Au dela du tas de sable, un nouveau modèle combinatoire: Le modèle flèche-hauteur.

Arnaud Dartois

▶ **To cite this version:**

Arnaud Dartois. Au dela du tas de sable, un nouveau modèle combinatoire: Le modèle flèche-hauteur.. Informatique [cs]. Ecole Polytechnique X, 2004. Français. NNT : . pastel-00001113

HAL Id: pastel-00001113
https://pastel.hal.science/pastel-00001113

Submitted on 8 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité :

INFORMATIQUE

par

Arnaud DARTOIS

Titre de la thèse :

AU-DELÀ DU TAS DE SABLE, UN NOUVEAU MODÈLE COMBINATOIRE : LE MODÈLE FLÈCHE-HAUTEUR

Soutenue le 2 décembre 2004 devant le jury composé de :

M.	Jacques Mazoyer	Président
M.	Robert Cori	Directeur
MM.	Antonio Machí	Rapporteurs
	Michel Morvan	
	Deepak Dhar	
MM.	Mireille Bousquet-Mélou	Examinateurs
	Renzo Pinzani	
	Jacques Mazoyer	
M.	Dominique Rossin	Invité

LABORATOIRE D'INFORMATIQUE
Unité Mixte CNRS n°7161
École Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex FRANCE

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux *modèles discrets* dont nous avons étudié les propriétés dynamiques et *combinatoires*. Il s'agit du *modèle du tas de sable abélien* et du *modèle flèche-hauteur*, qui est une généralisation du premier.

Après avoir défini un cadre rigoureux pour l'étude du tas de sable, une analyse algébrique est présentée au terme de laquelle apparaissent de nouveaux résultats théoriques (liens entre le groupe du tas de sable d'un graphe et le groupe de Coxeter dont il est une représentation) et pratiques (calcul de l'identité sur la grille). Enfin, le problème majeur de la distribution des avalanches sur le modèle est traité sur de nombreux cas (arbres, cycles, lollypop, graphes complets, roues simples et multiples) par des méthodes d'énumération combinatoire qui permettent en outre de proposer un cadre général d'étude (polynômes d'avalanches) et de mettre en évidence des limites à des résultats pourtant communément admis (robustesse de la distribution sur la grille).

Dans une deuxième partie, une théorie générale sur le modèle flèche-hauteur est proposée. Elle généralise en particulier les théories algébrique (groupe additif, théorème de caractérisation des configurations récurrentes) et dynamique (treillis de la relaxation, algorithme thermique) connues sur le tas de sable. Après quoi, diverses perspectives et pistes de recherche sur le modèle, motivées par de rapides études préliminaires, sont abordées.

Abstract

In this thesis, we focused our study on two discrete models, and mostly on their dynamical and combinatorial properties. These models are the sandpile and the height-arrow models. This last model is in fact a generalisation of the former one.

Within a rigourous framework, we first present an algebraic analysis of the sandpile that leads to new theoretical results (links between the sandpile group of a given graph and the Coxeter group associated to the same graph) and practical (computing of the identity on the grid). At last, the major challenge, namely the problem of the avalanche distribution, is considered for numerous families (trees, cycles, lollypops, complete graphs, simple and multiple wheels) and completely or partially solved by enumerative methods. Besides, this approach suggests a new global framework (the avalanche polynomials) to deal with this question and gives some limitations for already known results (robustness of the distribution on the grid).

The second part of the thesis is devoted to a general theory for the height-arrow model. In particular, it generalizes the algebraic (abelian group, caracterization of recurrent configurations) and dynamical (lattice of the relaxation, burning algorithm) theories known for the sandpile. To conclude, many perspectives and research angles, motivated by short prelimniary studies, are discussed.

Aux fées qui peuplent mes rêves...

Table des matières

Remerciements

> Impose ta chance, serre ton bonheur, va vers ton risque...
> À te regarder, ils s'habitueront.
>
> René Char

Fini. Déjà ou enfin, c'est selon. Aboutissement patent ou inéluctable issue d'un travail de plus de deux ans ; ce n'est pas à moi de répondre. Évidence cependant d'un tournant décisif, d'un passage crucial, mais surtout, d'un moment privilégié pour marquer le pas, se retourner et accorder une pensée sincère et un merci calligraphié, à chaque personne, qui, par son aide, son soutien ou encore sa présence a contribué de près ou de loin à l'existence de cet instant. Alors, à la lecture les lignes qui suivent, il convient de reconnaître un réel sentiment plutôt qu'un simple usage.

En tout premier lieu, une figure s'impose comme une évidence : celle de mon directeur de thèse, Robert Cori. Évoquer sans réduire, ici plus qu'ailleurs cette tâche est impossible. Des qualités pédagogiques incomparables, une rigueur et un souci du détail permanents, un enthousiasme conquérant : les premiers éléments d'une longue liste qui ont su me séduire chez Robert et m'ont conduit à m'engager en thèse sous sa direction. Alors aujourd'hui, je remercie le professeur, mais aussi l'homme que j'ai appris à connaître, et que j'estime tout autant.

Ensuite, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les membres de mon jury. À Jacques Mazoyer, tout d'abord, qui en a gentiment accepté la présidence. Je n'oublie pas mes rapporteurs qui ont eu le courage de se plonger dans mon manuscrit : Toni Machí qui m'a fait découvrir les meilleurs gnocchi de la Ville éternelle, Michel Morvan dont les conseils glanés lors de soirées vins-fromages ou de rencontres informelles m'ont été très précieux, et enfin le professeur Deepak Dhar qui n'a pas pu assister à ma soutenance, mais dont je suis gré de la peine qu'il a prise à déceler la moindre approximation dans ma thèse.

Je remercie également Mireille Bousquet-Mélou qui m'a fait regarder les animaux d'un autre œil, et dont les remarques toujours pertinentes m'ont beaucoup servies. In ultimo, vorrei dire a Renzo Pinzani che la sua presenza alla mia tesi mi ha fatto molto piacere e che mi dispiace tanto di non aver passato piú tempo a Firenze.

Le dernier membre de mon jury, et non le moindre, fut Dominique Rossin. Ma thèse lui doit beaucoup. Il a su m'épauler et me guider dans mes recherches comme un second

directeur de thèse. Je n'oublierai pas les nombreuses pauses café où nous parlions tour à tour de l'énumération de sous-séquences d'un langage rationnel, de la technique de masquage d'un tirage photographique, du groupe du modèle flèche-hauteur ou encore du dernier film intéressant à voir absolument.

Outre Dominique et Robert, j'ai collaboré avec Clémence Magnien, Francesca Fiorenzi et Paolo Francini. J'ai eu énormément de plaisir à travailler avec chacun d'eux, et j'ai beaucoup appris à leur côté. J'espère que ces collaborations ont aussi été bénéfiques pour eux.

J'évoquerai maintenant la foule des personnes que j'ai côtoyées durant ma thèse. Jean-Pierre Jouannaud tout d'abord qui dirige le LIX, mon laboratoire d'accueil, mais aussi Daniel Krob puis Jean-Eric Pin qui ont successivement dirigé le LIAFA où j'ai passé un temps conséquent. Je pense aussi à Francesco Brenti et Antonio Machí qui m'ont accueilli à Rome. Que j'aie partagé un bureau avec elles (Clémence, Jean-Loup, Nicolas, Dmitri,...) ou de plus ou moins longues pauses café (Jérôme, Simon, Régis, Beshad, Anne, Olivier, Christian, Enrica, Gilles, Jean-Eric, Moez, Hugo, Mireille, Dominique, Antoine, Christophe, Jean-Marc, Bernadette, François, Pierrick, Andreas, Claire, Matthieu, Ha Duong, Inès, Jean, Fabrice, Anca, Marc, Blaise, Philippe, Pierre, Quang, Luca, Éric, Michel, Ada, Katia, Thomas, Emmanuel, Roberto, Olivier, Christiane,...), je les remercie pour le souvenir sympathique que je garde de ces moments. Je remercie aussi Noëlle, Catherine, Evelyne, Houy, Matthieu, Laifa, et tous ceux qui ont su m'apporter une aide fréquente et souvent salvatrice.

Lors de mes séjours à l'étranger pour des conférences ou des écoles, j'ai aussi été amené à faire des rencontres très enrichissantes ; alors merci à Éric, Frédéric, Sylvie, Jean-Christophe, Fabrizio, Federico, Alessandro, Riccardo, Mario, Giusi, Fabio, Matteo, Philippe, Yvan, Koji, Satoshi, Mercedes, Martin, et tous ceux que j'oublie.

Enfin, je voudrais remercier mes amis (Anne-Laure, Laurent, Isadora, Jérémie, Dorothée, Jean-Michel, Pierre, Ee-leen, Yannick, Alexandra, Ardoin, Isabelle, Jérémie, Sophie, Touti, Lili, Hakim, Jean, Matthieu, Caroline, Laure, Emeline, François, Vincent, Marie, Denis, Claire-Lise, David, Clémence, Lionel, Christine, Marie-Capucine, Annie, Edmondo, Aude, Ann, Agnès, Laurent, Ludovic, Laure, Emilie, Frederic, Catherine, Estelle, Pierre, Pascal, Virginie, Caroline, Christophe, Rosy, Pat, Julie, Benoit, Jérôme, Quitterie, Régis, Marjolaine, Marie, André,...) et ma famille (mes parents, mes grands-parents, Céline, Thomas, Matthieu, Vianney, Caroline, Aurélie, Stéphanie, Anne-Sophie, Marion, Alexandra, Jean-Marc, Jean-Pierre, Linette, Paule, Georges, Waly, Zaf, Jean-Pierre, Marie-Pierre, Jean-Louis, Cali, Serge, Ralf, Sylvia, Anne-Lise, David, Corinne, Auguste, Déna, Juliette, Isabelle, Eric, Édouard, Romain, Gilles, Josette, Nathalie, François, Héloïse, Thomas, Simon, Dorothée, Stéphane, Yves, Francette, Valérie,...) pour le soutien indéfectible qu'ils m'ont toujours témoigné.

Avant-propos

> Qui peut donc calculer le trajet d'une molécule ? Que savons-nous si des créations de monde ne sont point déterminées par des chutes de grains de sable ?
>
> VICTOR HUGO

Le sujet d'une thèse fait souvent sourire l'entourage, surtout quand il porte un nom qui n'est pas sans rappeler l'univers enfantin. Pour ceux qui connaissent le monde de la recherche, un tel rapprochement n'est pas qu'anecdotique. Le chercheur et l'enfant ont plus d'un point commun. Est-ce à dire que tous les chercheurs sont de grands enfants... Je n'épiloguerai pas, ce manuscrit est déjà trop long ; et à tous ceux qui m'ont demandé, me demandent et me demanderont encore comment et pourquoi j'ai choisi le *modèle du tas de sable* comme sujet de thèse, je réponds par le dessin suivant, tiré de [62].

Table des figures

Introduction

Avec vos grains de sable entasser vos instants,
Faire un monceau de vœux, de systèmes, d'algèbres,
Devant la pyramide immense des ténèbres,
Avec l'esprit humain tâter l'esprit divin,
C'est inutile et fou, c'est imprudent, c'est vain.
C'est triste ; et l'impossible est là qui vous regarde.

VICTOR HUGO

Qu'est-ce que la combinatoire ?

Cette thèse s'inscrit dans un domaine de recherche appelé *combinatoire*. On travaille en *combinatoire* sur des familles d'*objets discrets*. On peut soit chercher à compter le nombre d'objets qui vérifient certaines propriétés : on parle de *combinatoire énumérative* ; soit chercher à munir ces familles de structures algébriques : il s'agit alors de *combinatoire algébrique*.

Outre la curiosité scientifique, l'étude de ce domaine est motivée par la volonté de mieux comprendre les structures liées à de nombreuses classes d'objets discrets, mais aussi par l'étude des probabilités discrètes (directement liée à des problèmes physiques très concrets) ou encore par l'analyse d'algorithmes.

$$-\ o\ -$$

Un des buts de la *combinatoire énumérative* est de mettre en évidence des *bijections* entre familles d'objets. Si E et F sont deux ensembles, on rappelle qu'un *graphe fonctionnel* G_f de E dans F est une partie du *produit cartésien* $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$ qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ |\{y \in F, (x, y) \in G_f\}| \leq 1.$$

On appelle *domaine de définition* du graphe fonctionnel G_f, le plus grand sous-ensemble D de E tel que :

$$\forall x \in D,\ |\{y \in F, (x, y) \in G_f\}| = 1.$$

Si $D = E$, on dit que G_f est une *application* de E dans F. Pour une telle application, on utilise la notation $f : E \to F$, et on note $f(x)$ l'unique élément y de F qui vérifie $(x, y) \in G_f$. On dit que y est l'*image* de x. L'*image directe* d'une application $f : E \to F$ est l'ensemble $f(E) = \{f(x), x \in E\}$. Si $F = f(E)$, on dit que f est une *surjection*. Si E et

F sont des ensembles finis, cela implique $|E| \geq |F|$. De même si deux éléments quelconques distincts de E ont des images distinctes par f, l'application f est une *injection*. Si E et F sont des ensembles finis, cela implique $|E| \leq |F|$. Une application qui est à la fois *surjective* et *injective* est une *bijection*. Les ensembles E et F sont alors dits *équipotents*. En particulier, s'ils sont finis, ils ont même *cardinal* : $|E| = |F|$.

$-\ o\ -$

En *combinatoire algébrique*, on cherche à munir nos ensembles d'objets de structures aussi riches que possible. Si E est un ensemble, on rappelle qu'une *loi de composition interne* sur E est une application de $E \times E$ dans E. Une telle loi est souvent munie de propriétés supplémentaires. Suivant ces dernières, on peut parler pour E, de *monoïde*, de *groupe*, d'*anneau*, de *corps*... Pour deux ensembles *équipotents* on cherche alors des *bijections* qui respectent ces structures algébriques, c'est-à-dire ce qu'on appelle des *isomorphismes*.

$-\ o\ -$

Plan du mémoire

Le travail réalisé lors de cette thèse gravite autour des deux problématiques, *énumérative* et *algébrique*, que posent la combinatoire moderne. Le mémoire qui suit est divisé en deux parties suivies d'un chapitre de prérequis scientifiques. Chacune des parties contient trois chapitres. La première partie est consacrée au *modèle du tas de sable abélien*, et la seconde à un modèle plus récent et plus général, le *modèle flèche-hauteur*.

$-\ o\ -$

Le *modèle du tas de sable*, inventé par Bak, Tang et Wiesenfeld il y a 15 ans environ (cf. [3]), a été principalement étudié par deux communautés : celle des physiciens et celle des informaticiens. Il s'agit d'un point de rencontre privilégié, car il constitue le premier exemple simple de *systèmes complexes*. La notion de *complexité*, omniprésente dans les phénomènes naturels, pose des questions théoriques très actuelles. En effet, maintenant qu'est intégré le fait qu'elle peut émerger de systèmes très simples, il reste à en comprendre les mécanismes, ou du moins à en extraire la quintessence. La première partie de cette thèse a apporté plusieurs réponses et éclaircissements sur ce phénomène.

Le premier chapitre est consacré aux rappels historiques puis structurels du modèle. On explique comment on passe du modèle très simple de la grille, plus particulièrement étudié par la communauté physicienne, au modèle général sur un graphe quelconque, apanage des combinatoristes. On donne les résultats essentiels dont on a besoin dans la suite.

Le second chapitre commence aussi par un rappel : le *groupe* défini sur le modèle, dit *groupe du tas de sable*. L'étude de ce groupe constitue une motivation importante, car sa structure en fonction du graphe choisi est encore mal comprise. À titre d'exemple, on étudie le cas de la famille des graphes diédraux (cf. [18]), qui s'avère non trivial. Cette analyse permet alors de déduire deux résultats théoriques : *primo*, il est possible de construire un graphe tel que le groupe du tas de sable est non cyclique, et tel que l'ordre de

chacun de ses sous-groupes cycliques dans sa décomposition en *forme normale de Smith* est divisible par un entier donné, et *secondo*, le groupe du tas de sable n'a aucun lien avec la version non orientée du *graphe de Cayley* d'un *groupe de Coxeter* donné, dans le cas général. On termine ce chapitre en étudiant le cas de l'*identité du groupe* sur la grille (cf. [19]). Ce problème a été très étudié en raison de la *structure fractale* de l'identité dans ce cas. On montre de nouveaux résultats à travers une méthode adaptée, et on propose des conjectures plus fines que celles précédemment proposées.

Enfin le dernier chapitre de cette partie est consacré à l'autre thème important du modèle : la *distribution des avalanches*. On introduit la notion de *polynôme d'avalanches* qui nous permet de traiter le problème général de manière plus compréhensible (cf. [8]). On traite les cas des familles assez simples de graphes. En particulier, on exhibe un exemple caractéristique du pouvoir explicatif de la combinatoire énumérative (cas du graphe complet). On définit deux opérations qui génèrent l'ensemble des polynômes d'avalanches de graphes, et on étudie de manière assez précise leurs actions sur ces polynômes. Enfin, on traite le cas de la famille des roues, qui correspondent en fait à des grilles avec des conditions aux bords particulières (cf. [21, 22]). Le cas de la roue simple est complètement résolu grâce à une méthode originale faisant appel à des *transducteurs*. Le cas de la roue générale est partiellement résolu, mais suffisamment pour mettre en défaut les propriétés de robustesse jusque là admises pour la grille.

$-\ o\ -$

La seconde partie est consacrée à un modèle plus récent que le tas de sable, et qui est une généralisation de ce dernier. Il s'agit du *modèle flèche-hauteur*. Ce modèle a été introduit dans [52]. Dans cet article, les auteurs résolvent un cas particulier, appelé *modèle du marcheur eulérien*, qui admet de nombreuses analogies avec le modèle du tas de sable, mais ne démontrent rien sur le modèle dans sa généralité. La seconde partie de ce mémoire est précisément consacrée à établir la théorie régissant le modèle flèche-hauteur dans le cas général. Cette partie fait l'objet d'une publication très synthétique (cf. [21]).

Le premier chapitre propose des définitions adéquates pour le modèle, et étend plusieurs résultats concernant les séquences d'éboulements à ce nouveau cadre. En particulier, on montre de quelle manière on peut en déduire les résultats concernants les deux sous-cas principaux : le *modèle du tas de sable* et le *modèle du marcheur eulérien*.

Dans le second chapitre, on commence par expliquer comment peut se généraliser le théorème de reconnaissance des *configurations récurrentes*. On introduit au préalable plusieurs notions essentielles. On en déduit ensuite une généralisation de l'*algorithme thermique*, central dans la théorie. Enfin, on aborde le *groupe* associé au modèle et on montre comment définir une addition cohérente, et pourquoi il n'existe pas de choix naturel pour cette addition, à la différence du modèle du tas de sable.

Le dernier chapitre propose des extensions et de nouvelles pistes de recherche sur le modèle. On montre d'abord comment on peut toujours ramener le problème à un cas simple dit λ-normalisé. Ensuite, on propose un algorithme unificateur pour trouver des bijections entre les configurations du modèle et les arbres couvrants quand le modèle est soit celui du tas de sable, soit celui du marcheur eulérien. Le cas des modèles hybrides est ouvert. On propose aussi une autre transformation avant de définir un nouvel ensemble d'opérateurs, qui agit comme un groupe abélien fini sur l'ensemble des configurations récurrentes, et qui est lié au groupe classique précédemment défini.

Première partie

Le modèle du tas de sable abélien (TDS)

Chapitre 1

Historique du tas de sable et définitions

Sommaire

— *o* —

Ce premier chapitre est consacré à la description du *modèle du tas de sable*. Dans un premier temps, on rappelle le contexte dans lequel ce modèle est apparu il y a 15 ans environ (cf. [2, 3]). D'un point de vue purement physique, il s'est révélé très intéressant : il s'agit en effet du premier modèle simple présentant de l'auto-organisation critique, un phénomène très courant dans la nature mais toujours très mal compris.

On montre ensuite comment le modèle a été généralisé à un cadre plus théorique. Il n'est plus défini sur une grille, comme l'ont tout d'abord fait Bak, Tang et Wiesenfeld dans [3], mais sur un graphe quelconque. Les notions d'*avalanche*, de *relaxation* et de *configuration récurrente* ont un pendant naturel dans ce cadre.

Enfin, on énonce les quelques résultats fondamentaux concernant l'ensemble des configurations récurrentes du modèle : le théorème de caractérisation des configurations récurrentes (Théorème 1.6 page 42) appelé communément *critère de Dhar*, et l'*algorithme thermique* qui permet d'associer une configuration récurrente unique à toute configuration. Le nombre de configurations récurrentes est en fait égal au nombre d'arbres couvrants du graphe : on présente une des deux bijections classiques connues ([23, 9]).

— *o* —

1.1 Modèle original et auto-organisation critique

1.1.1 Le modèle de Bak, Tang et Wiesenfeld

Le *modèle du tas de sable* a été inventé par les physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld (cf. [3]). Il consiste en un jeu sur un échiquier. Partant d'un échiquier vide, on ajoute des grains sur les cases de l'échiquier au fur et à mesure. Au début il ne se passe rien. Au bout d'un certain temps, il peut y avoir beaucoup de grains sur une même case. On applique alors la règle suivante : si une case contient au moins 4 grains, alors elle perd ces 4 grains et en donne un à chacune des cases voisines. Si la case est sur un des bords (resp. un des coins) de l'échiquier, un (resp. deux) des grains est perdu et passe par dessus bord. Cette règle est illustrée par la Figure 1.1 ; on dit que la case s'est éboulée. Bien sûr, quand

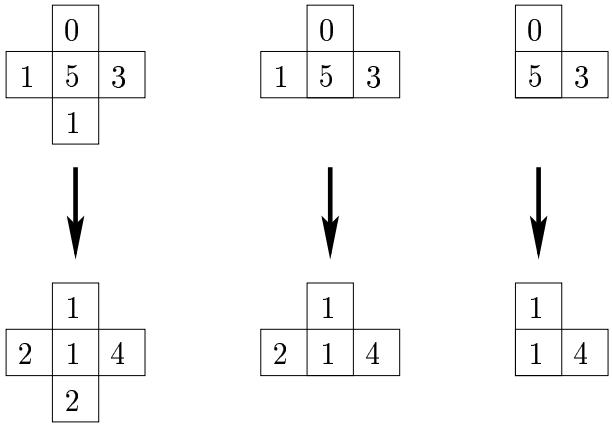


FIG. 1.1 – Règle d'éboulement de Bak, Tang et Wiesenfeld.

un éboulement se produit, il peut provoquer toute une séquence d'autres éboulements en chaîne. Ce modèle très simple ne prend pas en compte toute la complexité d'un vrai tas de sable. Cependant, son intérêt vient du fait qu'il permet de mettre en évidence des phénomènes non triviaux et pourtant fréquents dans la nature (cf. [2, 57]). Il s'agit en fait du premier modèle présentant de l'auto-organisation critique.

Le modèle $1D$

Une version $1D$ du modèle donne une certaine intuition. Elle est légèrement différente. On considère une demi-droite infinie à droite et des colonnes de grains de sable de tailles décroissantes. La règle d'éboulement correspond alors à la règle suivante : étant donnée une colonne, si la colonne suivante a au moins deux grains de moins, alors un grain s'éboule de cette colonne sur la suivante (cf. Figure 1.2 page suivante). De cette manière, partant d'une configuration en forme de demi-tas décroissant, on garde cette même forme générale après les éboulements. Ce modèle a été très étudié dans la littérature ([42] ,[32] et [46]), ainsi que certaines variantes pour lesquelles il existe encore quelques problèmes ouverts ([15],[41]).

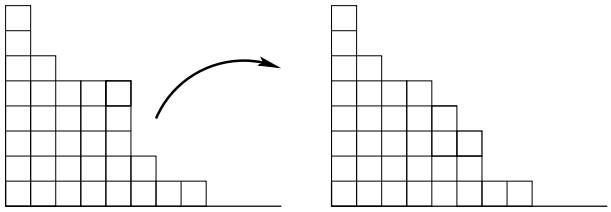
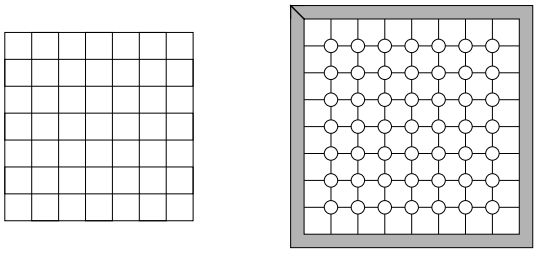


FIG. 1.2 – Éboulement sur le modèle $1D$.

Définition du modèle sur un graphe

En fait, on peut construire un modèle équivalent à celui de Bak, Tang et Wiesenfeld, mais dont le support est un graphe : une grille dans ce cas. Les sommets de la grille correspondent aux cases de l'échiquier, et deux sommets sont voisins, c'est-à-dire reliés par une arête si les cases qu'ils représentent sont voisines, c'est-à-dire ont un côté commun. La Figure 1.3 donne l'exemple d'un échiquier de 7 cases sur 7. On crée un sommet



échiquier grille avec puits

FIG. 1.3 – Échiquier et grille équivalente.

supplémentaire qui correspond au bord de l'échiquier. On grise ce sommet que l'on appelle le *puits*. La règle d'éboulement est alors très simple : si un sommet contient plus de 4 grains, alors il en donne un à chacun de ses voisins. Le puits est alors un sommet particulier, dans la mesure où il accumule les grains sans jamais s'ébouler.

Si on fait le même type de construction à partir du modèle $1D$, on trouve le graphe de la ligne. De manière générale, on peut s'intéresser aux changements de comportement du modèle quand on modifie son support. La section 2.2 est, par exemple, consacrée à l'étude du groupe défini sur le modèle quand le support varie au sein de certaines familles de graphes.

1.1.2 Auto-organisation critique

Complexité

Comme on l'a mentionné plus haut, le principal intérêt de ce modèle est qu'il est un paradigme très simple d'*auto-organisation critique*. Cela signifie que, quand le système évolue tout seul pendant un certain temps, il converge vers des états que l'on peut qualifier de *critiques*, c'est-à-dire tels qu'une petite modification peut entraîner des phénomènes de tailles très variables. À ce titre, le modèle du tas de sable est un exemple de *système*

complexe. La *complexité* se caractérise par une variabilité importante sur une grande gamme d'échelle.

La complexité se retrouve partout dans la nature que ce soit en biologie (extinctions biologiques [55]), en géographie (côte de la Norvège [27]), en physique (intensité lumineuse émise par un quasar [51]), *etc*, que dans la société (taille des villes [63]). La Figure 1.4

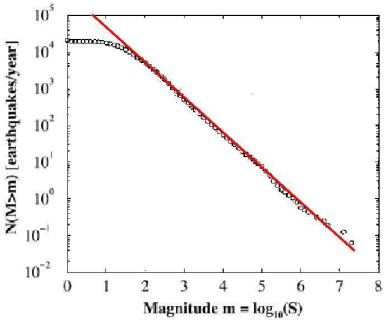


FIG. 1.4 – Distribution des tremblements de terre par magnitude.

montre la distribution des tremblements de terre par magnitude sur une année ([6]). La magnitude est une grandeur proportionnelle au log de l'énergie. Cette distribution correspond donc bien à une loi puissance pour l'énergie. La loi de Zipf correspond à la ligne rouge. La déviation par rapport à la droite pour les petites magnitudes est due à la difficulté de détection des tremblements de terre de faible intensité.

Le fait qu'un modèle aussi simple que celui du tas de sable fasse émerger de la complexité laisse penser que, peut-être, ce que l'on a coutume d'appeler des catastrophes ne sont pas des accidents, mais des phénomènes à très grande échelle qui, même s'ils ont une faible probabilité d'apparition, ne peuvent pas être évacués. Il est en quelque sorte aussi anormal de constater mille tremblements de terre de faible magnitude que d'en observer un de magnitude beaucoup plus importante sur une même période de temps, et l'existence de crashs boursiers n'est pas surprenante, si on suppose que les marchés financiers sont complexes ([47]).

Loi puissance et loi de Zipf

Les systèmes dits complexes sont caractérisés par des *lois puissances*, c'est-à-dire des lois du type $y = ax^{-b}$. En échelles logarithmiques, on obtient des droites de pente b en valeur absolue. Quand b vaut 1 on parle de *loi de Zipf*, car ce dernier a fait de remarquables observations menant à une telle loi dans [63] (classement des villes par taille, nombre d'occurrences des mots dans *Ulysse* de James Joyce, *etc.*).

Pour le modèle du tas de sable sur la grille, on retrouve une loi puissance, mais la valeur théorique de sa pente est encore un problème ouvert. Dans ce modèle, on regarde la taille des *avalanches*, c'est-à-dire le nombre d'éboulements quand on ajoute un grain au hasard sur un sommet de la grille. On obtient par exemple la Figure 1.5 page suivante quand on réalise cette expérience sur une grille 100×100 en répétant l'opération 1000000 de fois. On observe bien une loi puissance. La variabilité des grandes valeurs s'explique par la finitude de la grille et les effets de bords que cela entraîne.

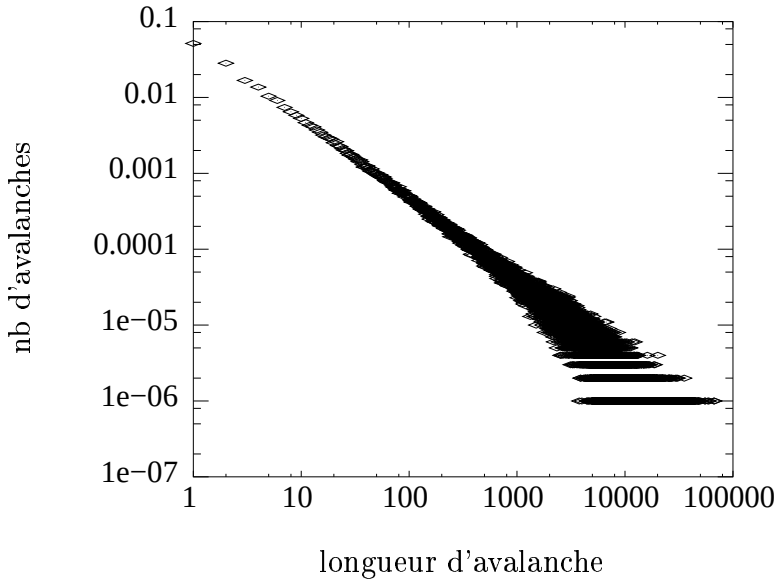


FIG. 1.5 – Distribution des avalanches (grille 100×100).

1.2 Modèle général

De manière générale, on peut définir le modèle du tas de sable sur un graphe ou un multi-graphe quelconque, dont on a distingué un sommet. Ce sommet est appelé *puits*. Dans la suite, $G = (S, A)$ représente un graphe (au sens générique du terme, c'est-à-dire au sens de graphe ou multi-graphe) non orienté connexe. Si le graphe G n'est pas connexe, il suffit de considérer le modèle sur chacune de ses composantes connexes. En particulier, il faut alors choisir un puits par composante connexe.

Définition 1.1 Un *modèle de tas de sable*, ou tout simplement un *tas de sable* sur G, est un couple $G_{\mathtt{q}} = (G, \mathtt{q})$, où $\mathtt{q}$ est un sommet de G, choisi pour être le *puits* du modèle.

On dit que G est le *graphe* ou le *support* du modèle $G_{\mathtt{q}}$. On note S^* l'ensemble des sommets différents du puits :

$$S^* = \{x_i \in S, x_i \neq \mathtt{q}\}.$$

On dit aussi qu'un sommet de S^* est *régulier*. Une *représentation* du tas de sable $G_{\mathtt{q}}$ est une représentation de G où l'intérieur du cercle représentant le puits $\mathtt{q}$ est grisé.

Exemple 1.1
La Figure 1.6 montre les représentations de deux modèles de tas de sable différents. Ils ont comme support le même graphe non orienté connexe $G = (S, A)$ défini par :

$$\begin{aligned} S &= \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \\ A &= \{(x_0, x_1), (x_1, x_5), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)\}. \end{aligned}$$

Ici, le graphe G considéré est un arbre. Dans la représentation de chaque modèle, on

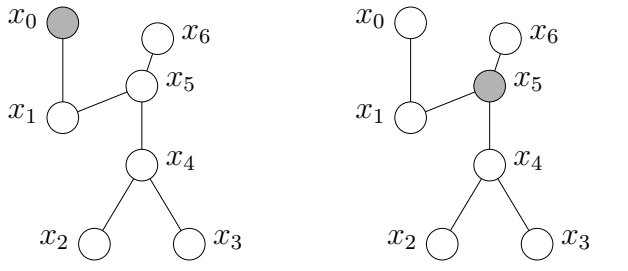


FIG. 1.6 – Deux tas de sable différents sur le même graphe.

grise le disque qui représente le puits. Pour $G_{\mathtt{q}}$, on a donc grisé le disque représentant le sommet x_0, alors que pour $G'_{\mathtt{q}}$, on a grisé celui représentant x_5. ◇

– o –

1.2.1 Configurations du tas de sable

Dans la suite, on se donne un tas de sable $G_{\mathtt{q}}$. Il est le support sur lequel on peut définir la notion de configuration. L'objet de l'étude du modèle du tas de sable est alors d'analyser les propriétés et la dynamique des configurations. Souvent, on se restreint à des sous-ensembles de configurations ayant des propriétés particulières.

Définition 1.2 Une *configuration* du tas de sable $G_{\mathtt{q}}$ est une application de S^* dans $\mathbb{Z}$.

On dit indépendamment que $\mathtt{u} : S^* \to \mathbb{Z}$ est une configuration *de* ou *sur* $G_{\mathtt{q}}$. Par convention on note $\mathtt{u}_i$ la valeur de $\mathtt{u}(x_i)$ pour $x_i \in S^*$, et on confond la configuration $\mathtt{u}$ avec le vecteur des images de l'application, c'est-à-dire avec le n-uplet $(\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{u}_n)$. En particulier, on utilise la notation $\mathtt{u} = (\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{u}_n)$.

On dit que $\mathtt{u}_i$ est le nombre de *grains*, de *particules* ou encore de *jetons placés sur* le sommet x_i ou *du* sommet x_i. On parle parfois aussi de *hauteur* du sommet x_i. On dit qu'on ajoute un grain sur le sommet x_i, quand on incrémente de 1 la valeur en x_i de la configuration de $G_{\mathtt{q}}$ que l'on considère.

L'avantage de la présentation par vecteurs des configurations est de pouvoir utiliser certains outils de la théorie vectorielle. Par exemple, la somme de deux configurations $\mathtt{u}_1$ et $\mathtt{u}_2$ est naturellement définie comme étant la somme des vecteurs correspondants, c'est-à-dire l'addition dans le monoïde $(\mathbb{Z}^n, +)$. Ainsi, si $\mathtt{u}_1 = (\mathtt{u}_{1,1}, \ldots, \mathtt{u}_{1,n})$ et $\mathtt{u}_2 = (\mathtt{u}_{2,1}, \ldots, \mathtt{u}_{2,n})$, alors $\mathtt{u}_1 + \mathtt{u}_2 = (\mathtt{u}_{1,1} + \mathtt{u}_{2,1}, \ldots, \mathtt{u}_{1,n} + \mathtt{u}_{2,n})$.

$- o -$

Exemple 1.2
Dans le cas général, les sommets avec un nombre de grains négatif ne sont pas exclus. La Figure 1.7 montre trois configurations différentes sur le graphe de la maison. Mais il ne s'agit pas toujours du même modèle. En effet, le dernier modèle est différent des deux autres, car bien que le support soit le même, le sommet choisi pour être le puits est différent.

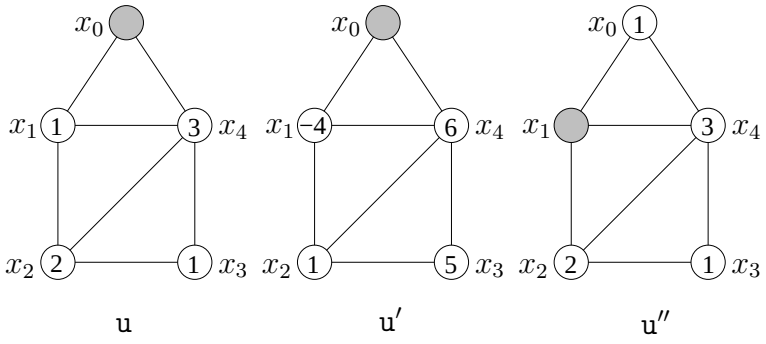


FIG. 1.7 – Exemple de configurations du tas de sable.

Si on ordonne les sommets par indice croissant, on a $\mathtt{u} = (1, 2, 1, 3)$, $\mathtt{u}' = (-4, 1, 5, 6)$ et $\mathtt{u}'' = (1, 2, 1, 3)$. On ne peut pas dire cependant que $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}''$ sont deux configurations égales. N'appartenant pas au même modèle, cela n'a aucun sens de les comparer. En particulier, on peut choisir un ordre différent sur les sommets pour représenter les configurations qui

conduit à des représentations vectorielles différentes de $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}''$. Par exemple, si on choisit l'ordre $(x_0, x_2, x_1, x_3, x_4)$, alors $\mathtt{u} = (2, 1, 1, 3)$ mais $\mathtt{u}'' = (1, 2, 1, 3)$. ◇

– *o* –

Si le nombre de grains est positif pour tous les sommets réguliers, on dit que la configuration est *positive*. On note $\mathcal{U}(G_\mathtt{q})$ l'ensemble des configurations sur le tas de sable $G_\mathtt{q}$, et $\mathcal{U}(G_\mathtt{q})^+$ le sous-ensemble des configurations positives ou nulles de $G_\mathtt{q}$.

Définition 1.3 Soit $G_\mathtt{q}$ un tas de sable. On appelle *poids* l'application $\mathcal{P}$ de $\mathcal{U}(G_\mathtt{q})$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall \mathtt{u} \in \mathcal{U}(G_\mathtt{q}), \quad \mathcal{P}(\mathtt{u}) = \sum_{x_i \neq \mathtt{q}} \mathtt{u}_i.$$

Ainsi, l'entier $\mathcal{P}(\mathtt{u})$ est le nombre total de grains de la configuration $\mathtt{u}$.

Exemple 1.3
Si on reprend les exemples de la Figure 1.7 page précédente, on a :

$$\mathcal{P}(\mathtt{u}) = 7, \quad \mathcal{P}(\mathtt{u}') = 8, \quad \mathcal{P}(\mathtt{u}'') = 7.$$

◇

– *o* –

La règle d'éboulement de Bak, Tang et Wiesenfeld s'étend très bien au nouveau cadre des graphes connexes non orientés quelconques. En premier lieu, la notion d'instabilité d'un sommet admet une généralisation naturelle :

Définition 1.4 Si $\mathtt{u}$ est une configuration sur $G_\mathtt{q}$, on dit que le sommet régulier x_i est *instable* pour $\mathtt{u}$, si $\mathtt{u}_i \geq d_i$, où d_i représente le degré du sommet x_i.

Une configuration qui admet un sommet instable est dite *instable*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *stable*. Une configuration négative, c'est-à-dire dont la configuration opposée est positive, est toujours stable.

Exemple 1.4
Sur le modèle de $G_\mathtt{q}$ où G est le graphe de la maison de la Figure 1.7 page précédente et où x_0 est choisi comme puits $\mathtt{q}$, la configuration $\mathtt{u}_1 = (-1, 0, -3, -19)$ est négative, car sa configuration opposée $\mathtt{u}_2 = -\mathtt{u}_1 = (1, 0, 3, 19)$ est positive. Ainsi $\mathtt{u}_1$ est stable, car quel que soit le sommet régulier x_i choisi, on a bien $\mathtt{u}_{1,i} \leq 0 < d_i$. ◇

– *o* –

Règle du tas de sable De la même manière que dans le modèle de Bak, Tang et Wiesenfeld, on peut définir une règle d'éboulement pour les sommets instables.

Si x_i est un sommet instable d'une configuration $\mathtt{u}$, on peut l'ébouler de la manière suivante (cf. Figure 1.8) : le sommet x_i "envoie" d_i grains, un par arête incidente. Le grain envoyé le long d'une arête est reçu par l'autre extrémité de l'arête, qui voit ainsi son nombre de grains augmenter de un au cours de cette opération élémentaire. Bien sûr, s'il existe plusieurs multi-arêtes entre x_i et un de ses voisins x_j, alors ce voisin reçoit autant de grains qu'il a de multi-arêtes en commun avec x_i. De même si x_i a une ou plusieurs boucles, x_i envoie deux grains par chacune d'elle (un dans chaque sens) et les reçoit après. Autrement dit, les boucles ne modifient en rien les nombres de grains des sommets.

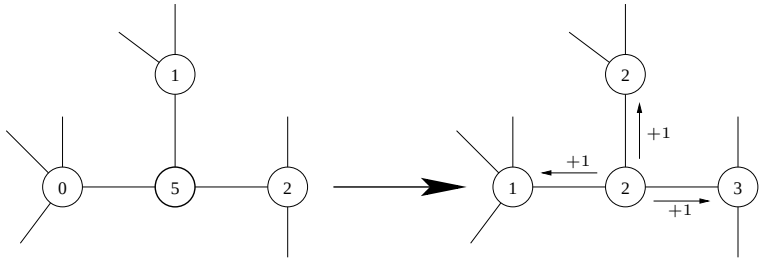


FIG. 1.8 – Règle d'éboulement d'un sommet instable.

$-\ o\ -$

Avant de définir un éboulement de manière plus formelle, on introduit les opérateurs d'éboulement :

Définition 1.5 (Opérateurs d'éboulement $\Delta_i^{\mathtt{q}}, \beta$) Pour un sommet x_i de S^*, on appelle *opérateur d'éboulement* de x_i la configuration $\Delta_i^{\mathtt{q}}$ définie par :

$$\forall x_j \in S^*,\ \Delta_{i,j}^{\mathtt{q}} = \begin{cases} -d_i + 2b_i & \text{si} \quad x_j = x_i, \\ d_{i,j} & \text{si} \quad x_j \neq x_i, \end{cases}$$

où b_i désigne le nombre de boucles du sommet x_i, et $d_{i,j}$ le nombre d'arêtes entre x_i et x_j.
On appelle *opérateur d'éboulement* du puits $\mathtt{q}$, la configuration β définie par :

$$\forall x_j \in S^*,\ \beta_j = d_{\mathtt{q},j},$$

où $d_{\mathtt{q},j}$[1] désigne le nombre d'arêtes entre x_j et le puits $\mathtt{q}$.

La matrice $(\Delta_i^{\mathtt{q}})_{x_i \in S^*}$ est en fait un mineur principal de la matrice laplacienne Δ du graphe G du modèle. C'est précisément le mineur qui correspond à la suppression de la ligne et de la colonne associées au puits. Le vecteur β est la ligne associée au puits sans son terme diagonal. On choisit d'utiliser une notation différente pour l'opérateur d'éboulement du puits dans la mesure où il joue un rôle particulier dans le modèle.

[1]Cette notation est un (petit) abus d'écriture, car on ne spécifie pas d'indice pour le puits en général.

Par conséquent, on a la relation suivante entre les opérateurs :

$$\sum_{x_i \neq \mathfrak{q}} \Delta_i^{\mathfrak{q}} + \beta = 0. \tag{1.2.1}$$

Cela résulte directement de la définition du degré d'un sommet, qui est égale au nombre d'arêtes (qui ne sont pas des boucles) adjacentes à ce sommet plus deux fois le nombre de boucles.

Exemple 1.5
Considérons le modèle de tas de sable représenté à gauche sur la Figure 1.9. Le graphe G du modèle est en fait un multi-graphe. Il existe deux multi-arêtes entre le puits et le sommet x_2, et le sommet x_3 admet une boucle. Les opérateurs d'éboulement correspondent

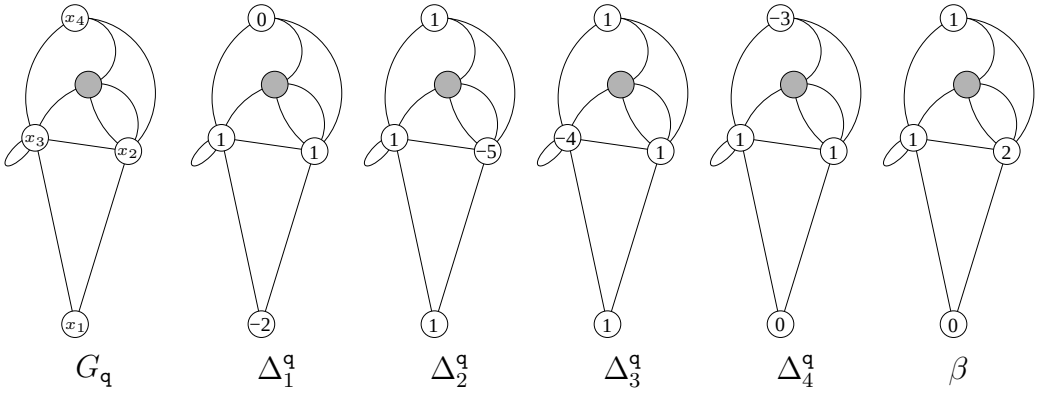


FIG. 1.9 – Opérateurs d'éboulement.

aux configurations indiquées sur la figure, à savoir :

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{\mathfrak{q}} &= (-2,1,1,0),\\
\Delta_2^{\mathfrak{q}} &= (1,-5,1,1),\\
\Delta_3^{\mathfrak{q}} &= (1,1,-4,1),\\
\Delta_4^{\mathfrak{q}} &= (0,1,1,-3),\\
\beta &= (0,2,1,1).
\end{aligned}$$

En effet la matrice laplacienne Δ du graphe G est :

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|cccc} -4 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \implies \Delta^{\mathfrak{q}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{\mathfrak{q}} \\ \Delta_2^{\mathfrak{q}} \\ \Delta_3^{\mathfrak{q}} \\ \Delta_4^{\mathfrak{q}} \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a bien $\Delta_1^{\mathfrak{q}} + \Delta_2^{\mathfrak{q}} + \Delta_3^{\mathfrak{q}} + \Delta_4^{\mathfrak{q}} + \beta = 0$. ◇

– *o* –

Formellement, on définit l'opération d'éboulement à partir des opérateurs d'éboulement.

Définition 1.6 (Règle d'éboulement) Si x_i est un sommet régulier d'une configuration $\mathtt{u}$, on dit que la configuration $\mathtt{u}^i$ est obtenue à partir de $\mathtt{u}$ en éboulant le sommet x_i si $\mathtt{u}^i = \mathtt{u} + \Delta_i^{\mathtt{q}}$. On note alors $\mathtt{u} \overset{i}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \mathtt{u}^i$, ou tout simplement $\mathtt{u} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathtt{u}^i$.

Si x_i est un sommet instable de $\mathtt{u}$, on dit que l'éboulement est *légal* ou *valide*. Dans ce cas, on peut le préciser en notant $\mathtt{u} \overset{i}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^i$, ou tout simplement $\mathtt{u} \rightarrowtail \mathtt{u}^i$.

Cette définition est complètement compatible avec l'image des grains qui partent du sommet x_i et suivent les arêtes qui lui sont incidentes.

Les éboulements légaux sont la généralisation de la notion d'éboulement du modèle de Bak, Tang et Wiesenfeld, au cadre des graphes quelconques non orientés connexes.

Exemple 1.6
La Figure 1.10 montre l'éboulement légal d'un sommet instable. Le cercle représentant le sommet instable est tracé en gras, pour mettre en évidence le fait que ce dernier a au moins autant de grains que son degré. Après l'opération d'éboulement, le sommet x_i reste instable, et deux de ses voisins le deviennent.

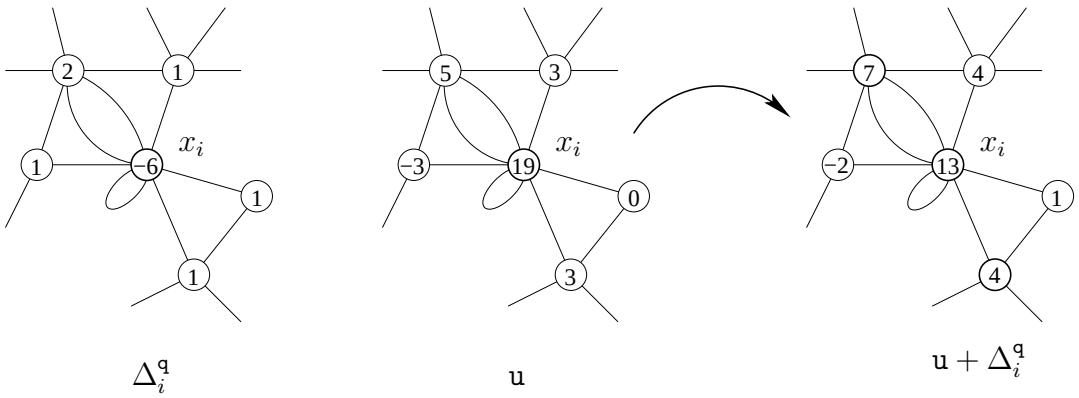


FIG. 1.10 – Éboulement légal d'un sommet instable.

On peut donc ébouler ensuite légalement ces trois sommets. De manière générale, l'éboulement d'un sommet instable peut provoquer la réaction en chaîne de toute une séquence d'éboulements valides. ◇

Remarque 1.1
Le cas des boucles est aussi inclus de cette manière. On peut remarquer que le seul intérêt des boucles est d'augmenter le seuil d'instabilité de 2. Elles n'ont aucun rôle dans la dynamique des configurations. En effet la matrice laplacienne d'un graphe quelconque G et du graphe G^s obtenu à partir de G en supprimant toutes les boucles, sont identiques. Donc les opérateurs d'éboulement sont identiques, et par conséquent la dynamique des configurations est la même. L'application Ψ de $\mathcal{U}(G_{\mathtt{q}})$ dans $\mathcal{U}(G^s_{\mathtt{q}})$ définie par :

$$\forall x_i \neq \mathtt{q},\ \forall \mathtt{u} \in \mathcal{U}(G_{\mathtt{q}}),\ \Psi(\mathtt{u})_i = \mathtt{u}_i - 2b_i,$$

où b_i est le nombre de boucles du sommet x_i dans G est un *isomorphisme* de modèles dynamiques discrets.

En vertu de la remarque précédente, on ne considère dans la suite que des modèles dont les graphes n'admettent aucune boucle.

$$-\ o\ -$$

Pour un éboulement qui n'est pas valide, on parle parfois aussi d'*éboulement de force* ou d'*éboulement forcé*.

Exemple 1.7
La Figure 1.11 montre l'éboulement de force d'un sommet stable. Le sommet en question contient un nombre de grains négatif après l'éboulement. ◇

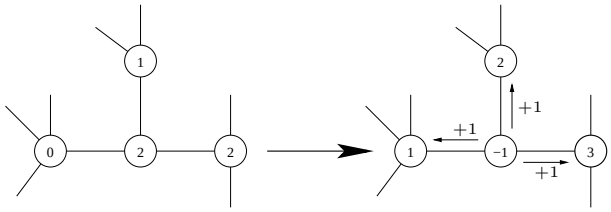
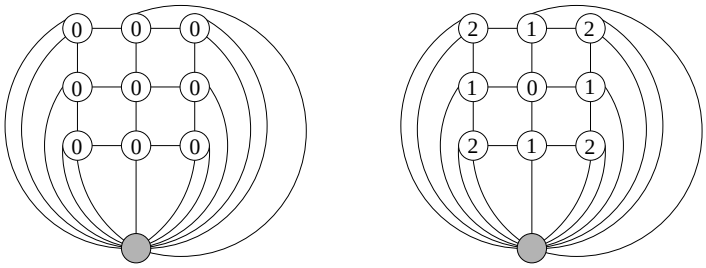


FIG. 1.11 – Éboulement de force d'un sommet stable.

On appelle *éboulement du puits* l'opération qui consiste à ajouter la configuration β. Cela consiste en fait à appliquer la règle d'éboulement au puits $\mathtt{q}$ sans tenir compte en revanche du nombre de grains du puits qui n'est pas défini. On note par $\overset{\mathtt{q}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$ cette opération.

Exemple 1.8
La Figure 1.12 montre l'éboulement du puits à partir de la configuration nulle sur la grille 3×3. ◇



$\mathtt{u} = 0$ $\qquad$ $\mathtt{u} + \beta$

FIG. 1.12 – Éboulement du puits.

Enfin, on parle d'*anti-éboulement* d'un sommet x_i quelconque, l'opération qui consiste à retrancher l'opérateur d'éboulement de ce sommet à la configuration courante. De par la Relation (1.2.1), anti-ébouler un sommet régulier x_i revient à ébouler une fois tous les autres sommets, le puits y compris. De même, anti-ébouler le puits revient à ébouler tous les sommets réguliers, et par dualité, ébouler le puits correspond à anti-ébouler tous les sommets réguliers.

Exemple 1.9
La Figure 1.13 présente 5 configurations sur le modèle déjà vu à l'Exemple 1.5 page 32. En particulier, on a d'une part $\mathtt{u} \overset{3}{\longmapsto} \mathtt{u}_1 \overset{4}{\longmapsto} \mathtt{u}_2 \overset{2}{\longmapsto} \mathtt{u}_3 \overset{1}{\longmapsto} \mathtt{u}_4$, et d'autre part $\mathtt{u}_4 \overset{\mathtt{q}}{\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}$. L'anti-

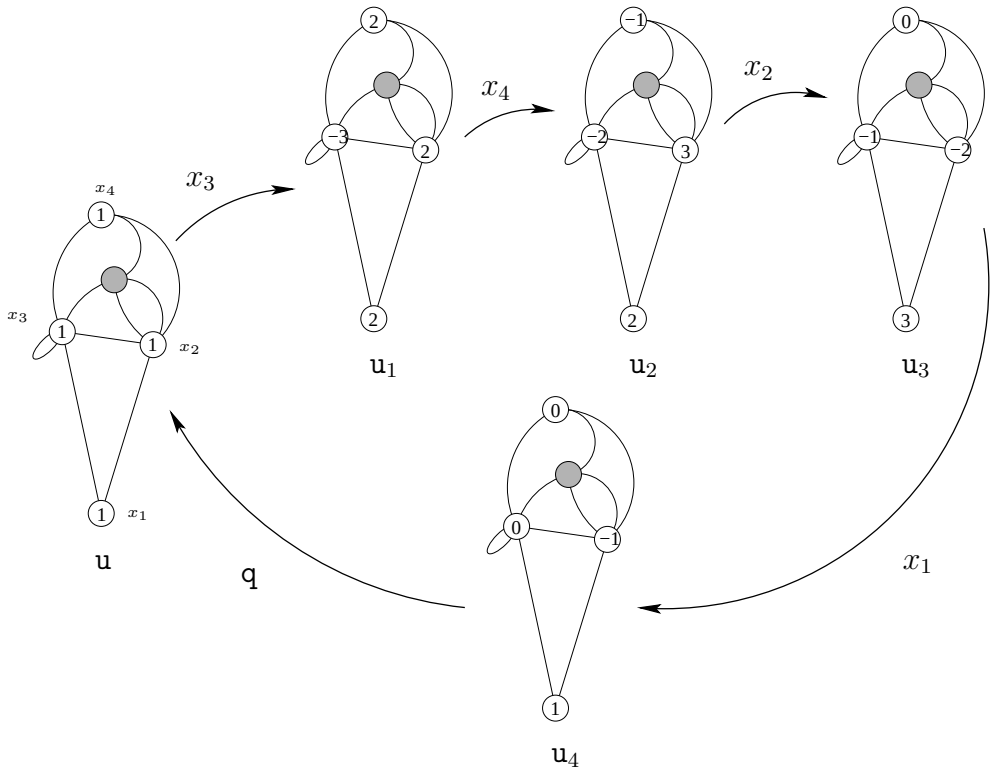


FIG. 1.13 – Anti-éboulement du puits et éboulements légaux équivalents.

éboulement du puits correspond bien à l'éboulement de tous les sommets réguliers. ◇

Proposition 1.1 (Commutativité des opérateurs d'éboulement) *Si $x_i \neq x_j$ sont deux sommets, ébouler x_i puis x_j est équivalent à ébouler x_j puis x_i.*

Démonstration : Ébouler x_i puis x_j, c'est additionner leur opérateur d'éboulement. La commutativité de l'addition des vecteurs implique celle des éboulements. □

— *o* —

1.2.2 Relaxation et longueur d'avalanche

On appelle *séquence d'éboulements* s une suite de sommets $s = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rangle$ que l'on éboule dans cet ordre. La taille k de la séquence s est notée $|s|$. Si $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont deux configurations telles que $\mathtt{u}'$ est obtenue à partir de $\mathtt{u}$ après la séquence d'éboulements s, on note $\mathtt{u} \overset{s}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}'$. La relation $\rightsquigarrow\!\!\!\!\!\rightarrow$ est la clôture transitive de la relation d'éboulement $\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow$.

$$\forall s = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rangle,\ \mathtt{u} \overset{s}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}' \ \equiv\ \mathtt{u} \overset{i_1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}^{i_1} \overset{i_2}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \cdots \overset{i_k}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}'.$$

On appelle *shot set* d'une séquence d'éboulements s le multi-ensemble des sommets de la séquence, et on le note $\mathtt{shot}(s)$.

Proposition 1.2 *Deux séquences qui ont le même shot set conduisent à la même configuration.*

Démonstration : Soit $s = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rangle$ une séquence d'éboulements. On note $occ(x_i)$ le nombre d'occurences de x_i dans s. Alors $occ(x_i)$ est aussi le nombre d'occurences de x_i dans $\mathtt{shot}(s)$. En particulier, si le graphe du modèle admet n sommets réguliers ($|S^*| = n$), $\mathtt{shot}(s)$ est de la forme :

$$\mathtt{shot}(s) = \{\underbrace{\mathtt{q}, \ldots, \mathtt{q}}_{occ(\mathtt{q})}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{occ(x_1)}, x_2, \ldots, x_{n-1}, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{occ(x_n)}\}.$$

Si $\mathtt{u}$ est une configuration, et si $\mathtt{u}^s$ est la configuration obtenue à partir de $\mathtt{u}$ après l'éboulement de s, alors :

$$\mathtt{u}^s = \mathtt{u} + occ(\mathtt{q})\ \beta\ + \sum_{x_i \neq \mathtt{q}} occ(x_i)\ \Delta_i^{\mathtt{q}}.$$

D'où le résultat. □

$$-\ o\ -$$

Définition 1.7 Soit $\mathtt{u}$ une configuration, et $s = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rangle$ une séquence d'éboulements. On a :

$$\mathtt{u} \overset{s}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}^k \ \equiv\ \mathtt{u} \overset{i_1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}^1 \overset{i_2}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}^2 \overset{i_3}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \cdots \overset{i_k}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathtt{u}^k.$$

On dit que s est *valide* pour la configuration $\mathtt{u}$, si chacun des éboulements de la séquence est valide, c'est-à-dire si tous les sommets de la séquence sont réguliers, et si $\mathtt{u}^i$ est une configuration positive pour $1 \leq i \leq k$. On écrit alors :

$$\mathtt{u} \overset{s}{\rightsquigarrow} \mathtt{u}^k \ \equiv\ \mathtt{u} \overset{i_1}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^1 \overset{i_2}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^2 \overset{i_3}{\rightarrowtail} \cdots \overset{i_k}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^k.$$

On écrit aussi tout simplement $\mathtt{u} \rightsquigarrow \mathtt{u}^k$ si on n'a pas besoin de spécifier la séquence s. La relation $\rightsquigarrow$ est la clôture transitive de la relation $\rightarrowtail$. En particulier, c'est une relation réflexive ($\mathtt{u} \rightsquigarrow \mathtt{u}$) car la séquence vide est valide pour toute configuration.

Une configuration $\mathtt{u}'$ est dite *atteignable* à partir de $\mathtt{u}$ s'il existe une séquence s valide pour $\mathtt{u}$ telle que $\mathtt{u} \overset{s}{\rightsquigarrow} \mathtt{u}'$.

$$-\ o\ -$$

Définition 1.8 (Avalanche) Soit $\mathtt{u}$ une configuration, on dit qu'une séquence d'éboulements s valide pour $\mathtt{u}$ est une *avalanche* si la configuration obtenue après les éboulements de la séquence s est stable.

Une avalanche est donc une séquence valide d'éboulements qui est maximale. La *longueur* est la taille de la séquence correspondante. On utilise cependant les deux termes de *longueur* et de *taille* pour une avalanche.

Proposition 1.3 (Taille finie des avalanches) *Toute avalanche est de taille finie.*

Démonstration : Il existe essentiellement deux démonstrations de ce résultat. On présente ici la plus simple (mais la moins constructive), car elle se généralise plus naturellement au cadre du modèle flèche-hauteur que nous étudions en seconde partie.

On procède par l'absurde. Soit $\mathtt{u}$ une configuration. Supposons que $\mathtt{u}$ admette une avalanche de taille infinie. Alors, comme le modèle admet un nombre fini de sommets, il existe un sommet qui s'éboule un nombre infini de fois. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des sommets du graphe $G = (S, A)$ qui s'éboulent un nombre infini de fois. Par la remarque précédente $\mathcal{I}$ est non vide. Mais $\mathcal{I}$ ne contient pas le puits, donc $S \setminus \mathcal{I}$ est aussi non vide. Comme G est connexe, il existe un sommet x_i de $\mathcal{I}$ qui admet un voisin x_j qui appartient à $S \setminus \mathcal{I}$.

Mais comme x_j ne s'éboule qu'un nombre fini de fois, il accumule un nombre infini de grains. Or le système ne contient qu'un nombre fini de grains au début, et les éboulements de sommets réguliers ne créent aucun grain. Ainsi, on obtient une contradiction.

Par conséquent, l'avalanche ne peut pas être de taille infinie. □

$$-\ o\ -$$

Lemme 1.4 *Soit* $\mathtt{u}$ *une configuration et* $x_i \neq x_j$ *deux sommets réguliers instables de* $\mathtt{u}$.
Alors il existe $\mathtt{u}^i$, $\mathtt{u}^j$, $\mathtt{u}^{i,j}$ *et* $\mathtt{u}^{j,i}$ *telles que :*

$$\mathtt{u} \overset{i}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^i \overset{j}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^{i,j},$$
$$\mathtt{u} \overset{j}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^j \overset{i}{\rightarrowtail} \mathtt{u}^{j,i}.$$

De plus $\mathtt{u}^{i,j} = \mathtt{u}^{j,i}$.

Démonstration : Il suffit de montrer que x_j est toujours instable après l'éboulement de x_i. Mais cela est clair, car $x_i \neq x_j$: après l'éboulement de x_i, soit le nombre de grains de x_j a augmenté (x_j et x_i sont voisins), soit il est resté le même (x_j et x_i ne sont pas voisins). Ainsi, x_j contient toujours plus de grains que son degré, c'est-à-dire x_j est toujours instable.

Symétriquement, x_i est toujours instable si on commence par ébouler x_j. Le fait que les deux séquences d'éboulements conduisent à la même configuration découle alors de la Proposition 1.1 page 35. □

Ce résultat s'étend très facilement à un nombre quelconque de sommets instables. Il signifie qu'on peut effectuer les éboulements légaux en parallèle, et ébouler tous les sommets instables lors d'une même vague d'éboulements. Si $\mathcal{I}$ est l'ensemble des sommets instables d'une configuration, on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des sommets stables qui ont au moins

un voisin instable. On note $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ le sous-ensemble des sommets instables qui ont au moins un voisin dans $\mathcal{F}$. Alors, lors de la vague d'éboulements associée à $\mathcal{I}$, seuls les sommets de $\mathcal{I}' \cup \mathcal{F}$ ont une hauteur qui varie. Si x_i est un sommet de $\mathcal{I}'$, il perd autant de grains qu'il a d'arêtes vers $\mathcal{F}$ ou vers le puits $\mathtt{q}$. Si x_j est un sommet de $\mathcal{F}$, il gagne autant de grains qu'il a d'arêtes vers un sommet de $\mathcal{I}$.

Exemple 1.10
Considérons la Figure 1.14. Elle représente deux vagues d'éboulements entre trois configurations instables.

La configuration $\mathtt{u}_2$ est obtenue à partir de $\mathtt{u}_1$ par les éboulements légaux des sommets instables x_1, x_4 et x_5, et la configuration $\mathtt{u}_3$ à partir de $\mathtt{u}_2$ par les éboulements légaux des sommets instables x_3, x_4 et x_5.

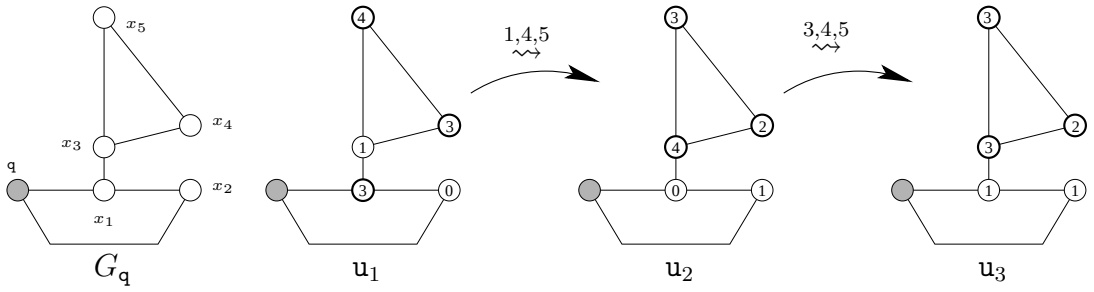


FIG. 1.14 – Vagues d'éboulements légaux de sommets instables.

On peut en fait ébouler les trois sommets instables de $\mathtt{u}_1$ en parallèle suivant ce que l'on vient de dire. Avec ces mêmes notations, on note $\mathcal{I}_1$ l'ensemble des sommets instables de $\mathtt{u}_1$: $\mathcal{I}_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$. Alors, $\mathcal{F}_1 = \{x_2, x_3\}$ et finalement $\mathcal{I}'_1 = \mathcal{I}_1$. Comme x_1 admet trois arêtes qui partent vers $\mathcal{F}_1 \cup \{\mathtt{q}\}$, il perd trois grains. De même, x_4 et x_5 perdent chacun un grain car ils n'ont chacun qu'une arête vers un sommet de $\mathcal{F}_1 \cup \{\mathtt{q}\}$. Enfin, x_3 gagne trois grains (trois arêtes vers $\mathcal{I}_1$) et x_2 un grain (une seule arête vers $\mathcal{I}_1$). En particulier, le nombre de grains de tous les sommets a été modifié car $\mathcal{I}'_1 \cup \mathcal{F}_1 = S^*$.

Lors de la seconde vague ce n'est pas le cas : $\mathcal{I}_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$, $\mathcal{F}_2 = \{x_1\}$ et $\mathcal{I}'_2 = \{x_3\}$. Ainsi seuls x_1 et x_3 ont leur hauteur qui change lors de la vague d'éboulements des sommets instables de $\mathtt{u}_2$. Le premier gagne le grain que le second perd.

Les conditions sont les mêmes pour $\mathtt{u}_3$. Il existe donc une troisième vague similaire lors de laquelle x_1 gagne un grain et x_3 en perd un. ◇

On peut aussi décider de réaliser des vagues d'éboulements forcés. Tout se passe de la même manière ; il suffit de définir $\mathcal{I}$ comme l'ensemble des sommets que l'on compte ébouler.

— *o* —

Proposition 1.5 (Shot-set des avalanches) *Les avalanches d'une même configuration ont le même shot set. En particulier, elles ont même taille.*

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur la taille minimale des avalanches.

Supposons qu'une configuration admette une avalanche de taille 0. Alors par définition elle est stable. Donc toute avalanche est de taille 0 et correspond à la même séquence d'éboulements : la séquence vide. En particulier, toutes les avalanches ont même shot set $\emptyset$.

Supposons qu'une configuration $\mathtt{u}$ admette une avalanche de taille $n > 0$ et aucune avalanche de taille plus petite. On note x_i le premier sommet qui s'éboule lors de cette avalanche, et $\mathtt{u}^i$ la configuration obtenue juste après cet éboulement. En appliquant l'hypothèse de récurrence à cette configuration, on déduit que toutes les avalanches de $\mathtt{u}$ qui commencent par l'éboulement de x_i ont le même shot set. Si $\mathtt{u}$ n'admet pas d'autre sommet instable, le résultat est démontré. Sinon on note x_j un de ces sommets. Bien sûr, toutes les avalanches qui commencent par l'éboulement de x_j ont le même shot set : il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathtt{u}^j$, la configuration obtenue à partir de $\mathtt{u}$ par l'éboulement de x_j. Mais, il existe deux avalanches, une commençant par x_i et l'autre par x_j qui ont le même shot set. On note $\mathtt{u}^{i,j}$ la configuration obtenue à partir de $\mathtt{u}$ après la séquence $\langle x_i, x_j\rangle$, et s une avalanche de $\mathtt{u}^{i,j}$. D'après le Lemme 1.4 page 37, les séquences $\langle x_i, x_j\rangle + s$ et $\langle x_j, x_i\rangle + s$ sont valides et ont même shot set.

Ainsi toutes les avalanches de $\mathtt{u}$ ont même shot set. □

$$-\ o\ -$$

Définition 1.9 (Relaxation (TDS)) On appelle *relaxation* tout processus d'éboulement d'une avalanche. Si $\mathtt{u}$ est une configuration, on note $\hat{\mathtt{u}}$ la configuration stable obtenue après relaxation de $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u} \mapsto \hat{\mathtt{u}}$ ce processus.

Par la Proposition 1.5, cette définition est légitime. Comme toutes les avalanches ont le même shot set, elles conduisent à la même configuration stable.

On appelle graphe de la relaxation de $\mathtt{u}$, le graphe orienté $G^{\mathtt{u}} = (S^{\mathtt{u}}, A^{\mathtt{u}})$ dont les sommets sont les configurations atteignables à partir de $\mathtt{u}$, et tel que :

$$(\mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2) \in A^{\mathtt{u}} \iff \mathtt{u}_1 \rightarrowtail \mathtt{u}_2.$$

En fait, on peut montrer que $\rightsquigarrow$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des configurations $\mathcal{U}$, et que l'ensemble $S^{\mathtt{u}}$ muni de $\rightsquigarrow$ est en fait un treillis inférieurement localement distributif (ILD) (cf. Figure 1.15 page suivante) dont la relation de couverture est $\rightarrowtail$. Ce résultat est déjà connu [5, 45]. Dans la preuve de la Proposition 4.12 page 171, on en démontre une version plus générale qui correspond au cas du modèle flèche-hauteur.

On définit une addition sur l'ensemble des configurations.

Définition 1.10 Si $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont deux configurations, alors l'addition de $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ notée $\mathtt{u} \oplus \mathtt{u}'$, est définie par : $\mathtt{u} \oplus \mathtt{u}' = \widehat{\mathtt{u} + \mathtt{u}'}$.

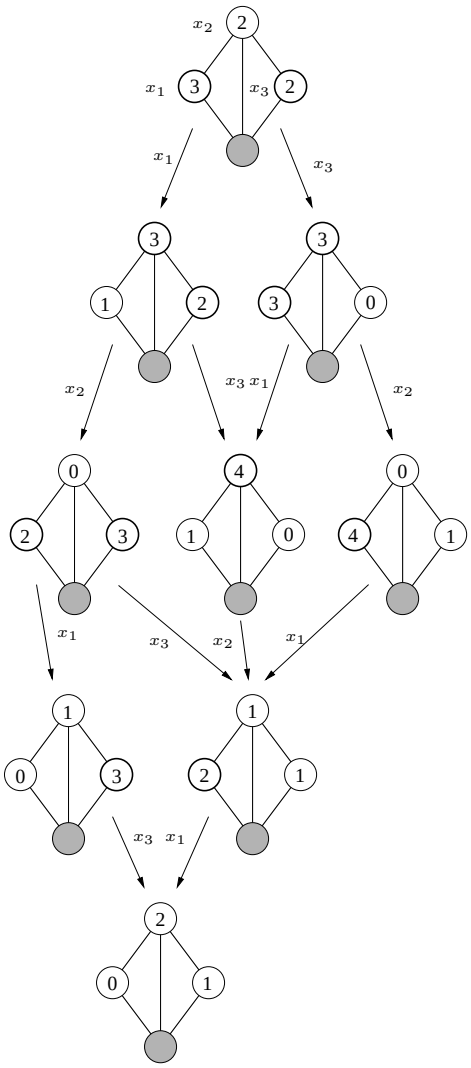


FIG. 1.15 – Treillis ILD de la relaxation.

Cette opération est une *loi de composition interne* sur l'ensemble des configurations. De manière évidente, elle est *associative* et *commutative*.

1.3 Configurations récurrentes

1.3.1 Définition et caractérisation

On se place sur un tas de sable $G_{\mathtt{q}}$ tel que $S^* = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathtt{q} = x_0$.

Définition 1.11 On dit que deux configurations $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont *équivalentes*, et on note $\mathtt{u}\mathcal{R}^{\mathtt{q}}\mathtt{u}'$, si :

$$\mathtt{u} - \mathtt{u}' \ \in < \Delta_1^{\mathtt{q}}, \ldots, \Delta_n^{\mathtt{q}} > .$$

Ici, $< \Delta_1^{\mathtt{q}}, \ldots, \Delta_n^{\mathtt{q}} >$ est l'idéal de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les $\Delta_i^{\mathtt{q}}$ pour $1 \leq i \leq n$. Autrement dit, $\mathtt{u}\mathcal{R}^{\mathtt{q}}\mathtt{u}'$ s'il existe $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\mathtt{u} = \mathtt{u}' + \sum_{x_i \neq \mathtt{q}} e_i \, \Delta_i^{\mathtt{q}}. \tag{1.3.1}$$

En terme d'éboulements, $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont équivalentes si on peut passer de $\mathtt{u}$ à $\mathtt{u}'$ par une séquence d'éboulements et d'anti-éboulements de sommets réguliers. Clairement, cette relation est réflexive, symétrique et transitive. Ainsi la définition est bien justifiée : la relation $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$ est une relation d'équivalence. En fait $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$ est la clôture symétrique de la relation d'ordre $\rightsquigarrow$. Comme les opérateurs d'éboulements sont indépendants, l'écriture sous la forme (1.3.1) est unique.

D'après la Relation (1.2.1), on peut dire que $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont équivalentes s'il existe $n+1$ entiers **naturels** $e_0, e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\mathtt{u} = \mathtt{u}' + e_0 \, \beta + \sum_{x_i \neq \mathtt{q}} e_i \, \Delta_i^{\mathtt{q}}.$$

Cette écriture n'est pas unique car par la Relation (1.2.1) s'il existe $(e_0, e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ qui vérifie l'égalité ci-dessus, alors le vecteur de $\mathbb{N}^{n+1}$ défini par $(e_0+1, e_1+1, \ldots, e_n+1)$ la vérifie aussi.

Exemple 1.11
Sur la Figure 1.16 page suivante sont représentées 4 configurations. Les opérateurs d'éboulements correspondants au modèle ont déjà été vus, ils sont représentés sur la Figure 1.9 de l'Exemple 1.5 page 32. Le modèle n'est pas tout à fait le même, car le graphe sous-jacent est maintenant sans boucle. Cependant, d'après la Remarque 1.1 page 33, il y a un isomorphisme de systèmes dynamiques discrets entre les deux modèles. En particulier les opérateurs d'éboulement sont les mêmes.

Ici, $\mathtt{u}_1\mathcal{R}^{\mathtt{q}}\mathtt{u}_2$ car $\mathtt{u}_1 = \mathtt{u}_2 - \Delta_1^{\mathtt{q}} - \Delta_2^{\mathtt{q}} - \Delta_3^{\mathtt{q}} - \Delta_4^{\mathtt{q}} = \mathtt{u}_2 + \beta$. De même, $\mathtt{u}_3\mathcal{R}^{\mathtt{q}}\mathtt{u}_4$ car $\mathtt{u}_3 = \mathtt{u}_4 - \Delta_1^{\mathtt{q}} - \Delta_2^{\mathtt{q}} - \Delta_3^{\mathtt{q}} + \Delta_4^{\mathtt{q}} = \mathtt{u}_4 + \beta + \Delta_1^{\mathtt{q}} + \Delta_2^{\mathtt{q}} + \Delta_3^{\mathtt{q}}$.

En revanche $\mathtt{u}_1$ et $\mathtt{u}_3$ ne sont pas équivalentes. En effet la différence $\mathtt{u}_3 - \mathtt{u}_1$ vaut $(-1, 1, 1, 1)$. Mais ce vecteur n'est pas dans l'idéal de $\mathbb{Z}^n < \Delta_1^{\mathtt{q}}, \Delta_2^{\mathtt{q}}, \Delta_3^{\mathtt{q}}, \Delta_4^{\mathtt{q}} >$ engendré par les opérateurs d'éboulement. ◇

On montre dans la suite, que ce qu'on appelle les *configurations récurrentes*, sont en fait des représentants naturels pour les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$.

– o –

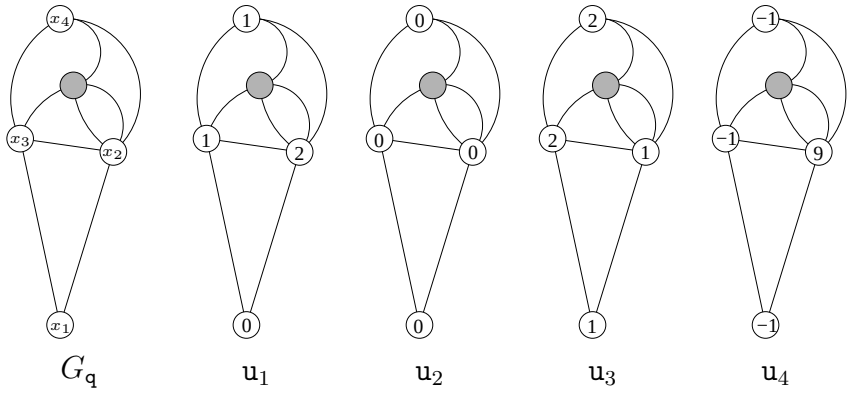


FIG. 1.16 – Exemple de configurations équivalentes : $\mathtt{u}_1 \mathcal{R}^{\mathtt{q}} \mathtt{u}_2$ et $\mathtt{u}_3 \mathcal{R}^{\mathtt{q}} \mathtt{u}_4$.

Chaîne de Markov du tas de sable On considère le jeu suivant. On part de la configuration nulle, c'est-à-dire avec un nombre de grains nul en chaque sommet régulier, et on répète indéfiniment l'opération constituée des deux étapes suivantes :

- on ajoute un grain sur un sommet aléatoire,
- on relaxe la configuration obtenue.

Ce processus définit en fait une chaîne de Markov. Les *configurations récurrentes* sont celles qui apparaissent un nombre infini de fois lors de ce jeu. Les autres sont dites *transientes*.

Dhar a montré que la probabilité limite du processus est la probabilité uniforme, et il a donné un algorithme de caractérisation d'une configuration récurrente que l'on appelle communément le *critère de Dhar*.

Théorème 1.6 (Critère de Dhar) *Une configuration* $\mathtt{u}$ *est* récurrente*, si et seulement si* $\mathtt{u} + \beta \mapsto \mathtt{u}$*. De plus, lors de cette relaxation, chaque sommet régulier s'éboule une et une seule fois.*

Exemple 1.12
La configuration $\mathtt{u}_3$ de la Figure 1.16 est récurrente. En effet, si on applique le critère de Dhar (Théorème 1.6), on a :

$$\begin{aligned}
\mathtt{u}_3 + \beta &= (1,1,2,2) + (0,2,1,1) \\
&= (1,3,3,\underline{\mathbf{3}}) \\
&\overset{4}{\longmapsto} (1,4,\underline{\mathbf{4}},0) \\
&\overset{3}{\longmapsto} (\underline{\mathbf{2}},\underline{\mathbf{5}},0,1) \\
&\overset{1}{\longmapsto} (0,\underline{\mathbf{6}},1,1) \\
&\overset{2}{\longmapsto} (1,1,2,2) = \mathtt{u}_3.
\end{aligned}$$

◇

On peut maintenant écrire un résultat annoncé plus tôt : les configurations récurrentes sont des représentants canoniques des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$.

Théorème 1.7 *Il existe une et une seule configuration récurrente par classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$.*

Si $\mathtt{u}$ est une configuration, on note $\tilde{\mathtt{u}}$ l'unique configuration récurrente équivalente à $\mathtt{u}$, par la relation $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$. On note $\mathcal{R}ec(G_{\mathtt{q}})$, ou tout simplement $\mathcal{R}ec$, l'ensemble des configurations récurrentes sur $G_{\mathtt{q}}$. En particulier, $\mathcal{R}ec(G_{\mathtt{q}}) = \mathbb{Z}^n/\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$, *i.e.* l'ensemble des configurations récurrentes est le quotient de $\mathbb{Z}^n$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$. La taille de cet ensemble est le nombre maximal de vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ non équivalents pour $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$, c'est-à-dire le déterminant des opérateurs d'éboulement $\Delta_i^{\mathtt{q}}$. Par le Matrix Tree Theorem [38], ce déterminant est égal au nombre des arbres couvrants du graphe sous-jacent. Il existe d'ailleurs deux preuves bijectives de ce résultat. Nous les indiquons dans la prochaine sous-section.

$- o -$

Le critère de Dhar (Théorème 1.6 page ci-contre) nous donne un moyen algorithmique de calculer $\tilde{\mathtt{u}}$ à partir de $\mathtt{u}$.

Théorème 1.8 (Algorithme thermique (TDS)) *Soit $G_{\mathtt{q}}$ un tas de sable. Il existe un entier k_G tel que :*

$$\forall \mathtt{u} \in \mathcal{U}^+,\ \mathtt{u} \oplus (k_G.\beta) = \mathtt{u} \oplus \underbrace{(\beta + \ldots + \beta)}_{k_G} = \tilde{\mathtt{u}}.$$

En effet, si $\mathtt{u} \oplus (k_G.\beta) = \tilde{\mathtt{u}}$, alors par le Théorème 1.6 page précédente on a : $\mathtt{u} \oplus ((k_G + 1).\beta) = \mathtt{u} \oplus (k_G.\beta) \oplus \beta = \tilde{\mathtt{u}} \oplus \beta = \tilde{\mathtt{u}}$.

Si la configuration initiale n'est pas positive, il est toujours possible de trouver sa configuration récurrente équivalente, mais la borne k_G change. En fait k_G est une fonction du plus petit nombre de grains sur un sommet.

L'algorithme thermique à proprement parler est le suivant :

Algorithme 1.1
Données: $\mathtt{u}$
début
  $\mathtt{u}_p \leftarrow \hat{\mathtt{u}}$;
  $\mathtt{u}_s \leftarrow \mathtt{u}_p \oplus \beta$;
  tant que $\mathtt{u}_s \neq \mathtt{u}_p$ **faire**
    $\mathtt{u}_p \leftarrow \mathtt{u}_s$;
    $\mathtt{u}_s \leftarrow \mathtt{u}_p \oplus \beta$;
  fintq
fin
Résultat: $\tilde{\mathtt{u}}$

Par le Théorème 1.8, cet algorithme termine toujours et renvoie le bon résultat. Sa complexité en temps est en fait polynomiale. Si n représente le nombre de sommets du modèle, le cas le pire est en $O(n^4)$ pour des configurations positives.

L'algorithme thermique fournit un bon moyen pour savoir si deux configurations sont équivalentes. Il suffit de calculer pour chacune d'elles la configuration récurrente équivalente. Si les configurations sont les mêmes, les configurations originelles étaient équivalentes. Dans le cas contraire ce n'était pas la cas.

Exemple 1.13
Montrons que les configurations $\mathtt{u}_1$ et $\mathtt{u}_4$ de la Figure 1.16 page 42 ne sont pas équivalentes. Pour cela, on calcule pour chacune la configuration récurrente équivalente. On a entouré d'un cadre les valeurs successives que prend $\mathtt{u}_p$ dans l'algorithme.

On sait que $\mathtt{u}_4$ est équivalente à $\mathtt{u}_3$, et que $\mathtt{u}_3$ est récurrente, *i.e.* $\tilde{\mathtt{u}}_4 = \mathtt{u}_3$. L'algorithme thermique appliqué à $\mathtt{u}_4$ doit donner $\mathtt{u}_3$.

$$\begin{aligned}
\mathtt{u}_4 &= (-1, \underline{\mathbf{9}}, -1, -1) \\
&\overset{2}{\longmapsto} \boxed{(0,4,0,0)} \\
&\overset{\mathtt{q}}{\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow} (0, \underline{\mathbf{6}}, 1, 1) \\
&\overset{2}{\longmapsto} \boxed{(1,1,2,2)} = \mathtt{u}_3.
\end{aligned}$$

On trouve bien $\mathtt{u}_3$. En fait l'algorithme fait encore une étape supplémentaire pour se rendre compte qu'il a bien trouvé une configuration récurrente. Cette étape correspond à l'Exemple 1.12 page 42.

On doit maintenant appliquer l'algorithme thermique à la configuration $\mathtt{u}_1$:

$$\begin{aligned}
\mathtt{u}_1 &= \boxed{(0,2,1,1)} \\
&\overset{\mathtt{q}}{\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow} \boxed{(0,4,2,2)} \\
&\overset{\mathtt{q}}{\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow} (0, \underline{\mathbf{6}}, 3, \underline{\mathbf{3}}) \\
&\overset{2,4}{\rightsquigarrow} (1, 2, \underline{\mathbf{5}}, 1) \\
&\overset{3}{\longmapsto} (\underline{\mathbf{2}}, 3, 1, 2) \\
&\overset{1}{\longmapsto} \boxed{(0,4,2,2)}.
\end{aligned}$$

L'algorithme s'arrête car il a déjà vu cette configuration, et elle vérifie le critère de Dhar. Il s'agit de la configuration récurrente équivalente à $\mathtt{u}_1$ et $\mathtt{u}_2$. Comme elle est différente de la configuration récurrente $\mathtt{u}_3$, on a montré que $\mathtt{u}_1$ et $\mathtt{u}_3$ ne sont pas équivalentes. $\diamond$

Les démonstrations des théorèmes 1.6 page 42, 1.7 page précédente et 1.8 page précédente ne sont pas indiquées ici pour deux raisons. Elles sont un peu longues et nécessitent quelques lemmes préliminaires d'une part, et d'autre part, nous démontrons pour chacun de ces théorèmes une version plus générale dans la deuxième partie de cette thèse. Ainsi, le Théorème 5.6 page 181 est une version étendue du Théorème 1.6 page 42, le Théorème 1.7 page précédente se généralise par les propositions 5.10 page 187 et 5.11 page 188, et enfin le Théorème 5.12 page 188 étend le Théorème 1.8 page précédente au cadre du modèle flèche-hauteur.

$-\ o\ -$

Soit $G_{\mathtt{q}}$ un tas de sable, et $\{\mathtt{q}\} \subset S' \subseteq S$. On note $G' = (S', A')$ le graphe obtenu à partir de G en fusionnant les sommets de $S \setminus S'$ avec le puits $\mathtt{q}$, et en supprimant les boucles éventuelles qui se formeraient lors de cette opération. On appelle surjection canonique de $\mathcal{U}(G_{\mathtt{q}})$ dans $\mathcal{U}(G'_{\mathtt{q}})$ la projection des configurations de $G_{\mathtt{q}}$ sur $\mathcal{U}(G'_{\mathtt{q}})$, c'est-à-dire l'application qui à une configuration $\mathtt{u}$ de $G_{\mathtt{q}}$ associe la sous-configuration restreinte à S'^* qui est une configuration de $G'_{\mathtt{q}}$. On suppose que $S'^* \neq \emptyset$. On dit que $G'_{\mathtt{q}}$ est le tas de sable induit par S'. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.9 *Si* $\mathtt{u}$ *est une configuration récurrente de* $G_{\mathtt{q}}$*, alors la sous-configuration de* $\mathtt{u}$ *restreinte à* S'^* *est une configuration récurrente de* $G'_{\mathtt{q}}$.

Démonstration : Si $\mathtt{u}$ est récurrente, $\mathtt{u} + \beta \mapsto \mathtt{u}$. On sait de plus que chaque sommet s'éboule exactement une fois lors de cette relaxation (cf. Théorème 1.6 page 42). Si on éboule les sommets de $S \setminus S'$ en premier, la configuration $\mathtt{u}_1$ obtenue n'est pas stable, et sa relaxation conduit à $\mathtt{u}$. Mais la sous-configuration $\mathtt{u}'_1$ restreinte à $G'_{\mathtt{q}}$ de $\mathtt{u}_1$ correspond à $\mathtt{u}' + \beta'$. D'où le résultat. □

Exemple 1.14
La Figure 1.17 met en évidence la surjection canonique de $\mathcal{U}(G_{\mathtt{q}})$ dans $\mathcal{U}(G'_{\mathtt{q}})$. Ici, $S' = \{x_1, x_2, x_3\}$. À la configuration récurrente $\mathtt{u}_3$ est associée canoniquement la configuration $\mathtt{u}'_3$ de $G'_{\mathtt{q}}$ qui est alors elle aussi récurrente.

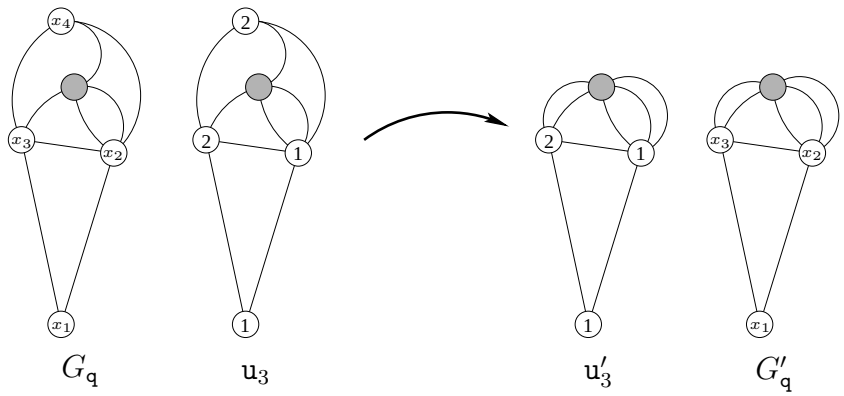


FIG. 1.17 – Surjection canonique de $\mathcal{U}(G_{\mathtt{q}})$ dans $\mathcal{U}(G'_{\mathtt{q}})$.

◇

Remarque 1.2 (Cas de plusieurs puits)
Ces considérations sur la fusion de certains sommets permet de montrer très simplement qu'un modèle à k puits est complètement équivalent à un modèle où ces puits ont tous été fusionnés en un même puits unique. En effet, dans ce cas la surjection canonique est en fait une bijection, et même un *isomorphisme* de systèmes dynamiques discrets.

– *o* –

La présentation par vecteurs des configurations nous permet de considérer la relation d'ordre partiel $\leq$ sur les configurations :

$$\mathtt{u}' \leq \mathtt{u} \iff 0 \leq \mathtt{u} - \mathtt{u}' \iff \mathtt{u} - \mathtt{u}' \in \mathcal{U}^+.$$

On rappelle que pour une configuration $\mathtt{u}$ quelconque, on note $\hat{\mathtt{u}}$ l'unique configuration stable associée à $\mathtt{u}$. Autrement dit, $\hat{\mathtt{u}}$ est obtenue par la relaxation de $\mathtt{u}$.

