



HAL
open science

Simplified modeling for multilayer of cracked pavement

Quang Dat Tran

► **To cite this version:**

Quang Dat Tran. Simplified modeling for multilayer of cracked pavement. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. English. NNT: . pastel-00001026

HAL Id: pastel-00001026

<https://pastel.hal.science/pastel-00001026>

Submitted on 14 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée pour l'obtention du diplôme de
Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Quang Dat TRAN

Sujet de la thèse :

**MODELE SIMPLIFIE POUR LES CHAUSSEES FISSUREES
MULTICOUCHES**

Soutenue le 30 septembre 2004 à l'E.N.P.C

devant le jury composé de :

Rapporteurs : C. PETIT
Q.S. NGUYEN

Examineurs : G. CAILLETAUD
A. CHABOT
J.P. MARCHAND

Directeur de Thèse : A. EHRLACHER

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au laboratoire LAMI de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et à la division MSC du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées Nantes.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, M. Alain EHRLACHER professeur de l'ENPC, qui m'a accueilli au sein du laboratoire et m' dirigé tout au long de cette thèse. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans lui, qui a toujours su me consacrer un peu de son temps à mes calculs et aussi à ma rédaction. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitude.

Je tiens à remercier Mme. Armelle CHABOT chargée de recherche du LCPC Nantes, qui a accepté d'encadrer cette thèse et qui m'a témoigné son soutien et confiance. Avec qui j'ai passé de bons moments de recherche au LCPC Nantes.

Un remerciement tout particulier à Messieurs Philippe TAMAGNY et Denis DUHAMEL qui m'ont communiqué une partie de modélisation numérique.

J'exprime ma sincère reconnaissance aux membres du jury, Prof. Georges CAILLETAUD, président, Christophe PETIT et Quoc Son NGUYEN rapporteurs, Jean Pierre MARCHAND examinateur.

Je remercie également Céline FLORENCE pour son collaboration et son aide à la correction du mémoire.

Je tiens à remercier tous les gens du LAMI et DMSC, qui savent si bien rendre agréable le cadre de travail.

Je ne terminerai pas mes remerciements sans ma famille, et tout particulièrement ma mère et ma femme, qui donnent toujours leur soutien et leur patience au long des trois années de la thèse.

Table des matières

I	Introduction et étude bibliographique	7
1	Introduction	10
1.1	Les structures de chaussées	10
1.1.1	Constitution d'une structure de chaussée	10
1.1.2	Les différents types de structures de chaussées	11
1.2	Les dégradations des chaussées	14
1.3	Les modèles de la mécanique des chaussées	16
1.3.1	Synthèse bibliographique	16
1.3.2	Application des modèles au dimensionnement et renforcement des chaussées	22
1.3.2.1	La méthode française de dimensionnement des chaussées	22
1.3.2.2	Les méthodes de renforcement des chaussées	26
1.3.3	Les limitations des modèles	28
2	Revue bibliographique sur la fissuration des chaussées	30
2.1	Introduction de la fissuration dans les chaussées	30
2.1.1	Les différents types de fissuration et leur origine	30
2.1.2	L'évolution des fissures	35
2.1.2.1	L'initiation des fissures	36
2.1.2.2	La propagation des fissures	36
2.1.2.3	La rupture	38
2.2	Modèles de calcul des chaussées fissurées ou des chaussées existant des bords libres	39
2.2.1	Modélisation de la chaussée fissurée par éléments finis 3D	39
2.2.2	Les calculs 2D correspondants au calcul 3D	40
2.2.3	Les modèles simplifiés de chaussée fissurée	41
2.3	Conclusion	42
	Conclusions de la première partie	43

II	Le modèle de chaussée proposé.	45
3	Le modèle proposé sans fissure.	48
3.1	Le modèle multicouches de chaussées.	48
3.1.1	Les modèles multiparticulaires.	48
3.1.1.1	Introduction des modèles multiparticulaires	48
3.1.1.2	Formulation variationnelle d'Hellinger Reissner	50
3.1.1.3	Construction des modèles multiparticulaires de multicouche	51
3.1.2	Le modèle multiparticulaire à 5n équations d'équilibre.	52
3.1.2.1	Équations du M4-5n	53
3.1.2.2	Simplification des équations du M4-5n	60
3.1.2.3	Les conditions aux limites du problème de chaussée	62
3.2	Le modèle de sol.	64
3.2.1	Fonctions potentielles de Boussinesq	65
3.2.2	Les résultats analytiques de Boussinesq	67
3.2.3	Le système des équations de Boussinesq dans le cas 2D déformation plane	69
3.3	Le modèle simplifié M4-B.	69
4	Résolution du modèle simplifié	71
4.1	Adimensionalisation et génération des équations du M4-5n	71
4.1.1	Adimensionalisation des équations du modèle	71
4.1.2	Génération des équations du modèle	74
4.2	Traitement des conditions aux limites du problème	75
4.2.1	Les conditions aux limites pour une couche	75
4.2.2	Génération des conditions aux limites pour n couches	76
4.3	Adimensionalisation des équations de Boussinesq	76
4.4	Le modèle simplifié M4-B.	78
5	Approximation numérique	80
5.1	Choix de la méthode numérique.	80
5.1.1	Méthode numérique pour les équations différentielles du modèle.	80
5.1.1.1	Approximation par la méthode d'Euler	81
5.1.1.2	Approximation par la méthode de Newmark	82
5.1.1.3	Approximation par la méthode des éléments finis	84
5.1.1.4	Comparaison des solutions pour les méthodes d'approximation	86
5.1.2	Méthode numérique pour les équations intégrales du modèle.	87
5.1.2.1	Intégration numérique par une méthode semi-analytique	87
5.1.2.2	Intégration numérique par les points de Gauss	88
5.1.2.3	Exemple	90
5.2	Le modèle approché numérique de la chaussée.	90

5.2.1	Discrétisation	90
5.2.2	Traitement des équations du M4-5n	91
5.2.3	Traitement des équations de Boussinesq	93
5.2.4	Traitement des conditions limites	96
5.2.5	Résolution du problème	98
6	Validation du modèle : Cas d'une chaussée non fissurée.	100
6.1	Chargements.	100
6.2	Validation du modèle tridimensionnel.	101
6.2.1	Validation du modèle pour le cas monocouche 3D de chaussée sans fissure.	101
6.2.2	Validation du modèle pour le cas bicouche 3D de chaussée sans fissure.	104
6.2.2.1	Les deux couches de chaussées sont de mêmes matériaux	104
6.2.2.2	La deuxième couche a les mêmes paramètres que le massif de sol	105
6.3	Validation du modèle bidimensionnel.	107
6.3.1	Validation du modèle pour le cas monocouche 2D de chaussée sans fissure.	107
6.3.2	Validation du modèle pour le cas bicouche 2D de chaussée sans fissure.	108
6.4	Comparaison des résultats 3D et 2D en déformation plane pour le calcul de chaussées.	111
6.4.1	Comparaison Monocouche de chaussée 3D et Monocouche de chaussée 2D	111
6.4.2	Grilles de résultats - applications pour le monocouche de chaussée	113
6.4.3	Grilles de résultats - Idées pour le multicouche de chaussée	114
	Conclusions de la deuxième partie	116
III	Application du modèle simplifié à l'étude de chaussées fissurées verticalement	117
7	Application à une chaussée fissurée soumise au chargement d'un poids lourd	120
7.1	Modélisation numérique de la fissuration dans la chaussée	120
7.1.1	Modifications des équations de rigidité dues à la présence de la fissure	120
7.1.2	Ajout des équations de conditions aux limites sur les lèvres de la fissure	122
7.2	Application à une chaussée fissurée tridimensionnelle	122
7.2.1	Cas d'une couche de chaussée 3D fissurée	122
7.2.2	Bicouche tridimensionnel de chaussée fissurée : cas fissuré inférieurement	125
7.3	Cas 2D déformation plane de chaussée fissurée	128
7.3.1	Cas 2D déformation plane d'une couche de chaussée fissurée	128
7.3.2	Cas 2D déformation plane du bicouche de chaussée fissurée	131
7.3.2.1	Validation du cas bicouche de déformation plane fissure en bas	131
7.3.2.2	Validation du cas bicouche en déformation plane fissuré en haut	133

8	Validation du cas fissuré sous chargement de retrait thermique	137
8.1	Application du chargement thermique au M4-Boussinesq	137
8.1.1	Comportement thermoélastique linéaire isotrope	137
8.1.2	Application de la thermoélasticité aux équations du modèle simplifié	138
8.2	Validation du modèle sous chargement de retrait thermique	139
8.2.1	Cas d'une couche tridimensionnelle de chaussée fissurée reposant sur un massif de sol semi infini sous retrait thermique	139
8.2.2	Cas du bicouche tridimensionnel de chaussée fissurée inférieurement	142
9	Validation du cas fissuré sous chargement dû à gradient thermique	146
9.1	Cas d'une couche tridimensionnelle de chaussée fissurée reposant sur un massif de sol semi infini sous gradient thermique	146
9.2	Cas du bicouche tridimensionnel de chaussée fissurée inférieurement reposant sur un massif de sol semi-infini	149
	Conclusions de la troisième partie	154
	Conclusion générale et Perspectives	155
	Annexes	163
A	Les équations du modèle simplifié	165
A.1	Les équations différentielles du M4-5n	165
A.2	Les équations intégrales de Boussinesq	170
B	Approximation numérique du modèle simplifié	172
B.1	Conditions aux limites sur les bords	172
B.1.1	Conditions aux limites pour les bords bloqués	172
B.1.2	Conditions aux limites pour les bords libres	173
B.1.3	Génération des équations de conditions aux limites	173
B.1.4	Traitement numérique des équations de conditions aux limites	175
B.2	Conditions aux limites sur les lèvres de la fissure	181

Première partie

Introduction et étude bibliographique

En 2003, le réseau routier de la métropole française comportait environ 1 000 000 km de routes revêtues [Dir-Des-Routes., 2003] qui se répartissaient à environ 59,8% de voies communales, 36,4% de routes départementales, 2,7% de routes nationales et 1% d'autoroutes concédées et non concédées. Ce réseau est géré par une multiplicité de maîtres d'ouvrage que sont, outre l'État, des collectivités territoriales, ainsi que des sociétés d'économie mixte ou privées pour certaines autoroutes concédées. Le budget total du réseau routier français est de 4355,5 millions d'euros en 2002 [Dir-Des-Routes., 2003] scindé en deux : 57% concerne le développement de l'infrastructure et 43% l'entretien des chaussées. Parmi les entretiens que subissent un tiers des chaussées chaque année, on compte 29,8% d'entretiens purs pour les chaussées et les équipements, 6% pour le renforcement des ouvrages d'art, 4,6% pour le renforcement des chaussées, 2,6% pour des aménagements de sécurité. Pour diminuer les coûts, il est nécessaire de bien connaître les différents processus de rupture des chaussées dont l'origine est souvent la présence de fissures.

La plupart des méthodes d'entretien repose sur plusieurs outils dont le noyau est un modèle mécanique trop simplifié par rapport au problème réel. Cela a pour conséquence de surdimensionner généralement la solution la rendant de ce fait plus coûteuse en terme de matériau. L'objet de ce travail de thèse est de développer un modèle mécanique de chaussée plus raffiné capable de prendre en compte les éventuelles fissures qui peuvent apparaître sur les chaussées fatiguées par le trafic routier qu'elles soient constituées de matériaux bitumineux ou de béton. Notre souci est que ce modèle soit utilisable par les ingénieurs de bureau d'étude aussi nous nous plaçons dans un cadre théorique et numérique simplifié.

Cette première partie se compose de deux chapitres.

Le chapitre 1 présente une introduction générale sur la chaussée. Celle ci comprend les différents types de chaussées, les différents types de dégradations de chaussées, et les différents modèles simplifiés pour la modélisation de chaussée.

Le chapitre 2 présente une étude bibliographique sur les chaussées fissurées. Les différents types de fissures et leurs causes probables sont présentées. Ensuite, nous examinons les différentes méthodes de modélisation de la chaussée fissurée, puis nous donnons leurs inconvénients pour la modélisation des chaussées fissurées.

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre introductif est découpé en 4 points. Dans une première partie, on présente la constitution des chaussées ainsi que les différents types de structure. Ensuite sont décrits les différentes dégradations que peuvent subir les chaussées. Un historique sommaire des modèles mécaniques de la chaussée est alors dressé avant de donner les principes de la méthode française de dimensionnement. Puis, nous en tirons les remarques, les limitations des modèles existants avant de conclure sur l'objet de cette étude.

1.1 Les structures de chaussées

1.1.1 Constitution d'une structure de chaussée

Une chaussée est une structure multicouche constituée de trois parties principales qui ont chacune un rôle bien défini [LCPC, 1994] (cf. figure 1.1).

Tout d'abord le sol terrassé ou sol-support est surmonté généralement d'une couche de forme. L'ensemble sol-couche de forme représente la plate-forme support de la chaussée. La couche de forme a une double fonction. Pendant les travaux, elle assure la protection du sol-support, permet la qualité du nivellement ainsi que la circulation des engins. En service, elle permet d'homogénéiser les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant le sol ou le remblai, et d'améliorer la portance à long terme.

Puis viennent la couche de base et la couche de fondation formant ainsi les couches d'assise. Les couches d'assise apportent à la chaussée la résistance mécanique aux charges verticales induites par le trafic et répartissent les pressions sur la plate-forme support afin de maintenir les déformations à un niveau admissible.

Enfin, la couche de surface se compose de la couche de roulement et éventuellement d'une couche de liaison entre la couche de roulement et les couches d'assise. Elle a deux fonctions. D'une part, elle assure la protection des couches d'assise vis-à-vis des infiltrations d'eau. D'autre part elle confère aux usagers un confort de conduite d'autant plus satisfaisant que les caractéristiques de surface sont bonnes.

Selon les matériaux granulaires liés (enrobés, béton,...) ou non liés composants les couches des chaussées, nous distinguons plusieurs types de structures. Dans la suite, nous allons présenter les classifications des chaussées françaises [LCPC, 1994].

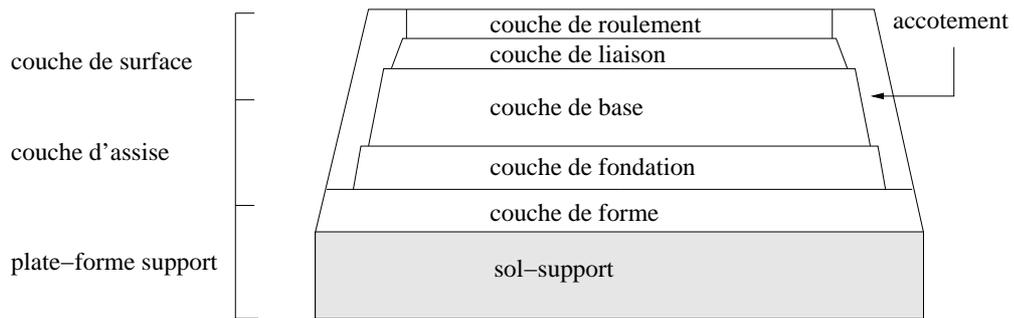


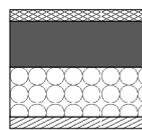
FIGURE 1.1. Constitution d'une structure de chaussée type

1.1.2 Les différents types de structures de chaussées

L'une des caractéristiques du réseau routier français est l'existence d'une grande diversité de structures de chaussées, que l'on classe dans les familles ci-dessous [LCPC, 1994].

Les chaussées souples

Ces structures comportent une couverture bitumineuse relativement mince (inférieure à 15 cm), parfois réduite à un enduit pour les chaussées à très faible trafic, reposant sur une ou plusieurs couches de matériaux granulaires non traités. L'épaisseur globale de la chaussée est généralement comprise entre 30 et 60 cm.



Chaussées souples:

1. Couche de surface de matériaux bitumineux
2. Matériaux bitumineux d'assise (< 15 cm)
3. Matériaux granulaires non traités (20 à 50 cm)
4. Plate-forme support

FIGURE 1.2. Chaussées souples [LCPC, 1994]

Les chaussées bitumineuses épaisses

Ces structures se composent d'une couche de roulement bitumineuse sur un corps de chaussée en matériaux traités aux liants hydrocarbonés, fait d'une ou deux couches (base et fondation). L'épaisseur des couches d'assise est le plus souvent comprise entre 15 et 40 cm.



Chaussées bitumineuses épaisses:

1. Couche de surface de matériaux bitumineux
2. Matériaux bitumineux d'assise (de 15 à 40 cm)
3. Plate-forme support

FIGURE 1.3. Chaussées bitumineuses épaisses [LCPC, 1994]

Les chaussées à assise traitée aux liants hydrauliques

Ces structures sont qualifiées couramment de "semi-rigides". Elles comportent une couche de surface bitumineuse sur une assise en matériaux traités aux liants hydrauliques disposés en une ou deux couches (base et fondation) dont l'épaisseur totale est de l'ordre de 20 à 50 cm.

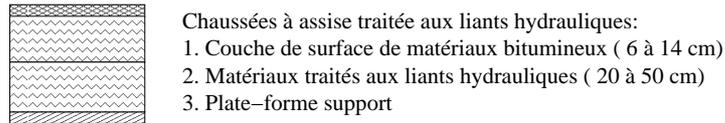


FIGURE 1.4. *Chaussées à assise traitée aux liants hydrauliques [LCPC, 1994]*

Les chaussées à structure mixte

Ces structures comportent une couche de roulement et une couche de base en matériaux bitumineux (épaisseur de la base : 10 à 20 cm) sur une couche de fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques (20 à 40 cm). Les structures qualifiées de mixtes sont telles que le rapport de l'épaisseur de matériaux bitumineux à l'épaisseur totale de chaussée soit de l'ordre de 1/2.

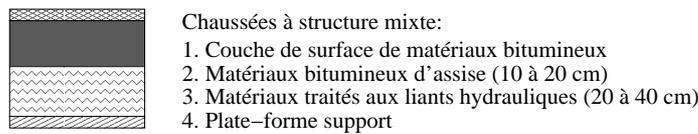


FIGURE 1.5. *Chaussées à structure mixte [LCPC, 1994]*

Les chaussées à structure inverse

Ces structures sont formées de couches bitumineuses, d'une quinzaine de centimètres d'épaisseur totale, sur une couche de grave non traitée (environ 12 cm) reposant elle-même sur une couche de fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques. L'épaisseur totale atteint 60 à 80 cm.

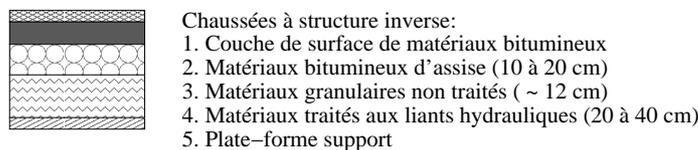


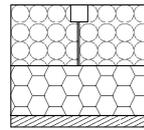
FIGURE 1.6. *Chaussées à structure inverse [LCPC, 1994]*

Les chaussées en béton de ciment

Ces structures comportent une couche de béton de ciment de 15 à 40 cm d'épaisseur qui sert de couche de roulement éventuellement recouverte d'une couche mince en matériaux bitumineux. La couche de béton repose soit sur une couche de fondation (en matériaux traités aux liants hydrauliques ou en béton de ciment), soit sur une couche drainante en grave non traitée, soit sur une couche d'enrobé reposant elle-même sur une couche de forme traitée aux liants hydrauliques. La dalle de béton peut être continue avec un renforcement longitudinal ("béton armé continu"), ou discontinue avec ou sans élément de liaison aux joints. Ci-dessous nous présentons les structures de chaussée en béton de ciment (cf. figures 1.7 à 1.11).

Les chaussées composites

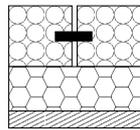
Afin d'offrir une solution concurrente aux chaussées classiques, deux nouvelles structures se développent depuis les années 1990 aux États Unis [Cole et al., 1998] et sont employées depuis



Dalles non goudonnées avec fondation::

1. Béton de ciment (20 à 28 cm)
2. Béton maigre (12 à 18 cm) ou matériaux traités aux liants hydrauliques (15 à 20 cm)
3. Plate-forme support

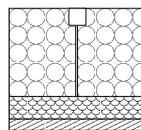
FIGURE 1.7. *Dalles non goudonnées avec fondation [LCPC, 1994]*



Dalles goudonnées avec fondation::

1. Béton de ciment (17 à 23 cm)
2. Béton maigre (14 à 22 cm)
3. Plate-forme support

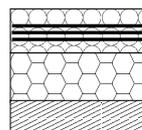
FIGURE 1.8. *Dalles goudonnées avec fondation [LCPC, 1994]*



Dalles sans fondation::

1. Béton de ciment (28 à 39 cm)
2. Couche drainante (matériaux granulaires ou géotextiles)
3. Plate-forme support

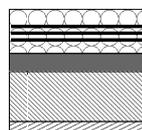
FIGURE 1.9. *Dalles sans fondation [LCPC, 1994]*



Béton armé continu (1):

1. Béton de ciment (18 à 24 cm)
2. Béton maigre (12 à 14 cm)
3. Plate-forme support

FIGURE 1.10. *Béton armé continu 1 [LCPC, 1994]*



Béton armé continu (2):

1. Béton de ciment (18 à 24 cm)
2. Matériaux bitumineux d'assise (5 cm)
3. Sable traité aux liants hydrauliques (50 à 60 cm)
4. Plate-forme support

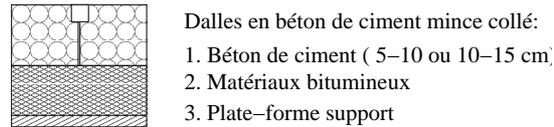
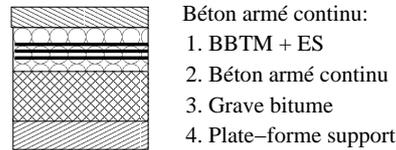
FIGURE 1.11. *Béton armé continu 2 [LCPC, 1994]*

moins d'une dizaine d'années en France [CIMbéton, 2000]. Ces structures combinent une couche de béton de ciment (pour leurs propriétés de durabilité et leur haut module) avec des couches en matériaux bitumineux (pour leurs bonnes propriétés d'adaptations). L'intérêt technique et économique de ces structures dépend essentiellement de la qualité et de la pérennité de l'adhérence mécanique du collage avec interface entre ces couches [Pouteau et al., 2004]. Ci-dessous deux types de structures composites sont présentés : le béton de ciment mince collé [Silverbrand, 1998] et le béton armé continu (BAC) sur grave bitume (GB).

La structure du béton de ciment mince collé (BCMC) est connue en France depuis 1996 [CIMbéton, 2000]. Elle consiste à réaliser des dalles minces (de 10 à 15 cm d'épaisseur) ou très minces (de 5 à 10 cm d'épaisseur) en béton sur un matériau bitumineux (cf. figure 1.12).

La structure BAC sur GB est une structure composite qui se compose des couches suivantes : BBTM (Béton Bitumineux Très Mince)/ ES (Enduit Superficiel)/ BAC/ GB [Guidoux, 2000] (cf. figure 1.13).

Toutes ces chaussées après dimensionnement, sous l'influence du chargement du trafic, sous l'effet de la température ou d'autres raisons (mauvais dimensionnement, déshydratation des matériaux ...), subissent des dégradations de différents types. Pour le problème de redimensionnement et de

FIGURE 1.12. *Béton de ciment mince collé (BCMC)*FIGURE 1.13. *Béton armé continu sur Grave bitume (BAC/GB)*

réparation des chaussées, il est nécessaire de comprendre l'origine et les types de ces dégradations. Dans la partie suivante, nous allons décrire de façon générale ces phénomènes.

1.2 Les dégradations des chaussées

Les dégradations des chaussées, selon le catalogue des dégradations de surface des chaussées du [LCPC, 1998], peuvent être divisées en quatre familles : les arrachements et les mouvements de matériaux, les dégradations de déformations, les fissures.

Les deux premières familles reflètent la qualité de la couche de surface. Les deux dernières familles concernent la détérioration mécanique de la structure, et sont donc des objets d'application de notre étude. Nous allons revenir plus précisément sur la description de ces problèmes de dégradations de chaussées dans les paragraphes qui suivent.

Les dégradations d'arrachement

Ces dégradations concernent plutôt la qualité de la couche de surface et en ce sens des problèmes de sécurité routière en rapport avec l'adhérence et l'uni des chaussées. Ces phénomènes sont dus soit à l'usure de la couche de surface, l'arrachement des gravillons du revêtement, le départ localisé de matériau de la couche de surface, le départ de gravillons de la couche de surface ou bien le départ du liant autour des granulats dans la couche de surface.

Parmi les différents travaux sur ce sujet, on peut citer les recherches de F. Hammoum du LCPC sur l'étude des problèmes d'endommagement de surface de revêtements routiers via la mise au point d'un essai (Triboroute) pour évaluer sa tenue sous trafic [Fresnel, 2003].

Les mouvements de matériau

Ces dégradations sont causées par des remontées du liant à la surface de la chaussée, par l'enfoncement de gravillons dans l'enrobé en période chaude, les remontées des éléments fins à la surface de chaussée (cf. figure 1.14), ou par l'éjection de l'eau à la surface lors du passage des véhicules lourds par suite de l'existence de cavités sous la couche de surface.

Parmi les nombreux travaux existants on peut citer pour exemple les recherches récentes de [Castañeda-Pinzón et Such, 2004] sur l'existence de l'eau à l'interface des couches de chaussées.



FIGURE 1.14. *Remontée de fines : dégradation franche, significative et étendue [LCPC, 1998]*

Les dégradations de déformation

Les dégradations de déformation sont en général celles qui donnent des déformations visibles en surface, comme les phénomènes irréversibles suivants : l'ornièrisme (cf. figure 1.15), l'affaissement, le gonflement, le bourrelet, le décalage de joint de dalle ou de bord de fissure, le flambement, les déformations de forme de tôle ondulée.



FIGURE 1.15. *Ornièrage [LCPC, 1998]*

Ces dégradations ont plusieurs raisons, parmi lesquelles nous pouvons citer le sous-dimensionnement ou une mauvaise qualité de l'assise entraînant des contraintes verticales excessives à la surface du sol support ou des couches non traitées; une réduction de portance du sol support par défaut de drainage ou conséquence du dégel; un drainage ou assainissement localement défectueux; un retrait hydrique du sol support; des réactions physico-chimiques ponctuelles entre des constituants de la structure et l'eau formant des composés gonflants ...

Pour évaluer la situation de ces problèmes, les comportements élastiques linéaires des modèles de mécanique des chaussées ne sont pas adaptés. Aussi des recherches sont en cours depuis plusieurs années pour prendre en compte les déformations permanentes et la variable de temps. Parmi les nombreux travaux existants à l'étranger et en France on peut citer pour exemple les recherches récentes de [Elabd et al., 2004] sur l'introduction de l'élasto-plasticité dans les sols.

Les fissures

Avec le problème de l'orniérage, les fissures sont considérées comme un des plus grands modes de dégradation de chaussées. En effet leur présence associée ou non à l'eau met en péril la durabilité à terme de la structure sous le passage répété de véhicules lourds. Le problème de fissuration peut être regardé du côté de l'endommagement des matériaux [Bodin et al., 2004] et de leur rupture comme le mettent en évidence par exemple les essais sur le comportement à la fatigue et à la rupture des matériaux bitumineux [Beghin, 2003], [Maillard et al., 2003]. Sur la structure de chaussée, pour un calcul de durée de vie, il est primordial de prévoir les évolutions de ces fissures. Par exemple il est nécessaire de savoir évaluer les remontées des fissures comme dans [Laveissiere, 2001], [Florence et al., 2004], de comprendre la fissuration par le haut [Tamagny et al., 2004] ou de calculer la durabilité d'un collage entre couche [Pouteau et al., 2004]. Nous allons revenir à ce problème plus en détails dans le chapitre 2.

1.3 Les modèles de la mécanique des chaussées

Pour chacun des modèles simplifiés présentés dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur la nature du calcul et sa possibilité d'application à la fissuration des chaussées. Dans ce paragraphe les modèles classiques des chaussées sont donnés avant de présenter les grandes lignes de la méthode française de dimensionnement des chaussées.

1.3.1 Synthèse bibliographique

Le rôle de la chaussée est de répartir la pression exercée par le pneumatique pour l'amener à un niveau compatible avec ce qui peut être supporté par le sol-support.

Selon l'ouvrage de [Peyronne et al., 1991] et les travaux de [Salasca, 1998], nous présentons brièvement ci-dessous les quelques modèles principaux suivants permettant le dimensionnement de ces structures vis-à-vis des sollicitations mécaniques qu'elles subissent.

Le modèle de Boussinesq (1885)

Dans le cas où le corps de chaussée n'est pas trop différent du sol naturel, on peut considérer que la pression se répartit de la même manière que dans un sol. Ceci conduit à considérer la structure de chaussée comme un massif semi-infini et proposer une méthode simple de dimensionnement. Avec l'hypothèse d'isotropie et d'élasticité linéaire, ce problème a été résolu par [Boussinesq, 1885].

Pour une charge circulaire de rayon a et de pression q_0 , la contrainte σ_z à l'aplomb du cercle est maximum. A la profondeur z , elle a la valeur :

$$\sigma_z = q_0 \left[1 - \frac{(z/a)^3}{(1 + z^2/a^2)^{3/2}} \right] \quad (1.1)$$

Grâce aux résultats de Boussinesq, on peut trouver la profondeur H du sol où la pression verticale a été suffisamment diffusée pour ne pas dépasser une valeur admissible. On peut ensuite faire correspondre une épaisseur de chaussée H' à l'épaisseur H par une règle simple tenant compte du module E_1 du corps granulaire et du module E_s du sol support. Autrement dit, nous pouvons écrire :

$$H' = H \cdot f\left(\frac{E_1}{E_s}\right) \quad \text{où} \quad f\left(\frac{E_1}{E_s}\right) \leq 1 \quad (1.2)$$

La détermination de la fonction f suppose que l'on dispose de modèles bicouches (par exemple modèle de Burmister que nous allons présenter plus loin).

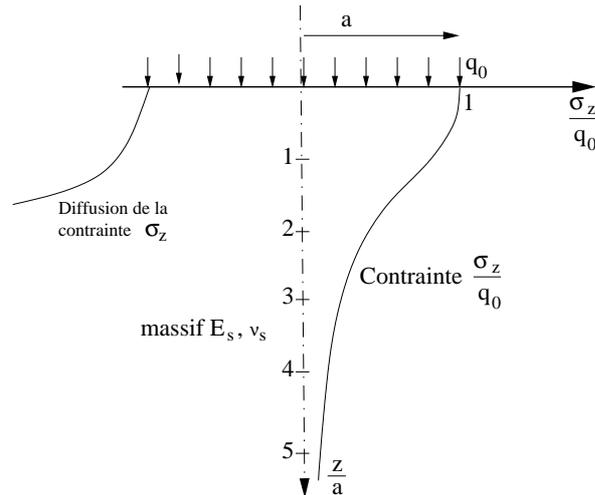


FIGURE 1.16. *Diffusion des pressions dans un massif de Boussinesq [Peyronne et al., 1991]*

L'application de ce modèle à l'étude de la fissuration des structures de chaussées présente les inconvénients suivants :

- ce modèle ne peut pas prendre en compte des discontinuités ;
- la zone d'application est limitée (seulement pour les cas où le corps de chaussée n'est pas trop différent du sol naturel) ;
- il ne peut pas modéliser les structures multicouches.

Le modèle monocouche de chaussée de Westergaad (1926)

Outre l'hypothèse de plaque mince pour la couche de la chaussée, Westergaad [Westergaad, 1926] a adopté pour le sol une simplification. Celui-ci est considéré comme massif de Winkler, c'est-à-dire un assemblage de ressorts indépendants. Le déplacement vertical w en un point de contact entre la couche et le massif est alors proportionnel à la pression verticale σ_{zz} en ce point, soit $\sigma_{zz} = kw$ (cf figure 1.17) où k est appelé le module de réaction de fondation et est fonction de cette dernière.

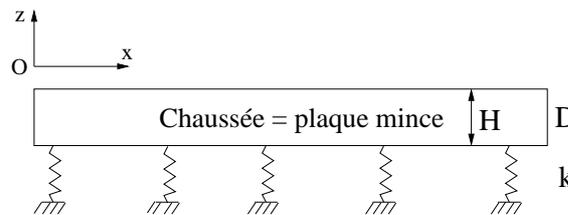


FIGURE 1.17. *schéma du modèle de Westergaad*

Notons D la rigidité de plaque, nous avons :

$$D = \frac{E_1 H^3}{12(1 - \nu_1^2)} \quad (1.3)$$

Où H est l'épaisseur de la plaque,

E_1, ν_1 sont le module d'Young et le coefficient de Poisson de matériau de plaque.

En appliquant l'équation de Lagrange pour la plaque, nous obtenons :

$$D\Delta^2 w + kw = p \quad (1.4)$$

Où p est la pression de la charge et k est le module de réaction de la fondation.

S'il existe une symétrie de révolution, le problème est résolu analytiquement en effectuant sur la variable r (distance au centre de charge) une transformation permettant de manipuler des grandeurs sans dimension [Peyronne et al., 1991].

$$r = lx \quad \text{avec} \quad l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} \quad (1.5)$$

Où l est appelé le rayon de rigidité de la chaussée. En effectuant sur les variables une transformation de Henkel, on trouve alors la solution du problème [Peyronne et al., 1991] :

$$w(x) = \frac{pa}{kl} \int_0^{+\infty} \frac{m}{m^4 + 1} J_1\left(m\frac{a}{l}\right) J_0(mx) dm \quad (1.6)$$

J_0 et J_1 désignent les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1.

Si ce n'est pas le cas, Westergaad a proposé en 1929 une solution explicite du problème, en terme de déflexions et de contraintes maximales, pour trois positions de charges (charge au centre, charge au bord, charge au coin). Ces formules de contraintes ont été revues par Westergaad en 1949, puis ont donné lieu à un certain nombre d'études visant à les valider et à les améliorer, notamment par [Eisenmann, 1986] et [Ioannides et al., 1986]. Si Q représente la charge appliquée, les formules de Westergaad révisées par [Eisenmann, 1986] sont les suivantes :

Charge au centre :

$$\sigma_{centre} = \frac{0,275Q}{H^2} (1 + \nu_1) \left[\log\left(\frac{E_1 H^3}{kb^4}\right) - 0,436 \right] \quad (1.7)$$

Charge au bord :

$$\sigma_{bord} = \frac{0,529Q}{H^2} (1 + 0,54\nu_1) \left[\log\left(\frac{E_1 H^3}{kb^4}\right) + \log\left(\frac{b}{1 - \nu_1^2}\right) - 2,484 \right] \quad (1.8)$$

Charge au coin :

$$\sigma_{coin} = \frac{3Q}{H^2} \left[1 - \left(\frac{12(1 - \nu_1^2)k}{E_1 H^3} \right)^{0,3} (a\sqrt{2})^{1,22} \right] \quad (1.9)$$

Avec :

$$\begin{cases} \text{pour } a > 1,724H & b = \sqrt{1,6a^2 + H^2} - 0,675H \\ \text{pour } a < 1,724H & b = a \end{cases}$$

Sur la détermination du module de réaction k , [Horvath, 1983] propose de le déterminer comme le ratio entre le module de fondation et sa hauteur [Salasca, 1998].

Bien que ce modèle soit à la base de la conception des chaussées rigides, pour son application à l'étude des chaussées fissurées, il présente les inconvénients suivants :

- Les ressorts ont la même rigidité et travaillent indépendamment les uns et les autres.
- Les cisaillements ne sont pas pris en compte à l'interface chaussée-sol, ce qui influence beaucoup les résultats.
- Il ne peut pas représenter un complexe de type multicouche de chaussée.

Le modèle monocouche de chaussée de Pasternak (1954)

Le modèle de fondation de Pasternak [Pasternak, 1954] améliore le modèle de Westergaad pour la modélisation du sol. Ainsi, le massif de sol est toujours considéré comme un assemblage de ressorts, mais une couche de cisaillement est introduite entre la couche de chaussée et la fondation

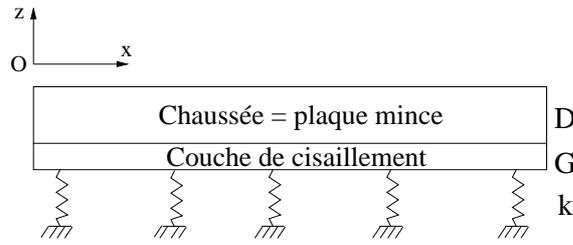


FIGURE 1.18. schéma du modèle de Pasternak

de Winkler. Cette couche est constituée de ressorts verticaux incompressibles, qui ne se déforment qu'en cisaillement, de module de cisaillement G . Cette partie ajoutée a pour fonction de ne prendre en compte que le cisaillement à l'interface chaussée-sol (cf. figure 1.18).

La détermination du module de réaction k et du module de cisaillement G a été recherchée par certains travaux. [Kerr, 1985] aboutit à la même expression que Westergaad pour k . G est donné par l'expression suivante :

$$G = \frac{E_1 H}{6(1 + \nu_1)} \quad (1.10)$$

Avec E_1 et ν_1 le module d'Young et le coefficient de Poisson de la chaussée.

Cependant, Kerr recommande pour les cas usuels de réaliser un calage de la solution analytique avec des points de mesures expérimentaux, pour un résultat fiable.

Aussi, ce modèle présente encore les inconvénients du modèle de Westergaad à savoir :

- Les ressorts ont la même rigidité et travaillent indépendamment les uns et les autres.
- La déflexion en un point donné ne dépend que de la contrainte en ce point sans qu'il y ait d'effet exercé par la fondation environnante.
- Il ne peut pas représenter un complexe de type multicouche de chaussée.

Le modèle monocouche de chaussée de Kerr (1964)

Le modèle de fondation de Kerr [Kerr, 1964] est une suite plus sophistiquée du modèle de Pasternak. Le massif de sol est un assemblage de ressorts avec une couche de cisaillement, dans lequel est introduit un assemblage de ressorts entre la couche de chaussée et la couche de cisaillement (cf figure 1.19).

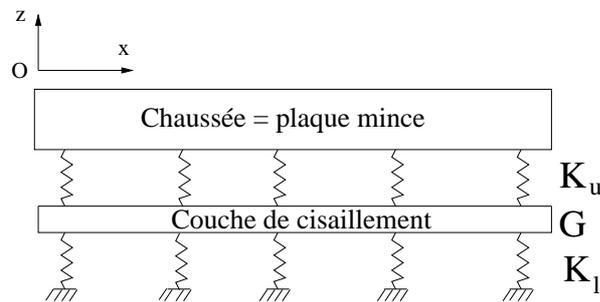


FIGURE 1.19. schéma du modèle de Kerr

En comparant les déflexions, les pressions et moments obtenus pour les trois types de charge-ments (charge uniformément répartie, forces concentrées aux bords d'une bande infinie, moments sur ces bords) au moyen de plusieurs modèles de fondation (Winkler, Kerr, Pasternak et fondation Boussinesq), Kneifati a montré que le modèle de Kerr permet d'obtenir des résultats proches de ceux déterminés par le massif de Boussinesq.

K_u , K_l et G ont, suivant leur méthode, pour expression :

$$K_u = \frac{E_1(1 - \nu_1)}{H_1(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)} \quad (1.11)$$

$$K_l = \frac{E_2\gamma(1 - \nu_2)(\sinh\gamma H_2 \cosh\gamma H_2 + \gamma H_2)}{2(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)\sinh^2\gamma H_2} \quad (1.12)$$

$$G = \frac{E_2(\sinh\gamma H_2 \cosh\gamma H_2 - \gamma H_2)}{4\gamma(1 + \nu_2)\sinh^2\gamma H_2} \quad (1.13)$$

Où E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 , H_1 , H_2 sont successivement les modules d'Young, coefficients de Poisson, épaisseurs des couches de fondation et γ est une constante gouvernant le profil de déflexion verticale.

Reste l'inconvénient majeur suivant :

- Ce modèle ne peut pas présenter un complexe de type multicouche de chaussée.

Le modèle monocouche de chaussée de Hogg (1938)

Le modèle de fondation de Hogg [Hogg, 1938] est schématisé sur la figure 1.20. La chaussée représentée par une plaque mince (E_1, ν_1) est posée sur un massif infini de type Boussinesq (E_s, ν_s). Avec l'hypothèse que la chaussée glisse parfaitement sur son support, il ne reste que deux inconnues principales du problème à déterminer : u_z et σ_{zz} à l'interface chaussée-sol. Les deux relations de continuité pour ces deux inconnues sont fournies d'une part par les équations de la plaque mince (cf. équation 1.3), d'autre part par les équations de Boussinesq d'un massif élastique semi-infini.

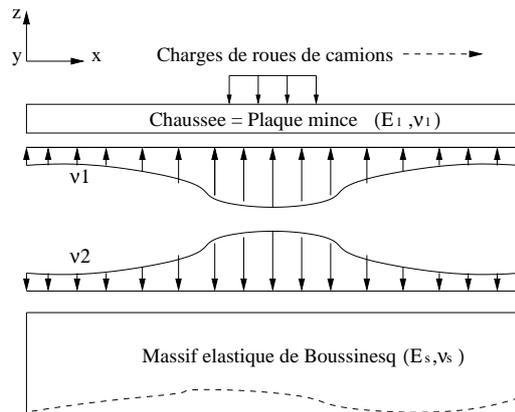


FIGURE 1.20. schéma du modèle de Hogg

Ce modèle présente encore les inconvénients suivants :

- Les cisaillements ne sont pas pris en compte à l'interface chaussée-sol, ce qui influence beaucoup les résultats.

- Il ne peut pas représenter un complexe de type multicouche de chaussée.

Le modèle multicouche de chaussée de Burmister (1943)

Le modèle de Burmister [Burmister, 1943] est schématisé sur la figure 1.21. Le multicouche de chaussée est supposé infini dans le plan, et repose sur le sol infini de Boussinesq. La charge est supposée être un cercle, ce qui facilite beaucoup le problème en le rendant axisymétrique.

La résolution d'un problème d'élasticité en coordonnées cylindriques se réduit à la recherche d'une fonction de tension (ou de Love) $\phi(r, z)$ à double Laplacien nul :

$$\Delta^2\phi(r, z) = 0 \quad (1.14)$$

Pour le problème de n couches, on recherche n fonctions définies, dans chacune des couches i par $\Delta^2\phi_i(r, z) = 0$ et par les conditions aux limites. En effectuant la transformation de Hankel

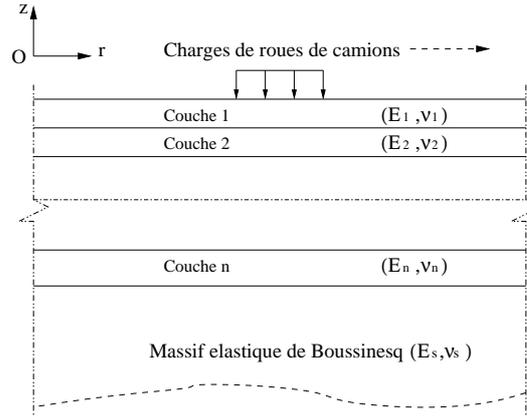


FIGURE 1.21. schéma du modèle de Burmister

d'ordre 0 sur les variables du problème, on obtient la solution :

$$\phi_i^*(m, z) = y_i(m)[(A_i(m) + zC_i(m))e^{mz} - (B_i(m) + zD_i(m))e^{-mz}] \quad (1.15)$$

Où $y(m)$ est une fonction arbitraire de m et $A_i(m)$, $B_i(m)$, $C_i(m)$, $D_i(m)$ sont déterminées par les conditions aux limites du problème, $\forall i \in [1, n]$.

Par transformation de Hankel inverse on a :

$$\phi_i(r, z) = H_0^{-1}[\phi_i^*(m, z)] \quad (1.16)$$

Les champs de contraintes et de déplacements sont ensuite déduits des fonctions $\phi_i(r, z)$.

Les avantages de ce modèle général à n couches sont que :

- toutes les couches sont examinées comme des solides élastiques, ce qui évite l'hypothèse de plaque des autres modèles.
- les interfaces entre couches peuvent être collées ou décollées.
- le calcul par ce modèle est très rapide.

C'est pourquoi la plupart des méthodes de dimensionnement l'utilisent comme noyau, y compris la méthode française de dimensionnement avec son logiciel ALIZE [LCPC, 1964].

Néanmoins, ce modèle présente encore quelques inconvénients :

- avec l'hypothèse d'axisymétrie de couche infinie dans le plan, ce modèle ne peut pas aborder la présence de discontinuités comme celles rencontrées dans les chaussées en béton ou les chaussées fissurées.
- la charge est considérée circulaire et bien que l'on puisse reconstituer une charge de forme différente par superposition des calculs ce n'est pas tout à fait satisfaisant pour modéliser dans certains cas une charge de poids lourd.

Le modèle multicouche de chaussée de Jeuffroy (1955)

Le modèle de Jeuffroy [Jeuffroy, 1955] est schématisé sur la figure 1.22. Ce modèle est une combinaison des modèles de Hogg et de Burmister. Il se compose d'une plaque mince se posant sans frottement sur une couche élastique de Burmister. Le sol est un massif semi-infini. Avec cette combinaison, le modèle permet d'y introduire des discontinuités verticales dans la première couche de chaussée (chaussée en dalle de béton par exemple). La deuxième couche est traitée comme un solide élastique. Le problème est résolu en utilisant le modèle précédent et l'équation de Lagrange pour la plaque mince :

$$\Delta^2 w = \frac{p}{D} \quad (1.17)$$

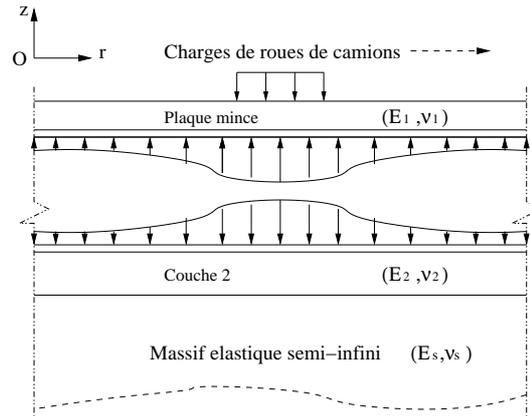


FIGURE 1.22. schéma du modèle de Jeuffroy

Où Δ est l'opérateur Laplacien et w est la déflexion de la plaque. p et D sont la charge et la rigidité de plaque.

Ce modèle présente encore quelques inconvénients :

- avec l'hypothèse de couche infinie dans le plan de la deuxième couche, ce modèle ne peut pas prendre en compte la présence des fissures dans cette couche (dont l'application peut être une étude de remontée de fissure).

- la charge est considérée circulaire, ce qui n'est pas tout à fait proche de la charge de roue de camion.

- le modèle ne prend pas en charge le cisaillement entre les deux premières couches de chaussées.

Modèle de viscoélasticité

Pour l'étude des chaussées souples à faible trafic ou soumises à de forts gradients thermiques, il est nécessaire de prendre en compte le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux que le modèle élastique de Burmister ne permet pas de prendre en compte.

Parmi les différentes recherches internationales et françaises existantes, le modèle semi analytique de [Duhamel et al., 2003] prend en compte la loi de comportement thermo-viscoélastique des enrobés bitumineux de Huet-Sayegh [Huet, 1963], [Sayegh, 1963].

Cependant ce genre de modèle exige aussi une continuité de l'espace. C'est-à-dire que l'introduction d'une discontinuité n'est pas possible.

1.3.2 Application des modèles au dimensionnement et renforcement des chaussées

Dans le cadre de cette partie, nous allons présenter la méthode française de dimensionnement des chaussées neuves, puis quelques méthodes de renforcement des chaussées.

1.3.2.1 La méthode française de dimensionnement des chaussées

La méthode française de dimensionnement des chaussées est basée à la fois sur les calculs théoriques et les expériences [LCPC, 1994]. Elle combine en effet :

- L'analyse théorique de la mécanique de chaussée, celle-ci est effectuée par le logiciel ALIZE [LCPC, 1964], qui se base sur le modèle élastique linéaire de Burmister [Burmister, 1943].
- Les résultats d'essai de laboratoire sur le comportement en fatigue des matériaux de chaussée.
- Les données obtenues par l'observation du fonctionnement des chaussées.

Dans le cadre de cette thèse, nous n'allons présenter que les contenus essentiels de l'analyse théorique de la méthode française.

Chargement utilisé

Le dimensionnement d'une chaussée est effectué pour qu'elle puisse supporter le trafic cumulé des poids lourds sur toute sa durée de vie. Ce trafic est la combinaison de différents types de véhicules, avec des charges et des géométries d'essieu très différentes. La méthode française de dimensionnement a donc utilisé un essieu de référence comme un essieu simple à roues jumelées exerçant une charge totale de 130kN.

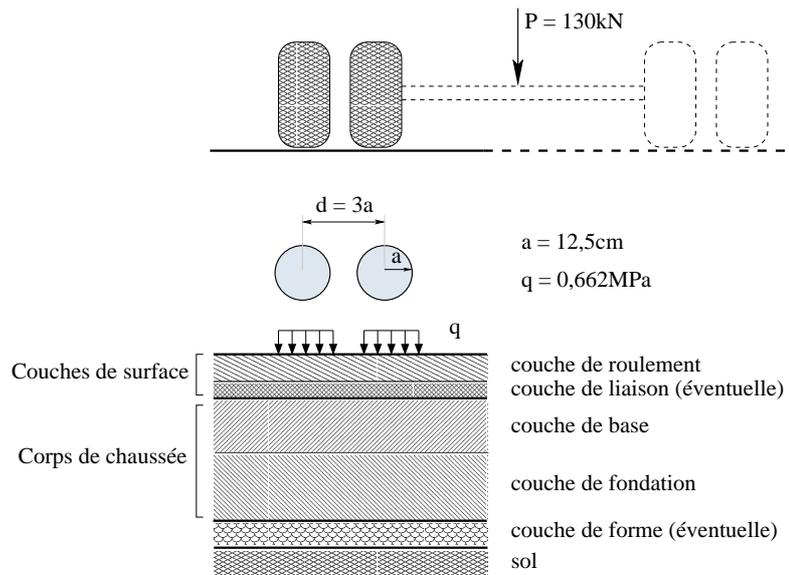


FIGURE 1.23. *Charge de référence*

Le dimensionnement est en général effectué en prenant en compte un demi-essieu, c'est-à-dire un jumelage de deux roues de 65kN au total. La charge de ces deux roues est ensuite transmise aux chaussées par deux zones de charges circulaires de rayon $r = 0.125\text{m}$, d'entre-axe $3r = 0.375\text{m}$ et de pression uniformément répartie $q = 0.662\text{MPa}$ (cf. figure 1.23).

Le logiciel ALIZE

Le logiciel de bureau d'étude ALIZE, développé par le LCPC dans les années 65 [LCPC, 1964], est le logiciel de référence utilisé pour le dimensionnement des structures de chaussées [LCPC, 1994]. Il permet de calculer les sollicitations mécaniques engendrées dans les chaussées par l'effet du trafic [Autret et al., 1982], [de Boissoudy et George, 1988].

Calcul des déformations et des contraintes

Ce calcul repose sur la détermination des champs de contraintes et de déformations créés par une charge circulaire appliquée à la surface d'un massif multicouche élastique linéaire, selon le modèle semi-analytique de Burmister [Burmister, 1943] rappelé au paragraphe précédent. Le logiciel ALIZE utilise le principe de superposition pour étendre la solution aux sollicitations plus complexes.

Vérification du comportement en fatigue des matériaux

La chaussée travaillant en flexion sous l'action répétée des chargements de poids lourds, la vérification du comportement en fatigue des matériaux constitutifs de la chaussée est effectuée en comparant les contraintes et déformations déterminées par le modèle mécanique de [Burmister, 1943]

en base de chacune des couches, là où les efforts de traction sont les plus importants, et au niveau du haut du sol, là où l'on souhaite diminuer la déformation verticale, avec celles admissibles par les matériaux.

Ces contraintes et déformations admissibles sont évaluées connaissant :

- Le trafic cumulé sur la période de calcul retenu,
- Le risque de ruine admis sur cette période,
- Les caractéristiques de la résistance à la fatigue des matériaux,
- Les données d'observation du comportement des chaussées similaires.

Le trafic est caractérisé par le nombre cumulé d'essieux équivalents à l'essieu de référence pour la durée initiale de calcul choisie.

Le risque de ruine r prend en compte la probabilité d'apparition de dégradations dans les chaussées. Cette probabilité dépend des dispersions du comportement en fatigue des matériaux et de l'épaisseur des couches de chaussée.

La vérification du comportement en fatigue des matériaux est effectuée en comparant les contraintes et déformations déterminées par le modèle mécanique précédent avec les contraintes et les déformations admissibles des matériaux. Un ensemble de normes codifie les différentes familles de matériaux de chaussée, définissant pour chacune des classes selon la qualité des constituants et certaines propriétés physiques et mécaniques des mélanges. La méthode de dimensionnement s'applique aux familles de matériaux ainsi définies. Le comportement en fatigue de ces matériaux est décrit à partir de résultats d'essais de laboratoire normalisés.

La courbe de Wöhler est la courbe représentative de l'amplitude des sollicitations appliquées aux éprouvettes de matériau sollicité en déplacement ou force imposée de même amplitude en fonction du nombre de cycles à la rupture appelé aussi durée de vie N (cf. figure 1.24). L'équation de cette courbe est la loi de fatigue du matériau.

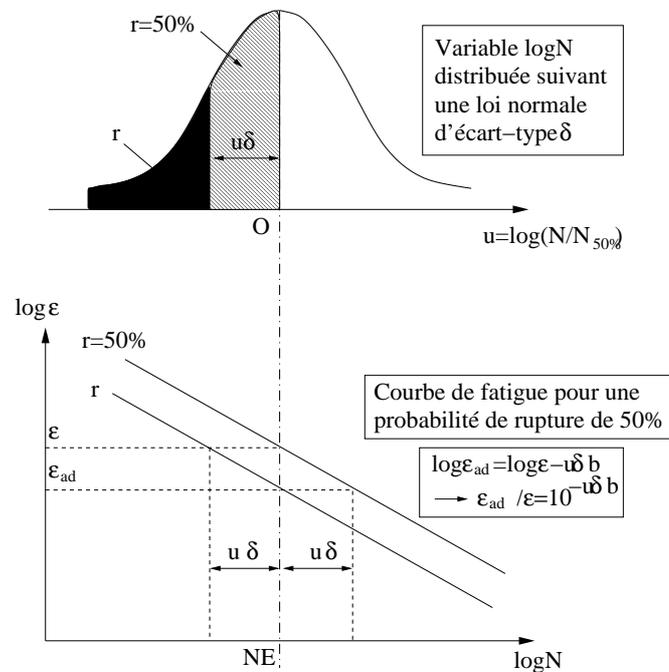


FIGURE 1.24. Courbe de fatigue de Wöhler, avec prise en compte de dispersion [LCPC, 1994]

On évalue ensuite le nombre de cycles engendrant la rupture. Cette loi de fatigue est exprimée

en termes de déformations pour les matériaux bitumineux et en termes de contraintes pour les matériaux hydrauliques. Elle se présente comme suit :

- pour les matériaux bitumineux :

$$\log \varepsilon = a + b \log N \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_6} = \left(\frac{N}{10^6} \right)^b \quad (1.18)$$

- pour les matériaux hydrauliques :

$$\log \sigma = a + b \log N \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma}{\sigma_6} = \left(\frac{N}{10^6} \right)^b \quad (1.19)$$

Ces dernières formules, qui résultent de la linéarisation de l'expression en échelle bilogarithmique de la loi de fatigue, sont valables pour N compris entre 10^5 et 10^7 . Dans ces expressions :

N est le nombre de cycles entraînant la rupture sous le niveau de déformation ε ou de contrainte σ ;

ε_6 , σ_6 sont la déformation et la contrainte correspondant à 10^6 cycles provoquant la rupture.

b est la pente de la droite de fatigue en coordonnées bilogarithmiques.

Enfin, un coefficient multiplicateur de "calage" est introduit pour corriger les écarts entre les prédictions tirées de la démarche du calcul et l'observation du comportement des chaussées.

Cas particulier du dimensionnement des chaussées rigides

La méthode française de dimensionnement donne les démarches pour calculer les chaussées rigides. Les chaussées rigides présentent deux caractéristiques spéciales : la présence de discontinuités (joints de retraits transversaux, bords et joints longitudinaux ...) et la présence d'un gradient thermique, qui, lorsqu'il est positif (la température en bas est plus basse que celle en haut de la couche de chaussée), majore les contraintes de traction en bas des couches de chaussées.

Prise en compte des discontinuités

Les dispositions constructives retenues en France pour les chaussées rigides, à savoir la sur-largeur non circulée qui éloigne le passage des véhicules du bord longitudinal de la chaussée ; le liaisonnement correct des bandes longitudinales entre voies de circulation, permettent de ne pas prendre en considération l'accroissement des contraintes le long des bords longitudinaux.

En revanche, il faut tenir compte de la majoration des contraintes au niveau des discontinuités transversales. La méthode de dimensionnement consiste à appliquer un coefficient majorateur aux contraintes obtenues par le modèle de [Burmister, 1943] du logiciel ALIZE. Ce coefficient est déterminé en deux étapes successives :

- Utilisation du modèle de [Westergaard, 1926] pour évaluer le rapport des contraintes sous une charge au bord et sous une charge au centre d'une dalle.

- Utilisation de la loi de Miner pour prendre en compte la variabilité de l'ouverture des joints et des fissures.

Loi de Miner

L'ouverture des joints (ou des fissures) varie en fonction des cycles journaliers de température : Les joints et fissures sont ainsi au cours d'une journée alternativement ouverts et fermés, ce qui se traduit par un transfert de charge alternativement faible et fort.

Pour tenir compte de ces variations, la méthode française de dimensionnement considère plusieurs classes de rapport $k_l = \frac{\sigma_l}{\sigma_i}$ où σ_l est la contrainte au niveau du joint, σ_i est la contrainte au centre), comprises entre 1 (joint totalement fermé) et k_{max} (joint totalement ouvert), auxquelles on associe une fraction $q_l = \frac{n_l}{N}$ du trafic total N pour lequel la structure est dimensionnée.

La valeur équivalente du coefficient k qui tient compte de la variabilité de l'ouverture des joints est obtenue en appliquant la loi de Miner d'additivité des dommages élémentaires. Cette loi exprime que pour une structure soumise à un chargement comprenant de chargements cycliques successifs de n_l cycles, tels que la rupture soit provoquée par N_l cycles, la rupture se produit lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\sum_{l=1,n} \frac{n_l}{N_l} = 1 \quad (1.20)$$

En utilisant la loi de fatigue du béton $\frac{\sigma_l}{\sigma_6} = \left(\frac{N_l}{10^6}\right)^b$, la relation $\sigma_l = k_l \sigma_i$ et la loi de Miner, on obtient le coefficient multiplicateur équivalent k_{eqd} à appliquer à la contrainte σ_i associée à la charge en centre de dalle, déterminé au moyen du logiciel ALIZE, pour obtenir un endommagement équivalent à l'endommagement généré par la charge positionnée au joint pour différentes classes d'ouverture du joint.

Prise en compte des gradients thermiques

Le gradient thermique, ajoute un nouveau type de chargement avec une fréquence différente à celle du trafic. Le gradient qui majore la contrainte de traction en bas des couches de chaussées est celui positif, compris entre 0 et $+0.8^\circ C/cm$, auxquelles correspondent des contraintes et des fractions du trafic. La loi de Miner conduit, en adoptant une démarche analogue à celle décrite dans le paragraphe précédent pour les effets de bords, à établir une loi de fatigue tenant compte des différentes classes de gradients thermiques. Cette loi permet de déduire la valeur du coefficient multiplicateur équivalent $k_{eq\theta}$ à introduire pour prendre en compte la majoration des contraintes induites par les phénomènes thermiques. Dans la pratique, les coefficients k_{eqd} et $k_{eq\theta}$ interviennent dans la méthode de dimensionnement au travers d'un coefficient global, noté k_d .

1.3.2.2 Les méthodes de renforcement des chaussées

Les chaussées dimensionnées peuvent être renforcées pour plusieurs raisons : soit à cause d'un sous-dimensionnement, soit à cause de leur limite d'âge par rapport au dimensionnement initial. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes appliquées au renforcement de certains types de chaussées.

Renforcement des chaussées souples traditionnelles [Peyronne et al., 1991]

Pour le renforcement des chaussées souples traditionnelles, on suppose que le module du corps de chaussée est dans un rapport de 4 avec le module E_s du sol-support (cf. figure 1.25).

e	enrobé	2000 MPa
H	non lié	(4E _s)

Sol (E_s=10–100MPa)

FIGURE 1.25. Schématisation de l'ancienne chaussée [Peyronne et al., 1991]

Le module de l'enrobé est supposé égal à 2000 MPa, valeur relativement faible pour deux raisons :

- l'enrobé est souvent dégradé
- étant donné la viscoélasticité du matériau, une bonne représentation des mesures de déflexions faites à basse vitesse est recherchée.

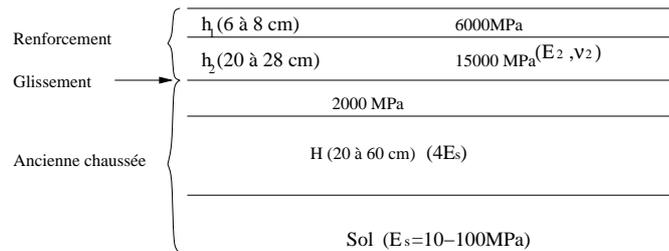


FIGURE 1.26. Renforcement des chaussées souples traditionnelles [Peyronne et al., 1991]

Ainsi l'épaisseur h_1 de l'enrobé préalablement choisie en fonction du trafic ne donne qu'une seule épaisseur h_2 à rechercher pour le renforcement. Le choix de la valeur limite liée au trafic pour la contrainte à la base du renforcement entraîne celui de l'épaisseur h_2 . La méthode de ce calcul se base sur les mêmes modèles de dimensionnement que celui des chaussées neuves (utilisation du modèle [Burmister, 1943]).

Renforcement des chaussées traitées aux liants hydrauliques

Le renforcement des chaussées traitées aux liants hydrauliques est de même nature que celui de la partie précédente. C'est-à-dire qu'il est nécessaire de déterminer les modules correspondants des couches et du sol, puis d'utiliser le modèle [Burmister, 1943] pour calculer.

Selon les différentes causes de dégradations, trois différents schémas de calcul sont obtenus.

Dans le premier cas, le matériau traité n'a pas fait prise, il peut être schématisé de même manière que celui des structures non traitées (cf. figure 1.27). Le corps granulaire peut être affecté d'un module assez élevé car il s'agit en général d'un matériau frottant.

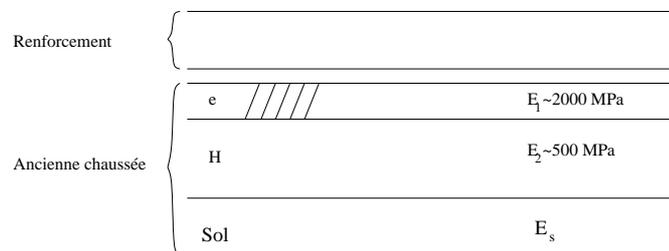


FIGURE 1.27. L'assise n'a pas fait prise [Peyronne et al., 1991]

Dans le deuxième cas où l'interface enrobé-assise traitée est dégradée (cf. figure 1.28), il suffit d'introduire une zone de 2 à 3 cm d'épaisseur de module faible (100 MPa), ce qui forme une nouvelle couche à l'interface.

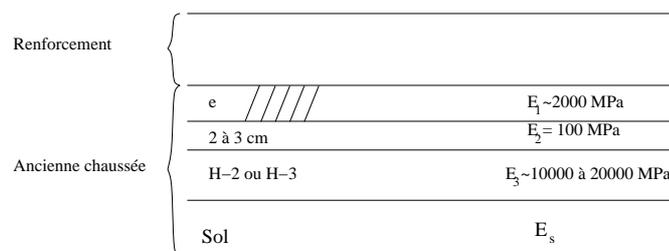


FIGURE 1.28. L'interface enrobé-assise traitée est dégradée [Peyronne et al., 1991]

Dans le dernier cas (cf. figure 1.29), l'assise est plus ou moins fissurée. On peut distinguer deux

cas. Si l'assise n'est pas très fissurée, le problème est alors un problème de propagation de fissure de l'assise vers la couche de renforcement. Si l'assise atteint l'état suffisant de fatigue, le matériau ne présente plus aucune cohésion, ce cas devient le premier cas de la partie (cf. figure 1.27).

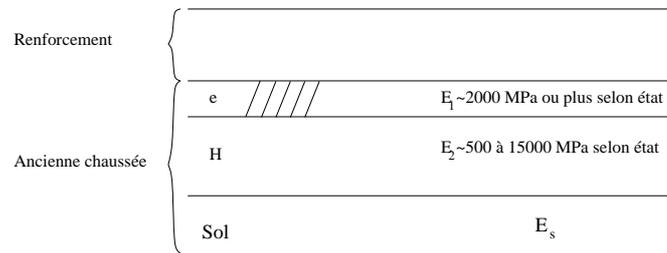


FIGURE 1.29. *L'assise est plus ou moins fissurée [Peyronne et al., 1991]*

Le logiciel ERASMUS pour le calcul de renforcement

En fonction du diagnostic obtenu et du cahier des charges, le logiciel ERASMUS développé depuis 1985 propose des solutions de travaux variées respectant les normes de l'entretien et de la réhabilitation. Il optimise les travaux d'entretien et de réhabilitation des chaussées souples, bitumineuses épaisses et hydrauliques. Il a été développé à travers les méthodes de renforcement et les catalogues d'entretien, et est largement utilisé par les entreprises françaises. Il analyse le comportement passé de la chaussée pour identifier l'origine des défauts constatés : fatigue, gel/dégel, fissuration de retrait, fissuration thermique, décollements éventuels, etc.

1.3.3 Les limitations des modèles

Dans les modèles mécaniques présentés précédemment, la prise en compte des fissures s'obtient en les considérant comme des discontinuités dans les couches de chaussées. Comme nous l'avons présenté dans les paragraphes précédents, les modèles actuels de la méthode de dimensionnement ont chacun des inconvénients.

Dans les chaussées rigides, le renforcement des chaussées, ou dans les chaussées fissurées, l'apparition de discontinuités et de bords libres provoque une croissance brutale des contraintes et des déformations. La prise en compte de ces croissances est alors exigée.

Dans les modèles simplifiés de calcul de chaussée présentés précédemment, nous pouvons voir facilement que les inconvénients principaux de ces modèles sont qu'ils ne permettent pas d'avoir un calcul juste pour la prise en compte de ces fissures.

