



HAL
open science

Contribution to the numeral simulation of propagation liquefied soil masses and their effects on structures

Sami Montassar

► **To cite this version:**

Sami Montassar. Contribution to the numeral simulation of propagation liquefied soil masses and their effects on structures. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. English. NNT: . pastel-00001148

HAL Id: pastel-00001148

<https://pastel.hal.science/pastel-00001148>

Submitted on 18 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Mécanique, Structures et Matériaux

par

Sami MONTASSAR

Sujet de la thèse :

**Contribution à la simulation numérique de l'écoulement
de sols liquéfiés et de leur action sur les ouvrages**

soutenue à Champs-sur-Marne le 07 Janvier 2005

devant le jury composé de :

Felix DARVE

Président

Mohammed HJIAJ

Rapporteur

Sylvain TURGEMAN

Rapporteur

Alain PECKER

Examineur

Hatem ZENZRI

Examineur

Patrick de BUHAN

Directeur de thèse

A mes parents

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Félix Darve de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs Mohammed Hjiaj et Sylvain Turgeman d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie également Messieurs Alain Pecker et Hatem Zenzri d'avoir participé à l'évaluation de ce travail en tant qu'examinateurs.

Je voudrais adresser ma plus sincère gratitude à mon directeur de thèse Patrick de Buhan, sans qui ce travail n'aurait certainement pas pu voir le jour, pour m'avoir fait confiance et aidé tout au long de ces années tant sur le plan scientifique qu'humain, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité sans faille et ses conseils avisés.

Je souhaite également remercier les chercheurs et les doctorants du LMSGC/ENPC qui m'ont prodigué leurs conseils et avec qui j'ai partagé des discussions enrichissantes m'ayant permis d'avancer dans mon travail.

Je ne saurais jamais remercier assez mon père et ma mère pour leur amour, leur présence, leurs encouragements et leur soutien inconditionnel. Je leur dédie ce travail.

Mes pensées vont aussi à mon frère Mohammed, mes soeurs Amel, Radhia et Rim, leurs maris, mes neveux Wassim et Marouene ainsi qu'à tous mes proches et mes amis.

Un grand merci à Leila, qui a toujours été à mes côtés ces dernières années pour me soutenir et m'encourager. Je lui dédie aussi ce travail.

Table des matières

1	Introduction bibliographique	1
1.1	Introduction	3
1.2	Les origines du phénomène de liquéfaction	5
1.3	Comportement post-liquéfaction : quelle rhéologie?	8
1.3.1	Mise en évidence de la viscosité d'un sol liquéfié	10
1.3.2	Le sol liquéfié : un fluide à seuil?	12
1.4	Simulations de l'écoulement post-liquéfaction d'un massif et de ses effets sur les structures	15
1.4.1	Approches empiriques	15
1.4.2	Méthodes analytiques simplifiées	16
1.4.3	Méthodes fondées sur l'approximation des faibles profondeurs	19
1.4.4	Méthodes des éléments finis et volumes finis	21
1.4.5	Effet de l'écoulement sur les structures	25
1.5	Conclusion : la nécessité d'un outil de simulation numérique intégré	27
2	Cas du modèle de fluide Newtonien	31
2.1	Introduction	33
2.2	Position du problème d'évolution et principe du minimum en vitesse	33
2.2.1	Position du problème	33
2.2.2	Principe de minimum	36

2.2.3	Cas d'un mode de chargement à n paramètres	37
2.2.4	Un exemple illustratif	38
2.3	Résolution numérique dans le cas bidimensionnel (Jellouli (2001) [36])	41
2.3.1	Le cas des éléments finis T3	42
2.3.2	Discrétisation en éléments Q4	43
2.3.3	Expression matricielle de la fonctionnelle $F(\underline{U}')$	47
2.3.4	Résolution du système global	51
2.3.5	Evolution de la géométrie du massif	52
2.4	La prise en compte des termes d'accélération	54
2.4.1	Retour sur l'exemple illustratif : mise en équations	54
2.4.2	Ecriture adimensionnelle et résolution de l'équation d'évolution	58
2.4.3	Résultats	60
2.4.4	Implémentation numérique	63
3	Modélisation viscoplastique	67
3.1	Introduction	69
3.2	Le modèle (rigide)-viscoplastique : principe de minimum	69
3.2.1	Un modèle (rigide)-viscoplastique généralisé	70
3.2.2	Solution du problème d'évolution et principe du minimum en vitesses	74
3.3	Lien avec l'analyse limite et le calcul à la rupture	77
3.4	Modèle de Bingham. Analyse d'un cas simple de référence	79
3.4.1	Cas du matériau de Bingham	79
3.4.2	Analyse d'un cas simple de référence	83
3.5	Prise en compte d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum	89
3.5.1	Formulation d'une condition de glissement	90
3.5.2	Principe de minimum généralisé	93

4	Techniques de résolution numérique pour le problème de minimisation	97
4.1	Introduction	99
4.2	Minimisation par la méthode du polytope et l'utilisation d'une fonction de courant	100
4.2.1	La méthode du polytope (Nelder et Mead (1965) [46])	100
4.2.2	Introduction d'une fonction de courant	103
4.2.3	Une méthode inapplicable	106
4.3	Approximation par la technique de régularisation (Papanastasiou et Tasos (1987) [48])	107
4.3.1	Présentation de la technique	107
4.3.2	Procédure itérative de résolution	108
4.4	Méthode du lagrangien augmenté associée à la technique de décomposition-coordination	112
4.4.1	Présentation de la méthode	112
4.4.2	Algorithme adopté	116
4.4.3	Un exemple illustratif	117
4.5	Premières simulations et comparaison des méthodes de régularisation et de décomposition-coordination	122
5	Calcul des efforts sur les structures et analyse des problèmes d'écoulements bidimensionnels	127
5.1	Introduction	129
5.2	Calcul des efforts sur les structures	129
5.2.1	Le problème posé	129
5.2.2	Modélisation newtonienne	134
5.2.3	Modélisation de Bingham	137
5.3	Etude de l'influence de la prise en compte des termes d'accélération dans les problèmes d'évolution et de calcul des efforts	141

5.3.1	Problèmes à simuler	141
5.3.2	$k = 0$ (modèle Newtonien)	142
5.3.3	$k \neq 0$ (modèle de Bingham)	145
5.4	Mise au point d'un outil numérique pour l'analyse des problèmes bidimensionnels	146
6	Conclusions et perspectives	153
6.1	Conclusions	155
6.2	Perspectives	157

Table des figures

1.1	Deux aspects du comportement post-liquéfaction d'un massif de sol liquéfié : (a) Évolution de la géométrie du massif - (b) Calcul des efforts sur les structures.	4
1.2	Résultats relatifs à un essai de liquéfaction statique réalisé sur une éprouvette de sable saturé en conditions non drainées (Canou et al. (1991) [9]).	6
1.3	Essais de cisaillement non drainés sur des éprouvettes de sable saturé (Konrad (1993) [39]).	7
1.4	Liquéfaction cyclique observée lors d'un essai triaxial d'une éprouvette de sable saturé (Benahmed (2001)) [6].	8
1.5	Densification progressive d'un sable sous chargement cyclique (Tatsuoka et Ishihara (1974) [68]).	9
1.6	Coefficients de viscosité sécants de sables liquéfiés (Uzuoka et al. (1998) [73]; Hadush et al. (2000) et (2001) [27] [28]).	11
1.7	Effort exercé par un sol liquéfié sur une conduite cylindrique en translation de vitesse uniforme (Towhata et al. (1999) [72]).	12
1.8	Synthèse de diverses études expérimentales destinées à évaluer le coefficient de viscosité apparente d'un sol liquéfié (Towhata et al. (1999) [72]).	13
1.9	Courbes contrainte-taux de déformation d'un sol liquéfié obtenues au viscosimètre (Kawakami et al. (1994) [38]).	14
1.10	Modèle simplifié pour le calcul des déplacements permanents maximaux d'une couche de sol liquéfié (Towhata et al. (1992) [70]).	16

1.11	Comparaison entre les prévisions des déplacements permanents maximaux données par le calcul et les observations sur le terrain (Orense et Towhata (1998) [47]).	18
1.12	Profil de vitesse horizontale le long d'une verticale dans le cas d'un milieu de Bingham en cisaillement simple (Pastor et al. (2002) [50]).	20
1.13	Simulation numérique des différentes phases de propagation d'une retenue de résidus miniers liquéfiés (Pastor et al. (2002) [50]).	21
1.14	Simulation par éléments finis de l'écoulement d'une couche de sol liquéfié (Tamate et Towhata (1999) [66]).	22
1.15	Concept de viscosité équivalente (Uzuoka et al. (1998) [73]).	23
1.16	Modèle numérique utilisé pour simuler la propagation post-liquéfaction d'un remblai et résultats (Uzuoka et al. (1998) [73]).	24
1.17	Essais en centrifugeuse pour l'analyse de l'interaction sol liquéfié-pieu (Abdoun et al. (2003) [1]).	26
2.1	Données en efforts et en vitesses relatives au massif du sol liquéfié dans sa configuration actuelle.	34
2.2	Écoulement d'un massif de sol liquéfié sur un plan incliné.	39
2.3	Condition d'incompressibilité pour des éléments finis T3.	42
2.4	Exemple de rigidification d'une structure discrétisée en éléments finis de type T3.	43
2.5	Élément fini Q4 dans sa configuration actuelle et élément de référence. . . .	44
2.6	Fonction de forme $N_1(\xi_1, \xi_2)$	45
2.7	Rigidification d'un élément Q4 par application de la condition locale d'incompressibilité.	46
2.8	Écoulement en condition de déformations planes d'un massif de sol liquéfié sous l'action du champ de pesanteur.	48
2.9	Trajectoire d'un point du massif de sol liquéfié.	53
2.10	Actualisation de la géométrie d'un élément Q4 entre deux instants successifs t et $t + \Delta t$	54

2.11	Description lagrangienne du mouvement d'une couche de sol liquéfié sur un substratum incliné.	55
2.12	Evolution dans le temps du profil de vitesse adimensionnel u	61
2.13	Evolution de la vitesse et du déplacement d'un point situé à la surface du massif.	62
2.14	Convergence de la solution numérique vers la solution analytique lorsque le pas de temps décroît.	65
3.1	Convexe G et fonction seuil associée pour un matériau (rigide)-viscoplastique.	70
3.2	Représentation unidimensionnelle pour les modèles : (1) rigide-viscoplastique, (2) élastique parfaitement plastique et (3) rigide-plastique.	74
3.3	Interprétation du domaine K comme ensemble des chargements de la structure ne déclenchant pas d'écoulement.	79
3.4	Convexe G dans le cas d'un matériau de Bingham et règle d'écoulement viscoplastique associée.	80
3.5	Les modèles Newtonien et rigide-plastique comme cas particuliers du modèle de Bingham.	82
3.6	Massif de sol incliné soumis à l'action combinée de son poids propre et d'une contrainte de cisaillement appliquée à sa surface supérieure.	84
3.7	Les différents régimes viscoplastiques représentés dans l'espace des paramètres de chargement et les vitesses généralisées associées.	89
3.8	Formulation d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum.	91
3.9	Profils de contrainte de cisaillement et de vitesse relatifs à l'écoulement d'un milieu de Bingham avec prise en compte d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum.	95
4.1	Les différents cas possibles correspondant à une itération dans la méthode du polytope ($n = 3$).	102
4.2	Élément rectangulaire de type Hermite.	105
4.3	Modèle de Bingham régularisé.	108
4.4	Illustration de la convergence du processus itératif.	110

4.5	Simulation par la méthode de régularisation de l'écoulement d'un milieu de Bingham sur un plan incliné.	111
4.6	Modélisation unidimensionnelle.	118
4.7	Profil de vitesse ($\rho g = 20kN/m^3$, $\mu = 1kPa.s$, $H = 1m$, $\sin \theta = 0,05$ et $k = 0,5kPa$).	121
4.8	Comparaison des trajectoires du point d'extrémité droite du massif en utilisant les méthodes de régularisation (R) et de décomposition-coordination (DC) pour les différentes valeurs du seuil de cisaillement k	123
4.9	Taux de déformation associés à un état de contrainte donné dans les cas des modèles de Bingham initial et régularisé.	124
4.10	les configurations déformées du sol liquéfié à l'instant $t = 1s$ pour les différentes valeurs du seuil de cisaillement	125
5.1	Action d'un écoulement de sol liquéfié sur une rangée d'obstacles cylindriques circulaires régulièrement espacés, placée en travers.	130
5.2	Calcul de l'effort exercé par l'écoulement du massif sur un obstacle circulaire.	131
5.3	Exemple de maillage d'éléments finis $Q4$ utilisé pour résoudre le problème auxiliaire du calcul des efforts sur un obstacle cylindrique.	134
5.4	Courbe donnant l'évaluation de la fonction $f\left(\frac{H}{R}\right)$	135
5.5	Comparaison des courbes donnant les évaluations de la fonction $f\left(\frac{H}{R}\right)$ dans notre cas avec celles obtenues par Faxén (formule analytique) et Mitsoulis (MEF) pour un problème légèrement différent.	138
5.6	Courbes donnant l'effort adimensionnel en fonction du nombre de Bingham pour diverses géométries.	140
5.7	Comparaison des trajectoires du point d'extrémité supérieure droite du massif dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A).	143
5.8	Comparaison de l'effort global appliqué sur un obstacle cylindrique dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A).	144

5.9	Comparaison des trajectoires du point d'extrémité supérieure droite du massif dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A) pour différentes valeurs du seuil de cisaillement.	146
5.10	Comparaison de l'effort global appliqué dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A) pour différentes valeurs du seuil de cisaillement.	147
5.11	Configurations déformées du sol liquéfié à l'instant $t = 3s$ pour différentes valeurs du seuil de cisaillement du sol liquéfié, avec une condition de glissement à l'interface sol/substratum.	148
5.12	Déplacements horizontaux et verticaux du point d'extrémité supérieure droite du massif en fonction du temps pour différentes valeurs du seuil de cisaillement k du sol liquéfié.	150
5.13	Evolution dans le temps de l'effort global appliqué sur l'obstacle cylindrique pour différentes valeurs du seuil de cisaillement k	151

Liste des tableaux

5.1	Comparaison des valeurs de $F_{(N)}^*$ trouvées numériquement avec celles calculées en utilisant l'équation (5.14.)	136
5.2	Valeurs des coefficients a et b pour les différentes géométries adoptées.	140

Chapitre 1

Introduction bibliographique

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Les origines du phénomène de liquéfaction	5
1.3	Comportement post-liquéfaction : quelle rhéologie ?	8
1.3.1	Mise en évidence de la viscosité d'un sol liquéfié	10
1.3.2	Le sol liquéfié : un fluide à seuil ?	12
1.4	Simulations de l'écoulement post-liquéfaction d'un massif et de ses effets sur les structures	15
1.4.1	Approches empiriques	15
1.4.2	Méthodes analytiques simplifiées	16
1.4.3	Méthodes fondées sur l'approximation des faibles profondeurs	19
1.4.4	Méthodes des éléments finis et volumes finis	21
1.4.5	Effet de l'écoulement sur les structures	25
1.5	Conclusion : la nécessité d'un outil de simulation numérique intégré	27

1.1 Introduction

Le phénomène de liquéfaction des sols saturés, généralement sableux, sous l'action de sollicitations rapides (séismes, chocs, raz de marée, etc.), est à l'origine d'une brusque instabilité de ces derniers qui en s'écoulant sous l'effet de la pesanteur peuvent alors provoquer des dommages irréparables aux ouvrages et structures situés à proximité.

La littérature géotechnique abonde en exemples de dégâts majeurs clairement attribuables à la liquéfaction de massifs de sable et à leur propagation. En se limitant par exemple au cas des ruptures par liquéfaction d'origine sismique, dont les effets sont les plus spectaculaires, on peut notamment citer dès 1964 le séisme de Niigata au Japon (Seed et Idriss (1967) [65]) ou celui d'Alaska (Seed (1968) [63]), qui ont motivé les nombreuses recherches entreprises à cette époque tant aux États-Unis qu'au Japon, dans le domaine de la liquéfaction des sables, ainsi que plus récemment les séismes de Nihonkai-Chubu (1983) et Kobe (1995) au Japon, Loma Prieta en Californie (1989), Luzon aux Philippines (1990), ou encore Izmit en Turquie (1999).

Ainsi que le font observer Dobry et Abdoun (1998) [16] cependant, si les conditions d'apparition du phénomène de liquéfaction sont aujourd'hui relativement bien appréhendées, et des méthodes d'évaluation quantitative ont pu être mises au point sur cette base, il n'en est pas de même pour ce qui est de prévoir la propagation ultérieure des massifs liquéfiés et les sollicitations qu'ils engendrent sur les ouvrages. En effet dans certaines situations, la mise en œuvre des techniques appropriées destinées à neutraliser le potentiel de liquéfaction des sols (compactage dynamique par exemple), peut se révéler techniquement impossible ou beaucoup trop onéreuse, de sorte qu'il est préférable de prendre en compte le risque de liquéfaction et ses conséquences dans la conception et le dimensionnement de l'ouvrage. En l'absence de traitement des sols, la réalisation d'ouvrages en zone liquéfiable impose par exemple de recourir à des fondations profondes allant chercher des sols non affectés par le phénomène de liquéfaction, à la condition de prendre en compte l'interaction entre le matériau liquéfié et les éléments constitutifs de la fondation de l'ouvrage qui entrent en contact avec ce dernier lors de sa propagation.

Il convient donc de prévoir l'évolution *post-liquéfaction* du massif liquéfié, afin d'être en mesure d'évaluer le plus précisément possible les efforts qu'il exerce sur la structure, et de dimensionner en conséquence cette dernière. La figure 1.1 illustre ces deux aspects de l'analyse post-liquéfaction d'un massif de sol liquéfié.

- (a) Le premier aspect de l'analyse concerne l'évolution dans le temps du massif et les

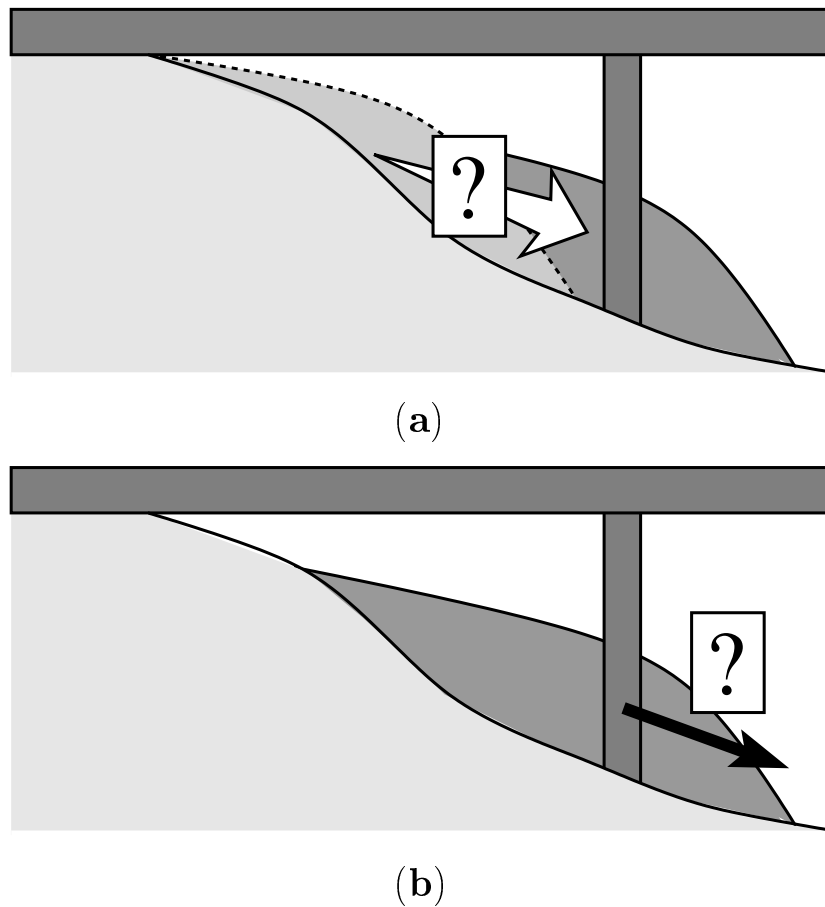


FIG. 1.1: Deux aspects du comportement post-liquéfaction d'un massif de sol liquéfié : (a) Évolution de la géométrie du massif - (b) Calcul des efforts sur les structures.

changements de géométrie qu'il subit.

(b) Le second aspect a trait à l'évaluation des efforts qu'exerce un tel écoulement sur les structures (piles de pont, pieux de fondation, etc.).

Ce premier chapitre vise à dresser un état des lieux relatif au comportement post-liquéfaction des massifs de sols et à ses effets sur les structures. Après avoir brièvement rappelé à la section 1.2 les principes physiques et mécaniques qui gouvernent l'apparition du phénomène de liquéfaction, la section 1.3 analyse plus précisément les modèles rhéologiques qu'il est possible d'adopter pour décrire le comportement du sol, une fois déclenché le processus de liquéfaction. La section 1.4 est ensuite consacrée aux différentes

approches développées, tant au plan de la simulation numérique qu'à celui de la modélisation expérimentale, en vue de prévoir la propagation d'un massif de sol liquéfié et ses interactions avec les structures. Dans ces deux dernières sections, on se référera également aux travaux réalisés en vue de traiter le problème très similaire des écoulements de boues et laves torrentielles ou de glissements de terrains. Ce chapitre se terminera à la section 1.5, par un descriptif sommaire de l'approche développée dans le cadre de cette thèse.

1.2 Les origines du phénomène de liquéfaction

Sans prétendre à l'exhaustivité sur un sujet sur lequel existe une abondante littérature, on se limitera simplement ici à évoquer les traits caractéristiques qui gouvernent le déclenchement du phénomène. On pourra se reporter pour plus de détails à Pecker (1984) [51], dont l'ouvrage de dynamique des sols consacre tout un chapitre au problème de la liquéfaction des sables, ainsi qu'à un article de synthèse sur la question (Canou et al. (2002) [8]).

De façon générale, la liquéfaction est un processus au terme duquel un sol pulvérulent saturé, initialement "solide" subit une transition vers un comportement "fluide", due à l'augmentation de la surpression interstitielle du fluide saturant et à la diminution corrélative de la contrainte effective et donc de la résistance au cisaillement du sol. Le phénomène peut être provoqué soit lors d'un chargement monotone quasi-statique, soit au terme d'un chargement cyclique.

La figure 1.2 par exemple montre un tel essai de liquéfaction statique réalisé au triaxial sur une éprouvette de sable saturé dans un état très lâche, en conditions non drainées (Canou et al. (1991) [9]). La courbe inférieure montre l'évolution du déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale de l'éprouvette. Elle met en évidence un pic bien marqué à environ $80kPa$, suivi d'une brusque décroissance jusqu'à une valeur résiduelle inférieure à $10kPa$. La courbe supérieure de cette même figure représente l'évolution simultanée de la surpression interstitielle qui s'accroît continuellement avant de se stabiliser lorsque les déformations deviennent importantes ($> 5\%$). L'augmentation de surpression interstitielle au cours d'un tel chargement est clairement liée au caractère *contractant* du sable, qui se densifie sous l'action de la sollicitation appliquée.

La figure 1.3, extraite de Uzuoka et al. (1998) [73] correspond au même type d'essais réalisés par Konrad (1993) [39] sur des éprouvettes de sable lâche saturé, pour différentes pressions de confinement. Elle confirme l'ensemble des observations préalablement

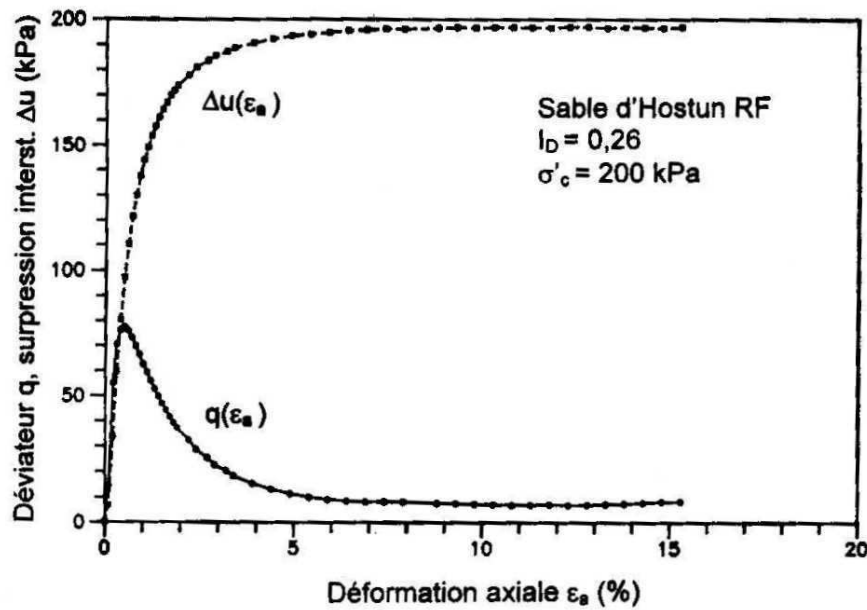


FIG. 1.2: Résultats relatifs à un essai de liquéfaction statique réalisé sur une éprouvette de sable saturé en conditions non drainées (Canou et al. (1991) [9]).

décrites.

De la même façon, la figure 1.4 illustre le phénomène de liquéfaction cyclique d'un sable saturé, initialement dans un état lâche, auquel est appliqué une sollicitation déviatorique alternée (Benahmed (2001) [6]). Les deux graphiques du haut correspondent respectivement aux variations en fonction du nombre de cycles de la déformation axiale et de la surpression interstitielle. On observe ainsi que jusqu'à une soixantaine de cycles les déformations axiales restent faibles et la surpression interstitielle s'accroît progressivement, tandis qu'à partir de 60 cycles, les déformations s'amplifient considérablement, en raison d'une chute brutale de la résistance au cisaillement du matériau, accompagnée d'une forte augmentation de la surpression interstitielle.