Proposition 1.10 *Soit* $\mathtt{u}$ *une configuration. S'il existe une configuration récurrente* $\mathtt{u}'$ *telle que* $\mathtt{u}' \leq \mathtt{u}$*, alors* $\hat{\mathtt{u}}$ *est récurrente.*

Démonstration : Ce résultat est immédiat à partir de la définition par chaîne de Markov. On peut toujours atteindre $\mathtt{u}$ à partir de $\mathtt{u}'$ en ajoutant des grains sur des sommets réguliers, et donc $\hat{\mathtt{u}}$ à partir de $\mathtt{u}'$ en ajoutant des grains sur des sommets réguliers et en éboulant ensuite les sommets instables. □

On peut alors revenir à la définition de la loi $\oplus$ définie plus haut.

Proposition 1.11 *La loi* $\oplus$ *est compatible avec la relation d'équivalence* $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$*.*

Démonstration : Soit des configurations telles que $u\mathcal{R}^{\mathtt{q}}u'$ et $v\mathcal{R}^{\mathtt{q}}v'$. Par définition de $\oplus$, on a : $(u \oplus v)\mathcal{R}^{\mathtt{q}}(u+v)$ et $(u' \oplus v')\mathcal{R}^{\mathtt{q}}(u'+v')$. En outre, il est trivial que $(u+v)\mathcal{R}^{\mathtt{q}}(u'+v')$, d'où le résultat. □

Corollaire 1.12 *La loi* $\oplus$ *est une* loi de composition interne *sur* $\mathcal{R}ec$*.*

Démonstration : Si $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont deux configurations récurrentes, alors $\mathtt{u} + \mathtt{u}' \geq \mathtt{u}$. Par la Proposition 1.10, $\mathtt{u} \oplus \mathtt{u}' = \widehat{\mathtt{u} + \mathtt{u}'}$ est récurrente. □

$$-\ o\ -$$

Si $\mathtt{u}$ est une configuration, on note $ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}, x_i)$ la longueur d'une des avalanches lors de la relaxation de $\mathtt{u} + \mathtt{e}_i$, où $\mathtt{e}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i})$. Cette valeur est bien définie, car toutes les avalanches de la relaxation ont la même taille. Lors du jeu qui consiste à tirer un sommet au hasard, y ajouter un grain et effectuer la relaxation, la distribution limite de la longueur des avalanches obtenues peut être calculée à partir des seules configurations récurrentes. En effet lors de ce jeu apparaissent deux types de configurations : les *transientes* qui apparaissent un nombre fini de fois et les *récurrentes* qui apparaissent un nombre infini de fois.

On considère une instance de ce jeu : soit $\mathcal{X} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ un tirage uniforme de sommets réguliers, et $\mathcal{T} = (\mathtt{u}_0, \mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2, \ldots)$ le tirage des configurations stables correspondantes. Par définition, il existe un entier M tel que les configurations d'indice plus grand que M soient toutes récurrentes.

On note $\mathcal{T}^k = (\mathtt{u}_0, \mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2, \ldots, \mathtt{u}_k)$ le tirage des $k+1$ premières configurations. On appelle polynôme générateur des avalanches sur $\mathcal{T}^k$, et on note $P^k(t)$ le polynôme défini par :

$$P^k(t) = \sum_{0 \leq j < k} t^{ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}_j, x_{i_j})}.$$

Le coefficient t^l de ce polynôme divisé par k indique la proportion d'avalanches de taille l dans le tirage $\mathcal{T}^k$. Nous revenons plus en détails sur ces définitions dans le Chapitre 3 page 93.

On suppose k plus grand que M. Pour chaque configuration récurrente $\mathtt{u}$, on note $\alpha_k^j(\mathtt{u})$ le nombre de fois que $\mathtt{u}$ apparaît dans $\mathcal{T}^k$ à un indice h supérieur à M, et que $i_h = j$. *i.e.* le sommet x_j est choisi au temps h. On peut alors décomposer le polynôme $P^k(t)$ de la manière suivante :

$$P^k(t) = \sum_{0 \leq j < M} t^{ad_{G_\mathtt{q}}(\mathtt{u}_j)} + \sum_{x_j \neq \mathtt{q}} \sum_{\mathtt{u} \in \mathcal{R}ec} \alpha_k^j(\mathtt{u}) t^{ad_{G_\mathtt{q}}(\mathtt{u}, x_j)}.$$

Comme la probabilité limite des configurations récurrentes est uniforme dans $\mathcal{T}$, et que celle des sommets réguliers l'est aussi dans $\mathcal{X}$, pour toute configuration récurrente $\mathtt{u}$ et pour tout sommet régulier x_j, la valeur $\alpha_k^j(\mathtt{u})/k$ tend vers $1/n|\mathcal{R}ec|$ quand k tend vers l'infini.

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{P^k(t)}{k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\mathtt{u} \in \mathcal{R}ec} \frac{t^{ad_{G_\mathtt{q}}(\mathtt{u}, x_j)}}{n|\mathcal{R}ec|}.$$

D'où l'intérêt des configurations récurrentes pour calculer la distribution limite des avalanches.

$-\ o\ -$

1.3.2 Bijections avec les arbres couvrants du graphe

Comme il a été dit plus haut, les configurations récurrentes sont comptées par $det(\Delta^\mathtt{q})$. Or, $\Delta^\mathtt{q}$ est un mineur principal de la matrice laplacienne Δ du graphe sous-jacent au modèle. D'après le Matrix Tree Theorem, ce déterminant est égal au nombre d'arbres couvrants du graphe en question. Il existe deux belles preuves bijectives de ce résultat, une due à Dhar et l'autre à Cori et Le Borgne. La première est détaillée ci-dessous.

$-\ o\ -$

Bijection de Dhar

Les deux bijections présupposent qu'on ait choisi un ordre sur les arêtes. Si $G = (S, A)$ est le graphe du modèle, on se donne donc une numérotation des arêtes, c'est-à-dire une bijection de A dans $[\![1, m]\!]$ avec $m = |A|$. On note $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$ en supposant que les arêtes sont ordonnées par ordre croissant d'indice : $e_1 < e_2 < \ldots < e_m$.

La bijection utilise le critère de Dhar (Théorème 1.6 page 42). Si $\mathtt{u}$ est une configuration récurrente, on sait qu'après l'éboulement du puits, chaque sommet régulier s'éboule une et une seule fois lors de la relaxation. Les propriétés de cette relaxation vont définir l'arbre associé à la configuration par la bijection.

On pose $\mathcal{I}_0 = \{\mathtt{q}\}$ et $\mathtt{u}_0 = \mathtt{u}$. Pour $i \geq 0$, on contruit l'ensemble $\mathcal{I}_{i+1}$ et la configuration $\mathtt{u}_{i+1}$ à partir de $\mathcal{I}_i$ et $\mathtt{u}_i$ de la manière suivante. On éboule les sommets de $\mathcal{I}_i$ à partir de $\mathtt{u}_i$ pour obtenir $\mathtt{u}_{i+1}$. L'ensemble $\mathcal{I}_{i+1}$ correspond alors à l'ensemble des sommets instables de $\mathtt{u}_{i+1}$. On arrête le processus dès que $\mathcal{I}_i = \emptyset$ et $\mathtt{u}_i = \mathtt{u}$.

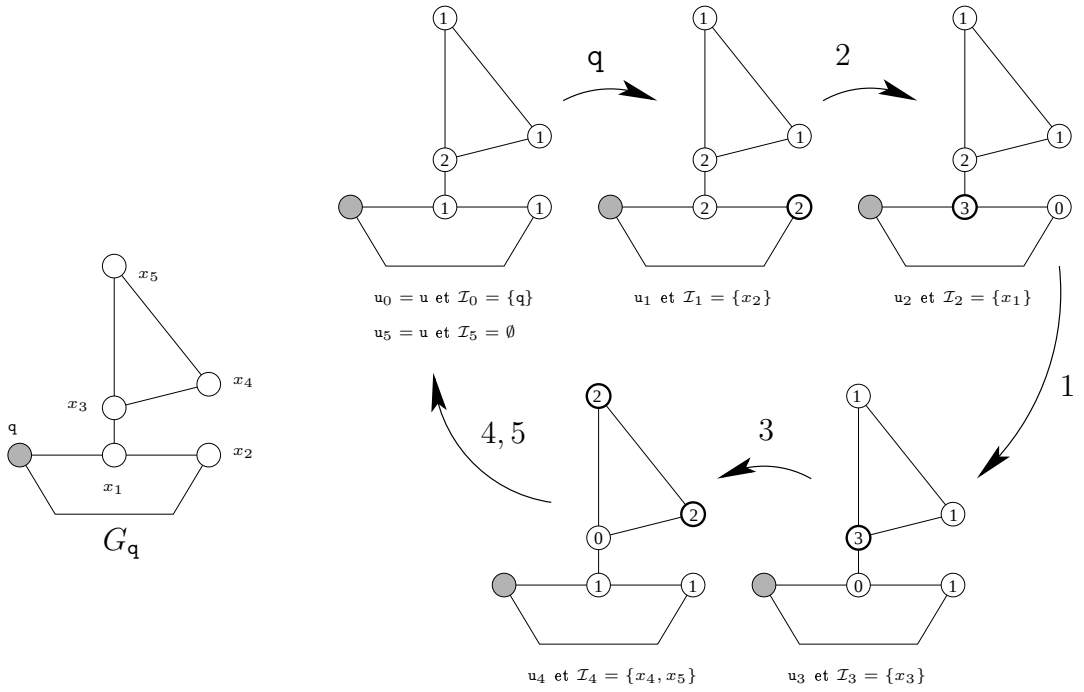


FIG. 1.18 – Construction des configurations $\mathtt{u}_i$ et des ensembles $\mathcal{I}_i$.

Ainsi $\mathcal{I}_1$ est l'ensemble des sommets instables de $\mathtt{u}_1 = \mathtt{u} + \beta$. Si on éboule les sommets de $\mathcal{I}_1$, on obtient une nouvelle configuration $\mathtt{u}_2$. Si $\mathtt{u}_2$ est stable, alors $\mathtt{u}_2 = \mathtt{u}$, car $\mathtt{u}$ est une configuration récurrente. Sinon, $\mathcal{I}_2$ est l'ensemble des sommets instables de $\mathtt{u}_2$. On peut ébouler ce nouvel ensemble de sommets instables et on obtient une nouvelle configuration $\mathtt{u}_3$, et éventuellement un nouvel ensemble de sommets instables $\mathcal{I}_3$. On construit ainsi une partition des sommets $\mathcal{I}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{I}_{k-1} = S$ [2] et une suite de configurations $\mathtt{u} = \mathtt{u}_0, \mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{u}_k = \mathtt{u}$.

Exemple 1.15
La Figure 1.18 donne un exemple de contruction des configurations $\mathtt{u}_i$ et des ensembles $\mathcal{I}_i$.

◇

L'ensemble des configurations récurrentes qui donnent une même suite d'ensembles $\mathcal{I}_i$ n'est pas nécessairement réduit à un singleton. Il en faut plus pour définir la bijection.
Lors d'une vague d'éboulements, tout se passe comme si les sommets instables donnaient un grain à chacun de leurs voisins qui n'est pas instable. On choisit alors de traiter ces arêtes par ordre croissant d'indice lors de chaque vague.

On part d'un ensemble $\mathcal{A}$ vide. On commence par la première vague : partant de $\mathtt{u}_0 = \mathtt{u}$ on éboule le puits par ordre croissant des indices sur ses arêtes incidentes. Si $e_{i_1} < \ldots < e_{i_p}$ sont les arêtes incidentes au puits $\mathtt{q}$, alors on envoie un grain vers le sommet régulier incident à e_{i_1}, puis un autre vers le sommet régulier incident à e_{i_2}, *etc.* On va alors choisir une arête pour chaque sommet de $\mathcal{I}_1$ qui le relie à un sommet de $\mathcal{I}_0$,

[2] L'ensemble $\mathcal{I}_k$ ne fait pas partie de la partition, car $\mathcal{I}_k = \emptyset$.

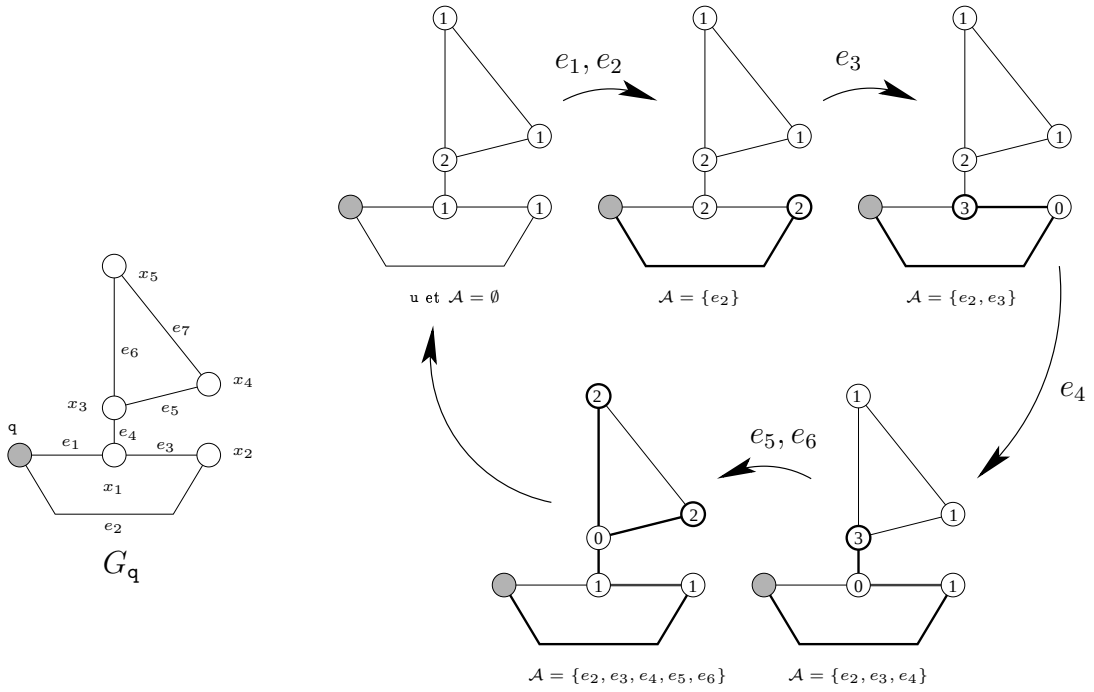


FIG. 1.19 – Construction de l'arbre $\mathcal{A}$ associé à une configuration $\mathtt{u}$.

c'est-à-dire au puits. Comme chacun de ces sommets devient instable lors de la première vague, chacun d'eux a nécessairement une arête en commun avec le puits. Mais il peut en avoir plusieurs. On choisit celle qui envoie le grain qui rend le sommet en question instable, dans le processus défini ci-dessus. On l'ajoute alors à l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exemple 1.16
La Figure 1.19 donne un exemple de construction de l'arbre à partir d'une configuration récurrente. On peut s'arrêter à l'avant-dernière vague, car aucune arête supplémentaire ne peut être ajoutée lors de la dernière vague.

Sur la figure, on a indiqué au niveau des vagues l'ordre dans lequel les arêtes candidates pour être dans l'arbre (c'est-à-dire celles qui relient un sommet de $\mathcal{I}_i$ à un sommet de $\mathcal{I}_{i+1}$) sont considérées. ◇

Pour les vagues suivantes, on procède de la même manière. On note $e_{j_1} < \ldots < e_{j_q}$ les arêtes (rangées par ordre croissant d'indice) qui relient un sommet de $\mathcal{I}_i$ à un sommet de $\mathcal{I}_{i+1}$. On envoie alors les grains un à un suivant ces arêtes. Si lors de l'envoi d'un grain de x_j de $\mathcal{I}_i$ vers $x_{j'}$ de $\mathcal{I}_{i+1}$ selon l'arête e_j, le sommet $x_{j'}$ devient instable, c'est-à-dire s'il contient exactement $d_{j'}$ grains après cette opération, alors on ajoute l'arête e_j dans $\mathcal{A}$. On continue pour toutes les vagues d'éboulements.

À la fin, l'ensemble $\mathcal{A}$ est bien un arbre. D'après le Théorème 1.6 page 42 chaque sommet régulier s'éboule une et une seule fois lors de tout le processus décrit ; donc chacun d'eux devient instable une et une seule fois lors du processus. Ainsi on a ajouté exactement une arête par sommet régulier. De plus comme cette arête est incidente au sommet considéré, et qu'il y a au moins une arête qui est incidente au puits, l'ensemble

$\mathcal{A}$ est couvrant. Comme un ensemble à n arêtes qui couvre $n+1$ sommets est un arbre, $\mathcal{A}$ est un arbre.

$- o -$

La bijection réciproque est immédiate. Il existe une autre bijection classique sur le modèle due à Cori et Leborgne [9] que nous ne détaillons pas ici.

Chapitre 2

Groupe abélien du tas de sable

Sommaire

— *o* —

Dans ce second chapitre, on introduit le *groupe du tas de sable*. En effet, il a été montré qu'une structure de groupe pouvait être associée au modèle (cf. [24, 4]). Il y a deux manières de voir ce goupe : soit comme un ensemble d'opérateurs agissants sur les configurations récurrentes du modèle, soit directement sur ces configurations récurrentes en définissant une loi de composition interne qui munisse cet ensemble d'une structure de groupe.

Dans un deuxième temps, on commence par montrer la manière facile de se ramener aux cas des graphes biconnexes. Ensuite, on choisit de traiter le cas de la famille des graphes diédraux. Cette étude fait l'objet de l'article [18]. Il ressort en particulier que l'analyse systématique de la structure du groupe du tas de sable est non triviale.

Dans un dernier temps, on étudie l'identité du groupe quand le graphe du modèle est une grille. Sa structure fractale en a fait un sujet d'étude particulièrement prisé (cf. [43, 16, 49, 45, 48, 53]). Nous avons montré de nouveaux résultats et présenté des conjectures plus fines pour ce problème (cf. [19]). Enfin, nous terminons ce chapitre par la question du problème du mot sur le modèle.

— *o* —

2.1 Deux approches : physique ou combinatoire

2.1.1 Groupe d'opérateurs

On peut définir un ensemble d'opérateurs qui agissent sur l'ensemble des configurations.

Définition 2.1 Soit $G_{\mathtt{q}}$ un tas de sable à n sommets réguliers. Pour chaque sommet régulier x_i, on note a_i l'opérateur défini par :

$$\forall \mathtt{u} \in \mathcal{U}(G_{\mathtt{q}}),\ a_i\,\mathtt{u} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i}) \oplus \mathtt{u}.$$

En d'autres termes, l'opérateur a_i ajoute un grain sur le sommet x_i et effectue ensuite la relaxation. Ces op'erateurs correspondent aux transitions de la chaîne de Markov définie à la section précédente.

Par commutativité de la loi de composition interne $\oplus$, les opérateurs a_i commutent deux à deux :

$$\forall x_i, x_j \in S^*, \quad a_i a_j = a_j a_i \qquad [Eq\ \ c_{i,j}].$$

Les relations d'éboulements donnent un ensemble de relations r_i entre les opérateurs a_i :

$$a_i^{-\Delta^{\mathtt{q}}_{i,i}} = \prod_{x_j \neq x_i, \mathtt{q}} a_j^{\Delta^{\mathtt{q}}_{i,j}} \qquad [Eq\ \ r_i].$$

Ces relations expriment le fait qu'ajouter d_i grains sur un sommet régulier x_i et effectuer la relaxation est strictement équivalent à ajouter $d_{i,j}$[1] grains sur chacun des voisins réguliers x_j de x_i et à effectuer ensuite la relaxation. En fait, cette équivalence n'est vraie que sur les configurations positives. Dans ce cas, ajouter d_i grains sur le sommet x_i rend ce sommet instable. Après l'éboulement légal du sommet x_i, on se retrouve bien dans la situation où chacun de ses voisins réguliers x_j a reçu $d_{i,j}$ grains.

Les inverses se calculent de proche en proche. Le critère de Dhar donne l'inverse des opérateurs a_i pour tout sommet x_i voisin du puits. En appliquant les relations correspondantes à l'éboulement de ces sommets, on peut calculer l'inverse des opérateurs a_i pour les sommets x_i à distance 2 du puits, et ainsi de suite. Comme le graphe est connexe, on peut trouver les inverses de chacun des opérateurs a_i.

D'après la Proposition 1.10 page 46, ces opérateurs agissent aussi sur le sous-ensemble $\mathcal{R}ec$ des configurations récurrentes. En fait, restreints à ces configurations, ils forment un groupe [24].

Théorème 2.1 *L'ensemble des opérateurs a_i forme un groupe abélien qui agit sur $\mathcal{R}ec$. Il s'agit du groupe abélien $\mathcal{G}$ défini par générateurs et relations par :*

$$\mathcal{G} = < a_1, \ldots, a_n | r_1, \ldots, r_n, c_{1,1}, c_{1,2} \ldots, c_{n,n} > .$$

Dans la deuxième partie de cette thèse, on étend ce résultat au cadre du modèle flèche-hauteur (Théorème 5.24 page 196).

$$-\ o\ -$$

[1] On rappelle que $d_{i,j}$ est le nombre d'arêtes entre le sommet x_i et le sommet x_j.

2.1.2 Groupe des configurations récurrentes

On rappelle qu'à toute configuration $\mathtt{u}$ est associée une unique configuration récurrente notée $\tilde{\mathtt{u}}$: il s'agit de la configuration récurrente équivalente à $\mathtt{u}$ pour la relation $\mathcal{R}^{\mathtt{q}}$. On considère les configurations élémentaires $\mathtt{e}_i$ suivantes :

$$\forall x_i \in S^*,\ \mathtt{e}_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-i}).$$

Alors, quel que soit le sommet régulier x_i, on a :

$$\forall \mathtt{u} \in \mathcal{R}ec,\ a_i\,\mathtt{u} = \mathtt{e}_i \oplus \mathtt{u} = \tilde{\mathtt{e}_i} \oplus \mathtt{u}.$$

On note Ψ l'application qui à un opérateur a_i associe la configuration récurrente $\tilde{\mathtt{e}_i}$. Alors :

Théorème 2.2 *L'application Ψ s'étend en un* isomorphisme de groupes abéliens *de $\mathcal{G}$ dans $(\mathcal{R}ec, \oplus)$.*

Démonstration : Cf. [24]. □

On note $SP(G_{\mathtt{q}})$ le groupe $(\mathcal{R}ec, \oplus)$ sur le tas de sable $G_{\mathtt{q}}$. On l'appelle *groupe du tas de sable $G_{\mathtt{q}}$.*
Cori et Rossin ont montré dans [12, 53] que le groupe du tas de sable $G_{\mathtt{q}}$ est indépendant du choix du puits. Plus formellement :

Proposition 2.3 *Soit $G_{\mathtt{q}}$ et $G'_{\mathtt{q}}$ deux tas de sable sur le même graphe G. Alors $SP(G_{\mathtt{q}})$ et $SP(G'_{\mathtt{q}})$ sont isomorphes.*

Eu égard à cette proposition, on note $SP(G)$ le groupe du tas de sable sur n'importe quel modèle $G_{\mathtt{q}}$ dont le graphe sous-jacent est G.

L'approche par opérateurs est très répandue dans la littérature physique, alors que celle qui munit l'ensemble des configurations récurrentes d'une structure de groupe pour l'addition $\oplus$ séduit plus les combinatoriciens. C'est pourquoi on parle d'approche combinatoire pour cette dernière. Traditionnellement, le groupe d'opérateurs de l'approche physicienne est défini en notation multiplicative, alors que le groupe des configurations récurrentes est décrit en notation additive.

$$-\ o\ -$$

On se propose de faire un exemple très détaillé de toutes ces notions.

Exemple 2.1 (Exemple détaillé)
On considère le modèle $G_{\mathtt{q}}$ de la Figure 2.1 page suivante.
Comme le graphe G admet 9 arbres couvrants, le modèle admet autant de configurations

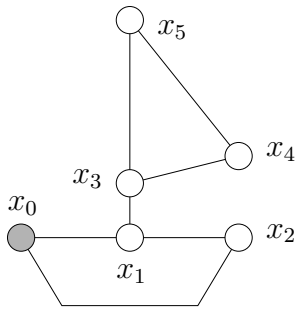


FIG. 2.1 – Modèle G_{q} du bateau.

récurrentes. Ce sont les 9 configurations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathtt{u}_1 &= (2,1,2,1,1),\\
\mathtt{u}_2 &= (2,1,2,0,1),\\
\mathtt{u}_3 &= (2,1,2,1,0),\\
\mathtt{u}_4 &= (1,1,2,1,1),\\
\mathtt{u}_5 &= (1,1,2,0,1),\\
\mathtt{u}_6 &= (1,1,2,1,0),\\
\mathtt{u}_7 &= (2,0,2,1,1),\\
\mathtt{u}_8 &= (2,0,2,0,1),\\
\mathtt{u}_9 &= (2,0,2,1,0).
\end{aligned}$$

Le sommet x_3 contient toujours le même nombre de grains : 2. C'est ce qu'on appelle un sommet *saturé* : il ne pourrait pas contenir plus de grains sans être instable. Si x_3 est saturé dans toutes les configurations récurrentes, c'est parce qu'il est au bout d'un *pont* ou *isthme* du graphe.

Les opérateurs a_i correspondent à l'addition $\oplus$ des configurations élémentaires e_1, c'est-à-dire à la somme suivie de la relaxation. De manière équivalente, ils correspondent à l'addition des configurations récurrentes $\tilde{\mathsf{e}_i}$ équivalentes à chacune des configurations élémentaires e_i.

Les 5 configurations récurrentes $\tilde{\mathsf{e}_i}$ se calculent à partir des e_i par l'algorithme ther-

mique (Théorème 1.8 page 43). On peut calculer $\tilde{\mathsf{e}}_4$ par exemple :

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}_4 = (0,0,0,1,0) &\overset{\mathsf{q}}{\twoheadrightarrow} (1,1,0,1,0) \overset{\mathsf{q}}{\twoheadrightarrow} (2,\underline{\mathbf{2}},0,1,0)\\
&\overset{2}{\rightarrowtail} (\underline{\mathbf{3}},0,0,1,0) \overset{1}{\rightarrowtail} (0,1,1,1,0)\\
&\overset{\mathsf{q}}{\twoheadrightarrow} (1,\underline{\mathbf{2}},1,1,0) \overset{2}{\rightarrowtail} (2,0,1,1,0)\\
&\overset{\mathsf{q}}{\twoheadrightarrow} (\underline{\mathbf{3}},1,1,1,0) \overset{1}{\rightarrowtail} (0,\underline{\mathbf{2}},2,1,0)\\
&\overset{2}{\rightarrowtail} (1,0,2,1,0) \overset{\mathsf{q}}{\twoheadrightarrow} (2,1,2,1,0)\\
&\overset{\mathsf{q}}{\twoheadrightarrow} (\underline{\mathbf{3}},\underline{\mathbf{2}},2,1,0) \overset{1,2}{\rightsquigarrow} (1,1,\underline{\mathbf{3}},1,0)\\
&\overset{3}{\rightarrowtail} (2,1,0,\underline{\mathbf{2}},1) \overset{4}{\rightarrowtail} (2,1,1,0,\underline{\mathbf{2}})\\
&\overset{5}{\rightarrowtail} (2,1,2,1,0) = \mathsf{u}_3 = \tilde{\mathsf{e}}_4.
\end{aligned}$$

On s'arrête là, car on sait que la dernière configuration est récurrente (elle appartient à la liste que l'on a dressée plus haut). En théorie, l'algorithme aurait encore éboulé une fois le puits et encore une fois chacun des sommets réguliers. Il aurait retrouvé la même configuration et se serait alors arrêté.
De la même manière, on calcule les autres valeurs des $\tilde{\mathsf{e}}_i$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathsf{e}}_1 &= (1,1,2,1,1) = \mathsf{u}_4,\\
\tilde{\mathsf{e}}_2 &= (2,1,2,1,1) = \mathsf{u}_1,\\
\tilde{\mathsf{e}}_3 &= (1,1,2,1,1) = \mathsf{u}_4,\\
\tilde{\mathsf{e}}_4 &= (2,1,2,1,0) = \mathsf{u}_3,\\
\tilde{\mathsf{e}}_5 &= (2,1,2,0,1) = \mathsf{u}_2.
\end{aligned}$$

En particulier on a $\tilde{\mathsf{e}}_1 = \tilde{\mathsf{e}}_3$, cela signifie que $\mathsf{e}_1 \mathcal{R}^{\mathsf{q}} \mathsf{e}_3$, *i.e.* e_1 et e_3 sont équivalentes. En effet $\mathsf{e}_1 = \mathsf{e}_3 + \Delta_3^{\mathsf{q}} + \Delta_4^{\mathsf{q}} + \Delta_5^{\mathsf{q}}$. En fait cela est très intuitif, car l'arête entre x_1 et x_3 est un *pont* du graphe. Comme on le montre plus loin, si on fusionne les deux sommets x_1 et x_3, le groupe reste le même.

Comme les a_i sont des générateurs du groupe abélien $\mathcal{G}$ qui agit sur $\mathcal{R}ec$, et que Ψ est un isomorphisme de groupes abéliens, les $\tilde{\mathsf{e}}_1$ sont des générateurs du groupe abélien $(\mathcal{R}ec, \oplus)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathsf{u}_1 &= \tilde{\mathsf{e}}_2,\\
\mathsf{u}_2 &= \tilde{\mathsf{e}}_5,\\
\mathsf{u}_3 &= \tilde{\mathsf{e}}_4,\\
\mathsf{u}_4 &= \tilde{\mathsf{e}}_1,\\
\mathsf{u}_5 &= \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_5,\\
\mathsf{u}_6 &= \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_4,\\
\mathsf{u}_7 &= \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_2,\\
\mathsf{u}_8 &= \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_5,\\
\mathsf{u}_9 &= \tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_4.
\end{aligned}$$

En fait, comme β vaut $(1,1,0,0,0)$, l'identité *id* du groupe est la configuration $\tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_2$, autrement dit u_7. On peut vérifier que $\mathsf{u}_i \oplus \mathsf{u}_7 = \mathsf{u}_i$ quelque soit $1 \leq i \leq 9$. En fait, on a

$\tilde{\mathsf{e}}_2 = 2.\tilde{\mathsf{e}}_1$, si bien que $3.\tilde{\mathsf{e}}_1 = \mathsf{u}_7 = id$. Ainsi $\tilde{\mathsf{e}}_1$ est un élément générateur d'ordre 3, et $\tilde{\mathsf{e}}_2$ aussi.

Si on calcule $\tilde{\mathsf{e}}_4 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_4$, on trouve u_8, c'est-à-dire $\tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus \tilde{\mathsf{e}}_5$. De même $\tilde{\mathsf{e}}_4 \oplus \mathsf{u}_8 = \mathsf{u}_7 = id$, *i.e.* $\tilde{\mathsf{e}}_4$ est d'ordre 3. Par symétrie entre les sommets x_4 et x_5, on en déduit que $2.\tilde{\mathsf{e}}_5 = \mathsf{u}_9$ et que $3.\tilde{\mathsf{e}}_5 = id$.

Tous les générateurs sont d'ordre 3 ; comme le groupe est d'ordre 9, il est le produit de deux groupes cycliques d'ordre 3. En particulier, tous les éléments peuvent être exprimés en fonction d'une base, c'est-à-dire de deux générateurs indépendants. Ici, $\tilde{\mathsf{e}}_1$, $\tilde{\mathsf{e}}_3$ et $\tilde{\mathsf{e}}_2$ d'une part, et $\tilde{\mathsf{e}}_4$ et $\tilde{\mathsf{e}}_5$ d'autre part, sont liés. Par conséquent $(\tilde{\mathsf{e}}_1, \tilde{\mathsf{e}}_4)$ est une base du groupe. En effet, on peut aussi exprimer toutes les configurations récurrentes en fonction de $\tilde{\mathsf{e}}_1$ et $\tilde{\mathsf{e}}_4$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathsf{u}_1 &= 2.\tilde{\mathsf{e}}_1, \\
\mathsf{u}_2 &= 2.\tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus 2.\tilde{\mathsf{e}}_4, \\
\mathsf{u}_3 &= 1.\tilde{\mathsf{e}}_4, \\
\mathsf{u}_4 &= 1.\tilde{\mathsf{e}}_1, \\
\mathsf{u}_5 &= 1.\tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus 2.\tilde{\mathsf{e}}_4, \\
\mathsf{u}_6 &= 2.\tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus 1.\tilde{\mathsf{e}}_4, \\
\mathsf{u}_7 &= 3.\tilde{\mathsf{e}}_1 = 3.\tilde{\mathsf{e}}_4 = id, \\
\mathsf{u}_8 &= 2.\tilde{\mathsf{e}}_4, \\
\mathsf{u}_9 &= 1.\tilde{\mathsf{e}}_1 \oplus 1.\tilde{\mathsf{e}}_4.
\end{aligned}$$

Le groupe du tas de sable $SP(G_{\mathsf{q}})$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En particulier, sa matrice en forme normale de Smith est :

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 3 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Pour qui connaît la théorie sur le modèle, ce résultat est en fait évident. La première chose à dire est que si on contracte l'arête (x_1, x_3), alors le groupe ne change pas. Cela vient du fait que cette arête est un *pont* pour le graphe. La seconde modification que l'on peut effectuer sans changer le groupe, est de changer la place du puits (cf. Proposition 2.3 page 53). Si on choisit comme puits le nouveau sommet issu de la fusion de x_1 et x_3, alors il est très facile de voir que le groupe sur le graphe est le produit des groupes sur chacun des deux cycles de longueur 3 du graphe. Or le groupe sur ces cycles est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est une forme normale de Smith, on a le résultat.

On peut retrouver ce résultat en appliquant l'algorithme de Smith (cf. Prérequis mathématiques) au mineur principal Δ^{q} de la matrice laplacienne Δ du graphe G du

modèle :

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathfrak{q}} &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Op_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Op_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Op_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -21 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Op_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Op_5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les séquences d'opérations Op_i sont (avec des notations évidentes) les suivantes :

$$Op_1 = \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 3.L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3.C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \end{cases} \qquad Op_2 = \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 2.L_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 8.C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3.C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 3.C_2 \end{cases}$$

$$Op_3 = \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 13.L_5 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\ C_5 \leftarrow C_5 + 2.C_3 \end{cases} \qquad Op_4 = \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 7.L_4 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 3.C_5 \end{cases}$$

$$Op_5 = \begin{cases} C_3 \leftrightarrow C_5 \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_4 \\ L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{cases}$$

◇

2.2 Structure du groupe du tas de sable

Étant donné que le groupe du tas de sable est un groupe abélien fini, on peut chercher à en déterminer sa structure, c'est-à-dire sa *forme normale de Smith*. La manière naturelle de faire et d'appliquer l'algorithme de Smith au mineur principal $\Delta^{\mathfrak{q}}$ de la matrice laplacienne Δ du graphe. On explore dans cette section les liens plus profonds qu'entretiennent la structure du groupe du tas de sable et le graphe du modèle.

2.2.1 Graphes connexes et biconnexes

Dans un premier temps, on peut montrer que l'étude des graphes simplement connexes se ramène à celle des graphes biconnexes. Un graphe simplement connexe peut toujours se décomposer en ensembles de graphes *biconnexes* ou 2-*connexes* maximaux, aussi appelés *blocs*, et de graphes K_2 (deux sommets reliés entre eux par une arête), reliés entre eux par des *points d'articulations*.

Exemple 2.2
La Figure 2.2 donne un exemple de décomposition d'un graphe simplement connexe en *blocs* et graphes K_2. Les *points d'articulations* du graphe correspondent aux cercles tracés en gras. Le graphe se décompose en 3 blocs et 2 graphes K_2.

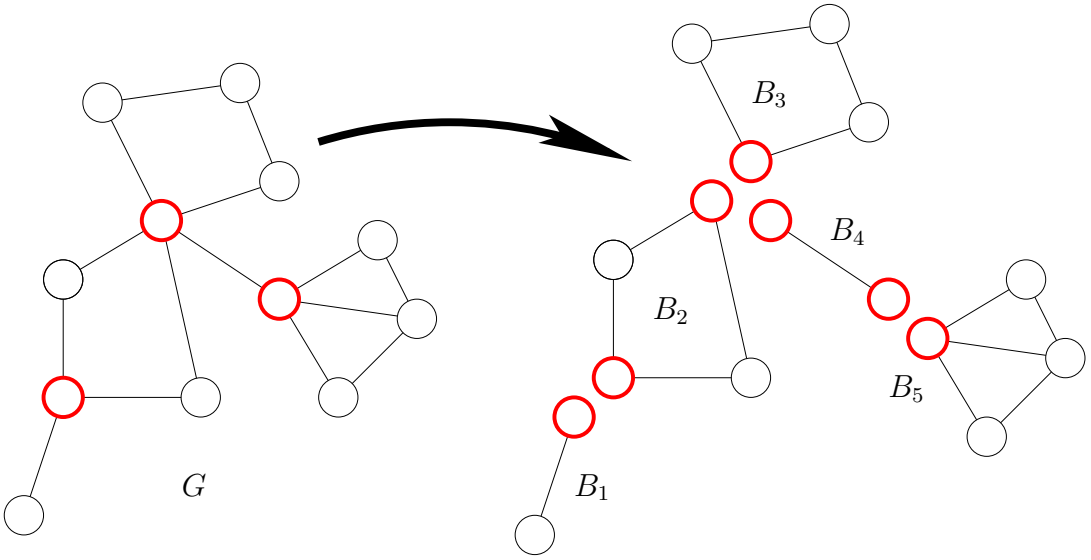


FIG. 2.2 – Décomposition d'un graphe en blocs.

Proposition 2.4 *Si le graphe G se décompose en k blocs 2-connexes ou graphes K_2 notés $B_1, \ldots, B_k$, alors :*

$$SP(G) \sim SP(B_1) \times \cdots \times SP(B_k).$$

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur le nombre k. Si $k = 1$, alors le résultat est immédiat.

Sinon, $G = (S, A)$ se décompose en k graphes $B_1, \ldots, B_k$ avec $k > 1$. On considère le graphe $B_k = (S_k, A_k)$ et le point d'articulation x_i qui le rattache au graphe $G' = G \setminus B_k =$

(S', A') en notation évidente. En particulier $S_k \cap S' = \{x_i\}$, $S_k \cup S' = S$ et $A_k \cup A' = A$. Alors, par la Proposition 2.3 page 53, $SP(B_k)$ est le groupe du tas de sable sur le graphe B_k avec x_i comme choix de puits. De même $SP(G')$ est le groupe du tas de sable sur le graphe G' avec x_i comme puits. L'application Ψ de $SP(B_k) \times SP(G')$ dans $SP(G)$ définie par :

$\forall (\mathtt{u}^k, \mathtt{u}') \in SP(B_k) \times SP(G'), \forall x_j \in S \setminus \{x_i = \mathtt{q}\}$,

$$\Psi(\mathtt{u}^k, \mathtt{u}')_j \quad = \quad \begin{cases} \mathtt{u}^k_j & \text{si } x_j \in S_k, \\ \mathtt{u}'_j & \text{si } x_j \in S', \end{cases}$$

est trivialement un isomorphisme de groupes abéliens. La Figure 2.3 montre une addition : $\Psi(\mathtt{u}^1_1, \mathtt{u}) \oplus \Psi(\mathtt{u}^1_2, \mathtt{u}') = \Psi(\mathtt{u}^1_1 \oplus^1 \mathtt{u}^1_2, \mathtt{u} \oplus' \mathtt{u}')$. Ainsi $SP(G) \sim SP(G') \times SP(B_k)$. On peut

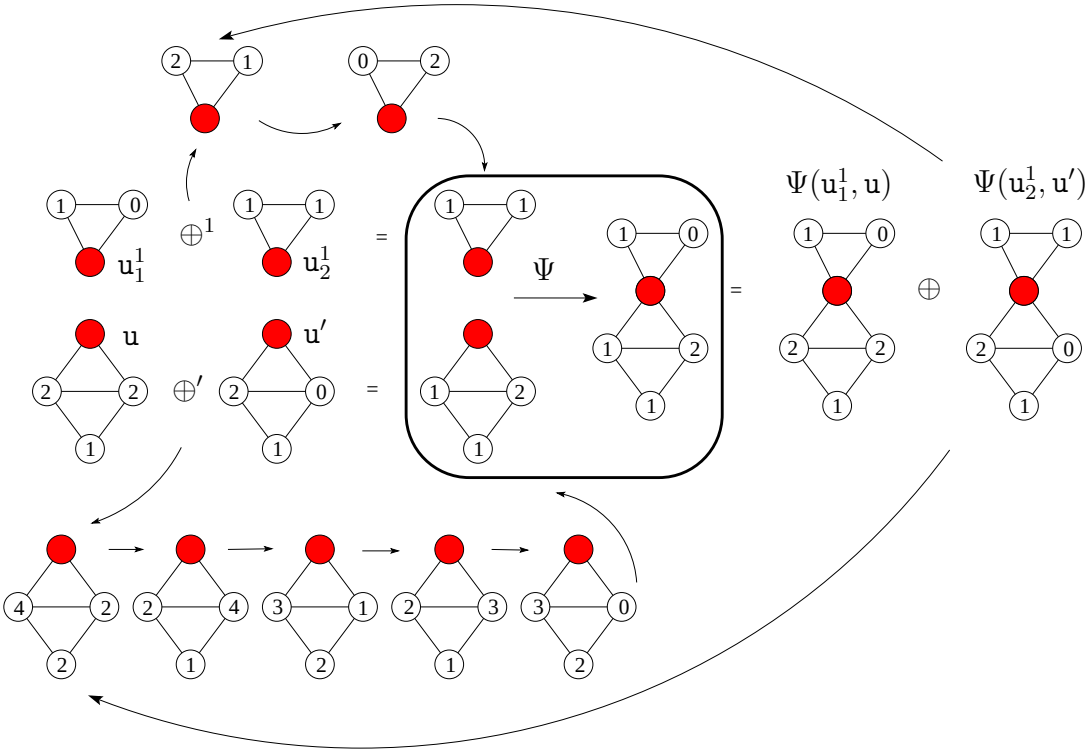


FIG. 2.3 – Exemple du passage de Ψ à l'addition.

alors appliquer l'hypothèse de récurrence à G' qui se décompose en $k-1$ graphes, et on obtient $SP(G) \sim SP(B_1) \times \cdots \times SP(B_k)$. □

Remarque 2.1

En fait, si le graphe B_j est isomorphe à K_2 alors $SP(B_j) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{id\}$. Ainsi, $SP(G)$ est isomorphe au produit cartésien des groupes du tas de sable sur ses blocs.

Par exemple, le groupe du tas de sable sur le graphe G de la Figure 3.14 page 111 est isomorphe à $SP(B_2) \times SP(B_3) \times SP(B_5)$.

– *o* –

Le groupe du tas de sable sur certains graphes connexes très simples est bien connu :

Proposition 2.5 *Soit G un graphe à n sommets réguliers, alors*
- *si $G = A$ est un arbre, alors $SP(G) \sim \{id\}$,*
- *si $G = C_{n+1}$ est le cycle de taille $n+1$, alors $SP(G) \sim \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.*

Exemple 2.3
La Figure 2.4 donne un exemple sur le cycle de longueur 4.

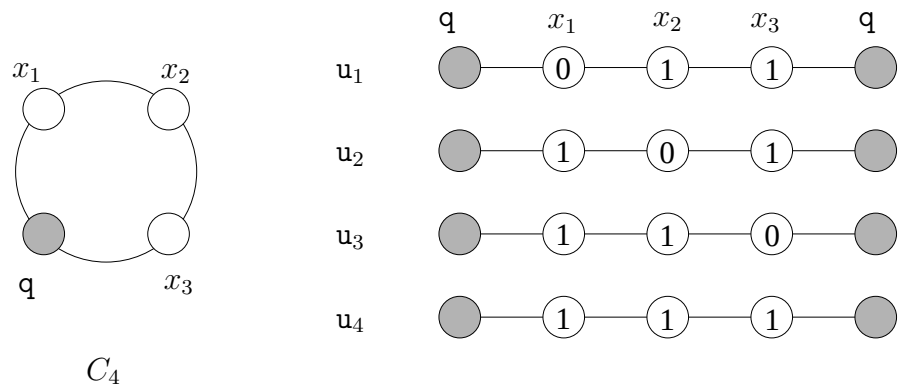


FIG. 2.4 – Exemple du groupe sur C_4.

Les 4 configurations du cycle sont indiquées à droite. On les a représentées en 'dépliant' le cycle. Il faut imaginer que les deux sommets grisés sont un seul et même sommet : il s'agit simplement d'une manière de représenter le cycle. Cependant, eu égard à des remarques déjà faites sur le cas des graphes à plusieurs puits, le cycle est équivalent à la ligne où chacune des extrémités est un puits. Cette représentation est donc tout à fait légitime.

Pour montrer que le groupe est cyclique, on va montrer qu'il existe un générateur de tous les éléments, c'est-à-dire une configuration récurrente d'ordre 4 dans le groupe. Comme $u_2 = \beta$, on sait déjà que u_2 est l'identité id du groupe. Comme il y a deux éléments d'ordre 4 dans le cycle de taille 4, et que pour des raisons de symétrie, u_1 et u_3 ont le même ordre, on suppose que u_1 est un bon candidat comme générateur du groupe :

$$\begin{aligned}
u_1 + u_1 &= (0,2,2) \mapsto (1,1,1) = u_2 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \oplus u_1 = u_2,\\
u_2 + u_1 &= (1,2,2) \mapsto (1,1,0) = u_3 \quad \Longrightarrow \quad u_2 \oplus u_1 = u_3,\\
u_3 + u_1 &= (2,1,2) \mapsto (1,0,1) = u_4 \quad \Longrightarrow \quad u_3 \oplus u_1 = u_4,\\
u_4 + u_1 &= (2,0,1) \mapsto (0,1,1) = u_1 \quad \Longrightarrow \quad u_4 \oplus u_1 = u_1.
\end{aligned}$$

Comme prévu, u_1 est d'ordre 4 et :

$$u_2 = 2.u_1 \qquad u_3 = 3.u_1 \qquad u_4 = 4.u_1 = id.$$

$-\ o\ -$

Une des questions que l'on peut se poser, est de savoir si n'importe quelle structure de groupe correspond à un groupe de tas de sable. On peut répondre facilement par

l'affirmative, à l'aide des propositions 2.4 page 58 et 2.5 page ci-contre. En effet, si G admet la décomposition suivante en forme normale de Smith :

$$G = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z},$$

alors, tout graphe $H_{d_1,\ldots,d_k}$ dont l'ensemble des blocs est exactement $\{C_{d_1}, \ldots, C_{d_k}\}$, est isomorphe à G. En effet, le groupe du tas de sable $SP(H_{d_1,\ldots,d_k})$ sur le graphe $H_{d_1,\ldots,d_k}$ est isomorphe à $SP(C_{d_1}) \times \cdots \times SP(C_{d_k})$, d'après la Proposition 2.4 page 58. Mais d'après la Proposition 2.5 page ci-contre, chacun des $SP(C_{d_i})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$. Autrement dit, on a le résultat suivant [53] :

Théorème 2.6 *Tout groupe abélien fini est le groupe d'un tas de sable.*

L'extension de ce résultat au cas des graphes biconnexes est toujours une question ouverte. Plus précisément, on sait qu'il existe des groupes abéliens finis qui ne sont pas le groupe du tas de sable d'un graphe biconnexe, mais on ne sait pas caractériser la famille de ces groupes.

$- o -$

2.2.2 Exemple du groupe diédral

Comme le modèle du tas de sable est défini sur un graphe, et qu'il associe un groupe à ce graphe, on peut légitimement se demander s'il y a un lien (réciproque ?) avec les représentations graphiques classiques de certains groupes.

Par exemple, étant donné un groupe fini défini par générateurs et relations, on peut regarder le graphe d'une de ses représentations de Cayley. Comme ce graphe est orienté, on en considère en fait la version non orientée. Quel est alors le groupe du tas de sable sur ce graphe, et a-t-il un lien avec le groupe originel ?

À travers l'exemple du groupe diédral, on peut montrer que la réponse à cette question est négative : de manière générale il n'y a pas de lien entre un groupe et le groupe du tas de sable sur la version non orientée d'une de ses représentations de Cayley. En fait, c'est un résultat que l'on pouvait déjà énoncer en regardant la famille des grilles. Au delà de ce problème, l'analyse exhaustive d'une classe assez simple de graphes, à savoir ici la famille des graphes diédraux, montre en outre assez clairement la difficulté inhérente à l'étude systématique du groupe du tas de sable.

$- o -$

On note D_n le groupe diédral à $2n$ éléments. C'est par définition le groupe des isométries du polygone régulier à n côtés qui préservent le centre du polygone. Autrement dit, D_n est le groupe des isométries quotienté par le groupe des translations. On considère dans la suite que $n \geq 3$, car on ne peut pas vraiment parler de polygone régulier à n côtés si $n \leq 2$.

Exemple 2.4
La Figure 2.5 page suivante montre les différentes symétries du pentagone, c'est-à-dire du polygone régulier à 5 côtés. On note s_i la symétrie par rapport à la droite T_i. Le

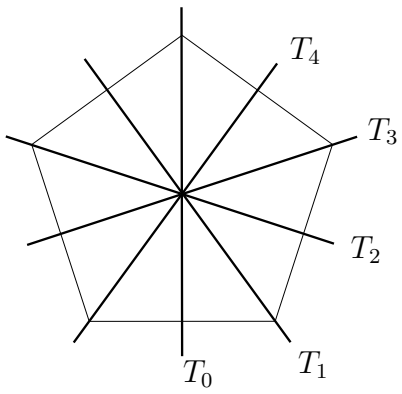


FIG. 2.5 – Symétries du pentagone P_5.

pentagone admet 5 symétries différentes.

Les autres isométries du pentagone qui conservent son centre sont des rotations. Elles sont au nombre de 5 et elles ont pour centre, le centre de symétrie du polygone. Elles ont pour angle $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ et enfin l'identité qui est la rotation d'angle 2π.

Chacune de ces isométries peut être générée par deux isométries bien choisies. Par exemple la rotation r_1 d'angle $2\pi/5$ et la symétrie s_0 engendrent toutes les isométries du pentagone qui conservent son centre. En effet toute rotation peut être obtenue à partir de r_1. De même la symétrie s_i correspond à $r_1^i\ s_0$.

Mais si on choisit bien deux symétries, on peut aussi engendrer toutes les isométries voulues. Par exemple s_0 et s_1 fonctionnent. C'est trivial, car $s_1 s_0$ vaut r_1.

De manière générale, le groupe diédral D_n est un groupe à $2n$ éléments : n symétries et n rotations dont l'identité. Il n'est pas abélien, mais peut toujours être généré par deux éléments : soit deux symétries (bien choisies), soit une symétrie et une rotation (bien choisie [2]). On l'appelle aussi *groupe des symétries*, car il est engendré par l'ensemble des symétries.

En fait, il admet deux représentations de Coxeter. Si on choisit la représentation par symétries, on a :

$$D_n\ :<\ s_0, s_1 \mid s_0^2 = s_1^2 = (s_1 s_0)^n = 1\ >.$$

La version non orientée du graphe de Cayley de cette représentation est le cycle de longueur $2n$. Le groupe du tas de sable sur ce graphe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.

Cette première remarque montre déjà qu'il n'y a aucun lien entre le groupe diédral et le groupe du tas de sable sur la version non orientée d'une de ses représentations de Cayley, mis à part leur ordre dans ce cas. On peut se demander, si le groupe du tas de sable change quand on prend comme graphe du modèle la version non orientée du graphe de Cayley d'une autre représentation de Coxeter du même groupe, à savoir D_n dans le cas présent.

– *o* –

[2] de plus petit angle par exemple.

Une seconde représentation de Coxeter de D_n est donnée par :

$$D_n \ :< \ s_0, r_1 \mid s_0^2 = r_1^n = (r_1 s_0)^2 = 1 \ > .$$

On obtient une représentation de Cayley $\overline{\mathcal{D}_n}$ sensiblement différente dans ce cas. La version non orientée de ce graphe est parfois appelée *graphe diédral*, noté $\mathcal{D}_n$. La Figure 2.6 montre les graphes $\overline{\mathcal{D}_n}$ et $\mathcal{D}_n$.

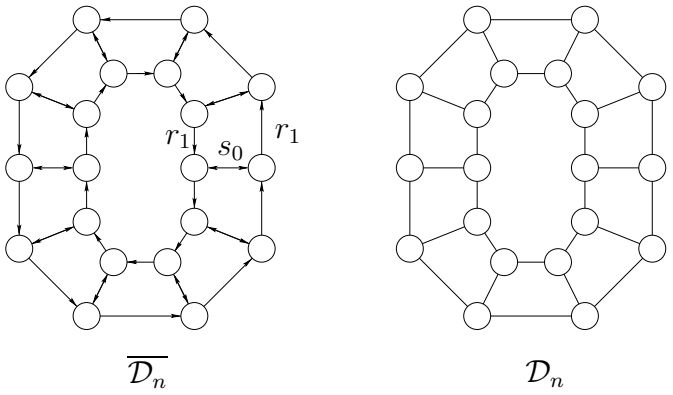


FIG. 2.6 – Graphe $\overline{\mathcal{D}_n}$ et sa version non orientée $\mathcal{D}_n$.

En fait le graphe $\mathcal{D}_n$ est planaire. D'après Cori et Rossin, le groupe du tas de sable sur un graphe planaire dessiné est isomorphe au groupe du tas de sable sur son graphe dual. Comme dans notre cas le graphe dual $\mathcal{D}_n^*$ de $\mathcal{D}_n$ est plus simple, on préfère travailler à partir de ce graphe. En particulier, il admet $n+2$ sommets notés $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$. On choisit x_{n+2} comme puits. Le modèle sur lequel on travaille est donc celui de la Figure 2.7.

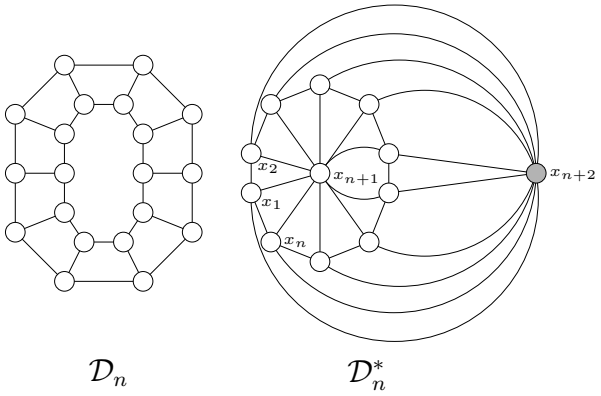


FIG. 2.7 – Graphe planaire $\mathcal{D}_n$ et son dual $\mathcal{D}_n^*$.

Les relations d'éboulements donnent alors le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} \mathsf{e}_1 &= 4\mathsf{e}_n - \mathsf{e}_{n-1} - \mathsf{e}_{n+1} \\ \mathsf{e}_2 &= 4\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_n - \mathsf{e}_{n+1} \\ \mathsf{e}_i &= 4\mathsf{e}_{i-1} - \mathsf{e}_{i-2} - \mathsf{e}_{n+1} \quad \text{(pour tout } 3 \leq i \leq n\text{)}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

À la vue de ce système, on peut déjà en déduire que le nombre minimal de générateurs du groupe est au plus 3. En effet, chacun des e_i peut s'exprimer en fonction de e_1, e_2 et e_{n+1}. Pour $3 \leq i \leq n$, on définit les suites μ_i, ν_i et ρ_i par $\mathsf{e}_i = \mu_i \mathsf{e}_2 - \nu_i \mathsf{e}_1 - \rho_i \mathsf{e}_{n+1}$.

Exemple 2.5
Regardons le cas $n = 3$, c'est-à-dire le groupe des symétries du triangle équilatéral (cf. Figure 2.8). À partir du graphe dual $\mathcal{D}_3^*$ où x_5 est choisi comme puits du modèle, le

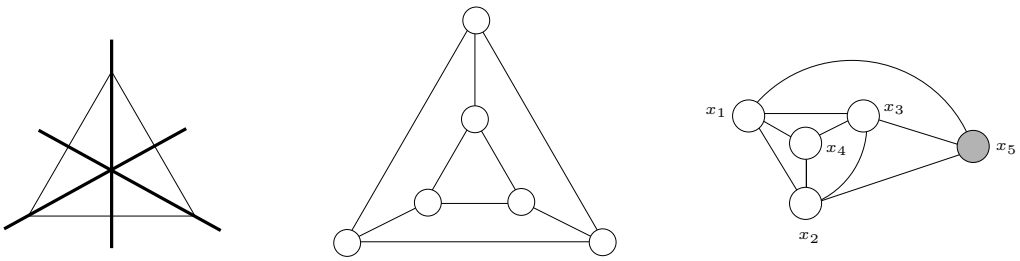


FIG. 2.8 – Le triangle équilatéral $\mathcal{T}$, le graphe $\mathcal{D}_3$ et son dual $\mathcal{D}_3^*$.

système d'équations des relations d'éboulements s'écrit :

$$\begin{cases} 4\mathsf{e}_3 = \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_4 \\ 4\mathsf{e}_1 = \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3 + \mathsf{e}_4 \\ 4\mathsf{e}_2 = \mathsf{e}_3 + \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_4. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \mathsf{e}_1 = 4\mathsf{e}_3 - \mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_4 \\ \mathsf{e}_2 = 4\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_3 - \mathsf{e}_4 \\ \mathsf{e}_3 = 4\mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_4. \end{cases}$$

Pour $i \geq 3$, les éléments e_i peuvent tous s'écrire en fonction de e_1, e_2 et $\mathsf{e}_{n+1} = \mathsf{e}_4$. Ici, c'est trivial, et on a $\mu_3 = 4$, $\nu_3 = 1$ et $\rho_3 = 1$.

Si on regarde D_4[3], le groupe des symétries du carré, le système devient :

$$\begin{cases} \mathsf{e}_1 = 4\mathsf{e}_4 - \mathsf{e}_3 - \mathsf{e}_5 \\ \mathsf{e}_2 = 4\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_4 - \mathsf{e}_5 \\ \mathsf{e}_3 = 4\mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_5 \\ \mathsf{e}_4 = 4\mathsf{e}_3 - \mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_5. \end{cases}$$

On a toujours $\mu_3 = 4$, $\nu_3 = 1$ et $\rho_3 = 1$, mais il faut faire un calcul pour trouver la valeur en 4 des suites μ_i, ν_i et ρ_i.

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_4 &= 4\mathsf{e}_3 - \mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_5 \\ \mu_4\mathsf{e}_2 - \nu_4\mathsf{e}_1 - \rho_4\mathsf{e}_5 &= 4(4\mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_5) - \mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_5 \\ \mu_4\mathsf{e}_2 - \nu_4\mathsf{e}_1 - \rho_4\mathsf{e}_5 &= 15\mathsf{e}_2 - 4\mathsf{e}_1 - 5\mathsf{e}_5. \end{aligned}$$

[3]Dans ce cas, le graphe $\mathcal{D}_4^*$ admet un sommet de plus que $\mathcal{D}_3^*$, noté x_6, et choisi comme puits.

Donc $\mu_4 = 15$, $\nu_4 = 4$ et $\rho_4 = 5$. Les suites μ_i, ν_i et ρ_i sont en fait bien définies, dans le sens où leurs valeurs jusqu'à un entier k sur un modèle (D_n, x_{n+2}), pour $n \geq k$, sont égales à leurs valeurs sur le modèle (D_k, x_{k+2}).

En outre, il y a un lien très fort entre elles :

Proposition 2.7 *Si on étend la suite $(\rho_i)_{i\geq 3}$ par $\rho_0 = 1$ et $\rho_1 = 0$, on a :*

$$\rho_i = 4\rho_{i-1} - \rho_{i-2} + 1, \tag{2.2.2}$$

$$\forall i \geq 3, \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_i & = & \rho_{i+1} - \rho_i \\ \nu_i & = & \rho_i - \rho_{i-1}. \end{array} \right.$$

Démonstration :

Par l'Équation (2.2.1), on obtient trois relations de récurrence pour μ_i, ν_i et ρ_i quand $3 \leq i \leq n$:

$$\begin{array}{rcl} \mu_i \mathsf{e}_2 - \nu_i \mathsf{e}_1 - \rho_i \mathsf{e}_{n+1} & = & 4(\mu_{i-1}\mathsf{e}_2 - 4\nu_{i-1}\mathsf{e}_1 - 4\rho_{i-1}\mathsf{e}_{n+1}) \\ & & -(\mu_{i-2}\mathsf{e}_2 - \nu_{i-2}\mathsf{e}_1 - \rho_{i-2}\mathsf{e}_{n+1}) - \mathsf{e}_{n+1} \\ & = & (4\mu_{i-1} - \mu_{i-2})\mathsf{e}_2 - (4\nu_{i-1} - \nu_{i-2})\mathsf{e}_1 - (4\rho_{i-1} + \rho_{i-2} + 1)\mathsf{e}_{n+1}. \end{array}$$

D'où :

$$\forall i \geq 5, \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_i & = & 4\mu_{i-1} - \mu_{i-2} \\ \nu_i & = & 4\nu_{i-1} - \nu_{i-2} \\ \rho_i & = & 4\rho_{i-1} + \rho_{i-2} + 1. \end{array} \right. \tag{2.2.3}$$

Comme il s'agit de relations de récurrence d'ordre 2, il suffit et il est nécessaire de donner deux valeurs initiales pour définir chacune des suites de manière unique. Les suites qui nous intéressent sont, d'après l'Exemple 2.5 page précédente, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_3 & = 4 \\ \mu_4 & = 15 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \nu_3 & = 1 \\ \nu_4 & = 4 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \rho_3 & = 1 \\ \rho_4 & = 5 \end{array} \right.$$

Si on pose $\rho_0 = 1$ et $\rho_1 = 0$, on trouve $\rho_2 = 0$, $\rho_3 = 1$ et $\rho_4 = 5$ avec la relation de récurrence (cf. Équation (2.2.2)) vérifiée par ρ_i. En particulier, on retrouve les bonnes valeurs pour 3 et 4, donc on peut bien étendre ρ_i de cette manière.

En outre, on remarque que $\nu_5 = \mu_4 = 15$, et $\nu_4 = \mu_3 = 4$. Mais ν_i et μ_i suivent la même relation de récurrence (cf. équations (2.2.3)) d'ordre 2. Ainsi, on a montré que $\mu_i = \nu_{i+1}$ pour tout $i \geq 3$.

Reste à montrer le lien entre la suite ν_i et la suite ρ_i, car on aura alors le lien induit entre μ_i et ρ_i par la remarque juste énoncée. Pour les premières valeurs, on a bien $\nu_3 = 1 = 1 - 0 = \rho_3 - \rho_2$ et $\nu_4 = 4 = 5 - 1 = \rho_4 - \rho_5$. Si on pose $\tilde{\nu}_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ avec $\tilde{\nu}_3 = 1$ et $\tilde{\nu}_4 = 5$, on a pour tout $i \geq 3$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\nu}_{i+1} & = & \rho_{i+1} - \rho_i \\ & = & (4\rho_i - \rho_{i-1} + 1) - (4\rho_{i-1} - \rho_{i-2} + 1) \\ & = & 4(\rho_i - \rho_{i-1}) + 3\rho_{i-1} - 4\rho_{i-1} + \rho_{i-2} \\ & = & 4(\rho_i - \rho_{i-1}) - (\rho_{i-1} - \rho_{i-2}) \\ & = & 4\tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_{i-1}. \end{array}$$

Ainsi $(\tilde{\nu}_i)_{i\geq 3}$ est une suite qui admet la même relation de récurrence (cf. équations (2.2.3)) d'ordre 2 que la suite $(\nu_i)_{i\geq 3}$ et les mêmes deux premières valeurs : elles sont identiques.

Ainsi, $\nu_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ et $\mu_i = \rho_{i+1} - \rho_i$ pour tout $i \geq 3$. □

Cette proposition nous permet de simplifier la matrice du système en celle équivalente du système réduit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n$.

Théorème 2.8 *La matrice $\mathbf{A}_n$ du groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_n$ est donnée par :*

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \rho_n - 1 & \rho_{n+1} \\ 0 & \rho_{n+1} & \rho_{n+2} \\ n & \frac{\rho_{n+2}-3\rho_{n+1}-n}{2} & \frac{\rho_{n+2}-\rho_{n+1}-n}{2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

Le système d'équations (2.2.1) est équivalent à un système de même rang sur les trois générateurs e_1, e_2 et e_{n+1}. On choisit le système des trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathsf{e}_1 &= 4\mathsf{e}_n &- \mathsf{e}_{n-1} &- \mathsf{e}_{n+1} \\ \mathsf{e}_2 &= 4\mathsf{e}_1 &- \mathsf{e}_n &- \mathsf{e}_{n+1} \\ 0 &= \mathsf{e}_1 &+ \mathsf{e}_2 &+ \cdots + \mathsf{e}_n \end{cases}$$

Quand on exprime ce système en fonction des seuls générateurs e_1, e_2 et e_{n+1}, on obtient :

$$\begin{cases} \mathsf{e}_1 &= (\rho_n - \rho_{n+1}) \mathsf{e}_1 &+ (\rho_{n+2} - \rho_{n+1}) \mathsf{e}_2 &- \rho_{n+1} \mathsf{e}_{n+1} \\ \mathsf{e}_2 &= (4 + \rho_n - \rho_{n+1}) \mathsf{e}_1 &+ (\rho_n - \rho_{n+1}) \mathsf{e}_2 &+ (\rho_n - 1) \mathsf{e}_{n+1} \\ 0 &= (1 - \rho_n) \mathsf{e}_1 &+ \rho_{n+1} \mathsf{e}_2 &- (\textstyle\sum_{i=3}^{n} \rho_i) \mathsf{e}_{n+1} \end{cases}$$

D'où la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \rho_{n+1} - \rho_n & \rho_{n+1} - \rho_{n+2} & \rho_{n+1} \\ -4 + \rho_{n-1} - \rho_n & 1 + \rho_{n+1} - \rho_n & 1 - \rho_n \\ 1 - \rho_n & \rho_{n+1} & 1 - \sum_{i=0}^{n} \rho_i \end{pmatrix}.$$

On peut simplifier cette matrice par quelques opérations élémentaires qui n'en changent pas sa forme normale de Smith :

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{O_1} \begin{pmatrix} 1 + \rho_{n+1} - \rho_n & -3\rho_{n+1} + \rho_n - 1 & \rho_{n+1} \\ -3 - \rho_{n+1} + 3\rho_n & 1 + \rho_{n+1} - \rho_n & 1 - \rho_n \\ 1 - \rho_n & \rho_{n+1} & -\sum_{i=1}^{n} \rho_i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{O_2} \begin{pmatrix} \rho_{n+1} & -4\rho_{n+1} + \rho_n - 1 & \rho_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \\ -\rho_{n+1} & 1 + 4\rho_{n+1} - \rho_n & 1 - \rho_n - 3\sum_{i=1}^{n} \rho_i \\ 1 - \rho_n & \rho_{n+1} & -\sum_{i=1}^{n} \rho_i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{O_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \rho_n + \rho_{n+1} - 2\sum_{i=1}^{n} \rho_i \\ -\rho_{n+1} & 1 + 4\rho_{n+1} - \rho_n & -\sum_{i=1}^{n} \rho_i - \rho_{n+1} \\ 1 - \rho_n & \rho_{n+1} & -\sum_{i=1}^{n} \rho_i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{O_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \rho_n + \rho_{n+1} - 2\sum_{i=1}^{n} \rho_i \\ -\rho_{n+1} & \rho_{n+2} & -\sum_{i=1}^{n} \rho_i - \rho_{n+1} \\ 1 - \rho_n & \rho_{n+1} & -\sum_{i=1}^{n} \rho_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La transformation O_1 consiste à appliquer la Relation de récurrence (2.2.2) pour $i = n+1$ et $i = n+2$. Avec des notations évidentes, les transformations suivantes sont :

$$O_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \end{array} \right. \qquad O_3 = \left\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \right. .$$

La transformation O_4 consiste alors à utiliser encore une fois la Relation (2.2.2) avec $i = n+2$.

On peut alors montrer par récurrence que pour $n \geq 0$:

$$1 + \rho_{n+1} - \rho_n - 2\sum_{i=1}^{n} \rho_i = n,$$

et ainsi démontrer que la matrice peut bien être transformée en $\mathbf{A}_n$. □

Si on résout l'Équation (2.2.2), on trouve pour tout $n \geq 0$:

$$\rho_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n + \gamma \text{ avec } \left\{ \begin{array}{ll} \lambda = \frac{9-5\sqrt{3}}{12}, & \alpha = 2+\sqrt{3}, \\ \mu = \frac{9+5\sqrt{3}}{12}, & \beta = 2-\sqrt{3}, \\ \gamma = -\frac{1}{2} & . \end{array} \right. \tag{2.2.4}$$

Les nombres α et β sont les deux racines conjuguées du polynôme caractéristique r^2-4r+1 de la Relation de récurrence (2.2.2) vérifiée par ρ_i. Le coefficient γ vérifie l'équation $\gamma - 4\gamma + \gamma = 1$, et les coefficients λ et μ sont déterminés par les conditions initiales $\rho_0 = 1$ et $\rho_1 = 0$.

$$-\ o\ -$$

Analyse des coefficients de la forme normale de Smith

Maintenant, nous allons donner une expression explicite de la forme normale de Smith $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$ de la matrice $\mathbf{A}_n$.

La Formule (2.2.4) n'est pas très utile pour calculer la forme normale de Smith de la matrice $\mathbf{A}_n$. En effet, ce sont plutôt les propriétés arithmétiques de la suite ρ_n qui sont essentielles. On peut montrer facilement par récurrence que, pour tout n, on a $\rho_{n-1}\rho_{n+1} = \rho_n^2 - \rho_n$. Par conséquent, le déterminant $-w_n$ du mineur $\begin{pmatrix} \rho_n - 1 & \rho_{n+1} \\ \rho_{n+1} & \rho_{n+2} \end{pmatrix}$ de $\mathbf{A}_n$ est $-w_n = -(\rho_{n+1} + \rho_{n+2})$, car :

$$\begin{array}{rcl} w_n & = & \rho_{n+1}^2 - (\rho_n - 1)\rho_{n+2} \\ & = & \rho_{n+1}^2 - \rho_n\rho_{n+2} + \rho_{n+2} \\ & = & \rho_{n+1}^2 - (\rho_{n+1}^2 - \rho_{n+1}) + \rho_{n+2} \\ & = & \rho_{n+1} + \rho_{n+2}. \end{array}$$

En particulier la valeur absolue du déterminant de la matrice est $nw_n = n(\rho_{n+1} + \rho_{n+2})$: il s'agit de l'ordre du groupe $SP(\mathcal{D}_n)$. On remarque déjà qu'on trouve un ordre différent de celui trouvé pour l'autre représentation de Coxeter du groupe D_n. De plus, la décomposition en forme normale de Smith de la matrice $\mathbf{A}_n$ est très liée à la décomposition en facteurs premiers de w_n. En effet, cette décomposition peut donner des informations parfois suffisantes pour déterminer $\mathcal{S}_n$.

Proposition 2.9 *Pour $n = 2m+1$ impair, on a $w_n = \rho_{2m+2} + \rho_{2m+3} = h_m^2$ où la suite h_m est définie par :*

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = 5 \\ h_m = 4h_{m-1} - h_{m-2}. \end{cases}$$

Pour $n = 2m$ pair, on a $w_n = \rho_{2m+1} + \rho_{2m+2} = 6\,k_m^2$, où la suite k_m est définie par :

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 = 1 \\ k_m = 4k_{m-1} - k_{m-2}. \end{cases}$$

Démonstration :
On pose $h_m^2 = w_{2m+1}$ et on applique la Relation (2.2.2). On trouve alors la relation de récurrence et les valeurs initiales indiquées pour la suite h_m.

On procède de manière analogue pour démontrer que $6k_m^2 = w_{2m}$. □

Proposition 2.10 *Pour tout $m, n \geq 1$ on a*

$$k_{m+n} = k_{m+1}k_n - k_m k_{n-1} \quad \textit{et} \quad h_{m+n} = k_{m+1}h_n - k_m h_{n-1}.$$

Démonstration :
On pose $\mathcal{K} := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$\mathcal{K}^m = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} k_{m+1} & -k_m \\ k_m & -k_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathcal{K}^{m+n-1} = \mathcal{K}^m\,\mathcal{K}^{n-1}$, on a

$$\begin{pmatrix} k_{m+n} & -k_{m+n-1} \\ k_{m+n-1} & -k_{m+n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{m+1} & -k_m \\ k_m & -k_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_n & -k_{n-1} \\ k_{n-1} & -k_{n-2} \end{pmatrix}.$$

La première identité découle directement de cette égalité en ragardant la première entrée de la matrice.

On obtient la seconde identité en utilisant la première identité et le fait que $h_m = k_m + k_{m+1}$. □

On peut dresser une liste de relations entre les suites h_n, k_n et ρ_n, qui peuvent toutes être prouvées facilement par induction ou récurrence :

- $h_m = k_m + k_{m+1}$
- $k_m = \rho_{m+2} - \rho_{m+1}$
- $h_m = \rho_{m+3} - \rho_{m+1}$
- $h_m - k_m = \rho_{m+3} - \rho_{m+2}$
- $h_m\,k_m = \rho_{2m+2}$
- $h_{m-1}\,k_m = \rho_{2m+1}$
- $h_m\,k_{m-1} = \rho_{2m+1} - 1$

- $h_{m-2}\,k_m = \rho_{2m} - 1$
- $h_{m-1}\,k_{m+1} = \rho_{2m+2} - 1$
- $h_m\,k_{m+1} = \rho_{2m+3}$

On peut alors prouver le théorème suivant :

Théorème 2.11 *Si a divise b, alors k_a divise k_b. De plus, on peut aussi montrer que* $\det(\mathbf{A}_a)$ *divise* $\det(\mathbf{A}_b)$ *(ce sont les ordres des groupes du tas de sable).*

Démonstration :

Pour le premier point, on montre par récurrence sur t que k_a divise k_{at}. C'est vrai si $t = 0$.

Supposons que k_a divise k_{at}. Par la Proposition 2.10 page ci-contre on a $k_{a(t+1)} = k_{at+1}k_a - k_{at}k_{a-1}$. Mais k_a divise k_a et donc $k_{at+1}k_a$, mais aussi k_{at} par hypothèse de récurrence, et donc finalement $k_{a(t+1)}$.

Pour prouver le résultat sur les déterminants, on prouve que si $2a+1$ divise $2b+1$, alors h_a divise h_b. Supposons $2b+1 = (2a+1)(2t+1)$. On montre par récurrence sur t que h_a divise $h_b = h_{2at+a+t}$. C'est vrai si $t = 0$.

Si h_a divise $h_{2at+a+t}$, on a $h_{2a(t+1)+a+(t+1)} = h_{(2a+1)+(2at+a+t)}$ et ainsi $h_{2a(t+1)+a+(t+1)} = k_{2a+2}h_{2at+a+t} - k_{2a+1}h_{2at+a+t-1}$. Le premier terme est un multiple de h_a par hypothèse de récurrence. De plus $k_{2a+1} = k_{a+1}^2 - k_a^2$ par la Proposition 2.10. Donc $k_{2a+1} = (k_{a+1} + k_a)(k_{a+1} - k_a) = h_a(k_{a+1} - k_a)$. Par conséquent, le second terme est aussi un multiple de h_a.

Enfin, on prouve que si $2a+1$ divise $2b$, alors h_a divise k_b. Supposons $2b = (2a+1)2t$. On a à prouver que h_a divise $k_{(2a+1)t}$. On a vu à l'instant que h_a divise k_{2a+1}. Mais on sait aussi que k_{2a+1} est un diviseur de $k_{(2a+1)t} = k_b$, d'où le résultat.

Comme $\det(\mathbf{A}_n) = -nw_n$, on a le deuxième point grâce à ces différentes propriétés, suivant les parités respectives de a et b. □

Proposition 2.12 *Si 2^t divise n avec $t \geq 1$, alors 2^{t+1} divise k_n. De plus, si 3^t divise n, alors 3^t divise aussi k_n.*

Démonstration :

On obtient une formule explicite pour k_n en résolvant la récurrence (Proposition 2.9 page précédente) :

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} \sqrt{3}^{2j+1} 2^{n-(2j+1)} \\ &= \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} 3^j 2^{n-(2j+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, si 2^t divise n avec $t \geq 1$, la variable $2j+1$ varie en fait entre 1 et $n-1$. Donc tous les termes de la somme ci-dessus sont divisibles par n, car dans ce cas n divise le coefficient binomial. De plus le 2 divise aussi le coefficient $2^{n-(2j+1)}$ et par conséquent 2^{t+1} divise k_n.

Si 3^t divise n alors 3^t divise tous les coefficients binomiaux, sauf éventuellement le dernier, si n est impair. Mais le dernier terme admet un facteur $3^{(n-1)/2}$ dans le cas où n est impair. Or $(n-1)/2 \geq t$ si 3^t divise n pour $t \geq 0$. D'où le résultat. □

$-\ o\ -$

Calcul de $\mathcal{S}_{11}$ On note désormais (a, b) le *pgcd* entre deux entiers a et b. Le coefficient $\mathcal{S}_{11}$ de la matrice de Smith est en fait le *pgcd* des coefficients de la matrice originelle.

On remarque d'abord que pour tout m on a $(k_m, k_{m+1}) = (h_m, h_{m+1}) = 1$. Cela implique directement que :

- si $n = 2m+1$ est impair $(\rho_{n+1}, \rho_{n+2}) = (h_m k_m, h_m k_{m+1}) = h_m$,
- si $n = 2m$ est pair alors $(\rho_{n+1}, \rho_{n+2}) = (h_{m-1} k_m, h_m k_m) = k_m$.

Par définition

$$\mathcal{S}_{11} = (n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \frac{\rho_{n+2} - \rho_{n+1} - n}{2}).$$

- Si $n = 2m+1$ est impair alors $(n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \frac{\rho_{n+2}-\rho_{n+1}-n}{2}) = (n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2})$. En effet, si d divise n, ρ_{n+1} et ρ_{n+2}, alors d est impair car n est impair. Alors d divise aussi $\frac{\rho_{n+2}-\rho_{n+1}-n}{2}$. Par conséquent $\mathcal{S}_{11} = (n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2}) = (n, h_m)$.
- Si $n = 2m$ est pair alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11} &= (n, k_m, \frac{h_m k_m - h_{m-1} k_m - n}{2}) = (n, k_m, k_m \frac{h_m - h_{m-1}}{2} - m) \\ &= (n, k_m, m) = (m, k_m). \end{aligned}$$

  - Si m est impair, alors k_m est impair et $\mathcal{S}_{11} = (n, k_m)$.
  - Si m est pair, on a $\mathcal{S}_{11} = (m, k_m) = \frac{(n, k_m)}{2}$. Cette dernière égalité vient directement de la Proposition 2.12 page précédente. En effet k_m contient dans sa factorisation la puissance maximale de 2 contenue dans $2m$.

$-\ o\ -$

Calcul de $\mathcal{S}_{22}$ Par définition :

$$\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22} = (\rho_{n+1} + \rho_{n+2}, n\rho_{n+1}, n\rho_{n+2}, \frac{(\rho_{n+1} + \rho_{n+2})^2 + n\rho_{n+1} - n\rho_{n+2}}{2} - 3\rho_{n+1}\rho_{n+2}).$$

- Si $n = 2m+1$ est impair alors $\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22} = (\rho_{n+1} + \rho_{n+2}, n\rho_{n+1}, n\rho_{n+2}, 3\rho_{n+1}\rho_{n+2})$. En effet, on peut voir facilement que soit ρ_{n+1} soit ρ_{n+2} est impair et si d divise $\rho_{n+1}+\rho_{n+2}$, $n\rho_{n+1}$ et $n\rho_{n+2}$ alors d est impair et divise aussi $\frac{(\rho_{n+1}+\rho_{n+2})^2+n\rho_{n+1}-n\rho_{n+2}}{2}$. Ainsi

$$\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22} = (h_m^2, nh_m, 3h_m^2 k_m k_{m+1}) = h_m(h_m, n, 3h_m k_m k_{m+1}) = h_m(n, h_m).$$

  Par conséquent $\mathcal{S}_{22} = h_m$.

– Si $n = 2m$ est pair, on a

$$\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22} = (6k_m^2, nk_m, \frac{36k_m^2 + nk_m(h_m - h_{m-1})}{2} - 3h_{m-1}k_m h_m k_m) =$$
$$= k_m(6k_m, n, 18k_m + n\frac{(h_m - h_{m-1})}{2} - 3h_{m-1}h_m k_m) =$$
$$= k_m(6k_m, n, 3h_{m-1}h_m k_m) = k_m(n, 3k_m(2, h_{m-1}h_m)) = k_m(n, 3k_m).$$

Alors :
– si m est impair $\mathcal{S}_{22} = k_m\alpha$, avec $\alpha := \frac{(n,3k_m)}{(n,k_m)}$,
– si m est pair alors $\mathcal{S}_{22} = 2k_m\alpha$.

Par la Proposition 2.12 page 69 on a que le nombre α qui peut *a priori* être 1 ou 3, vaut en fait exactement 1. De Plus, on a $\det(\mathcal{S}_n) = |\det(\mathbf{A}_n)|$. Donc $\mathcal{S}_{33} = \frac{nw_n}{\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22}}$. Par conséquent la forme normale de Smith $\mathcal{S}_n$ de la matrice $\mathbf{A}_n$ est

– Pour $n = 2m + 1$ impair
$$\begin{pmatrix} (n, h_m) & 0 & 0 \\ 0 & h_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n\,h_m}{(n,h_m)} \end{pmatrix},$$
– pour $n = 2m$ avec m impair
$$\begin{pmatrix} (n, k_m) & 0 & 0 \\ 0 & k_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6nk_m}{(n,k_m)} \end{pmatrix},$$
– pour $n = 2m$ avec m pair
$$\begin{pmatrix} \frac{(n,k_m)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2k_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6nk_m}{(n,k_m)} \end{pmatrix}.$$

Des différents points évoqués lors de la démonstration du Théorème 2.11 page 69, on peut aussi voir que, pour a qui divise b, toute entrée de la matrice $\mathcal{S}_a$ divise l'entrée correspondante dans la matrice $\mathcal{S}_b$. Cela nous permet d'énoncer un nouveau théorème :

Théorème 2.13 *Si a divise b, le groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_a$ est un sous-groupe du groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_b$.*

– *o* –

Quelques cas particuliers

Il peut être intéressant de regarder quand le groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_n$ est le produit de trois groupes cycliques, c'est-à-dire quand $\mathcal{S}_{11} > 1$. On a déjà vu que si $t \geq 2$, alors 2^t divise n et par conséquent, 2^{t-1} divise $\mathcal{S}_{11}$. Si $t \geq 1$ et si 2.3^t divise n alors 3^t divise aussi $\mathcal{S}_{11}$.

Bref il est facile de construire des graphes bi-connexes ayant trois groupes cycliques.

– *o* –

Cas où $n = p^t$, avec p premier Si $p > 2$, on a les égalités suivantes modulo p :

$$\begin{aligned} w_{p^t} &= \rho_{p^t+1} + \rho_{p^t+2} = \frac{(2+\sqrt{3})^{p^t} + (2-\sqrt{3})^{p^t}}{2} - 1 \\ &= \frac{(2^{p^t} + \sqrt{3}^{p^t}) + (2^{p^t} - \sqrt{3}^{p^t})}{2} - 1 = 1. \end{aligned}$$

Cela implique que pour $p > 2$ premier, $(p, w_{p^t}) = 1$. La forme normale de Smith de la matrice est alors de la forme :

$$\mathcal{S}_{p^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_{\frac{p^t-1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & p^t\, h_{\frac{p^t-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Pour $p = 2$, on a :

$$\mathcal{S}_{2^t} = \begin{pmatrix} 2^{t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2k_{2^{t-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 12k_{2^{t-1}} \end{pmatrix}.$$

Cas $n = 2p^t$ avec $p > 2$ premier Si $p > 3$ on a les égalités suivantes modulo p :

$$\begin{aligned} w_{2p^t} &= \rho_{2p^t+1} + \rho_{2p^t+2} = \frac{(2+\sqrt{3})^{2p^t} + (2-\sqrt{3})^{2p^t}}{2} - 1 \\ &= \frac{(7+4\sqrt{3})^{p^t} + (7-4\sqrt{3})^{p^t}}{2} - 1 = 6. \end{aligned}$$

Cela signifie que $2p^t$ et k_{p^t} (qui est impair) sont premiers entre eux. Ainsi, pour $p > 3$ on a la forme normale de Smith suivante :

$$\mathcal{S}_{2p^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_{p^t} & 0 \\ 0 & 0 & 12\, p^t\, k_{p^t} \end{pmatrix}.$$

Sinon, pour $p = 3$, on a :

$$\mathcal{S}_{2\cdot 3^t} = \begin{pmatrix} 3^t & 0 & 0 \\ 0 & k_{3^t} & 0 \\ 0 & 0 & 12k_{3^t} \end{pmatrix}.$$

$- o -$

Construction d'un groupe du tas de sable composé de trois sous-groupes cycliques et tel que m divise l'ordre de chacun d'eux. Maintenant, on peut montrer que quel que soit un entier $m \geq 2$, on peut trouver un entier n tel que le groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_n$ est le produit de 3 groupes cycliques d'ordre divisible par m. Ce résultat est intéressant dans la mesure où Cori et Rossin ont conjecturé dans [13] que les groupes du tas de sable ayant au moins trois groupes cycliques sont rares, même si on connaît déjà de nombreuses familles de graphes qui ont cette propriétés, comme la grille, le graphe

complet ou encore le graphe biparti complet (voir [11]). On s'intéresse aux cas différents de ceux déjà traités que sont les cas $m = 2^t$ et $m = 3^t$.

Soit $m \geq 2$, on dénote $\pi(m)$ la plus petite période strictement positive de la suite des valeurs de $(\rho_n)_{n\geq 0}$ modulo m. On a vu que les premières valeurs de ρ_n à partir de 0 sont $1, 0, 0, 1, \ldots$. Mais ρ_n suit une loi de récurrence d'ordre 2 qui est valable modulo m. Ainsi $\rho_{n+1} = \rho_{n+2} = 0$ modulo m, si et seulement si $\pi(m)$ divise n.
Clairement, si m et n sont deux entiers premiers entre eux, $\pi(mn)$ s'exprime sous la forme $\pi(mn) = \texttt{ppcm}(\pi(m), \pi(n))$. Les valeurs que prend π sur les nombres premiers et sur les puissances de nombres premiers sont donc particulièrement intéressantes.

$$-\ o\ -$$

Soit $p > 3$ un nombre premier. On cherche à savoir si $\rho_{p+1} \equiv \rho_{p+2} \equiv 0\ [p]$. Si on se place sur $\mathbb{F}_p$, on peut regarder l'équation caractéristique définissant la suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$:

$$r^2 - 4r + 1 \equiv 0\ [p].$$

Les solutions de cette équation sont toujours les mêmes, mais modulo p. On peut alors précisément trouver un multiple de $\pi(p)$, mais on a besoin du symbole de Legendre.

Legendre a inventé un symbole pour noter si $q \neq 0$ est un résidu quadratique modulo p *i.e.* un carré de $\mathbb{F}_p$. On note :

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right) &= 1 \text{ si } q \text{ est un résidu quadratique modulo } p, \\ \text{et } \left(\frac{q}{p}\right) &= -1 \text{ si } q \text{ est un résidu non-quadratique modulo } p. \end{aligned}$$

En fait, par la loi de réciprocité quadratique de Gauss, savoir si q est un résidu quadratique modulo p revient à savoir si p est un résidu quadratique modulo q :

Théorème 2.14 (Loi de réciprocité quadratique de Gauss) *Si p et q sont des premiers impairs distincts, alors :*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{p-1}{2}}.$$

Savoir si 3 est un carré de $\mathbb{F}_p$ revient donc à savoir si p est un carré de $\mathbb{F}_3$:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ \left(\frac{p}{3}\right).$$

Or il n'y a qu'un carré non nul dans $\mathbb{F}_3$: c'est 1. On a donc le résultat suivant :

Lemme 2.15 *Pour $p > 3$ premier, on a :*

$$\left(\frac{3}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} p \equiv 1\ [3] & \textit{et} & p \equiv 1\ [4], \\ p \equiv 2\ [3] & \textit{et} & p \equiv 3\ [4]. \end{array} \right.$$

En fait, on a une expression de ρ_p dans $\mathbb{F}_p$ quel que soit le symbole de Legendre de 3 avec p. On rappelle que pour $n \geq 0$, ρ_n est de la forme $\lambda\alpha^n + \mu\beta^n - \frac{1}{2}$ (cf. Équation (2.2.4)).

- Si $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$, alors $\alpha^p = \alpha\ [p]$ et $\beta^p = \beta\ [p]$.
- Si $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$, alors $\alpha^p = \beta\ [p]$ et $\beta^p = \alpha\ [p]$.

Il est alors immédiat que dans le premier cas, $\rho_p = \rho_1\ [p]$ et $\rho_{p+1} = \rho_2\ [p]$. On peut alors dire que $\pi(p)$ divise $p-1$. Dans le second cas, on commence par remarquer que α et β sont inverses l'un de l'autre. En effet, le coefficient constant de l'équation caractéristique vaut 1. On peut alors regarder la valeur de ρ_{p+1} : $\rho_{p+1} \equiv \lambda\alpha^p\alpha + \mu\beta^p\beta - \frac{1}{2} \equiv \lambda\beta\alpha + \mu\alpha\beta - \frac{1}{2} \equiv \lambda + \mu - \frac{1}{2} \equiv \rho_0\ [p]$. De même on trouve $\rho_{p+2} = \rho_1\ [p]$, et donc $\pi(p)$ divise $p+1$. On peut donc écrire ce résultat :

Proposition 2.16 *Pour $p > 3$ premier, $\pi(p)$ divise $p-1$ ou $p+1$.*

Dans tous les cas, $\pi(p)$ divise $p^2 - 1$. En particulier, cela implique que p n'est pas une période pour la suite des valeurs de $(\rho_n)_{n\geq 0}$ modulo p. On retrouve ainsi le fait que la forme normale de Smith de D_p admet seulement deux sous-groupes non triviaux.

$$-\ o\ -$$

On note $\phi(m)$ la plus petite période positive non nulle de la suite des valeurs de $(\rho_n)_{n\geq 0}$ modulo m qui est aussi un multiple de m, c'est-à-dire $\phi(m) := \mathrm{ppcm}(\pi(m), m)$. On peut remarquer que si m et n sont premiers entre eux, alors $\phi(mn) = \mathrm{ppcm}(\phi(n), \phi(m))$. De Plus, par la proposition précédente, si $p > 3$ est un nombre premier, on a $\phi(p) = p\left(p - \left(\frac{3}{p}\right)\right)$, car $\pi(p)$ divise $\left(p - \left(\frac{3}{p}\right)\right)$.

Ces remarques nous permettent enfin d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.17 *Soit m un entier et $\mathcal{P}_m^3$ l'ensemble des facteurs premiers de m strictement plus grands que 3 :*

$$\mathcal{P}_m^3 = \{p \in \mathcal{P}, p > 3, p|m\}.$$

Alors il existe n plus petit que $4m^3 \cdot \prod_{p\in\mathcal{P}_m^3}\left(p - \left(\frac{3}{p}\right)\right)$ tel que la forme normale de Smith du groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_n$ est le produit de 3 groupes cycliques dont les ordres sont divisibles par m.