Ces inconvénients sont de :

- ne pas bien représenter la modélisation du massif semi-infini du sol. Cet inconvénient est présent dans les modèles de [Westergaad, 1926], [Pasternak, 1954] ;

- ne pas bien représenter la modélisation d'interface entre la chaussée et le sol. Cet inconvénient est présent dans les modèles de [Westergaad, 1926], [Pasternak, 1954], [Kerr, 1964] ;

- ne pas pouvoir représenter le complexe d'un multicouche de chaussée. Cet inconvénient est présent dans les modèles de [Boussinesq, 1885], [Westergaad, 1926], [Pasternak, 1954], [Hogg, 1938], [Kerr, 1964] ;

- ne pas permettre un calcul avec des charges de formes variées (seulement avec une charge circulaire). Cet inconvénient est présent dans les modèles de [Burmister, 1943], [Jeuffroy, 1955] ;

- ne pas pouvoir prendre en compte une discontinuité ou un bord fini dans le multicouche de chaussée. Cet inconvénient est présent dans les modèles de [Burmister, 1943], [Jeuffroy, 1955], [Duhamel et al., 2003].

Conclusions

Pour le dimensionnement des chaussées effectué par les bureaux d'études, la rapidité, la simplification et surtout l'exactitude des calculs sont exigées. L'utilisation de la méthode des éléments finis donne une bonne approximation des champs mais reste un outil très lourd pour un calcul de chaussée fissurée. Ceci limite son application en bureau d'étude. De plus pour des calculs de fatigue avec au moins une centaine de cycles, le temps de calcul peut devenir prohibitif. Ces critères pour le dimensionnement d'une chaussée neuve sans fissure sont déjà assurés par le modèle de Burmister axisymétrique. Ce modèle est contenu dans la plupart des logiciels de dimensionnement comme ALIZE du LCPC. Cependant, dans le cas de dimensionnement des chaussées rigides ou le cas de renforcement des chaussées fissurées, quand il existe des discontinuités ou des bords finis dans le multicouche de chaussée, les modèles simplifiés existants ne peuvent en calculer les contraintes et déformations.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer un modèle simplifié, capable de donner une bonne approximation des champs de contraintes et de déformations pour le dimensionnement des chaussées rigides neuves et surtout pour le renforcement des chaussées fissurées. Notre but est de construire à terme un outil permettant de réaliser des dimensionnements plus économiques que ceux réalisés à partir de modèles trop simplifiés pour ces cas.

Chapitre 2

Revue bibliographique sur la fissuration des chaussées

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la chaussée, suivant son type, est composée de différentes couches de matériaux de caractéristiques très variables et que ces différents types de structure peuvent être endommagés de différentes façons. La présence des fissures produit des champs d'efforts et de déformations concentrés dans le multicouche de chaussée par rapport à ceux d'une structure saine. Pour bien contrôler ces fissures et leur évolution, il est d'abord nécessaire de connaître leur origine et leur type.

Dans la suite, nous allons décrire les différentes classes de fissures, leur évolution ainsi que les différents modèles de recherche existants pour les évaluer dans un calcul de chaussées fissurées. Enfin nous concluons sur l'emploi ou l'utilisation d'un type de modélisation pour construire l'outil utile aux ingénieurs.

2.1 Introduction de la fissuration dans les chaussées

Pour pouvoir proposer des mesures raisonnables contre la dégradation par fissuration des chaussées, il est nécessaire de comprendre leurs origines et leurs évolutions. Dans cette partie sur l'introduction de la fissuration dans les structures de chaussées, nous allons présenter d'abord les différents types de fissuration qu'elles subissent ainsi que leurs causes probables. Enfin nous présentons les mécanismes de leur évolution ou propagation.

2.1.1 Les différents types de fissuration et leur origine

Dans cette partie, nous allons présenter quelques types de fissures principales. Selon le catalogue des dégradations de chaussées [LCPC, 1998], nous pouvons classer les fissures dans la chaussée en neuf classes comme suit.

Fissure transversale

Les fissures transversales sont des fissures qui sont quasi-perpendiculaires à l'axe de roulement des charges sur la chaussée. Elles peuvent être isolées ou périodiques d'espacement variable, traversant tout ou en partie la largeur de la chaussée (cf.figure 2.1).

Ces fissures transversales concernent les types de structures suivantes : chaussées bitumineuses épaisses, chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques, chaussées mixtes, chaussées inverses.

Elles peuvent être causées soit par la remontée en surface d'une fissure de prise ou de retrait thermique d'une couche à liant hydraulique dans le cas de chaussées semi-rigides, soit par la remontée en surface d'un joint transversal de mise en oeuvre de l'assise traitée.



FIGURE 2.1. *Fissure transversale : fissure franche et perceptible [LCPC, 1998]*

Fissure longitudinale

Deux types de fissures longitudinales sont possibles :

Les fissures longitudinales dans les bandes de roulement

Ce sont des fissures quasi-parallèles à l'axe de la chaussée apparaissant exclusivement dans l'empreinte des roues de la charge, appelée bande de roulement (cf. figure 2.2).

Ces fissures concernent les chaussées souples traditionnelles, les chaussées bitumineuses épaisses, les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques, les chaussées mixtes et les chaussées inverses.

Les fissures longitudinales dans les bandes de roulement sont probablement causées par la fatigue de la structure par excès de contrainte à la base de la ou des couches traitées ayant pour origine un sous-dimensionnement ou un décollement entre des couches.



FIGURE 2.2. *Fissure longitudinale dans une bande de roulement [LCPC, 1998]*

Fissures longitudinales non spécifiques aux bandes de roulement

Ce sont des fissures quasi-parallèles à l'axe de la chaussée et non limitées aux bandes de roulement. Ces types de fissures concernent seulement les chaussées en dalle de béton. Elles sont

probablement causées par le retrait thermique du béton en cas de sciage tardif, par le retrait hydrique, par le gel ou par un mauvais drainage.

Fissures en dalles

Les fissures en dalles sont un ensemble de fissures longitudinales et transversales se rejoignant pour former un réseau ou un maillage quasi rectangulaire de mailles inférieures ou égales à 2m [LCPC, 1998] (cf. figure 2.3).

Ce type de fissuration concerne les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques et chaussées mixtes.

Elles sont probablement dues à une évolution de l'endommagement par excès de contraintes de traction-flexion à la base des couches d'assises traitées aux liants hydrauliques. L'origine de cet excès de contrainte réside en général dans la sous-épaisseur d'une assise ayant par ailleurs de bonnes performances.

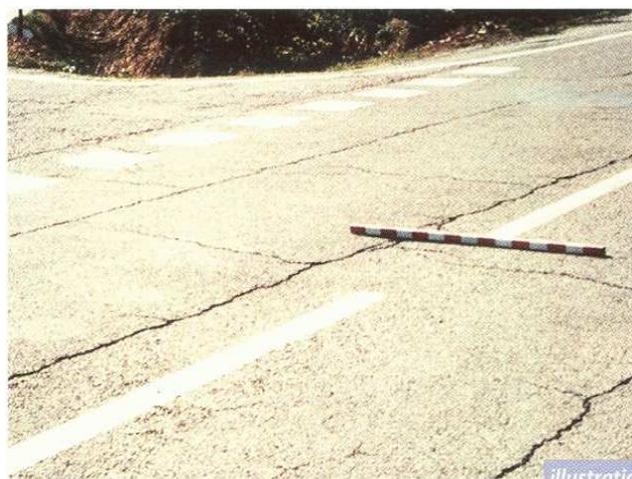


FIGURE 2.3. *Fissure en dalle* [LCPC, 1998]

Fissures de joint

Les fissures de joint sont des ouvertures qui apparaissent sous forme de fissures rectilignes aux raccordements de deux bandes d'enrobés (joint longitudinal) ou à une reprise d'une bande d'enrobé (joint transversal).

Ce type de fissuration concerne seulement les chaussées dont les couches de roulement sont en béton.

Elles sont probablement causées par soit un mauvais accrochage initial entre les deux bords du joint, faute de réchauffage ou de badigeonnage, soit dans le cas contraire, par une rupture qui provient du vieillissement du liant sous l'effet des variations de température et elle se produit en dents de scie.

Fissures d'adaptation

Les fissures d'adaptation sont des fissures qui proviennent de mouvements de sol (cf. figure 2.4).

Ces types de fissures concernent pratiquement tous les types de structures de chaussées : chaussées souples traditionnelles, chaussées bitumineuses épaisses, chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques, chaussées mixtes, chaussées inverses.

Elles sont généralement causées par un glissement de terrain ou par un tassement de remblai (instabilité) ou par un tassement d'élargissement (support sous compacté ou structure sous-dimensionnée) ou enfin par le retrait hydrique du sol support (argiles, limons, marnes).



FIGURE 2.4. *Fissure d'adaptation*

Fissures diverses

Ce sont des fissures qui apparaissent de façon anarchique à la surface de la chaussée. On rencontre généralement des fissures paraboliques, en étoile ou en Y (cf. figure 2.5). Elles concernent les chaussées en béton et sont causées par le dédoublement d'une fissure transversale.



FIGURE 2.5. *Fissure diverse en Y dans la chaussée en béton [LCPC, 1998]*

Faiçonnage

Trois types de faiçonnage existent.

Faiçonnage dans les bandes de roulement

Le faïençage dans les bandes de roulement est un ensemble de fissures entrelacées ou maillées (mailles fines inférieures à 30 cm) formant une série de polygones.

Ces types de fissures concernent pratiquement toutes les structures de chaussées (les chaussées souples traditionnelles, les chaussées bitumineuses épaisses, les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques, les chaussées mixtes ou les chaussées inverses).

Elles sont probablement causées par soit une fatigue excessive de l'assise provoquée par un excès de contrainte de traction par flexion à la base de la ou des couches traitées soit un décollement de la couche de roulement.

Faïençage non spécifiques aux bandes de roulement

C'est un ensemble de fissures entrelacées ou maillées soit avec des mailles fines (inférieures à 30 cm) soit avec des mailles larges (supérieures à 30 cm). Le tout forme une série de polygones non limités aux bandes de roulement. Ces types de fissures concernent les chaussées dont les couches de roulement sont en béton. Elles sont probablement causées soit par la fragilité du liant du à son vieillissement, soit par les conditions de fabrication de l'enrobé ou soit par sa trop grande dureté d'origine.

Faïençage circulaire

C'est un ensemble de fissures entrelacées ou maillées (mailles fines inférieures à 30 cm) formant une série de polygones apparaissant ponctuellement et affectant une zone de forme sensiblement circulaire dont le diamètre est généralement inférieur à 1m (cf. figure 2.6).

Ces types de fissures concernent les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques, ou les chaussées mixtes.

Elles sont probablement dues à un défaut ponctuel à la surface de l'assise traitée aux liants hydrauliques qui peut provenir soit d'un excès d'eau (précipitations) ou un manque d'eau (dessiccation) dus à une protection insuffisante de l'assise lors de sa réalisation. Soit elles sont dues à un feuilleteage en haut de l'assise consécutif à un compactage trop intense sur des matériaux trop tendres ou à des contraintes de cisaillement excessives engendrées par le trafic lourd. Soit elles sont causées par une ségrégation des matériaux lors de la mise en oeuvre.



FIGURE 2.6. *Faïençage circulaire [LCPC, 1998]*

Cassures d'angle

Les cassures d'angle sont des ruptures de dalle joignant deux côtés adjacents et situées à moins de 50 cm du coin de la dalle (cf. figure 2.7).

Ce type de fissures concernent les chaussées en béton et composite.

Elles sont probablement causées par soit un sciage tardif du béton créé pour contrôler la fissuration de retrait. Soit un mauvais appui du coin de la dalle les génère. Soit elles résultent du piège à eau en bordure de dalle généré par un battement de joint transversal.

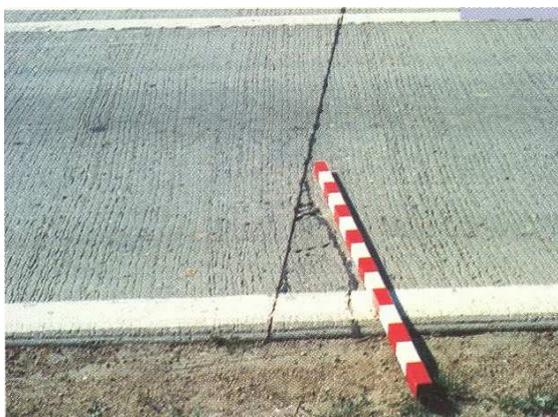


FIGURE 2.7. *Cassure d'angle : cassure dégradée avec départ de matériaux [LCPC, 1998]*

Fissure oblique

Les fissures obliques sont des cassures de dalle joignant deux côtés adjacents et situées à plus de 50 cm du coin de la dalle (cf. figure 2.8). Ces types de fissures concernent les chaussées en béton.

Elles sont principalement causées par le retrait thermique du béton en cas de sciage tardif, par la fatigue de la structure, ou par un mauvais appui de la dalle.



FIGURE 2.8. *Fissure oblique de dalle [LCPC, 1998]*

2.1.2 L'évolution des fissures

L'évolution des fissures sous l'effet cyclique de différents types de chargement peut être divisée en trois phases : l'initiation des fissures, la propagation des fissures (Propagation d'une fissure des couches du bas vers la surface, propagation des fissures des couches du haut vers le bas, propagation des fissures d'interface) et enfin la rupture totale de la structure.

2.1.2.1 L'initiation des fissures

A l'échelle granulaire, le matériau de la chaussée sans fissure soumis au chargement cyclique (du trafic ou thermique) présente toujours un ou plusieurs défauts. Ces types de chargements créent dans ces zones des concentrations de contraintes. Cette phase comprend la formation des fissures capillaires, des microfissures et des dislocations.

La phase d'initiation présente une chute importante des modules de rigidité des matériaux.

2.1.2.2 La propagation des fissures

La phase de propagation des fissures au sein des structures de chaussée présente des faibles changements de rigidité des matériaux mais des concentrations de contraintes à leur voisinage. Trois types de propagation sont rencontrés : la propagation d'une fissure des couches du bas vers la surface [Florence et al., 2004], la propagation des fissures des couches du haut vers le bas [Tamagny et al., 2004], [Nesnas et Nunn, 2004], la propagation des fissures d'interface (décollement d'interface) [Pouteau et al., 2004], [Chabot et al., 2004].

Les possibilités du cheminement de la fissuration vers la couche de roulement et aux interfaces est schématisé par [Goacolou et Marchand, 1982] (cf. figure 2.9).

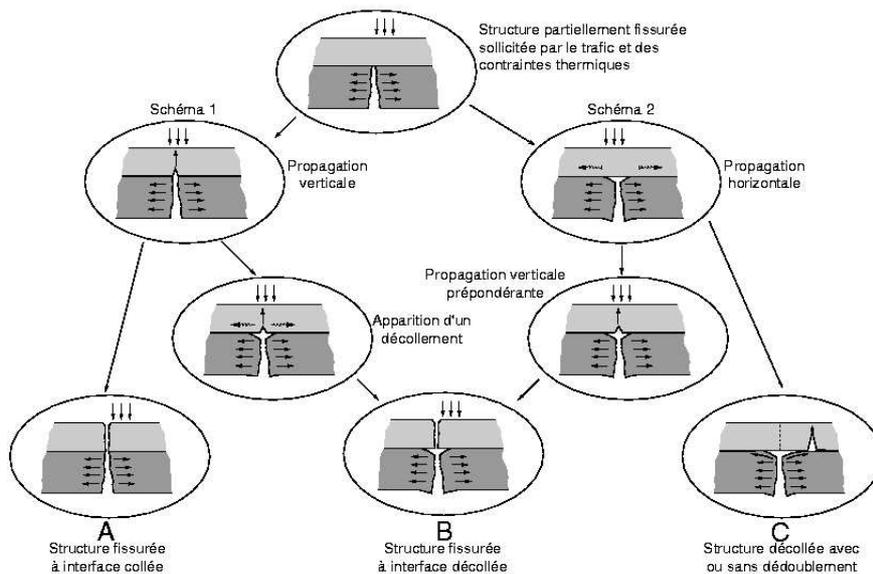


FIGURE 2.9. Cheminement de la fissuration [Marchand, 1984]

Propagation des fissures vers la couche de roulement

La remontée d'une fissure existante, au travers de la couche de roulement, est le résultat de mouvements des lèvres de la fissure qui sont transférés à la base de la couche de surface. Afin d'identifier correctement le problème de la remontée de fissure, il est bien nécessaire d'identifier les différents paramètres qui peuvent causer ces mouvements.

Les trois types de chargement qui provoquent des mouvements des lèvres de la fissure

- Trafic : Les véhicules qui passent au droit de la fissure ou à proximité induisent des mouvements horizontaux et verticaux de la fissure.

- Variation de température : Le changement de température entre jour-nuit, hiver-été provoque des dilatations et contractions dans la chaussée. Ces mouvements alternent entre l'ouverture et fermeture de la fissure.

- Variation de teneur en eau du sol : La variation de teneur en eau du sol se traduit par un changement de la portance du sol qui se répercute aussitôt sur la fissure par une ouverture ou une fermeture.

Nature de mouvement des lèvres de fissure et ses combinaisons dans la fissure de chaussée

Les trois mouvements possibles des lèvres de fissure sont classés selon un schéma conventionnel de [Irwin, 1957] (cf. figure 2.10)

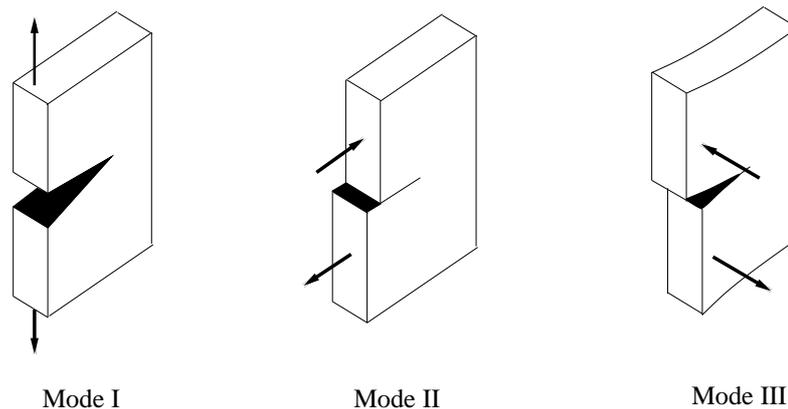


FIGURE 2.10. *Mode I : Ouverture ; Mode II : Cisaillement ; Mode III : Déchirement*

Dans la chaussée, ces trois types de mouvements vont causer la rupture de la couche de surface selon une combinaison comme suit (cf. figures 2.11, 2.12, 2.13, [Vanelstraete et Francken, 1997] et [Colombier, 1989]) :

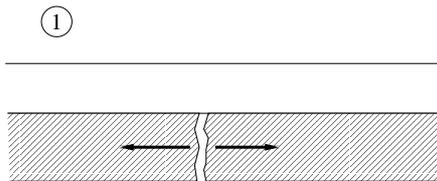


FIGURE 2.11. *Mode I : Retrait thermique*

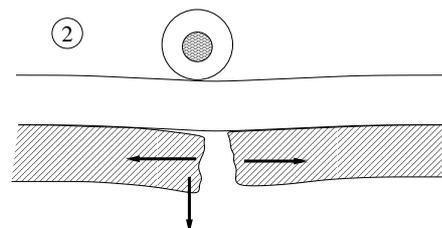


FIGURE 2.12. *Mode I + II : Passage des charges de véhicule*

Propagation des fissures du haut vers le bas

Ce type de fissure commence sur la surface de chaussée et se propage vers les couches de chaussées en bas. Les fissures de haut en bas peuvent se produire sous diverses causes. Le trafic, la complexité de l'interaction pneu/surface de chaussée, chargement cyclique de la température, le dépassement de l'âge du bitume, le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux sont autant de raisons probables de leur apparition [Tamagny et al., 2004]. Ce type de propagation de fissure a été le but de plusieurs travaux de recherche, nous pouvons citer ici ceux de [Nesnas et Nunn, 2004], [Sangpetngam et al., 2004], [Svasdisant et Baladi, 2004], [Rowe et Pellinen, 2004] ...

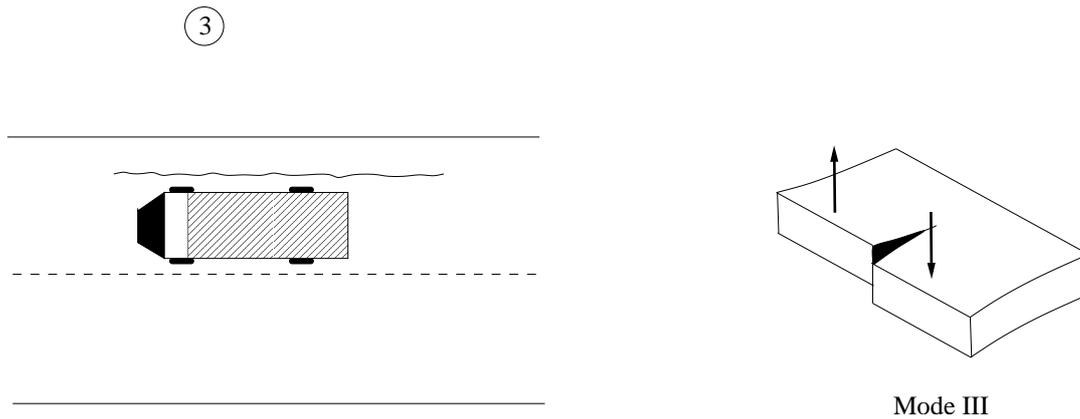


FIGURE 2.13. *Mode III : Véhicule circulant le long d'une fissure longitudinale [Vanelstraete et Francken, 1997]*

Avec une même analyse que la partie précédente, nous pouvons remarquer les trois combinaisons possibles pour la propagation des fissures du haut vers le bas.

Mode I : Sous chargement du retrait thermique, les lèvres de fissure peuvent s'ouvrir. Cela correspond au mode I.

Mode II, mode III : Selon la position de la fissure par rapport au sens de roulement des véhicules, nous pouvons avoir une ouverture en mode II ou mode III.

Dans les cas de combinaison des charges (retrait thermique + trafic , ..), nous pouvons avoir des ouvertures de fissures correspondant à la combinaison des modes I, II, III.

Propagation des fissures (Décollements) d'interface

Le décollement d'interface des couches de chaussées peut apparaître et se propager pour plusieurs raisons. L'étude de ce problème devient très important dans les types de chaussées souvent à base de béton de ciment où le collage des couches renforce la capacité portante de chaussée (structures composites par exemple) [Pouteau et al., 2004].

Avec les mêmes analyses que précédemment, le décollement peut se propager suivant les trois modes d'ouverture, ou une combinaison entre ces modes.

2.1.2.3 La rupture

La rupture de la chaussée intervient à l'apparition des fissures sur la surface (remontée de fissure vers la couche de roulement), ou la rupture totale des couches de chaussée. Elle présente une décroissance accélérée de rigidité de matériau, un développement rapide des fissures et macrofissuration, une perturbation thermique et un endommagement jusqu'à la rupture.

Pour modéliser l'évolution des fissures, les calculs actuels se basent sur les deux approches : Approche par la mécanique de rupture, nous pouvons citer les travaux de [Goacolou et al., 1983], [Marchand, 1984] et de [Elouard, 1993], ou approche par la mécanique de l'endommagement, nous pouvons citer les travaux de [Laveissiere, 2001], [Bodin et al., 2004]. Ces deux approches apportent chacune leur contribution à la modélisation en fatigue du matériau.

2.2 Modèles de calcul des chaussées fissurées ou des chaussées existant des bords libres

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, pour le calcul des chaussées fissurées (du haut vers le bas ou le contraire), il est difficile d'effectuer des modélisations avec les modèles simplifiés existants. C'est pourquoi les calculs de chaussées fissurées s'effectuent préférentiellement par des calculs aux éléments finis. Ces calculs sont en effet soit des calculs tridimensionnels, soit des calculs 2D correspondant à la structure 3D de chaussée fissurée.

Pour le calcul des chaussées en béton, outre la méthode des éléments finis, il existe aussi des modèles simplifiés pour leur modélisation.

Dans cette partie, nous allons présenter les méthodes de modélisation par éléments finis 3D, 2D pour ces deux types de structures de chaussées béton ou à base d'enrobé bitumineux, et la modélisation par un modèle simplifié pour la chaussée en béton.

2.2.1 Modélisation de la chaussée fissurée par éléments finis 3D

Les calculs de chaussée fissurée par éléments finis sont de plus en plus développés avec la progression des processeurs de calcul. Ces modélisations sont faites à partir de structure multicouche reposant sur un massif très profond et large. Nous pouvons remarquer quelques calculs de [Salasca, 1998], [Li, 1999], [Vanelstraete et al., 2000], [Romanoshi et Li, 2002], [Cho et Koo, 2003], [Shoukry et al., 2004], [Nesnas et Nunn, 2004] ...

Nous présentons ci-dessous quelques maillages 3D de calculs de chaussées réalisés par éléments finis (cf. figures 2.14, 2.15).

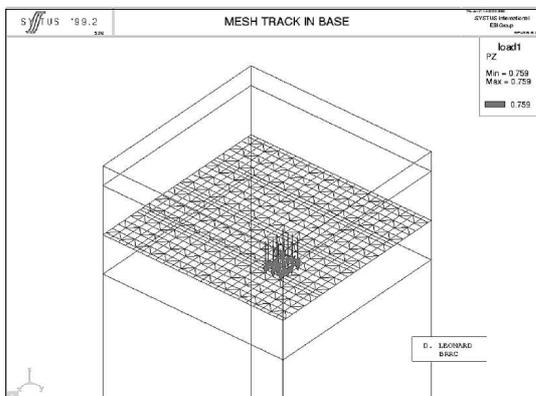


FIGURE 2.14. Maillage des éléments finis 3D [Vanelstraete et al., 2000].

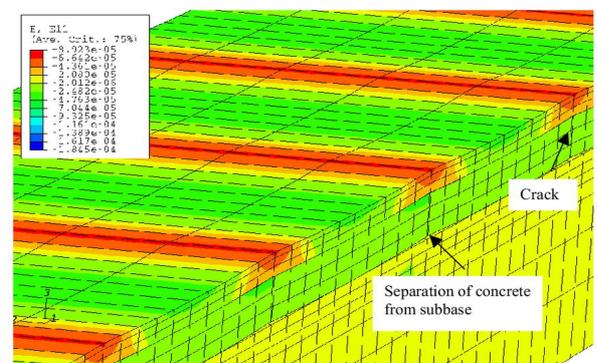


Fig. 6 Detail of pavement curling

FIGURE 2.15. Maillage des éléments finis 3D [Nesnas et Nunn, 2004].

Même avec les progrès considérables des processeurs de calcul, l'inconvénient principal de la modélisation des chaussées fissurées par éléments finis 3D est que pour avoir une relativement bonne approximation des champs, il faut mailler assez finement. Un calcul élastique 3D avec 50.000 noeuds (quand le calcul demande un maillage assez fin) peut prendre environ 3h de calcul sur un pentium IV-1.7Ghz. De plus, pour les chaussées, les dimensions de la structure choisies sont aussi importantes que le maillage. Au travers des caractéristiques et des paramètres des matériaux, nous pouvons choisir les bonnes dimensions (longueur, largeur de la chaussée, profondeur du sol ...). En réalité, il est difficile de déterminer la bonne dimension de la structure dès le premier maillage par éléments finis et l'on doit s'assurer que les champs ne varient plus lorsque les dimensions de l'objet augmentent.

Dans les calculs non linéaires, le calcul sera beaucoup plus long.

2.2.2 Les calculs 2D correspondants au calcul 3D

C'est pourquoi certains auteurs ont cherché à modéliser la structure de chaussée 3D par des calculs 2D correspondants. On voit aisément l'avantage que peut donner ce type d'approximation dans le cas de calcul en fatigue avec un nombre important de cycles de chargement. Dans le cas de la prise en compte du trafic, l'hypothèse de déformation plane est admise. Seulement comme l'a souligné [Monismith et al., 1980], la solution idéale est de considérer le système routier en trois dimensions. En effet, il faut garder à l'esprit que l'état 2D ne correspond pas à la réalité et peut même dans certains cas conduire à des déductions erronées [Francken et Vanelstraete, 1992].

Pour illustrer, nous allons présenter ci-dessous quelques méthodes que les calculateurs ont utilisées.

Le calcul 2D correspondant de [Rigo et al., 1993]

Le calcul 2D correspondant de [Rigo et al., 1993] est présenté en figure 2.16. Dans ces calculs, le chargement du calcul 3D est considéré sur une surface carrée de 30 x 30 cm, de pression uniformément répartie de 0.7 MPa. Le calcul 2D correspondant est acceptable pour un chargement 2D de 9 cm de largeur, de 0.662 MPa de pression, qui donnerait les mêmes contraintes principales au pic de la fissure (point A dans la figure 2.16).

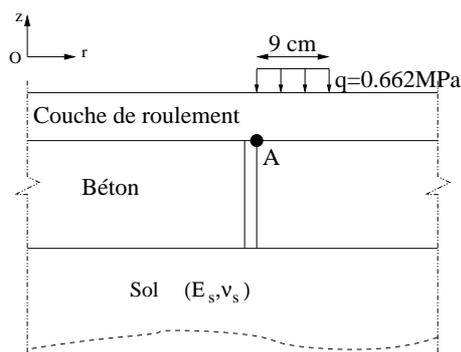


FIGURE 2.16. Schéma du calcul 2D correspondant de [Rigo et al., 1993].

Le calcul 2D correspondant de [Molenaar, 1983]

Le calcul 2D correspondant de [Molenaar, 1983] est présenté en figure 2.17. Dans ces calculs, la contrainte de traction en bas de la couche bitumineuse est considérée importante. Le chargement réparti est diminué par un coefficient c pour que l'on puisse trouver la même valeur de contrainte de traction à côté de la charge, en bas de la couche bitumineuse. Ces calculs sont faits avec le cas 2D de déformation plane sans fissure et le cas 3D sans fissure.

Pourtant, ces modèles présentent les inconvénients suivants :

- Ils ne peuvent pas apporter la correspondance de tous les champs de contraintes (ou déformations) des vrais calculs 3D. Ils ne peuvent assurer une bonne approximation que d'une valeur d'un paramètre en un point de cet espace. Ce paramètre est défini suivant le type de calcul que le calculateur souhaite faire.

- Dans le calcul sous chargement cyclique, quand il existe une dégradation de matériaux, les modules d'Young changent. Le modèle 2D correspondant ne va plus donner une valeur correspondante au calcul 3D car les paramètres du calcul 2D sont déterminés seulement pour les modules d'Young initiaux.

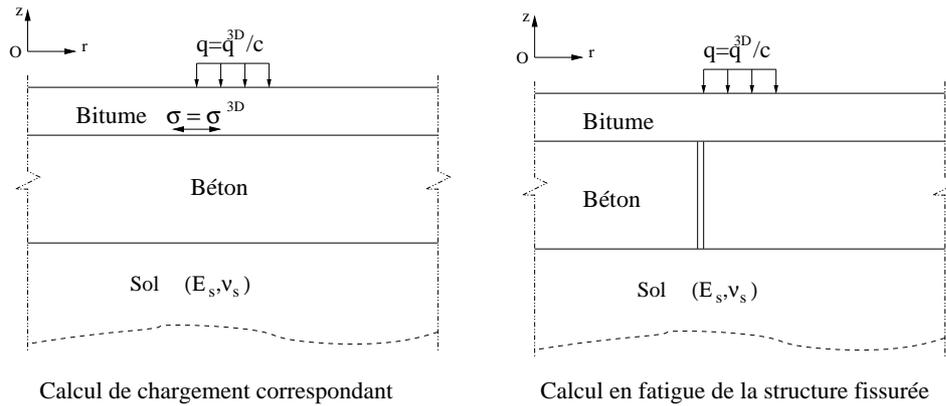


FIGURE 2.17. Schéma du calcul 2D correspondant de [Molenaar, 1983].

2.2.3 Les modèles simplifiés de chaussée fissurée

Le modèle DALLE à trois dimensions [Frémont, 1972]

Le modèle DALLE décrit une dalle élastique reposant sur un massif stratifié élastique (cf. figure 2.18).

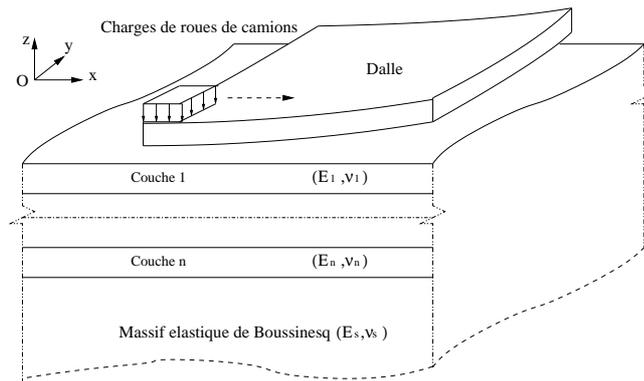


FIGURE 2.18. Schéma de calcul du modèle DALLE.

Dans le modèle, la dalle est de dimensions finies, les diverses couches qui composent le massif sont infinies horizontalement, l'épaisseur de la dernière couche est infinie.

La liaison entre le solide et le massif stratifié peut être de type collé ou décollé. Le modèle est alors susceptible d'être calculé sous effet thermique ou avec diverses charges statiques.

La dalle y est discrétisée en éléments tétraédriques à 4 noeuds à fonction d'interpolation linéaires. Le sol de fondation est représenté par un massif de Burmister. Sa prise en considération dans la modélisation se fait par l'intermédiaire de sa matrice de Green. Cette matrice relie les déplacements u_z des noeuds du maillage sur la face supérieure du massif aux forces de réaction σ_{zz} en ces noeuds : $u_z = M\sigma_{zz}$. Cette relation sert ensuite à déterminer la matrice de rigidité de la fondation.

Le modèle DALLE est donc particulièrement intéressant pour étudier le fonctionnement des chaussées rigides grâce à une modélisation réelle des phénomènes. Pourtant il présente l'inconvénient majeur suivant :

- La discontinuité peut intervenir seulement dans la première couche (Dalle). Si les défauts se trouvent dans la deuxième couche de chaussée, le modèle ne peut pas le représenter.

Les autres modèles simplifiés

Notons que la plupart des modèles simplifiés présentés dans le chapitre I peuvent nous permettre d'introduire la discontinuité dans la structure de chaussée. Nous pouvons le trouver dans les modèles de [Westergaad, 1926], [Pasternak, 1954], [Kerr, 1964], [Hogg, 1938], [Jeuffroy, 1955]. Par contre, dans tous ces modèles, l'introduction de la fissure n'est possible que dans la première couche de chaussée. C'est-à-dire qu'ils ne sont efficaces que dans le cas de structure de chaussée en béton ou composite (le cas où la discontinuité se trouve dans la première couche de chaussée). Pour les cas où la fissure apparaît et remonte des couches du bas, ces modèles ne sont pas capables de calculer l'état de contraintes et déformations de la structure.

2.3 Conclusion

Dans l'objectif de fournir aux bureaux d'études un outil utile à l'analyse des champs de contraintes et de déformations dans les cas de chaussées fissurées ou dans de calculs cycliques (fatigue), la rapidité et l'efficacité des calculs sont exigées.

Comme nous venons de le voir, la modélisation de la structure de chaussée fissurée par éléments finis 3D donne des calculs très lourds et coûteux pour un calcul d'ingénieur, ou pour un calcul de fatigue, ou des calculs nonlinéaires ...

Les modèles de calcul par éléments finis 2D correspondants aux 3D semblent rapides mais ne traduisent pas la réalité ([Rigo et al., 1993] et [Molenaar, 1983]). Les calculs simplifiés existants ([Westergaad, 1926], [Jeuffroy, 1955], [Frémont, 1972], ...) sont rapides mais limités à des fissures dans la première couche.

Aussi la thèse se dirige vers le développement d'un modèle simplifié, qui permet de décrire de façon la plus réaliste des structures de chaussées fissurées, où la rapidité de calcul doit être assurée ([Tran et al., 2003], [Chabot et al., 2004], [Tran et al., 2004]).

Conclusions de la première partie

Dans cette première partie, nous avons présenté une introduction générale des chaussées et une étude bibliographique de la fissuration de chaussée.

Dans le chapitre 1, la chaussée ainsi que ses différents types de structure ont été présentés. Ces différentes structures supportent différents types de dégradations que l'on classe en quatre familles : les dégradations d'arrachement, les mouvements des matériaux, les dégradations de déformations et les fissures. Cette dernière famille est considérée comme un des plus grands modes de dégradations de chaussées, elle est le but de plusieurs recherches actuelles.

Dans le deuxième chapitre, la chaussée fissurée a été présentée, avec ses différents types de fissurations. L'évolution d'une fissure comprend trois étapes : l'initiation de fissure, la propagation de fissure et enfin la rupture qui représente une fissure totale. Pour modéliser ces étapes, il est commode d'utiliser la mécanique de la rupture ou la mécanique de l'endommagement. Les modèles simplifiés actuels [Westergaad, 1926], [Burmister, 1943], [Jeuffroy, 1955] ... ne permettent pas l'application de ces concepts à la chaussée fissurée, et l'utilisation de la méthode des éléments finis s'avère lourde.

Dans l'objectif d'un calcul de chaussée par des bureaux d'étude ou dans les calculs cycliques, la thèse se dirige vers le développement d'un modèle simplifié, qui pourrait éviter les inconvénients des modèles simplifiés actuels, et qui serait plus léger que la méthode des éléments finis pour le calcul d'une structure de chaussée fissurée.

Deuxième partie

Le modèle de chaussée proposé.

Dans la partie introductive et bibliographique précédente, nous avons constaté que chaque modèle simplifié actuel présente des points faibles pour modéliser la structure de chaussée fissurée. Ces modèles, soit ne peuvent pas tenir compte des défauts dans la structure des chaussées, soit ne représentent pas la complexité d'un multicouche de chaussée fissuré. L'utilisation de la méthode des éléments finis s'avère lourde.

Notre but dans cette deuxième partie consiste donc à construire un modèle simplifié qui peut prendre en compte les fissures et donner un calcul moins lourd que celui par éléments finis. Cette partie se compose de quatre chapitres.

Le chapitre 3 se concentre sur la construction du modèle simplifié. Cette construction comprend une modélisation multiparticulaire pour modéliser le multicouche de chaussée et s'appuie sur les équations de Boussinesq pour modéliser le massif de sol semi-infini. Nous donnerons dans ce chapitre le système d'équations du modèle simplifié dans un cas général de n couches de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. Les conditions aux limites seront aussi examinées.

Ensuite, dans le chapitre 4, nous présentons l'adimensionalisation et la simplification des équations du modèle. Ce travail a pour but de standardiser le système d'équations du modèle, afin que nous puissions le résoudre de façon générale.

Le chapitre 5 présente la méthode d'approximation numérique pour le système d'équations du modèle simplifié, pour un cas général de n couches de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini.

Enfin, le chapitre 6 présente la validation du modèle pour les structures de chaussée sans fissure, en 3D et en déformation plane.

Les structures fissurées seront étudiées dans la troisième partie du mémoire.

Chapitre 3

Le modèle proposé sans fissure.

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, la modélisation de la chaussée se compose de deux parties : la modélisation du multicouche de chaussée et la modélisation du sol. Dans ce chapitre, nous allons présenter les modélisations des multicouches de chaussées par les modèles multiparticulaires dont le M4-5n fait partie. Ensuite, nous allons présenter les choix possibles pour le massif de sol semi-infini, et notre choix définitif pour le sol. Le modèle a été ainsi construit.

3.1 Le modèle multicouches de chaussées.

Cette partie comprend deux paragraphes. Dans le premier, nous présentons les modèles multiparticulaires en général. Dans le second paragraphe, nous présentons le modèle multiparticulaire à 5n équations d'équilibre que nous avons choisi pour la modélisation de la chaussée.

3.1.1 Les modèles multiparticulaires.

Nous proposons ici :

- Une introduction présentant les modèles multiparticulaires
- La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner
- La construction des modèles multiparticulaires de matériaux multicouches.

3.1.1.1 Introduction des modèles multiparticulaires

Les Modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4) ont été construites avec pour but initial d'analyser simplement les champs de contraintes 3D provoquant un décollement de couche ou de la fissuration transverse dans les stratifiés. Elles sont construites à partir de champs de contraintes 3D approchés, polynomiaux en z par couche, et de la formulation d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité ([Chabot, 1997] et [Chabot et Ehrlicher, 1998]).

Les modèles multiparticulaires font une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait, avec les modèles multiparticulaires, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplées par des efforts d'interface. Le multicouche devient ainsi un objet 2D dont chaque point géométrique est le siège d'une superposition de particules matérielles correspondant aux plaques modélisant les couches (on a donc autant de particules que de couches, voir figure 3.1). Cette propriété justifie la dénomination modèles multiparticulaires. Les modèles servent surtout à évaluer correctement les contraintes aux interfaces

entre les couches. Ci-dessous, nous proposons une brève bibliographie des modèles multiparticulaires élastiques.

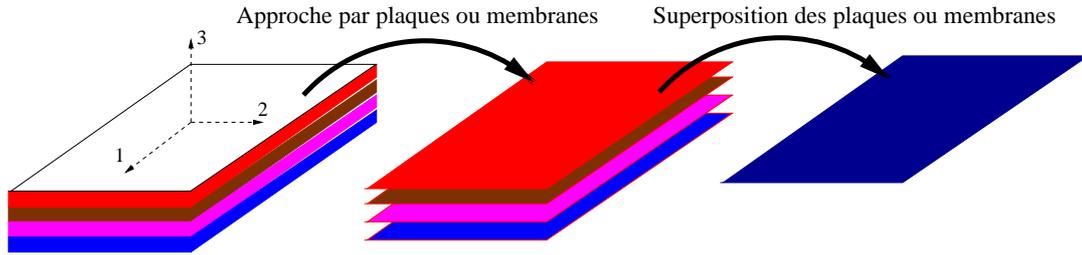


FIGURE 3.1. *Approche multiparticulaire des multicouches.*

L'une des premières approches simplifiées qu'on peut appeler multiparticulaire est celle de Puppo et Evensen [Puppo et Evensen, 1970] pour des multicouches chargés dans leur plan. Les champs par couche sont approchés par des champs moyens dans chaque couche. Le modèle prend en compte des efforts de cisaillement d'interface reliés dans le comportement aux différences de déplacement moyen des couches adjacentes. Garrett et Bailey reprennent cette idée et développent le très connu Shear Lag Analysis pour modéliser la fissuration transverse dans des empilements $(0, 90)_s$ [Garrett et Bailey, 1977]. Le modèle Shear Lag est le modèle multiparticulaire le plus simple que l'on puisse considérer.

Pagano construit ensuite le modèle local [Pagano, 1978], le plus complet des modèles multiparticulaires élastiques, à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner que nous rappellerons plus loin. Dans ce modèle, chaque couche est modélisée par une plaque à 7 champs cinématiques (plaque du troisième ordre). Le modèle est construit à partir d'une approximation en contrainte injectée dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. Les contraintes sont approchées par des polynômes en z . Les équations du modèle sont obtenues par le théorème variationnel de Reissner [Reissner, 1950]. Pagano fait apparaître dans son modèle des efforts généralisés d'interface et souligne l'absence de singularités pour ces champs. Le modèle local est malgré tout un peu lourd à manipuler pour des multicouches constitués d'un grand nombre de couches. Pagano et Soni développent alors un modèle élastique plus opérationnel : le modèle global-local [Pagano et Soni, 1983]. Dans ce modèle, on privilégie certaines interfaces et les couches les plus proches de ces interfaces sont modélisées par le modèle local. Les couches restantes sont regroupées en paquets qui sont ensuite approchés par une plaque homogène. L'avantage de ce modèle global-local par rapport au modèle local est la diminution du nombre d'inconnues et la précision de ce modèle dépend du choix des interfaces privilégiées. Les interfaces les plus sollicitées doivent être les premières à être privilégiées.

Kassapoglu et Lagace proposent une approche en contrainte par couche sous forme polynomiale en z avec des coefficients exponentiels [Kassapoglou et Lagace, 1987]. Les équations du modèle sont obtenues par minimisation de l'énergie complémentaire.

A l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Caron étudie la cinétique de fissuration transverse dans le pli à 90° d'une éprouvette $(0, 90)_s$ avec un Shear Lag 2D bâti par le principe des puissances virtuelles [Caron et Ehrlacher, 1997]. Puis, Naciri et al. s'inspirent des travaux de Pagano dans [Naciri et al., 1998] et construisent un modèle multiparticulaire plus complet que le Shear Lag mais plus simple que le modèle local de Pagano. Les équations sont encore obtenues par la méthode des puissances virtuelles. Chabot formalise ensuite la construction d'une famille de modèles multiparticulaires élastiques dits M4 (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches) [Chabot, 1997], à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner. Le modèle le plus complet est identique au modèle local de Pagano et on déduit à partir de celui-ci les autres modèles moyennant des approximations successives des multicouches minces. Dans cette famille

de modèles, on trouve les modèles $M4 - 5n$ et $M4 - 2n + 1$ comportant respectivement $5n$ et $2n + 1$ champs cinématiques pour un multicouche à n couches. Le premier modèle approche chaque couche par une plaque de Reissner ; en revanche, le second modèle approche chaque couche par une membrane. Les deux modèles font figurer des efforts d'interface dans leurs efforts généralisés.

Carreira fait ensuite une validation des modèles $M4 - 5n$ et $M4 - 2n + 1$ en comparant les résultats des modèles et ceux obtenus par éléments finis pour les problèmes de quadricouches en traction avec bord droit ou avec un trou [Carreira, 1998]. La comparaison est aussi effectuée pour le cas d'un $(0, 90)_s$ en traction. Les deux modèles donnent de bons résultats.

Hadj-Ahmed utilise le modèle $M4 - 2n + 1$ pour analyser les contraintes dans un joint de colle [Hadj-Ahmed et al., 2001]. De nouvelles comparaisons par rapport aux éléments finis sont effectuées et la bonne description des champs par les modèles est confirmée.

Chabot a construit en 1997 [Chabot, 1997] les modèles multiparticulaires des matériaux multicouches pour les problèmes d'élasticité. Ces modèles ont été généralisés en 2001 par Diaz [Diaz, 2001] afin de prendre en compte des comportements anélastiques à l'intérieur de chaque couche ou aux interfaces. Son modèle permet de décrire le comportement thermoélastique ou élastoplastique des couches et des décollements ou des glissements aux interfaces.

Limam utilise ensuite le modèle $M4 - 2n + 1$ pour étudier la réparation de poutres et de dalles en béton armé par des composites en carbone-époxy [Limam, 2003]. Moyennant la théorie du calcul à la rupture de Salençon [Salençon, 1983] adaptée au modèle $M4-2n+1$, Limam distingue plusieurs mécanismes de ruine dans les matériaux réparés et propose un dimensionnement en contrainte ultime.

Plus récemment, Nguyen développe un code aux éléments finis pour le modèle $M4-5n$ sous Fortran [Nguyen et Caron, 2004] où les éléments sont des éléments plans avec $5n$ degrés de liberté par noeud. Le logiciel développé, nommé MPFEAP permet une analyse rapide des champs au voisinage de bords libres et des interfaces dans les matériaux composites.

La construction de certains des modèles ci-dessus utilisent la formulation mixte d'Hellinger-Reissner pour obtenir une approximation des déplacements et des contraintes 3D cohérente et pour déterminer les équations des modèles. Il en sera de même pour les modèles que nous allons développer dans ce chapitre. Il nous semble donc pertinent de rappeler la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité.

3.1.1.2 Formulation variationnelle d'Hellinger Reissner

Considérons le problème d'élasticité suivant :

Soit Ω un solide 3D de frontière $\partial\Omega$.

- Le comportement du matériau constitutif de Ω est élastique linéaire hétérogène et la souplesse est donnée par le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{S}}(\underline{x})$ au point \underline{x} .

- Il existe dans le solide un champ de déformation anélastique donné par $\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x})$ au point \underline{x} .

- Il existe dans le solide une surface Γ orientée par son vecteur normal \underline{n} sur laquelle le champ de déplacement subit une discontinuité donnée par $\underline{\gamma}(\underline{x})$.

- Le déplacement est imposé sur une partie $\partial\Omega_U$ de la frontière avec la valeur $\underline{U}^d(\underline{x})$.

- Le vecteur contrainte est imposé sur la partie complémentaire $\partial\Omega_T = \partial\Omega - \partial\Omega_U$ avec la valeur $\underline{T}^d(\underline{x})$.

- Le solide est soumis au champ de forces volumiques $\underline{f}(\underline{x})$.

Introduisons les notations suivantes :

- $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$: le tenseur des contraintes 3D en \underline{x}

- $\underline{\underline{\sigma}}^*$: un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique, de classe C^1 par morceau sur Ω
- $\underline{\underline{U}}(\underline{x})$: le vecteur de déplacement 3D en \underline{x} .
- \underline{U}^* : un champ de vecteurs 3D continu sur Ω , de classe C^1 par morceau sur Ω
- $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*)$: le champ de tenseurs des déformations 3D associé à \underline{U}^*

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad}\underline{U}^*}} + {}^T\overline{\overline{\text{grad}\underline{U}^*}}) \quad (3.1)$$

La fonctionnelle H.R. [Reissner, 1950] avec l'enrichissement de [Diaz, 2001] s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H.R.(\underline{U}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*) = & \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*)(\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x})\underline{U}^*(\underline{x}) - \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{S}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_U} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x})(\underline{U}^* - \underline{U}^d)(\underline{x})dS - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x})\underline{U}^*(\underline{x})dS - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}(\underline{x})dS \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le théorème de Reissner est le suivant :

La solution du problème d'élasticité est le couple de champs $(\underline{U}, \underline{\underline{\sigma}})$ qui rend stationnaire la fonctionnelle H.R [Reissner, 1950].

En effet, la stationnarité par rapport à \underline{U}^* implique :

- Équations d'équilibre quasi-statique :

$$\overline{\overline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (3.3)$$

- Conditions aux limites :

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega_T \quad (3.4)$$

La stationnarité par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}^*$ implique :

- Equation de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x}) = \underline{\underline{S}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \quad (3.5)$$

- Conditions aux limites et de discontinuité : :

$$\begin{cases} \underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^d(\underline{x}) & \text{sur } \partial\Omega_U \\ [\underline{U}](\underline{x}) = \underline{\gamma}(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.6)$$

où $[\underline{U}]$ désigne la discontinuité de champs de déplacement \underline{U} à la surface de Γ .

Ces équations sont bien celles du problème d'élasticité posé plus haut.

3.1.1.3 Construction des modèles multiparticulaires de multicouche

La structure multicouche est un cylindre de base ω dans le plan Oxy . Nous nommons h_i^+ et h_i^- respectivement les côtes inférieure et supérieure de la couche i suivant l'axe z normal au plan Oxy du multicouche. On note par des lettres grecques les indices des composantes des tenseurs dans le plan. Les couches sont numérotées du haut vers le bas de 1 à n .

Dans les multicouches, les surfaces de discontinuité potentielle sont les interfaces entre les couches. Ainsi $\Gamma = \cup_{i=1}^{n-1} \Gamma^{i,i+1}$, où $\Gamma^{i,i+1}$ est l'interface entre la couche i et la couche $i+1$. La discontinuité sur $\Gamma^{i,i+1}$ est noté $\underline{\gamma}^{i,i+1}$.

La couche i occupe le domaine $\Omega_i = \omega \times [h_i^-, h_i^+]$ (généralement $h_i^+ = h_{i+1}^-$).

Notons $\partial\omega$ le bord de ω dans le plan Oxy, la frontière du multicouche est constituée de trois parties :

- La surface supérieure $\omega \times \{h_1^-\}$.
- La surface inférieure $\omega \times \{h_n^+\}$.
- Le bord $\partial\omega \times [h_1^-, h_n^+]$.

Nous donnons ci-dessous les notations utilisées dans chaque couche i d'un multicouche (cf. figure 3.2)

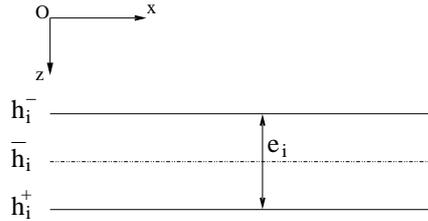


FIGURE 3.2. Schéma de calcul du multicouche tridimensionnel

Où : \bar{h}^i et e_i sont respectivement la côte moyenne et l'épaisseur de la couche i .

$$\begin{cases} \bar{h}_i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2} \\ e_i = h_i^+ - h_i^- \end{cases}$$

La construction du modèle fait appel aux étapes suivantes :

- 1) Définition des efforts généralisés.
- 2) Approximation des champs de contraintes sous forme polynomiale en z par couche. Les coefficients font intervenir les efforts intérieurs généralisés.
- 3) Introduction des champs de contraintes approchées dans la fonctionnelle H.R. et identification des déplacements généralisés et des déformations généralisées cohérentes avec l'approximation en contrainte.
- 4) Obtention des équations d'équilibre et des conditions aux limites sur les efforts intérieurs généralisés en rendant stationnaire la fonctionnelle H.R. pour une variation de déplacements généralisés.
- 5) Obtention des équations de comportement généralisées et des conditions aux limites en rendant stationnaire la fonctionnelle H.R. pour une variation des efforts généralisés.

Le calcul détaillé des modèles est écrit dans [Chabot, 1997] et [Diaz, 2001]. Nous présentons ci-dessous la construction du modèle à $5n$ équations d'équilibre.

3.1.2 Le modèle multiparticulaire à $5n$ équations d'équilibre.

Dans l'étude en flexion de chaussée que nous examinons, nous proposons d'utiliser le M4-5n. Ce modèle est construit à partir d'une approximation des champs de contraintes membranaires (σ_{11} , σ_{22} , σ_{12}) de degré 1 en z qui, par l'écriture des équations d'équilibre 3D, donne successivement pour les contraintes de cisaillement et la contrainte normale du degré 2 et 3 en z . Les coefficients de ces polynômes sont reliés aux champs d'efforts généralisés. Nous présentons ci-dessous les équations du M4-5n.

Dans cette partie nous allons tout d'abord reprendre une partie de la construction des modèles de [Chabot, 1997] et une partie d'enrichissement d'un des modèles multiparticulaires, le modèle à 5n champs cinématiques, qui a été fait par [Diaz, 2001] permettant d'établir les équations de M4-5n. Puis nous proposons un traitement qui permettra de diminuer le nombre des champs inconnus, enfin nous étudierons les conditions aux limites du problème de chaussée.

3.1.2.1 Équations du M4-5n

Nous approchons les contraintes dans le plan membranaire par des polynômes en z du premier degré. On les notera $\sigma_{\alpha\beta}$ ($(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}$). En utilisant les équations d'équilibre 3D, nous déduisons que les degrés des polynômes en z approchant les contraintes $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} sont respectivement 2 et 3. On choisit les coefficients des polynômes qui apparaissent dans l'écriture des contraintes approchées de manière à faire intervenir les champs suivants qu'on appelle efforts intérieurs généralisés :

- le tenseur plan $N_{\alpha\beta}^i(x, y)$ d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \quad (3.7)$$

- le tenseur plan $M_{\alpha\beta}^i(x, y)$ d'ordre 2 des moments de flexion de la couche i par rapport au plan médian de la couche (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \quad (3.8)$$

- le vecteur plan $Q_{\alpha}^i(x, y)$ d'effort tranchant de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz; \quad (3.9)$$

- le vecteur plan $\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y)$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface $j, j + 1$ (avec $0 \leq j \leq n$)

$$\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_{j+1}^-) \quad (3.10)$$

- le scalaire $\nu^{j,j+1}$ d'effort d'arrachement à l'interface $j, j + 1$ (avec $0 \leq j \leq n$)

$$\nu^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{j+1}^-) \quad (3.11)$$

Notons $f_{\alpha}(x, y, z)$ ($\alpha = [1, 2]$) et $f_3(x, y, z)$ respectivement les forces volumiques transversales et verticales. Dans un calcul, ces forces volumiques sont supposées connues. Désormais, pour simplifier l'écriture, nous notons :

- le vecteur plan des efforts membranaires des forces volumiques de la couche i :

$$F_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} f_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \alpha = [1, 2] \quad (3.12)$$

- le vecteur plan des moments membranaires des forces volumiques de la couche i :

$$M_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}^i) f_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \alpha = [1, 2] \quad (3.13)$$

- le scalaire plan des efforts des forces volumiques hors plan de la couche i :

$$F_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} f_3(x, y, z) dz \quad (3.14)$$

- le scalaire plan des “moments” des forces volumiques hors plan de la couche i :

$$M_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) f_3(x, y, z) dz \quad (3.15)$$

- le scalaire plan des seconds “moments” des forces volumiques hors plan de la couche i :

$$MM_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{e_i^2}{12} - (z - \bar{h}_i)^2 \right) f_3(x, y, z) dz \quad (3.16)$$

Remarque :

Pour notre problème les chargements sont appliqués en haut de la première couche de chaussée, les composantes $\tau_1^{0,1}$, $\tau_2^{0,1}$, $\nu^{0,1}$ sont donc des données. Pour les modèles classiques de multicouche, il en est de même pour les champs $\tau_1^{n,n+1}$, $\tau_2^{n,n+1}$, $\nu^{n,n+1}$. Mais dans notre calcul de chaussée, ces trois champs sont les composantes du vecteur contrainte à l'interface chaussée-sol et sont donc des efforts intérieurs généralisés du modèle.

Proposons maintenant l'approximation polynomiale pour les champs de contrainte dans la couche i :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{1}{e_i} + \frac{12}{e_i^2} M_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{5n}(x, y, z) &= Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{1}{e_i} + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \\ &+ \left(Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \right) \frac{P_2^i(z)}{e_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x, y, z) &= \left(\frac{\nu^{i,i+1}(x, y) + \nu^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha'}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha'}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{M_3^i(x, y)}{e_i} \right) \\ &+ \left(\frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha'}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha'}^{i-1,i}(x, y)) - \frac{Q_{\alpha'}^i(x, y)}{5} + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) - \frac{6MM_3^i(x, y)}{e_i^2} \right) \frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \\ &+ \left(\frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha'}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha'}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{M_3^i(x, y)}{e_i} \right) P_2^i(z) \\ &+ \left(\frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha'}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha'}^{i-1,i}(x, y)) - Q_{\alpha'}^i(x, y) - \frac{30MM_3^i(x, y)}{e_i^2} \right) P_3^i(z) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Avec

$$\begin{cases} P_2^i(z) = -6 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right)^2 + \frac{1}{2} & \rightarrow & P_2^i(z)' = -\frac{12(z - \bar{h}_i)}{e_i^2} \\ P_3^i(z) = -2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right) & \rightarrow & P_3^i(z)' = \frac{P_2^i(z)}{e_i} - \frac{1}{5e_i} \end{cases}$$

Notons que $\sigma_{\alpha\beta}^{5n}$, $\sigma_{\alpha 3}^{5n}$ et σ_{33}^{5n} vérifie les équations 3.7 à 3.11 définissant des efforts intérieurs généralisés car :

$$P_2^i(h_i^+) = P_2^i(h_i^-) = -1, P_3^i(h_i^+) = -P_3^i(h_i^-) = -\frac{1}{10} \text{ et } \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_2^i(z) dz = 0$$

Intéressons nous à $\underline{\underline{div}}\sigma^{5n}$.

Commençons par les deux premières composantes $\alpha = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta'\beta}^{5n}(x, y, z) + \sigma_{\alpha 3'3}^{5n}(x, y, z) &= \frac{1}{e_i} (N_{\alpha\beta'\beta}^i(x, y) + \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \\ &+ \frac{12}{e_i^2} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right) \left(M_{\alpha\beta'\beta}^i(x, y) - Q_{\alpha}^i(x, y) + \frac{e_i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si les forces volumiques transversales $f_{\alpha}(x, y, z)$ ($\alpha = [1, 2]$) sont polynomiales de degré 1 en z dans la couche i , alors d'après 3.12 et 3.13 :

$$f_{\alpha}(x, y, z) = \frac{1}{e_i} F_{\alpha}^i(x, y) + \frac{12}{e_i^2} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right) M_{\alpha}^i(x, y) \quad (3.21)$$

Si l'on souhaite que les deux premières équations d'équilibre 3D soient vérifiées par le champ approché $\underline{\underline{\sigma}}^{5n}$, il est nécessaire que :

$$N_{\alpha\beta'\beta}^i(x, y) + \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) + F_{\alpha}^i(x, y) = 0 \quad (3.22)$$

$$M_{\alpha\beta'\beta}^i(x, y) - Q_{\alpha}^i(x, y) + \frac{e_i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) + M_{\alpha}^i(x, y) = 0 \quad (3.23)$$

Si $f_{\alpha}(x, y, z)$ n'est pas polynomiale de degré 1 en z dans la couche i , il ne sera pas possible de vérifier exactement les deux premières équations d'équilibre 3D par $\underline{\underline{\sigma}}^{5n}$.

Étudions maintenant la troisième composante de $\underline{\underline{div}}\sigma^{5n}$.

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3'\alpha}^{5n}(x, y, z) + \sigma_{33'3}^{5n}(x, y, z) &= \frac{1}{e_i} (Q_{\alpha'\alpha}^i(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y)) \\ &- \frac{12}{e_i^2} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right) M_3^i(x, y) - \frac{30}{e_i^3} P_2^i(z) M M_3^i(x, y) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si la force volumique verticale $f_3(x, y, z)$ est polynomiale de degré 2 en z dans la couche i , alors d'après 3.14 à 3.16 :

$$f_3(x, y, z) = \frac{1}{e_i} F_3^i(x, y) + \frac{12}{e_i^2} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e_i} \right) M_3^i(x, y) + \frac{30}{e_i^3} P_2^i(z) M M_3^i(x, y) \quad (3.25)$$

Pour que la troisième équation d'équilibre soit vérifiée, il faut que :

$$Q_{\alpha'\alpha}^i(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) + F_3^i(x, y) = 0 \quad (3.26)$$

Si $f_3(x, y, z)$ n'est pas polynômiale de degré 2 en z dans la couche i , il ne sera pas possible de vérifier exactement la troisième équation d'équilibre 3D par $\underline{\underline{\sigma}}^{5n}$.

Notations des signes des efforts du modèle

Dans notre problème, nous avons choisi un système de coordonnées avec l'axe Oz vers le bas, ce qui va faciliter notre travail dans les parties suivantes.

Nous présentons ci-dessous les notations des signes des efforts dans le modèle M4-5n, les signes positifs correspondent au sens des flèches (cf. figures 3.4 et 3.5).

Les signes positifs des déplacements généralisés sont dans les mêmes directions que les axes.

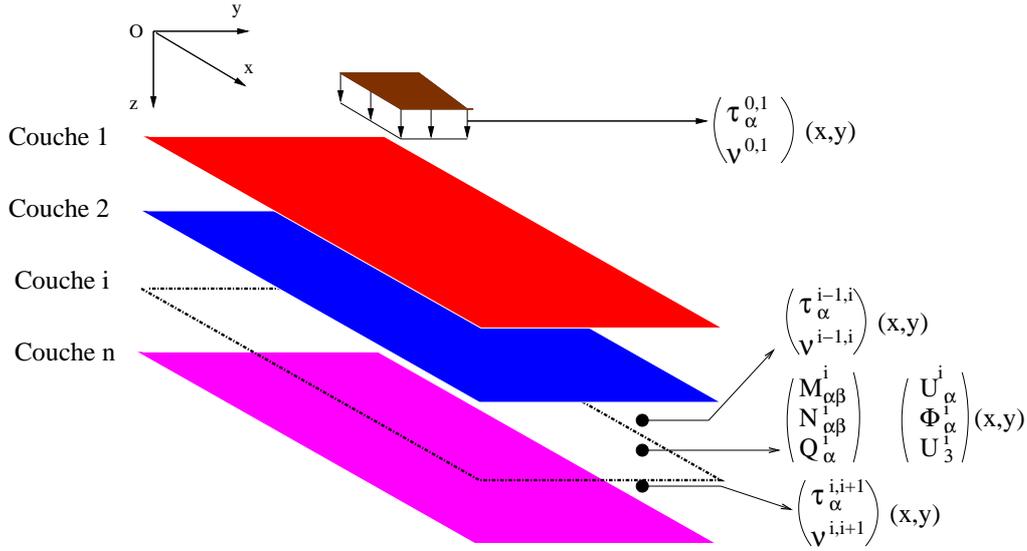


FIGURE 3.3. Schéma de calcul du multicouche tridimensionnel

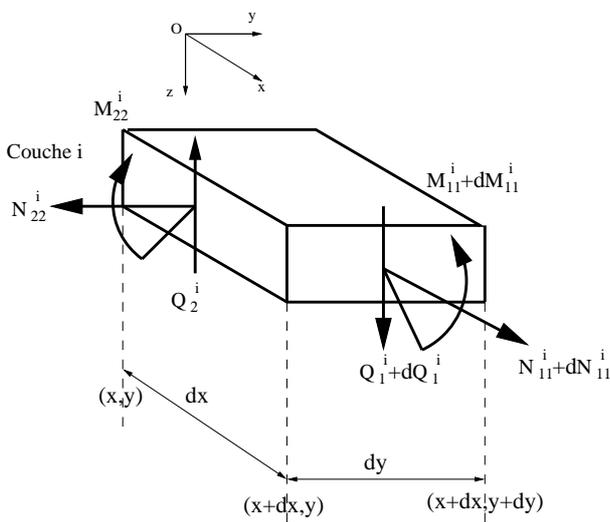


FIGURE 3.4. Notations des signes

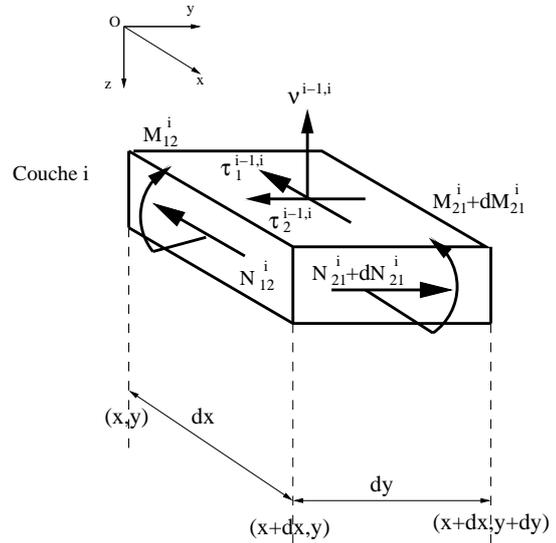


FIGURE 3.5. Notations des signes

Définitions des déplacements et des déformations généralisés du M4-5n

Nous donnons les définitions des déplacements généralisés suivantes :

Déplacements membranaires moyens de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} u_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.27)$$

Rotations moyennes de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\Phi_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}_i)}{e_i^3} u_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.28)$$

Déplacement vertical moyen de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$U_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} u_3(x, y, z) dz \quad (3.29)$$

Nous donnons les définitions des déformations généralisées suivantes :

Déformations membranaires de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2}(U_{\alpha'\beta}^i(x, y) + U_{\beta'\alpha}^i(x, y)) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (3.30)$$

Courbures de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\chi_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi_{\alpha'\beta}^i(x, y) + \Phi_{\beta'\alpha}^i(x, y)) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (3.31)$$

Déformation de cisaillement de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$d_{\Phi\alpha}^i(x, y) = \Phi_{\alpha}^i(x, y) + U_{3'\alpha}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.32)$$

Déformation de cisaillement de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) = U_{\alpha}^{i+1}(x, y) - U_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e_i}{2}\Phi_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e_{i+1}}{2}\Phi_{\alpha}^{i+1}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.33)$$

Déformation normale de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_3^{i,i+1}(x, y) = U_3^{i+1}(x, y) - U_3^i(x, y) \quad (3.34)$$

Nous donnons les définitions des déformations généralisées anélastiques :

Déformations membranaires anélastiques de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (3.35)$$

Courbures anélastiques de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\chi_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}_i)}{e_i^3} \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (3.36)$$

Déformation de cisaillement anélastique perpendiculaire au plan de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$d_{\Phi\alpha}^{ian}(x, y) = 2 \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.37)$$

Glissement anélastique de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n]$) :

$$D_{\alpha}^{i,i+1an}(x, y) = \gamma_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.38)$$

Déformation normale de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n]$) :

$$D_3^{i,i+1an}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz + \frac{1}{2} \int_{h_{i+1}^-}^{h_{i+1}^+} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz + \gamma_3^{i,i+1}(x, y) \quad (3.39)$$

Dans ces deux dernières équations, les déformations anélastiques à l'interface $n, n+1$ représentent les discontinuités entre la dernière couche de chaussée et la surface du massif de sol.

