\lambda = \exp(b'I) \quad (10.10)$$

Avec  $b' = Ab$ . Les équations 10.9 et 10.10 donnent alors pour le frottement effectif :

$$\mu^* = g\left(1 - \left(1 - \frac{\exp(-b' I)}{\lambda^*}\right)^2\right) \quad (10.11)$$

avec  $g(x) = \sqrt{\delta^{*2} - \frac{\ln(x)}{A'}}$ . On obtient alors la courbe de la figure 10.1, en bon accord avec nos observations numériques, à ceci près que cette courbe met en évidence une remontée du frottement à faible  $I$ , responsable de l'hystérésis.

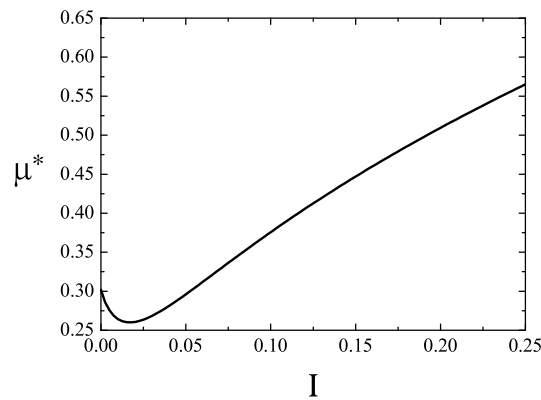


FIG. 10.1 – Variation du frottement effectif en fonction de  $I$ , déduite du modèle de Volfson et al. [194]

## 10.2 Rhéologie non-locale

Les modèles rhéologiques sont le plus souvent locaux, c'est à dire que la contrainte de cisaillement en un point s'exprime en fonction des grandeurs telles que le taux de cisaillement, la compacité ou les fluctuations de vitesse en ce même point.

Dans un écoulement granulaire dense, on a vu qu'il existe un réseau de contacts, susceptible de transmettre de l'impulsion d'un point à un autre de l'écoulement. C'est ainsi qu'une collision ayant lieu à la surface d'un écoulement sur plan incliné pourra être directement ressentie au socle. En ce sens, on est conduit à penser à une rhéologie non-locale.

Nos simulations ont clairement mis en évidence les fortes variations de la coordinence en fonction de la compacité. Les variations de la connexité du système sont particulièrement bien illustrées sur les figures 3.19 et 3.20.



Ainsi, lorsque le système s'approche de l'arrêt, il devient de plus en plus connexe, et la rhéologie pourrait devenir de plus en plus locale.

Cependant, il ne suffit pas que le système soit connexe pour conduire à une rhéologie non locale, car la transmission de forces à travers une chaîne de grains ne sera efficace que si cette chaîne de grains est rigide. Plus que d'une transition de connexité, c'est donc d'une transition de rigidité qu'il faudrait parler. C'est un sujet délicat sur lequel nous restons qualitatif. Il faudrait pour préciser cette question mener des mesures de mouvements corrélés d'amas de grains, à travers les simulations numériques. On rejoint ici la question évoquée au chapitre précédent du rôle d'une longueur de corrélation dans le système, qui augmenterait près de l'arrêt.

De façon plus précise, nous développons le modèle proposé par Mills et Chevoir [121, 120, 150]. Dans ce modèle, le milieu granulaire en écoulement est décrit comme un fluide visqueux (les contacts "fluides" du modèle précédent) dans lequel est plongé un réseau transitoire de grains en contact ("solide" dans l'acception précédente). Ce réseau de contacts solides propage les contraintes au travers de la couche d'une manière non locale.

Les contraintes se décomposent en une partie frictionnelle et une partie collisionnelle. La contrainte collisionnelle s'écrit comme la somme d'un terme local  $\sigma$ , associé aux chocs entre grains et d'un terme non local  $\sigma^{NL}$ , correspondant à la transmission des contraintes à travers le réseau de contacts.

On décrit la géométrie du réseau de contacts solides à l'aide de deux longueurs caractéristiques. Une première longueur  $\zeta$  mesure la taille moyenne des amas rigides (longueur de corrélation). La deuxième longueur  $\xi$  est associée à la densité de ces amas rigides, qui vaut en 2D  $\frac{1}{\xi}$ .

Supposant que l'on peut décrire la probabilité de connexion par une fonction exponentielle  $\exp(-y/\zeta)$ , on écrit le terme non local sous la forme :

$$\sigma^{NL}(y) = \frac{1}{\xi} \int_y^H \sigma(t) \exp\left(-\frac{t-y}{\zeta}\right) dt \quad (10.12)$$

de sorte que la contrainte collisionnelle totale s'écrit :

$$S^C(y) = \sigma(y) + \frac{1}{\xi} \int_y^H \sigma(t) \exp\left(-\frac{t-y}{\zeta}\right) dt \quad (10.13)$$

Ces deux longueurs sont supposées ne dépendre que de la compacité. La longueur de corrélation diverge pour une compacité  $\nu^{max}$  ("seuil de percolation"). On l'écrit :

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{(\nu_{max} - \nu)^\beta} \quad (10.14)$$

où  $\beta$  est un exposant de percolation ("brassée"), dont la valeur serait comprise entre 0,5 et 1.  $\xi$  peut être estimé simplement à partir de la coordinence  $Z$  et de la compacité :

$$\xi = \frac{\pi}{2Z\nu} \quad (10.15)$$

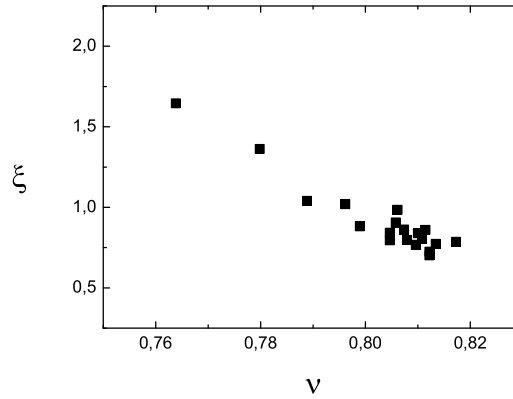


FIG. 10.2 – Variation de la densité des chaîne de force en fonction de la compacité. ( $\frac{P}{k_n} = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu = 0.4$  et  $e = 0.1$ )

Ainsi  $\xi \rightarrow 0.5$  ( $Z = 4$ ) au seuil de percolation, et augmente comme l'inverse de la coordinnce lorsque la compacité diminue (voir figure 10.2).  $\xi$  présente les mêmes dépendances que  $Z$  vis à vis de  $e$ , de  $\mu$  et de  $\frac{P}{k_n}$ . De plus, des considérations de géométrie statistique, permettent d'écrire :

$$\xi = \frac{1}{\nu\zeta} + \frac{1}{\nu^*} \quad (10.16)$$

Au voisinage du seuil de percolation, on écrira donc :

$$\xi = \frac{1}{\zeta_0\nu_{max}}(\nu_{max} - \nu)^\beta + \xi_0 \quad (10.17)$$

avec  $\xi_0$  entre 0,5 et 1.

Ces deux longueurs varient notablement au voisinage de la transition de percolation. Dans la limite dense :  $\xi \rightarrow \xi_0$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ , et dans la limite diluée :  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow 0$ .

Si on pose  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\xi}$  et si on dérive l'équation 10.13, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\sigma}{dy} - \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{dS^C}{dy} - \frac{S^C}{\zeta} \quad (10.18)$$

Dans le cas d'un cisaillement homogène (cisaillement plan sans gravité) les dérivées en  $y$  s'annulent et on obtient :

$$S^C = \frac{\zeta}{\lambda} \sigma \quad (10.19)$$

La contrainte de cisaillement totale est proportionnelle à la longueur de corrélation  $\zeta$  (longueur sur laquelle la contrainte locale se propage, ou encore la taille des amas de grains rigides). Remarquons que ce modèle prédit que la contrainte de cisaillement varie linéairement avec la longueur de corrélation, et non quadratiquement comme dans du paragraphe 9.4).

Dans une couche d'épaisseur  $H$ , il est important de prendre en compte des effets de taille finie. Dans le cas du milieu homogène (compacité constante), les deux longueurs de percolation sont constantes dans la couche. Par contre, la compacité, et à travers elle les longueurs de percolation, dépend de  $I$ . Ainsi, lorsque  $I$  diminue ou  $\nu$  augmente, la longueur de corrélation  $\zeta$  augmente. Tant que  $\zeta < H$  le matériau s'écoule sans problème. Par contre, lorsque  $\zeta = H$  le milieu s'arrête si on est à force imposée. Puisque la loi de dilataance en cisaillement plan sans gravité s'écrit  $\nu_{max} - \nu = aI$ , avec (10.14) il est possible de déterminer un nombre inertiel critique :

$$I = \left( \frac{1}{a} \frac{\zeta_0}{H} \right)^{1/\beta} \quad (10.20)$$

En utilisant cette fois la loi de frottement on peut déterminer le frottement seuil correspondant au seuil d'écoulement :

$$\mu_{seuil}^* = \mu_s + b \left( \frac{\zeta_0}{H} \right)^{1/\beta} \quad (10.21)$$

Ceci prédit que le seuil d'écoulement du matériau dépend de la taille du système. Cependant, à vitesse imposée, ce seuil n'est pas observable, le matériau étant contraint de s'écouler. On peut toutefois penser que les mouvements en blocs observés aux faibles nombres inertiels sont la signature que  $\zeta = H$  (voir § 3.6.2).

Dans le cas du plan incliné, la loi de dilataance et la loi de frottement permettent d'écrire :

$$\zeta(\theta) = \frac{\zeta_0}{\left( \frac{a}{b}(\theta - \phi) \right)^\beta} \quad (10.22)$$

La figure 10.3 représente le tracé de  $H$  en fonction de  $\theta$  dans le cas où  $\zeta = H$ . Cette courbe délimite deux parties de l'espace des paramètres ( $H$ ,  $\theta$ ) :

- pour  $H$  et  $\theta$  grands (au dessus de la courbe) la contrainte de cisaillement est dominée par le terme local,
- pour  $H$  et  $\theta$  petits (en dessous de la courbe) la contrainte de cisaillement est dominée par le terme non-local,

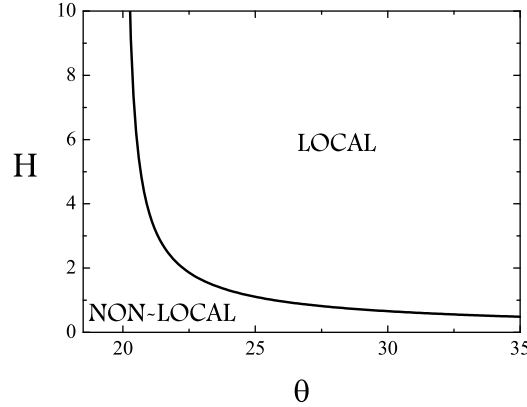


FIG. 10.3 – Prédiction du modèle non local.  $H = \zeta(\theta)$ .

On observe que cette courbe diverge pour  $\theta = \phi$  et que son allure est celle de la courbe  $H_{Stop}$ . Ceci définit donc une épaisseur critique  $H(\theta)$  sous laquelle la rhéologie est non locale. En dessous de cette courbe il existe dans la couche des blocs rigides de taille  $H$ . Toutefois, ceci ne prédit pas l'arrêt de l'écoulement. Pour décrire l'arrêt, il faut tenir compte d'un mécanisme de piégeage à la paroi rugueuse. On propose d'aborder la question de l'effet de la rugosité dans le paragraphe suivant.

### 10.3 Influence de la rugosité

Nous avons montré que le comportement d'un matériau granulaire est modifié dans les toutes premières couches au voisinage d'une paroi. Nous voulons montrer dans ce paragraphe que c'est en fait la rugosité de la paroi qui peut déterminer les seuils d'écoulement (arrêt-démarrage). Nous commençons par décrire un modèle élémentaire d'un seul grain s'écoulant sur un plan incliné rugueux, proposé par Quartier *et al.* [151]. Ses ingrédients de base sont l'effet de la gravité, des collisions et le piégeage par la rugosité. Nous chercherons ensuite à étendre ce modèle à une couche de grains.

#### 10.3.1 Un grain

Le principe du modèle est le suivant. La force à laquelle est soumis un grain se décompose en une force de piégeage dans la rugosité ( $F^p$ ) et une force dans l'état stationnaire associée à l'accélération par la gravité et à la dissipation sous l'effet des chocs ( $F^{cg}$ ). La force totale est une moyenne pondérée de ces deux termes :

$$F = (1 - h)F^{cg} + hF^p \quad (10.23)$$

où le facteur de pondération est une fonction  $h(V)$  de la vitesse qui tend vers zéro à grande vitesse (pas de contribution des pièges) et vers 1 à faible vitesse (contribution dominante des pièges). On fait le choix suivant  $h(V) = \exp(-V)$ , mais d'autres choix sont possibles.

Dans ce modèle simple, les grandeurs sont adimensionnées par les échelles naturelles de masse (la masse d'un grain), de longueur (le diamètre d'un grain) et de temps (le temps de chute d'un grain dans un piège). La force  $F^{cg}$  est bien connue à travers les expériences et simulations numériques. On choisit l'expression simplifiée suivante :

$$F^{cg} = (\theta - \phi) - V^2 \quad (10.24)$$

$\phi$  apparaît comme l'angle de frottement interne du matériau. La dépendance en  $V^2$  rappelle l'analyse de Bagnold. La force de piégeage est supposée avoir la forme suivante :

$$F^p = V^{1/2}(\theta - \theta_m) \quad (10.25)$$

où  $\theta_m$  apparaît comme un angle seuil de piégeage (géométrique). La dépendance en  $V^{1/2}$  n'est pas claire. On peut choisir plus généralement  $V^\alpha$ . Il faut que cet exposant  $\alpha$  soit supérieur à zéro, de façon que la force soit nulle à l'arrêt et inférieure à un afin que l'arrêt se produise en un temps fini. Au total :

$$F(\theta, V) = (1 - \exp(-V))((\theta - \phi) - V^2) + V^{1/2}(\theta - \theta_m) \exp(-V) \quad (10.26)$$

Le tracé de la fonction  $F_\theta(V)$  pour différents  $\theta$  met en évidence une bistabilité (voir Fig. 10.4 (a)). Un mouvement stationnaire du grain correspond en effet à  $F_\theta(V) = 0$ . La solution  $V = 0$  est toujours possible. Dans une certaine plage d'inclinaison  $[0, \theta_c]$ , c'est la seule solution. Dans une plage  $[\theta_c, \theta_m]$ , il existe deux autres solutions. Enfin dans la plage  $[\theta_m, \infty]$ , il existe une seule autre solution.

La stabilité des solutions doit être discutée par la relation fondamentale de la dynamique  $F = \frac{dV}{dt}$ . Ainsi, seule la vitesse la plus grande est stable dans la plage  $[\theta_c, \theta_m]$ . Au total, ce modèle prédit le comportement suivant :

- Si l'on part d'un état arrêté, et que l'on augmente l'inclinaison, l'écoulement démarre pour l'inclinaison  $\theta_m$ , qui apparaît ainsi comme le seuil d'écoulement  $\theta_{Start}$ , d'origine géométrique (piégeage d'un grain dans la rugosité). Le grain atteint alors très vite une vitesse non nulle (saut de vitesse).
- Si, réciproquement, on part du régime stationnaire, on peut redescendre l'inclinaison jusqu'à l'angle  $\theta_c$ , où l'arrêt a lieu, avec un saut de vitesse.

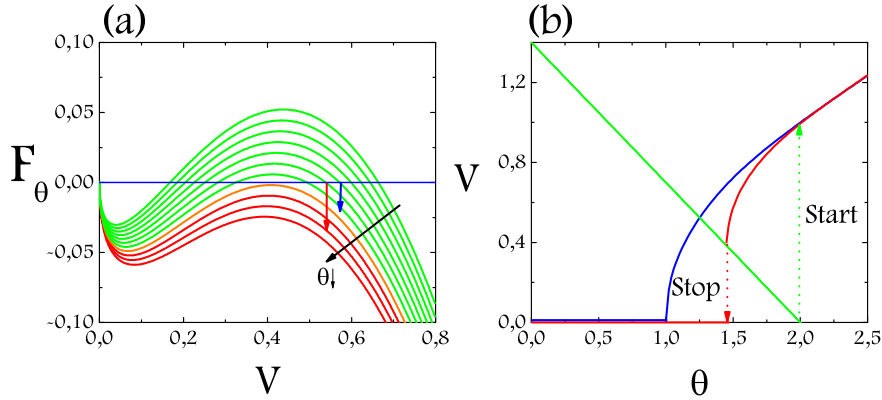


FIG. 10.4 – *Hystérésis (a) Fonction  $F_\theta(V)$  pour différentes inclinaisons. Les courbes vertes correspondent à l'existence d'états stationnaires en écoulement, la courbe orange indique l'existence d'un état instable et les courbes rouges indiquent que le seul état stationnaire est l'arrêt. La flèche bleu indique un changement d'inclinaison qui maintient l'écoulement, la flèche rouge indique un changement d'inclinaison qui arrête l'écoulement. (b) Diagramme des états stationnaires. En bleu,  $V(\theta)$  en ne tenant compte que d'une force liée à la gravité, au frottement et aux chocs, en vert la vitesse de libération d'un piège et en rouge  $V(\theta)$  en tenant compte d'une force de piégeage.*

L'inclinaison  $\theta_c$  apparaît ainsi comme le seuil d'écoulement  $\theta_{Stop}$ , d'origine dynamique : le grain s'arrête lorsque sa vitesse devient inférieure à la vitesse de libération du piège (voir Fig. 10.4 (b)).

Quelles sont alors les prédictions de ce modèle vis à vis de la dynamique de l'arrêt ? Ceci revient à intégrer l'équation de la dynamique :  $F_\theta(V) = \frac{dV}{dt}$ . On part d'un état stationnaire pour une inclinaison  $\theta_2$  où la vitesse vaut  $V_2$ . A la date  $t = 0$ , on change l'inclinaison à une valeur  $\theta_1$ , et on trace alors l'évolution de la vitesse (Fig. 10.5). Dans une certaine plage d'inclinaison ( $\theta_2 > \theta_c$ ), l'écoulement se maintient : la vitesse décroît vers une nouvelle vitesse non nulle. Par contre, si  $\theta_2 < \theta_c$ , le grain finit par s'arrêter. L'arrêt est brutal, mais le temps d'arrêt est extrêmement sensible à l'écart ( $\theta_c - \theta_2$ ).