Démonstration : Pour $n = 2i$, le coefficient S_{11} de la forme normale de Smith de $\mathcal{S}_n$ vaut (n, k_i) si i est impair et $(n, k_i)/2$ si i est pair. On cherche donc à trouver un entier i tel que m divise $2i$ et k_i. Par l'équation

$$6k_i^2 = \rho_{2i+1}^2 + \rho_{2i+2}^2 - 4\rho_{2i+1}\rho_{2i+2},$$

on déduit que $2m$ divise $k_{\frac{\phi(2m)}{2}}$. En effet si $i = \frac{\phi(2m)}{2}$, alors ρ_{2i+1} et ρ_{2i+2} valent 0 modulo $2m$. On peut donc écrire $\rho_{2i+1} = 2ma$ et $\rho_{2i+2} = 2mb$, ce qui nous donne par l'équation précédente :

$$6k_i^2 = (2m)^2(a^2 + b^2 - 4ab).$$

Or comme 6 ne contient aucun carré, il est immédiat que $(2m)^2$ divise k_i^2, c'est-à-dire que $2m$ divise k_i si $i = \frac{\phi(2m)}{2}$.

Soit $n := \phi(2m)$, alors m divise n, car $2m$ divise n. On pose $n = 2i$. On a vu que $2m$ divise k_i. Donc si i est pair, on a bien m qui divise $(n, k_i)/2$, et si i est impair, m divise bien (n, k_i).

Le problème réside en fait dans le calcul effectif de n. Soit $m = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}_m^3} p^r$ la décomposition de m en facteurs premiers (avec $r_1, r_2 \geq 0$). Par les propriétés multiplicatives de ϕ, on a besoin de savoir calculer ϕ uniquement en p^r pour tout $p \in \mathcal{P}$. On peut montrer par récurrence que $\phi(2^t) = 2^t$ pour $t \geq 2$ et $\phi(3^t) = 2 \cdot 3^t$.

Pour $p > 3$ premier, on peut facilement calculer une bonne borne supérieure de $\phi(p^r)$. Il faut d'abord remarquer que $\phi(p^t) \leq p^3 \phi(p^{t-1})$ pour $t \geq 2$. En effet, les valeurs de la suite ρ_j modulo p^{t-1} pour j et $j+1$ valent rp^{t-1} avec $0 \leq r \leq p-1$ quand j est de la forme $j = lp\phi(p^{t-1}) + 1$. Si on regarde les indices j plus petits que $p^3\phi(p^{t-1}) + 1$, on parcourt $p^2 + 1$ couples de valeurs pour (ρ_j, ρ_{j+1}). Par le principe de Dirichlet, on peut trouver un couple de valeurs $(r_1 p^{t-1}, r_2 p^{t-1})$ qui apparaissent pour deux couples d'indices différents $(j, j+1)$ et $(j', j'+1)$ des formes données plus haut dans la suite ρ_j. On peut alors montrer que ρ_j en $(j - j' + 1, j - j' + 2)$ vaut $(0, 0)$ si $j > j'$. Mais $p\phi(p^{t-1})$ divise $j - j'$, c'est-à-dire p^t divise $j - j'$. De plus $j - j' \leq p^3\phi(p^{t-1})$, d'où la remarque faite plus haut. Ça implique directement que $\phi(p^t) \leq p^{3t}\left(p - \left(\frac{3}{p}\right)\right)$, qui reste valable quand $t = 1$. Par conséquent $4m^3 \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}_m^3} \left(p - \left(\frac{3}{p}\right)\right)$ est plus grand que n. □

Il est clair qu'il existe une infinité de nombres n qui ont les propriétés énoncées dans la Proposition 2.17 page précédente. La conjecture suivante donne une expression explicite de l'un d'eux :

Conjecture 2.1 *Soit m un entier et $\mathcal{P}_m^3$ l'ensemble des facteurs premiers de m plus grands que 3. Si $n := 4m \cdot \mathrm{lcm}_{p \in \mathcal{P}_m^3}\left(p - \left(\frac{3}{p}\right)\right)$, alors la forme normale de Smith du groupe du tas de sable sur $\mathcal{D}_n$ est le produit de 3 groupes cycliques et m divise l'ordre de chacun d'eux.*

Cette conjecture est issue d'une conjecture naturelle sur la valeur de $\phi(p^t)$. En effet, les expérimentations nous amènent à penser que $\phi(p^t) = p^t\pi(p)$ pour $p > 3$ premier. Soit $m = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}_m^3} p^r$ la décomposition de m en facteurs premiers (avec $r_1, r_2 \geq 0$). On a $\phi(2m) = \mathrm{lcm}_{p \in \mathcal{P}_m^3}(\phi(2^{r_1+1}), \phi(3^{r_2}), \phi(p^r))$, avec $\phi(1) := 1$. Cette valeur divise $4m \cdot \mathrm{lcm}_{p \in \mathcal{P}_m^3}(\pi(p))$ et donc elle divise aussi n.

2.3 Autres

2.3.1 Identité : résultats et conjectures sur la grille

L'étude de l'identité du groupe des configurations récurrentes sur une grille est une question qui soulève beaucoup d'intérêt, en grande partie en raison de sa structure autosimilaire [49, 16, 24]. Un des principaux moyens de calculer cette configuration est l'algorithme thermique (Théorème 1.8 page 43). Cet algorithme, à partir d'une grille ne contenant aucun grain, produit une suite de configurations dont la dernière est l'identité. La complexité de cet algorithme a été étudiée dans [48, 53]. Si $C(p,q)$ est la complexité de l'algorithme sur la grille de la taille $p \times q$, alors :

$$\frac{p^2}{12}(p+3q) \leq C(p,q) \leq \frac{p^3}{24}(p+4q),$$

si $p \leq q$. En étudiant cette suite de configurations, nous avons constaté que l'algorithme passe par deux phases distinctes. Dans la première de ces phases, la taille de la grille considérée ne semble pas avoir d'influence sur les configurations obtenues.

Nous tentons ici d'isoler cette première phase en présentant une extension infinie de l'algorithme. Les configurations obtenues pendant cette phase présentant de nombreuses similitudes avec les configurations identités de grilles de différentes tailles, cette étude permet de mieux comprendre la forme de l'identité. Dans la suite, quand on parle de l'algorithme thermique et si rien n'est précisé, on sous-entend qu'on est parti de la configuration ne contenant aucun grain, dans la mesure où on s'intéresse au calcul de l'identité. On note $I^{k,l}$ l'identité sur une grille de taille $k \times l$. Pour les représentations, on se replace sur le modèle plus convivial de l'échiquier avec des cases et des grains de sable dessus.

$-\ o\ -$

Tout d'abord, on peut faire plusieurs remarques générales liées aux observations expérimentales. Si on regarde l'identité sur une grille carrée de taille $2p \times 2p$, alors on peut observer un carré central où les sommets contiennent exactement 2 grains (cf. Figure 2.9 page suivante). Sur une grille de taille $(2p+1)\times(2p+1)$ la configuration identité $I^{2p+1,2p+1}$ semble très proche de $I^{2p,2p}$. En effet, si on retire la colonne et la ligne centrales de $I^{2p+1,2p+1}$, on retrouve $I^{2p,2p}$. Plus formellement, si

$$I^{2p,2p} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \text{ (les } B_i \text{ sont des blocs de taille } p \times p),$$

où les quatre blocs B_i sont liés par des relations de symétrie (impliquées par les symétries du carré), alors :

$$I^{2p+1,2p+1} = \begin{pmatrix} B_1 & R_1 & B_2 \\ R_2 & 0 & R_3 \\ B_3 & R_4 & B_4 \end{pmatrix},$$

où les R_i sont des blocs de taille $1 \times p$ ou $p \times 1$, liés eux aussi par des relations de symétries dues à celles du carré.

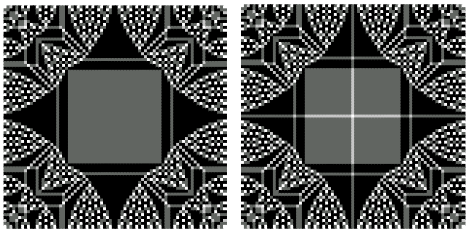


FIG. 2.9 – Les identités $I^{76,76}$ et $I^{77,77}$.

Exemple 2.6
La Figure 2.9 montre les identités sur les grilles de taille 76×76 et 77×77. On représente le nombre de grains sur chaque case en niveau de gris (du noir pour 3 grains, au blanc pour 0 grain).

◇

En outre, de la contraposée de la Proposition 1.9 page 45 on déduit qu'il existe des sous-configurations interdites sur la grille, dans le sens où si une telle sous-configuration apparaît dans une configuration $\mathtt{u}$, alors on peut être sûr que $\mathtt{u}$ n'est pas récurrente. Appliquée au cas de la grille, il y a deux sous-configurations particulières qu'on est sûr de ne pas trouver sur une identité : deux sommets voisins avec 0 grain chacun, ou encore un carré de taille 2×2 dans lequel chaque sommet contient au plus 1 grain.

— *o* —

Quand on étudie la suite des configurations que fournit l'algorithme thermique, on observe deux phases distinctes. Dans un premier temps, la taille de la grille n'a aucune influence sur les configurations obtenues ; chaque coin de la grille évolue de manière complexe mais dans un espace réduit et confiné qui fait que à une certaine distance des coins, la configuration semble invariante si on augmente la taille de la grille (voir Figure 2.10 page suivante).

Les sous-configurations que l'on observe dans ces coins sont très complexes, mais semblent avoir des similarités importantes avec l'identité sur des grilles carrées. En particulier, elles présentent une structure fractale qui a des particularités qui ne sont pas sans rappeler celles de $I^{2p,2p}$.

Exemple 2.7
La Figure 2.10 page suivante montre l'étape 100 de l'algorithme thermique pour le calcul des identités sur la grille de taille 50×50 et sur celle de taille 75×75. En particulier, on peut observer que les configurations dans les coins, bien que complexes, sont les mêmes, et qu'on peut facilement déduire de l'une la forme de l'autre configuration en n'importe quel sommet.

◇

— *o* —

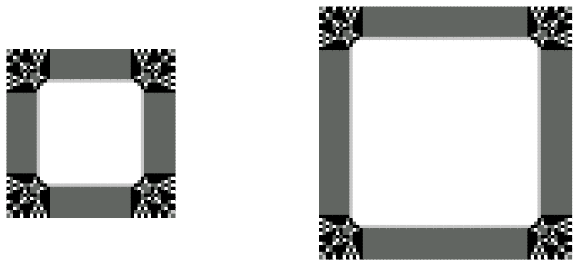


FIG. 2.10 – Algorithme thermique pour le calcul de $I^{50,50}$ et $I^{75,75}$: étape 100.

Bien sûr, le comportement général de l'algorithme change quand les régions complexes des coins se rencontrent. C'est en fait le début d'une seconde phase : la région centrale évolue jusqu'à devenir le carré central (où chaque sommet contient 2 grains) que l'on observe sur toutes les identités que l'on peut calculer sur des grilles de taille $2p \times 2p$. De manière assez surprenante, la région qui entoure cette zone centrale reste invariante.

Exemple 2.8
La Figure 2.11 illustre la seconde phase de l'algorithme thermique sur une grille de taille 76×76. On a représenté les étapes 900, 910 et 960. En particulier, on peut remarquer que seule la sous-configuration centrale se modifie ; elle se remplit progressivement de 2, c'est-à-dire que chacun de ses sommets tend vers un état où il contient 2 grains.

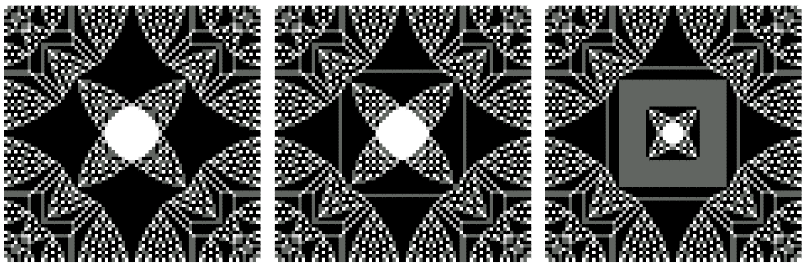


FIG. 2.11 – Les étapes 900, 910 et 960 de l'algorithme thermique pour $I^{76,76}$.

◇

— *o* —

Le modèle de la grille infinie

Dans la suite, on essaie de formaliser les premières observations que l'on vient de mentionner. En particulier, on commence par essayer d'isoler la première phase de l'algorithme en introduisant une extension infinie du modèle. Étant donné que les configurations obtenues sur des grilles de tailles différentes lors de cette première phase présentent de nombreuses similarités, l'étude sur une grille infinie dans deux directions nous permet de mieux appréhender les mécanismes qui entrent en jeu, et mieux comprendre la structure

de ces configurations. En effet, on a vu que la première phase pouvait être observée tant que les sous-configurations complexes des coins ne se rencontraient pas. En travaillant sur une grille infinie dans deux directions perpendiculaires (ou de manière équivalente sur une grille infinie dont on observe un des coins), on reste en quelque sorte dans la première phase de l'algorithme, et on construit *a priori* des configurations similaires à celles observées au début, c'est-à-dire lors de la première phase, sur des grilles de taille finie.

Plus formellement, on travaille donc sur un 'coin infini'. Chaque sommet est indicé par le couple d'entiers naturels qui repèrent sa position dans la grille. On commence par indexer le sommet du coin par $(1,1)$. Un sommet du bord est donc indexé par $(1,l)$ ou $(l,1)$. La configuration β, qui correspond à un éboulement du puits ou à l'anti-éboulement de tous les sommets réguliers, est la configuration qui contient deux grains sur le sommet $(1,1)$ du coin, un grain sur les sommets du bords, et aucun grain sur les autres sommets (cf. Figure 2.12).

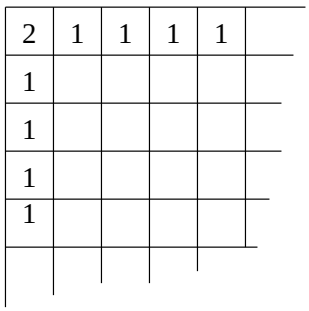


FIG. 2.12 – La configuration β sur la grille infinie.

On part donc de la grille infinie vide. La première étape de l'algorithme consiste à ajouter la configuration β et à effectuer la relaxation de la configuration. Cette étape demande un temps infini en théorie. En pratique, si on se donne un sommet particulier, on peut déterminer sa valeur après cette étape en temps fini. De plus, lors de la relaxation, chaque sommet s'éboule au plus une fois ; on peut alors calculer (grâce à des arguments théoriques) la configuration obtenue en temps fini. Il en est de même pour les étapes suivantes. On note alors $(\mathtt{u}^n)_{n\geq 0}$ la séquence infinie des configurations sur la grille infinie, obtenues par l'algorithme thermique à partir de $\mathtt{u}^0 = 0$.

$-\ o\ -$

Un premier point est que chacune des configurations $\mathtt{u}^n$ est symétrique par rapport à la diagonale du coin. En effet, la première configuration l'est, et les opérations qui constituent une étape de l'algorithme préservent cette symétrie. En effet, β est symétrique par rapport à la diagonale, et ainsi pour chaque éboulement d'un sommet (k,l) on peut effectuer le même éboulement sur le sommet (l,k). En conséquence, on se restreint à l'étude des lignes ; les propriétés équivalentes sur les colonnes pouvant être obtenues par symétrie.

On dit qu'une configuration est *régulière* à partir d'un rang k, si, pour toute ligne j, les sommets à partir de la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne ont même valeur, c'est-à-dire si les sommets (i,j) ont le même nombre de grains pour $i > k$.

Proposition 2.18 *Pour tout $n \geq 0$, il existe $K_n \leq n$, tel que la configuration $\mathtt{u}^n$ est régulière à partir du rang K_n,* i.e. *pour tout $i, i' > K_n$, pour tout j, $\mathtt{u}^n_{i,j} = \mathtt{u}^n_{i',j}$.*

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, c'est trivial.

On suppose le résultat vrai au rang n. La configuration $\mathtt{u}^{n+1}$ est obtenue par relaxation de la configuration $\mathtt{u}^n + \beta$. Pendant ce processus, chaque case est éboulée au plus une fois (Théorème 1.6 page 42 toujours valide dans ce contexte).

On montre que dans ce processus, si un sommet $(K_n + 1, j)$ de la colonne $K_n + 1$ s'éboule légalement, alors on peut ensuite ébouler légalement tous les sommets (i, j) avec $i \geq K_n + 1$, *i.e.* toute la ligne j à partir de $K_n + 1$. Considérons les sommets de la colonne $K_n + 1$. Quand aucun sommet de cette colonne ne s'est éboulé, le résultat est vrai.
Supposons qu'il y a eu t éboulements dans la colonne $K_n + 1$, et que pour chacun d'eux, on a éboulé la ligne entière à partir de la colonne $K_n + 1$. Cela signifie que tout sommet de la colonne $K_n + 1$ qui ne s'est pas éboulé contient le même nombre de grains que son voisin de la colonne $K_n + 2$, ou un grain de plus si son voisin de la colonne K_n s'est éboulé. Supposons qu'un sommet $(K_n + 1, j)$ devienne instable : il contient donc au moins 4 grains. Alors, si le sommet $(K_n + 2, j)$ ne s'est pas encore éboulé, il contient au moins 3 grains : il est donc instable dès que $(K_n + 1, j)$ s'éboule. Cela veut dire que si on peut ébouler $(K_n + 1, j)$ légalement, alors on peut ensuite ébouler légalement le sommet $(K_n + 2, j)$. En appliquant le même argument avec $\bar{K}(n) = K_n + 1$, on peut montrer que tous les sommets (i, j) avec $i \geq K_n + 1$ peuvent s'ébouler légalement les uns après les autres.

Par conséquent, les éboulements de la partie régulière peuvent être réalisés ligne par ligne. En particulier, cela implique qu'après la relaxation, les colonnes à partir de $K_n + 1$ sont identiques, *i.e.* $K_{n+1} \leq K_n + 1 \leq n + 1$. Ainsi le résultat est montré. □

$- o -$

Définition 2.2 On note $k(n)$ le plus petit entier tel que la configuration $\mathtt{u}^n$ est régulière à partir du rang $k(n)$.

Dans la suite, on parle du *coin modifié* pour désigner la partie carrée non régulière de la configuration $\mathtt{u}^n$ considérée, *i.e.* la partie composée des sommets (i, j) tels que $i, j \leq k(n)$.

Expérimentalement, on observe que la taille du coin modifié augmente de la manière suivante : si sa taille est $k(n)$, alors elle augmente de 1 après environ $k(n) + 1$ étapes. Ainsi, on conjecture que la taille du coin modifié après n étapes de l'algorithme thermique est proportionnelle à $\sqrt{n}$, c'est-à-dire $k(n) = O(\sqrt{n})$.

Exemple 2.9
Considérons les premières étapes de l'algorithme montrées sur la Figure 2.13 page suivante (les cases sans valeur ne contiennent aucun grain). La première configuration (qui n'est pas montrée) est la configuration vide : aucune case ne contient de grains. On note $\overset{\mathtt{q}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$ l'éboulement du puits, c'est-à-dire l'anti-éboulement de toutes les cases, et $\longrightarrow$ désigne une étape de la relaxation d'une configuration instable.

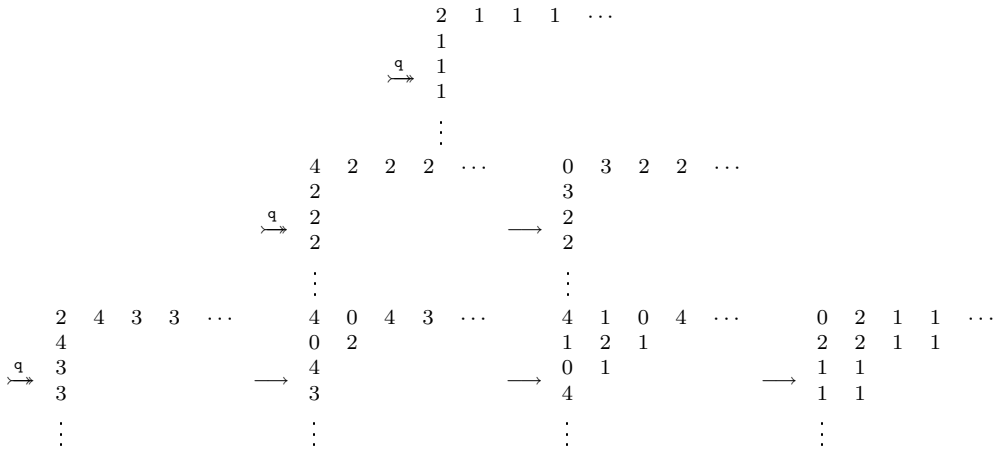


FIG. 2.13 – Les trois premières étapes de l'algorithme thermique sur la grille infinie.

Avant l'éboulement du puits de cette séquence, les cases de la première ligne contiennent toutes 2 grains à partir de la troisième case. Quand on ajoute le vecteur d'éboulements du puits, chaque case du bord après la première reçoit exactement un grain, et donc toutes les cases de la première ligne après la troisième case contiennent toutes 3 grains. La deuxième case de cette ligne est instable. Quand elle s'éboule, elle donne un grain à chacune de ses voisines et en particulier à sa voisine de droite. Cette case devient elle-même instable et peut s'ébouler et donner aussi un grain à sa voisine de droite, et ainsi ce processus se répète, et toute la fin de la ligne peut s'ébouler légalement. Même si ébouler toutes ces cases met un temps infini, chaque case s'éboule après un temps fini, et termine avec un grain, après que sa voisine de droite s'est éboulée. Cela nous permet de dire que la partie régulière de la première ligne s'éboule légalement lors de la relaxation, et prend la valeur 1 après cet éboulement.

On peut alors comparer les premières étapes de l'algorithme sur la grille infinie et sur une grille finie assez grande (ici une grille de taille 4×4 suffit).

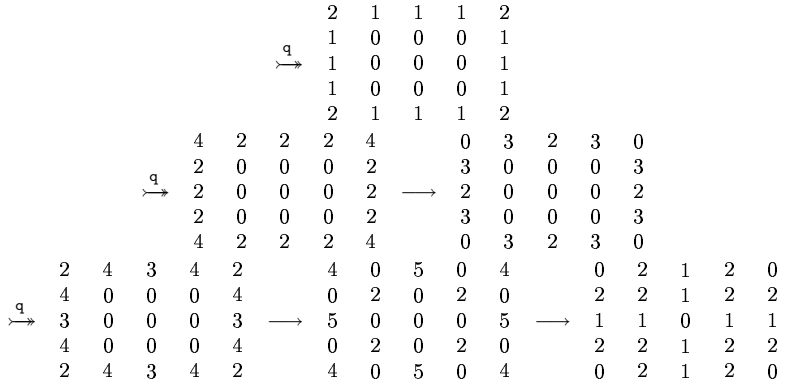


FIG. 2.14 – Les trois premières étapes de l'algorithme thermique pour $I^{4,4}$.

On remarque que le coin supérieur gauche de la grille finie se comporte exactement de la même manière que le même coin de la grille infinie. Cela reste vrai pour les étapes suivantes de l'algorithme, tant que la taille de la grille finie est assez grande.

◇

De cet exemple, on conjecture que cela reste vrai pour n'importe quel nombre d'étapes de l'algorithme :

Conjecture 2.2 *Pour tout $l, l' \geq 0$, la configuration v^n obtenue sur la grille rectangulaire de taille $(2k+l)\times(2k+l')$ après n étapes de l'algorithme thermique est telle que $\mathrm{v}^n_{i,j} = \mathrm{u}^n_{i,j}$ pour tout $i \leq k(n)+l, j \leq k(n)+l'$.*

Bien sûr, si on obtient un tel résultat, par symétrie on peut déterminer la valeur de la configuration en tout sommet.

Exploration de la Conjecture 2.2

Dans la suite, on démontre une version un peu plus simple de la Conjecture 2.2. Pour cela, on a besoin de faire l'hypothèse que la partie régulière à l'étape $n-1$ contient toujours celle de l'étape n. Cela signifie qu'on veut que k soit une fonction croissante. Expérimentalement c'est ce qu'on observe, sans arriver à le montrer. C'est pourquoi on introduit $\tilde{k}$:

Définition 2.3 Pour un entier naturel n, on définit $\tilde{k}(n)$ par :

$$\tilde{k}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ \max\{\tilde{k}(n-1), k(n)\} & \text{si} \quad n > 0 \end{cases}$$

Par définition, pour un n donné, si $i > \tilde{k}(n)$ alors la colonne i appartient à la partie régulière de u^{n-1}, mais aussi à celle de u^n.

Alors, par la preuve de la Proposition 2.18 page 80, on peut énoncer :

Proposition 2.19 *Pour un entier naturel n donné, on a : $\tilde{k}(n) - k(n-1) \leq 1$.*

Démonstration : Par la preuve de la Proposition 2.18 page 80, on sait que $k(n) \leq k(n-1)+1$. Cela implique que $\tilde{k}(n) \leq \max(k(n-1)+1, k(n-1))$. En outre $\tilde{k}(n) \geq k(n-1)$. Donc $0 \leq \tilde{k}(n) - k(n-1) \leq 1$. □

L'utilisation de $\tilde{k}(n)$ dans la suite peut paraître comme une restriction importante. En fait, si k est une fonction croissante, alors $k(n) = \tilde{k}(n)$ pour tout $n \geq 0$. Et comme on l'a déjà mentionné, c'est le cas en pratique dans toutes les expériences réalisées.

On note t^n_i le *vecteur des éboulements*, aussi appelé *vecteur d'éboulement*, de la colonne i durant l'étape n de l'algorithme : $t^n_{i,j} = 1$ si le sommet (j,i) s'éboule lors de l'étape n, et $t^n_{i,j} = 0$ sinon. En particulier, les coefficients de t^n_i sont égaux à 0 ou 1. Par la Proposition 2.18 page 80, on peut facilement déduire que t^n_i est une suite de vecteurs constants pour $i > k(n)$. Le théorème suivant montre que cette séquence est en fait constante dès le rang $\tilde{k}(n)$:

Théorème 2.20 *Pour un n donné, la suite (t^n_i) est constante pour $i \geq \tilde{k}(n)$.*

Démonstration : Par définition du coin modifié, $\mathtt{u}^n_{i,j} = \mathtt{u}^n_{i',j}$ pour tous $j > 0$ et $i, i' > \tilde{k}(n) \geq k(n)$. On note ν^n_j cette valeur commune, *i.e.* : $\nu^n_j = \mathtt{u}^n_{i,j}$, pour tout $i > \tilde{k}(n)$. Comme $\tilde{k}(n) \geq k(n-1)$, ν^{n-1}_j est aussi bien défini pour $i > \tilde{k}(n)$.
Pour $i > \tilde{k}(n)$ et $j > 1$ on a l'équation :

$$\begin{aligned} \nu^n_j &= \nu^{n-1}_j + t^n_{i-1,j} + t^n_{i+1,j} + t^n_{i,j-1} + t^n_{i,j+1} - 4t^n_{i,j}, \\ \text{donc} \quad t^n_{i-1,j} &= 4t^n_{i,j} - t^n_{i,j-1} - t^n_{i,j+1} - t^n_{i+1,j} + \nu^n_j - \nu^{n-1}_j. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Cette équation est *a priori* fausse pour $j = 1$, car $t^n_{i,0}$ n'est pas défini. Cependant elle reste vraie si on étend le vecteur t^n_i par $t^n_{i,0} = 0$.
Si on pose $V^n_j = \nu^n_j - \nu^{n-1}_j$ pour tout $j > 0$, et si on définit la matrice A par $A_{i,i} = 4$, $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1$, et $A_{i,j} = 0$ partout ailleurs, alors on peut récrire l'Équation (2.3.1) comme une égalité vectorielle :

$$\forall i > \tilde{k}(n), \quad t^n_{i-1} = At^n_i - t^n_{i+1} + V^n. \tag{2.3.2}$$

Comme on sait que la suite (t^n_i) est constante pour $i > \tilde{k}(n)$ (cf. preuve de la Proposition 2.18 page 80), cette équation implique que le vecteur $t^n_{\tilde{k}(n)}$ verifie la même égalité que les autres vecteurs t^n_i, pour $i > \tilde{k}(n)$. Ainsi, la suite (t^n_i) est constante pour $i \geq \tilde{k}(n)$. □

Ce résultat n'a d'importance que si $\tilde{k}(n)$ est vraiment la taille du coin modifié, ce que nous conjecturons à cause des observations mentionnées plus haut. En effet, dans ce cas, cela signifie que le vecteur d'éboulements de la dernière colonne du coin modifié est le même que ceux de la partie régulière : un sommet $(i, k(n))$ à la frontière du coin modifié s'éboule à l'étape n si et seulement si les sommets de la partie régulière sur la même ligne s'éboulent aussi. Cela veut dire que même si les sommets de la dernière colonne du coin modifié n'ont pas le même nombre de grains que leur voisin dans la partie régulière, ils se comportent de la même manière.

Expérimentalement, on a pu noter le fait suivant : si le sommet (i, j) à la limite du coin modifié contient 2 (resp. 3) grains, alors les sommets $(i', j), i' > i$ qui apparaissent après lui (dans la partie régulière de la ligne) contiennent tous 1 (resp. 2) grain. De plus, un sommet à la limite du coin modifié ne contient jamais strictement moins de 2 grains.

Cela signifie que, en pratique, le sommet à la limite du coin modifié joue le rôle d'une gachette pour l'éboulement de toute la partie régulère de la ligne à laquelle il appartient.

Le lemme suivant montre qu'il est toujours possible d'ébouler d'abord les sommets dont l'indice de la ligne est inférieur à une certaine valeur $\tilde{k}(n) + l$ et dont celui de la colonne est inférieur à une autre valeur $\tilde{k}(n)+l'$, toujours durant l'étape n de l'algorithme.

Lemme 2.21 *Soit $n \geq 1$ et $l, l' \geq 1$. Parmi les éboulements intervenant à l'étape n de l'algorithme, lors de la relaxation de la configuration $\mathtt{u}^{n-1}+\beta$, on peut toujours commencer par effetuer légalement ceux qui ont lieu à l'intérieur du rectangle $(\tilde{k}(n)+l) \times (\tilde{k}(n)+l')$, avant d'effectuer les autres éboulements légaux.*

Démonstration : On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des cases qui appartiennent au rectangle supérieur gauche $(\tilde{k}(n) + l) \times (\tilde{k}(n) + l')$. Comme $t^n_{i,j} = 0$ pour $i, j > \tilde{k}(n)$, et comme la grille est symétrique par rapport à la diagonale, les cases qui peuvent s'ébouler légalement et qui

ne sont pas dans le rectangle $\mathcal{C}$ sont les cases (i,j) telles que $i > \tilde{k}(n)+l$ et $j \leq \tilde{k}(n)$, et les cases (j,i) telles que $i > \tilde{k}(n)+l'$ et $j \leq \tilde{k}(n)$. On note $\bar{\mathcal{C}}$ cet ensemble de cases.
On considère le processus à deux étapes suivant :

- on réalise itérativement tous les éboulements légaux de $\mathcal{C}$,
- on effectue la relaxation.

Il y a deux cas possibles : soit un éboulement est possible dans la seconde phase, soit aucun. Si aucun éboulement n'est possible, le résultat est vrai.
Dans le deuxième cas, on montre que lors de cette seconde phase, les seuls éboulements légaux possibles sont ceux de $\bar{\mathcal{C}}$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, et soit (i,j) la première case de $\mathcal{C}$ qui s'éboule lors de la relaxation. Cette case est nécessairement à la limite entre $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{C}}$. Par symétrie, on peut supposer que $i = \tilde{k}(n)+l$ et $j \leq \tilde{k}(n)$. Alors il existe une séquence d'éboulements de cases de $\bar{\mathcal{C}}$ qui rendent la case $(\tilde{k}(n)+l, j)$ instable. Parmi toutes ces séquences d'éboulements, on en choisit une qui minimise le nombre de lignes impliquées, *i.e.* une séquence $\mathcal{S} = (i_k, j_k)_{k\geq 1}$ telle que le plus grand indice i_k qui apparaîte dans $\mathcal{S}$ est minimal. Soit $\mathcal{S}$ une telle séquence. On note les cases (i', j') telles que i' est maximal par $(i', j_1), \ldots, (i', j_r)$ en ordre d'apparition : $\mathcal{S}$ est de la forme $\ldots(i', j_1)\ldots(i', j_2)\ldots(i', j_r)\ldots$.

On montre alors par récurrence sur s que si $i' > \tilde{k}(n)+l$, il existe une séquence d'éboulements $\mathcal{S}'$ qui rendent la case $(\tilde{k}(n)+l, j)$ instable, et telle que la case $(i'-1, j_s)$ s'éboule avant la case (i', j_s) pour tout $1 \leq s \leq r$.

Si $s = 1$, il y a deux cas possibles. Si la case $(i'-1, j_s)$ s'est éboulée avant la case (i', j_s), alors l'hypothèse est vérifiée. Sinon, comme aucune case de la ligne $i'+1$ ni de la ligne i' ne s'est éboulée avant la case (i', j_1), si la case est instable, alors $(i'-1, j_1)$ l'est aussi. En effet, comme $l > 0$, les cases (i', j_1) et $(i'-1, j_1)$ sont dans la partie régulière de la configuration après l'étape $n-1$: elles contiennent le même nombre de grains. Après l'addition de β, cette propriété reste vraie. En outre, on sait que la case (i', j_1) n'a reçu aucun grain supplémentaire, si bien que la case $(i'-1, j_1)$ en contient plus. En particulier, si la case (i', j_1) est instable (si elle est sur le bord de la grille), la case $(i'-1, j_1)$ l'est aussi. Ainsi, on peut construire à partir de S une séquence d'éboulements $\mathcal{S}'$ où les cases $(i'-1, j_1)$ s'éboulent avant les cases (i', j_1).

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $s \geq 1$, avec $s < r$. Avant l'éboulement légal de la case (i', j_s), aucune autre case de la ligne $i'+1$ ne s'est éboulée. En outre, si une case de la même ligne s'est éboulée, par hypothèse de récurrence, il existe une séquence $\mathcal{S}'$ qui rend instable la case $(\tilde{k}(n)+l, j)$ et qui est telle que la case de même colonne et de ligne $i'-1$ s'éboule avant. Alors, si la case $(i'-1, j_s)$ ne s'est pas éboulée avant la case (i', j_s) dans $\mathcal{S}$, elle est aussi instable dans $\mathcal{S}'$, et on peut l'ébouler avant (i', j_s) dans $\mathcal{S}'$. D'où le résultat.

Par définition de $\mathcal{S}$, il n'y a aucune séquence d'éboulements au début de la deuxième phase qui permet à la case $(\tilde{k}(n)+l, j)$ de s'ébouler, et dont l'indice maximale des lignes impliquées est plus petit que i'. Mais on a juste construit une séquence $\mathcal{S}'$ à partir de $\mathcal{S}$ qui permet à la case $(\tilde{k}(n)+l, j)$ de s'ébouler de telle manière que l'éboulement de n'importe quelle case de la ligne i' a lieu après celui de sa case voisine dans la ligne $i'-1$. Cela signifie que les éboulements de la ligne i' ne sont pas nécessaires dans la séquence $\mathcal{S}'$, et qu'en fait on a construit une séquence $\mathcal{S}''$ qui rend instable le sommet $(\tilde{k}(n)+l, j)$ et qui est telle que aucune case d'indice strictement plus grand que i ne s'éboule. Il s'agit d'une contradiction ; on a donc montré le résultat par l'absurde. □

Avec ce résultat, on peut enfin montrer une version simplifiée de la Conjecture 2.2 page 82 :

Théorème 2.22 *Pour tout $l, l' \geq 1$, la configuration $\mathtt{v}^n$ obtenue après n étapes de l'algorithme thermique sur la grille rectangulaire de taille $(2\tilde{k}(n)+l) \times (2\tilde{k}(n)+l')$, est telle que $\mathtt{v}^n_{i,j} = \mathtt{u}^n_{i,j}$ pour tout $i \leq \tilde{k}(n)+l$, et tout $j \leq \tilde{k}(n)+l'$.*

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, c'est évident.
On suppose le résultat vrai au rang $n-1$. Soit L une grille rectangulaire de taille $(2\tilde{k}(n)+l) \times (2\tilde{k}(n)+l')$, et $\mathtt{v}^{n-1}$ la configuration sur L obtenue après $n-1$ étapes de l'algorithme thermique. Par hypothèse de récurrence, $\mathtt{v}^{n-1}_{i,j} = \mathtt{u}^{n-1}_{i,j}$ pour tout $i \leq \tilde{k}(n)+l$, $j \leq \tilde{k}(n)+l'$.
On coupe alors L en quatre rectangles :

- $[(1,1), (\tilde{k}(n)+l, \tilde{k}(n)+l')]$;
- $[(\tilde{k}(n)+l, \tilde{k}(n)+l'+1), (1, 2\tilde{k}(n)+l')]$;
- $[(\tilde{k}(n)+l+1, 1), (2\tilde{k}(n)+l, \tilde{k}(n)+l')]$;
- $[(2\tilde{k}(n)+l, \tilde{k}(n)+l'+1), (\tilde{k}(n)+l+1, 2\tilde{k}(n)+l')]$.

Parmi tous les éboulements qui ont lieu lors de l'étape n de l'algorithme, il est toujours possible de commencer par ceux du rectangle supérieur gauche $[(1,1), (\tilde{k}(n)+l, \tilde{k}(n)+l')]$ et continuer par ceux des autres ensuite (cf. Lemme 2.21 page 83).

Alors, comme les $\tilde{k}(n)+l$ premières cases de la colonne $\tilde{k}(n)+l'$ qui s'éboulent lors de la relaxation de $\mathtt{v}^{n-1}+\beta$ sur L se sont éboulées, on peut appliquer le même argument (Lemme 2.21 page 83) au second rectangle $[(\tilde{k}(n)+l, \tilde{k}(n)+l'+1), (1, 2\tilde{k}(n)+l')]$, et ensuite au troisième et au quatrième.

Finalement on n'a réalisé que des éboulements valides, et la configuration w sur L obtenue à la fin de ce processus est symétrique et vérifie : $w_{i,j} = \mathtt{u}^n_{i,j}$ pour tous $i \leq \tilde{k}(n)+l$, $j \leq \tilde{k}(n)+l'$. En particulier elle est stable. Donc $w = \mathtt{v}^n$, ce qui prouve le résultat. □

Discussion

Le résultat que l'on vient de montrer donne des indices sur la structure de la configuration identité. En effet, il dit par exemple que jusqu'à une certaine étape, le comportement de l'algorithme est le même sur une grille d'une taille donnée que sur une grille plus grande. Cela explique en partie les similarités entre les identités sur des grilles de tailles quelconques.

De plus, ce résultat permet aussi de calculer l'identité de manière plus rapide. Tout d'abord les configurations de l'algorithme sur la grille infinie peuvent être mémorisées pour être utilisées plus tard dans le calcul de l'identité sur une grande grille. De plus, par les symétries du carré, on peut ne garder en mémoire que la configuration des sommets situés au dessus de la diagonale. D'après le Théorème 2.22, on peut enfin se contenter pour les calculs de travailler sur des demi-coins de tailles $(k(n)+1) \times (k(n)+1)$. On peut aussi augmenter la taille au fur et à mesure des besoins.

L'algorithme thermique a une complexité en $O(n^2)$, si n est le nombre de sommets de la grille. Ces petites modifications, font gagner un temps proportionnel à n^2 ; elles n'améliorent pas la complexité, mais simplement la constante principale.

On a vu que sur la grille infinie, les lignes de la partie régulière ont comme valeurs 0, 1 ou 2. Les sommets ne contenant aucun grain correspondent à des lignes qui n'ont pas été

touchées par les calculs. De plus, on a observé que si la partie régulière d'une ligne vaut 1, alors le sommet de cette même ligne qui est juste avant la partie régulière contient 2 grains; et si la première valeur est 2, il contient 3 grains.

Ce comportement est très similaire à celui que l'on peut observer sur la configuration identité d'une grille de taille $(2p+1)\times(2p+1)$ (voir Figure 2.9 page 77) : la valeur d'un sommet $(i,p+1)$ de la colonne du milieu de la grille $(2p+1)\times(2p+1)$ est 2 si le sommet (i,p) contient 3 grains, et sa valeur est 3 si son sommet voisin dans une autre colonne contient 2 grains. On conjecture que cette observation peut être étendue à des grilles de taille plus grande :

Conjecture 2.3 *Soit I la configuration identité de la grille de taille $2p\times 2p$. Si $\mathtt{u}$ est la configuration sur la grille de taille $(2p+l)\times(2p+l')$ obtenue à partir de I par :*

- $\mathtt{u}_{i,j} = \mathtt{u}_{2p+l-i+1,j} = \mathtt{u}_{i,2p+l'-i+1} = \mathtt{u}_{2p+l-i+1,1p+l'-j+1} = I_{i,j}$, *pour tout* $i,j<p$;
- $\mathtt{u}_{i,j} = \mathtt{u}_{2p+l-i+1,j} = I_{i,p}-1$ *pour tout* $i<p$, $p<j<p+l$;
- $\mathtt{u}_{i,j} = \mathtt{u}_{i,2p+l'-i+1} = I_{p,j}-1$ *pour tout* $p<j<p+l'+1$, $j<p$;
- $\mathtt{u}_{i,j} = 0$ *pour tout* $p<i<p+l+1$, $p<j<p+l'+1$,

alors $\mathtt{u}$ *est équivalente à la configuration identité de la grille de taille* $(2p+l)\times(2p+l')$.

Exemple 2.10
La Figure 2.15 donne un exemple de cette construction.

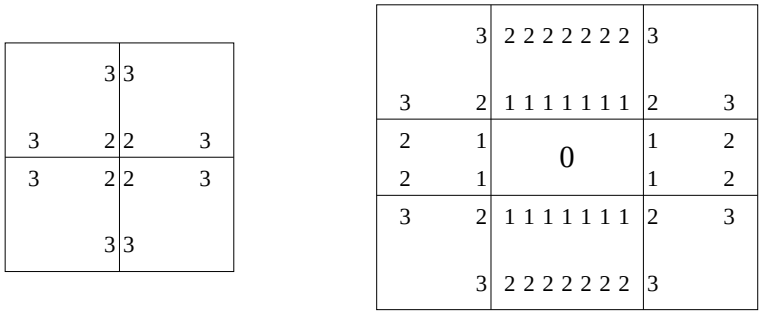


FIG. 2.15 – Une configuration équivalente à l'identité.

◇

Il faut noter que la configuration $\mathtt{u}$ sur la grille de taille $(2p+l)\times(2p+l')$ avec $l,l'>1$ obtenue comme expliquée dans cette conjecture n'est pas récurrente : chacune de ces configurations contient au moins une configuration interdite, à savoir deux sommets adjacents avec 0 grain chacun.

Expérimentalement, les seules configurations récurrentes que l'on peut obtenir comme ça sont celles sur les grilles de tailles $(2p+l)\times(2p+l')$ pour $l,l'\leq 1$. Dans ce cas, la configuration $\mathtt{u}$ obtenue est exactement l'identité.

Ainsi, il suit que si on peut prouver que les lignes de la partie régulière valent 2 quand le sommet voisin du coin modifié contient 3 grains, et valent 1 quand ce dernier contient 2 grains (comme on l'a observé), alors on pourra prouver la Conjecture 2.3 en utilisant le Théorème 2.22 page précédente. Cependant il manque encore une étape pour prouver ça directement. En effet, la forme du coin modifié n'est pas en général un carré parfait (voir

Figure 2.10 page 78). Ainsi, la configuration du coin modifié après n étapes ne correspond pas à la configuration identité sur la grille de taille $2k(n) \times 2k(n)$ (même s'il existe de grandes similarités entre elles) : la seconde phase de l'algorithme modifie la configuration.

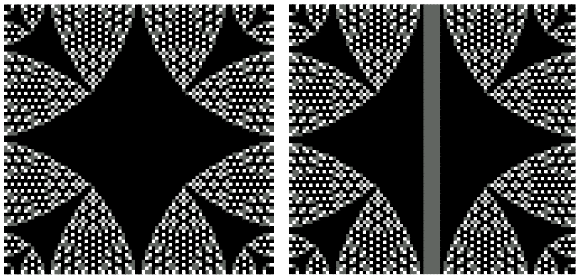


FIG. 2.16 – Les configurations $\bar{1}$ sur les grilles de taille 80×80 et 80×85.

FIG. 2.17 – L'étape 253 de l'algorithme thermique sur la grille infinie partant d'une configuration initiale où chaque sommet contient 1 grain.

On introduit une nouvelle configuration, notée $\bar{1}$, qui est par définition la configuration récurrente équivalente à la configuration pour laquelle tous les sommets de la grille contiennent 1 grain (cf. Figure 2.16).

Cette configuration partage de nombreuses propriétés qualitatives avec la configuration identité. En particulier, elle admet une structure fractale assez similaire. Enfin, la configuration $\bar{1}$ sur la grille de taille $(2p+1) \times (2p+1)$ est reliée à celle de la grille de taille $2p \times 2p$ de la même manière que l'identité l'est sur ces deux grilles.

Cette configuration peut aussi être calculée par l'algorithme thermique, mais partant d'une configuration avec des 1 partout. En particulier, l'algorithme met au plus autant de temps pour calculer $\bar{1}$, qu'il n'en met pour calculer l'identité sur une grille de même taille. Pendant le calcul, l'algorithme en revanche ne décrit qu'une seule phase, similaire à la première phase de calcul de l'identité. Il n'y a pas de seconde phase : l'algorithme s'arrête quand les coins modifiés se rencontrent.

C'est dû au fait que la forme du coin modifié dans ce cas est exactement un carré, contrairement à ce qui se produit pour l'identité (cf. figures 2.10 page 78 et 2.17).

En faisant tourner l'algorithme thermique sur le coin infini à partir de la configuration avec des 1 partout, on peut montrer et observer les mêmes caractéristiques : si un sommet (i,j) à la limite du coin modifié contient 2 grains, alors tous les sommets $(i,j'), j' > i$ qui sont après ce sommet sur la même ligne (et qui apparteinnent à la partie régulière) contiennent tous 1 grain. Si le sommet (i,j) contient 3 grains, alors ils en contiennent 2 ; et les autres valeurs possibles n'apparaissent pas. En particulier, les sommets de la partie régulière ne contiennent jamais 0 grain.

Les arguments qu'on a déjà utilisés pour l'étude de l'algorithme thermique calculant l'identité sont toujours valides dans ce nouveau cadre. En particulier, le Théorème 2.22 page 85 est toujours valable, et on peut présenter une nouvelle version de la Conjecture 2.3 page 86 :

Conjecture 2.4 *Si* $\mathtt{u}$ *est la configuration sur la grille de taille* $(2p+l)\times(2p+l')$*, obtenue à partir de* $\bar{1}$ *de la manière suivante :*

- $\mathtt{u}_{i,j} = \mathtt{u}_{2p+l-i+1,j} = \mathtt{u}_{i,2p+l'-i+1} = \mathtt{u}_{2p+l-i+1,2p+l'-j+1} = \bar{1}_{i,j}$*, pour tout* $i, j < p$ *;*
- $\mathtt{u}_{i,j} = \mathtt{u}_{2p+l-i+1,j} = \bar{1}_{i,p} - 1$ *pour tout* $i < p$*,* $p < j < p + l$ *;*
- $\mathtt{u}_{i,j} = \mathtt{u}_{i,2p+l'-i+1} = \bar{1}_{p,j} - 1$ *pour tout* $p < j < p + l' + 1$*,* $j < p$ *;*
- $\mathtt{u}_{i,j} = 1$ *pour tout* $p < i < p + l + 1$*,* $p < j < p + l' + 1$*,*

alors $\mathtt{u}$ *est équivalente à la configuration* $\bar{1}$ *sur la grille de taille* $(2p + l) \times (2p + l')$*.*

En conclusion, si on peut prouver que les lignes de la partie régulière valent 2 quand le sommet voisin du coin modifié contient 3 grains, et valent 1 quand ce dernier contient 2 grains (comme on l'a observé), alors on a seulement besoin de prouver que le coin modifié grandit comme une racine carrée pour montrer la Conjecture 2.4 à partir du Théorème 2.22 page 85. Ainsi, il faut une étape de moins dans le raisonnement. La configuration $\bar{1}$, bien que très similaire à l'identité est plus simple à aborder.

2.3.2 Le modèle sans puits

Le puits, dans le modèle du tas de sable, permet de travailler sur des configurations bien définies et stables. Que se passe-t-il si on décide de ne pas choisir de puits, c'est-à-dire si tous les sommets du graphes sont réguliers ?

Dans ce cas, le jeu correspondant à la chaîne de Markov décrite plus haut ne permet plus de définir une notion de configurations récurrentes. En effet, après chaque addition de grains, le poids total de la configuration augmente. Au début, les configurations sont stables, mais après un certain temps, les relaxations ne s'arrêtent plus.

Exemple 2.11
Prenons le cycle de longueur 3. On se donne un tirage aléatoire $\mathcal{X} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots\}$ des sommets réguliers. Maintenant, comme il n'y a plus de puits, tous les sommets sont réguliers, et chacun d'eux est tiré avec une probabilité égale à $1/3$ dans le tirage $\mathcal{X}$. Donnons nous alors un tirage, par exemple $\mathcal{X} = \{x_1, x_1, x_2, x_3, x_3, x_1, x_3, x_2, \ldots\}$. La suite des configurations associées est alors $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, et dès la quatrième configuration, on obtient une configuration dont la relaxation ne s'arrête plus. En effet si on ajoute un grain sur le sommet x_2 de la configuration $(0,1,1)$, on obtient la suite de configurations $(0,2,1) \to (1,0,2) \to (2,1,0) \to (0,2,1)$. ◇

Dans la suite, on se place dans le contexte général où une configuration est un vecteur de $\mathbb{Z}^n$, si le graphe G admet n sommets.

On a vu que la notion de récurrence ne peut pas vraiment se généraliser à ce nouveau contexte, en revanche la notion d'équivalence entre configurations reste valable : deux configurations sont équivalentes s'il existe une suite d'éboulements et d'anti-éboulements qui permet de passer de l'une à l'autre. Alors, si on travaille sur le quotient de l'ensemble des configurations par cette relation d'équivalence, la notion d'addition reste aussi bien

définie, même si la notion de représentant d'une classe d'équivalence n'a plus de solution naturelle.

On peut étendre la relation d'équivalence entre deux configurations quelconques au contexte du modèle sans puits :

Définition 2.4 On dit que deux configurations $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ sont *équivalentes* et on note $\mathtt{u}\mathcal{R}\mathtt{u}'$, s'il existe une suite d'éboulements et d'anti-éboulements qui mène de $\mathtt{u}$ à $\mathtt{u}'$.

Dans ce contexte, l'opérateur d'éboulement d'un sommet x_i est noté tout simplement Δ_i : c'est précisément la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice laplacienne Δ du graphe G. Ainsi :

$$\mathtt{u}\mathcal{R}\mathtt{u}' \Longleftrightarrow \mathtt{u} - \mathtt{u}' \in < \Delta_1, \ldots, \Delta_n > .$$

Ainsi, pour le modèle sans puits, le nombre de classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ est infini. En effet, le poids d'une configuration est un invariant de classe. Or dans ce nouveau contexte, le poids d'une configuration peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{Z}$. Mais on peut toujours additionner deux classes :

Proposition 2.23 *La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est* compatible *avec la loi d'addition $+$.*

Démonstration :

Cela résulte directement du fait que les ajouts de grains et les éboulements de sommets sont des opérations qui commutent deux à deux. □

On peut donc définir légalement $+$ sur le quotient :

Corollaire 2.24 *La loi $+$ est une loi de composition interne de l'ensemble quotient $\mathcal{U}/\mathcal{R}$.*

En fait, la loi $+$ muni $\mathcal{U}/\mathcal{R}$ d'une structure de groupe :

Théorème 2.25 *L'ensemble $\mathcal{G} = \mathcal{U}/\mathcal{R}$ est un groupe abélien infini pour la loi $+$.*

Démonstration :

La loi $+$ est trivialement associative, l'élément neutre est la classe de 0, et tout élément est inversible : si $\mathtt{u}$ est une configuration, alors la classe de $-\mathtt{u}$ est l'inverse de la classe de $\mathtt{u}$. □

Cette fois, on a donc un groupe abélien infini, mais finiment généré. En effet, si a_i est l'opérateur qui ajoute un grain sur le sommet x_i, et a_i^{-1} est celui qui retire un grain sur le sommet x_i, alors $\mathcal{G}$ est le groupe défini par générateurs et relations suivant :

$$\mathcal{G} = < a_1, \ldots, a_n, a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1} | r_1, \ldots, r_n, c_{1,1}, c_{1,2} \ldots, c_{n,n} >,$$

où

$$\forall x_i, x_j \in S, \quad a_i a_j = a_j a_i \qquad [Eq \;\; c_{i,j}],$$

et

$$\prod_{x_j} a_j^{\Delta_{i,j}} = id \qquad [Eq \;\; r_i].$$

Le lien avec le modèle du tas de sable classique est alors très simple. Si on choisit x_i comme puits du modèle, le groupe du tas de sable de G_{x_i} est isomorphe à $\mathcal{G}/(a_i = id)$, c'est-à-dire à $\mathcal{G}$ quotienté par la relation d'équivalence associée à l'idéal $< a_i >$, engendré par a_i et a_i^{-1}.

Le problème du mot

Un problème classique lié aux modèles de groupes infinis finiment engendrés est ce qu'on appelle le *problème du mot*. Étant donnés deux mots sur l'alphabet des générateurs, on se pose la question de savoir s'ils correspondent ou non au même élément du groupe, c'est-à-dire si partant du premier mot et appliquant les relations, on peut trouver le second. Cela revient à déterminer si les deux configurations représentées par les deux mots sont dans la même classe d'équivalence ou pas. Ce problème est parfois difficile, car la séquence des relations peut être non bornée.

Dans notre cas précis, la réponse à cette question est triviale :

Théorème 2.26 *Le problème du mot sur le modèle sans puits se résout en temps polynomial.*

Démonstration :

Par une remarque déjà formulée, on sait que le poids d'une configuration est un invariant de classe. Si les deux configurations correspondantes aux deux mots donnés n'ont pas le même poids, alors les mots ne représentent pas le même élément du groupe. Cette propriété se vérifie en temps linéaire sur le nombre de sommets du modèle.

Sinon, on peut choisir un sommet au hasard et lui faire jouer le rôle du puits. On applique ensuite l'algorithme thermique (complexité polynomiale en temps) aux deux configurations. Les deux configurations originales sont équivalentes pour $\mathcal{R}$ si et seulement si on obtient les mêmes configurations à l'issue de cet algorithme. D'où le résultat. □

L'algorithme correspondant est donc le suivant :

Algorithme 2.1
Données: $\mathcal{M}^\tau, \mathtt{u}, \mathtt{u}'$
début
  si $\mathtt{Poids}(\mathtt{u}) \neq \mathtt{Poids}(\mathtt{u}')$ **alors**
    retourner [non] ;
  finsi
  $\mathtt{q} \leftarrow \mathtt{ChoisirSommetAleatoire}(\mathcal{M}^\tau)$;
  $\mathcal{M}^\tau_\mathtt{q} \leftarrow (\mathcal{M}^\tau, \mathtt{q})$;
  $\mathtt{u}^\mathtt{q} \leftarrow \mathtt{Restriction}(\mathtt{u}, \mathcal{M}^\tau_\mathtt{q})$;
  $\mathtt{u}'^\mathtt{q} \leftarrow \mathtt{Restriction}(\mathtt{u}', \mathcal{M}^\tau_\mathtt{q})$;
  retourner $[AlgoThermique(\mathtt{u}^\mathtt{q}) = AlgoThermique(\mathtt{u}'^\mathtt{q})]$;
fin

Exemple 2.12
On considère le graphe sans puits du bateau (cf. Figure 2.18 page ci-contre). On considère les trois configurations suivantes :

$$\mathtt{u}_1 = (0, -1, 2, 3, 1, -2)\ ,\ \mathtt{u}_2 = (1, -4, 3, 3, -1, -1) \text{ et } \mathtt{u}_3 = (1, -4, 3, 5, -1, -1).$$

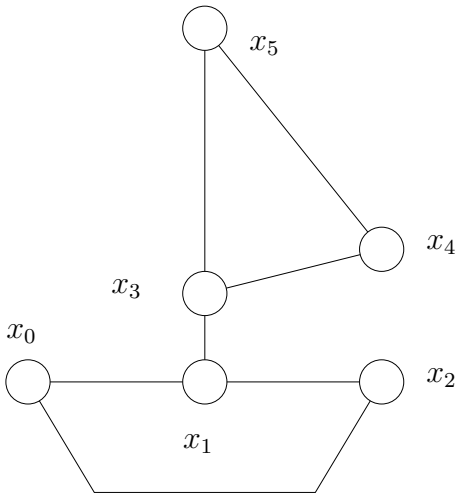


FIG. 2.18 – Graphe du bateau.

Ces trois configurations impliquent trois questions de type problème du mot :

$$a_1^{-1}a_2^2a_3^3a_4a_5^{-2} \stackrel{?}{=} a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^3a_4^{-1}a_5^{-1}, \tag{2.3.3}$$

$$a_1^{-1}a_2^2a_3^3a_4a_5^{-2} \stackrel{?}{=} a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^5a_4^{-1}a_5^{-1}, \tag{2.3.4}$$

$$a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^3a_4^{-1}a_5^{-1} \stackrel{?}{=} a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^5a_4^{-1}a_5^{-1}. \tag{2.3.5}$$

Ces trois problèmes sont équivalents aux trois problèmes suivants : $\mathtt{u}_1 \stackrel{?}{\mathcal{R}} \mathtt{u}_2$ (Problème (2.3.3)), $\mathtt{u}_1 \stackrel{?}{\mathcal{R}} \mathtt{u}_3$ (Problème (2.3.4)) et $\mathtt{u}_2 \stackrel{?}{\mathcal{R}} \mathtt{u}_3$ (Problème (2.3.5)). Pour résoudre ces problèmes, on applique l'algorithme précédent. On commence par calculer le poids des configurations :

$$\mathcal{P}(\mathtt{u}_1) = 3\ ,\ \mathcal{P}(\mathtt{u}_2) = 1 \text{ et } \mathcal{P}(\mathtt{u}_3) = 3.$$

On peut déjà résoudre (2.3.3) et (2.3.5), car $\mathtt{u}_1$ n'est pas équivalente à $\mathtt{u}_2$ et $\mathtt{u}_3$ non plus. Reste à savoir si $\mathtt{u}_1$ et $\mathtt{u}_3$ sont équivalentes. Pour cela, on choisit un sommet au hasard, x_3 par exemple ($\mathtt{q} = x_3$), et on applique l'algorithme thermique. Désormais on représente donc une configuration $\mathtt{u}$ par le vecteur de ses valeurs en x_0, x_1, x_2, x_4 et x_5. Ainsi :

$$\mathtt{u}_1^{\mathtt{q}} = (0, -1, 2, 1, -2) \text{ et } \mathtt{u}_3^{\mathtt{q}} = (1, -4, 3, -1, -1).$$

En appliquant l'algorithme thermique, on trouve alors :

$$\widetilde{\mathtt{u}_1^{\mathtt{q}}} = (1, 2, 0, 1, 1) \text{ et } \widetilde{\mathtt{u}_3^{\mathtt{q}}} = (1, 2, 0, 1, 1).$$

On en déduit que $\mathtt{u}_1 \mathcal{R} \mathtt{u}_3$. En effet, on pouvait remarquer que $\mathtt{u}_3$ peut être obtenue à partir de $\mathtt{u}_1$ en éboulant les sommets x_1 et x_4. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2^2a_3^3a_4a_5^{-2} &\neq a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^3a_4^{-1}a_5^{-1}, \\ a_1^{-1}a_2^2a_3^3a_4a_5^{-2} &= a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^5a_4^{-1}a_5^{-1}, \\ a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^3a_4^{-1}a_5^{-1} &\neq a_0a_1^{-4}a_2^3a_3^5a_4^{-1}a_5^{-1}. \end{aligned}$$

◇

Chapitre 3

Polynômes d'avalanches et distributions sur le tas de sable

Sommaire

— *o* —

Dans ce chapitre, on introduit la notion de *polynôme d'avalanches*, et on la relie à celle de distribution limite des avalanches sur le modèle. Pour les cas simples (arbres, cycles, graphes complets), déterminer exactement le polynôme d'avalanches d'un graphe est un problème assez facile. On étudie des cas plus complexes dans la deuxième section. Ces deux sections font l'objet d'un même article (cf. [8]).

Dans la troisième section, on étudie le cas de la roue, qui peut être vue comme une grille avec des conditions aux bords particulières. L'intérêt vient du fait que la distribution limite présente des pics inhabituels pour un graphe si proche de la grille avec des bords partout ouverts. Ce problème est traité dans [20, 22, 17].

Enfin, dans une dernière section, on montre comment et dans quel sens, il est toujours possible de construire un graphe pour lequel la distribution des avalanches est aussi proche que l'on veut d'une distribution donnée.

— *o* —

3.1 Problème général et premiers cas

3.1.1 Liens entre polynômes d'avalanches et distributions

Un des problèmes centraux du modèle est celui de la distribution des avalanches lors du jeu décrit à la Section 1.3. Son allure sur la grille est à l'origine de l'intérêt des physiciens pour le modèle, comme on l'a vu au Chapitre 1. Comme on l'a aussi déjà mentionné rapidement, cette distribution est liée au polynôme énumérant ces mêmes avalanches, mais seulement sur l'ensemble des configurations récurrentes.

Soit $\mathtt{u}$ une configuration récurrente sur le tas de sable $G_{\mathtt{q}}$. On appelle *avalanche principale* toute avalanche obtenue après l'ajout d'une particule sur un site x_i. On note alors $ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}, x_i)$ la *taille* de cette avalanche. À tout modèle de tas de sable $G_{\mathtt{q}}$, on peut alors naturellement associer un polynôme énumérant les tailles de ses avalanches principales. Ce polynôme est donné par :

$$Av_{G_{\mathtt{q}}}(z) \ := \sum_{\mathtt{u}\in\mathcal{R}ec} \sum_{i=1}^{n} z^{ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u},x_i)} \ = \ \sum \alpha_k z^k,$$

où α_k est le nombre d'avalanches principales de taille k. On appelle ce polynôme le *polynôme d'avalanches* du modèle $G_{\mathtt{q}}$. On peut remarquer que $Av_{G_{\mathtt{q}}}(1)$ est toujours égal à n fois le nombre d'arbres couvrants du graphe G, quel que soit G. En particulier, cette valeur est indépendante du choix du puits $\mathtt{q}$. En revanche, le polynôme lui-même est dépendant de ce choix la plupart du temps.

Ce polynôme est invariant par *isomorphisme de modèles de tas de sable*. Ainsi, si ψ est un automorphisme de G tel que $\psi(\mathtt{q}) = \mathtt{q}'$, alors $Av_{G_{\mathtt{q}}}$ et $Av_{G_{\mathtt{q}'}}$ sont égaux. En particulier, si pour tout couple de sommets (x_i, x_j) du graphe G, il existe un *automorphisme* de G tel que l'image de x_i est x_j, alors le polynôme $Av_{G_{\mathtt{q}}}$ est indépendant du choix du puits $\mathtt{q}$. En conséquence, on parle du polynôme d'avalanches du graphe G et on écrit Av_G par abus d'écriture.

Exemple 3.1
C'est le cas de la famille des cycles par exemple. En effet, soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les sommets du cycle C_{n+1} parcourus dans le sens trigonométrique. Si $+$ est l'addition dans le groupe $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, alors l'application $\psi_{i,j}$ qui à un sommet x_k de C_{n+1} associe le sommet x_{k+j-i} induit un automorphisme de C_{n+1} tel que l'image du sommet x_i est x_j.
Prenons $n = 2$ par exemple. Les trois configurations récurrentes du cycle C_3 de longueur 3 sont montrées sur la Figure 3.1.

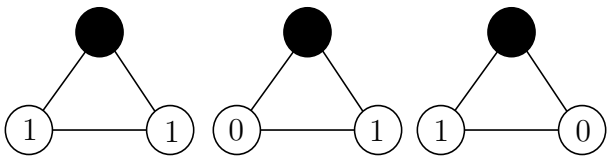


FIG. 3.1 – Configurations récurrentes sur C_3.

Les tailles des avalanches principales sont $2, 2$ pour la première configuration récurrente ; $0, 1$ et $1, 0$ pour les deux autres configurations. Il est clair qu'on obtiendrait la

même chose si un autre sommet avait été choisi comme puits.
Ainsi le polynôme d'avalanches de C_3 est :

$$Av_{C_3}(z) \;=\; 2 + 2z + 2z^2.$$

$\diamond$

$-\ o\ -$

Soit $\mathcal{X} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ un tirage aléatoire (uniforme) de sommets réguliers du modèle $G_{\mathtt{q}}$, et $\mathcal{T} = (\mathtt{u}_0, \mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2, \ldots)$ la séquence des configurations stables qui apparaissent dans le processus, quand au temps $t > 0$, on ajoute un grain sur le sommet x_{i_t} de la configuration $\mathtt{u}_{t-1}$ et qu'on effectue ensuite la relaxation. On note alors $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(\mathtt{u}_l)$ la longueur $ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}_l, x_{i_l})$ de l'avalanche principale sur $\mathtt{u}_l$ en x_{i_l}. Par définition, il existe un entier M tel que les configurations d'indice plus grand que M soient toutes récurrentes.

On note $\mathcal{T}^k$ le tirage des $k+1$ premières configurations : $\mathcal{T}^k = (\mathtt{u}_0, \mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2, \ldots, \mathtt{u}_k)$, et $P^k(t)$ le polynôme générateur des avalanches de $\mathcal{T}^k$ défini par :

$$P^k(t) = \sum_{0 \le l < k} t^{\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(\mathtt{u}_l)}.$$

Le coefficient t^i de ce polynôme divisé par k indique la proportion d'avalanches principales de taille i dans le tirage $\mathcal{T}^k$. On suppose k plus grand que M. Pour chaque configuration récurrente $\mathtt{u}$, on note $\gamma_k^l(\mathtt{u})$ le nombre de fois que $\mathtt{u}$ apparaît dans $\mathcal{T}^k$ à un indice m supérieur à M et que $x_{i_m} = x_l$. On peut alors décomposer le polynôme $P^k(t)$ de la manière suivante :

$$P^k(t) = \sum_{0 \le l < M} t^{\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(\mathtt{u}_l)} + \sum_{\mathtt{u} \in \mathcal{R}ec} \sum_{i=1}^{n} \gamma_k^i(\mathtt{u}) t^{ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}, x_i)}.$$

Comme la probabilité limite d'apparition des configurations récurrentes dans le tirage $\mathcal{T}$ est uniforme, et que celle d'un sommet régulier dans le tirage $\mathcal{X}$ l'est aussi, pour toute configuration récurrente $\mathtt{u}$ et pour tout sommet régulier x_i, la valeur $\gamma_k^i(\mathtt{u})/k$ tend vers $1/n|\mathcal{R}ec|$ quand k tend vers l'infini. La distribution $\mathcal{D}$ que l'on cherche, c'est-à-dire la distribution limite des avalanches dans ce jeu vérifie :

$$\mathcal{D}(t) = \lim_{k \to +\infty} \frac{P^k(t)}{k} = \sum_{\mathtt{u} \in \mathcal{R}ec} \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}, x_i)}}{n|\mathcal{R}ec|}.$$

Mais, par définition :

$$Av_{G_{\mathtt{q}}}(z) \;=\; \sum_{\mathtt{u} \in \mathcal{R}ec} \sum_{i=1}^{n} z^{ad_{G_{\mathtt{q}}}(\mathtt{u}, x_i)},$$

ainsi :

$$\mathcal{D}(t) = \frac{Av_{G_{\mathtt{q}}}(t)}{n|\mathcal{R}ec|}. \tag{3.1.1}$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est la normalisation du polynôme d'avalanches $Av_{G_\mathtt{q}}(t)$ du modèle $G_\mathtt{q}$. De manière générale, on appelle *distribution d'avalanches* d'un modèle $G_\mathtt{q}$ le polynôme normalisé $\mathcal{D}$. Comme on travaille sur des graphes finis, on n'a pas besoin d'introduire des séries. Cependant, ces notions se généraliseraient par des séries dans le contexte de modèles définis sur des graphes ayant un nombre infini de sommets.

$-\ o\ -$

3.1.2 Polynômes d'avalanches des arbres

Si G est un arbre, alors $T = G_\mathtt{q}$ n'a qu'une seule configuration récurrente. En effet, le graphe sous-jacent n'a qu'un arbre couvrant, lui-même. Comme la configuration maximale, c'est-à-dire la configuration pour laquelle tous les sommets réguliers sont *saturés*, est toujours récurrente, c'est l'unique configuration récurrente du modèle. On la note $\mathtt{u}_T$. On a donc $\mathtt{u}_{T_i} = d_i - 1$ pour tout sommet régulier x_i.

Dans la suite, on représente l'arbre de telle sorte que le puits en est la racine. C'est simplement une convention de représentation, qui n'a aucune incidence sur les résultats. Un arbre enraciné est donc précisément un tas de sable, c'est-à-dire un graphe dont un sommet a été distingué ; c'est pourquoi on peut noter $T = G_\mathtt{q}$ si T est un arbre enraciné.

Ajouter une particule sur un sommet x_i provoque l'éboulement de tous les sommets du sous-arbre de T enraciné en x_i. L'avalanche s'arrête si x_i est fils du puits. Sinon, après cette première séquence d'éboulements, le père x_j de x_i reçoit une particule qui initie alors l'éboulement de tous les sommets du sous-arbre de T enraciné en x_j. Ainsi, on a la relation de récurrence suivante :

$$ad_T(\mathtt{u}_T, x_i) = ad_T(\mathtt{u}_T, x_j) + t_i, \tag{3.1.2}$$

si t_i est la taille du sous-arbre enraciné en x_i, c'est-à-dire son nombre de sommets (racine incluse).

Exemple 3.2
Si on note L_k la ligne constituée de $k+1$ sommets notés dans l'ordre $x_0, x_1, \ldots, x_k$, et telle que le puits $\mathtt{q}$ est x_0 (cf. Figure 3.2), alors la relation (3.1.2) devient :

$$ad_T(\mathtt{u}_T, x_i) = \begin{cases} k & \text{si} \quad i = 1, \\ ad_T(\mathtt{u}_T, x_{i-1}) + (k+1-i) & \text{si} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

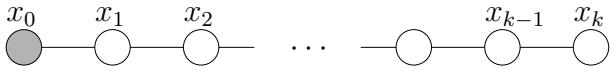


FIG. 3.2 – Le modèle de la ligne L_k.

D'où :

$$ad_T(\mathtt{u}_T, x_i) = ki - \frac{i(i-1)}{2} = \frac{i}{2}(2k - i + 1). \tag{3.1.3}$$

$\diamond$

— *o* —

L'Algorithme 3.1 calcule les valeurs de t_i pour tout sommet régulier x_i si on lui fournit le tableau des listes de fils qui définit l'arbre, et le sommet q qui en est la racine. C'est un algorithme récursif et sa complexité est linéaire par rapport au nombre de sommets.

Algorithme 3.1 (CalculerTabTailleSousArbresRec)
Données: TabListeFils,x
début
  si TabListeFils[x] $\neq \emptyset$ **alors**
    $t := 1$;
    pour $y \in$ TabListeFils[x] **faire**
      CalculerTabTailleSousArbresRec(TabListeFils,y) ;
      $t := t+$ TabTailleSousArbres[y] ;
    finpour
    TabTailleSousArbres[x] := t ;
  sinon
    TabTailleSousArbres[x] := 1 ;
  finsi
fin
Résultat: TabTailleSousArbres

L'Algorithme 3.2 utilise la relation (3.1.2) pour calculer la taille des avalanches principales d'un arbre de manière récursive, étant donné le tableau de la taille des sous-arbres.

Algorithme 3.2 (CalculerTailleAvalanchesRec)
Données: TabListeFils,TabTailleSousArbres,x
début
  pour $y \in$ TabListeFils[x] **faire**
    si $x =$ q **alors**
      TabTailleAvalanches[y] := TabTailleSousArbres[y] ;
      CalculerTailleAvalanchesRec (.,.,y) ;
    sinon
      TabTailleAvalanches[y] := TabTailleSousArbres[y]
                + TabTailleAvalanches[x] ;
      CalculerTailleAvalanchesRec (.,.,y) ;
    finsi
  finpour
fin
Résultat: TabTailleAvalanches

Exemple 3.3
La Figure 3.3 page suivante donne un exemple. On a indiqué la taille de l'avalanche principale en x_i au niveau du cercle représentant x_i.

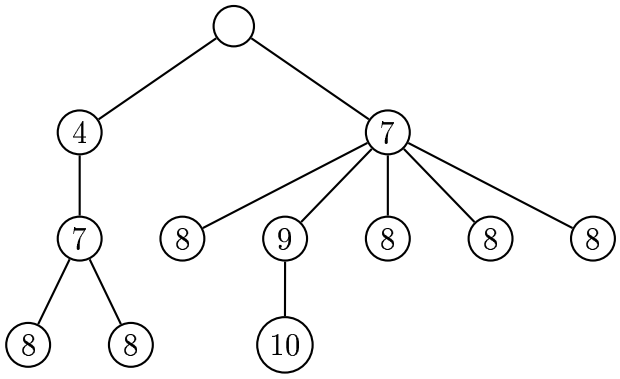


FIG. 3.3 – Un arbre enraciné T_1 et les tailles de ses avalanches principales.

Le polynôme d'avalanches de cet arbre est :

$$Av_{T_1}(z) \;=\; z^4 + 2z^7 + 6z^8 + z^9 + z^{10}.$$

◇

Il faut noter que $Av_{G_q}(0) = 0$ si et seulement si G est un arbre. En effet, un graphe qui n'est pas un arbre admet strictement plus d'une configuration récurrente, et nécessairement au moins l'une d'entre elles, notée $\mathtt{u}$, admet un sommet x_i qui n'est pas *saturé*, c'est-à-dire tel que $\mathtt{u}_i < d_i - 1$. La configuration récurrente $\mathtt{u}$ admet alors une avalanche principale en ce sommet qui est de taille nulle.

En fait, le polynôme d'avalanches ne caractérise pas un arbre, même non enraciné. En effet, l'arbre enraciné T_2 de la Figure 3.4 admet le même polynôme d'avalanches que T_1, mais les arbres non enracinés correspondants ne sont même pas isomorphes[1].

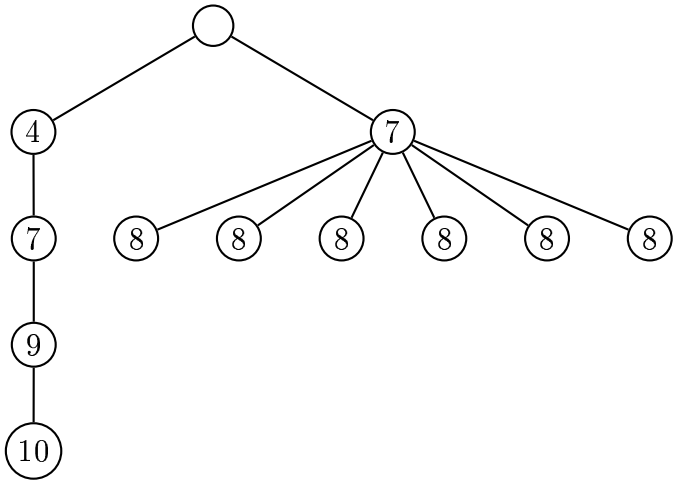


FIG. 3.4 – Un arbre enraciné T_2 qui admet le même polynôme d'avalanches que T_1.

Quand on choisit une racine (un puits) différente, le polynôme d'avalanches change aussi en général. On peut alors associer à un graphe l'ensemble de tous ses polynômes

[1]Cet exemple est dû à Michel Marcus.

d'avalanches quand on fait varier la racine sur chacun de ses sommets. Cet ensemble non plus ne caractérise pas le graphe. On détaille un contre-exemple plus loin (cf. Figure 3.7 page 101).

$-\ o\ -$

L'ensemble $Av^{\mathcal{T}}$ des polynômes P tels qu'il existe un arbre T vérifiant $Av_T = P$ est le plus petit ensemble tel que :

$$z \in Av^{\mathcal{T}}, \tag{3.1.4}$$
$$P, Q \in Av^{\mathcal{T}} \implies P + Q \in Av^{\mathcal{T}}, \tag{3.1.5}$$
$$P \in Av^{\mathcal{T}} \implies z^a(P+1) \in Av^{\mathcal{T}}, \text{ où } a = P(1) + 1. \tag{3.1.6}$$

La preuve est immédiate. En effet, l'ensemble des arbres enracinés ayant plus de deux sommets[2] se définit par induction à partir de l'arbre à 2 sommets et des deux opérations élémentaires : ajouter un sommet lié à la racine qui devient la nouvelle racine (opération Φ), et fusionner les racines de deux arbres enracinés (opération $+$). En terme de polynôme, l'opération Φ correspond à (3.1.6) et l'opération $+$ à (3.1.5) (cf. Figure 3.5). Comme le polynôme d'avalanches de l'arbre à deux sommets est z, $Av^{\mathcal{T}}$ est bien la clôture transitive de $\{z\}$ par les opérations Φ et $+$.

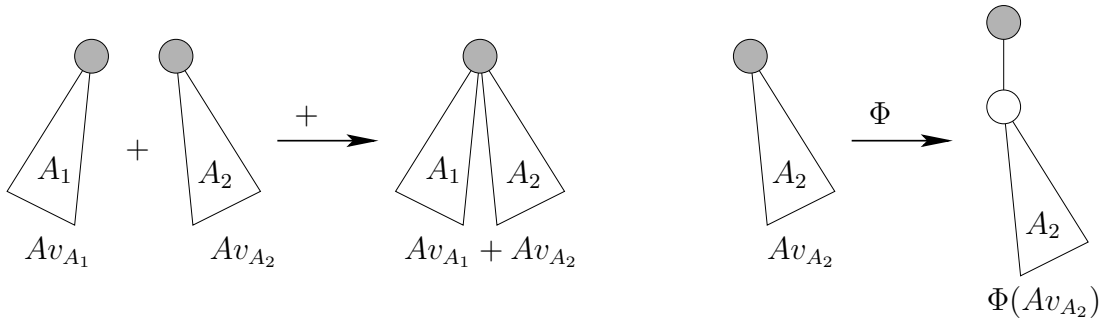


FIG. 3.5 – Opérations $+$ et Φ sur des arbres et sur les polynômes.

On peut donc calculer Av_T récursivement en utilisant les relations (3.1.5) et (3.1.6) (cf. Algorithme 3.3 page suivante). C'est une méthode alternative aux algorithmes 3.1 page 97 et 3.2 page 97, qui est plus simple ; mais la complexité est la même : linéaire.

[2] c'est-à-dire au moins un sommet régulier.

Algorithme 3.3 (CalculerAv_TRec)
Données: TabListeFils,x
début
  ListeFx := TabListeFils[x] ;
  si ListeFx= $\emptyset$ **alors**
    retourner *[0]* ;
  sinon
    $P := 0$;
    pour $y \in$ ListeFx **faire**
      $P := P + \Phi(\text{Calculer}Av_T\text{Rec}(., y))$;
    finpour
    retourner *[P]* ;
  finsi
fin
Résultat: Av_T

Exemple 3.4
La Figure 3.6 donne un exemple de décomposition inductive d'un arbre enraciné par les opérations $+$ et Φ.

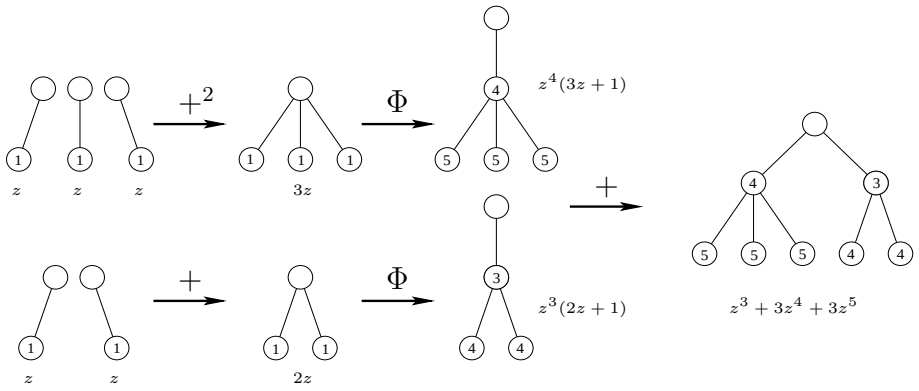


FIG. 3.6 – Calcul par induction du polynôme d'avalanches d'un arbre.

◇

— *o* —

Maintenant, on peut construire un contre-exemple au problème mentionné plus haut : l'ensemble des polynômes d'avalanches d'un graphe caractérise-t-il ce graphe ?

On va montrer[3], que les arbres T et T' de la Figure 3.7 page suivante ne sont pas isomorphes, mais admettent le même ensemble de polynômes quand la racine parcourt l'ensemble de leurs sommets. Le fait qu'ils ne soient pas isomorphes est une conséquence

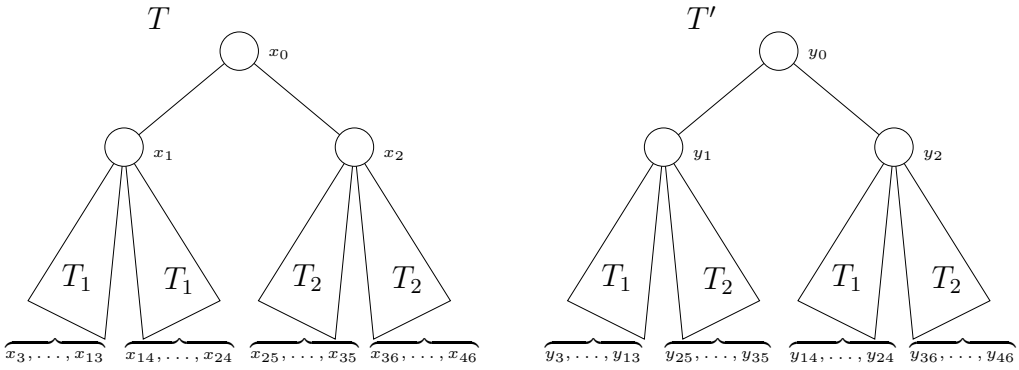


FIG. 3.7 – Les arbres T et T'.

du fait que T_1 et T_2 ne le sont pas.

La démonstration est un peu technique. On note x_0 (resp. y_0) la racine de l'arbre T (resp. T'), et x_1 (resp. x_2) celle de son sous-arbre gauche (resp. sous-arbre droit). Les sommets définis de la même manière pour T' sont notés y_1 et y_2. Les sommets réguliers de la première copie T_1 (resp. T_2) de T sont notés $x_3, x_4, \ldots, x_{13}$ (resp. $x_{25}, x_{26}, \ldots, x_{35}$) et ceux de la deuxième copie $x_{14}, x_{15}, \ldots, x_{24}$ (resp. $x_{36}, x_{37}, \ldots, x_{46}$). Les sommets correspondants de T' sont notés y_i, où l'indice i est défini de la même manière (cf. Figure 3.7).

Maintenant on peut évaluer les polynômes d'avalanches quand on change la racine des arbres. On montre dans la suite que si x_i est choisie comme racine de T, alors le polynôme d'avalanches obtenu est le même que celui obtenu à partir de T' quand y_i est choisi comme racine.

Si x_0 est choisi comme racine de T, on choisit y_0 comme racine de T'. Alors $T = \Phi(T_1 + T_1) + \Phi(T_2 + T_2)$ et $T' = \Phi(T_1 + T_2) + \Phi(T_1 + T_2)$. En traduisant ces égalités en terme de polynômes, comme $Av_{T_1} = Av_{T_2}$, on a immédiatement $Av_T = Av_{T'}$.

Par symétrie du couple (T, T') par rapport à T_1 et T_2, il suffit de montrer que $Av_T = Av_{T'}$ quand x_i (resp. y_i) est la racine de T (resp. T'), seulement pour les indices $i = 1$ ou $3 \leq i \leq 24$, pour avoir le résultat sur tous les indices.

Si x_1 est choisi comme racine de T, on choisit y_1 comme racine de T'. Cette fois, $T = T_1 + T_1 + \Phi^2(T_2 + T_2)$ et $T' = T_1 + T_2 + \Phi^2(T_1 + T_2)$. Encore une fois, traduites en termes de polynômes, ces égalités donnent $Av_T = Av_{T'}$.

Si x_i est choisi comme racine de T, avec $3 \leq i \leq 13$, on choisit y_i comme racine de T'. Il existe alors une suite s d'opérations $+$ et Φ qui construit T_1 enraciné en x_i à partir de l'arbre $\{x_1\}$. Si on pose $Av_A = 0$ pour un arbre A réduit à un sommet, en terme de polynômes, la suite d'opérations s appliquée à 0 conduit au polynôme d'avalanches de T_1 enraciné en x_i. Alors $T = s(T1 + \Phi^2(T_2 + T_2))$ et de même $T' = s(T2 + \Phi^2(T_1 + T_2))$. D'où l'égalité voulue en terme de polynômes : $Av_T = Av_{T'}$.

Si x_i est choisi comme racine de T, avec $14 \leq i \leq 24$, on choisit toujours y_i comme racine de T'. Il existe encore une suite s d'opérations $+$ et Φ qui construit T_1 enraciné en x_i à partir de $\{x_1\}$. Mais cette même suite d'opérations appliquée à $\{y_2\}$ construit la seconde copie de T_1 de T' enraciné en y_i. Dans ces conditions, on a toujours les égalités : $T = s(T1 + \Phi^2(T_2 + T_2))$ et $T' = s(T2 + \Phi^2(T_1 + T_2))$, et donc le résultat $Av_T = Av_{T'}$.

[3] On garde la même notation pour les arbres enracinés et non-enracinés. On fait confiance à la sagacité du lecteur pour interpréter les notations suivant le contexte.

$-\ o\ -$

3.1.3 Polynômes d'avalanches des cycles

La famille des cycles constitue une autre famille pour laquelle le polynôme d'avalanches de ses éléments est simple. De plus, elle vérifie la propriété énoncée plus haut qui implique que le polynôme d'avalanches est indépendant du choix du puits. Ainsi, quel que soit ce choix, on note par abus d'écriture $Av_{C_{n+1}}$ le polynôme d'avalanches du cycle à $n+1$ sommets. Alors :

Proposition 3.1 *Il existe une avalanche principale de taille $k>0$ sur C_{n+1} si et seulement s'il existe deux entiers p,q tels que $pq=k$ et $p+q\leq n+1$.*
De plus, le nombre d'avalanches principales de taille k est égal à deux fois le nombre de couples (p,q) tels que $pq=k$ et $p+q\leq n$, plus le nombre de couples tels que $pq=k$ et $p+q=n+1$.

Démonstration : Les configurations récurrentes sur le cycle C_{n+1} sont les configurations pour lesquelles tous les sommets ont une particule, sauf éventuellement un sommet qui n'a alors aucune particule. Cela fait $n+1$ configurations (cf. la Proposition 2.5 page 60 et l'Exemple 2.3 page 60 de la Section 2.2 page 58). On note $\mathtt{u}_0$ la configuration maximale $(1,\ldots,1)$ et $\mathtt{u}_i$ la configuration qui admet un 0 sur le site x_i et un 1 sur tous les autres sites.

On calcule d'abord la longueur de l'avalanche quand on ajoute un grain sur la configuration maximale. Par symétrie, on peut supposer qu'on ajoute le grain sur x_i avec $i\leq n/2$. Si $i=1$, alors $ad_{C_{n+1}}(\mathtt{u}_0,x_i)=n$. Si $i=2$, on peut ébouler les n sommets réguliers du

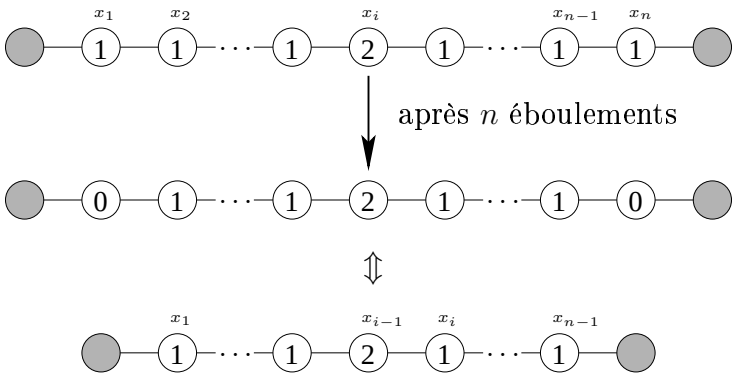


FIG. 3.8 – Relation de récurrence de l'Équation (3.1.7).

cycle et on obtient la configuration $(0,1,\ldots,1,2,1,\ldots,1,0)$. Autrement dit le nombre d'éboulements suivants est égal à la longueur de l'avalanche quand on ajoute un grain en x_{i-1} sur la configuration maximale du modèle C_{n-1} ; d'où la relation de récurrence (cf. Figure 3.8) :

$$ad_{C_{n+1}}(\mathtt{u}_0,x_i)=n+ad_{C_{n-1}}(\mathtt{u}_0,x_{i-1}). \tag{3.1.7}$$

Comme on a supposé $i \leq n/2$, la récurrence s'arrête au bout de i étapes et on trouve :

$$ad_{C_{n+1}}(\mathtt{u}_0, x_i) = n + (n-2) + \cdots + (n-2(i-1)) = i(n+1-i).$$

En particulier, cette relation est symétrique, c'est-à-dire invariante par $i \leftrightarrow (n+1-i)$, comme attendu.

On peut maintenant passer au cas des configurations $\mathtt{u}_j$, pour $1 \leq j \leq n$. Par symétrie, on peut supposer qu'on va ajouter un grain sur un sommet x_i tel que $i \leq j$. Si $i = j$, l'avalanche est de taille nulle bien sûr.

Si $i < j$, alors la longueur de l'avalanche est exactement celle qu'on obtiendrait en ajoutant un grain sur x_i dans la configuration maximale $\mathtt{u}_0$ du modèle C_j. On peut alors

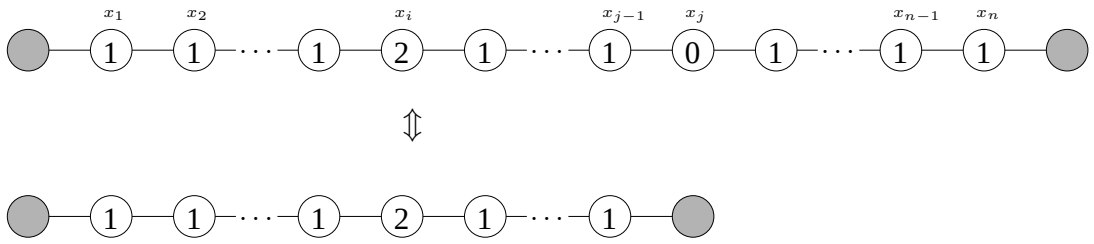


FIG. 3.9 – Relation de récurrence de l'Équation (3.1.8).

utiliser le résultat précédent (cf.. Figure 3.9) :

$$ad_{C_{n+1}}(\mathtt{u}_j, x_i) = ad_{C_j}(\mathtt{u}_0, x_i) = i(j-i). \tag{3.1.8}$$

Les affirmations de la proposition découlent directement de ces calculs. □

En outre, on a calculé le nombre d'avalanches de taille 0 lors de la démonstration précédente. Il vaut n, et c'est le nombre de couples $(\mathtt{u}_i, x_i)$, avec les mêmes notations. Ainsi, le terme constant de $Av_{C_{n+1}}$ est aussi n.