Notons que les déformations anélastiques généralisées $\varepsilon_{\alpha\beta}^{ian}$, $\chi_{\alpha\beta}^{ian}$, $d_{\Phi\alpha}^{ian}$, $D_{\alpha}^{j,j+1an}$, $D_3^{j,j+1an}$ sont supposées connues.

Après avoir introduit les champs de contraintes approchés dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner 3.2, puis identifié les champs de déformations généralisées, nous allons obtenir successivement les équations d'équilibre et les équations de comportement du modèle en rendant stationnaire

la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour une variation des déplacements généralisés et des efforts généralisés. Ci-dessous nous allons présenter les équations du modèle M4-5n.

Les équations du modèle M4-5n

Nous présentons ci-dessous les équations du modèle après l'enrichissement.

- Les $5n$ équations d'équilibre de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$N_{\alpha\beta}'^i(x, y) + \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) + F_{\alpha}^i(x, y) = 0 \quad (3.40)$$

$$M_{\alpha\beta}'^i(x, y) - Q_{\alpha}^i(x, y) + \frac{e^i}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) + M_{\alpha}^i(x, y) = 0 \quad (3.41)$$

$$Q_{\alpha'}^i(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) + F_3^i(x, y) = 0 \quad (3.42)$$

- Les $8n$ équations de comportement de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i(x, y) - \varepsilon_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \frac{S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i}{e_i} N_{\delta\gamma}^i(x, y) \quad (3.43)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^i(x, y) - \chi_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \frac{12S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i}{e_i^3} M_{\delta\gamma}^i(x, y) \quad (3.44)$$

$$d_{\Phi\alpha}^i(x, y) - d_{\Phi\alpha}^{ian}(x, y) = \frac{6}{5e_i} 4S_{\alpha 3\beta 3}^i Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{1}{10} 4S_{\alpha 3\beta 3}^i (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \quad (3.45)$$

- Les $3(n-1)$ équations de comportement d'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - D_{\alpha}^{i,i+1an}(x, y) = -\frac{1}{10} 4S_{\alpha 3\beta 3}^i Q_{\beta}^i(x, y) - \frac{1}{10} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{i+1} Q_{\beta}^{i+1}(x, y) \quad (3.46)$$

$$-\frac{e^i}{30} 4S_{\alpha 3\beta 3}^i \tau_{\beta}^{i-1,i}(x, y) + \frac{2}{15} (e^i 4S_{\alpha 3\beta 3}^i + e^{i+1} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{i+1}) \tau_{\beta}^{i,i+1}(x, y) - \frac{e^{i+1}}{30} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{i+1} \tau_{\beta}^{i+1,i+2}(x, y) \\ D_3^{i,i+1}(x, y) - D_3^{i,i+1an}(x, y) = \quad (3.47)$$

$$\frac{9}{70} e^i S_{3333}^i \nu^{i-1,i}(x, y) + \frac{13}{35} (e^i S_{3333}^i + e^{i+1} S_{3333}^{i+1}) \nu^{i,i+1}(x, y) + \frac{9}{70} e^{i+1} S_{3333}^{i+1} \nu^{i+1,i+2}(x, y)$$

Si toutes les couches sont constituées de matériaux isotropes de module d'Young E^i , de coefficient de Poisson ν^i , les équations 3.43 à 3.47 s'écrivent sous la forme suivante :

Les $8n$ équations 3.43-3.45 de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i - \varepsilon_{11}^{ian} \\ \varepsilon_{22}^i - \varepsilon_{22}^{ian} \\ 2\varepsilon_{12}^i - 2\varepsilon_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & \frac{-\nu_i}{E^i} & 0 \\ \frac{-\nu_i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_i)}{E^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{11}^i - \chi_{11}^{ian} \\ \chi_{22}^i - \chi_{22}^{ian} \\ 2\chi_{12}^i - 2\chi_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{12}{e_i^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & \frac{-\nu_i}{E^i} & 0 \\ \frac{-\nu_i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_i)}{E^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$d_{\Phi 1}^i - d_{\Phi 1}^{ian} = \frac{12(1+\nu_i)}{5e_i E^i} Q_1^i - \frac{1+\nu_i}{5E^i} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \quad (3.50)$$

$$d_{\Phi 2}^i - d_{\Phi 2}^{ian} = \frac{12(1+\nu_i)}{5e_i E^i} Q_2^i - \frac{1+\nu_i}{5E^i} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \quad (3.51)$$

Les $3(n-1)$ équations de comportement des interfaces 3.46 à 3.47 nous donnent $3(n-1)$ équations

algébriques ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_1^{i,i+1} - D_1^{i,i+1an} = -\frac{1+v_i}{5E_i}Q_1^i - \frac{1+v_{i+1}}{5E_{i+1}}Q_1^{i+1} - \frac{e_i(1+v_i)}{15E_i}\tau_1^{i-1,i} \quad (3.52)$$

$$+ \frac{2}{15} \left(\frac{2e_i(1+v_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+v_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+v_{i+1})}{15E_{i+1}}\tau_1^{i+1,i+2}$$

$$D_2^{i,i+1} - D_2^{i,i+1an} = -\frac{1+v_i}{5E_i}Q_2^i - \frac{1+v_{i+1}}{5E_{i+1}}Q_2^{i+1} - \frac{e_i(1+v_i)}{15E_i}\tau_2^{i-1,i} \quad (3.53)$$

$$+ \frac{2}{15} \left(\frac{2e_i(1+v_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+v_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+v_{i+1})}{15E_{i+1}}\tau_2^{i+1,i+2}$$

$$D_3^{i,i+1} - D_3^{i,i+1an} = \frac{9e_i}{70E_i}\nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e_i}{E_i} + \frac{e_{i+1}}{E_{i+1}} \right) \nu^{i,i+1} - \frac{9e_{i+1}}{70E_{i+1}}\nu^{i+1,i+2} \quad (3.54)$$

Le M4-5n a une cinématique à 5n champs de déplacements $U_\alpha^i(x, y)$, $U_3^i(x, y)$, $\Phi_\alpha^i(x, y)$, identique à celle de n plaques de Reissner (une par couche).

Conditions aux limites sur les surfaces des plaques M4-5n

Supposons que les efforts $\tau_\alpha^{0,1}$, $\tau_\alpha^{n,n+1}$, $\nu^{0,1}$ et $\nu^{n,n+1}$ sont des données. Si nous notons T_k^- (respectivement T_k^+) $k \in \{1, 3\}$ la composante suivant k du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1^{0,1}(x, y) = -T_1^-(x, y) \\ \tau_2^{0,1}(x, y) = -T_2^-(x, y) \\ \nu^{0,1}(x, y) = -T_3^-(x, y) \end{array} \right. \quad \text{respectivement} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1^{n,n+1}(x, y) = T_1^+(x, y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x, y) = T_2^+(x, y) \\ \nu^{n,n+1}(x, y) = T_3^+(x, y) \end{array} \right. \quad (x, y) \in \omega$$

Rappelons que dans notre problème, en dessous de la couche n , il y a le sol. Comme nous verrons dans la suite, les composantes $\tau_\alpha^{n,n+1}$, $\nu^{n,n+1}$ deviennent donc des inconnues.

Conditions aux limites aux bords des plaques M4-5n

Notons T_k^d les composantes suivant k ($k \in (1, 3)$) des efforts imposés sur le bord du multicouche, les conditions aux limites en contraintes du M4-5n s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}^i(x, y)n_\beta(x, y) = T_\alpha^{di}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall (x, y) \in \partial\omega_T \\ M_{\alpha\beta}^i(x, y)n_\beta(x, y) = M_\alpha^{di}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i)T_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall (x, y) \in \partial\omega_T \\ Q_\beta^i(x, y)n_\beta(x, y) = Q^{di}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x, y, z)dz \quad \forall (x, y) \in \partial\omega_T \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Où $\partial\omega_T$ est la partie du bord $\partial\omega$ du multicouche où les forces sont imposées.

n_β sont les composantes du vecteur du plan normal au bord de notre multicouche.

De la même façon, si nous notons u_k^d les composantes données du déplacement suivant k ($k \in (1, 3)$), nous aurons dans l'approximation cohérente avec notre modèle les conditions limites sur les bords du multicouche en déplacement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\alpha^i(x, y) = \frac{1}{e_i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} u_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall (x, y) \in \partial\omega_U \\ \Phi_\alpha^i(x, y) = \frac{12}{e_i^3} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i)u_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall (x, y) \in \partial\omega_U \\ U_3^i(x, y) = \frac{1}{e_i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} u_3^d(x, y, z)dz \quad \forall (x, y) \in \partial\omega_U \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Où $\partial\omega_U$ est la partie du bord $\partial\omega$ du multicouche où les déplacements sont imposés.

3.1.2.2 Simplification des équations du M4-5n

Nous examinons un cas général avec n couches M4-5n, les couches sont considérées comme homogènes et isotropes avec les paramètres E_i, ν_i, e_i , constants dans chaque couche. Les inconnues principales sont comme suit :

- Les $8n$ inconnues d'efforts de la couche i : $M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i$ ($i \in [1, n]$)
- Les $3(n+1)$ inconnues d'efforts d'interface entre les couches i et $i+1$: $\tau_1^{i,i+1}, \tau_2^{i,i+1}, \nu^{i,i+1}$ ($i \in [1, n]$).
- Les $5n$ inconnues de déplacements de la couche i : $U_1^i, U_2^i, U_3^i, \Phi_1^i, \Phi_2^i$ ($i \in [1, n]$).

Le chargement est donné par $\tau_1^{0,1}, \tau_2^{0,1}, \nu^{0,1}$ (chargement de poids lourd), et par les déformations anélastiques (chargement du au retrait thermique, discontinuité d'interface,...)

Ci-dessous nous cherchons à arranger les équations afin d'en simplifier la résolution par réduction des systèmes. Nous allons examiner les équations sous forme explicite. Les $5n$ équations d'équilibre 3.40-3.42 de la couche i de la chaussée ont la forme :

$$N_{11'1}^i(x, y) + N_{12'2}^i(x, y) + \tau_1^{i,i+1}(x, y) - \tau_1^{i-1,i}(x, y) + F_1^i(x, y) = 0 \quad (3.57)$$

$$N_{12'1}^i(x, y) + N_{22'2}^i(x, y) + \tau_2^{i,i+1}(x, y) - \tau_2^{i-1,i}(x, y) + F_2^i(x, y) = 0 \quad (3.58)$$

$$M_{11'1}^i(x, y) + M_{12'2}^i(x, y) + \frac{e_i}{2}(\tau_1^{i,i+1}(x, y) + \tau_1^{i-1,i}(x, y)) - Q_1^i(x, y) + M_1^i(x, y) = 0 \quad (3.59)$$

$$M_{12'1}^i(x, y) + M_{22'2}^i(x, y) + \frac{e_i}{2}(\tau_2^{i,i+1}(x, y) + \tau_2^{i-1,i}(x, y)) - Q_2^i(x, y) + M_2^i(x, y) = 0 \quad (3.60)$$

$$Q_{1'1}^i(x, y) + Q_{2'2}^i(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) + F_3^i(x, y) = 0 \quad (3.61)$$

En injectant 3.30-3.32 dans 3.48-3.51, nous obtenons les $8n$ équations de comportement de la couche i :

$$\begin{pmatrix} U_{1'1}^i - \varepsilon_{11}^{ian} \\ U_{2'2}^i - \varepsilon_{22}^{ian} \\ U_{1'2}^i + U_{2'1}^i - 2\varepsilon_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & \frac{-\nu_i}{E^i} & 0 \\ \frac{-\nu_i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_i)}{E^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{1'1}^i - \chi_{11}^{ian} \\ \Phi_{2'2}^i - \chi_{22}^{ian} \\ \Phi_{1'2}^i + \Phi_{2'1}^i - 2\chi_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{12}{e_i^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & \frac{-\nu_i}{E^i} & 0 \\ \frac{-\nu_i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_i)}{E^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$\Phi_1^i + U_{3'1}^i - d_{\Phi_1}^{ian} = \frac{12(1+\nu_i)}{5e_i E^i} Q_1^i - \frac{1+\nu_i}{5E^i} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \quad (3.64)$$

$$\Phi_2^i + U_{3'2}^i - d_{\Phi_2}^{ian} = \frac{12(1+\nu_i)}{5e_i E^i} Q_2^i - \frac{1+\nu_i}{5E^i} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \quad (3.65)$$

En injectant 3.33-3.34 dans 3.52 - 3.54 nous obtenons les équations de comportement des $3(n-1)$ interfaces ($3(n-1)$ équations algébriques) :

$$U_1^{i+1} - U_1^i - \frac{e_i}{2} \Phi_1^i - \frac{e_{i+1}}{2} \Phi_1^{i+1} - D_1^{i,i+1an} = -\frac{1+\nu_i}{5E_i} Q_1^i - \frac{1+\nu_{i+1}}{5E_{i+1}} Q_1^{i+1} - \frac{e_i(1+\nu_i)}{15E_i} \tau_1^{i-1,i} \quad (3.66)$$

$$+ \frac{2}{15} \left(\frac{2e_i(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{15E_{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2}$$

$$U_2^{i+1} - U_2^i - \frac{e_i}{2} \Phi_2^i - \frac{e_{i+1}}{2} \Phi_2^{i+1} - D_2^{i,i+1an} = -\frac{1+\nu_i}{5E_i} Q_2^i - \frac{1+\nu_{i+1}}{5E_{i+1}} Q_2^{i+1} - \frac{e_i(1+\nu_i)}{15E_i} \tau_2^{i-1,i} \quad (3.67)$$

$$+ \frac{2}{15} \left(\frac{2e_i(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{15E_{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2}$$

$$U_3^{i+1} - U_3^i - D_3^{i,i+1an} = \frac{9e_i}{70E_i} \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e_i}{E_i} + \frac{e_{i+1}}{E_{i+1}} \right) \nu^{i,i+1} - \frac{9e_{i+1}}{70E_{i+1}} \nu^{i+1,i+2} \quad (3.68)$$

En inversant les équations 3.62 - 3.65 nous obtenons les relations suivantes entre les inconnues d'efforts et les inconnues de déplacements :

$$\begin{cases} N_{11}^i = \frac{e_i E^i}{1-v_i^2} (U_{1'1}^i + v_i U_{2'2}^i) - \frac{e_i E^i}{1-v_i^2} (\varepsilon_{11}^{ian} + v_i \varepsilon_{22}^{ian}) \\ N_{22}^i = \frac{e_i E^i}{1-v_i^2} (v_i U_{1'1}^i + U_{2'2}^i) - \frac{e_i E^i}{1-v_i^2} (v_i \varepsilon_{11}^{ian} + \varepsilon_{22}^{ian}) \\ N_{12}^i = \frac{e_i E^i}{2(1+v_i)} (U_{1'2}^i + U_{2'1}^i) - \frac{e_i E^i}{1+v_i} \varepsilon_{12}^{ian} \end{cases} \quad (3.69)$$

$$\begin{cases} M_{11}^i = \frac{e_i^3 E^i}{12(1-v_i^2)} (\Phi_{1'1}^i + v_i \Phi_{2'2}^i) - \frac{e_i^3 E^i}{12(1-v_i^2)} (\chi_{11}^{ian} + v_i \chi_{22}^{ian}) \\ M_{22}^i = \frac{e_i^3 E^i}{12(1-v_i^2)} (v_i \Phi_{1'1}^i + \Phi_{2'2}^i) - \frac{e_i^3 E^i}{12(1-v_i^2)} (v_i \chi_{11}^{ian} + \chi_{22}^{ian}) \\ M_{12}^i = \frac{e_i^3 E^i}{24(1+v_i)} (\Phi_{1'2}^i + \Phi_{2'1}^i) - \frac{e_i^3 E^i}{12(1+v_i)} \chi_{12}^{ian} \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\begin{cases} Q_1^i = \frac{5e_i E^i}{12(1+v_i)} (\Phi_1^i + U_{3'1}^i) + \frac{e_i}{12} (t_1^{i,i+1} + t_1^{i-1,i}) - \frac{5e_i E^i}{12(1+v_i)} d_{\Phi_1}^{ian} \\ Q_2^i = \frac{5e_i E^i}{12(1+v_i)} (\Phi_2^i + U_{3'2}^i) + \frac{e_i}{12} (t_2^{i,i+1} + t_2^{i-1,i}) - \frac{5e_i E^i}{12(1+v_i)} d_{\Phi_2}^{ian} \end{cases} \quad (3.71)$$

En remplaçant ces inconnues d'efforts dans les équations d'équilibre 3.57 - 3.61, nous obtenons un système de $5n$ équations différentielles de second ordre en $8n$ inconnues (à condition que les charges appliquées soient connues, c'est-à-dire $\tau_1^{0,1}, \tau_2^{0,1}, \nu^{0,1}$ sont connues, $\tau_1^{n,n+1}, \tau_2^{n,n+1}, \nu^{n,n+1}$ restant inconnues).

Les $5n$ équations différentielles obtenues de M4-5n :

$$e_i E^i \left(\frac{1}{1-v_i^2} U_{1'11}^i + \frac{1}{2(1+v_i)} U_{1'22}^i + \frac{1}{2(1-v_i)} U_{2'12}^i \right) + F_1^i = \tau_1^{i-1,i} - \tau_1^{i,i+1} + \frac{e_i E^i}{1-v_i^2} (\varepsilon_{11}^{ian} + v_i \varepsilon_{22}^{ian})_{,1} + \frac{e_i E^i}{1+v_i} \varepsilon_{12'2}^{ian} \quad (3.72)$$

$$e_i E^i \left(\frac{1}{2(1+v_i)} U_{2'11}^i + \frac{1}{1-v_i^2} U_{2'22}^i + \frac{1}{2(1-v_i)} U_{1'12}^i \right) + F_2^i = \tau_2^{i-1,i} - \tau_2^{i,i+1} + \frac{e_i E^i}{1+v_i} \varepsilon_{12'1}^{ian} + \frac{e_i E^i}{1-v_i^2} (v_i \varepsilon_{11}^{ian} + \varepsilon_{22}^{ian})_{,2} \quad (3.73)$$

$$\frac{2e_i^2 E^i}{1-v_i^2} \Phi_{1'11}^i + \frac{e^2 E^i}{1+v_i} \Phi_{1'22}^i + \frac{e_i^2 E^i}{1-v_i} \Phi_{2'12}^i - \frac{10E^i}{1+v_i} (U_{3'1}^i + \Phi_1^i) + F_1^i + \frac{20}{e_i} M_1^i = -10(\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) + \frac{e_i^3 E^i}{1-v_i^2} (\chi_{11}^{ian} + v_i \chi_{22}^{ian})_{,1} + \frac{e_i^3 E^i}{1+v_i} \chi_{12'2}^{ian} \quad (3.74)$$

$$\frac{e_i^2 E^i}{1+v_i} \Phi_{2'11}^i + \frac{2e_i^2 E^i}{1-v_i^2} \Phi_{2'22}^i + \frac{e_i^2 E^i}{1-v_i} \Phi_{1'12}^i - \frac{10E^i}{1+v_i} (U_{3'2}^i + \Phi_2^i) + \frac{20}{e_i} M_2^i = -10(\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) + \frac{e_i^3 E^i}{1+v_i} \chi_{12'1}^{ian} + \frac{e_i^3 E^i}{1-v_i^2} (v_i \chi_{11}^{ian} + \chi_{22}^{ian})_{,2} \quad (3.75)$$

$$U_{3'11}^i + U_{3'22}^i + \Phi_{1'1}^i + \Phi_{2'2}^i + \frac{12(1+v_i)}{5e_i E^i} F_3^i = \frac{12(1+v_i)}{5e_i E^i} (\nu^{i-1,i} - \nu^{i,i+1}) - \frac{1+v_i}{5E^i} (\tau_{1'1}^{i,i+1} + \tau_{2'2}^{i,i+1} + \tau_{1'1}^{i-1,i} + \tau_{2'2}^{i-1,i}) + d_{\Phi_{1'1}}^{ian} + d_{\Phi_{2'2}}^{ian} \quad (3.76)$$

Écrivons maintenant les 3(n-1) équations 3.66 à 3.68 en remplaçant Q_1^i et Q_2^i à l'aide des équations 3.71, nous obtenons :

$$U_1^{i+1} - U_1^i - \frac{5e_i}{12}\Phi_1^i - \frac{5e_{i+1}}{12}\Phi_1^{i+1} - \frac{e_i}{12}U_{3'1}^i - \frac{e_{i+1}}{12}U_{3'1}^{i+1} - D_1^{i,i+1an} = \quad (3.77)$$

$$-\frac{e_i(1+v_i)}{12E_i}\tau_1^{i-1,i} + \frac{1}{8}\left(\frac{2e_i(1+v_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+v_{i+1})}{E_{i+1}}\right)\tau_1^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+v_{i+1})}{12E_{i+1}}\tau_1^{i+1,i+2}$$

$$U_2^{i+1} - U_2^i - \frac{5e_i}{12}\Phi_2^i - \frac{5e_{i+1}}{12}\Phi_2^{i+1} - \frac{e_i}{12}U_{3'2}^i - \frac{e_{i+1}}{12}U_{3'2}^{i+1} - D_2^{i,i+1an} = \quad (3.78)$$

$$-\frac{e_i(1+v_i)}{12E_i}\tau_2^{i-1,i} + \frac{1}{8}\left(\frac{2e_i(1+v_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+v_{i+1})}{E_{i+1}}\right)\tau_2^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+v_{i+1})}{12E_{i+1}}\tau_2^{i+1,i+2}$$

$$U_3^{i+1} - U_3^i - D_3^{i,i+1an} = -\frac{9e_i}{70E_i}\nu^{i-1,i} + \frac{13}{35}\left(\frac{e_i}{E_i} + \frac{e_{i+1}}{E_{i+1}}\right)\nu^{i,i+1} - \frac{9e_{i+1}}{70E_{i+1}}\nu^{i+1,i+2} \quad (3.79)$$

Les opérations précédentes ont conduit à réduire le nombre d'inconnues et d'équations du modèle M4-5n. Les équations 3.72 - 3.79 représentent 8n-3 équations différentielles des 8n inconnues restantes. Ces inconnues sont : $U_1^i, U_2^i, \Phi_1^i, \Phi_2^i, U_3^i, \tau_1^{i,i+1}, \tau_2^{i,i+1}, \nu^{i,i+1}$ ($\forall i \in [1, n]$).

3.1.2.3 Les conditions aux limites du problème de chaussée

Pour les conditions aux limites d'un problème de chaussée, nous pourrions distinguer deux cas (cf. figure 3.6) :

- Soit les chaussées sont considérées comme infinies dans le plan. Dans le calcul numérique, à une très grande distance de la charge, nous pouvons considérer les champs de déplacements et contraintes très petits et négligeables. Par la nature du travail en flexion du multicouche de chaussée, la fixation du déplacement transversal sera mieux adaptée que celle du déplacement vertical (afin de ne pas perdre de l'énergie en flexion par rapport à une vraie structure infinie). Donc nous utilisons les conditions aux limites classiques des chaussées, c'est-à-dire bloquée transversalement à la limite, avec toutes les contraintes de cisaillement nulles.

- Soit les chaussées sont étroites, c'est-à-dire infinies dans le sens longitudinal (donc bloquées, comme dans le premier cas) et avec des bords libres dans le sens transversal (les efforts appliqués au bords sont nuls).

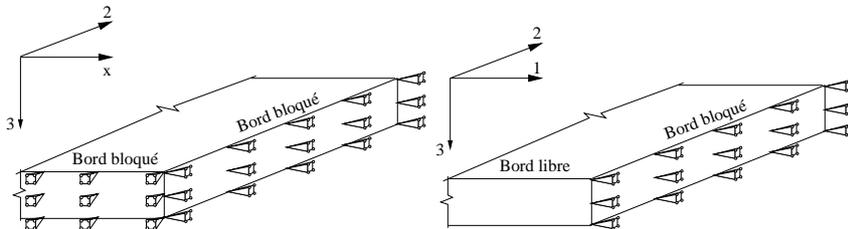


FIGURE 3.6. Conditions limites aux bords de la chaussée

Traitement des conditions aux limites du bord bloqué

Écrivons ces conditions sur les inconnues du M4-5n, nous obtenons d'après 3.55

- Quand x tend vers l'infini, quelque soit y :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U_1^i(x, y) = 0 \quad (3.80)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_1^i(x, y) = 0 \quad (3.81)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (U_{2'1}^i(x, y)) = 0 \quad (3.82)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\Phi_{2'1}^i(x, y)) = 0 \quad (3.83)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_1^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (U_{3'1}^i(x, y) + \frac{1}{10G^i}(\tau_1^{i-1,i}(x, y) + \tau_1^{i,i+1}(x, y))) = 0 \quad (3.84)$$

- Quand y tend vers l'infini, quelque soit x :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} U_2^i(x, y) = 0 \quad (3.85)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Phi_2^i(x, y) = 0 \quad (3.86)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (U_{1'2}^i(x, y)) = 0 \quad (3.87)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (\Phi_{1'2}^i(x, y)) = 0 \quad (3.88)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} Q_2^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (U_{3'2}^i(x, y) + \frac{1}{10G^i}(\tau_2^{i-1,i}(x, y) + \tau_2^{i,i+1}(x, y))) = 0 \quad (3.89)$$

Traitement des conditions aux limites du bord libre

Avec tous les efforts nuls sur les bords libres, nous obtenons :

- Quand x tend vers l'infini, quelque soit y :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_{11}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (U_{1'1}^i(x, y) + \nu^i U_{2'2}^i(x, y)) = 0 \quad (3.90)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M_{11}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\Phi_{1'1}^i(x, y) + \nu^i \Phi_{2'2}^i(x, y)) = 0 \quad (3.91)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (U_{1'2}^i(x, y) + U_{2'1}^i(x, y)) = 0 \quad (3.92)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\Phi_{1'2}^i(x, y) + \Phi_{2'1}^i(x, y)) = 0 \quad (3.93)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_1^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\Phi_1^i(x, y) + U_{3'1}^i(x, y) + \frac{1}{10G^i}(\tau_1^{i-1,i}(x, y) + \tau_1^{i,i+1}(x, y))) = 0 \quad (3.94)$$

- Quand y tend vers l'infini, quelque soit x :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N_{22}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (\nu^i U_{1'1}^i(x, y) + U_{2'2}^i(x, y)) = 0 \quad (3.95)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} M_{22}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (\nu^i \Phi_{1'1}^i(x, y) + \Phi_{2'2}^i(x, y)) = 0 \quad (3.96)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (U_{1'2}^i(x, y) + U_{2'1}^i(x, y)) = 0 \quad (3.97)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (\Phi_{1'2}^i(x, y) + \Phi_{2'1}^i(x, y)) = 0 \quad (3.98)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} Q_2^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (\Phi_2^i(x, y) + U_{3'2}^i(x, y) + \frac{1}{10G^i}(\tau_2^{i-1,i}(x, y) + \tau_2^{i,i+1}(x, y))) = 0 \quad (3.99)$$

3.2 Le modèle de sol.

Les plaques du M4-5n sont bien adaptées aux calculs des structures multicouches, c'est ce qui est montré dans les travaux de Carreira [Carreira, 1998] pour les structures multicouches de dimensions finies. Cela reste vrai dans le cas où les dimensions planes sont infinies [Tran, 2001]. Ce qui reste à proposer pour une application du modèle à la chaussée, c'est une bonne modélisation du sol. Le sol est supposé constitué d'un matériau élastique de module d'Young E_s et de coefficient de Poisson ν_s . Nous avons trois possibilités principales de choix pour la modélisation du sol.

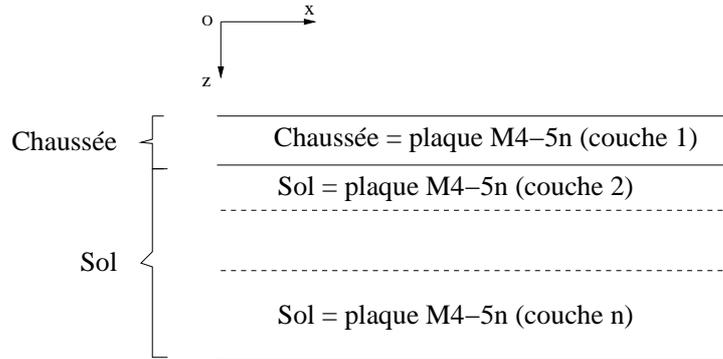


FIGURE 3.7. 1^{er} choix de modélisation du sol.

Dans le premier choix, le sol est modélisé par un empilement de quelques couches de faible épaisseur du même matériaux de sol (Module d'Young E_s , coefficient de Poisson ν_s). Nous avons étudié le cas d'une chaussée monocouche reposant sur deux couches de même matériau pour modéliser le sol. Les épaisseurs de ces trois couches sont prises proportionnellement avec un rapport de 4 (Épaisseur du sol = $16 + 4 = 20$ fois l'épaisseur de la chaussée). D'après les résultats [Tran, 2001] provenant d'un calcul 2D axisymétrique, cette modélisation de sol peut nous donner une bonne approximation des structures multicouches de chaussées (cf. figure 3.8) à condition de respecter toujours les règles de plaque. C'est-à-dire que les plaques ne soient pas trop épaisses.

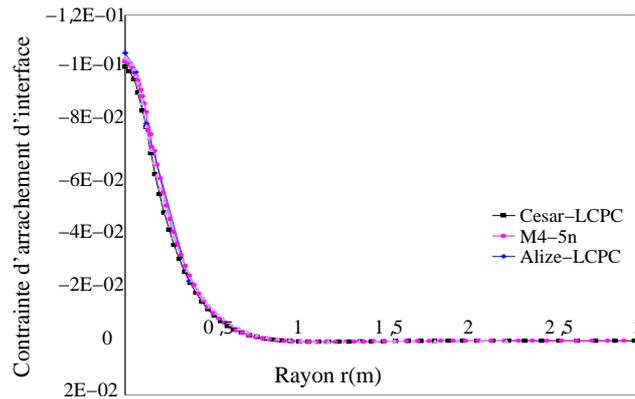
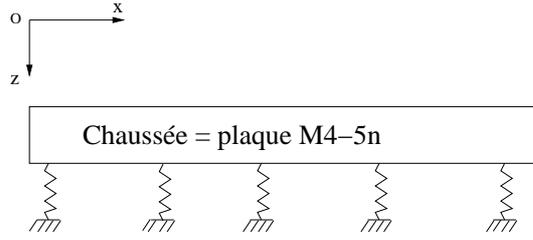


FIGURE 3.8. Comparaison des contraintes d'arrachement à l'interface chaussée-sol entre le 1^{er} choix de modélisation M4-5n avec Cesar et Alizé.

Pourtant cette modélisation donne un calcul assez lourd pour la modélisation de chaussée tridimensionnelle, donc nous n'approfondissons pas cette voie.

Un choix classique possible est le modèle de Westergaad ([Westergaad, 1926]). Les couches de chaussées sont toujours considérées comme des plaques M4-5n. Le sol est modélisé par un système de ressort. L'avantage de ce choix est de rendre les calculs très simples (cf. figure 3.9).

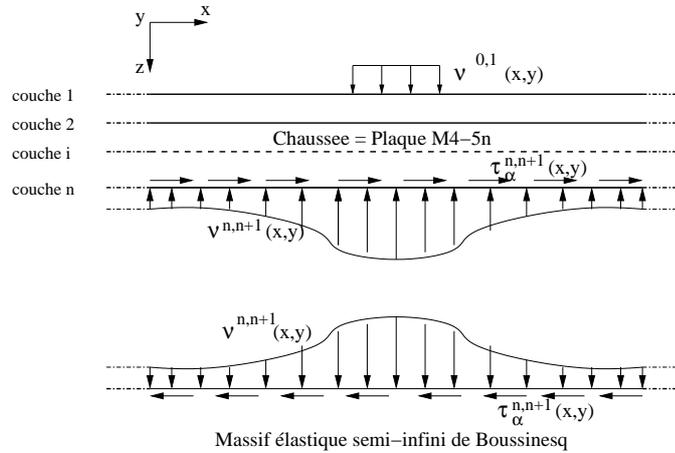
FIGURE 3.9. 2^{er} choix de modélisation du sol.

Pourtant il présente les inconvénients suivants :

- Il est difficile de définir la rigidité des ressorts.
- Les ressorts ont la même rigidité et travaillent indépendamment les uns et les autres.
- Les cisaillements ne sont pas pris en compte à l'interface chaussée-sol, ce qui influence beaucoup les résultats.

A cause de ces inconvénients, nous allons continuer avec une modélisation du sol plus rigoureuse.

Le sol est décrit sous la forme d'un massif élastique semi-infini dans le sens vertical et infini dans le sens transversal, ceci nous donne la possibilité d'utiliser les résultats analytiques de Boussinesq [Johnson, 1992] pour un massif élastique semi-infini. Dans ce cas, les couches de chaussées sont toujours considérées comme des plaques M4-5n. Les couches de chaussées sont liées au massif de sol à travers les contraintes et les déplacements au contact à l'interface chaussée-sol.

FIGURE 3.10. 3^e choix de modélisation du sol.

Ce choix peut nous donner de bonnes approximations pour la structure multicouche de chaussée reposant sur un massif élastique. De plus, avec les résultats analytiques de Boussinesq, les calculs seront très légers. Donc nous allons utiliser cette modélisation pour la thèse.

3.2.1 Fonctions potentielles de Boussinesq

L'approche classique pour trouver les champs de contraintes et de déformations dans un massif élastique semi-infini, soumis sur la surface S à une charge $(\nu(\xi, \eta), \tau_x(\xi, \eta), \tau_y(\xi, \eta))$, consiste à utiliser les fonctions potentielles de Boussinesq (1885) [Johnson, 1992] et Cerruti (1882). Notons r la distance entre un point $C(\xi, \eta)$ de la surface S de charge et un point $A(x, y, z)$ dans le massif :

$$r(\xi, \eta, x, y, z) = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}$$

Introduisons les fonctions potentielles, définies comme suit. Elles satisfont les équations de Laplace :

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= \int_S \int \tau_x(\xi, \eta) \Omega(\xi, \eta, x, y, z) d\xi d\eta & F(x, y, z) &= \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) \\ G_1(x, y, z) &= \int_S \int \tau_y(\xi, \eta) \Omega(\xi, \eta, x, y, z) d\xi d\eta & G(x, y, z) &= \frac{\partial G_1}{\partial z}(x, y, z) \\ H_1(x, y, z) &= \int_S \int \nu(\xi, \eta) \Omega(\xi, \eta, x, y, z) d\xi d\eta & H(x, y, z) &= \frac{\partial H_1}{\partial z}(x, y, z) \end{aligned}$$

Où :

$$\Omega(\xi, \eta, x, y, z) = z \ln(r(\xi, \eta, x, y, z) + z) - r(\xi, \eta, x, y, z)$$

Nous notons :

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y, z) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial H_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \Psi(x, y, z) &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z) \end{aligned}$$

Pour démontrer que ces fonctions potentielles satisfont les équations de Laplace, nous allons démontrer que $\Omega(\xi, \eta, x, y, z)$ satisfait les équations de Laplace :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Omega(\xi, \eta, x, y, z) = 0 \quad (3.100)$$

Nous avons :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}(\xi, \eta, x, y, z) = \frac{\xi - x}{r + z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}(\xi, \eta, x, y, z) = \frac{(x - \xi)^2}{r(r + z)^2} - \frac{1}{r + z} \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y}(\xi, \eta, x, y, z) = \frac{\eta - y}{r + z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}(\xi, \eta, x, y, z) = \frac{(y - \eta)^2}{r(r + z)^2} - \frac{1}{r + z} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z}(\xi, \eta, x, y, z) = \ln(r + z) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}(\xi, \eta, x, y, z) = \frac{1}{r} \quad (3.103)$$

Il est facile de vérifier que l'équation 3.100 est juste. Donc les fonctions potentielles précédentes $F_1(x, y, z)$, $G_1(x, y, z)$, $H_1(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$, $\Psi_1(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$ satisfont les équations de Laplace.

Les déplacements u_x , u_y , u_z d'un point A(x,y,z) dans le massif semi-infini peuvent être calculés comme suit :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \frac{1 + \nu_s}{2\pi E_s} \left(2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) (x, y, z) \\ u_y(x, y, z) &= \frac{1 + \nu_s}{2\pi E_s} \left(2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) (x, y, z) \\ u_z(x, y, z) &= \frac{1 + \nu_s}{2\pi E_s} \left(\frac{\partial H}{\partial z} + (1 - 2\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) (x, y, z) \end{aligned} \quad (3.104)$$

Vérification de la satisfaction des équations de Navier pour les champs de déplacements :

L'équation de Navier est rappelée ci-dessous :

$$\frac{E_s}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \text{grad}(\text{div}\underline{u}) + \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \Delta \underline{u} + \underline{f} = 0 \quad (3.105)$$

Où \underline{f} représente la densité volumique de forces. Dans notre cas nous supposons que $\underline{f}=0$.

Δ est l'opérateur Laplacien.

Nous avons :

$$\text{grad}(\text{div}\underline{u}) = \begin{cases} u_{x'xx} + u_{y'yx} + u_{z'zx} \\ u_{x'xy} + u_{y'yy} + u_{z'zy} \\ u_{x'xz} + u_{y'yz} + u_{z'zz} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta \underline{u} = \begin{cases} u_{x'xx} + u_{x'yy} + u_{x'zz} \\ u_{y'xx} + u_{y'yy} + u_{y'zz} \\ u_{z'xx} + u_{z'yy} + u_{z'zz} \end{cases} \quad (3.106)$$

Exprimons le champ de déplacement à l'aide des potentiels de Bousinesq 3.104. Les premières équations de 3.106 s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_{x'xx} + u_{y'yx} + u_{z'zx} &= \frac{1+\nu_s}{2\pi E_s} \left(2 \frac{\partial^3 F}{\partial z \partial x^2} - \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + 2\nu_s \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right) \\ &+ \frac{1+\nu_s}{2\pi E_s} \left(2 \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^3 H}{\partial y^2 \partial x} + 2\nu_s \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial y^2 \partial x} - z \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial x} \right) \\ &+ \frac{1+\nu_s}{2\pi E_s} \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial z^2} + (1-2\nu_s) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} - z \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \\ &= \frac{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)}{\pi E_s} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_x &= \frac{1+\nu_s}{2\pi E_s} \left(2 \frac{\partial}{\partial z} \Delta F - \frac{\partial}{\partial x} \Delta H + 2\nu_s \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi_1 - z \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x \partial z} \right) \\ &= - \frac{1+\nu_s}{\pi E_s} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (3.108)$$

En reportant 3.107 et 3.108 dans la première composante de 3.105, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} (u_{x'xx} + u_{y'yx} + u_{z'zx}) + \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} (u_{x'xx} + u_{x'yy} + u_{x'zz}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

De même, les deux dernières équations de Navier sont vérifiées.

Après avoir déterminé les champs de déplacements dans le massif semi-infini, nous pouvons aisément déterminer les champs de contraintes dans le massif grâce à la loi de Hooke.

3.2.2 Les résultats analytiques de Boussinesq

Lorsque nous nous intéressons à une chaussée qui repose sur un massif de sol élastique semi-infini, la surface d'intégration permettant la définition des potentiels de Boussinesq S est de forme rectangulaire, infinie dans la longueur et finie dans la largeur.

Nous rappelons ci-dessous les résultats analytiques de Boussinesq pour un massif semi infini élastique. Ce qui nous intéresse, c'est la relation entre les déplacements d'interface $u_x^{surface}$, $u_y^{surface}$, $u_z^{surface}$ et les efforts d'interface $\tau_1^{n,n+1}$, $\tau_2^{n,n+1}$ et $\nu^{n,n+1}$.

Le déplacement en bas de la n^{ieme} couche est approché dans la modélisation M4-5n par :

$$\begin{cases} u_{1bas}^n = U_1^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_1^n(x, y) \\ u_{2bas}^n = U_2^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_2^n(x, y) \\ u_{3bas}^n = U_3^n(x, y) \end{cases} \quad (3.110)$$

La discontinuité entre le déplacement en bas de la n^{ieme} couche et la surface du sol est connue et égale à $\underline{\gamma}^{n,n+1}$, donc :

$$\begin{cases} U_1^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_1^n(x, y) - \gamma_1^{n,n+1} = u_x^{surface} \\ U_2^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_2^n(x, y) - \gamma_2^{n,n+1} = u_y^{surface} \\ U_3^n(x, y) - \gamma_3^{n,n+1} = u_z^{surface} \end{cases} \quad (3.111)$$

Les équations de Boussinesq ci-dessous donnent les relations entre les charges surfaciques et les déplacements sur la surface du massif [Johnson, 1992].

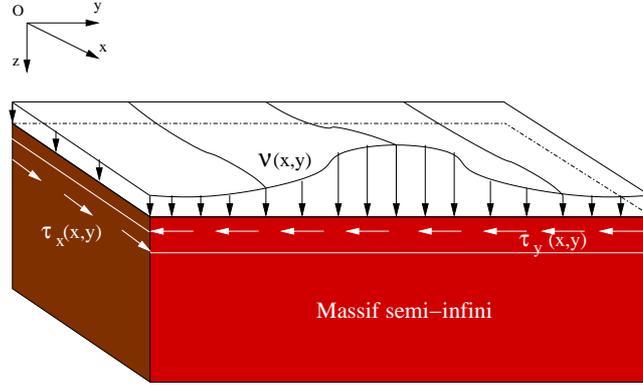


FIGURE 3.11. Schéma de calcul d'un massif semi-infini tridimensionnel

$$\begin{aligned} u_x^{surface} &= U_1^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_1^n(x, y) - \gamma_1^{n,n+1} = \\ & - \frac{(1-2\nu_s)(1+\nu_s)}{2\pi E^s} \int_S \nu^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \frac{1+\nu_s}{\pi E^s} \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x-\xi)^2 + (1-\nu_s)(y-\eta)^2}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{\nu_s(1+\nu_s)}{\pi E^s} \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} u_y^{surface} &= U_2^n(x, y) + \frac{e^n}{2} \Phi_2^n(x, y) - \gamma_2^{n,n+1} = \\ & - \frac{(1-2\nu_s)(1+\nu_s)}{2\pi E^s} \int_S \nu^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \frac{\nu_s(1+\nu_s)}{\pi E^s} \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{1+\nu_s}{\pi E^s} \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi, \eta) \frac{(1-\nu)(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned}
u_z^{surface} &= U_3^n(x, y) - \gamma_3^{n, n+1} = \\
&= \frac{(1 - \nu_s)(1 + \nu_s)}{\pi E^s} \int_S \nu^{n, n+1}(\xi, \eta) \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{1/2}} d\xi d\eta \\
&+ \frac{(1 - 2\nu_s)(1 + \nu_s)}{2\pi E^s} \int_S \tau_1^{n, n+1}(\xi, \eta) \frac{(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \\
&+ \frac{(1 - 2\nu_s)(1 + \nu_s)}{2\pi E^s} \int_S \tau_2^{n, n+1}(\xi, \eta) \frac{(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.114}$$

3.2.3 Le système des équations de Boussinesq dans le cas 2D déformation plane

Dans certaines applications il est commode de disposer d'un modèle de chaussée en déformation plane. Dans le cas 2D déformation plane, au lieu des calculs d'intégration sur la surface S , on calcule avec une longueur infinie l .

La construction du modèle multiparticulaire en déformation plane pour le multicouche de chaussée est triviale. Le système d'équation de Boussinesq pour décrire l'interaction chaussée-sol en déformation plane fait appel à d'autres fonctions potentielles. Nous ne décrivons pas ici tous les détails et nous nous contentons de donner ci-dessous l'équivalent des équations 3.112 à 3.114 en déformation plane.

Ce qui nous intéresse dans ce cas, c'est la relation entre les déplacements d'interface $u_x^{surface}$, $u_z^{surface}$ et les efforts d'interface $\tau^{n, n+1}$, $\nu^{n, n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_x^{surface} &= U_1^n(x) + \frac{e^n}{2} \Phi_1^n(x) - \gamma_1^{n, n+1} = \\
&= -\frac{(1 - 2\nu_s)(1 + \nu_s)}{2E^s} \int_l \nu^{n, n+1}(\xi) d\xi - \frac{2(1 - \nu_s^2)}{\pi E^s} \int_l \tau^{n, n+1}(\xi) \ln|x - \xi| d\xi
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned}
u_z^{surface} &= U_3^n(x) - \gamma_3^{n, n+1} = \\
&= -\frac{2(1 - \nu_s^2)}{\pi E^s} \int_l \nu^{n, n+1}(\xi) \ln|x - \xi| d\xi + \frac{(1 - 2\nu_s)(1 + \nu_s)}{2E^s} \int_l \tau^{n, n+1}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.116}$$

3.3 Le modèle simplifié M4-B.

Le modèle simplifié M4-B est la combinaison du modèle M4-5n et du massif semi-infini de Boussinesq, nous pouvons voir le schéma du modèle ci-dessous (cf. figure 3.12).

Les équations du modèle simplifié pour le problème général d'une structure de n couches de chaussée de surface S reposant sur un massif de sol semi-infini se composent alors de deux systèmes d'équations de $8n$ inconnues, un système de $8n - 3$ équations différentielles du M4-5n 3.72 - 3.79 et un système de 3 équations intégrales sur la surface S 3.112 - 3.114.

Dans le cas de déformation plane, les équations du modèle simplifié se composent de deux systèmes d'équations de $3n$ inconnues, un système de $3n - 2$ équations différentielles du M4-5n en déformation plane et un système de 2 équations intégrales 3.115 - 3.116.

Conclusions

Le modèle M4-B est fait d'une combinaison entre le multiplaque M4-5n et le massif semi-infini de Boussinesq. Cette modélisation nous fournit une bonne approximation pour la chaussée, qui est faite d'un multicouche en flexion reposant sur massif semi-infini du sol. Le modèle nous permet

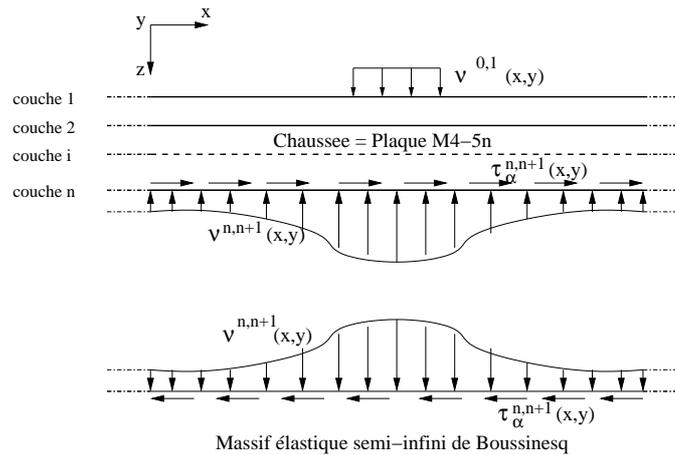


FIGURE 3.12. *Schéma de calcul du monocouche tridimensionnel*

d'introduire tous les types de chargement de la chaussée : poids lourds (par les efforts à l'interface $[0,1]$), retrait thermique et gradient thermique (par les déformations anélastiques), et aussi les forces volumiques. En plus, avec la modélisation en plaque par couche, le modèle nous permet aussi d'introduire les discontinuités dans la chaussée.

Bien que le modèle soit établi en ce moment dans le cas de l'élasticité, les comportements anélastiques (viscosité, plasticité ...) peuvent être pris en compte en ajoutant ces comportements dans le M4-5n afin de décrire l'évolution des déformations anélastiques généralisées.

Avec la modélisation des multicouches de chaussée par un multiplaque M4-5n, nous avons transformé la géométrie 3D du multicouche en une géométrie 2D de multiplaques. Ensuite, avec l'intégration sur la surface des solutions analytiques de Boussinesq, nous avons transformé le massif 3D du sol en une surface 2D. Le modèle simplifié présente donc l'avantage de gagner une dimension par rapport au problème réel. Et dans le calcul numérique, à chaque noeuds du maillage, nous avons $5n+3$ degrés de liberté. Nous allons voir très clairement cet avantage dans les parties qui suivent, avec un gain remarquable de temps pour les calculs numériques.

Chapitre 4

Résolution du modèle simplifié

Dans le chapitre 3, nous avons réduit les équations du M4-5n à 8n-3 équations différentielles, dont 5n équations différentielles du second ordre et 3n-3 équations différentielles du premier ordre. Dans ce chapitre, nous allons chercher à simplifier encore plus les équations, afin de diminuer le nombre d'équations du M4-5n et les rendre uniformes (nous allons voir dans la suite qu'elles seront transformées en un système de 5n équations différentielles du second ordre).

Nous présentons tout d'abord l'adimensionalisation des équations de M4-5n, puis le traitement des conditions aux limites du problème. Dans la troisième section, nous adimensionalisons les équations de Boussinesq pour l'interaction sol-chaussée. Dans la dernière section, les équations sont présentées sous forme matricielle, pour faciliter la résolution numérique.

4.1 Adimensionalisation et génération des équations du M4-5n

Dans cette partie, nous allons adimensionaliser les équations du M4-5n, ceci nous aide à diminuer le nombre de paramètres qui ont une influence. Puis les équations sont générées pour obtenir le système d'équations pour le cas général de n couches.

4.1.1 Adimensionalisation des équations du modèle

Le fait d'adimensionaliser a pour but de simplifier le système d'équations et de bien voir les influences des paramètres de notre problème. Ce travail nous aide à diminuer le nombre de paramètres et facilite la résolution du système.

Nous notons E^i ($i \in [1, n]$) et E_s respectivement les modules d'Young des couches de chaussée et du sol, et e^i ($i \in [1, n]$) les épaisseurs des couches de chaussée.

Le chargement d'une roue de camion est considéré comme rectangulaire (voir chapitre 5) de dimension $2ax2b$, de densité q uniformément répartie.

Dans la suite, on note par " \bar{A} " la quantité " A " adimensionalisée. L'adimensionalisation est faite comme suit :

Dans la couche i de chaussée :

$$\bar{x} = \frac{x}{a} \quad \bar{E}^i = \frac{E^i}{E_s} \quad \bar{e}^i = \frac{e_i}{a} \quad (4.1)$$

$$\bar{U}_\alpha^i = \frac{E_s}{qa} U_\alpha^i \quad \bar{\Phi}_\alpha^i = \frac{E_s}{q} \Phi_\alpha^i \quad \bar{U}_3^i = \frac{E_s}{qa} U_3^i \quad (4.2)$$

$$\bar{\gamma}_\alpha^i = \frac{E_s}{qa} \gamma_\alpha^i \quad \bar{\gamma}_3^i = \frac{E_s}{qa} \gamma_3^i \quad (4.3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^i = \frac{E_s}{q} \varepsilon_{\alpha\beta}^i \quad \bar{\chi}_{\alpha\beta}^i = \frac{aE_s}{q} \chi_{\alpha\beta}^i \quad (4.4)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{ian} = \frac{E_s}{q} \varepsilon_{\alpha\beta}^{ian} \quad \bar{\chi}_{\alpha\beta}^{ian} = \frac{aE_s}{q} \chi_{\alpha\beta}^{ian} \quad (4.5)$$

$$\bar{d}_\alpha^i = \frac{E_s}{q} d_\alpha^i \quad \bar{D}_\alpha^{i,i+1} = \frac{E_s}{qa} D_\alpha^{i,i+1} \quad \bar{D}_3^{i,i+1} = \frac{E_s}{qa} D_3^{i,i+1} \quad (4.6)$$

$$\bar{d}_\alpha^{ian} = \frac{E_s}{q} d_\alpha^{ian} \quad \bar{D}_\alpha^{i,i+1an} = \frac{E_s}{qa} D_\alpha^{i,i+1an} \quad \bar{D}_3^{i,i+1an} = \frac{E_s}{qa} D_3^{i,i+1an} \quad (4.7)$$

$$\bar{N}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{qa} N_{\alpha\beta}^i \quad \bar{M}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{qa^2} M_{\alpha\beta}^i \quad \bar{Q}_\alpha^i = \frac{1}{qa} Q_\alpha^i \quad (4.8)$$

$$\bar{\nu}^{i,i+1} = \frac{1}{q} \nu^{i,i+1} \quad \bar{\tau}_\alpha^{i,i+1} = \frac{1}{q} \tau_\alpha^{i,i+1} \quad (4.9)$$

Dans le sol :

$$\bar{u}_\alpha = \frac{E_s}{qa} u_\alpha \quad \bar{u}_3 = \frac{E_s}{qa} u_3 \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{E_s}{q} \varepsilon_{zz} \quad (4.10)$$

Les forces volumiques :

$$\bar{F}_\alpha^i = \frac{F_\alpha^i}{q} \quad \bar{M}_\alpha^i = \frac{M_\alpha^i}{qa} \quad \bar{F}_3^i = \frac{F_3^i}{q} \quad (4.11)$$

Les 5n équations 3.72-3.76 peuvent s'écrire sous forme ($\forall i \in [1, n]$) :

$$\begin{aligned} \bar{e}^i \bar{E}^i \left(\frac{1}{1 - \nu_i^2} \bar{U}_{1'11}^i + \frac{1}{2(1 + \nu_i)} \bar{U}_{1'22}^i + \frac{1}{2(1 - \nu_i)} \bar{U}_{2'12}^i \right) + \bar{F}_1^i = \\ \bar{\tau}_1^{i-1,i} - \bar{\tau}_1^{i,i+1} + \frac{\bar{e}^i \bar{E}^i}{1 - \nu_i^2} (\bar{\varepsilon}_{11}^{ian} + \nu_i \bar{\varepsilon}_{22}^{ian})_{,1} + \frac{\bar{e}^i \bar{E}^i}{1 + \nu_i} \bar{\varepsilon}_{12'2}^{ian} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}^i \bar{E}^i \left(\frac{1}{2(1 + \nu_i)} \bar{U}_{2'11}^i + \frac{1}{1 - \nu_i^2} \bar{U}_{2'22}^i + \frac{1}{2(1 - \nu_i)} \bar{U}_{1'12}^i \right) + \bar{F}_2^i = \\ \bar{\tau}_2^{i-1,i} - \bar{\tau}_2^{i,i+1} + \frac{\bar{e}^i \bar{E}^i}{1 - \nu_i^2} (\nu_i \bar{\varepsilon}_{11}^{ian} + \bar{\varepsilon}_{22}^{ian})_{,2} + \frac{\bar{e}^i \bar{E}^i}{1 + \nu_i} \bar{\varepsilon}_{12'1}^{ian} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\bar{e}^{i2} \bar{E}^i}{1 - \nu_i^2} \bar{\Phi}_{1'11}^i + \frac{\bar{e}^{i2} \bar{E}^i}{1 + \nu_i} \bar{\Phi}_{1'22}^i + \frac{\bar{e}^{i2} \bar{E}^i}{1 - \nu_i} \bar{\Phi}_{2'12}^i - \frac{10\bar{E}^i}{1 + \nu_i} (\bar{U}_{3'1}^i + \bar{\Phi}_1^i) + \frac{20}{\bar{e}^i} \bar{M}_1^i = \\ -10(\bar{\tau}_1^{i-1,i} + \bar{\tau}_1^{i,i+1}) + \frac{\bar{e}^{i3} \bar{E}^i}{1 - \nu_i^2} (\bar{\chi}_{11}^{ian} + \nu_i \bar{\chi}_{22}^{ian})_{,1} + \frac{\bar{e}^{i3} \bar{E}^i}{1 + \nu_i} \bar{\chi}_{12'2}^{ian} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{e}^{i2}\bar{E}^i}{1+v_i}\bar{\Phi}_{2'11}^i + \frac{2\bar{e}^{i2}\bar{E}^i}{1-v_i^2}\bar{\Phi}_{2'22}^i + \frac{\bar{e}^{i2}\bar{E}^i}{1-v_i}\bar{\Phi}_{1'12}^i - \frac{10\bar{E}^i}{1+v_i}(\bar{U}_{3'2}^i + \bar{\Phi}_2^i) + \frac{20}{\bar{e}^i}\bar{M}_2^i = \\ -10(\bar{\tau}_2^{i-1,i} + \bar{\tau}_2^{i,i+1}) + \frac{\bar{e}^{i3}\bar{E}^i}{1-v_i^2}(v_i\bar{\chi}_{11}^{ian} + \bar{\chi}_{22}^{ian})'_{2} + \frac{\bar{e}^{i3}\bar{E}^i}{1+v_i}\bar{\chi}_{12'12}^{ian} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{3'11}^i + \bar{U}_{3'22}^i + \bar{\Phi}_{1'1}^i + \bar{\Phi}_{2'2}^i + \bar{F}_3^i = \frac{6}{5\bar{e}^i\bar{E}^i}(\bar{\nu}^{i-1,i} - \bar{\nu}^{i,i+1}) \\ - \frac{1+v_i}{5\bar{E}^i}(\bar{\tau}_{1'1}^{i,i+1} + \bar{\tau}_{2'2}^{i,i+1} + \bar{\tau}_{1'1}^{i-1,i} + \bar{\tau}_{2'2}^{i-1,i}) + \bar{d}_{\Phi 1'1}^{ian} + \bar{d}_{\Phi 2'2}^{ian} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Notons

$$X^i = {}^T [\bar{U}_1^i, \bar{U}_2^i, \bar{\Phi}_1^i, \bar{\Phi}_2^i, \bar{U}_3^i] \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.17)$$

$$Y^{i,i+1} = {}^T [\bar{\tau}_1^{i,i+1}, \bar{\tau}_2^{i,i+1}, \bar{\nu}^{i,i+1}] \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.18)$$

Les 5n équations 4.12-4.16 peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante (quelque soit $i \in [1, n]$) :

$$\begin{aligned} A^i X_{11}^i + B^i X_{22}^i + C^i X_{12}^i + D^i X_{11}^i + E^i X_{22}^i + F^i X^i = \\ G^i Y_{11}^{i-1,i} + H^i Y_{22}^{i-1,i} + I^i Y^{i-1,i} + G^i Y_{11}^{i,i+1} + H^i Y_{22}^{i,i+1} + J^i Y^{i,i+1} + AN^i \end{aligned} \quad (4.19)$$

Où A^i, B^i, \dots, AN^i sont des matrices de paramètres de matériaux dépendant de $\bar{e}^i, \bar{E}^i, \nu^i$ de la couche i , que nous donnons dans l'annexe A.

Les 3(n-1) équations 3.77-3.79 peuvent s'écrire après avoir été adimensionalisées ($\forall i \in [1, n-1]$) :

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^{i+1} - \bar{U}_1^i - \frac{5\bar{e}^i}{12}\bar{\Phi}_1^i - \frac{5\bar{e}^{i+1}}{12}\bar{\Phi}_1^{i+1} - \frac{\bar{e}^i}{12}\bar{U}_{3'1}^i - \frac{\bar{e}^{i+1}}{12}\bar{U}_{3'1}^{i+1} - \bar{D}_1^{i,i+1an} = \\ - \frac{\bar{e}^i(1+v^i)}{12\bar{E}^i}\bar{\tau}_1^{i-1,i} + \frac{1}{8} \left(\frac{2\bar{e}^i(1+v^i)}{\bar{E}^i} + \frac{2\bar{e}^{i+1}(1+v^{i+1})}{\bar{E}^{i+1}} \right) \bar{\tau}_1^{i,i+1} - \frac{\bar{e}^{i+1}(1+v^{i+1})}{12\bar{E}^{i+1}}\bar{\tau}_1^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2^{i+1} - \bar{U}_2^i - \frac{5\bar{e}^i}{12}\bar{\Phi}_2^i - \frac{5\bar{e}^{i+1}}{12}\bar{\Phi}_2^{i+1} - \frac{\bar{e}^i}{12}\bar{U}_{3'2}^i - \frac{\bar{e}^{i+1}}{12}\bar{U}_{3'2}^{i+1} - \bar{D}_2^{i,i+1an} = \\ - \frac{\bar{e}^i(1+v^i)}{12\bar{E}^i}\bar{\tau}_2^{i-1,i} + \frac{1}{8} \left(\frac{2\bar{e}^i(1+v^i)}{\bar{E}^i} + \frac{2\bar{e}^{i+1}(1+v^{i+1})}{\bar{E}^{i+1}} \right) \bar{\tau}_2^{i,i+1} - \frac{\bar{e}^{i+1}(1+v^{i+1})}{12\bar{E}^{i+1}}\bar{\tau}_2^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\bar{U}_3^{i+1} - \bar{U}_3^i - \bar{D}_3^{i,i+1an} = -\frac{9\bar{e}^i}{70\bar{E}^i}\bar{\nu}^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{\bar{e}^i}{\bar{E}^i} + \frac{\bar{e}^{i+1}}{\bar{E}^{i+1}} \right) \bar{\nu}^{i,i+1} - \frac{9\bar{e}^{i+1}}{70\bar{E}^{i+1}}\bar{\nu}^{i+1,i+2} \quad (4.22)$$

Ces 3(n-1) équations 4.20-4.22 peuvent s'écrire sous forme matricielle ($\forall i \in [1, n-1]$) :

$$\begin{aligned} P^i X_{11}^i + P^{i+1} X_{11}^{i+1} + Q^i X_{22}^i + Q^{i+1} X_{22}^{i+1} + R^i X^i + S^i X^{i+1} + ANN^i \\ = T^i Y^{i-1,i} + U^i Y^{i,i+1} + V^i Y^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Où P^i, Q^i, \dots, ANN^i sont des matrices de paramètres de matériaux $\bar{e}_i, \bar{E}^i, \nu^i, \bar{e}_{i+1}, \bar{E}^{i+1}, \nu^{i+1}$ de la couche i et $i+1$, que nous donnons dans l'annexe A.

4.1.2 Génération des équations du modèle

Nous notons :

$$X = {}^T [X^1 X^2 \dots X^n] \text{ vecteur de } 5n \text{ composantes} \quad (4.24)$$

$$Y = {}^T [Y^{0,1} Y^{1,2} \dots Y^{n,n+1}] \text{ vecteur de } 3(n+1) \text{ composantes} \quad (4.25)$$

$$Y^{1,n} = {}^T [Y^{1,2} Y^{2,3} \dots Y^{n-1,n}] \text{ vecteur de } 3(n-1) \text{ composantes} \quad (4.26)$$

En générant les 5n équations 4.19 pour $i \in [1, n]$, nous obtenons un système de 5n équations différentielles globales d'une structure de n couches :

$$\begin{aligned} AX_{11} + BX_{22} + CX_{12} + DX_{11} + EX_{22} + FX = JY_{11}^{0,1} + KY_{22}^{0,1} + LY^{0,1} \\ + GY_{11}^{1,n} + HY_{22}^{1,n} + IY^{1,n} + MY_{11}^{n,n+1} + NY_{22}^{n,n+1} + OY^{n,n+1} + AN \end{aligned} \quad (4.27)$$

Où A, B, \dots, AN sont des matrices de paramètres de matériaux des couches 1 à n, fonction des matrices élémentaires A^i, B^i, \dots, L^i . Nous donnons la forme de ces matrices dans l'annexe A.

En générant les 3(n-1) équations 4.23 pour $i \in [1, n-1]$, nous obtenons un système de 3(n-1) équations différentielles globales d'une structure de n couches :

$$PX_{11} + QX_{22} + RX + ANN = VY^{0,1} + WY^{1,n} + ZY^{n,n+1} \quad (4.28)$$

Remarquons que W est inversible (voir l'annexe A), on tire :

$$\begin{cases} Y^{1,n} = W^{-1} (PX_{11} + QX_{22} + RX - VY^{0,1} - ZY^{n,n+1} + ANN) \\ Y_{11}^{1,n} = W^{-1} (PX_{11} + QX_{12} + RX_{11} - VY_{11}^{0,1} - ZY_{11}^{n,n+1} + ANN_{11}) \\ Y_{22}^{1,n} = W^{-1} (PX_{12} + QX_{22} + RX_{22} - VY_{22}^{0,1} - ZY_{22}^{n,n+1} + ANN_{22}) \end{cases} \quad (4.29)$$

En remplaçant ces valeurs dans 4.27, nous obtenons un système de 5n équations différentielles du second ordre du M4-5n avec $5n + 3$ inconnues.

$$\begin{aligned} (A - GW^{-1}P)X_{11} + (B - HW^{-1}Q)X_{22} + (C - GW^{-1}Q - HW^{-1}R)X_{12} \\ + (D - GW^{-1}R - IW^{-1}P)X_{11} + (E - HW^{-1}R - IW^{-1}Q)X_{22} + (F - IW^{-1}R)X = \\ (M - GW^{-1}Z)Y_{11}^{n,n+1} + (N - HW^{-1}Z)Y_{22}^{n,n+1} + (O - IW^{-1}Z)Y^{n,n+1} \\ + (J - GW^{-1}V)Y_{11}^{0,1} + (K - HW^{-1}V)Y_{22}^{0,1} + (L - IW^{-1}V)Y^{0,1} \\ + (AN + IW^{-1}ANN + GW^{-1}ANN_{11} + HW^{-1}ANN_{22}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nous notons désormais $\Sigma = Y^{n,n+1}$ le vecteur des contraintes à l'interface de la dernière couche de chaussée. L'équation 4.30 peut s'écrire sous forme plus simple :

$$\begin{aligned} AAX_{11} + BBX_{22} + CCX_{12} + DDX_{11} + EEX_{22} + FFX = \\ GG\Sigma_{11} + HH\Sigma_{22} + IIS\Sigma + JJ \end{aligned} \quad (4.31)$$

Où AA, BB, .., JJ sont des matrices fonction des paramètres de matériaux des n couches et des conditions aux limites qui correspondent aux facteurs dans la formule 4.30

Avec les conditions aux limites du problème sur la face supérieure du multicouche :

$$Y^{0,1} = {}^T [\bar{\tau}_1^{0,1} \bar{\tau}_2^{0,1} \bar{\nu}^{0,1}] \quad (4.32)$$

Et les contraintes d'interface entre la n^{ieme} couche de chaussée et le sol :

$$\Sigma = {}^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \bar{\tau}_2^{n,n+1} \bar{\nu}^{n,n+1}] \quad (4.33)$$

Le système des équations du M4-5n dans le cas 2D déformation plane

Dans le cas 2D de déformation plane, nous pourrions écrire le système de $3n$ équations différentielles du M4-5n, qui a la forme :

$$\boxed{AAAX_{11} + BBBX_{11} + CCCX = DDD\Sigma_{11} + EEE\Sigma + FFF} \quad (4.34)$$

Où AAA, BBB, .. , FFF : sont des matrices fonction des paramètres de matériaux des n couches et des conditions limites que nous pouvons tirer à partir des équations du 3D.