Un tel phénomène de liquéfaction cyclique par accumulation progressive de la surpression interstitielle est encore une fois clairement lié au mécanisme de densification du matériau sous chargement cyclique, comme le montre la figure 1.5 qui représente deux exemples d'évolution de la déformation volumique irréversible (comptée positivement en contraction) en fonction du nombre de cycles appliqués (Tatsuoka et Ishihara (1974) [68]).

Indiquons enfin pour terminer sur ce point, que des modèles de comportement cyclique ont été formulés, qui à l'inverse de lois de type élastoplastique, relie directement la

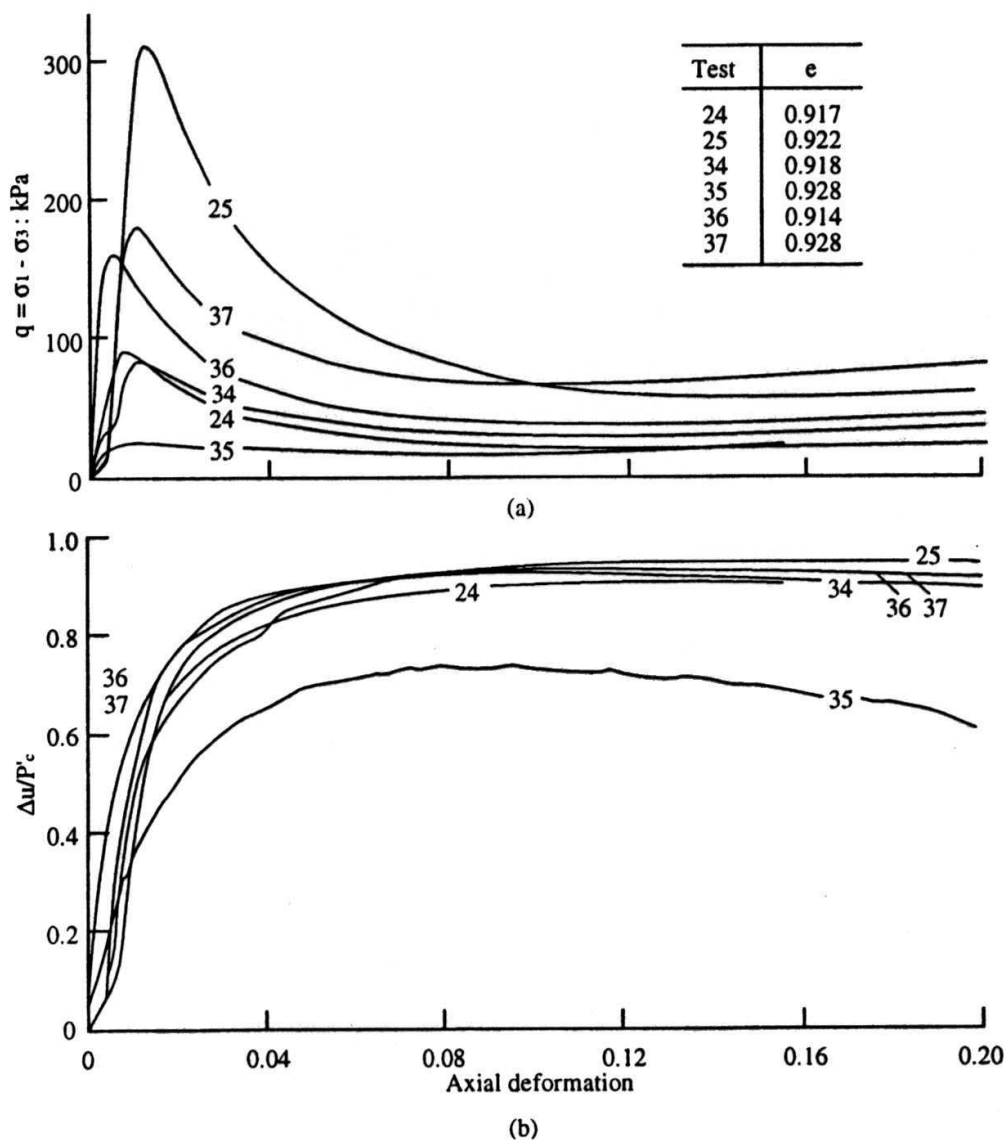


FIG. 1.3: Essais de cisaillement non drainés sur des éprouvettes de sable saturé (Konrad (1993) [39]).

déformation volumique irréversible induite par les cycles de chargement en fonction du nombre de cycles et de leurs caractéristiques, telles que leur amplitude et leur inclinaison dans le cas d'un trajet radial (Dormieux (1989) [18]). Des méthodes de calcul fondées sur l'utilisation de telles lois ont été mises au point, permettant de simuler l'évolution de l'accumulation de surpressions interstitielles dans des ouvrages soumis à des chargements de type houle ou séisme (Dormieux et al. (1993) [19]; Pecker et al. (2001) [52]) et de prévoir ainsi les conditions d'apparition du phénomène de liquéfaction pouvant initier la

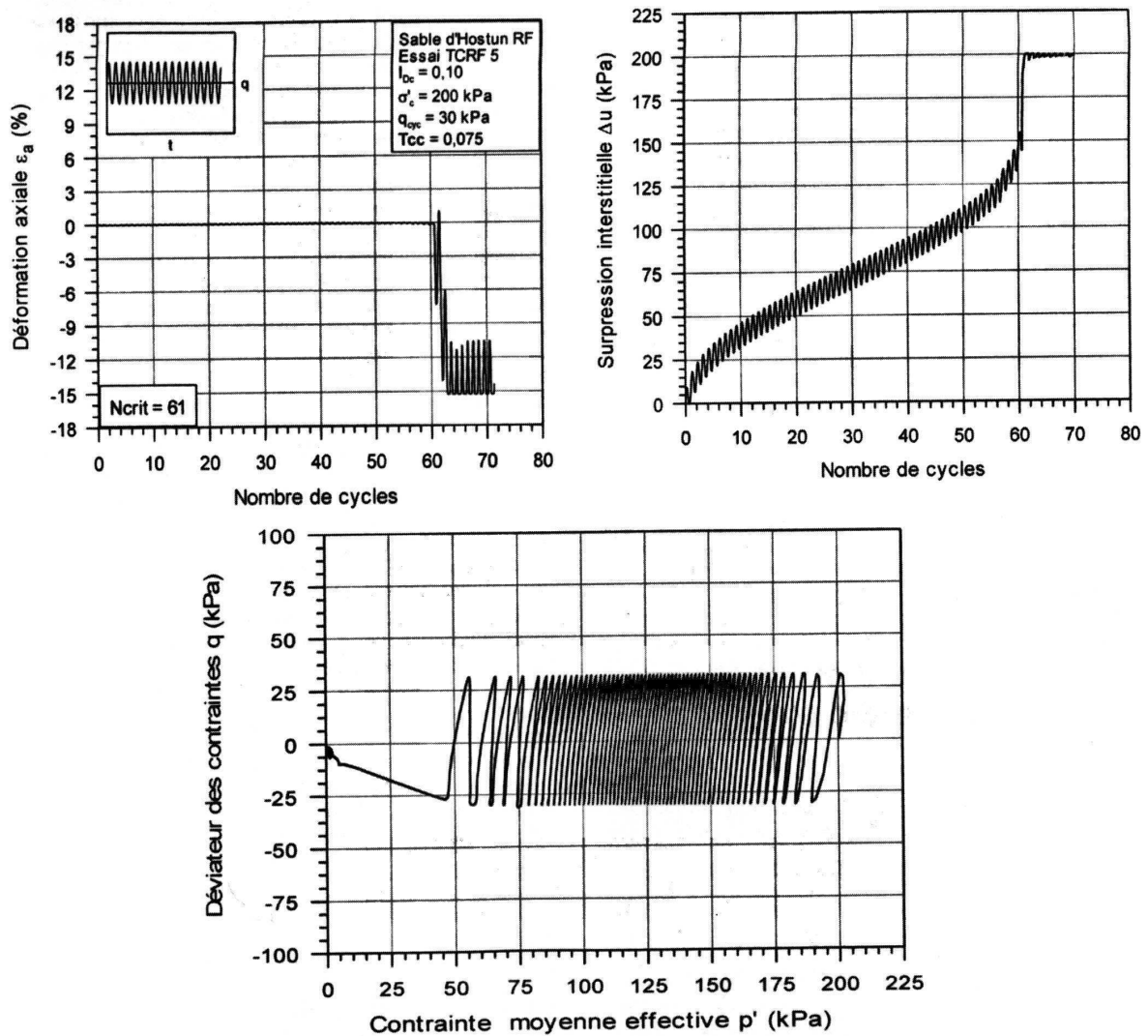


FIG. 1.4: Liquéfaction cyclique observée lors d'un essai triaxial d'une éprouvette de sable saturé (Benahmed (2001)) [6].

rupture de ces ouvrages.

1.3 Comportement post-liquéfaction : quelle rhéologie ?

L'une des données essentielles permettant d'analyser le comportement post-liquéfaction d'un sol préalablement liquéfié, c'est-à-dire aussi bien sa dynamique de propagation que la façon dont il interagit avec les ouvrages, est bien évidemment la définition de ses ca-

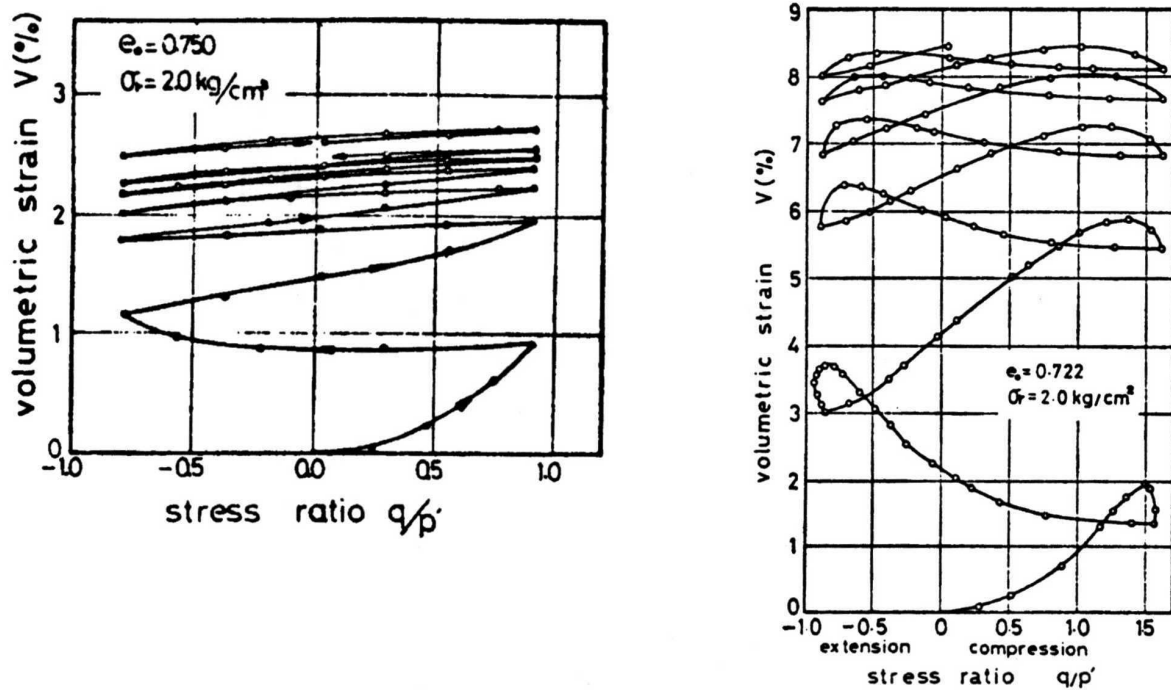


FIG. 1.5: Densification progressive d'un sable sous chargement cyclique (Tatsuoka et Ishihara (1974) [68]).

ractéristiques rhéologiques. Une analyse complète du problème nécessiterait de prendre en compte le fait que, suite à l'arrêt de la sollicitation qui a déclenché le phénomène de liquéfaction, les surpressions interstitielles vont avoir tendance à se dissiper, de sorte que la liquéfaction du matériau apparaît *a priori* comme étant un phénomène transitoire. Hutchinson (1986) [32], puis récemment Pastor et al. (2002a,2002b) [49] [50] ont par exemple développé une telle approche dans le cadre d'un modèle simplifié d'écoulement consistant à intégrer les équations du mouvement par rapport à la profondeur (voir section 1.4 de ce même chapitre). Dans le cas général en revanche, le traitement complet du problème tenant compte du couplage fluide-squelette granulaire, s'avère encore aujourd'hui beaucoup trop complexe. C'est pourquoi nous nous placerons désormais dans la situation où la durée pendant laquelle se produit la propagation du sol liquéfié est significativement plus petite que le temps caractéristique de consolidation. On peut dès lors considérer le sol liquéfié comme ce qu'il est convenu d'appeler une "suspension granulaire" dont les propriétés rhéologiques, exprimées en contraintes totales, sont constantes tout au long de l'écoulement.

Le terme de "liquéfaction" suggère bien évidemment de modéliser le sol liquéfié comme un

fluide incompressible, mais qui loin d'être parfait, va développer en son sein des contraintes de cisaillement dues tant à ses propriétés de *viscosité* qu'à l'existence d'une *résistance du cisaillement* (non drainée) résiduelle.

1.3.1 Mise en évidence de la viscosité d'un sol liquéfié

La figure 1.6 tirée de Uzuoka et al. (1998) [73] et reprise par Hadush et al. (2000) et (2001) [27] [28] regroupe un certain nombre de résultats expérimentaux, obtenus par Hamada et al. (1994) [29] et Kawakami et al. (1994) [38], et qui mettent clairement en évidence le caractère visqueux du sol liquéfié. Celui-ci s'exprime classiquement à travers un coefficient de viscosité noté μ et défini comme le rapport entre la contrainte de cisaillement τ appliquée à l'élément de sol liquéfié et le taux de déformation de cisaillement correspondant $\dot{\gamma}$:

$$\tau = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (1.1)$$

Un tel coefficient a été mesuré à partir de trois types d'expériences réalisées sur deux types de sable liquéfié : essais au viscomètre, mesure de la force de trainée qu'exerce le sol liquéfié sur un obstacle sphérique et identification indirecte à partir d'expériences de propagation du sol liquéfié.

On observe à partir de cette figure une nette décroissance du coefficient de viscosité en fonction du taux de déformation, allant d'une valeur proche de $1kPa.s$ pour $\dot{\gamma} = 0,1s^{-1}$ à des valeurs de l'ordre de $1Pa.s$ pour des taux de déformation importants ($10s^{-1}$). Nous verrons dans la section 1.3.2 que cette forte non-linéarité peut s'expliquer par l'existence d'un seuil.

Une telle viscosité apparente du sol liquéfié a été mise en évidence par de nombreuses expériences, telles que celles réalisées par Towhata et al. (1999) [72] sur tables vibrantes, consistant à mesurer la force de réaction exercée par un sol liquéfié sur une conduite circulaire en fonction de la vitesse de cette dernière. La figure 1.7 montre les résultats de cette étude. Ils parviennent ainsi indirectement à une évaluation du coefficient de viscosité du sol liquéfié en comparant les résultats expérimentaux à ceux obtenus par application d'une formule théorique donnant l'effort de trainée d'un obstacle cylindrique en translation uniforme dans un fluide newtonien, c'est-à-dire purement visqueux. Les résultats, qui sont confrontés à ceux d'autres travaux expérimentaux, sont reportés sur la figure 1.8 qui donne

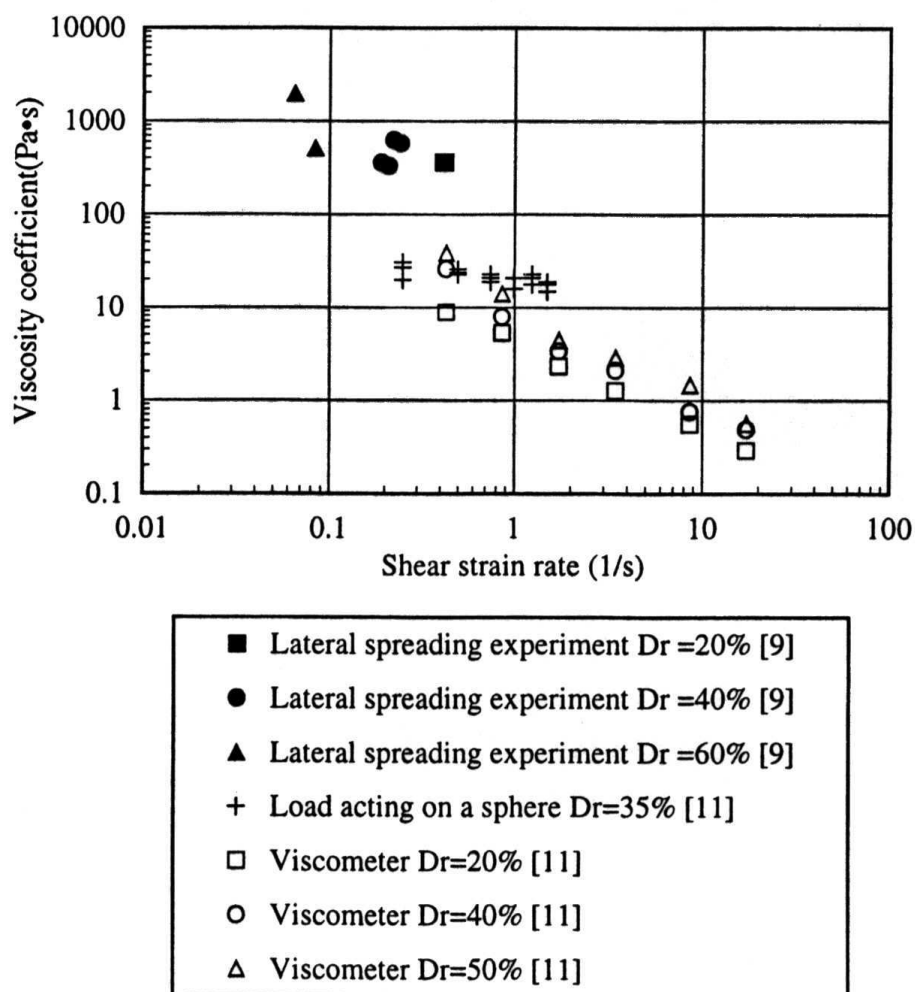


FIG. 1.6: Coefficients de viscosité sécants de sables liquéfiés (Uzuoka et al. (1998) [73]; Hadush et al. (2000) et (2001) [27] [28]).

le coefficient de viscosité apparent du sol liquéfié en fonction de la densité relative du sable. On observe en particulier que les valeurs ainsi obtenues sont de 5 à 6 ordres de grandeur supérieures à celle de l'eau à $20^{\circ}C$: 0,1 à $1 Pa.s$ au lieu de $10^{-3} Pa.s$. Une telle viscosité du sol liquéfié doit donc être explicitement prise en compte dans les calculs d'écoulements (Prevost et Keane (1990) [54]).

Dans le domaine des écoulements de boues ou de laves torrentielles dont le comportement est très similaire à celui d'un sol liquéfié, on peut citer des valeurs de coefficient de viscosité allant de quelques $Pa.s$ (Coussot (1994) [12]; Jin et Fread (1997) [37]) à près de $1kPa.s$ (Rickenmann et Koch (1997) [57]) en passant par quelques dizaines de $Pa.s$ (Jan (1997) [35]).

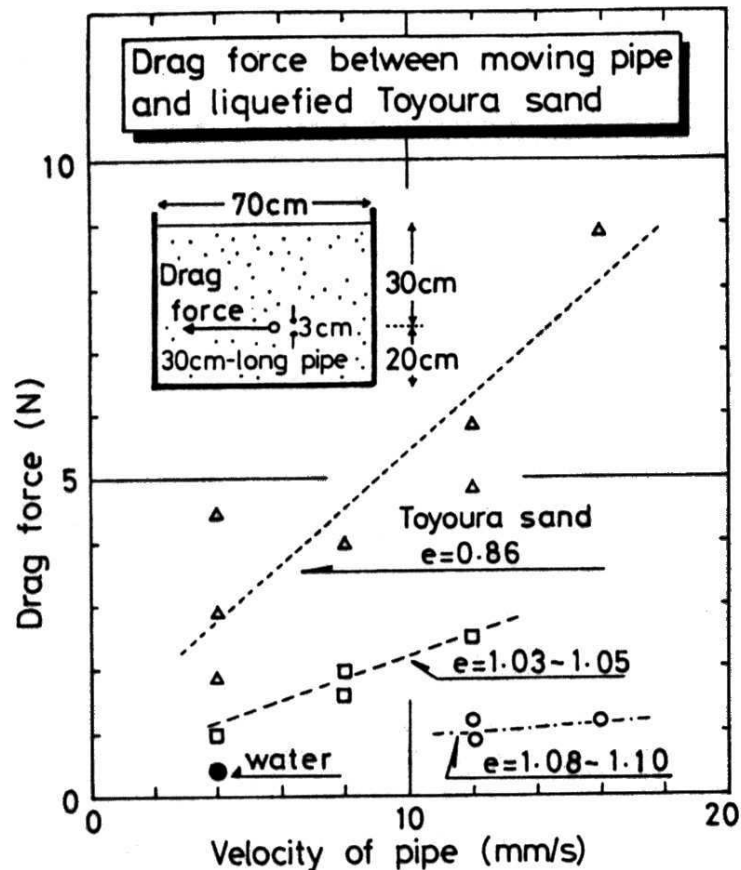


FIG. 1.7: Effort exercé par un sol liquéfié sur une conduite cylindrique en translation de vitesse uniforme (Towhata et al. (1999) [72]).

1.3.2 Le sol liquéfié : un fluide à seuil ?

Les figures 1.2 et 1.3 mettent clairement en évidence l'existence d'une résistance au cisaillement résiduelle du sol liquéfié. Dans un papier décrivant l'état de l'art dans ce domaine, Finn (2000) [23] cite les abaques de Seed et Harder (1990) [64] permettant d'évaluer une telle résistance résiduelle non drainée à partir d'essais in-situ. De nombreuses études expérimentales en laboratoire ont permis de montrer que cette résistance résiduelle est non seulement fonction de l'état de densité du matériau (indice des vides) mais également de la pression effective de confinement ou du trajet de chargement.

Un tel seuil de résistance résiduelle du sol liquéfié est indirectement mis en évidence sur la figure 1.6 qui donne les coefficients de viscosité sécants d'un sol liquéfié en fonction du taux de déformation. Cette forte décroissance du coefficient de viscosité sécant en fonction

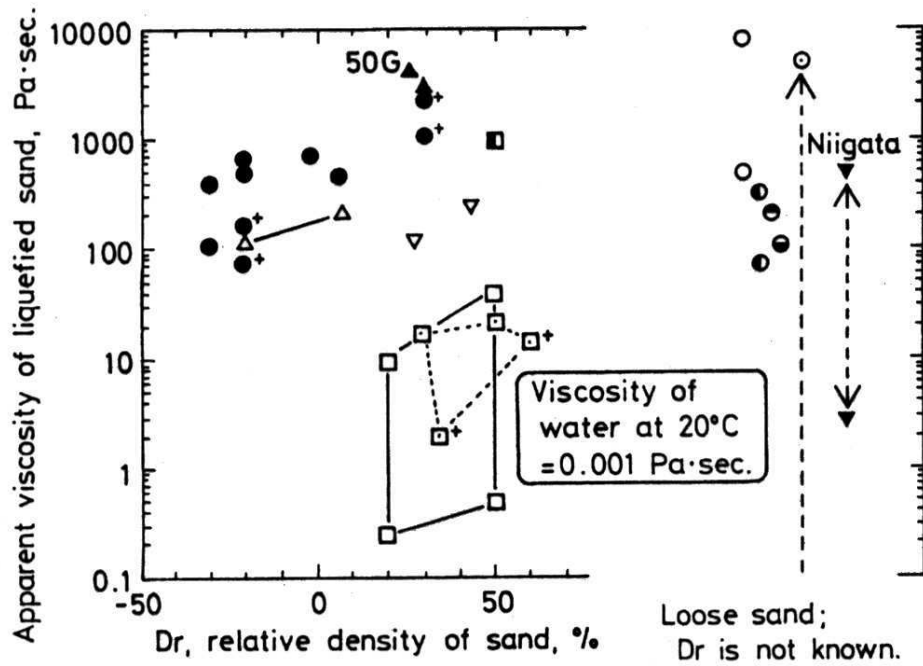


FIG. 1.8: Synthèse de diverses études expérimentales destinées à évaluer le coefficient de viscosité apparente d'un sol liquéfié (Towhata et al. (1999) [72]).

du taux de déformation de cisaillement provient précisément de l'existence d'un seuil en contrainte, comme le montre la figure 1.9 décrivant des résultats d'essais de sol liquéfié au viscosimètre (Kawakami et al. (1994) [38]). Cette figure suggère en effet de remplacer la relation (1.1) par une équation du type :

$$\tau(\dot{\gamma}) = k + \mu\dot{\gamma} \quad (1.2)$$

où k est la résistance résiduelle (ordonnée à l'origine de la droite représentant l'équation (1.2)) tandis que μ est le coefficient de viscosité tangent (pente de cette même droite).

Le coefficient de viscosité apparent ou sécant est alors bien évidemment de la forme

$$\mu(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \mu + \frac{k}{\dot{\gamma}} \quad (1.3)$$

c'est-à-dire qu'il part des valeurs très grandes lorsque $\dot{\gamma}$ est faible pour tendre vers la valeur du coefficient de viscosité tangent μ lorsque $\dot{\gamma}$ augmente.