Exemple 3.5
Le polynôme d'avalanches de C_8 est donnée par :

$$\begin{aligned} Av_{C_8}(z) &= 7 + 2z + 4z^2 + 4z^3 + 6z^4 + 4z^5 + 8z^6 + 2z^7 \\ &\quad + 4z^8 + 2z^9 + 4z^{10} + 6z^{12} + 2z^{15} + z^{16}. \end{aligned}$$

Par exemple, le nombre d'avalanches de taille 6 est 8, vu qu'il existe 4 couples (p, q) avec $pq = 6$ et $p + q \leq 7$: $(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)$. Le nombre d'avalanches de taille 16 est 1 en revanche, car le couple $(4, 4)$ est le seul qui satisfasse $pq = 16$ et $p + q = 8$, et que de plus il n'existe aucuns p, q vérifiant $pq = 16$ et $p + q \leq 7$.

◇

3.1.4 Polynômes d'avalanches des graphes complets

On attaque ici un problème plus complexe que les cas très simples des arbres et des cycles. On présente deux méthodes de résolution. La première utilise deux bijections classiques : celle entre les configurations récurrentes du tas de sable sur K_{n+1} et les fonctions de parking de taille n, et celle entre les fonctions de parking en forme normale et les mots de Dyck. On trouve alors ensuite la solution par des calculs analytiques fastidieux. La seconde méthode de résolution est purement bijective et permet de trouver le résultat de manière très immédiate.

On met ainsi en évidence l'importance liée à la découverte de solutions purement bijectives pour un problème. Outre une résolution plus simple et rapide, on en tire souvent une meilleure compréhension des mécanismes sous-jacents.

Les résultats sur le graphe complet datent en fait de 1993. Janowski et Laberge ont en effet traité ce problème dans [35], et en ont plus particulièrement étudié l'asymptotique.

$-\ o\ -$

Sur le graphe complet K_{n+1} les configurations récurrentes sont en bijection avec les fonctions de parking. On rappelle qu'une fonction $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de nombres positifs ou nuls est une *fonction de parking (ou de n-parking)* s'il existe une permutation $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de $1, 2, \ldots, n$ telle que pour tout i, $0 \leq p_i < m_i$ (cf. [39]). Si p est telle que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$, on dit que p est en *forme normale*.
La bijection entre les fonctions de n-parking et les configurations récurrentes sur K_{n+1} est une conséquence directe du Théorème 1.6 page 42 (critère de Dhar).

Proposition 3.2 *Une configuration* $\mathtt{u} = (\mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2, \ldots, \mathtt{u}_n)$ *de* K_{n+1} *est récurrente si et seulement si* $p = (n-1-\mathtt{u}_1, n-1-\mathtt{u}_2, \ldots, n-1-\mathtt{u}_n)$ *est une fonction de parking.*
On dit que la configuration $\mathtt{u}$ *et la fonction* p *sont* conjuguées.

Remarque 3.1
De plus dans cette correspondance, le nombre de sommets saturés dans $\mathtt{u}$ est égal au nombre de 0 dans la fonction de parking p qui lui est conjuguée.

Corollaire 3.3 *Le nombre de configurations récurrentes sur* K_{n+1} *est* $(n+1)^{n-1}$.

De manière similaire, on dit que la configuration récurrente $\mathtt{u}$ est en *forme normale* si sa fonction de parking conjuguée l'est, c'est-à-dire si $\mathtt{u}_1 \geq \ldots \geq \mathtt{u}_n$. L'ensemble des configurations récurrentes en forme normale de K_{n+1} est en fait le quotient de l'ensemble des configurations récurrentes par le groupe symétrique[4]. En particulier, il est clair que si $\mathtt{u}$ est la forme normale de la configuration $\mathtt{u}'$, alors on a l'égalité :

$$Q_{\mathtt{u}}(z) = \sum_{i=1}^{n} z^{ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u}, x_i)} = \sum_{i=1}^{n} z^{ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u}', x_i)}.$$

Le calcul du polynôme d'avalanches de K_{n+1} se ramène donc à celui des polynômes $Q_{\mathtt{u}}$ pour toutes les configurations récurrentes $\mathtt{u}$ en forme normale de K_{n+1}. Il suffit de déterminer le nombre de configurations récurrentes qui admettent la même forme normale.

[4] c'est-à-dire par la relation d'équivalence $\sim$, où $\mathtt{u} \sim \mathtt{u}' \iff \exists \sigma \in \mathcal{S}(n),\ \forall 1 \leq i \leq n,\ \ \mathtt{u}_i = \mathtt{u}'_{\sigma(i)}$.

Si $\mathtt{u}$ est une configuration récurrente en forme normale, on note d le vecteur défini par :

$$\mathtt{u} = (\underbrace{n-1,\ldots,n-1}_{d_1},\underbrace{n-2,\ldots,n-2}_{d_2},n-3,\ldots,n-k+1,\underbrace{n-k,\ldots,n-k}_{d_k}).$$

Ainsi, d_1 est le nombre de sommets contenant $n-1$ grains, d_2 est celui des sommets contenant $n-2$ grains, *etc.* Le nombre k est tel qu'il existe au moins un sommet qui contient $n-k$ grains mais aucun n'en contenant strictement moins. Par définition de la forme normale, il y a exactement $m(d)$ configurations récurrentes de K_{n+1} qui admettent $\mathtt{u}$ comme forme normale, si $m(d)$ est le multinomial du vecteur d. Si on note $|d| = d_1 + \cdots + d_k = n$ la taille de d, on a :

$$m(d) := \left(\begin{array}{c} |d| \\ d_1 \ldots d_k \end{array} \right) = \frac{|d|!}{d_1! \ldots d_k!}.$$

Exemple 3.6
Le tableau suivant montre les 5 configurations récurrentes $\mathtt{u}$ en forme normale de K_4, les vecteurs d correspondants, les multinomiaux $m(d)$, les 5 fonctions de parking p conjuguées, et enfin les configurations récurrentes $\mathtt{u}'$ dont la forme normale est $\mathtt{u}$:

$\mathtt{u}$	d	$m(d)$	p	$\mathtt{u}'$
$(2,2,2)$	(3)	1	$(0,0,0)$	$(2,2,2)$
$(2,2,1)$	$(2,1)$	3	$(0,0,1)$	$(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)$
$(2,2,0)$	$(2,0,1)$	3	$(0,0,2)$	$(2,2,0),(2,0,2),(0,2,2)$
$(2,1,1)$	$(1,2)$	3	$(0,1,1)$	$(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)$
$(2,1,0)$	$(1,1,1)$	6	$(0,1,2)$	$(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0)$ $(1,0,2),(0,2,1),(0,1,2)$

◇

$-$ *o* $-$

Résolution analytique

Pour une famille $\mathcal{F}$ de graphes, telle que $|\{g \in \mathcal{F}, |g| = n\}| = 1$, c'est-à-dire qui admet un et un seul graphe de taille n pour tout entier n, on définit naturellement la série des avalanches par :

$$S(z,u) := \sum_{g \in \mathcal{F}} z^{|g|} Av_g(u).$$

Trouver les coefficients de cette série est un problème équivalent à celui qui consiste à trouver les polynômes d'avalanches de tous les graphes de la famille $\mathcal{F}$. On suppose ici que les graphes de la famille donnent les mêmes polynômes d'avalanches quel que soit le choix de leur puits. On a déjà vu que c'est le cas de la famille des cycles, mais c'est aussi celui de la famille des graphes complets.

Ainsi, si on note $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des configurations récurrentes de K_{n+1} en forme normale, le problème se réduit au calcul de la série $f(z,u)$ définie par :

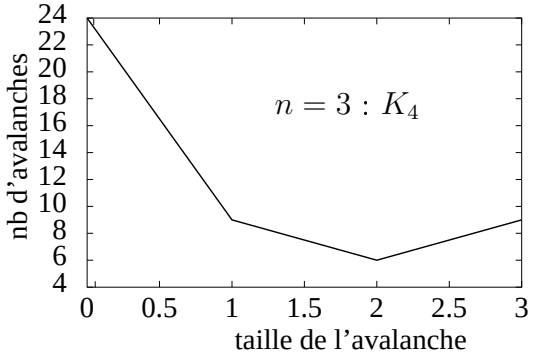
$$f(z,u) := \sum_{n\geq 0} \sum_{\mathtt{u}\in\mathcal{N}_n} \sum_{i=1}^{n} z^n u^{ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u},i)} \binom{n}{d_1 \dots d_k}.$$

Sur K_{n+1}, la longueur l d'une avalanche principale est comprise entre 0 et n. Si $\mathtt{u}$ est une configuration récurrente et x_i un sommet régulier, il y a deux cas possibles. Si x_i est un sommet non saturé dans $\mathtt{u}$, alors $ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u}, x_i) = 0$; sinon, $ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u}, x_i) = l > 0$. Mais par symétrie des sommets de K_{n+1}, si x_j est un autre sommet saturé de $\mathtt{u}$ alors $ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u}, x_j)$ est aussi égal à l. Autrement dit, pour une configuration récurrente donnée, on peut associer un entier l compris entre 1 et n, tel que la longueur d'une avalanche principale quelconque est soit 0, soit l.

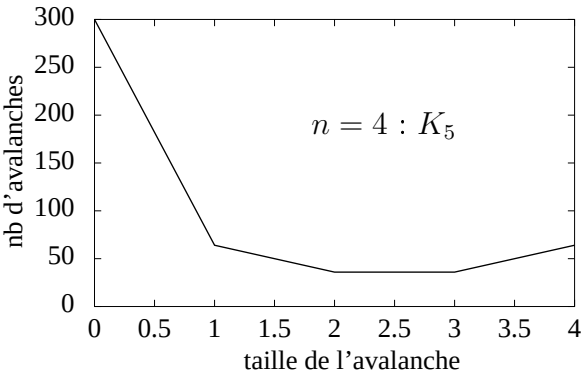
Exemple 3.7
Les tables suivantes traitent les cas $n = 3$ et $n = 4$. La première colonne est le multinomial $m(d)$ de la configuration en forme normale $\mathtt{u}$ indiquée sur la deuxième colonne. Ensuite, sont indiquées le nombre d'avalanches principales de taille $0 \leq l \leq n$ pour toute configuration récurrente $\mathtt{u}'$ de forme normale $\mathtt{u}$. C'est précisément ce même nombre, mais pour $\mathtt{u}$ seulement, multiplié par $m(d)$.

Sur une même ligne, par les remarques précédentes, on n'a que deux valeurs d'avalanches possibles : 0 et un entier l compris entre 1 et n.

$m(d)$	u	0	1	2	3
6	(2,1,0)	12	6		
3	(2,1,1)	6	3		
3	(2,2,0)	3		6	
3	(2,2,1)	3			6
1	(2,2,2)				3
	total	24	9	6	9



$m(d)$	u	0	1	2	3	4
24	(3,2,1,0)	72	24			
12	(3,2,1,1)	36	12			
12	(3,2,2,0)	36	12			
12	(3,2,2,1)	36	12			
4	(3,2,2,2)	12	4			
12	(3,3,1,0)	24		24		
6	(3,3,1,1)	12		12		
12	(3,3,2,1)	24				24
6	(3,3,2,2)	12				12
12	(3,3,2,0)	24			24	
4	(3,3,3,0)	24			12	
4	(3,3,3,1)	4				12
4	(3,3,3,2)	4				12
1	(3,3,3,3)					4
	total	300	64	36	36	64



◇

– o –

Bijection entre les configurations récurrentes en forme normale et les mots de Dyck Comme les fonctions de parking en forme normale sont en bijection avec les *mots de Dyck*, on peut associer de manière unique et réciproque un *chemin de Dyck* à toute configuration récurrente en forme normale (cf. Figure 3.11 page suivante).

Un *mot de Dyck* w est un mot de $\{a, b\}^*$, c'est-à-dire un mot sur l'*alphabet* $\{a, b\}$, qui vérifie :

$$\forall 1 \leq k < |w|,\ |w_1 \dots w_k|_b \leq |w_1 \dots w_k|_a, \tag{3.1.9}$$

$$\text{et} \quad |w|_b = |w|_a, \tag{3.1.10}$$

où $|w|$ (resp. $|w|_a$, resp. $|w|_b$) est le nombre de lettres (resp. de a, resp. de b) du mot w. On dit aussi qu'un mot de Dyck est un *mot bien parenthésé*, car si on remplace la lettre a par une parenthèse ouvrante et la lettre b par une parenthèse fermante, le mot de Dyck est une expression où les parenthèses sont utilisées suivant les conventions usuelles, c'est-à-dire régies par la grammaire $S \to (S)S|\epsilon$. Un *chemin de Dyck* est une représentation d'un mot de Dyck dans $\mathbb{Z}^2$, où la lettre a est représentée par un *pas montant*, c'est-à-dire un pas nord-est $\nearrow$, et où la lettre b est représentée par un pas sud-est $\searrow$, dit *pas descendant* (cf. Figure 3.10 page suivante). Si on commence à tracer un chemin de Dyck à partir de l'origine $(0, 0)$, la Condition (3.1.9) signifie que le chemin ne passe jamais sous l'axe des abscisses, et la Condition (3.1.10) implique que le chemin se termine sur cet axe. En particulier, on peut donc tracer un chemin de Dyck sur $\mathbb{N}^2$.

La longueur d'un chemin de Dyck est le nombre de lettres du mot correspondant. En particulier, ce nombre est pair.

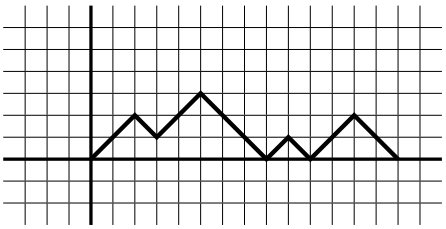


FIG. 3.10 – Chemin de Dyck du mot *aabaabbbabaabb*.

Contrairement à la notation utilisée plus haut, on va dire que la taille $|w|$ du chemin ou du mot de Dyck w est sa demi-longueur, c'est-à-dire son nombre de pas montants ou de lettres a. La *longueur* du chemin ou du mot w est alors $2|w|$.

Il existe plusieurs bijections entre les fonctions de parking triées et les chemins de Dyck. On en déduit une autre entre les configurations récurrentes de K_{n+1} en forme normale et les chemins de Dyck de longueur $2n$, comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 3.8
La Figure 3.11 montre la bijection entre les configurations récurrentes en forme normale et les chemins de Dyck.

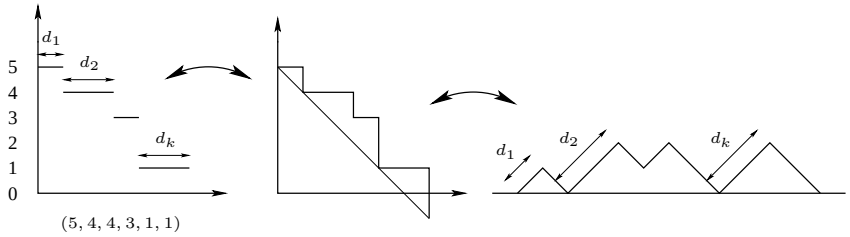


FIG. 3.11 – Configuration $(5, 4, 4, 3, 1, 1)$ et chemin de Dyck *abaababbaabb* associé.

◇

On appelle *plage* de pas montants d'un chemin de Dyck w, une plus grande sous-séquence de pas montants consécutifs de w. Alors, sur le chemin de Dyck w correspondant à une configuration normale u, le vecteur d associé à u est le vecteur des plages de pas montants de w (cf. Figure 3.11).

$$w = \underbrace{a\dots a}_{d_1} b \dots b \underbrace{a\dots a}_{d_2} b \dots \ \dots b \underbrace{a\dots a}_{d_k} b \dots b = a^{d_1} b \dots b a^{d_2} b \dots \ \dots b a^{d_k} b \dots b.$$

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, pour une configuration récurrente donnée u (en forme normale), les avalanches principales ont une taille qui vaut soit 0, soit un entier l fixé entre 1 et n. En particulier, u admet d_1 avalanches principales de taille l et $n - d_1$ de taille 0. On a vu que d_1 est la longueur de la première plage de pas montants du chemin de Dyck associé à u. En fait, la valeur l, c'est-à-dire la longueur des avalanches principales de taille non nulle de u, a aussi une interprétation très simple sur le chemin de Dyck associé à u.

Proposition 3.4 *Soit* u *une configuration récurrente de* K_{n+1} *en forme normale, et* x_i *un sommet* saturé *de* u. *Alors la longueur* l *de l'avalanche principale en* x_i *sur* u *est égale à la taille du premier retour à* 0 *sur le mot de Dyck associé à* u.

Démonstration : Après l'ajout d'un grain sur x_i, x_i est instable. Son éboulement donne un grain à chacun des autres sommets. En particulier, tous les sommets qui contenaient $n-1$ auparavant, sont maintenant instables. Ils sont au nombre de $d_1 - 1$, et on peut les ébouler légalement. Après ces d_1 premiers éboulements, soit la configuration est stable, soit il y a au moins d_2 sommets instables. Si la configuration est stable, il y a d_2 sommets avec $n-1$ grains. Cela signifie qu'ils avaient $n-1-d_1$ grains dans la configuration originelle. À l'inverse, si la configuration est instable, cela veut dire qu'il y a d_2 sommets qui avaient strictement plus de $n-1-d_1$ grains dans la configuration originelle. On peut alors ébouler ces sommets : ils donnent d_2 grains à chaque sommet. Après ces $d_1 + d_2$ premiers éboulements, soit la configuration est stable, soit on peut trouver d_3 sommets instables. Si la configuration est stable, alors il y avait d_3 sommets qui avaient strictement plus de $n-1-d_1-d_2$ grains dans la configuration originelle, sinon ils contiennent strictement plus de $n-1-d_1-d_2$ grains. Pour reśumer, on peut réaliser les éboulements par groupes de sommets ayant le même nombre de grains. Si on note h_i le nombre de grain dans la configuration orginelle du groupe de sommets correspondant à d_i, alors l'avalanche s'arrête pour le plus petit indice i tel que $h_i = n-1-d_1-d_2-\cdots-d_{i-1}$, *i.e.* $h_1 - h_i = d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1}$. En terme de chemin de Dyck, $h_1 - h_i$ est le nombre

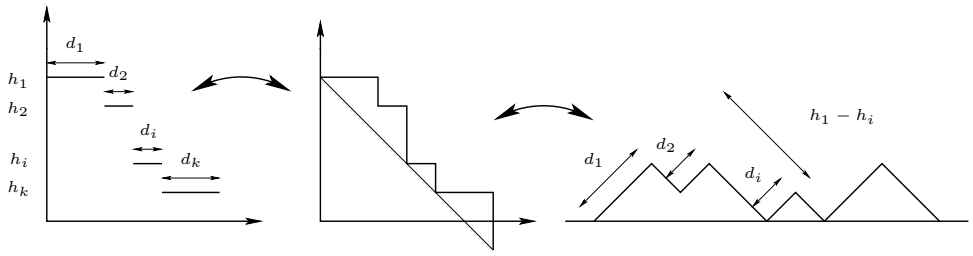


FIG. 3.12 – Longueur de l'avalanche principale en un sommet saturé.

de pas descendants avant la plage de pas montants d_i. Ainsi, la condition d'arrêt pour l'avalanche correspond à toucher l'axe des abscisses en terme de chemin de Dyck. La longueur de l'avalanche est donc le nombre de sommets qui se sont éboulés, c'est-à-dire $d_1 + \ldots + d_{i-1}$. En terme de chemin de Dyck, il s'agit de la demi-longueur (la taille) du premier retour à 0 du chemin. □

Le tableau suivant récapitule les correspondances entre les mots de Dyck et les configurations normales associées ; c'est en quelque sorte le dictionnaire qui permet de traduire les caractéristiques d'un objet à l'autre :

	chemin de Dyck w	configuration $\mathtt{u}$
n	taille du chemin	nombre de sommets réguliers
l	taille du premier retour sur l'axe des abscisses	longueur des avalanches strictement positives
d_i	taille de la $i^{\text{ème}}$ plage de pas montants	nombre de sommets avec $n-i$ grains

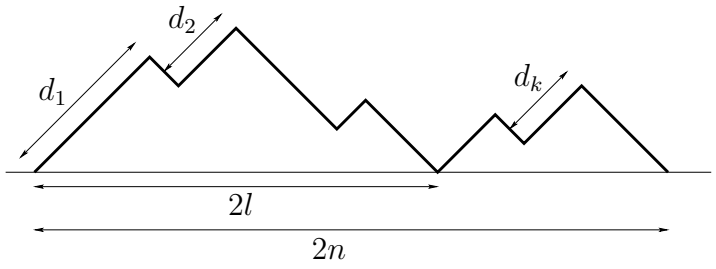


FIG. 3.13 – Valeurs de n, l et d_i.

Dans la suite, on note $\mathcal{C}_D$ l'ensemble des mots ou chemins de Dyck. Pour tout $w \in \mathcal{C}_D$, les paramètres n, l et d_i représentent les valeurs définies par la Figure 3.13. Alors la fonction génératrice bivariée de la série des avalanches peut être vue comme une fonction génératrice bivariée $f(z,u)$ sur des chemins de Dyck w ayant poids $m(d)$:

$$f(z,u) := \sum_{\mathtt{u}\in\mathcal{R}} \sum_{i=1}^{n} z^{|\mathtt{u}|} u^{ad_K(\mathtt{u},x_i)} = \sum_{w\in\mathcal{C}_D} z^{|d|} u^l d_1 \binom{|d|}{d_1 \dots d_k} + \sum_{n\geq 1} C_n z^n.$$

Les entiers C_n correspondent aux avalanches principales de taille nulle, c'est-à-dire au nombre total de sommets réguliers non saturés sur l'ensemble des configurations récurrentes de K_{n+1}.

$$-\ o\ -$$

Résolution finale On définit le poids π d'un chemin de Dyck de la manière suivante :

$$\forall w \in \mathcal{C}_D\ ,\ \pi(w) := d_1 \binom{n}{d_1 \dots d_k}.$$

Par la proposition précédente, on veut en fait compter les chemins de Dyck de poids π suivant n et l. En notation exponentielle, cela donne :

$$\hat{f}(z,u) = \sum_{w\in\mathcal{C}_D} \pi(w) \frac{z^n}{n!} u^l + \sum_{n\geq 1} \frac{C_n}{n!} z^n.$$

On note $\hat{\psi}(z)$ la fonction génératrice exponentielle des chemins de Dyck de poids $m(d)$ comptés suivant leur taille n. Alors :

$$\hat{\psi}(z) = \sum_{w\in\mathcal{C}_D} \frac{z^n}{n!} \binom{n}{d_1 \dots d_k} = \sum_{w\in\mathcal{C}_D} \frac{z^n}{d_1! \dots d_k!}.$$

Par définition, $n![z^n]\hat{\psi}(z)$ est le nombre de configurations récurrentes de K_{n+1}, *i.e.* le nombre de fonctions de parking de $[\![1, n]\!]$. Ainsi, $n![z^n]\hat{\psi}(z) = (n+1)^{n-1}$.

Remarque 3.2
Une méthode alternative au passage par fonctions de parking pour trouver la valeur du terme général de la série $\hat{\psi}(z)$ est de considérer la décomposition classique de la Figure 3.14 ; par la méthode symbolique, on obtient l'équation suivante :

$$\hat{\psi}(z) = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(z\hat{\psi}(z))^{k-1}}{k!} z\hat{\psi}(z) = exp(z\hat{\psi}(z)). \tag{3.1.11}$$

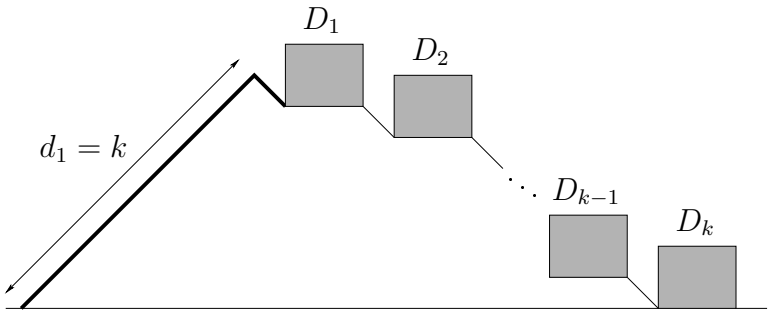


FIG. 3.14 – Décomposition générale d'un chemin de Dyck non vide.

L'Équation (3.1.11) est l'équation fonctionnelle obtenue quand on cherche à compter par nombre d'arêtes les arbres de Cayley enracinés (cf. Figure 3.15). Comme attendu, il y a autant de configuration récurrentes (fonctions de parking) que d'arbres de Cayley enracinés (cf. Exemple 7.41 page 253), et :

$$\forall n \geq 0,\ [z^n]\hat{\psi}(z) = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}.$$

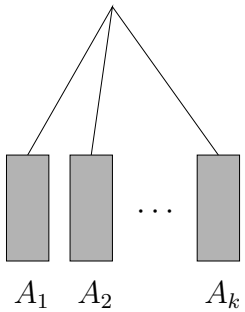


FIG. 3.15 – Décomposition générale d'un arbre de Cayley enraciné.

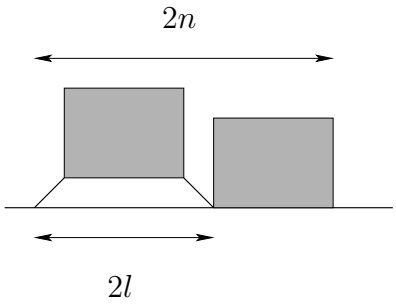


FIG. 3.16 – Décomposition générale d'un chemin de Dyck.

Eu égard à la Figure 3.13 page 110, on est amené à considérer la décomposition naturelle des chemins de Dyck montrée sur la Figure 3.16.

En effet, tout chemin de Dyck non vide se décompose de manière unique comme un premier chemin de Dyck *primitif* suivi d'un chemin de Dyck. On dit qu'un chemin de Dyck est *primitif* s'il ne touche l'axe des abscisses qu'à ses extrémités. Par convention, un chemin de Dyck primitif ne peut pas être vide. Ainsi, il est caractérisé par le fait que si on lui enlève son premier et son dernier pas, on obtient un chemin de Dyck.
On note $\mathcal{C}_P$ l'ensemble des chemins de Dyck primitifs. Par définition, $\mathcal{C}_P \subset \mathcal{C}_D$.
On appelle $\hat{\phi}(z)$ la série génératrice exponentielle des chemins de Dyck primitifs ayant poids π. Comme $\mathcal{C}_P \subset \mathcal{C}_D$, π est bien définie sur $\mathcal{C}_P$, et :

$$\forall w \in \mathcal{C}_P \ , \ \pi(w) = d_1 \left(\begin{array}{c} n \\ d_1 \dots d_k \end{array} \right).$$

La série $\hat{\phi}(z)$ peut alors s'écrire :

$$\hat{\phi}(z) = \sum_{w \in \mathcal{C}_P} d_1 \frac{z^n}{n!} \left(\begin{array}{c} n \\ d_1 \dots d_k \end{array} \right) = \sum_{w \in \mathcal{C}_P} \frac{z^n}{(n-1)!} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ d_1 - 1 \, d_2 \dots d_k \end{array} \right).$$

Ainsi :

$$\hat{\phi}(z) = z \sum_{w \in \mathcal{C}_D} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ d_1 - 1 \, d_2 \dots d_k \end{array} \right) = z\hat{\psi}(z).$$

En effet, on peut associer à n'importe quel chemin de Dyck de taille n admettant la séquence $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ comme longueur des plages de pas montants, un unique chemin de Dyck de taille $n-1$ admettant $(d_1 - 1, d_2, \dots, d_k)$ comme séquence de suites maximales de pas montants. C'est le chemin de Dyck obtenu en supprimant le premier pas (montant) et le dernier pas (descendant) du chemin primitif.

D'après la Figure 3.16, on peut dire qu'un chemin de Dyck de poids π et de taille n peut être vu comme un chemin de Dyck primitif de poids π et de taille l, suivi d'un chemin de Dyck de poids $m(d)$ et de taille $n - l$. Par la remarque précédente, le chemin primitif de poids π et taille l, peut lui-même être vu comme un chemin de Dyck de poids $m(d)$ et de taille $l - 1$ précédé d'un pas montant et suivi d'un pas descendant.

De cette caractérisation, on tire l'équation fonctionnelle suivante :

$$\hat{f}(z, u) = zu\hat{\psi}(zu)\hat{\psi}(z). \tag{3.1.12}$$

Au final, pour $n, m \geq 0$, on peut donc écrire :

$$[z^{n+m+1}u^{m+1}]\hat{f}(z,u) = \frac{(n+1)^{n-1}(m+1)^{m-1}}{n!m!}.$$

Donc, pour $n \geq m \geq 1$, on a :

$$[z^n u^m]\hat{f}(z,u) = \frac{(n-m+1)^{n-m-1}m^{m-1}}{(n-m)!m!}.$$

Le nombre d'avalanches principales de taille $m > 0$ de K_{n+1} est :

$$n![z^n u^m]\hat{f}(z,u) = \binom{n}{m}(n-m+1)^{n-m-1}m^{m-1}. \tag{3.1.13}$$

On note $X_{n,m}$ cette valeur. Si on écrit $X_{n,m}$ sous la forme :

$$X_{n,m} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{m}(n-m+1)^{n-m}m^{m-1}, \tag{3.1.14}$$

on remarque immédiatement que $X_{n,n+1-m} = X_{n,m}$.

$$-\ o\ -$$

Nombre d'avalanches de taille 0 Le nombre C_n d'avalanches principales de taille 0 de K_{n+1} est alors :

$$C_n = n(n+1)^{n-1} - \sum_{m=1}^{n} X_{n,m} = n(n+1)^{n-1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k+l=n+1}\binom{k+l}{k}k^{k-1}l^{l-1}. \tag{3.1.15}$$

On note X_n, la somme $\sum_{m=1}^{n} X_{n,m}$. On peut trouver une autre relation entre C_n et X_n en utilisant une méthode plus directe. On note $\hat{g}(z,v)$ la série génératrice exponentielle des chemins de Dyck de poids $m(d)$. Le paramètre z compte la taille du chemin, et le paramètre v compte la hauteur d_1 du premier pic.

$$\hat{g}(z,v) = \sum_{w\in\mathcal{C}_D}\frac{z^n v^{d_1}}{n!}\binom{n}{d_1\ldots d_k}.$$

Pour calculer $\hat{g}(z,v)$, on suit la décomposition de la Figure 3.14 page 111. On a alors l'équation :

$$\hat{g}(z,v) = 1 + \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v^k}{k!}\left(\hat{g}(z,1)z\right)^{k-1}\right]\hat{g}(z,1)z.$$

On peut donc écrire :

$$\hat{g}(z,v) = exp\left(\hat{g}(z,1)zv\right).$$

On vérifie que si on spécifie $v = 1$, on retrouve bien l'équation de Cayley :

$$\hat{g}(z,1) = exp\left(\hat{g}(z,1)z\right),$$

qui permet de compter les arbres de Cayley enracinés par nombre d'arêtes (cf. Figure 3.15 page 111). Par conséquent $\hat{g}(z,1) = \hat{\psi}(z)$.
En fait, une configuration normale admet $n - d_1$ avalanches principales de taille 0. Par conséquent, on est intéressé par $\hat{h}(z) = \sum_{w \in \mathcal{C}_D} \frac{z^n}{n!}(n-d_1) \begin{pmatrix} n \\ d_1 \dots d_k \end{pmatrix}$. Cela signifie que $\hat{h}(z) = z\frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{g}(z, z^{-1}v)\right](z,z)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{g}(z,z^{-1}v)\right](z,v) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{g}(z,1)\right)\ v\ exp\left(\hat{g}(z,1)v\right) \\ &= \psi'(z)\ v\ exp(\hat{\psi}(z)v). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\hat{h}(z) = z^2\psi'(z)\hat{\psi}(z).$$

Au final, pour $n, m \geq 0$, on peut écrire :

$$[z^{m+n+2}]\hat{h}(z) = \frac{(m+2)^m}{m!}\frac{(n+1)^{n-1}}{n!},$$

et donc pour $n \geq 2$:

$$[z^n]\hat{h}(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m+1)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}\frac{m^{m-2}}{(m-1)!}.$$

On obtient donc une autre formule pour C_n :

$$C_n = n![z^n]\hat{h}(z) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m}(n-m)(n-m+1)^{n-m-1}m^{m-1},$$

qui peut se récrire :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k+l=n+1} \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k-1)!l!}(k-1)k^{k-2}l^{l-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k+l=n+1} \frac{(n+1)!}{k!l!}(k-1)k^{k-1}l^{l-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\sum_{k+l=n+1} \binom{k+l}{k}(k-1+l-1)k^{k-1}l^{l-1} \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)X_n. \end{aligned}$$

Par l'Équation (3.1.15), on a :

$$\begin{aligned} C_n &= n(n+1)^{n-1} - X_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)X_n \\ &= n(n+1)^{n-1} - 2n(n+1)^{n-2} \\ &= (n-1)n(n+1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Au final, le nombre d'avalanches principales de taille 0 sur K_{n+1} est donné par la simple formule $C_n = (n-1)n(n+1)^{n-2}$ pour $n \geq 2$. En outre $C_1 = 0$, car K_2 est l'arbre à deux sommets.

Sur K_{n+1}, si on note $D_n(l)$ la proportion d'avalanches principales de taille l, on a $D_n(l) = n![z^n u^l]\hat{f}(z,u)/n(n+1)^{n-1}$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2, \quad D_n(l) = \begin{cases} \frac{n-1}{n+1} & \text{si} \quad l = 0, \\ \frac{1}{n(n+1)^n}\binom{n+1}{l}(n+1-l)^{n-l}l^{l-1} & \text{si} \quad 1 \leq l \leq n, \\ 0 & \text{si} \quad l > n. \end{cases}$$

Exemple 3.9
La Figure 3.17 montre les résultats expérimentaux (croix) sur 10^6 étapes du jeu comparés à la prédiction théorique (carrés).

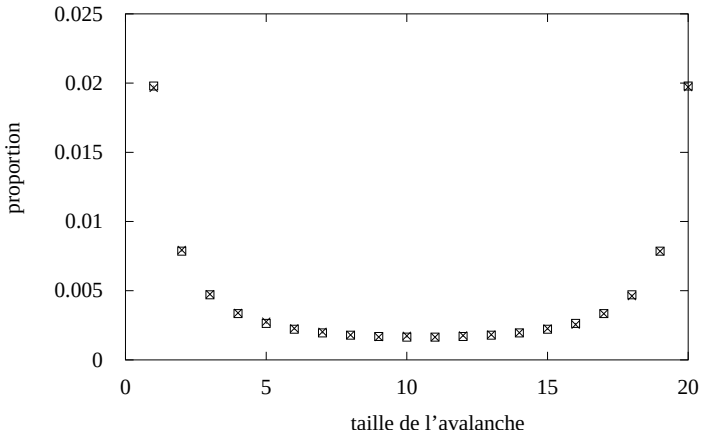


FIG. 3.17 – Distribution des avalanches de K_{21} $(n = 20)$.

Sur la Figure 3.18, la prédiction théorique est en pointillée.

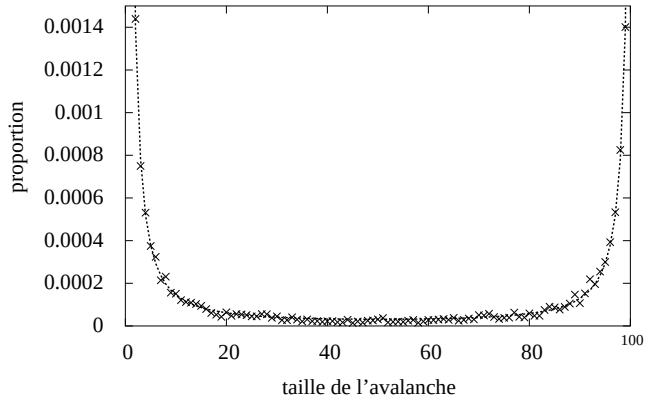


FIG. 3.18 – Distribution des avalanches de K_{101} $(n = 100)$.

◇

$-\ o\ -$

Résolution bijective

La méthode analytique précédente nous a permis de trouver le résultat voulu, à savoir les coefficients de la série $\hat{f}(z,u)$. La méthode suivante est purement bijective : elle est beaucoup plus rapide et simple (une fois trouvée), et permet de mieux comprendre le problème original.

On peut commencer par chercher le nombre d'avalanches principales de taille 0 sur K_{n+1} ; ce nombre est égal au nombre d'éléments non nuls de la fonction de n-parking conjuguée à la configuration. Pour calculer ce nombre, on a besoin du lemme suivant (cf. [31]) :

Lemme 3.5 *Le nombre de fonctions de parking contenant k 0 est :*

$$\binom{n-1}{n-k} n^{n-k} \quad = \quad \frac{k}{n}\binom{n}{k} n^{n-k}.$$

Démonstration :

Considèrons l'ensemble U_n de toutes les séquences u de n entiers qui contiennent k 0 et $n-k$ nombres $1 \leq u_i \leq n$. Il y en a $\binom{n}{k} n^{n-k}$. Toute fontion de n-parking est dans cet ensemble U_n, mais la réciproque est fausse. Pour savoir si $u \in U_n$ est une fonction de parking, on applique l'agorithme suivant, largement inspiré de celui qui nous permet de compter le nombre total de fonctions de n-parking :

On considère un parking circulaire à n places numérotées $1, 2, \ldots, n$. Pour chaque i tel que $u_i > 0$, on place une voiture à la première place libre après la place numérotée u_i.

Alors la séquence u est une fonction de parking si et seulement si la place n est libre à la fin de l'algorithme.

Mais après l'exécution de l'algorithme, il y a k places libres. Par symétrie, chacune des places libre a la même probabilité d'être libre ; donc la probabilité que la place n soit libre est donnée par $\frac{k}{n}$, ce qui implique le résultat. □

Exemple 3.10
Par exemple, si on applique l'algorithme à la séquence $2, 5, 0, 5, 5, 0, 0$, on place des voitures aux places $2, 5, 6, 7$, et les places $1, 3, 4$ sont libres ; la séquence n'est donc pas une fonction de 7-parking. ◇

Par le lemme ci-dessus on a :

Proposition 3.6 *Le nombre d'avalanches principales de taille 0 sur K_{n+1} est*

$$n(n-1)(n+1)^{n-2}.$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que le nombre de couples $(\mathtt{u}, x_i)$ tel que $\mathtt{u}$ est une fonction de n-parking avec $\mathtt{u}_i = 0$ est égal à $2n(n+1)^{n-2}$; le résultat est alors obtenu en soustrayant cette valeur du nombre total de couples $(\mathtt{u}, x_i)$ qui est $n(n+1)^{n-1}$.

Par le lemme précédent, le nombre de couples qui nous intéressent est :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{n-k} n^{n-k}.$$

On note $f_n(x) = x(n+x)^{n-1}$, alors :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k n^{n-k} \binom{n-1}{n-k},$$

et ainsi :

$$T_n = f_n'(1) = (n+1)^{n-1} + (n-1)(n+1)^{n-2},$$

ce qui donne le résultat. □

Pour énumérer le nombre d'avalanches principales de tailles strictement positives on montre la proposition suivante :

Proposition 3.7 *Le nombre d'avalanches principales de taille $m > 0$ sur K_{n+1} est :*

$$\binom{n}{m} m^{m-1}(n-m+1)^{n-m-1} = n\binom{n-1}{m-1} m^{m-2}(n-m+1)^{n-m-1}.$$

Démonstration :

Soit $(\mathtt{u}, x_i)$ un couple où $\mathtt{u}$ est une configuration récurrente, et x_i un sommet saturé. L'avalanche principale sur $\mathtt{u}$ en x_i a donc une taille $m > 0$. On associe alors au couple $(\mathtt{u}, x_i)$, un ensemble J et deux configurations récurrentes :

- l'ensemble J est constitué de $m-1$ sommets parmi les $n-1$ sommets réguliers de K_{n+1} différents de x_i : ce sont les sommets qui s'éboulent lors de l'avalanche principale en x_i,
- une première configuration récurrente sur K_m : on considère les valeurs $\mathtt{u}_j$ pour $x_j \in J$ et on leur soustraie $m-2$; il s'agit d'une configuration récurrente car elle vérifie le critère de Dhar,
- une seconde configuration récurrentes sur K_{n-m+1} : les valeurs $\mathtt{u}_k$ pour $x_k \notin J \cup \{x_i\}$ déterminent aussi une configuration récurrente sur ce graphe.

Réciproquement, étant donnés un ensemble J, un sommet x_i, une configuration récurrente sur K_m et une sur K_{n-m+1}, on peut construire une configuration récurrente de K_{n+1} qui admet une avalanche de taille $m > 0$ en x_i. □

3.2 Cas plus complexes

On a vu lors de la section précédente que l'ensemble des polynômes d'avalanches d'arbres était la clôture de $\{z\}$ par deux opérations très simples : $+$ et Φ. En fait, l'opération $+$ se traduit de la même manière sur les polynômes d'avalanches quand on considère des graphes enracinés plus complexes que des arbres. En revanche l'opération Φ n'a pas la même expression sur le polynôme d'avalanches suivant le graphe que l'on considère.

L'intérêt de l'opération $+$ est donc limité, mais c'est son interaction avec l'opération Φ qui permet de faire des choses plus compliquées. Dans la suite, on étudie plus précisément comment agit l'opération Φ sur un graphe enraciné, comment elle modifie les coefficients de son polynôme d'avalanches, et ainsi comment elle agit sur la distribution des avalanches. On commence par considérer l'application de Φ sur les graphes complets.

3.2.1 Graphes sucettes

Si on applique m fois l'opération Φ au graphe complet K_{n+1}, on obtient le graphe enraciné de la Figure 3.19. On appelle ce graphe un *graphe sucette* et on le note $L_{m,n}$. On peut le voir comme un chemin $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ partant de la racine x_0 et aboutissant au graphe complet K_{n+1} dont les sommets sont $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$.

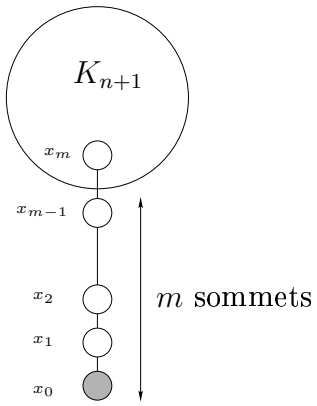


FIG. 3.19 – Graphe sucette $L_{m,n}$.

Une configuration récurrente de ce graphe a une expression très simple : c'est une configuration récurrente $(\mathtt{u}_{m+1}, \mathtt{u}_{m+2}, \ldots, \mathtt{u}_{m+n})$ du graphe complet K_{n+1}, où les autres sommets réguliers sont saturés : $\mathtt{u}_m = n, \mathtt{u}_{m-1} = 1, \ldots, \mathtt{u}_1 = 1$. C'est une application directe du Théorème 1.6 page 42.

Les tailles des avalanches principales sont données par :

Proposition 3.8 *Sur le graphe sucette, les tailles des avalanches principales d'une configuration récurrente* $\mathtt{u}$ *sont :*

- 0, *si le grain est ajouté sur un sommet non saturé de* $\mathtt{u}$,
- $i(m+n) - \frac{i(i-1)}{2}$, *si le grain est ajouté sur le sommet* x_i *pour* $i \leq m$,
- $[\frac{m(2n+m+1)}{2} + 1] ad_{K_{n+1}}(\mathtt{u}, x_i)$, *si le grain est ajouté sur un sommet saturé* x_i *de* $\mathtt{u}$ *avec* $m < i \leq m+n$.

Démonstration : Le premier point est clair.
Le second point se montre facilement par récurrence sur i.
Le troisième point est une conséquence immédiate du second point. □

Exemple 3.11
On peut calculer le polynôme d'avalanches du graphe sucette $L_{4,3}$ par exemple :

$$24 + 16x^7 + 16x^{13} + 16x^{18} + 16x^{22} + 9x^{23} + 6x^{46} + 9x^{69}.$$

◇

Exemple 3.12
Les expériences (croix) menées sur le graphe sucette $L_{10,20}$ pour 10^6 itérations sont comparées aux résultats théoriques (ligne pointillée) sur la Figure 3.20 :

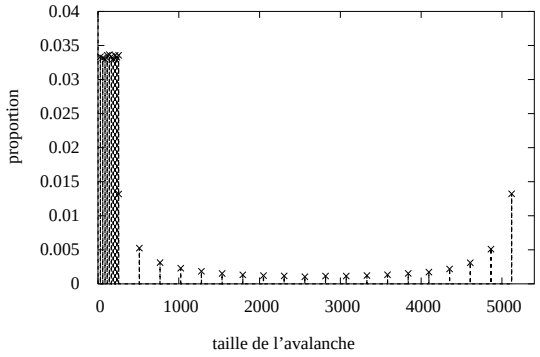


FIG. 3.20 – Distribution d'avalanches pour $L_{10,20}$.

◇

On définit l'*opérateur de troncature* $\mathtt{Tr}^k$ pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ par :

$$\mathtt{Tr}^k(P)(z) := \sum_{i=0}^{min(k,n)} a_i z^i.$$

Proposition 3.9 *Le polynôme d'avalanches du graphe sucette $L_{m,n}$ est :*

$$Av_{L_{m,n}}(x) = Av_{K_{n+1}}(x^{a+1}) + (n+1)^{n-1}\mathtt{Tr}^a(Av_{L_{m+n}})(x),$$

où $a = \frac{m(2n+m+1)}{2}$ et L_k est la ligne avec $k+1$ sommets.

Démonstration :
Le premier terme de la somme est évident par la proposition précédente. Le deuxième terme correspond aux avalanches principales sur $\mathtt{u}$ en x_i, où $i \leq m$, *i.e.* quand x_i est un sommet du chemin L_m. La taille de cette avalanche principale est la même que si les

sommets x_j pour $j > i$ avaient tous été alignés. En effet, ce qui compte quand un grain est ajouté en x_i est la taille du sous-graphe enraciné en x_i. Enfin, pour $i \leq m$, la taille de l'avalanche est au plus a. Ainsi, $\mathtt{Tr}^a(Av_{L_{m+n}})(x)$ donne les bons coefficients ; et comme il y a $(n+1)^{n-1}$ configurations récurrentes, on a le résultat. □

– o –

3.2.2 L'opération Φ appliquée à un graphe quelconque

En fait, le résultat précédent peut être généralisé de la manière suivante. On appelle *dissipation* d'une avalanche principale, le nombre d de particules que la racine (le puits $\mathtt{q}$) reçoit pendant l'avalanche. On associe alors un nouveau polynôme à un graphe enraciné $G_\mathtt{q}$: le polynôme $Q(z,u)$ à deux variables qui compte les avalanches principales de $G_\mathtt{q}$ suivant leur taille et leur dissipation :

$$(z,u)Q(z,u) := \sum \alpha_{l,d} z^l u^d,$$

où $\alpha_{l,d}$ est le nombre d'avalanches principales de taille l et de dissipation d. Pour le polynôme $Q(z,u)$, on garde en fait la même notation $Av_{G_\mathtt{q}}(z,u)$ que pour le polynôme d'avalanches, dans la mesure où ce dernier est en fait la valeur en $(z,1)$ de $Q(z,u)$.

Remarque 3.3
Si $T = G_\mathtt{q}$ est un arbre enraciné, $Av_T(z,u)$ a une expression très simple : $Av_T(z,u) = Av_T(z)u$. En effet, toute avalanche principale a une dissipation de 1.

Si G est tel que tout sommet est lié par une et une seule arête au puits, comme K_{n+1} par exemple, alors $Av_{G_\mathtt{q}}(z,u)$ a aussi une expression très simple : $Av_{G_\mathtt{q}}(z,u) = Av_{G_\mathtt{q}}(zu)$. Toute avalanche de taille l admet l comme dissipation, comme tout éboulement fournit exactement un grain au puits.

Si on note L_k la ligne à $k+1$ sommets avec son puits à une des extrémités (cf. Exemple 3.2 page 96), c'est-à-dire $L_k = \Phi^k(\{x\})$, on a :

Proposition 3.10 *Si $G_\mathtt{q}^m = \Phi^m(G_\mathtt{q})$, alors :*

$$Av_{G_\mathtt{q}^m}(z) = Av_{G_\mathtt{q}}(z, z^a) + \frac{Av_G(1)}{n}\mathtt{Tr}^a(Av_{L_{m+n}})(z),$$

où $a = \frac{m(2n+m+1)}{2}$ et $|G| = n+1$. En fait, on a même :

$$Av_{G_\mathtt{q}^m}(z,u) = Av_{G_\mathtt{q}}(z, z^a u) + \frac{Av_G(1)}{n}\mathtt{Tr}^a(Av_{L_{m+n}})(z)u.$$

Démonstration : Par récurrence sur m. □

Pour le graphe sucette, comme $L_{m,n} = \Phi^m(K_{n+1})$ et que $Av_{K_{n+1}}(z,u) = Av_{K_{n+1}}(zu)$, c'était très simple.

– o –

Le polynôme $Av_{G_\mathtt{q}}(z,u)$ est lui même la valeur en un point précis d'un polynôme encore plus général.

Si à chaque sommet régulier x_i du graphe on associe une variable z_i, on peut définir le polynôme $Av_{G_\mathtt{q}}(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ énumérant les éboulements des sommets réguliers lors des avalanches principales. Formellement, si $\alpha_i(\mathtt{u},x_j)$ est le nombre de fois que le sommet x_i s'éboule lors de l'avalanche principale en x_j de $\mathtt{u}$, alors :

$$Av_{G_\mathtt{q}}(z_1,z_2,\ldots,z_n) := \sum_{\mathtt{u}\in\mathcal{U}} \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i(\mathtt{u},x_j)}.$$

Clairement, $Av_{G_\mathtt{q}}(z,u)$ est la valeur du polynôme $Av_{G_\mathtt{q}}(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ en zu^β, c'est-à-dire en $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ quand $z_i = zu^{\beta_i}$, β étant l'*opérateur d'éboulement* du puits. En effet, pour un sommet régulier x_i, β_i représente le nombre d'arêtes entre x_i et le puits $\mathtt{q}$. Si x_i s'éboule m fois lors d'une avalanche, alors il donne $m\beta_i$ grains au puits lors de cette avalanche.

Exemple 3.13
On peut par exemple calculer ce polynôme pour la ligne L_k à $k+1$ sommets $\mathtt{q} = x_0,x_1,\ldots,x_k$. Comme il s'agit d'un arbre, on a une relation de récurrence très simple (cf. Relation (3.1.2)) sur les avalanches principales de l'unique configuration récurrente. Elle se généralise dans le cas où l'on veut compter pour chaque sommet le nombre de fois qu'il s'éboule lors de l'avalanche. On note $t^i = (t^i_1,t^i_2,\ldots,t^i_k)$ le vecteur d'éboulement des sommets réguliers de L_k lors de l'avalanche principale en x_i. Par le Théorème 1.6 page 42, on a bien sûr :

$$t^1 = (1,1,\ldots,1).$$

Et s'inspirant de la relation (3.1.2), on trouve la généralisation :

$$\forall 1 < i \leq k,\ t^i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,\ldots,1) + t^{i-1}.$$

D'où :

$$\forall 1 < i \leq k,\ t^i = (\underbrace{1,2,\ldots,i-1}_{i-1},i,i,\ldots,i),$$

c'est-à-dire que le monôme M^i associé à l'avalanche principale en x_i est :

$$\forall 1 < i \leq k,\ M^i = \prod_{j=1}^{i-1} z_j^j \prod_{j=i}^{k} z_j^i.$$

En spécialisant $z_i = z$ pour tout x_i, on retrouve bien l'exemple 3.2 page 96.

Si on regarde le cas $k=4$ (cf. Figure 3.21), on a :

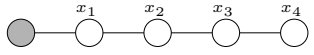


FIG. 3.21 – La ligne L_4 à 4 sommets réguliers.

$$\begin{aligned} M^1 &= z_1 z_2 z_3 z_4, \\ M^2 &= z_1 z_2^2 z_3^2 z_4^2, \\ M^2 &= z_1 z_2^2 z_3^3 z_4^3, \\ M^2 &= z_1 z_2^2 z_3^3 z_4^4. \end{aligned}$$

On retrouve le polynôme d'avalanches de L_4 en prenant la valeur en (z, z, z, z) : $Av_{L_4}(z) = z^4 + z^7 + z^9 + z^{10}$.

$\diamond$

Bien sûr, on peut calculer $Av_{G_q}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, sur tous les exemples que l'on a déjà étudiés (arbres, cycles, graphes complets, graphes sucettes).

3.3 Cas de la roue

Cette section est consacrée à l'étude de la distribution des avalanches sur le modèle de la roue. Elle est motivée par deux points. Le premier est de traiter exactement un cas de distribution d'avalanches (cas de la roue simple) et de montrer qu'en dépit du caractère assez simple du modèle sous-jacent, la résolution du problème est assez lourde. On a déjà vu que dans le cas du graphe complet, la découverte d'une solution bijective simplifiait énormément le problème. Dans le cas de la roue simple, ce type de solutions n'a pas encore été trouvé.

Le second point est lié à une observation expérimentale. En effet, lorsqu'on calcule empiriquement la distribution des avalanches sur la roue multiple, on peut observer plus ou moins nettement l'apparition de pics pour certaines valeurs des paramètres. Jusque là, ce n'est pas très surprenant, car on observe aussi des pics quand on effectue la même expérience sur des graphes aléatoires, même s'il y a des différences qualitatives. Le plus surprenant est surtout que la roue multiple est en fait une grille avec des conditions aux bords particulières. Or, la distribution des avalanches sur la grille classique (conditions aux bords ouvertes) ne produit pas du tout de pics, mais une loi en $1/l$ caractéristique de la *criticalité auto-organisée*.

— *o* —

3.3.1 Cas de la roue simple

Dans cette sous-section, nous considérons une roue simple à n sommets réguliers, notée $\mathcal{R}_n$. C'est en fait le cycle C_n auquel a été ajouté un sommet lié à tous les autres. On note x_0 ce sommet, et il est choisi comme puits $\mathtt{q}$ pour le modèle. Les autres sommets sont notés $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans l'ordre trigonométrique (cf. Figure 3.22).

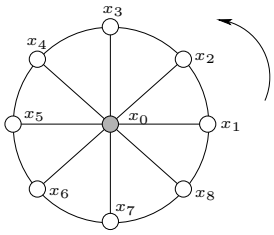


FIG. 3.22 – La roue simple $\mathcal{R}_8$ à 8 sommets réguliers.

Langage des configurations récurrentes

À chaque configuration $\mathtt{u}$ d'une roue simple, on associe le mot $w = \mathtt{u}_1\mathtt{u}_2\ldots\mathtt{u}_n$. Bien sûr, c'est une injection. En particulier, si $\mathtt{u}$ est une configuration positive stable, alors w est un mot sur l'alphabet $\{0,1,2\}$. En fait, $\{0,1,2\}^n$ est le *langage* des mots qui correspondent à des configurations positives stables. Comme les configurations récurrentes sont des configurations positives stables, si on désigne par $\mathcal{L}_n$ le langage des mots qui correspondent à des configurations récurrentes de $\mathcal{R}_n$, alors $\mathcal{L}_n \subset \{0,1,2\}^n$. On note

aussi $\mathcal{L} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{L}_n$ le langage de toutes les configurations récurrentes sur toutes les roues simples $\mathcal{R}_n$ pour $n \geq 1$.

Le Théorème 1.6 page 42 appliqué à ce cadre, permet de caractériser ce langage (cf.[12]). En effet, une configuration est récurrente si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- il existe au moins un sommet qui contient 2 grains,
- entre toute paire de sommets qui ne contiennent aucun grain, il existe au moins un sommet qui contient 2 grains.

Exemple 3.14
Si on considère la roue simple $\mathcal{R}_3$ à 3 sommets réguliers, les 16 configurations récurrentes sont :

$$\begin{array}{cccccc} & (2,2,1) & (2,2,0) & (2,1,1) & (2,1,0) & (2,0,1) \\ (2,2,2), & (2,1,2) , & (2,0,2) , & (1,2,1) , & (1,2,0) , & (0,2,1) . \\ & (1,2,2) & (0,2,2) & (1,1,2) & (1,0,2) & (0,1,2) \end{array}$$

L'exemple 3.16 page 126 indique le chemin associé à chaque configuration récurrente dans l'automate $\mathcal{A}$ de la Figure 3.23 qui reconnaît $\mathcal{L}$. ◇

En terme de mots, ces propriétés peuvent être testées par un automate (cf. Figure 3.23). Il s'agit donc de l'automate qui reconnaît le langage $\mathcal{L}$.

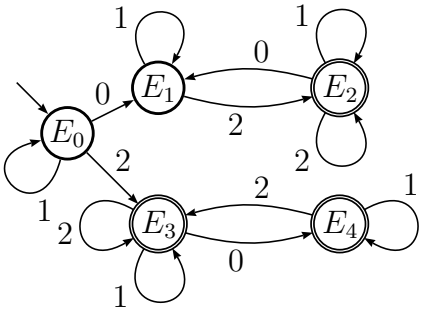


FIG. 3.23 – Automate $\mathcal{A}$ reconnaissant $\mathcal{L}$.

$-\ o\ -$

L'intérêt de la représentation par mot des configurations récurrentes, vient du fait que la longueur des avalanches principales se lit sur le mot représentant la configuration de manière très simple. De manière générale, l'avalanche principale en x_i d'une configuration $\mathtt{u}$ a une taille égale à la taille de la *plage de* 2, c'est-à-dire à la sous-séquence maximale de 2, à laquelle $w_i = \mathtt{u}_i$ appartient dans le mot w, si on considère w comme un mot circulaire. En particulier, si w_i est égal à 0 ou à 1, l'avalanche est de taille nulle. Il y a une petite exception qui correspond aux mots qui ne contiennent qu'un 1 et que des 2, c'est-à-dire aux mots de la forme $w = 2\ldots212\ldots2$: dans ce cas l'avalanche principale en un sommet qui contient 2 grains est de taille n et non $n-1$. Si on pose comme convention, qu'un 1 ou un 0 est une plage de 2 de taille nulle, on peut réduire notre problème à celui de l'énumération des plages de 2 dans les mots w du langage $\mathcal{L}$.

Dans la suite, on explique comment calculer le polynôme générateur des plages de 2 d'un mot quelconque w de $\mathcal{L}$. Dans ce calcul, on ne considère pas les mots w comme étant circulaires : il y a donc un effet de bord qui coupe certaines plages de 2 quand le mot w commence et se termine par un 2. Pour une configuration $\mathtt{u}$ (resp. un mot w) on note $P_{\mathtt{u}}(z,u)$ (resp. $P_w(z,u)$) le polynôme générateur de ses avalanches principales (resp. de ses plages de 2) : u compte les avalanches (resp. les plages de 2) et z la taille de la roue (resp. du mot). Pour les mots différents de $2\ldots2$ qui commencent et se terminent par un 2, on considère deux polynômes supplémentaires. Le polynôme $P^+_w(z,u)$ compte sur ces mots la taille de la plage de 2 issue de la fusion de la première et de la dernière plage de 2 du mot ; le polynôme $P^-_w(z,u)$ compte lui la taille de ces deux plages non fusionnées. Ainsi, le polynôme $P^2_w(z,u) = P_w(z,u) + P^+_w(z,u) - P^-_w(z,u)$ compte bien les plages de 2 du mot w vu comme un mot circulaire.

Exemple 3.15
Si w est le mot 2212012212202, alors $P_w(z,u)$ vaut $P_w(z,u) = z^{13}(3u^2+2u+5)$: en effet, w contient 3 plages de 2 de taille 2, 2 de taille 1 et 5 lettres 0 ou 1.

On est cependant dans le cas d'un mot différent de $2\ldots2$ mais qui commence et termine par un 2. En particulier, $P_w(z,u)$ ne compte pas les plages de 2 du mot circulaire w. Le polynôme $P^+_w(z,u)$ compte la taille de la plage de 2 issue de la fusion de la première et de la dernière plage de 2 de w. Dans notre cas, cela donne une plage de 2 de taille 3 : $P^+_w(z,u) = z^{13}(u^3)$. De son côté, $P^-_w(z,u)$ compte les tailles des première et dernière plages de 2 séparément : $P^-_w(z,u) = z^{13}(u^2+u)$.

Ainsi $P^2_w(z,u) = z^{13}(3u^2+2u+5+u^3-(u^2+u)) = z^{13}(u^3+2u^2+u+5)$ compte bien les plages de 2 du mot w vu comme un mot circulaire.

◇

Soit $\mathcal{P}(z,u)$ la série bivariée définie par :

$$\mathcal{P}(z,u) := \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} a_{n,k} z^n u^k,$$

où $a_{n,k}$ est le nombre de mots w de $\mathcal{L}_n$ qui contiennent une plage de 2 de taille k, comptés avec multiplicité ; c'est-à-dire que si w contient exactement m plages de 2 de taille k distinctes, il compte pour m dans le coefficients $a_{n,k}$. Ainsi,

$$\mathcal{P}(z,u) = \sum_{w\in\mathcal{L}} P^2_w(z,u).$$

Eu égards aux remarques faites plus haut, la série des avalanches $\mathcal{S}(z,u)$ que l'on cherche a donc pour expression :

$$\mathcal{S}(z,u) = \left(\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} k a_{n,k} z^n u^k\right) + \left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n,n-1}}{2}(n-1)z^n(u^n - u^{n-1})\right) + \left(\sum_{n\geq 1} a_{n,0} z^n\right),$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}(z,u) = u\,\frac{\partial \mathcal{P}(z,u)}{\partial u}(z,u) + \frac{(u-1)}{2}\left(\sum_{n\geq 1}\left([z^n u^{n-1}]\mathcal{P}(z,u)\right)(n-1)z^n u^{n-1}\right) + \mathcal{P}(z,0).$$

Le deuxième terme de la somme traite le cas de l'exception mentionnée plus haut. Les mots de la forme $2\dots212\dots2$ correspondent à la moitié des mots qui contiennent une plage de 2 de taille $n-1$, les autres étant de la forme $2\dots202\dots2$. Et seuls les mots de la forme $2\dots212\dots2$ correspondent à des configurations qui donnent $n-1$ avalanches principales de taille n, celles des configurations associées aux mots de la forme $2\dots202\dots2$ étant de taille $n-1$ (ou 0 pour celle concernant le sommet qui contient 0 grain).

Exemple 3.16
On reprend l'exemple 3.14 page 124, c'est-à-dire le cas de $\mathcal{R}_3$.

u	w	chemin dans $\mathcal{A}$	$P_{\mathtt{u}}(z,u)$	$P_w(z,u)$	$P_w^+(z,u)$	$P_w^-(z,u)$
$(2,2,2)$	222	$E_0E_3E_3E_3$	$3z^3u^3$	z^3u^3	0	0
$(2,2,1)$	221	$E_0E_3E_3E_3$	$3z^3u^3$	$z^3(u^2+1)$	0	0
$(2,1,2)$	212	$E_0E_3E_3E_3$	$3z^3u^3$	$z^3(2u+1)$	z^3u^2	$2z^3u$
$(1,2,2)$	122	$E_0E_0E_3E_3$	$3z^3u^3$	$z^3(u^2+1)$	0	0
$(2,2,0)$	220	$E_0E_3E_3E_4$	$z^3(2u^2+1)$	$z^3(u^2+1)$	0	0
$(2,0,2)$	202	$E_0E_3E_4E_3$	$z^3(2u^2+1)$	$z^3(2u+1)$	z^3u^2	$2z^3u$
$(0,2,2)$	022	$E_0E_1E_2E_2$	$z^3(2u^2+1)$	$z^3(u^2+1)$	0	0
$(2,1,1)$	211	$E_0E_3E_3E_3$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(1,2,1)$	121	$E_0E_0E_3E_3$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(1,1,2)$	112	$E_0E_0E_0E_3$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(2,1,0)$	210	$E_0E_3E_3E_4$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(1,2,0)$	120	$E_0E_0E_3E_4$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(1,0,2)$	102	$E_0E_0E_1E_2$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(2,0,1)$	201	$E_0E_3E_4E_4$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(0,2,1)$	021	$E_0E_1E_2E_2$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0
$(0,1,2)$	012	$E_0E_1E_1E_2$	$z^3(u+2)$	$z^3(u+2)$	0	0

On voit bien sur cet exemple, que $P_w^2(z,u)$ est un invariant du mot w considéré comme circulaire, alors que $P_w(z,u)$ ne l'est pas. Par exemple, les mots 220 et 202 correspondent au même mot circulaire, mais $P_{220}(z,u) \neq P_{202}(z,u)$ alors que $P^2_{220}(z,u) = P^2_{202}(z,u)$. De plus, $P_w^2(z,u)$ compte bien les plages de 2 du mot circulaire w.

Pour les mots qui ne sont pas de forme $2\dots212\dots2$, on a bien le lien suivant

$$P_{\mathtt{u}}(z,u) = u\frac{\partial P_w^2(z,u)}{\partial u}(z,u) + P_w^2(z,0),$$

et pour les configurations $(1,2,2),(2,1,2)$ et $(2,2,1)$:

$$P_{\mathtt{u}}(z,u) = u([z^3u^2]P_w^2(z,u)z^3u^2) + P_w^2(z,0).$$

$\diamond$

On s'intéresse donc maintenant au calcul de la série $\mathcal{P}(z,u)$, *i.e.* au calcul de $P_w^2(z,u)$ pour chaque mot w de $\mathcal{L}$.

$-\ o\ -$

Énumération des plages de 2 de $\mathcal{L}$

On commence par diviser le problème en deux. En effet, le langage $\mathcal{L}$ se décompose naturellement en union disjointe de deux langages, notés $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_2$, tels que :

$$\mathcal{L}_2 = \{w \in \mathcal{L}, w = 1 \dots 12 \dots\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0 = \{w \in \mathcal{L}, w = 1 \dots 10 \dots\}.$$

Cette décomposition découle elle-même du fait que l'automate reconnaissant $\mathcal{L}$ se décompose lui aussi en union de deux sous-automates (cf. Figure 3.23 page 124). Ainsi, le langage $\mathcal{L}_2$ est en fait reconnu par le sous-automate de gauche de la Figure 3.24 et $\mathcal{L}_0$ par celui de droite sur cette même figure. On peut donc compter séparément les tailles

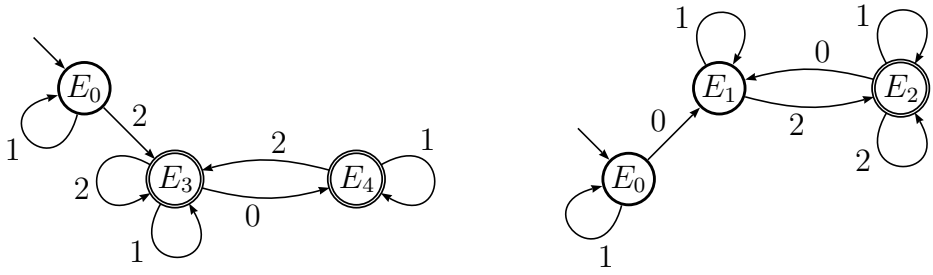


FIG. 3.24 – Automates reconnaissant $\mathcal{L}_2$ à gauche ($\mathcal{A}_2$) et $\mathcal{L}_0$ à droite ($\mathcal{A}_0$).

des plages de 2 d'un mot w de $\mathcal{L}_2$, et ensuite celle d'un mot de $\mathcal{L}_0$, pour les énumérer sur $\mathcal{L}$ tout entier.

$-\ o\ -$

Description de la méthode générale On traite le cas de $\mathcal{L}_2$ comme exemple de la méthode générale. Pour compter la taille des plages de 2 d'un mot w de $\mathcal{L}_2$, on va utiliser un *transducteur*. À partir de l'automate de la Figure 3.24 qui reconnaît $\mathcal{L}_2$, on construit un transducteur $\mathcal{T}^2$, tel que pour tout mot w de $\mathcal{L}_2$, la lecture de w dans $\mathcal{T}^2$ produit le polynôme générateur $P_w(z,u)$ des plages de 2 de w. En fait, on se restreint aux plages de 2 de tailles strictement positives, c'est-à-dire au polynôme $Q_w(z,u) = P_w(z,u) - P_w(z,0)$. C'est plus simple, et on peut en déduire après coup, le nombre de plages de 2 de taille nulle, c'est-à-dire le nombre de lettres différentes de 2 dans le mot w. En effet, ce nombre est alors $\frac{\partial Q_w(z,u)}{\partial z}(1,1)\frac{1}{Q_w(1,1)} - \frac{\partial Q_w(z,u)}{\partial u}(1,1)$, car $\frac{\partial P_w(z,u)}{\partial u}(1,1) + P_w(1,0) = |w|$.

Exemple 3.17
Si on reprend l'Exemple 3.16 page ci-contre et le mot $w = 220$ par exemple, on a $P_w(z,u) = z^3(u^2+1)$ et donc $Q_w(z,u) = z^3u^2$. On retrouve bien $P_w(1,0)$ en effectuant le calcul :

$$\frac{\partial Q_w(z,u)}{\partial z}(1,1)\frac{1}{Q_w(1,1)} - \frac{\partial Q_w(z,u)}{\partial u}(1,1) = \frac{(3z^2u^2)(1,1)}{(z^3u^2)(1,1)} - (2z^3u)(1,1) = 3 - 2 = 1.$$

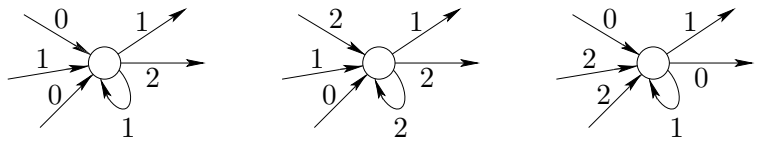
On peut aussi reprendre l'Exemple 3.15 page 125 : w est le mot 2212012212202, et par conséquent $P_w(z,u) = z^{13}(3u^2+2u+5)$. Ainsi, $Q_w(z,u) = z^{13}(3u^2+2u)$. On a bien $P_w(1,0) = 65/5 - 8 = 13 - 8 = 5$. ◇

— *o* —

On explique ici la construction qui permet de construire le transducteur voulu à partir de l'automate. Le principe est de dupliquer l'automate, et de placer les deux copies l'une au dessus de l'autre. L'état initial ou les états initiaux feront partie de l'automate du haut, alors que les états finaux feront partie de l'automate du bas. On va alors placer des transitions pour passer de l'automate du haut à celui du bas, de telle sorte qu'elles correspondent aux plages de 2 que l'on veut énumérer.

Pour que cette construction fournisse le transducteur voulu, il est nécessaire que l'automate de départ soit *non-ambigu*, c'est-à-dire tel que tout mot reconnu par lui n'admette qu'un chemin admissible. En revanche, il n'est pas nécessaire qu'il soit *non-déterministe*. La construction que l'on propose fournit un transducteur qui est non-déterministe, mais qui reste non-ambigu sur les mots w^* pointés sur le premier 2 d'une de leurs plages de 2. Ainsi, si w admet m plages de 2, il produit m mots pointés w^* différents. Il existe alors m chemins dans le transducteur pour lire le mot w, mais seulement un seul chemin par mot pointé w^* tel que la plage de 2 pointée soit comptée par des arcs étiquetés par $2/zu$. Ces remarques, peut-être un peu absconses maintenant, prennent tout leur sens plus tard.

On appelle 2-*arc* (resp. 01-*arc*) un arc de l'automate étiqueté par 2 (resp. étiqueté par 0 ou 1). On appelle 2-*squelette* d'un automate A, et on note $\mathtt{Sq}(A)$, le sous-automate induit par les 2-arcs de A. Ce sous-automate peut ne pas être connexe, ne pas avoir d'état initial, *etc.* Parmi les états de $\mathtt{Sq}(A)$, vus au sein de A, on distingue alors trois catégories (cf. Figure 3.25) :



état d'initiation état de transition état de terminaison

FIG. 3.25 – Les trois types d'états possibles de $\mathtt{Sq}(A)$.

- les *états d'initiation*, qui n'ont pas de 2-arcs entrants,
- les *états de terminaison*, qui n'ont pas de 2-arcs sortants,
- et les *états de transition*, qui ont des 2-arcs entrants et sortants.

On dit enfin qu'un état de transition est *problématique*, s'il admet au moins un 01-arc entrant et au moins un sortant. L'état de transition de la Figure 3.25 par exemple est problématique.

Exemple 3.18
La Figure 3.26 page ci-contre montre le 2-squelette de l'automate $\mathcal{A}_2$ reconnaissant le langage $\mathcal{L}_2$. Les états E_0 et E_4 sont des états d'initiation de $\mathcal{A}_2$, et l'état E_3 est un état de transition. En particulier, E_3 est problématique. ◇

— *o* —

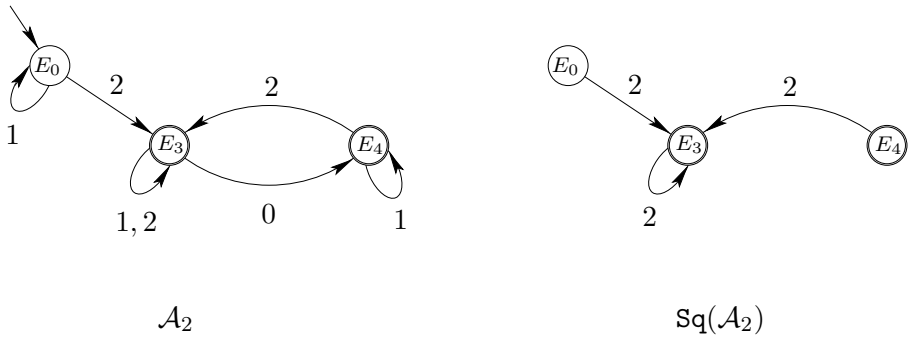


FIG. 3.26 – L'automate $\mathcal{A}_2$ et son 2-squelette.

La construction est alors la suivante. Si A est l'automate de départ, on note A_f une copie du sous-automate de A induit par les états accessibles à partir des états de A qui sont soit des états de transition, soit des états de terminaison. On note A_m une copie du sous-automate de $\mathtt{Sq}(A)$ induit par ses états de transition. Enfin, on note A_d une copie de A.

On commence par réaliser les deux opérations suivantes : s'il existe des états finaux dans A_d, on les rend non-finaux ; et s'il existe un ou plusieurs états initiaux dans A_f ou A_m, on les rend non-initiaux.

Ensuite, pour tout 2-arc sortant (E_i, E_j) d'un état d'initiation E_i de A, on ajoute un arc étiqueté par $2/zu$ de l'état E_i^d de A_d vers l'état E_j^m de A_m si E_j est un état de transition, et vers l'état E_j^f de A_f si E_j est un état de terminaison. De même, pour tout 2-arc entrant (E_i, E_j) d'un état de terminaison E_j de A, on ajoute un arc étiqueté par $2/zu$ de l'état E_i^m de A_m vers l'état E_j^f de A_f si E_i est un état de transition.

Enfin, pour tout 01-arc d'étiquette e sortant (E_i, E_j) d'un état de transition de A, on ajoute un arc étiqueté e/z de l'état E_i^m de A_m vers l'état E_j^f de A_f. Pour les 01-arcs entrants des états de transition, il faut différencier suivant que l'état est problématique ou non. Si E_i est un état de transition non problématique de A, alors pour chacun de ses 01-arcs entrants (E_j, E_i) d'étiquette e, on ajoute un arc de l'état E_j^d de A_d vers l'état E_i^m de A_m d'étiquette e/z. Si E_i est problématique, on crée un état E_i' et c'est vers ce sommet qu'on ajoutes les arcs précédents. Ensuite on ajoute un arc d'étiquette $2/zu$ de E_i' vers l'état E_i^m de A_m.

Enfin, tous les arcs qui ont des étiquettes simples e reçoivent l'étiquette e/z qui permet au transducteur ainsi créé de compter le nombre de lettres qu'ont les mots qui donnent un monôme non nul.

Exemple 3.19
La Figure 3.27 page suivante montre la construction de $\mathcal{T}$ à partir de l'automate $\mathcal{A}_2$. Le sous-automate A_m est réduit à un état E_3^m, qui est une copie de E_3, et A_f au sous-automate de $\mathcal{A}_2$ induit par les sommets E_3 et E_4. En effet, le sommet E_0 n'est pas accessible par l'état de transition E_3 de $\mathtt{Sq}(\mathcal{A}_2)$. Ces états sont notés E_3^f et E_4^f. Les états de A^d qui correspondaient à des états finaux de $\mathcal{A}_2$ ne sont plus finaux : E_3^d et E_4^d ne sont plus finaux. En revanche, leurs copies dans A_m et A_f le restent : E_3^m, E_3^f et E_4^f sont des états finaux. Pour les états initiaux, l'état E_0^d est initial. Comme A_m et A_f n'ont aucune copie de E_0, il n'y a pas de problème.

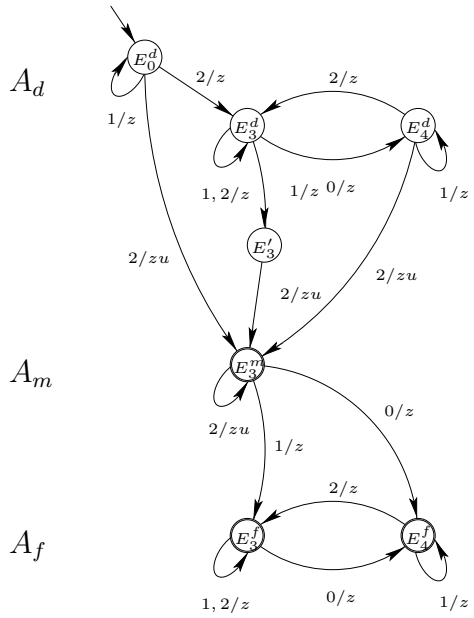


FIG. 3.27 – Construction du transducteur $\mathcal{T}$.

Pour l'état d'initiation E_0 (resp. E_4), on considère tous ses 2-arcs : il n'en a qu'un qui relie E_0 à E_3 (resp. E_4 à E_3). Comme E_3 est un état de transition, on crée un arc étiqueté par $2/zu$ de E_0^d (resp. E_4^d), la copie de E_0 (resp. E_4) dans A^d, vers E_3^m, la copie de E_3 dans A_m. Il n'y a pas d'état de terminaison ; on passe aux états de transition : il n'y en a qu'un (E_3), et il est problématique. On crée donc un nouvel état E_3'. On considère les 01-arcs entrants de E_3 : il n'y en a qu'un, la boucle étiquetée par 1. On crée donc un arc étiqueté par $1/z$ de E_3^d, la copie de E_3 dans A_d, vers ce nouvel état E_3'. On considère alors les 2-arcs de E_3. Il n'y en a qu'un aussi : la boucle étiquetée par 2. On crée alors un arc étiqueté par $2/zu$ de l'état E_3' vers E_3^m, et un autre de E_3^m vers E_3^m de même étiquette. Enfin, on considère les 01-arcs sortants de E_3. On crée alors un arc d'étiquette $0/z$ de E_3^m vers E_4^f et un d'étiquette $1/z$ de E_3^m vers E_3^f. Au final, on ajoute $/z$ aux étiquettes des arcs qui n'ont pas été modifiés et on trouve le transducteur de la Figure 3.27 qui compte les plages de 2 des mots reconnus pas $\mathcal{A}_2$.

◇

Une fois le transducteur construit, il ne reste plus qu'à effectuer les calculs pour trouver la série qu'il produit (cf. Préliminaires).

Exemple 3.20
On peut par exemple traiter le cas de la Figure 3.27. Avec des notations évidentes, on a

le système :

$$\begin{aligned}
S_0^d &= zS_0^d + zS_3^d + zuS_3^m,\\
S_3^d &= 2zS_3^d + zS_4^d + zS_3',\\
S_4^d &= zS_3^d + zS_4^d + zuS_3^m,\\
S_3' &= zuS_3^m,\\
S_3^m &= zuS_3^m + zS_3^f + zS_4^f + 1,\\
S_3^f &= 2zS_3^f + zS_4^f + 1,\\
S_4^f &= zS_3^f + zS_4^f + 1.
\end{aligned}$$

La série $\mathcal{S}_2(z,u)$ produite par l'automate est égale à S_0^d. On peut trouver le résulat directement en calculant le déterminant du système, puis le déterminant qui nous intéresse, ou en résolvant le système. Le sous-système constitué des 4 premières équations donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
(1-z) & -z & 0 & zu\\
0 & (1-2z) & -z & z^2u\\
0 & -z & (1-z) & zu
\end{array}\right).$$

L'expression de S_0^d en fonction de S_3^m est alors le quotient de deux déterminants et vaut :

$$\begin{aligned}
S_0^d &= \frac{zu}{(1-z)}\left(\frac{(1-2z)(1-z)-z^2+z(z(1-z)+z)}{(1-2z)(1-z)-z^2}\right)S_3^m\\
&= \frac{zu}{(1-z)}\left(\frac{(1-z)(1-2z+z^2)}{1-3z+z^2}\right)S_3^m\\
&= \left(\frac{uz(1-z)^2}{z^2-3z+1}\right)S_3^m.
\end{aligned}$$

Le sous-système constitué des 3 dernières équations donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
(1-zu) & -z & -z & 1\\
0 & (1-2z) & -z & 1\\
0 & -z & (1-z) & 1
\end{array}\right).$$

En particulier, le déterminant de ce système est presque le même que précédemment : il vaut $(1-zu)(z^2-3z+1)$. Reste à calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix}
1 & -z & -z\\
1 & (1-2z) & -z\\
1 & -z & (1-z)
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0\\
1 & (1-z) & 0\\
1 & 0 & 1
\end{vmatrix} = (1-z).$$

D'où finalement :

$$S_0^d = \frac{uz(1-z)^3}{(1-zu)(z^2-3z+1)^2}.$$

◇

On obtient donc des séries génératrices rationnelles. En effet, elles sont solutions d'un système linéaire. À plusieurs égards, cela n'a rien de surprenant. Comme on calcule une statistique sur des mots issus d'un langage rationnel, on peut représenter ces mots par un automate et résoudre le problème à l'aide d'un transducteur comme on l'a fait. Cela nous ramène à des résolutions de systèmes linéaires et donc à des quotients de déterminants. C'est ce qu'on a vu. De manière plus intrinsèque, cela vient du fait, qu'étant données toutes les configurations récurrentes sur une roue de taille n, on est capable de construire toutes les configurations récurrentes sur la roue de taille $n+1$. En effet, pour chaque configuration récurrente sur $\mathcal{R}_n$, on peut construire 2 ou 3 configurations récurrentes de $\mathcal{R}_{n+1}$ 'de manière injective'. On peut toujours poser $\mathtt{u}_{n+1} = 2$ ou $\mathtt{u}_{n+1} = 1$, et suivant les propriétés de $\mathtt{u}$ sur $\mathcal{R}_n$ on peut ou non l'étendre en une configuration de $\mathcal{R}_{n+1}$ en posant $\mathtt{u}_{n+1} = 0$. Pour compléter, il faut ajouter les configurations qui n'ont qu'un 2 en dernière position : il y en a exactement $n+1$. Plus précisément, il y en a n de la forme $(1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1, 2)$ et une de la forme $(1, \ldots, 1, 2)$.

Exemple 3.21
On prend l'exemple de $\mathcal{R}_2$. Les 5 configurations récurrentes sont :

$$(2,2), (2,1), (1,2), (2,0), (0,2).$$

On peut alors construire 13 configurations récurrentes de $\mathcal{R}_3$ en ajoutant un 2 ou un 1 pour chacune d'elle et un 0 pour les trois premières :

$$(2,2) \to \begin{cases} (2,2,2) \\ (2,2,1) \\ (2,2,0) \end{cases} \quad (2,1) \to \begin{cases} (2,1,2) \\ (2,1,1) \\ (2,1,0) \end{cases} \quad (1,2) \to \begin{cases} (1,2,2) \\ (1,2,1) \\ (1,2,0) \end{cases}$$
$$(2,0) \to \begin{cases} (2,0,2) \\ (2,0,1) \end{cases} \quad (0,2) \to \begin{cases} (0,2,2) \\ (0,2,1) \end{cases}$$

Les 3 dernières configurations récurrentes de $\mathcal{R}_3$ correspondent à des configurations qui ne contiennent qu'un 2 en dernière position :

$$(1,1,2), (1,0,2) \text{ et } (0,1,2).$$

$\diamond$

$-\ o\ -$

Étude finale pour $\mathcal{L}$. On a expliqué de quelle manière on pouvait diviser le problème en deux et travailler d'abord sur $\mathcal{L}_2$ et ensuite sur $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_2$

La Figure 3.27 page 130 représente un transducteur qui produit $\mathcal{S}_2(z,u)$. On note $\mathcal{T}^+$ (resp. $\mathcal{T}^-$) le transducteur qui permet de produire P_w^+ (resp. P_w^-) à partir d'un mot w.

Si on note $\mathcal{S}_+(z,u)$ et $\mathcal{S}_-(z,u)$ les séries respectives de ces nouveaux transducteurs, alors $\mathcal{S}_2(z,u) + \mathcal{S}_+(z,u) - \mathcal{S}_-(z,u)$ est précisément la série qui compte les plages de 2 des mots w du langage $\mathcal{L}_2$, vus comme des mots circulaires.

La Figure 3.28 page suivante montre un transducteur qui produit $\mathcal{S}_+(z,u)$.

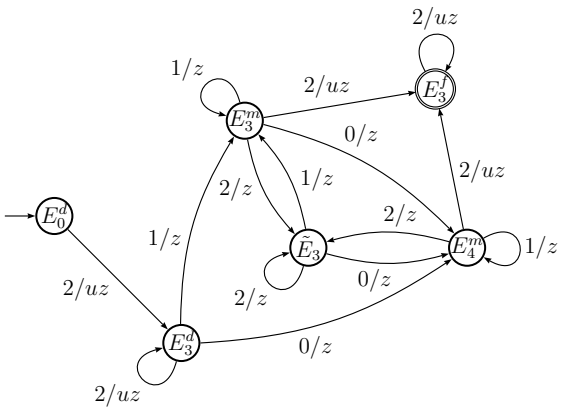


FIG. 3.28 – Transducteur $\mathcal{T}^+$ produisant $\mathcal{S}_+(z,u)$.

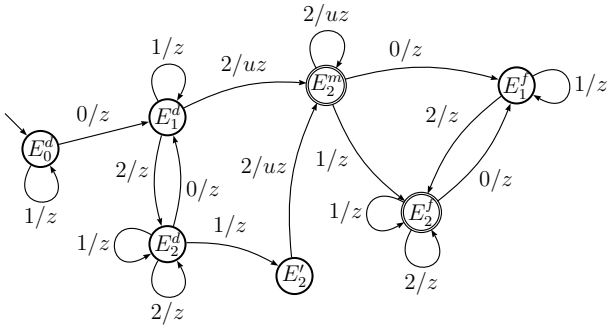


FIG. 3.29 – Transducteur $\mathcal{T}^0$ produisant $\mathcal{S}_0(z,u)$.

Pour le langage $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_2$, il ne peut pas y avoir l'effet de bord mentionné plus haut, car un mot de $\mathcal{L}_0$ correspond à une configuration telle que le sommet x_1 contient 0 ou 1 grain. On note $\mathcal{S}_0(z,u)$ la série produite par le transducteur de la Figure 3.29 et qui énumère les plages de 2 des mots du langage $\mathcal{L}_0$.
Après les calculs, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(z,u) &= \frac{uz(1-z)^3}{(1-uz)(1-3y+y^2)^2} \\
\mathcal{S}_+(z,u) &= \frac{u^2z^3(1-z)(2-z)}{(1-uz)^2(1-3y+y^2)} \\
\mathcal{S}_-(z,u) &= \frac{2uz^3(2-z)}{(1-uz)(1-3y+y^2)} \\
\mathcal{S}_0(z,u) &= \frac{uz^2(1-z)^3}{(1-uz)(1-3y+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Remarque 3.4
On peut remarquer que $\mathcal{S}_0(z,u) = y\,\mathcal{S}_2(z,u)$. En fait, il y a une preuve bijective assez simple de ce résultat.

Il y a une bijection très simple entre les mots de $\mathcal{L}_2$ de taille n et ceux de $\mathcal{L}_0$ de taille $n+1$ qui conserve les tailles des plages de 2 du mot, considéré non circulairement. Un mot

w de $\mathcal{L}$ est soit un mot de $\mathcal{L}_2$ s'il commence par un 2 précédé éventuellement de quelques 1, soit un mot de $\mathcal{L}_0$ s'il commence par un 0 précédé éventuellement de quelques 1. La bijection est alors la suivante : si $w = w_1 \dots w_n$ est un mot de $\mathcal{L}_2$, alors w se termine par un 2 ou 0, éventuellement suivi de 1. Dans le premier cas, on définit $\Psi(w) = 0w_n \dots w_1$ et dans le second cas $\Psi(w) = 1w_n \dots w_1$. Dans les deux cas, $\Psi(w)$ est un mot de $\mathcal{L}$. De plus ce mot commence par un 0 éventuellement précédé de 1 et a longueur $n+1$, *i.e.* $\Psi(w)$ est dans $\{u \in \mathcal{L}_0, |u| = n+1\}$.
La réciproque est tout aussi évidente : si $w' = w'_1 \dots w'_n$ alors $\Psi^{-1}(w') = w'_n \dots w'_2$. On vérifie aussi facilement que les plages de 2 sont les mêmes. Ainsi, cela montre que $\mathcal{S}_0(z,u) = y\,\mathcal{S}_2(z,u)$.