$Y^{0,1} = {}^T [\bar{\tau}_1^{0,1} \bar{\nu}^{0,1}]$ sont les conditions limites du problème sur la face supérieure du multicouche, et

$\Sigma = {}^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \bar{\nu}^{n,n+1}]$ sont les contraintes d'interface entre la n^{ieme} couche de chaussée et le sol. Et :

$X = {}^T [X^1 X^2 \dots X^n]$ vecteur de $3n$ composantes

$X^i = {}^T [U_1^i \quad \Phi_1^i \quad U_3^i]$ vecteur de 3 composantes

4.2 Traitement des conditions aux limites du problème

Dans cette partie, nous allons présenter les équations de conditions aux limites sous forme matricielle, puis les générer pour n couches.

4.2.1 Les conditions aux limites pour une couche

Traitement des conditions aux limites du bord bloqué

- Quand x tend vers l'infini, $\forall y$, sous forme matricielle, les équations 3.80 à 3.84 nous donnent :

$$CL_{x1}^i X_{11}^i + CL_{x2}^i X_{12}^i + CL_{x3}^i X_{13}^i = CL_{x4}^i Y^{i-1,i} + CL_{x5}^i Y^{i,i+1} \quad 5n \text{ equations} \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.35)$$

Où $CL_{x1}^i, CL_{x2}^i, CL_{x3}^i, CL_{x4}^i, CL_{x5}^i$ sont des matrices fonction des paramètres de matériaux, et données dans l'annexe B.

- Quand y tend vers l'infini, $\forall x$, sous forme matricielle, les équations 3.85 à 3.89 nous donnent :

$$CL_{y1}^i X_{11}^i + CL_{y2}^i X_{12}^i + CL_{y3}^i X_{13}^i = CL_{y4}^i Y^{i-1,i} + CL_{y5}^i Y^{i,i+1} \quad 5n \text{ equations} \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.36)$$

Où $CL_{y1}^i, CL_{y2}^i, CL_{y3}^i, CL_{y4}^i, CL_{y5}^i$ sont des matrices fonction des paramètres de matériaux, et données dans l'annexe B.

Traitement des conditions aux limites du bord libre

- Quand x tend vers l'infini, $\forall y$, sous forme matricielle, les équations 3.90 à 3.94 nous donnent :

$$CL_{x6}^i X_{11}^i + CL_{x7}^i X_{12}^i + CL_{x8}^i X_{13}^i = CL_{x9}^i Y^{i-1,i} + CL_{x10}^i Y^{i,i+1} \quad 5n \text{ equations} \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.37)$$

Où $CL_{x6}^i, CL_{x7}^i, CL_{x8}^i, CL_{x9}^i, CL_{x10}^i$ sont des matrices fonction des paramètres de matériaux, et données dans l'annexe B.

- Quand y tend vers l'infini, $\forall x$, sous forme matricielle, les équations 3.95 à 3.99 nous donnent :

$$CL_{y6}^i X_{11}^i + CL_{y7}^i X_{12}^i + CL_{y8}^i X_{13}^i = CL_{y9}^i Y^{i-1,i} + CL_{y10}^i Y^{i,i+1} \quad 5n \text{ equations} \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.38)$$

Où $CL_{y6}^i, CL_{y7}^i, CL_{y8}^i, CL_{y9}^i, CL_{y10}^i$ sont des matrices fonction des paramètres de matériaux, et données dans l'annexe B.

4.2.2 Génération des conditions aux limites pour n couches

- Quand x tend vers l'infini, quelque soit y , notons que les conditions limites peuvent s'écrire soit sous forme 4.35, soit sous forme 4.37. En générant ces équations pour n couches, nous obtenons un système sous forme :

$$CL_{x1}X'_{11} + CL_{x2}X'_{12} + CL_{x3}X = CL_{x4}Y^{0,1} + CL_{x5}Y^{1,n} + CL_{x6}\Sigma \quad (4.39)$$

Remplaçons $Y^{1,n}$ de l'équation 4.29 dans 4.39, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} (CL_{x1} - CL_{x5}W^{-1}P)X'_{11} + (CL_{x2} - CL_{x5}W^{-1}Q)X'_{12} + (CL_{x3} - CL_{x5}W^{-1}R)X = \\ (CL_{x4} - CL_{x5}W^{-1}V)Y^{0,1} + (CL_{x6} - CL_{x5}W^{-1}Z)\Sigma \end{aligned} \quad (4.40)$$

ou

$$C_{x1}X'_{11} + C_{x2}X'_{12} + C_{x3}X = C_{x4}Y^{0,1} + C_{x5}\Sigma \quad (4.41)$$

- Quand y tend vers l'infini, quelque soit x , notons que les conditions limites peuvent s'écrire soit sous forme 4.36, soit sous forme 4.38. En générant ces équations pour n couches, nous obtenons un système sous forme :

$$CL_{y1}X'_{11} + CL_{y2}X'_{12} + CL_{y3}X = CL_{y4}Y^{0,1} + CL_{y5}Y^{1,n} + CL_{y6}\Sigma \quad (4.42)$$

Remplaçons $Y^{1,n}$ de l'équation 4.29 dans 4.42, nous obtenons alors $5n$ équations :

$$\begin{aligned} (CL_{y1} - CL_{y5}W^{-1}P)X'_{11} + (CL_{y2} - CL_{y5}W^{-1}Q)X'_{12} + (CL_{y3} - CL_{y5}W^{-1}R)X = \\ (CL_{y4} - CL_{y5}W^{-1}V)Y^{0,1} + (CL_{y6} - CL_{y5}W^{-1}Z)\Sigma \end{aligned} \quad (4.43)$$

ou

$$C_{y1}X'_{11} + C_{y2}X'_{12} + C_{y3}X = C_{y4}Y^{0,1} + C_{y5}\Sigma \quad (4.44)$$

Les conditions aux limites au bord des plaques du M4-5n sont donc des relations faisant intervenir les dérivés au premier ordre des champs. Plus généralement, quand les bords ne sont pas libres ou bloqués, mais pour des conditions aux limites quelconques, nous pouvons toujours obtenir un système d'équations sous forme matricielle comme 4.41 ou 4.44, avec la même méthode d'analyse.

4.3 Adimensionalisation des équations de Boussinesq

Nous notons \bar{S} la surface adimensionalisée de S .

Le déplacement en bas de la n^{ieme} couche est approché dans la modélisation M4-5n, après avoir adimensionalisé les équations 3.110, nous obtenons :

$$\begin{cases} \bar{u}_{1bas}^n = \bar{U}_1^n(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{\epsilon}_n}{2}\bar{\Phi}_1^n(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{u}_{2bas}^n = \bar{U}_2^n(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{\epsilon}_n}{2}\bar{\Phi}_2^n(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{u}_{3bas}^n = \bar{U}_3^n(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad (4.45)$$

La discontinuité entre le déplacement en bas de la n^{ieme} couche et la surface du sol, après avoir adimensionalisé, est connue et égale à $\bar{\gamma}^{n,n+1}$, donc l'équation 3.111 s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{U}_1^n(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{H^n}{2}\bar{\Phi}_1^n(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\gamma}_1^{n,n+1} = \bar{u}_x^{surface} \\ \bar{U}_2^n(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{H^n}{2}\bar{\Phi}_2^n(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\gamma}_2^{n,n+1} = \bar{u}_y^{surface} \\ \bar{U}_3^n(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\gamma}_3^{n,n+1} = \bar{u}_z^{surface} \end{cases} \quad (4.46)$$

Les équations de Boussinesq 3.112 à 3.114 adimensionalisées sont :

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^n(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{e}^n}{2} \bar{\Phi}_1^n(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\gamma}_1^{n,n+1} = & \quad (4.47) \\ - \frac{(1-2v_s)(1+v_s)}{2\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\nu}^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ + \frac{1+v_s}{\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\tau}_1^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (1-\nu)(\bar{y} - \bar{\eta})^2}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{3/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ + \frac{(1+v_s)v_s}{\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\tau}_2^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{(\bar{x} - \bar{\xi})(\bar{y} - \bar{\eta})}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{3/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2^n(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{e}^n}{2} \bar{\Phi}_2^n(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\gamma}_2^{n,n+1} = & \quad (4.48) \\ - \frac{(1-2v_s)(1+v_s)}{2\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\nu}^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{\bar{y} - \bar{\eta}}{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ + \frac{(1+v_s)v_s}{\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\tau}_1^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{(\bar{x} - \bar{\xi})(\bar{y} - \bar{\eta})}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{3/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ + \frac{1+v_s}{\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\tau}_2^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{(1-\nu)(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{3/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_3^n(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\gamma}_3^{n,n+1} = \frac{1-v_s^2}{\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\nu}^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{1}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{1/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} & \quad (4.49) \\ + \frac{(1-2v_s)(1+v_s)}{2\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\tau}_1^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ + \frac{(1-2v_s)(1+v_s)}{2\pi} \int_{\bar{S}} \bar{\tau}_2^{n,n+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \frac{\bar{y} - \bar{\eta}}{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\boxed{M.X(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \Sigma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta}} \quad (4.50)$$

Où : M est une matrice 3x5n (voir l'annexe A)

f est une matrice 3x3 de fonctions connues (voir l'annexe A).

$\Sigma = {}^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \quad \bar{\tau}_2^{n,n+1} \quad \bar{\nu}^{n,n+1}]$ vecteur d'inconnues de 3 composantes

$X = {}^T [X^1 X^2 \dots X^n]$ vecteur d'inconnues de 5n composantes

$\bar{\Gamma}^{n,n+1} = {}^T [\bar{\gamma}_1^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_2^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_3^{n,n+1}]$: vecteur connu de 3 composantes de champs de discontinuité des déplacements à l'interface de la dernière couche de chaussée et du sol.

Le système des équations de Boussinesq dans le cas 2D déformation plane

Nous notons \bar{l} l'adimensionalisée de l . Après adimensionalisation, les équations de Boussinesq 3.115 à 3.116 du cas 2D en déformation plane ont la forme :

$$\begin{aligned} \bar{u}_x^{surface} = \bar{U}_1^n(\bar{x}) + \frac{H^n}{2} \bar{\Phi}_1^n(\bar{x}) - \bar{\gamma}_1^{n,n+1} = & \quad (4.51) \\ = - \frac{(1-2v_s)(1+v_s)}{2} \int_{\bar{l}} \bar{\nu}^{n,n+1}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} - \frac{2(1-v_s^2)}{\pi} \int_{\bar{l}} \bar{\tau}^{n,n+1}(\bar{\xi}) \ln|\bar{x} - \bar{\xi}| d\bar{\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_z^{surface} &= \bar{U}_3^n(\bar{x}) - \bar{\gamma}_3^{n,n+1} = \\ &= -\frac{2(1-\nu_s^2)}{\pi} \int_{\bar{l}} \bar{\nu}^{n,n+1}(\bar{\xi}) \ln|\bar{x} - \bar{\xi}| d\bar{\xi} + \frac{(1-2\nu_s)(1+\nu_s)}{2} \int_{\bar{l}} \bar{\tau}^{n,n+1}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Sous forme matricielle, de même façon que le cas 3D, ces équations peuvent être écrites :

$$\boxed{MM.X(\bar{x}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}) = \int_{\bar{l}} ff(\bar{x}, \bar{\xi})\Sigma(\bar{\xi})d\bar{\xi}} \quad (4.53)$$

Où : MM : Matrice 2x3n, donnée dans l'annexe A

ff : Matrice 2x2 des fonctions connues, données dans l'annexe A.

$\Sigma =^T [\bar{\tau}^{n,n+1} \quad \bar{\nu}^{n,n+1}]$ vecteur d'inconnues de 2 composantes

$X =^T [X^1 X^2 \dots X^n]$ vecteur d'inconnues 2D de 3n composantes

$\bar{\Gamma}^{n,n+1} =^T [\bar{\gamma}_1^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_3^{n,n+1}]$: vecteur connu de 2 composantes de champs de discontinuité des déplacements à l'interface de la dernière couche de chaussée et du sol.

4.4 Le modèle simplifié M4-B.

Nous pouvons maintenant écrire sous forme compacte les équations du modèle de chaussée.

$$\begin{aligned} AAAX_{11} + BBX_{22} + CCX_{12} + DDX_{11} + EEX_{22} + FFX &= \\ GG\Sigma_{11} + HH\Sigma_{22} + IIS + JJ & \quad (5n \text{ equ.}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$M.X(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\bar{s}} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta})\Sigma(\bar{\xi}, \bar{\eta})d\bar{\xi}d\bar{\eta} \quad (3 \text{ equ.}) \quad (4.55)$$

Où AA, BB, .. LL, M, f sont des matrices connues en fonction des paramètres de matériaux. Nous donnons leur forme dans l'annexe A. Les notations des inconnues X et Σ sont :

$$X =^T [(\bar{U}_1^1 \quad \bar{U}_2^1 \quad \bar{\Phi}_1^1 \quad \bar{\Phi}_2^1 \quad \bar{U}_3^1) \quad \dots \quad (\bar{U}_1^n \quad \bar{U}_2^n \quad \bar{\Phi}_1^n \quad \bar{\Phi}_2^n \quad \bar{U}_3^n)] \quad (5n \text{ inconnues})$$

$$\Sigma =^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \quad \bar{\tau}_2^{n,n+1} \quad \bar{\nu}^{n,n+1}] \quad (3 \text{ inconnues})$$

Où $\bar{\Gamma}^{n,n+1} =^T [\bar{\gamma}_1^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_2^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_3^{n,n+1}]$: vecteur connu de 3 composantes de champs de discontinuité des déplacements à l'interface de la dernière couche de chaussée et du sol.

Nous obtenons donc un système de $(5n + 3)$ équations à $(5n + 3)$ inconnues.

Le système des équations du modèle dans le cas 2D déformation plane

$$AAAX_{11} + BBBX_{11} + CCCX = \quad (4.56)$$

$$DDD\Sigma_{11} + EEE\Sigma + FFF \quad (3n \text{ equ.})$$

$$MM.X(\bar{x}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}) = \int_{\bar{l}} ff(\bar{x}, \bar{\xi})\Sigma(\bar{\xi})d\bar{\xi} \quad (2 \text{ equ.}) \quad (4.57)$$

Où AAA, BBB, .. , MM,ff sont des matrices connues en fonction des paramètres de matériaux des n couches et des conditions limites que nous pouvons extraire du cas 3D en négligeant les termes en Oy. Et les notations des inconnues X et Σ .

$$X =^T [(\bar{U}_1^1 \quad \bar{\Phi}_1^1 \quad \bar{U}_3^1) \quad \dots \quad (\bar{U}_1^n \quad \bar{\Phi}_1^n \quad \bar{U}_3^n)] \quad (3n \text{ inconnues})$$

$$\Sigma =^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \bar{\nu}^{n,n+1}] \quad (2 \text{ inconnues})$$

Où $\bar{\Gamma}^{n,n+1} =^T [\bar{\gamma}_1^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_3^{n,n+1}]$: vecteur connu de 2 composantes de champs de discontinuité des déplacements à l'interface de la dernière couche de chaussée et du sol.

Nous obtenons donc un système de $(3n + 2)$ équations à $(3n + 2)$ inconnues.

Conclusions

Dans le cas général d'une structure 3D pour n couches de chaussée reposant sur un massif semi-infini, nous avons ramené les équations du modèle simplifié à un système de $5n$ équations différentielles du second ordre et 3 équations intégrales en fonction de $5n + 3$ inconnues. Nous avons donc dans ce cas un système d'équations planes, dont chaque point du plan à $5n + 3$ degrés de liberté. Pour la résolution du système d'équations, nous allons choisir une méthode numérique. Le choix de la méthode numérique et la résolution numérique seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Approximation numérique

Comme nous l'avons présenté dans les parties précédentes, le système des équations du modèle se compose de deux systèmes différents : un système d'équations différentielles, un système d'équations intégrales, nous allons aborder dans ce chapitre la méthode d'approximation numérique pour chaque type d'équations. Le premier paragraphe est consacré au choix des méthodes numériques. Le second paragraphe présente le modèle approché numérique de la chaussée.

5.1 Choix de la méthode numérique.

Pour chaque type de système d'équations, nous avons différentes méthodes numériques correspondantes. Avec les équations différentielles, nous pouvons utiliser les méthodes des différences finies ou des éléments finis. Avec les équations intégrales, nous pouvons utiliser différentes méthodes d'intégrations numériques.

Dans cette première partie, nous allons présenter quelques méthodes numériques populaires pour chaque type d'équations du modèle, puis les comparer et choisir les méthodes les mieux adaptées à notre problème.

5.1.1 Méthode numérique pour les équations différentielles du modèle.

Les équations différentielles pourraient être approchées par les méthodes des différences finies ou par la méthode des éléments finis. Nous allons présenter dans le cadre de cette partie la comparaison des solutions approchées à l'aide de deux schémas d'approximation par différences finies (méthode d'Euler [Press et al., 1992], méthode de Newmark [Newmark, 1959]) et la méthode des éléments finis de type éléments linéaires [Zienkewicz et Taylor, 1991], [Batoz et Dhatt, 1990], [Dhatt et Touzot, 1984]. La méthode des différences finies de Runge-Kutta [Press et al., 1992] est largement utilisée pour les problèmes avec conditions initiales (problème du temps), mais très difficile à appliquer pour les problèmes avec conditions aux frontières (problème d'espace). Dans l'exemple suivant, nous allons examiner un problème avec conditions aux frontières (où les conditions aux limites sont données pour tous les bords), donc l'application de la méthode de Runge-Kutta n'est pas examinée.

Pour illustrer, nous examinons l'exemple suivant :

$$y''(x) - \frac{1}{L^2}y(x) + \frac{2}{L}e^{-\frac{x}{L}} = 0 \quad (5.1)$$

$$y(0) = 0 \quad (5.2)$$

$$y'(L) = 0 \quad (5.3)$$

x est supposé varier de 0 à L . Nous connaissons la solution analytique :

$$y(x) = xe^{-\frac{x}{L}} \quad (5.4)$$

Ces trois méthodes de résolution approchée s'appuient sur une discrétisation. Nous allons choisir une discrétisation de l'espace unidimensionnel par $N + 1$ points équidistants (cf. figure 5.4) :

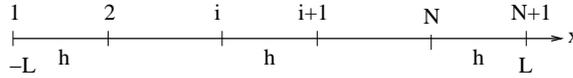


FIGURE 5.1. *Discrétisation de l'espace*

Notons :

h le pas de discrétisation

x_i la coordonnée du point i ($x_{i+1} - x_i = h$).

y_i : la valeur de la fonction au point i .

Dans chacune des trois résolutions approchées des équations 5.1 à 5.3, les inconnues principales du problème approché sont les valeurs de y_i ($i \in [1, N + 1]$).

Chacune des méthodes d'approximation va consister à écrire un système de $N + 1$ équations linéaires pour déterminer de manière approchée les $N + 1$ valeurs y_i ($i \in [1, N + 1]$). Selon la méthode utilisée, les systèmes linéaires sont différents.

5.1.1.1 Approximation par la méthode d'Euler

Ecrivons l'équation 5.1 au point x_i

$$y''(x_i) - \frac{1}{L^2}y(x_i) + \frac{2}{L}e^{-\frac{x_i}{L}} = 0 \quad (5.5)$$

Ici l'on pose :

$$z(x_i) = y'(x_i) \quad (5.6)$$

L'équation 5.5 devient :

$$\begin{pmatrix} z'(x_i) \\ y'(x_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(x_i) \\ y(x_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{L}e^{-\frac{x_i}{L}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

On pose :

$$f(x_i) = \begin{pmatrix} z(x_i) \\ y(x_i) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

L'équation 5.7 se réécrit :

$$f'(x_i) - Af(x_i) + \begin{pmatrix} \frac{2}{L}e^{-\frac{x_i}{L}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Dans la méthode d'Euler, $f'(x_i)$ est approchée par :

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (5.10)$$

On voit que l'équation 5.9 peut être écrite à tous les points i ($\forall i \in [1, N]$), nous obtenons ainsi les $2N$ équations linéaires suivantes :

$$\frac{1}{h}f_{i+1} - \left(\frac{1}{h} + A\right)f_i + \begin{pmatrix} \frac{2}{L}e^{-\frac{x_i}{L}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Cette équation se réécrit ($\forall i \in [1, N]$) :

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{h} + A\right) \begin{pmatrix} z_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{L}e^{-\frac{x_i}{L}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

La condition aux limites $y(0) = 0$ fournit l'équation :

$$y_1 = 0 \quad (5.13)$$

La condition aux limites $y'(L) = 0$ fournit l'équation :

$$z_{N+1} = 0 \quad (5.14)$$

Nous obtenons ainsi un système linéaire de $2(N+1)$ équations à $2(N+1)$ inconnues. On peut noter que cette méthode induit une erreur de l'ordre $O(h^2)$.

5.1.1.2 Approximation par la méthode de Newmark

L'erreur $O(h^2)$ est quelquefois considérée comme excessive et l'on est alors amené à chercher des méthodes dont la solution approchée converge plus rapidement vers la solution exacte lorsque h tend vers 0.

Parmi ces méthodes, il est souvent recommandé d'utiliser la méthode de Newmark. Schématiquement la méthode de Newmark de paramètre α ($\alpha \in [0, 1]$) est décrite par l'approximation suivante :

$$(1 - \alpha)y'(x_i) + \alpha y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (5.15)$$

Nous reformulons la démarche pour notre exemple ci-dessous.

Ecrivons l'équation 5.1 aux points $i-1, i, i+1$:

$$y''(x_{i-1}) - \frac{1}{L^2}y(x_{i-1}) + \frac{2}{L}e^{-\frac{x_{i-1}}{L}} = 0 \quad (5.16)$$

$$y''(x_i) - \frac{1}{L^2}y(x_i) + \frac{2}{L}e^{-\frac{x_i}{L}} = 0 \quad (5.17)$$

$$y''(x_{i+1}) - \frac{1}{L^2}y(x_{i+1}) + \frac{2}{L}e^{-\frac{x_{i+1}}{L}} = 0 \quad (5.18)$$

Effectuons une combinaison linéaire de ces 3 équations avec les pondérations respectives : $(1 - \alpha)^2, 2\alpha(1 - \alpha), \alpha^2$.

Nous obtenons $N - 1$ équations :

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha)^2 y''(x_{i-1}) + 2\alpha(1 - \alpha) y''(x_i) + \alpha^2 y''(x_{i+1}) \\ & - \frac{1}{L^2} \left((1 - \alpha)^2 y(x_{i-1}) + 2\alpha(1 - \alpha) y(x_i) + \alpha^2 y(x_{i+1}) \right) \\ & + \frac{2}{L} \left((1 - \alpha)^2 e^{-\frac{x_{i-1}}{L}} + 2\alpha(1 - \alpha) e^{-\frac{x_i}{L}} + \alpha^2 e^{-\frac{x_{i+1}}{L}} \right) = 0 \quad \forall i \in [2, N] \end{aligned} \quad (5.19)$$

La méthode de Newmark revient ici à proposer une approximation pour le terme

$$(1 - \alpha)^2 y''(x_{i-1}) + 2\alpha(1 - \alpha)y''(x_i) + \alpha^2 y''(x_{i+1})$$

à l'aide des valeurs de y_i ($i \in [1, N + 1]$). Ce terme peut se réécrire :

$$(1 - \alpha) [(1 - \alpha)y''(x_{i-1}) + \alpha y''(x_i)] + \alpha [(1 - \alpha)y''(x_i) + \alpha y''(x_{i+1})]$$

En utilisant l'approximation 5.15 ce terme se réécrit :

$$(1 - \alpha) \left[\frac{y'(x_i) - y'(x_{i-1})}{h} \right] + \alpha \left[\frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h} \right]$$

que nous réécrivons sous la forme :

$$-\frac{1}{h} [(1 - \alpha)y'(x_{i-1}) + \alpha y'(x_i)] + \frac{1}{h} [(1 - \alpha)y'(x_i) + \alpha y'(x_{i+1})]$$

En utilisant à nouveau l'approximation 5.15 nous obtenons l'expression approchée suivante :

$$(1 - \alpha)^2 y''(x_{i-1}) + 2\alpha(1 - \alpha)y''(x_i) + \alpha^2 y''(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (5.20)$$

Par exemple lorsque l'on donne le paramètre classique de Newmark $\alpha = \frac{1}{2}$ (cette valeur donne une convergence toujours stable pour les problèmes linéaires), on obtient l'approximation suivante :

$$\frac{1}{4} (y''(x_{i-1}) + y''(x_i) + y''(x_{i+1})) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (5.21)$$

On obtient avec cette approximation pour $i \in [2, N]$, $N - 1$ équations linéaires portant sur $N + 1$ inconnues y_i ($i \in [1, N + 1]$) :

$$\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - \frac{1}{4L^2}(y_{i+1} + 2y_i + y_{i-1}) + \frac{1}{2L} \left(e^{-\frac{x_{i-1}}{L}} + 2e^{-\frac{x_i}{L}} + e^{-\frac{x_{i+1}}{L}} \right) = 0 \quad (5.22)$$

La condition aux limites $y(0) = 0$ fournit l'équation :

$$y_1 = 0 \quad (5.23)$$

La condition aux limites $y'(L) = 0$ est prise en compte de manière approchée en considérant une approximation polynomiale de degré 3 dans le dernier segment :

$$y(x) = a + b(x - L) + c(x - L)^2 + d(x - L)^3 \quad (5.24)$$

Notons que si l'on prend $x = L$, on obtient : $a = y_{N+1}$

Par dérivation on obtient :

$$y'(x) = b + 2c(x - L) + 3d(x - L)^2 \quad (5.25)$$

$$y''(x) = 2c + 6d(x - L) \quad (5.26)$$

On sait que :

$$y'(x_{N+1}) = 0 \quad (5.27)$$

$$y''(x_{N+1}) = \frac{1}{L^2}y_{N+1} - \frac{2}{L}e^{-\frac{x_{N+1}}{L}} \quad (5.28)$$

$$y''(x_N) = \frac{1}{L^2}y_N - \frac{2}{L}e^{-\frac{x_N}{L}} \quad (5.29)$$

Les équations 5.25 à 5.29 nous donnent :

$$b = y'(x_{N+1}) = 0 \quad (5.30)$$

$$c = \frac{y''(x_{N+1})}{2} = \frac{1}{2L^2}y_{N+1} - \frac{1}{L}e^{-\frac{x_{N+1}}{L}} \quad (5.31)$$

$$d = \frac{y''(x_N) - y''(x_{N+1})}{6h} = \frac{\frac{1}{L^2}(y_N - y_{N+1}) - \frac{2}{L}(e^{-\frac{x_N}{L}} - e^{-\frac{x_{N+1}}{L}})}{6h} \quad (5.32)$$

Cette approximation prise au point x_N fournit l'équation linéaire suivante reliant y_N et y_{N+1} :

$$\left(-\frac{1}{L^2} + \frac{4}{h^2}\right)y_N + \left(-\frac{1}{L^2} - \frac{4}{h^2}\right)y_{N+1} + \frac{2}{L}\left(e^{-\frac{x_N}{L}} + e^{-\frac{x_{N+1}}{L}}\right) = 0 \quad (5.33)$$

Nous avons ainsi un système de $N + 1$ équations linéaires à $N + 1$ inconnues y_i ($i \in [1, N + 1]$).

On peut démontrer que cette méthode induit une erreur de $O(h^3)$.

5.1.1.3 Approximation par la méthode des éléments finis

La discrétisation de la figure 5.4 donne N éléments. L'élément i est le segment compris entre les points i et $i + 1$.

La formulation faible de l'équation 5.1 est obtenue en multipliant par la fonction test y^* , $y^*(0) = 0$ et en intégrant :

$$W = \int_0^L y^* y'' dx - \frac{1}{L^2} \int_0^L y^* y dx + \frac{2}{L} \int_0^L y^* e^{-\frac{x}{L}} dx = 0 \quad \forall y^*, y^*(0) = 0 \quad (5.34)$$

En intégrant par partie le premier terme, on obtient :

$$W = - \int_0^L y^* y' dx + (y^* y')|_0^L - \frac{1}{L^2} \int_0^L y^* y dx + \frac{2}{L} \int_0^L y^* e^{-\frac{x}{L}} dx = 0 \quad \forall y^*, y^*(0) = 0 \quad (5.35)$$

Notons que $y^*(0) = 0$ et $y'(L) = 0$, nous avons donc : $(y^* y')|_0^L = 0$.

Pour chaque élément i , nous faisons un changement de variable :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_i + \frac{1+\xi}{2}x_{i+1} \rightarrow dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}d\xi = \frac{h}{2}d\xi \quad (5.36)$$

Pour l'élément i , la fonction $y(x)$ est approchée par :

$$y = \frac{1-\xi}{2}y_i + \frac{1+\xi}{2}y_{i+1} \quad (5.37)$$

L'approximation de $y(x)$ dans l'élément i donne :

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (5.38)$$

Les fonctions test y^* sont choisies de la même façon dans chaque élément i :

$$y^* = \frac{1-\xi}{2}y_i^* + \frac{1+\xi}{2}y_{i+1}^* \rightarrow y^{*'} = \frac{y_{i+1}^* - y_i^*}{h} \quad (5.39)$$

Les intégrales dans 5.35 se calculent alors exactement :

$$W = \sum_{i=1}^N \langle y_i^* \quad y_{i+1}^* \rangle \left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{6L^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} \\ - \sum_{i=1}^N \langle y_i^* \quad y_{i+1}^* \rangle \frac{2}{h} e^{-\frac{x_{i+1}+x_i}{2L}} \begin{pmatrix} Le^{-\frac{h}{2L}} + he^{\frac{h}{2L}} - Le^{\frac{h}{2L}} \\ -Le^{-\frac{h}{2L}} - he^{-\frac{h}{2L}} + Le^{\frac{h}{2L}} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall y_i^*, y_1^* = 0 \quad (5.40)$$

Classiquement, on note :

$$[k_i^e] = \frac{1}{6h} \begin{pmatrix} 6 + \frac{2h^2}{L^2} & -6 + \frac{h^2}{L^2} \\ -6 + \frac{h^2}{L^2} & 6 + \frac{2h^2}{L^2} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

et

$$f_i^e = \frac{2}{h} e^{-\frac{x_{i+1}+x_i}{2L}} \begin{pmatrix} Le^{-\frac{h}{2L}} + he^{\frac{h}{2L}} - Le^{\frac{h}{2L}} \\ -Le^{-\frac{h}{2L}} - he^{-\frac{h}{2L}} + Le^{\frac{h}{2L}} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

$[k_i^e]$ et f_i^e sont appelés respectivement la rigidité élémentaire et la force élémentaire de l'élément i .

Nous réécrivons 5.40 sous forme :

$$W = \sum_{i=1}^N \langle y_i^* \quad y_{i+1}^* \rangle \left[[k_i^e] \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} - f_i^e \right] = 0 \quad (5.43)$$

L'égalité 5.43 doit être vérifiée $\forall y_i^*, y_1^* = 0, i \in [1, N+1]$, cela implique la nullité de la dérivée partielle de W par rapport à chaque y_{i+1}^* ($i \in [1, N]$). Nous obtenons ainsi $N+1$ équations linéaires :

Lorsque $i \in [1, N-1]$ $\frac{\partial W}{\partial y_{i+1}^*} = 0$ s'écrit :

$$\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6L^2} \right) y_i + \left(\frac{2}{h} + \frac{2h}{3L^2} \right) y_{i+1} + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6L^2} \right) y_{i+2} - 2e^{-\frac{x_{i+1}+x_i}{2L}} (e^{\frac{h}{2L}} - e^{-\frac{h}{2L}}) = 0 \quad (5.44)$$

Lorsque $i = N$ $\frac{\partial W}{\partial y_{N+1}^*} = 0$ s'écrit :

$$\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6L^2} \right) y_N + \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3L^2} \right) y_{N+1} - \frac{2}{h} e^{-\frac{x_{N+1}+x_N}{2L}} (-Le^{-\frac{h}{2L}} - he^{-\frac{h}{2L}} + Le^{\frac{h}{2L}}) = 0 \quad (5.45)$$

La condition à la limite $y(0) = 0$ fournit une $N+1$ ième équation :

$$y_1 = 0 \quad (5.46)$$

Nous avons ainsi un système de $N+1$ équations linéaires portant sur les $N+1$ inconnues y_i ($i \in [1, N+1]$). On peut démontrer que la méthode des éléments finis de type éléments linéaires induit une erreur en $O(h^3)$.

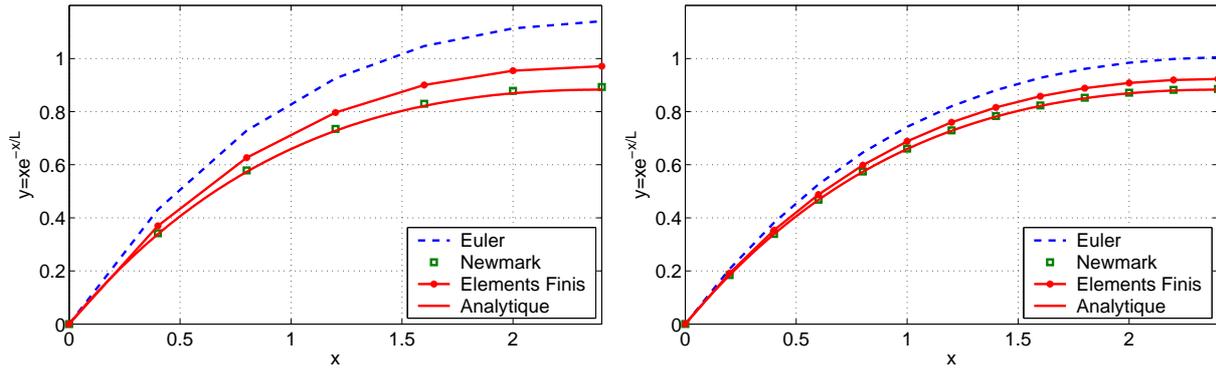


FIGURE 5.2. *Comparaison numérique des méthodes pour 7 points et 13 points, solution analytique $y = xe^{-\frac{x}{L}}$, $L = 2, 4$*

5.1.1.4 Comparaison des solutions pour les méthodes d'approximation

Nous présentons ci-dessous la comparaison des solutions des systèmes linéaires représentés (cf. figure 5.2).

En examinant les courbes de résultats, nous constatons que les solutions approchées par la méthode de Newmark et la méthode des éléments finis s'approchent mieux de la solution analytique que la solution approchée par la méthode d'Euler. La méthode de Newmark et la méthode des éléments finis ont le même d'ordre d'erreur ($O(h^3)$). L'erreur de la méthode de Newmark est due directement à son approximation 5.15 (quand $\alpha = \frac{1}{2}$), l'erreur de la méthode des éléments finis est due à l'approximation dans l'équation 5.37. L'efficacité des méthodes dépend cependant du problème examiné. Dans l'exemple précédent, il semble que la méthode des éléments finis donne une approximation moins bonne que celle de Newmark. Nous allons contester le contraire dans le problème suivant (cf. figure 5.3) :

$$y''(x) = (4x^2 - 2)y(x) \quad (5.47)$$

$$y(0) = 1 \quad (5.48)$$

$$y'(0) = 0 \quad (5.49)$$

La solution analytique de ce problème est $y = e^{-x^2}$.

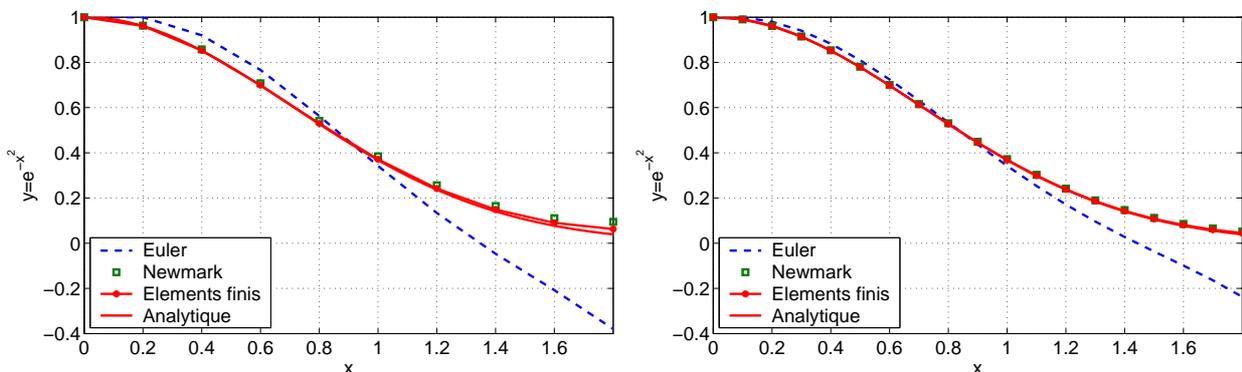


FIGURE 5.3. *Comparaison numérique des méthodes pour 10 points et 19 points, solution analytique $y = e^{-x^2}$*

La méthode de Newmark et la méthode des éléments finis ont une même efficacité quand nous calculons les intégrations avec l'interpolation linéaire que nous avons choisie. Pour notre

problème de chaussée, la géométrie est très simple. La méthode de Newmark est plus facile à utiliser que celle des éléments finis, donc nous allons prendre cette méthode pour le système d'équations différentielles.

5.1.2 Méthode numérique pour les équations intégrales du modèle.

Les méthodes d'intégrations numériques sont en ce moment très largement utilisées dans les calculs numériques. Il existe plusieurs choix de méthodes possibles. Le but de ces méthodes est d'obtenir l'intégration la plus exacte possible, avec le moins de fonctions d'évaluation de l'intégrale. Nous citons ci-dessous quelques méthodes très utilisées : l'intégration de Gauss, l'intégration de Newton-Cote, l'intégration de Simpson, l'intégration de Romberg...

Nous détaillerons ci-dessous l'intégration par une méthode semi-analytique et l'intégration numérique de Gauss.

Nous constatons dans la suite, que le choix d'une méthode de plus haut niveau d'ordre ne donne pas toujours une meilleure approche. Dans le cadre de cette partie, nous allons examiner simplement la résolution d'une équation d'intégrale, qui a la forme des équations de Boussinesq dans le cas 2D de déformation plane.

Examinons l'équation :

$$u(x) = \int_L y(\xi) f(x, \xi) d\xi \quad (5.50)$$

Où $u(x)$ et $f(x, \xi)$ sont supposés connus, $y(\xi)$ est l'inconnue à chercher.

Nous allons discrétiser l'espace unidimensionnel par $N + 1$ points équidistants x_i , $i \in [1, N + 1]$ comme suit :

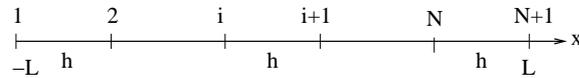


FIGURE 5.4. Schéma d'intégration numérique

Les points milieux $x_{i+\frac{1}{2}}$ de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ sont définis par :

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad (5.51)$$

5.1.2.1 Intégration numérique par une méthode semi-analytique

L'équation 5.50 peut s'écrire en décomposant l'intégration sur L en intégration sur des segments : les bornes des segments sont les extrémités ou les points milieux $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_L y(\xi) f(x, \xi) d\xi = \\ &= \int_{x_1}^{x_{1+\frac{1}{2}}} y(\xi) f(x, \xi) d\xi + \sum_{i=2}^N \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} y(\xi) f(x, \xi) d\xi + \int_{x_{N+\frac{1}{2}}}^{x_{N+1}} y(\xi) f(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.52)$$

Sur chaque segment $y(\xi)$ est approchée par sa valeur au noeud :

$$u(x) \approx y(x_1) \int_{x_1}^{x_{1+\frac{1}{2}}} f(x, \xi) d\xi + \sum_{i=2}^N y(x_i) \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, \xi) d\xi + y(x_{N+1}) \int_{x_{N+\frac{1}{2}}}^{x_{N+1}} f(x, \xi) d\xi \quad (5.53)$$

Comme $f(x, \xi)$ est connue, nous pouvons calculer l'intégrale de la fonction pour toutes les valeurs de x .

En écrivant 5.53 pour $N + 1$ valeurs de x , $x = x_j$, nous obtenons un système linéaire à résoudre :

$$\underline{U}_{semi} = \underline{K}_{semi} \underline{Y}_{semi}$$

Où $\underline{U}_{semi} = [u_1 \dots u_{N+1}]$ est le vecteur connu de $N + 1$ composantes, $u_j = u(x_j)$.

\underline{K}_{semi} est la matrice de rigidité de dimensions $(N + 1) \times (N + 1)$ obtenue par l'intégration numérique semi-analytique.

$$K_{semi(j,1)} = \int_{x_1}^{x_{1+\frac{1}{2}}} f(x_j, \xi) d\xi \quad (5.54)$$

$$K_{semi(j,i)} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x_j, \xi) d\xi \quad (5.55)$$

$$K_{semi(j,N+1)} = \int_{x_{N+\frac{1}{2}}}^{x_{N+1}} f(x_j, \xi) d\xi \quad (5.56)$$

$\underline{Y}_{semi} = [y_1 \dots y_{N+1}]$ est le vecteur des inconnues de $N + 1$ composantes, $y_i = y(x_i)$.

5.1.2.2 Intégration numérique par les points de Gauss

Nous écrivons à nouveau l'équation 5.50 en décomposant l'intégration sur L en intégration sur des segments, mais cette fois les bornes des segments sont les noeuds du maillage x_i :

$$u(x) = \int_L y(\xi) f(x, \xi) d\xi = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(\xi) f(x, \xi) d\xi \quad (5.57)$$

L'intégration par deux points de Gauss se schématise par :

$$\int_{-1}^1 h(u) du \approx h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (5.58)$$

La formule est exacte pour une fonction polynomiale de degré 3.

Intéressons nous à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(\xi) d\xi$. Nous effectuons le changement de variable ξ , $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ en u , $u \in [-1, 1]$:

$$\xi(u) = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + u \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad \rightarrow \quad d\xi = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} du \quad (5.59)$$

Nous avons :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(\xi) d\xi = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \int_{-1}^1 F(\xi(u)) du \quad (5.60)$$

$$\xi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} x_i + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} x_{i+1} \quad \xi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} x_i + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} x_{i+1} \quad (5.61)$$

Notons :

$$g_i^1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} x_i + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} x_{i+1} \quad (5.62)$$

$$g_i^2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} x_i + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} x_{i+1} \quad (5.63)$$

Soit encore :

$$\tilde{g} = \tilde{A}\tilde{\xi} \quad (5.64)$$

Avec :

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_i^1 \\ g_i^2 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

En utilisant l'approximation 5.58 dans l'intégration 5.60 on peut écrire :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(\xi) d\xi \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [F(g_i^1) + F(g_i^2)] \quad (5.66)$$

Ici encore la formule est exacte si h est un polynôme de degré 3.

L'équation 5.57 peut alors s'écrire :

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(\xi) f(x, \xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^N \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (y(g_i^1) f(x, g_i^1) + y(g_i^2) f(x, g_i^2)) \quad (5.67)$$

La fonction $f(x, \xi)$ est connue, donc il est facile de calculer la valeur $f(x, g_i^1)$. Par contre, $y(\xi)$ est l'inconnue du problème, nous pouvons faire une interpolation linéaire pour approcher $y(g_i^1)$ en fonction des valeurs aux points discrétisés x_i . Par l'interpolation linéaire, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} y(g_i^1) \\ y(g_i^2) \end{pmatrix} \approx \tilde{A} \begin{pmatrix} y(x_i) \\ y(x_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (O(h^3)) \quad (5.68)$$

Ainsi 5.67 devient :

$$u(x) = \sum_{i=1:N} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} < f(x, g_i^1) \quad f(x, g_i^2) > \tilde{A} \begin{pmatrix} y(x_i) \\ y(x_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

En écrivant 5.69 pour $N + 1$ valeurs de x ($x_j, j \in [1, N + 1]$) nous obtenons un système linéaire à résoudre :

$$\underline{U}_{Gauss} = \underline{K}_{Gauss} \underline{Y}_{Gauss}$$

Où $\underline{U}_{Gauss} = [u_1 \dots u_{N+1}]$ est le vecteur connu de $N + 1$ composantes, $u_j = u(x_j)$.

\underline{K}_{Gauss} est la matrice de rigidité de dimensions $(N + 1) \times (N + 1)$ obtenue par l'intégration numérique de Gauss

$$K_{Gauss(j,1)} = \frac{x_2 - x_1}{2} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_1^1) + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_1^2) \right) \quad (5.70)$$

$$K_{Gauss(j,i)} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_{i-1}^1) + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_{i-1}^2) \right) + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_i^1) + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_i^2) \right) \quad (5.71)$$

$$K_{Gauss(j,N+1)} = \frac{x_{N+1} - x_N}{2} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_N^1) + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} f(x_j, g_N^2) \right) \quad (5.72)$$

$\underline{Y}_{Gauss} = [y_1 \dots y_{N+1}]$ est le vecteur des inconnues de $N + 1$ composantes, $y_i = y(x_i)$.

5.1.2.3 Exemple

Examinons maintenant l'équation 5.50 avec les fonctions connues $u(x)$ et $f(x, \xi)$ ci-dessous :

$$u(x) = -\frac{2L^5}{25} - \frac{2x^4L}{5} - \frac{2x^2L^3}{15} + \frac{(L^5 - x^5)\log(L - x)}{5} + \frac{(L^5 + x^5)\log(x + L)}{5} \quad (5.73)$$

$$f(x, \xi) = \ln|x - \xi| \quad (5.74)$$

Dans ce cas nous connaissons la solution analytique : $y = \xi^4$.

Nous présentons ci-dessous la comparaison des solutions numériques avec la solution analytique (cf. figure 5.5) :

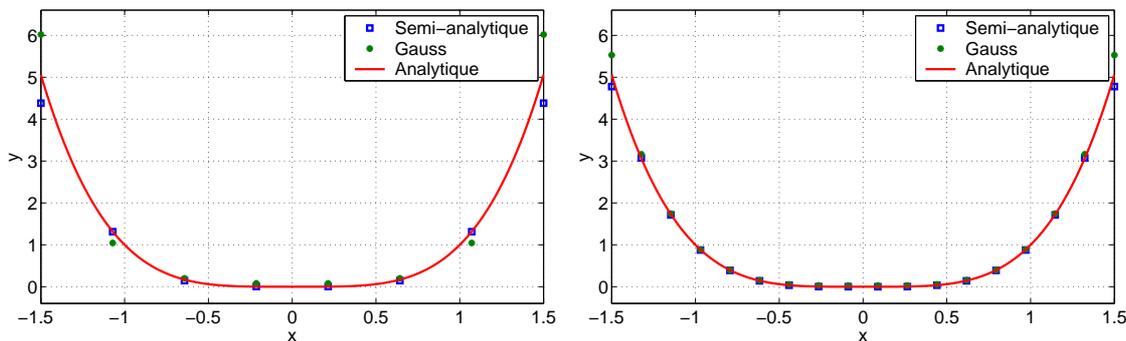


FIGURE 5.5. Comparaison des méthodes numériques de la fonction u pour 8 points et 18 points. Solution analytique $y = \xi^4$

Nous remarquons que la solution par la méthode semi-analytique est encore mieux approchée que celle par la méthode Gauss quand nous utilisons l'interpolation linéaire dans les intervalles.

En réalité, la méthode d'intégration par les points de Gauss est très exacte. Dans l'exemple ci-dessous, l'erreur de cette méthode est due au fait que nous avons choisi une approximation linéaire lors de l'intégration dans l'équation 5.67. Nous allons dans la suite choisir la méthode semi-analytique pour les équations intégrales du modèle simplifié M4-5n Boussinesq.

5.2 Le modèle approché numérique de la chaussée.

Nous allons proposer une approximation numérique pour le modèle M4-5n B de chaussée présenté dans les chapitres précédents.

Pour cela nous présentons d'abord la discrétisation retenue. Puis nous indiquerons le traitement que nous faisons des équations du M4-5n modélisant la chaussée. Dans la troisième partie, nous précisons le traitement que nous faisons des équations de Boussinesq modélisant l'interaction entre le sol et la chaussée.

Ensuite, nous décrivons comment les conditions aux limites sont introduites dans le calcul.

Enfin nous présentons le schéma de résolution.

5.2.1 Discrétisation

La chaussée peut être considérée comme une multiplaque de largeur finie et de longueur infinie reposant sur un massif de sol semi-infini. L'influence de la charge de type roue de camion sur la

chaussée décroît très vite si l'on s'éloigne de celle-ci. En cas de chargement thermique nous pouvons considérer que nous avons une invariance par translation le long de la chaussée.

En cas de fissuration de l'une des couches, l'influence de la fissure est assez rapidement décroissante le long de la chaussée.

Ainsi nous pouvons choisir de modéliser la chaussée par une multiplaque rectangulaire de dimension finie au lieu d'une longueur infinie. Cette plaque représentera, si les dimensions et les conditions aux limites sont bien choisies, une bonne approximation de la chaussée de longueur infinie.

Nous discrétisons cette plaque rectangulaire de largeur l et longueur L en N intervalles en $O\bar{x}$ et $O\bar{y}$. Notons (\bar{x}_k, \bar{y}_l) les coordonnées des noeuds du maillage, avec $k, l \in [1, N+1]$.

Notons : $p_{k+1}^x = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$, $p_{l+1}^y = \bar{y}_{l+1} - \bar{y}_l$.

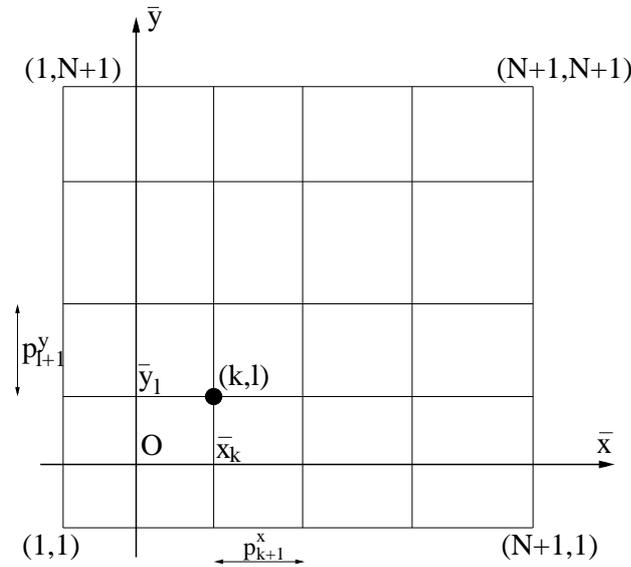


FIGURE 5.6. Schéma numérique du monocouche tridimensionnel

5.2.2 Traitement des équations du M4-5n

Rappelons que nous avons écrit les équations du M4-5n sous la forme (cf. équation 4.31) :

$$AAX'_{11} + BBX'_{22} + CCX'_{12} + DDX'_{11} + EEX'_{22} + FFX = \quad (5.75)$$

$$GG\Sigma'_{11} + HH\Sigma'_{22} + IISigma + JJ$$

avec :

$$X = {}^T [(\bar{U}_1^1 \quad \bar{U}_2^1 \quad \Phi_1^1 \quad \Phi_2^1 \quad \bar{U}_3^1) \quad \dots \quad (\bar{U}_1^n \quad \bar{U}_2^n \quad \Phi_1^n \quad \Phi_2^n \quad \bar{U}_3^n)] \quad (5n \text{ inconnues})$$

$$\Sigma = {}^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \quad \bar{\tau}_2^{n,n+1} \quad \bar{\nu}^{n,n+1}] \quad (3 \text{ inconnues})$$

Où les champs adimensionalisés sont définis par (cf. équations 4.2 et 4.9) :

$$\bar{U}_\alpha^i = \frac{E_s}{qa} U_\alpha^i \quad \bar{\Phi}_\alpha^i = \frac{E_s}{q} \Phi_\alpha^i \quad \bar{U}_3^i = \frac{E_s}{qa} U_3^i \quad (5.76)$$

$$\bar{\nu}^{i,i+1} = \frac{1}{q} \nu^{i,i+1} \quad \bar{\tau}_\alpha^{i,i+1} = \frac{1}{q} \tau_\alpha^{i,i+1} \quad (5.77)$$

Nous utilisons la méthode des différences finies de Newmark (pour $\alpha = \frac{1}{2}$) [Newmark, 1959].

Pour mettre en oeuvre la méthode de Newmark nous commençons par écrire 5.75 en tous les noeuds (k, l) de notre maillage, puis nous procédons à la combinaison des équations correspondant aux noeuds $(k-1, l)$, (k, l) , $(k+1, l)$ avec les coefficients $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. En utilisant les approximations 5.20 et 5.21 il est possible d'écrire un système d'équations dans lesquelles n'interviennent pas les dérivées en x . En procédant de la même manière avec les équations correspondant à $l-1, l, l+1$ il est possible d'éliminer aussi les dérivées en y . Nous avons ainsi un système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} & \left(4AA \frac{p_{l+1}^y}{p_{k+1}^x} + 4BB \frac{p_{k+1}^x}{p_{l+1}^y} + 4CC - 2DD p_{l+1}^y - 2EE p_{k+1}^x + FF p_{k+1}^x p_{l+1}^y \right) X_{k,l} \quad (5.78) \\ & + \left(4AA \frac{1}{p_{k+1}^x} - 4BB \frac{p_{k+1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} - 2DD + FF p_{k+1}^x \right) (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) X_{k,l+1} \\ & + \left(4AA \frac{p_{l+2}^y}{p_{k+1}^x} + 4BB \frac{p_{k+1}^x}{p_{l+2}^y} - 4CC - 2DD p_{l+2}^y + 2EE p_{k+1}^x + FF p_{k+1}^x p_{l+2}^y \right) X_{k,l+2} \\ & + \left(-4AA \frac{1}{p_{l+2}^y} + 4BB \frac{1}{p_{l+1}^y} - 2EE + FF p_{l+1}^y \right) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) X_{k+1,l} \\ & + \left(-4AA \frac{1}{p_{k+1}^x p_{k+2}^x} - 4BB \frac{1}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + FF \right) (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) X_{k+1,l+1} \\ & + \left(-4AA \frac{p_{l+2}^y}{p_{k+1}^x p_{k+2}^x} + 4BB \frac{1}{p_{l+2}^y} + 2EE + FF p_{l+2}^y \right) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) X_{k+1,l+2} \\ & + \left(4AA \frac{p_{l+1}^y}{p_{k+2}^x} + 4BB \frac{p_{k+2}^x}{p_{l+1}^y} - 4CC + 2DD p_{l+1}^y - 2EE p_{k+2}^x + FF p_{k+2}^x p_{l+1}^y \right) X_{k+2,l} \\ & + \left(4AA \frac{1}{p_{k+2}^x} - 4BB \frac{p_{k+2}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + 2DD + FF p_{k+2}^x \right) (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) X_{k+2,l+1} \\ & + \left(4AA \frac{p_{l+2}^y}{p_{k+2}^x} + 4BB \frac{p_{k+2}^x}{p_{l+2}^y} + 4CC + 2DD p_{l+2}^y + 2EE p_{k+2}^x + FF p_{k+2}^x p_{l+2}^y \right) X_{k+2,l+2} = \\ & = (-2GG p_{l+1}^y - 2HH p_{k+1}^x + II p_{k+1}^x p_{l+1}^y) \Sigma_{k,l} + (-2GG + II p_{k+1}^x) (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \Sigma_{k,l+1} \\ & + (-2GG p_{l+2}^y + 2HH p_{k+1}^x + II p_{k+1}^x p_{l+2}^y) \Sigma_{k,l+2} + (-2HH + II p_{l+1}^y) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) \Sigma_{k+1,l} \\ & + (II (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x)) \Sigma_{k+1,l+1} + (2HH + II p_{l+2}^y) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) \Sigma_{k+1,l+2} \\ & + (2GG p_{l+1}^y - 2HH p_{k+2}^x + II p_{k+2}^x p_{l+1}^y) \Sigma_{k+2,l} + (2GG + II p_{k+2}^x) (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \Sigma_{k+2,l+1} \\ & + (2GG p_{l+2}^y + 2HH p_{k+2}^x + II p_{k+2}^x p_{l+2}^y) \Sigma_{k+2,l+2} + p_{k+1}^x p_{l+1}^y J J_{k,l} \\ & + p_{k+1}^x (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) J J_{k,l+1} + p_{k+1}^x p_{l+2}^y J J_{k,l+2} + p_{l+1}^y (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) J J_{k+1,l} \\ & + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) J J_{k+1,l+1} + p_{l+2}^y (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) J J_{k+1,l+2} + p_{k+2}^x p_{l+1}^y J J_{k+2,l} \\ & + p_{k+2}^x (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) J J_{k+2,l+1} + p_{k+2}^x p_{l+2}^y J J_{k+2,l+2} \end{aligned}$$

Les matrices AA, BB, ... JJ sont des matrices où les composantes dépendent de paramètres de matériaux et de charges, elles sont données dans l'annexe A.

D'une façon plus simple, nous pouvons réécrire :

$$\begin{aligned}
& K_1^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l} X_{k,l} + K_1^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+1} X_{k,l+1} \quad (5.79) \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+2} X_{k,l+2} + K_1^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l} X_{k+1,l} \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+1} X_{k+1,l+1} + K_1^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+2} X_{k+1,l+2} \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l} X_{k+2,l} + K_1^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+1} X_{k+2,l+1} \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+2} X_{k+2,l+2} = K_2^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l} \Sigma_{k,l} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+1} \Sigma_{k,l+1} + K_2^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+2} \Sigma_{k,l+2} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l} \Sigma_{k+1,l} + K_2^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+1} \Sigma_{k+1,l+1} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+2} \Sigma_{k+1,l+2} + K_2^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l} \Sigma_{k+2,l} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+1} \Sigma_{k+2,l+1} + K_2^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+2} \Sigma_{k+2,l+2} \\
& + K_3^{k,l} + K_3^{k,l+1} + K_3^{k,l+2} + K_3^{k+1,l} + K_3^{k+1,l+1} + K_3^{k+1,l+2} + K_3^{k+2,l} + K_3^{k+2,l+1} + K_3^{k+2,l+2}
\end{aligned}$$

($\forall k, l \in [1, N-1]$ soit $5n(N-1)^2$ équations).

Ici les termes des matrices de rigidité K_1 , K_2 , K_3 sont déterminés par les termes correspondant dans l'équation 5.78.

Nous obtenons alors $5n(N-1)^2$ équations sous forme :

$$K_1 \mathbf{X} = K_2 \Sigma + K_3 \quad (5.80)$$

Où :

$\mathbf{X} = {}^T [X_{1,1} X_{1,2} \dots X_{N+1, N+1}]$ est le vecteur de $5n(N+1)^2$ composantes des déplacements généralisés des n couches de chaussée.

$\Sigma = {}^T [\Sigma_{1,1} \Sigma_{1,2} \dots \Sigma_{N+1, N+1}]$ est le vecteur de $3(N+1)^2$ composantes des contraintes à l'interface entre la dernière couche de chaussée et le sol.

K_1 : Matrice de dimensions $5n(N+1)^2 \times 5n(N+1)^2$.

K_2 : Matrice de dimensions $5n(N+1)^2 \times 3(N+1)^2$.

$K_3 = {}^T [K_3^{1,1} K_3^{1,2} \dots K_3^{N+1, N+1}]$: Vecteur de $5n(N+1)^2$ composantes.

Remarque

Notons que dans le système d'équations 5.80, K_1 , K_2 , K_3 sont encore des matrices "creuses" (incomplètes), ces matrices seront complétées par les équations de conditions aux limites du multiplaque M4-5n.

5.2.3 Traitement des équations de Boussinesq

Considérons maintenant la surface adimensionalisée $O\bar{x}\bar{y}$, nous discrétisons la surface \bar{S} en $(N+1)^2$ surfaces élémentaires \bar{S}_e .

La surface élémentaire $\bar{S}_e(\bar{x}_s, \bar{y}_t)$ correspondant au point (\bar{x}_s, \bar{y}_t) est donc rectangulaire, définie par $[\bar{x}_{s-\frac{1}{2}}, \bar{x}_{s+\frac{1}{2}}]$, $[\bar{y}_{t-\frac{1}{2}}, \bar{y}_{t+\frac{1}{2}}]$ (cf. figure 5.7).

Nous pouvons écrire :

$$\bar{S}_e^{s,t} = [\bar{x}_{s-\frac{1}{2}}, \bar{x}_{s+\frac{1}{2}}] \mathbf{x} [\bar{y}_{t-\frac{1}{2}}, \bar{y}_{t+\frac{1}{2}}] \quad 1 < s, t < N+1 \quad (5.81)$$

$$\bar{S}_e^{1,t} = [\bar{x}_1, \bar{x}_{\frac{3}{2}}] \mathbf{x} [\bar{y}_{t-\frac{1}{2}}, \bar{y}_{t+\frac{1}{2}}] \quad 1 < t < N+1 \quad (5.82)$$

$$\bar{S}_e^{N+1,t} = [\bar{x}_{N+\frac{1}{2}}, \bar{x}_{N+1}] \mathbf{x} [\bar{y}_{t-\frac{1}{2}}, \bar{y}_{t+\frac{1}{2}}] \quad 1 < t < N+1 \quad (5.83)$$

$$\bar{S}_e^{s,1} = [\bar{x}_{s-\frac{1}{2}}, \bar{x}_{s+\frac{1}{2}}] \mathbf{x}[\bar{y}_1, \bar{y}_{\frac{3}{2}}] \quad 1 < s < N+1 \quad (5.84)$$

$$\bar{S}_e^{s,N+1} = [\bar{x}_{s-\frac{1}{2}}, \bar{x}_{s+\frac{1}{2}}] \mathbf{x}[\bar{y}_{N+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{N+1}] \quad 1 < s < N+1 \quad (5.85)$$

$$\bar{S}_e^{1,1} = [\bar{x}_1, \bar{x}_{\frac{3}{2}}] \mathbf{x}[\bar{y}_1, \bar{y}_{\frac{3}{2}}] \quad (5.86)$$

$$\bar{S}_e^{1,N+1} = [\bar{x}_1, \bar{x}_{\frac{3}{2}}] \mathbf{x}[\bar{y}_{N+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{N+1}] \quad (5.87)$$

$$\bar{S}_e^{N+1,1} = [\bar{x}_{N+\frac{1}{2}}, \bar{x}_{N+1}] \mathbf{x}[\bar{y}_1, \bar{y}_{\frac{3}{2}}] \quad (5.88)$$

$$\bar{S}_e^{N+1,N+1} = [\bar{x}_{N+\frac{1}{2}}, \bar{x}_{N+1}] \mathbf{x}[\bar{y}_{N+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{N+1}] \quad (5.89)$$

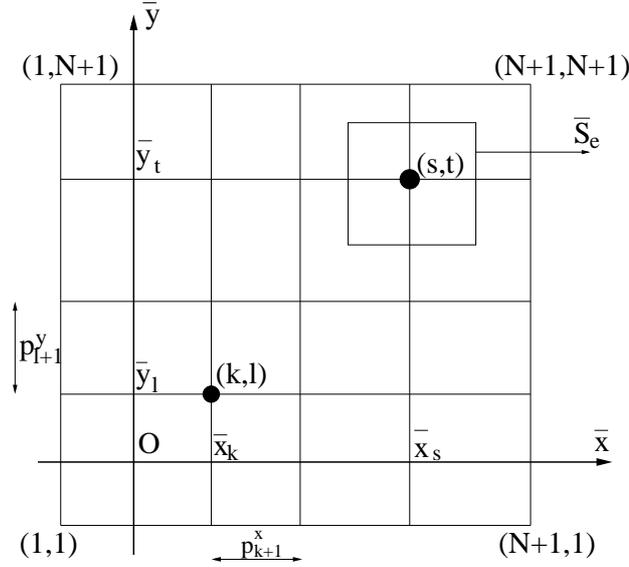


FIGURE 5.7. Schéma numérique du monocouche tridimensionnel

Les équations de Boussinesq 4.55 ont la forme :

$$M.X(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \Sigma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (5.90)$$

Où :

M : Matrice $3 \times 5n$ donnée dans l'annexe B

f : Matrice 3×3 de fonctions connues données dans l'annexe B.

$\Sigma =^T [\bar{\tau}_1^{n,n+1} \quad \bar{\tau}_2^{n,n+1} \quad \bar{\nu}^{n,n+1}]$ vecteur d'inconnues de 3 composantes

$X =^T [X^1 X^2 \dots X^n]$ vecteur d'inconnues de $5n$ composantes

$\bar{\Gamma}^{n,n+1} =^T [\bar{\gamma}_1^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_2^{n,n+1} \quad \bar{\gamma}_3^{n,n+1}]$: vecteur connu de 3 composantes de champ de discontinuité des déplacements à l'interface de la dernière couche de chaussée et le sol.

Nous considérons que les efforts d'interface peuvent être approchés par des constantes dans ces surfaces, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \Sigma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} &= \sum_1^{(N+1)^2} \int_{\bar{S}_e} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \Sigma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ &\approx \sum_1^{(N+1)^2} \Sigma(\bar{\xi}_s, \bar{\eta}_t) \int_{\bar{S}_e} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (5.91)$$

L'intégrale $\int_{\bar{S}_e} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta}$ est calculée analytiquement comme suit :
Notons : $u = \bar{x} - \bar{\xi}$ et $v = \bar{y} - \bar{\eta}$

$$\begin{aligned} \iint \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\xi} d\bar{\eta} &= - \iint \frac{u}{u^2 + v^2} dudv \\ &= -v + u \cdot \text{arctg} \left(\frac{v}{u} \right) + \frac{v}{2} \log(u^2 + v^2) \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (1 - \nu)(\bar{y} - \bar{\eta})^2}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{3/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} &= \iint \frac{u^2 + (1 - \nu)v^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}} dudv \\ &= -v + v \cdot \log(u + \sqrt{u^2 + v^2}) + (1 - \nu)u \cdot \log(v + \sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\iint \frac{(\bar{x} - \bar{\xi})(\bar{y} - \bar{\eta})}{((\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2)^{3/2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} = \iint \frac{uv}{(u^2 + v^2)^{3/2}} dudv = -\sqrt{u^2 + v^2} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} &= \iint \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} dudv \\ &= -v + v \log(u + \sqrt{u^2 + v^2}) + u \log(v + \sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned} \quad (5.95)$$

Ces trois équations peuvent s'écrire sous forme :

$$MX_{k,l} - \bar{\Gamma}_{k,l}^{n,n+1} = \sum_{s,t=1}^{N+1} N_{k,l,s,t} \Sigma_{s,t} \quad (5.96)$$

quelques soient $i, l \in [1, N + 1]$. Donc nous obtenons $3(N + 1)^2$ équations que l'on écrit sous forme matricielle :

$$K_4 \mathbf{X} - K_6 = K_5 \mathbf{\Sigma} \quad \rightarrow \quad K_4 \mathbf{X} = K_5 \mathbf{\Sigma} + K_6 \quad (5.97)$$

Où

$\mathbf{X} = {}^T [X_{1,1} X_{1,2} \dots X_{N+1,N+1}]$ est le vecteur de $5n(N+1)^2$ composantes des déplacements généralisés des n couches de chaussée.