Comme le montre la figure 10.6 (a), ce modèle prédit une variation du temps d'arrêt en loi de puissance du type :

$$\tau \sim \Delta\theta^{-1} \quad (10.27)$$

ou encore :

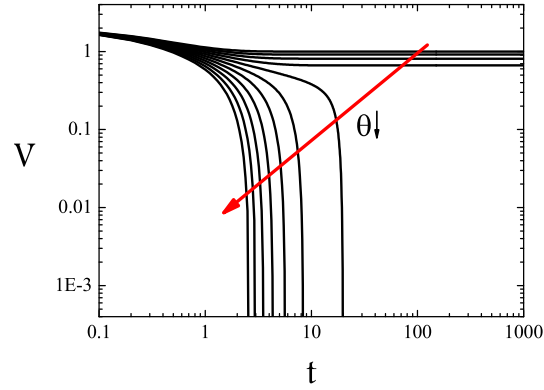


FIG. 10.5 – *Dynamique de l'arrêt, prédiction du modèle à un grain. Les paramètres sont  $\phi = 1, \theta_m = 2$  et  $V_2 = 2$ .*

$$\tau \sim \Delta\sigma^{-1} \quad (10.28)$$

C'est ce qui est observé pour l'écoulement d'une couche sur plan incliné en simulation numérique (figure 10.6b), mais aussi en cisaillement annulaire dans l'expérience avec des billes de polystyrène (figure 10.6c).

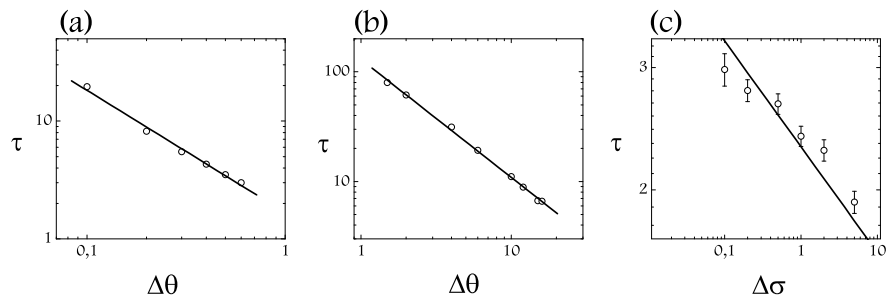


FIG. 10.6 – *Variation du temps d'arrêt : (a) dans le cas du modèle à un grain, (pente -1) (b) dans le cas de simulation numérique sur plan incliné ( $H = 20, e = 0.1, \mu = 0.4$ ) pente -1.07, (c) en cisaillement annulaire avec des billes de polystyrène (pente -1.12)*

Ainsi, ce modèle d'écoulement d'un grain unique sur un plan incliné rugueux est très séduisant puisqu'il reproduit le comportement mécanique d'une assemblée de grains non seulement sur un plan incliné, mais aussi en géométrie de Couette. Il reproduit à la fois l'hystérésis de seuil, la bifurcation de viscosité, et la dynamique de l'arrêt (Fig. 8.1 (a) et 8.2 (a) et (b)).

Les mesures expérimentales sur plan incliné nous donnent  $V(t)$  pour différents  $\Delta\theta$ . Il est donc possible de calculer l'accélération  $dV/dt$  en fonction du temps, ou encore en fonction de la vitesse  $V$  (c'est en somme le portrait de phase). Mais dans le modèle à un grain,  $dV/dt$  est aussi la force  $F(\theta, V)$ . On a donc ainsi accès directement à la force à laquelle est soumise la couche de grains en fonction de sa vitesse et de l'inclinaison ! Pour limiter l'effet du bruit, on présente des courbes ajustées par un polynôme [158]. On a tracé cette détermination de  $F(\theta, V)$  sur la figure 10.7. En terme d'ordre de grandeur, on remarque que les accélérations maximales sont de l'ordre de 100 à 200  $mm/s^2$ . L'équation de la dynamique prévoit un ordre de grandeur  $g(\theta - \phi)$ , où  $\theta - \phi \approx 0.02$ . L'ordre de grandeur est le bon. Concernant la forme des courbes, elle est qualitativement correcte près de  $V = 0$ . Le "début" de la courbe ( $F(\theta, V) = 0 - V \neq 0$ ) correspond à la variation soudaine d'inclinaison. Les courbes sont raisonnablement ordonnées.

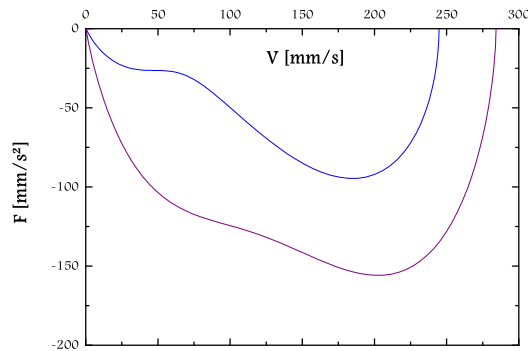


FIG. 10.7 – Variation de  $F(\theta, V)$  avec  $V$  pour  $\Delta\theta = 1.6^\circ$  et  $3.2^\circ$ .

En introduisant une dynamique propre pour certains des paramètres du modèle, il est même possible de décrire l'effet rebond. Pour cela, nous avons introduit une variable interne  $\lambda$  intervenant dans la force de piégeage, relaxant avec un temps caractéristique  $T$  vers le facteur  $V^{1/2}$  du modèle initial :

$$\begin{cases} F^p(\theta, \lambda) = \lambda(\theta - \theta_m) \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda - V^{1/2}}{T} \end{cases}$$



La figure 10.8 représente la modélisation d'une expérience de bifurcation de viscosité avec un tel modèle. Celui-ci décrit bien l'effet rebond, cependant nous ne sommes pas capables à ce stade de comprendre l'origine physique de ce modèle de piégeage à variable interne.

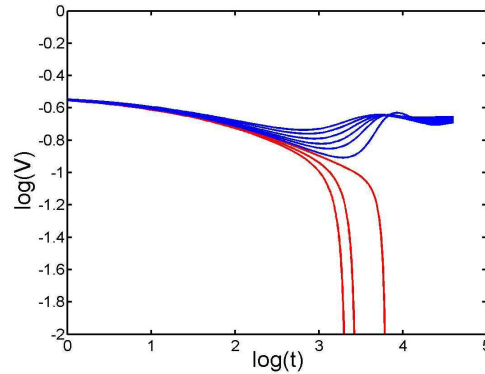


FIG. 10.8 – *Effet rebond avec un modèle à variable interne. Les paramètres sont  $\phi = 1, \theta_m = 2, V_2 = 2$  et  $T = 10$ .*

Au total, ce modèle semble capable, avec un minimum d'ingrédients, de prendre en compte le rôle important joué par la rugosité.

### 10.3.2 Une couche

#### Objectifs

Ce modèle à un grain ne peut cependant décrire le comportement d'une couche de grains en écoulement, et ne peut donc prédire les courbes  $H_{Stop}(\theta)$ , qui sont une caractéristique importante des matériaux granulaires. Nous proposons maintenant d'étendre les idées de ce modèle à l'étude de l'écoulement d'une couche de grains près de l'arrêt sur un plan incliné [52]. On cherche à reproduire les observations suivantes :

- la bistabilité,
- le profil de type Bagnold,
- la courbe d'arrêt  $H_{Stop}(\theta) = B \frac{\theta_m - \theta}{\theta - \phi}$  avec  $B \approx 1$ ,
- la loi d'échelle  $Fr = \beta \frac{H}{H_{Stop}(\theta)}$ , avec  $\beta \approx 0.1$ .

L'utilisation d'ingrédients élémentaires du modèle à un grain (gravité, collisions, piégeage) pour une couche correspond à un esprit de champ moyen [90]. Plutôt que la vitesse (modèle à un grain), c'est le nombre inertiel  $I$  qui va jouer un rôle essentiel dans ce modèle.

### Équation de conservation

On considère une couche d'épaisseur  $H$  s'écoulant sur un plan incliné de  $\theta$ . La densité  $\rho$  est considérée comme constante. Considérant l'écoulement uniforme selon la direction  $x$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial y} + \rho g \theta \quad (10.29)$$

On exprime la vitesse moyenne  $u$  en fonction du nombre inertiel  $I$ , en tenant compte de l'absence de vitesse de glissement :

$$u(y, t) = \int_0^y \dot{\gamma}(z, t) dz = \int_0^y I(z, t) \sqrt{\frac{P(z)}{m}} dz \quad (10.30)$$

On exprime la contrainte de cisaillement à l'aide du frottement effectif  $S = \mu^* P$  avec  $P = \rho g(H - y)$ , puis on adimensionne :

$$\sqrt{\frac{4\nu}{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^y I(z, t) \sqrt{H - z} dz \right) = \theta + \frac{\partial}{\partial y} [\mu^*(H - y)] \quad (10.31)$$

Le préfacteur  $\sqrt{4\nu/\pi}$  peut raisonnablement être approximé par 1.

On utilise alors la loi de frottement mise en évidence en cisaillement homogène :  $\mu^*(I) = \phi + bI$ .

Enfin, on considère que  $I$  reste constant dans toute la couche. Il vient alors :

$$\dot{I} f(y) = \theta - \mu^*(I) = F_\theta(I) \quad (10.32)$$

avec  $f(y) = \frac{2}{3}(H^{3/2} - (H - y)^{3/2})$ .  $F_\theta(I)$  est l'équivalent du terme associé aux chocs et à la gravité  $F^{cg}(V)$  du modèle à un grain.

Le régime stationnaire vérifie  $F_\theta(I) = 0$ , ce qui conduit à la loi d'échelle :  $V(\theta, H) \sim (\theta - \phi)H^{3/2}$ .

Par ailleurs cette analyse explique pourquoi l'arrêt s'amorce au socle : c'est là où  $f \rightarrow 0$ . Pendant la phase d'arrêt, l'équation doit en toute rigueur prendre en compte des dérivées spatiales de  $I$ . C'est un aspect que nous n'analyserons pas dans la suite, et nous nous restreindrons à l'analyse d'ordre de grandeur suivante :

$$\dot{I} H^{3/2} = F_\theta(I) \quad (10.33)$$

### Effet de la rugosité

L'analyse précédente ne décrit pas les effets de l'épaisseur sur l'arrêt ( $H_{stop}(\theta)$ ), ni de la présence de cette épaisseur d'arrêt dans la loi d'échelle.  $I$  étant supposé constant dans l'épaisseur, la loi d'échelle :

$$V(\theta, H) = \beta \frac{H^{3/2}}{H_{stop}(\theta)} \quad (10.34)$$

correspond très exactement à :

$$I(\theta) = \frac{5\beta}{2H_{stop}(\theta)} = \frac{5\beta}{2B} \frac{\theta - \phi}{\theta_m - \theta} \quad (10.35)$$

Pour expliquer cela, on considère une fonction  $F_\theta(I)$  dans l'esprit du modèle à un grain :

$$F_\theta(I) = (1 - h(I)) (\theta - \mu^*(I)) + h(I)g(I) (\theta - \theta_m) \quad (10.36)$$

$h(I)$  est une fonction de pondération entre le terme volumique à grand  $I$  et le terme de rugosité à faible  $I$ . La fonction  $g(I)$  doit de plus s'annuler à l'arrêt ( $I = 0$ ). On choisit :

$$\begin{cases} h(I) &= \frac{1}{1+(I/I_0)^\beta} \\ g(I) &= cI^\alpha \end{cases} \quad (10.37)$$

avec  $\beta$  et  $\alpha$  positifs. Si l'on choisit  $\alpha = 2$  et  $\beta = 1$ , on constate que le régime stationnaire ( $F_\theta(I) = 0$ ) correspond à :

$$I(\theta) = \frac{1}{cI_0} \frac{\theta - \phi}{\theta_m^* - \theta} \quad (10.38)$$

avec  $\theta_m^* = \theta_m + \frac{b}{cI_0}$ .

Ceci permet d'identifier :

$$\begin{cases} c &= \frac{2B}{5I_0\beta} \\ \theta_m^* &= \theta_m + \frac{5b\beta}{2B} \end{cases} \quad (10.39)$$

L'adjonction de ce terme d'influence de la rugosité permet donc de retrouver une loi d'échelle analogue à celle observée expérimentalement. En revanche, ce modèle ne décrit l'arrêt du matériau que pour  $\theta = \phi$ , indépendamment de l'épaisseur  $H$ .

### Effet de l'épaisseur

Nous avons donc cherché dans un deuxième temps à modifier ce modèle de façon à décrire l'arrêt pour  $H = H_{Stop}(\theta)$ . Compte-tenu du fait que  $I(\theta) = \frac{5\beta}{2H_{stop}(\theta)}$ , nous avons cherché à ajouter dans  $F_\theta(I)$  une condition de pénalisation si  $H < H_{Stop}(\theta) = 5\beta/2I$ , soit  $2IH/5\beta < 1$ . Pour cela, nous avons modifié la fonction de pondération de la façon suivante :

$$h(I) = \frac{1}{1 + I/I_0 \exp(-5\beta/2IH)} \quad (10.40)$$

Pour la simplicité des calculs ultérieurs, nous introduisons les notations suivantes :

$$H_0 = \frac{5}{2}\beta \quad (10.41)$$

$$I_0(H) = \frac{H_0}{H} \quad (10.42)$$

$$X = \frac{I}{I_0} \quad (10.43)$$

La fonction de pondération s'écrit donc :

$$h(X) = \frac{1}{1 + X \exp(-1/X)} \quad (10.44)$$

Cette fonction (Fig. 10.9) vaut environ 1 pour  $X < 1$  et  $1/X$  pour  $X > 1$ . Ce qui signifie que l'effet de piégeage est prépondérant pour  $IH < H_0$ .

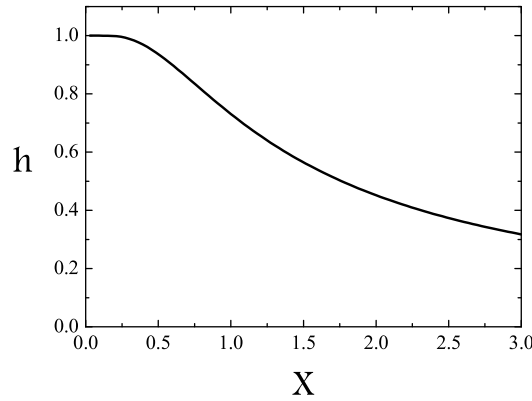


FIG. 10.9 – Fonction de pondération  $h(X)$ .

Par ailleurs, la fonction  $F_\theta$  s'écrit maintenant comme une fonction de la variable  $X$ , avec un terme de piégeage d'autant moins actif que la couche est épaisse :

$$F_\theta(X) = (1 - h) (\theta - \mu^*(I_0 X)) + h X^2 \frac{(\theta - \theta_m)}{H} \quad (10.45)$$

L'écriture précédente est relativement "ad-hoc", mais nous allons voir qu'elle conduit à des prédictions intéressantes. Nous proposons à ce stade une interprétation possible, associée au critère de dilataance de Reynolds, dans l'esprit d'un modèle proposé par Coussot [42]. Lorsque le milieu s'arrête, il

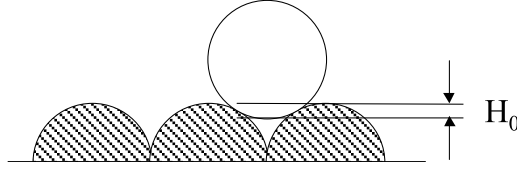


FIG. 10.10 – Illustration du piégeage d'un grain.

se piège dans la rugosité, alors qu'en écoulement, les grains s'échappent de ces mêmes pièges. On peut considérer en conséquence qu'il existe une petite variation structurale, qui se traduit par une petite variation de la compacité entre l'état bloqué et l'état en écoulement. Schématiquement, cette variation correspond à une variation d'épaisseur  $H_0$ , différence de hauteur entre les pics et les creux (Fig. 10.10). Géométriquement, celle-ci doit être, en 2D, de l'ordre de quelques dixièmes. Le terme  $I_0$  peut s'interpréter comme une variation relative d'énergie potentielle pour une couche de hauteur  $H$  entre sa position arrêtée (dans les creux) et sa position en écoulement (au niveau des pics). Plus la couche est épaisse, plus cette variable est petite. Un argument énergétique comparant l'énergie cinétique totale dans le système à la variation d'énergie potentielle entre l'état en écoulement et l'état arrêté donne plutôt :

$$I^2 H^2 > H H_0 \Rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{H_0}{H}} \quad (10.46)$$

### Loi d'échelle

Les états stationnaires sont obtenus pour  $F_\theta(X) = 0$ , soit :

$$\begin{cases} X & = 0 \\ \exp(-1/X)(\theta - \mu^*(X)) + X \frac{(\theta - \theta_m)}{H} & = 0 \end{cases} \quad (10.47)$$

La deuxième équation équivaut à :

$$X = \frac{1}{\gamma + \delta \exp(1/X)} \quad (10.48)$$

avec  $\gamma = \frac{aH_0}{(\theta - \phi)H}$  et  $\delta = \frac{\theta_m - \theta}{(\theta - \phi)H}$ .

Pour  $X \gg 1$ , on a donc :

$$X = \frac{1}{\gamma + \delta} = \frac{(\theta - \phi)H}{\theta_m^* - \theta} \quad (10.49)$$

où l'on a posé  $\theta_m^* = \theta_m + aH_0$ , c'est à dire une petite correction à  $\theta_m$  de quelques degrés.

Ceci donne alors :

$$I(\theta) = H_0 \frac{(\theta - \phi)}{\theta_m^* - \theta} = \frac{H_0}{H^*(\theta)} \quad (10.50)$$

où l'on a posé :

$$H^*(\theta) = \frac{\theta_m^* - \theta}{\theta - \phi} \quad (10.51)$$

Ce régime  $X \gg 1$  correspond à  $I \gg I_0$ , soit  $H \gg H^*(\theta)$ . On a alors la loi d'échelle :

$$Fr = \beta \frac{H}{H^*(\theta)} \quad (10.52)$$

avec  $\beta = \frac{2H_0}{5}$ .