Analyse asymptotique

Le nombre de plages de 2 de taille $m > 0$ dans les mots de $\mathcal{L}$ de taille n et considérés circulairement est $[x^m y^n]\mathcal{S}(z,u)$, où :

$$\mathcal{S}(z,u) = \mathcal{S}_2(z,u) + \mathcal{S}_+(z,u) - \mathcal{S}_-(z,u) + \mathcal{S}_0(z,u)$$

Après des simplifications sous Maple, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(z,u) &= \frac{z^3 - z}{(1-3y+y^2)^2} - z - 1 + \left(\frac{1}{1-uz}\right)\left(\frac{-2z^3+3z^2}{(1-3y+y^2)^2} + 1\right) \\
&+ \left(\frac{1}{1-uz}\right)^2 \left(\frac{z}{1-3y+y^2} + z\right) \\
&= \sum_{n \geq m \geq 0} \frac{n}{\sqrt{5}} \left[\left(\phi^{2(n-m)} - \phi^{-2(n-m)}\right) u^m - \left(\phi^{2n} - \phi^{-2n}\right)\right] z^n \\
&+ \sum_{n \geq 0} u^n z^n + \sum_{n \geq 1} n u^{n-1} z^n, \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ représente le *nombre d'or*.

$$-\ o\ -$$

Le nombre de configurations récurrentes sur une roue simple de n sommets réguliers est égal à $|\mathcal{L} \cap \{0,1,2\}^n| = (\phi^n - \phi^{-n})^2$ [12]. On note $\mathcal{A}(z,u)$ la série de la distribution d'avalanches de la roue simple, et on définit les $l_{m,n}$ par :

$$\mathcal{A}(z,u) = \sum_{n \geq 1, m \geq 0} \frac{l_{m,n}}{n(\phi^n - \phi^{-n})^2} u^m z^n. \qquad (3.3.2)$$

Pour $0 < m \leq n$, si $a_{m,n} = [z^n u^m]\ \mathcal{S}(z,u)$, alors par l'égalité (3.3.1), on a :

$$a_{m,n} = [z^n u^m]\ \mathcal{S}(z,u) = \begin{cases} \frac{n}{\sqrt{5}}\left(\phi^{2(n-m)} - \phi^{-2(n-m)}\right) & \text{si} \quad 0 < m < n-1 \\ 2n & \text{si} \quad m = n-1 \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

Mais par les remarques faites au début (équations (3.16) et (3.16)) on a les relations suivantes entre $a_{m,n}$ et $l_{m,n}$:

$$\begin{aligned} l_{m,n} &= m\, a_{m,n} \qquad \text{si } 0 < m < n-1, \\ l_{m,n} &= (n-1)\,\frac{a_{n-1,n}}{2}, \\ l_{n,n} &= n a_{n,n} + (n-1)\,\frac{a_{n-1,n}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour un entier fixé $m > 0$, ces relations avec l'équation (3.3.2) donnent un équivalent asymptotique de la proportion d'avalanches principales de taille m sur $\mathcal{R}_n$ quand n tend vers l'infini :

$$[z^n u^m]\mathcal{A}(z,u) \sim \left(\frac{m}{\sqrt{5}}\right)\phi^{-2m}. \tag{3.3.3}$$

En particulier, cela signifie que la proportion d'avalanches principales d'une taille donnée est indépendante de n asymptotiquement. En outre,

$$[z^n u^{n-1}]\mathcal{A}(z,u) \sim n\phi^{-2n} \qquad \text{et} \qquad [z^n u^n]\mathcal{A}(z,u) \sim n\phi^{-2n}.$$

Pour déterminer la proportion d'avalanches principales de taille 0, on pourrait utiliser les propriétés de la série $\mathcal{S}(z,u)$ vues au début, mais il est plus simple d'utiliser le critère de normalisation, étant donné que $\mathcal{A}(z,u)$ est la fonction génératrice d'une distribution :

$$\forall n\ ,\ [z^n]\mathcal{A}(z,1) = 1.$$

Avec l'équation (3.3.3) on trouve $[z^n u^0]\mathcal{A}(z,u) \sim 1 - 1/\sqrt{5}$ pour n assez grand. En conclusion, à m fixé, quand n tend vers l'infini, on a :

$$[z^n u^m]\mathcal{A}(z,u) \sim \begin{cases} \left(\frac{m}{\sqrt{5}}\right)\phi^{-2m} & \text{si} \quad m > 0 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} & \text{si} \quad m = 0 \end{cases}$$

Exemple 3.22
La Figure 3.30 montre la distribution d'avalanches asymptotique de la roue simple (ligne) et les résultats expérimentaux pour $n = 100$ (croix) et $n = 1000$ (carrés) quand on tire au hasard 10^6 sommets réguliers. La ligne correspond à la prédiction théorique. L'indépendance vis à vis du paramètre n quand celui-ci est suffisamment grand est claire.

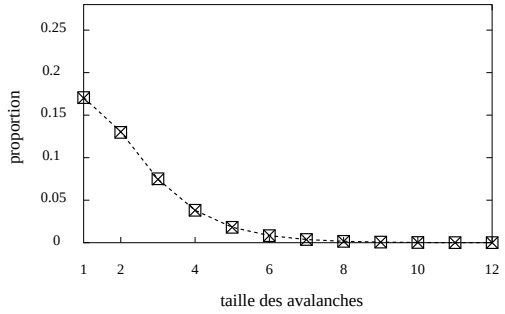


FIG. 3.30 – Distribution d'avalanches sur $\mathcal{R}_n$ pour $n = 100$ et $n = 1000$.

On a indiqué seulement les valeurs pour $m > 0$, car le pic en 0 les écrase sinon. Cependant, pour ce pic aussi, la correspondance est totale. ◇

$-\ o\ -$

3.3.2 Cas de la roue multiple

Le cas de la roue multiple, notée $\mathcal{R}(n,k)$, n'est pas aussi simple que celui de la roue simple. En particulier, il n'y a pas de caractérisation simple des configurations récurrentes. Néanmoins, la distribution d'avalanches sur cette famille de graphes n'est pas dénuée d'intérêt, dans la mesure où elle présente des pics pour certaines valeurs des paramètres (cf. Figure 3.33 page suivante). Ce phénomène s'observe aussi sur des graphes aléatoires (cf. Exemple 3.23), mais il est surprenant sur la roue multiple, car cette dernière peut être vue comme une grille avec des conditions aux bords particulières (cf. Figure 3.31) : ouvertes d'un côté, fermées de l'autre, et périodiques dans l'autre direction. Or, ce phénomène de

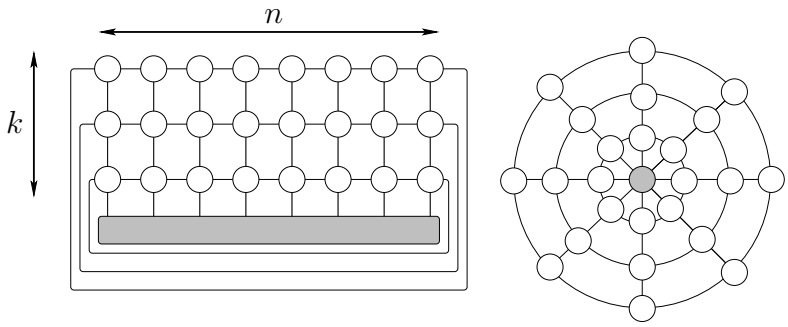


FIG. 3.31 – La roue $\mathcal{R}(n,k)$ comme grille de taille $n \times k$.

pics est complètement exclu des distributions d'avalanches des grilles classiques (conditions aux bords ouvertes partout), qui sont en $1/l$ exprérimentalement.

Exemple 3.23
En fait, quand on regarde les distributions d'avalanches sur des graphes aléatoires $G(N,p)$ à N sommets et avec une probabilité p qu'une arête existe entre deux sommets, on observe aussi des pics (voir la Figure 3.32 page ci-contre).

Sur la Figure, le graphe de la distribution de gauche est $G(500, 0.01)$, et celui de celle de droite est $G(500, 0.05)$.

◇

Les pics sur la roue multiple ont été observés la première fois dans [44],[17]. Il y a en fait exactement k pics d'abscisses : $\mathsf{a}_1 = kn, \mathsf{a}_2 = kn + (k-1)n, \ldots, \mathsf{a}_k = nk(k+1)/2$. En particulier, a_k est la valeur maximale d'une avalanche principale. En effet, c'est la taille d'une avalanche principale en un sommet de la dernière couronne si la configuration est la configuration maximale.

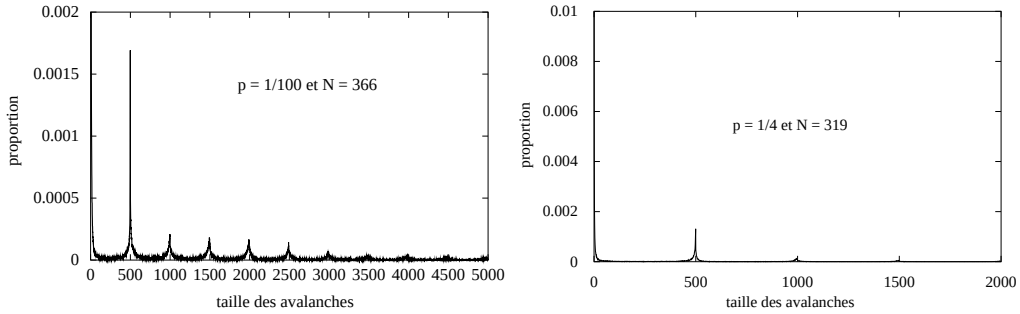


FIG. 3.32 – Distributions d'avalanches sur des graphes aléatoires.

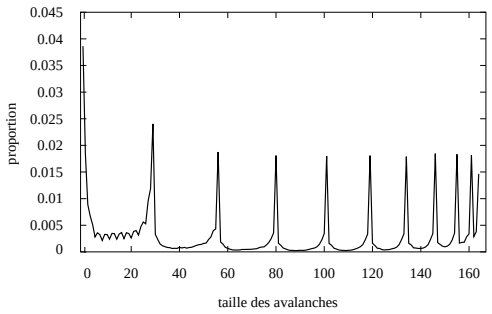


FIG. 3.33 – Apparition de pics dans la distribution d'avalanches de la roue $\mathcal{R}(3, 10)$.

Dans la suite, nous montrons l'existence des pics en minorant leur valeur. On considère principalement le dernier pic. On trouve une sous-famille de configurations récurrentes qui admettent un grand nombre d'avalanches principales de taille maximale, c'est-à-dire qui contribuent au dernier pic de la distribution d'avalanches. Cette sous-famille est elle-même suffisamment grande pour avoir une contribution non négligeable à ce dernier pic, et ainsi montrer son existence. On montre ensuite qu'on peut étendre ce raisonnement aux autres pics, même si les conclusions sont moins efficaces.

$$-\ o\ -$$

Analyse du dernier pic Si on se donne deux configurations $\mathtt{u}$ et $\mathtt{u}'$ telles que $\mathtt{u} \leq \mathtt{u}'$, alors pour tout sommet régulier x_i :

$$\mathcal{L}(\mathtt{u}, x_i) \leq \mathcal{L}(\mathtt{u}', x_i).$$

De plus, le shot set de l'avalanche principale de $\mathtt{u}$ en x_i est alors inclus dans celui de l'avalanche principale de $\mathtt{u}'$ en x_i.

Si on considère la configuration maximale sur la roue $\mathcal{R}(n, k)$, on peut calculer son polynôme d'avalanches. On note $\mathtt{u}_{max}$ cette configuration. Si les $\mathtt{a}_i$ sont les abscisses des pics observés, c'est-à-dire $\mathtt{a}_i = ni(2k + 1 - i)/2$, alors on a :

$$\mathcal{L}(\mathtt{u}_{max}, x_j) = \mathtt{a}_i,$$

si le sommet x_j est à distance i du puits. Les plus grandes avalanches principales de $\mathtt{u}_{max}$ correspondent donc aux sommets de la dernière couronne de la roue, et ont une

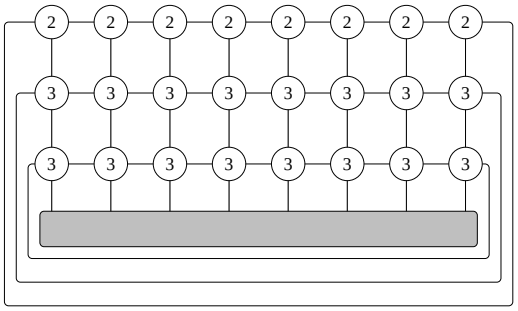


FIG. 3.34 – Configuration $\mathtt{u}_{max}$ de $\mathcal{R}(8,3)$.

longueur de $\mathtt{a}_k$. Cette valeur est donc la taille maximale d'une avalanche principale sur n'importe quelle configuration récurrente. De plus, si une configuration $\mathtt{u}$ admet une avalanche principale en x_i de taille $\mathtt{a}_k$, alors le sommet x_i est nécessairement un sommet de la dernière couronne de la roue.

Exemple 3.24
Si on effectue le même jeu que d'habitude, mais en ne comptant la longueur des avalanches que quand le sommet choisi est sur la dernière couronne on obtient la Figure 3.35. ◇

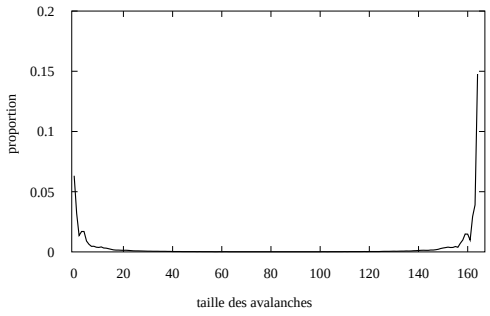


FIG. 3.35 – Distribution d'avalanches par ajout sur la dernière couronne ($\mathcal{R}(3,10)$).

— *o* —

Maintenant, si $\mathcal{L}(\mathtt{u}, x_i) = \mathtt{a}_k$, alors on peut dire que le sommet x_i appartient à la dernière couronne. Mais que peut-on dire sur la configuration $\mathtt{u}$ elle même ?

Comme $\mathtt{a}_k$ est la longueur maximale d'une avalanche principale, le shot set de toute avalanche de cette longueur est identique à celui d'une avalanche principale de taille maximale sur $\mathtt{u}_{max}$. C'est-à-dire qu'un sommet x_i apparaît exactement j fois dans cet ensemble s'il est à distance j du puits, car il s'éboule alors légalement j fois lors de l'avalanche. Lors d'une telle avalanche sur $\mathtt{u}_{max}$, les éboulements se produisent par vagues. Lors de la première vague, tous les sommets s'éboulent, lors de la deuxième, tous sauf ceux à distance 1 du puit s'éboulent, lors de la troisième, tous sauf ceux à distance 1 ou 2 du puits s'éboulent, *etc*.

Après l'avalanche, les sommets de la dernière couronne sont les seuls à avoir perdu un grain (sauf le sommet x_i sur lequel on avait justement ajouté un grain) ; les autres sommets contiennent le même nombre de grains. Ainsi, sur la dernière couronne, x_i contient 2 grains, mais les autres sommets moins de 1 (ils en contenaient moins de 2 avant l'avalanche). Mais la configuration obtenue est toujours récurrente. Si on éboule le puits, tous les sommets s'éboulent. On en déduit immédiatement que la sous-configuration de la dernière couronne est une configuration récurrente de la roue simple (on force les éboulements des sommets des couronnes intérieures, et la relaxation doit mener à la configuration initiale). Vue la remarque précédente, elle ne contient qu'un 2, et donc nécessairement au plus un 0. Elle est donc soit de la forme $(1,\dots,1,2,1,\dots,1)$ soit de la forme $(1,\dots,1,0,1,\dots,1,2,1\dots,1)$.

En particulier, après l'éboulement du puits, aucun sommet de la dernière couronne ne peut s'ébouler avant x_i, qui lui même ne peut pas s'ébouler avant que son voisin dans la couronne inférieure ne s'éboule. Parmi les sommets de la dernière couronne, un seul au plus peut alors s'ébouler avant son voisin dans la couronne inférieure ; cela n'est possible que si la configuration sur la dernière couronne est de la forme $(1,\dots,1,2,1,\dots,1)$, et ne concerne qu'un sommet de la dernière couronne qui est différent de x_i. Ainsi, la sous-configuration restreinte aux couronnes intérieures vue comme une configuration sur $\mathcal{R}(n,k-1)$ (c'est-à-dire en faisant $-(1,\dots,1)$ à la dernière couronne, *i.e.* la couronne $k-1$) est soit une configuration récurrente, soit une configuration récurrente où un grain de la dernière couronne a été enlevé et qui est restée positive malgré tout.

De ces remarques on déduit un minorant $m(n,k)$ et un majorant $M(n,k)$ du nombre d'avalanches principales de taille a_k. Pour minorer il suffit de ne pas inclure le cas où la configuration restreinte à $\mathcal{R}(n,k-1)$ n'est pas récurrente, et pour majorer d'inclure ce cas, sans se soucier des configurations qui sont encore récurrentes quand on leur enlève un grain sur un sommet de leur dernière couronne.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &\geq \frac{n(n-1)|SP(\mathcal{R}(n,k-1))| + n|SP(\mathcal{R}(n,k-1))|}{nk|SP(\mathcal{R}(n,k))|}\\ \mathcal{P} &\leq \frac{n(n-1)|SP(\mathcal{R}(n,k-1))| + n(1+n-1)|SP(\mathcal{R}(n,k-1))|}{nk|SP(\mathcal{R}(n,k))|}\end{aligned}$$

On choisit alors les valeurs suivantes pour $m(n,k)$ et $M(n,k)$:

$$\begin{aligned}m(n,k) &= \frac{n}{k}\frac{|SP(\mathcal{R}(n,k-1))|}{|SP(\mathcal{R}(n,k))|}\\ M(n,k) &= \frac{2n}{k}\frac{|SP(\mathcal{R}(n,k-1))|}{|SP(\mathcal{R}(n,k))|}\end{aligned}$$

$$-\ o\ -$$

Le nombre de configurations récurrentes de $\mathcal{R}(n,k)$ est égal au nombre d'arbres couvrants du graphe support, c'est-à-dire de la grille de taille $n\times k$ et avec les conditions aux bords particulières qui en font une roue. Martin Rubey a trouvé ce nombre dans une note [54] inspirée par une méthode dûe à Noam Elkies qui est décrite et appliquée à un problème similaire par Kenyon and al. dans [37]. Cela donne :

$$|SP(\mathcal{R}(n,k))| = \prod_{r=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{k-1}\left(4-2\cos\left(\frac{2r}{n}\pi\right)-2\cos\left(\left(\frac{2s+1}{2k+1}\right)\pi\right)\right).$$

Ce produit se comporte comme une exponentielle des deux paramètres n et k. Expérimentalement, on observe que $|SP(\mathcal{R}(n,k))| \sim exp[\alpha(k+\gamma)(n+\gamma)]$ avec $\alpha \sim 1.1674$ et $\gamma \sim -0.8210$. En utilisant cette approximation, on obtient :

$$m(n,k) = \frac{n}{k} e^{-\alpha(n+\gamma)} \tag{3.3.4}$$

$$M(n,k) = \frac{2n}{k} e^{-\alpha(n+\gamma)} \tag{3.3.5}$$

La valeur de $m(n,k)$ explique la présence de ce dernier pic, dans la mesure où elle explique pourquoi la valeur en $\mathtt{a}_k$ est importante. En particulier, quand k augmente, $\mathtt{a}_k$ augmente comme k^2, mais la proportion d'avalanches principales de taille $\mathtt{a}_k$ décroit seulement comme $1/k$. La dépendance vis-à-vis du paramètre n est en revanche exponentielle. Ainsi, on peut penser que les pics s'observent mieux pour des petites valeurs de n, mais éventuellement de plus grandes valeurs de k. En pratique c'est exactement ce qui se passe. Par exemple, pour des valeurs de n plus grandes que 4, le dernier pic ne peut pas être plus grand que 2%.

Pour les autres pics, on peut faire un raisonnement similaire et trouver un minorant. Cependant, bien qu'en pratique les pics semblent de même hauteur, on ne trouve pas de minorant aussi efficace : il y a un coefficient $e^{\gamma(n+\gamma)}$ à multiplier. De plus, on ne peut plus trouver de majorant, car une avalanche principale de taille $\mathtt{a}_j$ pour $j < k$ peut très bien avoir été provoquée en un sommet x_i à distance plus grande que j du puits, ce qui était exclu pour le dernier pic. En pratique, on s'aperçoit que ce phénomène est négligeable, mais nous ne sommes pas arrivés à le montrer.

$- o -$

3.4 Approcher une distribution donnée

On a vu le lien qui existe entre la distribution d'avalanche sur un modèle de tas de sable et le polynôme d'avalanche sur ce même modèle. La distribution d'avalanche est en fait la renormalisation du polynôme.

On peut alors se poser la question suivante : si $\mathcal{D}$ est une distribution quelconque, c'est-à-dire un polynôme normalisé, existe-t-il un modèle de tas de sable $G_{\mathtt{q}}$, tel que $\mathcal{D}$ soit la renormalisation de $Av_{G_{\mathtt{q}}}$? On peut en fait répondre facilement par la négative. Pour $i \geq 0$, on note D_i la distribution définie par :

$$\forall j \geq 0 \ , \ D_i(j) = \delta_{i,j},$$

où δ est le *symbole de Kronecker* : $\delta_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1 \Longleftrightarrow i = j$.

Proposition 3.11 *La distribution D_i est une distribution d'avalanches si et seulement si $i = 1$.*

Démonstration :

Le fait que D_0 ne soit pas la distribution d'avalanches d'un graphe est évident. En effet, la configuration maximale produit des avalanches principales de tailles strictement positives.

Si $i = 1$, l'arbre constitué de deux sommets et une arête admet la distribution d'avalanche D_1.

Supposons $i > 1$. On suppose par l'absurde qu'il existe un graphe G dont la distribution d'avalanches est D_i. Eu égards à des remarques faites précédemment, on peut dire que G est un arbre. Il n'admet donc qu'une seule configuration récurrente : la configuration maximale. Soit $n > 1$ son nombre de sommets. Soit v un sommet voisin du puits. Comme G est un arbre, v ne peut pas être connecté à un autre sommet à distance 1 du puits. L'avalanche principale en x_i a pour longueur la taille du sous-arbre de G enraciné en v. On note T_v ce sous-arbre. On a $|T_v| = i > 1$. On peut donc choisir $v' \neq v$ dans T_v. Mais l'avalanche principale en v' est alors plus grande que $|T_v| + |T_{v'}| > i$. C'est une contradiction, car on a supposé que D_i était la distribution d'avalanches de G. Ainsi, on ne peut pas trouver de tel graphe G. □

En particulier cette proposition répond à notre question : il existe des distributions qui ne sont pas des distributions d'avalanches.

Cependant, comme on l'a déjà mis en évidence, certaines distributions qui ne sont pas des distributions d'avalanches peuvent être approchées. En effet, D_0 par exemple est approchée par la distribution sur K_{n+1} quand n augmente.

$$- \; o \; -$$

La nouvelle question naturelle qui fait écho à la réponse négative précédente est alors : étant donnée une distribution $\mathcal{D}$ quelconque, existe-t-il un modèle de tas de sable dont la distribution d'avalanches est aussi proche que l'on veut de $\mathcal{D}$ en un certain sens ? On montre dans la suite qu'on peut cette fois répondre par l'affirmative à cette question.

Dans un premier temps, on montre que les distributions D_i peuvent être approchées de cette manière. Dans un second temps, comme les D_i forment en quelque sorte une base pour les distributions, on peut généraliser le résultat à n'importe quelle distribution.

Le problème de savoir de quelle manière on veut approcher une distribution se 'résout' par le fait que le problème a de nombreuses contraintes. Si on prend un arbre, on a vu qu'il n'admettait aucune avalanche principale de taille 0. Et il s'agit même d'une caractérisation des arbres. Si on prend un graphe quelconque, qui n'est pas un arbre, la proportion d'avalanches de taille 0 est souvent très importante, et d'autant plus importante que le graphe 'diffère' d'un arbre. Les distributions D_i pour $i > 0$ sont donc mieux approchées *a priori* par des arbres. Si on considère les arbres T_n définis par la Figure 3.36, on a :

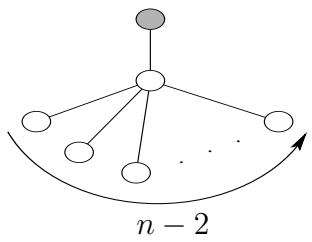


FIG. 3.36 – La famille d'arbres T_n.

$$Av_{T_n}(z) = z^{n-1} + (n-2)z^n.$$

Ainsi, la distribution d'avalanches associée est en fait assez proche de D_n : elle admet un pic de hauteur $(n-2)/(n-1)$ en n et un autre petit de hauteur $1/(n-1)$ en $n-1$. Notons $||$ la norme usuelle sur les polynômes :

$$\forall P(z) = \sum a_i z^i,\ |P| = \sum |a_i|.$$

La distance `dist` associée est définie par :

$$\forall P, Q,\ \texttt{dist}(P,Q) = |P-Q|.$$

Pour cette distance, il y a donc un seuil au delà duquel on ne peut pas approcher D_n, qui est $\texttt{dist}(Av_{T_n} - D_n) = 2/(n-1)$.

En fait on voudrait changer de distance et approcher aussi près que l'on veut D_n tout en gardant une caractéristique essentielle : la forme de la distribution. En particulier, on peut définir deux pseudo-distances sur $\mathbb{R}[z]$ qui vérifient ces conditions.

$$-\ o\ -$$

On définit une première pseudo-distance $\texttt{psd}_1$ qui exprime le fait que deux distributions sont proches s'il existe une translation qui superpose bien leurs pics respectifs, le pic en 0 excepté. Pour cela, si P est un polynôme, on note $\nu(P)$ sa *valuation*, c'est-à-dire la multiplicité avec laquelle 0 est racine de P, ou encore le plus grand exposant r tel que $z^r | P$. Alors, on définit la pseudo-distance $\texttt{psd}_1$ par :

$$\texttt{psd}_1(P,Q) := |P(0)-Q(0)| + \min_{\substack{0 \le k \le \nu(P-P(0)) \\ 0 \le k' \le \nu(Q-Q(0))}} \texttt{dist}\left(\frac{P-P(0)}{z^k}, \frac{Q-Q(0)}{z^{k'}}\right).$$

Ainsi, au sens de cette définition, si $i > 0$, Av_{T_n} tend vers n'importe quelle distribution D_i quand n tend vers l'infini. Les D_i elles-mêmes sont à une pseudo-distance 0 pour $i > 0$: elles représentent des pics et ont donc la même forme.

$$-\ o\ -$$

On peut maintenant montrer que n'importe quelle distribution peut être approchée au sens de $\texttt{psd}_1$ par une distribution d'avalanche. On se donne un polynôme normalisé $\mathcal{D}$ de $\mathbb{Q}^+[z]$, et un réel ϵ strictement positif et plus petit que 1.

On note $i_0 < i_1 < \ldots < i_{k-1}$ les k indices des coefficients c_i non nuls de $\mathcal{D}(z)$. On peut trouver un entier non nul q et k entiers p_j tels que $c_j = p_j/q$ quel que soit j. On choisit enfin n, tel que $2/(n-1) < \epsilon/2k$.

Si $i_0 = 0$, on pose $G_0 = K_{n+1}$, car on a vu que la distribution d'avalanches du graphe complet K_{n+1} admet un pic en 0 de taille $(n-1)/(n+1)$. On note aussi $R_0 = (n+1)^{n-1}$ le nombre de configurations récurrentes de K_{n+1}. Sinon, on note $G_0 = T_{n+1}$, et $R_0 = 1$. Dans les deux cas, on pose alors $n_0 = n$, $n_1 = n + (i_1 - i_0)$, jusqu'à $n_k = n + (i_{k-1} - i_0)$, et $G_1 = T_{n_1+1}, G_2 = T_{n_2+1}$, jusqu'à $G_{k-1} = T_{n_{k-1}+1}$. Pour tout j, n_j est le nombre de sommets de G_j.

On pose k variables r_0 à r_{k-1}, et on note G le graphe constitué de la fusion en sa racine de r_0 copies de G_0, de r_1 copies de G_1, jusqu'à r_{k-1} copies de G_{k-1}. On note alors

$D = R_0(\sum_j r_j n_j)$: D est le nombre de configurations récurrentes de G multiplié par son nombre de sommets réguliers. La distribution d'avalanches sur G présente des pics. Si $i_0 = 0$, elle admet un pic en 0 de hauteur q_0, où :

$$q_0 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{n_0 r_0}{D}\right).$$

En fait, elle est la somme de trois polynômes. On pose $Q(z) = \sum_j q_j z^{i_j}$, où :

$$q_j = \left(\frac{n_j - 1}{n_j}\right)\left(\frac{n_j r_j}{D}\right),$$

pour $j > 0$ et $j = 0$ si $i_0 > 0$. On pose $R(z) = \sum_j r_j z^{i_j - 1}$, où :

$$r_j = \left(\frac{1}{n_j}\right)\left(\frac{n_j r_j}{D}\right).$$

Le polynôme $Q(z)$ est la partie de la distribution d'avalanches de G qui correspond aux contributions des pics les plus importants. Le polynôme $R(z)$ correspond aux petites contributions dûes aux avalanches principales qui ont lieu quand on choisit un sommet voisin du puits dans une des copies d'un graphe de type T_m. On note aussi $S(z)$ le polynôme des contributions des avalanches principales de tailles non nulles sur les sommets saturés des copies du graphe K_{n+1}. Si $i_0 > 0$, on pose $S(z) = 0$. Clairement, $|S(z)| < \epsilon/2$ et $|R(z)| < \epsilon/4$. La distribution $P(z)$ d'avalanches de G est donc $P(z) = Q(z) + R(z) + S(z)$.

Supposons qu'on trouve des r_j tels que $n_j r_j / D = p_j / q$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\mathtt{psd}_1(P, \mathcal{D}) &\leq |q_0 - \mathcal{D}(0)| + \sum_{j>0} \left| \frac{P(z) - P(0)}{z^n} - \mathcal{D}(z) + \mathcal{D}(0) \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2k} + \left| \frac{R(z)}{z^n} \right| + \left| \frac{S(z)}{z^n} \right| + \sum_{j>0} \left| \frac{Q(z) - P(0)}{z^n} - \mathcal{D}(z) + \mathcal{D}(0) \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2k} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \\
&\leq 2\epsilon,
\end{aligned}$$

si $i_0 = 0$, et :

$$\begin{aligned}
\mathtt{psd}_1(P, \mathcal{D}) &\leq \sum_{j \geq 0} \left| \frac{P(z) - P(0)}{z^n} - \mathcal{D}(z) + \mathcal{D}(0) \right| \\
&\leq \left| \frac{R(z)}{z^n} \right| + \left| \frac{S(z)}{z^n} \right| + \sum_{j \geq 0} \left| \frac{Q(z) - P(0)}{z^n} - \mathcal{D}(z) + \mathcal{D}(0) \right| \\
&\leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Bien sûr, cela repose sur le fait qu'on puisse trouver des entiers r_j tels que $n_j r_j / D = p_j / q$. La résolution du système correspondant nous donne des r_j *a priori* rationnels. On peut trouver un entier non nul q' et k entiers $t_0, \ldots, t_{k-1}$, tels que $r_j = t_j / q'$. Mais alors les t_j vérifient aussi la condition et sont des entiers.

On peut donc approcher aussi près qu'on veut un polynôme normalisé de $\mathbb{Q}^+[z]$. Comme ceux-ci sont denses pour cette pseudo-distance dans l'ensemble des séries à coefficients dans $\mathbb{R}^+$, le résultat est aussi valable dans ce cadre.

$$-\ o\ -$$

On peut définir une seconde pseudo-distance $\mathtt{psd}_2$ qui exprime le fait que deux distributions sont proches s'il existe une homotéthie selon l'axe des abscisses et centrée en l'origine qui superpose bien leurs pics respectifs :

$$\mathtt{psd}_2(P,Q) := \min_{\substack{0 \leq k \\ 0 \leq k'}} \mathtt{dist}\left(P(z^k), Q(z^{k'})\right).$$

Comme précédemment, au sens de cette définition, Av_{T_n} tend vers n'importe quelle distribution D_i si $i > 0$ quand n tend vers l'infini. Les D_i elles mêmes sont à une pseudo-distance 0 pour $i > 0$: elles représentent des pics et ont donc la même forme.

Cette fois on approche une distribution donnée par des copies de G_0, $T_{n(1+i_1-i_0)}$, jusqu'à $T_{n(1+i_{k-1}-i_0)}$. On peut alors faire le même raisonnement et obtenir le même résultat.

Deuxième partie

Une généralisation : le modèle flèche-hauteur (MFH)

Chapitre 4

Définition du modèle flèche-hauteur

Sommaire

— *o* —

La partie suivante est consacrée à un modèle qui généralise le modèle du tas de sable : *le modèle flèche-hauteur*. Ce modèle a été inventé par Priezzhev, Dhar et al. en 1996 (cf.[52]). Comme le *modèle du tas de sable*, le *modèle flèche-hauteur* est un jeu dissipatif sur un *automate cellulaire*. Cependant, ce dernier admet une règle d'évolution plus complexe qui généralise celle du tas de sable. En particulier, le modèle ne se définit plus sur un simple graphe, mais sur un *plongement* de ce graphe sur une *surface orientée*. À la différence du modèle du tas de sable, ce modèle a été très peu étudié. Parmi les quelques références, on peut citer [56, 1, 50].

Dans [52], les auteurs étudient exhaustivement le cas particulier du marcheur eulérien. Dans cette partie, on explique comment étendre la théorie au modèle dans sa généralité, introduisant au passage de nombreux concepts nécessaires. Ces résultats font l'objet d'un article très synthétique (cf. [21]).

Dans le premier chapitre, on redéfinit clairement le modèle et sa règle d'évolution. Ensuite, on montre comment se généralisent certaines notions, comme les vecteurs d'éboulements, et certains résultats à ce nouveau cadre. En particulier, on termine en montrant que la relaxation admet les mêmes propriétés de treillis que dans le modèle du tas de sable.

— *o* —

4.1 Configurations du modèle

Même si le modèle flèche-hauteur est une généralisation du modèle du tas de sable, sa présentation est quelque peu différente. La notion de *carte combinatoire* doit être utilisée là où les notions plus simples de *graphe*, *sommets* et *arêtes* étaient suffisantes.

Dans la suite, on se donne une *carte combinatoire* $\mathcal{M}$. On note $G = (S, A)$ le *graphe* ou *multi-graphe* sous-jacent à $\mathcal{M}$. Dans ce contexte aussi, on définit un *puits*, c'est-à-dire un sommet que l'on distingue.

Définition 4.1 Un *modèle flèche-hauteur* (MFH) est un triplet $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}} = (\mathcal{M}, \mathtt{q}, \tau)$ tel que :
- $\mathcal{M}$ est une carte combinatoire dont $G = (S, A)$ est le graphe sous-jacent,
- $\mathtt{q}$ est un sommet de $\mathcal{M}$, *i.e.* un élément de S,
- τ est un vecteur de $\mathbb{N}^{|S|-1}$ tel que :

$$\forall x_i \in S \setminus \{\mathtt{q}\},\ 1 \leq \tau_i \leq d_i,$$

où d_i est le degré du sommet x_i.

On dit que $\mathtt{q}$ est le *puits* du modèle.

L'ensemble des sommets de $\mathcal{M}$ différents du puits $\mathtt{q}$ est appelé ensemble des *sommets réguliers* et est noté S^*. Pour un sommet régulier x_i de $\mathcal{M}$, on dit que τ_i est le *seuil* ou l'*attribut* de x_i. On dit que $\mathcal{M}$ est la *carte du modèle*, et que son graphe sous-jacent est le *graphe du modèle*. On représente un modèle flèche-hauteur (MFH) par le dessin de la carte $\mathcal{M}$, où le cercle représentant le puits $\mathtt{q}$ est grisé ou hachuré, et où l'attribut de chaque sommet régulier est noté juste à côté du cercle le représentant.

Étant donné un MFH $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}}$, on peut définir ce qu'est une configuration du modèle.

Définition 4.2 Une *configuration* sur $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}}$ est un couple de vecteurs $\varphi = (\omega, h)$ tel que pour tout sommet régulier x_i de S^* :
- ω_i est un brin incident à x_i,
- h_i est un entier relatif.

On dit que ω est la *configuration-flèche* de la configuration $\varphi = (\omega, h)$, et que h en est sa *configuration-hauteur*. En outre, on dit que h_i est la *hauteur* du sommet x_i, mais aussi son nombre de *grains*, de *particules* ou encore de *marcheurs*, et que ω_i est la *flèche*, ou le *brin* sur lequel *pointe* la flèche en x_i.

Comme dans le modèle du tas de sable, le nombre de grains n'est pas défini pour le puits. On ne définit pas non plus de flèche pour le puits. Son rôle dans le modèle est à proprement parler de recueillir les grains de manière à toujours considérer des jeux finis.

Exemple 4.1

La Figure 4.1 page suivante donne un exemple de configuration sur un MFH. La carte $\mathcal{M} = (\sigma, \alpha)$ sur 16 brins du modèle est représentée à gauche. Les sommets sont les cycles de σ, ici :

$$\begin{aligned} x_0 &= (1, 2), \\ x_1 &= (3, 4, 5), \\ x_2 &= (6, 7, 8), \\ x_3 &= (9, 10), \\ x_4 &= (11, 12, 13, 14, 15, 16). \end{aligned}$$

Les arêtes sont les cycles de l'involution sans point fixe α. La carte $\mathcal{M}$ admet 8 arêtes dont une boucle. Formellement, les 8 arêtes correspondent aux cycles : $(1,3)$, $(4,6)$, $(5,15)$, $(7,9)$, $(8,16)$, $(10,11)$, $(2,14)$ et $(12,13)$ qui correspond à la boucle. Les faces de la carte sont les cycles de $\sigma\alpha$. Ici, il y en a 5 : $(1,4,7,10,12,14)$, $(2,15,3)$, $(5,16,6)$, $(8,11,9)$ et (13). Le *genre* de la carte vaut donc $0 = -1 + (5+5-8)/2$. On peut donc la représenter dans le plan (cf. Figure 4.1). Au centre de la Figure 4.1 est dessiné un modèle flèche-

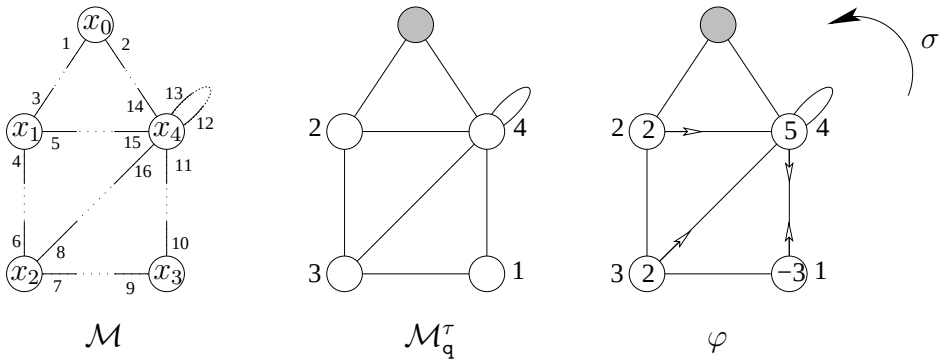


FIG. 4.1 – Configuration d'un MFH.

hauteur dont la carte est $\mathcal{M}$ et le puits $\mathsf{q} = x_0$. Les attributs sont marqués à côté des cercles représentant les sommets correspondants. Ici, l'attribut du sommet x_1 vaut $\tau_1 = 2$, celui de x_2 vaut $\tau_2 = 3$, celui de x_3 est $\tau_3 = 1$ et enfin celui de x_4 est égal à $\tau_4 = 4$. Enfin, on a représenté à droite une configuration $\varphi = (\omega, h)$ sur $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathsf{q}}$. Formellement φ est définie par :

$$\begin{array}{lcll} h_1 & = & 2 & \text{et} \quad \omega_1 = 5, \\ h_2 & = & 2 & \text{et} \quad \omega_2 = 8, \\ h_3 & = & -3 & \text{et} \quad \omega_3 = 10, \\ h_4 & = & 5 & \text{et} \quad \omega_4 = 11. \end{array}$$

◇

$-\ o\ -$

4.2 Règle d'éboulement du modèle

Après ces premières définitions, on peut décrire la règle d'évolution du modèle. On considère la même règle que Dhar et *al.* dans [52], mais on ne pose aucune hypothèse d'instabilité *a priori*. On définit par la suite une version plus fine qui prend en compte cette hypothèse et correspond exactement à la version de [52].

4.2.1 Règle d'éboulement

Si x_i est un sommet régulier, ébouler x_i consiste à répéter τ_i fois les deux actions suivantes :

- tourner la flèche autour de x_i : ω_i devient $\sigma(\omega_i)$,
- envoyer un grain le long de l'arête (x_i, x_j) pointée par la nouvelle flèche ω_i : h_i devient $h_i - 1$ et si $x_j \neq q$, h_j devient $h_j + 1$.

On dit alors que les brins $\sigma(\omega_i), \sigma^2(\omega_i), \ldots, \sigma^{\tau_i}(\omega_i)$ ont été *visités*.

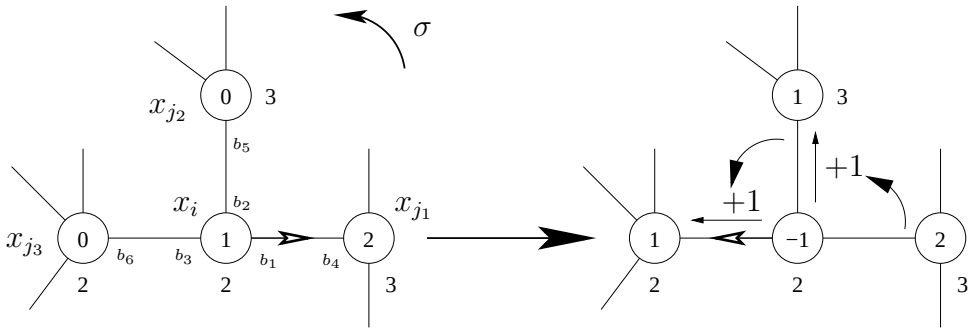


FIG. 4.2 – Éboulement du sommet x_i.

Exemple 4.2
La Figure 4.2 présente l'éboulement d'un sommet régulier x_i. Au départ, la flèche ω_i en x_i est b_1 et le seuil τ_i vaut 2. L'éboulement de x_i correspond donc aux 4 actions suivantes :

- on tourne la flèche autour de x_i : ω_i prend la valeur b_2,
- on envoie un grain le long de b_2 : h_i prend la valeur 0 et h_{j_2} la valeur 1,
- on tourne la flèche autour de x_i : ω_i prend la valeur b_3,
- on envoie un grain le long de b_3 : h_i prend la valeur -1 et h_{j_3} la valeur 1.

Lors de cet éboulement, on dit que les brins b_2 et b_3 ont été visités. Les autres brins ne sont pas visités. À la fin de l'éboulement, la flèche en x_i pointe sur b_3, le sommet x_i a perdu $\tau_i = 2$ grains et en a donné un à x_{j_2} et un à x_{j_3}. ◇

— *o* —

Pour noter les éboulements, on reprend les mêmes notations que pour le modèle du tas de sable. Si φ' est la configuration obtenue à partir de φ après l'éboulement du sommet x_i, on note $\varphi \overset{i}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi'$. Si on ne connaît pas précisément x_i, on note tout simplement $\varphi \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \varphi'$.

La notion de stabilité se définit toujours de la même manière. Un sommet régulier est instable, s'il contient un nombre positif de grains après son éboulement (ou supérieur à deux fois son nombre de boucles s'il en a). Dans ce contexte, un sommet $x_i \neq \mathtt{q}$ est donc instable si $h_i \geq \tau_i$. Une configuration est *stable* si elle ne contient que des sommets stables, sinon elle est *instable*.

Pour l'éboulement d'un sommet instable, on peut parler d'éboulement *légal* ou *valide*. On utilise alors les notations $\varphi \overset{i}{\rightarrowtail} \varphi'$ ou $\varphi \rightarrowtail \varphi'$ pour l'éboulement légal de x_i. Pour un éboulement qui n'est pas légal, on peut aussi préciser qu'il s'agit d'un éboulement *forcé*.

Exemple 4.3
La Figure 4.2 page précédente présente la règle d'éboulement générale du modèle flèche-hauteur (MFH). Dans ce cas, l'éboulement présenté est un éboulement forcé, car le sommet était stable initialement.

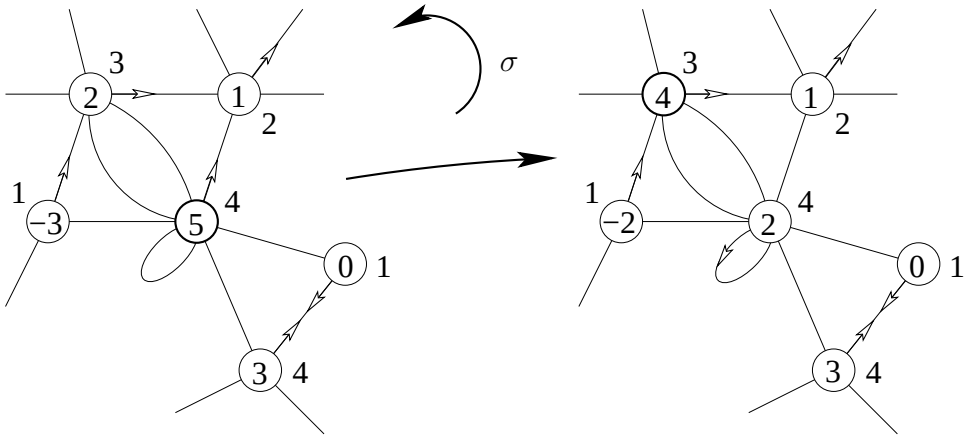


FIG. 4.3 – Éboulement légal d'un sommet instable (MFH).

◇

– *o* –

Lien avec le tas de sable

Le modèle flèche-hauteur est une généralisation du modèle du tas de sable. En effet, si on attribue à tout sommet régulier x_i un seuil τ_i égal à d_i, le degré du sommet x_i, alors la règle d'évolution du modèle se confond avec celle du tas de sable (cf. Figure 4.4). En

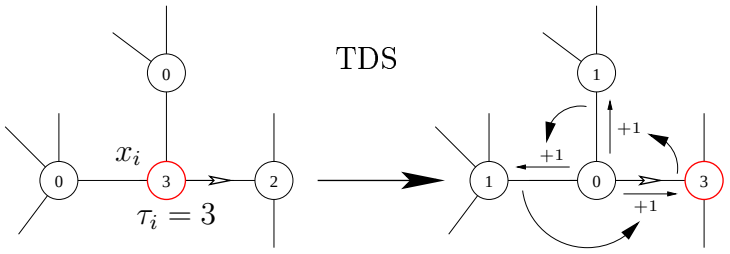


FIG. 4.4 – Règle d'éboulement du tas de sable (TDS).

particulier, on peut remarquer que dans ce cas, la flèche pointe toujours sur le même brin, et que tous les brins sont visités une et une seule fois lors de l'éboulement. En fait, toutes les configurations atteignables à partir d'une même configuration admettent la même configuration-flèche qu'elle. Cela signifie bien que les flèches n'ont aucune importance dans ce cas, et que le modèle est alors complètement équivalent à celui du tas de sable.

– o –

Lien avec le marcheur eulérien

Le marcheur eulérien est aussi un cas particulier du modèle flèche-hauteur, dans la mesure où il correspond à la définition du modèle quand le seuil vaut $\tau_i = 1$ en chaque sommet régulier x_i (cf. Figure 4.5).

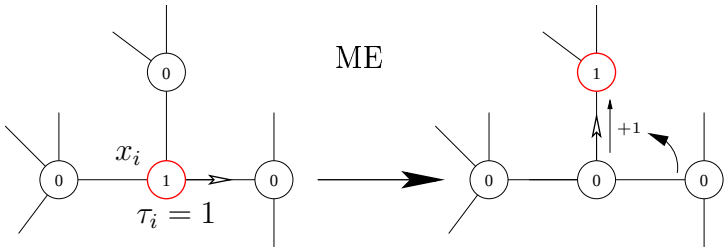


FIG. 4.5 – Règle d'éboulement du marcheur eulérien (ME).

– o –

4.2.2 Vecteurs d'éboulement

Le concept de *vecteurs d'éboulement* se généralise aussi. Cependant, il est plus complexe que dans le cas du modèle du tas de sable. Pour un sommet régulier x_i, on définit $\texttt{pgcd}(\tau_i, d_i)$ cycles de $\texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$ vecteurs. On note $(b_1, \ldots, b_{d_i})$ le cycle des d_i brins qui constituent x_i. Chacun de ces brins est incident à x_i et peut s'écrire sous la forme $b_j = (x_i, x_k)$, où x_k est un voisin de x_i. Pour un brin $b_j = (x_i, x_k)$, on note $\texttt{send}(b_j)$ le vecteur qui *'envoie un grain le long du brin* b_j*'* :

$$\forall x_l \neq \texttt{q},\ \texttt{send}(b_j)_l = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x_l = x_i, \\ 1 & \text{si} \quad x_l = x_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si b_j est le brin d'une boucle ($x_k = x_i$), on pose $\texttt{send}(b_j) = 0$. On définit aussi un vecteur send pour les brins incidents au puits q ; la définition est la même.

Exemple 4.4
La Figure 4.6 page ci-contre présente un MFH très simple. Il admet 3 sommets réguliers. Les vecteurs d'envoi de grain le long d'un brin incident à un sommet régulier sont :

$$\begin{array}{lll} \texttt{send}(b_2) = (-1,0,0) & \texttt{send}(b_3) = (-1,0,0) & \texttt{send}(b_4) = (-1,1,0) \\ \texttt{send}(b_5) = (-1,0,1) & \texttt{send}(b_6) = (1,-1,0) & \texttt{send}(b_7) = (0,-1,1), \\ \texttt{send}(b_8) = (1,0,-1) & \texttt{send}(b_9) = (0,1,-1). & \end{array}$$

Les brins b_0 et b_1 sont adjacents au puits q. La définition du vecteur send conduit à : $\texttt{send}(b_0) = \texttt{send}(b_1) = (1,0,0)$.

◇

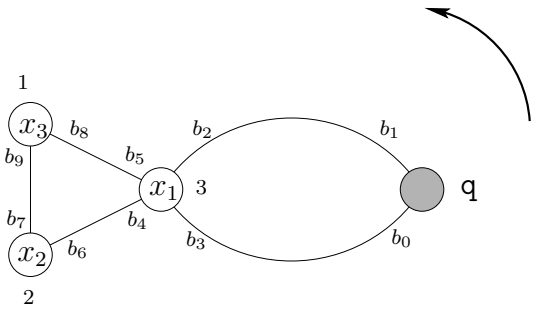


FIG. 4.6 – Modèle du poisson.

– *o* –

Quand un sommet régulier x_i s'éboule, cela correspond, outre la modification de la configuration-flèche, à l'addition d'un certain vecteur à la configuration-grain. Dans le cas général, il peut y avoir d_i vecteurs différents, suivant la position de la flèche.

Par exemple, si le seuil en x_i vaut 1, alors un éboulement en x_i correspond à l'addition d'un des d_i vecteurs $\mathtt{send}(b_j)$ pour la configuration-grain. Plus précisément, si la flèche pointe sur b_j avant l'éboulement ($\omega_i = b_j$), alors l'éboulement consiste à faire pointer la flèche sur $b_{j+1} = \sigma(b_j)$ et à ajouter le vecteur $\mathtt{send}(b_{j+1})$ à la configuration-grain.

Si $\tau_i = d_i$, le vecteur à additionner est toujours le même. Il correspond au vecteur $\mathtt{send}(b_1) + \cdots + \mathtt{send}(b_{d_i})$ qui donne un grain à tous les voisins, c'est-à-dire au vecteur d'éboulement du sommet x_i défini comme dans le modèle du tas de sable. Ainsi :

$$\Delta_i^{\mathtt{q}} = \mathtt{send}(b_1) + \cdots + \mathtt{send}(b_{d_i}).$$

De manière générale, le vecteur à additionner ne dépend que de la position de la flèche avant l'éboulement.

Proposition 4.1 *Si $\varphi' = (\omega', h')$ est obtenue à partir de $\varphi = (\omega, h)$ après l'éboulement du sommet régulier x_i, alors $h' - h$ est un vecteur qui ne dépend que de ω_i. On le note* $\mathtt{topp}(\omega_i)$.

Pour un sommet régulier on peut donc définir d_i vecteurs *a priori* différents qui correspondent au vecteur `topp` à additionner à la configuration-grain suivant où pointe la flèche. Par la définition de la règle d'évolution et des vecteurs `send`, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{topp}(b_1) & = & \mathtt{send}(b_2) + \mathtt{send}(b_3) + \cdots + \mathtt{send}(b_{\tau_i+1}), \\
\mathtt{topp}(b_2) & = & \mathtt{send}(b_3) + \mathtt{send}(b_4) + \cdots + \mathtt{send}(b_{\tau_i+2}), \\
\quad\vdots & & \\
\mathtt{topp}(b_{d_i}) & = & \mathtt{send}(b_1) + \cdots + \mathtt{send}(b_{\tau_i}),
\end{array}$$

avec des indices comptés modulo d_i. En effet, par définition, le vecteur $\mathtt{topp}(b_j)$ est la somme de τ_i vecteurs `send`, à savoir les vecteurs `send` pour les τ_i brins qui suivent b_j autour de x_i.

Exemple 4.5
On reprend l'Exemple 4.4 page 152. Comme on a $x_1 = (b_2, b_5, b_4, b_3)$, on peut vérifier que :

$$\texttt{send}(b_2) + \texttt{send}(b_5) + \texttt{send}(b_4) + \texttt{send}(b_3) = (-4, 1, 1) = \Delta_1^{\mathtt{q}}.$$

Pour ce sommet, comme $\tau_1 = 3$, les 4 vecteurs `topp` sont des sommes de 3 vecteurs `send` :

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{topp}(b_2) & = & \texttt{send}(b_5) + \texttt{send}(b_4) + \texttt{send}(b_3) = (-3, 1, 1), \\
\texttt{topp}(b_5) & = & \texttt{send}(b_4) + \texttt{send}(b_3) + \texttt{send}(b_2) = (-3, 1, 0), \\
\texttt{topp}(b_4) & = & \texttt{send}(b_3) + \texttt{send}(b_2) + \texttt{send}(b_5) = (-3, 0, 1), \\
\texttt{topp}(b_3) & = & \texttt{send}(b_2) + \texttt{send}(b_5) + \texttt{send}(b_4) = (-3, 1, 1).
\end{array}$$

Cela correspond bien au fait que si on éboule le sommet x_1, alors il faut ajouter $\texttt{topp}(b_2) = (-3, 1, 1)$ à la configuration-grain si la flèche pointe sur b_2, $\texttt{topp}(b_5) = (-3, 1, 0)$ si elle pointe sur b_5, *etc.*

Pour le sommet $x_2 = (b_6, b_7)$, comme $\tau_2 = d_2$ tous les vecteurs `topp` correspondent au même vecteur, à savoir le vecteur d'éboulement du sommet x_2 dans le modèle du tas de sable :

$$\texttt{topp}(b_6) = \texttt{topp}(b_7) = \texttt{send}(b_6) + \texttt{send}(b_7) = (1, -2, 1) = \Delta_2^{\mathtt{q}}.$$

Enfin, pour le sommet $x_3 = (b_8, b_9)$, comme $\tau_3 = 1$, les vecteurs `topp` correspondent à des vecteurs `send` :

$$\texttt{topp}(b_8) = \texttt{send}(b_9) \quad \text{et} \quad \texttt{topp}(b_9) = \texttt{send}(b_8).$$

◇

$-\ o\ -$

Cycles de vecteurs `topp`

Étant donnée une configuration de base, les éboulements que l'on réalise sur cette configuration utilisent un sous-ensemble des vecteurs `topp`. Pour un sommet régulier x_i défini par le cycle $(b_1, b_2, \ldots, b_{d_i})$, si la flèche pointe sur un brin incident b_j au départ, alors elle pointe sur $b_{j+\tau_i}$ après un éboulement de x_1, sur $b_{j+2\tau_i}$ après 2 éboulements de x_1, sur $b_{j+3\tau_i}$ après 3 éboulements de x_1, et ainsi de suite. Si on note $p_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$, alors au bout de p_i éboulements, la flèche pointe à nouveau pour la première fois sur b_j.

Notation 4.1 On note σ^τ la permutation définie sur l'ensemble des brins de la carte et telle que :

$$\forall b_j = (x_i, x_k), \sigma^\tau(b_j) = \begin{cases} \sigma^{\tau_i}(b_j) & \text{si} \quad x_i \neq \mathtt{q}, \\ \sigma(b_j) & \text{si} \quad x_i = \mathtt{q}. \end{cases}$$

En fait, les cycles de σ^τ sont inclus dans les cycles de σ. Plus précisément, un cycle de σ qui code un sommet régulier de la carte se décompose en $g_i = \texttt{pgcd}(\tau_i, d_i)$ cycles de longueur $p_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$ pour σ^τ. On peut vérifier que $g_i p_i = d_i$. Quand on éboule plusieurs fois un même sommet, la flèche parcourt ainsi un cycle de σ^τ.

Proposition 4.2 *Soit $\varphi_0 = (\omega_0, h_0)$ une configuration d'un MFH, et x_i un sommet régulier du modèle. On considère la suite des configurations $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ définies par :*

$$\varphi_0 \overset{i}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \varphi_1 \overset{i}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \varphi_2 \overset{i}{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow} \dots$$

Alors φ_n vaut (ω_n, h_n) avec :

$$\forall x_j \neq \mathtt{q},\ \omega_{n,j} = \begin{cases} \omega_{0,j} & si \quad x_j \neq x_i, \\ (\sigma^\tau)^n(\omega_{0,i}) & si \quad x_j = x_i, \end{cases}$$

et

$$h_n = h_0 + \mathtt{topp}(\omega_{0,i}) + \mathtt{topp}(\sigma^\tau(\omega_{0,i})) + \dots + \mathtt{topp}((\sigma^\tau)^{n-1}(\omega_{0,i})).$$

Démonstration :

Pour $n = 0$, le résultat est trivial. De la définition du vecteur topp et de la permutation σ^τ, on a la relation de récurrence :

$$\omega_{n+1,j} = \begin{cases} \omega_{n,j} & \text{si} \quad x_j \neq x_i, \\ \sigma^\tau(\omega_{n,i}) & \text{si} \quad x_j = x_i, \end{cases} \quad \text{et} \quad h_{n+1} = h_n + \mathtt{topp}(\omega_{n,i}).$$

D'où le résultat. □

Ainsi, si $\varphi = (\omega, h)$ est une configuration et x_i un sommet régulier, l'éboulement de x_i consiste à appliquer l'algorithme suivant :

Algorithme 4.1 (Ebouler($\varphi = (\omega, h), x_i$))
Données: σ^τ, topp
début
  $\omega' := \omega$;
  $h' := h + \mathtt{topp}(\omega_i)$;
  $\omega'_i := \sigma^\tau(\omega_i)$;
fin
Résultat: $\varphi' = (\omega', h')$

Exemple 4.6
On reprend l'Exemple 4.4 page 152. On choisit une configuration $\varphi_0 = (\omega_0, h_0)$ quelconque (cf. Figure 4.7 page suivante). Formellement, φ_0 est définie par :

$$\begin{cases} \omega_{0,1} = b_3, \\ h_{0,1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{0,2} = b_6, \\ h_{0,2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{0,3} = b_8, \\ h_{0,3} = 0. \end{cases}$$

La configuration σ de la carte se factorise en :

$$\sigma = \underbrace{(b_0, b_1)}_{\mathtt{q}}\underbrace{(b_2, b_5, b_4, b_3)}_{x_1}\underbrace{(b_6, b_7)}_{x_2}\underbrace{(b_8, b_9)}_{x_3},$$

et σ^τ en :

$$\sigma^\tau = (b_0, b_1)\ \ (b_2, b_3, b_4, b_5)\ \ (b_6)(b_7)\ \ (b_8, b_9).$$

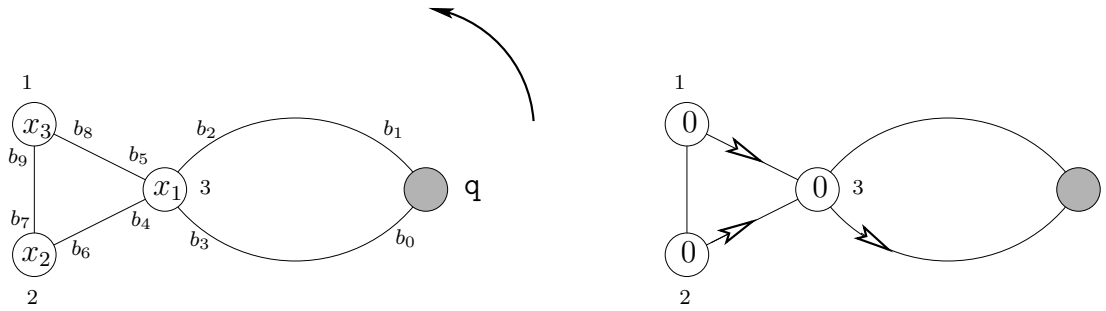


FIG. 4.7 – Modèle du poisson et configuration $\varphi_0 = (\omega_0, h_0)$.

En particulier, en chaque sommet régulier x_i, la permutation σ^τ se décompose en $g_i = \texttt{pgcd}(\tau_i, d_i)$ cycles de longueur $p_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$. Par exemple, le sommet x_1 donne bien $\texttt{pgcd}(3,4) = 1$ cycle de longueur $\texttt{ppcm}(3,4)/3 = 4$, le sommet x_2 donne $\texttt{pgcd}(2,2) = 2$ cycles de longueur $\texttt{ppcm}(2,2)/2 = 1$, et le sommet x_3 donne $\texttt{pgcd}(1,2) = 1$ cycle de longueur $\texttt{ppcm}(1,2)/1 = 2$.

Les cycles de la permutation σ^τ nous permettent de déterminer les configurations-flèches successives pour les configurations φ_n. En x_1 par exemple, comme $\omega_{0,1} = b_3$, les valeurs suivantes sont $\sigma^\tau(b_3) = b_4$ (après un éboulement de x_1), $\sigma^\tau(b_4) = b_5$ (après 2 éboulements de x_1), $\sigma^\tau(b_5) = b_2$ (après 3 éboulements de x_1), et à nouveau $\sigma^\tau(b_2) = b_3$ (après 4 éboulements de x_1). Pour connaître la configuration-grain, il suffit d'ajouter le vecteur `topp` du brin courant.

Appliquons la Proposition 4.2 page précédente au sommet régulier x_1 et à la configuration φ ; on obtient :

$$\varphi_0 = \begin{cases} \omega_0 = (b_3, b_6, b_8) \\ h_0 = (0,0,0) \end{cases} \overset{1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi_1 = \begin{cases} \omega_1 = (b_4, b_6, b_8) \\ h_1 = (-3,1,1) \end{cases} \overset{1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \omega_2 = (b_5, b_6, b_8) \\ h_2 = (-6,1,2) \end{cases} \overset{1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi_3 = \begin{cases} \omega_3 = (b_2, b_6, b_8) \\ h_3 = (-9,2,2) \end{cases} \overset{1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$$

$$\varphi_4 = \begin{cases} \omega_4 = (b_3, b_6, b_8) \\ h_4 = (-12,3,3) \end{cases} \overset{1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi_5 = \begin{cases} \omega_5 = (b_4, b_6, b_8) \\ h_5 = (-15,4,4) \end{cases}$$

On a $h_1 = \texttt{topp}(\omega_{0,1}) = \texttt{topp}(b_3)$ et $\omega_{1,1} = \sigma^\tau(\omega_{0,1}) = b_4$, $h_2 = \texttt{topp}(\omega_{1,1}) = \texttt{topp}(b_4)$ et $\omega_{2,1} = \sigma^\tau(\omega_{1,1}) = b_5$, *etc.* Cette suite d'éboulements correspond à la Figure 4.8 page suivante.

En x_2 en revanche, comme $\tau_2 = d_2 = 2$, la configuration-flèche en ce sommet est invariante. Cela s'exprime par le fait que les cycles de σ^τ qui correspondent à ce sommet sont de longueur 1. Il y en a deux : (b_6) et (b_7). Ainsi, l'éboulement de x_2 à partir de φ_0 correspond à l'ajout de $\texttt{topp}(b_6) = (1,-2,1)$ à la configuration-grain et à aucune modification en ce qui concerne la flèche ($\sigma^\tau(b_6) = b_6$). Cela se passe comme pour le tas de sable dans ce cas. ◇

– *o* –

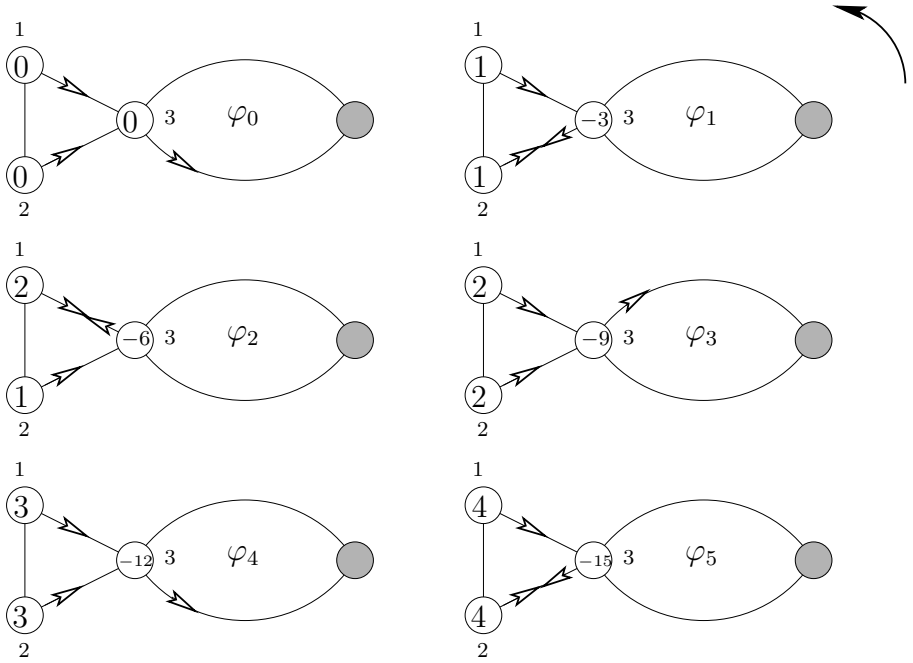


FIG. 4.8 – Éboulements successifs de x_1.

Équivalence de configurations-flèches

Étant donnée une configuration, on peut regarder quelles sont les configurations-flèches que l'on peut obtenir en effectuant des éboulements. Il se peut que certaines soient impossibles à obtenir. C'est le cas par exemple si $\tau_i = d_i > 1$ pour un sommet régulier x_i, ou plus généralement si $\texttt{pgcd}(\tau_i, d_i) > 1$. En fait, pour comprendre ce qui se passe, il suffit de définir la relation d'équivalence suivante sur les configurations-flèches :

Définition 4.3 Soit ω et ω' deux configurations-flèches. On dit que ω et ω' sont *équivalentes*, et on note $\omega \sim \omega'$, si pour chaque sommet régulier x_i il existe un entier k_i tel que $\omega'_i = (\sigma^\tau)^{k_i}(\omega_i)$.

Les configurations-flèches ω et ω' sont donc équivalentes si elles codent des ensembles de brins qui appartiennent aux mêmes cycles de σ^τ. Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence :

- la réflexivité : quel que soit ω, $k = (0, \ldots, 0)$ fonctionne,
- la symétrie : si $\omega \sim \omega'$ avec le vecteur k alors $-k$ permet de montrer $\omega' \sim \omega$,
- la transitivité : si $\omega \sim \omega'$ avec le vecteur k et $\omega' \sim \omega''$ avec le vecteur k', alors $\omega \sim \omega''$ se montre en utilisant $k + k'$.

Par la Proposition 4.2 page 155, si ω est une configuration-flèche, les configurations-flèches équivalentes à ω pour $\sim$ sont exactement les configurations-flèches que l'on peut obtenir en effectuant des éboulements à partir d'une configuration (ω, h), quelle que soit la configuration-grain h.

Exemple 4.7
On reprend encore le modèle du poisson développé dans les exemples précédents. Bien sûr les configurations-flèches ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, *etc* sont toutes équivalentes. En revanche, si

on pose $\omega' = (b_3, b_7, b_8)$, alors ω' n'est plus équivalente aux autres. En effet, (b_7) est un cycle de σ^τ, et donc il ne peut pas exister d'entier k_2, tel que $(\sigma^\tau)^{k_2}(b_7) = b_6$. $\diamond$

$-$ *o* $-$

On peut calculer la taille d'une classe donnée et le nombre de classes pour cette relation d'équivalence. Si x_i est un sommet régulier, il est défini par un cycle de σ : $x_i = (b_1, \ldots, d_i)$. La permutation σ^τ admet $g_i = \texttt{pgcd}(\tau_i, d_i)$ cycles différents en x_i (cf. Figure 4.9), et chacun d'eux est de longueur $p_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$:

$$(b_1, b_{\tau_i+1}, \ldots, b_{(p_i-1)\tau_i+1}) \ \ldots \ (b_{g_i}, b_{\tau_i+g_i}, \ldots, b_{(p_i-1)\tau_i+g_i}),$$

où les indices sont à considérer dans $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$. On peut associer une couleur différente à

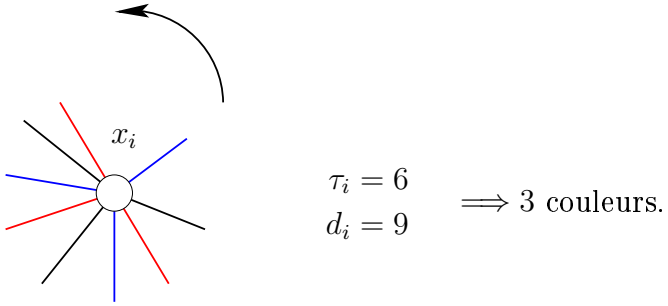


FIG. 4.9 – Nombre de classes de brins 'équivalents' en x_i.

chacun de ces cycles, deux brins d'une même couleur étant 'équivalents' (cf. Figure 4.9).

Au final, on a donc :

Proposition 4.3 *Si on pose* $g_i = \texttt{pgcd}(\tau_i, d_i)$ *et* $p_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$, *alors :*
- $(\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} g_i)$ *est le nombre de classes d'équivalence pour* $\sim$,
- *et* $(\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} p_i)$ *est la taille de chacune des classes.*

Démonstration :

En effet, deux configurations-flèches sont équivalentes si pour tout sommet régulier, leurs brins adjacents à ce sommet ont la même couleur. $\square$

On peut vérifier que $(\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} g_i)(\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} p_i) = (\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} g_i p_i)$ est égal à $(\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} d_i)$, ce qui nous redonne bien le nombre total de configurations-flèches possibles.

$-$ *o* $-$

Vecteurs d'éboulement

Finalement, on peut préciser la notion de *vecteurs d'éboulement*. En un sommet régulier x_i, on n'a plus un vecteur, mais un cycle de vecteurs. Lors du premier éboulement de x_i on doit ajouter le premier vecteur du cycle, mais lors du deuxième on doit ajouter

le vecteur suivant, et lors du troisième le vecteur encore suivant, et ainsi de suite. De plus le cycle de vecteurs dépend de la configuration-flèche de départ. Si $\varphi = (\omega, h)$ et si $(b_1 = \omega_i, b_2, \ldots, b_k)$ est le cycle de σ^τ auquel appartient ω_i ($k = \mathtt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$), alors le cycle de vecteurs d'éboulement de φ en x_i est $(\mathtt{topp}(b_1), \mathtt{topp}(b_2), \ldots, \mathtt{topp}(b_k))$ (cf. Proposition 4.2 page 155).

Exemple 4.8
On peut reprendre l'Exemple 4.6 page 155. La permutation σ^τ se factorise en :

$$\sigma^\tau = (b_0, b_1)\ \ (b_2, b_3, b_4, b_5)\ \ (b_6)(b_7)\ \ (b_8, b_9).$$

Ainsi le cycle de vecteurs d'éboulement en x_1 de la configuration $\varphi_0 = (\omega_0, h_0)$ vaut :

$$(\mathtt{topp}(b_3), \mathtt{topp}(b_4), \mathtt{topp}(b_5), \mathtt{topp}(b_2)),$$

comme $\omega_{0,1} = b_3$ et que (b_2, b_3, b_4, b_5) est le cycle de σ^τ auquel b_3 appartient. En particulier, on a vu qu'on a bien ajouté $\mathtt{topp}(b_3)$ lors du premier éboulement de x_1, $\mathtt{topp}(b_4)$ lors du second, $\mathtt{topp}(b_5)$ lors du troisième, *etc.*
En x_2, le cycle de vecteurs d'éboulement de φ_0 vaut :

$$(\mathtt{topp}(b_6))$$

car (b_6) est un cycle de σ^τ, et en x_3 il vaut :

$$(\mathtt{topp}(b_8), \mathtt{topp}(b_9)).$$

$\diamond$

Indépendamment de toute configuration de base, la notion de vecteur d'éboulement en un sommet régulier correspond donc à celle d'ensemble de cycles de vecteurs, une sorte de convolution $\diamond$ de σ^τ et de $\mathtt{topp}$. Pour x_i régulier défini par $x_i = (b_1, \ldots, d_i)$, on aurait l'ensemble :

$$(\sigma^\tau \ \diamond\ \mathtt{topp})(x_i) = \left\{ \begin{array}{c} (\mathtt{topp}(b_1), \mathtt{topp}(b_{\tau_i+1}), \ldots, \mathtt{topp}(b_{(p_i-1)\tau_i+1})) \\ \vdots \\ (\mathtt{topp}(b_{g_i}), \mathtt{topp}(b_{\tau_i+g_i}), \ldots, \mathtt{topp}(b_{(p_i-1)\tau_i+g_i})), \end{array} \right.$$

où les indices sont à considérer dans $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$.

$$-\ o\ -$$

4.2.3 Séquences d'opérations

Éboulement du puits

Comme pour le modèle du tas de sable, on veut autoriser l'éboulement du puits sous certaines conditions. Cet éboulement se définit de la même manière. Le vecteur d'éboulement du puits est le vecteur β, qui est le vecteur de la ligne correspondant au

puits dans la matrice laplacienne du graphe, privée de son coefficient diagonal. Autrement dit, β est la somme des vecteurs `send` pour les brins adjacents au puits.

Un éboulement du puits correspond alors à l'ajout du vecteur β à la configuration-grain : si $\varphi' = (\omega', h')$ est obtenue à partir de $\varphi = (\omega, h)$ après l'éboulement du puits, alors $h' = h + \beta$ et $\omega' = \omega$. On note toujours $\varphi \overset{\mathtt{q}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi'$.

Exemple 4.9
En reprenant le modèle du poisson vu aux exemples précédents, on peut calculer les vecteurs `send` pour les brins b_0 et b_1 adjacents au puits `q` :

$$\mathtt{send}(b_0) = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \mathtt{send}(b_1) = (1, 0, 0).$$

Ces vecteurs sont toujours positifs, et le vecteur β en est la somme : $\beta = \mathtt{send}(b_0) + \mathtt{send}(b_1) = (2, 0, 0)$. Mais β est aussi le vecteur ligne de la matrice laplacienne du graphe qui correspond au puits `q`, privée de son terme diagonal :

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \beta = (2, 0, 0).$$

◇

$$-\ o\ -$$

Séquences d'éboulements et d'anti-éboulements

À ce stade, on a généralisé la notion d'éboulement d'un sommet, qu'il soit régulier ou non. Comme l'opération d'éboulement est réversible, on appelle *anti-éboulement* du sommet x_i, l'opération inverse de celle d'éboulement de x_i. En particulier, si on éboule puis anti-éboule un même sommet, alors la configuration reste la même. Si φ^i est obtenue à partir de φ en éboulant le sommet régulier x_i, on note :

$$\varphi^i \overset{\bar{i}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi,$$

l'anti-éboulement du sommet régulier x_i. Si $x_i = \mathtt{q}$, on note $\varphi^i \overset{\bar{\mathtt{q}}}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi$.

On peut alors considérer des séquences d'éboulements et d'anti-éboulements successifs. Pour une séquence d'opérations $s = \langle s_1, s_2, \ldots, s_k \rangle$, on note :

- $s_i = x_j$, si la $i^{\text{ème}}$ opération de s consiste à ébouler le sommet x_j,
- $s_i = \overline{x_j}$, si au contraire elle consiste à anti-ébouler le sommet x_j.

Ces notations sont un peu abusives, mais très intuitives cependant. On note aussi :

- $x_i \in s$ si la séquence s contient l'éboulement du sommet x_i,
- et $\overline{x_i} \in s$ si elle contient l'anti-éboulement de ce sommet.

Si φ est une configuration à laquelle on applique la séquence d'opérations s définie par $s = \langle s_1, s_2, \ldots, s_k \rangle$, et si φ' est alors la configuration obtenue après l'application de cette séquence, on note :

$$\varphi \overset{s}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi',$$

ou $\varphi \rightsquigarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \varphi'$ si on ne veut pas préciser la séquence s. On dit que la séquence s *mène* à la configuration φ' à partir de la configuration φ. La relation $\rightsquigarrow\!\!\!\!\!\rightarrow$ est la *clôture réflexive, symétrique* et *transitive* de la relation d'éboulement d'un sommet quelconque $\succ\!\!\!\!\rightarrow$. En particulier, c'est une relation d'équivalence et nous l'étudions au prochain chapitre. À ce propos, la notation est un peu trompeuse. On définit dans la suite la relation $\rightsquigarrow$ comme la *clôture réflexive* et *transitive* de $\rightarrowtail$, en en faisant ainsi une relation d'ordre. Nous faisons en fait aussi ces choix pour ne pas multiplier les notations, et paradoxalement, nous pensons que le propos en est plus clair, même si l'attention du lecteur est d'autant plus sollicitée.

Pour une séquence qui ne contient que des éboulements (resp. des anti-éboulements), on parle de *séquence d'éboulements* (resp. de *séquence d'anti-éboulements*).

Définition 4.4 Si s est une séquence d'opérations, on appelle *séquence d'éboulements* de s la sous-séquence de ses éboulements, et *séquence d'anti-éboulements* de s la sous-séquence de ses anti-éboulements.

Enfin, on appelle *support* de la séquence s l'ensemble des sommets impliqués dans la séquence. Si A est le support de s, alors :

$$\forall x_i,\ x_i \in A \Longleftrightarrow x_i \in s \text{ ou } \overline{x_i} \in s.$$

Exemple 4.10
On considère la séquence s suivante :

$$s = \langle x_1, \mathtt{q}, x_2, \overline{\mathtt{q}}, x_1, \overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3, \overline{x_2}\rangle.$$

Elle consiste à ébouler x_1, le puits, x_2, à anti-ébouler le puits, puis à ébouler x_1 à nouveau, *etc.* En particulier, la séquence s n'est ni une séquence d'éboulements, ni une séquence d'anti-éboulements, car elle contient à la fois des éboulements et des anti-éboulements.

On note s_e la séquence d'éboulements de s, et s_a celle de ses anti-éboulements. On a alors :

$$\begin{aligned} s_e &= \langle x_1, \mathtt{q}, x_2, x_1, x_3\rangle, \\ s_a &= \langle \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_2}\rangle. \end{aligned}$$

Si A_e, resp. A_a, sont les supports de s_e, resp. s_a, alors :

$$\begin{aligned} A_e &= \{\mathtt{q}, x_1, x_2, x_3\}, \\ A_a &= \{\mathtt{q}, x_1, x_2\}. \end{aligned}$$

$\diamond$

$$-\ o\ -$$

On note par '.' la concaténation de deux séquences d'opérations. Si s et t sont deux séquences, la séquence $s.t$ est définie par :

$$s.t = \langle s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_l\rangle.$$

On veut aussi étendre la notation $^-$ aux séquences d'opérations. Si $s = \langle s_1, s_2, \ldots, s_k \rangle$ est une séquence d'opérations, on note :

$$\overline{s} = \langle \overline{s_1}, \overline{s_2}, \ldots, \overline{s_k} \rangle.$$

Exemple 4.11
Si on reprend l'Exemple 4.10 page précédente, on a :

$$\begin{aligned} \overline{s_e} &= \langle \overline{x_1}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_2}, \overline{x_1}, \overline{x_3} \rangle, \\ \overline{s_a} &= \langle \mathtt{q}, x_1, x_2, x_2 \rangle, \end{aligned}$$

et de même :

$$\overline{s} = \langle \overline{x_1}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_2}, \mathtt{q}, \overline{x_1}, x_1, x_2, \overline{x_3}, x_2 \rangle.$$

◇

La définition de $\overline{s}$ ne correspond pas à celle que l'on est en mesure d'attendre. En effet, cette notation correspond à une notion d'inverse, et $\overline{s}$ définie de cette manière ne semble pas convenir. En fait, $\overline{s}$ est bien l'inverse de s au sens où si on applique s puis $\overline{s}$ à une configuration quelconque, alors la configuration obtenue est bien celle de départ. Autrement dit, $s.\overline{s}$ est en quelque sorte l'identité. Ce résultat est une conséquence directe de la commutativité des éboulements et anti-éboulements entre eux, que nous montrons dans la suite (Proposition 4.4).

$$-\ o\ -$$

Shot-set d'une séquence

On étend la définition du shot-set aux séquences d'opérations :

Définition 4.5 Si s est une séquence d'opérations, on définit le *shot set* de la séquence s par :

$$\mathtt{shot}(s) = \{\underbrace{\mathtt{q}, \ldots, \mathtt{q}}_{occ(\mathtt{q})}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{occ(x_1)}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{occ(x_n)}, \underbrace{\overline{\mathtt{q}}, \ldots, \overline{\mathtt{q}}}_{occ(\overline{\mathtt{q}})}, \underbrace{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_1}}_{occ(\overline{x_1})}, \ldots, \underbrace{\overline{x_n}, \ldots, \overline{x_n}}_{occ(\overline{x_n})}\},$$

où $occ(x_i)$ (resp. $occ(\overline{x_i})$) est le nombre d'occurrences de x_i (resp. de $\overline{x_i}$) dans s.

Le shot-set de s est le multi-ensemble de ses opérations élémentaires, avec les notations que nous avons choisies. Le shot-set d'une séquence tire son importance de la proposition suivante, qui étend la Proposition 1.2 page 36 au modèle flèche-hauteur :

Proposition 4.4 (Commutativité des éboulements (MFH)) *Deux séquences ayant le même shot-set conduisent à la même configuration.*

Démonstration : Eu égards à la Proposition 4.2 page 155, on sait que l'éboulement du sommet régulier x_i implique deux choses. Si la flèche pointe sur le brin b_j adjacent à x_i, alors l'éboulement de x_i consiste à faire pointer la flèche sur $\sigma^\tau(b_j)$ et à ajouter le vecteur $\mathtt{topp}(b_j)$ à la configuration-grain. En particulier, ces deux opérations ne dépendent que

du fait que la flèche pointe sur b_j. Or le seul moyen de la modifier est d'ébouler ou d'anti-ébouler x_i. Cela signifie que les opérations qui concernent des sommets différents sont commutatives. Bien sûr, les opérations d'éboulements et d'anti-éboulements d'un même sommet commutent aussi entre elles.

De plus, si les shot-sets des séquences sont les mêmes, cela signifie que chaque sommet régulier a été éboulé et anti-éboulé un même nombre de fois. Par la Proposition 4.2 on en déduit que les configurations finales sont les mêmes. □

Exemple 4.12
Prenons toujours le modèle du poisson (cf. Exemple 4.4 et Figure 4.6 page 153). On choisit deux séquences d'opérations qui ont le même shot-set. Prenons les deux séquences d'éboulements suivantes :

$$\begin{aligned} s_1 &= \langle x_1, x_3, x_2, x_3 \rangle, \\ s_2 &= \langle x_3, x_3, x_2, x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Ces deux séquences admettent le shot-set $\{x_1, x_2, x_3, x_3\}$. Elles correspondent en fait à la même action sur l'ensemble des configurations. Prenons la configuration φ_0 de la Figure 4.10 page suivante par exemple. Cette figure nous montre l'application de la séquence s_1 sur φ_0 :

$$\varphi_0 \overset{1}{\rightsquigarrow} \varphi_1 \overset{3}{\rightsquigarrow} \varphi_2 \overset{2}{\rightsquigarrow} \varphi_3 \overset{3}{\rightsquigarrow} \varphi_4.$$

En particulier, on peut remarquer que cette séquence ne fait intervenir que des éboulements légaux de sommets réguliers. On dit que s_1 est une séquence valide pour φ_0 (une définition précise est donnée plus loin). La configuration obtenue à la fin est la configuration φ_4. Comme le montre la Figure 4.11 page suivante, c'est aussi la configuration que l'on obtient si on applique s_2 à φ_0. Comme on le montre bientôt, ce n'est pas parce que deux séquences conduisent à la même configuration que leur shot-set est égal (cf. Proposition 4.6 page 165). ◇

$$-\ o\ -$$

On peut trouver une réciproque de la Proposition 4.4 page 162. Pour cela, on note $\mathcal{V}$ l'idéal engendré par les ensembles $\{x_i, \overline{x_i}\}$ quel que soit x_i. On peut alors définir une relation d'équivalence entre séquences d'opérations *via* leur shot-set :

Définition 4.6 On dit que deux séquences d'opérations s et t sont *équivalentes*, et on note $s \equiv t$, si :

$$\texttt{shot}(s)\ \Delta\ \texttt{shot}(t)\ \in\ \mathcal{V}.$$

Ici, Δ est la différence symétrique de deux ensembles :

$$A\ \Delta\ B\ =\ (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Comme $\mathcal{V}$ est un idéal de multi-ensembles, la relation $\equiv$ est bien une relation d'équivalence. Et par définition même de $\mathcal{V}$, on a une caractérisation très simple des séquences équivalentes :

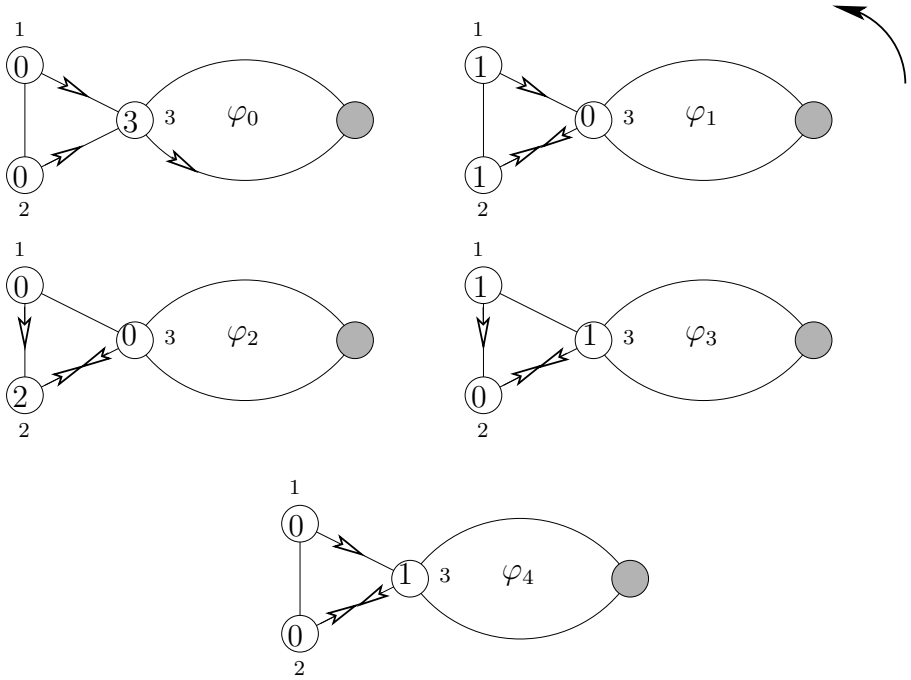


FIG. 4.10 – Application de la séquence d'éboulements s_1 à φ_0.

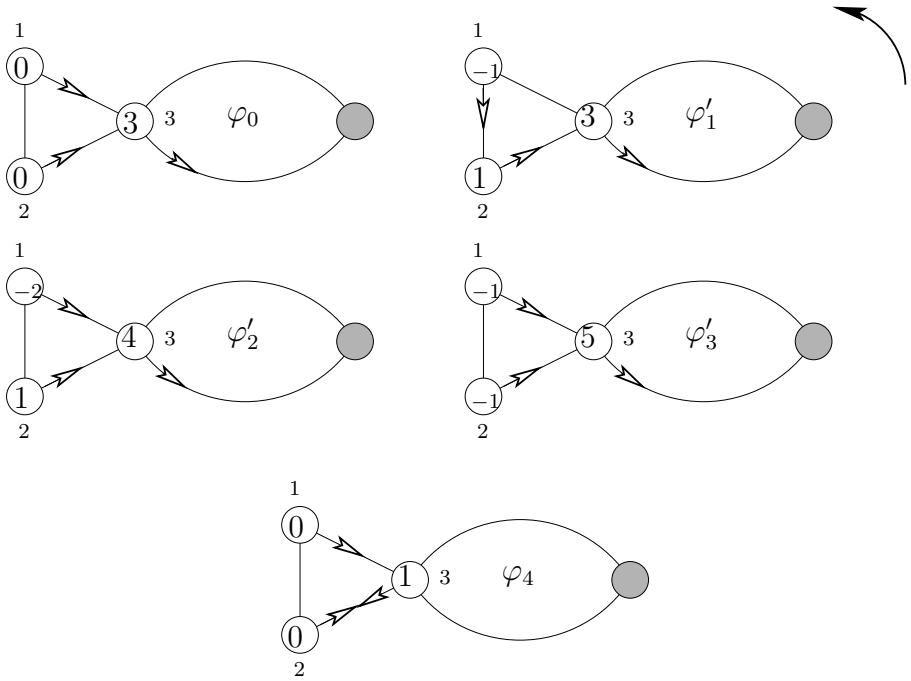


FIG. 4.11 – Application de la séquence d'éboulements s_2 à φ_0.

Lemme 4.5 *Soit s et s' deux séquences d'opérations, alors :*

$$s \equiv s' \iff \forall x_i,\ occ(x_i) - occ(\overline{x_i}) = occ'(x_i) - occ'(\overline{x_i}).$$

Exemple 4.13
On continue avec l'Exemple 4.10 page 161. On peut calculer quelques shot-sets. Par exemple :

$$\texttt{shot}(s) = \{\texttt{q}, x_1, x_1, x_2, x_3, \overline{\texttt{q}}, \overline{x_1}.\overline{x_2}, \overline{x_2}\}.$$

Si on regarde la séquence s' définie par :

$$s' = \langle x_4, x_1, x_4, x_3, \overline{x_4}, \overline{x_2}, \overline{x_4}\rangle,$$

alors :

$$\texttt{shot}(s) = \{x_4, x_1, x_3, x_4, \overline{x_2}, \overline{x_4}, \overline{x_4}\}.$$

En particulier, $s \equiv s'$. En effet :

$$\texttt{shot}(s) \bigtriangledown \texttt{shot}(s') = \{\texttt{q}, x_1, x_2, x_4, x_4, \overline{\texttt{q}}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_4}, \overline{x_4}\} \in \mathcal{V}.$$

En effet, si le modèle contient 4 sommets réguliers, alors :

$$\mathcal{V} = \{\emptyset, \{\texttt{q}, \overline{\texttt{q}}\}, \{x_1, \overline{x_1}\}, \{x_2, \overline{x_2}\}, \{x_3, \overline{x_3}\}, \{x_4, \overline{x_4}\}, \{\texttt{q}, \texttt{q}, \overline{\texttt{q}}, \overline{\texttt{q}}\}, \{\texttt{q}, x_1, \overline{\texttt{q}}, \overline{x_1}\}, \ldots\}.$$

On peut alors vérifier le Lemme 4.5 page précédente :

$$\begin{array}{rcl}
occ(\texttt{q}) - occ(\overline{\texttt{q}}) = 1 - 1 & = & 0 - 0 = occ'(\texttt{q}) - occ'(\overline{\texttt{q}}) \\
occ(x_1) - occ(\overline{x_1}) = 2 - 1 & = & 1 - 0 = occ'(x_1) - occ'(\overline{x_1}) \\
occ(x_2) - occ(\overline{x_2}) = 1 - 2 & = & 0 - 1 = occ'(x_2) - occ'(\overline{x_2}) \\
occ(x_3) - occ(\overline{x_3}) = 1 - 0 & = & 1 - 0 = occ'(x_3) - occ'(\overline{x_3}) \\
occ(x_4) - occ(\overline{x_4}) = 0 - 0 & = & 2 - 2 = occ'(x_4) - occ'(\overline{x_4})
\end{array}$$

$\diamond$

$-\ o\ -$

En fait, la Proposition 4.4 page 162 est vraie pour des séquences équivalentes. En effet, toute séquence dont le shot-set est inclus dans $\mathcal{V}$ correspond à l'identité, par définition de l'idéal $\mathcal{V}$, et par commutativité des opérations d'éboulements et d'anti-éboulements. Ainsi, l'action sur l'ensemble des configurations du modèle est un invariant de classe pour la relation $\equiv$.