$\mathbf{\Sigma} = {}^T [\Sigma_{1,1} \Sigma_{1,2} \dots \Sigma_{N+1,N+1}]$ est le vecteur de $3(N+1)^2$ composantes des contraintes à l'interface entre la dernière couche de chaussée et le sol.

K_4 : Matrice de dimensions $3(N+1)^2 \times 5n(N+1)^2$.

K_5 : Matrice de dimensions $3(N+1)^2 \times 3(N+1)^2$.

K_6 : Vecteur de $3(N+1)^2 \times 1$ composantes.

Remarque

Notons que dans le système d'équations 5.97, K_4, K_5 sont des matrices complètes, nous n'avons pas besoin des conditions aux limites pour les solutions analytiques de Boussinesq.

5.2.4 Traitement des conditions limites

Dans cette partie nous allons examiner les méthodes numériques pour les équations des conditions limites abordées dans le chapitre 3, qui ont une forme matricielle. Les conditions aux limites sont données par les équations 4.41 et 4.44 dans le chapitre 4.

Examinons l'équation 4.41 suivante :

$$C_{x1}X'_{1} + C_{x2}X'_{2} + C_{x3}X = C_{x4}Y^{0,1} + C_{x5}\Sigma \quad (5.98)$$

Numérisation des équations de conditions aux limites

Nous allons maintenant examiner les conditions aux limites du problème de chaussée sans fissure. Comme nous avons $(N+1)^2$ points discrétisés, nous avons donc $(5n+3)(N+1)^2$ inconnues (X,Y) à calculer. Notons que ci-dessus nous avons déjà $5n(N-1)^2 + 3(N+1)^2$ équations. Le nombre d'équations de conditions aux limites devra donc être :
 $(5n+3)(N+1)^2 - 5n(N-1)^2 - 3(N+1)^2 = 20nN$ équations.

Notons qu'il existe toujours des dérivées dans les équations de conditions limites. Le but de la partie est de les supprimer dans ces équations, pour qu'elles puissent être mises dans le système linéaire. Une approximation de la dérivée par la méthode d'Euler est acceptable dans ce cas, mais cela demande de mailler très fin au voisinage du bord, ce qui n'est pas toujours favorable. Ci-dessous nous allons présenter une méthode pour numériser les équations de façon plus propre. Dans le cadre de cette partie, nous allons présenter la méthode pour un bord $x = x_1, \forall y$.

En additionnant les équations 5.75 en (k,l) et $(k+1,l)$, nous obtenons le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{2AA}{p_{k+1}^x}(X_{(k+1,l)'1} - X_{(k,l)'1}) + BB(X_{(k+1,l)'22} + X_{(k,l)'22}) + \frac{2CC}{p_{k+1}^x}(X_{(k+1,l)'2} - X_{(k,l)'2}) \quad (5.99) \\ & + \frac{2DD}{p_{k+1}^x}(X_{(k+1,l)} - X_{(k,l)}) + EE(X_{(k+1,l)'2} + X_{(k,l)'2}) + FF(X_{(k+1,l)} + X_{(k,l)}) = \\ & \frac{2GG}{p_{k+1}^x}(\Sigma_{(k+1,l)} - \Sigma_{(k,l)}) + HH(\Sigma_{(k+1,l)'2} + \Sigma_{(k,l)'2}) + II(\Sigma_{(k+1,l)} + \Sigma_{(k,l)}) + JJ_{(k+1,l)} + JJ_{(k,l)} \end{aligned}$$

L'équation 5.21 nous donne :

$$\frac{X_{(k,l)'1} + X_{(k+1,l)'1}}{2} = \frac{X_{(k+1,l)} - X_{(k,l)}}{p_{k+1}^x} \quad (5.100)$$

En utilisant 5.99 et 5.100 nous en tirons alors :

$$\begin{aligned} X_{(k,l)'1} = & AA^{-1}BB\frac{p_{k+1}^x}{4}(X_{(k+1,l)'22} + X_{(k,l)'22}) + (\frac{1}{2}AA^{-1}CC + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}EE)X_{(k+1,l)'2} \quad (5.101) \\ & + (-\frac{1}{2}AA^{-1}CC + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}EE)X_{(k,l)'2} + (\frac{1}{2}AA^{-1}DD + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}FF + \frac{1}{p_{k+1}^x})X_{(k+1,l)} \\ & + (-\frac{1}{2}AA^{-1}DD + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}FF - \frac{1}{p_{k+1}^x})X_{(k,l)} - (\frac{1}{2}AA^{-1}GG + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}II)\Sigma_{(k+1,l)} \\ & - (-\frac{1}{2}AA^{-1}GG + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}II)\Sigma_{(k,l)} - \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}HH(\Sigma_{(k+1,l)'2} + \Sigma_{(k,l)'2}) \\ & - \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}(JJ_{(k+1,l)} + JJ_{(k,l)}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
X_{(k+1,l)'1} &= -AA^{-1}BB\frac{p_{k+1}^x}{4}(X_{(k+1,l)'22} + X_{(k,l)'22}) \quad (5.102) \\
&\quad -\left(\frac{1}{2}AA^{-1}CC + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}EE\right)X_{(k+1,l)'2} \\
&\quad -\left(-\frac{1}{2}AA^{-1}CC + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}EE\right)X_{(k,l)'2} - \left(\frac{1}{2}AA^{-1}DD + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}FF + \frac{1}{p_{k+1}^x}\right)X_{(k+1,l)} \\
&\quad -\left(-\frac{1}{2}AA^{-1}DD + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}FF - \frac{1}{p_{k+1}^x}\right)X_{(k,l)} + \left(\frac{1}{2}AA^{-1}GG + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}II\right)\Sigma_{(k+1,l)} \\
&\quad +\left(-\frac{1}{2}AA^{-1}GG + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}II\right)\Sigma_{(k,l)} + \frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}HH(\Sigma_{(k+1,l)'2} + \Sigma_{(k,l)'2}) \\
&\quad +\frac{p_{k+1}^x}{4}AA^{-1}(JJ_{(k+1,l)} + JJ_{(k,l)})
\end{aligned}$$

Intéressons nous aux conditions aux limites sur le bord $x = x_1$, nous utilisons l'équation 5.101 pour décrire la dérivée selon x du champs d'inconnues X . L'équation de conditions aux limites 5.98 s'écrit :

$$C_{x1}X_{(k,l)'1} + C_{x2}X_{(k,l)'2} + C_{x3}X_{(k,l)} = C_{x4}Y_{(k,l)}^{0,1} + C_{x5}\Sigma_{(k,l)} \quad k = 1, \forall l \in [1, N + 1] \quad (5.103)$$

En remplaçant $X_{(k,l)'1}$ par la formule 5.101, nous obtenons une équation de conditions aux limites sans dérivée partielle selon x . Pour faire disparaître le terme de la dérivée partielle selon y , nous effectuons la même opération, nous obtenons enfin l'équation de conditions aux limites sur le bord $x = x_1 \forall y_j$. Dans les équations ci-dessous $k = 1$.

$$\begin{aligned}
&p_{l+1}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB\frac{p_{k+1}^x}{p_{l+1}^y} + \frac{CC}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{k+1}^x}{2p_{l+1}^y}EE - \frac{DD}{2} + \frac{p_{k+1}^x}{4}EE \right) - \frac{C_{x2}}{p_{l+1}^y} - \frac{1}{p_{k+1}^x} + C_{x3} \right] X_{k,l} \\
&\quad + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-BB\frac{p_{k+1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} - \frac{DD}{2} + \frac{p_{k+1}^x}{4}EE \right) - \frac{1}{p_{k+1}^x} + C_{x3} \right] X_{k,l+1} \\
&+ p_{l+2}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB\frac{p_{k+1}^x}{p_{l+2}^y} - \frac{CC}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{k+1}^x}{2p_{l+2}^y}EE - \frac{DD}{2} + \frac{p_{k+1}^x}{4}EE \right) + \frac{C_{x2}}{p_{l+2}^y} - \frac{1}{p_{k+1}^x} + C_{x3} \right] X_{k,l+2} \\
&\quad + p_{l+1}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB\frac{p_{k+1}^x}{p_{l+1}^y} - \frac{CC}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{k+1}^x}{2p_{l+1}^y}FF + \frac{DD}{2} - \frac{p_{k+1}^x}{4}FF \right) + \frac{1}{p_{k+1}^x} \right] X_{k+1,l} \\
&\quad + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-BB\frac{p_{k+1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + \frac{DD}{2} + \frac{p_{k+1}^x}{4}FF \right) + \frac{1}{p_{k+1}^x} \right] X_{k+1,l+1} \\
&\quad + p_{l+2}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB\frac{p_{k+1}^x}{p_{l+2}^y} + \frac{CC}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{k+1}^x}{2p_{l+2}^y}FF - \frac{DD}{2} + \frac{p_{k+1}^x}{4}FF \right) + \frac{1}{p_{k+1}^x} \right] X_{k+1,l+2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{k+1}^x}{2}HH - \frac{p_{l+1}^y}{2}GG + \frac{p_{k+1}^x p_{l+1}^y}{4}II \right) + p_{l+1}^y C_{x5} \right] \Sigma_{(k,l)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{k+1}^x(p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4}II \right) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)C_{x5} \right] \Sigma_{(k,l+1)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{k+1}^x}{2}HH - \frac{p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{k+1}^x p_{l+2}^y}{4}II \right) + p_{l+2}^y C_{x5} \right] \Sigma_{(k,l+2)} \\
&\quad + \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{k+1}^x}{2}HH + \frac{p_{l+1}^y}{2}GG + \frac{p_{k+1}^x p_{l+1}^y}{4}II \right) \right] \Sigma_{(k+1,l)} \\
&\quad + \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{k+1}^x(p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4}II \right) \right] \Sigma_{(k+1,l+1)} \\
&\quad + \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{k+1}^x}{2}HH + \frac{p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{k+1}^x p_{l+2}^y}{4}II \right) \right] \Sigma_{(k,l+2)} \\
&+ \frac{p_{k+1}^x}{4} C_{x1}AA^{-1} [p_{l+1}^y(JJ_{k,l} + JJ_{k+1,l}) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)(JJ_{k,l+1} + JJ_{k+1,l+1})] \\
&+ \frac{p_{k+1}^x p_{l+2}^y}{4} C_{x1}AA^{-1} (JJ_{k,l+2} + JJ_{k+1,l+2}) + C_{x4} [p_{l+1}^y Y_{(k,l)}^{0,1} + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)Y_{(k,l+1)}^{0,1} + p_{l+2}^y Y_{(k,l+2)}^{0,1}]
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Si maintenant nous nous intéressons à un autre bord ($x = x_{N+1}, y = y_1, y = y_{N+1}$) ou une fissure, nous pouvons adapter ce qui précède.

Combinons ces conditions limites pour toutes les frontières du maillage, dans le cas sans fissure. Nous avons 4 bords, qui sont alors : $k = 1, \forall l \in [1, N - 1], k = N + 1, \forall l \in [1, N - 1], l = 1, \forall k \in [1, N - 1], l = N + 1, \forall k \in [1, N - 1]$. Nous obtenons alors $20n(N - 1)$ équations de conditions aux limites, avec les $20n$ conditions limites écrites pour les 4 points au coins, nous obtenons $20nN$ équations. Ces équations de conditions aux limites concrètes pour les bords sont données dans l'annexe B.

5.2.5 Résolution du problème

En combinant les $5n(N - 1)^2$ équations du M4-5n avec ces $20nN$ dernières équations, nous avons alors $5(N + 1)^2$ équations sous forme :

$$K_1 \mathbf{X} = K_2 \Sigma + K_3$$

Les équations de Boussinesq s'écrivent :

$$K_4 \mathbf{X} = K_5 \Sigma + K_6 \Rightarrow \Sigma = K_5^{-1} K_4 \mathbf{X} - K_5^{-1} K_6$$

Remarquons que la matrice K_5 est inversible.

Dans ce qui précède :

$\mathbf{X} = {}^T[X_{1,1} X_{1,2} \dots X_{N+1,N+1}]$, le vecteur de $5n(N + 1)^2$ composantes des déplacements généralisés des n couches de chaussée.

$\Sigma = {}^T[\Sigma_{1,1} \Sigma_{1,2} \dots \Sigma_{N+1,N+1}]$, le vecteur de $3(N + 1)^2$ composantes des contraintes à l'interface entre la dernière couche de chaussée et le sol.

K_1 : Matrice de dimensions $5n(N + 1)^2 \times 5n(N + 1)^2$.

K_2 : Matrice de dimensions $5n(N + 1)^2 \times 3(N + 1)^2$.

$K_3 = {}^T[K_3^{1,1} K_3^{1,2} \dots K_3^{N+1,N+1}]$: Vecteur de $5n(N + 1)^2$ composantes.

K_4 :Matrice de dimensions $3(N + 1)^2 \times 5n(N + 1)^2$.

K_5 :Matrice de dimensions $3(N + 1)^2 \times 3(N + 1)^2$.

$K_6 = {}^T [K_6^{1,1} K_6^{1,2} \dots K_6^{N+1,N+1}]$: Vecteur de $3(N + 1)^2$ composantes.

Nous obtenons alors les solutions du problème :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [K_1 - K_2 K_5^{-1} K_4]^{-1} [K_3 - K_2 K_5^{-1} K_6] \\ \Sigma &= K_5^{-1} K_4 \mathbf{X} - K_5^{-1} K_6 \end{aligned}$$

Le problème est programmé puis résolu sous Matlab.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les approximations numériques pour résoudre le système d'équations du modèle M4-5n B.

Pour le système d'équations différentielles, nous avons approché par la méthode des différences finies de Newmark [Newmark, 1959]. La méthode a la même efficacité que la méthode des éléments finis par interpolation linéaire. De plus la méthode ici est très simple à mettre en oeuvre par rapport à la méthode des éléments finis, car la géométrie de la structure de chaussée est simple. Nous avons donc choisi cette méthode des différences finies pour les équations M4-5n.

Pour le système d'équations intégrales de Boussinesq, nous avons approché par une méthode d'intégration semi-analytique. La méthode suppose que les contraintes dans chaque surface élémentaire peuvent être approchées par des constantes. Ainsi l'intégration de la fonction de Boussinesq peut être calculée analytiquement. Nous avons montré que cette méthode est au moins aussi efficace que la méthode d'intégration de Gauss, avec interpolation linéaire.

Comme la modélisation simplifiée a permis de passer d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel (ou d'un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel), le système d'équations est très léger. La programmation a été effectuée sous Matlab. Il est clair que si celle-ci est effectuée en Fortran ou C++, le temps de calcul sera beaucoup plus court. Cette réécriture de l'outil de résolution dans un langage de programmation classique est à recommander si le nombre de calculs doit être élevé. Ce ne sera pas le cas dans notre travail et nous verrons que la programmation en Matlab est suffisante pour nos objectifs.

Chapitre 6

Validation du modèle : Cas d'une chaussée non fissurée.

Dans les chapitres précédents, nous avons construit les équations et la méthode numérique du modèle simplifié pour un problème général de n couches de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. Dans ce chapitre, nous allons présenter la validation du modèle simplifié par comparaison avec les calculs par éléments finis 3D exécutés avec le logiciel Cesar-LCPC dans le cas sans fissure.

Ci-dessous nous présentons d'abord les chargements étudiés. Puis nous effectuons les calculs de validation pour les structures de chaussée 3D sans fissure. Nous présentons ensuite la validation dans le cas 2D déformation plane sans fissure. Enfin nous proposons une réflexion sur la comparaison des efforts 3D et 2D déformation plane pour le calcul de chaussée.

6.1 Chargements.

Nous présentons ci-dessous les trois types de chargement principaux de la chaussée : Chargement dû aux poids lourds, chargement dû au retrait thermique et chargement dû au gradient thermique.

Chargements dus aux poids lourds.

Comme nous l'avons constaté dans le chapitre 1, le dimensionnement est en général effectué en prenant en compte un demi-essieu, c'est-à-dire un jumelage de deux roues donnant un effort vertical de $65kN$ au total sur la chaussée. La charge de ces deux roues est transmise à la chaussée par deux zones de charges circulaires de rayon $r = 0.125m$, d'entre-axe $3r = 0.375m$ et de pression uniformément répartie $q = 0.662MPa$ (ref. chapitre 1).

En réalité, les mesures expérimentales effectuées sur sept différents types de pneu et de chargement [de Beer et al., 1997] ont montré que le chargement du pneu poids lourds ne s'applique pas sur une surface circulaire mais plutôt rectangulaire (cf figures 6.1 et 6.2). La pression moyenne du pneu sur la chaussée varie entre $0.42MPa$ à $0.72MPa$ selon le type et le chargement du pneu (qui varie de $20kN$ à $80kN$). La dimension de la charge est de $0.22m$ en largeur et environ $0.3m$ en longueur. Les flèches dans ces figures montrent le sens de circulation.

Dans nos calculs de validation et nos applications suivantes, nous prenons une charge rectangulaire de dimension $0.22m \times 0.3m$ et $0.662MPa$ de pression, soit une charge totale de $85kN$ pour un demi-essieu ($21,25kN$ par pneu).

Chargements dus au retrait thermique.

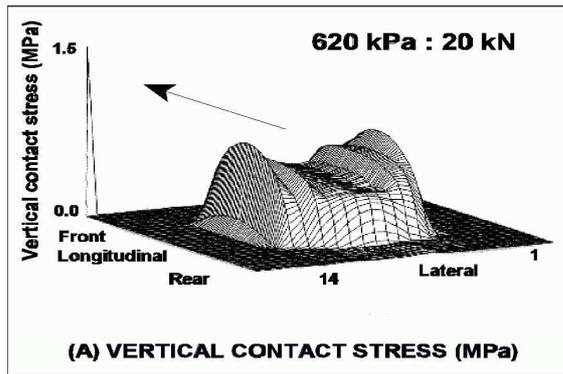


FIGURE 6.1. *Contrainte verticale causée par le chargement d'une roue de 20kN [de Beer et al., 1997]*

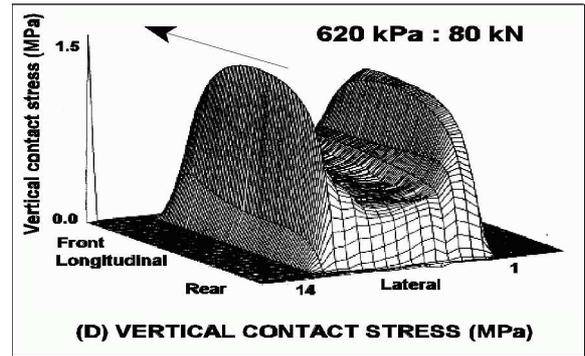


FIGURE 6.2. *Contrainte verticale causée par le chargement d'une roue de 80kN [de Beer et al., 1997]*

Le retrait thermique apparaît quand la température varie. Ce phénomène pourrait causer des contraintes de traction et de compression selon les cycles jours-nuit, hiver-été. Ce type de chargement de fatigue pourrait contribuer à créer des fissures dans la chaussée. En particulier, le retrait thermique dans les dalles béton ou dans les couches fissurées de la chaussée, sur le long terme, sous l'effet de la fatigue, influence beaucoup la remontée de fissures dans les couches non fissurées.

Chargements dus au gradient thermique.

Les structures de chaussées en dalle de béton ou ayant une fissure sont beaucoup influencées par les gradients thermiques. Lors des variations quotidiennes, la température à l'intérieur de la dalle (ou de la couche) varie avec un déphasage fonction de la profondeur. A certains moments dans la journée, la différence de température entre la face supérieure et inférieure devient très importante. Sous l'effet de ce phénomène, la dalle (ou la couche fissurée de chaussée) peut se courber vers le haut ou vers le bas. (cf figures 6.3 et 6.4)

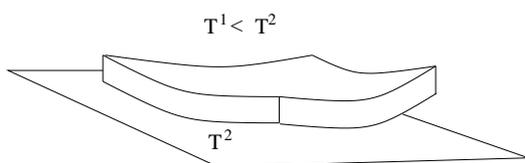


FIGURE 6.3. *La température inférieure est plus grande*

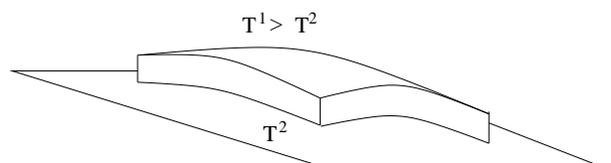


FIGURE 6.4. *La température supérieure est plus grande*

6.2 Validation du modèle tridimensionnel.

Dans cette partie, nous allons étudier deux cas de structure 3D de chaussée : une couche de chaussée sans fissure sur un massif de sol semi-infini et deux couches de chaussées sans fissure sur un massif de sol. Ces deux cas nous permettent d'évaluer le modèle simplifié sans fissures.

6.2.1 Validation du modèle pour le cas monocouche 3D de chaussée sans fissure.

Dans ce premier cas, nous considérons une couche de chaussée reposant sur un massif de sol infini. La charge d'une roue de camion est prise comme une charge carrée, de valeur $q = 0.662\text{MPa}$, de dimension $2a \times 2b = 0.3\text{m} \times 0.22\text{m}$. Les calculs seront comparés avec les résultats d'un calcul par

éléments finis exécutés avec Cesar-LCPC. Nous pouvons voir le schéma de calcul dans la figure 6.5.

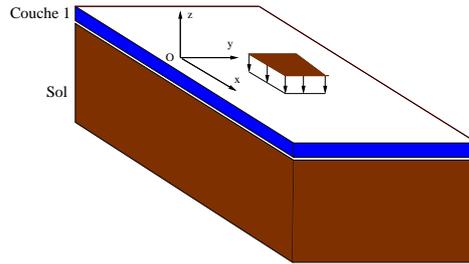


FIGURE 6.5. Schéma de calcul du cas monocouche de chaussée 3D

Ci-dessous nous présenterons une comparaison pour les paramètres suivantes :

- L'épaisseur de la couche de chaussée $e_1 = 0,08m$
- Module d'Young de la couche de chaussée $E_1 = 5400MPa$
- Coefficient de Poisson de la couche de chaussée $\nu_1 = 0.35$
- Module d'Young de la couche de sol $E_s = 50MPa$
- Coefficient de Poisson de la couche de sol $\nu_s = 0.35$

Pour la structure choisie, nous supposons que le bord de la chaussée tend vers l'infini dans les sens transversaux. Avec la charge appliquée verticalement et l'hypothèse que la chaussée est infinie dans les sens transversaux, les conditions limites de bords bloqués (cf. chapitre 3) sont la meilleure approximation.

Ci-dessous nous présentons successivement la modélisation de la structure par la méthode des éléments finis, la modélisation par le modèle M4-Boussinesq et enfin la comparaison des résultats obtenus.

Modélisation par éléments finis

La structure est considérée comme une couche de chaussée de surface carrée, reposant sur un massif de sol de grande profondeur. Pour plusieurs calculs, nous avons constaté qu'avec les dimensions aux limites transversales = $3m = 20$ fois la longueur de la charge, la profondeur du sol de $6m$, les champs de contraintes et de déplacements sont convergents. C'est-à-dire que si l'on augmente ces dimensions, les résultats ne changent pas beaucoup (cf. figure 6.6).

Le maillage EF est fait pour un quart de la structure grâce à la symétrie, avec 16×16 mailles transversales et 18 mailles verticales. Ce maillage final de la méthode aux éléments finis comprend donc 4590 éléments cube à 20 noeuds. Le nombre total des noeuds est 20954 noeuds. Le temps de calcul du CPU est de $1h$ sur un $PIV - 1,7Ghz$.

Modélisation par M4-Boussinesq La structure du modèle M4-Boussinesq est en réalité une surface. Nous choisissons alors la surface de calcul comme un carré de même dimension que le calcul aux éléments finis. Comme le calcul avec le modèle est très léger, nous faisons le calcul pour toute la structure considérée. La surface de calcul du modèle est alors un carré de côté $6m$.

Avec les conditions aux limites de bords bloqués, nous utilisons des équations 4.35 sur le bord $x_k = x_{N+1}$ et 4.36 sur le bord $y_l = y_{N+1}$.

Le maillage du M4-Boussinesq est fait sur toute la structure sans utiliser la symétrie car le calcul est rapide. Il nous faut seulement 20×20 mailles dans le sens transversal (car le M4-Boussinesq est un modèle surfacique). Le maillage du modèle simplifié est donc de 400 éléments plans, soit 421 points à 8 degrés de liberté. Le temps de calcul sur un $PIV - 1,7Ghz$ est de moins d'une minute.

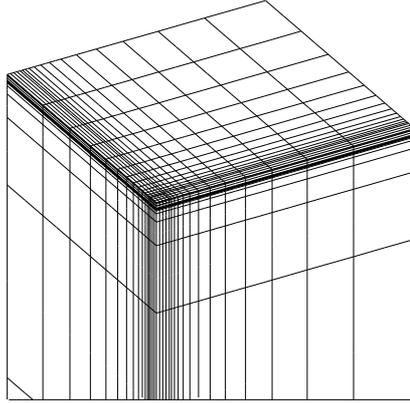


FIGURE 6.6. Maillage de validation du CESAR

Comparaison des résultats des éléments finis et M4-Boussinesq

Ci-dessous nous présentons les champs de contraintes et de déplacements d'interface chaussée-sol du modèle simplifié et leurs comparaisons avec les calculs par éléments finis sous Cesar-LCPC (cf. figure 6.7 à figure 6.12).

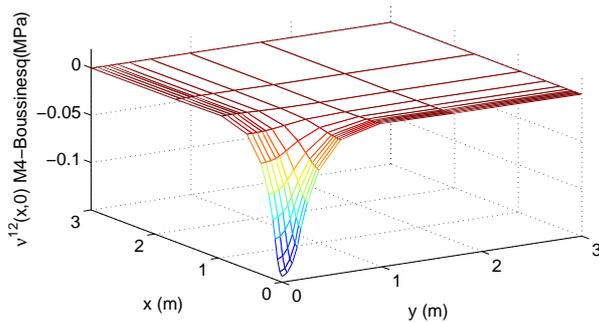


FIGURE 6.7. L'effort normal à l'interface du M4-B

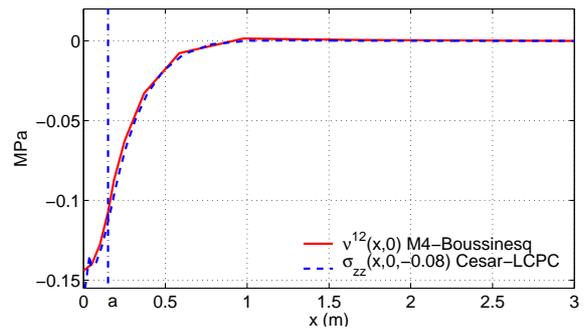


FIGURE 6.8. Comparaison de l'effort normal à l'interface entre M4-B et EF

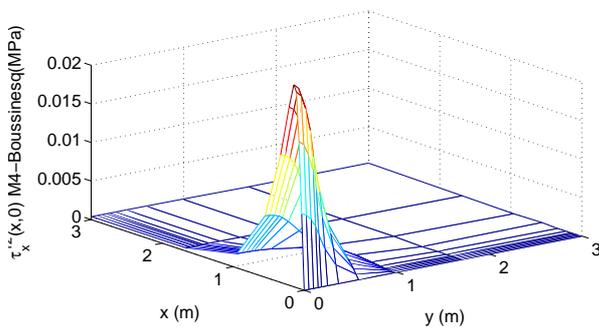


FIGURE 6.9. L'effort de cisaillement à l'interface du M4-B

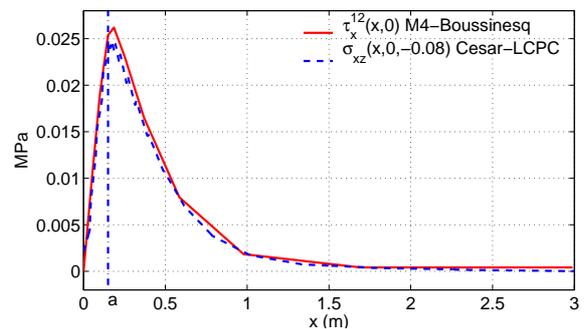


FIGURE 6.10. Comparaison de l'effort de cisaillement à l'interface entre M4-B et EF

Nous constatons que les valeurs de contraintes du modèle simplifié sont cohérentes avec celles du calcul sous Cesar-LCPC. La modélisation simplifiée permet un gain important de temps de calcul.

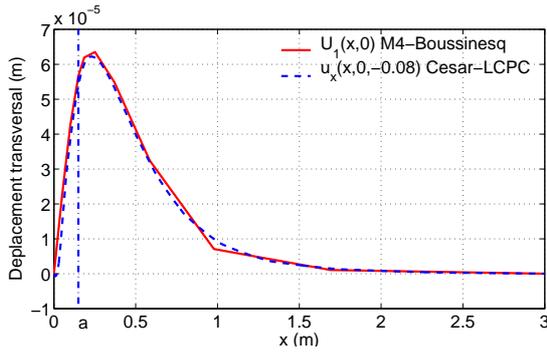


FIGURE 6.11. *Déplacement transversal d'interface à la coupe $y = 0$ et sa comparaison avec EF*

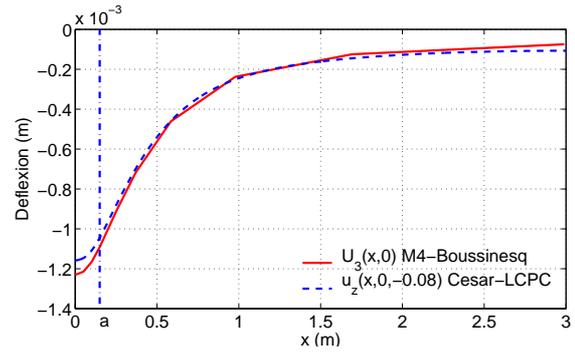


FIGURE 6.12. *Déplacement vertical d'interface à la coupe $y = 0$ et sa comparaison avec EF*

6.2.2 Validation du modèle pour le cas bicouche 3D de chaussée sans fissure.

Nous examinons maintenant le cas de deux couches de chaussée sans fissure reposant sur un massif semi-infini. Pour la validation de ce cas, nous allons utiliser une méthode simple pour éviter de refaire un calcul lourd par éléments finis. Ces comparaisons vont être faites sur les calculs du cas monocouche de chaussée examiné précédemment.

Pour la validation du modèle bicouche, nous considérons les deux cas suivants : soit les deux couches de chaussée sont de même matériau, soit la deuxième couche de chaussée est constituée du même matériau que le sol. Ces deux cas sont, au point de vue 3D, équivalents au cas monocouche étudié précédemment par EF 3D.

6.2.2.1 Les deux couches de chaussées sont de mêmes matériaux

Dans cette première validation, les paramètres pour la première couche de chaussée et la deuxième couche de chaussée sont identiques (cf. figure 6.13) :

La première couche de chaussée est déterminé par $E_1 = 5400MPa$, $e_1 = 0.04m$, $\nu_1 = 0.35$.

La deuxième couche de chaussée a les mêmes paramètres, c'est-à-dire $E_2 = 5400MPa$, $\nu_2 = 0.35$, et l'épaisseur est de $e_2 = 0.04m$ (cf.figure 6.13).

La charge est toujours la même que dans le cas monocouche.

Nous allons comparer les résultats de la modélisation M4-Boussinesq de cette structure avec les résultats du calcul par EF du cas monocouche de chaussée sans fissure que l'on a calculé précédemment.

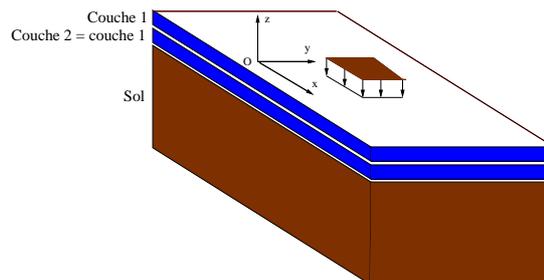


FIGURE 6.13. *2^e cas : les deux couches de chaussées sont de même matériau*

Avec l'hypothèse que la chaussée est infinie dans le plan, les conditions aux limites sont toujours considérées comme celles des bords bloqués. Nous utilisons donc l'équation 4.35 sur le bord $x_k = x_{N+1}$ et 4.36 sur le bord $y_l = y_{N+1}$. Ces équations sont appliquées pour les deux couches de chaussée, comme indiqué dans le chapitre 4.

La totalité de la structure est maillée pour le M4-Boussinesq sans utiliser la symétrie car le calcul est rapide. Il nous faut seulement 20×20 mailles dans le sens transversal. Le maillage du modèle simplifié est donc de 400 éléments plans. Chaque noeud correspond maintenant à 13 degrés de liberté. Le temps de calcul sur un *PIV* – 1,7Ghz est de 3 minutes.

Ci-dessous nous présentons les résultats et leur comparaison avec les calculs EF à l'aide de Cesar-LCPC. (cf. figure 6.14 à 6.17)

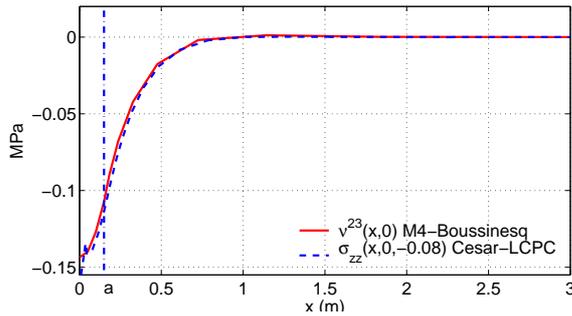


FIGURE 6.14. Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface avec le calcul par EF monocouche : les deux couches de chaussée sont de même matériau

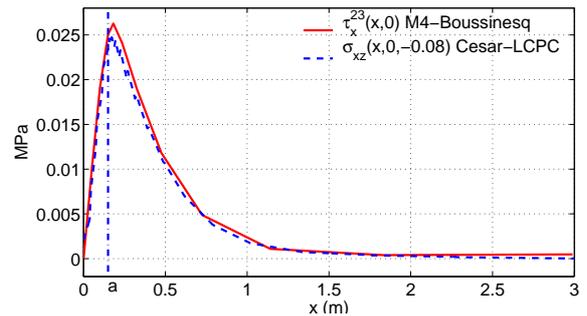


FIGURE 6.15. Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface avec le calcul par EF monocouche : les deux couches de chaussée sont de même matériau

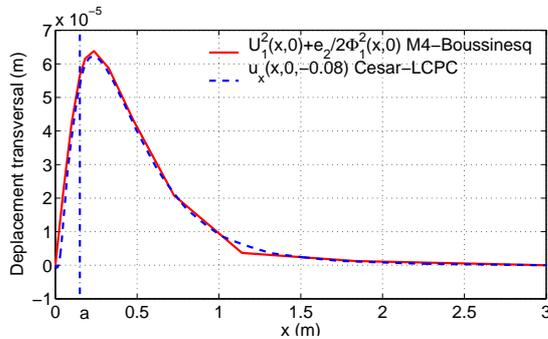


FIGURE 6.16. Comparaison du déplacement transversal d'interface avec le calcul par EF : les deux couches de chaussée sont de même matériau

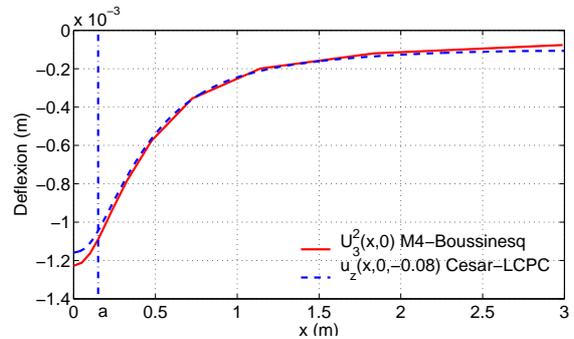


FIGURE 6.17. Comparaison du déplacement vertical d'interface avec le calcul par EF : les deux couches de chaussée sont de même matériau

Nous constatons que le modèle bicouche 3D de chaussée sans fissure, dans le cas que nous modélisons, donne de très bons résultats par rapport au calcul par éléments finis.

6.2.2.2 La deuxième couche a les mêmes paramètres que le massif de sol

Nous pouvons faire un calcul avec une deuxième couche ayant les mêmes caractéristiques élastiques que le sol avec une épaisseur très petite (pour assurer l'hypothèse de plaque) :

Les paramètres de la première couche de chaussée sont $E_1 = 5400MPa$, $e_1 = 0.08m$, $\nu_1 = 0.35$.

Les paramètres de la deuxième couche de chaussée sont $E_2 = 50MPa$, $\nu_2 = 0.35$, $e_2 = 0.2m$ (cf. figure 6.18).

La charge est prise identique à celle du cas monocouche.

Nous allons comparer cette structure avec les résultats du calcul par EF dans le cas monocouche de chaussée sans fissure que l'on a calculé précédemment.

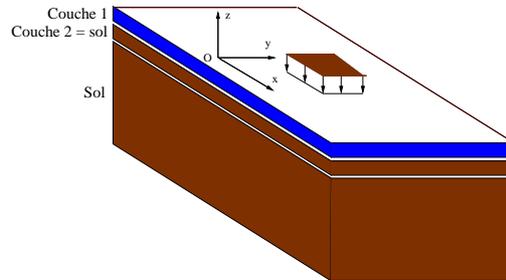


FIGURE 6.18. 2^e cas : La deuxième couche a les mêmes paramètres que le massif de sol

Nous supposons toujours que la chaussée est infinie dans le plan, les conditions aux limites sont toujours considérées comme celles des bords bloqués. Nous utilisons donc les équations 4.35 sur le bord $x_k = x_{N+1}$ et 4.36 sur le bord $y_l = y_{N+1}$. Ces équations sont appliquées pour les deux couches de chaussée, comme indiqué dans le chapitre 4.

Le maillage du M4-Boussinesq est réalisé sur toute la structure sans utiliser la symétrie car le calcul est rapide. Il nous faut seulement 20×20 mailles dans le sens transversal. Le maillage du modèle simplifié est donc de 400 éléments plans de 13 degrés de liberté à chaque noeud. Le temps de calcul sur un PIV – 1,7Ghz est de 3 minutes.

Ci-dessous nous présentons les résultats et leur comparaison avec les calculs par EF à l'aide de Cesar-LCPC (cf. figure 6.19 à 6.22).

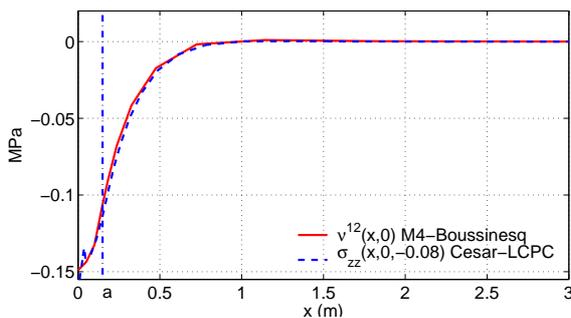


FIGURE 6.19. Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface avec le calcul par EF monocouche : la deuxième couche est considérée comme identique au sol

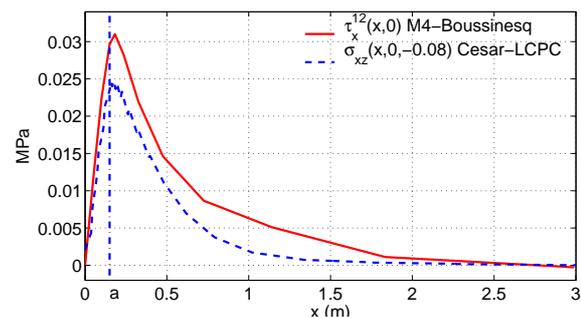


FIGURE 6.20. Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface avec le calcul par EF monocouche : la deuxième couche est considérée comme identique au sol

Les résultats des calculs du cas bicouche de chaussée 3D, à l'aide du M4-Boussinesq, dans le cas où la deuxième couche de chaussée est constituée du même matériau que le sol, sont cohérents avec ceux obtenus par le calcul aux éléments finis 3D. Nous remarquons un faible décalage du champs de cisaillement d'interface, ceci est naturellement dû au fait que l'on considère une couche de sol comme un plaque de M4-5n.

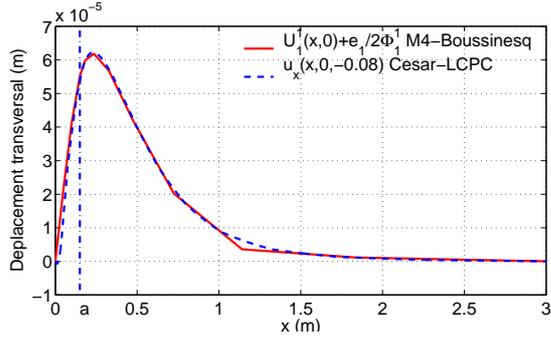


FIGURE 6.21. Comparaison du déplacement transversal d'interface avec le calcul par EF monocouche : la deuxième couche est considérée comme identique au sol

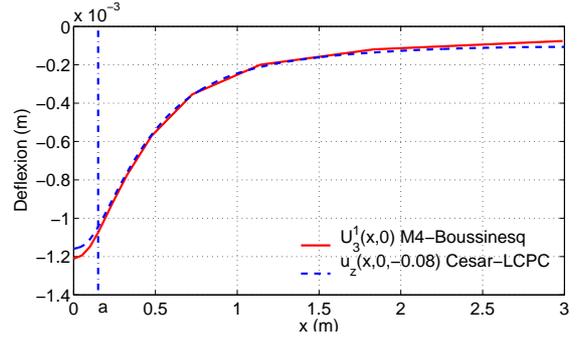


FIGURE 6.22. Comparaison du déplacement vertical d'interface avec le calcul par EF monocouche : la deuxième couche est considérée comme identique au sol

L'étude de ces deux cas nous permet de conclure que le M4-Boussinesq fournit une bonne approximation des champs dans les cas 3D sans fissure.

6.3 Validation du modèle bidimensionnel.

Nous avons validé dans le paragraphe précédent le modèle simplifié pour la structure monocouche et bicouche 3D de chaussée sans fissure. Cependant dans un grand nombre d'applications, par souci de rapidité des calculs ou à cause de la particularité du problème (chargement thermique par exemple), l'ingénieur s'intéresse à une modélisation en déformation plane suivant les plans de symétrie de la chaussée. Dans ce cas la structure étudiée est alors bidimensionnelle et le modèle simplifié est alors unidimensionnel. Dans cette partie, nous allons valider le modèle simplifié 1D modélisant les structures bidimensionnelles.

Ci-dessous nous allons présenter les cas monocouche et bicouche de chaussée sans fissure reposant sur un massif de sol semi-infini.

6.3.1 Validation du modèle pour le cas monocouche 2D de chaussée sans fissure.

Nous allons examiner ici la structure 2D d'une couche de chaussée sans fissure reposant sur un massif de sol semi-infini. La charge est supposée régulièrement répartie sur une largeur de $2a = 0.3m$.

L'exemple est fait avec le cas d'une couche de chaussée de module élastique $E_1 = 5400MPa$, de coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, les paramètres du sol sont $E_s = 50MPa$, $\nu_1 = 0.35$.

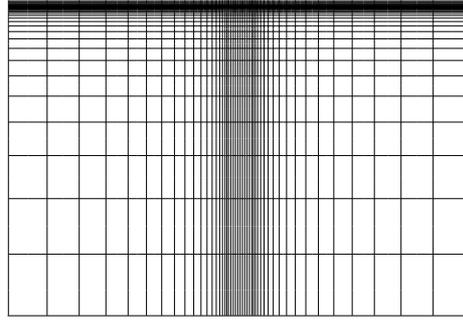
Ci-dessous nous présentons la modélisation de la structure par la méthode des éléments finis, la modélisation par le modèle M4-Boussinesq, et puis la comparaison des résultats obtenus.

Modélisation par éléments finis

Le calcul 2D par EF et le calcul avec le modèle simplifié étant rapides, nous allons calculer toute la structure sans utiliser la symétrie.

La dimension transversale est prise égale à $6m$ pour avoir une valeur très grande par rapport à celle du rayon de charge ($a = 0.15m$). La profondeur est choisie égale à $6m$.

Pour assurer un bon résultat à l'interface dans le calcul par éléments finis, il nous faut mailler très fin vers l'interface chaussée-sol. La vérification de la convergence n'est pas nécessaire dans ce

FIGURE 6.23. *Maillage pour le calcul par éléments finis*

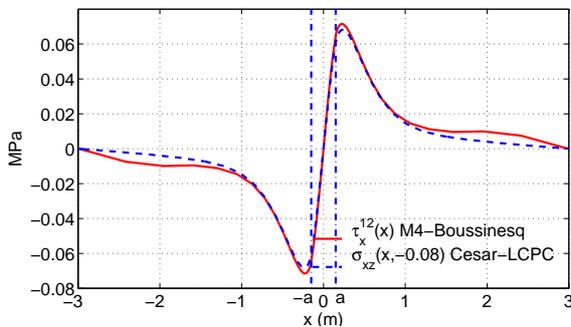
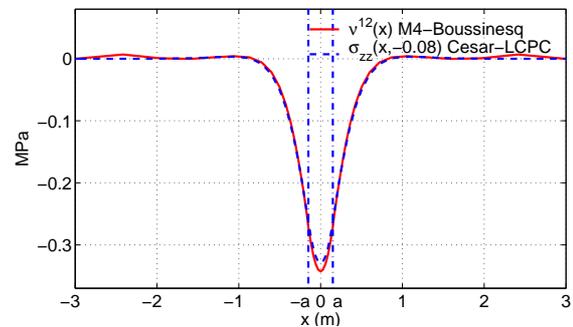
cas car la rapidité du calcul 2D permet un maillage très fin. Le calcul par EF est fait avec 1978 éléments à 8 noeuds. Le nombre total de noeuds est 6113 noeuds (cf. figure 6.23).

Modélisation par M4-Boussinesq

Le M4-Boussinesq est fait avec 30 éléments unidimensionnels, avec des noeuds à 5 degrés de liberté. La dimension transversale est prise égale à $6m$ pour assurer une valeur très grande par rapport à celle du rayon de charge ($a = 0.15m$). Nous présentons ci-dessous les résultats du M4-Boussinesq en comparant avec ceux des éléments finis (Cesar-LCPC) (cf. figure 6.24 à 6.27).

Comparaison des résultats du calcul par éléments finis et M4-Boussinesq

Ci-dessous nous présentons les comparaisons des champs de contraintes et de déplacements d'interface des calculs effectués avec le modèle simplifié et avec la méthode des éléments finis (Cesar-LCPC) (cf. figures 6.24 à 6.27)

FIGURE 6.24. *Comparaison de l'effort de cisaillement d'interface*FIGURE 6.25. *Comparaison de l'effort d'arrachement d'interface*

Les courbes obtenues à l'aide du modèle simplifié sont en bon accord avec celles obtenues par éléments finis.

Notons que dans le calcul 2D en déformation plane, nous avons considéré implicitement que la charge est appliquée sur une largeur infinie dans le sens transversal. Comme dans le modèle simplifié, le sol est modélisé avec une profondeur infinie, le déplacement vertical tend aussi à l'infini. Dans le calcul par éléments finis, la profondeur du sol est prise finie ($6m$). Nous ne pouvons donc comparer que l'allure du déplacement vertical au voisinage de la zone où la charge est appliquée.

6.3.2 Validation du modèle pour le cas bicouche 2D de chaussée sans fissure.

Nous allons examiner maintenant une structure 2D constituée de deux couches de chaussée sans fissure reposant sur un massif de sol semi-infini. La charge est supposée régulièrement répartie sur

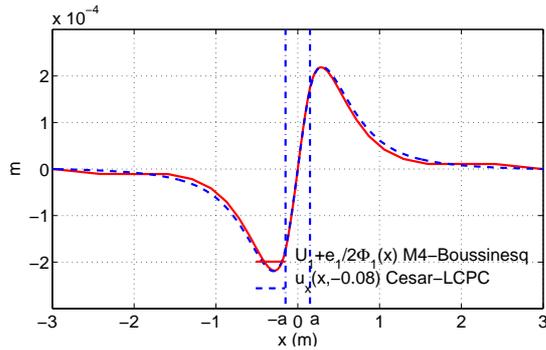


FIGURE 6.26. Comparaison du déplacement transversal à l'interface

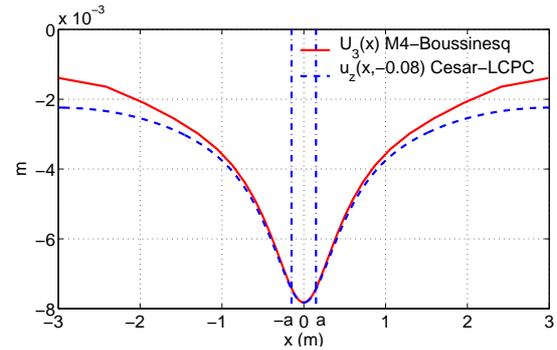


FIGURE 6.27. Comparaison du déplacement vertical à l'interface

une longueur de $2a = 0.3m$ (largeur infinie perpendiculairement au plan d'étude).

L'exemple présenté ci-dessous correspond au cas de deux couches de chaussée dont les caractéristiques sont : épaisseur de la couche 1 : $e_1 = 0,08m$, module élastique de la couche 1 : $E_1 = 5400MPa$, coefficient de Poisson de la couche 1 : $\nu_1 = 0.35$, épaisseur de la couche 2 : $e_2 = 0,29m$, module élastique de la couche 2 : $E_2 = 9300MPa$, coefficient de Poisson de la couche 2 : $\nu_2 = 0.35$. Le sol a pour paramètres $E_s = 120MPa$, $\nu_s = 0.35$.

Modélisation par éléments finis

Nous présentons ci-dessous le maillage du calcul effectué par la méthode aux éléments finis.

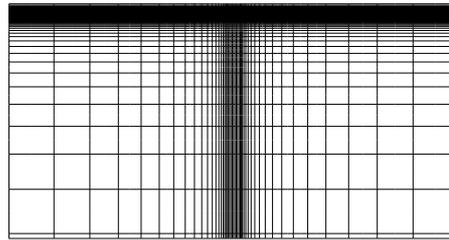


FIGURE 6.28. Maillage des éléments finis

La dimension transversale est prise égale à $10m$ pour assurer une valeur très grande par rapport à celle du rayon de charge ($a = 0.15m$). La profondeur dans ce cas est choisie égale à $10m$.

Par souci de simplicité, nous allons calculer toute la structure avec la méthode aux éléments finis et le modèle simplifié sans utiliser la symétrie. Le maillage du calcul par éléments finis choisi est très fin : 46573 noeuds et 15272 éléments rectangulaires à 8 noeuds (cf. figure 6.28).

Modélisation par M4-Boussinesq

Le M4-Boussinesq est discrétisé avec 30 éléments unidimensionnels, avec des noeuds à 8 degrés de liberté. La dimension transversale est prise égale à $5m$ pour assurer une valeur très grande par rapport à celle du rayon de charge ($a = 0.15m$). La profondeur du sol, à cause de la nature du modèle, est infinie. Nous présentons ci-dessous les résultats des calculs du M4-Boussinesq en comparant avec ceux des éléments finis (Cesar-LCPC) (cf. figure 6.24 à 6.27).

Comparaison des résultats des calculs par éléments finis et des calculs à l'aide du M4-Boussinesq

Nous présentons ci-dessous les champs de contraintes et de déplacements d'interfaces obtenus à l'aide du M4-Boussinesq en les comparant avec ceux obtenus par éléments finis (Cesar-LCPC) (cf. figure 6.29 et figure à 6.36).

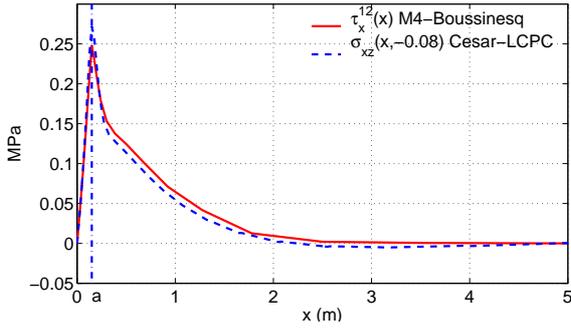


FIGURE 6.29. Comparaison de l'effort de cisaillement d'interface chaussée-chaussée

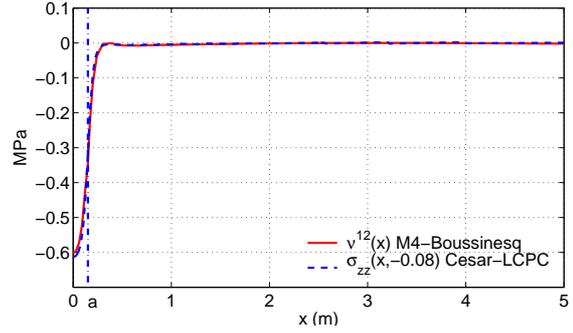


FIGURE 6.30. Comparaison de l'effort d'arrachement d'interface chaussée-chaussée

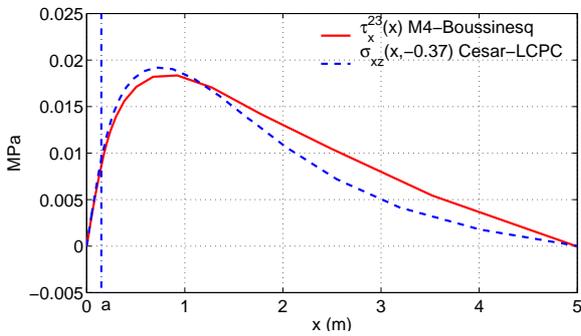


FIGURE 6.31. Comparaison de l'effort de cisaillement d'interface chaussée-sol

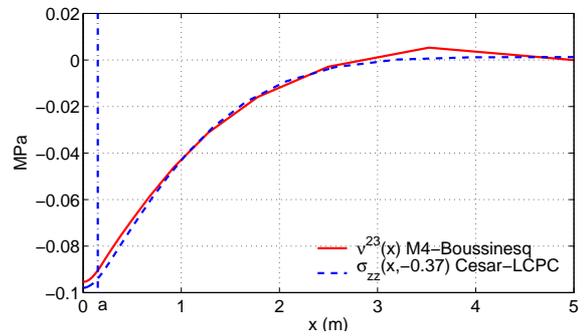


FIGURE 6.32. Comparaison de l'effort d'arrachement d'interface chaussée-sol

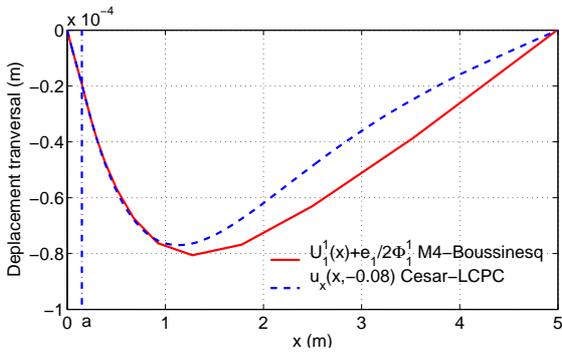


FIGURE 6.33. Comparaison du déplacement transversal d'interface chaussée-chaussée

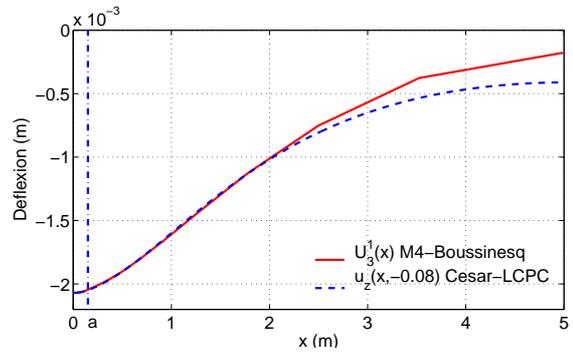


FIGURE 6.34. Comparaison du déplacement vertical d'interface chaussée-chaussée

Comme nous pouvons le constater, les résultats du modèle simplifié sont bien cohérents avec ceux des calculs faits par César-LCPC dans les deux cas monocouche et bicouche de chaussée.

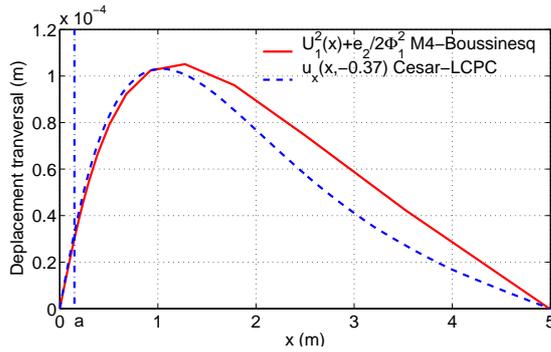


FIGURE 6.35. Comparaison du déplacement transversal d'interface chaussée-sol

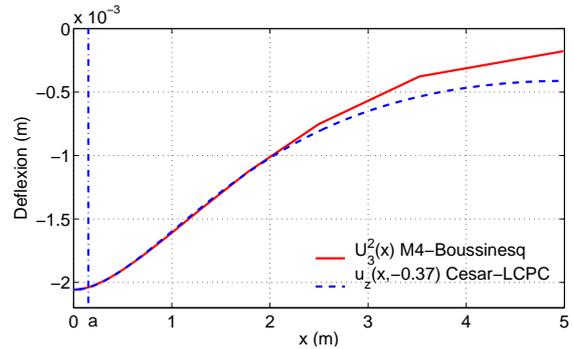


FIGURE 6.36. Comparaison du déplacement vertical d'interface chaussée-sol

6.4 Comparaison des résultats 3D et 2D en déformation plane pour le calcul de chaussées.

La structure de chaussée, comme nous l'avons constatée, est une structure tridimensionnelle. Dans les calculs de chaussées, nous retrouvons souvent des calculs en 2D déformation plane, soit parce que le problème se prête à une modélisation plane (retrait par exemple), soit pour s'adapter à la puissance de l'ordinateur ou pour limiter le temps de calcul nécessaire. Dans ce dernier cas la transformation du problème 3D en un problème 2D déformation plane n'est pas très évidente. En particulier si l'on considère le problème dont le chargement est une roue de camion, l'effort à appliquer à la surface de la chaussée dans le problème 2D déformation plane ne peut être déduit simplement de l'effort surfacique du problème 3D.

Dans le cadre de ce paragraphe, nous allons procéder à une comparaison entre les calculs 3D et 2D de déformation plane dans les structures de chaussée sans fissure afin d'aider au choix des caractéristiques du problème 2D "équivalent" au problème 3D.

Nous mènerons la comparaison sur les efforts principaux des résultats des calculs, c'est-à-dire la contrainte de traction en bas de la couche de chaussée, les contraintes d'interface, et la déformation verticale du sol sous la charge.

Dans le cadre de ce paragraphe, nous allons présenter tout d'abord les résultats de comparaison des champs de contraintes et de déformations d'un calcul monocouche 3D et monocouche 2D déformation plane. Dans la suite, nous effectuons une étude sur les rapports entre les efforts du calcul 3D et 2D déformation plane, pour plusieurs paramètres d'épaisseur et du module de matériaux. Enfin, nous proposons la généralisation de cette méthode pour les structures multicouches de chaussées.

6.4.1 Comparaison Monocouche de chaussée 3D et Monocouche de chaussée 2D

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de comparaison entre un calcul 3D et un calcul 2D de déformation plane pour les mêmes caractéristiques de géométrie et de charges appliquées. A travers les résultats, nous pouvons en tirer des remarques sur les différences entre ces deux calculs.

Nous avons ici une couche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. Les paramètres du problème sont :

- Module d'Young et coefficient de Poisson de la chaussée : $E_1 = 5400\text{MPa}$, $\nu_1 = 0.35$.

- Module d'Young et coefficient de Poisson du sol : $E_s = 50MPa$, $\nu_s = 0.35$.

- Le chargement 3D est de dimension $2a \times 2b = 0.3m \times 0.22m$. La charge est uniformément répartie avec une densité $q = 0.662MPa$

- Le chargement 2D est de dimension $2a = 0.3m$. La charge est uniformément répartie. Pour commencer, nous choisissons une densité d'effort surfacique égale à $q = 0.662MPa$. Notons tout de suite que ce choix n'a pas un très grand sens physique, puisque le chargement est supposé réparti sur une largeur infinie. Les efforts résultants ne correspondent pas à une roue de camion.

On s'attend donc à ce que cette densité de chargement appliquée au problème 2D déformation plane entraîne des contraintes et des déformations excessives par rapport à la modélisation 3D.

Nous allons voir ci-dessous la comparaison des contraintes de la structure 3D et 2D, selon une coupe dans le sens de circulation (cf. figures 6.37 à 6.40). Les contraintes d'interface chaussée-sol, la contrainte de traction sous la charge en bas de la couche de chaussée et la déformation verticale du sol sont les valeurs importantes à comparer, car elles sont nécessaires pour le dimensionnement de la chaussée.

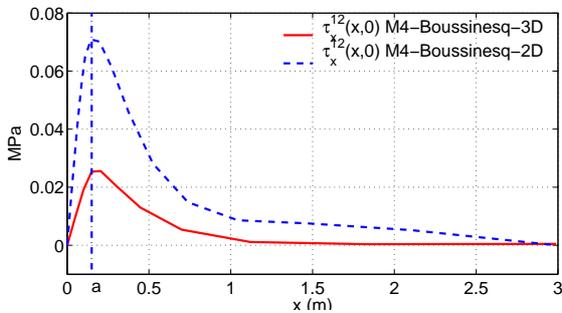


FIGURE 6.37. Comparaison 2D-3D de la contrainte de cisaillement d'interface

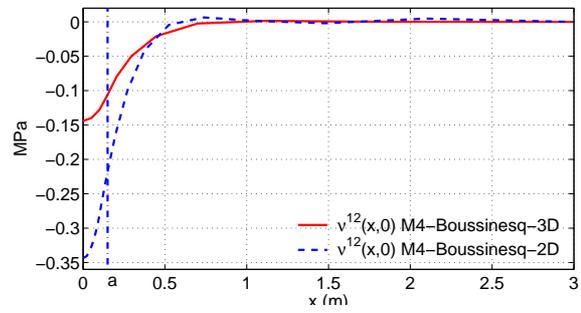


FIGURE 6.38. Comparaison 2D-3D de la contrainte d'arrachement d'interface

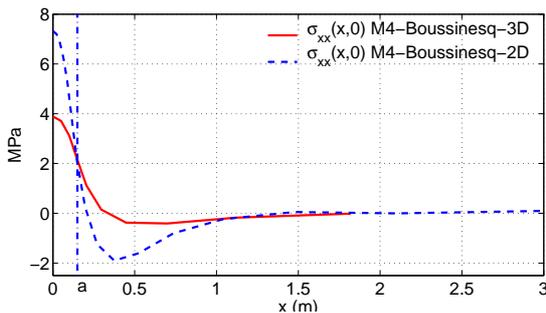


FIGURE 6.39. Comparaison 2D-3D de la contrainte de traction en bas de couche de chaussée

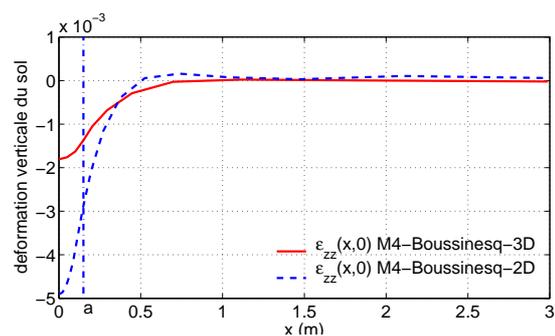


FIGURE 6.40. Comparaison 2D-3D de la déformation verticale du sol

On constate en observant ces quatre figures qu'il n'existe pas d'homothétie unique permettant de "rapprocher" l'essentielle des courbes 2D déformation plane et des courbes 3D. Ainsi il n'est pas possible d'obtenir des résultats très satisfaisants en remplaçant la densité de la charge q dans le problème 2D par une densité de charge équivalente.

Nous allons donc proposer ci-dessous une approche plus générale pour la prédiction de résultats 3D à partir de calculs 2D. C'est ce que nous appelons la méthode de grilles de résultats.

6.4.2 Grilles de résultats - applications pour le monocouche de chaussée

Les paramètres qui influencent les champs inconnus du problème de chaussée sont :

- Les modules d'Young E_i des couches de chaussées et E_s du sol.
- Les coefficients de Poisson ν_i des couches de chaussées et ν_s du sol.
- Les dimensions $2a \times 2b$ et la densité q de la charge appliquée.
- Les épaisseurs e_i des couches de chaussées.

Dans un problème de chaussée, le rapport $\frac{b}{a}$ reste fixé pour la charge correspondant à la roue d'un camion. Les coefficients de Poisson des couches de chaussées restent fixés à 0.25 pour les chaussées en béton et à 0.35 pour les chaussées bitumineuses. Le problème ne dépend alors que des paramètres : $a, q, E_s, \bar{E}_i = \frac{E_i}{E_s}, \bar{e}_i = \frac{e_i}{a}$.

A partir des équations d'adimensionalisation 4.1 - 4.10 et des équations du modèle simplifié, nous voyons que les inconnues du problème dépendent d'un monôme fonction des paramètres : a, q, E_s . Nous rappelons ci-dessous les définitions d'adimensionalisation des champs inconnus :

$$\bar{U}_\alpha^i = \frac{E_s}{qa} U_\alpha^i \quad \bar{\Phi}_\alpha^i = \frac{E_s}{q} \Phi_\alpha^i \quad \bar{U}_3^i = \frac{E_s}{qa} U_3^i \quad (6.1)$$

$$\bar{\nu}^{n,n+1} = \frac{1}{q} \nu^{n,n+1} \quad \bar{\tau}_\alpha^{n,n+1} = \frac{1}{q} \tau_\alpha^{n,n+1} \quad (6.2)$$

Notons que ces champs adimensionalisés ne dépendent que de deux paramètres \bar{E}_i, \bar{e}_i (cf. voir chapitre 4).