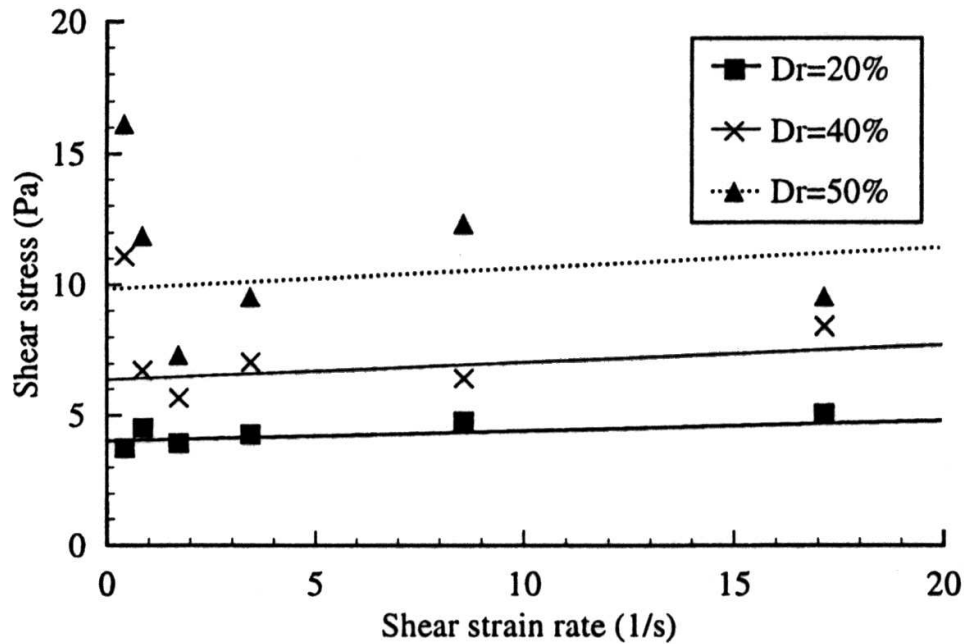


FIG. 1.9: Courbes contrainte-taux de déformation d'un sol liquéfié obtenues au viscosimètre (Kawakami et al. (1994) [38]).

Une relation affine de type (1.2) correspond à un modèle de “fluide à seuil” ou “fluide” de Bingham, c'est-à-dire à un comportement de type *viscoplastique* du sol liquéfié. Ce type de modélisation a été retenue par Uzuoka et al. (1998) [73] pour simuler la propagation d'un massif de sol liquéfié. Elle est également largement adoptée pour décrire le comportement rhéologique de boues ou de laves torrentielles. Pastor et al. (2002) [50] par exemple retiennent dans leurs simulations des valeurs de résistance résiduelle allant de 0, 1 à $1kPa$, voire plusieurs kPa (Jin et Fread (1997) [37]). Cette même modélisation est également adoptée par Chen et Lee (2002) [10], Coussot (1994) [12] ou bien encore Piau (1996) [53], qui proposent également des modèles plus élaborés tel que celui de Herschel-Bulkley pour lequel la relation entre la contrainte et le taux de déformation est du type :

$$\tau(\dot{\gamma}) = k + \mu\dot{\gamma}^m \quad (1.4)$$

où m prend par exemple des valeurs proches de $\frac{1}{3}$ pour des boues ou des suspensions (Coussot (1994) [12]). On retrouve bien évidemment le modèle de Bingham lorsque $m = 1$. Signalons enfin que ce dernier modèle permet également de rendre compte du comportement rhéologique de matériaux tels que le béton frais (Tanigawa et Mori (1989)

[67]).

1.4 Simulations de l'écoulement post-liquéfaction d'un massif et de ses effets sur les structures

Nous terminons le présent chapitre introductif par une revue des différentes approches (empiriques, théoriques, numériques ou expérimentales) utilisées pour la simulation de l'écoulement d'un sol liquéfié et de ses conséquences sur les ouvrages.

1.4.1 Approches empiriques

L'une des premières préoccupations des ingénieurs géotechniciens a consisté à tenter d'estimer le déplacement permanent maximal subi par un sol liquéfié consécutivement à un séisme. Exploitant les nombreuses mesures effectuées sur les sites des séismes à Niigata (1964) et Nihonkai-Chubu (1983), Hamada et al. (1986) [30] ont proposé la formule empirique suivante :

$$D = 0,75\sqrt{H}\sqrt[3]{\theta} \quad (1.5)$$

où D est le déplacement permanent maximal du sol dans le plan horizontal (en m), H l'épaisseur de la couche du sol liquéfié (en m) et θ (en %) est la valeur maximale entre la pente du sol en surface et celle du substratum inférieur. La formule proposée intègre également les données relatives au séisme de San Fernando en 1971 (Fallgren et Smith (1973) [21]). Bartlet et Youd (1992) [4] ont également proposé une relation empirique du même type que (1.5), fondée sur les observations faites sur six séismes aux États-Unis, dont celui survenu en Alaska en 1964.

Même si de telles relations peuvent servir de bases de données intéressantes, elles ne peuvent bien évidemment pas constituer en soi des modèles prédictifs car, hormis deux données de type géométrique (H et θ), elles ne font aucunement référence par exemple à la rhéologie du sol liquéfié.

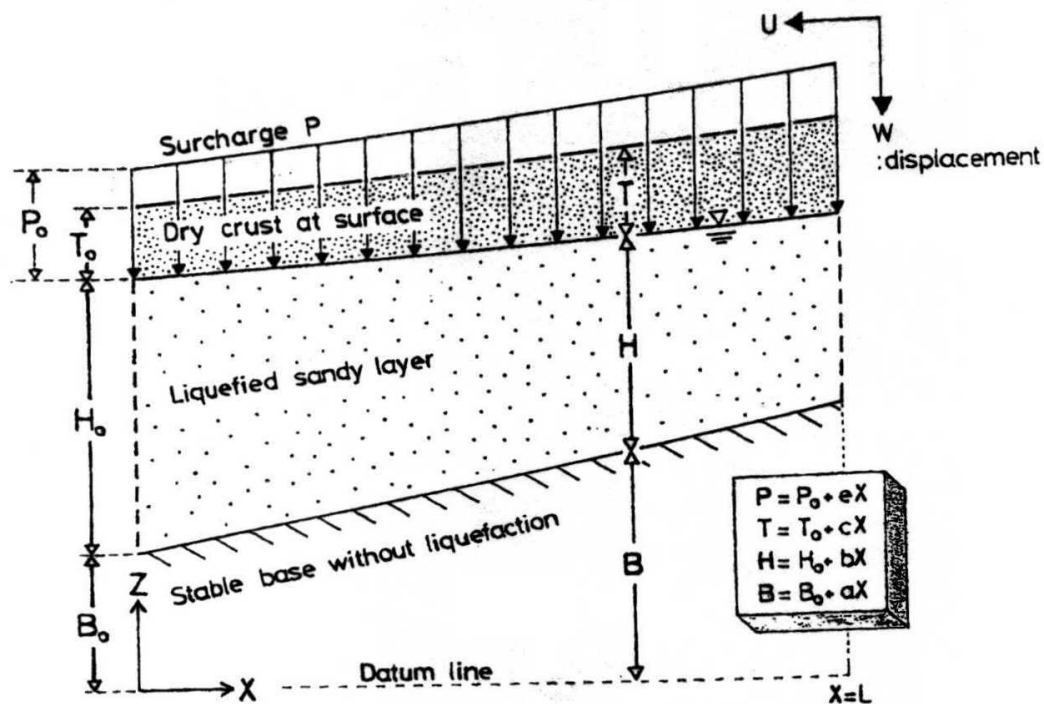


FIG. 1.10: Modèle simplifié pour le calcul des déplacements permanents maximaux d'une couche de sol liquéfié (Towhata et al. (1992) [70]).

1.4.2 Méthodes analytiques simplifiées

Le calcul des déplacements permanents maximaux d'un sol liquéfié sous l'action de la pesanteur a fait l'objet de modélisations simplifiées. La figure 1.10 représente la configuration d'une couche de sol liquéfié reposant sur un substratum et surmontée d'une couche de sol partiellement saturée. Ce problème a été étudié en détail par Towhata et al. (1992) [72] puis repris par Towhata et al. (1999) [70]. Les hypothèses constitutives d'un tel modèle de calcul sont les suivantes :

- Le profil de déplacement horizontal de la couche liquéfié est approximé par une fonction sinusoïdale de la forme :

$$u(x, z) = F(x) \sin \frac{\pi(z - B)}{H(x)} \quad (1.6)$$

- Le sol liquéfié se déforme à volume constant.
- La couche de sol non liquéfiée située au dessus de la couche liquéfiée se comporte comme un solide élastique.
- La rhéologie du sol liquéfié est gouvernée par une loi de la forme :

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_r \quad (1.7)$$

où G représente un module de cisaillement et τ_r une résistance au cisaillement résiduelle.

Appliquant alors le principe du minimum en déplacements de l'énergie potentielle, les auteurs aboutissent à une solution analytique explicite pour le champ des déplacements permanents maximaux de la couche de sol liquéfié. Cette approche a été étendue au cas d'un profil de sol plus irrégulier que celui représenté sur la figure 1.10, ainsi qu'à des configurations tridimensionnelles pour lesquelles les résultats de calcul ont été comparés à des observations sur site réel (Orense et Towhata (1998) [47] : figure 1.11).

Cette approche appelle plusieurs commentaires :

- Elle est limitée à la configuration particulière où la liquéfaction concerne une couche de sol intermédiaire, l'inclinaison des couches par rapport à l'horizontal étant par ailleurs faible.
- Son applicabilité à la situation d'un massif de sol liquéfié, de géométrie quelconque et libre de contrainte en surface, reste à démontrer, d'autant que dans les simulations effectuées le sol liquéfié est assimilé à un fluide parfait ($G = \tau_r = 0$).
- La loi (1.7) adoptée pour décrire le comportement du sol liquéfié apparaît sujette à caution, même si les auteurs expliquent qu'elle ne peut être utilisée que dans le cas où au moins l'un des paramètres G et τ_r est nul. Dans le cas où τ_r est nul, l'équation (1.7) décrit le comportement élastique en cisaillement du sol liquéfié, et le principe de minimum énoncé par les auteurs se réduit au théorème variationnel en déplacement de l'élasticité linéaire. Dans le cas où $G = 0$ mais $\tau_r \neq 0$, en revanche, on ne comprend

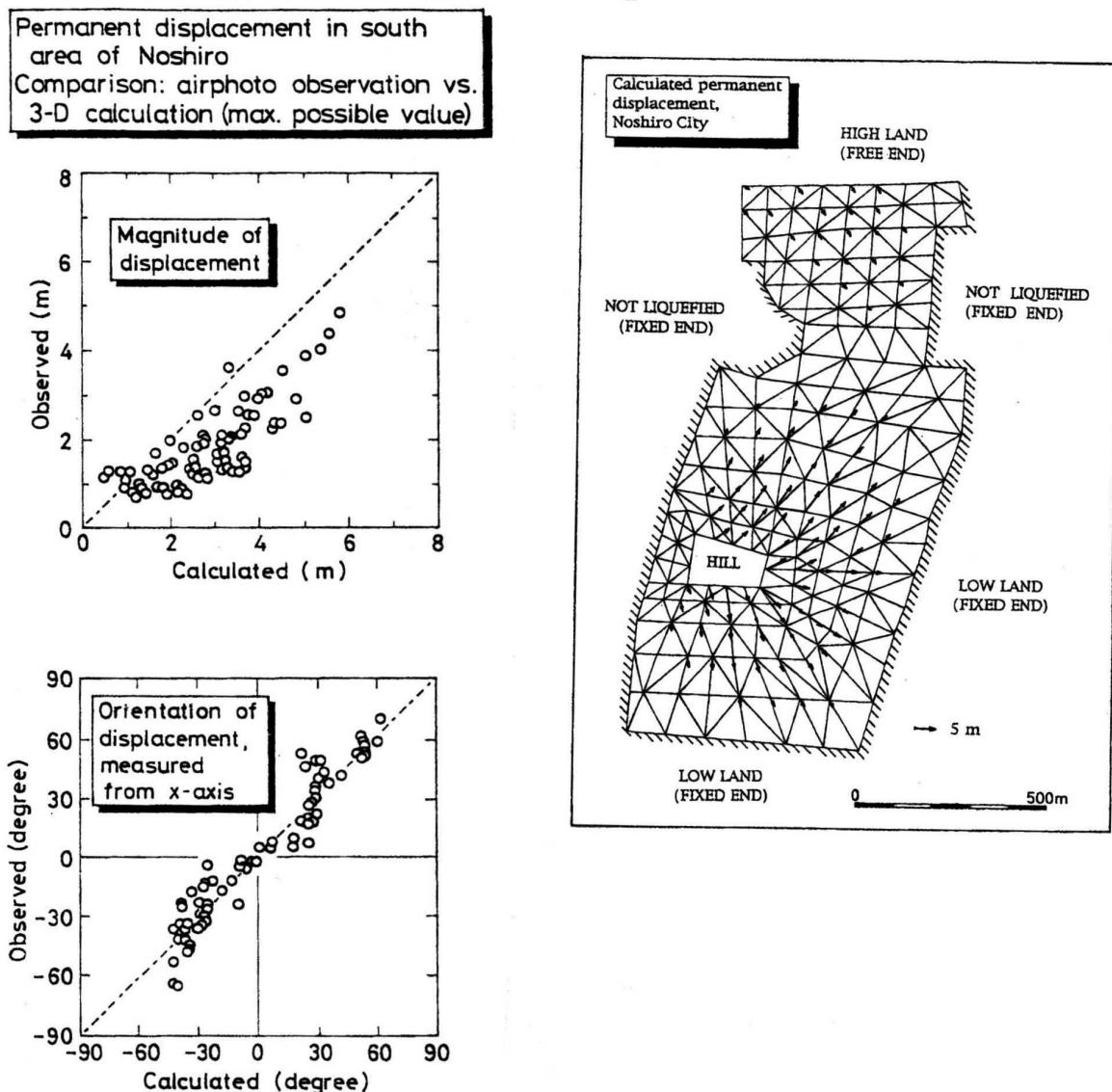


FIG. 1.11: Comparaison entre les prévisions des déplacements permanents maximaux données par le calcul et les observations sur le terrain (Orense et Towhata (1998) [47]).

pas bien en quoi consiste le principe du minimum invoqué qui, met simultanément en jeu l'élasticité de la couche supérieure non liquéfiée et le caractère visqueux, et donc dissipatif du sol liquéfié.

- Enfin la méthode de calcul proposée ne prend pas en compte les changements de géométrie possibles du massif liquéfié, qui nécessitent une analyse du problème en

transformation finie.

1.4.3 Méthodes fondées sur l'approximation des faibles profondeurs

Plusieurs méthodes de simulation numérique des écoulements de boue, glissements de terrains ou propagation des massifs de sols liquéfiés prennent en compte le fait que la profondeur du massif subissant un tel écoulement est généralement faible en regard de son extension dans le plan horizontal, de sorte que le mouvement s'effectue de façon prépondérante dans ce même plan. Il est alors possible de recourir à l'approximation dite des "faibles profondeurs" bien connue en hydraulique ("shallow water approximation"), et qu'il est possible d'étendre au cas des fluides viscoplastiques (Liu et Mei (1989) [41]).

Il est alors possible d'intégrer les équations du mouvement qui gouvernent un tel écoulement dans le sens de la profondeur, et de travailler sur les valeurs moyennes des vitesses et des contraintes calculées le long de cette profondeur (Chen et Lee (2002) [10]). Pastor et al. (2002) [50] détaillent le calcul permettant, à partir de la loi de comportement du matériau, de relier la contrainte de cisaillement s'exerçant à la base de l'écoulement à la vitesse moyenne de ce dernier. Le calcul repose sur l'hypothèse que le profil de l'écoulement le long d'une verticale est celui d'un cisaillement pur, les composantes horizontales de la vitesse ne dépendant que de la coordonnée verticale x_3 , tandis que la composante verticale est négligée.

Dans le cas d'un milieu de Bingham par exemple, défini par un coefficient de viscosité μ et une résistance au cisaillement k (équation (1.2)), le profil est celui donné par la figure 1.12. On a alors la relation :

$$\frac{h_p}{h} = \frac{k}{\tau} \tag{1.8}$$

où h est la profondeur du massif, h_p l'épaisseur de la couche supérieure en translation uniforme (pas de déformation) et τ la contrainte de cisaillement à la base de la couche. La vitesse moyenne calculée le long de l'axe vertical est alors reliée à cette dernière contrainte par l'équation :

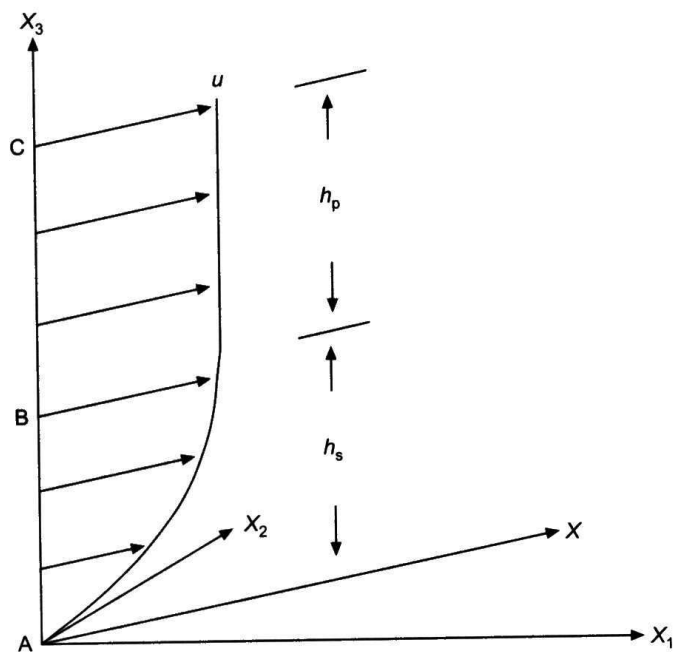


FIG. 1.12: Profil de vitesse horizontale le long d'une verticale dans le cas d'un milieu de Bingham en cisaillement simple (Pastor et al. (2002) [50]).

$$\langle u \rangle = \frac{\tau h}{6\mu} \left(1 - \frac{k}{\tau}\right) \left(2 + \frac{k}{\tau}\right) \quad (1.9)$$

qui constitue en quelque sorte la loi de comportement écrite en moyenne sur la profondeur ("depth-integrated equation").

Cette simplification permet alors de ramener l'analyse d'un problème d'écoulement a priori tridimensionnel à celui d'un problème bidimensionnel dans le plan horizontal. La figure 1.13 montre les résultats d'une telle simulation effectuée par Pastor et al. (2002) [50] concernant la rupture puis la propagation d'une retenue de résidus miniers liquéfiés, modélisés comme un milieu de Bingham ($\mu = 50 Pa.s$; $k = 1 kPa$). Il convient de noter en particulier que, contrairement aux analyses de Towhata et al. (1992, 1999) [70] [72], les déplacements induits par une telle propagation sont considérables (300m au terme de 120s sur la figure 1.13).

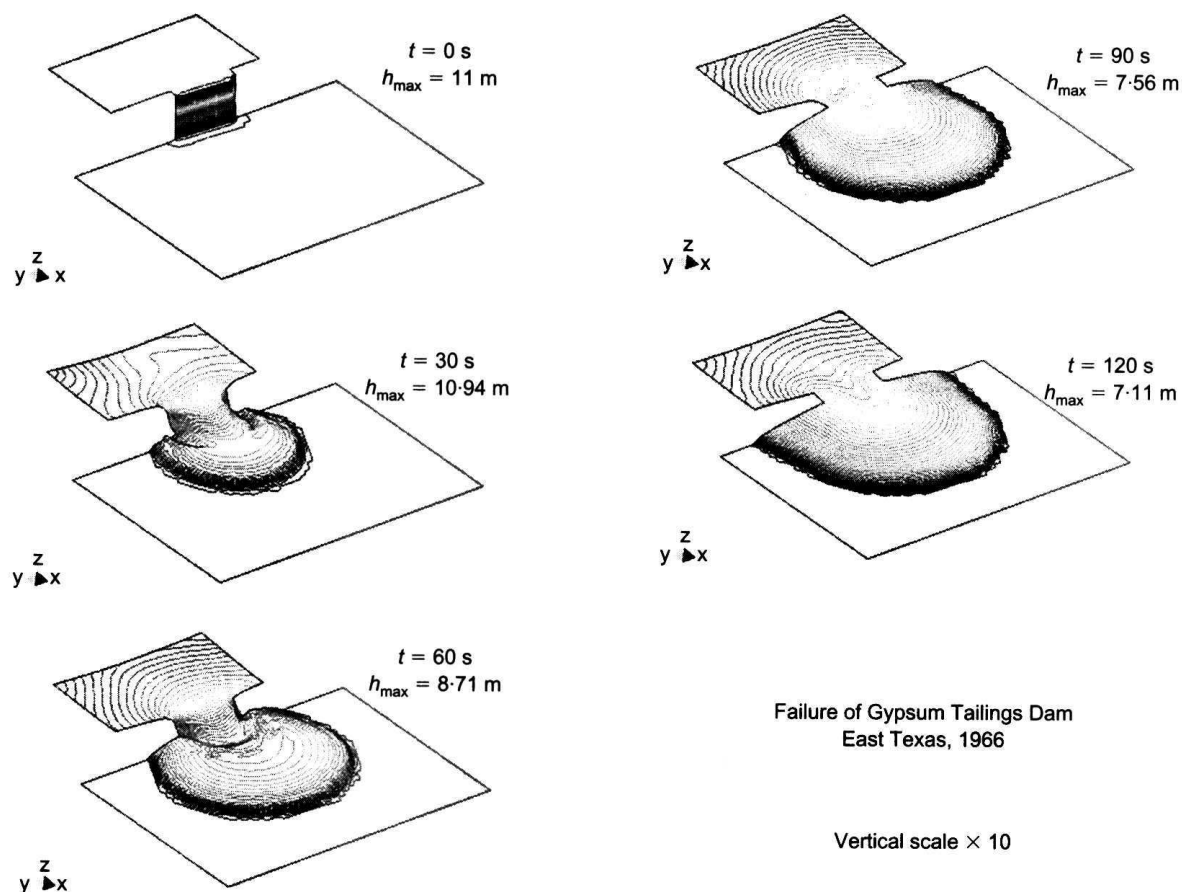


FIG. 1.13: Simulation numérique des différentes phases de propagation d'une retenue de résidus miniers liquéfiés (Pastor et al. (2002) [50]).

1.4.4 Méthodes des éléments finis et volumes finis

En l'absence d'hypothèses simplificatrices particulières, il est nécessaire de recourir à des schémas numériques de type éléments finis ou volumes finis pour traiter le problème d'écoulement d'un massif de sol liquéfié.

Tamate et Towhata (1999) [66] proposent l'utilisation d'une méthode des éléments finis consistant par exemple dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, à discrétiser le massif en éléments quadrilatères de type $Q4$ pour l'interpolation des champs de déplacements. Les zones non-liquéfiées sont modélisées comme des solides élastiques, tandis que le sol liquéfié est traité comme un fluide visqueux incompressible. La condition d'incompressibilité est prise en compte par les multiplicateurs de Lagrange. L'intérêt de l'approche ainsi développée par les auteurs est double : prendre en compte les termes d'accélération d'une part, tenir compte des changements de géométrie du massif au cours de sa propaga-

tion d'autre part, à travers une approche Lagrangienne actualisée. La figure 1.14 montre par exemple une couche de sol liquéfié dans sa configuration initiale avant propagation et dans sa configuration finale stabilisée, ainsi que l'évolution en fonction du temps du déplacement en différents points de la surface. Cette méthode n'indique pas en revanche comment prendre en compte l'existence d'une résistance résiduelle du sol liquéfié.

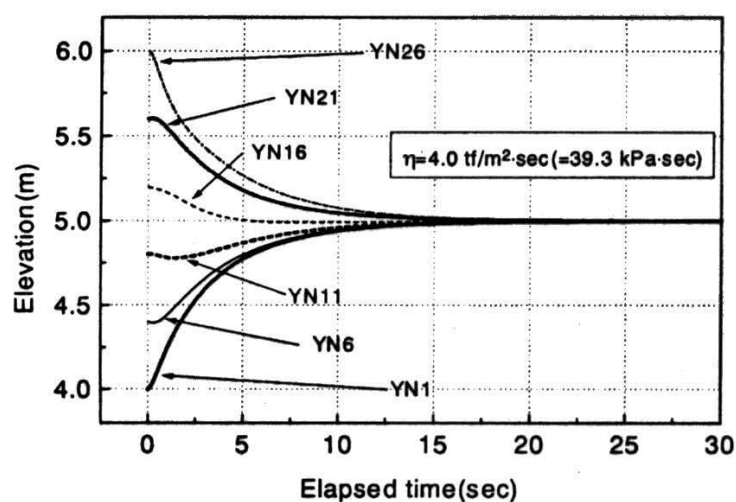
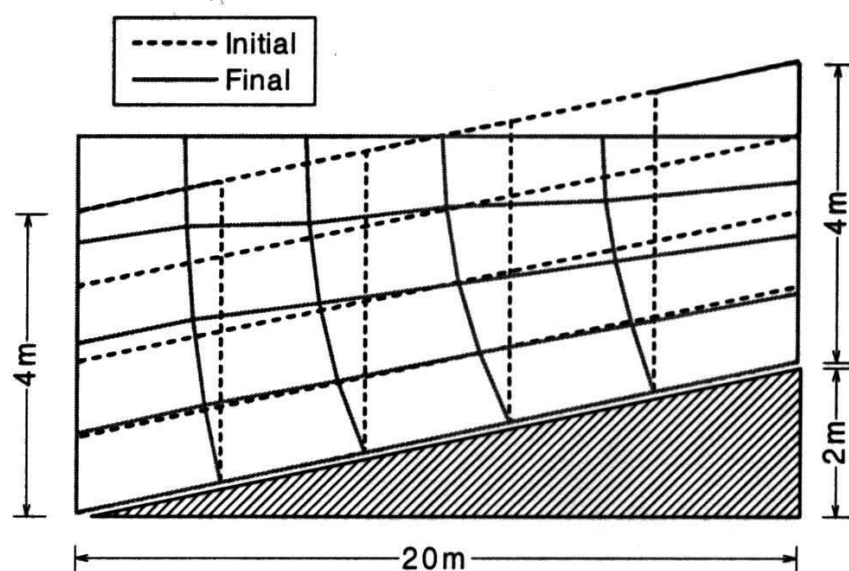


FIG. 1.14: Simulation par éléments finis de l'écoulement d'une couche de sol liquéfié (Tamate et Towhata (1999) [66]).