### Épaisseur d'arrêt

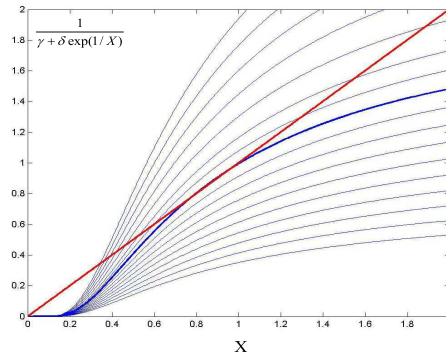


FIG. 10.11 – *Principe de la tangente.*

Cependant  $H^*(\theta)$  n'est pas exactement l'épaisseur d'arrêt. Pour déterminer celle-ci, on doit étudier l'équation pour  $X \ll 1$ . Il vient un moment où il n'y a plus de solution à la deuxième équation, et donc  $X = 0$  : l'écoulement s'arrête. On utilise le fait que ceci se produit lorsque la courbe tangente  $X$  (Fig. 10.11). On peut donc écrire :

$$\left( \frac{1}{\gamma + \delta \exp(1/X)} \right)' = \frac{\delta \exp(1/X)/X^2}{(\gamma + \delta \exp(1/X))^2} = 1 \quad (10.53)$$

$$\Rightarrow \delta \exp(1/X) = 1 \Rightarrow \delta \exp(1 + \gamma) = 1 \quad (10.54)$$

Ceci définit  $H_{stop}(\theta)$  qui peut s'écrire :

$$H_{stop}(\theta) = H^{**}(\theta)f(\theta) \quad (10.55)$$

où :

$$H^{**}(\theta) = \frac{\theta_m - \theta}{\theta - \phi} \quad (10.56)$$

et  $f(\theta)$  est solution de :

$$f(\theta) = \exp\left(1 + \frac{\epsilon(\theta)}{f(\theta)}\right) \quad (10.57)$$

avec  $\epsilon(\theta) = \frac{aH_0}{\theta_m - \theta}$ .

$f(\theta) \approx e$  pour  $\theta \approx \phi$ , et diverge près de  $\theta_m$ . Ainsi, sauf près de  $\theta_m$ , on a :

$$H_{stop}(\theta) \approx H^{**}(\theta)f(\phi). \quad (10.58)$$

Cette forme de l'épaisseur d'arrêt est conforme à ce qui est observé expérimentalement. Le préfacteur est de l'ordre de 3 tailles de grains. Les deux angles caractéristiques qui apparaissent sont d'une part le frottement interne quasi-statique en cisaillement homogène, d'autre part l'angle de piégeage géométrique dans la rugosité.

Par ailleurs :

$$X_{stop}(\theta) = \frac{1}{1 + \gamma(\theta)} = \frac{\theta - \phi}{\theta - \phi^*} \quad (10.59)$$

avec  $\phi^* = \phi - \frac{aH_0}{H}$

En conséquence :

$$I_{stop}(\theta) = \frac{H_0}{H} \frac{\theta - \phi}{\theta - \phi^*} \quad (10.60)$$

### Retour sur la loi d'échelle

On peut ainsi déterminer la loi d'échelle, loin de l'arrêt :

$$Fr = \beta \frac{H}{H^*(\theta)} = \beta \frac{H}{H_{stop}(\theta)} \frac{H_{stop}(\theta)}{H^*(\theta)} = \beta(\theta) \frac{H}{H_{stop}(\theta)} \quad (10.61)$$

avec  $\beta(\theta) = \frac{2H_0}{5} f(\theta) \frac{\theta_m - \theta}{\theta_m^* - \theta} \approx \frac{2H_0 e}{5} \approx H_0$ , ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur observé pour  $\beta$  ( $\approx 0.1$ ).

Près de l'arrêt, la loi d'échelle s'écrit :

$$Fr = \beta_{stop}(\theta) \frac{H}{H_{stop}(\theta)} \quad (10.62)$$

avec  $\beta_{stop}(\theta) = \frac{2H_0}{5H} X(\theta) f(\theta) H^{**}(\theta)$ .

Ce modèle prédit donc des déviations de la loi d'échelle près de l'arrêt, qui sont déterminées par :

$$\frac{\beta_{stop}(\theta)}{\beta(\theta)} = \frac{1}{H} X(\theta) \frac{\theta_m^* - \theta}{\theta - \phi} \quad (10.63)$$

Si on cherche maintenant à tracer ce facteur en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_{stop}}$ , on obtient la courbe 10.12, qui est en bon accord avec nos observations expérimentales.

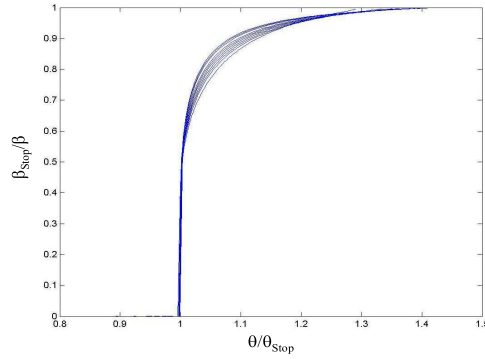


FIG. 10.12 -  $\frac{\beta_{stop}(\theta)}{\beta(\theta)}$  en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_{stop}}$

### Frottement effectif

Il est possible de déduire des informations précédentes le frottement effectif sur plan incliné. Il s'exprime sous la forme d'une fonction du nombre inertiel :

$$\mu^*(I) = \frac{\phi + \theta_m^* \frac{I}{H_0}}{1 + \frac{I}{H_0}} \quad (10.64)$$

Par ailleurs, l'écoulement s'arrête lorsque  $I$  atteint la valeur  $I_{stop}$ , ce qui définit un frottement limite fonction de  $H$ . Ces informations sont résumées sur la figure 10.13, sur laquelle on a aussi reproduit la loi de frottement en cisaillement plan, et quelques points résultant de mesures en simulations numériques.



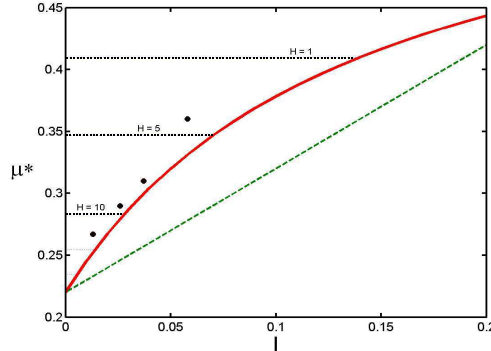


FIG. 10.13 – *Frottement effectif en fonction de  $I$ . La droite verte symbolise les résultats du cisaillement homogène. Les points correspondent aux mesures sur plan incliné, la courbe rouge correspond à la prédiction du modèle ( $\phi = 0.22$ ,  $\theta_m^* = 0.6$  et  $H_0 = 0.14$ ). Les droites en pointillés noirs (fonction de  $H$ ) correspondent aux déviations près de l'arrêt.*

On ne doit pas être étonné de l'accord avec les observations sur plan incliné, dans la mesure où le modèle a précisément été construit pour cela.

### Bilan

Nous rappelons les hypothèses de ce modèle. Le nombre inertiel  $I$  est supposé constant dans la couche. On utilise dans l'expression des contraintes un terme décrivant l'influence de la rugosité, dont la signification physique demande à être éclaircie.

L'écoulement dépend alors :

- Du matériau, à travers  $\mu^*(I) = \phi + bI$ , c'est à dire à travers le frottement interne  $\phi$  et la viscosité effective  $b$ . Les simulations numériques indiquent que ces paramètres ne dépendent pas de la rugosité. Il y a peut être une diminution du frottement tout près de la rugosité, et une diminution de  $b$  associée à une organisation en couche.
- De la rugosité, à travers  $\theta_m$  et  $H_0$  (qui sont liés l'un à l'autre). Nous renvoyons aux travaux de C. Goujon [75] pour une étude détaillée des effets de rugosité sur plan incliné.

Ce modèle décrit bien l'épaisseur d'arrêt, la loi d'échelle fonction de cette épaisseur d'arrêt, ainsi que ses déviations près de l'arrêt. Corrélativement, il décrit bien les caractéristiques du frottement effectif sur plan incliné.

La dynamique de l'arrêt est donnée, sous forme schématique, par l'équation suivante :

$$\dot{X}f(y) = \frac{1}{H_0 H^{1/2}} F_\theta(X) \quad (10.65)$$

avec  $f(y) = \frac{2}{3}(H^{3/2} - (H-y)^{3/2})$ . On retrouve bien la bifurcation de viscosité, mais l'arrêt ne s'effectue pas en temps fini du fait que le terme de rugosité est en  $X^2$ .

Par contre, ce modèle prédit un démarrage à  $\theta = \theta_m$ , pour toute épaisseur. Pour retrouver la courbe de démarrage  $H_{Start}(\theta)$ , une piste pourrait être d'introduire une équation d'évolution pour la microstructure lors de la transition solide-fluide. En effet, partant de l'arrêt, l'écoulement s'amorce par le haut, et atteint brusquement toute la couche. On aurait donc envie d'écrire  $\theta_m$  comme une fonction croissante depuis le socle, de sorte que l'écoulement démarre à la surface, pour l'épaisseur  $H_{Start}$ . Pour que la transition se propage à toute la couche, on peut supposer que dès que le matériau s'écoule, le paramètre  $\theta_m$  s'abaisse spontanément ...

## 10.4 Conclusion

Voici donc quelques pistes de modélisation pour la transition de blocage d'un matériau granulaire, à la lueur de nos résultats expérimentaux ou numériques. Naturellement, ces considérations doivent être prises avec prudence. Cet aspect n'a pas constitué le point central de notre thèse, et le tableau proposé est loin d'être exhaustif par rapport à toutes les pistes de modélisation qui ont été récemment proposées [105, 77, 147, 121, 120].



# Conclusion et perspectives

**D**ans ce travail, nous avons tout d'abord abordé la question du blocage d'un matériau granulaire à travers l'étude du comportement du matériau à proximité de l'arrêt, à vitesse imposée.

L'état de cisaillement d'un matériau granulaire est principalement déterminé par la connaissance d'un nombre sans dimension baptisé nombre inertiel  $I$ , traduisant le rapport des forces d'inertie sur les forces de pression. Les faibles  $I$  correspondent au régime quasi statique ( $I \lesssim 10^{-2}$ ). Les grandes valeurs de  $I$  ( $\gtrsim 0.1$ ) correspondent au régime dynamique ou collisionnel. La loi de comportement se déduit alors des variations de la compacité et du frottement effectif avec ce nombre.

La transition entre les régimes quasi statique et dynamique est progressive. Pour les grandes valeurs de  $I$ , dans le régime dynamique, la loi de comportement dépend du caractère dissipatif du matériau. Il est alors possible d'avoir une description de l'écoulement dans le cadre de la théorie cinétique.

Dans le régime intermédiaire, la pression au sein du milieu est une pression du type Bagnold, c'est à dire proportionnelle au carré du taux de cisaillement et divergeant près de la compacité maximale. Par ailleurs, le frottement augmente linéairement avec  $I$ , à partir d'un seuil quasistatique. Cette loi de frottement semble indépendante du type de matériaux (faiblement ou fortement dissipatif). La loi de comportement est qualitativement la même, que la distribution de contrainte soit homogène ou hétérogène. Dans le cas d'écoulements soumis à la gravité, il faut de plus introduire un autre nombre sans dimension  $G_p$  traduisant le rapport des forces de pesanteur sur les forces de pression. L'étude comparée du cisaillement homogène et du cisaillement hétérogène a permis de montrer que la localisation du cisaillement est liée à l'hétérogénéité des contraintes dans le milieu.

La loi de comportement observée dans la géométrie simple de cisaillement plan peut être étendue à d'autres géométries (cisaillement annulaire, plan incliné utilisé comme rhéomètre). Pour ce qui est du cisaillement annulaire, nos mesures expérimentales des profils de vitesse et de la compacité en fonction du taux de cisaillement apparent indiquent que la plupart des expériences sont faites dans le régime quasistatique. Pour le plan incliné, l'augmentation du frottement par rapport au cisaillement plan semble pouvoir s'expliquer par un effet de paroi rugueuse.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la transition elle-même, à force imposée. Les expériences (en cisaillement annulaire et sur plan incliné) et les simulations numériques (sur plan incliné) indiquent l'existence d'un hystérésis du seuil d'écoulement. Dans tous les cas, on observe que la transition liquide-solide (LS) se fait de manière brusque.

Les expériences de bifurcation de viscosité ont permis de mesurer la dynamique de l'arrêt. Elles montrent que si  $\sigma > \sigma_{LS}$ , alors le matériau reste fluide,  $\sigma_{LS}$  correspondant au seuil d'arrêt. En revanche, si  $\sigma < \sigma_{LS}$ , le matériau va finalement s'arrêter, mais le temps d'arrêt est extrêmement sensible à la différence de contraintes :  $\sigma_{LS} - \sigma$ . Ce comportement s'observe aussi sur plan incliné en variant brusquement l'inclinaison autour de  $\theta_{Stop}$ .

Il existe donc une plage de taux de cisaillement qui ne peut pas être atteinte de façon stable, ce qui corrobore l'observation d'une transition discontinue. L'écoulement n'est stable qu'au-dessus d'un taux de cisaillement critique  $\dot{\gamma}(\sigma_{LS})$ . Cette transition est associée à un taux de cisaillement critique, mais nous conjecturons que la bonne grandeur est plutôt un nombre inertiel critique. L'observation d'une épaisseur d'arrêt sur plan incliné et l'apparition d'intermittences en cisaillement plan à vitesse imposée indiquent que le nombre inertiel critique doit dépendre de l'épaisseur en écoulement. Ces effets de taille finie montrent qu'il faut prendre en compte une longueur caractéristique du système qui augmente près de l'arrêt.

Les simulations numériques ont permis de mesurer certaines grandeurs micromécaniques (coordinence, fluctuation et mobilisation du frottement) lors de l'arrêt. La mobilisation du frottement et les fluctuations relatives de vitesse vérifient des lois d'échelle en fonction de  $I$  à vitesse imposée. Par ailleurs, on observe une variation discontinue de ces trois grandeurs lors de l'arrêt. En particulier, la mobilisation du frottement chute brusquement à 0 et les fluctuations relatives de vitesse augmentent notablement lors de cette transition. La transition de blocage est donc associée à une transition microstructurelle massive !

Nos expériences de rhéométrie confirment le fait que le comportement mécanique des matériaux granulaires secs est similaire à celui d'autres fluides particuliers. Ceci suggère donc qu'il existe des mécanismes communs faisant intervenir une variable interne [45]. Dans le cas des matériaux granulaires, on peut penser que cette variable interne est liée aux caractéristiques du réseau de contacts, telle la proportion de contacts "solides" [194].

Cependant, nous avons montré qu'un mécanisme de piégeage initié par la rugosité de la paroi est capable, comme pour un grain unique [151], de décrire le comportement d'une couche de grains sur un plan incliné au voisinage de l'arrêt (hystérésis, épaisseur d'arrêt et dynamique de l'arrêt).

Naturellement, ce travail est loin d'être exhaustif. Nous avons répondu à quelques questions, mais nos réponses en posent d'autres. C'est ainsi qu'il

semble important de prolonger ce travail par différentes études spécifiques et nous proposons ci dessous quelques pistes.

Dans cette thèse, nous nous sommes limités à quelques géométries d'intérêt ; il serait toutefois souhaitable de pouvoir mesurer la loi de frottement et donc la loi de comportement dans d'autres géométries : le socle meuble, la conduite verticale. . .

Nous avons mis en évidence des effets bien spécifiques liés à la proximité de la paroi. Il nous paraît donc important de pouvoir étudier ces zones à l'interface entre le milieu granulaire et le paroi, et de comprendre leur interaction avec le comportement en volume, notamment les aspects non locaux.

Afin d'élucider, d'un point de vue physique, la transition solide-liquide pour les matériaux granulaires, il semble crucial d'obtenir des profils de vitesse par des techniques spécifiques (RMN, rayons X, diffusion de lumière) pour des plus grands taux de cisaillement, afin d'établir l'existence ou non d'une variation de la largeur de la bande de cisaillement.

La description en terme de longueur de corrélation permet de décrire avec un même formalisme la transition vers l'arrêt pour différentes géométries [118]. Pour mieux comprendre les mécanismes non locaux, il nous paraît important de mesurer les corrélations au sein des écoulements granulaires.

Il serait aussi pertinent d'étendre cette étude à une classe de matériaux plus large. On peut songer en premier lieu aux matériaux granulaires cohésifs. Ce travail a été entamé et donne des informations sur le frottement et la dilatance, ainsi que sur l'apparition d'intermittences [166] en fonction du niveau de cohésion.

Il nous semble important de faire le lien entre les matériaux granulaires et les fluides particulaires. Ces différentes pistes de travail pourraient fournir des informations mécaniques en vue d'une description unifiée du blocage dans les matériaux fragiles.



# Annexes





## Annexe A

# Méthodes de simulation numérique discrète

**N**ous présentons dans cette annexe deux méthodes de simulation numérique couramment utilisées pour simuler les écoulements granulaires. La première, la dynamique moléculaire est la méthode que nous avons choisie pour simuler la majorité de nos systèmes. Nous n'avons utilisé que ponctuellement la seconde, la dynamique des contacts, mais nous avons régulièrement comparé nos résultats à ceux issus de simulations utilisant cette méthode [150].

### A.1 Dynamique moléculaire

La dynamique moléculaire appliquée à la simulation de matériaux granulaires est issue des simulations numériques d'atomes et de molécules (d'où son nom) en prenant en compte la dissipation d'énergie. Le lecteur désireux d'une discussion plus détaillée de cette méthode est renvoyé aux références suivantes [40, 175, 113, 49].

La dynamique moléculaire utilise un algorithme assez simple et intuitif. Elle consiste, à chaque itération et pour chaque particule, à :

1. rechercher les particules qui interagissent avec elle ;
2. traiter de façon binaire ces interactions de façon à calculer la force totale qu'elle subit comme somme de leurs contributions respectives ;
3. intégrer les relations fondamentales de la dynamique afin d'obtenir les caractéristiques de son mouvement, qui seront considérées uniformes jusqu'au pas de temps suivant.

Cette technique nécessite l'utilisation d'un algorithme de prédiction - correction (d'ordre 2 dans notre programme) basé sur un développement de Taylor des positions, vitesses et accélérations (translation et rotation) de

chaque grain. Pour un instant donné, on commence par prédire la position des particules en intégrant les équations de la dynamique à partir des vitesses initiales. On recherche alors les particules en contact, afin de déterminer les forces qui s'exercent. La connaissance des forces de contact entre particules permet, pour cet instant, de corriger la position et la vitesse des grains.