Dans le calcul 3D ou 2D de la chaussée, nous ne nous intéressons qu'à un nombre fini de valeurs scalaires correspondant. Généralement on s'intéresse à :

- la contrainte d'arrachement d'interface au milieu de la charge :

$$\nu^{1,2}(0,0) \text{ en } 3D \quad \nu^{1,2}(0) \text{ en } 2D$$

- la contrainte de cisaillement d'interface au bord de la charge :

$$\tau^{1,2}(a,0) \text{ en } 3D \quad \tau^{1,2}(a) \text{ en } 2D$$

- la déformation verticale du sol au milieu de la charge :

$$\varepsilon_{zz}(0,0) \text{ en } 3D \quad \varepsilon_{zz}(0) \text{ en } 2D$$

- la contrainte de traction en bas de la couche de chaussée au bord de la charge :

$$\sigma_{xx}(a,0) \text{ en } 3D \quad \sigma_{xx}(a) \text{ en } 2D$$

- la contrainte de traction en bas de la couche de chaussée au milieu de la charge :

$$\sigma_{xx}(0,0) \text{ en } 3D \quad \sigma_{xx}(0) \text{ en } 2D$$

L'adimensionalisation 6.2 permet de montrer que :

$$\text{En } 3D \quad \nu^{1,2}(0,0) = q\bar{\nu}^{1,2}(0,0) = q\bar{F}^{\nu,3D}(\bar{E}_i, \bar{e}_i) \quad (6.3)$$

$$\text{En } 2D \quad \nu^{1,2}(0) = q\bar{\nu}^{1,2}(0) = q\bar{F}^{\nu,2D}(\bar{E}_i, \bar{e}_i) \quad (6.4)$$

Ainsi le rapport des contraintes d'arrachement des calculs 3D et 2D ne sont que des fonctions de \bar{E}_i et \bar{e}_i :

$$\frac{\nu^{1,2}(0,0)}{\nu^{1,2}(0)} = \frac{q\bar{F}^{\nu,3D}(\bar{E}_i, \bar{e}_i)}{q\bar{F}^{\nu,2D}(\bar{E}_i, \bar{e}_i)} = R^\nu(\bar{E}_i, \bar{e}_i) \quad (6.5)$$

Dans le cas d'une chaussée monocouche, par exemple si la couche de chaussée est bitumineuse, nous pouvons donner les marges de variation des paramètres comme ci-dessous :

- $E_1 \in [2000, 10000] \text{MPa}$, $e_1 \in [0.075, 0.45] \text{m}$, $a = 0.15 \text{m}$
- $E_s \in [50, 200] \text{MPa}$

Nous obtenons donc les marges des deux paramètres : $\bar{E}_1 \in [10, 200]$, $\bar{e}_1 \in [0.5, 3]$.

Nous pouvons tracer la grille correspondant à $R^v(\bar{E}_1, \bar{e}_1)$ car R^v n'est plus qu'une fonction de deux paramètres (cf figures 6.41).

Le raisonnement peut être repris à l'identique pour le rapport de n'importe quelle valeur correspondant à un calcul 3D à la valeur correspondant à un calcul 2D. Dans le cas d'un monocouche les figures 6.42, 6.43, 6.44 représentent respectivement le rapport de contrainte de cisaillement d'interface au bord de la charge, le rapport de déformation verticale en haut du sol au milieu de la charge, le rapport de contrainte de traction en bas de la couche de chaussée au bord de la charge.

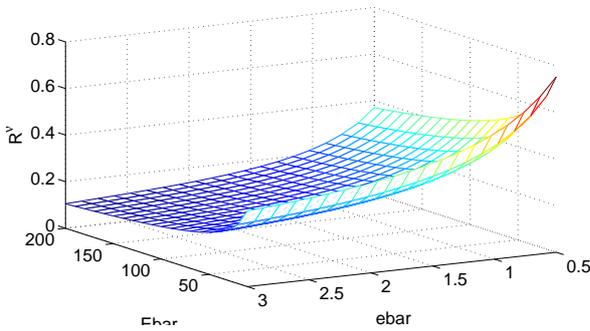


FIGURE 6.41. *Fonction rapport de contrainte d'arrachement d'interface au milieu de la charge*

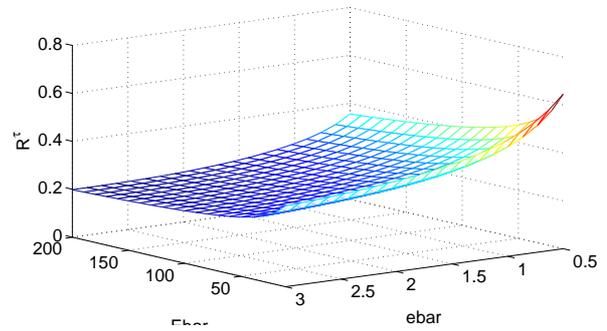


FIGURE 6.42. *Fonction rapport de contrainte de cisaillement d'interface au bord de la charge*

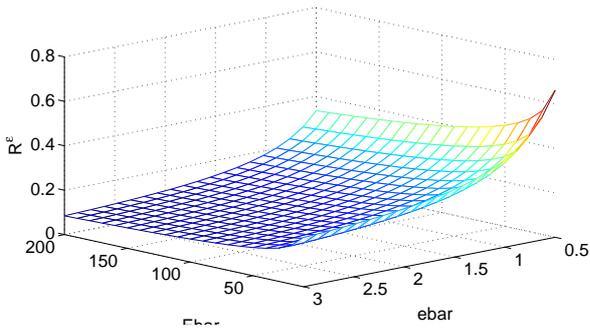


FIGURE 6.43. *Fonction rapport de déformation verticale du sol au milieu de la charge*

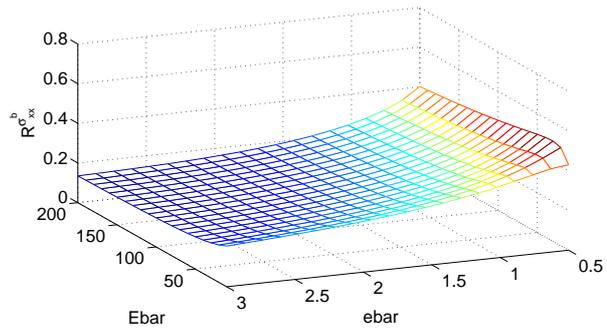


FIGURE 6.44. *Fonction rapport de contrainte de traction en bas de couche de chaussée au bord de la charge*

Grâce à ces fonctions rapport, nous pouvons calculer aisément les valeurs 3D des champs à l'aide d'un calcul 2D de déformation plane. Le travail consiste simplement à multiplier les valeurs correspondantes du calcul 2D par la valeur de la fonction rapport correspondante.

6.4.3 Grilles de résultats - Idées pour le multicouche de chaussée

Dans la partie précédente, nous avons montré que les fonctions rapports entre un calcul 3D et un calcul 2D de mêmes paramètres, ne dépendent alors que de $2n$ paramètres : \bar{E}_i, \bar{e}_i ($i \in [1, n]$)

pour une structure de n couches de chaussée.

Pour le cas général de n couches de chaussées, nous avons :

$$\frac{F^{3D}}{F^{2D}} = \frac{\bar{F}^{3D}}{\bar{F}^{2D}} = R^F(\bar{E}_1, \bar{e}_1, \dots, \bar{E}_n, \bar{e}_n) \quad (6.6)$$

Cette fonction R^F peut être construite de la même façon que dans le cas monocouche. Dans ce cas le travail sera plus lourd car il nous faut faire varier $2n$ paramètres \bar{E}_i, \bar{e}_i ($i \in [1, n]$). Dans la réalité, une structure bicouche de chaussée est souvent utilisée. Dans ce cas de bicouche de chaussée, les fonctions rapports peuvent être construites sans difficultés avec la variation de quatre paramètres : $\bar{E}_1, \bar{e}_1, \bar{E}_2, \bar{e}_2$.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons validé le modèle simplifié pour la structure de chaussée sans fissure, dans les deux cas 3D et 2D déformation plane. Nous avons constaté une très bonne cohérence des résultats des calculs du modèle simplifié par rapport à ceux des éléments finis. Le temps de calcul du modèle simplifié est très rapide par rapport à celui des éléments finis.

Nous avons montré aussi qu'il n'est pas possible d'approcher de façon simple des résultats 3D à l'aide d'un calcul 2D déformation plane. Nous avons ainsi proposé de calculer le rapport entre les champs calculés par un calcul 2D et ceux d'un calcul 3D, puis utiliser la fonction rapport pour obtenir les champs de calcul 3D.

Notons que nous avons construit les fonctions rapports à partir de l'adimensionalisation des équations du modèle simplifié (avec hypothèse de plaque). Si maintenant nous considérons un multicouche reposant sur un massif de sol semi-infini (problème 3D), avec la même façon d'adimensionaliser, nous allons obtenir un résultat similaire. Le rapport d'un champ inconnu entre un calcul 3D et 2D ne dépend toujours que de $2n$ paramètres \bar{E}_i, \bar{e}_i ($i \in [1, n]$)

Conclusions de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie, nous avons construit le modèle simplifié, nommé M4-Boussinesq, pour la structure de n couches de chaussée reposant sur un massif semi-infini de sol. Cette construction se compose de deux parties, l'une pour la modélisation du multicouche de chaussée, l'autre pour la modélisation du massif de sol. Au terme de la modélisation du multicouche de chaussée, nous avons choisi le modèle multiplaque M4-5n. Cette approche permet de réduire d'une dimension le multicouche tridimensionnel en un multiplaque bidimensionnel. Par l'adimensionalisation et la simplification des équations, cette modélisation donne ensuite un système de $5n$ équations différentielles du second ordre, selon deux variables de l'espace. Pour la modélisation du massif élastique semi-infini de sol, nous avons ainsi choisi la solution analytique de Boussinesq pour décrire le comportement du massif. Ce choix nous a amené à un système de trois équations intégrales sur la surface du massif. Le système d'équations final du modèle simplifié se compose de $5n$ équations différentielles surfaciques du second ordre et 3 équations intégrales surfaciques, en fonction des deux variables du plan Oxy .

L'approximation numérique a été présentée dans le chapitre 5. Pour le système couplé de deux types d'équations, nous avons choisi différentes méthodes approchées. Pour le système de $5n$ équations différentielles, nous avons choisi la méthode des différences finies de Newmark pour approcher les champs d'inconnues. Nous avons montré que cette méthode est aussi efficace que la méthode des éléments finis avec interpolation linéaire. Pour le système d'équations intégrales, nous avons approché le calcul par une méthode d'intégration semi-analytique. Nous avons montré que cette méthode est aussi efficace que l'intégration numérique de Gauss avec interpolation linéaire.

Dans le chapitre 6, nous avons présenté la validation du modèle M4-Boussinesq pour la structure de chaussée sans fissure sous chargement de type roue de camion. Les validations pour les structures monocouche et bicouche de chaussées ont été faites avec succès. Nous avons constaté de très bonnes cohérences entre les résultats du modèle M4-Boussinesq et ceux obtenus par éléments finis.

Troisième partie

Application du modèle simplifié à
l'étude de chaussées fissurées
verticalement

Dans la deuxième partie, nous avons construit le modèle simplifié puis nous l'avons validé pour les structures de chaussées sans fissure. Dans cette partie, nous allons exploiter les applications du modèle simplifié pour la structure de chaussée fissurée, soumise aux différents types de chargement. Cette partie se compose de trois chapitres.

Le chapitre 7 présente les applications du modèle simplifié pour un monocouche et un bicouche de chaussée fissurée, sous chargement de type roue de camion. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord la méthode pour introduire la fissure dans le modèle simplifié. Ensuite, nous allons effectuer des calculs de structure de chaussée fissurée en 3D et en déformation plane, à l'aide du modèle M4-Boussinesq. Les résultats obtenus par le modèle simplifié seront comparés avec ceux effectués par éléments finis.

Avec les mêmes structures de calcul en 3D, le chapitre 8 présente les applications du modèle M4-Boussinesq soumises à un autre type de chargement, le retrait thermique. Nous présentons tout d'abord l'introduction des chargements thermiques dans le modèle simplifié. Ensuite, nous effectuons des calculs de chaussées monocouche et bicouche fissurées soumises au chargement du retrait thermique. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par éléments finis.

Le dernier chapitre effectue des applications du modèle simplifié sous chargement de gradient thermique. Les structures d'un monocouche et d'un bicouche de chaussée fissurée sont examinées. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par éléments finis.

Chapitre 7

Application à une chaussée fissurée soumise au chargement d'un poids lourd

Le modèle simplifié M4-Boussinesq a été validé dans les cas de chaussées sans fissure. Nous allons continuer à examiner le modèle pour la structure de chaussée dans le cas où il existe une fissure.

Dans ce chapitre, nous allons présenter tout d'abord l'introduction de la fissure dans le modèle simplifié. Ensuite, nous effectuons les calculs de chaussée fissurée en 3D et en 2D déformation plane, pour une couche de chaussée et deux couches de chaussée, soumise au chargement d'un poids lourd. Les résultats sont ensuite comparés avec ceux obtenus à l'aide de la méthode aux éléments finis (Cesar-LCPC).

7.1 Modélisation numérique de la fissuration dans la chaussée

La fissure dans la chaussée est prise en compte comme un intervalle étroit, de dimension comprise entre 2mm et 10mm. Dans la modélisation des fissures, nous considérons que les lèvres de la fissure constituent deux bords libres, et n'ont pas de contact entre elles sous les chargements d'un poids lourds ou les chargements thermiques.

Numériquement, dans le schéma discrétisé, la fissure est représentée par une discontinuité entre deux points au bord de la fissure. Nous présentons ici deux parties. La première partie consiste à supprimer les équations entre deux points de la fissure dans le système d'équations de rigidité 5.79. La deuxième partie présente le remplacement des équations de conditions aux limites sur les lèvres de la fissure.

Ci-dessous, nous examinons l'introduction d'une fissure transversale dans une couche de chaussée dans le programme du modèle simplifié.

7.1.1 Modifications des équations de rigidité dues à la présence de la fissure

La fissure est supposée être dans la zone $\bar{x} \in [\bar{x}_c, \bar{x}_{c+1}]$ et $\bar{y} \in [\bar{y}_u, \bar{y}_v]$, $1 \leq u < v \leq N + 1$, $\forall c \in [1, N]$ et se trouve dans la couche m ($\forall m \in [1, n]$) de la chaussée (cf. figure 7.1). Nous rappelons

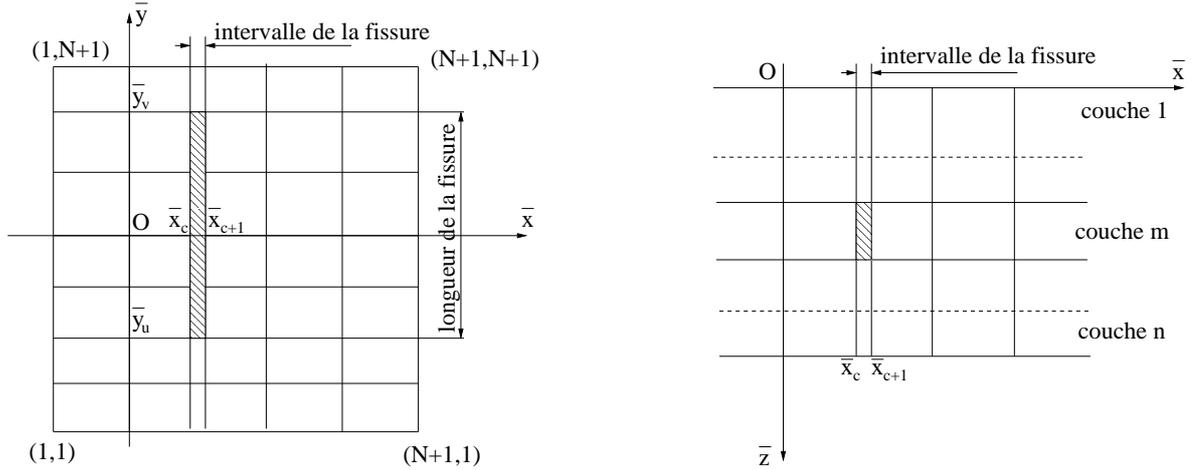


FIGURE 7.1. Schéma numérique de la fissure

ci-dessous le système des équations de rigidité 5.79 :

$$\begin{aligned}
& K_1^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l} X_{k,l} + K_1^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+1} X_{k,l+1} \quad (7.1) \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+2} X_{k,l+2} + K_1^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l} X_{k+1,l} \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+1} X_{k+1,l+1} + K_1^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+2} X_{k+1,l+2} \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l} X_{k+2,l} + K_1^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+1} X_{k+2,l+1} \\
& + K_1^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+2} X_{k+2,l+2} = K_2^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l} \Sigma_{k,l} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+1} \Sigma_{k,l+1} + K_2^{k(N+1)+l+1, (k-1)(N+1)+l+2} \Sigma_{k,l+2} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l} \Sigma_{k+1,l} + K_2^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+1} \Sigma_{k+1,l+1} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, k(N+1)+l+2} \Sigma_{k+1,l+2} + K_2^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l} \Sigma_{k+2,l} \\
& + K_2^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+1} \Sigma_{k+2,l+1} + K_2^{k(N+1)+l+1, (k+1)(N+1)+l+2} \Sigma_{k+2,l+2} \\
& + K_3^{k,l} + K_3^{k,l+1} + K_3^{k,l+2} + K_3^{k+1,l} + K_3^{k+1,l+1} + K_3^{k+1,l+2} + K_3^{k+2,l} + K_3^{k+2,l+1} + K_3^{k+2,l+2}
\end{aligned}$$

($\forall k, l \in [1, N-1] \Rightarrow 5n(N-1)^2$ équations). A chaque couple de point (k,l) nous avons $5n$ équations.

Nous remarquons que dans les $5n$ équations au point (k,l) , les équations $(5m-4)$ à $5m$ présentent la rigidité de la plaque m ($m \in [1, n]$). Pour supprimer les équations de rigidité liées à la fissure, nous supprimons toutes les équations qui correspondent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in [c, c+1] \\ l \in [u, v] \\ \text{equations } (5m-4) \text{ à } 5m \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Le nombre d'équations de conditions aux limites à ajouter sur les lèvres de la fissure est donc : $10(u-v+1)$ équations.

7.1.2 Ajout des équations de conditions aux limites sur les lèvres de la fissure

Les équations de conditions aux limites sont présentées en détails dans l'annexe B, elles peuvent être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
& K_1^{c(N+1)+l+1, c(N+1)+l} X_{c+1, l} + K_1^{c(N+1)+l+1, c(N+1)+l+1} X_{c+1, l+1} \\
& + K_1^{c(N+1)+l+1, c(N+1)+l+2} X_{c+1, l+2} + K_1^{c(N+1)+l+1, (c+1)(N+1)+l} X_{c+2, l} \\
& + K_1^{c(N+1)+l+1, (c+1)(N+1)+l+1} X_{c+2, l+1} + K_1^{c(N+1)+l+1, (c+1)(N+1)+l+2} X_{c+2, l+2} \\
& = K_2^{c(N+1)+l+1, c(N+1)+l} \Sigma_{c+1, l} + K_2^{c(N+1)+l+1, c(N+1)+l+1} \Sigma_{c+1, l+1} \\
& + K_2^{c(N+1)+l+1, c(N+1)+l+2} \Sigma_{c+1, l+2} + K_2^{c(N+1)+l+1, (c+1)(N+1)+l} \Sigma_{c+2, l} \\
& + K_2^{c(N+1)+l+1, (c+1)(N+1)+l+1} \Sigma_{c+2, l+1} + K_2^{c(N+1)+l+1, (c+1)(N+1)+l+2} \Sigma_{c+2, l+2} \\
& + K_3^{c+1, l} + K_3^{c+1, l+1} + K_3^{c+1, l+2} + K_3^{c+2, l} + K_3^{c+2, l+1} + K_3^{c+2, l+2}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$\forall l \in [u, v]$ et

$$\begin{aligned}
& K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l} X_{c-1, l} + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+1} X_{c-1, l+1} \\
& + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+2} X_{c-1, l+2} + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l} X_{c, l} \\
& + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+1} X_{c, l+1} + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+2} X_{c, l+2} \\
& = K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l} \Sigma_{c-1, l} + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+1} \Sigma_{c-1, l+1} \\
& + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+2} \Sigma_{c-1, l+2} + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l} \Sigma_{c, l} \\
& + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+1} \Sigma_{c, l+1} + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+2} \Sigma_{c, l+2} \\
& + K_3^{c-1, l} + K_3^{c-1, l+1} + K_3^{c-1, l+2} + K_3^{c, l} + K_3^{c, l+1} + K_3^{c, l+2}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$\forall l \in [u, v]$

Ces deux systèmes d'équations nous donnent alors $10(u - v + 1)$ équations de conditions aux limites. Nous obtenons alors suffisamment d'équations pour résoudre.

7.2 Application à une chaussée fissurée tridimensionnelle

Dans le cadre de ce paragraphe, nous présentons les calculs de structures 3D de chaussée fissurée transversalement. Deux cas sont examinés : un monocouche de chaussée fissurée et un bicouche de chaussée fissurée inférieurement. Dans chaque cas, les calculs du modèle simplifié sont faits et les résultats sont comparés avec ceux de calculs par éléments finis.

7.2.1 Cas d'une couche de chaussée 3D fissurée

Examinons le problème suivant :

La chaussée se compose d'une couche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. La fissure est supposée exister transversalement sur toute l'épaisseur de la couche de chaussée, avec une ouverture de 5mm (cf. figure 7.2). Les paramètres du problème sont :

La chaussée a un module d'Young $E_1 = 5400MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, une épaisseur de 0.08m.

Le sol a un module d'Young $E_s = 50MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

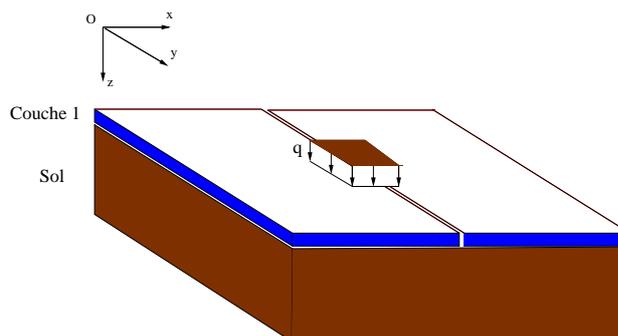


FIGURE 7.2. Maillage du calcul EF du monocouche tridimensionnel fissuré

La charge de roue de camion est supposée être une pression de $q = 0.662MPa$ sur une surface rectangulaire de longueur $a = 0.3m$ (dans le sens de circulation) et de largeur $b = 0.22m$. Elle est supposée symétrique par rapport à la fissure.

La chaussée est supposée infinie dans le plan, nous considérons donc que les bords de la chaussée sont bloqués à une distance très grande.

Ci-dessous nous présentons successivement la modélisation du problème par la méthode des éléments finis (effectuée sous César-LCPC), la modélisation du problème par M4-Boussinesq, puis la comparaison des résultats de ces deux modélisations.

Modélisation par éléments finis

La structure de la chaussée est étudiée sur un parallélépipède-rectangle, qui se compose d'une couche de chaussée et du massif de sol (cf.figure 7.3). Nous utilisons des conditions aux limites telles que des déplacements transversaux nuls aux limites transversales et un déplacement vertical nul en bas du massif de sol. Grâce à la symétrie du calcul, nous n'étudions qu'un quart de la structure.

Nous avons constaté en effectuant plusieurs calculs que les dimensions transversales suffisantes sont de $3m$ pour un quart de la structure et que la dimension verticale suffisante est de $8m$ en profondeur (cf. 7.3).

Le maillage d'un quart du massif est fait avec 5296 éléments cubiques à 20 noeuds. Le nombre total de noeuds est de 24060. Le temps de calcul sur un P4-1.7Ghz est de 1h30' temps CPU.

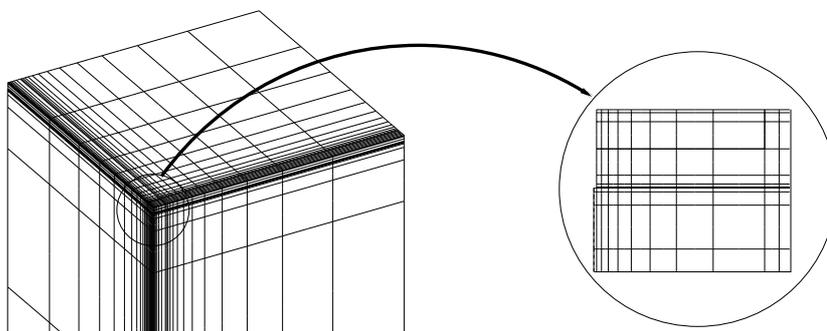


FIGURE 7.3. Maillage de calcul EF du monocouche tridimensionnel fissuré

Modélisation par M4-Boussinesq

La modélisation M4-Boussinesq est effectuée pour toute la structure sans utiliser la symétrie, donc sur un plan rectangulaire de dimension $6m \times 6m$.

Les conditions limites au bord sont choisies de telle manière que les déplacements longitudinaux au bord soient nuls et qu'il n'y ait pas d'efforts de cisaillements transversaux (voir chapitre 3). Nous utilisons dans ce cas les conditions aux limites du bord bloqué, c'est-à-dire les conditions 3.80 à 3.84 pour le bord $x = \infty$ et les conditions 3.85 à 3.89 pour le bord $y = \infty$. Nous obtenons les mêmes équations que dans le cas monocouche de chaussée sans fissure (voir chapitre 6).

Pour prendre en compte la fissure transversale, nous ajoutons des conditions limites et éliminons les équations de raideur entre les points en vis-à-vis les lèvres de la fissure, comme cela a été indiqué dans la partie précédente. Les conditions aux limites sur les lèvres de la fissure sont identiques à des conditions de bord libre, c'est-à-dire que les efforts sont nuls :

$$\begin{aligned} -\bar{N}_{11}(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{U}_{1'1}(k, l) + v^1 \bar{U}_{2'2}(k, l) = 0 \\ -\bar{M}_{11}(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{\Phi}_{1'1}(k, l) + v^1 \bar{\Phi}_{2'2}(k, l) = 0 \\ -\bar{Q}_1(k, l) = 0 &\Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1+v_1} (\bar{\Phi}_1(k, l) + \bar{U}_{3'1}(k, l)) + \bar{\tau}_x^{1,2}(k, l) = 0 \\ -\bar{N}_{12}(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{U}_{1'2}(k, l) + \bar{U}_{2'1}(k, l) = 0 \\ -\bar{M}_{12}(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{\Phi}_{1'2}(k, l) + \bar{\Phi}_{2'1}(k, l) = 0 \end{aligned}$$

Où les points (k, l) $k = [c, c + 1], \forall l \in [1, N + 1]$ sont les indices des points à la fissure.

Un maillage de 24x18 mailles sur la surface est réalisé avec des éléments plans du M4-Boussinesq. Chaque noeud a 8 degrés de liberté. Le temps d'un tel calcul est de 0,5min sur un P4-1.7Ghz.

Comparaison des résultats des calculs par éléments finis et par M4-Boussinesq

Ci-dessous nous présentons les contraintes d'interface du M4-Boussinesq (cf figure 7.4 et 7.5) :

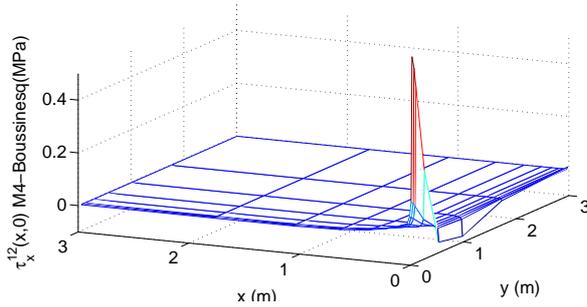


FIGURE 7.4. Contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissuré

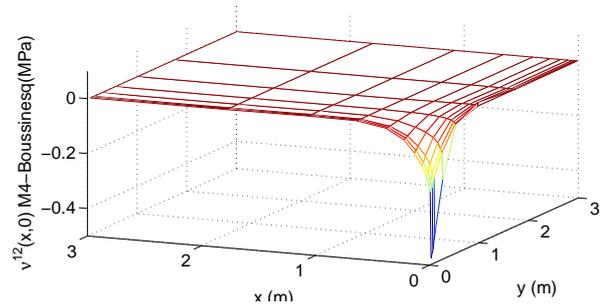


FIGURE 7.5. Contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissuré

Et leurs comparaisons avec les résultats du calcul par éléments finis (cf. figures 7.6 à 7.9).

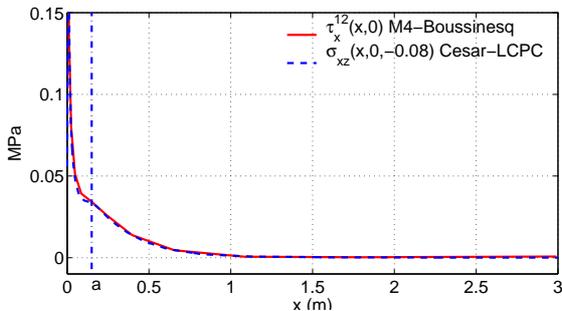


FIGURE 7.6. Contrainte de cisaillement d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissuré

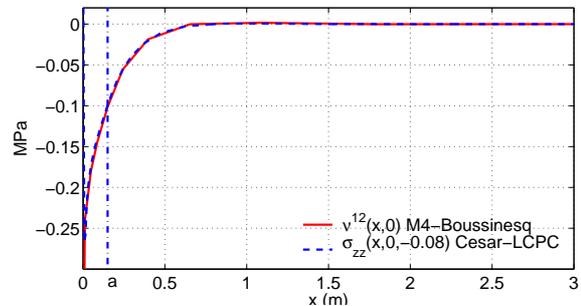


FIGURE 7.7. Contrainte d'arrachement d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissuré

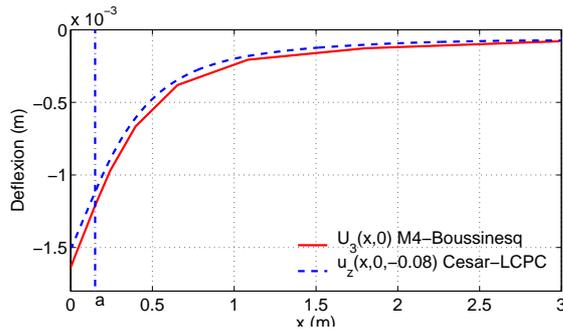


FIGURE 7.8. Déplacement vertical d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissuré

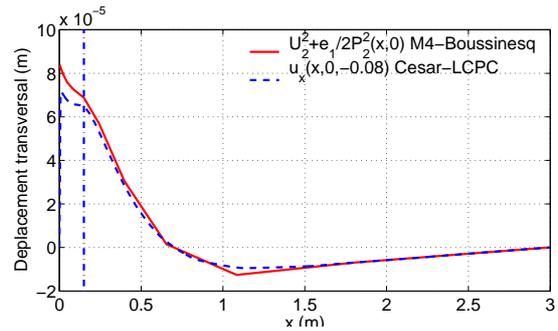


FIGURE 7.9. Déplacement transversal d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissuré

Nous constatons une très bonne cohérence des contraintes d'interface déterminées par le modèle simplifié et par le calcul aux éléments finis. Le déplacement prévu par le modèle simplifié est plus important que celui prévu par les éléments finis, mais la forme reste la même. Ceci peut être expliqué car le modèle simplifié est calculé pour un massif vraiment infini selon la profondeur, tandis que le calcul par éléments finis est calculé pour un massif de 8m de profondeur.

Nous remarquons que dans ce calcul, nous obtenons un gain important de temps : 1h30 pour le calcul par éléments finis et 0,8 minutes pour le calcul par le M4-Boussinesq sous Matlab. Si le modèle M4-Boussinesq est programmé sous Fortran ou C++, le temps de calcul peut diminuer considérablement. Dans un tel cas, nous pourrions obtenir un calcul 20 à 30 fois plus rapide que celui avec la programmation sous Matlab.

7.2.2 Bicouche tridimensionnel de chaussée fissurée : cas fissuré inférieurement

Nous examinons ici un bicouche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. La fissure transversale est supposée déjà exister dans la couche inférieure, avec une ouverture de 5mm, sur toute la longueur transversale (cf. figure 7.10).

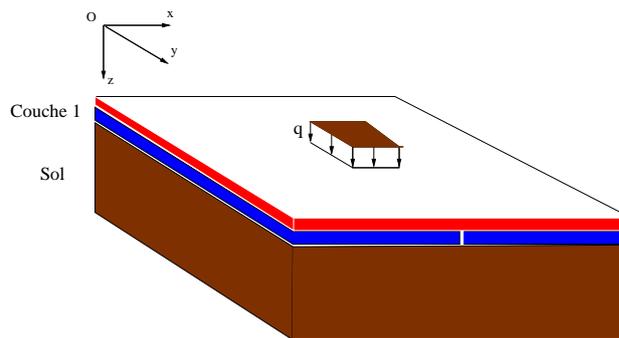


FIGURE 7.10. Schéma de calcul du bicouche tridimensionnel fissuré

Les paramètres du problème sont :

La chaussée : couche 1 : module d'Young $E_1 = 9300MPa$, coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, épaisseur $e_1 = 0.1m$, couche 2 : module d'Young $E_2 = 23000MPa$, coefficient de Poisson $\nu_2 = 0.35$, épaisseur de $e_2 = 0.3m$

Le sol a un module d'Young $E_s = 50MPa$, et un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

La charge correspondant à une roue de camion est représentée par une pression de $q = 0.662\text{MPa}$ sur une surface rectangulaire de longueur $a = 0.3\text{m}$ (dans le sens de circulation) et de largeur $b = 0.22\text{m}$. Elle est supposée symétrique par rapport à la fissure.

La chaussée est supposée infinie dans le plan, nous considérons donc que les bords de la chaussée sont bloqués à une distance très grande.

Ci-dessous nous présentons successivement la modélisation du problème par la méthode des éléments finis (effectuée sous César-LCPC), la modélisation du problème par M4-Boussinesq, puis la comparaison des résultats de ces deux modélisations.

Modélisation par éléments finis

La structure de chaussée est examinée sur un parallélépipède-rectangle, qui se compose de deux couches de chaussée et du massif de sol (cf.figure 8.8). Nous utilisons des conditions aux limites telles que les déplacements transversaux soient nuls aux limites transversales et que le déplacement vertical soit nul à la base du massif de sol. Grâce à la symétrie, nous effectuons le calcul pour un quart de la structure.

Nous avons constaté sur plusieurs calculs que les dimensions transversales suffisantes sont de 5m pour un quart de la structure et que la dimension verticale suffisante est de 10m en profondeur (cf. 8.8).

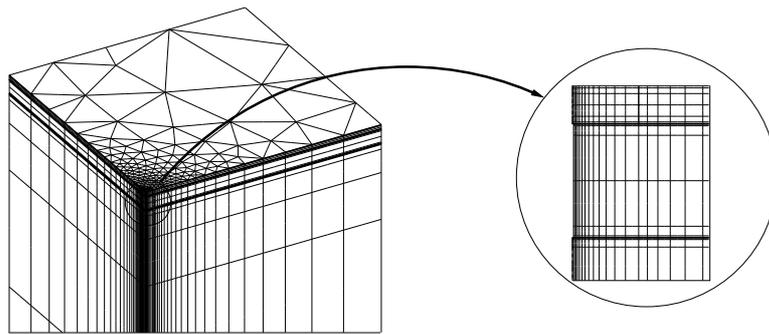


FIGURE 7.11. Maillage de calcul EF du bicouche tridimensionnel fissuré

Le maillage est fait avec 1965 éléments cubiques à 20 noeuds et 7080 éléments trapézoïdaux à 15 noeuds. Le nombre total de noeuds est de 29561. Le calcul prend 2h temps de calcul CPU sur un P4-1.7Ghz.

Modélisation par M4-Boussinesq

La modélisation du modèle M4-Boussinesq est effectuée pour toute la structure sans utiliser la symétrie, donc sur un plan rectangulaire de dimension $10\text{m} \times 10\text{m}$.

Les conditions aux limites au bord sont choisies de telle manière que les déplacements longitudinaux au bord soient nuls et qu'il n'y ait pas d'efforts de cisaillements transversaux (voir chapitre 3) aux bords. Nous utilisons dans ce cas les conditions aux limites du bord bloqué, c'est-à-dire les conditions 3.80 à 3.84 pour le bord de x et les conditions 3.85 à 3.89 pour le bord de y , pour les deux couches. Nous obtenons les mêmes équations que dans le cas bicouche de chaussée sans fissure (voir chapitre 6).

Sur les lèvres de la fissure, nous ajoutons des conditions limites et éliminons les équations de raideur entre les points en vis-à-vis sur les lèvres de la fissure. Les conditions limites sur la fissure sont identiques aux conditions de bord libre, c'est-à-dire que les efforts sont nuls. Dans le cas où la fissure se trouve dans la première couche de chaussée, nous avons les conditions limites :

$$-\bar{N}_{11}^2(k, l) = 0 \Rightarrow \bar{U}_{1'1}^2(k, l) + v^1 \bar{U}_{2'2}^2(k, l) = 0$$

$$\begin{aligned}
-\bar{M}_{11}^2(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{\Phi}_{1'1}^2(k, l) + v^1 \bar{\Phi}_{2'2}^2(k, l) = 0 \\
-\bar{Q}_1^2(k, l) = 0 &\Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_2}{1+v_2} (\bar{\Phi}_1^2(k, l) + \bar{U}_{3'1}^2(k, l)) + \bar{\tau}_1^{1,2}(k, l) + \bar{\tau}_1^{2,3}(k, l) = 0 \\
-\bar{N}_{12}^2(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{U}_{1'2}^2(k, l) + \bar{U}_{2'1}^2(k, l) = 0 \\
-\bar{M}_{12}^2(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{\Phi}_{1'2}^2(k, l) + \bar{\Phi}_{2'1}^2(k, l) = 0
\end{aligned}$$

Où les points (k, l) $k = [c, c + 1]$, $\forall l \in [1, N + 1]$ sont les indices des points à la fissure.

Le maillage du M4-Boussinesq est fait avec 24×32 mailles dans le plan. Chaque noeud a treize degrés de liberté. Le calcul prend 15 minutes temps de calcul de CPU sur un P4-1.7Ghz.

Comparaison des résultats des calculs par éléments finis et par M4-Boussinesq

Ci-dessous nous avons les comparaisons des déplacements et des contraintes d'interface (cf. figure 7.12 à 7.19).

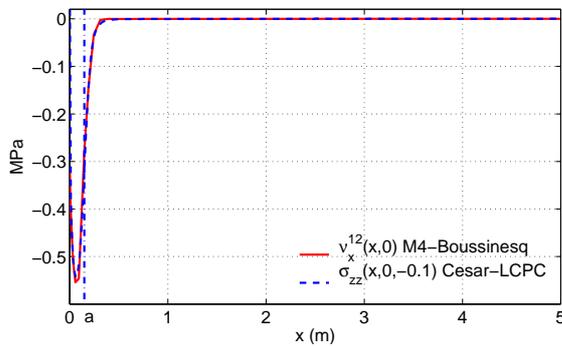


FIGURE 7.12. *Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface chaussée-chaussée*

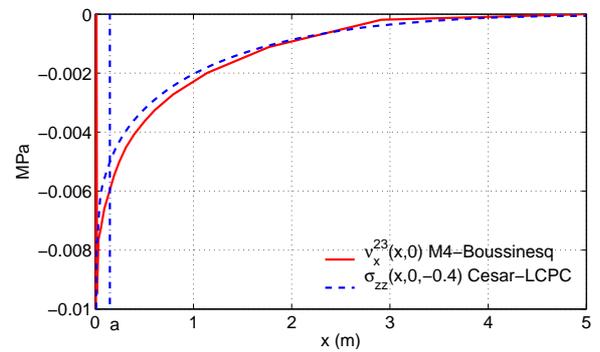


FIGURE 7.13. *Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol*

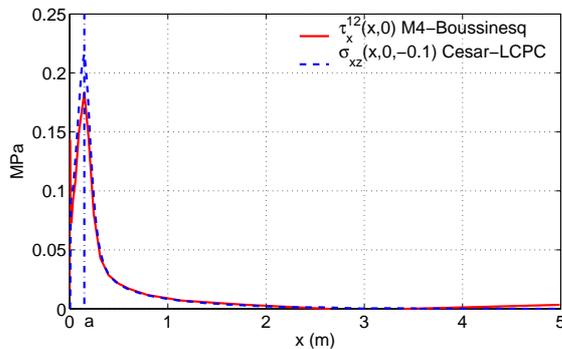


FIGURE 7.14. *Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface chaussée-chaussée*

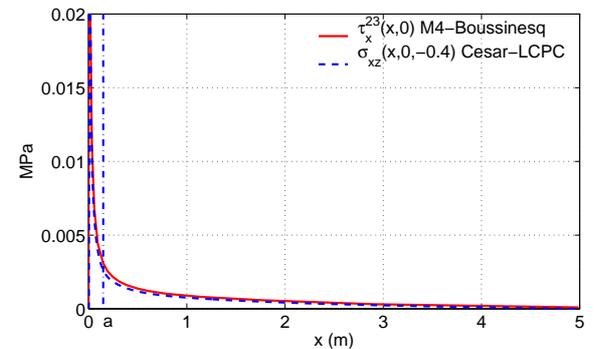


FIGURE 7.15. *Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol*

Nous constatons que les résultats du modèle simplifié M4-Boussinesq sont très cohérents avec ceux des éléments finis. Les déplacements verticaux du M4-Boussinesq ont la même forme, mais sont plus grands que ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Nous pouvons voir que la profondeur du sol prise dans la méthode des éléments finis n'est pas encore suffisante. Tandis que dans le modèle M4-B, le sol est vraiment de profondeur infinie.

Dans ce calcul, nous obtenons un gain important de temps : 2h pour le calcul par éléments finis pour un quart de la structure, et 15 minutes pour le calcul par le M4-Boussinesq sous Matlab pour toute la structure. Si le modèle M4-Boussinesq était programmé sous Fortran ou C++, le temps

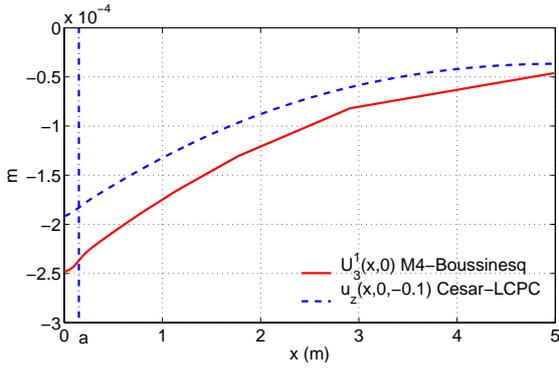


FIGURE 7.16. Comparaison des déplacements verticaux de la couche de chaussée supérieure

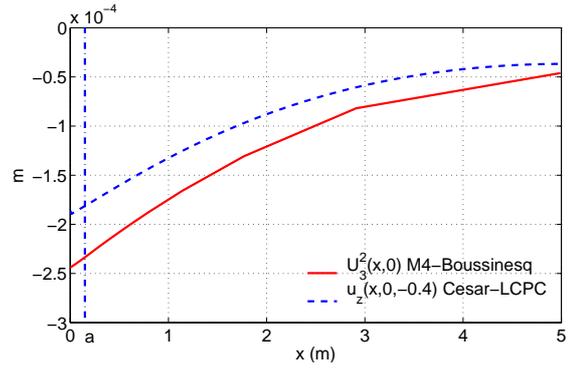


FIGURE 7.17. Comparaison des déplacements verticaux de la couche de chaussée inférieure

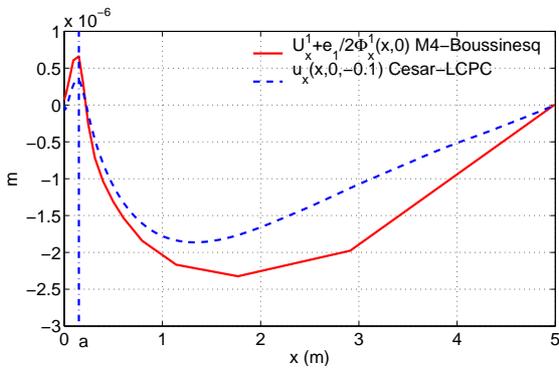


FIGURE 7.18. Comparaison des déplacements transversaux de la couche de chaussée supérieure

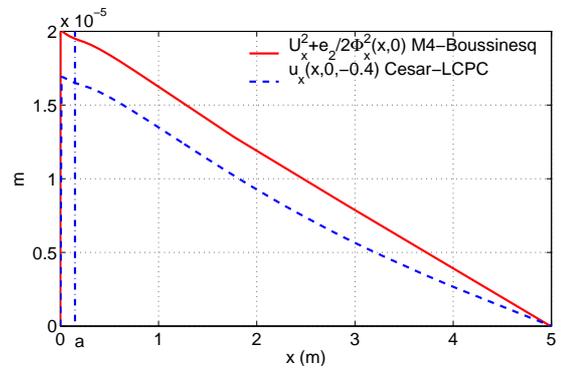


FIGURE 7.19. Comparaison des déplacements transversaux de la couche de chaussée inférieure

de calcul pourrait diminuer beaucoup. Dans un tel cas, nous pourrions obtenir un calcul 100 fois plus rapide qu'avec la programmation sous Matlab.

7.3 Cas 2D déformation plane de chaussée fissurée

Comme nous l'avons constaté dans les parties précédentes, le modèle simplifié est bien efficace et rapide par rapport aux éléments finis dans le cas de chaussée fissurée 3D. Nous pouvons donc penser que le modèle simplifié sera aussi efficace dans le cas 2D déformation plane.

Dans cette partie, nous allons présenter des calculs de chaussée fissurée en 2D déformation plane, pour une couche de chaussée et deux couches de chaussée. Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux obtenus par éléments finis (Cesar-LCPC).

7.3.1 Cas 2D déformation plane d'une couche de chaussée fissurée

Nous examinons une couche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. Pour pouvoir appliquer les conditions de déformation plane, nous supposons que la fissure et la charge sont infinies transversalement. La fissure est supposée exister, avec une ouverture de 5mm. Les paramètres du problème sont :

La chaussée a un module d'Young $E_1 = 5400MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, une épaisseur $e_1 = 0.08m$.

Le sol a un module d'Young $E_s = 50MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

La charge appliquée sur une zone infinie transversalement, d'une pression $q = 0.662MPa$, de largeur $a = 0.3m$, symétrique par rapport à la fissure.

La chaussée est supposée infinie dans le plan transversal, donc nous allons utiliser des conditions aux limites de bords bloqués.

Modélisation par éléments finis

Le calcul par éléments finis est fait en 2D déformation plane. Comme le calcul est léger, nous effectuons le calcul pour toute la structure sans utiliser la symétrie. La dimension transversale est choisie égale à $6m$, la profondeur du sol est choisie égale à $9m$ (cf. figure 7.20).

Pour les conditions aux limites, nous supposons que tous les déplacements transversaux sont nuls aux limites transversales, les déplacements verticaux en bas du massif de sol sont nuls.

Comme le calcul est très léger, nous ne faisons pas de tests de maillage, mais nous choisissons directement un maillage assez fin. Le calcul est fait avec 7420 éléments carrés à 8 neuds. Le nombre total de noeuds est de 22487. Le temps de calcul sur un Pentium IV-1700Ghz est de 20 minutes temps CPU.

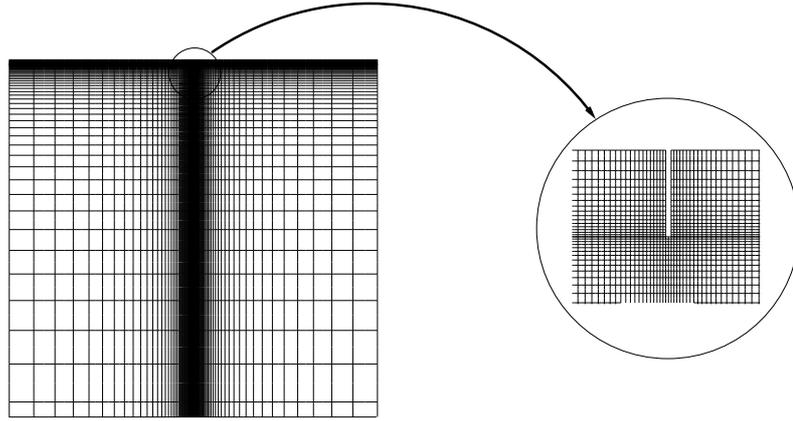


FIGURE 7.20. Maillage du calcul par éléments finis

Modélisation par M4-Boussinesq

Le calcul du M4-Boussinesq est fait sur un espace unidimensionnel, pour toute la structure.

Les conditions limites aux bords sont choisies de telle manière que les déplacements transversaux et les cisaillements au bord soient nuls. C'est-à-dire :

A $\bar{x} = -\infty$ ($k=1$) :

$$\bar{U}_1(1) = 0 \quad (7.5)$$

$$\bar{\Phi}_1(1) = 0 \quad (7.6)$$

$$\bar{Q}_1(1) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} (\bar{\Phi}_1(1) + \bar{U}_{3'1}(1)) + \bar{\tau}_1^{1,2}(1) = 0 \quad (7.7)$$

A $\bar{x} = +\infty$ ($k=N+1$) :

$$\bar{U}_1(N+1) = 0 \quad (7.8)$$

$$\bar{\Phi}_1(N+1) = 0 \quad (7.9)$$

$$\bar{Q}_1(N+1) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} (\bar{\Phi}_1(N+1) + \bar{U}_{3'1}(N+1)) + \bar{\tau}_1^{1,2}(N+1) = 0 \quad (7.10)$$

Pour l'introduction de la fissure transversale, nous ajoutons des conditions aux limites et éliminons les équations de raideur entre les points en vis-à-vis sur les lèvres de la fissure. Les conditions aux limites sur la fissure sont identiques aux conditions de bord libre, c'est-à-dire que les efforts sont nuls :

$$\bar{N}_{11}(k) = 0 \Rightarrow \bar{U}_{1'1}(k) = 0 \tag{7.11}$$

$$\bar{M}_{11}(k) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_{1'1}(k) = 0 \tag{7.12}$$

$$\bar{Q}_1(k) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} (\bar{\Phi}_1(k) + \bar{U}_{3'1}(k)) + \bar{\tau}_1^{1,2}(k) = 0 \tag{7.13}$$

Où $k \in [c, c + 1]$ est l'indice des points sur la fissure.

Le maillage du M4-Boussinesq est fait avec 40 éléments unidimensionnels du M4-Boussinesq pour toute la structure, les noeuds ont 5 degrés de liberté.

Comparaisons des résultats

Ci-dessous nous avons les résultats du modèle simplifié et leurs comparaisons avec un calcul par éléments finis (cf. figure 7.21 à 7.24).

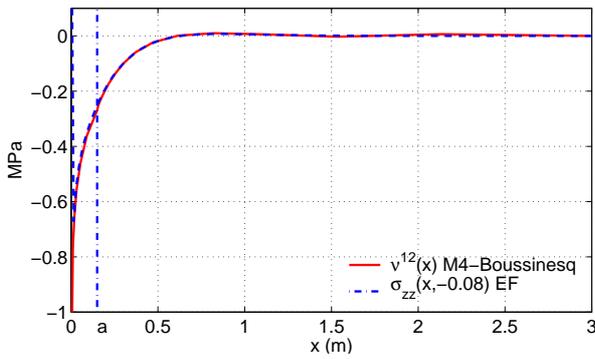


FIGURE 7.21. Contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol

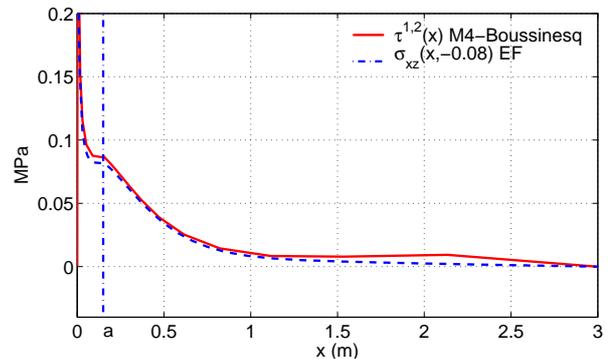


FIGURE 7.22. Contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol

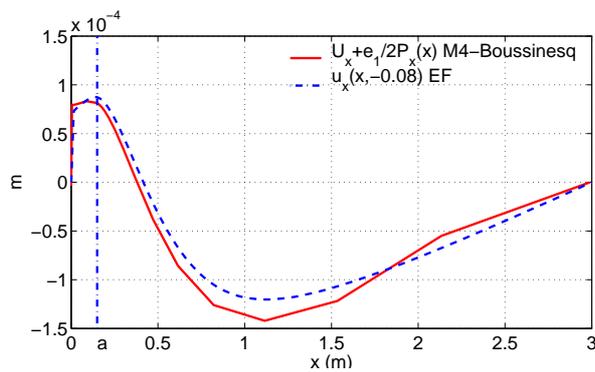


FIGURE 7.23. Déplacement transversal de la couche de chaussée

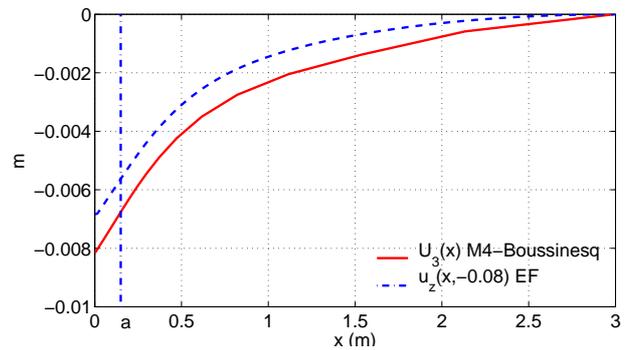


FIGURE 7.24. Déplacement vertical de la couche de chaussée

Remarque

Dans notre modèle simplifié, le sol est vraiment un massif infini. Donc ici encore le déplacement vertical présente une différence avec le calcul par EF, dans lequel le sol a une profondeur limitée. Les déplacements transversaux, eux, sont bien cohérents.

Nous concluons, comme attendu, que les résultats du M4-Boussinesq 2D déformation plane sont bien cohérents avec ceux des éléments finis. Nous avons obtenu un gain de temps de calcul important, car les éléments finis sont faits avec des éléments finis 2D, et le modèle simplifié M4-Boussinesq utilise des éléments unidimensionnels.

7.3.2 Cas 2D déformation plane du bicouche de chaussée fissurée

Nous examinons maintenant un bicouche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini en déformation plane. La fissure est supposée exister transversalement, soit dans la couche de chaussée en haut, soit dans la couche en bas, avec une ouverture de 5mm. Pour satisfaire les conditions du calcul 2D déformation plane, nous supposons que la charge et la fissure sont infinies transversalement.

7.3.2.1 Validation du cas bicouche de déformation plane fissure en bas

Ici, nous examinons le cas d'un bicouche de chaussée fissuré dans la couche en bas en déformation plane. Les paramètres du problème sont :

La couche de chaussée supérieure a un module d'Young $E_1 = 9300MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, une épaisseur $e_1 = 0,1m$.

La couche de chaussée inférieure a un module d'Young $E_2 = 23000MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_2 = 0.35$, une épaisseur $e_2 = 0,3m$.

Le sol a un module d'Young $E_2 = 50MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

La charge est appliquée infinie transversalement, sur une longueur $2a = 0.3m$, avec une pression surfacique $q = 0.662MPa$.

Modélisation par éléments finis

Le calcul par éléments finis est fait en 2D déformation plane. Comme le calcul est très léger, nous effectuons le calcul pour toute la structure sans utiliser la symétrie. La dimension transversale est choisie égale à $10m$ pour toute la structure, la profondeur du massif de sol est choisie égale à $9m$ (cf. figure 7.25).

Pour les conditions aux limites, nous supposons que tous les déplacements transversaux sont nuls aux limites transversales, les déplacements verticaux en bas du massif de sol sont nuls.

Le calcul par éléments finis est fait avec 13419 éléments carrés à 8 noeuds, le nombre total de noeuds est de 40810.

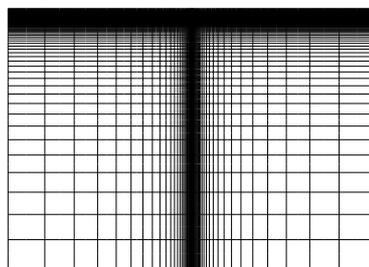


FIGURE 7.25. Maillage du calcul des éléments finis

Modélisation par M4-Boussinesq

Le calcul du M4-Boussinesq est fait sur un espace unidimensionnel, pour toute la structure.

Les conditions aux limites au bord sont choisies de telle manière que les déplacements au bord soient nuls. C'est-à-dire :

A $\bar{x} = -\infty$ ($k=1$) :

$$\bar{U}_1^1(1) = 0, \quad \bar{U}_1^2(1) = 0 \quad (7.14)$$

$$\bar{\Phi}_1^1(1) = 0, \quad \bar{\Phi}_1^2(1) = 0 \quad (7.15)$$

$$\bar{Q}_1^1(1) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} (\bar{\Phi}_1^1(1) + \bar{U}_{3'1}^1(1)) + \bar{\tau}_1^{0,1}(1) + \bar{\tau}_1^{1,2}(1) = 0 \quad (7.16)$$

$$\bar{Q}_1^2(1) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} (\bar{\Phi}_1^2(1) + \bar{U}_{3'1}^2(1)) + \bar{\tau}_1^{1,2}(1) + \bar{\tau}_1^{2,3}(1) = 0 \quad (7.17)$$

A $\bar{x} = +\infty$ ($k=N+1$) :

$$\bar{U}_1^1(N+1) = 0, \quad \bar{U}_1^2(N+1) = 0 \quad (7.18)$$

$$\bar{\Phi}_1^1(N+1) = 0, \quad \bar{\Phi}_1^2(N+1) = 0 \quad (7.19)$$

$$\bar{Q}_1^1(N+1) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} (\bar{\Phi}_1^1(N+1) + \bar{U}_{3'1}^1(N+1)) + \bar{\tau}_1^{0,1}(N+1) + \bar{\tau}_1^{1,2}(N+1) = 0 \quad (7.20)$$

$$\bar{Q}_1^2(N+1) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} (\bar{\Phi}_1^2(N+1) + \bar{U}_{3'1}^2(N+1)) + \bar{\tau}_1^{1,2}(N+1) + \bar{\tau}_1^{2,3}(N+1) = 0 \quad (7.21)$$

Pour la fissure transversale dans la couche du bas, nous ajoutons des conditions limites et éliminons les équations de raideur entre les couples de points en vis-à-vis sur les lèvres de la fissure. Les conditions aux limites sur la fissure sont identiques aux conditions de bord libre, c'est-à-dire que les efforts sont nuls. Dans le cas où la fissure se trouve dans la première couche de chaussée, nous avons les conditions limites :

$$\bar{N}_{11}^2(k) = 0 \Rightarrow \bar{U}_{1'1}^2(k) = 0 \quad (7.22)$$

$$\bar{M}_{11}^2(k) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_{1'1}^2(k) = 0 \quad (7.23)$$

$$\bar{Q}_1^2(k) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} (\bar{\Phi}_1^2(k) + \bar{U}_{3'1}^2(k)) + \bar{\tau}_1^{2,3}(k) + \bar{\tau}_1^{1,2}(k) = 0 \quad (7.24)$$

où $k = [c, c + 1]$ est l'indice des points à la fissure.

Le maillage du M4-Boussinesq est fait avec 40 éléments unidimensionnels du M4-Boussinesq pour toute la structure, les noeuds ont 8 degrés de liberté. Un tel calcul prend 1 à 2 secondes avec un Pentium IV-1700Ghz.

Comparaison des résultats

Ci-dessous nous présentons les résultats du modèle simplifié et leurs comparaisons avec un calcul par éléments finis.

Comme dans le cas précédent, nous obtenons, comme attendu, que dans ces calculs 2D les contraintes et les déplacements transversaux sont bien cohérents avec ceux des éléments finis, et que les déplacements verticaux ont la même forme que ceux des éléments finis.

Nous avons obtenu ici encore un gain de temps de calcul très important, car les éléments finis sont faits avec des éléments finis 2D, et le modèle simplifié M4-Boussinesq utilise des éléments unidimensionnels.

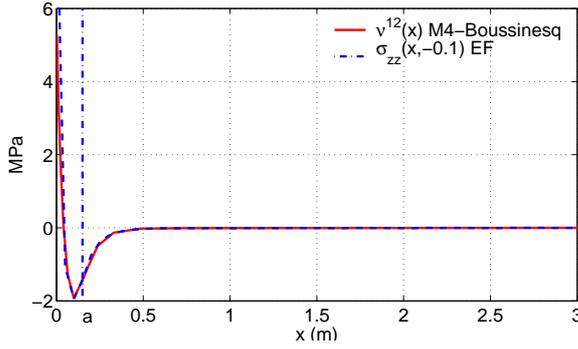


FIGURE 7.26. Contraintes d'arrachement à l'interface chaussée-chaussée

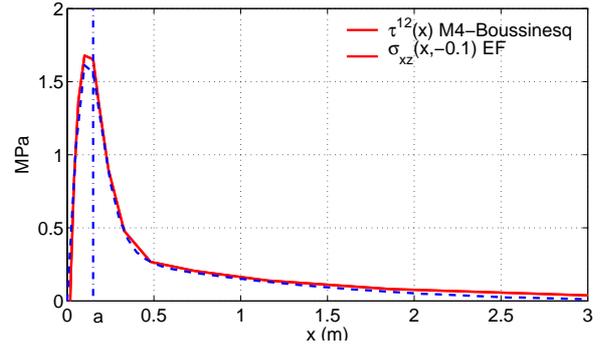


FIGURE 7.27. Contraintes de cisaillement à l'interface chaussée-chaussée

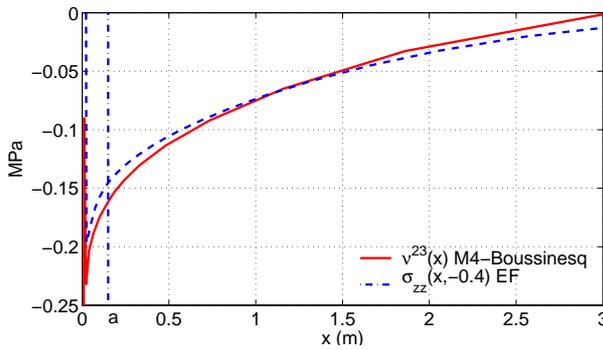


FIGURE 7.28. Contraintes d'arrachement à l'interface chaussée-sol

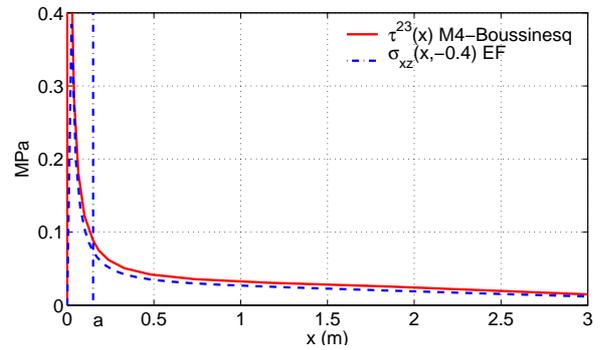


FIGURE 7.29. Contraintes de cisaillement à l'interface chaussée-sol

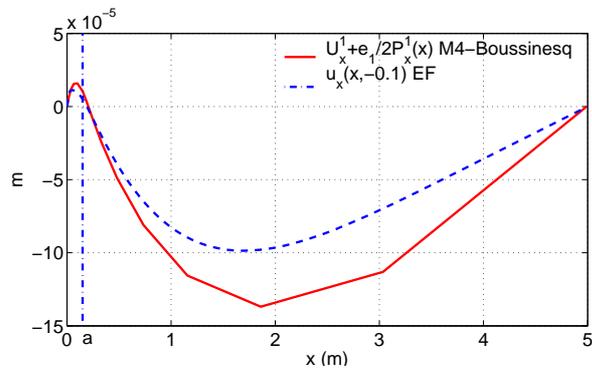


FIGURE 7.30. Déplacements transversaux à l'interface chaussée-chaussée

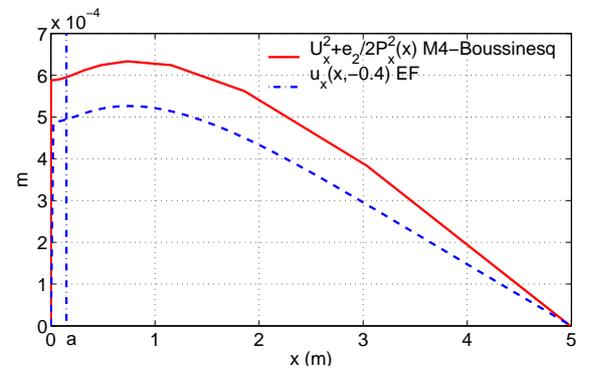


FIGURE 7.31. Déplacements transversaux à l'interface chaussée-sol

7.3.2.2 Validation du cas bicouche en déformation plane fissuré en haut

Nous examinons maintenant le cas du bicouche de chaussée fissurée supérieurement en déformation plane. Les paramètres du problème sont :

La couche de chaussée supérieure a un module d'Young $E_1 = 36500\text{MPa}$, un coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.25$, une épaisseur $e_1 = 0,08\text{m}$.

La couche de chaussée inférieure a un module d'Young $E_2 = 9300\text{MPa}$, un coefficient de Poisson $\nu_2 = 0.35$, une épaisseur $e_2 = 0,095\text{m}$.

Le sol a un module d'Young $E_2 = 50\text{MPa}$, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

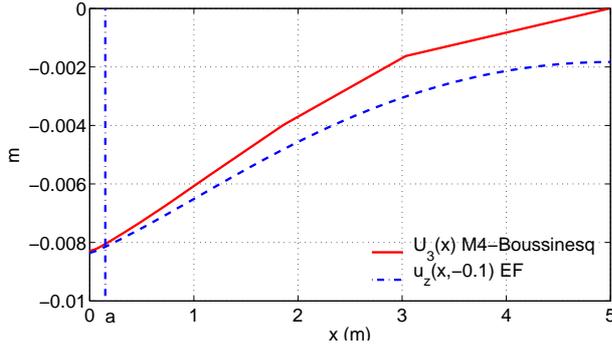


FIGURE 7.32. Déplacements verticaux à l'interface chaussée-chaussée

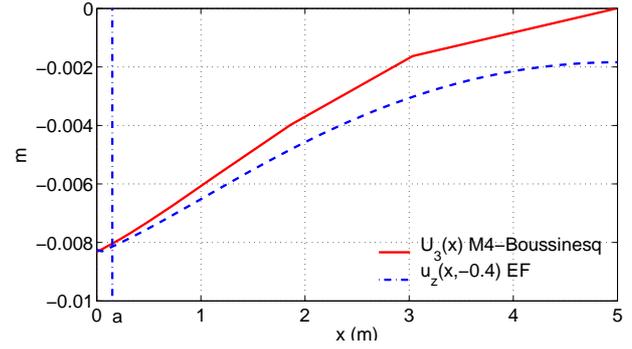


FIGURE 7.33. Déplacements verticaux à l'interface chaussée-sol

La charge est appliquée infinie transversalement, sur une longueur $2a = 0.3m$, avec une pression surfacique $q = 0.662MPa$.

Modélisation par éléments finis

Les données de ce calcul sont similaires à celles du calcul précédent. Le calcul par éléments finis est fait avec 13419 éléments carrés à 8 noeuds. Le nombre total de noeuds est de 40810 (cf. figure 7.34).