Uzuoka et al. (1998) [73] développent une méthode de simulation de la propagation de sols liquéfiés, inspirée directement de celles utilisées en dynamique des fluides pour traiter les équations de Navier-Stokes relatives aux écoulements d'un fluide visqueux newtonien. La résistance au cisaillement résiduelle et le modèle de Bingham qui lui est associé sont pris en compte à travers le concept de "viscosité équivalente" consistant à approximer le schéma de Bingham par un modèle linéaire (figure 1.15). Ils évoquent l'actualisation de cette viscosité équivalente à chaque pas de calcul, sans donner de précision, ni indiquer si la solution calculée converge bien vers la solution relative à un milieu de Bingham.

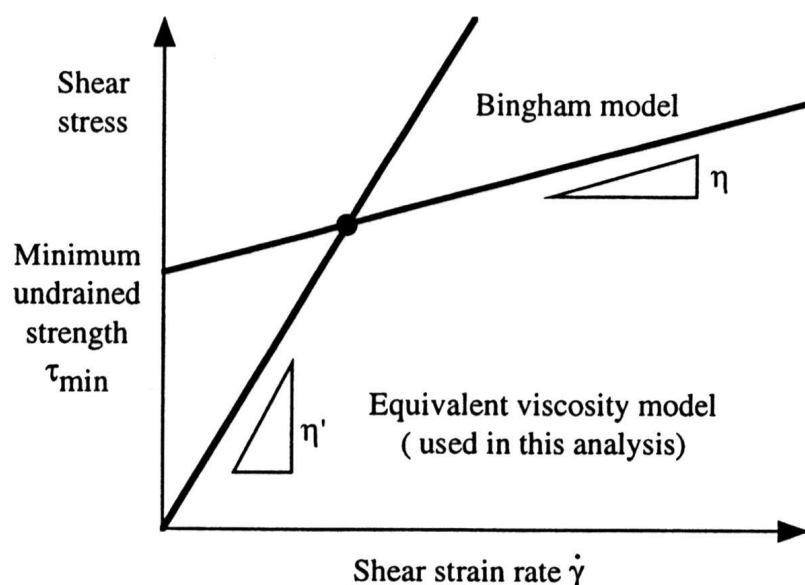


FIG. 1.15: Concept de viscosité équivalente (Uzuoka et al. (1998) [73]).

Le schéma de résolution numérique est fondée sur la méthode des volumes finis avec prise en compte de l'existence d'une surface libre évoluant au cours du temps. La figure 1.16 montre le modèle numérique et les résultats relatifs à la rupture et la propagation du remblai d'Asele (Ekstrom et Oloffson (1985) [20]). Dans une contribution récente, Hadush et al. (2001) [28] utilisent une méthode numérique dite CIP (Cubic Interpolated Pseudo particle) qui permet de traiter le cas d'une couche de sol liquéfié surmontée par une couche supérieure non liquéfiée.

Sans se référer explicitement à la problématique du comportement post-liquéfaction des massifs de sol, de nombreux travaux ont été menés sur le plan numérique afin de simuler les écoulements de fluides à seuil c'est-à-dire obéissant à un modèle de comportement de type Bingham. Ces travaux se sont néanmoins concentrés pour la plupart sur le problème

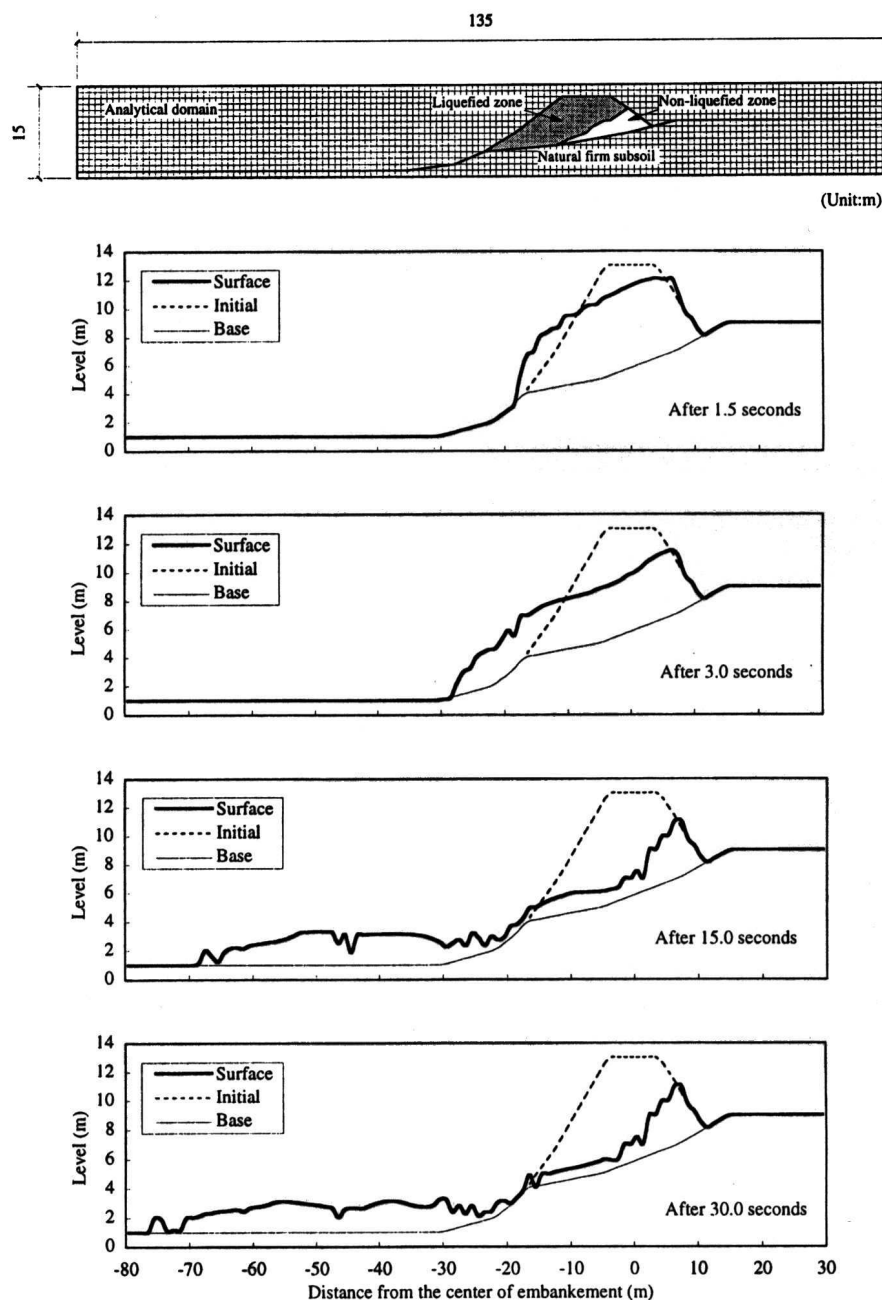


FIG. 1.16: Modèle numérique utilisé pour simuler la propagation post-liquéfaction d'un remblai et résultats (Uzuoka et al. (1998) [73]).

d'un écoulement quasi-statique stationnaire avec adhérence parfaite sur les parois. Le principe général de ces approches est la mise en œuvre dans le cadre d'une méthode des éléments finis d'un principe variationnel portant sur les vitesses (Saramito et Roquet (2001) [62]; Roquet et Saramito (2003) [58]; Mitsoulis (2004) [43]). La prise en compte d'une condition de glissement aux interfaces avec les parois a été faite par Fortin et Côté

(1991) [24], tandis que tout récemment Vola et al. (2003) [74] ont traité les problèmes d'écoulements non-stationnaires, sans toutefois en donner d'illustration sur le plan de la simulation numérique.

1.4.5 Effet de l'écoulement sur les structures

Cette question essentielle pour permettre à l'ingénieur de dimensionner les structures ou ouvrages en conséquence, a été relativement peu abordée, si ce n'est pas par voie expérimentale. On peut entre autres citer les travaux expérimentaux de Towhata et Al-Hussaini (1988) [69] qui ont procédé à des essais visant à évaluer les sollicitations latérales exercées par un écoulement de boue sous-marine sur un pieu modèle, ceux de Yasuda et al. (1989) [76] ou de Towhata et al. (1995) [71] relatifs à des essais sur une canalisation enterrée dans un massif sableux liquéfié. Ces essais permettent de mettre en évidence d'une part la réduction de la résistance du sol due au phénomène de liquéfaction, d'autre part le comportement visqueux du sol liquéfié dont le coefficient de viscosité peut être ainsi indirectement évalué (Towhata et al. (1999) [72]).

De nombreuses études expérimentales se sont attachées à analyser plus précisément l'interaction entre des pieux de fondation (en groupe ou isolés) et un sol liquéfié, notamment par des essais en centrifugeuse (Boulanger et al. (1997) [7]; Wilson et al. (2000) [75]). Récemment Abdoun et al. (2003) [1] ont publié les résultats de plusieurs séries d'essais analysant la réponse de pieux de fondation sous l'action d'un écoulement de sable saturé préalablement liquéfié par vibration.

Le dispositif expérimental, représenté sur le haut de la figure 1.17, est une boîte de cisaillement laminaire ("laminar shear box") légèrement inclinée par rapport à l'horizontal, et qui se déforme par cisaillement une fois déclenchée la liquéfaction. Cette même figure montre le profil du déplacement en fonction du temps dans la couche liquéfiée ainsi que la distribution des moments fléchissants mesurés dans les pieux de fondation, qui sont maximaux aux points séparant la couche liquéfiée des couches supérieure et inférieure demeurant non liquéfiées. Ces observations sont conformes à certaines ruptures par exemple suite au séisme de Niigata (Yoshida et Hamada (1991) [77]). Des résultats similaires ont été tout récemment obtenus au Japon par Imamura et al. (2004) [33] sur des files de pieux soumises à l'effort exercé par un écoulement transversal de sol liquéfié par vibration. L'analyse s'est plus particulièrement concentrée sur l'influence de la proximité relative des pieux sur cet effort.

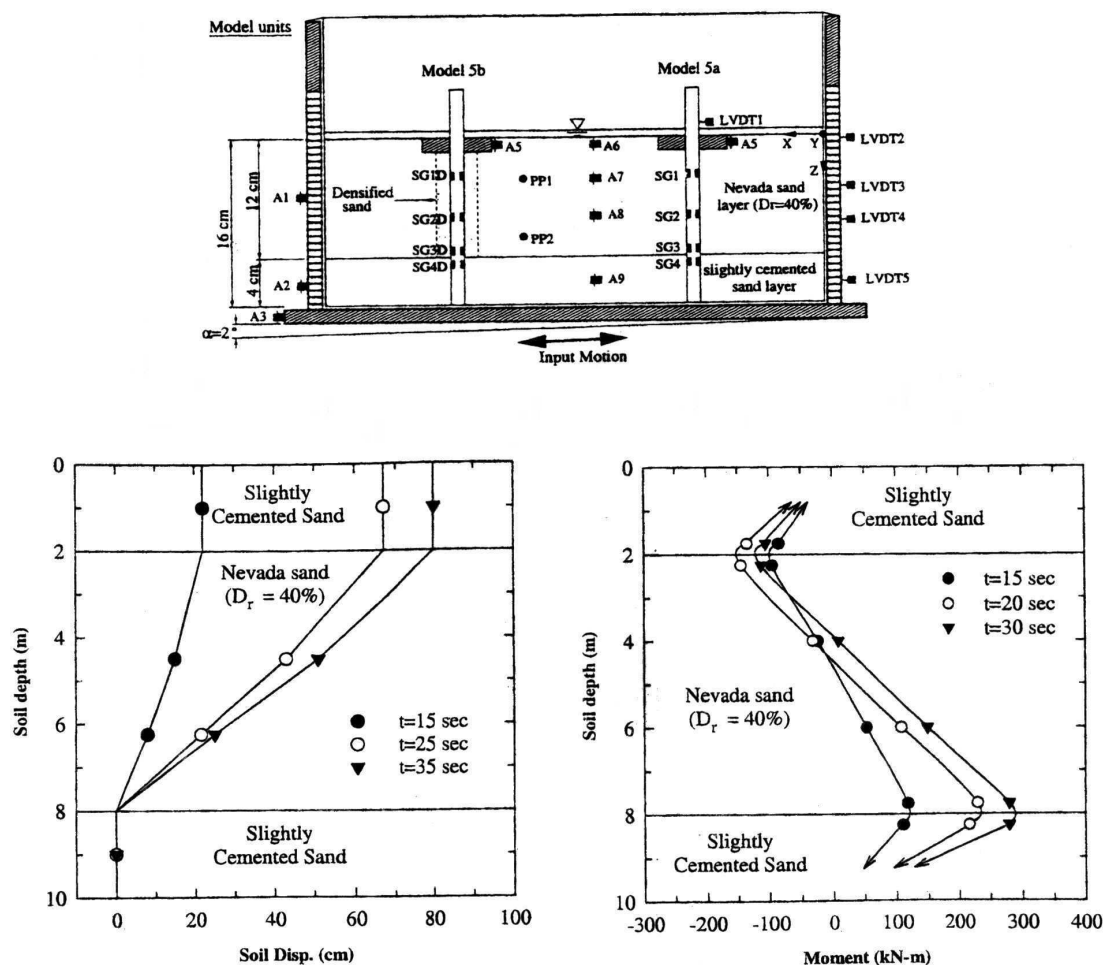


FIG. 1.17: Essais en centrifugeuse pour l'analyse de l'interaction sol liquéfié-pieu (Abdoun et al. (2003) [1]).

En ce qui concerne les méthodes de calcul permettant d'évaluer quantitativement l'effet de l'écoulement d'un sol liquéfié sur des structures de type pieux, diverses approches ont été proposées telles que le raisonnement d'équilibre limite développé par Dobry et al. (2003) [17] où l'action du sol liquéfié sur chaque pieu se traduit par une sollicitation uniforme égale à la pression limite du sol. Ishihara et Cubrinorshi (1998) [34] proposent une modélisation de l'interaction sol liquéfié-pieu de type Winkler, l'effort latéral étant donné par la formule :

$$F = \beta k(U_G - U_P) \quad (1.10)$$

où k est le module de réaction du sol non liquéfié, $U_G - U_P$ la différence entre le déplacement moyen du sol environnant et celui du pieu, tandis que le coefficient β (< 1) traduit la dégradation de la raideur d'interaction, due à la liquéfaction. L'analyse d'observations et de mesures faites sur le terrain indique qu'un tel coefficient est de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} .

1.5 Conclusion : la nécessité d'un outil de simulation numérique intégré

Au terme de l'analyse bibliographique faite dans ce chapitre, il apparaît nécessaire de mettre au point et développer un outil numérique qui soit capable de répondre aux deux exigences suivantes :

- Tenir compte à la fois de la *viscosité* et de la *résistance au cisaillement* résiduelle du sol liquéfié qui jouent un rôle important dans la simulation de l'écoulement du massif. L'adoption d'un *modèle de Bingham* apparaît de ce point de vue tout à fait naturelle.
- Pouvoir simuler d'une part la *propagation* au cours du temps du massif de sol liquéfié, y compris dans le cas de changements de géométrie importants, d'autre part évaluer les *efforts* que cette propagation induit sur les structures et ouvrages environnants.

Le présent travail est donc structuré en quatre chapitres conçus comme des étapes successives vers l'élaboration d'un tel outil de calcul.

Le chapitre 2 est consacré à la mise au point de cet outil dans le cas où le sol liquéfié est modélisé comme un fluide visqueux newtonien, c'est-à-dire lorsque la résistance au cisaillement résiduelle est négligée. L'approche numérique est fondée sur un principe variationnel portant sur le champ de vitesse instantané du massif dans sa configuration actuelle, analogue à celui classiquement établi pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire (principe du minimum de l'énergie potentielle). La détermination à chaque instant de ce champ de vitesse permet alors de simuler l'évolution géométrique du massif au cours du temps (approche lagrangienne actualisée). Deux points sont plus particulièrement abordés : la discrétisation du massif en éléments finis $Q4$ dans le cas d'un écoulement bidimensionnel d'une part qui permet de traiter à la fois la condition d'incompressibilité du sol liquéfié et les changements de géométrie du massif ; la prise en compte des termes

d'accélération d'autre part qui peuvent devenir prépondérants dans certains cas.

Le chapitre 3 porte sur la modélisation du sol liquéfié comme un milieu (rigide)-viscoplastique, c'est-à-dire que le taux de déformation n'est plus directement proportionnel à la contrainte, mais à l'excédent de cette contrainte par rapport à un seuil. On montre en particulier que le principe du minimum en vitesse reste toujours valable lorsque le comportement du sol liquéfié est régi par ce type de modélisation, le lien étant par ailleurs établi avec la théorie de l'analyse limite ou du calcul à la rupture. Le modèle de Bingham correspond au cas particulier où le seuil en contrainte est défini par un critère de Von Mises. Une condition de glissement, analogue au modèle de Bingham, peut également être introduite à l'interface entre le massif du sol liquéfié et le substratum.

Le traitement numérique proprement dit du problème de minimisation pour un milieu de Bingham fait l'objet du chapitre 4 ; la difficulté essentielle provient du caractère non quadratique et surtout non-différentiable de la fonctionnelle à minimiser. Trois méthodes sont successivement présentées : la méthode du polytope, associée à l'utilisation des fonctions de courant pour tenir compte de la condition d'incompressibilité, qui se révèle en définitive impraticable ; l'approche par régularisation du modèle (rigide)-viscoplastique ; la méthode de décomposition-coordination avec Lagrangiens augmentés. Ces deux dernières méthodes étant mises en œuvre, et leurs performances comparées sur l'exemple de la simulation d'un remblai de sol liquéfié, il en ressort que c'est la dernière qui est la plus performante.

Le cinquième et dernier chapitre traite un certain nombre d'applications réalisées à l'aide de cette dernière méthode. Elle permet notamment d'aborder la question de l'évaluation des efforts exercés par un écoulement de sol liquéfié, dont la cinématique a été préalablement déterminée, sur des obstacles tels que des piles de ponts ou des pieux de fondations (problème stationnaire). Un certain nombre d'illustrations de l'outil numérique ainsi mis au point sont enfin présentées, où l'on met successivement en évidence le rôle joué par les forces d'inertie, la viscosité et la résistance du sol liquéfié, ou encore l'introduction d'une condition de glissement à l'interface sol liquéfié/substratum, sur la cinématique d'évolution du massif liquéfié d'une part, les sollicitations qu'un tel écoulement engendre sur les structures d'autre part.

La conclusion s'efforcera de tirer le bilan des acquis du travail ainsi réalisé, de ses insuffisances et de dégager un certain nombre de perspectives portant sur la possibilité de développer un outil de calcul et de prévision véritablement opérationnel, destiné à

l'ingénieur.

* *
*

Chapitre 2

Cas du modèle de fluide Newtonien

Sommaire

2.1	Introduction	33
2.2	Position du problème d'évolution et principe du minimum en vitesse	33
2.2.1	Position du problème	33
2.2.2	Principe de minimum	36
2.2.3	Cas d'un mode de chargement à n paramètres	37
2.2.4	Un exemple illustratif	38
2.3	Résolution numérique dans le cas bidimensionnel (Jellouli (2001) [36])	41
2.3.1	Le cas des éléments finis T3	42
2.3.2	Discrétisation en éléments Q4	43
2.3.3	Expression matricielle de la fonctionnelle $F(\underline{U}')$	47
2.3.4	Résolution du système global	51
2.3.5	Evolution de la géométrie du massif	52
2.4	La prise en compte des termes d'accélération	54
2.4.1	Retour sur l'exemple illustratif : mise en équations	54
2.4.2	Ecriture adimensionnelle et résolution de l'équation d'évolution	58
2.4.3	Résultats	60

2.4.4	Implémentation numérique	63
-------	------------------------------------	----

2.1 Introduction

Ce deuxième chapitre a pour objectif de présenter de façon détaillée la méthode numérique qui permet de simuler l'écoulement d'un massif de sol liquéfié dans le cas simplifié où le comportement rhéologique de ce dernier est modélisé par celui d'un *fluide visqueux Newtonien*.

La prévision de l'écoulement proprement dit repose sur la détermination à chaque instant du champ de vitesse qui possède la propriété de rendre minimale une fonctionnelle quadratique (section 2.2).

La mise en œuvre numérique de ce principe de minimum dans le cadre d'une méthode des éléments finis conduit alors classiquement à la résolution d'un système linéaire, tandis que l'évolution de la géométrie du massif est déterminée de proche en proche par intégration dans le temps (section 2.3).

L'extension de la méthode à la prise en compte des termes d'accélération est décrite à la section 2.4.

2.2 Position du problème d'évolution et principe du minimum en vitesse

2.2.1 Position du problème

Le massif de sol liquéfié est décrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus, comme occupant, dans sa configuration actuelle à l'instant t , un domaine géométrique Ω_t , de bord $\partial\Omega_t$. Son chargement est caractérisé par les données suivantes, définies à tout instant par (Figure 2.1) :

- une densité volumique d'efforts à distance, notée $\rho \underline{F}^d$, où ρ représente la masse volumique du sol liquéfié, tandis que \underline{F}^d désignera en pratique le champ de pesanteur \underline{g} ;
- une densité surfacique d'efforts de contact \underline{T}^d s'exerçant sur une partie $\partial\Omega_t^T$ du bord $\partial\Omega_t$, tandis que la vitesse \underline{U}^d est imposée en tout point de la partie complémentaire $\partial\Omega_t^U$ ($\partial\Omega_t = \partial\Omega_t^T \cup \partial\Omega_t^U$).

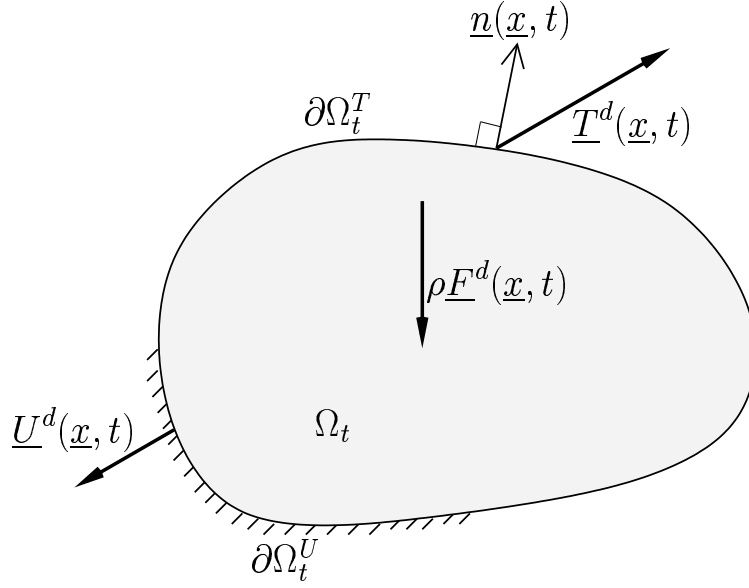


FIG. 2.1: Données en efforts et en vitesses relatives au massif du sol liquéfié dans sa configuration actuelle.

Se plaçant dans l'hypothèse d'une évolution *quasi-statique*, où les termes d'accélération sont négligés, on définit alors classiquement l'ensemble noté $\mathcal{S}(t)$ des champs de contrainte *statiquement admissibles* (S.A.) avec les données en effort du problème, défini par :

$$\mathcal{S}(t) = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}; \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F}^d = 0 \text{ dans } \Omega_t \text{ et } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } \partial\Omega_t^T \right\} \quad (2.1)$$

d'une part, et l'ensemble $\mathcal{C}(t)$ des champs de vitesse *cinématiquement admissibles* (C.A.) pour le problème :

$$\mathcal{C}(t) = \left\{ \underline{U}; \underline{U} = \underline{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_t^U \right\} \quad (2.2)$$

d'autre part.

Adoptant un point de vue *eulérien* pour décrire le mouvement du massif de sable liquéfié, celui-ci est caractérisé à chaque instant par le champ de vitesse \underline{U} qui vérifie l'ensemble des propriétés suivantes :

- \underline{U} est cinématiquement admissible avec l'ensemble des données en vitesse :

$$\underline{U} \in \mathcal{C}(t) \quad (2.3)$$

- \underline{U} est associé à un champ de contrainte S.A. par la loi de comportement du *fluide visqueux incompressible* ; soit :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(t) \quad (2.4)$$

avec, μ étant le *coefficient de viscosité* :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbb{I}}} + 2\mu\underline{\underline{d}} \quad (2.5)$$

$$\text{tr}\underline{\underline{d}} = \text{div}\underline{U} = 0 \quad (2.6)$$

où

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{U} + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{U} \right) \quad (2.7)$$

est le taux de déformation, tandis que la pression moyenne $p = -\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{\sigma}}$ qui reste indéterminée, peut s'interpréter comme le multiplicateur de Lagrange associé à la *condition d'incompressibilité* (2.6).

La connaissance à tout instant de la solution en vitesse \underline{U} permet classiquement de remonter à la *description lagrangienne* du mouvement du massif à travers la détermination des trajectoires des particules matérielles. Désignant par \underline{x} (resp. \underline{X}) la position géométrique d'une telle particule dans sa configuration actuelle Ω_t (resp. initiale Ω_0), on a en effet :

$$\begin{cases} d\underline{x} = \underline{U}(\underline{x}, t)dt \\ \underline{x}_{t=0} = \underline{X} \end{cases} \quad (2.8)$$

Remarque :

En l'absence de forces de volume ($\underline{F}^d = 0$), l'équation d'équilibre ($\operatorname{div}\underline{\sigma} = 0$) associée à la loi de comportement (2.5) et à la condition d'incompressibilité (2.6) conduit à l'équation de Stokes :

$$-\underline{\operatorname{grad}}p + \mu\Delta\underline{U} = 0 \quad (2.9)$$

le problème d'écoulement correspondant étant appelé *problème de Stokes*.