Son défaut principal réside dans le fait que les calculs effectués pour déterminer les contacts sont très lourds et répétitifs. Pour accélérer la simulation, on a recours donc à une fonction de "détection des voisins" permettant d'établir pour chaque particule une liste des particules susceptibles d'entrer en contact avec elle sur des laps de temps plus longs qu'une unique itération. On ne cherche alors les contacts que parmi cette liste et non sur l'ensemble des particules ce qui est un gain de temps considérable.

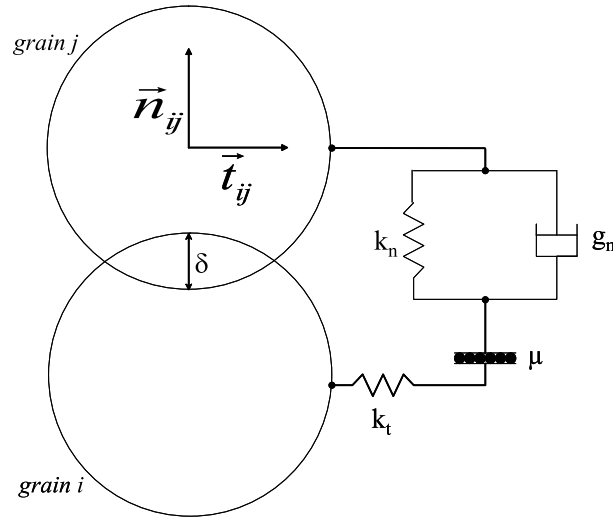


FIG. A.1 – Modèle de contact sec (modèle de sphères molles)

Lorsque deux particules sont en contact, on adopte un modèle dit de "sphères molles" [49], dans lequel les particules s'interpénètrent et réagissent en fonction de cette interpénétration (Fig. A.1). Le modèle choisi et présenté ci-dessous est un modèle relativement simple prenant en compte un terme de répulsion élastique linéaire, inspiré du modèle de Hertz, et un terme de dissipation visqueuse d'énergie. Considérons la partie normale du contact entre deux grains  $i$  et  $j$  (Fig. A.1). Le grain  $j$  est soumis à deux forces suivant  $\vec{n}_{ij}$  :

- Une force élastique linéaire  $\vec{F}_{ij}^e = k_n \delta_n \vec{n}_{ij}$ , où  $\delta_n$  est la déformation normale, et  $k_n$  est le coefficient de raideur normale. Cette force est nulle si le contact est ouvert.
- Une force de dissipation visqueuse  $\vec{F}_{ij}^v = g_n \dot{\delta}_n \vec{n}_{ij}$ , décrivant l'inélasticité ( $g_n$  est un coefficient d'amortissement visqueux).

Pour certaines valeurs de  $\delta$  et de  $\dot{\delta}$ , ces deux forces sont opposées et la résultante peut être négative : la force de répulsion est alors attractive ! Ceci se produit en fait pour des vitesses correspondant à des grains qui se séparent : les grains ne s'attirent donc pas. Numériquement il est possible d'annuler la force normale lorsqu'elle devient négative. Nous avons vérifié que cela n'a pas d'influence sur les grandeurs que nous avons mesurées. Nous renvoyons le lecteur à la référence [175] pour une discussion plus approfondie de cela.

La force de contact tangentielle est une force élastique linéaire limitée par le critère de Coulomb :

$$\begin{cases} F_t = & k_t \delta_t \\ \dot{\delta}_t = & \begin{cases} |v_t| - \mu F_n^e \\ 0 \end{cases} \quad \text{si } |k_t \delta_t| \begin{cases} < \\ \geq \end{cases} \mu F_n^e \end{cases}$$

où  $\delta_t$  est le déplacement tangentiel relatif,  $v_t$  la vitesse relative tangentielle et  $k_t$  le coefficient de raideur tangentielle (on choisit toujours  $k_t = k_n/2$  [29]).

Pour rester dans la limite des grains rigides, il faut bien entendu limiter l'interpénétration entre les grains à des valeurs très faibles (typiquement un millièème du diamètre des grains). Cette limitation impose des choix judicieux des paramètres du système.

Lors d'un choc binaire de vitesse d'impact  $v_0$  entre 2 grains de masse  $m_i$  et  $m_j$ , l'interpénétration  $\delta$  obéit à l'équation différentielle suivante :

$$m_{eff} \ddot{\delta} + g_n \dot{\delta} + k_n \delta = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $m_{eff} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$  est la masse réduite du système binaire. C'est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, dont la résolution donne, sous réserve de la condition de stabilité  $g_n \leq 2\sqrt{m_{eff} k_n}$  :

$$\delta(t) = v_0 \frac{\tau_c}{\pi} \exp\left(-\frac{g_n}{2m_{eff}} t\right) \sin\left(\pi \frac{t}{\tau_c}\right) \quad (\text{A.2})$$

où  $\tau_c$  désigne la durée du contact, et vaut exactement :

$$\tau_c = \pi \left( \frac{k_n}{m_{eff}} - \left( \frac{g_n}{2m_{eff}} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (\text{A.3})$$

On peut caractériser la dissipation d'énergie durant un choc par un coefficient de restitution  $e$ , défini comme le rapport des modules des vitesses finale et initiale du choc. Pour le choc normal considéré, on trouve :

$$e = \left| \frac{\dot{\delta}(\tau_c)}{v_0} \right| = \exp\left(-\frac{g_n}{2m_{eff}} \tau_c\right) \quad (\text{A.4})$$

En combinant les deux équations précédentes, on peut alors exprimer  $g_n$  en fonction de  $e$  par la relation :

$$g_n = -2 \ln e \sqrt{\frac{mk_n}{\pi^2 + \ln^2 e}} \quad (\text{A.5})$$

Pour  $e \in [0; 1]$ , on vérifie bien que la condition de stabilité précédente est respectée.

La validité de ce modèle dans le cadre de notre étude repose essentiellement sur la condition de faibles interpénétrations. Pour nous situer dans la limite des grains rigides, on souhaite limiter les interpénétrations à environ un millièème du diamètre moyen des grains. De plus, le traitement numérique discret du temps impose certaines conditions au delà desquelles la fiabilité du calcul serait remise en cause.

Ainsi, le pas de temps doit être judicieusement choisi, de telle sorte que les grains ne s'interpénètrent pas trop et qu'il ne puisse pas se produire d'événements importants entre 2 itérations, événements qui seraient alors ignorés par la simulation. Cependant, le pas de temps ne doit pas non plus être inutilement court, car de lui dépend grandement le temps total de réalisation d'une simulation numérique. Pour régler ce pas de temps, nous avons utilisé le temps caractéristique le plus court existant dans notre problème : le temps de collision  $\tau_c$ . Le pas de temps devant être nettement inférieur à ce temps caractéristique, nous l'avons choisi égal à une fraction de  $\tau_c$  :

$$dt = \frac{\tau_c}{N} \text{ où } \tau_c \approx k_n^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

Forts de l'expérience de J.N.Roux [167, 40] nous savons que pour des déformations assez lentes avec  $k_n = 10^4$ , on se situe dans la limite des grains rigides pour  $N = 100$ . On conçoit également que plus on se situe dans le cadre d'événements rapides, plus il faudrait choisir une valeur de  $N$  élevée. Le choix de  $N$  impose donc de limiter les vitesses relatives entre les grains. En considérant que la vitesse maximale du problème est la vitesse de cisaillement imposée à la paroi, une solution efficace est de limiter cette vitesse en fonction du choix de  $N$ . Typiquement, on souhaiterait limiter l'interpénétration entre les grains à un millièème de leur diamètre au maximum. La distance parcourue par une particule de diamètre 1 animée de la vitesse maximale autorisée  $V_m$  entre deux pas de temps successifs doit donc être inférieure à la moitié de cette valeur :  $V_m dt \leq \frac{10^{-3}}{2}$  avec  $dt \approx \frac{1}{N\sqrt{k_n}}$ . On en déduit que  $V_m = 5 \cdot 10^{-4} N \sqrt{k_n}$ . Pour plus de sécurité, nous avons choisi de considérer  $V_m = 10^{-4} N \sqrt{k_n}$ . Ainsi, afin d'être en accord avec la limite des grains rigides, on a toujours choisit une vitesse imposée  $V$  tel que  $V < V_m$  (dans la plus part des cas on a  $V_m = 1$ ).

En ce qui concerne les contraintes imposées au système, il est clair que des conditions similaires doivent être respectées sous peine de forcer des interpénétrations trop importantes entre les grains. Cependant, la grande hétérogénéité de la répartition des contraintes au sein du milieu complique

l'établissement d'une condition simple et efficace. De plus, on peut considérer qu'un état de contrainte qui force des interpénétrations trop grandes dans notre modèle correspondrait dans la réalité à un état où les grains qui constituent le matériaux seraient déformés plastiquement. C'est pourquoi nous ne nous imposons pas de limites quant aux forces appliquées au système, mais nous nous contentons de suivre de près la valeur maximale des interpénétrations.

## A.2 Dynamique des contacts

L'expérience du "berceau de Newton" indique que lors d'une collision d'une particule avec un empilement de particules, il faut traiter l'ensemble du réseau des contacts. C'est un processus collectif qui ne peut être réduit aux chocs binaires. Il est donc nécessaire de formuler les lois de contact de manière plus générale afin de traiter de la même façon les contacts maintenus et les collisions, mais également pour prendre en compte l'ensemble du réseau.

La dynamique des contacts est particulièrement adaptée à ce type de problème. Elle à été mise au point par Moreau et Jean dans les années 1980 [124, 127, 93, 92], et appliquée avec succès à différents problèmes, statiques [152], quasi-statiques [126], ou dynamiques [125, 11, 150]. Nous nous contenterons de présenter succinctement le principe de cette méthode. Pour une discussion plus approfondie, nous renvoyons le lecteur aux références précédentes.

L'originalité de cette méthode réside dans l'écriture de lois de contact généralisées qui permettent de décrire les contacts maintenus et les collisions de la même façon, et donc de traiter ainsi correctement les collisions multiples, sans recourir à une régularisation des lois de contact (comme c'est le cas en dynamique moléculaire).

Les équations de la dynamique pour un ensemble de corps rigides avec contact frottant sont reformulées au sens des mesures, c'est à dire intégrées sur un pas de temps infinitésimal (typiquement le temps de collision). Les forces de contact et les forces développées au cours des chocs sont toutes deux remplacées par des percussions. Il n'y a plus de différence entre elles.

Moreau a reformulé la condition de non-interpénétration de Signorini en reliant la percussion normale  $P_n$  de non-interpénétration non plus à la distance mais une vitesse normale formelle  $\bar{v}_n$ , moyenne des vitesses normales avant et après le choc pondérée par un coefficient de restitution normale  $e_n$  ( $e_t$ ), qui modélise l'inélasticité des collisions. De la même manière, il a reformulé les lois de Coulomb en reliant la percussion tangentielle  $P_t$  à la vitesse tangentielle formelle  $\bar{v}_t$ , moyenne des vitesses tangentielles avant et après le choc, pondérée par un coefficient de restitution tangentielle  $e_t$ . Ceci est résumé sur la figure A.2

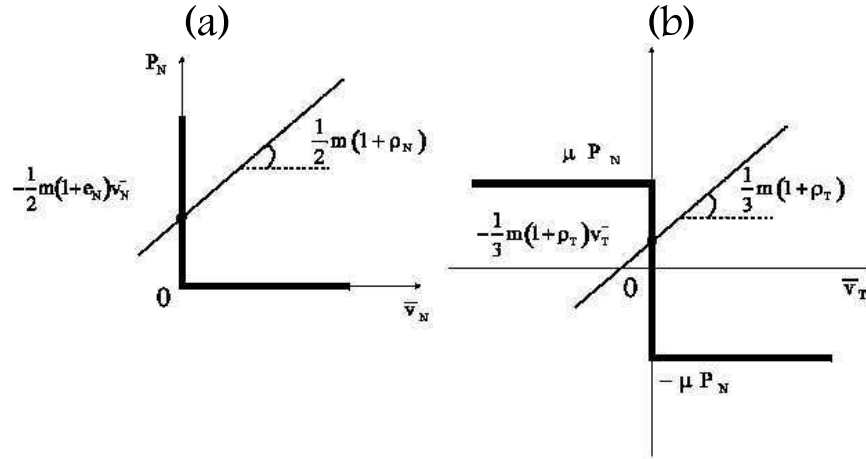


FIG. A.2 – Graphes de Signorini (a) et de Coulomb (b) généralisés (pour des disques de même diamètre). Les droites représentent les droites de la dynamique.

A partir de ces lois de contacts généralisées l'algorithme va calculer les percussions et les vitesses des particules. Tout comme pour la dynamique moléculaire, il faut d'abord repérer les contacts. Ceux-ci sont repérés lorsque deux particules s'interpénètrent. Toutefois, cette interpénétration n'a pas de sens physique et les percussions ne sont pas calculées à partir de celle-ci. Cela permet d'avoir des pas de temps plus importants qu'en dynamique moléculaire. En fait, pour l'ensemble des contacts, on résout simultanément les équations de la dynamique associées aux graphes généralisés de Signorini et de Coulomb.

Les conditions de Signorini et de Coulomb étant non-régulières (non-interpénétrabilité, discontinuité de la vitesse, non-régularité des forces) une résolution matricielle du problème n'est pas envisageable. La solution est approchée par une méthode itérative. A un pas de temps donné, on connaît la valeur de la vitesse relative pour chaque contact. Lors la première itération (0), on attribue une certaine valeur aux impulsions  $P_n^0$  et  $P_t^0$  (nulle dans un cas dilué, ou celle du pas de temps précédent dans le cas dense). A une itération quelconque (i) la connaissance des impulsions  $P_n^i$  et  $P_t^i$  sur tous les contacts permet de calculer les contributions des autres contacts. Les intersections des droites de la dynamique définies avec les graphes de Signorini et

---

de Coulomb donnent à la fois une nouvelle estimation des impulsions et des vitesses formelles.

### A.3 Conclusion

La dynamique moléculaire possède le grand avantage de pouvoir être implémentée avec une grande gamme d'interaction entre particules. Elle est en outre capable de traiter des situations dynamiques variées en terme de compacité et de dissipation d'énergie. Cette grande adaptabilité se fait au détriment du temps de calcul qui est élevé.

La dynamique des contacts permet d'avoir des temps de calcul plus courts. Elle est aussi particulièrement adaptée pour l'étude du réseau de contact, puisqu'elle a été conçue pour gérer les contacts multiples.

Ces deux méthodes apparaissent donc comme complémentaires. Bien que la dynamique des contacts et la dynamique moléculaire soient des méthodes foncièrement différentes, elles donnent toute deux des résultats comparables. Ceci valide le fait que les simulations numériques peuvent être considérées comme des expériences sur un matériau modèle virtuel.





## Annexe B

# Calcul du tenseur des contraintes

**L**es simulations nous donnent accès à l'ensemble des forces entre les particules en contact, ainsi qu'à l'angle de contact. On peut alors calculer le tenseur de contrainte dans le matériau.

Dans le cas des assemblées de grains en équilibre statique, on trouve dans la littérature plusieurs expressions, plus ou moins équivalentes, du tenseur des contraintes en fonction des forces de contact entre les grains [39, 103, 20]. Ainsi, pour une assemblée de grains occupant un volume  $V$ , interagissant par des forces de contact  $\vec{f}_c$  aux points  $\vec{x}_c$ , le tenseur des contraintes (c pour "contact") s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^c = \frac{1}{V} \sum_c \vec{x}_c \otimes \vec{f}_c \quad (\text{B.1})$$

Nous voulons ici examiner la situation d'un écoulement dans lequel les grains, animés de vitesse de translation et de rotation, transportent de la quantité de mouvement, et par ailleurs interagissent par contact maintenu ou collisions. Dans le cas très dilué, on dispose du tenseur des contraintes de Reynolds qui décrit le transport de quantité de mouvement associé aux mouvements fluctuants. Ainsi pour une assemblée de  $N$  grains (masse  $m_i$ , vitesses fluctuantes  $\delta\vec{v}_i$ ), occupant un volume  $V$ , le tenseur des contraintes (f pour "fluctuant") s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^f = \frac{1}{V} \sum_i m_i \delta\vec{v}_i \otimes \delta\vec{v}_i \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas d'un écoulement plus dense, on a des situations de contact multiple, où se mêlent contacts maintenus et collisions, de sorte que l'on doit dépasser l'expression fournie par la théorie cinétique. Il faut trouver une expression plus générale, compatible avec la limite de la statique des empilements et avec la limite des écoulements dilués, collisionnel.

Pour cela on reprend le résultat de Batchelor [15] qui, partant de la définition primitive de la contrainte en mécanique, c'est à dire la résultante des forces exercées sur une surface élémentaire et le flux de la quantité de mouvement à travers cette surface, aboutit à la décomposition du tenseur des contraintes moyennes macroscopique, au sein d'un volume  $V$ , entre un terme associé aux efforts intérieurs, et un terme associé aux fluctuations du mouvement (le tenseur de Reynolds), défini ci-dessus :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{V} \int_V (\underline{\underline{\sigma}} + \rho(\vec{r}) \delta \vec{v} \otimes \delta \vec{v}) d\vec{r} \quad (\text{B.3})$$

Dans cette expression  $\underline{\underline{\sigma}}$  représente le tenseur local des contraintes, dont la définition sera donnée précisément dans les paragraphes suivants. Cette définition n'est pas unique, mais elle reste la définition la plus simple qui soit compatible avec les concepts de la mécanique des milieux continus et que l'on puisse étendre aux écoulements granulaires en régime permanent. Notons que l'analyse de Batchelor a souvent été utilisée dans la modélisation d'écoulement de suspensions concentrées.

Pour décrire les efforts intérieurs dans un milieu granulaire, on peut considérer chacun des grains comme un milieu continu, mais on peut aussi ne décrire que les efforts de contact entre les grains. Cette deuxième approche est naturelle si l'on considère les grains comme des corps rigides.

L'analyse qui suit reprend le travail mené par Moreau [126]. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, n'importe quel effort subi par un système matériel peut-être défini par la puissance qui serait développée par cet effort si les éléments du système étaient soumis à un champ de vitesse virtuelle. C'est dans cet esprit que Moreau, en écrivant le principe des puissances virtuelles, a introduit la notion de moment interne associé à chaque grain. Nous raisonnons dans un système à deux dimensions.