Si on ajoute quelques contraintes, on obtient une réciproque de la Proposition 4.4 :

Proposition 4.6 *Soit deux séquences s et s' qui ne contiennent que des sommets réguliers et qui mènent à la même configuration. Alors $s \equiv s'$.*

Démonstration :

On suppose dans un premier temps que s et s' ne contiennent que des éboulements (de sommets réguliers). Soit φ une configuration quelconque, et φ' la configuration obtenue à partir de φ en appliquant s ou s'. Soit x_i un sommet régulier. On note $occ(x_i)$ (resp. $occ'(x_i)$) le nombre d'occurrences de x_i dans s (resp. dans s'). Comme s et s' conduisent toutes deux à φ' à partir de φ, $occ(x_i) - occ'(x_i)$ est un multiple de $\texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$. Or,

ébouler $\texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$ fois le sommet x_i est équivalent à ajouter le vecteur $\lambda_i \Delta_i^{\texttt{q}}$ à la configuration-grain courante, où $\lambda_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/d_i$ et où $\Delta^{\texttt{q}}$ est le mineur principal de la matrice laplacienne du graphe par rapport au puits $\texttt{q}$. Comme ces vecteurs, pour tout sommet x_i régulier, sont indépendants ($\texttt{det}(\lambda_i \Delta_i^{\texttt{q}})_{x_i \neq \texttt{q}} \neq 0$), on en déduit que les shot-sets de s et s' sont égaux.

Si s et s' sont des séquences d'anti-éboulements (de sommets réguliers), on applique le résultat précédent à $\overline{s}$ et $\overline{s'}$.

Dans le cas général, si s et s' sont des séquences d'opérations quelconques sur des sommets réguliers, on peut montrer de manière similaire que les nombres $occ(x_i) - occ(\overline{x_i})$ et $occ'(x_i) - occ'(\overline{x_i})$ sont égaux pour tout sommet régulier x_i. Or c'est aussi vrai pour $\texttt{q}$. Par le Lemme 4.5 page 164, on a le résultat. □

$-\ o\ -$

Les shot-sets des séquences d'une même classe d'équivalence ont une structure très forte.

Proposition 4.7 *Soit s une séquence d'opérations. On note $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$ le shot-set de s quotienté par $\mathcal{V}$. Alors, l'ensemble des shot-sets des séquences équivalentes à s est un treillis distributif infini qui admet $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$ comme plus petit élément.*

Démonstration :

On note I le plus petit multi-ensemble pour l'inclusion des shot-sets de séquences équivalentes à s. Clairement $I \subseteq \texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$. Mais, si s' est une séquence équivalente à s, alors $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s) \subseteq \texttt{shot}(s')$. En effet, $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s) \nabla \texttt{shot}(s') \in \mathcal{V}$. Mais comme $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s) \notin \mathcal{V}$, cela signifie que $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s) \subseteq \texttt{shot}(s') \cap \texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$, donc que $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s) \subseteq \texttt{shot}(s')$. Comme c'est vrai pour toute séquence s' équivalente à s, on a bien $I = \texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$.

Mais par définition, l'ensemble des shot-sets des séquences équivalentes à s est alors isomorphe au treillis de l'idéal $\mathcal{V}$ ordonné par inclusion (cf. Exemple 4.14 page ci-contre). En effet, comme $\mathcal{V}$ est un idéal infini, l'ensemble de ses parties ordonné par inclusion est un treillis distributif infini. D'où le résultat. □

Si $\mathcal{V}$ est défini pour n sommets réguliers, le treillis de l'idéal $\mathcal{V}$ ordonné par inclusion est en fait un coin infini de dimension $n+1$. S'il n'y a qu'un sommet régulier par exemple, il correspond au réseau $\mathbb{N}^2$.
Pour une séquence s quelconque, on définit la séquence normalisée de s :

Définition 4.7 Soit s une séquence d'opérations. On appelle *séquence normalisée* de s, notée $\texttt{norm}(s)$, la séquence :

$$\texttt{norm}(s) = \langle \underbrace{\texttt{q}, \ldots, \texttt{q}}_{nb(\texttt{q})}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{nb(x_1)}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{nb(x_n)}, \underbrace{\overline{\texttt{q}}, \ldots, \overline{\texttt{q}}}_{nb(\overline{\texttt{q}})}, \underbrace{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_1}}_{nb(\overline{x_1})}, \ldots, \underbrace{\overline{x_n}, \ldots, \overline{x_n}}_{nb(\overline{x_n})} \rangle,$$

où $nb(x_i)$ (resp. $nb(\overline{x_i})$) est le nombre d'occurrence de x_i (resp. $\overline{x_i}$) dans $\texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$.

En particulier, $\texttt{norm}(s) \equiv s$, et $\texttt{shot}(\texttt{norm}(s)) = \texttt{shot}_{\texttt{min}}(s)$. La séquence $\texttt{norm}(s)$ est en fait un représentant très naturel de la $\equiv$-classe de s. En particulier, elle agit de la même manière que s sur l'ensemble des configurations. Elle a la particularité supplémentaire

que les supports de sa séquence d'éboulements et de sa séquence d'anti-éboulements sont disjoints. Si elle n'est constituée que de d'opérations concernant des sommets réguliers, alors elle est en fait de taille minimale.

Exemple 4.14
La Figure 4.12 montre le treillis du coin infini de dimension 2. Il s'agit du treillis de l'idéal

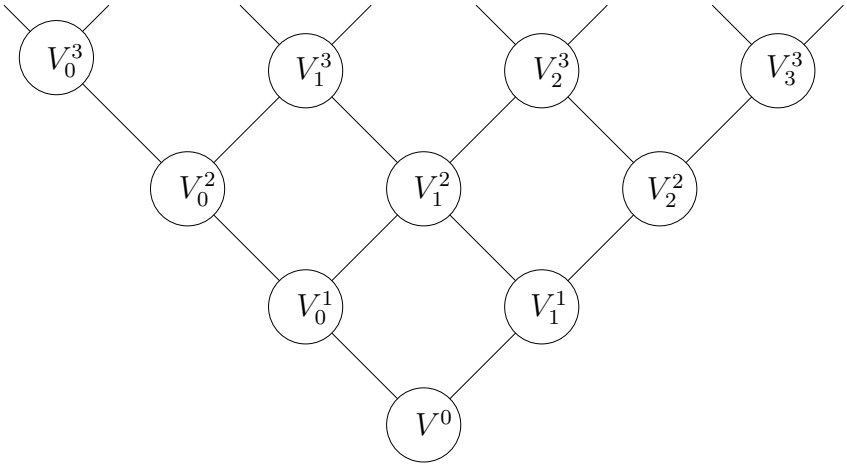


FIG. 4.12 – Treillis du coin infini de dimension 2.

$\mathcal{V}$ quand le modèle admet un seul sommet régulier x_1, mais aussi du treillis des shot-sets des configurations équivalentes à $\texttt{norm}(s)$ pour une séquence s quelconque d'opérations sur le même modèle. Le tableau suivant donne un exemple de cette correspondance, quand $s = \langle x_1, \mathtt{q}, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}\rangle$.

	$\mathcal{V}$	$\{\texttt{shot}(s') \mid s' \equiv s\}$
V^0	$\emptyset$	$\texttt{shot}(\texttt{norm}(s)) = \{x_1\}$
V_0^1	$\{\mathtt{q}, \overline{\mathtt{q}}\}$	$\{\mathtt{q}, x_1, \overline{\mathtt{q}}\}$
V_1^1	$\{x_1, \overline{x_1}\}$	$\{x_1, x_1, \overline{x_1}\}$
V_0^2	$\{\mathtt{q}, \mathtt{q}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}\}$	$\{\mathtt{q}, \mathtt{q}, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}\}$
V_1^2	$\{\mathtt{q}, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}\}$	$\{\mathtt{q}, x_1, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}\}$
V_2^2	$\{x_1, x_1, \overline{x_1}, \overline{x_1}\}$	$\{x_1, x_1, x_1, \overline{x_1}, \overline{x_1}\}$
V_0^3	$\{\mathtt{q}, \mathtt{q}, \mathtt{q}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}\}$	$\{\mathtt{q}, \mathtt{q}, \mathtt{q}, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}\}$
V_1^3	$\{\mathtt{q}, \mathtt{q}, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}\}$	$\{\mathtt{q}, \mathtt{q}, x_1, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}\}$
V_2^3	$\{\mathtt{q}, x_1, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}, \overline{x_1}\}$	$\{\mathtt{q}, x_1, x_1, x_1, \overline{\mathtt{q}}, \overline{x_1}, \overline{x_1}\}$
V_3^3	$\{x_1, x_1, x_1, \overline{x_1}, \overline{x_1}, \overline{x_1}\}$	$\{x_1, x_1, x_1, x_1, \overline{x_1}, \overline{x_1}, \overline{x_1}\}$

Le shotset de la séquence s correspond à l'ensemble V_1^2. Cet exemple illustre l'isomorphisme de treillis expliqué dans la démonstration de la Proposition 4.7 page ci-contre. On passe d'un treillis à l'autre en ajoutant ou retranchant $\texttt{shot}(\texttt{norm}(s))$ à chacun des éléments. Ici, on ajoute ou retranche $\{x_1\}$. ◇

– *o* –

Séquences valides

Si la séquence s est une séquence d'éboulements telle que chacun des éboulements est valide, c'est-à-dire si toutes les opérations de la séquence sont des éboulements de sommets réguliers, et si φ^i, la configuration obtenue après les i premiers éboulements de la séquence s, est une configuration positive pour $1 \leq i \leq k$, alors on dit que la séquence s est *valide* pour φ et on écrit :

$$\varphi \overset{s}{\rightsquigarrow} \varphi^k \equiv \varphi \overset{i_1}{\rightarrowtail} \varphi^1 \overset{i_2}{\rightarrowtail} \varphi^2 \overset{i_3}{\rightarrowtail} \cdots \overset{i_k}{\rightarrowtail} \varphi^k.$$

On écrit aussi tout simplement $\varphi \rightsquigarrow \varphi^k$ si on n'a pas besoin de spécifier la séquence s. En fait, la relation $\rightsquigarrow$ est la *clôture réflexive* et *transitive* de la relation d'éboulement valide $\rightarrowtail$.

Une configuration φ' est dite *atteignable* à partir de φ s'il existe une séquence s valide pour φ telle que $\varphi \overset{s}{\rightsquigarrow} \varphi'$.

$-\ o\ -$

4.3 Relaxation

Après la définition des éboulements (avec les mêmes subtilités au sujet des éboulements légaux et forcés), on peut parler de la relaxation d'une configuration d'un MFH. Dans la suite, on donne les démonstrations de thérorèmes et propositions qui étendent des résultats mentionnés dans le cadre du modèle du tas de sable. En particulier, on reprend la même définition de l'avalanche.

Définition 4.8 Soit φ une configuration d'un MFH. On appelle *avalanche* toute séquence d'éboulements valide pour φ qui mène à une configuration stable.

Le graphe sous-jacent au modèle est connexe et contient un puits. La démonstration de la Proposition 1.3 page 37 se généralise et on peut énoncer un résultat similaire pour le modèle flèche-hauteur :

Proposition 4.8 (Taille finie des avalanches (MFH)) *Toute avalanche est de taille finie.*

Démonstration :

On procède par l'absurde. Soit φ une configuration. Supposons que φ admette une avalanche de taille infinie. Alors, comme le modèle admet un nombre fini de sommets, il existe un sommet qui s'éboule un nombre infini de fois. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des sommets qui s'éboulent un nombre infini de fois. Par la remarque précédente $\mathcal{I}$ est non vide. Mais $\mathcal{I}$ ne contient pas le puits, donc $S \setminus \mathcal{I}$ est aussi non vide. Comme G est connexe, il existe un sommet x_i de $\mathcal{I}$ qui admet un voisin x_j qui appartient à $S \setminus \mathcal{I}$.

Comme x_i s'éboule un nombre infini de fois, il fait effectuer à sa flèche un nombre infini de tours. À chaque tour, il a donné au moins un grain à x_j. Mais comme x_j ne s'éboule qu'un nombre fini de fois, celui-ci accumule un nombre infini de grains. Or le système ne contient qu'un nombre fini de grains au début, et les éboulements de sommets réguliers ne créent aucun grain. Ainsi, on obtient une contradiction.

Par conséquent, l'avalanche ne peut pas être de taille infinie. □

Proposition 4.9 *Soit φ une configuration, et $\mathcal{I} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ l'ensemble de ses sommets instables. Alors $s = \langle x_{i_{p(1)}}, x_{i_{p(2)}}, \ldots, x_{i_{p(m)}} \rangle$ est une séquence valide pour φ, quelle que soit la permutation p de $[\![1, m]\!]$.*

Démonstration : La démonstration est immédiate. Quand on éboule un des sommets x_{i_k} de $\mathcal{I}$, un sommet $x_j \neq x_{i_k}$ reçoit un nombre de grains positif ou nul. En particulier, s'il était instable avant l'éboulement de x_{i_k}, alors il le reste après. Si $\mathcal{I}'$ est l'ensemble des sommets instables de la configuration obtenue aprés l'éboulement de x_{i_k}, alors $\mathcal{I} \setminus \{x_{i_k}\} \subseteq \mathcal{I}'$. D'où le résultat. □

Avant de redéfinir le concept de relaxation, on doit généraliser au modèle flèche-hauteur la Proposition 1.5 page 39 :

Proposition 4.10 (Shot-set des avalanches (MFH)) *Deux avalanches qui sont issues d'une même configuration initiale ont le même shot-set. En particulier, elles ont même taille.*

Démonstration :

Soit φ une configuration et s_1 et s_2 deux avalanches de φ. On suppose par l'absurde que $\texttt{shot}(s_1) \neq \texttt{shot}(s_2)$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe un élément qui apparaît plus souvent dans s_1 que dans s_2. Parmi ces éléments, on choisit celui dont l'occurrence surnuméraire arrive en premier. On note le sommet correspondant x_1. Ainsi, si x_1 apparaît k_1 fois dans s_1 et k_2 fois dans s_2, on a : $k_1 > k_2$. De plus, les éboulements qui apparaissent avant la $(k_2+1)^{\text{ème}}$ occurrence de x_1 dans s_1 apparaissent tous dans s_2. On note φ_1 la configuration obtenue après la séquence valide s_1 tronquée avant la $(k_2+1)^{\text{ème}}$ occurrence de x_1, et s_1^t cette séquence. Le sommet x_1 est instable dans φ_1. Or, après la séquence s_2, le sommet x_1 ne s'est éboulé que k_2 fois, mais a reçu au moins autant de grains car $\texttt{shot}(s_1^t) \subseteq \texttt{shot}(s_2)$ par hypothèse. Ainsi, x_1 est instable après la séquence s_2. Absurde car s_2 est une avalanche. D'où le résultat : $\texttt{shot}(s_1) = \texttt{shot}(s_2)$. □

— *o* —

Par la Proposition 4.4 page 162, on peut donc bien définir, dans ce cadre aussi, le concept de *relaxation* :

Définition 4.9 (Relaxation) On appelle *relaxation* tout processus d'éboulement d'une avalanche. Si φ est une configuration, on note $\hat{\varphi}$ la configuration stable obtenue après relaxation de φ, et $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ce processus.

On rappelle ici, qu'on a pris une définition très générale pour la notion de configuration stable. À savoir qu'une configuration qui ne contient aucun sommet instable est stable. En particulier, une configuration qui contient un nombre de grains négatif en chaque sommet est donc stable.

Proposition 4.11 *Soit φ_0, φ_1 et φ_2 trois configurations, s^v_{01} une séquence d'éboulements valide pour φ_0 qui mène à φ_1, et s_{02} une séquence d'éboulements quelconque qui mène à φ_2 à partir de φ_0. Alors,*

$$\texttt{shot}(s_{02}) \subseteq \texttt{shot}(s^v_{01}) \Longleftrightarrow \varphi_2 \rightsquigarrow \varphi_1.$$

En particulier, si s^v_{01} est une avalanche, i.e. *$\varphi_1 = \hat{\varphi}_0$, alors $\varphi_2 \mapsto \varphi_1$.*

Démonstration :

Supposons $\texttt{shot}(s_{02}) \subseteq \texttt{shot}(s^v_{01})$. Si $\texttt{shot}(s_{02}) = \texttt{shot}(s^v_{01})$, le résultat est immédiat. Sinon, on note $I = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ l'ensemble des sommets correspondants à des éboulements de $\texttt{shot}(s^v_{01}) \setminus \texttt{shot}(s_{02})$. On peut montrer que cet ensemble contient au moins un sommet qui est instable pour φ_2. On considère le premier éboulement de s^v_{01} qui n'apparaît pas dans s^v_{02}. Soit x_i le sommet correspondant. Par définition, $x_i \in I$. On note j le nombre de fois que x_i s'est éboulé dans s^v_{01} avant cet éboulement, et s' la séquence d'éboulement tronquée juste avant le $(j+1)^{\text{ème}}$ éboulement de x_i dans s^v_{01}. En fait, x_i est instable dans φ_2. En effet, juste avant son $(j+1)^{\text{ème}}$ éboulement dans s^v_{01}, il est instable. Or tous les éboulements de s' ont eu lieu dans s_{02} par hypothèse. Les autres éboulements n'ont pu qu'augmenter le nombre de grains en x_i. Ainsi, x_i est instable dans φ_2.

Par induction, tant que $\texttt{shot}(s_{02}) \subseteq \texttt{shot}(s^v_{01})$ et $\texttt{shot}(s_{02}) \neq \texttt{shot}(s^v_{01})$, on peut toujours choisir un éboulement valide dans $\texttt{shot}(s^v_{01}) \setminus \texttt{shot}(s_{02})$. D'où $\varphi_2 \rightsquigarrow \varphi_1$.

Montrons la réciproque. Supposons $\varphi_2 \rightsquigarrow \varphi_1$. On note s une séquence d'éboulements valide pour φ_2 qui mène à φ_1. Par la Proposition 4.6 page 165, on a :

$$s_{02}.s \equiv s^v_{01}.$$

Mais comme toutes ces séquences d'opérations sont des séquences d'éboulements, on a l'égalité des shot-sets :

$$\texttt{shot}(s_{02}) \cup \texttt{shot}(s) = \texttt{shot}(s^v_{01}).$$

En particulier, on a bien $\texttt{shot}(s_{02}) \subseteq \texttt{shot}(s^v_{01})$. □

$$-\ o\ -$$

Comme on l'a évoqué précédemment, la relation $\rightsquigarrow$ est en fait une relation d'ordre sur l'ensemble des configurations. Par définition, c'est la clôture réflexive et transitive de la relation d'éboulement d'un sommet régulier. Seule l'anti-symétrie est à prouver.

Supposons $\varphi \rightsquigarrow \varphi'$ et $\varphi' \rightsquigarrow \varphi$ avec $\varphi \neq \varphi'$. Cela signifie qu'on peut trouver une séquence d'éboulements valide pour φ aussi longue qu'on veut. C'est absurde par finitude de la relaxation. Donc $\varphi = \varphi'$ et l'anti-symétrie de $\rightsquigarrow$ est démontrée.

Pour clarifier les choses, on préfère choisir une notation plus conventionnelle quand il s'agit de parler d'ordre :

Définition 4.10 Soit $\mathcal{M}^\tau_{\mathsf{q}}$ un modèle flèche-hauteur. On munit l'ensemble de ses configurations de l'ordre partiel $\succeq$ défini par :

$$\varphi_2 \succeq \varphi_1 \text{ si } \varphi_2 \rightsquigarrow \varphi_1.$$

À partir d'une configuration quelconque φ, on peut considérer le graphe orienté $G_\varphi = (V_\varphi, A_\varphi)$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \in V_\varphi \quad &\text{si} \quad \varphi_1 \preceq \varphi, \\ (\varphi_1, \varphi_2) \in A_\varphi \quad &\text{si} \quad \varphi_1 \rightarrowtail \varphi_2. \end{aligned}$$

En particulier, l'ensemble des sommets V_φ est l'ensemble des configurations atteignables par φ.

Proposition 4.12 *Le graphe orienté G_φ est le diagramme de Hasse d'un treillis inférieurement localement distributif (ILD) dont la relation de couverture est la relation d'éboulement légal d'un sommet.*

Démonstration :

Il faut montrer que $(V_\varphi, \preceq)$ est un treillis ILD. On sait déjà qu'il s'agit d'un ensemble ordonné. Soit φ_1 et φ_2 deux configurations de V_φ. On note s_1 (resp.s_2) une séquence d'éboulements valide pour φ qui mène à φ_1 (resp. φ_2), et a_1 (resp.a_2) une avalanche de φ_1 (resp. φ_2). On note alors $\varphi_{\texttt{sup}}$ la configuration dont une séquence d'éboulements de shot set $\texttt{shot}(s_1) \setminus (\texttt{shot}(s_1) \cap \texttt{shot}(s_2))$ mène à φ_1, et on note $\varphi_{\texttt{inf}}$ la configuration à laquelle mène une séquence d'éboulements de shot set $\texttt{shot}(a_1) \setminus (\texttt{shot}(a_1) \cap \texttt{shot}(a_2)))$ à partir de φ_1. Il est alors trivial de voir que $\varphi_{\texttt{sup}}$ (resp. $\varphi_{\texttt{inf}}$) est la borne sup (resp. inf) de φ_1 et φ_2 pour $\preceq$. Ainsi, $(V_\varphi, \preceq)$ est bien un treillis.

Le fait qu'il soit ILD découle directement de la Proposition 4.9 page 169 (cf. Préliminaires). □

$-\ o\ -$

Opérations $+$ et $\oplus$

Dans le cadre du modèle du tas de sable, les opérations $+$ et $\oplus$ étaient des lois de composition interne. On montre au chapitre suivant, dans quelle mesure on peut étendre la notion d'addition de deux configurations. Pour l'heure, on utilise ces symboles pour noter les mêmes actions, même s'il ne s'agit plus de lois de composition interne.

Si $\varphi = (\omega, h)$ est une configuration d'un MFH, et si $\mathtt{h}$ en est une configuration-grain, on note $\varphi + \mathtt{h}$ la configuration $(\omega, h + \mathtt{h})$. En particulier, un éboulement du puits se note donc $\varphi + \beta$. De même, $\varphi \oplus \mathtt{h}$ est la configuration obtenue après relaxation de $\varphi + \mathtt{h}$.

Bien que ces opérations ne soient pas symétriques, on garde la notation infixe, et on écrit aussi :

$$\begin{aligned} \varphi + \mathtt{h}_1 + \mathtt{h}_2 + \cdots + \mathtt{h}_k \quad &:= \quad (\cdots((\varphi + \mathtt{h}_1) + \mathtt{h}_2) + \cdots + \mathtt{h}_k), \\ \varphi \oplus \mathtt{h}_1 \oplus \mathtt{h}_2 \oplus \cdots \oplus \mathtt{h}_k \quad &:= \quad (\cdots((\varphi \oplus \mathtt{h}_1) \oplus \mathtt{h}_2) \oplus \cdots \oplus \mathtt{h}_k). \end{aligned}$$

Il est relativement clair que les éboulements et les ajouts de grains commutent. C'est en particulier vrai pour les éboulements valides :

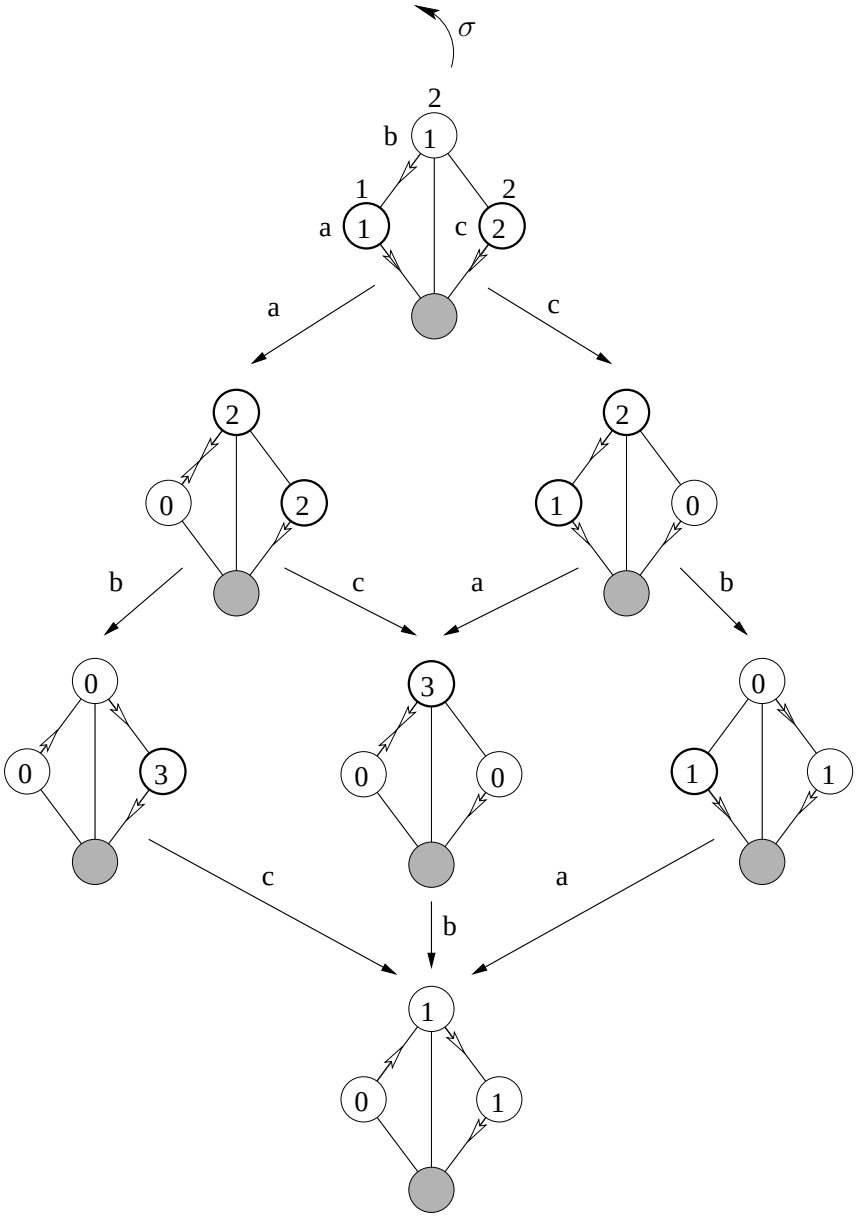


FIG. 4.13 – Treillis ILD de la relaxation.

Proposition 4.13 *Soit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}$ *des configurations et* $\mathtt{h}_1, \ldots, \mathtt{h}_k$ *des configurations-grains. Alors,*

$$\forall 1 \leq j \leq k,\ \varphi_j + \mathtt{h}_j \rightsquigarrow \varphi_{j+1} \implies \varphi_1 + \mathtt{h}_1 + \cdots + \mathtt{h}_k \rightsquigarrow \varphi_{k+1}.$$

Démonstration :
Le résultat est immédiat par récurrence sur k. Pour $k = 1$ c'est trivial.
Pour $k > 1$, on applique le résultat au rang $k - 1$. On a alors :

$$\varphi_1 + \mathtt{h}_1 + \cdots + \mathtt{h}_{k-1} \rightsquigarrow \varphi_k,$$

d'où :

$$\varphi_1 + \mathtt{h}_1 + \cdots + \mathtt{h}_{k-1} + \mathtt{h}_k \rightsquigarrow \varphi_k + \mathtt{h}_k \rightsquigarrow \varphi_{k+1}.$$

□

Une conséquence de cette proposition est que l'on peut écrire :

$$\varphi \oplus \mathtt{h_1} \oplus \cdots \oplus \mathtt{h_k} = \varphi \oplus (\mathtt{h_1} + \cdots + \mathtt{h_k}).$$

On introduit sous peu des opérateurs que l'on a déjà vu agir dans le cadre du modèle du tas de sable. Il s'agit des opérateurs $\mathtt{a}_i$ qui sont définis par :

$$\forall \varphi,\ \mathtt{a}_i\varphi = \varphi \oplus \mathtt{e}_i,$$

où :

$$\mathtt{e}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}).$$

La remarque précédente implique que ces opérateurs commutent :

Proposition 4.14 *Les opérateurs* $\mathtt{a}_i$ *commutent deux-à-deux :*

$$\forall x_i, x_j \neq \mathtt{q},\ \mathtt{a}_i\mathtt{a}_j = \mathtt{a}_j\mathtt{a}_i.$$

$$-\ o\ -$$

Chapitre 5

Configurations récurrentes et groupe du MFH

Sommaire

— o —

Dans ce chapitre, on montre comment la notion de configuration récurrente se généralise au contexte du modèle flèche-hauteur. On peut alors trouver une version générale de nombreux théorèmes vus dans la première partie. En particulier, on trouve un critère de reconnaissance des configurations récurrentes étendu et un algorithme thermique lui-aussi étendu. En effet, les versions classiques de ces théorèmes ne sont plus valides dans le modèle général.

Enfin, on montre comment définir un groupe abélien sur ce nouveau modèle, et quels sont ses liens avec le groupe du tas de sable sur le graphe sous-jacent au modèle. On montre aussi comment on peut étendre la notion d'addition au modèle flèche-hauteur, même si elle ne peut plus se définir de manière naturelle comme dans le cadre du modèle du tas de sable. La plupart de ces résultats sont présentés dans [21].

— o —

5.1 Configurations récurrentes

On introduit les opérateurs a_i, définis comme sur le modèle du tas de sable. Pour tout sommet régulier x_i de $\mathcal{M}^\tau_\mathsf{q}$, l'opérateur a_i est l'opérateur qui ajoute un grain sur le sommet x_i et effectue la relaxation.

Les opérateurs a_i sont donc toujours définis par :

$$\forall \varphi,\ \mathsf{a}_i\varphi = \varphi \oplus \mathsf{e}_i,$$

où :

$$\mathsf{e}_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-i}).$$

On peut généraliser cette remarque. Si g est un opérateur généré par les a_i, c'est-à-dire une séquence d'opérateurs a_i, par commutativité des a_i (cf. Proposition 4.14 page 173), on peut écrire :

$$g = \prod_{x_i \neq \mathsf{q}} \mathsf{a}_i^{\mathsf{g}_i},$$

on a alors :

$$\forall \varphi,\ g\varphi = \varphi \oplus \mathsf{g}.$$

On dit que la configuration-grain g est une *écriture* de l'opérateur g.

$$-\ o\ -$$

5.1.1 Chaînes de Markov

Comme pour le modèle du tas de sable, les opérateurs a_i nous permettent de définir une chaîne de Markov. Mais pour le modèle flèche-hauteur, on doit définir une chaîne de Markov pour toute configuration-flèche possible, car il n'y a pas de configuration-flèche canonique.

Définition 5.1 On note $\mathcal{C}_\omega$ la chaîne de Markov homogène définie par :
- $\varphi_0 = (\omega,0)$ est l'état initial,
- une transition consiste en deux étapes :
  - choisir aléatoirement un sommet régulier x_i quelconque,
  - appliquer a_i à la configuration.

Les états de la *chaîne de Markov* $\mathcal{C}_\omega$ sont des configurations stables de $\mathcal{M}^\tau_\mathsf{q}$. Les configurations qui correspondent aux états récurrents de la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$ sont appelées *récurrentes*.

La proposition suivante, montre que la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$ restreinte à ses états récurrents est *irréductible*, donc qu'elle est *irréductible*.

Proposition 5.1 *Si φ_1 et φ_2 sont des configurations récurrentes de $\mathcal{C}_\omega$, alors il existe une séquence g d'opérateurs a_i telle que $g\varphi_1 = \varphi_2$.*

Démonstration :

En effet, par la Proposition 4.13 page 172, les éboulements valides et les ajouts de grains commutent. Ainsi, si on note g_2, resp. g_1, un opérateur qui a mené à φ_1, resp. φ_2, à partir de $\varphi_0 = (\omega, 0)$, *i.e.* tel que $g_2\varphi_0 = \varphi_1$, resp. $g_1\varphi_0 = \varphi_2$, alors, $g_1\varphi_1$ est égal à $g_2\varphi_2$.

Comme la chaîne de Markov est homogène, on peut noter P_1, resp. P_2, la probabilité de revenir à l'état φ_1, resp. φ_2, partant de φ_1, resp. φ_2. Par définition, comme φ_1 et φ_2 sont des configurations récurrentes, on a $P_1 = P_2 = 1$. Mais partant de φ_2, on a une probabilité au moins égale à $(1/n)^{|g_2|} > 0$ d'atteindre $g_2\varphi_2$. Cela signifie qu'il existe un opérateur g_3 qui permet d'atteindre φ_2 à partir de $g_2\varphi_2$. Mais alors $g = g_3g_1$ vérifie bien $g\varphi_1 = \varphi_2$. □

Ainsi, la matrice de la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$ restreinte à ses états récurrents est irréductible. En particulier, cela signifie qu'il n'y a qu'une classe de communication pour les états récurrents de $\mathcal{C}_\omega$.

Une conséquence directe est qu'il existe une unique probabilité limite. On peut même être plus précis :

Théorème 5.2 *Soit ω une configuration-flèche quelconque. Les configurations récurrentes de la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$ sont toutes équiprobables.*

Démonstration : Par la proposition précédente, la matrice de transition de la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$ est irréductible. Par conséquent, il existe une unique probabilité stationnaire. Mais l'équiprobabilité est valide et correspond donc à la solution. □

Ce théorème n'implique pas le fait qu'il existe une distribution limite. En effet, suivant la période de la chaîne de Markov, une telle distribution peut ne pas exister. Le comportement est alors périodique autour de la distribution stationnaire (uniforme ici), et il converge en moyenne de Cesaro vers cette distribution.

On note E_ω l'ensemble des configurations récurrentes de la chaine de Markov $\mathcal{C}_\omega$, et $\mathcal{E}$ l'union des E_ω pour toutes les configurations-flèches initiales ω possibles.

Lemme 5.3 *La chaîne de Markov $\mathcal{C}'_\omega$ définie par les mêmes transitions que $\mathcal{C}_\omega$, mais dont l'état initial est (ω, h') admet les mêmes états récurrents que $\mathcal{C}_\omega$.*

Démonstration :

Soit $\varphi = (\omega, h)$ une configuration récurrente de $\mathcal{C}_\omega$. On peut trouver une configuration-grain h'' telle que $h' + h'' \geq h$. Mais alors la configuration stable associée à $(\omega, h' + h'')$ est atteignable depuis φ (avec l'opérateur dont une écriture est $h' + h'' - h$). Ainsi, φ est une configuration récurrente de $\mathcal{C}'_\omega$.
La réciproque se fait de manière similaire. □

$-\ o\ -$

5.1.2 Super-éboulements et facteurs multiplicatifs

Le Théorème 1.6 page 42 (critère de Dhar) n'est plus valable dans ce contexte. Cependant, il admet lui aussi une généralisation. Avant de l'énoncer, il est nécessaire d'introduire

d'autres définitions.

Pour trouver un équivalent du critère de Dhar, il faut chercher un invariant sur les configurations récurrentes. On commence par regarder quelles sont les opérations qui laissent invariantes les configurations-flèches. Si on se donne un sommet régulier x_i, combien de fois au minimum faut-il l'ébouler pour que la flèche retrouve sa position initiale ? On a déjà vu que ce nombre est en fait la taille du cycle de σ^τ à laquelle la flèche appartient. Les cycles de σ^τ qui correspondent à un même sommet x_i ont tous la même taille $p_i = \mathtt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$. Ainsi, après p_i éboulements du sommets x_i, la flèche en x_i retrouve la même position pour la première fois (cf. Figure 5.1).

Définition 5.2 On appelle *super-éboulement* du sommet régulier x_i, le fait d'ébouler $\mathtt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$ fois ce sommet.

Lors d'un super-éboulement, la flèche revient à la même place. En particulier, un super-éboulement est indépendant de la position de la flèche. De plus, comme cela correspond à un nombre minimal d'éboulements du sommet pour que cette propriété soit vraie, on a une propriété réciproque : si après n éboulements du sommet x_i la flèche est revenue au même endroit, alors ces éboulements correspondent à un nombre entier de super-éboulements, *i.e.* $n = k\ \mathtt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$. On peut remarquer qu'en un sommet régulier x_i, un super-éboulement correspond à un éboulement si et seulement si $\tau_i = d_i$. Ainsi, pour le modèle du tas de sable, les deux notions d'éboulement et de super-éboulement sont confondues.

Une autre conséquence est que chaque brin incident au sommet est visité un même nombre de fois lors du super-éboulement (cf. Figure 5.1). On donne un nom à ce nombre :

Définition 5.3 Soit x_i un sommet régulier de $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$. On appelle *facteur multiplicatif* ou *facteur de multiplicité* de x_i, noté λ_i, la quantité :

$$\lambda_i = \frac{\mathtt{ppcm}(\tau_i, d_i)}{d_i} = \frac{\tau_i}{\mathtt{pgcd}(\tau_i, d_i)}.$$

Le *facteur multiplicatif* de x_i est donc le nombre de grains que le sommet x_i envoie sur chacun de ses brins incidents, lors d'un super-éboulement, autrement dit le nombre de tours complets effectués par la flèche lors d'un super-éboulement..

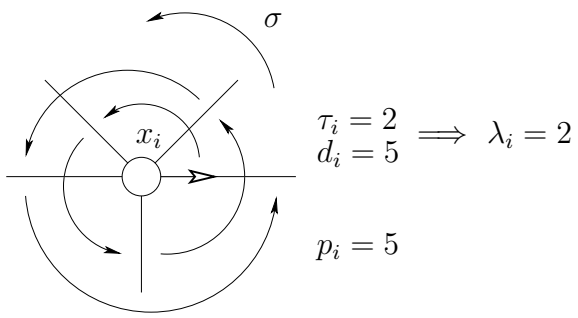


FIG. 5.1 – Super-éboulement d'un sommet régulier x_i et interprétation de λ_i.

On note λ le ppcm des facteurs multiplicatifs des sommets réguliers, et on l'appelle *facteur multiplicatif du modèle*. De manière générale, on appelle facteur multiplicatif d'un

ensemble de sommets réguliers $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ le ppcm des facteurs multiplicatifs des sommets de l'ensemble. Eu égards à l'interprétation faite à l'instant, il s'agit du nombre de grains envoyés par chaque brin incident à un sommet x_{i_j} quand ceux-ci s'éboulent un nombre minimal de fois de manière à :

- conserver les flèches dans leur position initiale,
- envoyer un même nombre de grains par brins incidents à un sommet x_{i_j}.

Pour cet ensemble d'éboulements, on parle de super-éboulement de l'ensemble de sommets $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$.

Définition 5.4 Soit $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ un ensemble de k sommets réguliers. Il existe un unique k-uplet positif minimal $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ tel que :

$$\eta_1\lambda_{i_1} \;=\; \cdots \;=\; \eta_k\lambda_{i_k} = \texttt{ppcm}(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}).$$

On appelle alors *super-éboulement* de l'ensemble $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ toute séquence d'éboulements correspondant à η_1 super-éboulements de x_{i_1}, η_2 super-éboulements de x_{i_2},..., et η_k super-éboulements de x_{i_k}.

Exemple 5.1
On considère le modèle du poisson (cf. Figure 4.6 page 153) et une configuration φ sur ce modèle (cf. Figure 5.2).

$$\varphi \;=\; \begin{cases} (2,1,0), \\ (b_3, b_6, b_8). \end{cases}$$

La configuration φ est stable. Un super-éboulement du sommet x_1 correspond à 4 éboule-

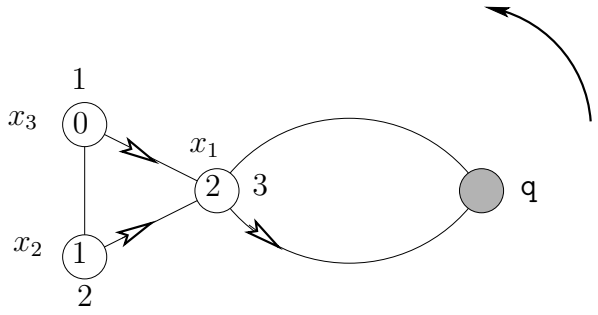


FIG. 5.2 – Configuration φ sur le modèle du poisson.

ments de ce sommet, car $\texttt{ppcm}(3,4)/3 = 4$. En effet, les cycles de σ^τ pour ce sommet sont de longueur 4 (il n'y en a qu'un : (b_2, b_3, b_4, b_5)). Si on effectue un super-éboulement de x_1, on obtient la même configuration-flèche, et la configuration-grain devient $(-10, 4, 3)$. En effet, le facteur multiplicatif de ce sommet vaut 3 : lors du super-éboulement, 3 grains partent par chaque brin incident à x_1, c'est-à-dire par les 4 brins b_3, b_4, b_5 et b_2.

Un éboulement de x_2 est un super-éboulement, car $\tau_2 = d_2$. En revanche, un super-éboulement de x_3 correspond à deux éboulements. Mais pour ces deux sommets, on a le même facteur multiplicatif $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Considérons l'ensemble des deux sommets $\{x_1, x_2\}$. Le facteur multiplicatif de cet ensemble vaut $\texttt{ppcm}(3,1) = 3$. Le 2-uplet de la Définition 5.4 est $(1,3)$. Un super-éboulement

de l'ensemble $\{x_1, x_2\}$ correspond à 1 super-éboulement de x_1 et 3 super-éboulements de x_2, c'est-à-dire à 4 éboulements de x_1 et 3 éboulements de x_2. Après ces éboulements, les flèches n'ont pas bougé, et les brins incidents aux sommets de l'ensemble $\{x_1, x_2\}$ ont tous été visités 3 fois : il s'agit des brins b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 et b_7. En particulier, x_1 a donné autant de grains à x_2 qu'il en a reçus de sa part. Au final, un super-éboulement de $\{x_1, x_2\}$ à partir de φ donne la configuration-grain $(-7, -2, 6)$. ◇

– *o* –

5.1.3 Critère de Dhar étendu

Nous avons désormais les outils pour caractériser les configurations récurrentes. Dans un premier temps, nous réexprimons le fait qu'un super-éboulement de l'ensemble des sommets réguliers est équivalent à λ anti-éboulements du puits :

Lemme 5.4 *Soit $\varphi = (\omega, h)$ une configuration de $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$. Soit $s = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rangle$ une séquence d'éboulements. Si la séquence s appliquée à φ mène à φ, alors chaque brin de $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$ a été visité $m\lambda$ fois pour un certain entier m positif ou nul.*

Démonstration :

Si s est vide, c'est clair : on a $m = 0$.

Supposons s non vide. On a déjà vu que les éboulements étaient commutatifs (Proposition 4.4 page 162). Au sein de la séquence s, on peut regrouper les éboulements d'un même sommet pour les effectuer à la suite les uns des autres. La conservation de la configuration-flèche implique qu'on ne réalise en fait que des super-éboulements de sommets réguliers ou des éboulements du puits $\mathtt{q}$. Ainsi, les brins autour d'un sommet x_i sont visités un même nombre de fois multiple de λ_i, si $x_i \neq \mathtt{q}$, et multiple de 1 si $x_i = \mathtt{q}$. Si on pose $\lambda_{\mathtt{q}} = 1$, on peut noter $m_i\lambda_i$ le nombre de fois que les brins incidents à x_i, régulier ou non, sont visités lors du processus.

La conservation du nombre de grains, quant à elle, implique alors que chaque brin est visité un même nombre de fois, c'est-à-dire que $m_i\lambda_i = \mathtt{cste}$. Si ce n'est pas le cas, on peut choisir un minimum local strict pour $m_i\lambda_i$. On suppose sans perte de généralité que x_i est un sommet régulier (sinon on prend un maximum local strict et on peut faire un raisonnement similaire). Alors x_i admet un voisin x_j tel que $m_i\lambda_i < m_j\lambda_j$. En outre, pour tous ses voisins x_k, on a $m_i\lambda_i \leq m_k\lambda_k$. Ainsi, x_i n'a jamais envoyé plus de grains qu'il n'en a reçus le long d'une arête, mais en a reçu strictement plus le long d'au moins une arête. Au total, il a reçu au moins un grain de plus qu'il n'en a donnés. Cela est absurde par hypothèse de conservation du nombre de grains en chaque sommet régulier. Ainsi, $m_i\lambda_i$ est une quantité constante, notée k.

Par définition du $\mathtt{ppcm}$, comme $k = m_i\lambda_i$ pour tout sommet régulier x_i, on peut écrire k sous la forme $m\lambda$, car $\lambda = \mathtt{ppcm}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. □

– *o* –

Nous démontrons maintenant le théorème fondamental qui nous permet d'énoncer une généralisation du critère de Dhar au modèle flèche-hauteur.

Théorème 5.5 (Théorème fondamental) *Soit $\mathcal{M}_{\mathrm{q}}^{\tau}$ un modèle flèche-hauteur, et φ une configuration. On suppose que $\varphi + k\lambda\beta \mapsto \varphi$. Alors $\varphi + \lambda\beta \mapsto \varphi$.*

Démonstration :

Comme φ est le résultat d'une relaxation, c'est une configuration stable. Par commutativité des éboulements, on peut alors considérer le jeu suivant : on répète k fois :

- on éboule λ fois le puits (on ajoute $\lambda\beta$),
- on relaxe la configuration.

Par hypothèse, à la fin de la k$^{\text{ème}}$ étape, on obtient φ.

On s'intéresse aux k séquences de brins $(s_i)_{1\leq i\leq k}$ qui correspondent à ce jeu. Chacune de ces séquences commence par λ fois $(b_1, b_2, \ldots, b_{d_{\mathrm{q}}})$, où $b_1, b_2, \ldots, b_{d_{\mathrm{q}}}$ sont les brins adjacents au puits. On montre que tout brin apparaît au plus λ fois dans chaque série. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, et prenons le premier brin b qui apparaît strictement plus de λ fois dans une série. Il ne s'agit pas d'un brin incident au puits. Soit donc x_i le sommet régulier incident à ce brin. Cela signifie que x_i est instable avant que b apparaisse pour la $(\lambda+1)^{\text{ème}}$ fois dans la série. En outre, x_i a déjà effectué λ/λ_i super-éboulements. En particulier, il a donné λd_i grain. Il en a donc reçu strictement plus au cours de l'étape correspondante (car la configuration finale de l'étape précédente est stable). Cela veut dire qu'il a donc reçu au moins $\lambda + 1$ grains le long d'un brin, c'est-à-dire qu'il existe un brin différent de b qui est apparu au moins $\lambda + 1$ fois dans la série avant la $\lambda+1^{\text{ème}}$ occurrence de b dans cette série. C'est absurde, car on avait supposé que b était le premier brin à apparaître plus de λ fois dans cette série. Ainsi, tout brin apparaît au plus λ fois dans chaque série.

Mais au final, chaque brin apparaît $k\lambda$ fois si on considère l'ensemble de toutes les séries (Lemme 5.4 page précédente), car on a imposé que les brins adjacents au puits apparaissent tous exactement $k\lambda$ fois. Par conséquent, tout brin apparaît exactement λ fois dans une série. Mais alors, on retrouve la même configuration φ à la fin de chacune des k étapes. D'où le résultat. □

$-\ o\ -$

La généralisation du Théorème 1.6 page 42 (critère de Dhar) au modèle flèche-hauteur s'énonce alors :

Théorème 5.6 (Critère de récurrence étendu (MFH)) *Soit λ le facteur multiplicatif d'un modèle flèche-hauteur $\mathcal{M}_{\mathrm{q}}^{\tau}$. Si φ est une configuration du modèle,*

$$\varphi \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \varphi + \lambda\beta \mapsto \varphi.$$

Démonstration :

Si $\varphi + \lambda\beta \mapsto \varphi$ il est clair que φ apparaît un nombre infini de fois dans la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$, c'est-à-dire que φ est une configuration récurrente.

Réciproquement, montrons que si φ est récurrente, alors $\varphi+\lambda\beta \mapsto \varphi$. Supposons qu'il existe une configuration récurrente φ_0 telle que $\varphi_0+k\lambda\beta \mapsto \varphi_0$. Si φ_1 est une configuration

récurrente (de la même chaîne de Markov bien sûr), on a aussi $\varphi_1 + k\lambda\beta \mapsto \varphi_1$. En effet, il existe une configuration-grain $\mathtt{h}$ telle que $\varphi_0 + \mathtt{h} \mapsto \varphi_1$, par la Proposition 5.1 page 176. Par commutativité des éboulements on peut alors écrire :

$$\varphi_0 + \mathtt{h} + k\lambda\beta \rightsquigarrow \varphi_1 + k\lambda\beta \mapsto \varphi_2,$$

d'une part, et :

$$\varphi_0 + \mathtt{h} + k\lambda\beta \rightsquigarrow \varphi_0 + \mathtt{h} \mapsto \varphi_1,$$

d'autre part. D'où $\varphi_2 = \varphi_1$, *i.e.* $\varphi_1 + k\lambda\beta \mapsto \varphi_1$.

Maintenant on peut considérer le jeu suivant : partant de la configuration récurrente $\varphi = (\omega, h)$, on ajoute $\lambda\beta$ (on éboule λ fois le puits) et on relaxe. On répète cette opération une infinité de fois. Les configurations qui apparaissent dans ce jeu sont des configurations récurrentes de E_ω. Comme elles sont en nombre fini, au moins une d'elle, notée φ', apparaît un nombre infini de fois. En particulier, il existe un entier $k > 0$ tel que $\varphi' + k\lambda\beta \mapsto \varphi'$. Mais alors cela est aussi vrai pour φ d'après la remarque précédente.

Enfin, on peut alors appliquer le Théorème 5.5 page précédente à φ et on a immédiatement que $\varphi + \lambda\beta \mapsto \varphi$. □

Il est à noter que des cas particuliers de ce théorème ont été démontrés ou utilisés dans [50] et surtout [56], où le cas du réseau constitué d'arbres de Bethe est traité.

Exemple 5.2
On considère le modèle de la Figure 5.3. Dans ce cas, on a $\lambda_a = 1$, $\lambda_b = 2$ et $\lambda_c = 1$. En conséquence, le facteur multiplicatif du modèle vaut 2, *i.e.* $\lambda = 2$. Le critère de Dhar

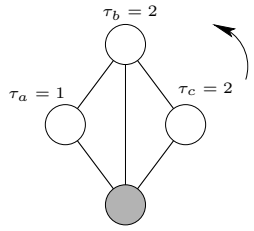


FIG. 5.3 – Modèle du blason.

(Théorème 5.6 page précédente) nous permet de savoir si une configuration donnée est récurrente ou pas. La Figure 5.4 page suivante, par exemple, montre l'application du critère à une configuration. On éboule λ fois le puits, et on effectue la relaxation. Comme la configuration obtenue à la fin est différente de la configuration d'origine, on en déduit que la configuration initiale n'est pas une configuration récurrente.

Mais le critère de Dhar est avant tout un moyen de reconnaître les configurations récurrentes. La configuration obtenue après la relaxation précédente est récurrente (cf. Figure 5.5 page ci-contre).

◇

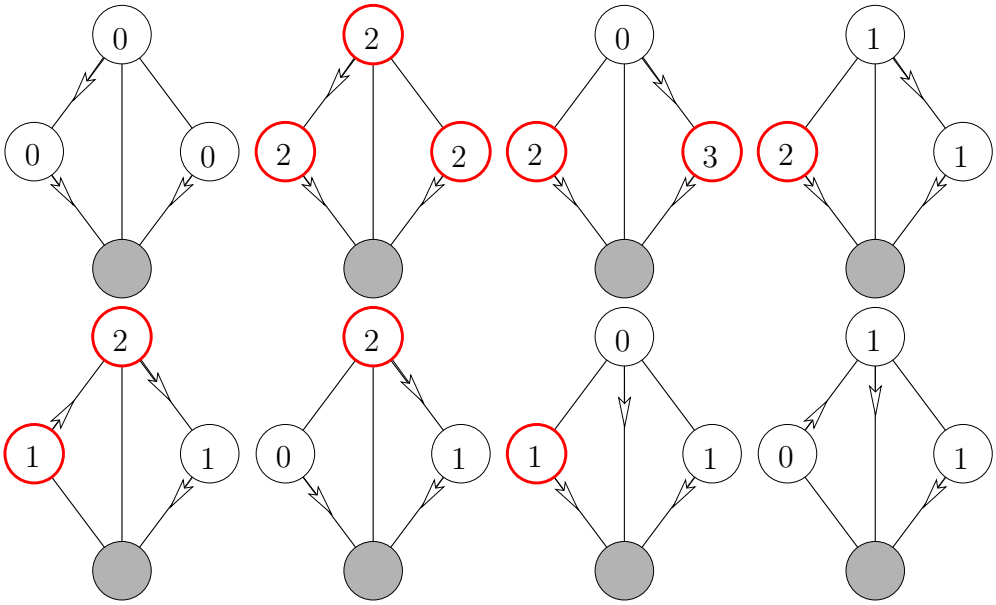


FIG. 5.4 – Reconnaissance d'une configuration non-récurrente.

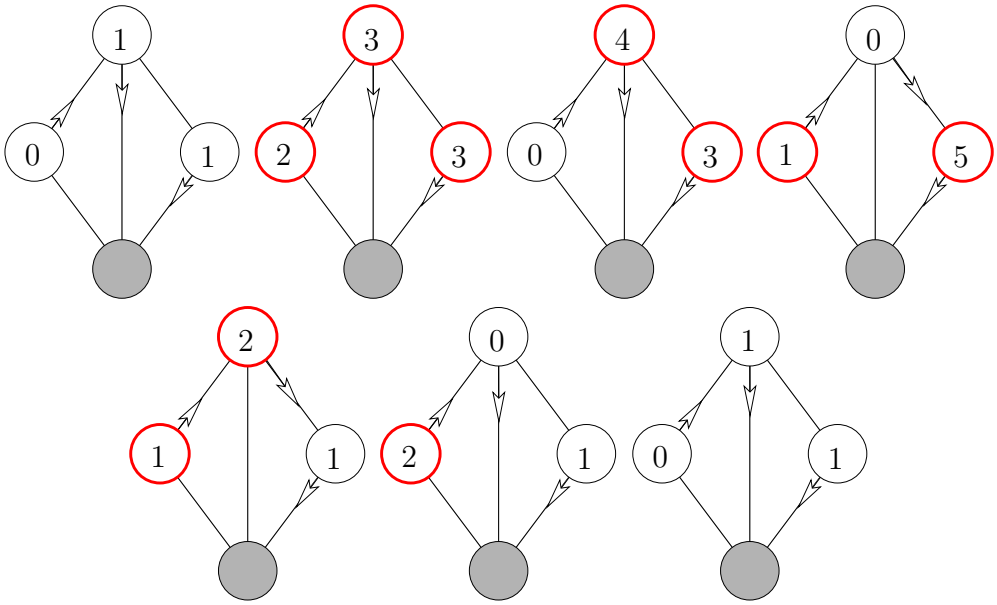


FIG. 5.5 – Reconnaissance d'une configuration récurrente.

5.1.4 Relations d'équivalence et algorithme thermique étendu

Avant de trouver une généralisation de l'algorithme thermique, il faut en trouver une de la relation d'équivalence $\mathcal{R}^q$. En effet, il faut donner un sens au fait d'associer une configuration récurrente donnée à une configuration. Comme dans le modèle du tas de sable, on cherche une relation d'équivalence assez naturelle, telle que chacune de ses classes contiennent une et une seule configuration récurrente. On ne peut pas reprendre

la Définition 1.11 page 41 directement et définir une relation d'équivalence à partir de l'idéal $< \lambda_1 \Delta_1^{\mathtt{q}}, \ldots, \lambda_n \Delta_n^{\mathtt{q}} >$, car elle serait beaucoup trop fine. En effet, dans ce cas, il pourrait exister des classes d'équivalence dépourvues de configurations récurrentes. Un autre problème est que l'on a défini plusieurs chaînes de Markov, là où il en existait une unique et naturelle pour le modèle du tas de sable. On commence donc par définir une relation d'équivalence dont les classes restreintes à $\mathcal{E}$ sont les configurations récurrentes d'une chaîne de Markov donnée.

Équivalence par flèche

On étend naturellement la relation d'équivalence $\sim$ entre configurations-flèches (cf. Définition 4.3 page 157) aux configurations elles-mêmes.

Définition 5.5 On dit que deux configurations $\varphi_1 = (\omega_1, h_1)$ et $\varphi_2 = (\omega_2, h_2)$ sur $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$ sont équivalentes par flèche, et on note $\varphi_1 \sim \varphi_2$, si $\omega_1 \sim \omega_2$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des configurations de $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$.

Exemple 5.3
Reprenons le modèle du blason de la Figure 5.3 page 182. La Figure 5.6 donne un exemple de deux configurations (φ et φ') équivalentes par flèche qui ne le sont pas avec une troisième (φ''). On peut remarquer que sur ce modèle il y a 2 classes d'équivalence pour

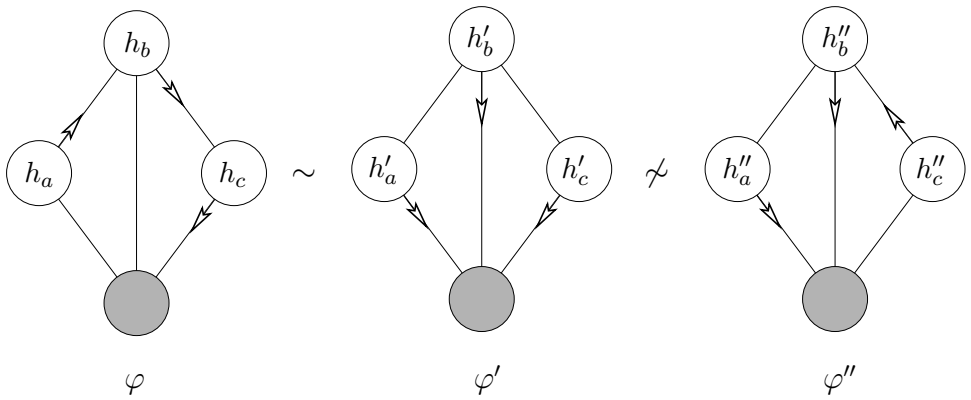


FIG. 5.6 – Relation d'équivalence $\sim$.

$\sim$. En effet, on a $g_a = \mathtt{pgcd}(\tau_a, d_a) = 1$, $g_b = 1$ et $g_c = 2$. Par la Proposition 4.3 page 158, il y a alors $1 \times 1 \times 2$ classes d'équivalence pour $\sim$. Tout est lié au fait que $\tau_c = d_c = 2$. Si deux configurations n'ont pas la même flèche en x_c, alors elles ne peuvent pas être équivalentes par flèche : il est impossible de faire bouger la flèche et donc de passer d'une configuration-flèche à l'autre par des éboulements de x_c. En revanche, si elles ont la même flèche en x_c, alors elles sont équivalentes par flèche, car les autres sommets ne posent pas de problème. $\diamond$

La proposition suivante fait le lien entre cette relation d'équivalence, et les chaînes de Markov que nous avons définies :

Proposition 5.7 *On considère deux configurations $\varphi_1 = (\omega_1, h_1)$ et $\varphi_2 = (\omega_2, h_2)$ sur $\mathcal{M}_{\mathsf{q}}^{\tau}$. Alors :*

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Longleftrightarrow E_{\omega_1} = E_{\omega_2}.$$

Démonstration :

Si $\varphi_1 \sim \varphi_2$, cela signifie qu'il existe une séquence d'éboulements s qui permet d'aligner la configuration-flèche de φ_1 avec celle de φ_2. Si on applique s à $(\omega_1, 0)$, on peut ensuite ajouter des grains de manière à obtenir une configuration-grain positive. On appelle φ_3 la configuration obtenue à partir de $(\omega_1, 0)$ après la séquence s, l'ajout des grains et la relaxation. Clairement, si, à partir de $(\omega_1, 0)$, on ajoute d'abord les grains et on effectue ensuite la relaxation, on retrouve φ_3. Ainsi φ_3 appartient à E_{ω_1}. Mais par construction, φ_3 appartient aussi à E_{ω_2}. L'égalité $E_{\omega_1} = E_{\omega_2}$ est alors immédiate.

Réciproquement, si $E_{\omega_1} = E_{\omega_2}$, alors il existe des suites d'éboulements s_1, resp. s_2, qui appliquées à φ_1, resp. φ_2, permettent d'aligner les configurations-flèches. Mais celà n'est possible que si les brins $\omega_{1,i}$ et $\omega_{2,i}$ appartiennent au même cycle de σ^{τ} pour chaque sommet régulier x_i, c'est-à-dire si $\varphi_1 \sim \varphi_2$. □

Les ensembles E_ω sont donc les classes d'équivalence de la relation $\sim$ restreintes à $\mathcal{E}$.

$$- \; o \; -$$

Pour généraliser la relation d'équivalence définie sur le modèle du tas de sable, on reprend la définition en termes d'éboulements. Cependant, cela nous conduit à deux relations d'équivalence *a priori* différentes.

Définition 5.6 On dit que deux configurations φ et φ' sont *équivalentes par éboulements* si on peut passer de φ à φ' par une séquence d'éboulements et d'anti-éboulements de sommets quelconques, puits y compris. On note alors $\varphi \bowtie \varphi'$.

Si on contraint les sommets de la séquence à être réguliers, c'est-à-dire si on n'autorise pas à ébouler ou anti-ébouler le puits dans la séquence qui permet de passer de φ à φ', alors on dit que φ et φ' sont *thermiquement équivalentes*, et on note $\varphi \overset{\mathsf{q}}{\bowtie} \varphi'$.

Ces deux relations sont trivialement des relations d'équivalences. La réflexivité, la symétrie et la transitivité sont immédiates. De plus, elles sont plus fines que la relation $\sim$ définie plus haut.

Proposition 5.8 *On a les relations suivantes entre les trois relations d'équivalence déjà définies :*

$$\forall \varphi, \varphi', \quad \varphi \overset{\mathsf{q}}{\bowtie} \varphi' \implies \varphi \bowtie \varphi' \implies \varphi \sim \varphi'.$$

Démonstration :

La première relation $\overset{\mathsf{q}}{\bowtie} \implies \bowtie$ est immédiate par les définitions précédentes. La deuxième relation est aussi très facile. Si $\varphi \bowtie \varphi'$, alors en chaque sommet régulier x_i, il existe un entier k_i tel que $\omega_i = \sigma^{k_i \tau_i}(\omega_i')$. En effet, k_i est égal à $e_i - f_i$, où e_i (resp. f_i) est le nombre de fois que le sommet x_i est éboulé (resp. anti-éboulé) dans la séquence qui permet de passer de φ à φ'. D'où le résultat par les définitions 5.5 page ci-contre et 4.3 page 157. □

Ainsi, les classes d'équivalence de $\overset{q}{\bowtie}$ sont incluses dans celles de $\bowtie$, elles-mêmes incluses dans celles de $\sim$.

Exemple 5.4
On considère toujours le modèle du blason de la Figure 5.3 page 182. La Figure 5.7 donne un exemple de deux configurations (φ et φ') équivalentes par éboulements qui ne le sont pas avec une troisième (φ''). Il est clair que les configurations φ et φ' sont équivalentes

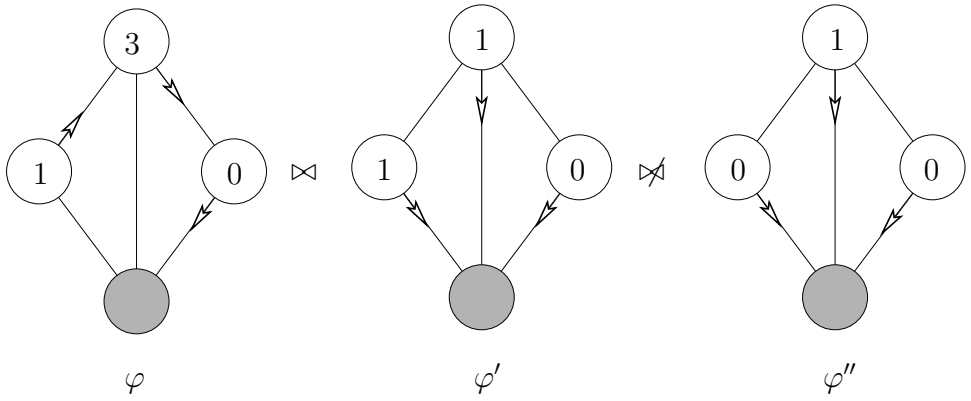


FIG. 5.7 – Relation d'équivalence $\bowtie$.

par éboulements : on peut passer de φ à φ'' en éboulant une fois les sommets x_a et x_b. En particulier, elles sont aussi thermiquement équivalentes. En revanche, elles ne sont pas équivalentes par éboulements avec φ''. À ce stade, on n'est pas encore capable de le démontrer. $\diamond$

Comme le montre le lemme suivant, les relations $\overset{q}{\bowtie}$ et $\bowtie$ sont en général différentes, à moins que $\lambda = 1$, où λ est le facteur multiplicatif du modèle.

Lemme 5.9 *Soit φ une configuration. Alors,*

$$\varphi \overset{q}{\bowtie} (\varphi + k\beta) \quad \textit{si et seulement si} \quad \lambda \textit{ divise } k.$$

Démonstration :
On peut vérifier facilement que si on effectue λ éboulements du puits suivi d'un super-éboulement de tous les sommets réguliers, alors on retrouve la configuration initiale. Les configurations récurrentes sont caractérisées par le fait qu'on peut effectuer le super-éboulement de manière légale.

Si $k = \lambda m$, alors $\varphi + k\beta$ est obtenue en anti-super-éboulant m fois l'ensemble des sommets réguliers. Dans ce cas $\varphi \overset{q}{\bowtie} (\varphi + k\beta)$.

En revanche, si λ ne divise pas k, alors les k éboulements du puits ne correspondent à aucune séquence d'éboulements ou d'anti-éboulements de sommets réguliers. En effet, si c'était le cas, et par conservation du nombre de grains et de la position des flèches, on sait que ces éboulements ne pourraient être équivalents qu'à un certain nombre de super-éboulements de l'ensemble des sommets réguliers. Mais par le cas précédent, ce n'est pas possible. En particulier, φ et $\varphi + k\beta$ ne sont donc pas thermiquement équivalentes.

□

De ce lemme, on peut déduire le nombre de configurations récurrentes dans une classe d'équivalence de $\bowtie$:

Proposition 5.10 *Il y a λ configurations récurrentes par classe d'équivalence de la relation $\bowtie$.*

Démonstration :

On se donne une classe d'équivalence C pour la relation $\bowtie$. On montre d'abord que $|C \cap \mathcal{E}| \geq \lambda$. Soit φ dans C. On répète le jeu suivant à partir de φ :

- on éboule le puits,
- on relaxe la configuration.

Par définition, les configurations obtenues lors de ce jeu sont dans C. De plus, au moins une d'elles est récurrente (toujours le même argument : il y a au moins une configuration qui apparaît un nombre infini de fois dans le jeu). On note cette configuration φ_1, et on note $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\lambda$ les $\lambda - 1$ configurations suivantes qui apparaissent dans le jeu, après la première occurence de φ_1. En particulier, ces configurations sont aussi récurrentes, car elles apparaissent après une configuration récurrente. Par le critère de Dhar étendu (Théorème 5.6 page 181), on sait que la configuration suivant φ_λ dans le jeu est φ_1. En appliquant cet argument à chacune des φ_j, on montre qu'après la première occurence de φ_1, les configurations données par le jeu reviennent périodiquement après λ étapes : $(\ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$.

On peut montrer que les λ configurations φ_j sont toutes différentes. Par définition de $\overset{\mathsf{q}}{\bowtie}$, on a $(\varphi_1 + (j-1)\beta) \overset{\mathsf{q}}{\bowtie} \varphi_j$. Mais pour $2 \leq j \leq \lambda$, λ ne divise pas $(j-1)$, donc φ_1 n'est pas thermiquement équivalente à φ_j (Lemme 5.9 page précédente). En particulier, φ_1 et φ_j sont des configurations différentes. Par symétrie du problème, on peut refaire ce raisonnement à partir de φ_2, puis de φ_3, *etc.* Au final, on a montré que les configurations φ_j sont toutes différentes. Ainsi $|C \cap \mathcal{E}| \geq \lambda$.

On montre maintenant que $|C \cap \mathcal{E}| \leq \lambda$. Soit φ une configuration récurrente quelconque équivalente par éboulements à φ_1, *i.e.* $\varphi \in C \cap \mathcal{E}$. On montre alors que φ est en fait une des configurations φ_j. Soit s une séquence d'éboulements et d'anti-éboulements qui mène de φ_1 à φ. On note j la différence entre le nombre de fois que le puits est éboulé dans s et le nombre de fois où il est anti-éboulé. On a alors $\varphi \overset{\mathsf{q}}{\bowtie} \varphi_j$. En particulier, il existe une séquence s' d'éboulements et d'anti-éboulements de sommets réguliers qui mène de φ à φ_j (s privée des éboulements et anti-éboulements du puits fait l'affaire). Par commutativité, on peut considérer que les anti-éboulements ont lieu en premier dans s'. Enfin, quitte à ajouter des anti-éboulements et les éboulements correspondants, on peut supposer que les anti-éboulements correspondent à un certain nombre m d'anti-super-éboulements de tous les sommets réguliers, autrement dit à $m\lambda$ éboulements du puits. On note alors s'' la séquence des éboulements de s'. Comme φ est récurrente, si on effectue $(m+c)\lambda$ éboulements du puits, avec $c \geq 0$, avant d'appliquer s'', on obtient toujours la même configuration à la fin, à savoir φ_j. On peut alors choisir c suffisamment grand pour que s'' soit valide pour $\varphi + (m+c)\lambda\beta$. Ainsi, on a :

$$\varphi + (m+c)\lambda\beta \overset{s''}{\rightsquigarrow} \varphi_j \mapsto \varphi_j,$$

d'une part, et

$$\varphi + (m+c)\lambda\beta \mapsto \varphi,$$

d'autre part. Par convergence forte de la relaxation, on a $\varphi = \varphi_j$. Ainsi, $|C \cap \mathcal{E}| \leq \lambda$. □

$-\ o\ -$

Algorithme thermique

Au cours de la démonstration précédente, on a montré qu'une classe d'équivalence pour la relation $\overset{q}{\bowtie}$ contenait au plus une configuration récurrente. Le fait qu'elle en contienne au moins une, est issu du sempiternel argument à partir du jeu qui consiste, cette fois, à ébouler λ fois le puits et à effectuer la relaxation de la configuration obtenue. En fait, plus qu'un jeu, ce processus est précisément la version étendue au modèle flèche-hauteur de l'algorithme thermique (Théorème 5.12).

Proposition 5.11 *Il y a une et une seule configuration récurrente par classe d'équivalence de la relation* $\overset{q}{\bowtie}$.

Notation 5.1 Si φ est une configuration, on note $\tilde{\varphi}$ l'unique configuration récurrente thermiquement équivalente à φ, et $\mathcal{P}^q(\varphi)$ la classe d'équivalence de φ pour $\overset{q}{\bowtie}$.

Une version étendue de l'algorithme thermique (Théorème 1.8 page 43) nous donne un moyen algorithmique de calculer $\tilde{\varphi}$ à partir de φ.

Théorème 5.12 (Algorithme thermique (MFH)) *Soit φ une configuration. Alors, il existe un entier k tel que :*

$$\varphi + k\ \lambda\beta \mapsto \tilde{\varphi}.$$

Ce théorème est un corollaire des nombreux résultats précédents. De même que pour le théorème original, on peut le raffiner. Par exemple, si on se restreint à l'ensemble des configurations positives, c'est-à-dire à l'ensemble des configurations dont les configurations-grains sont positives, on peut montrer que k est majoré par un entier K qui ne dépend que du modèle. En effet, il suffit de prendre pour K la valeur maximale de k pour les configurations dont les configurations-grains sont nulles.

$-\ o\ -$

Classe d'équivalence pour $\overset{q}{\bowtie}$ et treillis des éboulements

L'algorithme thermique permet donc de déterminer la configuration récurrente de chaque classe d'équivalence pour $\overset{q}{\bowtie}$. Mais si c'est le cas, c'est parce que ces classes ont des propriétés bien particulières. Si φ est une configuration, alors la classe $\mathcal{P}^q(\varphi)$ de φ pour $\overset{q}{\bowtie}$ est en fait munie d'une structure très forte :

Proposition 5.13 *Si φ est une configuration, $\mathcal{P}^q(\varphi)$ est une treillis distributif infini pour la relation de couverture que constitue la relation d'éboulement d'un sommet régulier.*

Démonstration :
Par définition, pour chaque configuration on peut ébouler les n sommets réguliers, ou les anti-ébouler autant de fois que l'on veut ; on reste dans $\mathcal{P}^q(\varphi)$. Cette classe est donc isomorphe au treillis distributif $\mathbb{Z}^n$ pour la relation d'éboulement d'un sommet régulier. □

On a aussi un résultat immédiat sur la taille des anti-chaînes du treillis $\mathcal{P}^q(\varphi)$:

Proposition 5.14 *Si le modèle admet plus de deux sommets réguliers, alors les anti-chaînes du treillis $\mathcal{P}^q(\varphi)$ sont infinies.*

Démonstration : Soit $x_1 \neq x_2$ deux sommets réguliers du modèle, et φ une configuration. Pour $j \geq 1$, on note s_j une séquence de j éboulements de x_1 et j anti-éboulements de x_2. On note alors φ_j la configuration obtenue à partir de φ après l'application de la séquence s_j. Alors, les φ_j sont toutes dans $\mathcal{P}^q(\varphi)$, sont toutes différentes, et ont même rang. D'où le résultat. □

Ce résultat est immédiat dans la mesure où on a montré dans la démonstration de la Proposition 5.13 page ci-contre, que $\mathcal{P}^q(\varphi)$ était isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, si n est le nombre de sommets réguliers du modèle.
Une autre conséquence de la Proposition 5.13 page précédente est que $\mathcal{P}^q(\varphi)$ est un treillis *gradué* ou *rangé*.

Proposition 5.15 *La classe $\mathcal{P}^q(\varphi)$ est un treillis* gradué *ou* rangé. *On pose*

$$\texttt{rang}(\tilde{\varphi}) = 0.$$

Ce résultat est un corollaire de la Proposition 5.13 page ci-contre. Il est alors naturel de situer le rang 0 à hauteur de la configuration récurrente de la classe, car elle constitue un repère canonique dans cette classe. On note alors $\trianglerighteq$ l'ordre ainsi défini : $\varphi_2 \trianglerighteq \varphi_1$ s'il existe une séquence d'éboulements de sommets réguliers s telle que $\varphi_2 \overset{s}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi_1$.

On peut expliciter plus précisément en quoi consistent les bornes inférieure et supérieure de deux configurations φ_1 et φ_2 d'une même classe d'équivalence pour $\overset{\mathtt{q}}{\bowtie}$. Si s est une séquence d'opérations qui permet de passer de φ_1 à φ_2, on note s^- la séquence des éboulements de $\texttt{norm}(s)$ et s^+ la séquence des anti-éboulements de $\texttt{norm}(s)$. On a alors :

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi^-, \text{ si } \varphi_1 \overset{s^-}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi^-$$
$$\varphi_1 \vee \varphi_2 = \varphi^+, \text{ si } \varphi_1 \overset{s^+}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi^+$$

De même, on a :

$$\varphi_2 \overset{\overline{s^+}}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi^- \quad \text{et} \quad \varphi_2 \overset{\overline{s^-}}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} \varphi^+$$

Exemple 5.5
L'exemple suivant concerne le modèle à deux sommets réguliers de la Figure 5.8 page suivante. On montre une partie du treillis $\mathcal{P}^q(\varphi_1)$. La configuration récurrente de cette classe est en fait présente : il s'agit de φ^-. On a tracé en gras et vert les arêtes qui

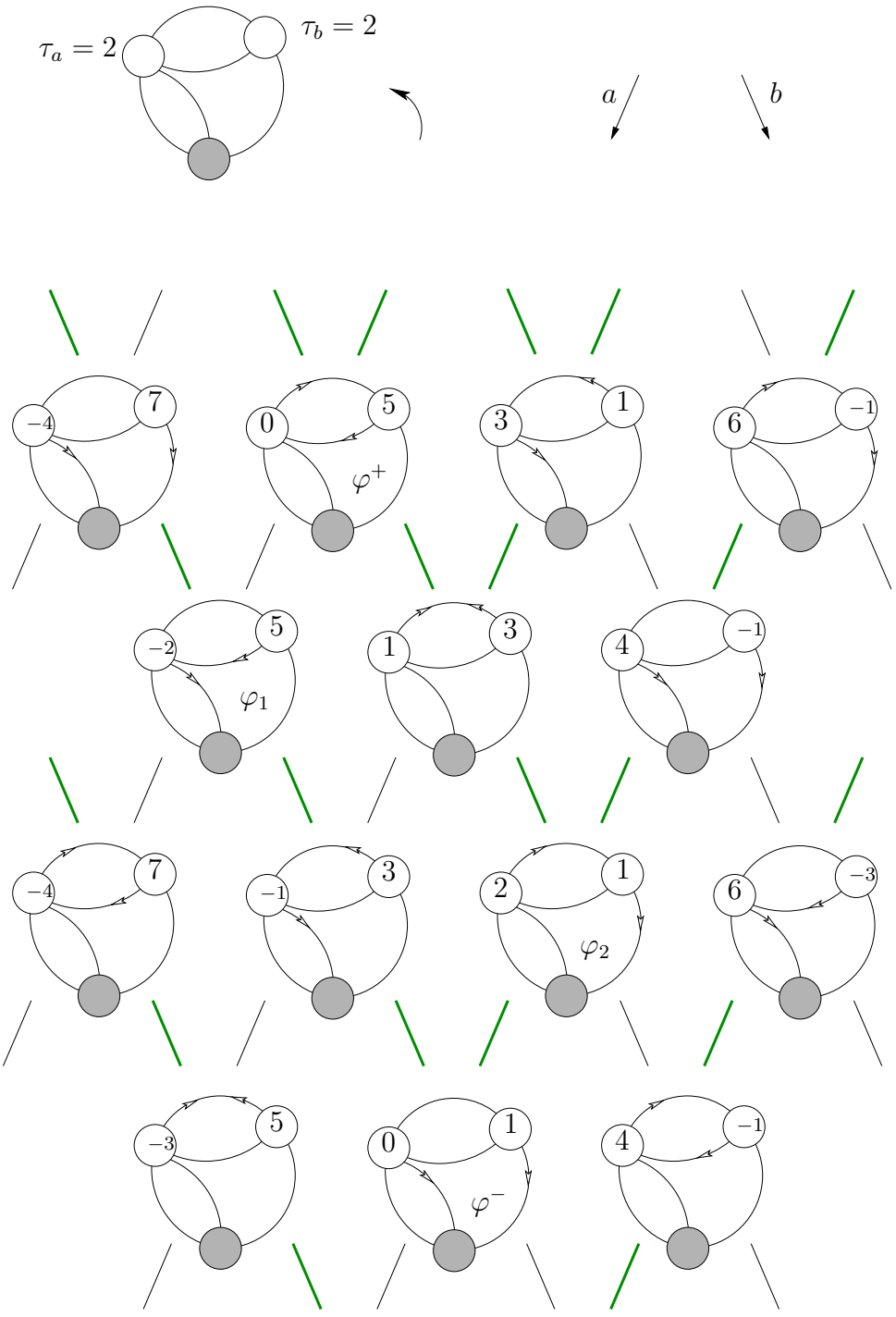


FIG. 5.8 – Bornes supérieure et inférieure de deux configurations.

correspondent à des éboulements valides. Le réseau de ces arêtes est une union de treillis ILD. Les configurations stables sont les configurations qui n'ont aucune arête en gras et vert allant vers le bas. On peut s'intéresser à la borne inférieure et supérieure de φ_1 et φ_2. Pour cela, on trouve une séquence d'opérations régulières qui permet de passer de l'une

à l'autre configuration. Si on prend

$$s = \langle x_a, x_b, \overline{x_a}, \overline{x_a}, x_b \rangle,$$

par exemple, on a bien :

$$\varphi_1 \overset{s}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\rightarrow} \varphi_2.$$

Alors,

$$\texttt{norm}(s) = \langle x_b, x_b, \overline{x_a} \rangle$$

est en fait une plus petite séquence qui permet de passer de φ_1 à φ_2. On a donc :

$$\begin{array}{lll} s^- = \langle x_b, x_b \rangle & \text{et} & s^+ = \langle \overline{x_a} \rangle, \\ \overline{s^-} = \langle \overline{x_b}, \overline{x_b} \rangle & \text{et} & \overline{s^+} = \langle x_a \rangle, \end{array}$$

La borne supérieure, resp. borne inférieure, de φ_1 et φ_2 est notée φ^+, resp. φ^-. En particulier, on a bien :

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 \overset{s^+}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\rightarrow} \varphi^+ & \text{et} & \varphi_1 \overset{s^-}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\rightarrow} \varphi^-, \\ \varphi_2 \overset{\overline{s^-}}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\rightarrow} \varphi^+ & \text{et} & \varphi_2 \overset{\overline{s^+}}{\rightsquigarrow\!\!\!\!\rightarrow} \varphi^-. \end{array}$$

En fait, φ^- est la configuration récurrente de la classe. Par convention, on donne un rang 0 à l'unique configuration récurrente du treillis, *i.e.* $\texttt{rang}(\varphi^-) = 0$. Alors, on a $\texttt{rang}(\varphi_2) = 1$, $\texttt{rang}(\varphi_1) = 2$ et $\texttt{rang}(\varphi^+) = 3$ dans cet exemple. ◇

$$-\ o\ -$$

Outre la propriété de treillis, l'ordre $\trianglerighteq$ admet la caractéristique suivante :

Proposition 5.16 *L'ordre $\trianglerighteq$ passe à la relaxation :*

$$\varphi_2 \trianglerighteq \varphi_1 \implies \hat{\varphi}_2 \trianglerighteq \hat{\varphi}_1.$$

Démonstration :

Soit s une séquence d'éboulements de sommets réguliers qui mène de φ_2 à φ_1. Soit s_2, resp. s_1, une avalanche de φ_2, resp. φ_1. Alors $\texttt{shot}(s_2) \subseteq \texttt{shot}(s_1) \cup \texttt{shot}(s)$. Sinon, on peut considérer le premier éboulement de s_2 qui n'apparaisse pas dans $s.s_1$. Comme tous les éboulements précédents apparaissent, on peut les réaliser. Mais alors on arrive à la même configuration, et donc à la même instabilité. L'éboulement fait donc partie de s_1, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $\texttt{shot}(s_2) \subseteq \texttt{shot}(s_1) \cup \texttt{shot}(s)$, et par conséquent $\hat{\varphi}_2 \trianglerighteq \hat{\varphi}_1$. □

Cela nous permet de caractériser les configurations récurrentes d'une autre manière :

Proposition 5.17 *Les configurations récurrentes sont les configurations stables maximales pour l'ordre $\trianglerighteq$.*

Démonstration :

On sait déjà qu'il y a une et une seule configuration récurrente par $\overset{q}{\bowtie}$-classe, *i.e.* par composante connexe pour $\trianglerighteq$. Le fait que les configurations récurrentes soient les configurations stables maximales pour cet ordre est une conséquence directe de l'algorithme thermique (Théorème 5.12 page 188). En effet, soit φ une configuration récurrente, et φ' une configuration stable telle que $\varphi' \trianglerighteq \varphi$. On peut trouver un entier k tel que $\varphi + k\lambda\beta \trianglerighteq \varphi'$. En effet, λ éboulements du puits correspondent à un anti-super-éboulement de l'ensemble des sommets réguliers, donc à au moins un anti-éboulement de chaque sommet régulier. Si s est une séquence d'éboulements qui mène de $\varphi + k\lambda\beta$ à φ', alors, comme $\varphi + k\lambda\beta \mapsto \varphi$, on a $\varphi' \mapsto \varphi$ par la Proposition 4.11 page 170. Mais comme φ' est stable, $\varphi = \varphi'$, d'où le résultat. □

$$- \; o \; -$$

On rappelle la Définition 4.10 page 170 de l'ordre $\succeq$:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \quad \varphi_2 \succeq \varphi_1 \qquad \text{si} \qquad \varphi_2 \rightsquigarrow \varphi_1.$$

Bien sûr, cette relation d'ordre est plus fine que $\trianglerighteq$:

$$\varphi_2 \succeq \varphi_1 \implies \varphi_2 \trianglerighteq \varphi_1. \tag{5.1.1}$$

Par la Proposition 4.12 page 171, on peut même dire que le graphe de couverture de $\succeq$ au sein d'une classe $\mathcal{P}^q(\varphi)$ est une union de treillis ILD. En particulier, on a par définition :

Proposition 5.18 *Les configurations stables sont les configurations minimales pour l'ordre* $\succeq$.

Ce qui implique :

Proposition 5.19 *Soit φ et φ' deux configurations dans une même classe d'équivalence pour la relation $\overset{q}{\bowtie}$, alors :*

$$\varphi' \succeq \varphi \implies \hat{\varphi}' = \hat{\varphi}.$$

Démonstration :

Cette propriété est très simple. Comme $\varphi' \succeq \varphi$, il existe une séquence d'éboulements valide pour φ' qui mène à φ à partir de φ'. Mais alors, on peut trouver une avalanche s' de φ qui admet φ comme configuration intermédiaire. La fin de l'avalanche est alors une avalanche pour φ. □

Cette proposition était relativement évidente par définition. La proposition suivante est la réciproque de la Relation (5.1.1). C'est un corollaire direct des propositions 5.16 page précédente et 5.17 page précédente.

Proposition 5.20 *Si φ est une configuration récurrente, alors :*

$$\varphi' \trianglerighteq \varphi \implies \varphi' \succeq \varphi.$$

Démonstration :

Soit φ une configuration récurrente. Par la Proposition 5.16 page 191, on a $\hat{\varphi}' \trianglerighteq \varphi$. Mais alors, par la Proposition 5.17 page 191, on a $\hat{\varphi}' = \varphi$. En particulier, cela signifie que $\varphi' \succeq \varphi$. □

Cette proposition est une autre formulation du fait que les configurations récurrentes sont les configurations stables les plus grandes pour $\trianglerighteq$. Elle montre aussi, que pour toute configuration plus grande pour $\trianglerighteq$ qu'une configuration récurrente, il existe une séquence d'éboulements valide qui mène à cette configuration récurrente. L'algorithme thermique est en quelque sorte une réciproque de cette proposition.

— *o* —

Interprétation de l'algorithme thermique

À la lumière des propositions 5.20 page ci-contre et 5.17 page 191, on peut interpréter l'algorithme thermique de manière très géométrique. En effet, l'algorithme thermique est un jeu sur le treillis $\mathcal{P}^q(\varphi)$. À chaque fois qu'on éboule λ fois le puits, on remonte dans ce treillis d'un certain vecteur. La relaxation consiste à redescendre suivant l'ordre $\succeq$.

Quand on ne progresse plus, on est arrivé sur la configuration stable maximale, c'est-à-dire sur la configuration récurrente du treillis (cf. Proposition 5.17 page 191).

Exemple 5.6

La Figure 5.9 page suivante montre l'interprétation de l'algorithme thermique dont nous avons parlé à l'instant. Le treillis infini de droite est la $\overset{q}{\bowtie}$-classe $\mathcal{P}^q(\varphi_3)$ de la configuration récurrente φ_3 représentée à gauche. Dans l'Exemple 5.5 page 189, on montrait une partie de ce treillis. La configuration φ_3 était notée φ^-. Sur la Figure 5.9 page suivante, elle correspond au noeud grisé en rouge et entouré d'un cerle. Un éboulements du sommet x_a correspond à un pas sud-ouest $\swarrow$ et un éboulement du sommet x_b à un pas sud-est $\searrow$. Ainsi un anti-éboulement de x_a est un pas nord-est $\nearrow$ et un anti-éboulement de x_b est un pas nord-ouest $\nwarrow$. Si une arête entre deux sommets du treillis correspond à un éboulement valide, on la marque en gras et vert. Ainsi, les configurations stables se repèrent comme étant les configurations dont aucun des deux pas sud n'est en gras et vert (cf. Proposition 5.18 page ci-contre). C'est bien sûr le cas de la configuration récurrente. On peut aussi vérifier, qu'entre une configuration et sa configuration stable, le réseau des pas verts et grisés constitue bien un treillis ILD. Une manière facile de le voir est de remarquer que les arêtes vertes et grisées forment des demi-droites du réseau.

Enfin, on a indiqué une instance de l'algorithme thermique. On part de la configuration $\varphi_0 = ((-12, 3), (b_6, b_9))$ (cf. Figure 5.11 page 199 pour l'indexation des brins) en bas à gauche qui est entourée. On a $\lambda_a = 1$ et $\lambda_b = 2$. Donc le facteur multiplicatif du modèle est $\lambda = 2$. Deux éboulements du puits correspondent à un anti-éboulement de $\{x_a, x_b\}$, c'est-à-dire à 4 anti-éboulements de x_a et 3 de x_b. Dans le treillis, ébouler λ fois le puits correspond donc à faire 4 pas nord-est et 3 pas nord-ouest. On a entouré d'un cercle en gras les configurations importantes qui apparaissent lors de l'algorithme. La configuration de départ φ_0, puis $\varphi_0 + 2\beta$, puis la configuration stable φ_1 de $\varphi_0 + 2\beta$, puis $\varphi_1 + 2\beta$, puis sa configuration stable φ_2, puis $\varphi_2 + 2\beta$ et sa configuration stable φ_3. En fait φ_3 est

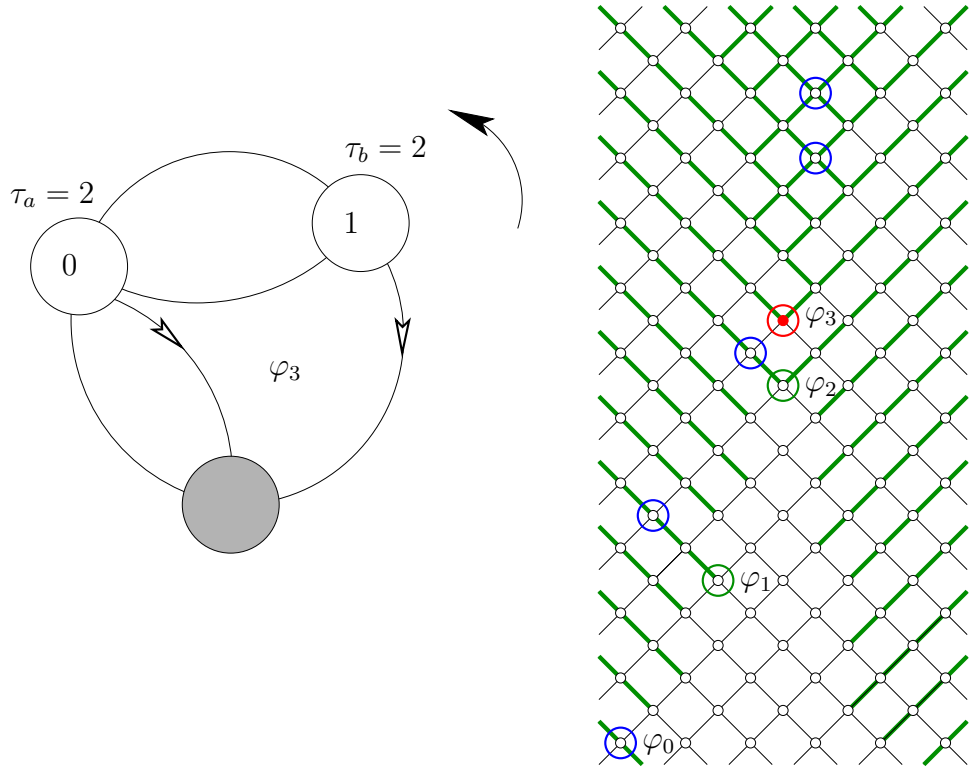


FIG. 5.9 – Interpétation de l'algorithme thermique.

récurrente, mais l'algorithme ne l'a pas encore déterminé. On entoure donc aussi $\varphi_3 + 2\beta$, et on revient à φ_3.