2.2.2 Principe de minimum

Nous allons montrer que le champ de vitesse \underline{U} solution du problème précédent rend minimale la fonctionnelle quadratique suivante :

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \int_{\Omega_t} \mu(\underline{d}' : \underline{d}') d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \rho \underline{F}^d \cdot \underline{U}' d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t^T} \underline{T}^d \cdot \underline{U}' dS_t \quad (2.10)$$

où \underline{U}' est un champ de vitesse quelconque, cinématiquement admissible et vérifiant la condition d'incompressibilité (2.6). Soit :

$$\mathcal{F}(\underline{U}) = \min \left\{ \mathcal{F}(\underline{U}'); \underline{U}' \in \mathcal{C}(t), \operatorname{div}\underline{U}' = 0 \right\} \quad (2.11)$$

La preuve d'un tel résultat s'obtient classiquement de la manière suivante, en posant $\underline{U}' = \underline{U} + \delta\underline{U}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \mathcal{F}(\underline{U} + \delta\underline{U}) - \mathcal{F}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} \mu \left[(\underline{d} + \delta\underline{d}) : (\underline{d} + \delta\underline{d}) - \underline{d} : \underline{d} \right] d\Omega_t \\ &\quad - \int_{\Omega_t} \rho \underline{F}^d \cdot \delta\underline{U} d\Omega_t - \int_{\Omega_t^T} \underline{T}^d \cdot \delta\underline{U} dS_t \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec $\delta\underline{d} = \underline{d}(\delta\underline{U})$, c'est à dire :

$$\delta\mathcal{F} = \int_{\Omega_t} 2\mu(\underline{d} : \delta\underline{d}) d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \rho \cdot \underline{F}^d \delta\underline{U} d\Omega_t - \int_{\Omega_t^T} \underline{T}^d \cdot \delta\underline{U} dS_t + \int_{\Omega_t} \mu(\delta\underline{d} : \delta\underline{d}) d\Omega_t \quad (2.13)$$

Compte tenu de la loi de comportement (2.5), on peut écrire :

$$\int_{\Omega_t} (2\mu \underline{\underline{d}} : \delta \underline{\underline{d}}) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} ((\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{\mathbb{I}}}) : \delta \underline{\underline{d}}) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{d}}) d\Omega_t \quad (2.14)$$

puisque $\text{tr}(\delta \underline{\underline{d}}) = 0$, avec $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(t)$, et donc en vertu du *principe des puissances virtuelles* :

$$\int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{d}}) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\rho \underline{\underline{F}}^d \cdot \delta \underline{\underline{U}}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t^T} (\rho \underline{\underline{T}}^d \cdot \delta \underline{\underline{U}}) dS_t \quad (2.15)$$

Il vient donc en définitive :

$$\delta \mathcal{F} = \int_{\Omega_t} \mu (\delta \underline{\underline{d}} : \delta \underline{\underline{d}}) d\Omega_t = \begin{cases} > 0 & \text{si } \delta \underline{\underline{U}} \neq 0 \\ = 0 & \text{si } \delta \underline{\underline{U}} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

On observera que ce principe de minimum est en tout point analogue au *principe du minimum de l'énergie potentielle pour un matériau élastique isotrope incompressible*, où le coefficient μ représente le module de cisaillement, tandis que le champ de vitesse $\underline{\underline{U}}$ joue le rôle du champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}$ (voir par exemple Salençon (2003) [61]). D'un point de vue énergétique, il convient néanmoins de noter que le terme quadratique ne représente que la *moitié de la puissance dissipée par viscosité*.

2.2.3 Cas d'un mode de chargement à n paramètres

On se place dans la situation où les données en efforts $(\rho \underline{\underline{F}}^d, \underline{\underline{T}}^d)$ et en vitesse $(\underline{\underline{U}}^d)$ sont telles que le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(t), \forall \underline{\underline{U}} \in \mathcal{C}(t) \quad \int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}) d\Omega_t = \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \dot{\underline{\underline{q}}}(\underline{\underline{U}}) \quad (2.17)$$

où $\underline{\underline{Q}} = (Q_i ; i = 1..n)$ représente le *vecteur des paramètres de chargement* du système, tandis que $\dot{\underline{\underline{q}}} = (\dot{q}_i ; i = 1..n)$ est le vecteur formé des *paramètres cinématiques* associés par dualité à $\underline{\underline{Q}}$ dans l'expression de la puissance des efforts extérieurs, égale à la puissance

de déformation. On dit alors que le système est soumis à un *mode de chargement à n paramètres* (Salençon (2003) [61]).

On en déduit alors immédiatement, en vertu de la linéarité du problème d'évolution en vitesse, que la *réponse globale* du système peut s'écrire sous la forme d'une relation linéaire entre le vecteur des paramètres de chargement et celui des vitesses généralisées :

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{Q} \quad (2.18)$$

où $\underline{\underline{\Lambda}}$ désigne une matrice *symétrique définie positive* qui caractérise cette réponse, analogue à la matrice des complaisances élastiques dans le cas de l'élasticité linéaire.

La symétrie d'une telle matrice se démontre aisément. En effet, étant donnés deux chargements \underline{Q}^1 et \underline{Q}^2 quelconques, et désignant par $\underline{\dot{q}}^1$ et $\underline{\dot{q}}^2$ les réponses correspondantes données par (2.18), on peut écrire, en utilisant la relation (2.17) :

$$\begin{aligned} \underline{Q}^1 \cdot \underline{\dot{q}}^2 &= \int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{d}}^2) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (2\mu \underline{\underline{d}}^1 : \underline{\underline{d}}^2) d\Omega_t \\ &= \int_{\Omega_t} (2\mu \underline{\underline{d}}^2 : \underline{\underline{d}}^1) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{d}}^1) d\Omega_t = \underline{Q}^2 \cdot \underline{\dot{q}}^1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

d'où

$$\forall \underline{Q}^1, \underline{Q}^2 \quad \underline{Q}^1 \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^2 = \underline{Q}^2 \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^1 \quad (2.20)$$

La propriété (2.19) est l'homologue du *théorème de réciprocité* (Maxwell-Betti) en élasticité linéaire.

2.2.4 Un exemple illustratif

Nous explicitons à titre de solution analytique de référence, permettant la validation ultérieure des méthodes numériques, l'exemple d'une couche de sol liquéfié d'épaisseur H s'écoulant sur un substratum incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, sous l'action combinée de son poids volumique $\rho \underline{g}$ et d'une contrainte de cisaillement uniforme τ exercée en surface (Figure 2.2).

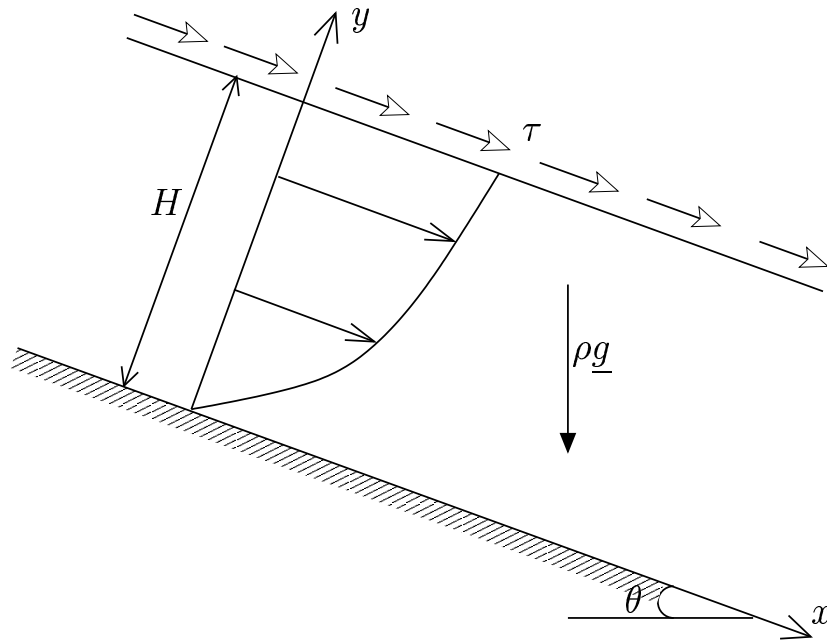


FIG. 2.2: Ecoulement d'un massif de sol liquéfié sur un plan incliné.

La solution en vitesse d'un tel problème est recherchée classiquement sous la forme :

$$\underline{U} = f(y, t)\underline{e}_x \quad (2.21)$$

avec la condition d'adhérence à l'interface massif/substratum

$$f(y = 0, t) = 0 \quad (2.22)$$

de sorte que la condition d'incompressibilité (2.6) est automatiquement satisfaite, puisque

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(y, t) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.23)$$

et donc

$$\text{tr} \underline{\underline{d}} = \text{div} \underline{U} = 0 \quad (2.24)$$

La hauteur H du massif reste alors constante.

Le champ de contrainte associé au champ de vitesse (2.21) par la loi de comportement (2.5) s'écrit donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(y, t) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.25)$$

d'où compte tenu de l'équation d'équilibre en présence du poids volumique :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \rho g \sin \theta = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Tenant compte de la condition aux limites en surface qui s'écrit :

$$p(y = H, t) = 0, \quad \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial p}{\partial y}(y = H, t) = \tau \quad (2.27)$$

ainsi que de la condition (2.22), on obtient finalement :

$$\underline{U} = \left(\frac{\tau}{\mu} y + \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(yH - \frac{y^2}{2} \right) \right) \underline{e}_x \quad (2.28)$$

pour la *solution en vitesse*, ainsi que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\rho g \cos \theta (H - y) \underline{\underline{I}} + (\tau + \rho g \sin \theta (H - y)) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.29)$$

pour la *solution en contrainte*.

La solution correspond à celle d'un *écoulement permanent*, le profil de vitesse étant *parabolique*. Raisonnant sur une "tranche" quelconque d'épaisseur égale à l'unité le long

de l'axe Ox , l'écriture de la puissance des efforts extérieurs dans un champ de vitesse de la forme (2.21) donne :

$$\mathcal{P}_e(\underline{U}) = \int_0^H \rho g \sin \theta f(y) dy + \tau f(H) \quad (2.30)$$

faisant ainsi apparaître un *mode de chargement à deux paramètres* (Q_1, Q_2) avec :

$$Q_1 = \tau, \quad Q_2 = \rho g \sin \theta \quad (2.31)$$

les vitesses généralisées associées étant

$$\dot{q}_1 = f(H), \quad \dot{q}_2 = \int_0^H f(y) dy \quad (2.32)$$

soit pour le profil de vitesse solution

$$\dot{q}_1 = \frac{\tau}{\mu} H + \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \frac{H^2}{2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\tau}{\mu} \frac{H^2}{2} + \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \frac{H^3}{3} \quad (2.33)$$

D'où l'expression des composantes de la matrice $\underline{\underline{\Lambda}}$ introduite en (2.18), qui caractérise la réponse en vitesse globale du massif sous l'action du chargement (Q_1, Q_2) .

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \frac{H}{\mu} & \frac{H^2}{2\mu} \\ \frac{\mu}{H^2} & \frac{2\mu}{H^3} \\ \frac{2\mu}{H^2} & \frac{3\mu}{H^3} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

2.3 Résolution numérique dans le cas bidimensionnel (Jellouli (2001) [36])

Dans le cas général, où la solution exacte demeure inaccessible par voie analytique, on procède à la recherche d'une solution approchée du champ de vitesse, consistant à appliquer le principe du minimum (2.11) à des sous espaces de dimension finie des champs de vitesse C.A. Ceux-ci sont engendrés par une discrétisation de la géométrie actuelle Ω_t du massif en éléments finis. Deux difficultés se présentent dans la mise en œuvre concrète

d'une telle approche numérique :

- a) La nécessité de respecter à tout instant la *condition d'incompressibilité* du champ de vitesse.
- b) Le choix d'un type d'éléments finis et d'une approximation du champ de vitesse qui permettent de *conserver au cours du temps la géométrie des éléments*.

L'approche numérique est ici complètement développée dans le cas des *problèmes bidimensionnels en déformations planes*.

2.3.1 Le cas des éléments finis T3

Compte tenu de l'exigence *b)*, il paraît naturel de choisir une discrétisation de la géométrie du problème en éléments finis triangulaires avec variation affine du champ de vitesse (éléments de type T3), permettant ainsi de conserver la géométrie triangulaire des éléments au cours du temps. Les degrés de liberté sont donc au nombre de deux (composantes de la vitesse) par sommet (nœud) des triangles. Le taux de déformation étant alors constant sur chaque élément, la condition d'incompressibilité revient à imposer une liaison entre les vitesses aux sommets de chaque élément.

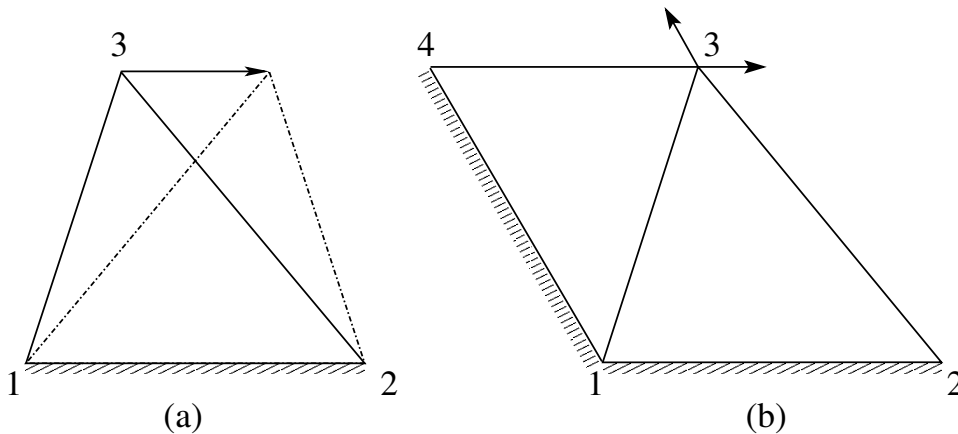


FIG. 2.3: Condition d'incompressibilité pour des éléments finis T3.

La figure 2.3.a montre le cas d'un tel élément T3 dont les sommets 1 et 2 sont astreints à demeurer fixes (condition d'adhérence à l'interface massif-substratum). Il est facile de

voir que la condition d'incompressibilité se traduit ici très simplement par le fait que la vitesse du nœud n°3 doit rester parallèle au côté opposé qui joint les nœuds 1 et 2. La figure 2.3.b représente une configuration pour laquelle la condition d'incompressibilité des éléments 123 et 134 implique la nullité de la vitesse du nœud 3, puisque celle-ci doit être simultanément parallèle aux côtés 12 et 14. Un maillage en éléments finis T3 tel que celui représenté sur la figure (2.4) conduit à une "rigidification" totale de la structure, puisque l'écriture de la condition d'incompressibilité pour chaque élément entraîne de proche en proche la suppression de tout degré de liberté.

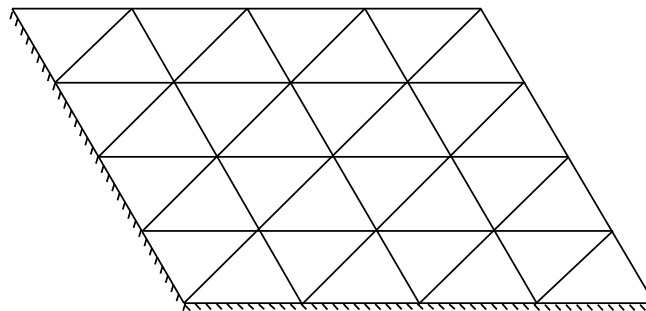


FIG. 2.4: Exemple de rigidification d'une structure discrétisée en éléments finis de type T3.

2.3.2 Discrétisation en éléments Q4

L'adoption d'une discrétisation en éléments finis Q4 va nous permettre de nous affranchir, au moins partiellement, de la difficulté précédente. On trouvera par exemple dans Dhatt et Touzot (1984) [15] le principe d'une telle discrétisation dont nous rappelons les traits essentiels.

Le massif occupe dans sa configuration actuelle un domaine géométrique bidimensionnel S_t découpé en éléments finis quadrilatères notés S_t^e , les nœuds du maillage étant les sommets de ces quadrilatères. On note S_r^e l'*élément de référence* qui est un carré de demi-côté égal à l'unité (figure 2.5), tel qu'à tout point $m(\xi, \eta)$ de ce carré est associé à chaque instant t un point matériel $M(x, y)$ de S_t^e par les relations suivantes :

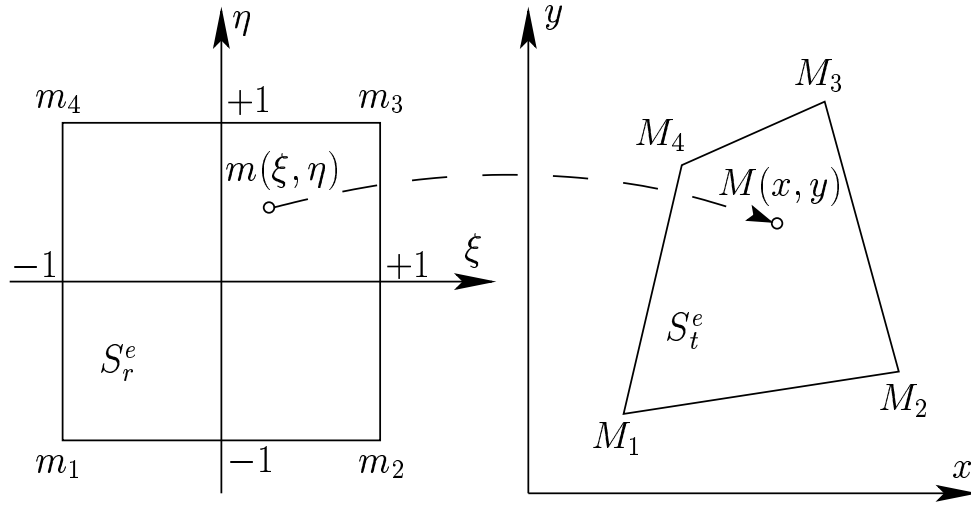


FIG. 2.5: Élément fini Q4 dans sa configuration actuelle et élément de référence.

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, t) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) x_{\alpha}(t) \\ y(\xi, \eta, t) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) y_{\alpha}(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

où $N_{\alpha}(\xi, \eta)$, $\alpha = 1$ à 4 sont les fonctions de forme définies par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Chacune de ces fonctions prend la valeur 1 au nœud α de l'élément de référence, tandis qu'elle s'annule aux trois autres nœuds. La figure 2.6 montre l'allure de la fonction $N_1(\xi, \eta)$, représentée par une surface réglée.

Le gradient de la transformation définie par les équation (2.35) s'écrit :

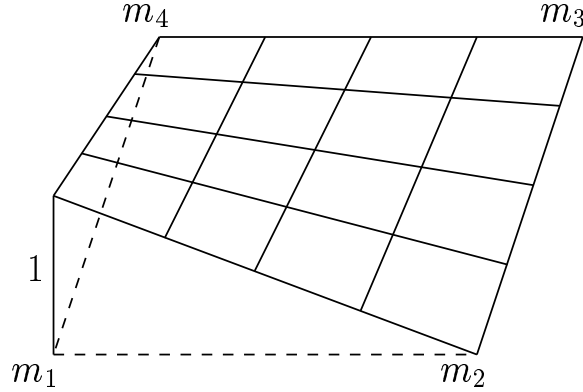


FIG. 2.6: Fonction de forme $N_1(\xi_1, \xi_2)$.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_{12}(1 - \eta) + x_{34}(1 + \eta) & x_{14}(1 - \xi) + x_{23}(1 + \xi) \\ y_{12}(1 - \eta) + y_{34}(1 + \eta) & y_{14}(1 - \xi) + y_{23}(1 + \xi) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

où l'on a posé $x_{\alpha\beta} = x_\beta - x_\alpha$ et $y_{\alpha\beta} = y_\beta - y_\alpha$, tandis que la *dilatation volumique* s'écrit :

$$J(\xi, \eta, t) = \frac{dS_t^e}{dS_r^e} = \det \underline{\underline{F}}(\xi, \eta, t) \quad (2.38)$$

soit tous calculs faits (Dhatt et Touzot (1984) [15]) :

$$J(\xi, \eta, t) = A_0(t) + A_1(t)\xi + A_2(t)\eta \quad (2.39)$$

où les coefficients A_i sont des fonctions des coordonnées actuelles des sommets de l'élément :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{8} [y_{24}x_{13} - y_{13}x_{24}] = \frac{1}{8} [\underline{M_1M_3} \wedge \underline{M_2M_4}] \cdot \underline{e_z} \\ A_1 &= \frac{1}{8} [y_{43}x_{12} - y_{12}x_{43}] = \frac{1}{8} [\underline{M_1M_2} \wedge \underline{M_4M_3}] \cdot \underline{e_z} \\ A_2 &= \frac{1}{8} [y_{14}x_{23} - y_{23}x_{14}] = \frac{1}{8} [\underline{M_2M_3} \wedge \underline{M_1M_4}] \cdot \underline{e_z} \end{aligned} \quad (2.40)$$

La *condition d'incompressibilité* implique que la dilatation volumique reste constante au cours du temps en tout point (ξ, η) :

$$\forall(\xi, \eta, t) \quad \dot{J} = \dot{A}_0 + \dot{A}_1\xi + \dot{A}_2\eta = 0 \quad (2.41)$$

soit

$$\dot{A}_0 = \dot{A}_1 = \dot{A}_2 = 0 \quad (2.42)$$

Le respect simultané de ces trois conditions conduit encore une fois, dans certaines circonstances, à une rigidification totale de la structure discrétisée, telle que celle représentée sur la figure 2.7, où trois des quatre sommets d'un élément Q4 sont bloqués en raison des conditions aux limites. En effet il est facile de voir, d'après (2.40) et (2.42), que la condition d'incompressibilité en tout point de l'élément nécessite que le nœud M_3 se déplace parallèlement aux segments M_1M_2 , M_1M_4 et M_2M_4 qui demeurent fixes, supprimant ainsi tout degré de liberté.

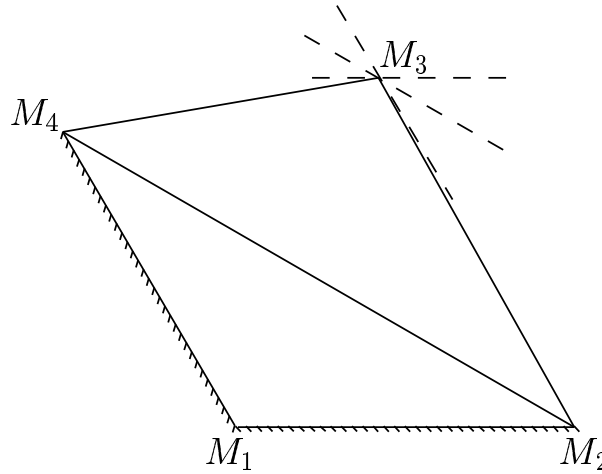


FIG. 2.7: Rigidification d'un élément Q4 par application de la condition locale d'incompressibilité.

Contrairement à ce qui se passe avec les éléments T3, cette difficulté peut être surmontée

en se limitant à ne vérifier la condition d'incompressibilité que de façon globale. Calculant l'aire de l'élément Q4 dans sa configuration actuelle, il vient :

$$S_t^e = \int_{S_\xi^e} J(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_0 + A_1\xi + A_2\eta) d\xi d\eta = A_0 \quad (2.43)$$

de sorte que la condition d'incompressibilité globale s'écrit :

$$\dot{A}_0 = 0 \quad (2.44)$$

Elle se traduit sur l'exemple de la figure 2.7 par le fait que le sommet M_3 est astreint à se déplacer parallèlement à la diagonale M_2M_4 qui reste fixe. La condition (2.44) s'exprime à partir des vitesses aux nœuds du maillage de la manière suivante :

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{8} \left[(v_4 - v_2)x_{13} + (u_3 - u_1)y_{24} - (v_3 - v_1)x_{24} - (u_4 - u_2)y_{13} \right] = 0 \quad (2.45)$$

où (u_α, v_α) sont les composantes de la vitesse du nœud α , soit sous forme matricielle :

$${}^t\{V\}^e \{U\}^e = 0 \quad (2.46)$$

avec

$${}^t\{U\}^e = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad (2.47)$$

et

$${}^t\{V\}^e = \{-y_{24}, y_{13}, y_{24}, -y_{13}, x_{24}, -x_{13}, -x_{24}, x_{13}\} \quad (2.48)$$

2.3.3 Expression matricielle de la fonctionnelle $F(\underline{U}')$

Revenant à l'expression générale (2.10) de la fonctionnelle quadratique du champ de vitesse, et nous plaçant dans la situation d'un écoulement plan dans les axes Oxy , nous supposons que les seules données en efforts correspondent à l'action du champ de pesanteur, supposé vertical et uniforme ($\underline{F}^d = -g\underline{e}_y$, $\underline{T}^d = 0$), tandis que les données en

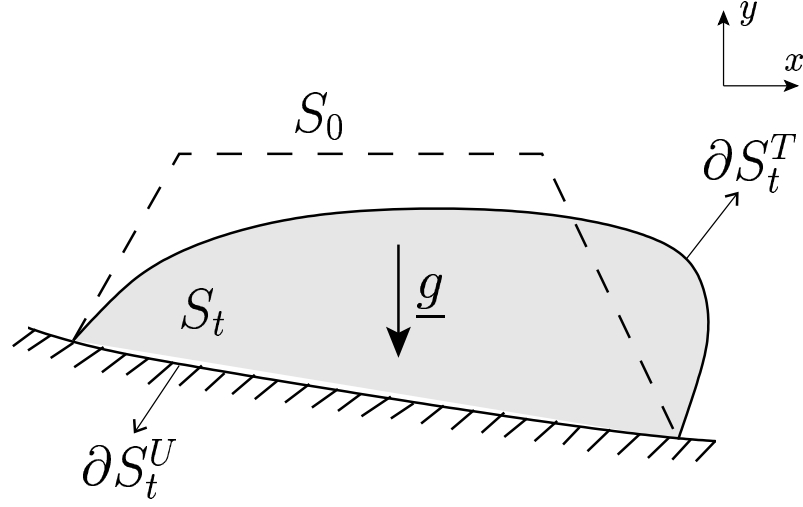


FIG. 2.8: Ecoulement en condition de déformations planes d'un massif de sol liquéfié sous l'action du champ de pesanteur.

vitesse sont nulles ($\underline{U}^d = 0$) : figure 2.8. Il s'agit donc de déterminer, ou plus précisément d'approcher numériquement, la solution en vitesse \underline{U} qui rend minimale la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \int_{S_t} \mu(\underline{d}' : \underline{d}') dS_t - \int_{S_t} \rho \underline{g} \cdot \underline{U}' dS_t \quad (2.49)$$

sous les conditions :

$$\operatorname{div} \underline{U}' = 0 \text{ sur } S_t \quad \text{et} \quad \underline{U}' = 0 \text{ sur } \partial S_t^U \quad (2.50)$$

Ayant adopté une discrétisation du domaine géométrique S_t en éléments finis Q4 notés S_t^e , comme décrit précédemment, nous recherchons l'expression de la fonctionnelle $\mathcal{F}(\underline{U}')$ en fonction des vitesses aux nœuds du maillage ainsi réalisé, les vitesses des nœuds situés sur la partie ∂S_t^U de la frontière étant prises égales à zéro.