## B.1 Moment interne d'un grain

Considérons un grain  $i$  homogène (de masse volumique  $\rho_p$ ) de centre de gravité  $\vec{r}_i$ , occupant une surface  $S_i$ , et soumis à des forces de contact  $\vec{f}_c$  de la part de ses voisins ( $c = 1$  à  $N_i$ ). Le mouvement réel du grain, considéré comme un solide rigide, est décrit par :

$$\vec{v}_i(\vec{r}) = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \wedge \vec{r} \quad (\text{B.4})$$

où  $\vec{v}_i$  est la vitesse de son centre de gravité et  $\vec{\omega}_i$  la vitesse de rotation. Son accélération s'écrit donc :

$$\vec{\gamma}_i(\vec{r}) = \vec{\gamma}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{r}) \quad (\text{B.5})$$

On lui associe un champ de vitesse virtuel rigidifiant défini par :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}_i) + \underline{\underline{\omega}} \cdot \vec{r} \quad (\text{B.6})$$

où  $\underline{\underline{\omega}}$  est le tenseur du second ordre antisymétrique associé au vecteur rotation virtuel  $\vec{\omega}_i$  du système.

On applique alors le principe des puissances virtuelles : pour tout champ de vitesse virtuelle :

$$P_{Int}(\vec{v}) + P_{Ext}(\vec{v}) = P_{Acc}(\vec{v}) \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\begin{cases} P_{Acc}(\vec{v}) = \int_{S_i} \rho_p \vec{\gamma}_i \cdot \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} \\ P_{Ext}(\vec{v}) = \sum_{c=1}^{N_i} \vec{f}^c \cdot \vec{v}(\vec{r}^c) + \int_{S_i} \rho_p \vec{g} \cdot \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} \end{cases}$$

$P_{Int}(\vec{v})$  étant une forme linéaire du champ de vitesse virtuelle, il existe  $\vec{R}$  et  $\underline{\underline{M}}$  tel que :

$$P_{int}(\vec{v}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(\vec{r}_i) + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\omega}} \quad (\text{B.8})$$

Cependant, pour un mouvement rigidifiant, la puissance des efforts intérieures est nulle. Ceci implique que  $\vec{R} = 0$  et que le tenseur  $\underline{\underline{M}}$  est symétrique dans une base orthonormée. Ce tenseur est appelé moment interne du grain  $i$ . On le notera  $\underline{\underline{M}}_i$ .

Si on considère le grain comme un milieu continu, on peut lui associer un tenseur de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , de sorte que pour tout champ de vitesse virtuelle :

$$P_{Int}(\vec{v}) = - \int_{S_i} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\vec{v}) d\vec{r} \quad (\text{B.9})$$

En prenant le même champ de vecteur vitesse affine défini précédemment, on obtient :

$$\underline{\underline{M}}_i = - \int_{S_i} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{B.10})$$

C'est-à-dire que l'on peut définir un tenseur des contraintes moyen dans le grain par :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \frac{1}{S_i} \underline{\underline{M}}_i \quad (\text{B.11})$$

Le principe des puissances virtuelles donne alors une partie statique et une partie dynamique pour le tenseur de moment interne (avec l'accélération réelle) :

$$\underline{\underline{M}}_i = \sum_{c=1}^{N_c} \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c - \int_{S_i} \rho_p \vec{\gamma}_i \otimes \vec{r} d\vec{r} \quad (\text{B.12})$$

Le terme dynamique s'écrit sous la forme :

$$\int_{S_i} \vec{\gamma}_i(\vec{r}) \otimes \vec{r} d\vec{r} = \int_{S_i} \dot{\vec{\gamma}}_i \otimes \vec{r} d\vec{r} + \int_{S_i} (\dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{r}) \otimes \vec{r} d\vec{r} + \int_{S_i} (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{r})) \otimes \vec{r} d\vec{r} \quad (\text{B.13})$$

Le premier terme est nul pour un grain à symétrie de révolution. A deux dimensions, le vecteur vitesse de rotation  $\vec{\omega}_i$  est normal au plan et :

$$\dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{r} = \dot{\omega}_i \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{r} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

de sorte que le deuxième terme :

$$\int_{S_i} (\dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{r}) \otimes \vec{r} d\vec{r} = \dot{\omega}_i \underline{\underline{\epsilon}} : \int_{S_i} \vec{r} \otimes \vec{r} d\vec{r} \quad (\text{B.15})$$

est un tenseur antisymétrique. Par ailleurs,

$$\int_{S_i} (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{r})) \otimes \vec{r} d\vec{r} = -\omega_i^2 \int_{S_i} \vec{r} \otimes \vec{r} d\vec{r} \quad (\text{B.16})$$

Or

$$\int_{S_i} \rho_p(\vec{r}) \vec{r} \otimes \vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \underline{\underline{Id}} \quad (\text{B.17})$$

Au total, le moment interne étant symétrique, on obtient en symétrisant l'expression initiale :

$$\underline{\underline{M}} = \text{Sym} \left( \sum_{c=1}^{N^i} \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c \right) + \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \omega_i^2 \underline{\underline{Id}} \quad (\text{B.18})$$

## B.2 Cas d'une assemblée de N grains

Dans le cas où le système  $\Sigma$  est composé d'une assemblée de  $N$  sous-systèmes  $\Sigma_i$  (grains  $i$ ) qui interagissent entre eux uniquement au travers de contacts, pour lesquels on a le principe de l'action et de la réaction (on néglige tout type d'interaction mutuelle à distance), le moment interne de  $\Sigma$  est égal à la somme des moments internes des sous-systèmes. Le tenseur des contraintes moyen dans une surface  $S$  contenant  $N$  grains est alors la moyenne surfacique des moments internes individuels :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{M}}_i = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N S_i \underline{\underline{\sigma}}_i \quad (\text{B.19})$$

### B.3 Définition du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est la somme de trois contributions :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^c + \underline{\underline{\Sigma}}^f + \underline{\underline{\Sigma}}^r \quad (\text{B.20})$$

Le premier terme ("contact") est le terme usuel en statique, associé aux efforts de contact entre grains. Le deuxième terme ("fluctuations") est le tenseur de Reynolds usuel en mécanique des fluides, associé aux fluctuations de vitesse des grains. Le troisième terme ("rotation") est lié à la rotation propre des grains :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^{N_i} \text{Sym}(\vec{f}^c \otimes \vec{r}^c) \quad (\text{B.21})$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^f = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N m_i \delta \vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i \quad (\text{B.22})$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^r = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \underline{\underline{Id}} \quad (\text{B.23})$$



## Annexe C

# Méthode de prise des moyennes

On décrit dans cette annexe les procédures statistiques qui permettent de calculer des grandeurs moyennes (compacité et vitesse moyenne, tenseur des contraintes) à partir des grandeurs locales (positions, vitesses, "moment interne").

### C.1 Coordonnées cartésiennes

On considère que notre système est dans un état stationnaire, et, compte-tenu des conditions aux limites périodiques, qu'il est homogène selon la direction  $x$  de l'écoulement. On va donc réaliser des moyennes spatiales selon la direction  $x$ . Par ailleurs, dans le cadre d'une hypothèse d'ergodicité, on complète par une moyenne dans le temps. En revanche, aucune moyenne n'est effectuée selon la direction  $y$  perpendiculaire à l'écoulement. Ce sont précisément ces dépendances selon la hauteur de l'écoulement que l'on veut mesurer.

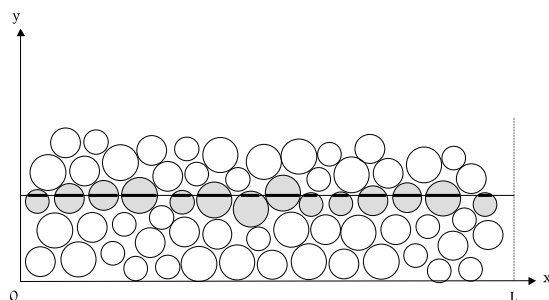


FIG. C.1 – *Calcul des grandeurs moyennes sur une ligne de longueur  $L$ .*



Soit un ensemble de grains  $i$  de diamètre  $d_i$  appartenant à une cellule périodique bidimensionnelle de longueur  $L$ , dont les centres de masses  $\vec{r}_i$  et les vitesses de translation  $\vec{v}_i$  sont exprimés dans le repère  $(Oxy)$  lié à la cellule (Fig. C.1). Les écoulements étant uniformes dans la direction  $x$ , on découpe la cellule en ligne de longueur  $L$ . A chacun des grains sont associées des grandeurs scalaires, vectorielles ou bien tensorielles  $G_i$  (position  $\vec{r}_i$ , vitesse  $\vec{v}_i$ , rotation  $\omega_i$ ...) dont on va construire la valeur moyenne  $\langle G \rangle (y)$  sur chaque ligne. Les valeurs moyennes sont définies par la quantité :

$$\langle G \rangle (y) = \frac{\sum_{i=1}^N G_i \lambda_i(y)}{\sum_{i=1}^N \lambda_i(y)} \quad (\text{C.1})$$

où  $\lambda_i(y)$  est la longueur d'une corde d'un cercle correspondant à l'intersection de la ligne à l'ordonnée  $y$  avec le grain  $i$ . Cette longueur vaut :

$$\lambda_i(y) = 2\sqrt{\frac{d_i^2}{4}(t - y_i)^2} \quad (\text{C.2})$$

Notons que la compacité moyenne linéique vaut :

$$\langle \nu \rangle (y) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \lambda_i(y) \quad (\text{C.3})$$

On aura ainsi pour la vitesse moyenne :

$$\langle v \rangle (y) = \frac{\sum_{i=1}^N v_i \lambda_i(y)}{\sum_{i=1}^N \lambda_i(y)} \quad (\text{C.4})$$

Pour le tenseur des contraintes la démarche est similaire. Suivant les travaux de Moreau [126], le tenseur des contraintes dans un milieu granulaire peut s'exprimer comme une moyenne des "moments internes" des grains (voir Annexe B). Ainsi, le tenseur des contraintes dans une surface  $S = L \times \Delta y$  englobant  $N$  grains vaut :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(S) = \frac{1}{L \times \Delta y} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\sigma}}_i \cdot \lambda_i \times \Delta y \quad (\text{C.5})$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_i$  est le tenseur des contraintes locale associé au grain  $i$  (voir Annexe B).

Compte-tenu de ce qui précède, on propose l'expression suivante pour la moyenne linéique du tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(y) = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i(y) \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\sigma}}_i \cdot \lambda_i \right]}{\sum_{i=1}^N \lambda_i(y)} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\sigma}}_i \cdot \lambda_i \quad (\text{C.6})$$

Enfin, l'expression des écarts-types des grandeurs moyennes est donnée par :

$$\langle \Delta G^2 \rangle (y) = \langle G^2 \rangle (y) - \langle G \rangle^2 (y) \quad (\text{C.7})$$

## C.2 Coordonnées polaires

Dans le cas d'une cellule de cisaillement annulaire, on utilise les coordonnées polaires. La cellule est alors découpée en cercles concentriques. En coordonnée polaire (de base  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ) la fonction de pondération  $\lambda_i$  est modifiée. Elle ne correspond plus à une longueur de corde mais à l'angle  $\psi_i = \widehat{AOB}$  correspondant à l'intersection de deux cercles (Fig. C.2).

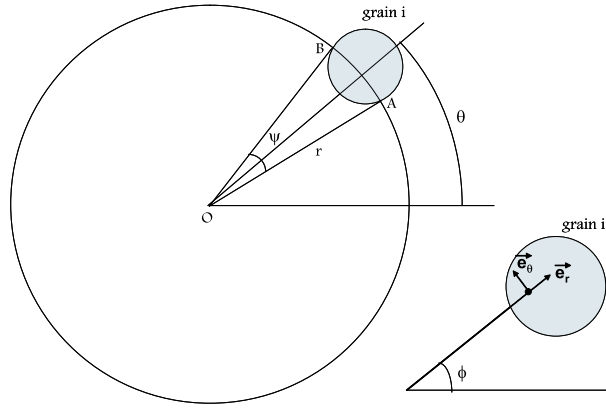


FIG. C.2 – Calcul des grandeurs moyennes en annulaire. Définition des angles  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$ .

Dans ce cas, la valeur moyenne d'une grandeur  $G$  s'écrit comme suit :

$$\langle G \rangle (r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N G_i \psi_i \quad (\text{C.8})$$

Pour un grain  $i$  de coordonnées  $r_i$  et  $\theta_i$ , l'arc de cercle  $\widehat{AB}$  décrit l'ensemble des positions  $(r, \phi)$  où  $\phi$  est compris entre  $\theta_i - \frac{\psi_i}{2}$  et  $\theta_i + \frac{\psi_i}{2}$ . Dans un repère cartésien, la base de vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  est aussi fonction de  $\phi$  :

$$\vec{e}_r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \text{ et } \vec{e}_\theta \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Étant donné que le tenseur des contraintes local  $\underline{\underline{\sigma}}_i$  associé au grain  $i$  est calculé dans une base cartésienne. Il est donc nécessaire de passer aux coordonnées polaires :

$$\sigma_{rr}^i(r, \phi) = \vec{e}_r(\phi) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i^{(xy)}(r) \cdot \vec{e}_r(\phi) \quad (\text{C.9})$$

$$\sigma_{r\theta}^i(r, \phi) = \vec{e}_r(\phi) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i^{(xy)}(r) \cdot \vec{e}_\theta(\phi) \quad (\text{C.10})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i(r, \phi) = \vec{e}_\theta(\phi) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i^{(xy)}(r) \cdot \vec{e}_\theta(\phi) \quad (\text{C.11})$$

La contribution du tenseur des contraintes pour le grain  $i$  s'obtient en intégrant les équations précédentes sur  $\phi$  et le tenseur des contraintes moyen s'obtient en sommant sur l'ensemble des grains :

$$\Sigma_{kl}(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\theta_i - \frac{\psi_i}{2}}^{\theta_i + \frac{\psi_i}{2}} \sigma_{kl}^i(r, \phi) d\phi \quad (\text{C.12})$$

## Annexe D

# Outils expérimentaux

Nous présentons dans cette annexe les outils expérimentaux que nous avons utilisés. Il s'agit d'outil de rhéométrie faisant appel à des techniques d'imagerie. On décrit en premier lieu le plan incliné puis le rhéomètre insérable dans l'IRM.

### D.1 Le plan incliné

#### Le plan

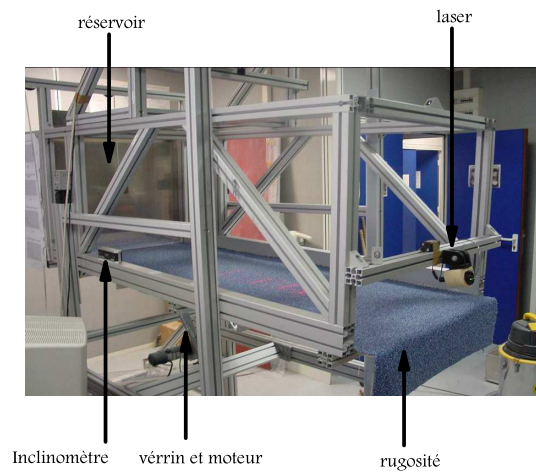


FIG. D.1 – *Vue de côté du plan incliné.*

Le plan incliné est constitué d'une tôle en aluminium recouverte d'une moquette qui sert de rugosité. Le tout est maintenu par un berceau en profilé



FIG. D.2 – Vue de face du plan incliné.

©Norcan et soutenu par un vérin hydraulique qui permet le contrôle de l'inclinaison. Le dispositif est présenté sur les figures D.1 et D.2.

Caractéristiques du plan incliné :

**Longueur :** 2 m

**Largeur :** 0,7 m

**Charge maximum :** 250 kg

**Épaisseur maximum de l'écoulement :** 6 cm

**Plage d'angle possible :** de 3° à 39° modifiable selon les besoins

Il est en outre possible de changer la rugosité du plan.

### Outil d'imagerie

L'accès à la vitesse et à la hauteur de l'écoulement a nécessité la mise au point d'outils de mesures spécifiques. Une caméra numérique fournit un film de dix secondes à 24 images par seconde codées sur 256 niveaux de gris. Les images sont de haute résolution (1024\*1280 pixels). Deux programmes en langage C (basés sur le traitement de ces images) ont été élaborés pour répondre aux besoins de chaque expérience [158, 165].

### Mesure de vitesse

La méthode employée est une méthode analogue à la méthode PIV (particule image velocimetry). Le matériau possédant des traceurs à la surface (des grains de même nature peints en noir), on mesure le déplacement de ceux-ci entre deux images par une fonction d'autocorrélation.

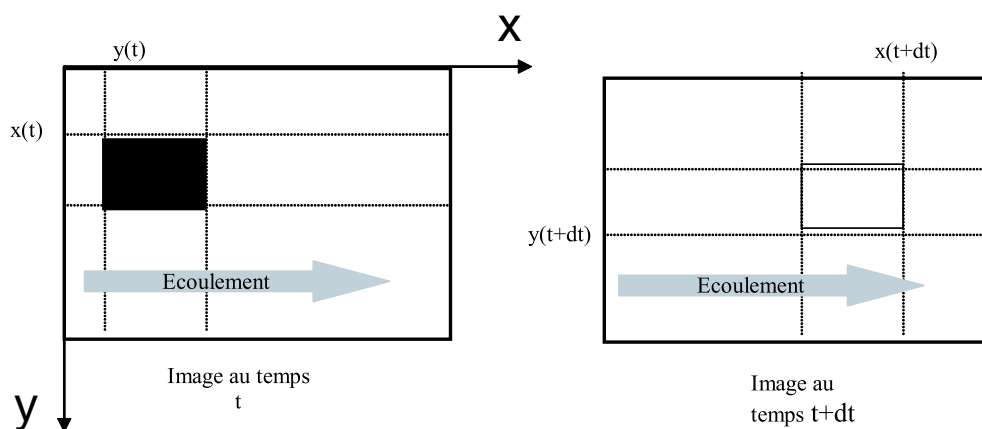


FIG. D.3 – Fenêtre de corrélation.