L'algorithme thermique consiste donc à faire des sauts de 4 pas nord-est et 3 pas nord-ouest, puis de redescendre suivant les arêtes en gras et vert. Au bout d'un moment, on tombe 'au dessus' de la configuration récurrente, et on l'obtient alors après relaxation. Comme les arêtes grisées sont des demi-droites, on revient très vite 'vers le centre'.

Enfin, comme $\lambda = 2$, l'éboulement du puits ne correspond à rien en matière d'anti-éboulements des sommets x_a et x_b. En quelque sorte, on ne peut pas faire 2 anti-éboulements de x_a et $1,5$ anti-éboulements de x_b. Si on éboule le puits une fois, on sort de ce treillis, et on passe à un autre similaire, dont la configuration récurrente est la configuration récurrente $\bowtie$-équivalente à φ_3. En effet, comme $\lambda = 2$, il n'y a que 2 configurations récurrentes par $\bowtie$-classe. ◇

$-\ o\ -$

Classes d'équivalence pour $\bowtie$

Les λ classes d'équivalence pour $\overset{q}{\bowtie}$ qui forment une classe pour $\bowtie$, sont reliées entre elles par des éboulements du puits (cf. Figure 5.10 page 196). Lorsqu'on éboule le puits dans une configuration d'une classe donnée, on trouve une configuration de la classe suivante qui est plus 'haute' en quelque sorte, c'est-à-dire plus grande en terme de rang :

Proposition 5.21 *Si φ est une configuration, alors :*

$$\texttt{rang}(\varphi + \beta) \geq \texttt{rang}(\varphi).$$

Démonstration :

On trouve un k qui vérifie le Théorème 5.12 page 188 pour φ. On a $\varphi + k\lambda\beta \mapsto \tilde{\varphi}$. Les λ éboulements du puits correspondent à un certain nombre d'anti-éboulements de sommets réguliers, noté m. Soit p la taille de l'avalanche de $\varphi + k\lambda\beta$, on a alors :

$$\texttt{rang}(\varphi) = p - km.$$

Mais $\varphi+\beta+k\lambda\beta$ admet une avalanche de taille p' au moins égale à p. En effet, $\varphi+\beta+k\lambda\beta$ et $\varphi + k\lambda\beta$ ont la même configuration-flèche, mais $\varphi + \beta + k\lambda\beta$ a une configuration-grain strictement plus grande. Cela implique aussi que sa relaxation mène à une configuration récurrente. Ainsi, $\texttt{rang}(\varphi + \beta) = p' - km$. D'où $\texttt{rang}(\varphi + \beta) \geq \texttt{rang}(\varphi)$. □

En fait, on peut généraliser cette démonstration et on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.22 *Si φ est une configuration, et* h *une configuration-grain, alors :*

$$\texttt{rang}(\varphi + \texttt{h}) \geq \texttt{rang}(\varphi).$$

Exemple 5.7
La Figure 5.10 page suivante explique comment une classe d'équivalence pour $\bowtie$ se décompose en λ classes pour $\overset{\texttt{q}}{\bowtie}$. Chacune de ces λ classes contient une seule configuration récurrente. Si on éboule ou anti-éboule un sommet régulier, on reste dans la même $\overset{\texttt{q}}{\bowtie}$-classe, c'est-à-dire qu'on bouge simplement dans le treillis que constitue chaque $\overset{\texttt{q}}{\bowtie}$-classe. En revanche si on éboule le puits, on passe à la classe suivante en 'remontant' (le rang augmente), et à la classe précédente en 'descendant' si on l'anti-éboule.

Au final, si on éboule λ fois le puits, on a fait un 'tour complet', et on est donc resté dans la même $\overset{\texttt{q}}{\bowtie}$-classe. En fait, on est même 'remonté' dans le treillis. Cette dernière propriété constitue le fondement de l'algorithme thermique. ◇

Par définition, l'algorithme thermique fournit un moyen pour déterminer si deux configurations sont thermiquement équivalentes ou pas. En fait, eu égards aux remarques faites à l'instant, il permet aussi de savoir si deux configurations sont équivalentes par éboulements ou pas. En effet, il suffit de calculer la configuration récurrente thermiquement équivalente pour chacune d'elles, et de vérifier si on peut passer de l'une à l'autre en éboulant le puits et en relaxant, sachant qu'il suffit de le faire au plus λ fois.

$-\ o\ -$

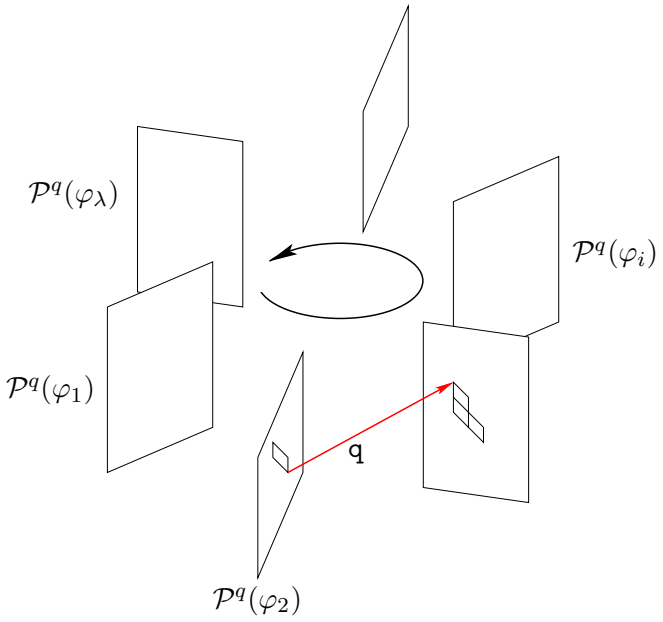


FIG. 5.10 – Décomposition d'une $\bowtie$-classe en λ classes pour $\overset{\mathsf{q}}{\bowtie}$.

5.2 Structure de groupe

5.2.1 Groupe des opérateurs

On considère les opérateurs a_i définis au début de ce chapitre. Comme sur le modèle du tas de sable, l'opérateur a_i consiste à ajouter un grain sur le sommet régulier x_i et à effectuer ensuite la relaxation (qui peut consister à 'ne rien faire' si la configuration après l'ajout des grains est stable). Cet ensemble d'opérateurs agissant sur les configurations a, comme pour le modèle du tas de sable, de nombreuses propriétés. En premier lieu, on peut énoncer :

Proposition 5.23 *L'ensemble généré par les opérateurs* a_i *est un semi-groupe qui agit sur l'ensemble des configurations.*

Démonstration :

La loi produit des opérateurs est associative par définition. Et tout opérateur donne une configuration à partir d'une configuration. L'ensemble généré par les opérateurs a_i forme donc bien un semi-groupe qui agit sur l'ensemble des configurations. □

Théorème 5.24 *L'ensemble généré par les opérateurs* a_i *forme un groupe abélien qui agit sur* $\mathcal{E}$ *et que l'on appelle* groupe du MFH.

De plus, si Δ^{q} *est le* q*-mineur principal de la matrice laplacienne du modèle, on a les relations suivantes :*

$$\forall x_i \neq \mathsf{q},\ \prod_{x_j \neq \mathsf{q}} \mathsf{a}_j^{\lambda_i \Delta^{\mathsf{q}}_{i,j}} = id \qquad [Eq\ r_i],$$

où id est l'identité du groupe.

Démonstration :

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble généré par les opérateurs $\mathtt{a}_i$ quand ils agissent sur $\mathcal{E}$. Il suffit de montrer que les $\mathtt{a}_i$ commutent et qu'ils sont inversibles pour avoir le résultat sur tout élément de $\mathcal{G}$. La commutativité vient de la Proposition 4.14 page 173. Avant de montrer l'inversibilité, on montre que $\mathcal{G}$ contient l'opérateur identité.

Par le Théorème 5.6 page 181, on sait que si $(\mathtt{q}, x_{i_1}), (\mathtt{q}, x_{i_2}), \ldots, (\mathtt{q}, x_{i_k})$ sont les brins adjacents au puits $\mathtt{q}$, alors l'opérateur id défini par :

$$id = \prod_{j=1}^{k} \mathtt{a}_{i_j} \qquad [Eq\ id],$$

vérifie $id\ \varphi = \varphi$ pour toute configuration récurrente φ. Autrement dit, il s'agit de l'opérateur identité.

De plus, si $\Delta^{\mathtt{q}}$ est le $\mathtt{q}$-mineur principal de la matrice laplacienne du modèle, alors on a les relations suivantes entre les opérateurs quand ils agissent sur $\mathcal{E}$:

$$\forall x_i \neq \mathtt{q}, \quad \mathtt{a}_i^{-\lambda_i \Delta^{\mathtt{q}}_{i,i}} = \prod_{x_j \neq x_i, \mathtt{q}} \mathtt{a}_j^{\lambda_i \Delta^{\mathtt{q}}_{i,j}} \qquad [Eq\ r'_i].$$

Ces relations, sont les relations de super-éboulements, les plus simples qui soient invariantes par rapport à la configuration. Comme un super-éboulement est équivalent à un éboulement dans le modèle du tas de sable, on retrouve les résultats de ce modèle. Comme le graphe est connexe, en utilisant les relations ($[Eq\ id]$) et ($[Eq\ r'_i]$), on montre facilement que chacun des opérateurs $\mathtt{a}_i$ est inversible quand il agit sur $\mathcal{E}$. D'où le résultat. □

En particulier, le groupe du tas de sable sur le graphe du modèle est un *sous-groupe* du groupe du MFH. En effet, il s'agit du *sous-groupe* généré par les éléments $\{\mathtt{a}_i^{\lambda}\}$.

$$-\ o\ -$$

Indépendance du groupe par rapport au choix du puits

En fait ce groupe ne dépend pas du choix du puits. Avant d'affirmer cela, il faut bien définir de quoi on parle. Supposons qu'on définisse un seuil $\tau_{\mathtt{q}}$ pour le puits $\mathtt{q}$. Alors si on redéfinit le facteur multiplicatif λ de la carte comme étant le `ppcm` des facteurs multiplicatifs de tous les sommets, le puits y compris, les résultats principaux se généralisent très bien. Il suffit d'ébouler $\lambda \times d_{\mathtt{q}}/\tau_{\mathtt{q}}$ le puits, là où on l'éboulait λ fois avant. On peut aussi définir l'opérateur $\mathtt{a}_{\mathtt{q}}$ qui ajoute un grain en $\mathtt{q}$ et effectue la relaxation, éventuellement infinie cette fois. Le groupe du MFH sur le modèle $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}}$ est alors le groupe $\mathcal{G}$ défini par générateurs et relations suivant :

$$\mathcal{G} =< \{\mathtt{a}_i\}_{x_i}; \{r_i\}_{x_i}, \mathtt{a}_{\mathtt{q}} = id >,$$

où $r_{\mathtt{q}}$ correspondrait à la relation de super-éboulement du puits si on le traitait comme un sommet régulier. Ainsi, si on regarde les relations R_i plus générales définies par :

$$\forall x_i, \ \prod_{x_j} \mathtt{a}_j^{\lambda_i \Delta_{i,j}} = id \qquad [Eq\ R_i],$$

et si on note $\mathcal{G}'$ le groupe défini par les générateurs $\mathtt{a}_i$ et les relations R_i, alors le groupe $\mathcal{G}$ est le quotient de $\mathcal{G}'$ par la relation $\mathtt{a}_\mathtt{q} = id$. Mais comme le déterminant de la matrice Δ vaut 0, ce quotient est indépendant du choix de $\mathtt{q}$. Ainsi, le groupe du MFH ne dépend que de la carte $\mathcal{M}$ et du vecteur seuil τ.

$-\ o\ -$

Graphe de transition

On note alors $\mathcal{G} =< \{\mathtt{a}_i\}_{x_i \neq \mathtt{q}}; \{r_i\}_{x_i \neq \mathtt{q}} >$, ou tout simplement $\mathcal{G} =< \mathtt{a}_i, r_i >$, le groupe du MFH. On peut préciser un peu les choses. On définit le graphe, noté W, comme étant le graphe dirigé tel que :

- les sommets sont les configurations récurrentes,
- et les arcs correspondent à l'application d'un opérateur $\mathtt{a}_i$.

Le graphe W est ainsi l'union des *graphes de transition* des chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 5.25 *Les composantes simplement connexes de W sont fortement connexes et correspondent aux classes d'équivalence de la relation $\sim$ restreintes à $\mathcal{E}$.*

Démonstration :

Le premier résultat vient directement du fait que $\mathcal{G} =< \mathtt{a}_i, r_i >$ est un groupe. Montrons que deux configurations récurrentes sont dans la même composante fortement connexe si et seulement si elles sont équivalentes pour $\sim$.

Soit φ et φ' deux configurations récurrentes dans la même composante fortement connexe de W. Alors, il existe une suite d'opérateurs $\mathtt{a}_i$ qui appliquée à φ conduit à φ'. Lors de cette opérations, les flèches ne bougent que lors de relations d'éboulements. Il est alors immédiat que $\varphi \sim \varphi'$.

Supposons $\varphi \sim \varphi'$, et toujours φ et φ' récurrentes. D'après la Proposition 5.7 page 185, on a $\varphi' \in E_\omega$. Comme la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$ est définie à partir des opérateurs $\mathtt{a}_i$ et que φ est aussi dans E_ω, on peut trouver une suite d'opérateurs $\mathtt{a}_i$ pour passer de φ à φ', *i.e.* φ et φ' sont dans la même composante simplement connexe, et donc fortement connexe de W. D'où le résultat. □

Autrement dit, les composantes fortement connexes de W sont les ensembles E_ω. Le groupe $\mathcal{G}$ agit indépendamment sur tous les ensembles E_ω distincts. Les composantes fortement connexes de W sont donc isomorphes au graphe de Cayley de $\mathcal{G}$ dans la représentation $\mathcal{G} =< \mathtt{a}_i, r_i >$.

Exemple 5.8

La Figure 5.12 page 200 montre une des deux composantes fortement connexes de W pour le modèle déjà vu dans les exemples 5.5 page 189 et 5.6 page 193 et représenté sur la Figure 5.11 page suivante. Il a deux sommets réguliers x_a et x_b qui ont chacun un seuil de $\tau_a = \tau_b = 2$. Ce qui fait que $\lambda_a = 1$ et $\lambda_b = 2$. Le facteur multiplicatif du modèle vaut $\lambda = 2$. Comme on le voit plus loin, le graphe W a en fait deux composantes fortement connexes, car il y a deux classes d'équivalence pour $\sim$. Ces classes correspondent aux

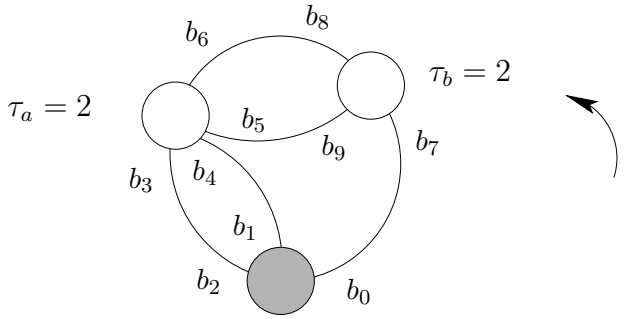


FIG. 5.11 – Modèle à 10 brins.

deux ensembles de configurations-flèches suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\{b_4, b_7\}, \{b_4, b_8\}, \{b_4, b_9\}, \{b_6, b_7\}, \{b_6, b_8\}, \{b_6, b_9\}\}, \\ A_2 &= \{\{b_3, b_7\}, \{b_3, b_8\}, \{b_3, b_9\}, \{b_5, b_7\}, \{b_5, b_8\}, \{b_5, b_9\}\}. \end{aligned}$$

Sur la Figure 5.12 page suivante on a représenté la composante de W correspondant à A_1. On peut la voir comme E_ω, pour $\omega = \{b_4, b_7\}$ par exemple. D'ailleurs, il y a des configurations récurrentes qui admettent cette configuration-flèche : φ_1 par exemple. Ça aurait très bien pu ne pas être le cas. On a représenté l'opérateur a_a par des flèches noires, et a_b par des flèches rouges. Comme on a :

$$id = \mathsf{a}_a^4\, \mathsf{a}_b^2,$$

on peut vérifier qu'en prenant 4 flèches noires et 2 flèches rouges, on revient toujours au même endroit. Étant donnée une configuration récurrente particulière, on peut facilement trouver la configuration récurrente équivalente par éboulements (comme $\lambda = 2$, il n'y a que 2 configurations récurrentes par $\bowtie$-classe). On passe de l'une à l'autre en éboulant une fois le puits et relaxant, autrement dit en appliquant l'opérateur $\mathsf{a}_a^2\, \mathsf{a}_b$, c'est-à-dire en prenant deux flèches noires et une flèche rouge. Par exemple, φ_1 et φ_2 constituent les deux configurations équivalentes d'une $\bowtie$-classe.

En outre, on voit aussi que l'ordre de a_a est 8 et celui de a_b est 4. Comme $\mathcal{G}$ est d'ordre 16 et généré par a_a et a_b, il n'est pas cyclique ($\mathtt{pgcd}(4, 8) > 1$). Ces éléments sont suffisants pour trouver la forme normale de Smith du groupe $\mathcal{G}$: $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. En effet, parmi les 5 formes *a priori* possibles :

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ &\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

le produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est le seul qui contienne un élément d'ordre 8 et un d'ordre 4 sans être cyclique. ◇

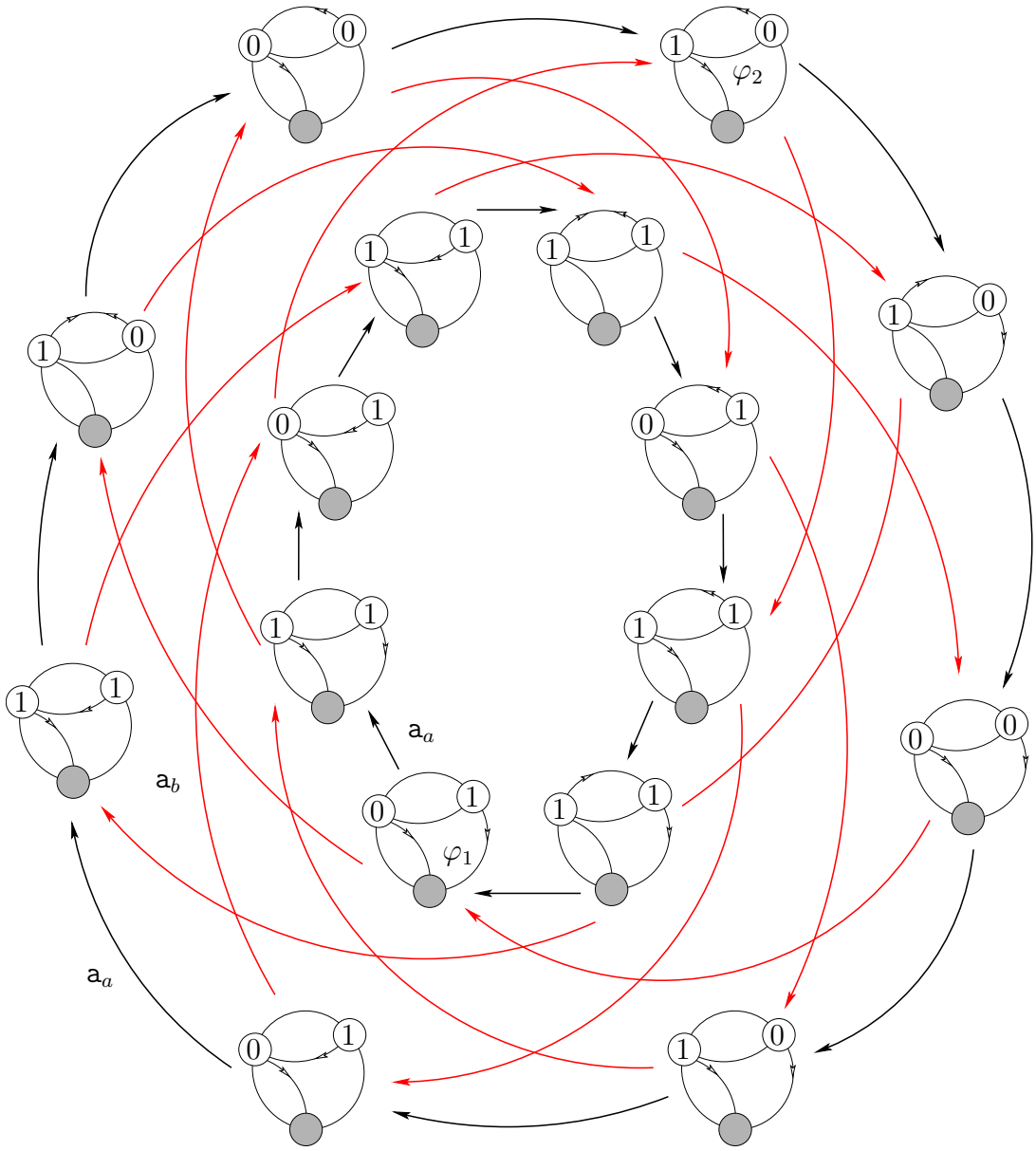


FIG. 5.12 – Une des deux composantes fortement connexes du graphe W.

– *o* –

Comme on l'a évoqué plus haut, on connaît déjà le nombre de composantes fortement connexes de W : il s'agit du nombre d'ensembles E_ω distincts, et par conséquent c'est le nombre de classes de la relation $\sim$:

Corollaire 5.26 *Si pour tout sommet régulier x_i, $g_i = \mathtt{pgcd}(\tau_i, d_i)$, alors le graphe W admet $(\prod_{x_i \neq \mathsf{q}} g_i)$ composantes fortement connexes.*

Démonstration :
C'est un corollaire direct de la Proposition 4.3 page 158. □

Un corollaire du Théorème 5.24 page 196 et du Lemme 5.25 page 198 est que tous les ensembles E_ω ont le même cardinal, à savoir l'ordre de $\mathcal{G}$.

Proposition 5.27 *Le groupe $\mathcal{G} =< \mathtt{a}_i; r_i >$ du MFH est le groupe associé à la matrice $(\lambda_i \Delta_i^{\mathtt{q}})_{x_i \neq \mathtt{q}}$. Alors, on a :*

$$|E_\omega| = |\mathcal{G}| = \left(\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i \right) |\mathtt{det}(\Delta^{\mathtt{q}})| = \left(\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i \right) |\mathcal{T}|,$$

où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des arbres couvrants du graphe du modèle.

De plus, $|\mathcal{E}| = (\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \tau_i)|\mathcal{T}|$.

Démonstration :

Par la définition de $\mathcal{G}$ en termes de générateurs et relations, on sait que $(\lambda_i \Delta_i^{\mathtt{q}})_{x_i \neq \mathtt{q}}$ est la matrice du groupe. Alors $|\mathcal{G}| = \left(\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i \right) |\mathtt{det}(\Delta^{\mathtt{q}})|$. L'égalité $|E_\omega| = |\mathcal{G}|$ vient du Lemme 5.25 page 198. Et enfin, le fait que $|\mathtt{det}(\Delta^{\mathtt{q}})|$ soit égal à $|\mathcal{T}|$ a déjà été vu dans la première partie, et correspond au Matrix Tree Theorem (cf. [38]).

Par le Corollaire 5.26 page précédente, on en déduit que $|\mathcal{E}| = (\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} g_i)|E_\omega|$ et ainsi la dernière égalité. □

Exemple 5.9

On reprend l'Exemple 5.8 page 198. La Figure 5.12 page précédente montre une des composantes fortement connexes de W qui est isomorphe au graphe de Cayley du groupe $\mathcal{G}$ du modèle pour la présentation $\mathcal{G} =< \mathtt{a}_i, r_i >$. Par le Corollaire 5.26 page ci-contre, on sait que W n'admet que 2 composantes fortement connexes ($g_a = 2$ et $g_b = 1$).

Par la Proposition 5.27, on peut calculer la taille de chacune de ces composantes. La matrice $\Delta^{\mathtt{q}}$ du modèle vaut :

$$\Delta^{\mathtt{q}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

En particulier, cela nous donne $|\mathcal{G}| = \lambda_a \times \lambda_b \times \mathtt{det}(\Delta^{\mathtt{q}}) = 1 \times 2 \times 8 = 16$. On retrouve bien 16 configurations récurrentes sur la Figure 5.12 page ci-contre. Comme on a deux composantes fortement connexes dans W, il y a en tout 32 configurations récurrentes. On retrouve bien $32 = 2 \times 2 \times 8$, car $\tau_a = \tau_b = 2$ et $|\mathcal{T}| = 8$. ◇

– *o* –

5.2.2 Morphisme de groupes et addition étendue

Morphisme de groupe

Comme on l'a déjà fait dans le cadre du tas de sable, on peut trouver une loi de composition interne sur les configurations récurrentes qui munisse cet ensemble d'une structure de groupe isomorphe à $\mathcal{G}$. Pour que cela ait du sens, on doit se restreindre à un ensemble E_ω pour une configuration-flèche ω donnée. Cette dernière va nous servir de

référence. En effet, étant donnée ω on peut associer aux opérateurs $\mathtt{a}_i$ des configurations récurrentes de E_ω de manière canonique. Si on note toujours $\mathtt{e}_i$ la configuration-grain associée à l'opérateur $\mathtt{a}_i$:

$$\mathtt{e}_i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i}),$$

alors, on peut définir une application Ψ_ω telle que :

$$\forall x_i \neq \mathtt{q},\ \Psi_\omega(\mathtt{a}_i) = \tilde{\phi}_i,$$

où ϕ_i est la configuration $(\omega, \mathtt{e}_i)$.

Proposition 5.28 *L'application Ψ_ω s'étend naturellement à $\mathcal{G}$ et est compatible avec la loi d'action des opérateurs $\mathtt{a}_i$. En particulier, si*

$$g = \prod_{x_i \neq \mathtt{q}} a_i^{k_i},$$

alors $\Psi_\omega(g) = \tilde{\phi}_g$, où $\phi_g = (\omega, k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n)$.

Démonstration :
Soit g un élément de $\mathcal{G}$ d'écriture :

$$g = \prod_{x_i \neq \mathtt{q}} a_i^{k_i}.$$

Alors, $\Psi_\omega(g)$ est naturellement défini comme étant la configuration thermiquement équivalente à $(\omega, k_1\mathtt{e}_1 + \cdots + k_n\mathtt{e}_n)$. De cette manière, Ψ_ω est bien définie, car cette configuration ne change pas quelle que soit l'écriture de g. En effet, les changements d'écriture correspondent à des super-éboulements de sommets réguliers : en particulier, on reste dans la même classe pour $\overset{\mathtt{q}}{\bowtie}$.

Montrons que dans ces conditions, l'application Ψ_ω est compatible avec la loi d'action des opérateurs. Soit $\mathtt{a}_i$ un opérateur, et g un élement de $\mathcal{G}$. Alors, $\Psi_\omega(\mathtt{a}_i g)$ est la configuration récurrente thermiquement équivalente à $\Psi_\omega(g)+\mathtt{e}_i$. Mais si on applique l'opérateur $\mathtt{a}_i$ à $\Psi_\omega(g)$, on trouve justement cette configuration. Ce résultat s'étend bien sûr à tous les opérateurs de $\mathcal{G}$. □

Proposition 5.29 *L'application Ψ_ω est une bijection de $\mathcal{G}$ dans E_ω.*

Démonstration :

Par la proposition précédente et le Lemme 5.25 page 198, on sait que Ψ_ω est surjective. Comme E_ω est une composante fortement connexe du graphe W, si φ est une configuration récurrente de E_ω, alors il existe un opérateur g de $\mathcal{G}$, tel que $g\Psi_\omega(id) = \varphi$. Par la proposition précédente, cela signifie que $\Psi_\omega(g) = \varphi$.

Supposons $\Psi_\omega(g) = \Psi_\omega(g')$. Par la proposition précédente, cela signifie précisément que $\Psi_\omega(gg'^{-1}) = \Psi_\omega(id)$, et en réappliquant cette proposition que $gg'^{-1} = id$, *i.e.* $g = g'$. D'où l'injectivité. □

– o –

Les deux propositions précédentes permettent de calquer la structure de $\mathcal{G}$ sur E_ω. En particulier, on peut définir une loi de composition interne $\oplus_\omega$ sur E_ω, qui munit E_ω d'une structure de groupe abélien.

Définition 5.7 On définit une loi de composition interne $\oplus_\omega$ sur E_ω de la manière suivante :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E_\omega,\ \varphi_1 \oplus_\omega \varphi_2 = \Psi_\omega(\Psi_\omega^{-1}(\varphi_1)\Psi_\omega^{-1}(\varphi_2)).$$

Par définition, $\oplus_\omega$ est définie de manière à ce que Ψ_ω soit un isomorphisme de groupe ; on a donc le résultat souhaité :

Proposition 5.30 *L'ensemble E_ω muni de $\oplus_\omega$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathcal{G}$.*

Démonstration :

Clairement, $\oplus_\omega$ est bien une loi de composition interne pour E_ω, et son caractère abélien est immédiat.

On note I_ω la configuration récurrente thermiquement équivalente à $(\omega, 0)$. On peut montrer qu'en fait, I_ω est l'identité pour la loi $\oplus_\omega$. En effet, par l'algorithme thermique, I_ω est le résultat de l'application de l'opérateur noté id sur $(\omega, 0)$; autrement dit $I_\omega = \Psi_\omega(id)$. Alors pour toute configuration récurrente φ de E_ω,

$$I_\omega \oplus_\omega \varphi = \Psi_\omega(\Psi_\omega^{-1}(I_\omega)\Psi_\omega^{-1}(\varphi)) = \Psi_\omega(id\Psi_\omega^{-1}(\varphi)) = \varphi.$$

De plus, par le Lemme 5.25 page 198, il existe un opérateur g qui appliqué à φ mène à I_ω. Alors, $\Psi_\omega(g)$ est l'inverse de φ pour $\oplus_\omega$. En effet,

$$\Psi_\omega(g) \oplus_\omega \varphi = \Psi_\omega(g\Psi_\omega^{-1}(\varphi)) = g\Psi_\omega(\Psi_\omega^{-1}(\varphi)) = g\varphi = I_\omega.$$

□

– o –

Addition étendue

On a construit une opération $\oplus_\omega$ sur E_ω, mais elle ne semble pas très intuitive *a priori*. Cependant, si on regarde de plus près, elle est assez simple. Comme dans le modèle du tas de sable, la loi $\oplus_\omega$ est une loi qui additionne des classes d'équivalence de la relation $\overset{\mathfrak{q}}{\bowtie}$. Plutôt que de la définir au moyen de l'application Ψ_ω, on peut la définir plus directement.

Définition 5.8 Si φ est une configuration récurrente de E_ω, on appelle ω-représentation de φ la configuration φ^ω telle que :

- φ^ω admet ω comme configuration-flèche,
- $\varphi^\omega \mapsto \varphi$,
- et φ^ω est de rang minimal.

En particulier, φ et sa ω-représentation sont thermiquement équivalentes ; elles appartiennent toutes deux à $\mathcal{P}^q(\varphi)$. On peut étendre cette définition à toutes les configurations et définir une ω-représentation pour n'importe quelle configuration. Il suffit simplement de remplacer le second point par $\varphi^\omega \trianglerighteq \varphi$. Bien sûr, si φ est récurrente, cela implique $\varphi^\omega \mapsto \varphi$ (cf. Proposition 5.20 page 192). Par définition, φ^ω est le minimum pour $\trianglerighteq$ de l'ensemble A^ω_φ suivant :

$$A^\omega_\varphi = \{\varphi' = (\omega, h'), \varphi' \trianglerighteq \varphi\}.$$

Intuitivement, φ^ω est la configuration supérieure à φ la plus proche d'elle dans le treillis $(\mathcal{P}^q(\varphi), \trianglerighteq)$, et telle que la configuration-flèche soit ω.

En fait l'ensemble des ω-représentations de φ quand ω parcourt la $\sim$-classe d'équivalence de la configuration-flèche de φ est très facile à déterminer. Il s'agit du parallélépipède à n dimensions G_φ :

$$G_\varphi = \left\{ \varphi', \varphi \overset{s}{\rightsquigarrow} \varphi', \texttt{shot}(s) = \{\underbrace{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\overline{x_n}, \ldots, \overline{x_n}}_{k_n}\}, \forall x_i \neq \texttt{q}, 0 \leq k_i < \frac{\texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)}{\tau_i} \right\}.$$

En effet, si o_i est le brin pointé par φ en x_i régulier, on choisit k_i comme le plus petit entier positif tel que $\omega_i = (\sigma^\tau)^{-k_i}(o_i)$. Clairement, si φ' est plus grande que φ pour $\trianglerighteq$, et si sa flèche est alignée avec ω en x_i, alors toute séquence d'anti-éboulements de sommets réguliers qui mène de φ à φ' contient m_i occurences de $\overline{x_i}$, où $m_i = k_i + k'_i \lambda_i d_i / \tau_i$, avec $k'_i \geq 0$.

On retrouve aussi le fait qu'une classe d'équivalence pour $\sim$ est de taille $(\prod_{x_i \neq \texttt{q}} p_i)$ si $p_i = \texttt{ppcm}(\tau_i, d_i)/\tau_i$ (cf. Proposition 4.3 page 158) : on a une ω-représentation de φ pour chaque configuration-flèche de cette classe d'équivalence. Bien sûr on peut appliquer la Proposition 5.20 page 192 à la ω-représentation d'une configuration récurrente.

Proposition 5.31 *Si ω est une configuration-flèche et φ une configuration récurrente de E_ω, alors :*

$$\varphi^\omega \trianglerighteq \varphi,$$

et en particulier $\varphi^\omega \mapsto \varphi$.

La relaxation de l'ω-représentation d'une configuration récurrente mène à cette configuration récurrente.

Exemple 5.10
On reprend l'Exemple 5.8 page 198 et le modèle de la Figure 5.11 page 199. On considère la configuration φ de la Figure 5.13 page ci-contre. Cette configuration est la configuration récurrente de la $\overset{\texttt{q}}{\bowtie}$-classe que l'on a considérée, mais on aurait pu faire le même raisonnement avec une autre configuration. Le parallélépipède G_φ vaut :

$$G_\varphi = \{\varphi, \varphi^1_1, \varphi^1_2, \varphi^2_1, \varphi^2_2, \varphi^3_2\}.$$

Bien sûr, ces $4/2 \times 6/2 = 6$ configurations admettent toutes une configuration-flèche différente et couvrent ainsi tout une $\sim$-classe. On a la correspondance suivante :

ω	$\{b_4, b_7\}$	$\{b_4, b_8\}$	$\{b_4, b_9\}$	$\{b_6, b_7\}$	$\{b_6, b_8\}$	$\{b_6, b_9\}$
φ^ω	φ	φ^1_1	φ^2_1	φ^1_2	φ^2_2	φ^3_2

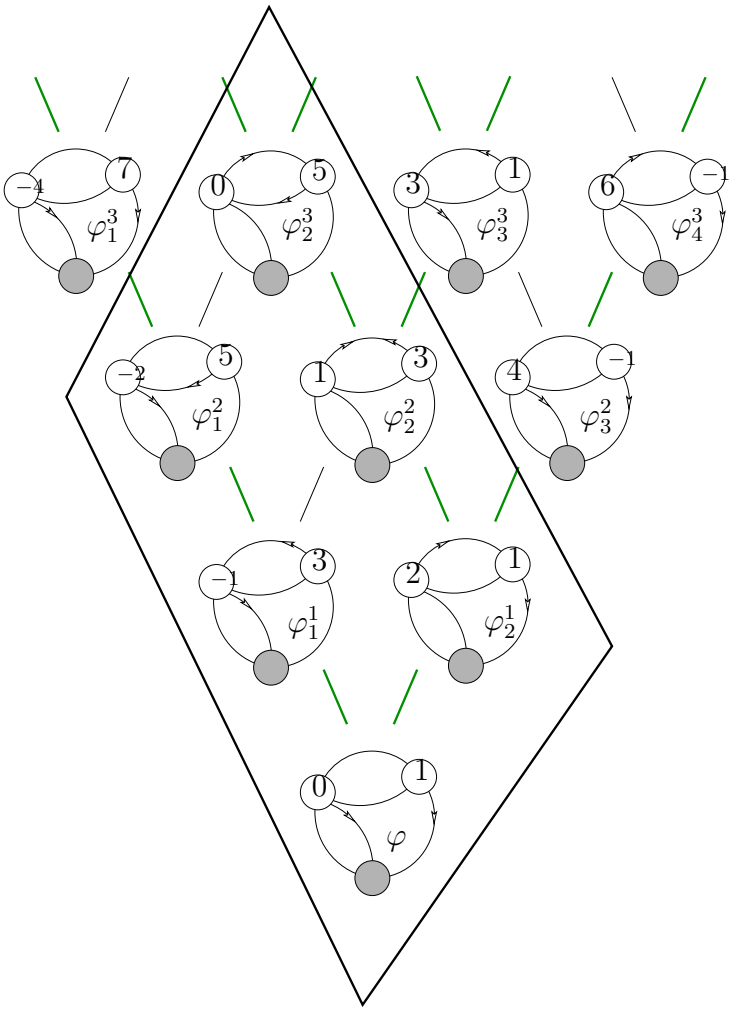


FIG. 5.13 – Parallélépipède G_φ inclus dans $(\mathcal{P}^q(\varphi), \trianglerighteq)$.

◇

$-\ o\ -$

Il se trouve, que les ω-représentations des configurations récurrentes nous fournissent de meilleurs représentants de la classe $\mathcal{P}^q(\varphi)$, si on veut définir l'addition $\oplus_\omega$ directement sur ces classes.

Théorème 5.32 *La loi $\oplus_\omega$ définie sur E_ω est en fait la loi suivante :*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E_\omega,\ \varphi_1 \oplus_\omega \varphi_2 = \tilde{\varphi}_3,$$

où $\varphi_3 = (\omega, \mathtt{h}_1 + \mathtt{h}_2)$, $\varphi_1^\omega = (\omega, \mathtt{h}_1)$ et $\varphi_2^\omega = (\omega, \mathtt{h}_2)$.

Démonstration :

Ce résultat est immédiat. On note g_1, resp. g_2, la valeur de $\Psi_\omega^{-1}(\varphi_1)$, resp. de $\Psi_\omega^{-1}(\varphi_2)$. Alors, on a :

$$g_1 = \prod_{x_i \neq q} \mathsf{a}_i^{\mathtt{h}_{1,i}} \quad \text{et} \quad g_2 = \prod_{x_i \neq q} \mathsf{a}_i^{\mathtt{h}_{2,i}}.$$

En effet, pour obtenir φ_1, on part de $(\omega, \mathtt{k}_1)$ avec

$$g_1 = \prod_{x_i \neq q} \mathsf{a}_i^{\mathtt{k}_{1,i}},$$

et on applique l'algorithme thermique. Mais toute configuration de la classe $\mathcal{P}^q(\varphi_1)$ qui admet ω comme configuration-flèche, code une écriture de g_1. En effet, il existe une séquence constituée uniquement de super-éboulements et d'anti-super-éboulements qui permet de passer de $(\omega, \mathtt{k}_1)$ à celle-ci. Or les relations de super-éboulements sont justement les relations de réécriture des éléments du groupe $\mathcal{G}$. Ainsi, $\mathtt{h}_1 + \mathtt{h}_2$ est aussi une écriture de $g_1 g_2$, d'où le résultat. □

Exemple 5.11
La Figure 5.14 montre l'exemple d'une addition pour la loi $\oplus_\omega$. On change de modèle cette fois. En fait, de la configuration φ_1^ω on peut déduire l'élément de $\mathcal{G}$ associé à φ_1 par

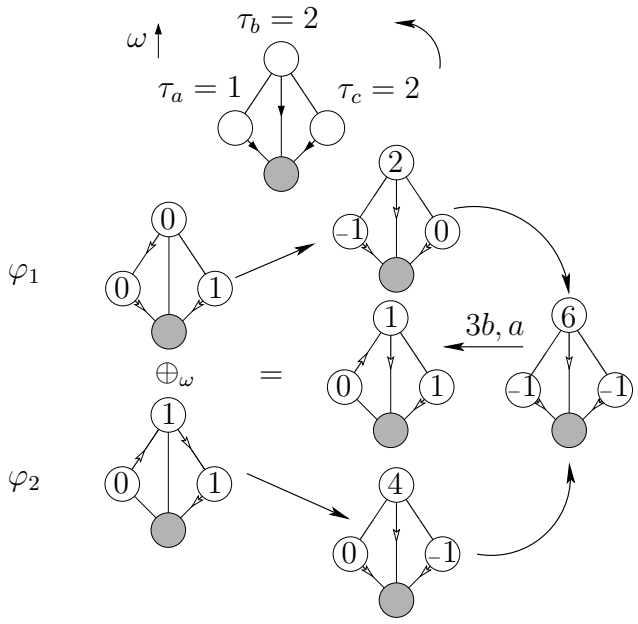


FIG. 5.14 – Exemple d'une $\oplus_\omega$-addition.

Ψ_ω^{-1}. En effet, la configuration-grain de φ_1^ω en est une écriture. Autrement dit, si

$$g_1 = \mathsf{a}_a^{-1}\mathsf{a}_b^2,$$

alors $\Psi_\omega(g_1) = \varphi_1$. Comme le facteur multiplicatif du modèle vaut $\lambda = 2$, on a aussi :

$$id = \mathsf{a}_a^2\mathsf{a}_b^2\mathsf{a}_c^2,$$

ce qui nous permet d'écrire g_1 sous la forme :

$$g_1 = \mathtt{a}_a^1 \mathtt{a}_b^4 \mathtt{a}_c^2.$$

De même on peut trouver une écriture de g_2. Par exemple :

$$g_2 = \mathtt{a}_b^4 \mathtt{a}_c^{-1}.$$

On a alors une écriture de $g_1 g_2$;

$$g_1 g_2 = \mathtt{a}_a^1 \mathtt{a}_b^8 \mathtt{a}_c^1.$$

Mais la relation $[Eq\ r_b]$ nous donne :

$$\mathtt{a}_b^6 = \mathtt{a}_a^2 \mathtt{a}_c^2,$$

d'où :

$$g_1 g_2 = \mathtt{a}_a^3 \mathtt{a}_b^2 \mathtt{a}_c^3 = \mathtt{a}_a \mathtt{a}_c.$$

Or si on anti-éboule une fois le sommet x_a à partir de $\varphi_1 \oplus_\omega \varphi_2$ on obtient la ω-représentation de cette dernière, et une écriture de $g_1 g_2$ qui est justement la dernière que l'on a trouvée, à savoir $g_1 g_2 = \mathtt{a}_a \mathtt{a}_c$. ◇

En fait, on a de bonnes raisons de penser que φ_3, ainsi définie, est plus grande qu'une configuration récurrente :

Conjecture 5.1 *La configuration φ_3 du Théorème 5.32 page 205 est plus grande pour $\succeq$ qu'une configuration récurrente, et ainsi :*

$$\varphi_3 \mapsto \varphi_1 \oplus_\omega \varphi_2.$$

Chapitre 6

Extensions et pistes de recherche sur le MFH

Sommaire

— *o* —

Dans ce dernier chapitre, on aborde succinctement divers problèmes qu'il paraît intéressant d'analyser plus longuement. Dans un premier, temps, on montre de quelle manière il est facile de se ramener au cas où le facteur multiplicatif de la carte vaut 1. Par cette transformation, la dynamique du modèle est préservée, mais la structure du groupe évolue, et une piste de recherche consiste à étudier de manière plus précise comment celle-ci est transformée.

Ensuite, on exhibe un algorithme qui permet de retrouver facilement les bijections classiques connues sur le modèle du marcheur eulérien et sur celui du tas de sable. Cependant, cette bijection ne fonctionne pas en tant que telle sur les modèles hybrides. On évoque après la transformation très naturelle qui consiste à projeter un modèle quelconque sur le modèle du marcheur eulérien associé. Là aussi, les transformations impliquées sur le groupe sont encore mal connues.

Enfin, on propose de regarder un nouvel ensemble d'opérateurs agissants sur les configurations récurrentes. On peut montrer qu'il forme aussi un groupe abélien fini et qu'il a un certain nombre de liens avec l'ensemble des opérateurs a_i introduits précédemment. Il convient alors d'en étudier plus précisément la structure.

— *o* —

6.1 Réduction au modèle simple $\lambda = 1$

Cette section est consacrée au cas particulier $\lambda = 1$. Les modèles du tas de sable abélien et du marcheur eulérien sont eux-mêmes des cas particuliers de ce dernier. De manière générale λ vaut 1 si et seulement si τ_i divise d_i pour tout sommet régulier x_i. Dans cette section, on montre de quelle manière on peut toujours se ramener à l'étude de ce cas très simple.

6.1.1 Modèle λ-normalisé

Étant donné un modèle flèche-hauteur initial, l'idée principale est de dupliquer les brins de la carte de manière à obtenir un modèle dont le facteur multiplicatif vaut 1, et dont les configurations soient en correspondance très simple avec celles du modèle initial.

Soit $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}} = (\mathcal{M}, \mathtt{q}, \tau)$ un modèle flèche-hauteur. La carte $\mathcal{M} = (\sigma, \alpha)$ est une carte combinatoire définie sur un ensemble fini de brins B. Le vecteur τ induit le vecteur $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des facteurs multiplicatifs des sommets réguliers. Le facteur multiplicatif λ de la carte $\mathcal{M}$ est défini par :

$$\lambda = \mathtt{ppcm}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

On note alors $\mathcal{M}^{\underline{\lambda}} = (\sigma^{\underline{\lambda}}, \alpha^{\underline{\lambda}})$ la carte définie sur $B \times [\![1, \lambda]\!]$ telle que :

- si $(b_1, \ldots, b_d)$ est un cycle de σ, alors $(b_1^1, \ldots, b_d^1, b_1^2, \ldots, b_d^2, b_1^3, \ldots, b_d^\lambda)$ est un cycle de $\sigma^{\underline{\lambda}}$,
- et si (b_i, b_j) est un cycle de α, alors $(b_i^1, b_j^1), (b_i^2, b_j^2), \ldots, (b_i^\lambda, b_j^\lambda)$ sont des cycles de $\alpha^{\underline{\lambda}}$.

Autrement dit, on a dupliqué λ fois les brins de $\mathcal{M}$. En particulier, $\mathcal{M}^{\underline{\lambda}}$ admet autant de sommets que $\mathcal{M}$, car $\sigma^{\underline{\lambda}}$ admet autant de cycles que σ. On garde les mêmes notations pour les sommets de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{M}^{\underline{\lambda}}$.

Définition 6.1 Soit $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}} = (\mathcal{M}, \mathtt{q}, \tau)$ un modèle flèche-hauteur. On appelle *modèle λ-normalisé* de $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$, le modèle $\mathcal{M}^{\underline{\lambda},\tau}_{\mathtt{q}} = (\mathcal{M}^{\underline{\lambda}}, \mathtt{q}, \tau)$.

Il est immédiat de constater que le facteur multiplicatif de $\mathcal{M}^{\underline{\lambda},\tau}_{\mathtt{q}}$ vaut 1. On l'a en effet construit de manière à avoir cette propriété. En outre, on peut montrer que les configurations d'un modèle et de l'autre sont en correspondance très simple.

Exemple 6.1
On reprend l'Exemple 5.8 page 198 et le modèle de la Figure 5.11 page 199. La carte du modèle est définie sur $[\![b_0, b_9]\!]$ par :

$$\begin{aligned} \alpha &: (b_0, b_7)(b_1, b_4)(b_2, b_3)(b_5, b_9)(b_6, b_8), \\ \sigma &: \underbrace{(b_0, b_1, b_2)}_{\mathtt{q}} \underbrace{(b_3, b_4, b_5, b_6)}_{x_a} \underbrace{(b_7, b_8, b_9)}_{x_b}. \end{aligned}$$

Comme $\tau_a = \tau_b = 2$ pour ce modèle, on a $\lambda_a = 1$ et $\lambda_b = 2$, c'est-à-dire $\lambda = 2$. La carte du modèle λ-normalisé est donc définie par :

$$\begin{aligned} \alpha^{\underline{\lambda}} &: (b_0^1, b_7^1)(b_0^2, b_7^2)(b_1^1, b_4^1)(b_1^2, b_4^2)(b_2^1, b_3^1)(b_2^2, b_3^2)(b_5^1, b_9^1)(b_5^2, b_9^2)(b_6^1, b_8^1)(b_6^2, b_8^2), \\ \sigma^{\underline{\lambda}} &: \underbrace{(b_0^1, b_1^1, b_2^1, b_0^2, b_1^2, b_2^2)}_{\mathtt{q}} \underbrace{(b_3^1, b_4^1, b_5^1, b_6^1, b_3^2, b_4^2, b_5^2, b_6^2)}_{x_a} \underbrace{(b_7^1, b_8^1, b_9^1, b_7^2, b_8^2, b_9^2)}_{x_b}. \end{aligned}$$

Le facteur multiplicatif de chacun des sommets réguliers de ce nouveau modèle vaut 1, car τ_i divise d_i quel que soit le sommet régulier x_i. Alors que le modèle initial est planaire, son λ-normalisé ne l'est pas. Comme le montre la Figure 6.1, il peut être plongé sur une

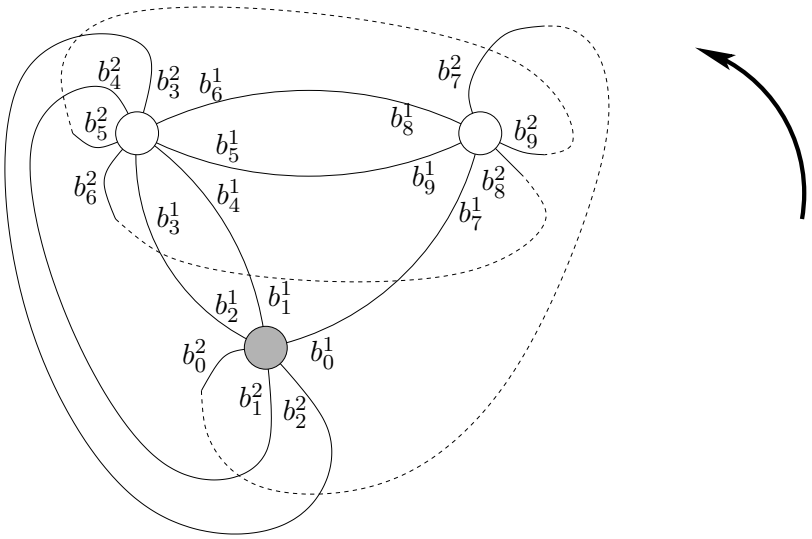


FIG. 6.1 – λ-normalisé du modèle de la Figure 5.11 page 199.

surface de genre 2.

◇

– *o* –

6.1.2 Correspondance des configurations

Si $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$ est un MFH à n sommets réguliers, et si $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\underline{\lambda},\tau}$ est son modèle λ-normalisé, alors on peut naturellement associer λ^n configurations distinctes de $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\underline{\lambda},\tau}$ à toute configuration de $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$. Soit $\varphi = (\omega, h)$ une configuration de $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$, alors $\varphi^{\underline{\lambda}} = (\omega^{\underline{\lambda}}, h^{\underline{\lambda}})$ est associée à φ si :

– $h^{\underline{\lambda}} = h$,

– et pour tout sommet régulier x_i, si $\omega_i = b_j$, alors $\omega_i^{\underline{\lambda}} = b_j^k$ pour un certain $k \in [\![1, \lambda]\!]$.

En somme l'opération inverse est très simple : il suffit d'effacer les exposants des brins pour avoir la configuration correspondante sur $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$.

Exemple 6.2
Soit $\varphi = (\omega, h)$ une configuration du MFH de la Figure 5.11 page 199 définie par :

$$h = (1, 3) \quad \text{et} \quad \omega = (b_4, b_8).$$

On associe à φ les 4 configurations $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 du modèle λ-normalisé de la Fi-

gure 6.1 page précédente :

$$\begin{array}{lll} h_1 = (1,3) & \text{et} & \omega_1 = (b_4^1, b_8^1), \\ h_2 = (1,3) & \text{et} & \omega_2 = (b_4^1, b_8^2), \\ h_3 = (1,3) & \text{et} & \omega_3 = (b_4^2, b_8^1), \\ h_4 = (1,3) & \text{et} & \omega_4 = (b_4^2, b_8^2). \end{array}$$

En particulier, étant donnée une des configurations φ_i, il est très facile de retrouver la configuration φ du modèle initial. $\diamond$

Cette correspondance, dite 'one to many' en anglais, induit donc une relation d'équivalence sur l'ensemble des configurations du modèle λ-normalisé. Chaque configuration du modèle initial définit une classe pour cette relation dans le modèle λ-normalisé. Pour une configuration φ du modèle initial, on note N_φ la classe d'équivalence associée dans le modèle λ-normalisé, c'est-à-dire l'ensemble des λ^n configurations associées à φ. On a alors :

Proposition 6.1 *Soit φ une configuration d'un MFH $\mathcal{M}_{\mathsf{q}}^{\tau}$. L'application qui associe N_φ à φ est compatible avec les opérations d'éboulements (valides ou non) et d'ajout de grains.*

Démonstration : Montrons que l'ajout de grains est compatible avec cette application. On note φ' la configuration obtenue après l'ajout d'un grain sur un sommet régulier x_i de φ. Les configurations en correspondance avec φ' ont la même configuration-hauteur que φ', c'est-à-dire la même que φ excepté en x_i où elles ont un grain de plus. En outre, comme les configurations-flèches de φ et φ' sont les mêmes, c'est aussi le cas des configurations qui leur sont associées. Autrement dit, les configurations associées à φ' sont exactement les mêmes que celles associées à φ excepté le fait qu'elles ont un grain de plus en x_i. Cela revient précisément à dire que $N_{\varphi'}$ est obtenu à partir de N_φ en ajoutant un grain en x_i à chacune de ses configurations.

Montrons maintenant que les éboulements sont aussi compatibles avec l'application qui à φ associe N_φ. Par construction même du modèle λ-normalisé, les cycles de $\sigma^{\underline{\lambda}}$ sont compatibles avec ceux de σ par la correspondance mentionnée plus haut. De même la construction de $\alpha^{\underline{\lambda}}$ assure que les grains qui partent d'un sommet vers un autre dans le modèle initial, partent bien du premier sommet et arrivent bien au second dans le modèle λ-normalisé. Il y a donc compatibilité avec les relations d'éboulements. De plus, comme les conditions de stabilité sont les mêmes pour φ et pour une configuration de N_φ, cette compatibilité est aussi valable du point de vue plus fin des éboulements légaux. $\square$

De cette proposition, il découle qu'une configuration φ a un comportement dans $\mathcal{M}_{\mathsf{q}}^{\tau}$ qui est similaire à celui des configurations de N_φ dans $\mathcal{M}_{\mathsf{q}}^{\underline{\lambda}.\tau}$. Si l'ajout d'un grain sur φ en x_i provoque une avalanche de taille p, alors l'ajout d'un grain en x_i sur une configuration quelconque de N_φ provoque une avalanche de taille identique et de même shot-set. En particulier, on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 6.2 *La distribution des avalanches est la même sur le modèle original et sur son λ-normalisé.*

Démonstration : Immédiat d'après les remarques faites plus haut. □

$-\ o\ -$

De même, la notion de récurrence passe par l'application qui à φ associe N_φ :

Corollaire 6.3 *Soit φ une configuration de $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$. On a équivalence entre les différents points suivants :*
- *φ est récurrente,*
- *il existe une configuration de N_φ qui est récurrente,*
- *toutes les configurations de N_φ sont récurrentes.*

Démonstration : En effet, si φ est récurrente, elle vérifie le critère de Dhar étendu (Théorème 5.6 page 181). Mais ébouler λ fois le puits dans le modèle $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$ correspond à l'ébouler exactement une fois dans le modèle λ-normalisé. Autrement dit, par la proposition précédente, φ vérifie le critère de Dhar étendu si et seulement si une (et donc toutes) configuration de N_φ le vérifie. □

Exemple 6.3
On reprend la configuration de l'Exemple 5.6 page 193. Il s'agit d'une configuration récurrente du modèle de la Figure 5.11 page 199. On note φ cette configuration, on a :

$$h = (0,1) \ \text{ et } \ \omega = (b_4, b_7).$$

On peut alors vérifier que les 4 configurations de N_φ sont bien récurrentes. Prenons par exemple φ_3 définie par :

$$h_3 = (0,1) \ \text{ et } \ \omega_3 = (b_4^2, b_7^1).$$

Il suffit d'appliquer le critère de Dhar dans sa version classique, car, par construction, le facteur multiplicatif du modèle λ-normalisé vaut 1. On ébroule donc le puits une fois et on relaxe la configuration :

$$\begin{aligned}
\varphi_3 \ \overset{\mathtt{q}}{\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow} \ & \begin{cases} (4,3) \\ (b_4^2, b_7^1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (2,5) \\ (b_6^2, b_7^1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (0,5) \\ (b_4^1, b_7^1) \end{cases} \\
\longmapsto \ & \begin{cases} (2,3) \\ (b_4^1, b_9^2) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (3,1) \\ (b_4^1, b_8^1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (1,3) \\ (b_6^1, b_8^1) \end{cases} \\
\longmapsto \ & \begin{cases} (2,1) \\ (b_6^1, b_7^1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (0,1) \\ (b_4^2, b_7^1) \end{cases} = \varphi_3.
\end{aligned}$$

On obtient bien la configuration φ_3 à l'arrivée, signifiant que cette dernière est récurrente. ◇

À travers l'exemple précédent, on comprend bien pourquoi et comment le critère de Dhar peut être testé sur le modèle λ-normalisé. Il s'agit vraiment de mimer le comportement du modèle original de telle sorte que tout brin qui était visité λ fois dans le modèle

original correspond à λ brins visités une fois dans le modèle λ-normalisé. Si le comportement des configurations apparaît désormais très clair, il reste à observer ce qui concerne le groupe.

$-\ o\ -$

6.1.3 Transformation du groupe

Dans un premier temps, on s'intéresse au nombre de configurations récurrentes. Étant donné que $|N_\varphi|$ vaut λ^n, si n est le nombre de sommets réguliers du modèle, par le Corollaire 6.3 page précédente, on a :

$$|\mathcal{E}^{\underline{\lambda}}| = \lambda^n \times |\mathcal{E}|,$$

où $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^{\underline{\lambda}}$) est l'ensemble des configurations récurrentes de $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\underline{\lambda},\tau}$). On peut appliquer la Proposition 5.27 page 201 à $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\underline{\lambda},\tau}$, on obtient l'ordre du groupe $E_\omega^{\underline{\lambda}}$ de ce modèle :

$$|E_\omega^{\underline{\lambda}}| = \left(\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i^{\underline{\lambda}}\right) |(\Delta^{\underline{\lambda},\mathtt{q}})| = |(\Delta^{\underline{\lambda},\mathtt{q}})|.$$

Mais $\Delta^{\underline{\lambda},\mathtt{q}}$ est la matrice $\Delta^{\mathtt{q}}$ où tous les coefficients ont été multipliés par λ. D'où une relation très simple entre les ordres des groupes sur les deux modèles :

$$\left(\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i\right) |E_\omega^{\underline{\lambda}}| = \lambda^n \times |E_\omega|.$$

Cette relation s'interprète facilement. En effet, on sait que les éléments du groupe E_ω sont les configurations récurrentes de la chaîne de Markov $\mathcal{C}_\omega$. En particulier, elles constituent les configurations récurrentes d'une même classe d'équivalence pour $\sim$. Donnons nous un sommet régulier x_i et une configuration récurrente φ de $\mathcal{M}_{\mathtt{q}}^{\tau}$. Dans N_φ, on obtient localement λ possibilités pour les configurations en x_i. En effet, si on note b_j le brin pointé par ω_i, alors une configuration de N_φ pointe en x_i sur b_j^k pour un certain $k \in [\![1, \lambda]\!]$. La classe des brins équivalents à b_j donne naissance à plusieurs classes de brins équivalents sur le modèle λ-normalisé. Pour passer d'un brin b_j^k à un autre $b_j^{k'}$, il faut faire tourner la flèche par un multiple de d_i (degré de x_i dans le modèle original) fois. La valeur $\mathtt{ppcm}(d_i, \tau_i)/d_i = \lambda_i$ nous donne alors le nombre de classes de brins différentes en x_i pour N_φ. Une fraction λ/λ_i des configurations de N_φ est alors asscociée à chacune de ces λ_i classes de brins pour x_i.

Les liens entre le groupe abélien du modèle initial et celui du modèle λ-normalisé méritent d'être approfondis, et constituent une première piste de recherche pour un travail complémentaire.

$-\ o\ -$

6.2 Bijections et parcours de graphe

6.2.1 Modèle du marcheur eulérien

On étudie dans cette section le modèle du marcheur eulérien. En particulier, on reprend l'article fondateur [52]. C'est à travers cet exemple, ce cas particulier du modèle flèche-hauteur, que la loi d'éboulement généralisée prend tout son sens.

Dans le cas du marcheur eulérien, le seuil en chaque sommet régulier vaut 1. Ainsi, une configuration stable et positive contient un nombre de grains nul en chaque sommet régulier. Ces configurations peuvent donc être vues comme des configurations-flèches uniquement. Formellement, il y a un isomorphisme trivial entre l'ensemble des configurations stables et positives du marcheur eulérien et l'ensemble des configurations du modèles quotientées par les configurations-hauteurs.

En particulier, les configurations récurrentes du modèle sont donc définies par leur configuration-flèche. L'intérêt de la définition de la règle généralisée apparaît alors dans l'énoncé du théorème suivant :

Théorème 6.4 ([52]) *Les configurations récurrentes du modèle du marcheur eulérien sont les configurations codées par des arbres couvrants.*

En effet, Kasteleyn a montré ([36]) qu'on peut associer un unique parcours eulérien à un arbre couvrant enraciné en un sommet d'une carte. Réciproquement, on peut associer

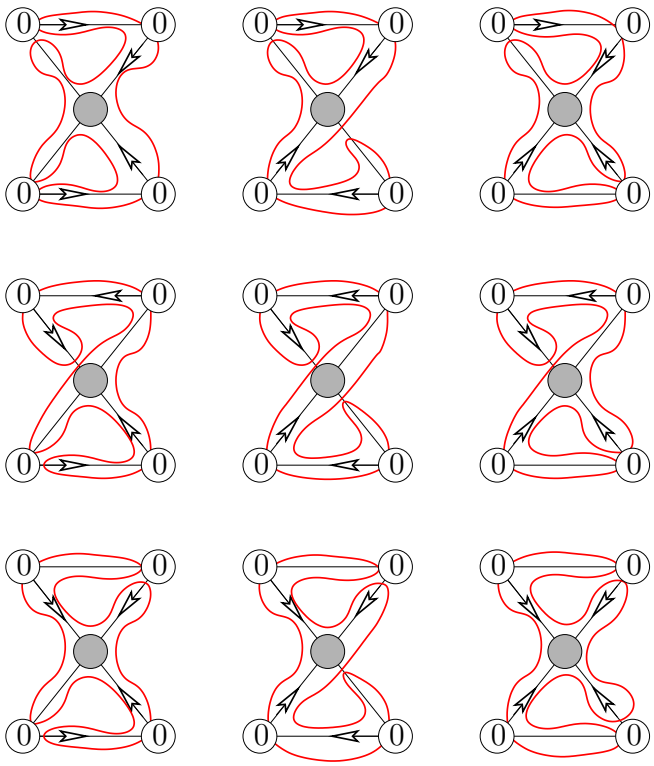


FIG. 6.2 – Configurations récurrentes du marcheur eulérien et parcours eulériens.

à tout parcours eulérien d'une carte dont un sommet $\mathtt{q}$ est distingué $d_{\mathtt{q}}$ arbres couvrants.

Si de plus on distingue un brin incident à $\mathtt{q}$, alors un tel parcours eulérien est en relation avec un unique arbre couvrant, dont il est l'image par l'application précédente. Ainsi, si on se donne une carte, un sommet et un brin incident à ce sommet, on peut construire une bijection entre les arbres couvrants de cette carte et ses parcours eulérien. Or on peut montrer que l'algorithme thermique peut être effectué en éboulant le puits grain par grain, et ainsi associer un parcours eulérien de la carte à chaque configuration récurrente, en notant le parcours des grains quand on envoie le premier grain le long du brin distingué.

Exemple 6.4
Cet exemple illustre la remarque ci-dessus. Le brin distingué ici est le brin qui relie le puits et le sommet en haut à gauche de la Figure 6.2 page précédente.

◇

– o –

6.2.2 Bijection commune au tas de sable et au marcheur eulérien

Les deux bijections classiques ([23],[9]) sur le modèle du tas de sable font intervenir un ordre sur les arêtes du graphe. À chaque étape, on choisit de traiter l'arête de plus forte priorité parmi un sous-ensemble d'arêtes. En quelque sorte, tout se passe comme s'il y avait plusieurs marcheurs sur le graphe, et qu'à chaque étape, un seul peut avancer. On peut en fait s'inspirer du modèle du marcheur eulérien pour interpréter les bijections de Dhar ([23]) et Cori-Le Borgne ([9]) en ces termes. En particulier, on peut appliquer l'Algorithme 6.1 page suivante.

On suppose que chaque brin a une certaine priorité. On calcule pour chaque sommet du modèle le nombre d'éboulements total ($\mathtt{CalculerNbTotalEbouls}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}})$) lors du critère de Dhar. Après, on éboule le puits $\mathtt{q}$ en mettant tous ses brins incidents dans la liste des brins traités *ListeBrinsTraites* et en indiquant qu'ils ont été ajoutés lors du premier éboulement du puits. Ensuite, tant que cette liste est non vide, on extrait le brin b de priorité la plus importante. On envoie le grain vers la destination x_j de b, et on éboule x_j si ce grain a provoqué son instabilité. On ajoute $b = (x_i, x_j)$ à la liste *Arbre* qui défini l'arbre obtenu à la fin, si :

- b a été ajouté à la liste lors du dernier éboulement de x_i,
- et si b a provoqué l'éboulement de x_j.

Algorithme 6.1 (CalculerArbreCouvrant)
Données: $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}}, \varphi = (\omega, h)$
début
  $ListeBrinsTraites \leftarrow \emptyset$;
  $Arbre \leftarrow \emptyset$;
  `InitialiserTab`$(NbEbouls)$;
  $NbTotalEbouls \leftarrow$ `CalculerNbTotalEbouls`$(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathtt{q}})$;
  `AjouterBrinsEboules`$(ListeBrinsTraites, \mathtt{q}, 1)$;
  tant que $ListeBrinsTraites \neq \emptyset$ **faire**
    $b \leftarrow$ `ChoisirBrin`$(ListeBrinsTraites)$;
    $x_i =$ `origine`(b) ;
    $x_j =$ `destination`(b) ;
    si $x_j \neq \mathtt{q}$ **alors**
      $h_j \leftarrow h_j + 1$;
      si $h_j = \tau_j$ **alors**
        si $date(b) = NbTotalEbouls[x_i]$ **alors** $Arbre \leftarrow Arbre \cup b$;
        $NbEbouls[x_j] \leftarrow NbEbouls[x_j] + 1$;
        `AjouterBrinsEboules`$(ListeBrinsTraites, x_j, NbEbouls[x_j])$;
        $h_j \leftarrow 0$;
      finsi
    finsi
  fintq
fin
Résultat: $Arbre$

Il faut prendre comme convention que le puits ne s'éboule qu'une fois et n'est jamais instable. Dans ce cas, la double condition mentionnée plus haut nous permet effectivement de retrouver les bijections de Dhar et Cori-Leborgne suivant les priorités que l'on affecte aux brins. Dans les deux cas, on part d'une priorité initiale définie sur les arêtes que l'on affecte aux deux brins correspondants à cette arête. Dans le cas de la bijection de Dhar, il faut cependant calculer une priorité plus complexe au fur et à mesure de l'algorithme. Pour un brin b, elle sera égale à $(-l_b, p_b)$, où l_b est la distance du brin au puits par le bout d'arbre déjà construit, et p_b la priorité initiale. Ensuite il suffit de prendre l'ordre lexicographique. Pour la bijection de Cori-Leborgne, il n'y a aucun changement à faire.

En fait, cet algorithme défini aussi la bijection mentionnée plus haut dans le contexte du marcheur eulérien. Pas tout à fait, car il y a quelques modifications à apporter, dans la mesure où le rôle du puits est légèrement différent. Un bon moyen de régler le problème est d'ajouter un puits fictif $\mathtt{q}'$ relié uniquement à $\mathtt{q}$ et de poser $\tau_{\mathtt{q}} = 1$, $\omega_{\mathtt{q}} = (\mathtt{q}, \mathtt{q}')$ et bien sûr $h_{\mathtt{q}} = 0$. Ainsi, on retrouve dans $Arbre$ la liste des brins correspondants à la configuration-flèche de la configuration récurrente.

Cependant, en dépit du fait que cet algorithme fonctionne pour les deux modèles, la question de l'adaptation à un modèle hybride tel que tout sommet admet un seuil égal à 1 ou à son degré n'est pas réglée.

– *o* –

6.2.3 Projection sur le modèle du marcheur eulérien

Dans le cas général, si un modèle admet un vecteur de facteurs multiplicatifs $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors une classe E_ω de configurations récurrentes équivalentes par orientation est isomorphe à $(\prod \lambda_i)$ copies de l'ensemble des arbres couvrants $\mathcal{T}$. On peut définir une projection π_ω très naturelle de E_ω dans $\mathcal{T}$, telle que :

$$\forall A \in \mathcal{T}, |\pi_\omega^{-1}(A)| = \prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i. \tag{6.2.1}$$

En effet, il suffit d'imaginer que les seuils passent tous à 1 subitement ($\forall x_i \neq \mathtt{q}, \tau_i = 1$). L'image d'une configuration récurrente est alors la configuration stable obtenue après l'avalanche de cette configuration dans le nouveau modèle. Il est trivial que dans ce cas, une configuration récurrente donne une configuration récurrente dans le nouveau modèle. On note π cette projection sur le nouveau modèle étendue à l'ensemble des configurations. On peut alors montrer que π est compatible avec l'Équation 6.2.1.

Proposition 6.5 *Soit E_ω une classe de configurations récurrentes équivalentes par orientation. Alors :*

$$\forall A \in \mathcal{T}, |\pi^{-1}(A) \cap E_\omega| = \prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i.$$

Démonstration :

En effet, on sait que E_ω est une composante fortement connexe du graphe W défini au Lemme 5.25 page 198, dont les sommets sont les configurations récurrentes et les arcs les opérateurs $\mathtt{a}_i$.

Deux configurations de E_ω ont la même image par π si et seulement si elles correspondent au même élément du groupe du nouveau modèle, c'est-à-dire du groupe du marcheur eulérien sur la carte. Les relations de ce groupe sont les relations :

$$\forall x_i \neq \mathtt{q},\ \mathtt{a}_i^{-\Delta^{\mathtt{q}}_{i,i}} = \prod_{x_j \neq x_i, \mathtt{q}} \mathtt{a}_j^{\Delta^{\mathtt{q}}_{i,j}} \quad [Eq\ r_i^m].$$

Ces relations sont toutes indépendantes ($\mathtt{det}(\Delta^{\mathtt{q}}) > 0$). Comme ces relations ne sont valables pour E_ω que élevées à la puissance λ_i, on en déduit qu'il y a bien exactement $\prod_{x_i \neq \mathtt{q}} \lambda_i$ éléments distincts de E_ω par classe d'équivalence pour la relation d'équivalence induite par les n relations $[Eq\ r_i^m]$. □

Exemple 6.5

On considère le modèle parfaitement symétrique de la Figure 6.3 page ci-contre. Les seuils des deux sommets valent 2. Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$. La figure représente un ensemble E_ω, c'est-à-dire une composante fortement connexe du graphe W associé au modèle. Les relations pour le groupe du modèle sont :

$$\mathtt{a}_1^6 = \mathtt{a}_2^4 \quad \text{et} \quad \mathtt{a}_2^6 = \mathtt{a}_1^4.$$

Elles s'interprètent sur la Figure 6.3 page suivante de la manière suivante ; partant d'une configuration, tout parcours constitué de 6 arcs noirs à l'endroit et 4 arcs rouges à l'envers

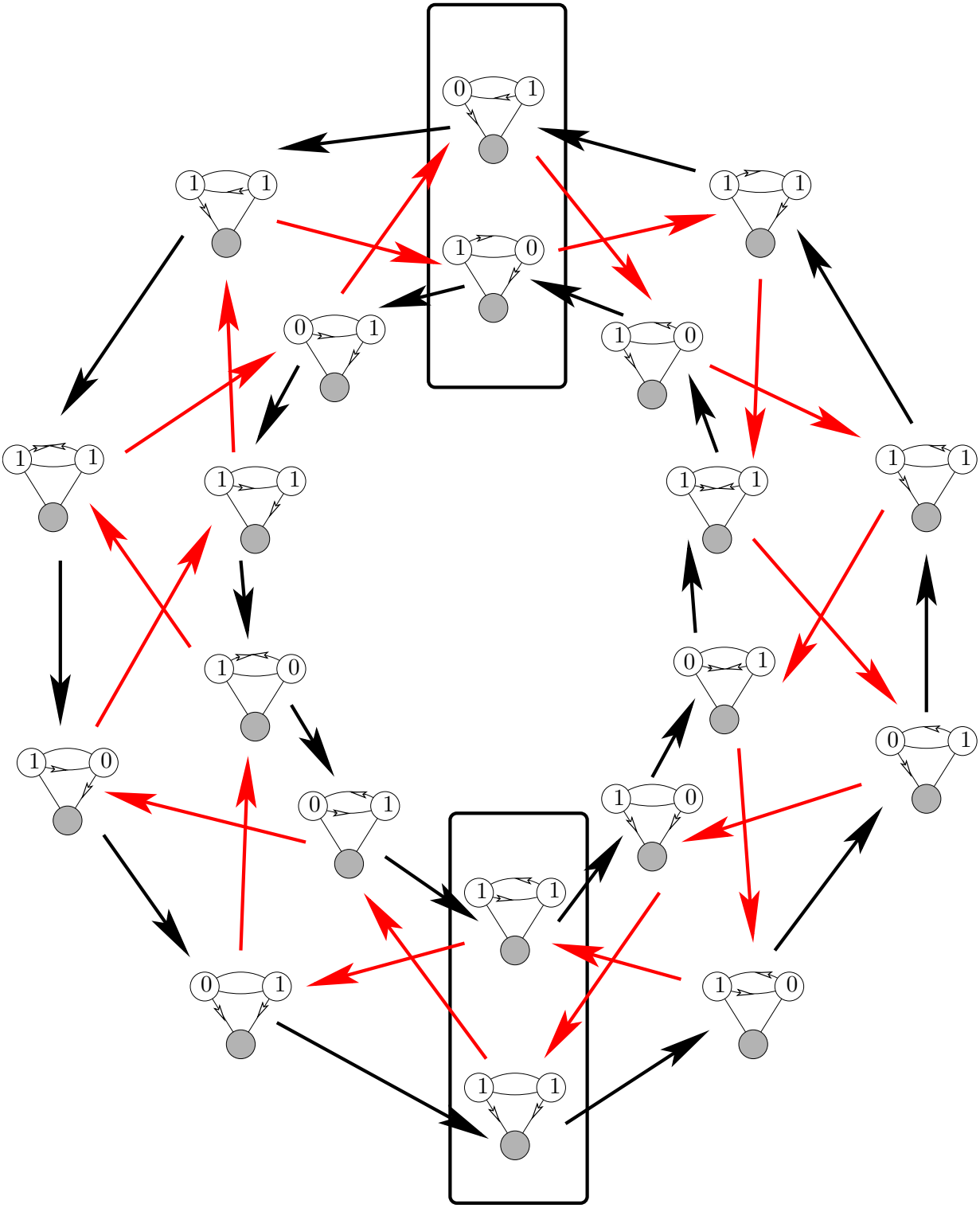


FIG. 6.3 – 4 configurations de E_ω dont l'image par π est la même.

conduit à la configuration de départ. Par symétrie on peut échanger *'noir'* et *'rouge'* dans cette affirmation pour obtenir la deuxième relation.

Les éléments de E_ω qui donnent la même image par π sont équivalents par l'ensemble des relations valables sur le modèle du marcheur eulérien correspondant, à savoir :

$$\mathsf{a}_1^3 = \mathsf{a}_2^2 \quad \text{et} \quad \mathsf{a}_2^3 = \mathsf{a}_1^2.$$

On a entouré dans deux cadres noirs les $4 = \lambda_1 \times \lambda_2$ configurations d'une même classe pour cette relation d'équivalence. On peut passer de l'une à l'autre par des parcours comprenants 3 arcs rouges et 2 anti-arcs noirs et/ou 3 arcs noirs et 2 anti-arcs rouges et/ou *etc.*

La Figure 6.4 montre qu'en effet, ces 4 configurations donnent le même arbre couvrant, celui constitué des deux arêtes liées au puits. ◇

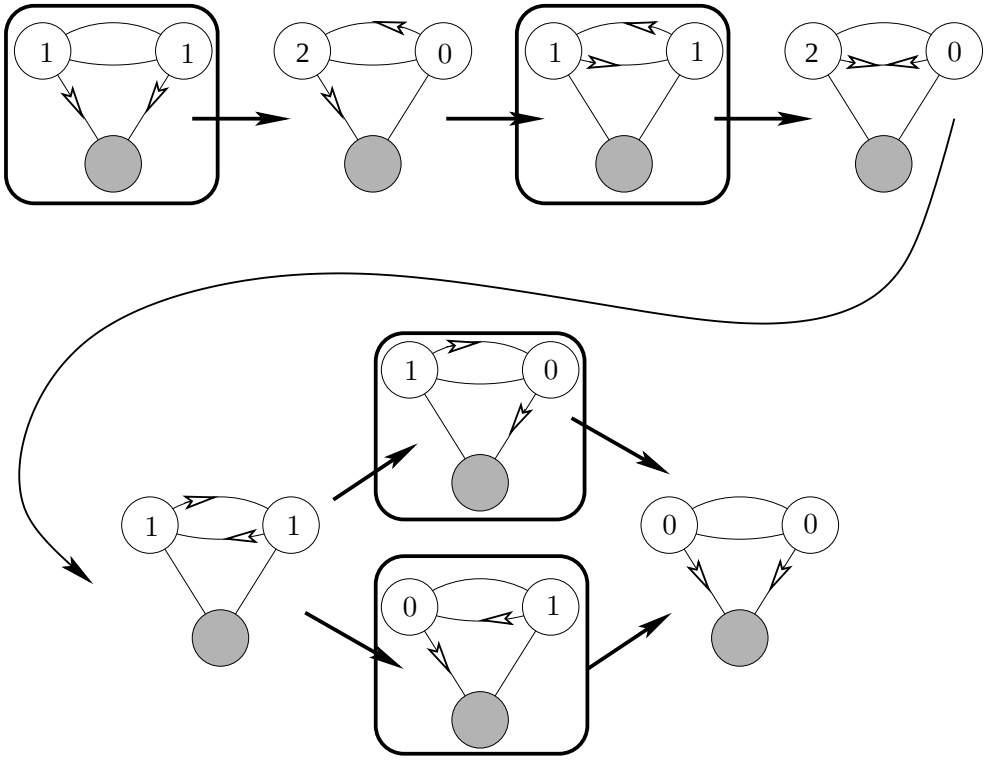


FIG. 6.4 – La projection π appliquée aux 4 configurations précédentes.

$-\ o\ -$

Pour terminer l'étude de cette projection, il serait nécessaire de regarder les modifications induites sur les groupes asssociés. On sait que cette projection est un *morphisme de groupe* du MFH vers le quotient de ce groupe par les relations $([Eq\ r_i^m])$, lui-même *isomorphe* au groupe du tas de sable (ou du marcheur eulérien). L'étude plus détaillée de ce morphisme constitue une autre piste de recherche possible.

De même, on peut étudier de manière plus générale les projections intermédiaires, c'est-à-dire sur les modèles $\mathcal{M}_{\mathsf{q}}^{\tau'} = (\mathcal{M}, \mathsf{q}, \tau')$, tels que :

$$\forall x_i \neq \mathsf{q}, \tau_i' | \tau_i.$$

De la même manière, une classe E_ω du modèle initial se projette sur une classe E'_ω du modèle transformé. Ce problème paraît relativement similaire à celui de la projection sur le modèle du marcheur eulérien.

$-\ o\ -$

6.3 Problèmes divers

6.3.1 Opérateurs transversaux

Si on considère un modèle flèche-hauteur $\mathcal{M}^\tau_{\mathtt{q}}$ et l'ensemble de toutes ses configurations récurrentes $\mathcal{E}$, on peut définir un nouvel ensemble d'opérateurs agissant sur $\mathcal{E}$, qui permet de passer d'une classe E_ω à une autre.

Si φ est une configuration de $\mathcal{E}$, et si x_i est un sommet régulier, on définit l'opérateur $\mathtt{f}_i$ tel que $\varphi' = \mathtt{f}_i\,\varphi$ si φ' est obtenue à partir de φ en tournant la flêche en x_i une fois, en ajoutant un grain sur le sommet pointé par cette nouvelle flèche, et en effectuant éventuellement la relaxation. Autrement dit, si $\varphi = (\omega, h)$, et si on pose $\varphi'' = (\omega'', h'')$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall x_j \neq x_i, \mathtt{q}, \qquad & \omega''_j = \omega_j, \\ & \omega''_i = \sigma(\omega_i), \\ & h'' = h + \mathtt{send}(\omega''_i), \end{aligned}$$

alors $\varphi' = \mathtt{a}_i\,\varphi''$. Le lemme suivant est trivial :

Lemme 6.6 *Soit x_i un sommet régulier, si φ est récurrente, alors $\mathtt{f}_i\,\varphi$ est récurrente.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le critère de Dhar généralisé à la configuration $\mathtt{f}_i\,\varphi$. □

Exemple 6.6
On reprend l'Exemple 5.6 page 193 et la configuration récurrente de gauche de la Figure 5.9.

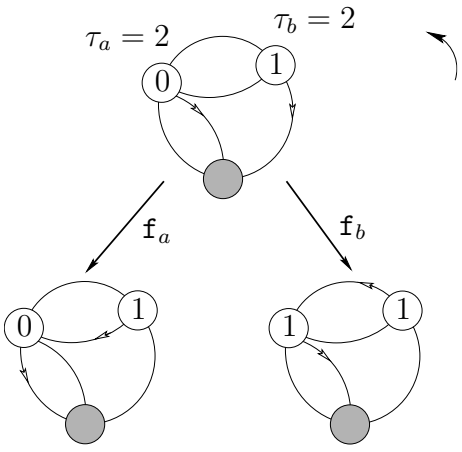


FIG. 6.5 – Opérateurs $\mathtt{f}_a$ et $\mathtt{f}_b$.

La Figure 6.5 montre l'action des deux opérateurs $\mathtt{f}_a$ et $\mathtt{f}_b$ sur cette configuration. Comme $\mathtt{pgcd}(\tau_a, d_a) > 1$, l'opérateur $\mathtt{f}_a$ implique un changement de classe d'équivalence par flèche. ◇

On a des relations très simples entre les opérateurs $\mathtt{a}_i$ et les nouveaux opérateurs $\mathtt{f}_i$:

$$\forall x_i \neq \mathtt{q},\ \mathtt{f}_i^{\tau_i} = \mathtt{a}_i^{\tau_i}.$$

Ces relations sont aussi valides quand on fait agir ces opérateurs sur des configurations positives quelconques. De plus, elles impliquent le fait que les opérateurs $\mathtt{f}_i$ sont inversibles quand ils agissent sur $\mathcal{E}$. Ainsi, les opérateurs $\mathtt{f}_i$ forment un autre *groupe abélien* sur le modèle qu'il serait intéressant d'étudier.

Conclusion

To see a world in a grain of sand,
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand,
And eternity in an hour.

William Blake

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux modèles discrets, dont nous avons étudié les propriétés dynamiques et combinatoires. Les systèmes dynamiques discrets suscitent un intérêt grandissant, dans la mesure où ils cachent souvent une *complexité* importante dans leur comportement qui contraste avec la *simplicité* des règles qui les régissent. Beaucoup espèrent y voir des modèles pour de nombreux phénomèmes naturels et les premiers résultats nous inclinent à l'optimisme. Le premier modèle que nous avons étudié dans cette thèse a joué un rôle moteur, si ce n'est majeur, dans ce mouvement intellectuel. Il s'agit du modèle du tas de sable qui a été découvert par Bak, Tang et Wiesenfeld en 1987 [3]. Dans sa forme originelle, il reste un sujet d'étude important pour toute une communauté scientifique, principalement physicienne, car peu de ses secrets ont été percés.

— *o* —

Cette thèse a permis d'étendre la compréhension de ce modèle. En se plaçant dans un cadre plus général, celui des graphes connexes quelconques, nous avons résolu le problème de la distribution des avalanches pour plusieurs familles de graphes [8, 22, 20, 17]. Nous avons introduit un cadre précis et rigoureux, les polynômes d'avalanches, pour déterminer les distributions d'avalanches pour la famille des arbres, des cycles, des graphes complets, et pour des familles plus complexes comme celles des graphes sucettes ou des roues. En outre, les méthodes employées, de type combinatoire, ont parfois révélé des liens structuraux entre certains objets qui en eux-mêmes constituent des résultats intéressants.

Cette thèse a aussi permis de répondre à des questions concernant les aspects algébriques du modèle, et en particulier sa structure de groupe abélien. À travers l'exemple du groupe diédral, nous avons montré qu'il n'y a pas de liens entre le groupe du tas de sable sur un graphe donné et la structure algébrique que peut représenter ce graphe en question [18]. En outre, cet exemple illustre les difficultés techniques liées à la recherche systématique de la structure du groupe du tas de sable pour une famille de graphes quelconque. De plus, nous avons aussi proposé quelques résultats partiels et de nouvelles conjectures pour le calcul de l'identité sur la grille [19]. Nous avons proposé des problèmes similaires

dont la résolution et l'étude paraissent plus simples. Passer par ces problèmes annexes nous paraît une bonne méthode pour s'attaquer à terme au problème de l'identité. Enfin, nous avons aussi considéré le modèle sans puits. Après l'avoir rigoureusement défini, nous avons montré comment le problème du mot sur le groupe infini finiment généré de ce modèle se résout trivialement.

— *o* —

La deuxième partie de cette thèse est consacrée au modèle flèche-hauteur, beaucoup plus récent [52], mais issu du premier. En effet, il en constitue une généralisation. Alors que seules les problématiques 'physiciennes', c'est-à-dire concernant principalement la distribution des avalanches sur le modèle, connaissaient des résultats, il n'existait pas de théorie générale sur les ensembles de configurations comme le modèle du tas de sable en propose. Priezzhev, Dhar et al. ont cependant donné dans [52] les prémices d'une théorie pour un autre cas particulier très intéressant, appelé modèle du marcheur eulérien. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à la présentation d'une théorie générale pour le modèle dans son intégralité [21].

En particulier, cette théorie concerne aussi bien les aspects dynamiques du modèle (cycle de vecteurs d'éboulements, treillis de la relaxation, séquences d'opérations, algorithme thermique, ...) que les aspects combinatoires, qu'ils soient plutôt de type énumératif (différentes relations d'équivalence et taille de leurs classes respectives) ou de type algébrique (structure de groupe, extension de l'addition, morphismes de groupes, ...).

Suite à ce travail, une théorie relativement complète du modèle se profile, et nous pouvons considérer avoir atteint une certaine *compréhension* de nombreux aspects du modèle. Néanmoins, une foule de problèmes auxiliaires et pistes de recherche se présentent naturellement. En particulier, il convient d'approfondir les liens du modèle avec sa version dite λ-normalisée, d'essayer de trouver des bijections naturelles avec les arbres couvrants dans le cas $\lambda = 1$, d'étudier le comportement des opérateurs transversaux, *etc.* Enfin, le problème récurrent de la distribution des avalanches reste peut-être la principale motivation pour l'étude du modèle.

— *o* —

Prérequis mathématiques

Sommaire

— *o* —

Dans ce dernier chapitre de prérequis scientifiques, on redonne les définitions et notions de base indispensables pour comprendre ce mémoire. Dans un premier temps, on fait quelques rappels sur les relations binaires (relations d'ordre et d'équivalence) et on donne quelques définitions concernant les treillis. Ensuite, on introduit un peu d'algèbre en parlant des groupes, et plus précisément des groupes abéliens finis (forme normale de Smith). Dans un troisième temps, on définit les graphes, et les notions plus complexes d'automate, de transducteur et de carte. Ensuite on explique ce que sont les séries génératrices et comment elles s'utilisent en combinatoire, et enfin, on termine par des rappels sur les chaînes de Markov.

— *o* —

7.4 Relations d'ordre et d'équivalence

Ces premiers rappels d'algèbre s'inspirent fortement de [60, 58]. Ils sont inutiles pour quiconque a déjà suivi tout bon cours d'introduction à l'algèbre et connaît Katharine Hepburn.

Soient E et F deux ensembles. On rappelle qu'une *relation binaire* sur E est une partie de $E \times E$.

Soit $\mathcal{R}$ une *relation binaire* sur un ensemble E ; $\mathcal{R}$ est dite :

- *réflexive*, si
$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x,$$
- *symétrique*, si
$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x,$$
- *antisymétrique*, si
$$\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y,$$
- *transitive*, si
$$\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

$$-\ o\ -$$

7.4.1 Relations d'équivalence

Définition 7.2 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* si elle est *réflexive, symétrique* et *transitive*.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, on peut définir pour chaque élément x de E sa *classe*. On pose la notation suivante :

$$\forall x \in E,\ \bar{x} = \{y \in E,\ x\mathcal{R}y\}$$

Comme $x\mathcal{R}x$, on a $\bar{x} \neq \emptyset$, et $\bar{x}$ est appelé la *classe de x modulo $\mathcal{R}$*. L'ensemble des classes modulo $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$, est l'*ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$. Un élément x de $\bar{x}$ est appelé un *représentant* de la classe $\bar{x}$.

Si E est un ensemble non vide, une relation d'équivalence sur E définit une partition canonique de E à travers le quotient $E/\mathcal{R}$. Réciproquement, à toute partition d'un ensemble non vide E est associée l'unique relation d'équivalence dont le quotient correspond à cette partition.