- Le calcul de la *puissance des forces de pesanteur* relative à un élément s'écrit :

$$\int_{S_t^e} \rho \underline{g} \cdot \underline{U}' dS_t = \int_{S_r^e} \rho \underline{g} \cdot \underline{U}' J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.51)$$

avec, dérivant (2.35) par rapport au temps :

$$\underline{U}' = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) (u_{\alpha} \underline{e}_x + v_{\alpha} \underline{e}_y) \quad (2.52)$$

Il vient alors en tenant compte de (2.39) :

$$\int_{S_t^e} \rho \underline{g} \cdot \underline{U}' dS_t = -\rho g \sum_{\alpha=1}^4 \int_{S_r^e} N_{\alpha}(\xi, \eta) v_{\alpha} (A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta) d\xi d\eta \quad (2.53)$$

soit sous forme matricielle :

$$\int_{S_t^e} \rho \underline{g} \cdot \underline{U}' dS_t = {}^t \{F\}^e \{U\}^e \quad (2.54)$$

avec

$${}^t \{F\}^e = -\rho g \left\{ 0, 0, 0, 0, A_0 - \frac{A_1 + A_2}{3}, A_0 + \frac{A_1 - A_2}{3}, A_0 + \frac{A_1 + A_2}{3}, A_0 - \frac{A_1 - A_2}{3} \right\} \quad (2.55)$$

- Le calcul du *terme quadratique* s'effectue de façon analogue :

$$\int_{S_t^e} (\mu \underline{d}' : \underline{d}') dS_t = \int_{S_r^e} \mu {}^t \{d\} \{d\} (A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta) d\xi d\eta \quad (2.56)$$

avec

$${}^t \{d\} = \{d_{xx}, d_{yy}, \sqrt{2}d_{xy}, \} \quad (2.57)$$

et

$$\{d\} = [\Delta] \{U\} \quad (2.58)$$

Le tenseur taux de déformation pouvant être calculé par la relation :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \left[\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} + {}^t (\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}) \right] \quad (2.59)$$

où $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation donné par (2.37); il vient après calculs (Jellouli (2001) [36]) :

$$[\Delta] = \frac{1}{16 \det \underline{\underline{F}}} [\Delta_1] [R] \quad (2.60)$$

avec :

$${}^t[\Delta_1] = \begin{bmatrix} (1-\eta)(y_{14}(1-\xi) + y_{23}(1+\xi)) & 0 & -\frac{(1-\eta)}{\sqrt{2}}(x_{14}(1-\xi) + x_{23}(1+\xi)) \\ -(1+\xi)(y_{12}(1-\eta) + y_{43}(1+\eta)) & 0 & \frac{(1+\xi)}{\sqrt{2}}(x_{12}(1-\eta) + x_{43}(1+\eta)) \\ -(1+\eta)(y_{14}(1-\xi) + y_{23}(1+\xi)) & 0 & \frac{(1+\eta)}{\sqrt{2}}(x_{14}(1-\xi) + x_{23}(1+\xi)) \\ (1-\xi)(y_{12}(1-\eta) + y_{43}(1+\eta)) & 0 & -\frac{(1-\xi)}{\sqrt{2}}(x_{12}(1-\eta) + x_{43}(1+\eta)) \\ 0 & -(1-\eta)(x_{14}(1-\xi) + x_{23}(1+\xi)) & \frac{(1-\eta)}{\sqrt{2}}(y_{14}(1-\xi) + y_{23}(1+\xi)) \\ 0 & (1+\xi)(x_{12}(1-\eta) + x_{43}(1+\eta)) & -\frac{(1+\xi)}{\sqrt{2}}(y_{12}(1-\eta) + y_{43}(1+\eta)) \\ 0 & (1+\eta)(x_{14}(1-\xi) + x_{23}(1+\xi)) & -\frac{(1+\eta)}{\sqrt{2}}(y_{14}(1-\xi) + y_{23}(1+\xi)) \\ 0 & -(1-\xi)(x_{12}(1-\eta) + x_{43}(1+\eta)) & \frac{(1-\xi)}{\sqrt{2}}(y_{12}(1-\eta) + y_{43}(1+\eta)) \end{bmatrix}$$

et

$$[R] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

L'expression matricielle du terme quadratique est alors :

$$\int_{S_i^e} (\mu \underline{\underline{d}}' : \underline{\underline{d}}') dS_i = \int_{S_i^e} \mu {}^t\{U\}^e {}^t[\Delta] [\Delta] \{U\}^e (A_0 + A_1\xi + A_2\eta) d\xi d\eta \quad (2.62)$$

soit

$$\int_{S_i^e} (\mu \underline{\underline{d}}' : \underline{\underline{d}}') dS_i = \frac{1}{2} {}^t\{U\}^e [D]^e \{U\}^e \quad (2.63)$$

avec

$$[D]^e = \int_{S_r^e} 2\mu {}^t[\Delta][\Delta] (A_0 + A_1\xi + A_2\eta) d\xi d\eta \quad (2.64)$$

2.3.4 Résolution du système global

Désignant par $\{U\}$ le vecteur formé par toutes les composantes des vitesses aux nœuds du maillage, la fonctionnelle quadratique s'écrit :

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \frac{1}{2} {}^t\{U\}[D]\{U\} - {}^t\{F\}\{U\} \quad (2.65)$$

avec

$$\frac{1}{2} {}^t\{U\}[D]\{U\} = \sum_e \frac{1}{2} {}^t\{U\}^e [D]^e \{U\}^e \quad (2.66)$$

et

$${}^t\{F\}\{U\} = \sum_e {}^t\{F\}^e \{U\}^e \quad (2.67)$$

La résolution du problème approché consiste à rechercher le minimum de cette fonctionnelle sous la condition d'incompressibilité globale de chaque élément.

$$\forall e \quad {}^t\{V\}^e \{U\}^e = 0 \quad (2.68)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$${}^t\{V\}\{U\} = 0 \quad (2.69)$$

On introduit alors classiquement le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\{U\}, \{p\}) = \frac{1}{2} {}^t\{U\}[D]\{U\} - {}^t\{F\}\{U\} - {}^t\{p\} {}^t[V]\{U\} \quad (2.70)$$

qui fait apparaître les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions d'incompressibilité (2.69) regroupés dans la matrice $\{p\}$ dont la dimension est égale au nombre

d'éléments du maillage. La stationnarité de ce Lagrangien par rapport aux variables $\{U\}$ et $\{p\}$ conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} [D] & -[V] \\ -{}^t[V] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

dont l'inversion nous permet en particulier de calculer $\{U\}$, c'est-à-dire l'approximation éléments finis de la solution en vitesse.

2.3.5 Evolution de la géométrie du massif

La détermination du champ de vitesse \underline{U} défini à tout instant sur la *configuration actuelle* S_t , ou plus précisément de son approximation $\{U\}$ dans le cadre de la méthode des éléments finis, nous permet de suivre l'évolution de la géométrie du massif à partir de sa *configuration* S_0 à l'instant initial $t = 0$, supposée connue, correspondant à la liquéfaction du massif. Désignant par \underline{X} (resp. \underline{x}) le vecteur position repérant la position géométrique d'un point matériel du massif dans sa *configuration initiale* à $t = 0$ (resp. *actuelle* à $t > 0$), la relation :

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) \quad (2.72)$$

définit, à \underline{X} fixé, la trajectoire du point matériel correspondant, paramétré par le temps t (description *lagrangienne* du mouvement : figure 2.9). La détermination de cette trajectoire s'effectue par intégration dans le temps du système différentiel :

$$d\underline{x} = \underline{U}(\underline{x}, t) dt \quad (2.73)$$

en tenant compte de la condition initiale :

$$\underline{x}(t = 0) = \underline{X} \quad (2.74)$$

En pratique, une telle intégration dans le temps est faite numériquement en découpant le temps en *incrément successifs* d'amplitude Δt suffisamment faible :

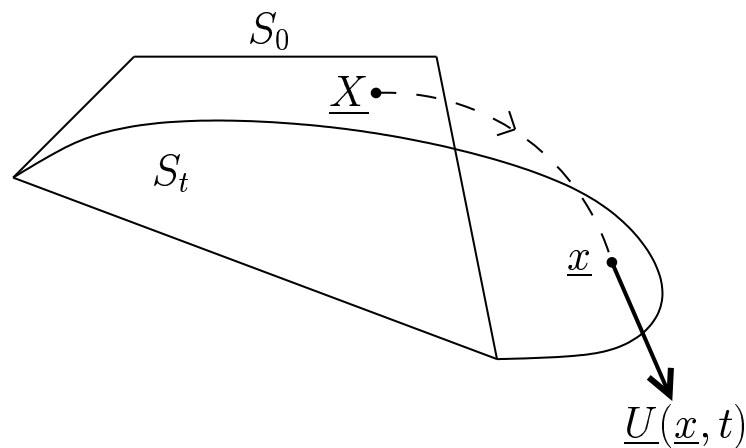


FIG. 2.9: Trajectoire d'un point du massif de sol liquéfié.

$$\underline{x}(t + \Delta t) = \underline{x}(t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \Delta t \quad (2.75)$$

La position de chaque point matériel étant ainsi actualisée de proche en proche à partir de sa position initiale $\underline{X} = \underline{x}(t = 0)$. Dans le cadre de l'approximation par éléments finis, il suffit de décrire les trajectoires des nœuds du maillage qui sont des points matériels. La figure 2.10 montre par exemple le changement de géométrie que subit un élément Q4 entre les instants t et $t + \Delta t$, les vitesses aux nœuds \underline{U}^i ayant été préalablement déterminées à partir de la résolution du système linéaire (2.71) où les positions $\underline{x}^i(t)$ des nœuds sont connues.

Dans l'exemple élémentaire décrit au paragraphe 2.2.4 (écoulement sur un plan incliné), l'épaisseur H de la couche de sol liquéfié demeurant constante, le champ de vitesse solution donné par (2.28) correspond à un écoulement *stationnaire*. Son intégration donne alors immédiatement :

$$\begin{cases} x = X + \left[\frac{\tau}{\mu} Y + \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(Y H - \frac{Y^2}{2} \right) \right] t \\ y = Y \end{cases} \quad (2.76)$$

Ces équations correspondent à un *mouvement rectiligne uniforme* de chaque point du massif.

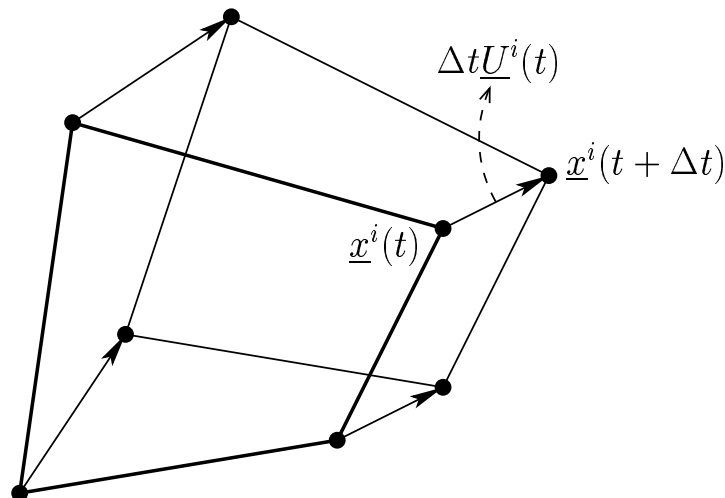


FIG. 2.10: Actualisation de la géométrie d'un élément Q4 entre deux instants successifs t et $t + \Delta t$.

2.4 La prise en compte des termes d'accélération

Nous avons jusqu'à présent supposé que les évolutions de la masse du sol liquéfié se déroulaient en *conditions quasi-statiques*, c'est-à-dire en négligeant les termes d'accélération. Nous allons voir tout d'abord sur l'exemple simple de l'écoulement sur un plan incliné comment il est possible de prendre en compte ces termes d'accélération, avant de proposer une méthode numérique généralisant celle exposée à la section 2.3.

2.4.1 Retour sur l'exemple illustratif : mise en équations

Nous adoptons une *description lagrangienne* de l'évolution au cours du temps de la couche de sol liquéfié, en supposant ici pour simplifier que $\tau = 0$, le seul effort extérieur étant le champ de pesanteur uniforme. On pose :

$$x = X + \alpha(Y, t) , \quad y = Y , \quad z = Z \quad (2.77)$$

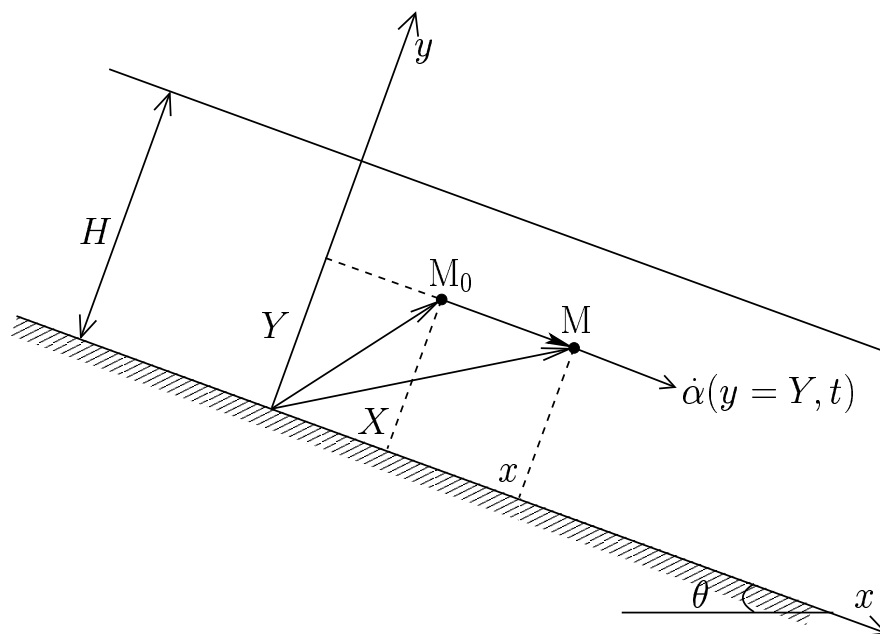


FIG. 2.11: Description lagrangienne du mouvement d'une couche de sol liquéfié sur un substratum incliné.

où (x, y) désignent les coordonnées actuelles à l'instant t d'un point matériel repéré par ses coordonnées (X, Y) à l'instant initial $t = 0$. $\alpha(Y, t)$ désigne alors le déplacement subi par ce point entre ces deux configurations (figure 2.11). Les relations (2.77) signifient qu'un plan matériel quelconque parallèle au plan incliné se déplace parallèlement à ce même plan incliné d'une quantité $\alpha(Y, t)$ qui ne dépend que de sa côte Y et du temps t . La condition d'adhérence parfaite au substratum implique :

$$\alpha(Y = 0, t) = 0 \quad (2.78)$$

Le champ de vitesse *lagrangien* associé à la transformation (2.77) est alors :

$$\underline{U}(X, Y, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(X, Y, t) = \dot{\alpha}(Y, t) \underline{e}_x \quad (2.79)$$

avec $\dot{\alpha}(Y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \alpha(Y, t)$, d'où l'expression correspondante du champ de vitesse *eulérien* :

$$\underline{U}(x, y, t) = \dot{\alpha}(y = Y, t) \underline{e}_x \quad (2.80)$$

ainsi que du taux de déformation :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\alpha}'(y, t)}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.81)$$

avec $(.)' = \frac{\partial}{\partial y}(\cdot)$, de sorte que la condition d'incompressibilité est automatiquement vérifiée à tout instant

$$\operatorname{div} \underline{U} = \operatorname{tr} \underline{\underline{d}} = 0 \quad (2.82)$$

En vertu de la loi de comportement (2.5) du fluide visqueux newtonien, le champ de contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p(x, y, t) \underline{\underline{I}} + \mu \dot{\alpha}'(y, t) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.83)$$

Reportant cette expression dans l'équation de la dynamique qui s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho (\underline{g} - \underline{a}(\underline{x}, t)) \quad (2.84)$$

où

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t) \quad (2.85)$$

désigne le *champ d'accélération*, qui vaut ici :

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = \ddot{\alpha}(y, t) \underline{e}_x \quad (2.86)$$

on obtient finalement :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \dot{\alpha}'' + \rho(g \sin \theta - \ddot{\alpha}) = 0 \quad (2.87)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta = 0 \quad (2.88)$$

L'intégration de l'équation (2.88), en tenant compte de la condition de pression nulle en surface ($y = H$), donne immédiatement l'expression du champ de pression :

$$p(y, t) = \rho g(H - y) \cos \theta \quad (2.89)$$

Posant $U(y, t) = \dot{\alpha}(y, t)$, l'équation (2.87) se réduit à :

$$\mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \rho g \sin \theta = \rho \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.90)$$

c'est-à-dire à une équation de type "équation de la chaleur" avec un terme de source $\rho g \sin \theta$, avec les conditions aux limites suivantes :

* *Adhérence parfaite* entre le sol et le substratum :

$$\forall t \quad U(y = 0, t) = 0 \quad (2.91)$$

* Plan supérieur *libre d'effort*

$$\forall t \quad \sigma_{xy}(y = H, t) = \mu \dot{\alpha}'(y = H, t) = 0 \quad (2.92)$$

d'où

$$\forall t \quad \frac{\partial U}{\partial t}(y = H, t) = 0 \quad (2.93)$$

ainsi que la *condition initiale*

$$\forall y \quad U(y, t = 0) = 0 \quad (2.94)$$

(massif immobile à l'instant $t = 0$ de la liquéfaction).

L'intégration de l'équation (2.90) dans le *cas quasi-statique* ($\frac{\partial U}{\partial t} = 0$) permet de retrouver l'*écoulement permanent* avec profil de vitesse parabolique décrit au paragraphe 2.2.4 :

$$U(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(yH - \frac{y^2}{2} \right) \quad (2.95)$$

2.4.2 Ecriture adimensionnelle et résolution de l'équation d'évolution

On introduit les trois grandeurs caractéristiques suivantes du problème :

- la *hauteur* H de la couche du sol liquéfié ;
- la *vitesse* en surface atteinte en *régime stationnaire*

$$V = U(y = H) = \frac{\rho g H^2}{2\mu} \sin \theta \quad (2.96)$$

- le *temps caractéristique* défini par :

$$T = \frac{2V}{g \sin \theta} = \frac{\rho H^2}{\mu} \quad (2.97)$$

c'est-à-dire comme le *temps mis par une particule matérielle soumise à un mouvement uniformément accéléré, d'accélération $g \sin \theta$, pour atteindre la vitesse V .*

Le *nombre de Reynolds*, classiquement défini par :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho V H}{\mu} \quad (2.98)$$

peut encore s'écrire :

$$\mathcal{R}_e = \frac{VT}{H} \quad (2.99)$$

En d'autres termes le *nombre de Reynolds* peut s'interpréter comme le rapport entre la distance parcourue par une particule animée d'une vitesse V pendant l'intervalle de temps T et la profondeur H de la couche.

Introduisant alors les variables adimensionnelles suivantes :

$$\chi = \frac{y}{H} \quad , \quad u = \frac{U}{V} \quad , \quad \tau = \frac{t}{T} \quad (2.100)$$

l'équation aux dérivées partielles (2.90) devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2}(\chi, \tau) + 2 = \frac{\partial u}{\partial \tau}(\chi, \tau) \quad (2.101)$$

avec les conditions :

$$u(\chi, \tau = 0) = 0 \quad , \quad u(\chi = 0, \tau) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \chi}(\chi = 1, \tau) = 0 \quad (2.102)$$

La solution de l'équation (2.101) est recherchée sous la forme d'une série trigonométrique de la forme :

$$u(\chi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\tau) \varphi_n(\chi) \quad (2.103)$$

avec

$$\varphi_n(\chi) = \sin(\lambda_n \chi) \quad , \quad \lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (2.104)$$

de sorte que les deux dernières conditions (2.102) sont automatiquement vérifiées. Reportant (2.103) dans (2.101), il vient :

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(\tau) \varphi_n(\chi) + 2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(\tau) \varphi_n(\chi) \quad (2.105)$$

et compte tenu de l'identité :

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \varphi_n(\chi) \quad (2.106)$$

avec

$$k_n = \int_0^1 \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \chi \right] d\chi = \frac{8}{(2n+1)\pi} \quad (2.107)$$

on obtient :

$$\forall n \quad -\lambda_n^2 u_n(\tau) + k_n = u_n'(\tau) \quad (2.108)$$

dont l'intégration donne :

$$u_n(\tau) = \frac{k_n}{\lambda_n^2} + c_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (2.109)$$

Les constantes c_n sont déterminées grâce à la condition initiale $u_n(\tau = 0) = 0$:

$$c_n = -\frac{k_n}{\lambda_n^2} \quad (2.110)$$

La solution de l'équation (2.101) en tenant compte des conditions (2.102) est donc finalement :

$$u(\chi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32}{\pi^3 (2n+1)^3} \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \chi \right] \left(1 - \exp \left(- (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \tau \right) \right) \quad (2.111)$$

2.4.3 Résultats

D'après (2.111) et (2.100) l'expression de la vitesse est :

$$\dot{\alpha}(y, t) = V u \left(\chi = \frac{y}{H}, \tau = \frac{t}{T} \right) \quad (2.112)$$

La figure 2.12 représente l'évolution en fonction du temps du profil de vitesse adimensionnel.

On observe que lorsque $\tau = \frac{t}{T} \rightarrow +\infty$, le profil de vitesse tend asymptotiquement vers le profil de vitesse correspondant à l'écoulement stationnaire :

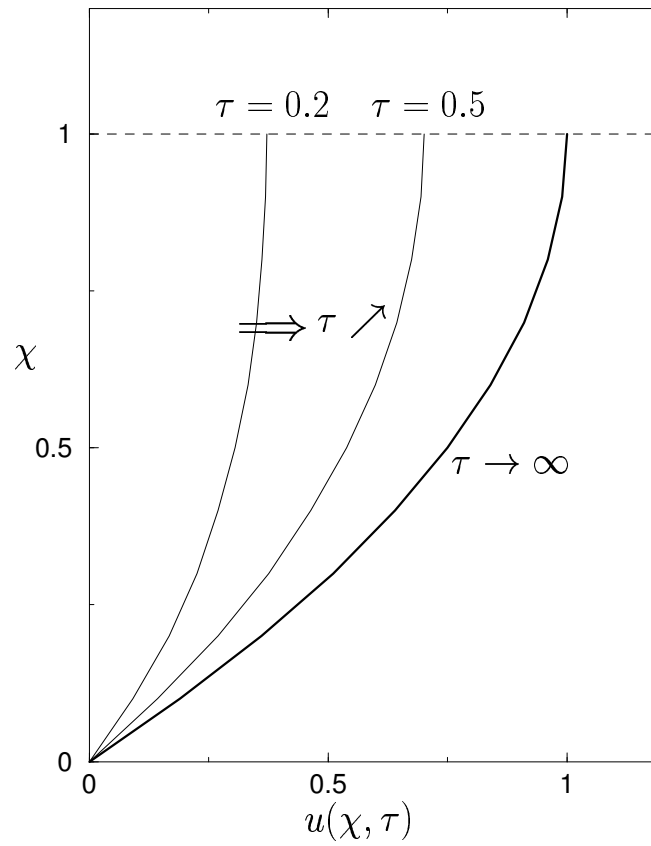


FIG. 2.12: Evolution dans le temps du profil de vitesse adimensionnel u .

$$u(\chi, \tau \rightarrow +\infty) = 2\chi - \chi^2 \quad (2.113)$$

De même, la distance parcourue par une particule du massif située à la côte y , en fonction du temps t s'écrit, puisque $\alpha(y, t = 0)$:

$$\alpha(y, t) = \int_0^t \dot{\alpha}(y, t') dt' = VT \int_0^\tau u(\chi, \tau') d\tau' \quad (2.114)$$

soit :

$$\alpha(y, t) = VTd(\chi, \tau) \quad (2.115)$$

avec

$$d(\chi, \tau) = \int_0^\tau u(\chi, \tau') d\tau' \quad (2.116)$$

Les courbes donnant l'évolution des fonctions $d(\chi = 1, \tau)$ et $u(\chi = 1, \tau) = d'(\chi = 1, \tau)$, c'est-à-dire de la distance parcourue par un point situé en surface et de sa vitesse, sont représentées sur la figure 2.13.