La démarche est de sélectionner une fenêtre de corrélation dans l'image seuillée au temps  $t$  et de trouver sa position au temps  $t + dt$  (Fig. D.3). Un léger déplacement de la fenêtre est possible selon  $y$  si la caméra n'est pas parfaitement alignée avec l'écoulement. Ce déplacement est faible ( $dy < 0,05 * dx$ ). Pour économiser le temps de calcul, le programme recherchera uniquement la position  $x(t + dt)$ . La vitesse est alors calculée de la manière suivante :  $V = dx/dt$ , avec  $dx = x(t + dt) - x(t)$  et  $dy = y(t + dt) - y(t)$

On translate cette fenêtre systématiquement sur l'ensemble des positions possibles en la comparant avec la nouvelle image. L'ensemble des positions possibles doit être le plus petit pour limiter le temps de calcul et le plus grand possible pour être sûr d'y retrouver la fenêtre de corrélation. La ressemblance entre les deux fenêtres est évaluée avec une fonction de corrélation discrète :

$$F(dx) = [I(x_i, y_j, t) * I(x_i + dx, y_j, t + dt)] \quad (D.1)$$

Avec  $I(x_i, y_j, t)$  l'intensité lumineuse vue par la caméra au point  $(x_i, y_j)$  sur l'image correspondante au temps  $t$ .

Le déplacement de la fenêtre de corrélation est alors la valeur de  $dx$  pour laquelle la fonction  $F$  est maximum. La détermination de ce maximum se fait par une interpolation par la méthode des moindres carrés (pivot de Gauss). L'interpolation va chercher à définir une abscisse plus précise du pic de corrélation. Pour cela, nous avons choisi un nombre de points autour du maximum de corrélation, puis nous avons fait passer un polynôme par ces points. Cette méthode repousse nos limites de mesure et nous fait gagner en précision en diminuant le bruit de manière conséquente.

### Mesure de la hauteur

Pour mesurer la hauteur de la couche en écoulement, nous mesurons la position de l'intersection d'un faisceau laser (He / Ne 10mW) en incidence rasante avec la surface de la couche du matériau à étudier.

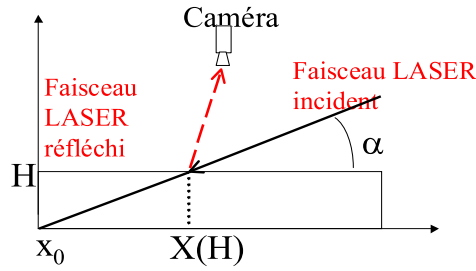


FIG. D.4 – Principe de la mesure de hauteur

Après avoir seillé l'image, on commence par repérer la coordonnée  $X_0$  de l'intersection du faisceau laser avec la surface du plan. Puis, lorsqu'une couche de matériau granulaire s'écoule on mesure la coordonnée  $X$  de l'intersection du faisceau laser avec la surface du matériau. La connaissance de l'angle d'incidence  $\alpha$  nous donne la hauteur  $H$  correspondante selon la relation :

$$H = (X - X_0) \tan(\alpha) \quad (\text{D.2})$$

Notons que plus l'angle d'incidence est petit (incidence rasante) plus l'incertitude sur la mesure est faible.

Il faut remarquer que cette technique ne s'applique pas aux billes de verre. En effet, celles-ci diffusent trop la lumière et il est difficile de trouver l'intersection du faisceau avec la surface.

#### *Incertitudes sur les mesures*

La mesure de l'inclinaison est donnée par un inclinomètre électronique (précision de  $0,1^\circ$ ).

L'incertitude sur le nombre de Froude ( $Fr$ ) se déduit de l'incertitude sur la vitesse  $\Delta V$  et sur la hauteur  $\Delta H$  :

$$\Delta Fr = \frac{\Delta V}{(gH)^{1/2}} + \Delta H \frac{Vg}{(2 * (gH)^{3/2})} \quad (\text{D.3})$$

Nous calculons la vitesse en mesurant le déplacement de traceurs entre deux images espacées d'un pas de temps  $dt$  variant de  $1/24$  à  $1/4$  seconde

selon la gamme de vitesse explorée. Notre précision spatiale est de 1 pixel (environ 1mm). L'incertitude sur la mesure de vitesse est donc  $\Delta V = \frac{1}{dt} \text{ mm/s}$ . Quant à  $\Delta(H)$ , il est surestimé à 0,5mm.

## D.2 Rhéométrie IRM

On se contente ici de donner quelques indications sur la méthode de vélocimétrie par résonance magnétique nucléaire (RMN) utilisée dans cette thèse [160]. Pour une description détaillée, on renvoie aux ouvrages spécialisés [101, 26, 73, 25].

En RMN, on mesure l'évolution d'une assemblée de moments magnétiques portés par certain noyaux atomiques (en premier lieu celui d'hydrogène) plongés dans un champ statique et soumis à un champ radiofréquence. L'utilisation de gradients de champ magnétique dans les trois directions de l'espace permet d'extraire des informations d'une région bien précise de l'espace : le voxel. La variation des gradients permet d'explorer plusieurs voxels et donc de construire une image bidimensionnelle ou même tridimensionnelle.

Mais le signal RMN est aussi porteur d'une information sur la vitesse des moments magnétiques, ce qui permet d'utiliser l'IRM pour faire de la vélocimétrie.

La séquence que l'on utilise est dérivée de celle de Hanlon *et al.* [80]. Le principe de cette technique est d'appliquer successivement deux gradients encodés dans des directions opposées pendant un temps court  $\delta$  et séparés par un temps long  $\Delta$ . Si les variations de la vitesse sont négligeables durant l'intervalle de temps, le décalage de phase résultant ( $\Delta\Phi$ ) de la magnétisation du voxel (enregistré par RMN) est linéairement dépendant de la composante de vitesse ( $v$ ) dans la direction du gradient :

$$\Delta\Phi = \gamma G \delta \Delta v \quad (\text{D.4})$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique du proton.

Nos expériences ont été menées dans l'imageur RMN du LMSGC (Fig D.5) avec l'assistance de François Bertrand, Jean Pierre Guilbaud et Jean Sébastien Raynaud. Les caractéristiques de cet imageur sont qu'il est constitué d'un aimant vertical, générant un champ statique de 0.5 T et dont la zone utile est une sphère de 25 cm de diamètre. Le rhéomètre est fait de matériau amagnétique et le moteur est déporté à distance de l'aimant de telle sorte que la cuve du rhéomètre soit insérable dans l'IRM.





FIG. D.5 – *Vue de l'IRM. La cuve du rhéomètre est insérée dans le tube de gradient par l'ouverture située en dessous.*

# Annexe E

## Détails des résultats

**D**ans cette annexe, nous répertorions l'ensemble des mesures expérimentales réalisées sur plan incliné pour le sable, les billes de verre et les graines de moutarde sur les quatre rugosités [165, 190, 158]. On présente tout d'abord les résultats obtenus pour les courbes de hauteur de démarrage et d'arrêt. Ensuite, on présente les courbes des variations du nombre de Froude avec la hauteur, puis quelques résultats de mesure de vitesse lors de la transition vers l'arrêt.

### E.1 Courbes $H_{Stop}(\theta)$ et $H_{Start}(\theta)$

Ces courbes sont toutes de la forme :

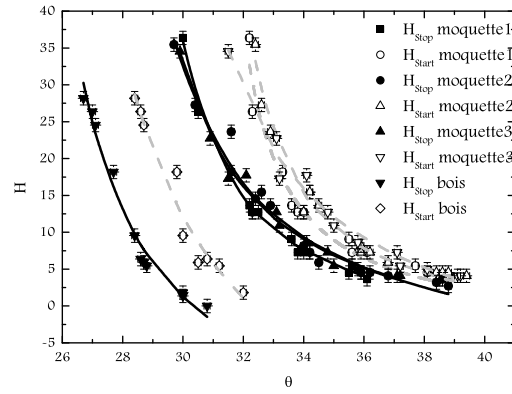
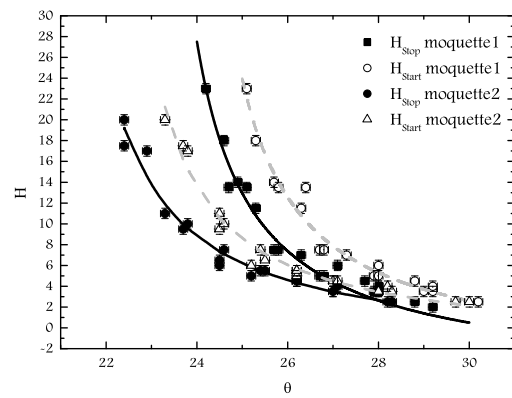
$$\frac{H_{Stop/Start}(\theta)}{d} = B \frac{(\theta_m - \theta)}{(\theta - \varphi)} \quad (\text{E.1})$$

A la suite de ces courbes, nous indiquons dans un tableau les paramètres des fonctions d'ajustement ( $B$ ,  $\theta_m$  et  $\varphi$ ). Sur les figures les courbes en trait plein correspondent à l'ajustement de  $H_{Stop}(\theta)$  et les courbes en tiretés à l'ajustement de  $H_{Start}(\theta)$ .

La rugosité du plan est constituée par une moquette plus ou moins épaisse. Plus le numéro de la moquette est petit plus la rugosité est grande. Pour certains matériaux, nous avons testé l'écoulement sur une planche de bois.

Les deux premières figures montrent les barres d'erreur ; pour les figures suivantes la taille des symboles indique l'erreur commise sur la mesure.

Ces différentes courbes indiquent que l'effet de taille des grains est négligeable par rapport à l'effet de leur angularité (le sable). De plus, l'effet de la rugosité est important pour un matériau à grains sphériques mais limité pour des grains anguleux.

FIG. E.1 – *Sable gros – plusieurs rugosités*FIG. E.2 – *Moutarde – plusieurs rugosités*

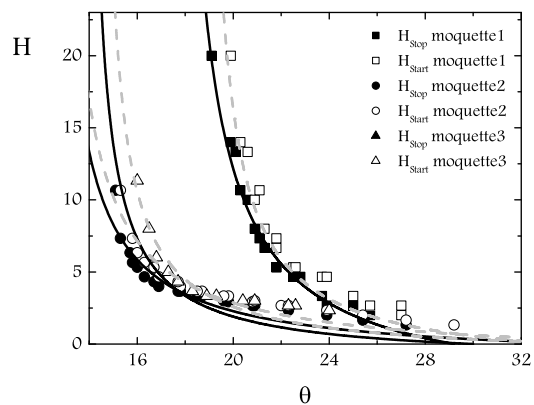


FIG. E.3 – Billes de verre – plusieurs rugosités

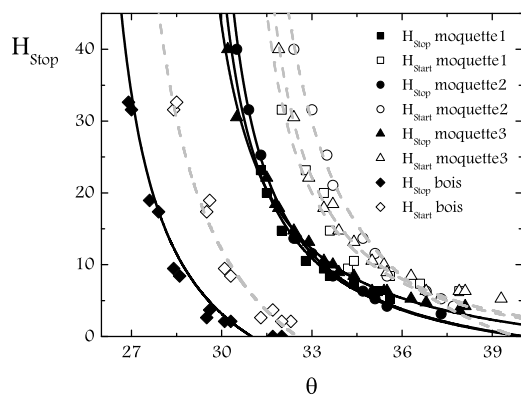
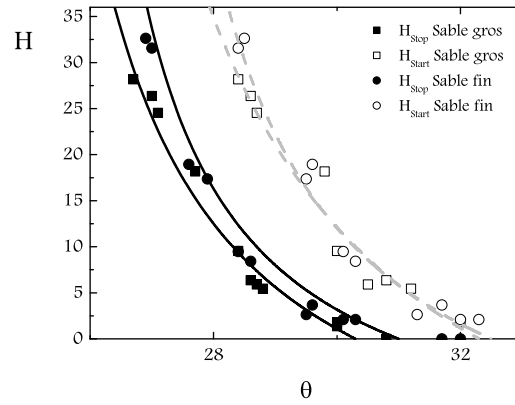
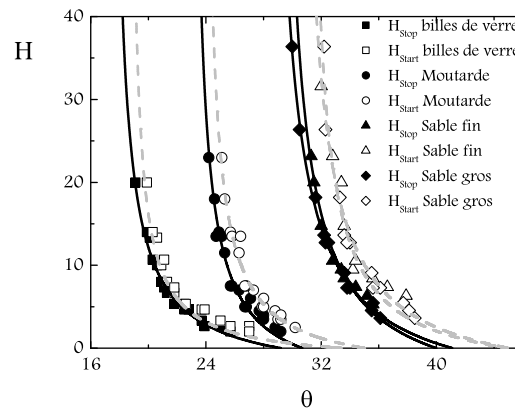


FIG. E.4 – Sable fin – plusieurs rugosités

FIG. E.5 – *Sable fin et gros sur du bois*FIG. E.6 – *Différents matériaux sur la moquette 1*

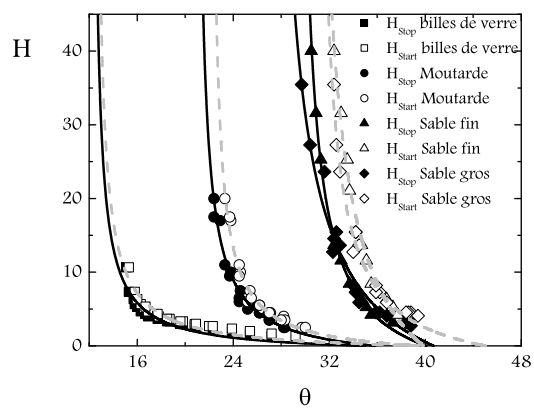


FIG. E.7 – Différents matériaux sur la moquette 2

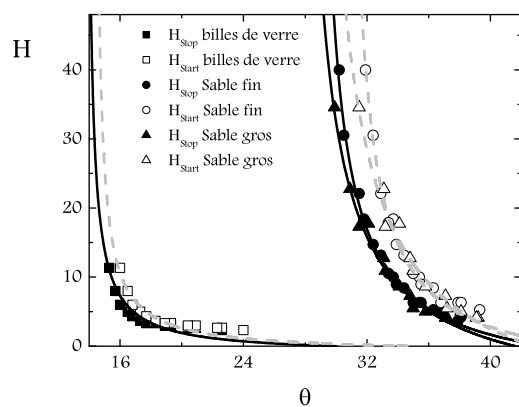


FIG. E.8 – Différents matériaux sur la moquette 3

TAB. E.1 – Paramètres d’ajustement déterminés numériquement. Les valeurs soulignées sont fixées arbitrairement. (bv : billes de verre, m : moutarde, sf : sable fin, sg : sable gros ; les chiffres correspondent à la moquette et le b indique une rugosité constituée d’une planche en bois).

	$H_{Stop}$			$H_{Start}$		
	$B$	$\theta_m$	$\phi$	$B$	$\theta_m$	$\phi$
bv1	3,7	29,2	17,2	1,8	33,5	18,5
bv2	1,2	<u>35</u>	12,1	1,1	<u>40</u>	12,3
bv3	1,2	<u>30</u>	13,7	1	<u>35</u>	14,2
m1	5,1	30,7	22,8	3,3	<u>35</u>	23,6
m2	2,5	35,8	20,7	1,8	39,5	21,9
sf1	6,7	<u>40</u>	28,7	5	<u>45</u>	30
sf2	6,5	40,1	29	13,2	39,8	30
sf3	5,4	43,6	28,3	4,7	45,7	30,3
sfb	15,2	31	25,2	19,7	32,5	25,9
sg1	6,4	41,1	28	3,8	<u>45</u>	30,7
sg2	10,3	40,7	26,5	4,6	<u>45</u>	30,6
sg3	8,1	41,6	27,1	10,8	42,8	27,9
sgb	21,2	30,3	24,1	30	32,3	24,3

## E.2 Frottement et nombre de Froude

La connaissance de  $H_{Stop}(\theta)$ , ainsi que la connaissance des variations du nombre de Froude avec la hauteur en écoulement, permet de mesurer le frottement effectif en fonction du nombre de Froude. Au chapitre 6, nous avons montré les mesures faites pour les billes de verre et le sable gros pour une rugosité donnée (moquette 1). Nous présentons ici les mesures qui ont été faites avec d'autres matériaux.

La figure E.9 résume les mesures du nombre de Froude en fonction de  $\frac{H}{H_{Stop}}$  pour différents couples de matériaux et de rugosités.

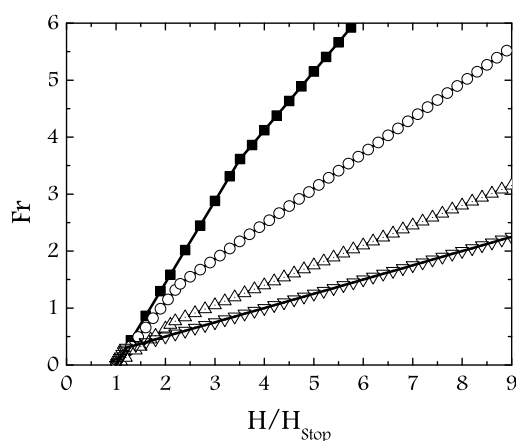


FIG. E.9 – Variation du nombre de Froude avec la hauteur adimensionnée. Les carrés correspondent au couple sable fin moquette 2, les cercles au couple sable fin moquette 1, les triangles hauts au couple graines de moutarde moquette 1, les triangles bas au couple billes de verre moquette 1.

On note l'influence non négligeable de la rugosité. En effet, plus la rugosité est faible (moquette 2), plus la pente augmente. Les pièges de la rugosité étant moins efficaces, les grains roulent davantage malgré l'angularité des grains de sable. Toutefois, l'influence d'un changement de rugosité n'a été vérifiée que pour le sable fin. Les mêmes expériences ont été faites pour les graines de moutarde, mais de grosses difficultés sont rapidement apparues. La rugosité étant trop faible, les grains roulent dessus et l'écoulement stationnaire n'est jamais observé.

Nous présentons sur la figure E.10 les mesures du frottement effectif en fonction du nombre de Froude pour une hauteur donnée pour ces différents couples matériaux - rugosité.



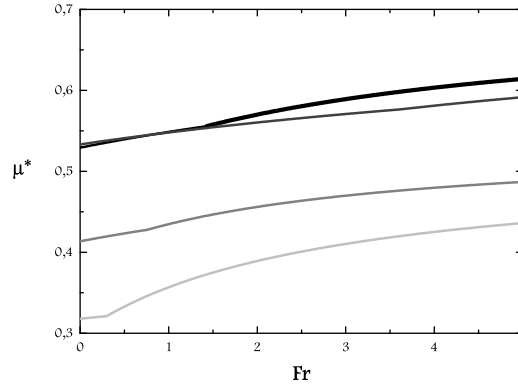


FIG. E.10 – Variation du frottement effectif avec le nombre de Froude pour une hauteur  $H = 40$ . En noir (en haut) couple sable fin moquette 2, en gris foncé couple sable fin moquette 1, en gris couple graines de moutarde moquette 1, et en gris clair (en bas) couple billes de verre moquette 1.