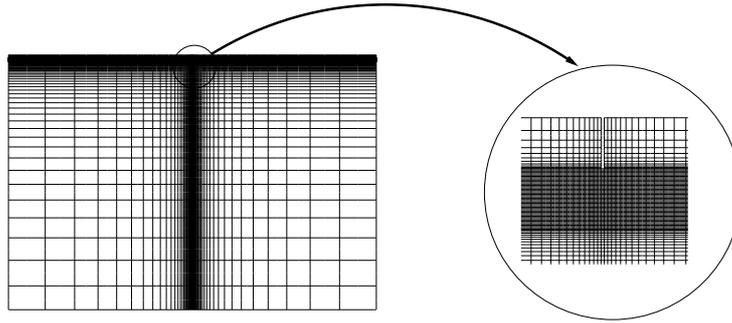


FIGURE 7.34. Maillage du calcul par éléments finis

Modélisation par M4-Boussinesq

Ici nous adaptons le travail fait dans le paragraphe précédent. Dans ce cas où la fissure se trouve dans la première couche de chaussée, nous avons les conditions limites à la fissure :

$$\bar{N}_{11}^1(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{U}_{1'1}^1(k) = 0 \quad (7.25)$$

$$\bar{M}_{11}^1(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}_{1'1}^1(k) = 0 \quad (7.26)$$

$$\bar{Q}_1^1(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} (\bar{\Phi}_1^1(k) + \bar{U}_{3'1}^1(k)) + \bar{\tau}^{1,2}(k) = 0 \quad (7.27)$$

où $k = [c, c + 1]$ est l'indice des points à la fissure.

Le maillage du M4-Boussinesq est fait avec 40 éléments unidimensionnels du M4-Boussinesq pour toute la structure, les noeuds ont 8 degrés de liberté.

Comparaison des résultats

Ci-dessous nous avons les résultats du modèle simplifié et leurs comparaisons avec un calcul par éléments finis.

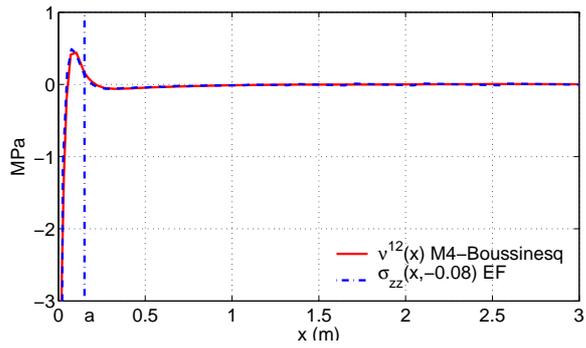


FIGURE 7.35. Contraintes d'arrachement d'interface chaussée-chaussée

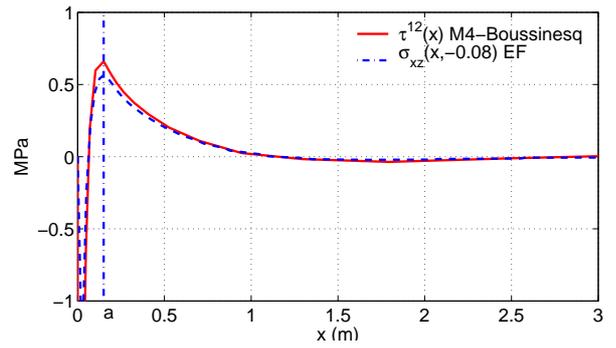


FIGURE 7.36. Contraintes de cisaillement d'interface chaussée-chaussée

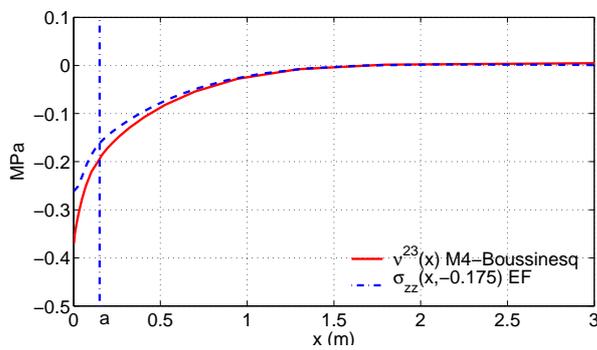


FIGURE 7.37. Contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol

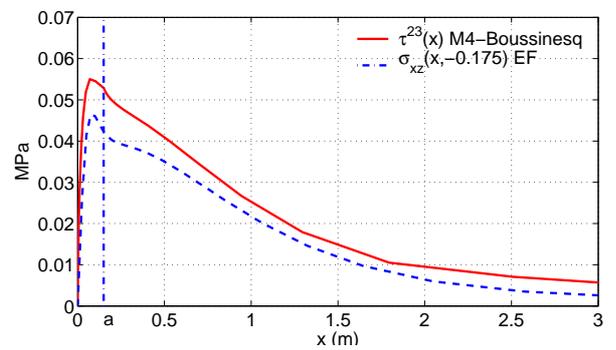


FIGURE 7.38. Contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol

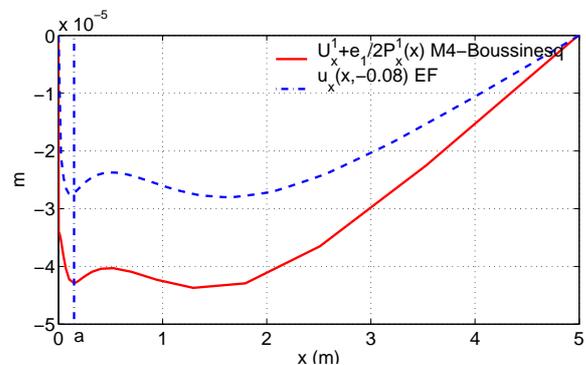


FIGURE 7.39. Déplacements transversaux d'interface chaussée-chaussée

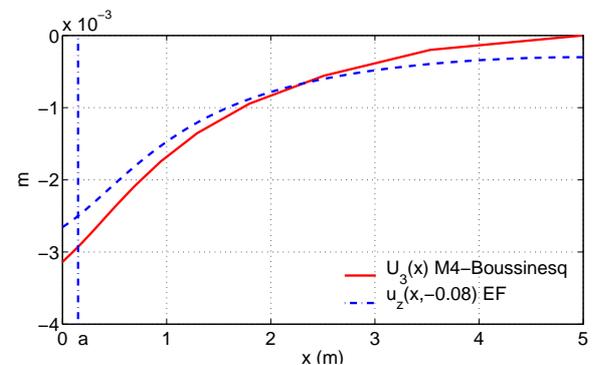
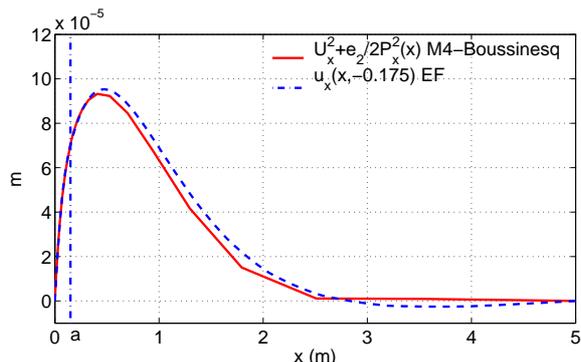
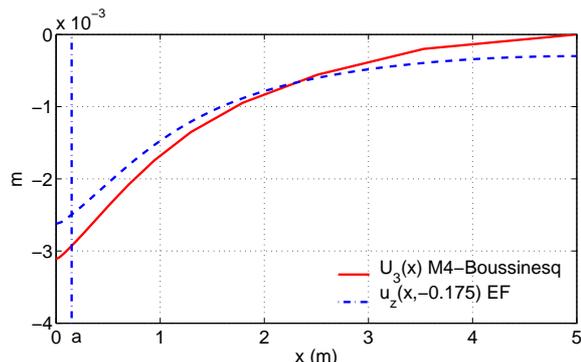


FIGURE 7.40. Déplacements verticaux d'interface chaussée-chaussée

Comme dans le cas précédent, nous obtenons dans ces calculs 2D, des contraintes et des déplacements transversaux bien cohérents avec ceux des éléments finis. Les déplacements verticaux ont la même allure que ceux des éléments finis.

FIGURE 7.41. *Déplacements transversaux d'interface chaussée-sol*FIGURE 7.42. *Déplacements verticaux d'interface chaussée-sol*

Conclusions

Dans le chapitre 6, nous avons conclu que le modèle simplifié marche bien pour une structure de chaussée sans fissure. Dans ce chapitre, nous avons conclu que les résultats du modèle simplifié M4-Boussinesq sont bien cohérents avec ceux des éléments finis, dans tous les cas 3D et 2D déformation plane de la chaussée fissurée avec un chargement de type pneu poids lourd.

Dans le cadre de ce chapitre, nous n'avons examiné que le cas de fissuration transversale de la chaussée. Le cas de fissure longitudinale n'est pas encore examiné, mais avec la même méthode, nous pouvons introduire la fissure dans le modèle 3D. Nous pensons que le modèle marchera bien aussi dans ce cas.

Chapitre 8

Validation du cas fissuré sous chargement de retrait thermique

Nous avons validé le modèle M4-Boussinesq pour une structure de chaussée dans tous les cas avec et sans fissure sous un chargement de type roue de poids lourds. Dans ce chapitre, nous allons présenter tout d'abord un rappel sur la thermoélasticité, puis l'introduire dans les équations du modèle simplifié. Ensuite, nous effectuons des calculs de chaussée fissurée tridimensionnelle, pour un monocouche de chaussée et un bicouche de chaussée sous un deuxième type de chargement de la chaussée : le retrait thermique. Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux obtenus à l'aide du logiciel Cesar-LCPC.

8.1 Application du chargement thermique au M4-Boussinesq

Le comportement thermoélastique permet de prendre en compte les variations dimensionnelles du matériau soumis à un changement de température.

Dans cette partie, nous allons présenter d'abord le comportement thermoélastique linéaire isotrope, puis nous présentons l'application de la thermoélasticité au modèle simplifié.

8.1.1 Comportement thermoélastique linéaire isotrope

Equation du comportement thermoélastique linéaire isotrope

La loi du comportement thermoélastique linéaire classique s'obtient en choisissant un potentiel thermodynamique quadratique défini positif en fonction des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et des écarts de température $\delta T = T - T_0$ par rapport à la température de référence T_0 . En faisant l'hypothèse d'isotropie des phénomènes de déformation et de dilatation, nous pouvons écrire les équations de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\mathbb{I}}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} - \gamma\delta T\underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (8.1)$$

ou

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}Tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\mathbb{I}}} + \alpha\delta T\underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (8.2)$$

Où λ , μ , E , ν sont respectivement les coefficients d'élasticité de Lamé, le module d'Young, le coefficient de Poisson du matériau. Nous avons :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

α est le coefficient de dilatation thermique linéique du matériau.

$$\gamma = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu}$$

Ces équations de comportement thermoélastique nous permettent de calculer les déformations et les contraintes avec effets thermiques lorsque l'on connaît le champ de température. Pour le déterminer, nous utilisons la loi de Fourier et l'équation de la chaleur qui sont présentées ci-dessous.

Loi de Fourier

La loi de Fourier nous donne la relation entre le flux de chaleur \vec{q} et la température T :

$$\underline{q} = -k \underline{\text{grad}} T \quad (8.3)$$

Où k le coefficient de conductivité thermique.

Equation de la chaleur

Nous présentons ci-dessous l'équation de bilan d'énergie interne en négligeant le couplage thermoélastique :

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = k \text{div} \underline{q} \quad (8.4)$$

Où ρ , C_ε sont respectivement la masse volumique et la chaleur spécifique du matériau.

La combinaison de 8.3 et 8.4 donne l'équation classique de la chaleur :

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T \quad (8.5)$$

Comme nous avons négligé dans le bilan d'énergie interne le couplage thermoélastique, cette équation permet de découpler totalement le calcul de champs de température. Ainsi dans la suite nous supposons que le champ de température a été déterminé et nous n'étudierons que les conséquences sur les champs mécaniques.

8.1.2 Application de la thermoélasticité aux équations du modèle simplifié

Dans un problème thermoélastique, la déformation totale est la somme de la déformation élastique et de la déformation thermique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} \quad (8.6)$$

Où la déformation thermique est calculé par : $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \alpha \theta \underline{\underline{I}}$

En appliquant les équations 3.35-3.39 du modèle, les déformations généralisées anélastiques causées par la température peuvent être déterminées :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ith}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (8.7)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{ith}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}_i)}{e_i^3} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (8.8)$$

$$d_{\Phi\alpha}^{ith}(x, y) = 2 \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} \varepsilon_{\alpha 3}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (8.9)$$

$$D_{\alpha}^{i,i+1th}(x, y) = \gamma_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (8.10)$$

$$D_3^{i,i+1th}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{33}^{th}(x, y, z) dz + \frac{1}{2} \int_{h_{i+1}^-}^{h_{i+1}^+} \varepsilon_{33}^{th}(x, y, z) dz + \gamma_3^{i,i+1}(x, y) \quad (8.11)$$

Avec $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$

L'introduction de ces termes dans le modèle simplifié n'a donc comme conséquence que de modifier le second membre du système linéaire à résoudre.

8.2 Validation du modèle sous chargement de retrait thermique

Nous présentons ci-dessous deux applications pour les calculs de retrait thermique : le retrait thermique dans un monocouche de chaussée fissurée et dans un bicouche de chaussée fissurée inférieurement.

8.2.1 Cas d'une couche tridimensionnelle de chaussée fissurée reposant sur un massif de sol semi infini sous retrait thermique

Nous examinons ici une couche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. La fissure est supposée exister transversalement dans toute l'épaisseur de la couche de chaussée, avec une ouverture de 5mm sous chargement du retrait thermique (cf. figure 8.1). Les paramètres du problème sont :

La chaussée a un module d'Young $E_1 = 5400MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, une épaisseur de 0.08m.

Le sol a un module d'Young $E_s = 50MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

Le retrait thermique est appliqué sur toute la couche de chaussée pour $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$, $\delta T = 10^\circ C$.

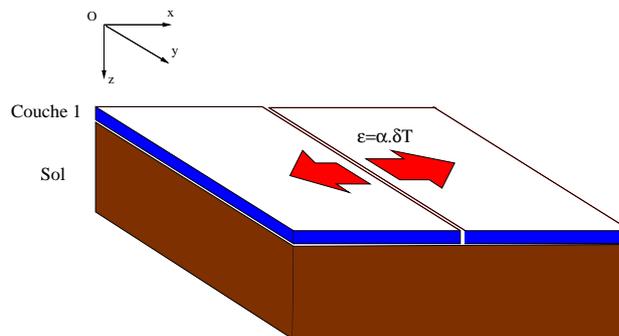


FIGURE 8.1. Schéma de calcul du monocouche tridimensionnel fissurée

Détermination du champ de déformation thermique généralisé

Dans le cas d'une couche de chaussée, nous utilisons les trois équations 8.7 à 8.9 pour calculer les déformations thermiques généralisées. Les équations 8.10 à 8.11 sont utilisées dans les cas multicouche.

Nous supposons la température uniforme sur l'épaisseur de la couche de chaussée. Nous n'avons donc que les déformations thermiques membranaires ci-dessous :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{1th}(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \frac{1}{e_1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (8.12)$$

Nous en tirons :

$$\varepsilon_{11}^{1th} = \varepsilon_{22}^{1th} = \alpha \delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^\circ = 12 \cdot 10^{-5},$$

Tous les autres termes des équations 8.7 à 8.9 sont nuls :

$$\varepsilon_{12}^{1th} = \varepsilon_{21}^{1th} = 0$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{1th}(x, y) = 0 \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}$$

$$d_{\Phi\alpha}^{1th}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

Modélisation par éléments finis

La structure de chaussée est étudiée sur un parallélépipède-rectangle, qui se compose d'une couche de chaussée et du massif de sol (cf.figure 8.2). Nous utilisons des conditions aux limites telles que : les déplacements transversaux sont nuls aux limites transversales et le déplacement vertical est nul en bas du massif de sol. Grâce à la symétrie, nous n'effectuons le calcul que pour un quart de la structure.

Comme pour les calculs précédents nous prenons une dimension transversale de $3m$ et une profondeur de $8m$. Le maillage d'un quart du massif est fait avec 5296 éléments cubiques à 20 noeuds. Le nombre total de noeuds est de 24060. Le temps de calcul sur un P4-1.7Ghz est de 1h30' temps CPU.

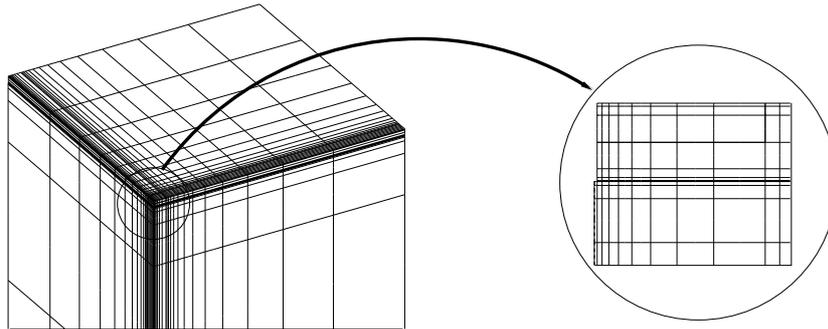


FIGURE 8.2. Maillage de calcul par EF du monocouche tridimensionnel fissurée

Modélisation par le modèle M4-Boussinesq

Comme dans les calculs précédents, la modélisation du modèle M4-Boussinesq est effectuée pour toute la structure sans utiliser la symétrie. Nous maillons donc un plan rectangulaire de dimension $6m \times 6m$.

Les conditions aux limites au bord sont choisies de telle manière que les déplacements longitudinaux au bord soient nuls et qu'il n'y ait pas d'efforts de cisaillements transversaux (voir chapitre 3). Nous utilisons les conditions aux limites du bord bloqué, c'est-à-dire les conditions 3.80 à 3.84

pour le bord de x et les conditions 3.85 à 3.89 pour le bord de y . Nous obtenons les mêmes équations que dans le cas monocouche de chaussée sans fissure (voir chapitre 6).

Les conditions aux limites de bord libre sur les lèvres de la fissure s'écrivent :

$$-\bar{N}_{11}(k, l) = 0 \Rightarrow \bar{U}_{1'1}(k, l) + v^1 \bar{U}_{2'2}(k, l) = \bar{\varepsilon}_{11}^{th}(k, l) + v^1 \bar{\varepsilon}_{22}^{th}(k, l) = \frac{E_s}{q} (\bar{\varepsilon}_{11}^{th}(k, l) + v^1 \bar{\varepsilon}_{22}^{th}(k, l))$$

$$-\bar{M}_{11}(k, l) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_{x'x}(k, l) + v^1 \bar{\Phi}_{2'2}(k, l) = 0$$

$$-\bar{Q}_1(k, l) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1+v_1} (\bar{\Phi}_1(k, l) + \bar{U}_{3'1}(k, l)) + \bar{\tau}_x^{1,2}(k, l) = 0$$

$$-\bar{N}_{12}(k, l) = 0 \rightarrow \bar{U}_{1'2}(k, l) + \bar{U}_{2'1}(k, l) = 0$$

$$-\bar{M}_{12}(k, l) = 0 \rightarrow \bar{\Phi}_{1'2}(k, l) + \bar{\Phi}_{2'1}(k, l) = 0$$

Où les points (k, l) $k = [c, c + 1]$, $\forall l \in [1, N + 1]$ sont les indices des points sur les lèvres de la fissure.

Comme dans les calculs précédents, nous utilisons un maillage de 24x18 mailles sur la surface. Le temps d'un tel calcul est de 0,5mn sur un P4-1.7Ghz. Les éléments ont cinq degrés de liberté.

Comparaison des résultats des éléments finis et du modèle M4-Boussinesq

Ci-dessous nous présentons les comparaisons des contraintes et des déplacements d'interface avec les éléments finis (cf. figures 8.3 et 8.6).

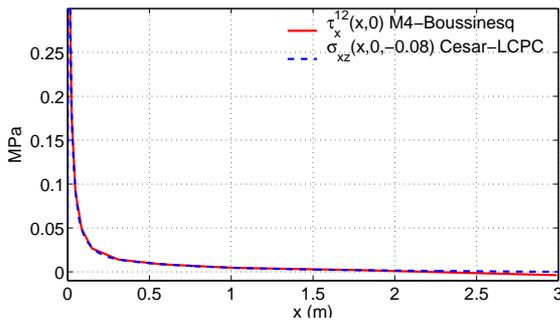


FIGURE 8.3. Contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissurée

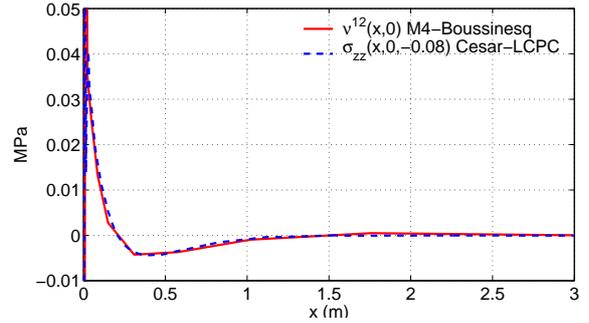


FIGURE 8.4. Contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissurée

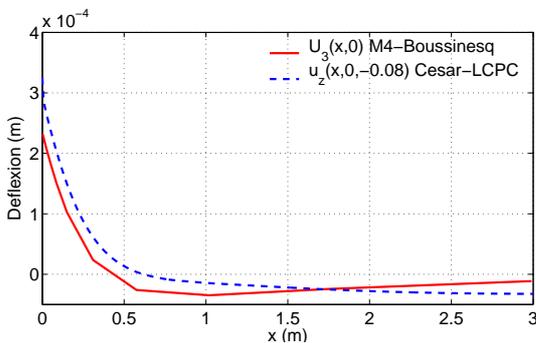


FIGURE 8.5. Déplacements verticaux d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissurée

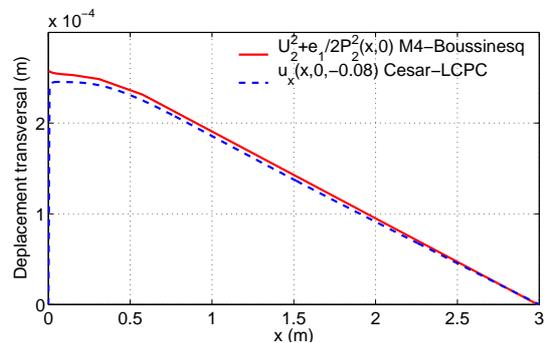


FIGURE 8.6. Déplacements transversaux d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissurée

Nous constatons une très bonne cohérence des contraintes d'interface calculées à l'aide du modèle simplifié et calculées par éléments finis. Le déplacement vertical calculé par le modèle simplifié est un peu décalé par rapport à celui calculé par éléments finis. Ce point peut encore être

expliqué par le fait que le modèle simplifié modélise un massif vraiment infini selon la profondeur, tandis que le calcul par éléments finis modélise un massif de $8m$ de profondeur.

8.2.2 Cas du bicouche tridimensionnel de chaussée fissurée inférieurement

Nous examinons maintenant deux couches de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. La fissure est supposée déjà exister dans la couche de chaussée inférieure, avec une ouverture de $5mm$ sous chargement du retrait thermique (cf. figure 8.7). La chaussée est supposée infinie dans le plan. Le problème dans ce cas devient un calcul 2D déformation plane. Pourtant, nous allons résoudre ce problème à l'aide d'un calcul 3D, pour qu'il soit facile d'ajouter les autres chargement asymétrique (charge due à la roue d'un camion décentrée, ..). Les paramètres du problème sont :

La couche de chaussée supérieure : module d'Young $E_1 = 9300MPa$, coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, épaisseur $e_1 = 0.1m$.

La couche de chaussée inférieure : module d'Young $E_2 = 23000MPa$, coefficient de Poisson $\nu_2 = 0.35$, épaisseur $e_2 = 0.3m$.

Le sol : module d'Young $E_s = 50MPa$, coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

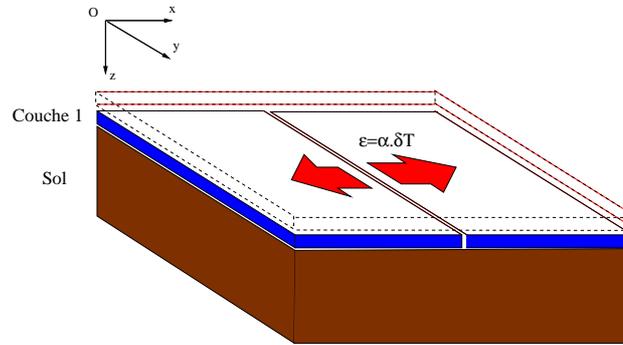


FIGURE 8.7. Schéma de calcul du bicouche tridimensionnel fissurée

Détermination du champ de déformation thermique généralisé

La charge due au retrait thermique est supposée provoquée par un changement de température uniforme dans toute la couche inférieure (couche 2) $\delta T = 10^\circ C$, avec un coefficient de dilatation $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-6} C^{-1}$.

La température étant uniforme dans la couche de chaussée, nous n'avons donc que les déformations thermiques membranaires et verticales suivantes :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{2th}(x, y) = \int_{h_2^-}^{h_2^+} \frac{1}{e_2} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (8.13)$$

$$D_3^{1,2th}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{h_1^-}^{h_1^+} \varepsilon_{33}^{th}(x, y, z) dz + \frac{1}{2} \int_{h_2^-}^{h_2^+} \varepsilon_{33}^{th}(x, y, z) dz + \gamma_3^{1,2}(x, y) \quad (8.14)$$

Nous en tirons :

$$\varepsilon_{11}^{2th} = \varepsilon_{22}^{2th} = \alpha \delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^\circ = 12 \cdot 10^{-5},$$

$$D_3^{1,2th} = e_2 \alpha \delta T = 0,3 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^\circ = 3,6 \cdot 10^{-5}$$

Tous les autres termes des équations 8.7 à 8.11 sont nuls :

$$\varepsilon_{12}^{2th} = \varepsilon_{21}^{2th} = 0$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{2th}(x, y) = 0 \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}$$

$$d_{\Phi_\alpha}^{2th}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

$$D_\alpha^{1,2th}(x, y) = 0$$

Modélisation par éléments finis

Différents calculs ont montré qu'il était possible d'étudier un quart de la structure en maillant un bloc de 5m de dimension transversale et 10m de profondeur (cf. 8.8).

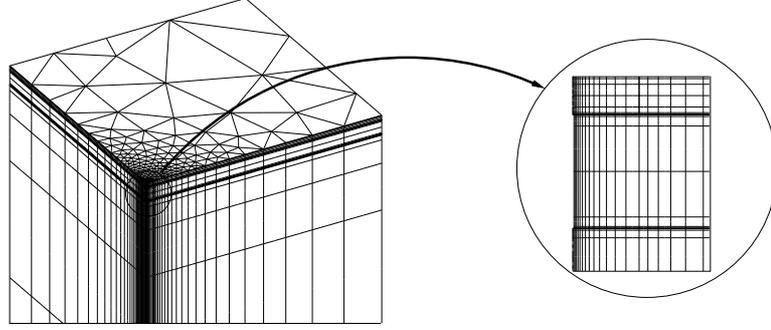


FIGURE 8.8. Maillage de calcul EF du bicouche tridimensionnel fissuré

Le maillage est réalisé avec 1965 éléments cubiques à 20 noeuds et 7080 éléments trapézoïdaux à 15 noeuds. Le nombre total de noeuds est de 29561. Le calcul prend 2h temps de calcul de CPU sur un P4-1.7Ghz.

Modélisation par le modèle M4-Boussinesq

La modélisation du modèle M4-Boussinesq est effectuée pour toute la structure sans utiliser la symétrie, donc sur un plan rectangulaire de dimension 10mx10m.

Les conditions limites au bord sont choisies de telle manière que les déplacements longitudinaux au bord soient nuls et qu'il n'y ait pas d'efforts de cisaillement transversaux (voir chapitre 3). Nous utilisons dans ce cas les conditions aux limites du bord bloqué, c'est-à-dire les conditions 3.80 à 3.84 pour le bord de x et les conditions 3.85 à 3.89 pour le bord de y , pour tous les deux couches. Nous obtenons les mêmes équations que dans le cas bicouche de chaussée sans fissure (voir chapitre 6).

Les conditions aux limites de bord libre sur les lèvres de la fissure dans la première couche imposent les équations suivantes :

$$-\bar{N}_{11}^2(k, l) = 0 \Rightarrow \bar{U}_{1'1}^2(k, l) + v^1 \bar{U}_{2'2}^2(k, l) = \bar{\varepsilon}_{11}^{2th}(k, l) + v^1 \bar{\varepsilon}_{22}^{2th}(k, l) = \frac{E_s}{q} (\varepsilon_{11}^{2th}(k, l) + v^1 \varepsilon_{22}^{2th}(k, l))$$

$$-\bar{M}_{11}^2(k, l) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}_{x'x}^2(k, l) + v^1 \bar{\Phi}_{2'2}^2(k, l) = 0$$

$$-\bar{Q}_1^2(k, l) = 0 \Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_2}{1+v_2} (\bar{\Phi}_1^2(k, l) + \bar{U}_{3'1}^2(k, l)) + \bar{\tau}_x^{1,2}(k, l) + \bar{\tau}_x^{2,3}(k, l) = 0$$

$$-\bar{N}_{12}^2(k, l) = 0 \rightarrow \bar{U}_{1'2}^2(k, l) + \bar{U}_{2'1}^2(k, l) = 0$$

$$-\bar{M}_{12}^2(k, l) = 0 \rightarrow \bar{\Phi}_{1'2}^2(k, l) + \bar{\Phi}_{2'1}^2(k, l) = 0$$

Où les points (k, l) $k = [c, c + 1]$, $\forall l \in [1, N + 1]$ sont les indices des points sur les lèvres de la fissure.

Le maillage du calcul du M4-Boussinesq comprend 24x18 mailles sur la surface. Le temps d'un tel calcul est de 15mn sur un P4-1.7Ghz. Dans ce calcul, les noeuds ont dix degrés de liberté.

Comparaison des résultats des éléments finis et du modèle M4-Boussinesq

Ci-dessous nous faisons les comparaisons des contraintes et des déplacements aux interfaces.

La cohérence entre les résultats en contrainte des deux modèles est très bonne. Pour ce qui concerne les déplacements verticaux, la modélisation par EF souffre toujours du fait que seulement une profondeur finie peut être modélisée.

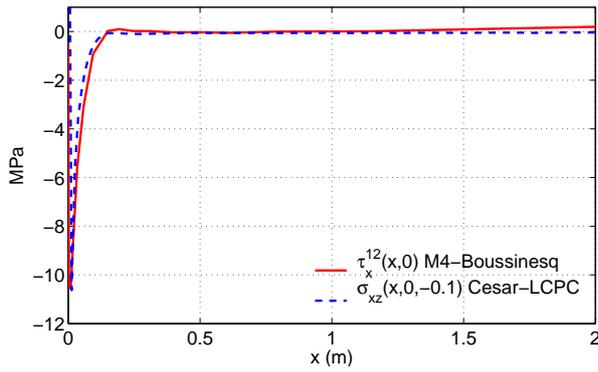


FIGURE 8.9. Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface chaussée-chaussée

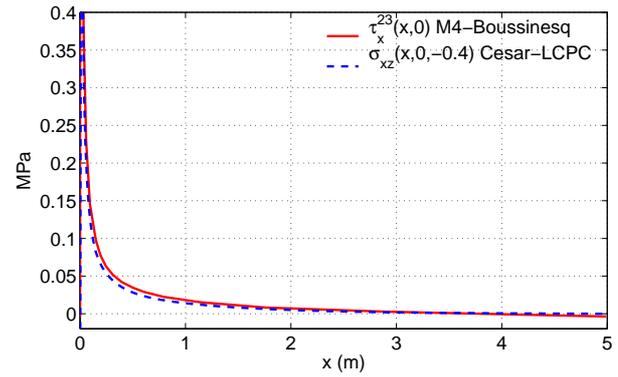


FIGURE 8.10. Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol

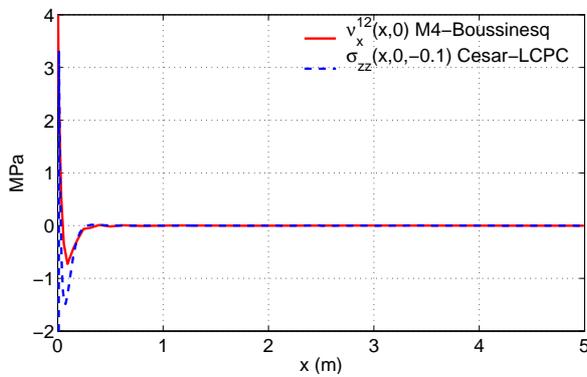


FIGURE 8.11. Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface chaussée-chaussée

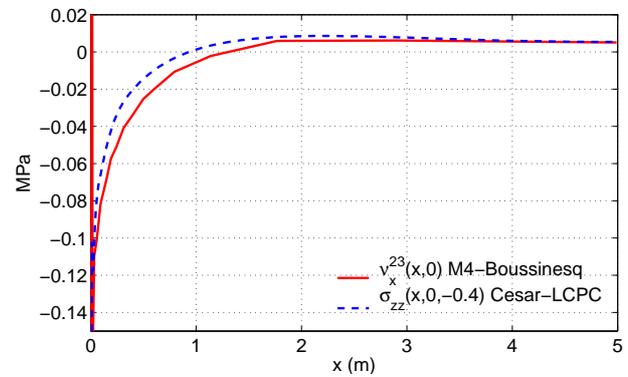


FIGURE 8.12. Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol

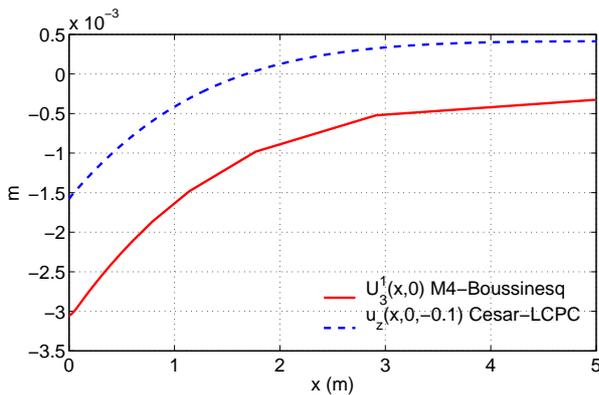


FIGURE 8.13. Comparaison du déplacement vertical d'interface chaussée-chaussée

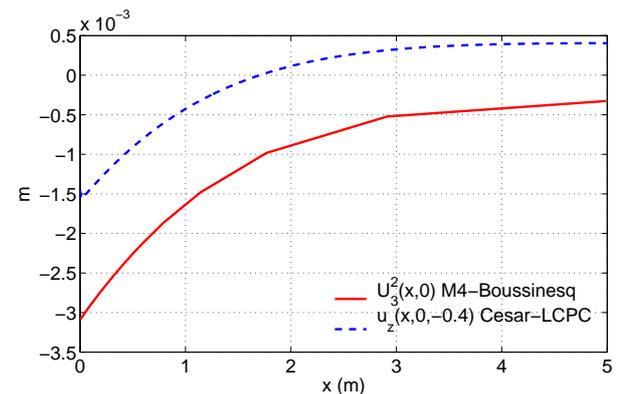


FIGURE 8.14. Comparaison du déplacement vertical d'interface chaussée-sol

Conclusions

Comme nous l'avons constaté dans les chapitres précédents, le modèle simplifié a été validé pour les structures de chaussée sous chargement de type poids lourds. Dans ce chapitre, nous avons montré que les résultats du modèle sont bien cohérents avec ceux des éléments finis, et nous

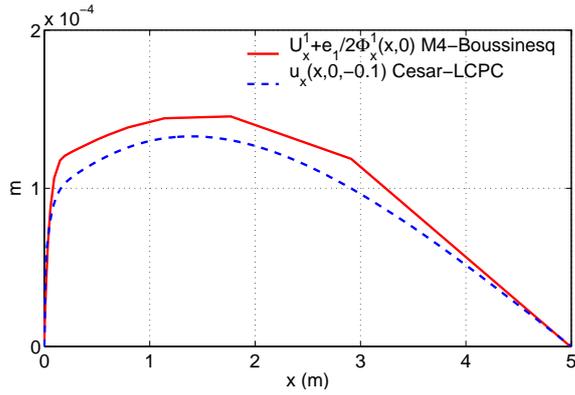


FIGURE 8.15. *Comparaison du déplacement transversal d'interface chaussée-chaussée*

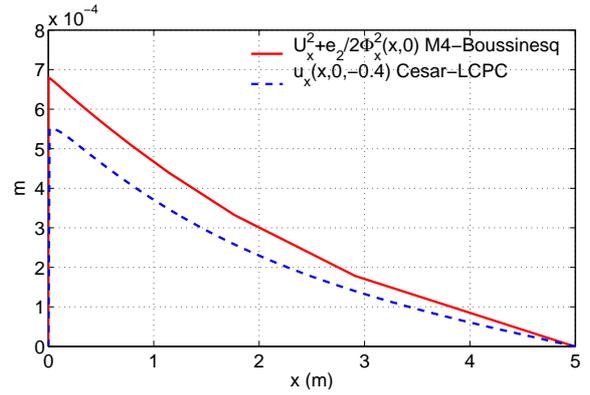


FIGURE 8.16. *Comparaison du déplacement transversal d'interface chaussée-sol*

pouvons conclure que le modèle est aussi utilisable sous chargement de retrait thermique.

Les cas de fissuration longitudinale ne sont pas encore étudiés, mais on peut penser que le modèle M4-Boussinesq donnera, là encore, de bons résultats.

Chapitre 9

Validation du cas fissuré sous chargement dû à gradient thermique

Nous avons constaté, dans les chapitres précédents, que le modèle M4-Boussinesq est efficace pour l'étude des structures de chaussée sous les chargements de type poids lourds et de retrait thermique. Nous allons examiner maintenant un troisième type de chargement, le gradient thermique.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un exemple simple de calcul de chaussée fissurée tridimensionnelle, pour un monocouche et un bicouche de chaussée sous chargement dû à un gradient thermique. Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux obtenus à l'aide d'un calcul avec Cesar-LCPC.

9.1 Cas d'une couche tridimensionnelle de chaussée fissurée reposant sur un massif de sol semi infini sous gradient thermique

Nous étudions ici une couche de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. La fissure est supposée exister, avec une ouverture de 5mm. Le chargement est dû à un gradient thermique dans l'épaisseur (cf. figure 9.1). Les paramètres du problème sont :

La chaussée a un module d'Young $E_1 = 5400MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, une épaisseur $e_1 = 0.08m$.

Le sol a un module d'Young $E_s = 50MPa$, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

Le chargement thermique correspond à une différence de température entre le haut et le bas de la couche de chaussée : $T_h = 5^\circ C$, $T_b = 0^\circ C$. La température initiale est prise à $T_0 = 0^\circ C$. Le coefficient de dilatation thermique est $\alpha = 12.10^{-6}C^{-1}$.

Détermination du champ de température

La température est affine sur l'épaisseur de la couche donc le gradient thermique est de $0.61^\circ/cm$.

Détermination du champ de déformation thermique généralisée

Nous considérons le problème comme un problème de retrait dans le plan, car le retrait selon le sens vertical ne cause aucune contrainte et déformation.

La température admet une distribution linéaire dans la couche de chaussée, nous n'avons que

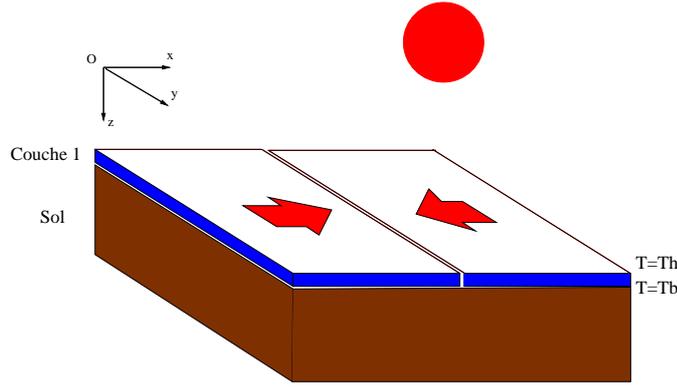


FIGURE 9.1. Schéma de calcul du monocouche tridimensionnel fissurée

les déformations thermiques généralisées suivantes :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{1th}(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \frac{1}{e_1} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (9.1)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{1th}(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \frac{12(z - \bar{h}_1)}{e_1^3} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (9.2)$$

Nous en tirons :

$$\varepsilon_{11}^{1th} = \varepsilon_{22}^{1th} = \alpha(T_h + T_b)/2 = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5^\circ = 30 \cdot 10^{-6},$$

$$\chi_{11}^{1th} = \chi_{22}^{1th} = -\alpha(T_h - T_b)/e_1 = -75 \cdot 10^{-5},$$

Et tous les autres termes des équations 8.7 à 8.9 sont nuls :

$$\varepsilon_{12}^{1th} = \varepsilon_{21}^{1th} = 0$$

$$\chi_{12}^{1th} = \chi_{21}^{1th} = 0$$

$$d_{\Phi\alpha}^{1th}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

Modélisation par éléments finis

Nous reprenons la même géométrie et le même maillage que les études précédentes sur le monocouche.

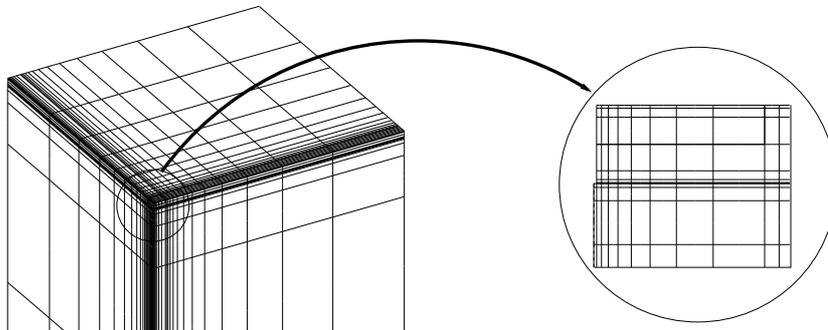


FIGURE 9.2. Maillage de calcul EF du monocouche tridimensionnel fissuré

Les champs de température sont entrés dans le calcul du problème mécanique de la chaussée fissurée. Le temps de calcul sur un P4-1.7Ghz est de 1h30' temps CPU. Ci-dessous nous présentons la déformation du maillage du calcul réalisé avec César-LCPC (cf. figure 9.3).

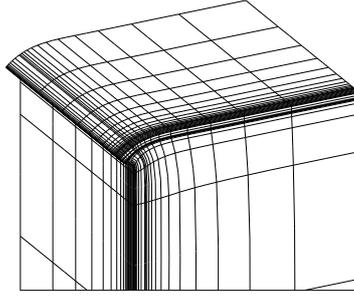


FIGURE 9.3. Déformation de la chaussée fissurée sous l'effet du gradient thermique

Modélisation par le modèle M4-Boussinesq

Comme habituellement pour les structures monocouche, la modélisation du modèle M4-Boussinesq est effectué pour toute la structure sans utiliser la symétrie, donc sur un plan rectangulaire de dimension $6m \times 6m$.

Les conditions limites au bord sont choisies de même manière que précédemment. Les conditions aux limites de bord libre sur les lèvres de la fissure s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\bar{N}_{11}(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{U}_{1'1}(k, l) + v^1 \bar{U}_{2'2}(k, l) = \bar{\varepsilon}_{11}^{th}(k, l) + v^1 \bar{\varepsilon}_{22}^{th}(k, l) = \frac{E_s}{q} (\varepsilon_{11}^{th}(k, l) + v^1 \varepsilon_{22}^{th}(k, l)) \\ -\bar{M}_{11}(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{\Phi}_{x'x}(k, l) + v^1 \bar{\Phi}_{2'2}(k, l) = \bar{\chi}_{11}^{th}(k, l) + v^1 \bar{\chi}_{22}^{th}(k, l) = \frac{aE_s}{q} (\chi_{11}^{th}(k, l) + v^1 \chi_{22}^{th}(k, l)) \\ -\bar{Q}_1(k, l) = 0 &\Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_1}{1+v^1} (\bar{\Phi}_1(k, l) + \bar{U}_{3'1}(k, l)) + \bar{\tau}_x^{1,2}(k, l) = 0 \\ -\bar{N}_{12}(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{U}_{1'2}(k, l) + \bar{U}_{2'1}(k, l) = 0 \\ -\bar{M}_{12}(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{\Phi}_{1'2}(k, l) + \bar{\Phi}_{2'1}(k, l) = 0 \end{aligned}$$

Où les points (k, l) $k = [c, c + 1]$, $\forall l \in [1, N + 1]$ sont les indices des points sur les lèvres de la fissure.

Le maillage comprend 24×18 mailles sur la surface. Le temps d'un tel calcul est de $0,5mn$ sur un P4-1.7Ghz.

Comparaison des résultats des éléments finis et M4-Boussinesq

Nous présentons ci-dessous les comparaisons des contraintes et des déplacements d'interface chaussée-sol obtenues à l'aide des deux modélisations (cf. figures 9.4 et 9.5).

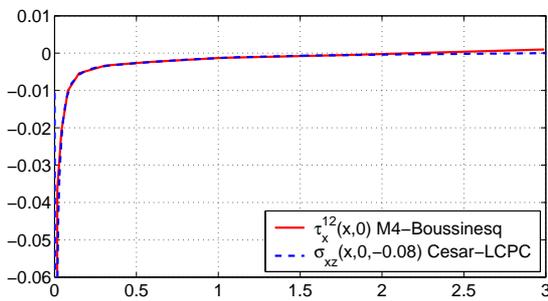


FIGURE 9.4. Contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol du mono-couche tridimensionnel fissurée

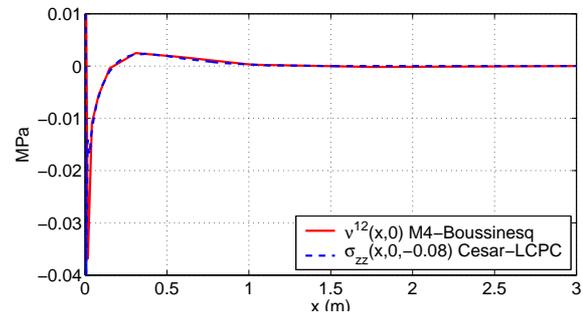


FIGURE 9.5. Contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol du mono-couche tridimensionnel fissurée

Nous constatons une très bonne cohérence de contrainte d'interface obtenues par le modèle simplifié et par éléments finis. En ce qui concerne les déplacements verticaux les commentaires faits dans les cas précédents s'appliquent bien sûr ici à nouveau.

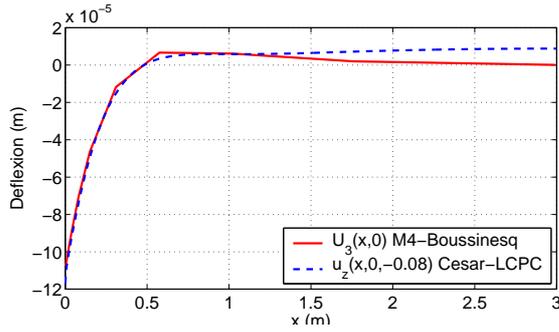


FIGURE 9.6. Déplacement vertical d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissurée

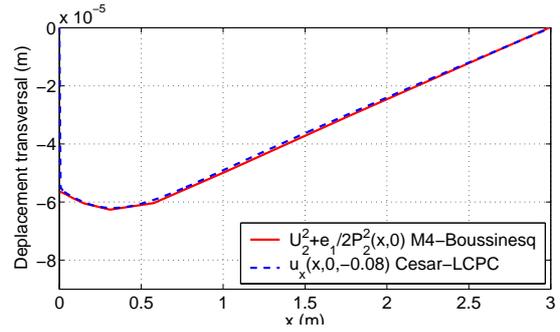


FIGURE 9.7. Déplacement transversal d'interface chaussée-sol du monocouche tridimensionnel fissurée

9.2 Cas du bicouche tridimensionnel de chaussée fissurée inférieurement reposant sur un massif de sol semi-infini

Nous examinons maintenant deux couches de chaussée reposant sur un massif de sol semi-infini. La fissure est supposée déjà exister dans la couche de chaussée inférieure, avec une ouverture de 5mm sous chargement du retrait thermique (cf. figure 9.8). La chaussée est supposée infinie dans le plan. Le problème pourrait être traité en déformation plane. Pourtant, nous allons résoudre ce problème à l'aide d'un calcul 3D, pour qu'il soit facile d'ajouter les autres influences non symétriques (charge correspondant à une roue de camion décentrée, ..)

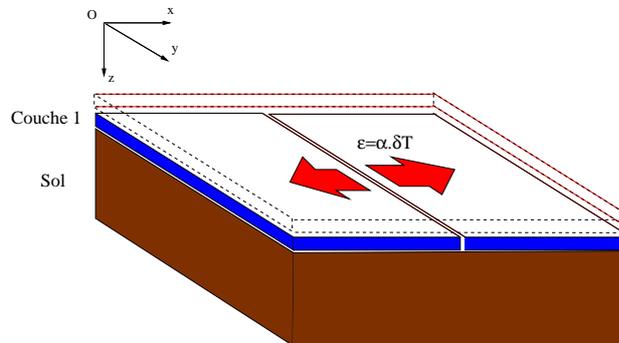


FIGURE 9.8. Schéma de calcul du bicouche tridimensionnel fissuré

Les paramètres du calcul sont :

La couche de chaussée en haut : module d'Young $E_1 = 9300\text{Mpa}$, coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.35$, épaisseur $e_1 = 0.1\text{m}$.

La couche de chaussée en bas : module d'Young $E_2 = 23000\text{Mpa}$, coefficient de Poisson $\nu_2 = 0.25$, épaisseur $e_2 = 0.3\text{m}$.

Le sol : module d'Young $E_s = 50\text{Mpa}$, coefficient de Poisson $\nu_s = 0.35$.

Le chargement thermique appliqué correspond à une différence de température entre le haut de la couche supérieure de chaussée : $T_h^1 = 20^\circ\text{C}$ et le bas de la couche inférieure de chaussée $T_b^2 = 0^\circ\text{C}$. La température initiale est prise à $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Le coefficient de dilatation thermique est $\alpha = 12.10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$ pour les deux couches de chaussée.

Détermination du champ de température

Les coefficients de conductivité des première et deuxième couche de chaussée sont respectivement $k_1 = 0.8(W.m^{-1}.K^{-1})$, $k_2 = 2(W.m^{-1}.K^{-1})$

Pour déterminer le champ de température, nous utilisons l'équation de la chaleur 8.5, en considérant le problème indépendant du temps (régime stationnaire), nous obtenons :

$$k\Delta T = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (9.3)$$

La température est supposée uniforme dans les sens transversaux, donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, nous en tirons :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (9.4)$$

Donc

$$\frac{\partial T}{\partial z} = Cte = \begin{cases} \frac{q}{k_1} & (z \in [0 - 0.1]) \\ \frac{q}{k_2} & (z \in [0.1 - 0.4]) \end{cases} \quad (9.5)$$

Avec les conditions limites $T_h^1 = 20^\circ C$, $T_b^2 = 0^\circ C$, nous obtenons la distribution de la température dans les couches de chaussée :

$$T = \begin{cases} -90.9z + 20 & (z \in [0 - 0.1]) \\ -36.37z + 14.55 & (z \in [0.1 - 0.4]) \end{cases} \quad (9.6)$$

La température à l'interface des deux couches de chaussée est alors $T_h^1 = T_h^2 = 10.91^\circ C$.

Détermination des champs de déformation thermique généralisés

Les seules déformations thermiques généralisées non nulles sont :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{1th}(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \frac{1}{e_1} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (9.7)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{12th}(x, y) = \int_{h_2^-}^{h_2^+} \frac{1}{e_2} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (9.8)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{1th}(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \frac{12(z - \bar{h}_1)}{e_1^3} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (9.9)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{2th}(x, y) = \int_{h_2^-}^{h_2^+} \frac{12(z - \bar{h}_2)}{e_2^3} \varepsilon_{\alpha\beta}^{th}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (9.10)$$

$$D_3^{1,2th}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{h_1^-}^{h_1^+} \varepsilon_{33}^{th}(x, y, z) dz + \frac{1}{2} \int_{h_2^-}^{h_2^+} \varepsilon_{33}^{th}(x, y, z) dz + \gamma_3^{1,2}(x, y) \quad (9.11)$$

Nous en tirons :

$$\varepsilon_{11}^{1th} = \varepsilon_{22}^{1th} = \alpha(T_h^1 + T_b^1)/2 = 12.10^{-6}.15, 45^\circ = 1,855.10^{-4},$$

$$\chi_{11}^{1th} = \chi_{22}^{1th} = -\alpha(T_h^1 - T_b^1)/e_1 = -1, 1.10^{-3},$$

$$\varepsilon_{11}^{2th} = \varepsilon_{22}^{2th} = \alpha(T_h^2 + T_b^2)/2 = 12.10^{-6}.5, 45^\circ = 6,55.10^{-5},$$

$$\chi_{11}^{2th} = \chi_{22}^{2th} = -\alpha(T_h^2 - T_b^2)/e_2 = -4, 37.10^{-4},$$

$$D_3^{1,2th} = e_1\alpha(T_h^1 - T_b^1) + e_2\alpha(T_h^2 - T_b^2) = 5.10^{-5}$$

Tous les autres termes des équations 8.7 à 8.11 sont nuls :

$$\varepsilon_{12}^{1th} = \varepsilon_{21}^{1th} = 0$$

$$\varepsilon_{12}^{2th} = \varepsilon_{21}^{2th} = 0$$

$$\chi_{12}^{1th} = \chi_{21}^{1th} = 0$$

$$\chi_{12}^{2th} = \chi_{21}^{2th} = 0$$

$$d_{\Phi_\alpha}^{1th}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

$$d_{\Phi_\alpha}^{2th}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

$$D_\alpha^{1,2th}(x, y) = 0$$

Modélisation par éléments finis

Nous utilisons la même géométrie et le même maillage que dans les autres cas étudiés de chaussées bicouche. Le maillage est fait avec 1965 éléments cubiques à 20 noeuds et 7080 éléments prismatiques à 15 noeuds. Le nombre total des noeuds est de 29561. Le calcul prend 2h temps de calcul de CPU sur un P4-1.7Ghz.

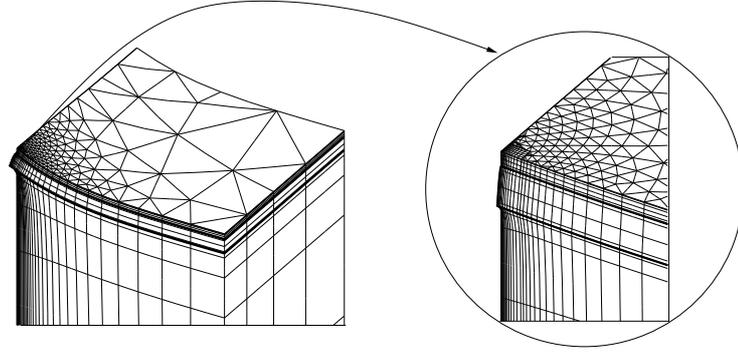


FIGURE 9.9. Maillage de calcul EF du bicouche tridimensionnel fissuré

Modélisation par le modèle M_4 -Boussinesq

Nous utilisons le même maillage que dans les autres cas étudiés de chaussées bicouche. Dans le cas où la fissure se trouve dans la première couche de chaussée, nous avons les conditions limites sur les lèvres de la fissure :

$$\begin{aligned} -\bar{N}_{11}^2(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{U}_{1'1}^2(k, l) + v^1 \bar{U}_{2'2}^2(k, l) = \bar{\varepsilon}_{11}^{2th}(k, l) + v^1 \bar{\varepsilon}_{22}^{2th}(k, l) = \frac{E_s}{q} (\varepsilon_{11}^{2th}(k, l) + v^1 \varepsilon_{22}^{2th}(k, l)) \\ -\bar{M}_{11}^2(k, l) = 0 &\Rightarrow \bar{\Phi}_{x'x}^2(k, l) + v^1 \bar{\Phi}_{2'2}^2(k, l) = \bar{\chi}_{11}^{2th}(k, l) + v^1 \bar{\chi}_{22}^{2th}(k, l) = \frac{aE_s}{q} (\chi_{11}^{2th}(k, l) + v^1 \chi_{22}^{2th}(k, l)) \\ -\bar{Q}_1^2(k, l) = 0 &\Rightarrow 20 \frac{\bar{E}_2}{1+v_2} (\bar{\Phi}_1^2(k, l) + \bar{U}_{3'1}^2(k, l)) + \bar{\tau}_x^{1,2}(k, l) + \bar{\tau}_x^{2,3}(k, l) = 0 \\ -\bar{N}_{12}^2(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{U}_{1'2}^2(k, l) + \bar{U}_{2'1}^2(k, l) = 0 \\ -\bar{M}_{12}^2(k, l) = 0 &\rightarrow \bar{\Phi}_{1'2}^2(k, l) + \bar{\Phi}_{2'1}^2(k, l) = 0 \end{aligned}$$

Où les points (k, l) $k = [c, c + 1], \forall l \in [1, N + 1]$ sont les indices des points sur les lèvres de la fissure.

Un tel calcul est effectué en 15min sur un P4-1.7Ghz.

Comparaison des résultats des calculs par éléments finis et par M_4 -Boussinesq

Ci-dessous nous avons les comparaisons des contraintes et des déplacements aux interfaces.

Les résultats du modèle simplifié sont bien cohérents avec ceux des éléments finis. Avec les mêmes commentaires que dans les parties précédentes sur les déplacements verticaux, nous pouvons

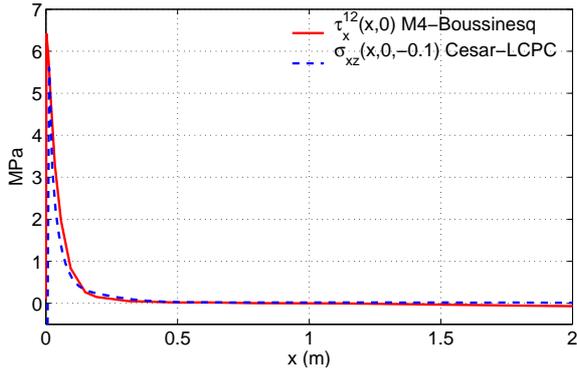


FIGURE 9.10. Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface chaussée-chaussée

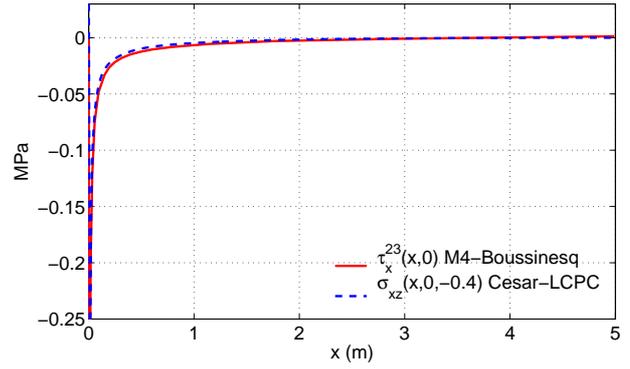


FIGURE 9.11. Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface chaussée-sol

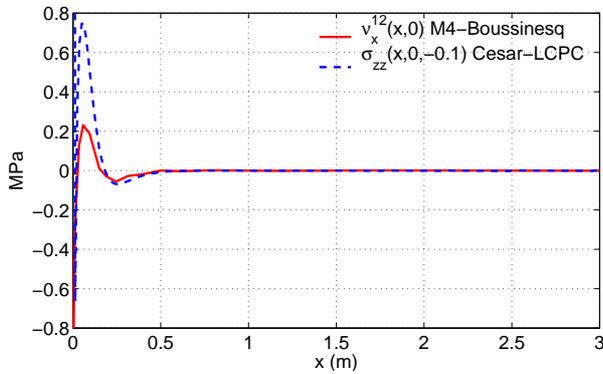


FIGURE 9.12. Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface chaussée-chaussée

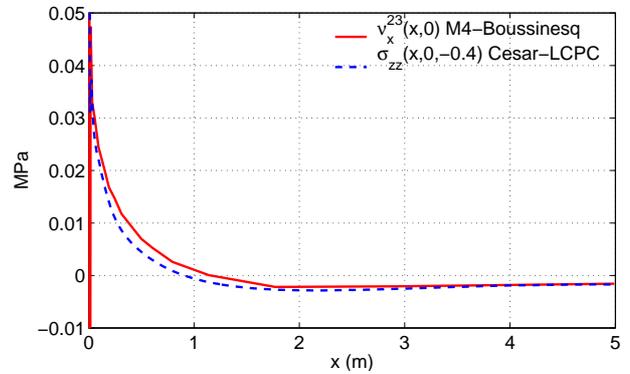


FIGURE 9.13. Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface chaussée-sol

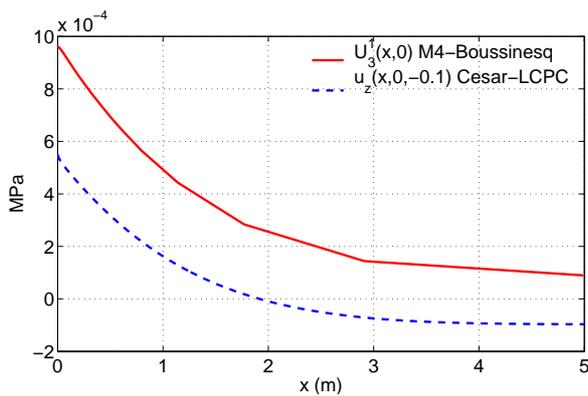


FIGURE 9.14. Comparaison du déplacement vertical d'interface chaussée-chaussée

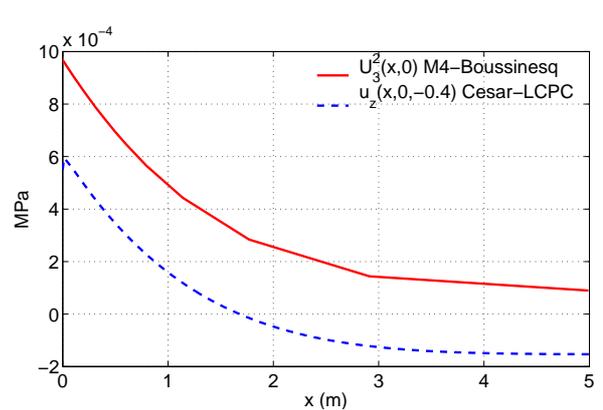


FIGURE 9.15. Comparaison du déplacement vertical d'interface chaussée-sol

conclure que le modèle simplifié est pertinent pour l'étude des multicouches de chaussée 3D fissurée sous chargement du gradient thermique.

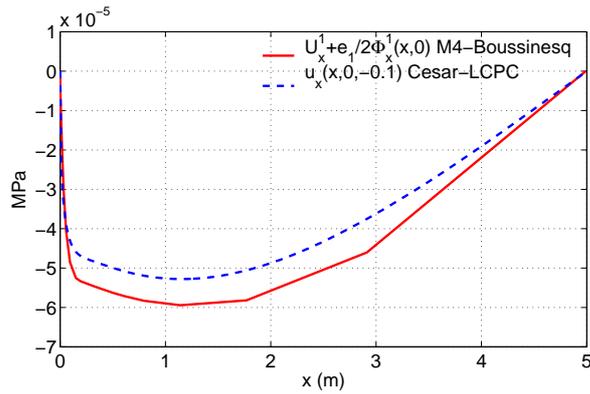


FIGURE 9.16. *Comparaison du déplacement transversal d'interface chaussée-chaussée*

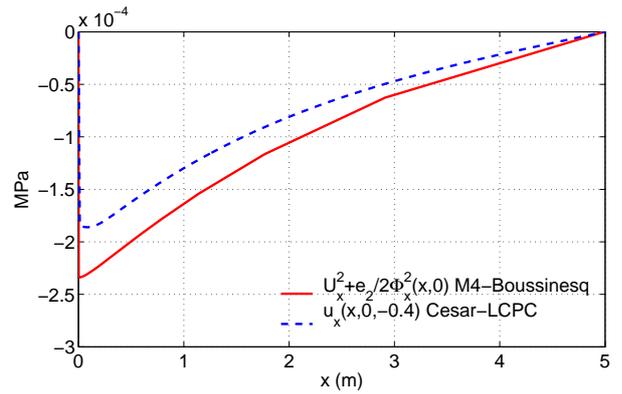


FIGURE 9.17. *Comparaison du déplacement transversal d'interface chaussée-sol*

Conclusions

Comme nous l'avons constaté dans les chapitres précédents, le modèle simplifié a été validé pour l'étude des structures de chaussée sous chargement de type poids lourds et de retrait thermique. Dans ce chapitre, les résultats du modèle sont bien cohérents avec ceux des éléments finis, et nous pouvons en conclure que le modèle est aussi validé pour un chargement de type gradient thermique.

Les cas de fissuration longitudinale ne sont pas encore étudiés, mais nous pensons que le modèle M4-Boussinesq sera pertinent aussi dans ces cas.

Conclusions de la troisième partie

Dans cette partie, nous avons présenté l'introduction de la fissure dans le modèle simplifié puis effectué des applications pour les structures fissurées de chaussée. Ces applications ont été réalisées pour trois types différents de chargement.

L'introduction d'une fissure dans le modèle M4-Boussinesq consiste à éliminer les équations de rigidité sur les lèvres de la fissure, puis à introduire les conditions aux limites sur la fissure. Ces conditions aux limites sont ainsi prises comme des conditions de bords libres.

La première application est faite pour la structure de chaussée fissurée soumise au chargement de type roue de camion. Ces calculs ont été faits pour les structures d'un monocouche et d'un bicouche de chaussée en 3D et en déformation plane. Dans les applications en 3D, nous constaté une très bonne cohérence entre les champs de contraintes donnés par le modèle M4-Boussinesq et ceux effectués par éléments finis. Les déplacements verticaux, de leur côté, présentent un décalage entre eux car les calculs par éléments finis sont effectués pour un massif de profondeur finie, tandis que le M4-Boussinesq modélise un massif de sol vraiment infini. Les calculs en déformation plane du M4-Boussinesq ont donné également de très bons résultats par rapport à ceux de la méthode des éléments finis.

La deuxième application est examinée pour la structure de chaussée fissurée soumise au chargement de retrait thermique. Nous avons présenté la méthode d'introduction du chargement thermique dans le modèle simplifié en le transformant en déformations thermiques généralisées. Les calculs effectués pour un monocouche et un bicouche de chaussée 3D sont faits et validés avec succès en comparant les champs donnés par le modèle M4-Boussinesq et ceux effectués par éléments finis.

La dernière application considère une structure de chaussée fissurée soumise au chargement du gradient thermique. Les structures monocouche et bicouche de chaussée en 3D fissurées verticalement sont examinées. Comme précédemment, nous avons remarqué une très bonne cohérence entre les champs calculés par M4-Boussinesq et ceux donnés par éléments finis.

Conclusion générale et Perspectives

Au terme de cette thèse, nous allons dresser le bilan général des travaux présentés dans ce mémoire, et nous efforcer de dégager des réflexions utiles aux orientations futures.