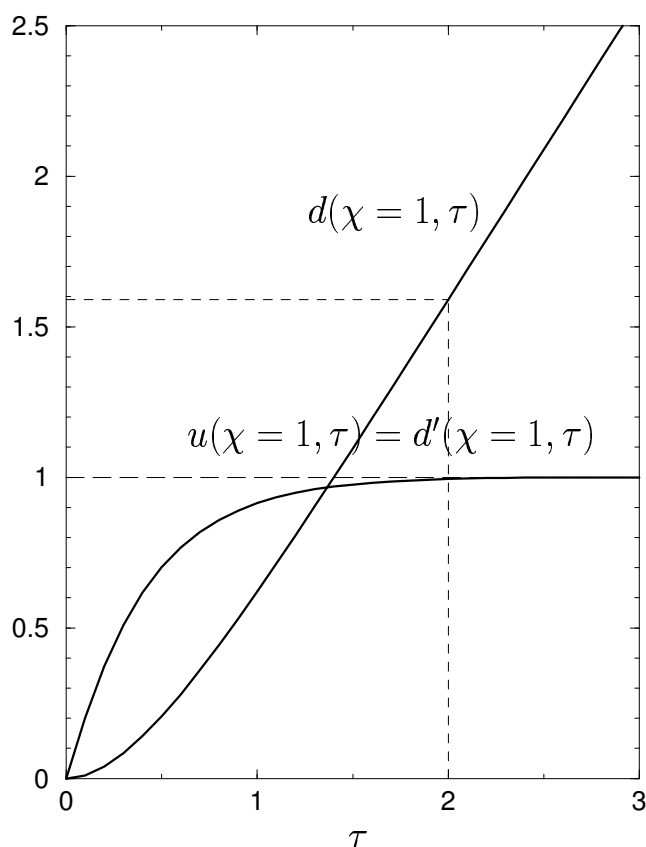


FIG. 2.13: Evolution de la vitesse et du déplacement d'un point situé à la surface du massif.

Ces courbes montrent que le régime asymptotique quasi-statique correspondant à la stabilisation de la vitesse, est atteint pour une valeur de $\tau = \frac{t}{T}$ proche de 2. La distance parcourue en surface est alors :

$$\alpha(H, 2T) \simeq 1,6VT \quad (2.117)$$

Il apparaît ainsi que la condition pour que le changement de géométrie subi par le massif durant le régime transitoire ($0 \leq t \leq 2T$) puisse être considéré comme négligeable s'écrit :

$$\alpha(H, 2T) \ll H \quad (2.118)$$

soit

$$\mathcal{R}_e = \frac{VT}{H} \ll 1 \quad (2.119)$$

La condition (2.119) d'*écoulement à faible nombre de Reynolds* correspond donc à la situation où le changement de géométrie pendant la phase transitoire (mise en accélération) est négligeable, de sorte que, dans ces conditions les calculs peuvent être menés en conditions quasi-statiques à partir de la configuration initiale.

2.4.4 Implémentation numérique

Le principe de la prise en compte des termes d'accélération dans le cadre de la méthode des éléments finis développée dans le cas quasi-statique à la section 2.3, est le suivant :

Le principe du minimum en vitesse est toujours valable, *le champ d'accélération étant considéré comme une donnée du problème*, au même titre que le champ de forces volumiques. La fonctionnelle du champ de vitesse à minimiser s'écrit alors :

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \int_{S_t} \mu(\underline{d}' : \underline{d}') dS_t - \int_{S_t} \rho \underline{g} \cdot \underline{U}' dS_t + \int_{S_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{U}' dS_t \quad (2.120)$$

Dans le cadre d'une discrétisation par éléments finis Q4, la puissance des quantités d'accélération relative à un tel élément S_t^e s'écrit sous forme matricielle :

$$\int_{S_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{U}' dS_t = {}^t\{\dot{U}\}^e [M]^e \{U\}^e \quad (2.121)$$

où ${}^t\{\dot{U}\}^e$ désigne le vecteur formé par les 8 composantes des accélérations aux quatre

nœuds de l'élément S_t^e , et $[M]^e$ désigne la *matrice de masse élémentaire* dont l'expression est :

$$[M]^e = \rho \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

avec

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{4}{9}A_0 - \frac{2}{9}A_1 - \frac{2}{9}A_2 & \frac{2}{9}A_0 - \frac{1}{9}A_2 & \frac{1}{9}A_0 & \frac{2}{9}A_0 - \frac{1}{9}A_1 \\ \frac{2}{9}A_0 - \frac{1}{9}A_2 & \frac{4}{9}A_0 + \frac{2}{9}A_1 - \frac{2}{9}A_2 & \frac{2}{9}A_0 + \frac{1}{9}A_1 & \frac{1}{9}A_0 \\ \frac{1}{9}A_0 & \frac{2}{9}A_0 + \frac{1}{9}A_1 & \frac{4}{9}A_0 + \frac{2}{9}A_1 + \frac{2}{9}A_2 & \frac{2}{9}A_0 + \frac{1}{9}A_2 \\ \frac{2}{9}A_0 - \frac{1}{9}A_1 & \frac{1}{9}A_0 & \frac{2}{9}A_0 + \frac{1}{9}A_2 & \frac{4}{9}A_0 - \frac{2}{9}A_1 + \frac{2}{9}A_2 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Les coefficients A_i étant donnés par les équations (2.40).

Compte tenu de l'expression matricielle (2.65) déjà obtenue pour la fonctionnelle dans le cas quasi-statique, on obtient finalement :

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \frac{1}{2} {}^t\{U\} [D] \{U\} - {}^t\{F\} \{U\} + {}^t\{\dot{U}\} [M] \{U\} \quad (2.124)$$

qu'il s'agit de minimiser sous la condition (2.69). Le système linéaire (2.71) devient alors dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} [D] & -[V] \\ -{}^t[V] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} - [M] \{\dot{U}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

où $[M]$ est la *matrice de masse globale*.

Dans le cadre d'une discrétisation en pas de temps Δt , le vecteur des quantités d'accélération $\{\dot{U}\}$ est alors évalué comme suit :

$$\{\dot{U}\}(t) = \frac{1}{\Delta t} \left(\{U\}(t) - \{U\}(t - \Delta t) \right) \quad (2.126)$$

où $\{U\}(t - \Delta t)$ désigne le vecteur des vitesses calculé à l'instant précédent $t - \Delta t$, et le système (2.125) devient finalement :

$$\begin{bmatrix} [D] + \frac{[M]}{\Delta t} & -[V] \\ -{}^t[V] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} + \frac{1}{\Delta t}[M]\{U\}(t - \Delta t) \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Son inversion permet alors de calculer $\{U\}(t)$ en fonction notamment de $\{U\}(t - \Delta t)$.

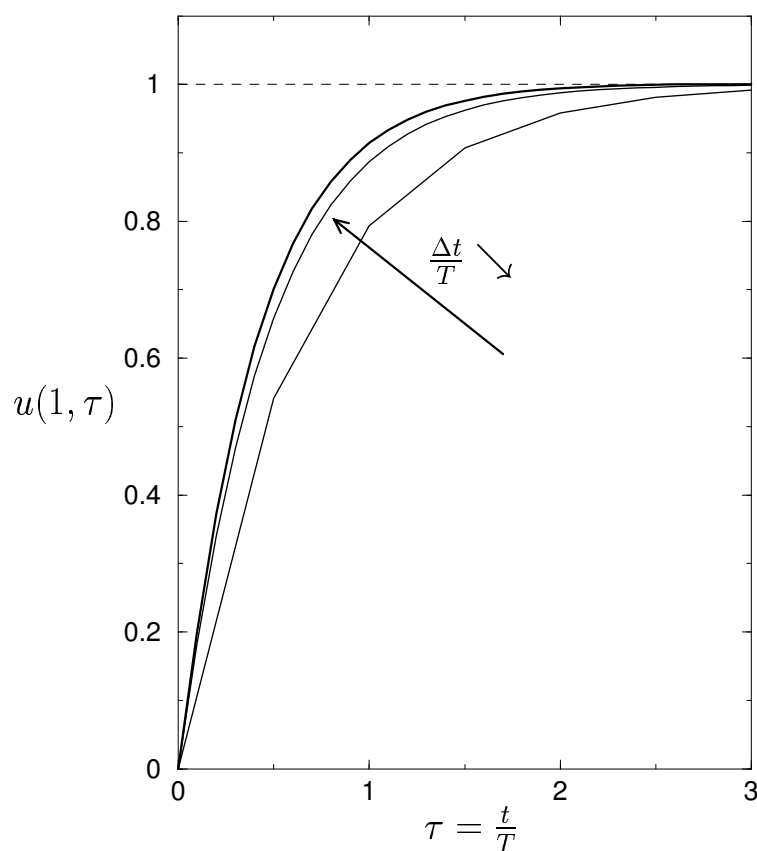


FIG. 2.14: Convergence de la solution numérique vers la solution analytique lorsque le pas de temps décroît.

La procédure numérique ainsi décrite a été appliquée à la simulation de l'écoulement sur un plan incliné. La figure 2.14 montre les résultats d'une telle simulation dans le cas où l'épaisseur H de la couche de sol liquéfié ayant été subdivisée en 100 éléments P1 (variation

affine de la vitesse), le pas de temps Δt varie comme une fraction de plus en plus faible du temps caractéristique $T = \frac{\rho H^2}{\mu}$. On observe que l'accord entre la solution analytique et la simulation numérique devient excellent dès que $\frac{\Delta t}{T} < \frac{1}{20}$.

* *
 *
 *

Chapitre 3

Modélisation viscoplastique

Sommaire

3.1	Introduction	69
3.2	Le modèle (rigide)-viscoplastique : principe de minimum	69
3.2.1	Un modèle (rigide)-viscoplastique généralisé	70
3.2.2	Solution du problème d'évolution et principe du minimum en vitesses	74
3.3	Lien avec l'analyse limite et le calcul à la rupture	77
3.4	Modèle de Bingham. Analyse d'un cas simple de référence	79
3.4.1	Cas du matériau de Bingham	79
3.4.2	Analyse d'un cas simple de référence	83
3.5	Prise en compte d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum	89
3.5.1	Formulation d'une condition de glissement	90
3.5.2	Principe de minimum généralisé	93

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, le comportement du sable liquéfié est modélisé comme un matériau obéissant à une loi de type *(rigide)-viscoplastique*, qui constitue une généralisation du modèle de Bingham classique.

La section 3.2 est consacrée à l'étude générale d'une structure en milieu (rigide)-viscoplastique soumise à plusieurs paramètres de chargement. Tout comme dans le cas du fluide newtonien, la solution du problème d'évolution formulé en vitesse repose sur l'établissement d'un principe de minimum en vitesse.

Le lien entre ce dernier et la théorie de l'*analyse limite* (ou du *calcul à la rupture*) est examiné dans la section 3.3 : la structure demeure immobile tant que le chargement est à l'intérieur d'un domaine convexe dans l'espace des paramètres de chargement, qui n'est autre que le *domaine des chargements potentiellement supportables* défini au sens du calcul à la rupture. L'écoulement de la structure ne se produit que lorsque le chargement est situé à l'extérieur de ce domaine.

Le *modèle de Bingham*, qui est un cas particulier du modèle (rigide)-viscoplastique, reflète bien le comportement du sol liquéfié. Ce modèle est présenté dans la section 3.4, ainsi qu'une illustration analytique de la propriété décrite dans la section 3.3, sur l'exemple de l'écoulement d'une couche de sol sur un plan incliné modélisé comme un matériau de Bingham et soumise à l'action combinée de deux paramètres de chargement indépendants : le poids propre et un chargement de cisaillement en surface.

L'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol liquéfié et le substratum est remplacée par une condition de bord, beaucoup plus réaliste, qui autorise le glissement à partir d'un seuil de cisaillement. La formulation de cette condition ainsi que l'établissement d'un principe de minimum généralisé sont présentés dans la section 3.5.

3.2 Le modèle (rigide)-viscoplastique : principe de minimum

Nous proposons dans cette section un modèle de comportement viscoplastique qui constitue une tentative de généralisation du modèle classique de Bingham.

3.2.1 Un modèle (rigide)-viscoplastique généralisé

Le comportement du sol liquéfié est caractérisé par la donnée, en chaque point \underline{x} du domaine géométrique occupé dans sa configuration actuelle Ω_t à l'instant t , d'une *fonction seuil*, notée f , définissant un domaine fixe convexe $G(\underline{x})$ dans l'espace des contraintes (Figure 3.1).

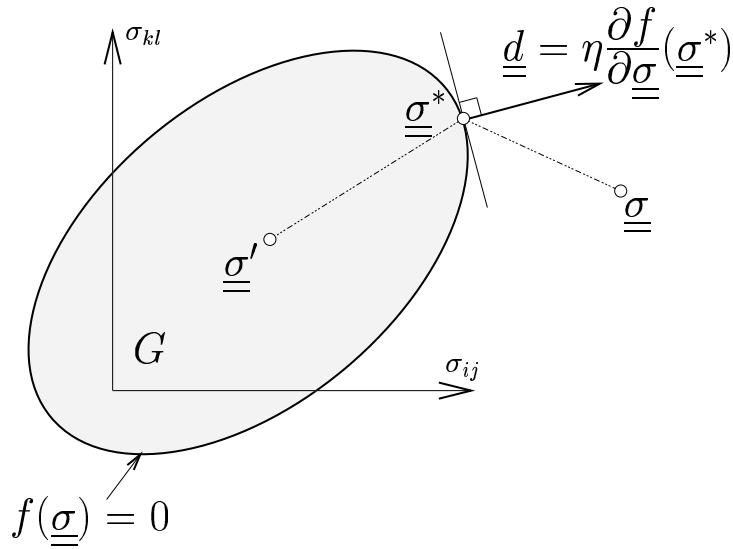


FIG. 3.1: Convexe G et fonction seuil associée pour un matériau (rigide)-viscoplastique.

On a :

$$\underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \iff f(\underline{\sigma}; \underline{x}) \leq 0 \quad (3.1)$$

La loi de comportement viscoplastique, exprimée d'une façon générale, est alors définie comme suit :

- Le taux de déformation est nul si l'état de contrainte est à l'intérieur du domaine G :

$$\underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \iff f(\underline{\sigma}) \leq 0 \implies \underline{d} = 0 \quad (3.2)$$

- Lorsque cet état de contrainte est situé à l'extérieur du domaine G , le matériau subit un taux de déformation tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} \notin G \implies \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^* + \lambda(\text{tr} \underline{\underline{d}})\mathbb{I} + 2\mu \underline{\underline{d}} \quad (3.3)$$

où λ et μ sont des *coefficients de viscosité*, tandis que l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^*$ ("contrainte seuil") est situé sur la frontière de G , le taux de déformation y étant normale extérieure à G (figure 3.1)

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^*) = 0, \quad \underline{\underline{d}} = \eta \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*), \quad \eta \geq 0 \quad (3.4)$$

Les relations (3.3) et (3.4) permettent de montrer que $\underline{\underline{\sigma}}^*$ est la *projection de $\underline{\underline{\sigma}}$ sur le convexe G* au sens de la norme associée au produit scalaire suivant :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_1, \underline{\underline{\sigma}}_2 \rangle = \underline{\underline{\sigma}}_1 : \underline{\underline{\sigma}}_2 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}_1) (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}_2) \quad (3.5)$$

C'est-à-dire que $\underline{\underline{\sigma}}^*$ rend minimale la distance (ou le carré de la distance) de $\underline{\underline{\sigma}}$ à un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}'$ quelconque de G :

$$D(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\sigma}}^*) = \langle \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*, \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle = \min_{\underline{\underline{\sigma}}'} \left\{ D(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\sigma}}') = \langle \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}', \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}' \rangle ; f(\underline{\underline{\sigma}}') \leq 0 \right\} \quad (3.6)$$

Le théorème de Kuhn et Tucker montre que $\underline{\underline{\sigma}}^*$ réalise un tel minimum sous contrainte, si et seulement si il *existe un multiplicateur scalaire $\chi \geq 0$* , tel que :

$$\frac{\partial D}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\sigma}}^*) + \chi \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = 0 \quad (3.7)$$

soit compte-tenu de (3.5) :

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) \mathbb{I} - \frac{\chi}{2} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = 0 \quad (3.8)$$

Les équations (3.3) et (3.4) permettent de montrer que cette dernière relation est bien vérifiée, puisque :

$$\begin{aligned}
(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) \mathbb{I} - \frac{\chi}{2} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}^*) &= 2\mu \underline{\underline{d}} - \frac{\chi}{2} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \\
&= (2\mu\eta - \frac{\chi}{2}) \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

qui s'annule si l'on prend $\chi = 4\mu\eta \geq 0$.

La loi de comportement viscoplastique donnée par les équations (3.2), (3.3) et (3.4) permet de retrouver les cas particuliers suivants :

a) *Fluide visqueux compressible*. Ce modèle est obtenu lorsque le convexe G est réduit à l'état de contrainte nul :

$$G = \{\underline{\underline{\sigma}} = 0\} \quad (3.10)$$

de sorte que $\underline{\underline{\sigma}}^* = 0$ et donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr}\underline{\underline{d}})\mathbb{I} + 2\mu\underline{\underline{d}} \quad (3.11)$$

Décomposant la contrainte et le taux de déformation en parties sphérique et déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + \left(\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{\sigma}}\right)\mathbb{I} \quad (3.12)$$

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\delta}} + \left(\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{d}}\right)\mathbb{I} \quad (3.13)$$

(3.11) peut être réécrite

$$\underline{\underline{s}} = 2\mu\underline{\underline{\delta}} \quad \text{et} \quad \text{tr}\underline{\underline{\sigma}} = 3\kappa(\text{tr}\underline{\underline{d}}) \quad (3.14)$$

où μ et $\kappa = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ représentent respectivement les coefficients de viscosité déviatorique et volumique.

b) *Fluide visqueux incompressible*. Ce modèle peut être obtenu de deux manières : soit à partir du modèle de fluide visqueux compressible en faisant tendre le coefficient de viscosité volumique vers l'infini, d'où

$$\underline{s} = 2\mu\underline{\delta} \quad \text{et} \quad \text{tr}\underline{d} = \text{div}\underline{U} = \frac{\text{tr}\underline{\sigma}}{3\kappa} \longrightarrow 0 \quad (3.15)$$

soit à partir du modèle viscoplastique où G est réduit à l'ensemble des états de contrainte isotropes :

$$G = \left\{ \alpha\underline{\mathbb{I}}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underline{\sigma}; f(\underline{\sigma}) = (\underline{s} : \underline{s})^{\frac{1}{2}} \leq 0 \right\} \quad (3.16)$$

Les équations (3.4) se traduisent en effet dans ce cas par :

$$\underline{\sigma}^* = \alpha^*\underline{\mathbb{I}} \quad \text{et} \quad \text{tr}\underline{d} = 0 \implies \underline{d} = \underline{\delta} \quad (3.17)$$

d'où en reportant dans (3.3) :

$$\underline{\sigma} = \alpha^*\underline{\mathbb{I}} + 2\mu\underline{\delta} \quad (3.18)$$

c) *Le modèle "rigide-plastique".* Ce modèle est obtenu lorsque, le domaine G étant fixé, on fait tendre vers zéro les coefficients de viscosité λ et μ . Dans ces conditions, la loi de comportement (3.3) qui peut encore s'écrire :

$$\underline{\delta} = \frac{\underline{s} - \underline{s}^*}{2\mu}, \quad \text{tr}\underline{d} = \frac{1}{3\kappa} \text{tr}(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \quad (3.19)$$

montre que $\underline{\sigma} \longrightarrow \underline{\sigma}^*$, c'est-à-dire que $\underline{\sigma}$ ne peut sortir du domaine G , le taux de déformation restant de la forme :

$$\underline{d} = \eta \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}^* = \underline{\sigma}) \quad (3.20)$$

avec $\eta \geq 0$ indéterminé. Ce modèle rigide-plastique peut également être obtenu à partir du schéma élastique parfaitement plastique avec règle d'écoulement associé, lorsque l'on fait tendre les modules d'élasticité vers l'infini (figure 3.2), les déformations plastiques devenant identiques aux déformations totales.

La règle de normalité (3.4) implique que :

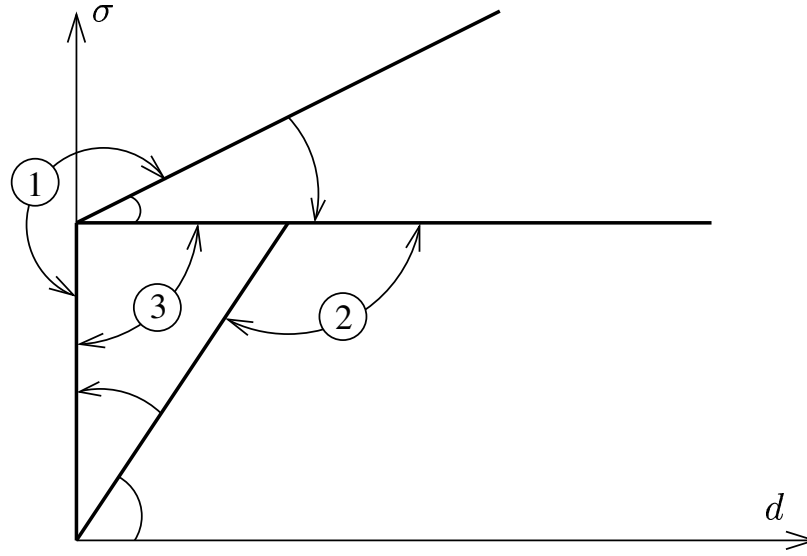


FIG. 3.2: Représentation unidimensionnelle pour les modèles : (1) rigide-viscoplastique, (2) élastique parfaitement plastique et (3) rigide-plastique.

$$\forall \underline{\underline{\sigma'}} \in G \quad \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}} \geq \underline{\underline{\sigma'}} : \underline{\underline{d}} \quad (3.21)$$

soit

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \sup \left\{ \underline{\underline{\sigma'}} : \underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\sigma'}} \in G \right\} = \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}} \quad (3.22)$$

3.2.2 Solution du problème d'évolution et principe du minimum en vitesses

On considère une structure en milieu (rigide)-viscoplastique. On appelle *solution du problème d'évolution*, le couple formé par un champ de vitesse \underline{U} cinématiquement admissible et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible qui soient associés en tout point par la loi de comportement.

Se plaçant dans le cas d'un *mode de chargement* à n paramètres $\underline{Q} = (Q_i; i = 1, \dots, n)$

de la structure (voir chapitre 2, paragraphe 2.2.3), nous allons montrer que, à paramètres de chargement \underline{Q} fixés, le champ de vitesse solution \underline{U} rend minimale la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}(\underline{U}) = \min_{\underline{U}'_{C.A}} \left\{ \mathcal{F}(\underline{U}') \right\} \quad (3.23)$$

avec

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\lambda}{2} (\text{tr} \underline{d}(\underline{U}'))^2 + \mu \underline{d}(\underline{U}') : \underline{d}(\underline{U}') \right] d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \pi(\underline{d}(\underline{U}')) d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') \quad (3.24)$$

où $\underline{\dot{q}}(\underline{U}')$ désigne la vitesse généralisée de la structure associée au champs \underline{U}' , de sorte que $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}')$ représente la puissance des efforts extérieurs dans ce champs de vitesse.

Posant $\underline{U}' = \underline{U} + \delta \underline{U}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\underline{U} + \delta \underline{U}) - \mathcal{F}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} \frac{\lambda}{2} \left\{ [\text{tr} \underline{d}(\underline{U} + \delta \underline{U})]^2 - [\text{tr} \underline{d}(\underline{U})]^2 \right\} d\Omega_t \\ &\quad + \int_{\Omega_t} \mu \left\{ [\underline{d}(\underline{U} + \delta \underline{U}) : \underline{d}(\underline{U} + \delta \underline{U})] - [\underline{d}(\underline{U}) : \underline{d}(\underline{U})] \right\} d\Omega_t \\ &\quad + \int_{\Omega_t} \left\{ \pi(\underline{d}(\underline{U} + \delta \underline{U})) - \pi(\underline{d}(\underline{U})) \right\} d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \left\{ \underline{\dot{q}}(\underline{U} + \delta \underline{U}) - \underline{\dot{q}}(\underline{U}) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Soit, avec $\delta \underline{d} = \underline{d}(\delta \underline{U})$ et $\delta \underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}(\delta \underline{U})$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \int_{\Omega_t} \frac{\lambda}{2} \left\{ [\text{tr}(\underline{d} + \delta \underline{d})]^2 - [\text{tr} \underline{d}]^2 \right\} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \mu \left\{ (\underline{d} + \delta \underline{d}) : (\underline{d} + \delta \underline{d}) - \underline{d} : \underline{d} \right\} d\Omega_t \\ &\quad + \int_{\Omega_t} \left\{ \pi(\underline{d} + \delta \underline{d}) - \pi(\underline{d}) \right\} d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \delta \underline{\dot{q}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tenant compte du fait que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{2} \left\{ [\text{tr}(\underline{d} + \delta\underline{d})]^2 - [\text{tr}\underline{d}]^2 \right\} + \mu \left\{ (\underline{d} + \delta\underline{d}) : (\underline{d} + \delta\underline{d}) - \underline{d} : \underline{d} \right\} \\
& = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}\delta\underline{d})^2 + \mu\delta\underline{d} : \delta\underline{d} + \left[\lambda(\text{tr}\underline{d})\mathbb{I} + 2\mu\underline{d} \right] : \delta\underline{d}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

avec puisque \underline{d} est le champ solution :

$$\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^* = \lambda(\text{tr}\underline{d})\mathbb{I} + 2\mu\underline{d} \tag{3.28}$$

ainsi qu'en vertu de (3.22) :

$$\pi(\underline{d}) = \underline{\sigma}^* : \underline{d} \tag{3.29}$$

il vient finalement :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F} & = \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\delta\underline{d})]^2 + \mu(\delta\underline{d} : \delta\underline{d}) \right\} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \left\{ \pi(\underline{d} + \delta\underline{d}) - \underline{\sigma}^* : (\underline{d} + \delta\underline{d}) \right\} d\Omega_t \\
& + \int_{\Omega_t} (\underline{\sigma} : \delta\underline{d}) d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \delta\dot{\underline{q}}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

La première intégrale est positive et ne s'annule que pour $\delta\underline{U} = 0$, tandis que la seconde est positive ou nulle en vertu de (3.22) appliquée à $\underline{d} + \delta\underline{d}$, avec $\underline{\sigma}^* \in G$. On obtient alors :

$$\delta\mathcal{F} \geq \int_{\Omega_t} (\underline{\sigma} : \delta\underline{d}) d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \delta\dot{\underline{q}} \tag{3.31}$$

Le principe des puissances virtuelles qui s'écrit :

$$\forall \underline{\sigma} \text{ S.A.}, \forall \underline{U} \text{ C.A.} \quad \int_{\Omega_t} (\underline{\sigma} : \underline{d}) d\Omega_t = \underline{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{U}) \tag{3.32}$$

nous permet de montrer que le second membre de (3.31) est nul et de vérifier ainsi le principe de minimum annoncé.