Cette figure montre que le coefficient de frottement effectif  $\mu^*(Fr, H)$  dépend de l'angularité du matériau. La forme générale des courbes pour les trois matériaux étudiés est identique, seule la valeur du coefficient de frottement effectif augmente selon que l'on étudie un matériau lisse ou très anguleux (dans l'ordre, les billes de verre, les graines de moutarde, et les plus anguleux, les grains de sable).

On note également que le changement de rugosité sur le sable fin n'a eu que peu d'influence sur le coefficient de frottement effectif. En effet l'allure de la courbe  $\mu^*(Fr, H)$  est identique pour les deux couples matériau-rugosité.

### E.3 Dynamique de l'arrêt

Nous présentons maintenant quelques résultats de mesures de vitesse à la surface sur plan incliné afin d'illustrer la manière dont on a obtenu les résultats de bifurcation de viscosité sur le plan incliné (chapitre 7).

Sur la figure E.11, nous voyons que l'écoulement s'arrête progressivement à partir des bords du plan incliné. Pour éviter ces effets de bord, nous avons décidé d'enregistrer l'écoulement dans une zone centrale du plan incliné en modifiant le grossissement de la caméra numérique. Le projeté de cette figure sur le plan  $(v, t)$  donne la figure E.12 où on observe les effets de bord. Les figures E.13 et E.14 présentent les résultats obtenus dans la zone centrale. On n'observe plus les effets de bord, il est alors possible de prendre la moyenne de ces courbes (courbe grise claire) afin de discuter des résultats.

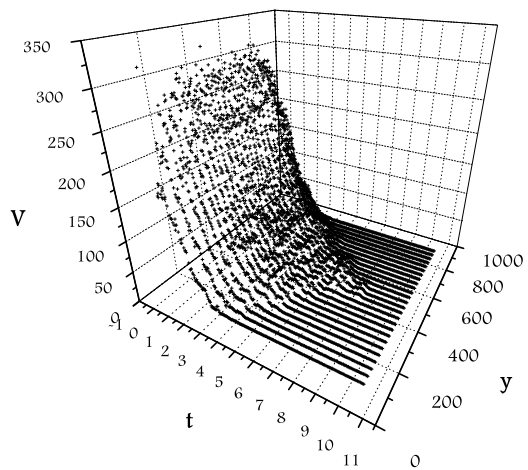


FIG. E.11 – Transition vers l'arrêt  $\Delta\theta = 1.6^\circ$ .  $y$  est la coordonnée dans le sens orthogonal à l'écoulement.

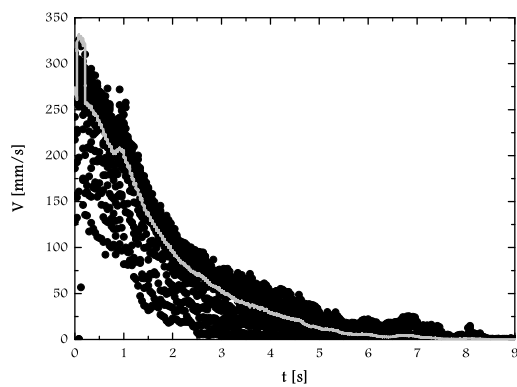


FIG. E.12 – Transition vers l'arrêt  $\Delta\theta = 1.6^\circ$ . Projeté sur le plan  $(v, t)$ .

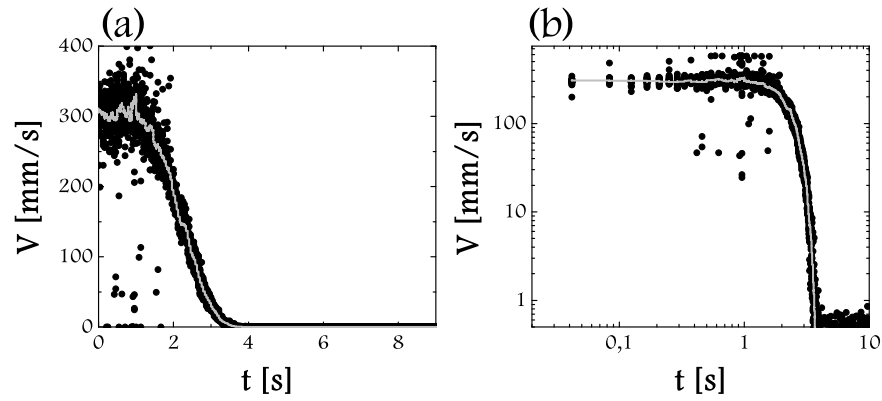


FIG. E.13 – Transition vers l'arrêt  $\Delta\theta = 2.1^\circ$ . (a) Échelle linéaire, (b) échelle log. log.

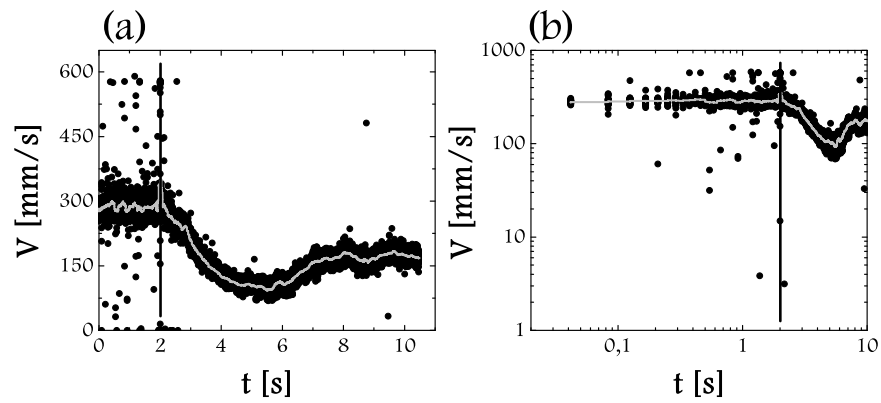


FIG. E.14 – Effet rebond. Transition vers l'arrêt  $\Delta\theta = 1.1^\circ$ . La droite verticale indique le changement de pente.





# Références

- [1] M.J. Adams. *Fundamentals of friction : Macroscopic and Microscopic Processes*, chapter Friction of granular non-metals, pages 183–207. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.
- [2] E. Aharonov and D. Sparks. On phase transition and self-organized critical state in granular packings. *Phys. Rev. E*, 60 :6890, 1999.
- [3] E. Aharonov and D. Sparks. Shear profiles and localization in simulations of granular materials. *Phys. Rev. E*, 65 :051302, 2002.
- [4] C. Ancey. Dry granular flows down an inclined channel : experimental investigation on the frictional-collisional regime. *Phys. Rev. E*, 65 :11304, 2001.
- [5] C. Ancey and P. Coussot. Transition frictionnelle / visqueuse pour une suspension granulaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 327 :515, 1999.
- [6] K.G. Anderson and R. Jackson. A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials for fully developed flow down inclines. *J. Fluid Mech.*, 241 :145–168, 1992.
- [7] B. Andreotti, A. Daerr, and S. Douady. Scaling laws in granular flows down a rough plane. *Physics of fluids*, 14(1) :415–418, 2002.
- [8] P. Antoine, P. Camporota, A. Giraud, and L. Rochet. La menace d'écroulement aux Ruines de Séchillienne (Isère). *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 15/151 :55–64, juillet-aout/septembre-octobre 1987.
- [9] I.S. Aranson and L.S. Tsimring. Continuum description of avalanches in granular media. *Phys. Rev. E*, 64 :020301, 2001.
- [10] I.S. Aranson and L.S. Tsimring. Continuum theory of partially fluidized granular flows. *Phys. Rev. E*, 65 :061303, 2002.
- [11] E. Azanza. *Écoulements granulaires bidimensionnels sur plan incliné*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1998.
- [12] M. Babic, H.H. Shen, and H.T. Shen. The stress tensor in granular shear flows of uniform, deformable disks at high solid concentrations. *J. Fluid Mech.*, 219 :81–118, 1990.

- [13] R.A. Bagnold. Experiment in a gravity free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. *Proc. Roy. Acad. London A*, 225 :49–63, 1954.
- [14] H.A. Barnes and Q.D. Nguyen. Rotating vane rheometry - a review. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 98 :1–14, 2001.
- [15] G.K. Batchelor. The stress system in a suspension of force-free particles. *J. Fluid Mech.*, 41 :545–570, 1970.
- [16] T. Baumberger. *Dynamique de glissement d'une interface multicontacts*. Habilitation, Université Paris VII Jussieu, 1997.
- [17] L. Bocquet, E. Charlaix, S. Ciliberto, and Crassous. Moisture-induced ageing in granular media and the kinetics of capillary condensation. *Nature*, 396 :735, 1998.
- [18] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T.C. Lubensky, and J.P. Gollub. Granular shear flow dynamics and forces : Experiment and continuous theory. *Phys. Rev. E*, 65 :011307, 2002.
- [19] D. Bonamy, F. Daviaud, L. Laurent, M. Bonetti, and J.P. Bouchaud. Multiscale clustering in granular surface flows. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :034301, 2002.
- [20] Bourada. *Etude du comportement des milieux granulaires par homogénéisation périodique*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
- [21] F.P. Bowden and D. Tabor. *The friction and lubrication of solids*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [22] R.L. Brown and J.C. Richards. *Principles of powder mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [23] L. Bureau. *Elasticité et rhéologie d'une interface macroscopique : du piégeage au frottement solide*. PhD thesis, Université Paris XII, 2002.
- [24] R.G. Cain. Microscopic and macroscopic aspects of stick-slip motion in granular shear. *Phys. Rev. E*, 64 :016413, 2001.
- [25] P.T. Callaghan. *Principles of Nuclear Magnetic Resonance Microscopy*. 1993.
- [26] P.T. Callaghan. Rheo-nmr : nuclear magnetic resonance and the rheology of complex fluids. *Rep. Prog. Phys.*, 62 :599–668, 1999.
- [27] F.G. Calvetti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : relation between structure evolution and loading path. *Mech. Coh. Frict. Materials*, 2 :121–163, 1997.
- [28] C.S. Campbell. Rapid granular flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22 :57–92, 1990.

- [29] C.S. Campbell. Granular shear flows at the elastic limit. *J. Fluid Mech.*, 465 :261–291, 2002.
- [30] C.S. Campbell and C.E. Brennen. Chute flows of granular material : some computer simulations. *J. Appl. Mech.*, 52 :172–178, 1985.
- [31] C.S. Campbell, C.E. Brennen, and R.H. Sabersky. Flow regimes in inclined open channel flows of granular materials. *Powder Tech.*, 41 :77–82, 1985.
- [32] M.E. Cates. Rheological aging, jamming, and glassy dynamics. In *XIIIth International congress on Rheology*, pages 1–1 ;1–5, Cambridge, UK, 2000.
- [33] M.E. Cates, J.P. Wittmer, J.P. Bouchaud, and P. Claudin. Jamming, force chains, and fragile matter. *Phys. Rev. Lett.*, 81(9) :1841–1844, 1998.
- [34] M.E. Cates, J.P. Wittmer, J.P. Bouchaud, and P. Claudin. Jamming and stress propagation in particulate matter. *Physica A*, 263 :354–361, 1999.
- [35] G. Chambon, J. Schmittbuhl, A. Corfdir, J.P. Vilotte, and S. Roux. Shear with comminution of a granular material : Microscopic deformations outside the shear band. *Phys. Rev. E.*, 68 :011304, 2003.
- [36] L.B. Chen, B.J. Ackerson, and C.F. Zukoski. Rheological consequences of microstructural transitions in colloidal crystals. *J. Rheol.*, 38 :193, 1994.
- [37] F. Chevoir, M. Prochnow, J.T. Jenkins, and P. Mills. Dense granular flows down an inclined plane. In In Kishino, editor, *Powders and grains*, pages 373–376, Lisse, 2001. Swets and Zeitlinger.
- [38] F. Chevoir and J.N. Roux, editors. *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*, Paris, 2000.
- [39] J. Christoffersen, M.M. Mehrabadi, and S. Nemat-Nasser. A micro-mechanical description of granular material behavior. *J. App. Mech.*, 48 :339–344, 1981.
- [40] G. Combe. *Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses : Etude par simulations numériques*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [41] C.A. Coulomb. Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l’architecture. *Mémoires de Mathématiques et de Physique, Académie Royale des Sciences*, 7 :343–382, 1773.
- [42] P. Coussot. Régimes d’écoulement granulaire. In *Actes du Colloque du Groupe Français de Rhéologie*, 1999.
- [43] P. Coussot and C. Ancey. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, 1999.



- [44] P. Coussot, Q.D. Nguyen, H.T. Huynh, and D. Bonn. Avalanche behavior in yield stress fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 88(17) :175501, 2002.
- [45] P. Coussot, Q.D. Nguyen, H.T. Huynh, and D. Bonn. Viscosity bifurcation in thixotropic, yielding fluids. *J. Rheol.*, 43(3) :1–17, 2002.
- [46] P. Coussot, J.S. Raynaud, P. Moucheront, J.P. Guilbaud, and H.T. Huynh. Coexistence of liquid and solid phases in flowing soft-glassy materials. *Phys. Rev. Lett.*, 88(21) :218301, 2002.
- [47] K. Craig, H. Buckholz, and G. Domoto. An experimental study of rapid flow of dry cohesionless metal powders. *J. Appl. Mech.*, 53 :935, 1986.
- [48] P.A. Cundall. Numerical experiments on localization in frictional materials. *Ingenieur-Archiv*, 59 :148–159, 1989.
- [49] P.A. Cundall and O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotech.*, 29 :47–65, 1979.
- [50] F. Da Cruz, F. Chevoir, D. Bonn, and P. Coussot. Viscosity bifurcation in granular materials, foams, and emulsions. *Phys. Rev. E*, 66 :051305, 2002.
- [51] F. Da Cruz, F. Chevoir, J.N. Roux, and I. Iordanoff. Macroscopic friction of dry granular materials. In *30th Leeds-Lyon symposium of tribology*, Lyon, 2003.
- [52] F. Dacruz. Ecoulements denses de grains secs sur plan incliné. In *JSI2003*, Dourdan, 2003.
- [53] A. Daerr. *Dynamique des avalanches*. PhD thesis, Université Denis Diderot Paris 7, 2000.
- [54] A. Daerr and S. Douady. Two types of avalanches behaviour in granular media. *Nature*, 399 :241–243, 1999.
- [55] G. D’Anna, P. Mayor, G. Gremaud, A. Barrat, and V. Loreto. Extreme events-driven glassy behaviour in granular media. *Europhys. Lett.*, 61 :60–66, 2003.
- [56] P. Dantu. Etude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent. *Géotechnique*, 18 :50–55, 1968.
- [57] P.G. De Gennes. Reflections on the mechanics of granular matter. *Physica A*, 261 :267–293, 1998.
- [58] C. Denniston and H. Li. Dynamics and stress in gravity driven granular flow. *Phys. Rev. E*, 59 :3289–3292, 1999.
- [59] J.D. Dent. The dynamic friction characteristics of a rapidly sheared granular material applied to the motion of snow avalanches. *Annals Glaciology*, (18) :215–220, 1993.
- [60] S. Dippel. *Microscopic dynamics of granular materials*. PhD thesis, Université Gerhard Mercator de Duisbourg, 1998.

- [61] S. Douady, B. Andreotti, and A. Daerr. On granular surface flow equations. *Eur. Phys. J.*, 11 :131–142, 1999.
- [62] T.G. Drake. Granular flow : physical experiments and their implications for microstructural theories. *J. Fluid Mech.*, 225 :121–152, 1991.
- [63] J. Duran. *Sables, poudres et grains*. Eyrolles Sciences, Paris, 1997.
- [64] L. Effendiantz and L. Rochet. Suivi d'une instabilité rocheuse jusqu'à l'éboulement - commune de La Perrière (Savoie). *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 226 :47–56, mai-juin 2000.
- [65] D. Ertas, G.S. Grest, T.C. Halsey, D. Levine, and L.E. Silbert. Gravity-driven dense granular flows. *Europhys. Lett.*, 56 :214–220, 2001.
- [66] E. Falcon. *Comportements dynamiques associés au contact de Hertz*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1997.
- [67] E. Falcon, S. Fauve, and C. Laroche. Cluster formation, pressure and density measurements in a granular medium fluidized by vibrations. *Eur. Phys. J. B*, 9 :183–186, 1999.
- [68] R.S. Farr, J.R. Melrose, and R.C. Ball. *Phys. Rev. E*, 55 :7203, 1997.
- [69] A. Ferguson, B. Fisher, and B. Chakraborty. Impulse distributions in dense granular flows : signature of large scale spatial structures. *condmat/0301201*, 2003.
- [70] J.P. Follacci. Les mouvements de versant de la Clapière à Saint-Etienne de Tinée (Alpes Maritimes). *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 150/151 :39–54, juillet-aout/septembre-octobre 1987.
- [71] Y. Forterre and O. Pouliquen. Longitudinal vortices in granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :5886, 2001.
- [72] N. Fraysse, H. Thomé, and L. Petit. Humidity effect on the stability of sandpile. *Eur. Phys. J. B*, 11 :615, 1999.
- [73] E. Fukushima. Nuclear magnetic resonance as a tool to study flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31 :95–123, 1999.
- [74] I. Goldhirsch. Scales and kinetics of granular flows. *Chaos*, 9 :659–672, 1999.
- [75] C. Goujon, N. Thomas, and B. Dalloz-Dubrujeaud. Monodisperse dry grain flows on inclined planes : role of roughness. *submitted*, 2003.
- [76] P.K. Haff. Grain flow as a fluid mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 134 :401–430, 1983.
- [77] T.C. Halsey, D. Ertas, G.S. Grest, L.E. Silbert, and D. Levine. Rheology of dense granular flow. *Advances in complex systems*, 4 :419–428, 2002.
- [78] T.C. Halsey and A.J. Levine. How sandcastles fall. *Phys.Rev.Lett.*, 80 :3141, 1998.