Exemple 7.7
Si on considère l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on peut définir la relation d'équivalence suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \iff 2|(x-y),$$

où $2|(x-y)$ signifie 2 divise $x-y$, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif q tel que $x - y = 2q$. Le quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ est la partition des entiers relatifs en deux classes : celle des entiers pairs et celle des entiers impairs. L'entier 2 est un représentant de la classe des entiers pairs, et -101 est un représentant de celle des entiers impairs. ◇

Exemple 7.8
Si on considère l'ensemble F des films cinématographiques, on peut les partitionner suivant que Katharine Hepburn a joué dedans ou pas. Cette partition définit une relation d'équivalence [1] naturelle $\mathcal{R}'$ sur l'ensemble des films par :

$$\forall f_1, f_2 \in F,\ f_1 \mathcal{R}' f_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Katharine Hepburn a joué dans } f_1 \text{ et dans } f_2 \\ \text{Katharine Hepburn n'a joué ni dans } f_1 \text{ ni dans } f_2 \end{cases}$$

$\diamond$

$-\ o\ -$

Définition 7.3 Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F, et $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{S}$) une relation d'équivalence sur E (resp. sur F).

– On dit que f est *compatible* avec $\mathcal{R}$ si :

$$\forall x, y \in E,\ x \mathcal{R} y \implies f(x) = f(y).$$

– On dit que f est un *morphisme* de $(E, \mathcal{R})$ dans $(F, \mathcal{S})$ si :

$$\forall x, y \in E,\ x \mathcal{R} y \implies f(x) \mathcal{S} f(y)$$

Si f est une application de E dans F, on peut définir une *relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E associée à f* par :

$$\forall x, y \in E,\ x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

Exemple 7.9
Si on reprend les exemples 7.7 et 7.8, on peut définir de nombreux morphismes de $(\mathbb{Z}, \mathcal{R})$ dans $(F, \mathcal{R}')$. On définit f par :

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = \begin{cases} \text{Suddenly last summer (1959)} & \text{si} \quad 2|x \\ \text{All about Eve (1950)} & \text{si} \quad 2|x+1 \end{cases}$$

Alors f est un morphisme très simple de $(\mathbb{Z}, \mathcal{R})$ dans $(F, \mathcal{R}')$, qui à la classe des entiers pairs associe la classe des films dans lesquels Katharine Hepburn a joué et à la classe des entiers impairs associe la classe des films dans lesquels Katharine Hepburn n'a pas joué.
$\diamond$

$-\ o\ -$

[1] dans ce contexte, le vocabulaire mathématique est bien sûr mal adapté !

7.4.2 Relations d'ordre et treillis

Définition 7.4 Une relation binaire sur un ensemble E est une *relation d'ordre* si elle est *réflexive*, *antisymétrique* et *transitive*. Un ensemble muni d'une relation d'ordre est un *ensemble ordonné*.

Soit E muni d'une relation d'ordre $\preceq$. On dit que deux éléments x et y de E sont *comparables* si $x \preceq y$ (x inférieur ou égal à y) ou $y \preceq x$ (x supérieur ou égal à y). On note $x < y$ si $x \preceq y$ et $x \neq y$. On dit alors que y *couvre* x si $x < y$ et s'il n'existe aucun z tel que $x < z < y$. La relation $\preceq$ est dite *relation de couverture* de l'*ensemble ordonné* E.

Comme dans le cas des *relations d'équivalence* on parle de *morphismes d'ensembles ordonnés* pour les applications qui conservent les *relations d'ordre*.

Si tous les éléments de E sont comparables deux à deux, alors E est *totalement ordonné* : on dit que E est une *chaîne*. Sinon, on dit que $\preceq$ est une *relation d'ordre partiel*.

Exemple 7.10
Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, la divisibilité est un ordre partiel. Pour x, y dans $\mathbb{Z}$, on écrit $x \preceq y$ si et seulement si x divise y. Il s'agit bien d'une relation d'ordre, et cet ordre est partiel : 3 ne divise pas 5 et 5 ne divise pas 3. ◇

La *longueur* d'une *chaîne* C est $\mathcal{L}(C) := |C| - 1$, où $|C|$ est le nombre d'éléments de la *chaîne*. Le *rang* (ou la *longueur*) d'un ensemble ordonné E est notée $\mathcal{L}(E)$ et vaut $\mathcal{L}(E) := Max\{\mathcal{L}(C), C \text{ chaîne de E}\}$.

Définition 7.5 Soit E un *ensemble ordonné*. Si les *chaînes* maximales de E ont même longueur n, on dit que E est *gradué* ou *rangé*.

On représente communément un *ensemble ordonné* fini au moyen de son *diagramme de Hasse*. Le *diagramme de Hasse* d'un *ensemble ordonné* fini E est le *graphe* dont les sommets sont les éléments de E, et tel qu'il existe une arête entre x et y si y *couvre* x. De plus on impose dans ce cas que y soit placé au dessus (au sens vertical) de x.

Exemple 7.11
La Figure 7.1 donne le *diagramme de Hasse* de deux *ensembles ordonnés* finis. Le premier admet deux *chaînes* maximales de longueurs différentes : il n'est pas *rangé*. En revanche, toute *chaîne* maximale du second est de longueur 4, c'est un *ensemble ordonné rangé*. Sur la figure, le premier diagramme contient deux *chaînes* maximales de longueur différentes, le second est *rangé* : le rang de chaque élément est noté sur le sommet correspondant. ◇

On peut aussi définir la notion duale de celle de *chaîne* : l'*anti-chaîne*. Une *anti-chaîne* d'un *ensemble ordonné* E est un sous-ensemble d'éléments non comparables deux à deux. C'est une notion très importante en théorie des *treillis*.

Exemple 7.12
Les deux *ensembles ordonnés* de la Figure 7.1 ont des *anti-chaînes* maximales de taille 2. ◇

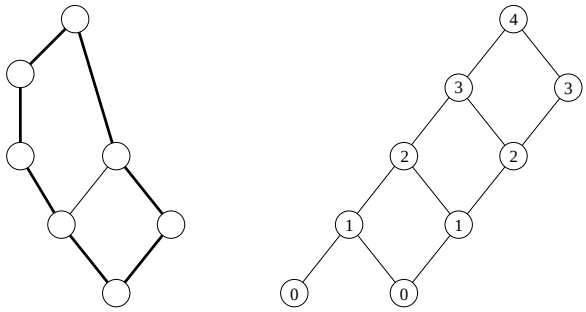


FIG. 7.1 – *Diagrammes de Hasse* de deux *ensembles ordonnés.*

– *o* –

Définition 7.6 Soit E un ensemble ordonné, et x dans E.

– On dit que x est un élément *maximal* (resp. *minimal*) de E si :

$$\forall y \in E,\ x \preceq y \implies x = y \ \ (resp.\ \ y \preceq x \implies x = y).$$

– Soit A une partie de E ; on dit que $a \in A$ est *le plus grand* (resp. *plus petit*) élément de A si :

$$\forall x \in A,\ x \preceq a \ \ (resp.\ \ a \preceq x).$$

Dans ce cas, on note $a = Max\ A$ (resp. $a = Min\ A$).

Si E est un *ensemble gradué*, alors il existe une unique fonction *rang* $\rho : E \longrightarrow \{0, \ldots, n\}$ tel que $\rho(x) = 0$ si x est un *élément minimal* de E et $\rho(y) = \rho(x) + 1$ si y *couvre* x.

Exemple 7.13
Le second *ensemble ordonné* de la Figure 7.1 est *rangé* : la valeur de chaque élément pour l'unique fonction *rang* définie sur cet ensemble est notée sur le sommet correspondant de son *digramme de Hasse.* ◇

Définition 7.7 Soient E un ensemble ordonné et A une partie de E.

– On dit que A est *majorée* (resp. *minorée*) si :

$$\exists m \in E,\ \forall a \in A,\ \ a \preceq m \ \ (resp.\ \ m \preceq a)$$

Dans ce cas, on dit que m est un *majorant* (resp. *minorant*) de A.

– Si l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A possède un plus petit (resp. plus grand) élément, il est noté $Sup\ A$ (resp. $Inf\ A$) et appelé *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*).

On note $x \vee y$ (resp. $x \wedge y$) la *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) de x et y quand elle existe.

Exemple 7.14
Si on reprend l'Exemple 7.10, on remarque que $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité admet un plus grand élément : 0, et un plus petit : 1. Si on se restreint à $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, alors les éléments minimaux sont les nombres premiers $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$, c'est-à-dire les entiers qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et 1.

Considèrons E, l'ensemble des nombres plus grands que 20 qui sont soit multiples de 12 soit multiples de 18 : $E = \{24, 36, 39, \ldots\}$. Alors E admet trois minorants dans $\mathbb{N} \setminus \{6\}$: 1, 2 et 3. En effet tous les éléments de E sont des multiples de $pgcd(12, 18) = 6$, et donc aussi de 1, 2 et 3. En fait ce sont les seuls minorants dans $\mathbb{N} \setminus \{6\}$. Et dans ce cas, E n'a pas de borne inférieure dans $\mathbb{N} \setminus \{6\}$. ◇

$- o -$

Treillis

Soit T un *ensemble ordonné*.

Définition 7.8 Si toute paire d'éléments x, y de T admet une *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*), on dit que T est un *sup-demi-treillis* (resp. *inf-demi-treillis*).

Si T conjugue les deux propriétés, T est un *treillis*. La relation d'ordre est appelée *relation de couverture* du treillis ou du demi-treillis.

Exemple 7.15
Considérons toujours $\mathbb{N}$ muni de la divisibilté ($x \preceq y$ si et seulement si x divise y). Alors $(\mathbb{N}, \preceq)$ est un *inf-demis-treillis*. En effet, si x et y sont deux entiers naturels, leur *pgcd* (plus grand commun diviseur) est la borne inférieure de x et y. De même, le *ppcm* (plus petit multiple commun) de x et y est leur borne supérieure. $(\mathbb{N}, \preceq)$ est aussi un *sup-demis-treillis* et par conséquent un *treillis*. ◇

Remarque 7.1
$(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \preceq)$ est un *sup-demis-treillis*, mais plus un *treillis*. Par exemple, 2 et 3 n'ont plus de *borne inférieure*.

Exemple 7.16
L'*ensemble rangé* de la Figure 7.1 est un *sup-demi-treillis*. En effet cet ensemble contient un *plus grand élément*. ◇

L'intervalle $[a, b]$ de deux éléments *comparables* d'un treillis T est défini par :

$$[a, b] = \{c \in T, a \preceq c \preceq b\}$$

En particulier, $[a, b]$ est un *sous-treillis* de T.

$- o -$

Définition 7.9 Un treillis T est un *hypercube* de dimension n, ou un *treillis booléen* s'il est *isomorphe* à l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ordonné par inclusion.

Définition 7.10 (Treillis distributif) Un treillis T est *distributif* s'il satisfait :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in T,\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ \forall x, y, z \in T,\ x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{aligned}$$

Définition 7.11 (Treillis SLD) Un treillis T est dit *supérieurement-localement distributif* (*SLD*) si :

$$\forall x \in T, [x, s_x] \text{ est un hypercube,}$$

où $s_x = \vee_{y \in S_x} y$ avec $S_x = \{y, y \in T \text{ couvre } x\}$.

Autrement dit, un treillis T est *SLD* si l'intervalle compris entre x et la borne supérieure des éléments qui couvrent x est un hypercube, quel que soit x dans T. Les treillis *inférieurement-localement distributif* (*ILD*) sont définis de manière duale. Un *treillis distributif* est à la fois *SLD* et *ILD*.

7.5 Groupes

Cette section est dévolue à un objet central en algèbre : *le groupe*. Nous ne détaillons que les définitions et propriétés élémentaires dont nous avons besoin plus tard. La *théorie des groupes* est un champ d'investigation mathématique très important qui dépasse de loin le cadre de cette thèse.

7.5.1 Monoïdes et groupes

Soit E un ensemble.

Définition 7.12 Une *loi de composition interne* $\perp$ sur E est une application de $E \times E$ dans E.

Exemple 7.17
Si F est un ensemble, l'intersection $\cap$ et l'union $\cup$ de deux ensembles sont des *lois de composition interne* sur $E = \mathcal{P}(F)$, l'ensemble des parties de F. ◇

En général, une *loi de composition interne* $\perp$ sur un ensemble E est munie de propriétés supplémentaires ; elle est dite :

- *associative* si :
$$\forall x, y, z \in E,\ x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z,$$
- *commutative* si :
$$\forall x, y \in E,\ x \perp y = y \perp x,$$

La plupart des *opérations mathématiques* usuelles sont des lois de compositions internes associatives et commutatives.

On dit que $e \in E$ est l'*élément neutre* pour $\perp$ si :

$$\forall x \in E,\ x \perp e = e \perp x = x$$

Remarque 7.2
Quand il existe, l'élément neutre est unique.

Exemple 7.18
L'union $\cup$ sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(F)$ d'un ensemble F admet comme élément neutre l'ensemble vide $\emptyset$. L'élément neutre de l'intersection $\cap$ sur $\mathcal{P}(F)$ est l'ensemble F tout entier. ◇

$$-\ o\ -$$

Un ensemble E muni d'une loi de composition interne est un *magma*. On appelle *magma unitaire* un magma muni d'un élément neutre. Cependant, il est rare d'avoir à faire avec des lois qui ne sont pas associatives, tant et si bien que l'objet de base à considérer est souvent le *monoïde*.

Définition 7.13 Un *monoïde* est un magma unitaire et associatif $(M, \perp)$.

Exemple 7.19
Par exemple $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}^*, \times)$ ou encore $(\mathcal{P}(F), \cap)$ sont des monoïdes. En revanche, $(\mathbb{N}^*, +)$ n'est pas un monoïde, car il n'est pas *unitaire*. ◇

Définition 7.14 Un élément x d'un magma unitaire $(E, \perp)$ est dit *symétrisable* ou *inversible* s'il existe un élément y tel que $x \perp y = y \perp x = e$.

Exemple 7.20
Les exemples précédents $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}^*, \times)$ et $(\mathcal{P}(F), \cap)$ sont des monoïdes qui n'admettent aucun élément inversible, mis à part l'élément neutre. Mais $(\mathbb{Z}, +)$ est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles, c'est-à-dire un *groupe*. ◇

Un monoïde $(M, \perp)$ est *commutatif* ou *abélien* si la loi $\perp$ est commutative.

Niels Henrik Abel $(1802-1829)$ ([26]) était un mathématicien norvégien. D'abord *algébriste*, il établit l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations algébriques de degré ≥ 5. En *analyse*, il est fondateur, avec Jacobi, de la théorie des fonctions elliptiques, et son nom figure, aux côtés de ceux de Gauss et de Cauchy, parmi les législateurs du calcul infinitésimal qui ont assis ce dernier sur des bases solides et rigoureuses. Il mourut dans sa vingt-sixième année d'une tuberculose pulmonaire contractée à dix-huit ans.
L'Académie des sciences de Norvège vient de créer le prix Abel (en 2002) à l'occasion du bicentenaire de la naissance du mathématicien. Le premier prix a été décerné au mathématicien français Jean-Pierre Serre, pour son rôle central dans l'élaboration de la forme moderne de nombreux domaines des mathématiques. En outre, Jean-Pierre Serre demeure le plus jeune récipiendaire d'une médaille Fields, obtenue en 1954.

$- o -$

Définition 7.15 On appelle *groupe*, tout monoïde $(G, *)$ dans lequel tout élément est inversible.

L'*ordre* d'un *groupe* est son cardinal. Un *groupe* est dit *abélien* si la loi est commutative.

Exemple 7.21
La plupart des ensembles usuels en mathématique sont des groupes abélien pour les opérations usuelles : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}, +)$, ou encore $(\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont des *groupes abéliens*.

Si E est un ensemble fini, l'ensemble des permutations des éléments de cet ensemble $\mathcal{S}(E)$ muni de la loi de composition o est un groupe non commutatif. ◇

$- o -$

Morphismes de groupes

Définition 7.16 Soient $(G, *)$ et $(G', \perp)$ deux groupes. On appelle *homomorphisme* ou *morphisme* de groupes de G dans G', toute application f de G dans G' telle que :

$$\forall x, y \in G,\ f(x * y) = f(x) \perp f(y).$$

On dit que $f : G \longrightarrow G'$ est un *isomorphisme* de groupe si f est un morphisme bijectif. L'application f^{-1} est alors un *isomorphisme* de G' dans G.

Si $G = G'$, un isomorphisme de G dans G est aussi appelé un *automorphisme* de G.

Remarque 7.3
L'ensemble des automorphismes $AUT(G)$ d'un groupe G est lui-même un groupe pour la composition.

Exemple 7.22
Si deux ensembles E et F sont *équipotents* (il existe une bijection de l'un vers l'autre), alors $(\mathcal{S}(E), o)$ et $(\mathcal{S}(F), o)$ sont *isomorphes*. ◇

La notion d'*isomorphisme* est très importante en algèbre. Deux *groupes* isomorphes ont la même structure ; fondamentalement, ils correspondent au même groupe abstrait, et un *isomorphisme* entre eux est en quelque sorte un changement de dictionnaire.

$- \; o \; -$

Définition 7.17 On dit qu'une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ est *compatible* avec une *loi de composition interne* $\perp$, si $x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$ entraîne $(x \perp x')\mathcal{R}(y \perp y')$.

Exemple 7.23
On note $n\mathbb{Z} = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \ldots\}$ le sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ pour la loi d'addition $+$ usuelle. La relation de *congruence* modulo l'entier naturel n est la *relation d'équivalence* définie par :

$$x \equiv y \pmod{n} \Longleftrightarrow n|(x-y) \Longleftrightarrow (x-y) \in n\mathbb{Z}$$

L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par cette relation d'équivalence est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il définit une partition des entiers relatifs en n classes d'éléments équivalents pour la congruence modulo n. Traditionnellement, on écrit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$. En fait, la loi $+$ est *compatible* avec la relation de congruence modulo n, ce qui munit le quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe pour $+$. L'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à un entier relatif associe sa classe modulo n est alors un *morphisme surjectif* de groupes. ◇

$- \; o \; -$

Un *groupe* peut être *engendré* par un ou plusieurs de ses éléments. Formellement, on a la définition suivante :

Définition 7.18 Si A est une partie quelconque d'un *groupe* G, on appelle *groupe engendré par* A, le plus petit sous-groupe, noté $< A >$, qui contient A.

Il faut entendre "plus petit" au sens de l'inclusion dans cette définition. Les éléments de $< A >$ sont en fait les produits des éléments de A et de leur inverse. Un élément de A est un *générateur* du groupe $< A >$. Si $|A| = 1$, on dit que $< A >$ est *monogène*. En particulier un tel groupe est toujours abélien.

Définition 7.19 Un groupe *cyclique* est un groupe *monogène* et fini.

Exemple 7.24
Si n est un entier relatif, le *groupe* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ mentionné à l'Exemple 7.23 est un *groupe cyclique*.

Pour $n = 12$, on retrouve le concept d'horloge que l'on connaît dès l'enfance. Ainsi calculer qu'aller au lit à 9 heures du soir et dormir 10 heures implique de se lever à 7 heures du matin, n'est rien d'autre que faire l'addition $\overline{9} + \overline{10} = \overline{7}$ dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

De manière générale, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est en quelque sorte le groupe de l'horloge généralisée à une planète sur laquelle un jour durerait n heures. ◇

Les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en fait de bons représentants des *groupes cycliques* :

Théorème 7.7 *Si G est un* groupe cyclique *d'*ordre *n, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Un *groupe cyclique* est toujours *abélien*. La réciproque est fausse. Néanmoins un groupe abélien fini est toujours le produit de plusieurs *groupes cycliques*.

$- o -$

7.5.2 Groupes abéliens finis

Les *groupes abéliens finis* ont en fait une structure algébrique très simple. Il existe une forme canonique pour les représenter : la *forme normale de Smith*. Pour comprendre son énoncé, il nous manque la proposition suivante :

Proposition 7.8 *Si $G_1, \ldots, G_k$ sont des* groupes abéliens finis*, alors $G_1 \times \cdots \times G_k$ est aussi un* groupe abélien fini *pour la loi produit induite. On l'appelle* groupe produit *des G_i.*

Exemple 7.25
Prenons $k = 2$, $G_1 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ muni de $+$ et $G_2 = \{a, b\}$ muni de $\perp$ telle que : $a \perp a = b \perp b = a$ et $b \perp a = a \perp b = b$. La loi produit induite sur $G = G_1 \times G_2$ notée $\top$ vérifie :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \{a, b\},\ (x, y) \top (x', y') = (x + x', y \perp y').$$

G est alors un *groupe abélien fini* pour cette loi, d'*élément neutre* $(\bar{0}, a)$.

Dans cet exemple G_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: si a est identifié à $\bar{0}$ et b à $\bar{1}$, alors $\perp$ correspond bien à $+$. Dans la mesure où l'on peut noter que $< a >= G_2$, *i.e.* G_2 est monogène et fini, autrement dit cyclique, et cette dernière remarque est une application directe du Thérorème 7.7. ◇

Forme normale de Smith

La forme normale de Smith est une représentation canonique d'un groupe abélien fini ([7]). Elle est un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 7.9 *Si G est un groupe abélien fini, alors il existe $G_1, \ldots, G_k$ groupes abéliens finis, tels que :*
- *G est isomorphe à $G_1 \times \cdots \times G_k$,*
- *pour tout i, l'ordre de G_i divise l'ordre de G_{i+1}.*

Si l'ordre de G_1 est strictement plus grand que 1, on dit que $G_1 \times \cdots \times G_k$ est la *forme normale de Smith* du groupe G. En effet, on peut alors montrer que cette écriture est unique, et il existe plusieurs algorithmes pour la calculer ([7]).

Représententation par générateurs et relations

Enfin, on peut rappeler une manière très utilisée pour représenter les groupes finiment générés. Si Σ est un ensemble fini, dits ensemble de *générateurs*, et si R est un ensemble de paires de mots de Σ, dit ensemble de *relations*, alors $< \Sigma | R >$ est une représentation du groupe G défini par :
- les éléments de G sont représentés par les mots sur l'alphabet Σ,
- deux mots correspondent au même élément de G s'ils sont congrus l'un à l'autre modulo R,
- la loi de groupe est la concaténation des mots.

On écrit alors $G =< \Sigma | R >$.

Exemple 7.26
Si $n > 1$, on sait que l'ensemble des permutations sur $[\![1, n]\!]$ est généré par les transpositions élémentaires $\tau_i = (i, i+1)$. Si S_n est le groupe des permutations sur $[\![1, n]\!]$, on a alors :

$$S_n =< \tau_1, \ldots, \tau_{n-1} | \tau_i^2 = id, P, T >,$$

où :

$$\begin{aligned} P &= \{\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i / |i-j| > 1\} \\ T &= \{\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} / i\} \end{aligned}$$

On dit que l'ensemble T correspond aux relations de tresse. ◇

7.6 Graphes, automates et cartes

Cette section est consacrée à l'objet de base en informatique : le *graphe*. On donne aussi des éléments de théorie ayant trait aux objets dérivés des *graphes* que sont les *automates* (et ensuite les *transducteurs*) ou encore les *cartes*.

7.6.1 Graphes

Cette section présente deux sortes de graphes : orientés et non orientés. Les définitions présentées ici sont majoritairement tirées de l'ouvrage de référence [14], mais il ne faut pas perdre de vue qu'il existe de nombreuses autres présentations, même si les différences sont minimes la plupart du temps ([61, 25]).

On rappelle qu'un *couple* d'éléments de S est un élément du produit cartésien $S \times S$; intuitivement un ensemble ordonné à deux éléments. Le couple (a, b) est différent du couple (b, a) (si $a \neq b$), alors que les *paires* $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont identiques. En fait le couple (a, b) est défini formellement par $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ en théorie des ensembles[2].

$-\ o\ -$

Définition 7.20 (Graphe orienté) Un *graphe orienté* G est un couple (S, A), où S est un ensemble fini et A une relation binaire sur S. On appelle alors :
- *sommets* de G les éléments de S,
- et *arcs* de G ceux de A.

Formellement, un arc de G est donc un *couple* de sommets. En particulier, on autorise les *boucles*, c'est-à-dire les arcs reliant un sommet à lui-même.

Traditionnellement, on représente un graphe orienté en traçant un *point* ou un *cercle* pour chaque *sommet*, et une *flèche* d'un sommet a vers un sommet b si le couple (a, b) est un *arc* du graphe. On dit que le sommet a est l'*origine* ou la *source* de l'arc (a, b) et que b en est la *destination*. On note parfois aussi $a \to b$.

Exemple 7.27
La Figure 7.2 montre comment le même graphe orienté $G_{maison} = (S_{maison}, A_{maison})$ peut être représenté de plusieurs manières. Il est défini par :

$$S_{maison} = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } A_{maison} = \{(a, c), (b, c), (c, d), (c, e), (a, b), (b, d), (d, e)\}$$

$\diamond$

$-\ o\ -$

Définition 7.21 (Graphe non orienté) Un graphe *non orienté* G est un couple (S, A), où S est un ensemble fini de sommets et A un ensemble de *paires* de sommets.

[2]En effet, on ne peut définir le couple à partir du produit cartésien, car le produit cartésien lui-même se définit à partir de la notion de couple. Cette remarque reste une anecdote à l'intention des puristes.

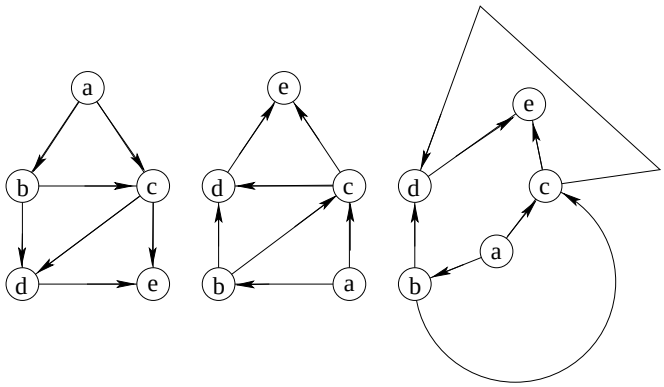


FIG. 7.2 – Trois représentations du graphe G_{maison}.

En particulier, les *boucles* ne sont pas autorisées dans un graphe non orienté. De plus, bien que les arêtes soient des *paires* de sommets, c'est-à-dire des ensembles à deux éléments (non ordonnés), on utilise habituellement la notation suivante en théorie des graphes.

> Par convention, on choisit de représenter une arête $\{a, b\}$ non orientée par la notation (a, b). On considère alors que (a, b) et (b, a) représentent la même arête.

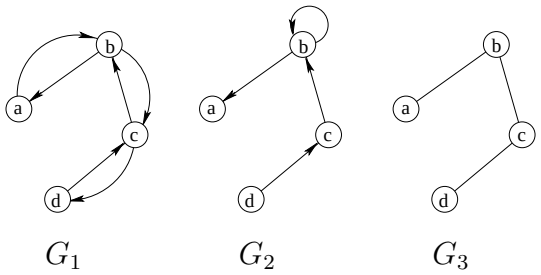
On représente un graphe non orienté de manière très naturelle en dessinant des points ou des cercles pour représenter les sommets, comme dans le cas des graphes orientés, et en traçant un trait entre deux cercles, si la paire de sommets correspondante est une arête du graphe.

$-\ o\ -$

Il y a des liens très forts entre graphes orientés et non orientés. Formellement on peut définir la *version orientée* d'un graphe non orienté et la *version non orientée* d'un graphe orienté. Étant donné un graphe non orienté $G = (S, A)$, la *version orientée* de G est le graphe orienté $G' = (S, A')$, où $(a, b) \in A'$ si et seulement si $(a, b) \in A$. Autrement dit, chaque arête (a, b) de G est remplacée dans la version orientée par les deux arcs (a, b) et (b, a). Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$, la *version non orientée* de G est le graphe non orienté $G' = (S, A')$, où $(a, b) \in A'$ si et seulement si $a \neq b$ et $(a, b) \in A$. Autrement dit, la version non orientée contient les arcs de G "débarassés de leur orientation" après suppression des boucles. Cependant, comme (a, b) et (b, a) représentent une seule et même arête dans un graphe non orienté, la version non orientée d'un graphe orienté ne la contient qu'une seule fois, même si le graphe orienté contient les deux arcs (a, b) et (b, a).

Exemple 7.28
La Figure 7.3 représente deux graphes orientés G_1 et G_2, et un graphe non orienté G_3. Pour obtenir la version non orientée d'un graphe orienté, on "enlève" les flèches des arcs, on supprime ensuite les boucles et les arêtes surnuméraires quand il en existe plusieurs qui correspondent à une même paire de sommets. Ainsi G_1 et G_2 ont la même version non orientée : G_3.

Pour obtenir la version orientée d'un graphe non orienté, on remplace chaque arête (a, b) par la paire d'arcs $\{(a, b), (b, a)\}$. Ainsi, la version orientée de G_3 est le graphe G_1. Les graphes orientés G_1 et G_2 admettent la même version non orientée G_3. G_1 est la



G_1 G_2 G_3

FIG. 7.3 – Deux graphes orientés (G_1 et G_2) et un non orienté (G_3).

version orientée de G_3. ◇

Si (a, b) est un arc d'un graphe orienté $G = (S, A)$, on dit que (a, b) *part* du sommet a et *arrive* au sommet b. Si (a, b) est une arête d'un graphe non orienté $G = (S, A)$, on dit que a et b sont les *extrémités* de (a, b), et que (a, b) est *incidente* aux sommets a et b. Si (a, b) est une arête ou un arc d'un graphe $G = (S, A)$, on dit que le sommet b est *adjacent* au sommet a. Quand le graphe est non orienté, la relation d'adjacence est symétrique, et on dit que les sommets a et b sont *voisins*.

Le *degré* d'un sommet dans un graphe non orienté est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. Un sommet dont le degré est 0 est dit *isolé*. Dans un graphe orienté, le *degré sortant* est le nombre d'arcs qui en partent, et le *degré entrant* est le nombre d'arcs qui y arrivent. Le *degré* d'un sommet dans un graphe orienté est égal à la somme de son degré sortant et de son degré entrant.

$$-\ o\ -$$

Beaucoup de définitions sont identiques pour les graphes orientés et non orientés, mais certains termes ont une signification différente selon qu'ils sont employés dans l'un ou l'autre contexte. On peut remarquer qu'on préfère parler d'arc dans le contexte orienté et d'arête dans le contexte non orienté. Cependant le terme d'arête orientée est aussi assez fréquent pour désigner un arc.

On dit qu'il existe un *chemin* dans $G = (S, A)$ du sommet a au sommet b, s'il existe une séquence L de sommets de S de la forme

$$L = \langle s_0, s_1, \ldots, s_k \rangle, \text{ avec } s_0 = a \text{ et } s_k = b,$$

et telle que $(s_0, s_1), (s_1, s_2), \ldots, (s_{k-1}, s_k) \in A$. On dit alors que L est un *chemin* de longueur k de a vers b. Le chemin est dit *élémentaire* si les sommets $s_0, \ldots, s_k$ sont tous distincts deux à deux. Le chemin L contient les sommets $s_0, s_1, \ldots, s_k$ et les arêtes ou arcs $(s_0, s_1), (s_1, s_2), \ldots, (s_{k-1}, s_k)$. On dit que le chemin L est un *circuit* (resp. un *cycle*) de longueur k si $a = b$ et si G est un graphe orienté (resp. non orienté). Si les sommets $s_0, \ldots, s_{k-1}$ sont tous distincts, on dit alors que le circuit ou le cycle est *élémentaire*.

S'il existe un chemin L de a à b, on dit que b est *accessible* à partir de a (via L). Dans le cas non orienté, cette notion est symétrique, et nous permet de définir le concept de connexité.

Définition 7.22 On dit qu'un graphe non orienté G est *connexe* si pour deux sommets distincts quelconques a et b de G il existe toujours un chemin de a à b.

Les *composantes connexes* d'un graphe sont constituées des classes d'équivalence de sommets induites par la relation d'équivalence "est accessible à partir de". Un graphe non orienté est connexe si et seulement s'il comporte une et une seule composante connexe. Dans le contexte orienté, on parle de graphes *fortement connexes*, et les *composantes fortement connexes* sont les classes d'équivalence de la relation entre sommets "sont accessibles mutuellement".

$-\ o\ -$

La notion d'*isomorphisme*, que nous avons déjà vue, s'étend très naturellement au contexte des graphes, et permet de définir plus clairement les choses :

Définition 7.23 On dit que $f : S \to S'$ est un *isomorphisme* entre deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ si :
- $(a, b) \in A \iff (f(a), f(b)) \in A'$,
- f est une *bijection* de S dans S'.

Les graphes G et G' sont alors dits *isomorphes*.

Deux graphes *isomorphes* sont fondamentalement les mêmes. Ils peuvent d'ailleurs être représentés par le même dessin, si on efface les étiquettes des sommets. En théorie des graphes, on se place toujours dans l'espace quotient pour cette relation d'isomorphisme. Ainsi peut-on parler de l'unique graphe non orienté connexe à deux sommets, car tous les graphes non orientés connexes à deux sommets sont dans la même classe d'isomorphisme. Dans la suite, on ne fait donc plus de distinction entre une classe d'isomorphisme et un de ses représentants.

On peut alors définir la notion de sous-graphe.

Définition 7.24 On dit qu'un graphe G_s est un *sous-graphe* d'un graphe $G = (S, A)$, s'il existe $S' \subset S$ et $A' \subset A$ tels que les graphes G_s et (S', A') soient isomorphes.

Dans ce cas, on dit que le graphe G *contient* le sous-graphe G_s.

$-\ o\ -$

Familles classiques de graphes.

Les graphes ont été tellement étudiés (et le sont encore), que de nombreuses familles de graphes ont des noms. Informellement, une *famille* de graphes est l'ensemble des graphes qui vérifient une certaine propriété, ou plusieurs. La famille la plus simple et la plus connue est sans conteste celle des *arbres*.

Définition 7.25 On dit qu'un graphe non orienté G est un *arbre* s'il est connexe et acyclique.

Si G ne contient aucun cycle mais n'est pas connexe, on parle de *forêt*.

Exemple 7.29
Le graphe non orienté G_3 de la Figure 7.3 est un *arbre*. En revanche, sa version orientée G_1 admet un grand nombre de circuits. ◇

Définition 7.26 Soit $n \geq 1$ et $K_n = (\llbracket 1, n \rrbracket, A_n)$ défini par :

$$\forall 1 \leq i < j \leq n,\ (i,j) \in A_n.$$

Alors, on dit que K_n est le *graphe complet* à n sommets.

En fait A_n contient toutes les paires de sommets distincts possibles, c'est-à-dire $n(n-1)/2$ arêtes. Pour n donné, il n'y a qu'un graphe complet à n sommets (à isomorphisme près). La Figure 7.4 représente le graphe complet K_4 à 4 sommets à gauche. Il contient bien

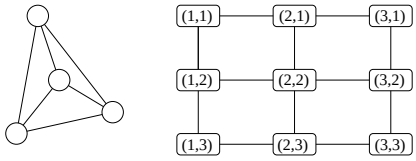


FIG. 7.4 – Le graphe complet K_4 à 4 sommets et la grille $L_{3,3}$ de taille 3×3.

$4 \times 3/2 = 6$ arêtes. De par sa définition, on comprend bien que le graphe complet admet des propriétés combinatoires intéressantes. Une partie de celles-ci est dévoilée dans la partie centrale de cette thèse.

D'autres familles ont un intérêt non négligeable. La *grille* est un concept de graphe qui est très important en pratique. Il est le support de nombreux modèles en physique.

Définition 7.27 On dit que $L_{k,l} = (\llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, l \rrbracket, A_{k,l})$ est une *grille* de taille $k \times l$ si :

$$\forall 1 \leq \kappa \leq \kappa' \leq k, 1 \leq \lambda \leq \lambda' \leq l,$$
$$\{(\kappa,\lambda),(\kappa',\lambda')\} \in A_{k,l} \iff \begin{cases} ((\kappa' = \kappa) \quad \text{et} \quad (\lambda' = \lambda + 1)) \\ \text{ou} \\ ((\kappa' = \kappa + 1) \quad \text{et} \quad (\lambda' = \lambda)). \end{cases}$$

Exemple 7.30
Le graphe de droite de la Figure 7.4 représente la grille $L_{3,3}$ de taille 3×3. ◇

7.6.2 Automates et transducteurs

Automates

Une des applications de la théorie des graphes concerne celle des langages. Un langage sur un alphabet fini est un sous-ensemble de l'ensemble des mots sur cet alphabet. Le lien entre ces deux théories se fait au moyen d'objets particuliers appelés *automates*, qui peuvent être vu comme des graphes orientés un peu particuliers. On en donne d'abord la définition formelle :

Définition 7.28 Un *automate* fini $\mathcal{A}$ est un quintuplet (S, I, F, A, M) tel que :
- S est un ensemble fini d'états,
- I est un sous-ensemble de S, dit ensemble des états initiaux,
- F est un sous-ensemble de S, dit ensemble des états finaux,
- A est un ensemble fini de lettres (alphabet),
- M est une application de $S \times (A \cup \{\emptyset\})$ dans $\mathcal{P}(S)$, dite fonction de transition.

On dit que $\mathcal{A}$ est *déterministe* si M peut être vue comme une application de $S \times A$ dans S, et si $|I| = 1$.

On représente l'automate $\mathcal{A}$ par le graphe orienté G tel que :
- les sommets de G sont les états de $\mathcal{A}$,
- il existe un arc étiqueté par $a \in A$ entre l'état s et l'état s' si $M(s, a) = s'$,
- il existe un arc étiqueté par ϵ entre l'état s et l'état s' si $M(s, \emptyset) = s'$,
- il existe un arc entrant vers l'état s si $s \in I$,
- et l'état s est représenté par un double cercle si $s \in F$.

Exemple 7.31
Considérons l'automate $\mathcal{A} = (S, I, F, A, M)$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{s_1, s_2, s_3\} \\ I & = & \{s_1, s_2\} \\ F & = & \{s_1, s_3\} \\ A & = & \{a, b\} \\ M & : & \left\{ \begin{array}{lcl} (s_1, a) & \rightarrow & \{s_2, s_3\} \\ (s_1, b) & \rightarrow & \{s_2\} \\ (s_1, \emptyset) & \rightarrow & \emptyset \\ (s_2, a) & \rightarrow & \emptyset \\ (s_2, b) & \rightarrow & \emptyset \\ (s_2, \emptyset) & \rightarrow & \emptyset \\ (s_3, a) & \rightarrow & \{s_3\} \\ (s_3, b) & \rightarrow & \{s_3\} \\ (s_3, \emptyset) & \rightarrow & \{s_1\} \end{array} \right. \end{array}$$

Cet automate est représenté sur la Figure 7.5. ◇

On dit que la *lecture d'un mot* w sur l'alphabet mène d'un état s_1 à un état s_2 s'il existe un chemin de s_1 à s_2 d'étiquette w modulo ϵ. On dit que l'automate *reconnaît* le mot w si $s_1 \in I$ et $s_2 \in F$.

Exemple 7.32
On reprend l'exemple précédent. Le mot *baba* peut être lu de s_3 vers s_3 (*baba*), de s_3 vers s_1 (*baba*ϵ) et de s_3 vers s_2 (*bab*ϵ*a*). En revanche, ce mot n'est pas reconnu par l'automate, car il ne peut être lu ni à partir de s_1, ni à partir de s_2 qui sont les deux états initiaux.

De même, le mot *b* n'est pas reconnu, car s_2 n'est pas un état final. En revanche, *abba* est reconnu par cet automate.

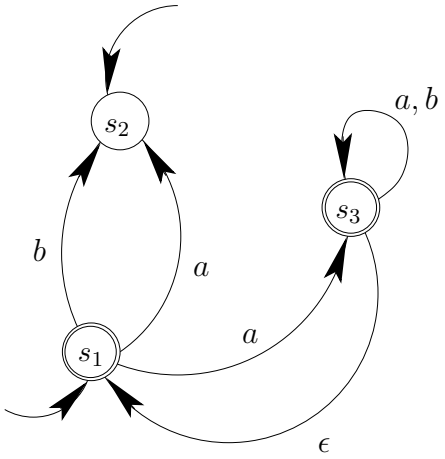


FIG. 7.5 – Représentation de l'automate $\mathcal{A}$.

À tout automate, on peut associer le langage qu'il reconnaît, c'est-à-dire l'ensemble des mots reconnus par l'automate. Les automates finis déterministes reconnaissent une classe de langage très simple dite classe des langages rationnels. En fait, il s'agit des langages pour lesquels il existe une expression régulière. On ne détaille pas ce point. Se reporter à [34] pour plus de détails. On peut aussi montrer que tout automate fini est équivalent à un automate fini et déterministe. Cela signifie qu'il existe toujours un automate fini déterministe qui reconnaît le même langage qu'un automate fini donné. De plus, il existe une procdure automatique pour trouver un tel automate.

Transducteurs

Étant donné un automate fini déterministe $\mathcal{A}$, la première chose à faire est de déterminer le langage $\mathcal{L}$ que $\mathcal{A}$ reconnaît. Une fois déterminé $\mathcal{L}$ en résolvannt le système induit par l'automate, on peut vouloir étudier certaines statistiques sur $\mathcal{L}$. Les *transducteurs* permettent alors de calculer certaines statistiques sur les mots du langage.

Définition 7.29 Un *transducteur* est un automate sur un alphabet $A \times Z$, où A est un alphabet de lettres, et Z un ensemble de variables.

Si $a \in A$ et $z \in Z$, et s'il existe deux états s_1 et s_2 tels que $M(s_1, (a, z)) = s_2$, on note a/z l'étiquette de l'arc entre s_1 et s_2 pour cette transition, dans la représentation du transducteur.

Si $\mathcal{L}_A \times \mathcal{L}_Z$ est le langage reconnu par ce transducteur, on note S_Z la série génératrice des occurrences des mots de $\mathcal{L}_Z$ modulo les relations de commutations entre les variables. On dit alors que le transducteur produit la série S_Z.

Exemple 7.33
Une application classique des transducteurs est de calculer le nombre de mots d'une taille donnée d'un langage rationnel. Si on prend le langage reconnu $\mathcal{L}$ par l'automate $\mathcal{A}$ de gauche de la Figure 7.6 par exemple, on peut construire le transducteur $\mathcal{T}$ de droite pour compter le nombre de a par x et le nombre de b par y, dans les mots de $\mathcal{L}$.

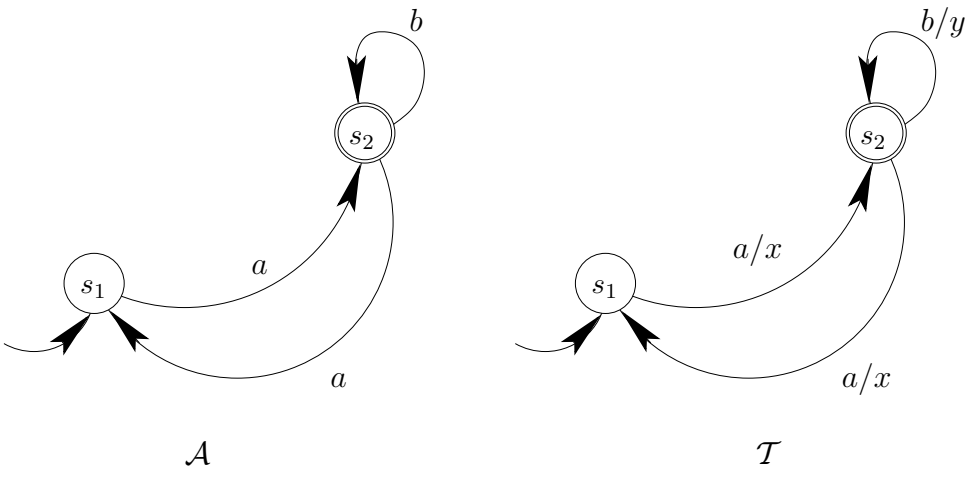


FIG. 7.6 – L'automate $\mathcal{A}$ et le transducteur $\mathcal{T}$.

On peut écrire le système suivant :

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= xS_2(x,y) \\ S_2(x,y) &= xS_1(x,y) + yS_2(x,y) + 1 \end{aligned}$$

D'où la résolution :

$$\begin{aligned} S_2(x,y) &= \frac{1}{1-y-x^2} \\ S_1(x,y) &= \frac{x}{1-y-x^2} \end{aligned}$$

Pour obtenir le nombre de mots du langage $\mathcal{L}$ reconnu par $\mathcal{A}$ qui ont taille n, il suffit de trouver le coefficient de z^n de $S_1(z,z) = \frac{z}{1-z-z^2}$. Si on veut connaître le nombre de mots de $\mathcal{L}$ qui contiennent n lettres au total et p lettres a, il faut calculer le coefficient de $z^n x^p$ de $S_1(zx,z)$. ◇

7.6.3 Cartes combinatoires

Une *carte*, ou *carte combinatoire* est un objet un peu plus complexe qu'un graphe. Informellement, c'est le plongement d'un graphe connexe sur une surface orientable. Pour plus de détails, consulter [10].

Exemple 7.34
Considérons le graphe complet à 4 sommets, K_4. Si on considère le plongement classique de ce graphe dans le plan (cf. Figure 7.7), on obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma &= \underbrace{(1,2,3)}_{a}\underbrace{(4,5,6)}_{b}\underbrace{(7,8,9)}_{c}\underbrace{(10,11,12)}_{d}, \\ \alpha &= \underbrace{(1,11)}_{(a,d)}\underbrace{(2,4)}_{(a,b)}\underbrace{(3,9)}_{(a,c)}\underbrace{(5,10)}_{(b,d)}\underbrace{(6,7)}_{(b,c)}\underbrace{(8,12)}_{(c,d)}. \end{aligned}$$

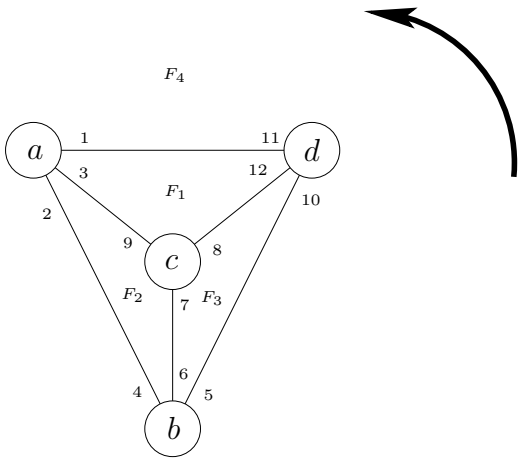


FIG. 7.7 – Plongement de K_4 dans le plan.

Les faces sont données par les cycles de $\sigma\alpha$:

$$\sigma\alpha = \underbrace{(1,12,9)}_{F_1}\underbrace{(2,5,11)}_{F_4}\underbrace{(3,7,4)}_{F_2}\underbrace{(6,8,10)}_{F_3}.$$

La face F_4 est la *face infinie*. Le genre g de cette carte est donnée par la Formule d'Euler :

$$2(g+1) = N(\sigma) - N(\alpha) + N(\sigma\alpha),$$

où $N(\sigma)$ (resp.$N(\alpha)$, resp. $N(\sigma\alpha)$) est le nombre de cycles de σ (resp. α, resp. $\sigma\alpha$). En particulier, on retrouve le fait que cette carte se dessine dans la plan, car $g = 0$.

Le graphe sous-jacent est défini par les ensembles correspondant aux cycles. Ainsi la carte définie par :

$$\begin{aligned}\sigma &= \underbrace{(1,3,2)}_{a}\underbrace{(4,5,6)}_{b}\underbrace{(7,8,9)}_{c}\underbrace{(10,11,12)}_{d},\\ \alpha &= \underbrace{(1,11)}_{(a,d)}\underbrace{(2,4)}_{(a,b)}\underbrace{(3,9)}_{(a,c)}\underbrace{(5,10)}_{(b,d)}\underbrace{(6,7)}_{(b,c)}\underbrace{(8,12)}_{(c,d)},\end{aligned}$$

c'est-à-dire où on a échangé l'ordre des brins 2 et 3 autour du sommet a est différente de la précédente. En revanche, le graphe est le même. Si on regarde les faces de cette nouvelle carte, on n'en trouve plus que 2 ; une de taille 9 et une de taille 3 :

$$\sigma\alpha = \underbrace{(1,12,9,2,5,11,3,7,4)}_{F_1'}\underbrace{(6,8,10)}_{F_2'}.$$

Cette fois le genre de la carte vaut 1. On ne peut donc plus la représenter sur un plan, mais sur un *tore* (cf. Figure 7.8). On peut continuer ainsi, et faire le même type d'opérations sur le sommet b, par exemple en échangeant l'ordre des brins 5 et 6 :

$$\sigma = \underbrace{(1,3,2)}_{a}\underbrace{(4,6,5)}_{b}\underbrace{(7,8,9)}_{c}\underbrace{(10,11,12)}_{d}.$$

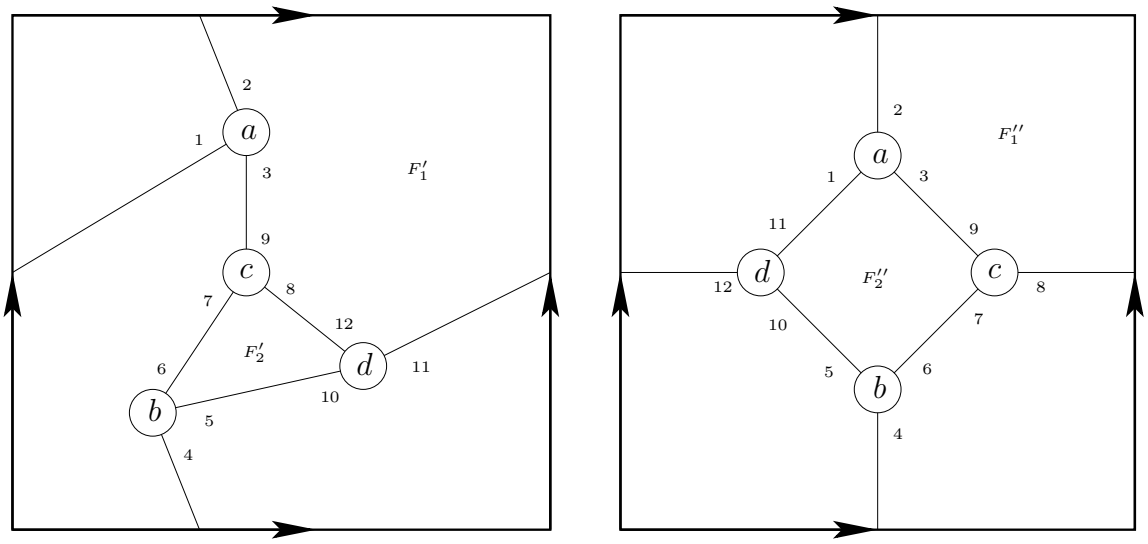


FIG. 7.8 – Deux plongements différents de K_4 sur le tore.

Bien sûr, on garde toujours la même définition pour α. Cette fois, on trouve encore 2 faces : il s'agit encore d'un plongement sur le *tore* (cf. Figure 7.8). Mais cette carte est différente de la précédente, car les faces sont de taille 8 et 4, et non plus 9 et 3 :

$$\sigma\alpha = \underbrace{(1, 12, 9, 2, 6, 8, 10, 4)}_{F_1''}\underbrace{(3, 7, 5, 10)}_{F_2''}.$$

Si on applique encore une transposition (qui conserve les sommets) à σ, alors on revient au cas du premier plongement sur le tore (quitte à renverser éventuellement l'orientation de la surface). En fait, on peut montrer facilement que les trois plongements de K_4 sur une surface orientable que l'on a mentionnés sont les seuls possibles. ◇

7.7 Séries génératrices

Dans cette section, on se donne un *corps* de base commutatif $\mathbb{K}$. Un *corps* est en fait un ensemble muni de deux opérations (*lois de compositions internes*) vérifiant certaines propriétés. Par exemple, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou encore $\mathbb{Q}$ munis de $+$ et $\times$ sont des corps commutatifs. Plus formellement, l'ensemble $\mathbb{K}$ muni de $\perp$ et $\diamond$ est un *corps* si :

- $(\mathbb{K}, \perp)$ est un *groupe abélien* d'élément neutre $0_{\mathbb{K}}$ dit *élément nul*,
- $(\mathbb{K}^*, \diamond)$ est un *groupe* d'élément neutre $1_{\mathbb{K}}$ dit *élément unité*,
- $\diamond$ est *distributive* par rapport à $\perp$, c'est-à-dire que pour tout $x, y, z \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} x \diamond (y \perp z) &= (x \diamond y) \perp (x \diamond z) \\ (y \perp z) \diamond x &= (y \diamond x) \perp (z \diamond x) \end{aligned}$$

où $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$. La loi $\perp$ est alors appelée *addition*, et la loi $\diamond$ *multiplication*. Si $x, y \in \mathbb{K}$, on note aussi xy pour $x \diamond y$. Si $(\mathbb{K}^*, \diamond)$ est un groupe abélien, alors le corps $\mathbb{K}$ est dit *commutatif*. Les éléments d'un corps sont aussi appelés *nombres*. Pour plus de détails, se reporter à [60].

On peut alors définir une *série génératrice* sur $\mathbb{K}$.

Définition 7.30 Pour une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, la *série génératrice* $f(z)$ des nombres a_n est :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

C'est une *série formelle* sur $\mathbb{K}$ en la *variable formelle* z.

L'ensemble des séries génératrices en z sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[[z]]$. Le coefficient de z^n dans la série $f(z)$ est noté $[z^n]f(z)$, *i.e.* $[z^n]f(z) = a_n$. Indépendamment de toute considération de *convergence*, on peut définir formellement un certain nombre d'opérations sur les *séries génératrices* et utiliser des méthodes de *calcul algébrique*.

7.7.1 Séries génératrices ordinaires

Les séries génératrices sont le moyen le plus classique pour énumérer une famille d'objets suivant un paramètre. Pour une très bonne introduction sur le sujet, se reporter à [29], et pour approfondir à [28, 30]. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'objets discrets (arbres, graphes, mots, ...) muni d'une taille :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ a &\longmapsto |a| \end{aligned}$$

On dit alors que $\mathcal{A}$ est un *ensemble combinatoire*.

Exemple 7.35
On peut prendre pour $\mathcal{A}$ la famille des *animaux*. Un *animal* se définit sur une grille 2-D : c'est un sous-ensemble de cases qui est connexe. La Figure 7.9 donne un exemple. L'animal est constitué des cases grisées. Un des problèmes ouverts de la combinatoire contemporaine est l'énumération des *animaux* suivant leur taille ; ici le nombre de cases dont ils sont constitués. Néanmoins, l'énumération de plusieurs sous-familles de $\mathcal{A}$ suivant le même paramètre est connue. $\diamond$

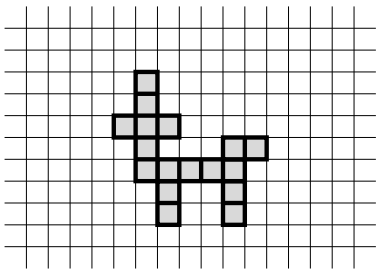


FIG. 7.9 – Un animal de taille 17.

Pout tout entier naturel n, on note a_n le cardinal de l'ensemble des objets de $\mathcal{A}$ qui sont de taille n.

Définition 7.31 On dit qu'un ensemble combinatoire $\mathcal{A}$ est *bien fondé* si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = |\{a \in \mathcal{A}, |a| = n\}| < +\infty.$$

Les ensembles combinatoires considérés dans la suite sont supposés bien fondés. Cette hypothèse est complètement naturelle en combinatoire, car on s'intéresse rarement à des ensembles dont il existe une infinité d'objets de taille finie.

Définition 7.32 La *série génératrice ordinaire* des objets de $\mathcal{A}$ comptés selon le paramètre *taille* est la série formelle :

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

c'est-à-dire la série génératrice des nombres a_n.

Dans le cadre de l'énumération d'objets discrets, le corps de base est choisi indépendamment parmi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par abus de langage, on emploie le terme *série génératrice* pour désigner une série génératrice ordinaire.

Exemple 7.36
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des colonnes de largeur 1 et de hauteur entière. La *taille* d'une colonne est sa hauteur. Pour la taille 0, il y a une colonne : la colonne vide. Pour la taille 1, il y en a une aussi : le carré de côté 1. De manière générale, il y a une seule colonne de taille n pour tout n plus grand que 0. Ainsi la série génératrice $C(z)$ des colonnes comptées suivant leur hauteur vérifie :

$$C(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

◇

Exemple 7.37
On peut considérer une famille d'objets un peu plus compliqués. Si on regarde une colonne de hauteur n comme n cases les unes sur les autres, on peut chercher à énumérer la famille

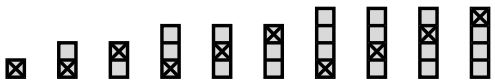


FIG. 7.10 – Les colonnes marquées de taille plus petite que 4.

des colonnes non vides marquées sur une case. La Figure 7.10 montre les objets de cette famille de taille inférieure à 4. La série génératrice $\tilde{C}(z)$ de cette famille vérifie :

$$\tilde{C}(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = zC'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

◇

Remarque 7.4
Le pointage ou le marquage d'une famille d'objets se traduit par le produit de la variable formelle z avec la dérivée de la série génératrice associée à la famille d'objets originale.

$- o -$

Méthode symbolique et équations fonctionnelles

Le principal intérêt des séries génératrices est de retranscrire en terme d'équations fonctionnelles les rapports entre objets discrets.

Théorème 7.10 (Méthode symbolique) *Soient $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{C}$ trois familles d'objets discrets, et $A(z)$, resp. $B(z)$, resp. $C(z)$ leur série génératrice ordinaire associée.*

- *Si $\mathcal{A}$ est l'union disjointe de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors :*
$$A(z) = B(z) + C(z).$$
- *Si $\mathcal{A}$ est le produit cartésien de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ($\mathcal{A} = \{(b,c), b \in \mathcal{B}, c \in \mathcal{C}\}$), et si la taille de tout objet $a = (b,c)$ de $\mathcal{A}$ vérifie $|a| = |b| + |c|$, alors :*
$$A(z) = B(z) \times C(z).$$
- *Supposons que $\mathcal{B}$ ne contienne aucun objet de taille nulle ($B(0) = 0$). Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des suites finies d'objets de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} = \mathcal{B}^* = \{\emptyset\} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{B} \times \mathcal{B} \cup \ldots$), et que la taille de tout objet $a = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ de $\mathcal{A}$ vérifie $|a| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$, alors :*
$$A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}$$

Exemple 7.38
Soit $\mathcal{B} = \{\square\}$ l'ensemble qui contient une case comme unique élément. Avec les notations du Théorème 7.10, $B(z) = z$. On peut appliquer le troisième point de ce théorème pour retrouver la série génératrice ordinaire des colonnes. En effet une colonne est une suite finie de cases, et la taille d'une colonne est son nombre de cases. On retrouve directement que $\frac{1}{1-z}$ est la série génératrice ordinaire des colonnes. ◇

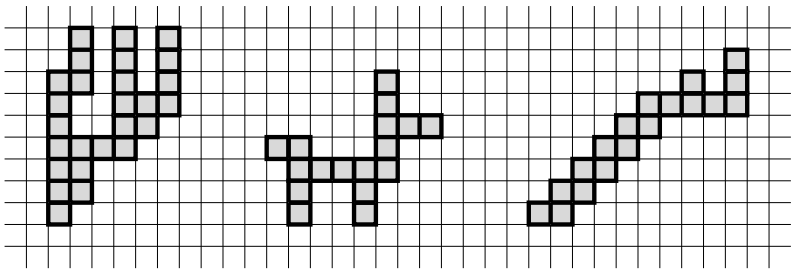


FIG. 7.11 – Un animal dirigé (cactus), un animal verticalement convexe (chien) et un animal dirigé verticalement convexe (escalier).

Ainsi de manière générale, si les objets d'une famille se décomposent de manière unique en objets d'une autre famille par des opérations d'union disjointe, de produit cartésien et de suite, et si leur taille vérifie les contraintes du Théorème 7.10, alors les séries génératrices associées vérifient l'équation fonctionelle correspondante.

Exemple 7.39
Un autre exemple est l'énumération des *animaux dirigés verticalement convexes*. On désigne la case du bas de la colonne la plus à gauche comme la *source* de l'animal. Si l'animal est dirigé, cela signifie qu'on peut atteindre toute case de l'animal à partir de la source par des pas NORD (vers le haut) et EST (vers la droite) tout en restant sur l'animal. Un animal verticalement convexe est un animal dont les cases d'une même colonne forment un ensemble convexe (sans trou). La Figure 7.11 montre trois animaux :
- le premier (le cactus) est un animal dirigé non verticalement convexe,
- le second (le chien) est un animal verticalement convexe non dirigé,
- le dernier (l'escalier) est un animal dirigé verticalement convexe.

Un animal dirigé verticalement convexe (ADVC) peut donc se décomposer de manière unique en colonnes que l'on colle ensuite les unes aux autres. Pour savoir où recoller, il faut marquer dans la colonne précédente la case qui fait face à la case du bas de la colonne que l'on considère. Ainsi, un ADVC non vide se décompose de manière unique en produit cartésien d'une suite finie (éventuellement vide) de colonnes marquées et d'une colonne non vide. La Figure 7.12 donne un exemple. Si $A_{dvc}(z)$ est la série génératrice des

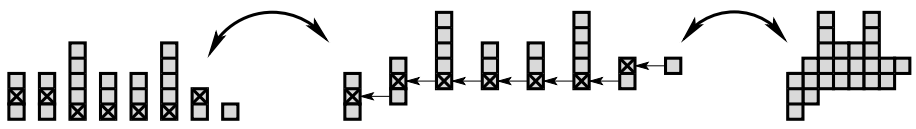


FIG. 7.12 – Exemple de décomposition d'un ADVC : cas du singe pendu (paresseux).

animaux dirigés verticalement convexes comptés suivant leur taille, alors la décomposition précédente mène à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{dvc} &= \mathcal{S}\text{uite}(\tilde{\mathcal{C}}_{\geq 1}) \times \mathcal{C}_{\geq 1} \\ A_{dvc}(z) &= \frac{1}{1-\frac{z}{(1-z)^2}} \times \frac{z}{1-z} = \frac{z(1-z)}{1-3z+z^2}. \end{aligned}$$

Sur le même principe, on peut décomposer récursivement un ADVC. Un ADVC non vide est soit une colonne non vide, soit le produit cartésien d'une colonne non vide marquée et d'un ADVC non vide (cf Figure 7.13). L'équation fonctionnelle de cette décomposition devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{dvc} &= \mathcal{C}_{\geq 1} \quad \cup \quad (\tilde{\mathcal{C}}_{\geq 1} \times \mathcal{A}_{dvc}) \\ A_{dvc}(z) &= \frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} A_{dvc}(z) = \frac{z(1-z)}{1-3z+z^2}. \end{aligned}$$

On retrouve le même résultat (heureusement). ◇

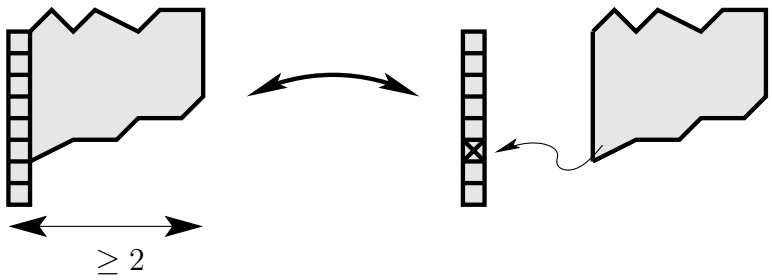


FIG. 7.13 – Décomposition d'un ADVC large d'au moins deux colonnes.

– *o* –

7.7.2 Séries génératrices exponentielles

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble d'objets étiquetés, on utilise des séries génératrices dites exponentielles pour les énumérer. Les objets combinatoires constitués de n éléments atomiques (appelés aussi *atomes*) sont *étiquetés* par les entiers de 1 à n. Les objets dont les étiquettes sont ordonnées différemment dans la structure sont alors considérés comme distincts. À un même objet non étiqueté de taille n correspond donc au maximum $n!$ objets étiquetés distincts. Dans le contexte étiqueté, on considère des séries génératrices renormalisées. Ainsi de nombreuses méthodes d'analyse reste valides dans ce contexte.

La *série génératrice exponentielle* de l'ensemble *bien fondé* $\mathcal{A}$ est la série génératrice ordinaire des nombres $a_n/n!$:

Définition 7.33 La *série génératrice exponentielle* des objets de $\mathcal{A}$ comptés selon le paramètre *taille* est la série formelle :

$$\hat{f}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Le coefficient a_n est aussi noté $n![z^n]\hat{f}(z)$.

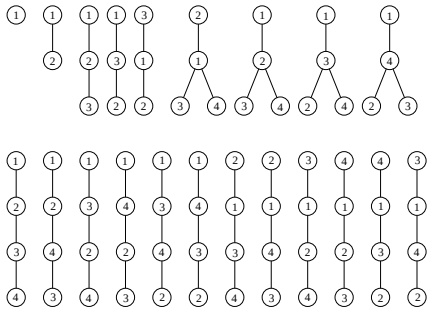
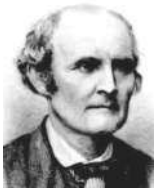


FIG. 7.14 – Les 21 *arbres de Cayley* de taille inférieure à 4.

Exemple 7.40
Les *arbres de Cayley* sont des arbres étiquetés non dessinés (les sous-arbres sont non ordonnés) et sans racine. La Figure 7.14 montre tous les arbres de Cayley de taille plus petite que 4. D'après la formule de Cayley, il y a n^{n-2} arbres de Cayley de taille n. Prufer a donné une très belle preuve bijective de ce résultat par un algorithme de codage. ◇



Arthur Cayley (1821 – 1895) né à Richmond (Angleterre), manifesta très tôt de vives dispositions pour les mathématiques. Cependant, ne pouvant s'imposer comme mathématicien, il fit des études de droit et exerça pendant quatorze ans le métier d'avocat tout en s'adonnant à des recherches scientifiques. Il fut finalement nommé professeur de mathématiques à Cambridge en 1863. L'oeuvre considérable de Cayley a porté notamment sur la définition des groupes abstraits finis, le calcul matriciel, la théorie des invariants mais aussi sur la géométrie.

Par abus de langage, on parle aussi de série génératrice en référence à une série génératrice exponentielle. Le contexte, non-étiqueté ou étiqueté, permet de savoir dans quel cadre, ordinaire ou exponentiel, on se situe. Dans le cadre exponentiel, des résultats similaires au Théorème 7.10 existent quant à la décomposition des objets combinatoires :

Théorème 7.11 (Méthode symbolique) *Soient $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{C}$ trois familles d'objets discrets étiquetés, et $\hat{A}(z)$, resp. $\hat{B}(z)$, resp. $\hat{C}(z)$ leur série génératrice exponentielle associée.*

- *Si $\mathcal{A}$ est l'union disjointe de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors :*

$$\hat{A}(z) = \hat{B}(z) + \hat{C}(z).$$

- *Si $\mathcal{A}$ est le produit cartésien de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ($\mathcal{A} = \{(b,c), b \in \mathcal{B}, c \in \mathcal{C}\}$), et si la taille de tout objet $a = (b,c)$ de $\mathcal{A}$ vérifie $|a| = |b| + |c|$, alors :*

$$\hat{A}(z) = \hat{B}(z) \times \hat{C}(z).$$

- *Supposons que $\mathcal{B}$ ne contienne aucun objet de taille nulle ($\hat{B}(0) = 0$).*
  - *Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des suites finies d'objets de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} = \mathcal{B}^* = \{\emptyset\} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{B} \times \mathcal{B} \cup \ldots$), et que la taille de tout objet $a = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ de $\mathcal{A}$ vérifie $|a| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$, alors :*

$$\hat{A}(z) = \frac{1}{1 - \hat{B}(z)}$$

– *Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des ensembles d'objets de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} = \mathcal{E}ns(\mathcal{B}) = \{\emptyset\} \cup \mathcal{B}/1! \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{B})/2! \cup \ldots$), et que la taille de tout objet $a = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ de $\mathcal{A}$ vérifie $|a| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$, alors :*

$$\hat{A}(z) = \exp \hat{B}(z)$$

Exemple 7.41
On note $\hat{B}_{\mathcal{C}a}(z)$ (resp. $\hat{A}_{\mathcal{C}a}(z)$) la série génératrice exponentielle qui énumère les *arbres de Cayley* (resp. *arbres de Cayley enracinés*) selon leur nombre de nœuds (sommets). En particulier $[z^n]\hat{A}_{\mathcal{C}a}(z) = n\hat{B}_{\mathcal{C}a}(z)$, car on a n possibilités pour enraciner un *arbre de Cayley* de taille n. Pour énumérer les *arbres de Cayley enracinés*, on peut utiliser une

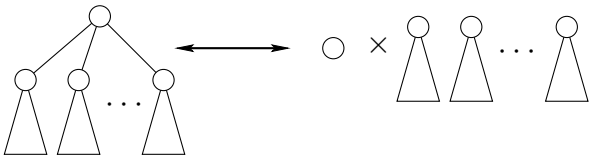


FIG. 7.15 – Décomposition récursive des *arbres de Cayley enracinés.*

décompostion très classique (cf. Figure 7.15). Un arbre de Cayley enraciné est le produit d'un nœud (la *racine*) et d'un ensemble d'arbres de Cayley enracinés. Par la méthode symbolique, on obtient l'équation fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{C}a} &= \{\circ\} \times \mathcal{E}\mathrm{ns}(\mathcal{A}_{\mathcal{C}a}) \\ \hat{A}_{\mathcal{C}a}(z) &= z \times \exp \hat{A}_{\mathcal{C}a}(z) \end{aligned}$$

Cette équation fonctionnelle se résoud explicitement par le *théorème d'inversion de Lagrange* (cf. Théorème 7.14) qui donne :

$$\forall n \geq 0, \quad n![z^n]\hat{A}_{\mathcal{C}a}(z) = n^{n-1}.$$

Ainsi, il y bien n^{n-2} *arbres de Cayley* de taille n. ◇

– *o* –

7.7.3 Analyse des coefficients

Comme on l'a vu précédemment, il existe plusieurs méthodes pour obtenir la série génératrice de la classe d'objets que l'on considère. Suivant la complexité de cette série, on peut ou non déterminer une valeur exacte ou approchée des coefficients. On se restreint au domaine des séries qui nous intéressent, c'est-à-dire aux séries à coefficients entiers positifs ou nuls. De manière générale, si le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la série génératrice des a_n est une *série entière*. Un théorème du à Abel précise dans quel domaine une telle série peut être étudiée :

Théorème 7.12 (Abel) *Si $\{a_n\}_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$:*

- converge absolument *si* $|z| < R$,
- diverge *si* $|z| > R$.

On suppose connues les notions de *convergence absolue* et *divergence*. Le nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série. La renormalisation évoquée dans le cadre des *séries génératrices exponentielles* sert en particulier à assurer un rayon de convergence strictement positif, et donc un voisinage de 0 autour duquel la série est bien définie analytiquement. Nous n'entrons pas ici dans des détails trop techniques, car les séries qui nous intéressent sont relativement simples.

Dans les cas les plus simples la série est une *fraction rationnelle*, c'est-à-dire qu'elle est le quotient de deux *polynômes*. On dit alors que la série génératrice est *rationnelle*. On rappelle que l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[z]$ et celui des fractions rationnelles $\mathbb{K}(z)$. On suppose ici que la théorie des polynômes est familière au lecteur, qui se reportera à [60, 33, 40] sinon.

Proposition 7.13 (Décomposition en éléments simples) *Soit $f(z)$ une fraction rationnelle, alors $f(z)$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$f(z) = E(z) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{R_{i,j}}{P_i^j} \right),$$

où $E \in \mathbb{K}[z]$, $P_1, \ldots, P_n$ sont unitaires irréductibles deux à deux distincts, $\nu_i \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leq i \leq n$, et $d(R_{i,j}) < d(P_i)$ pour tous i, j. On dit que E est la partie entière *de f et que les $R_{i,j}/P_i^j$ en sont les* éléments simples.

Or, on connaît très bien le développement en série entière des éléments simples, via la formule suivante :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \ \left(\frac{1}{1-z} \right)^{\alpha+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{n} z^n \tag{7.7.1}$$

En choisissant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, qui est *algébriquement clos*, on peut déterminer de manière exacte les coefficients d'une série rationnelle (en supposant qu'on est capable de factoriser son dénominateur), car la décomposition en éléments simples de f prend la forme suivante :

$$f(z) = E(z) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(a_i - z)^j} \right),$$

où $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et pour tout i, j, $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$.

Exemple 7.42
Cherchons par exemple à énumérer les *partitions d'entiers* en parts plus petites que 2. Une *partition d'un entier n* est un k-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tel que $1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_k$ et $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Les λ_i sont les *parts* de la partition. Soit $P(z)$ la série génératrice des partitions en parts plus petites que 2. Les premiers termes de $P(z)$ sont $1, 2, 2, 3$,... En effet, $1 = 1$, $2 = 1+1 = 2$, $3 = 1+1+1 = 1+2$, $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 2+2$,... La méthode symbolique nous donne directement le résultat :

$$P(z) = \left(\frac{1}{1-z} \right) \left(\frac{1}{1-z^2} \right)$$

On sait alors que $P(z)$ se décompose de manière unique sur $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$P(z) = E(z) + \frac{\beta_{1,1}}{1-z} + \frac{\beta_{1,2}}{(1-z)^2} + \frac{\beta_{2,1}}{1+z},$$

car 1 est un *pôle* double de $P(z)$ et -1 un *pôle* simple. Comme $1/(1-z^2) = (1/(1-z) + 1/(1+z))/2$, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right)/2 \\ &= \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{1}{4(1-z)} + \frac{1}{4(1+z)} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $E(z) = 0$, $\beta_{1,1} = 1/4$, $\beta_{1,2} = 1/2$ et $\beta_{2,1} = 1/4$. Appliquant la Formule (7.7.1), on trouve :

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{n}z^n + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}(1+(-1)^n)z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{2n+3+(-1)^n}{4}z^n \end{aligned}$$

On en déduit qu'il y a $(2n+3+(-1)^n)/4$ partitions de l'entier n en parts plus petites que 2. ◇

Cependant, il existe des cas plus complexes où la série recherchée n'est définie qu'implicitement par une équation fonctionnelle. Dans ce cas, la formule d'inversion de Lagrange est parfois utile :

Théorème 7.14 (Formule d'inversion de Lagrange) *Soit $f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ une série génératrice sur $\mathbb{K}$ et $\Phi(u) \in \mathbb{K}[[u]]$ telle que $\Phi(0) \neq 0$. Si f est définie implicitement par l'équation fonctionnelle $f(z) = z\Phi(f(z))$, et si $g(u)$ est une troisième série quelconque à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors :*

$$\forall n \geq 1,\ [z^n]g(f(z)) = \frac{1}{n}[z^{n-1}](\Phi^n(z)g'(z)).$$

Exemple 7.43
La résolution de l'équation fonctionnelle vérifiée par les *arbres de Cayley enracinés* (cf. Exemple 7.41) est une application directe de ce thérorème. Si $f(z)$ est la série génératrice de ces objets, elle vérifie $f(z) = z\exp(f(z))$. On se situe bien dans les hypothèses du théorème avec $\Phi = \exp$ et $g = id$. On a donc $\Phi^n(z) = \exp(nz)$ et $g'(z) = 1$. Ainsi $[z^n]f(z)$ vaut $1/n \times n^{n-1}/(n-1)! = n^{n-1}/n!$. Traitant des objets étiquetés, nous sommes dans le cadre exponentiel, et le nombre d'*arbres de Cayley enracinés* de taille n est alors donné par $n![z^n]f(z) = n^{n-1}$. ◇

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) né à Turin, est généralement considéré comme un mathématicien français. Son intérêt pour les mathématiques fut suscité par la lecture d'un travail de Halley datant de 1693 et expliquant l'utilité de l'algèbre en optique. Ainsi ses travaux, comme la *Mécanique Analytique* de 1788, trouvent leur origine dans des problèmes physiques. En particulier, il a développé le calcul des variations, et a établi la théorie des équations différentielles, dont la méthode de résolution connue sous le nom de *méthode de variation des paramètres*. Son traité sur la *Théorie des fonctions analytiques* a jeté les bases de la théorie des groupes. En 1766, il succéda à Euler comme directeur de l'Académie de Berlin, et en 1794, il fut le premier professeur d'analyse de l'École Polytechnique.

Il existe beaucoup d'autres outils (en particulier pour l'analyse asymptotique des coefficients) pour traiter les séries génératrices plus complexes. Cependant, nous n'en parlons pas ici, car ils ne sont pas nécessaires pour la suite. Le cas des fonctions *méromorphes* ayant un nombre fini ou dénombrable de *pôles* est relativement "facile" à traiter [58, 59]. De telles analyses asymptotiques sont très liées à l'étude des *singularités* de la fonction, c'est-à-dire des points où elle n'est plus *analytique*. Dans le cas des fonctions définies implicitement, la *méthode du noyau* permet de traiter un nombre plus grand de fonctions que la formule d'inversion de Lagrange. Mais tout comme cette dernière elle nécessite souvent une bonne imagination de la part de l'analyste !

7.8 Chaînes de Markov

Les *chaînes de Markov* constituent une théorie essentielle des probabilités modernes. Elles apparaissent et sont utilisées avec succès dans des domaines aussi divers que la physique, la biologie, les sciences sociales et bien sûr l'informatique.

Dans cette section, on ne redonne pas les notions de bases de probabilités. De même, on n'aborde que les définitions et résultats très simples dont on aura besoin dans la suite. En particulier, on ne présente aucun exemple, car on traite des exemples assez détaillés dans le corps de cette thèse.

7.8.1 Matrice de transition et probabilités stationnaires

Soit M un ensemble appelé *espace d'états* et $X_n \in M$ une variable désignant l'état à l'instant $n \in \mathbb{N}$ d'un système soumis à une loi d'évolution aléatoire. Dans de nombreuses situations l'évolution temporelle de (X_n) vérifie la propriété suivante :

> "La loi de X_{n+1} ne dépend de l'histoire $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ du système que par l'état présent X_n."

Cette propriété s'appelle la *propriété de Markov* et la suite (X_n) une *chaîne de Markov*.

Andrei A. Markov (1856-1922) était un mathématicien russe qui a travaillé en théorie des nombres et en analyse, puis à partir de 1900, en probabilités. Élève de Chebyshev, il généralisa la loi des grands nombres et le théorème limite central à une classe de variables aléatoires dépendantes connues aujourd'hui sous le nom de *chaînes de Markov*.

Si pour tout couple d'états (x_i, x_j) la probabilité $P(X_n = x_i | X_{n-1} = x_j)$ est indépendante du temps, c'est-à-dire de l'entier n, on dit que la chaîne de Markov est *homogène*. On considère dans la suite que la chaîne de Markov (X_n) est homogène.

Définition 7.34 Une *matrice de transition* sur M est une application $P : M \times M \to [0, 1]$, telle que :

$$\sum_y P(x, y) = 1.$$

On dit aussi que la matrice P est *stochastique* sur M. Une chaîne de Markov de matrice de transition P est une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans M, telle que :

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(x_n, x_{n+1})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ d'éléments de M. On dit alors que la matrice P est le *noyau* de la chaîne de Markov X.
La propriété fondamentale des chaînes de Markov est l'équation de Chapman-Kolmogorov, aussi appelée "*équation maîtresse*" dans la littérature physique.

Théorème 7.15 *Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov sur M de matrice de transition P. Alors :*

$$P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mu_0(\{x_0\}) P(x_0, x_1) \ldots P(x_{n-1}, x_n),$$

où μ_0 désigne la loi de X_0. En particulier,

- *la loi μ_n de X_n vérifie la relation de récurrence*

$$\mu_{n+1} = \mu_n P = \mu_0 P^{n+1},$$

- *pour tous $x, y \in M$*

$$P(X_n = y | X_0 = x) = P^n(x, y),$$

- *pour toute fonction $h : M \to \mathbb{R}$ bornée*

$$E(h(X_n)|X_0 = x) = P^n h(x).$$

Définition 7.35 Une probabilité π sur M est dite *invariante* ou *stationnaire* pour P si c'est un point fixe de l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\pi = \pi P.$$

Si X_0 est de loi π, probabilité invariante, alors X_n est de loi π pour tout $n \geq 0$. D'un point de vue dynamique, on dit que le système est dans un *état d'équilibre*.

$$- o -$$

7.8.2 Récurrence et irréductibilité

Définition 7.36 (temps de retour) Soit (X_n) une chaîne de Markov sur M. Si $x_i \in M$, on appelle *temps de retour* à l'état x_i, noté T_i, est défini par :

$$T_i = \texttt{inf}\{n \geq 1, X_n = x_i\}.$$

On note aussi le nombre de visites à l'état x_i :

$$N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = x_i\}}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 7.16 *Pour un état x_i de M,*

$$P_i(T_i < \infty) = 1 \Longleftrightarrow P_i(N_i = \infty) = 1.$$

et

$$P_i(T_i < \infty) < 1 \Longleftrightarrow P_i(N_i = \infty) < 1 \Longleftrightarrow E_i[N_i] < \infty.$$

Définition 7.37 Soit x_i un état de M. On l'appelle *récurrent* si :

$$P_i(T_i < \infty) = 1,$$

et *transient* sinon. Un état récurrent est dit positivement récurrent si :

$$E_i[T_i] < \infty.$$

Un état *récurrent* est donc un état visité un nombre infini de fois avec probabilité 1, alors que l'espérance du nombre de visites d'un état *transient* est finie.

Un état x_j est dit accessible depuis un état x_i si la probabilité d'atteindre l'état x_j depuis l'état x_i est strictement positive. On dit que x_i et x_j communiquent s'il sont mutuellement accessibles. La relation de communication est une relation d'équivalence.

Proposition 7.17 *La récurrence est une propriété de classe de communication.*

On associe alors à P la structure de graphe orienté $G = (M, E)$ définie par :

$$E = \{(x, y) \in M \times M, P(x, y) > 0\}$$

Définition 7.38 Le *noyau* P (resp. la chaîne X) est *irréductible* si pour tout couple $(x, y) \in M^2$ il existe un entier k et une suite finie $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ telle que :

$$P(x_i, x_{i+1}) > 0$$

pour $i = 0, \ldots, k-1$. C'est-à-dire :

$$P(X_k = y | X_0 = x) = P^k(x, y) > 0.$$

Remarque 7.5
L'irréductibilité de P est équivalente à la connexité du graphe G associé à P.

L'intérêt principal de l'irréductibilité d'une chaîne de Markov est que cela permet de déterminer sa distribution invariante.

Proposition 7.18 *Si P est irréductible, alors :*
- *les fonctions P-invariantes (*i.e. *$Pf = f$) sont les fonctions constantes,*
- *P admet une unique probabilité invariante π.*

Si la chaîne de Markov admet une distribution limite, alors celle-ci est invariante. Mais la réciproque est fausse. En revanche, s'il existe une unique distribution invariante, la distribution de la chaîne de Markov converge toujours vers cette dernière en moyenne de Cesaro.

$$- o -$$

7.8.3 Chaînes de Markov finies

Une chaîne de Markov est dite *finie* si elle est définie sur un ensemble fini d'états, c'est-à-dire si $|M| < \infty$.

Proposition 7.19 *Si (X_n) est une chaîne de Markov homogène et irréductible sur un espace d'états fini, alors elle est récurrente positive.*

Proposition 7.20 *Si (X_n) est une chaîne de Markov récurrente positive et irréductible, et si π est sa distribution stationnaire, alors :*

$$\pi(i) E_i[T_i] = 1,$$

où T_i est le temps de retour à i.

Index

Bibliographie

[1] N. S. Ananikian, R. G. Ghulghazaryan, N. S. Izmailian, and R. Shcherbakov. Exact solution of a z(4) gauge potts model on planar lattices. *Phys. Rev. E*, 60 :5106, 1999.

[2] P. Bak. *How nature works*. Copernicus, New York, 1996. The science of self-organized criticality.

[3] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A (3)*, 38(1) :364–374, 1988.

[4] N. Biggs. Chip firing and the critical group of a graph. Technical report, LSE, 1996.

[5] A. Björner, L. Lovász, and P. W. Shor. Chip-firing games on graphs. *European J. Combin.*, 12(4) :283–291, 1991.

[6] K. Christensen, L. Danon, T. Scanlon, and P. Bak. Unified scaling law for earthquakes. In *Proceedings of the National Academy of Science of the USA*, volume 99, pages 2509–2513, 2002.

[7] H. Cohen. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Springer Verlag, 1993.

[8] R. Cori, A. Dartois, and D. Rossin. Avalanche polynomials of some families of graphs. Third Colloquium on Mathematics and Computer Science 2004, 2004.

[9] R. Cori and Y. Le Borgne. The sand-pile model and Tutte polynomials. *Adv. in Appl. Math.*, 30(1-2) :44–52, 2003. Formal power series and algebraic combinatorics (Scottsdale, AZ, 2001).

[10] R. Cori and A. Machì. Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey. I, II, III. *Exposition. Math.*, 10(5) :403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[11] R. Cori and D. Poulalhon. Enumeration of (p, q)-parking functions. *Discrete Math.*, 256(3) :609–623, 2002. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montreal, QC).

[12] R. Cori and D. Rossin. On the sandpile group of dual graphs. *European J. Combin.*, 21(4) :447–459, 2000.

[13] R. Cori and D. Rossin. Number of cyclic groups in the abelian sandpile model. Technical report, LIAFA, 2003.

[14] T. Cormen, C. Leiserson, and R. Rivest. *Introduction à l'algorithmique*. Dunod, 1994.

[15] S. Corteel and D. Gouyou-Beauchamps. Enumeration of sand piles. *Discrete Math.*, 256(3) :625–643, 2002. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montreal, QC).

[16] M. Creutz. Cellular automata and self-organized criticality. 1997.

[17] A. Dartois. étude des pics dans la distribution de la longueur des avalanches du tas de sable sur la roue. Master's thesis, École Polytechnique, 2002.

[18] A. Dartois, F. Fiorenzi, and P. Francini. Sandpile group on the graph d_n of the dihedral group. *European Journal of Combinatorics*, 24/7 :815–824, 2003.

[19] A. Dartois and C. Magnien. Results and conjectures on the sandpile identity on a lattice. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings, pages 89–102, 2003.

[20] A. Dartois and D. Rossin. Analysis of the distribution of the length of avalanches on the sandpile group of the (n, k)-wheel. In L. S. Eriksson K., Björner A., editor, *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics - 15th+ Conference (FPSAC'03)*, 2003.

[21] A. Dartois and D. Rossin. The height-arrow model. 16*th* Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'04), 2004.

[22] A. Dartois and D. Rossin. Sandpile avalanche distribution on a wheel. *Physica D*, to appear.

[23] D. Dhar and S. N. Majumdar. Abelian sandpile model on the Bethe lattice. *J. Phys. A*, 23(19) :4333–4350, 1990.

[24] D. Dhar, P. Ruelle, S. Sen, and D.-N. Verma. Algebraic aspects of abelian sandpile models. *J. Phys. A*, 28(4) :805–831, 1995.

[25] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[26] *Encyclopedia Universalis*. 1995.

[27] J. Feder. *Fractals*. Plenum, NY, 1988.

[28] P. Flajolet and R. Sedgewick. The average case analysis of algorithms : counting and generating functions. Technical report, INRIA, 1993.

[29] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Introduction à l'analyse des algorithmes*. Vuibert, 1996.

[30] P. Flajolet and R. Sedgewick. The average case analysis of algorithms : Multivariate asymptotics and limit distributions. Technical report, INRIA, 1997.

[31] D. Foata and J. Riordan. Mappings of acyclic and parking functions. *Aequationes Math.*, 10 :10–22, 1974.

[32] E. Goles, M. Morvan, and H. D. Phan. The structure of a linear chip firing game and related models. *Theoret. Comput. Sci.*, 270(1-2) :827–841, 2002.

[33] X. Gourdon. *Les maths en têtes : Algèbre*. Ellipses, 1999.

[34] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1979.

[35] S. A. Janowsky and C. A. Laberge. Exact solutions for a mean-field Abelian sandpile . *Journal of Physics A Mathematical General*, 26 :L973–L980, Oct. 1993.

[36] P. W. Kasteleyn. Graph theory and crystal physics. In *Graph Theory and Theoretical Physics*, page 76. Academic Press, London, 1967.

[37] R. W. Kenyon, J. G. Propp, and D. B. Wilson. Trees and matchings. *Electron. J. Combin.*, 7 :Research Paper 25, 34 pp. (electronic), 2000.

[38] G. Kirchhoff. Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.*, 72 :497–508, 1847.

[39] A. G. Konheim and B. Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM journal of Applied Mathematics*, 14 :1266–1274, 1966.

[40] S. Lang. *Algebra*. Springer, 2002.

[41] M. Latapy, R. Mantaci, M. Morvan, and H. D. Phan. Structure of some sand piles model. *Theoret. Comput. Sci.*, 262(1-2) :525–556, 2001.

[42] M. Latapy and H. D. Phan. The lattice structure of chip firing games and related models. *Phys. D*, 155(1-2) :69–82, 2001.

[43] Y. Le Borgne and D. Rossin. On the identity of the sandpile group. *Discrete Math.*, 256(3) :775–790, 2002. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montreal, QC).

[44] G. Lohéac. éboulements sur la roue. Master's thesis, École Polytechnique, 2001.

[45] C. Magnien. *Étude du modèle du tas de sable abélien : points de vue algorithmique et algébrique*. PhD thesis, École Polytechnique, 2003.

[46] C. Magnien, H. D. Phan, and L. Vuillon. Characterization of lattices induced by (extended) chip firing games. In *Discrete models : combinatorics, computation, and geometry (Paris, 2001)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, pages 229–244 (electronic). Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001.

[47] B. Mandelbrot. The variation of some other speculative prices. *Journal of Business of the University of Chicago*, 36 :307, 1963.

[48] O. Marguin. *Application de méthodes algébriques à l'étude algorithmique d'automates cellulaires*. PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1992.

[49] C. Moore and M. Nilson. The computational complexity of sandpiles. *Journal of Statistical Physics*, 96 :205–224, 1999.

[50] A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, and R. Shcherbakov. Dynamics of eulerian walkers. *Phys. Rev. E*, 58 :5449, 1998.

[51] W. Press. Flicker noise in astronomy and elsewhere. *Comments on Astrophysics*, 7 :103, 1978.

[52] V. Priezzeh, D. Dhar, A. Dhar, and S. Krishnamurthy. Eulerian walkers as a model of self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 77 :5079, 1996.

[53] D. Rossin. *Étude combinatoire de certaines familles d'automates cellulaires*. PhD thesis, École Polytechnique, 2000.

[54] M. Rubey. Trees of the generalized wheel. Technical report, LaBRI, 2003.

[55] J. J. J. Sepkoski. Ten years in the library : New data confirm paleontological patterns. *Paleobiology*, (19) :43–51, 1993.

[56] R. Shcherbakov and D. L. Turcotte. Self-organizing height-arrow model : numerical and analytical results. *Physica A*, 277 :274–292, 2000.

[57] A. Sornette and D. Sornette. Self-organized criticality and earthquakes. *Europhysics Letters*, 9(3) :197–202, 1989.

[58] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Cambridge University Press, 2000.

[59] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 2001.

[60] P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégagtion.* Masson, 1993.

[61] W. T. Tutte. *Graph Theory.* Addison Wesley, Reading, MA, 1984.

[62] B. Watterson. *Dieci anni di Calvin and Hobbes.* Universal Press Syndicate, 1997.

[63] G. K. Zipf. *Human Behavior and the Principle of Least Effort.* Cambridge MA, Addison-Wesley, 1949.