Du côté des travaux réalisés, nous avons construit le modèle simplifié élastique M4-Boussinesq, approché numériquement le système d'équations du modèle, puis validé le modèle simplifié élastique pour la structure de chaussée sous chargement de poids lourd et chargements thermiques.

Le modèle simplifié, ou M4-Boussinesq, peut être comparé à un système de n plaques épaisses élastiques de type Reissner [Chabot, 1997] à $5n$ champs cinématiques qui représentent le multicouche de chaussée, reposant sur le massif élastique semi-infini qui représente le sol. En utilisant pour le sol la solution analytique de Boussinesq, cette approche a transformé le problème tridimensionnel de chaussée en un problème bidimensionnel. Cette caractéristique du modèle permet un calcul beaucoup plus léger que la méthode des éléments finis. La modélisation du multicouche de chaussée par multiplaque M4-5n nous permet aussi d'introduire les discontinuités (fissures ou bords libres) dans la chaussée, tandis que les autres modèles simplifiés peuvent difficilement le faire. De plus avec les enrichissements de [Diaz, 2001] et ceux dans notre chapitre 3, il est possible d'introduire les déformations anélastiques et les forces volumiques dans les couches de chaussées.

Pour la résolution des équations du M4-Boussinesq, nous avons effectué tout d'abord une adimensionalisation. Les équations du M4-Boussinesq ont ensuite été simplifiées et présentées sous la forme matricielle d'un système d'équations différentielles du second ordre dans le plan et d'un système d'équations intégrales. La résolution a été faite à l'aide d'une approximation de type différences finies pour les équations différentielles et par intégration numérique pour les équations intégrales. La programmation a été réalisée sous Matlab.

Les premières applications ont été faites pour les structures de chaussées tridimensionnelles et bidimensionnelles en élasticité sans fissure, sous un chargement de type poids lourds. Le modèle M4-Boussinesq nous a donné de très bons résultats en comparaison avec ceux de la méthode des éléments finis. De côté du temps de calcul, le modèle M4-Boussinesq donne des résultats beaucoup plus rapide que la méthode des éléments finis. Nous en concluons que le modèle M4-Boussinesq est rapide et efficace pour l'étude d'une structure de chaussée sous chargement de type poids lourd, dans les cas non fissuré.

Les applications suivantes ont permis de valider le modèle pour des structures de chaussées fissurées sous chargement de type roue de camion ou thermiques. Le modèle M4-Boussinesq a montré également son efficacité dans la modélisation des structures de chaussée, avec un gain important de temps de calcul par rapport à la méthode des éléments finis.

Cette modélisation simplifiée peut être particulièrement efficace lorsqu'il est nécessaire d'effectuer des calculs cycliques, des calculs avec beaucoup de positions de charge, ou simplement des calculs de bureaux d'étude. Cela permet d'éviter de perdre du temps à effectuer des maillages et de longs calculs par éléments finis. Le modèle M4-Boussinesq a été utilisé par Bertrand Pouteau et Céline Florence pendant leurs thèses.

Du côté des orientations futures, nous envisageons la possibilité d'introduire dans le modèle différents types de fissures, différents comportements de matériaux, ou loi d'endommagement par

fatigue des matériaux, et d'autres types de discontinuités, notamment aux interfaces.

Pour le moment, la reprogrammation du logiciel en Fortran est en développement dans le cadre de la thèse de Sergio Perez. Ceci peut permettre d'améliorer sensiblement la rapidité des calculs par rapport à la programmation sous Matlab. En fonction de la nature du calcul, nous pensons qu'il est possible que le calcul soit de 20 à 100 fois plus rapide que le calcul effectué sous Matlab.

Dans nos applications, nous avons introduit des fissures transversales dans les couches de chaussée. L'introduction d'une fissure longitudinale est possible. Elle s'effectue simplement de la même façon, en échangeant les positions de O_x et O_y .

L'introduction de lois de comportement non linéaires est envisagée pour le modèle M4-Boussinesq. Il est en particulier utile d'introduire dans la chaussée le comportement visco-élastique. Pour ce faire, nous pouvons introduire simplement la déformation viscoélastique dans les déformations anélastiques. Il est aussi possible d'introduire un endommagement dans le modèle en injectant une variable d'endommagement D qui modifiera des raideurs initiales des matériaux.

Bibliographie

- [Autret et al., 1982] AUTRET P., D BOISSOUY A. BAUCHERON et MARCHAND J.P. Alize iii practice. *Proc. 5th int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements*. 1982, pp. 174–191.
- [Batoz et Dhatt, 1990] BATOZ J.L. et DHATT G. *Modélisation des structure par éléments finis*. HERMES, 1990.
- [Beghin, 2003] BEGHIN A. *Etude de la rupture des bitumes à basse température : influences des facteurs de composition et de la rhéologie des liants*. Thèse : Université Paris VI, 2003.
- [Bodin et al., 2004] BODIN D., PIJAUDIER-CABOT G., D LA ROCHE C., PIAU J.M. et CHABOT A. A continuum damage approach to asphalt concrete modelling. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 2004.
- [Boussinesq, 1885] BOUSSINESQ J. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*. Gauthier Villars, Paris, 1885.
- [Burmister, 1943] BURMISTER D.M. The theory of the stress and displacements in layered systems and applications of design of airport runway. *Proceeding of the Highway Research Board*, 23. 1943, pp. 126–148.
- [Caron et Ehlacher, 1997] CARON J.F. et EHRLACHER A. Modelling the kinetics of transverse cracking in composite laminates. *Composites Science and Technology*, 1997.
- [Carreira, 1998] CARREIRA R.P. *Validations par éléments finis des modèles multiparticulaires de matériaux multicouches M4*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, June 1998.
- [Castañeda-Pinzón et Such, 2004] CASTAÑEDA-PINZÓN E. et SUCH C. Evaluation the moisture sensitivity of bituminous mixtures complex modulus approach. *83^e annual meeting, Transportation Research Board*, 2004.
- [Chabot et al., 2004] CHABOT A., TAMAGNY P., EHRLACHER A. et TRAN Q.D. Stress fields modelling for cracking in pavements. *Workshop, Istanbul, Turkey*. 2004.
- [Chabot et al., 2004] CHABOT A., TRAN Q.D. et POUTEAU B. Simplified modelling of a cracked composite pavement. *First International Conference on Failure Analysis, Lisbonne, Portugal*. 2004.
- [Chabot et Ehlacher, 1998] CHABOT A. et EHRLACHER A. Modèles multiparticulaires de matériaux multicouches pour l'étude des effets de bords. *Comptes-rendus aux 11^{eme} journées nationales sur les composites(JNC11)*. 1998, pp. 1389–1397.
- [Chabot, 1997] CHABOT A. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [Cho et Koo, 2003] CHO Y.H. et KOO H.M. A behavior analysis of concrete overlay based on the characteristics of asphalt pavements. *The TRB 82nd Annual Meeting*, 2003.
- [CIMbéton, 2000] CIMBÉTON . *Le béton de ciment mince collé BCMC*. Collection Technique CIMbéton, 2000.

- [Cole et al., 1998] COLE L.W., MACK J.W. et PACKARD R.G. Whitetopping and ultra-thin whitetopping - the us experience. *8th International Symposium on Concrete Road*. 1998, pp. 203–217.
- [Colombier, 1989] COLOMBIER G. Fissuration des chaussées : Nature et origine des fissures : Moyens pour maîtriser leur remontée. *1st RILEM Conference, Reflective Cracking in Pavements*. 1989.
- [de Beer et al., 1997] DE BEER M., FISHER C. et JOOSTE F. Determination of pneumatic tyre/pavement interface contact stresses under moving loads and some effects on pavements with thin asphalt surfacing layers. *The eight International Conference on Asphalt Design*. 1997.
- [de Boissoudy et George, 1988] DE BOISSOUDY A. BAUCHERON et GEORGE L.A. *Actualisation du catalogue des structures de 1977 et du guide de dimensionnement des renforcements, Note ALIZE*. LCPC- SETRA, 1988.
- [Dhatt et Touzot, 1984] DHATT G. et TOUZOT G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection universitaire de Compiègne, 1984.
- [Diaz, 2001] DIAZ A. DIAZ. *Délamination des matériaux multicouches : Phénomènes, modèles et critères*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, November 2001.
- [Dir-Des-Routes., 2003] DIR-DES-ROUTES. . *Dossier de Presse*. Directions des Routes - Ministère de l'Équipement, des Transport, du Tourisme et de la mer, 2003.
- [Duhamel et al., 2003] DUHAMEL D., NGUYEN V.H., CHABOT A. et TAMAGNY P. Modélisation de chaussée viscoélastique. *16^{eme} Congrès français de mécanique*. 2003.
- [Eisenmann, 1986] EISENMANN J. Westergaard's theory for calculation of traffic stresses. *Workshop on theoretical design of concrete pavement*. 1986.
- [Elabd et al., 2004] ELABD A., HORNYCH P., BREYSSE D., DENIS A. et CHAZALLON C. A simplified method of prediction of pavement deformations of unbound pavement layers. *6th International Symposium on Pavement Unbound*. 2004.
- [Elouard, 1993] ELOUARD A. *Etude numérique par éléments finis de la fissuration avec remaillage automatique - Application à la mécanique des chaussées*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.
- [Florence et al., 2004] FLORENCE C., FORET G., TAMAGNY P., SENER J.Y. et EHRLACHER A. Design of a new laboratory test simulating the reflective cracking in pavements with cement treated bases. *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France*. 2004.
- [Francken et Vanelstraete, 1992] FRANCKEN L. et VANELSTRAETE A. Interface systems to prevent reflective cracking. *7th ISAP Conference on asphalt pavement*. 1992, pp. 45–60.
- [Fresnel, 2003] FRESNEL H. *Mise au point d'un banc d'essai innovant destiné à étudier les problèmes d'endommagement de surface revêtements routiers*. Rapport de stage de Maîtrise de Génie de Matériaux, Université de Poitiers, 2003.
- [Frémont, 1972] FRÉMONT M. Solide reposant sur un sol stratifié. *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 1972, n^o spécial.
- [Garett et Bailey, 1977] GARETT K.W et BAILEY J.E. Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of glass fibre-reinforced polyester. *Journal of materials science*, 1977, vol 12.
- [Goacolou et al., 1983] GOACOLOU H., MARCHAND J.P. et MOURATIDIS A. La méthode des éléments finis : application à la fissuration des chaussées et calcul du temps de remontée des fissures. *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées*, 1983.
- [Goacolou et Marchand, 1982] GOACOLOU H. et MARCHAND J.P. Fissuration des couches de roulement. *5^{eme} Conférence internationale sur les chaussées bitumineuses*. 1982.
- [Guidoux, 2000] GUIDOUX Y. La fiche de structure expérimentale bbtm/es/bac/gb3. *Revue Générale des Routes*, 2000.
-

-
- [Hadj-Ahmed et al., 2001] HADJI-AHMED R., FORET G. et EHRLACHER A. Stress analysis in adhesive joints with a multiparticle model of multilayered materials (m4). *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2001, vol 21, pp. 297–307.
- [Hogg, 1938] HOGG A.H.A. Equilibrium of a thin plate symmetrically loaded, resting on an elastic foundation of infinite depth. *The London, Edimburg and Dublin Magazine and Journal of Sciences*, 1938.
- [Horvath, 1983] HORVATH J.S. Modulus of subgrade reaction : New perspective. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1983.
- [Huet, 1963] HUET C. *Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés*. Thèse : Faculté des Sciences de Paris, 1963.
- [Ioannides et al., 1986] IOANNIDES A.M., THOMPSON M.R. et BARENBERG E.J. The westergaad-solutions reconsidered. *Workshop on theoretical design of concrete pavement*. 1986.
- [Irwin, 1957] IRWIN G.R. Analysis of stresses and strains near the end of crack transversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957.
- [Jeuffroy, 1955] JEUFFROY G. Considération théorique sur le calcul des chaussées en béton. *Revue Générale des Routes*, 1955, n°276.
- [Johnson, 1992] JOHNSON K.L. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1992.
- [Kassapoglou et Lagace, 1987] KASSAPOGLOU C. et LAGACE P.A. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of composite materials*, 1987, vol 27, pp. 292–308.
- [Kerr, 1964] KERR A.D. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, Septembre 1964, vol 31, n°3, pp. 491–498.
- [Kerr, 1985] KERR A.D. *Application of Pasternak model to some soil structure interaction problems, Vol 1 : Solutions for plates continuously supported on a Pasternak base*. Technical report, 1985.
- [Laveissiere, 2001] LAVEISSIERE D. *Modélisation de la remontée de fissure en fatigue dans les structures routières par endommagement et macro-fissuration*. Thèse : Université de Limoges, 2001.
- [LCPC, 1964] LCPC . *Comportement statique des chaussées - Problèmes à symétrie axiale - Méthode de Burmister - Rapport n°2 du SEMA*. Rapport technique, LCPC-SEMA, 1964.
- [LCPC, 1994] LCPC . *Conception et dimensionnement des structures de chaussées*. Guide Technique, LCPC-SETRA, 1994.
- [LCPC, 1998] LCPC . Méthode d'essai n°52. *Catalogue des dégradations de surface des chaussées*. 1998.
- [Li, 1999] LI Y. *Asphalt pavement fatigue cracking modeling*. Thèse : Louisiana State University, 1999.
- [Limam, 2003] LIMAM O. *Dalles en béton armé renforcées à l'aide des matériaux composites : Approche de type de calcul à la rupture et étude expérimentale*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [Maillard et al., 2003] MAILLARD S., D. L ROCHE C., HAMMOUM F., GAILLET L., E.DAouben et SUCH C. Comportement à la rupture du bitume en film mince sous chargement répété - approches par des méthodes de control non destructif. *Journées des Siences de l'Ingénieur*. 2003.
- [Marchand, 1984] MARCHAND J.P. *La mécanique de la rupture appliquée aux chaussées : Modélisation, Dimensionnement, Auscultation-Extension à la fracture Hertzienne*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1984.
-

- [Molenaar, 1983] MOLENAAR A.A.A. *Structural performance and design of flexible road constructions and asphalt concrete overlays*. Thèse : Delft University of Technology, 1983.
- [Monismith et al., 1980] MONISMITH C.L., SECOR G.A. et SECOR K.E. Reflection cracking, analyse, laboratory studies and design consideration. *Proceeding A.A.P.T.* 1980, pp. 268–313.
- [Naciri et al., 1998] NACIRI T., EHRLACHER A. et CHABOT A. Interlaminar stress analysis with a new multiparticle modelization of multilayered materials (m4). *Composites Science and Technology*, 1998, vol 58, pp. 337.
- [Nesnas et Nunn, 2004] NESNAS K. et NUNN M. A model for top-down reflection cracking in composite pavements. *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France.* 2004.
- [Newmark, 1959] NEWMARK N.M. A method of computation for structural dynamics. *ASCE J. of the Engineering Mechanics Division*, 1959, n°85, pp. 67–94.
- [Nguyen et Caron, 2004] NGUYEN V.T. et CARON J.F. A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites. *CST2004*. 2004.
- [Pagano et Soni, 1983] PAGANO N.J. et SONI S.R. Global-local laminate variational model. *International Journal of Solids and Structures*, 1983, vol 19, pp. 207–228.
- [Pagano, 1978] PAGANO N.J. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, vol 14, pp. 385–400.
- [Pasternak, 1954] PASTERNAK P.L. *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*. Moscou, 1954.
- [Peyronne et al., 1991] PEYRONNE C., CAROFF G. et GILBERT C. *Cours de routes - Dimensionnement des chaussées*. sous la direction de G. Jeuffroy et R. Sauterey, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1991.
- [Pouteau et al., 2004] POUTEAU B., BALAY J.M., CHABOT A. et LARRARD F. DE. Fatigue test and mechanical study of adhesion between concrete and asphalt. *9th International Symposium on Concrete Roads, Istanbul, Turkey.* 2004.
- [Press et al., 1992] PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A. et VETTERLING W.T. *Numerical recipes*. Cambridge University Press, 1992.
- [Puppo et Evensen, 1970] PUPPO A.H. et EVENSEN H.A. Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress. *Journal of composite materials*, 1970, vol 4, pp. 204–220.
- [Reissner, 1950] REISSNER E. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.* volume 29, 1950, pp. 90–95.
- [Rigo et al., 1993] RIGO J.M., HENDRICK S., COURARD L., COSTA C. et KUCK S. CESCOTTO P.J. Evaluation of crack propagation in an overlay subjected to traffic and thermal effects. *The second International Rilem Conference.* 1993, pp. 146–158.
- [Romanoshi et Li, 2002] ROMANOSHI S.A. et LI Y. Experimental characterization and modeling of fatigue and crack propagation in asphalt concrete layers. *6th International Conference on the Bearing Capacity of Roads Railways and airfields, Lisbon. Portugal.* 2002.
- [Rowe et Pellinen, 2004] ROWE G. et PELLINEN T. An analysis scheme for the evaluation of surface (top-down) longitudinal wheel path cracking in indiana. *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France.* 2004.
- [Salasca, 1998] SALASCA S. *Phénomènes de contact dans les chaussées en béton : Modélisation théorique et validation expérimentale*. Thèse : Ecole centrale de Nantes, 1998.
- [Salençon, 1983] SALENÇON J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.
- [Sangpetngam et al., 2004] SANGPETNGAM B., BIRGISSON B. et ROQUE R. Prediction of top-down crack initiation and crack growth in hot-mix asphalt pavements. *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France.* 2004.
-

-
- [Sayegh, 1963] SAYEGH G. Variation des modules de quelques bitumes purs et bétons bitumineux. *Conférence au groupe français de Rhéologie*. 1963, pp. 51–74.
- [Shoukry et al., 2004] SHOUKRY S.N., WILLIAM G.W. et RIAD M.Y. Effect of temperature variations on mid-slab cracking in jointed concrete pavements. *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France*. 2004.
- [Silwerbrand, 1998] SILWERBRAND J. Whitetoppings. *8th International Symposium on Concrete Road*. 1998, pp. 139–148.
- [Svasdisant et Baladi, 2004] SVASDISANT T. et BALADI G. Three-dimensional finite element analysis of the causes of top-down cracks in rubblized pavements. *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France*. 2004.
- [Tamagny et al., 2004] TAMAGNY P., WENDLING L. et PIAU J.M. A new explanation of pavement cracking from top o bottom : The visco-elasticity of asphalt matherials? *Cracking in pavement, 5th International RILEM Conference, Liège, France*. 2004.
- [Tran et al., 2003] TRAN Q.D., CHABOT A., EHRLACHER A. et TAMAGNY P. Modèle simplifié pour le calcul de chaussées. *16^{eme} Congr ès Fran çais de Mécanique*. 2003.
- [Tran et al., 2004] TRAN Q.D., CHABOT A., EHRLACHER A. et TAMAGNY P. A simplified modelling for cracking in pavements. *5th International Conference of Cracking in pavements*. 2004.
- [Tran, 2001] TRAN Q.D. *Utilisation de Modèle multiparticulaire M4-5n pour l'analyse des champs de contraintes dans une structure de multicouches de chaussées*. Rapport de DEA S3M, Université Paris VI, 2001.
- [Vanelstraete et al., 2000] VANELSTRAETE A., LÉONARD D. et VEYS J. Structural design of road with steel reinforcing nettings. *4th International RILEM Conference*. 2000, pp. 57–67.
- [Vanelstraete et Francken, 1997] VANELSTRAETE A. et FRANCKEN L. *Prevention of Reflective Cracking in Pavements*. Rapport technique, RILEM Report 18, 1997.
- [Westergaad, 1926] WESTERGAAD H.M. *Stresses in concrete pavements computed theoretical analysis*, volume 7. Public Roads, 1926.
- [Zienkewicz et Taylor, 1991] ZIENKEWICZ O.C. et TAYLOR R.L. *La méthode des éléments finis - Formulation de base et problèmes linéaires*. Afnor Technique, 1991.
-

Annexes

Annexe A

Les équations du modèle simplifié

Dans le chapitre 4, nous avons simplifié le système d'équations du M4-5n en un système d'équations différentielles du second ordre et transformé les équations de Boussinesq en un système d'équations intégrales. Dans cette partie, nous allons donner les valeurs des matrices calculées dans les équations différentielles et dans les équations intégrales du problème.

A.1 Les équations différentielles du M4-5n

Rappelons l'équation 4.27 ci-dessous :

$$A^i X'_{11} + B^i X'_{22} + C^i X'_{12} + D^i X'_{11} + E^i X'_{22} + F^i X^i = G^i Y'^{i-1,i} + H^i Y'^{i-1,i} + I^i Y^{i-1,i} + G^i Y_1^{i,i+1} + H^i Y_2^{i,i+1} + J^i Y^{i,i+1} + AN^i$$

les matrices élémentaires $A^i \dots AN^i$

$$A^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{e}_i \bar{E}^i}{1-\nu_i^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{e}_i \bar{E}^i}{2(1+\nu_i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\bar{e}_i^2 \bar{E}^i}{1-\nu_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{e}_i^2 \bar{E}^i}{1+\nu_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$B^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{e}_i \bar{E}^i}{2(1+\nu_i)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{e}_i \bar{E}^i}{1-\nu_i^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{e}_i^2 \bar{E}^i}{1+\nu_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\bar{e}_i^2 \bar{E}^i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$C^i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\bar{e}_i \bar{E}^i}{2(1-\nu_i)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{e}_i \bar{E}^i}{2(1-\nu_i)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{e}_i^2 \bar{E}^i}{1-\nu_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{e}_i^2 \bar{E}^i}{1-\nu_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$D^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10\bar{E}^i}{1+v_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$E^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10\bar{E}^i}{1+v_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$F^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10\bar{E}^i}{1+v_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10\bar{E}^i}{1+v_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$G^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1+v_i}{5E^i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$H^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+v_i}{5E^i} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$I^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5\bar{e}_i\bar{E}^i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$J^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5\bar{e}_i\bar{E}^i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$AN^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{e}^i\bar{E}^i}{1-v_i^2}(\bar{\varepsilon}_{11}^{ian} + v_i\bar{\varepsilon}_{22}^{ian})'_{11} + \frac{\bar{e}^i\bar{E}^i}{1+v_i}\bar{\varepsilon}_{12'2}^{ian} - \bar{F}_1^i \\ + \frac{\bar{e}^i\bar{E}^i}{1-v_i^2}(v_i\bar{\varepsilon}_{11}^{ian} + \bar{\varepsilon}_{22}^{ian})'_{22} + \frac{\bar{e}^i\bar{E}^i}{1+v_i}\bar{\varepsilon}_{12'1}^{ian} - \bar{F}_2^i \\ \frac{\bar{e}^{i3}\bar{E}^i}{1-v_i^2}(\bar{\chi}_{11}^{ian} + v_i\bar{\chi}_{22}^{ian})'_{11} + \frac{\bar{e}^{i3}\bar{E}^i}{1+v_i}\bar{\chi}_{12'2}^{ian} - \frac{20}{\bar{e}^i}\bar{M}_1^i \\ \frac{\bar{e}^{i3}\bar{E}^i}{1-v_i^2}(v_i\bar{\chi}_{11}^{ian} + \bar{\chi}_{22}^{ian})'_{22} + \frac{\bar{e}^{i3}\bar{E}^i}{1+v_i}\bar{\chi}_{12'1}^{ian} - \frac{20}{\bar{e}^i}\bar{M}_2^i \\ \bar{d}_{\Phi 1'1}^{ian} + \bar{d}_{\Phi 2'2}^{ian} - \bar{F}_3^i \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

En générant ces 5 dernières équations pour $i \in [1, n]$, nous obtenons un système de $5n$ équations différentielles globales d'une structure de n couches.

Nous rappelons l'équation différentielle 4.27 :

$$GY_1^{1,n} + HY_2^{1,n} + IY^{1,n} + JY_1^{0,1} + KY_2^{0,1} + LY^{0,1} + MY_1^{n,n+1} + NY_2^{n,n+1} + OY^{n,n+1} + AN = AX_{11} + BX_{22} + CX_{12} + DX_{11} + EX_{22} + FX =$$

les matrices générées $A \dots AN$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$B = \begin{pmatrix} B^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$C = \begin{pmatrix} C^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$D = \begin{pmatrix} D^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$E = \begin{pmatrix} E^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$F = \begin{pmatrix} F^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$G = \begin{pmatrix} G^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ G^2 & G^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G^{n-1} & G^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$H = \begin{pmatrix} H^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ H^2 & H^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H^{n-1} & H^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & H^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$I = \begin{pmatrix} J^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I^2 & J^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I^{n-1} & J^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$J = {}^T (G^1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) \quad (\text{A.21})$$

$$K = {}^T (H^1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) \quad (\text{A.22})$$

$$L = {}^T (L^1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) \quad (\text{A.23})$$

$$M = {}^T (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ J^n) \quad (\text{A.24})$$

$$N = {}^T (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ K^n) \quad (\text{A.25})$$

$$O = {}^T (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ I^n) \quad (\text{A.26})$$

$$O = {}^T (AN^1 \ AN^2 \ AN^3 \ \cdots \ AN^n) \quad (\text{A.27})$$

Les équations 4.23 peuvent s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P^i X_1^i + Q^i X_1^{i+1} + R^i X_2^i + S^i X_2^{i+1} + T^i X^i + U^i X^{i+1} \\ = V^i Y^{i-1,i} + W^i Y^{i,i+1} + Z^i Y^{i+1,i+2} + ANN^i \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Nous donnons ci-dessous les matrices élémentaires du système d'équations :

$$P^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{e}_i}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$Q^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{e}_i}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$R^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{5\bar{e}_i}{12} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5\bar{e}_i}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$S^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5\bar{e}_{i+1}}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5\bar{e}_{i+1}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$T^i = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{e}_i(1+v_i)}{12E_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{e}_i(1+v_i)}{12E_i} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9\bar{e}_i}{70E_i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$U^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{e}_i(1+v_i)}{4E_i} + \frac{\bar{e}_{i+1}(1+v_{i+1})}{4E_{i+1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{e}_i(1+v_i)}{4E_i} + \frac{\bar{e}_{i+1}(1+v_{i+1})}{4E_{i+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13\bar{e}_i}{35E_i} + \frac{13\bar{e}_{i+1}}{35E_{i+1}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$V^i = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{e}_{i+1}(1+v_{i+1})}{12E_{i+1}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{e}_{i+1}(1+v_{i+1})}{12E_{i+1}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9\bar{e}_{i+1}}{70E_{i+1}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$ANN^i = {}^T \left(\bar{D}_1^{i,i+1an} \quad \bar{D}_2^{i,i+1an} \quad \bar{D}_3^{i,i+1an} \right) \quad (\text{A.36})$$

Les équations 4.28 peuvent s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$PX_1 + QX_2 + RX + ANN = VY^{0,1} + WY^{1,n} + ZY^{n,n+1} \quad (\text{A.37})$$

$$P = \begin{pmatrix} P^1 & P^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P^{n-1} & P^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^1 & Q^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q^{n-1} & Q^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$R = \begin{pmatrix} R^1 & S^1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R^{n-1} & S^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$ANN = {}^T (ANN^1 \ ANN^2 \ \dots \ ANN^{n-2} \ ANN^{n-1}) \quad (\text{A.41})$$

$$V = {}^T (T^1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0) \quad (\text{A.42})$$

$$W = \begin{pmatrix} U^1 & V^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T^2 & U^2 & V^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T^{n-2} & U^{n-2} & V^{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T^{n-1} & U^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$Z = {}^T (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ V_{n-1}) \quad (\text{A.44})$$

L'équation générale finale 4.31 du modèle M4-5n s'écrit alors sous forme :

$$AA X'_{11} + BB X'_{22} + CC X'_{12} + DD X'_{11} + EE X'_{22} + FF X = GG \Sigma'_{11} + HH \Sigma'_{22} + II \Sigma + JJ$$

Où les matrices AA, BB, ... JJ sont déterminées comme suit :

$$AA = A - GW^{-1}P$$

$$BB = B - HW^{-1}Q$$

$$CC = C - GW^{-1}Q - HW^{-1}R$$

$$DD = D - GW^{-1}R - IW^{-1}P$$

$$EE = E - HW^{-1}R - IW^{-1}Q$$

$$FF = F - IW^{-1}R$$

$$GG = M - GW^{-1}Z$$

$$HH = N - HW^{-1}Z$$

$$II = O - IW^{-1}Z$$

$$JJ = J - GW^{-1}V)Y_{11}^{0,1} + (K - HW^{-1}V)Y_{22}^{0,1} + (L - IW^{-1}V)Y^{0,1} + (AN + IW^{-1}ANN + GW^{-1}ANN_{11} + HW^{-1}ANN_{22})$$

A.2 Les équations intégrales de Boussinesq

Rappelons que dans le chapitre 4, nous avons transformé les équations de Boussinesq en un système d'équations sous la forme :

$$M.X(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \Sigma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (3 \text{ equ.}) \quad (\text{A.45})$$

Où :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{\bar{e}^n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \frac{\bar{e}^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi G} \frac{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(1-\nu)(\bar{y}-\bar{\eta})^2}{((\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2)^{3/2}} & \frac{\nu}{2\pi G} \frac{(\bar{x}-\bar{\xi})(\bar{y}-\bar{\eta})}{((\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2)^{3/2}} & -\frac{1-2\nu}{4\pi G} \frac{\bar{x}-\bar{\xi}}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2} \\ \frac{\nu}{2\pi G} \frac{(\bar{x}-\bar{\xi})(\bar{y}-\bar{\eta})}{((\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2)^{3/2}} & \frac{1}{2\pi G} \frac{(1-\nu)(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}{((\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2)^{3/2}} & -\frac{1-2\nu}{4\pi G} \frac{\bar{y}-\bar{\eta}}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2} \\ \frac{1-2\nu}{4\pi G} \frac{(\bar{x}-\bar{\xi})}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2} & \frac{1-2\nu}{4\pi G} \frac{(\bar{y}-\bar{\eta})}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2} & \frac{1-\nu}{2\pi G} \frac{1}{((\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2)^{1/2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Dans le cas 2D déformation plane, nous avons :

$$MM.X(\bar{x}) - \bar{\Gamma}^{n,n+1}(\bar{x}) = \int_{\bar{l}} f f(\bar{x}, \bar{\xi}) \Sigma(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2 \text{ equ.}) \quad (\text{A.48})$$

Où :

$$MM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\bar{e}^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

$$f f(\bar{x}, \bar{\xi}) = \begin{pmatrix} -\frac{2(1-\nu_s^2)}{\pi} \ln|\bar{x} - \bar{\xi}| & -\frac{(1-2\nu_s)(1+\nu_s)}{2} \\ \frac{(1-2\nu_s)(1+\nu_s)}{2} & -\frac{2(1-\nu_s^2)}{\pi} \ln|\bar{x} - \bar{\xi}| \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

Annexe B

Approximation numérique du modèle simplifié

B.1 Conditions aux limites sur les bords

B.1.1 Conditions aux limites pour les bords bloqués

Les équations de conditions aux limites 4.35 pour les bord bloqués s'écrivent sous la forme :

$$CL_{x1}^i X_{/1}^i + CL_{x2}^i X_{/2}^i + CL_{x3}^i X^i = CL_{x4}^i Y^{i-1,i} + CL_{x5}^i Y^{i,i+1}$$

Où les matrices CL_{x1}^i à CL_{x5}^i sont les matrices de conditions aux limites, elles sont présentées ci-dessous :

$$CL_{x1}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$CL_{x2}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$CL_{x3}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$CL_{x4}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10G^i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$CL_{x5}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10G^i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

B.1.2 Conditions aux limites pour les bords libres

Les équations de conditions aux limites 4.37 pour les bords libres s'écrivent sous la forme :

$$CL_{x6}^i X_{i1}^i + CL_{x7}^i X_{i2}^i + CL_{x8}^i X^i = CL_{x9}^i Y^{i-1,i} + CL_{x10}^i Y^{i,i+1}$$

Où les matrices CL_{x6}^i à CL_{x10}^i sont les matrices de conditions aux limites, elles sont présentées ci-dessous :

$$CL_{x6}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$CL_{x7}^i = \begin{pmatrix} 0 & v^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$CL_{x8}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$CL_{x9}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10G^i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$CL_{x10}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10G^i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

B.1.3 Génération des équations de conditions aux limites

Notons que dans chaque couche de chaussée, nous pouvons avoir un type d'équation de condition aux limites comme CL_{x1}^i à CL_{x5}^i ou CL_{x6}^i à CL_{x10}^i .

L'équation générale des conditions aux limites 4.39 dans ce cas a la forme :

$$CL_{x1}X_{1'} + CL_{x2}X_{2'} + CL_{x3}X = CL_{x4}Y^{0,1} + CL_{x5}Y^{1,n} + CL_{x6}\Sigma$$

Où les matrices dans ces équations sont présentées ci-dessous :

$$CL_{x1} = \begin{pmatrix} CL_{x1}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & CL_{x1}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & CL_{x1}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & CL_{x1}^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$CL_{x2} = \begin{pmatrix} CL_{x2}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & CL_{x2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & CL_{x2}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & CL_{x2}^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$CL_{x3} = \begin{pmatrix} CL_{x3}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & CL_{x3}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & CL_{x3}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & CL_{x3}^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$CL_{x4} = \begin{pmatrix} CL_{x4}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$CL_{x5} = \begin{pmatrix} CL_{x5}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CL_{x4}^2 & CL_{x5}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & CL_{x4}^{n-1} & CL_{x5}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & CL_{x4}^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$CL_{x6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & CL_{x5}^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Remplaçons $Y^{1,n}$ de l'équation 4.29 dans 4.39, nous obtenons alors l'équation générale des conditions aux limites :

$$C_{x1}X_{1'} + C_{x2}X_{2'} + C_{x3}X = C_{x4}Y^{0,1} + C_{x5}\Sigma$$

Où :

$$C_{x1} = CL_{x1} - CL_{x5}W^{-1}P$$

$$C_{x2} = CL_{x2} - CL_{x5}W^{-1}Q$$

$$C_{x3} = CL_{x3} - CL_{x5}W^{-1}R$$

$$C_{x4} = CL_{x4} - CL_{x5}W^{-1}V$$

$$C_{x5} = CL_{x6} - CL_{x5}W^{-1}Z$$

B.1.4 Traitement numérique des équations de conditions aux limites

Conditions aux limites au bord $\bar{x} = -\infty$

Dans ce cas, nous utilisons l'équation 5.104 en prenant $k = 1$, nous obtenons alors $\forall l \in [1, N-1]$:

$$\begin{aligned} & p_{l+1}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB \frac{p_2^x}{p_{l+1}^y} + \frac{CC}{p_{l+1}^y} - \frac{p_2^x}{2p_{l+1}^y} EE - \frac{DD}{2} + \frac{p_2^x}{4} EE \right) - \frac{C_{x2}}{p_{l+1}^y} - \frac{1}{p_2^x} + C_{x3} \right] X_{1,l} \\ & + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-BB \frac{p_2^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} - \frac{DD}{2} + \frac{p_2^x}{4} EE \right) - \frac{1}{p_2^x} + C_{x3} \right] X_{1,l+1} \\ & + p_{l+2}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB \frac{p_2^x}{p_{l+2}^y} - \frac{CC}{p_{l+2}^y} + \frac{p_2^x}{2p_{l+2}^y} EE - \frac{DD}{2} + \frac{p_2^x}{4} EE \right) + \frac{C_{x2}}{p_{l+2}^y} - \frac{1}{p_2^x} + C_{x3} \right] X_{1,l+2} \\ & + p_{l+1}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB \frac{p_2^x}{p_{l+1}^y} - \frac{CC}{p_{l+1}^y} - \frac{p_2^x}{2p_{l+1}^y} FF + \frac{DD}{2} - \frac{p_2^x}{4} FF \right) + \frac{1}{p_2^x} \right] X_{2,l} \\ & + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-BB \frac{p_2^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + \frac{DD}{2} + \frac{p_2^x}{4} FF \right) + \frac{1}{p_2^x} \right] X_{2,l+1} \\ & + p_{l+2}^y \left[C_{x1}AA^{-1} \left(BB \frac{p_2^x}{p_{l+2}^y} + \frac{CC}{p_{l+2}^y} + \frac{p_2^x}{2p_{l+2}^y} FF - \frac{DD}{2} + \frac{p_2^x}{4} FF \right) + \frac{1}{p_2^x} \right] X_{2,l+2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_2^x}{2}HH - \frac{p_{l+1}^y}{2}GG + \frac{p_2^x p_{l+1}^y}{4}II \right) + p_{l+1}^y C_{x5} \right] \Sigma_{(1,l)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_2^x(p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4}II \right) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)C_{x5} \right] \Sigma_{(1,l+1)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_2^x}{2}HH - \frac{p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_2^x p_{l+2}^y}{4}II \right) + p_{l+2}^y C_{x5} \right] \Sigma_{(1,l+2)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_2^x}{2}HH + \frac{p_{l+1}^y}{2}GG + \frac{p_2^x p_{l+1}^y}{4}II \right) \right] \Sigma_{(2,l)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_2^x(p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4}II \right) \right] \Sigma_{(2,l+1)} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_2^x}{2}HH + \frac{p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_2^x p_{l+2}^y}{4}II \right) \right] \Sigma_{(2,l+2)} \\
&+ \frac{p_2^x}{4} C_{x1}AA^{-1} [p_{l+1}^y (JJ_{1,l} + JJ_{2,l}) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)(JJ_{1,l+1} + JJ_{2,l+1})] \\
&+ \frac{p_2^x p_{l+2}^y}{4} C_{x1}AA^{-1} (JJ_{1,l+2} + JJ_{2,l+2}) + C_{x4} [p_{l+1}^y Y_{(1,l)}^{0,1} + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)Y_{(1,l+1)}^{0,1} + p_{l+2}^y Y_{(1,l+2)}^{0,1}]
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :

$$\begin{aligned}
&K_1^{l+1,l} X_{1,l} + K_1^{l+1,l+1} X_{1,l+1} + K_1^{l+1,l+2} X_{1,l+2} \\
&+ K_1^{l+1,(N+1)+l} X_{2,l} + K_1^{l+1,(N+1)+l+1} X_{2,l+1} + K_1^{l+1,(N+1)+l+2} X_{2,l+2} \\
&= K_2^{l+1,l} \Sigma_{1,l} + K_2^{l+1,l+1} \Sigma_{1,l+1} + K_2^{l+1,l+2} \Sigma_{1,l+2} \\
&+ K_2^{l+1,(N+1)+l} \Sigma_{2,l} + K_2^{l+1,(N+1)+l+1} \Sigma_{2,l+1} + K_2^{l+1,(N+1)+l+2} \Sigma_{2,l+2} \\
&+ K_3^{1,l} + K_3^{1,l+1} + K_3^{1,l+2} + K_3^{2,l} + K_3^{2,l+1} + K_3^{2,l+2}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\forall l \in [1, N-1]$$

Conditions aux limites au bord $\bar{x} = \infty$

Dans ce cas, nous utilisons l'équation 5.102 avec l'équation 5.103 écrite pour $k + 1$, puis nous donnons à $k + 1$ la valeur $N + 1$. Nous obtenons alors $\forall l \in [1, N - 1]$:

$$\begin{aligned}
& p_{l+1}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{N+1}^x}{p_{l+1}^y} + \frac{C C}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{k+1}^x}{2 p_{l+1}^y} E E - \frac{D D}{2} + \frac{p_{N+1}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{N+1}^x} + C_{x3} \right] X_{N,l} \\
& + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-B B \frac{p_{N+1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} - \frac{D D}{2} + \frac{p_{N+1}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{N+1}^x} + C_{x3} \right] X_{N,l+1} \\
& + p_{l+2}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{N+1}^x}{p_{l+2}^y} - \frac{C C}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{N+1}^x}{2 p_{l+2}^y} E E - \frac{D D}{2} + \frac{p_{N+1}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{N+1}^x} + C_{x3} \right] X_{N,l+2} \\
& + p_{l+1}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{N+1}^x}{p_{l+1}^y} - \frac{C C}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{N+1}^x}{2 p_{l+1}^y} F F + \frac{D D}{2} - \frac{p_{N+1}^x}{4} F F \right) - \frac{C_{x2}}{p_{l+1}^y} + \frac{1}{p_{N+1}^x} \right] X_{N+1,l} \\
& + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-B B \frac{p_{N+1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + \frac{D D}{2} + \frac{p_{N+1}^x}{4} F F \right) + \frac{1}{p_{N+1}^x} \right] X_{N+1,l+1} \\
& + p_{l+2}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{N+1}^x}{p_{l+2}^y} + \frac{C C}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{N+1}^x}{2 p_{l+2}^y} F F - \frac{D D}{2} + \frac{p_{N+1}^x}{4} F F \right) + \frac{C_{x2}}{p_{l+2}^y} + \frac{1}{p_{N+1}^x} \right] X_{N+1,l+2} = \\
& = \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-\frac{p_{N+1}^x}{2} H H - \frac{p_{l+1}^y}{2} G G + \frac{p_{N+1}^x p_{l+1}^y}{4} I I \right) + p_{l+1}^y C_{x5} \right] \Sigma_{(N,l)} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{N+1}^x (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4} I I \right) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) C_{x5} \right] \Sigma_{(N,l+1)} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(\frac{p_{N+1}^x}{2} H H - \frac{p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{N+1}^x p_{l+2}^y}{4} I I \right) + p_{l+2}^y C_{x5} \right] \Sigma_{(N,l+2)} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-\frac{p_{N+1}^x}{2} H H + \frac{p_{l+1}^y}{2} G G + \frac{p_{N+1}^x p_{l+1}^y}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(N+1,l)} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{N+1}^x (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(N+1,l+1)} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(\frac{p_{N+1}^x}{2} H H + \frac{p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{N+1}^x p_{l+2}^y}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(N+1,l+2)} \\
& + \frac{p_{N+1}^x}{4} C_{x1} A A^{-1} \left[p_{l+1}^y (J J_{N,l} + J J_{N+1,l}) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) (J J_{N,l+1} + J J_{N+1,l+1}) \right] \\
& \quad + \frac{p_{N+1}^x p_{l+2}^y}{4} C_{x1} A A^{-1} (J J_{N,l+2} + J J_{N+1,l+2}) \\
& \quad + C_{x4} \left[p_{l+1}^y Y_{(N,l)}^{0,1} + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) Y_{(N,l+1)}^{0,1} + p_{l+2}^y Y_{(N,l+2)}^{0,1} \right]
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :

$$\begin{aligned}
& K_1^{N(N+1)+l+1,l} X_{N,l} + K_1^{N(N+1)+l+1,l+1} X_{N,l+1} + K_1^{N(N+1)+l+1,l+2} X_{N,l+2} \\
& + K_1^{N(N+1)+l+1,(N+1)+l} X_{N+1,l} + K_1^{N(N+1)+l+1,(N+1)+l+1} X_{N+1,l+1} \\
& + K_1^{N(N+1)+l+1,(N+1)+l+2} X_{N+1,l+2} \\
= & K_2^{N(N+1)+l+1,l} \Sigma_{N,l} + K_2^{N(N+1)+l+1,l+1} \Sigma_{N,l+1} + K_2^{N(N+1)+l+1,l+2} \Sigma_{N,l+2} \\
& + K_2^{N(N+1)+l+1,(N+1)+l} \Sigma_{N+1,l} + K_2^{N(N+1)+l+1,(N+1)+l+1} \Sigma_{N+1,l+1} \\
& + K_2^{N(N+1)+l+1,(N+1)+l+2} \Sigma_{N+1,l+2} \\
& + K_3^{N,l} + K_3^{N,l+1} + K_3^{N,l+2} + K_3^{N+1,l} + K_3^{N+1,l+1} + K_3^{N+1,l+2}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\forall l \in [1, N-1]$$

Conditions aux limites au bord $\bar{y} = -\infty$

Dans ce cas, nous utilisons l'équation 5.104 en prenant $k = 1$, nous obtenons alors $\forall k \in [1, N-1]$:

$$\begin{aligned}
& p_{k+1}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_2^y}{p_{k+1}^x{}^2} + \frac{C C}{p_{k+1}^x} - \frac{p_2^y}{2 p_{k+1}^x} D D - \frac{E E}{2} + \frac{p_2^y}{4} D D \right) - \frac{C_{y1}}{p_{k+1}^x} - \frac{1}{p_2^y} + C_{y3} \right] X_{k,1} \\
& + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-A A \frac{p_2^y}{p_{k+1}^x p_{k+2}^x} - \frac{E E}{2} + \frac{p_2^y}{4} D D \right) - \frac{1}{p_2^y} + C_{y3} \right] X_{k+1,1} \\
& + p_{k+2}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_2^y}{p_{k+2}^x{}^2} - \frac{C C}{p_{k+2}^x} + \frac{p_2^y}{2 p_{k+2}^x} D D - \frac{E E}{2} + \frac{p_2^y}{4} D D \right) + \frac{C_{y1}}{p_{k+2}^x} - \frac{1}{p_2^y} + C_{y3} \right] X_{k+2,1} \\
& + p_{k+1}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_2^y}{p_{k+1}^x{}^2} - \frac{C C}{p_{k+1}^x} - \frac{p_2^y}{2 p_{k+1}^x} F F + \frac{E E}{2} - \frac{p_2^y}{4} F F \right) + \frac{1}{p_2^y} \right] X_{k,2} \\
& + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-A A \frac{p_2^y}{p_{k+1}^x p_{k+2}^x} + \frac{E E}{2} + \frac{p_2^y}{4} F F \right) + \frac{1}{p_2^y} \right] X_{k+1,2} \\
& + p_{k+2}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_2^y}{p_{k+2}^x{}^2} + \frac{C C}{p_{k+2}^x} + \frac{p_2^y}{2 p_{k+2}^x} F F - \frac{E E}{2} + \frac{p_2^y}{4} F F \right) + \frac{1}{p_2^y} \right] X_{k+2,2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-\frac{p_2^y}{2} G G - \frac{p_{k+1}^x}{2} H H + \frac{p_2^y p_{k+1}^x}{4} I I \right) + p_{k+1}^x C_{y5} \right] \Sigma_{(k,1)} \\
&+ \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-\frac{p_{k+1}^x + p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_2^y (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x)}{4} I I \right) + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) C_{y5} \right] \Sigma_{(k+1,1)} \\
&\quad + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(\frac{p_2^y}{2} G G - \frac{p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_2^y p_{k+2}^x}{4} I I \right) + p_{k+2}^x C_{y5} \right] \Sigma_{(k+2,1)} \\
&\quad + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-\frac{p_2^y}{2} G G + \frac{p_{k+1}^x}{2} H H + \frac{p_2^y p_{k+1}^x}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(k,2)} \\
&\quad + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(\frac{p_{k+1}^x + p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_2^y (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x)}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(k+1,2)} \\
&\quad + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(\frac{p_2^y}{2} G G + \frac{p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_2^y p_{k+2}^x}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(k+2,1)} \\
&\quad + \frac{p_2^y}{4} C_{y2} B B^{-1} \left[p_{k+1}^x (J J_{k,1} + J J_{k,2}) + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) (J J_{k+1,1} + J J_{k+1,2}) \right] \\
&+ \frac{p_2^y p_{k+2}^x}{4} C_{y2} B B^{-1} (J J_{k+2,1} + J J_{k+2,2}) + C_{y4} \left[p_{k+1}^x Y_{(k,1)}^{0,1} + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) Y_{(k+1,1)}^{0,1} + p_{k+2}^x Y_{(k+2,2)}^{0,1} \right]
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :

$$\begin{aligned}
&K_1^{k(N+1)+1, (k-1)(N+1)+1} X_{k,1} + K_1^{k(N+1)+1, (k-1)(N+1)+2} X_{k,2} \\
&\quad + K_1^{k(N+1)+1, k(N+1)+1} X_{k+1,1} + K_1^{k(N+1)+1, k(N+1)+2} X_{k+1,2} \\
&+ K_1^{k(N+1)+1, (k+1)(N+1)+1} X_{k+2,1} + K_1^{k(N+1)+1, (k+1)(N+1)+2} X_{k+2,2} \\
&= K_2^{k(N+1)+1, (k-1)(N+1)+1} \Sigma_{k,1} + K_2^{k(N+1)+1, (k-1)(N+1)+2} \Sigma_{k,2} \\
&\quad + K_2^{k(N+1)+1, k(N+1)+1} \Sigma_{k+1,1} + K_2^{k(N+1)+1, k(N+1)+2} \Sigma_{k+1,2} \\
&+ K_2^{k(N+1)+1, (k+1)(N+1)+1} \Sigma_{k+2,1} + K_2^{k(N+1)+1, (k+1)(N+1)+2} \Sigma_{k+2,2} \\
&\quad + K_3^{k,1} + K_3^{k+1,1} + K_3^{k+2,1} + K_3^{k,2} + K_3^{k+1,2} + K_3^{k+2,2}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\forall k \in [1, N-1]$$

Conditions aux limites au bord $\bar{y} = \infty$

Dans ce cas, nous utilisons l'équation 5.102 écrite pour $l + 1$, puis nous prenons $l + 1 = N + 1$. Nous obtenons alors $\forall k \in [1, N - 1]$:

$$\begin{aligned}
& p_{k+1}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_{N+1}^y}{p_{k+1}^x} + \frac{C C}{p_{k+1}^x} - \frac{p_{l+1}^y}{2 p_{k+1}^x} D D - \frac{E E}{2} + \frac{p_{N+1}^y}{4} D D \right) - \frac{1}{p_{N+1}^y} + C_{y3} \right] X_{k,N} \\
& + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-A A \frac{p_{N+1}^y}{p_{k+1}^x p_{k+2}^x} - \frac{E E}{2} + \frac{p_{N+1}^y}{4} D D \right) - \frac{1}{p_{N+1}^y} + C_{y3} \right] X_{k+1,N} \\
& + p_{k+2}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_{N+1}^y}{p_{k+2}^x} - \frac{C C}{p_{k+2}^x} + \frac{p_{N+1}^y}{2 p_{k+2}^x} D D - \frac{E E}{2} + \frac{p_{N+1}^y}{4} D D \right) - \frac{1}{p_{N+1}^y} + C_{y3} \right] X_{k+2,N} \\
& + p_{k+1}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_{N+1}^y}{p_{k+1}^x} - \frac{C C}{p_{k+1}^x} - \frac{p_{N+1}^y}{2 p_{k+1}^x} F F + \frac{E E}{2} - \frac{p_{N+1}^y}{4} F F \right) - \frac{C_{y1}}{p_{k+1}^x} + \frac{1}{p_{N+1}^y} \right] X_{k,N+1} \\
& + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-A A \frac{p_{N+1}^y}{p_{k+1}^x p_{k+2}^x} + \frac{E E}{2} + \frac{p_{N+1}^y}{4} F F \right) + \frac{1}{p_{N+1}^y} \right] X_{k+1,N+1} \\
& + p_{k+2}^x \left[C_{y2} B B^{-1} \left(A A \frac{p_{N+1}^y}{p_{k+2}^x} + \frac{C C}{p_{k+2}^x} + \frac{p_{N+1}^y}{2 p_{k+2}^x} F F - \frac{E E}{2} + \frac{p_{N+1}^y}{4} F F \right) + \frac{C_{y1}}{p_{k+2}^x} + \frac{1}{p_{N+1}^y} \right] X_{k+2,N+1} = \\
& = \left[C_{y2} A A^{-1} \left(-\frac{p_{N+1}^y}{2} G G - \frac{p_{k+1}^x}{2} H H + \frac{p_{N+1}^y p_{k+1}^x}{4} I I \right) + p_{k+1}^x C_{y5} \right] \Sigma_{(k,N)} \\
& + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-\frac{p_{k+1}^x + p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_{N+1}^y (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x)}{4} I I \right) + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) C_{y5} \right] \Sigma_{(k+1,N)} \\
& + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(\frac{p_{N+1}^y}{2} G G - \frac{p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_{N+1}^y p_{k+2}^x}{4} I I \right) + p_{k+2}^x C_{y5} \right] \Sigma_{(k+2,N)} \\
& + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(-\frac{p_{N+1}^y}{2} G G + \frac{p_{k+1}^x}{2} H H + \frac{p_{N+1}^y p_{k+1}^x}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(k,N+1)} \\
& + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(\frac{p_{k+1}^x + p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_{N+1}^y (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x)}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(k+1,N+1)} \\
& + \left[C_{y2} B B^{-1} \left(\frac{p_{N+1}^y}{2} G G + \frac{p_{k+2}^x}{2} H H + \frac{p_{N+1}^y p_{k+2}^x}{4} I I \right) \right] \Sigma_{(k+2,N)} \\
& + \frac{p_{N+1}^y}{4} C_{y2} B B^{-1} \left[p_{k+1}^x (J J_{k,N} + J J_{k,N+1}) + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) (J J_{k+1,N} + J J_{k+1,N+1}) \right] \\
& + \frac{p_{N+1}^y p_{k+2}^x}{4} C_{y2} B B^{-1} (J J_{k+2,N} + J J_{k+2,N+1}) \\
& + C_{y4} \left[p_{k+1}^x Y_{(k,N)}^{0,1} + (p_{k+1}^x + p_{k+2}^x) Y_{(k+1,N)}^{0,1} + p_{k+2}^x Y_{(k+2,N)}^{0,1} \right]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :

$$\begin{aligned}
& K_1^{k(N+1)+N+1, (k-1)(N+1)+N} X_{k,N} + K_1^{k(N+1)+N+1, (k-1)(N+1)+N+1} X_{k,N+1} \\
& + K_1^{k(N+1)+N+1, k(N+1)+N} X_{k+1,N} + K_1^{k(N+1)+N+1, k(N+1)+N+1} X_{k+1,N+1} \\
& + K_1^{k(N+1)+N+1, (k+1)(N+1)+N} X_{k+2,N} + K_1^{k(N+1)+N+1, (k+1)(N+1)+N+1} X_{k+2,N+1} \\
& = K_2^{k(N+1)+N+1, (k-1)(N+1)+N} \Sigma_{k,N} + K_2^{k(N+1)+N+1, (k-1)(N+1)+N+1} \Sigma_{k,N+1} \\
& + K_2^{k(N+1)+N+1, k(N+1)+N} \Sigma_{k+1,N} + K_2^{k(N+1)+N+1, k(N+1)+N+1} \Sigma_{k+1,N+1} \\
& + K_2^{k(N+1)+N+1, (k+1)(N+1)+N} \Sigma_{k+2,N} + K_2^{k(N+1)+N+1, (k+1)(N+1)+N+1} \Sigma_{k+2,N+1} \\
& + K_3^{k,N} + K_3^{k+1,N} + K_3^{k+2,N} + K_3^{k,N+1} + K_3^{k+1,N+1} + K_3^{k+2,N+1}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\forall k \in [1, N-1]$$

B.2 Conditions aux limites sur les lèvres de la fissure

Ici nous présentons la modélisation d'une fissure transversale dans la chaussée. La fissure est considérée comme un bord libre, avec une ouverture de $5mm$, qui est présentée par deux lignes dans le schéma de discrétisation. Les équations des conditions sur les lèvres de la fissure sont alors données par 4.37.

Nous notons que (c, l) et $(c+1, l)$ ($\forall j \in [u, v]$) sont les indices des points sur la fissure, autrement dit la fissure se trouve entre les lignes $\bar{x} = \bar{x}_c$ et $\bar{x} = \bar{x}_{c+1}$, $\bar{y} = \bar{y}_u$ et $\bar{y} = \bar{y}_v$. Comme dans les équations de conditions aux limites pour $\bar{x} = -\infty$ et $\bar{x} = +\infty$, nous obtenons deux systèmes d'équations de condition sur les lèvres de la fissure sur les deux bords :

En remplaçant $k+1$, $k+2$ pour 1 et 2 dans B.18

$$\begin{aligned}
& p_{l+1}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c+2}^x}{p_{l+1}^y} + \frac{C C}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{c+2}^x}{2 p_{l+1}^y} E E - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c+2}^x}{4} E E \right) - \frac{C_{x2}}{p_{l+1}^y} - \frac{1}{p_{c+2}^x} + C_{x3} \right] X_{c+1,l} \\
& + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-B B \frac{p_{c+2}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c+2}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{c+2}^x} + C_{x3} \right] X_{c+1,l+1} \\
& + p_{l+2}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c+2}^x}{p_{l+2}^y} - \frac{C C}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{c+2}^x}{2 p_{l+2}^y} E E - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c+2}^x}{4} E E \right) + \frac{C_{x2}}{p_{l+2}^y} - \frac{1}{p_{c+2}^x} + C_{x3} \right] X_{c+1,l+2} \\
& + p_{l+1}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c+2}^x}{p_{l+1}^y} - \frac{C C}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{c+2}^x}{2 p_{l+1}^y} F F + \frac{D D}{2} - \frac{p_{c+2}^x}{4} F F \right) + \frac{1}{p_{c+2}^x} \right] X_{c+2,l} \\
& + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-B B \frac{p_{c+2}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + \frac{D D}{2} + \frac{p_{c+2}^x}{4} F F \right) + \frac{1}{p_{c+2}^x} \right] X_{c+2,l+1} \\
& + p_{l+2}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c+2}^x}{p_{l+2}^y} + \frac{C C}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{c+2}^x}{2 p_{l+2}^y} F F - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c+2}^x}{4} F F \right) + \frac{1}{p_{c+2}^x} \right] X_{c+2,l+2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{c+2}^x}{2}HH - \frac{p_{l+1}^y}{2}GG + \frac{p_{c+2}^x p_{l+1}^y}{4}II \right) + p_{l+1}^y C_{x5} \right] \Sigma_{c+1,l} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{c+2}^x(p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4}II \right) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)C_{x5} \right] \Sigma_{c+1,l+1} \\
&+ \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{c+2}^x}{2}HH - \frac{p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{c+2}^x p_{l+2}^y}{4}II \right) + p_{l+2}^y C_{x5} \right] \Sigma_{c+1,l+2} \\
&\quad + \left[C_{x1}AA^{-1} \left(-\frac{p_{c+2}^x}{2}HH + \frac{p_{l+1}^y}{2}GG + \frac{p_{c+2}^x p_{l+1}^y}{4}II \right) \right] \Sigma_{c+2,l} \\
&\quad + \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{c+2}^x(p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4}II \right) \right] \Sigma_{c+2,l+1} \\
&\quad + \left[C_{x1}AA^{-1} \left(\frac{p_{c+2}^x}{2}HH + \frac{p_{l+2}^y}{2}GG + \frac{p_{c+2}^x p_{l+2}^y}{4}II \right) \right] \Sigma_{c+2,l+2} \\
&\quad + \frac{p_{c+2}^x}{4} C_{x1}AA^{-1} [p_{l+1}^y(JJ_{c+1,l} + JJ_{c+2,l}) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)(JJ_{c+1,l+1} + JJ_{c+2,l+1})] \\
&+ \frac{p_{c+2}^x p_{l+2}^y}{4} C_{x1}AA^{-1}(JJ_{c+1,l+2} + JJ_{c+2,l+2}) + C_{x4} [p_{l+1}^y Y_{(1,l)}^{0,1} + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)Y_{(1,l+1)}^{0,1} + p_{l+2}^y Y_{(1,l+2)}^{0,1}]
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Ou nous pouvons écrire plus simplement :

$$\begin{aligned}
&K_1^{c(N+1)+l+1,c(N+1)+l} X_{c+1,l} + K_1^{c(N+1)+l+1,c(N+1)+l+1} X_{c+1,l+1} \\
&+ K_1^{c(N+1)+l+1,c(N+1)+l+2} X_{c+1,l+2} + K_1^{c(N+1)+l+1,(c+1)(N+1)+l} X_{c+2,l} \\
&+ K_1^{c(N+1)+l+1,(c+1)(N+1)+l+1} X_{c+2,l+1} + K_1^{c(N+1)+l+1,(c+1)(N+1)+l+2} X_{c+2,l+2} \\
&= K_2^{c(N+1)+l+1,c(N+1)+l} \Sigma_{c+1,l} + K_2^{c(N+1)+l+1,c(N+1)+l+1} \Sigma_{c+1,l+1} \\
&\quad + K_2^{c(N+1)+l+1,c(N+1)+l+2} \Sigma_{c+1,l+2} + K_2^{c(N+1)+l+1,(c+1)(N+1)+l} \Sigma_{c+2,l} \\
&\quad + K_2^{c(N+1)+l+1,(c+1)(N+1)+l+1} \Sigma_{c+2,l+1} + K_2^{c(N+1)+l+1,(c+1)(N+1)+l+2} \Sigma_{c+2,l+2} \\
&\quad + K_3^{c+1,l} + K_3^{c+1,l+1} + K_3^{c+1,l+2} + K_3^{c+2,l} + K_3^{c+2,l+1} + K_3^{c+2,l+2}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\forall l \in [u, v]$$

En remplaçant $k - 1$, k pour N et $N + 1$ dans B.20

$$\begin{aligned}
& p_{l+1}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c-1}^x}{p_{l+1}^y} + \frac{C C}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{k+1}^x}{2 p_{l+1}^y} E E - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c-1}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{c-1}^x} + C_{x3} \right] X_{c-1,l} \\
& + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-B B \frac{p_{c-1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c-1}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{c-1}^x} + C_{x3} \right] X_{c-1,l+1} \\
& + p_{l+2}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c-1}^x}{p_{l+2}^y} - \frac{C C}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{c-1}^x}{2 p_{l+2}^y} E E - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c-1}^x}{4} E E \right) - \frac{1}{p_{c-1}^x} + C_{x3} \right] X_{c-1,l+2} \\
& + p_{l+1}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c-1}^x}{p_{l+1}^y} - \frac{C C}{p_{l+1}^y} - \frac{p_{c-1}^x}{2 p_{l+1}^y} F F + \frac{D D}{2} - \frac{p_{c-1}^x}{4} F F \right) - \frac{C_{x2}}{p_{l+1}^y} + \frac{1}{p_{c-1}^x} \right] X_{c,l} \\
& + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-B B \frac{p_{c-1}^x}{p_{l+1}^y p_{l+2}^y} + \frac{D D}{2} + \frac{p_{c-1}^x}{4} F F \right) + \frac{1}{p_{c-1}^x} \right] X_{c,l+1} \\
& + p_{l+2}^y \left[C_{x1} A A^{-1} \left(B B \frac{p_{c-1}^x}{p_{l+2}^y} + \frac{C C}{p_{l+2}^y} + \frac{p_{c-1}^x}{2 p_{l+2}^y} F F - \frac{D D}{2} + \frac{p_{c-1}^x}{4} F F \right) + \frac{C_{x2}}{p_{l+2}^y} + \frac{1}{p_{c-1}^x} \right] X_{c,l+2} = \\
& = \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-\frac{p_{c-1}^x}{2} H H - \frac{p_{l+1}^y}{2} G G + \frac{p_{c-1}^x p_{l+1}^y}{4} I I \right) + p_{l+1}^y C_{x5} \right] \Sigma_{c-1,l} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{c-1}^x (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4} I I \right) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) C_{x5} \right] \Sigma_{c-1,l+1} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(\frac{p_{c-1}^x}{2} H H - \frac{p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{c-1}^x p_{l+2}^y}{4} I I \right) + p_{l+2}^y C_{x5} \right] \Sigma_{c-1,l+2} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(-\frac{p_{c-1}^x}{2} H H + \frac{p_{l+1}^y}{2} G G + \frac{p_{c-1}^x p_{l+1}^y}{4} I I \right) \right] \Sigma_{c,l} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(\frac{p_{l+1}^y + p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{c-1}^x (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y)}{4} I I \right) \right] \Sigma_{c,l+1} \\
& + \left[C_{x1} A A^{-1} \left(\frac{p_{c-1}^x}{2} H H + \frac{p_{l+2}^y}{2} G G + \frac{p_{c-1}^x p_{l+2}^y}{4} I I \right) \right] \Sigma_{c,l+2} \\
& + \frac{p_{c-1}^x}{4} C_{x1} A A^{-1} \left[p_{l+1}^y (J J_{c-1,l} + J J_{c,l}) + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) (J J_{c-1,l+1} + J J_{c,l+1}) \right] \\
& + \frac{p_{c-1}^x p_{l+2}^y}{4} C_{x1} A A^{-1} (J J_{c-1,l+2} + J J_{c,l+2}) \\
& + C_{x4} \left[p_{l+1}^y Y_{c-1,l}^{0,1} + (p_{l+1}^y + p_{l+2}^y) Y_{c-1,l+1}^{0,1} + p_{l+2}^y Y_{c-1,l+2}^{0,1} \right]
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Ou nous pouvons écrire plus simple :

$$\begin{aligned}
& K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l} X_{c-1, l} + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+1} X_{c-1, l+1} \\
& + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+2} X_{c-1, l+2} + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l} X_{c, l} \\
& + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+1} X_{c, l+1} + K_1^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+2} X_{c, l+2} \\
= & K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l} \Sigma_{c-1, l} + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+1} \Sigma_{c-1, l+1} \\
& + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-2)(N+1)+l+2} \Sigma_{c-1, l+2} + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l} \Sigma_{c, l} \\
& + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+1} \Sigma_{c, l+1} + K_2^{(c-1)(N+1)+l+1, (c-1)(N+1)+l+2} \Sigma_{c, l+2} \\
& + K_3^{c-1, l} + K_3^{c-1, l+1} + K_3^{c-1, l+2} + K_3^{c, l} + K_3^{c, l+1} + K_3^{c, l+2}
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\forall l \in [u, v]$$

Résumé

Les modèles simplifiés usuels de dimensionnement des chaussées ne permettent pas de modéliser des chaussées fissurées et une modélisation par éléments finis 3D peut s'avérer très lourde. Dans l'objectif de construire un outil rapide et efficace de diagnostic et d'entretien des chaussées dégradées par le trafic, un modèle simplifié est proposé. Ce modèle repose sur un modèle simplifié adapté aux problèmes de flexion, le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4) à $5n$ équations (n : nombre total de couches) et le modèle élastique de Boussinesq pour le massif de sol. Programmé sous Matlab, dans le cas de bicouches de chaussées fissurées verticalement, ce modèle donne très rapidement d'excellents résultats par comparaison avec des calculs éléments finis 3D. Les cas de chargement de retrait thermique et de gradient thermique sont intégrés dans la modélisation et validés. Pour accélérer encore plus l'obtention des solutions dans le cadre de calculs multi-cycles, une méthode d'extrapolation des résultats du 2D pour estimer le 3D est exposée.

Mots clés mécanique - modélisation - matériaux - chaussée - multicouche - fissure - massif semi-infini - éléments finis - numérique

Abstract

Most of design pavement models can not be used to simulate cracking in pavements. This problem can be modelled by using 3D finite element methods, but such calculations can be very time-consuming. In the objective to build a software for the evaluation of cracked pavements, and design solution for rehabilitation, we propose here to use a simplified plate model for bending problem linked to the Boussinesq model for the soil. The complete algorithm is programmed in the Matlab software. This model gives, very quickly, good approximations of the design stress fields near interfaces and vertical cracks in comparison with 3D finite element calculations. Thermal and shrinkage problem are studied and validated. In the aim to simulate some fatigue problems, a method is presented to accelerate the calculations.

Keywords mechanics - modelling - materials - pavement - multilayers - crack - semi-infinite mass - finite element - numerics