- [79] M. Hanes and D.L. Inman. Observations of rapidly flowing granular-fluid materials. *J. Fluid Mech.*, 150 :357, 1985.
- [80] A.D. Hanlon, S.J. Gibbs, L.D. Hall, D.E. Haycock, W.J. Frith, and S. Ablett. Rapid mri and velocimetry of cylindrical Couette flow. *Magn. Reson. Imaging*, 16 :953–961, 1998.
- [81] H. Hayakawa. Simulation of granular friction and its effective theory. *Progress of Theoretical Physics Suppl.*, 138 :537–542, 2000.
- [82] P. Heinrich and Y. Grillon. Modélisation numérique des écoulements granulaires. Application aux avalanches de débris. In *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*, volume 2, page 407, 2000.
- [83] P. Heinrich, A. Mangeney, G. Boudon, and R. Roche. Modéliser un raz de marée créé par un volcan. *La recherche*, 318 :66–71, mars 1999.
- [84] H.J. Herrmann, J.P. Hovi, and S. Luding, editors. *Physics of dry granular media*, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic.
- [85] E. Hinrichsen, J. Feder, and T. Jossang. Random packing of disks in two dimensions. *Phys. Rev. A*, 41 :4199–4209, 1990.
- [86] D. Howell, R.P. Behringer, and C.T. Veje. Stress fluctuations in a 2d granular Couette experiment : a continuum transition. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :5241–5244, 1999.
- [87] K.R. Hutter and K.R. Rajagopal. On flow of granular materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 6 :81–139, 1994.
- [88] I. Iordanoff, Y. Berthier, S. Descartes, and H. Heshmat. *J. Tribology*, 124 :725–735, 2001.
- [89] I. Iordanoff and M.M. Khonsari. Granular lubrication : toward an understanding between kinetic and fluid regime. *ASME Journal of tribology*, 2002.
- [90] H.M. Jaeger, G.H. Liu, S.R. Nagel, and T.A. Witten. Friction in granular flows. *Europhys. Lett.*, 11 :619–624, 1990.
- [91] H.M. Jaeger, S. Nagel, and R.P. Behringer. Granular solids, liquids and gases. *Review of Modern Physics*, 68 :1259–1273, 1996.
- [92] M. Jean. Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials. In A.P.S. Salvudarai and M.J. Boulon, editors, *Mechanics of geomaterial interfaces*, pages 463–486, Amsterdam, 1995. Elsevier Science.
- [93] M. Jean and J.J. Moreau. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In A. Curnier, editor, *Contact mechanics*, pages 31–48, Lausanne, 1992.
- [94] A.W. Jenike. Storage and flow of solids. *Utah engineering experiment station*, 123, 1989.

- [95] J.T. Jenkins and S.B. Savage. A theory for the rapid flow of identical smooth nearly elastic spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 130 :187–202, 1983.
- [96] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [97] P.C. Johnson and R. Jackson. Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *J. Fluid Mech.*, 176 :67–93, 1987.
- [98] P.C. Johnson, P. Nott, and R. Jackson. Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes. *J. Fluid Mech.*, 210 :501–535, 1990.
- [99] C. Josserand. A 2d asymmetric exclusion model for granular flows. *Europhys. Lett.*, 48(1) :36–42, 1999.
- [100] A. Kabla and G. Debrégeas. Local stress relaxation and shear banding in a dry foam under shear. *Phys. Rev. Lett.*, 90(25) :258303, 2003.
- [101] J. Kastler. *Comprendre l'IRM*. 2000.
- [102] E. Kolb, T. Mazozi, E. Clement, and J. Duran. Force fluctuations in a vertically pushed granular column. *Eur. Phys. J. B*, 8 :483–491, 1999.
- [103] N.P. Kruyt and L. Rothenburg. Micromechanical definition of the strain tensor for granular materials. *J. App. Mech.*, 118 :706–711, 1996.
- [104] A. Lemaitre. Rearrangements and dilatancy for sheared dense materials. *Phys. Rev. Lett.*, 89(19) :195503, 2002.
- [105] A. Lemaitre. The origin of repose angle : kinetics of rearrangement for granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :064303, 2002.
- [106] A.J. Liu and S.R. Nagel. Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396 :21, Nov 1998.
- [107] A.J. Liu and S.R. Nagel. *Jamming and rheology*. Taylor and Francis, 2001.
- [108] C.H. Liu, S.R. Nagel, D.A. Schecter, S.N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, and T.A. Witten. Force fluctuations in bead packs. *Science*, 269 :513, 1995.
- [109] W. Losert, L. Bocquet, T.C. Lubensky, and J.P. Gollub. Particle dynamics in shearing granular matter. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :1428–1431, 2000.
- [110] W. Losert and G. Kwon. Transition and steady-state dynamics of granular shear flows. *Advances in complex systems*, 4 :369–377, 2001.
- [111] M.Y. Louge and S.C. Keast. On dense granular flows down flat frictional inclines. *Phys. Fluids*, 13 :1213–1233, 2001.

- [112] M. Lätzel, S. Luding, and H.J. Hermann. Macroscopic material properties from quasi-static, microscopic simulations of a two-dimensional shear-cell. *Granular Matter*, 2 :123–135, 2000.
- [113] S. Luding. PhD thesis, Université de Freiburg, 1995.
- [114] S. Luding and T. Pöschel. *Granular Gases*. Springer, 2000.
- [115] C.K.K. Lun and A.A. Bent. Numerical simulation of inelastic frictional spheres in simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, pages 335–3532, 1994.
- [116] T. Matthey and J.P. Hansen. Molecular dynamics simulations of sliding friction in a dense granular material. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 6 :701–707, 1998.
- [117] N. Menon and D.J. Durian. Diffusing wave spectroscopy of dynamics in a three dimensional granular flow. *Science*, 275 :1920–1922, 1997.
- [118] GDR MIDI. On dense granular flows. soumis à Eur. Phys. J., 2004.
- [119] B. Miller, C. O’Hern, and R.P. Behringer. Stress fluctuations for continuously sheared granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3110–3113, 1996.
- [120] P. Mills, D. Loggia, and M. Tixier. Model for a stationary dense granular flow along an inclined wall. *Europhys. Lett.*, 45 :733–738, 1999.
- [121] P. Mills, D. Loggia, and M. Tixier. Influence of roughness and dilatancy for dense granular flow along an inclined wall. *Eur. Phys. J. E*, 1 :1–8, 2000.
- [122] L.S. Mohan, P.R. Nott, and K.K. Rao. Fully developed flow of coarse granular materials through a vertical channel. *Chemical Engineering Science*, 52 :913–933, 1997.
- [123] L.S. Mohan, K.K. Rao, and P.R. Nott. Frictional cosserat model for slow shearing of granular materials. *J. Fluid Mech.*, 457 :377–409, 2002.
- [124] J.J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J.J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos, editors, *Nonsmooth mechanics and application : courses and lectures*, pages 1–82, Vienne, 1988. Springer-Verlag.
- [125] J.J. Moreau. Numerical experiments in granular dynamics : vibration-induced size segregation. In M. Raous, editor, *Contact mechanics*, pages 347–358, New York, 1995.
- [126] J.J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In D.E. Wolf and P. Grassberger, editors, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Londres, 1997.
- [127] J.J. Moreau and M. Jean. Numerical treatment of contact and friction : the contact dynamics method. *Engineering systems design and analysis*, pages 201–208, mars 1996.

- [128] J.K. Morgan. Numerical simulations of granular shear zones using the distinct element method : Ii. the effect of particle size distribution and interparticle friction on mechanical behavior. *J. Geophys. Res.*, 104 :2721–2732, 1999.
- [129] D.M. Mueth. Measurement of particule dynamics in slow, dense granular couette flow. 2001.
- [130] D.M. Mueth, G.F. Debregeas, G.S. Karczmar, P.J. Eng, S.R. Nagel, and H.M. Jaeger. Signature of granular microstructure in dense shear flows. *Nature*, 406 :385–389, 2000.
- [131] D.M. Mueth, H.M. Jaeger, and S.R. Nagel. Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, 57 :3164–3169, 1998.
- [132] M. Naaim, S. Vial, and R. Couture. St Venant approach for rock avalanches modelling in multiple scale analysis and coupled physical systems. In Presse de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, editor, *St Venant symposium*, Paris, 1997.
- [133] S. Nasuno, A. Kudrolli, A. Bak, and J.P. Gollub. Time-resolved study of stick-slip friction in sheared granular layers. *Phys. Rev. E*, 58(2) :2161–2171, 1998.
- [134] R.M. Nedderman. *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [135] A. Ngadi and J. Rajchenbach. Intermittencies in the compression process of a model granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :273–276, 1998.
- [136] S. Ogawa. Multitemperature theory of granular materials. In *Proc. USA-Japan Semin. Contin. Mech. And Stat. App. Mech. Granular Mat.*, pages 208–217, Tokyo, Japan, 1978.
- [137] C. O’Hern, S.A. Langer, A.J. Liu, and S.R. Nagel. Force distributions near the jamming and glass transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :111, 2001.
- [138] G.Y. Onoda and E.G. Liniger. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :2727–2730, 1990.
- [139] G Ovarlez. *Statique et rhéologie d’une colonne granulaire*. PhD thesis, Université Paris XI, 2002.
- [140] J.S. Patton, C.E. Brennen, and R.H. Sabersky. Shear flows of rapidly flowing granular materials. *J. Appl. Mech.*, 54 :801–805, 1987.
- [141] F. Pignon, A. Magnin, and J.M. Piau. Thixotropic colloidal suspensions and flow curves with minimum : Identification of flow regimes and rheological consequences. *J. Rheol.*, 40 :573, 1996.
- [142] O. Pouliquen. On the shape of granular fronts down rough inclined plane. *Phys. of Fluids*, (11) :1956–1958, 1999.
- [143] O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down a rough inclined plane. *Phys. Fluids*, 11 :542–548, 1999.

- [144] O. Pouliquen. Cours écoulements denses, Ecole d'été Milieux Divisés. Porquerolles, 2001.
- [145] O. Pouliquen. Cambridge, 2003.
- [146] O. Pouliquen and F. Chevoir. Dense flows of dry granular materials. *C.R. Physique*, 3 :163–175, 2002.
- [147] O. Pouliquen and Y. Forterre. Slow dense granular flows as a self-induced process. *Advances in Complex Systems*, 4(4) :441–450, 2001.
- [148] O. Pouliquen and Y. Forterre. Friction law for dense granular flow : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J.Fluid Mech*, 453 :133–151, 2002.
- [149] O. Pouliquen and V. Gutfraind. Stress fluctuations and shear zones in quasi-static granular chute flows. *Phys. Rev. E*, 53 :552–561, 1996.
- [150] M. Prochnow. *Écoulements denses de grains secs*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [151] L. Quartier, B. Andreotti, S. Douady, and A. Daerr. Dynamics of a grain on a sandpile model. *Phys. Rev. E*, 62 :8299–8307, 2000.
- [152] F. Radjaï, M. Jean, J.J. Moreau, and S. Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2) :274–277, July 1996.
- [153] F. Radjaï and S. Roux. Etats internes des milieux granulaires denses. In *14e congrès de mécanique*, Toulouse, France, sept 1999.
- [154] F. Radjai. Features of force transmission in granular media. In Y. Kishino, editor, *Powders and grains*, pages 157–160, Sendai, Japan, 2001. Lisse, Swets and Zeitlinger.
- [155] F. Radjai and S. Roux. Features of the granular texture. In Y. Kishino, editor, *Powders and grains*, pages 21–24, Sendai, Japan, 2001. Lisse, Swets and Zeitlinger.
- [156] F. Radjai and S. Roux. Turbulentlike fluctuations in quasistatic flow of granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 89(6) :064302, 2002.
- [157] F. Radjai, D.E. Wolf, M. Jean, and J.J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packing. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :61–64, 1998.
- [158] A. Ragouilliaux. Transition fluide-solide dans les fluides complexes : Etude expérimentale d'écoulements de grains secs et de pâtes de ciment sur plan incliné. Master's thesis, Université de Marne la Vallée, 2003.
- [159] J. Rajchenbach. Granular flows. *Advances in Physics*, 49 :229–256, 2000.
- [160] J.S. Raynaud, P. Moucheront, J.C. Baudez, F. Bertrand, J.P. Guilhaud, and Coussot P. Direct determination by nuclear magnetic resonance of the thixotropic and yielding behavior of suspension. *J. Rheol.*, 46 :709, 2002.

- [161] F. Restagno. *Interactions entre contacts solides et cinétique de la condensation capillaire. Aspects macroscopiques et aspects microscopiques*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2000.
- [162] O. Reynolds. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Phil. Mag. Ser.*, 5(20) :469–481, 1885.
- [163] J.R. Rice and A.L. Ruina. Stability of steady frictional slipping. *J. App. Mech.*, 50 :343, 1983.
- [164] M.O. Robbins. *Jamming and rheology*, chapter Jamming, Friction and unsteady rheology. Taylor and Francis, 2001.
- [165] P. Rognon. Ecoulements granulaires sur plan incliné : étude expérimentale de la transition vers l'arrêt. Master's thesis, Université de Marne la Vallée, 2002.
- [166] P. Rognon and F. Chevoir. Cohesion in granular media. 2004.
- [167] J.N. Roux and G Combe. On the meaning and microscopic origins of quasistatic deformation of granular materials. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Washington, Seattle, 2003.
- [168] J.B. Salmon, L. Bécu, S. Manneville, and A. Collin. Towards local rheology of emulsions under Couette flow using dynamic light scattering. cond-mat/0211016, 2002.
- [169] S.B. Savage. *Mechanics of granular materials : new models and constitutive relations*, chapter Granular flows down rough inclines-review and extension. Elsevier, Amsterdam, 1983.
- [170] S.B. Savage. Flow of granular materials. In M. Piau and D. Caillerie, editors, *Theoretical and applied mechanics*, pages 241–266, Amsterdam, 1989. North Holland.
- [171] S.B. Savage. *Disorder and granular media*. McGraw-Hill, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [172] S.B. Savage and K. Hutter. The motion of a finite mass of granular material down a rough inclined. *J. Fluid Mech.*, 199 :177, 1989.
- [173] S.B. Savage and M. Sayed. Stresses developed by dry cohesionless granular materials sheared in an annular shear cell. *J. Fluid Mech.*, 142 :391, 1984.
- [174] A. Schofield and P. Wroth. *Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill, London, 1968.
- [175] S. Schollmann. Simulation of two-dimensional shear cell. *Phys. Rev. E*, (59) :889–899, 1999.
- [176] O.J. Schwarz, Y. Horie, and M. Shearer. Discrete element investigation of stress fluctuation in granular flow at high strain rates. *Phys. Rev. E*, 57 :2053–2061, 1998.



- [177] S.L. Silbert, D. Ertas, G.S. Grest, T.C. Halsey, and D. Levine. Analogies between granular jamming and the liquid-glass transition. *Phys.Rev.E*, 65 :051307, 2002.
- [178] S.L. Silbert, D. Ertas, G.S. Grest, T.C. Halsey, D. Levine, and S.J. Plimpton. Granular flow down an inclined plane. *Phys.Rev.E*, 64 :385–403, 2001.
- [179] S.L. Silbert, G.S. Grest, S.J. Plimpton, and D. Levine. Boundary effects and self-organisation in dense granular flows. *Phys. of Fluids*, 14 :1, 2002.
- [180] S.L. Silbert, J.W. Landry, and G.S. Grest. Granular flow down a rough inclined plane : transition between thin and thick piles. *Phys. of Fluids*, 15 :1–10, 2003.
- [181] P. Sollich, F. Lequeux, P. Hébraud, and M.E. Cates. Rheology of soft glassy materials. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :102020, 1997.
- [182] L Staron. *Étude Numérique des Mécanismes de Déstabilisation des Pentes Granulaires*. PhD thesis, Université Paris XI, 2002.
- [183] L. Staron, J.P. Vilotte, and F. Radjai. Friction and mobilization of contacts in granular avalanches. In Y. Kishino, editor, *Powders and grains*, pages 451–454, Sendai, Japan, 2001. Lisse, Swets and Zeitlinger.
- [184] D. Tabor. Friction - the present understanding. *J. Lubrication*, 103 :169–179, 1981.
- [185] K. Takahashi. On the dynamical properties of granular mass. *Geophys. Mag.*, 11 :165–176, 1937.
- [186] G.I. Tardos. A fluid mechanics approach to slow, frictional powder flows. *Powder Technol.*, 92 :61, 1997.
- [187] G.I. Tardos, M.I. Khan, and D.G. Schaeffer. Forces on a slowly rotating, rough cylinder in a couette device containing a dry, frictional powder. *Phys. Fluids*, 10 :335–341, 1998.
- [188] P.A. Thompson and G.S. Grest. Granular flow : Friction and the dilatancy transition. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :1751–1754, 1991.
- [189] K. To, P.Y. Lai, and K. Pak. Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :71–74, 2001.
- [190] L. Tocquer. *Écoulements granulaires sur plan incliné : études expérimentales de la transition vers l’arrêt et dynamique des avalanches*. Rapport interne.
- [191] U. Tüzün, G.T. Houlsby, R.M. Nedderman, and S.B. Savage. The flow of granular material - velocity distribution in slow flow. *Chem. Eng. Sci.*, 37 :1691–1709, 1982.
- [192] F. Varnik, L. Bocquet, J.L. Barrat, and L. Berthier. Shear localization in a model glass. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :095702, 2003.

- 
- [193] C.T. Veje, D.W. Howell, and R.P. Behringer. Kinematics of two - dimensional granular Couette experiment at the transition to shearing. *Phys. Rev. E*, 59 :739–745, 1999.
- [194] D. Volfson, L.S. Tsimring, and Aranson. Partially fluidized shear granular flows : Continuum theory and MD simulations. condmat 0302340, 2003.
- [195] J.C. Williams and M.J. Rhodes. *Principles of powder mechanics*. M.J. Rhodes editor, John Wiley and sons.
- [196] D.E. Wolf, D. Kadau, G. Bartels, and L. Brendel. Contact dynamic simulations of compacting cohesive granular systems. *Computer Physics Communications (soumis)*, 2002.
- [197] Y. Zhang and C.S. Campbell. The interface between fluid-like and solid-like behavior in two-dimensional granular flows. *J. Fluid Mech.*, 237 :541–568, 1992.
- [198] I Zuriguel, L.A. Pugnaloni, A. Garcimartin, and D. Maza. Jamming during the discharge of grains from a silo described as a percolating transition. cond-mat/0301006, 2003.