3.3 Lien avec l'analyse limite et le calcul à la rupture

On introduit dans l'espace \mathbb{R}^n des paramètres de chargement, le domaine K défini comme l'ensemble des chargements pour lesquels il est possible de mettre en évidence un champ de contrainte équilibrant ce chargement et respectant le critère de résistance en tout point :

$$K = \left\{ \underline{Q} \in \mathbb{R}^n ; \exists \underline{\sigma}' \text{ S.A avec } \underline{Q}, \underline{\sigma}'(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Omega_t \right\} \quad (3.33)$$

K est convexe puisque $G(\underline{x})$ l'est aussi en tout point. Ce domaine n'est autre que le *domaine des chargements supportés* (resp. *potentiellement supportables*) de la *théorie de l'analyse limite* (resp. *calcul à la rupture*) lorsque $G(\underline{x})$ représente le *convexe de plasticité* (resp. *de résistance*) au point \underline{x} , c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre vers 0 les coefficients de viscosité λ et μ dans la loi de comportement (rigide)-viscoplastique (3.3).

Nous nous proposons maintenant d'examiner le lien entre ce domaine K et le principe de minimum démontré dans la section précédente. On remarque que deux cas se présentent dans la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{F}(\underline{U}')$, selon que le chargement \underline{Q} appartienne ou non à K .

• **1^{er} cas** : $\underline{Q} \in K$

Il vient alors immédiatement compte tenu de la définition (3.33) de K , ainsi que de (3.21) et (3.22) :

$$\begin{aligned} \underline{Q} \in K \implies \forall \underline{U}' \text{ C.A.}, \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') &= \int_{\Omega_t} \underline{\sigma}' : \underline{d}' d\Omega_t \leq \\ \int_{\Omega_t} \underline{\sigma}^* : \underline{d}' d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \pi(\underline{d}') d\Omega_t = \mathcal{P}_{rm}(\underline{U}') \end{aligned} \quad (3.34)$$

qui n'est autre que *l'approche cinématique par l'extérieur* de l'analyse limite (calcul à la rupture). \mathcal{P}_{rm} désigne la *puissance résistante maximale* du calcul à la rupture.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}' \text{ C.A.}, \quad \mathcal{F}(\underline{U}') &= \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\lambda}{2} [tr(\underline{d}')]^2 + \mu(\underline{d}' : \underline{d}') \right\} d\Omega_t + \\ \mathcal{P}_{rm}(\underline{U}') - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') &\geq \mathcal{P}_{rm}(\underline{U}') - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') \geq 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

La solution en vitesse qui rend minimale, c'est-à-dire ici nulle, cette fonctionnelle, n'est autre que le *champ de vitesse identiquement nul* (à un *mouvement rigidifiant près*).

$$\underline{U} = 0 \quad (3.36)$$

Dans ce cas, la structure demeure donc *immobile*.

• **2^{ème} cas** : $\underline{Q} \notin K$

En vertu de l'approche cinématique du calcul à la rupture rappelée par (3.34), il existe donc au moins un champ de vitesse, que nous noterons $\tilde{\underline{U}}$, tel que la puissance du chargement dans ce champ de vitesse soit strictement supérieure à la puissance résistante maximale, soit :

$$\mathcal{G}(\tilde{\underline{U}}) = \mathcal{P}_{rm}(\tilde{\underline{U}}) - \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\tilde{\underline{U}}) < 0 \quad (3.37)$$

Considérant alors tous les champs de vitesse de la forme $\underline{U}' = \alpha \tilde{\underline{U}}$, avec $\alpha > 0$, et exploitant le fait que \mathcal{G} est positivement homogène de degré 1, il vient alors immédiatement :

$$\mathcal{F}(\alpha \tilde{\underline{U}}) = \alpha^2 \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\tilde{\underline{d}})]^2 + \mu(\tilde{\underline{d}} : \tilde{\underline{d}}) \right\} d\Omega_t + \alpha \mathcal{G}(\tilde{\underline{U}}) \quad (3.38)$$

en sorte que le champ de vitesse solution \underline{U} qui rend minimale la fonctionnelle \mathcal{F} est tel que :

$$\mathcal{F}(\underline{U}) = \min_{\underline{U}'} \mathcal{F}(\underline{U}') \leq \min_{\alpha > 0} \mathcal{F}(\alpha \tilde{\underline{U}}) = - \frac{\mathcal{G}^2(\tilde{\underline{U}})}{4 \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\tilde{\underline{d}})]^2 + \mu(\tilde{\underline{d}} : \tilde{\underline{d}}) \right\} d\Omega_t} < 0 \quad (3.39)$$

Ceci signifie que le champ de vitesse solution \underline{U} est différent du champ nul (ou rigidifiant), et donc, que la structure *s'écoule* sous l'action du chargement \underline{Q} .

La figure 3.3 récapitule les deux situations :

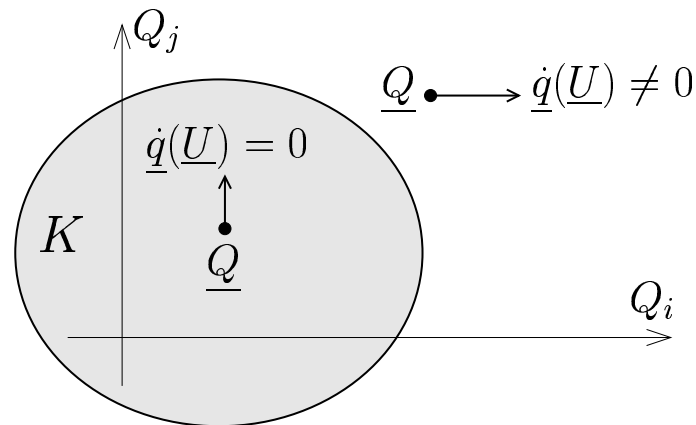


FIG. 3.3: Interprétation du domaine K comme ensemble des chargements de la structure ne déclenchant pas d'écoulement.

$$\begin{cases} \underline{Q} \in K \implies \underline{U} = 0 \Leftrightarrow \underline{\dot{q}}(\underline{U}) = 0 \\ \underline{Q} \notin K \implies \underline{U} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\dot{q}}(\underline{U}) \neq 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

3.4 Modèle de Bingham. Analyse d'un cas simple de référence

3.4.1 Cas du matériau de Bingham

Le *modèle de Bingham* correspond au cas particulier où la fonction seuil introduite dans (3.1) correspond au *critère de Von Mises* :

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{\|\underline{s}\|}{\sqrt{2}} - k \leq 0 \quad \text{avec} \quad \|\underline{s}\| = (\underline{s} : \underline{s})^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

où

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}_m = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.42)$$

est le *déviateur de contrainte*, et k le *seuil en cisaillement pur*.

Le domaine G correspondant à une telle fonction seuil est représenté sur la figure (3.4) dans l'espace des contraintes : il s'agit d'un cylindre circulaire de rayon $k\sqrt{2}$ et d'axe parallèle à l'axe Δ des contraintes isotropes.

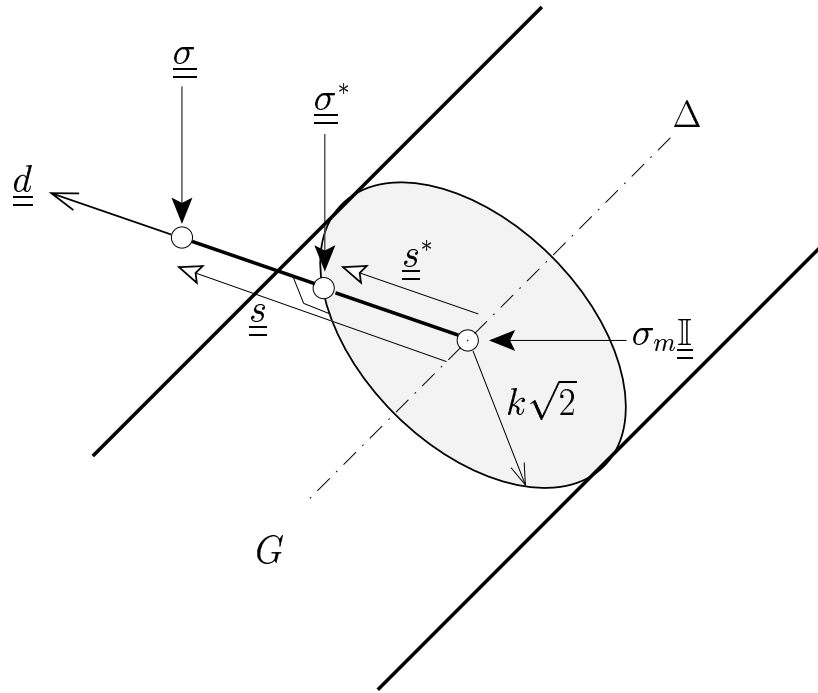


FIG. 3.4: Convexe G dans le cas d'un matériau de Bingham et règle d'écoulement viscoplastique associée.

La différenciation de la fonction seuil donne :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{s}}}{\sqrt{2}\|\underline{\underline{s}}\|} = \frac{\underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{\sigma}}}{\sqrt{2}\|\underline{\underline{s}}\|} \quad \forall d\underline{\underline{\sigma}} \quad (3.43)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{\sqrt{2}\|\underline{\underline{s}}\|} \quad (3.44)$$

et par conséquent la règle d'écoulement (3.4) devient

$$\underline{\underline{d}} = \eta \frac{\underline{\underline{s}}^*}{2k} \quad \text{avec} \quad \|\underline{\underline{s}}^*\| = k\sqrt{2} \quad (3.45)$$

Cette relation implique que les déformations du matériau se produisent à *volume constant*, c'est-à-dire vérifient la *condition d'incompressibilité* :

$$\text{tr} \underline{\underline{d}} = \text{div} \underline{\underline{U}} = 0 \quad (3.46)$$

et la loi de comportement (3.3) s'écrit alors :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2\mu} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) = \frac{1}{2\mu} (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{s}}^*) = \frac{\underline{\underline{s}}}{2\mu} \left\langle 1 - \frac{k\sqrt{2}}{\|\underline{\underline{s}}\|} \right\rangle \quad (3.47)$$

où $\langle * \rangle = \sup\{*, 0\}$.

Cette relation peut être inversée en :

$$\underline{\underline{s}} = 2\mu \underline{\underline{d}} + k\sqrt{2} \frac{\underline{\underline{d}}}{\|\underline{\underline{d}}\|} \quad (3.48)$$

et par suite

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{s}}^* : \underline{\underline{d}} = k\sqrt{2}\|\underline{\underline{d}}\| \geq \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{d}} \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}' ; f(\underline{\underline{\sigma}}') \leq 0 \quad (3.49)$$

La figure (3.4) donne une interprétation géométrique des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\underline{\underline{d}}$ dans l'espace des contraintes.

L'expression (3.47) montre que deux cas se présentent selon la position de l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport au convexe G :

$$a) f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \iff \underline{\underline{\sigma}} \in G$$

Dans ce cas $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^*$ et donc $\underline{\underline{d}} = 0$, c'est-à-dire que le matériau ne se déforme pas.

$$b) f(\underline{\underline{\sigma}}) > 0 \iff \underline{\underline{\sigma}} \notin G$$

Le taux de déformation, non nul, est proportionnel à la distance entre l'état de contrainte et le convexe G . $\underline{\underline{d}}$ est donc normale extérieure à ce convexe au point $\underline{\underline{\sigma}}^*$.

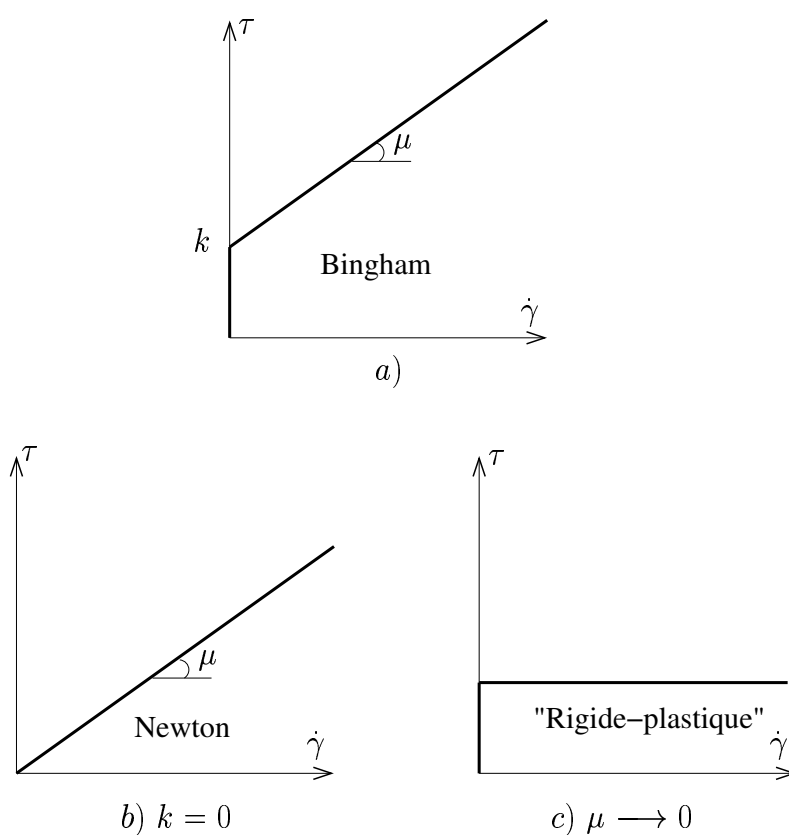


FIG. 3.5: Les modèles Newtonien et rigide-plastique comme cas particuliers du modèle de Bingham.

Dans le cas d'une *sollicitation de cisaillement pur*, pour laquelle le taux de déformation est de la forme :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (3.50)$$

la loi de comportement (3.49) devient :

$$\underline{\underline{s}} = \overbrace{(\mu\dot{\gamma} + k)}^{\tau} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (3.51)$$

La relation entre la contrainte de cisaillement τ et le taux de glissement $\dot{\gamma}$ est représentée sur la figure 3.5.a. Les cas particuliers des modèles Newtonien et rigide-plastique sont respectivement représentés sur les figures 3.5.b et 3.5.c .

3.4.2 Analyse d'un cas simple de référence

On se propose d'étudier l'écoulement d'une couche de sol liquéfié de hauteur H obéissant à une loi de comportement de type Bingham, et reposant sur un substratum rigide incliné qui fait un angle θ avec l'horizontal déjà analysé dans le cas d'un fluide newtonien au chapitre 2, paragraphe 2.2.4. Cette couche est soumise à l'action de son poids propre ρg , tandis qu'une contrainte de cisaillement uniforme τ est appliquée tout au long de sa surface supérieure (figure 3.6).

On note :

$$Q_1 = \tau \geq 0 \quad Q_2 = \rho g H \sin \theta \geq 0 \quad (3.52)$$

les *deux paramètres de chargement* auxquels est soumis la couche du sol.

Nous allons tout d'abord déterminer le domaine K des chargements ($Q_1 = \tau \geq 0, Q_2 = \rho g \sin \theta \geq 0$) potentiellement supportables. On considère pour ce faire le champ de contrainte de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\rho g(H - y) \cos \theta \underline{\underline{1}} + [\tau + \rho g(H - y) \sin \theta] (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (3.53)$$

dont on vérifie immédiatement qu'il est bien statiquement admissible avec les paramètres

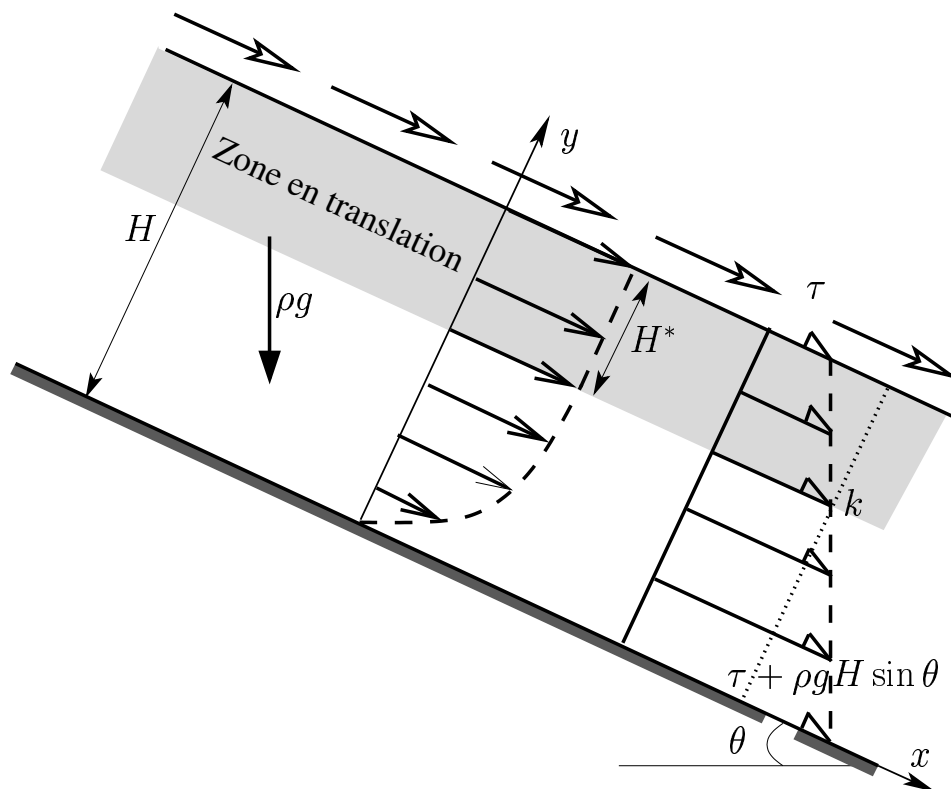


FIG. 3.6: Massif de sol incliné soumis à l'action combinée de son poids propre et d'une contrainte de cisaillement appliquée à sa surface supérieure.

de chargement ($Q_1 = \tau, Q_2 = \rho g \sin \theta$). Le critère de résistance de von Mises (3.41) se traduit simplement ici par :

$$0 \leq \tau + \rho g(H - y) \sin \theta \leq k \quad y \in [0, H] \quad (3.54)$$

Cette condition étant bien évidemment satisfaite si et seulement si :

$$\tau + \rho g H \sin \theta = Q_1 + Q_2 \leq k \quad (3.55)$$

Par conséquent le domaine

$$K^s = \left\{ (Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0) ; Q_1 + Q_2 \leq k \right\} \quad (3.56)$$

constitue une *approche statique par l'intérieur* du domaine K :

$$K^s \subseteq K \quad (3.57)$$

Une *approche cinématique par l'extérieur* est obtenue à l'aide d'un champ de vitesse (virtuel) tel que :

$$\underline{U}'(y) = \begin{cases} U \underline{e}_x & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

C'est-à-dire que le massif est animé d'un mouvement de translation uniforme faisant ainsi intervenir une *discontinuité de vitesse tangentielle* à l'interface massif/substratum :

$$[\underline{U}'](y = 0) = U \underline{e}_x \quad (3.59)$$

Le calcul de la *puissance des efforts extérieurs* relative à un tel mécanisme de bloc en translation donne :

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = \tau U + \rho g \sin \theta H U \quad (3.60)$$

tandis que l'expression de la *puissance résistante maximale* est :

$$\mathcal{P}_{rm}(\underline{U}') = k|U| \quad (3.61)$$

d'où compte tenu de (3.34), en posant $U > 0$:

$$(Q_1, Q_2) \in K \quad \implies \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq \mathcal{P}_{rm}(\underline{U}') \Leftrightarrow Q_1 + Q_2 \leq k \quad (3.62)$$

soit

$$K \subseteq K^c = \left\{ (Q_1, Q_2) ; Q_1 + Q_2 \leq k \right\} \quad (3.63)$$

et donc par comparaison avec (3.56)

$$K = \left\{ (Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0) ; Q_1 + Q_2 \leq k \right\} \quad (3.64)$$

Ce domaine est représenté sur la figure 3.7 par le triangle isocèle rectangle hachuré.

La couche de sol liquéfié, modélisé comme un milieu de Bingham, comporte une première zone déformée, qui travaille en cisaillement, surmontée d'une zone non déformée, en translation.

L'épaisseur H^* de cette dernière est donnée par la relation :

$$H^* = H \left(\frac{k - Q_1}{Q_2} \right) \quad (3.65)$$

Elle correspond à la profondeur à laquelle la contrainte de cisaillement atteint le seuil k :

$$\tau + \rho g H^* \sin \theta = Q_1 + Q_2 \frac{H^*}{H} = k \quad (3.66)$$

Il est alors facile de vérifier que la *solution en vitesse* est donné par l'expression suivante :

$$\underline{U} = f(y) \underline{e}_x \quad \text{avec} \quad f(y) = \frac{Q_2}{\mu H} \begin{cases} y(H - H^* - \frac{y}{2}) & \text{si } 0 \leq y \leq H - H^* \\ \frac{(H - H^*)^2}{2} & \text{si } H - H^* \leq y \leq H \end{cases} \quad (3.67)$$

c'est-à-dire un profil *parabolique* dans la zone en cisaillement, surmonté d'un profil *uniforme* dans la zone rigide en translation (figure 3.6).

En effet, le champ de contrainte étant donné par (3.53), le champ des taux de déformation \underline{d} , calculé à travers la loi de comportement viscoplastique (3.47) s'écrit :

$$\underline{d} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (3.68)$$

avec

$$\dot{\gamma} = f'(y) = \frac{Q_2}{\mu H} \langle H - H^* - y \rangle \quad (3.69)$$

d'où les expressions (3.67), par intégration en tenant compte de la condition d'adhérence entre le sol et le substratum :

$$f(y = 0) = 0 \quad (3.70)$$

Il apparaît clairement que lorsque $(Q_1, Q_2) \in K$, $H^* \geq H$, ce qui veut dire que la couche du sol liquéfié demeure immobile, tandis que si $(Q_1, Q_2) \notin K$ alors $H^* < H$: l'écoulement peut avoir lieu. Dans ce cas il est possible de calculer les paramètres cinématiques \dot{q}_1 et \dot{q}_2 définis par :

$$\dot{q}_1 = f(H), \quad \dot{q}_2 = \frac{1}{H} \int_0^H f(y) dy \quad (3.71)$$

qui sont donc la vitesse en surface ($y = H$), et la valeur moyenne de la vitesse sur toute l'épaisseur de la couche de sol.

On introduit alors le coefficient adimensionnel suivant, fonction des paramètres de chargement :

$$m(Q_1, Q_2) = \left(\frac{Q_1 + Q_2 - k}{Q_2} \right) = 1 - \frac{H^*}{H} \quad (3.72)$$

qui va nous permettre de donner explicitement les expressions des différents paramètres cinématiques en fonction des paramètres de chargement.

- $m \leq 0 \iff (Q_1, Q_2) \in K$. Dans ce cas le massif reste immobile.

$$f(y) = 0 \implies \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0 \quad (3.73)$$

- $0 \leq m \leq 1 \iff 0 \leq H^* \leq H$. Le calcul de la valeur des paramètres cinématiques donne en tenant compte de (3.67)

$$\dot{q}_1 = f(H) = \frac{Q_2}{\mu H} \frac{(H - H^*)^2}{2} = \frac{Q_2 H}{2\mu} m^2 \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \frac{1}{H} \int_0^{H-H^*} \frac{Q_2}{\mu H} y (H - H^* - \frac{y}{2}) dy + \frac{1}{H} \int_{H-H^*}^H \frac{Q_2}{\mu H} \frac{(H - H^*)^2}{2} dy \\ &= \left(1 - \frac{m}{3}\right) \frac{Q_2 H}{2\mu} m^2 \end{aligned} \quad (3.75)$$

- $m \geq 1 \iff H^* \leq 0$. On obtient dans ce cas :

$$\dot{q}_1 = f(H) = \frac{Q_2}{\mu H} H \left(\frac{H}{2} - H^*\right) = (2m - 1) \frac{Q_2 H}{2\mu} \quad (3.76)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{Q_2}{\mu H} y (H - H^* - \frac{y}{2}) dy = \left(m - \frac{1}{3}\right) \frac{Q_2 H}{2\mu} \quad (3.77)$$

Les différents régimes d'écoulement viscoplastique sont représentés sur la figure (3.7). On peut remarquer que pour tout chargement (Q_1, Q_2) situé sur la droite reliant les deux points $(k, 0)$ et $(0, \frac{k}{1-m})$, l'orientation du vecteur vitesse généralisée $\underline{\dot{q}}(\underline{U})$ associé à ce chargement demeure constante, tandis que sa norme est proportionnelle à la distance entre le point représentant le chargement et le point $(k, 0)$.

On peut également observer que lorsque $m \rightarrow 0^+$, c'est-à-dire lorsque le point représentant le chargement appliqué s'approche par l'extérieur de la frontière du domaine K , le vecteur vitesse généralisée $\underline{\dot{q}}(\underline{U})$ tend à être normal à cette frontière, tandis que sa norme tend à s'annuler.

Contrairement à la règle d'écoulement *locale*, la normalité n'est plus assurée à l'échelle *globale* de la structure pour tout chargement situé à l'extérieur du domaine K .

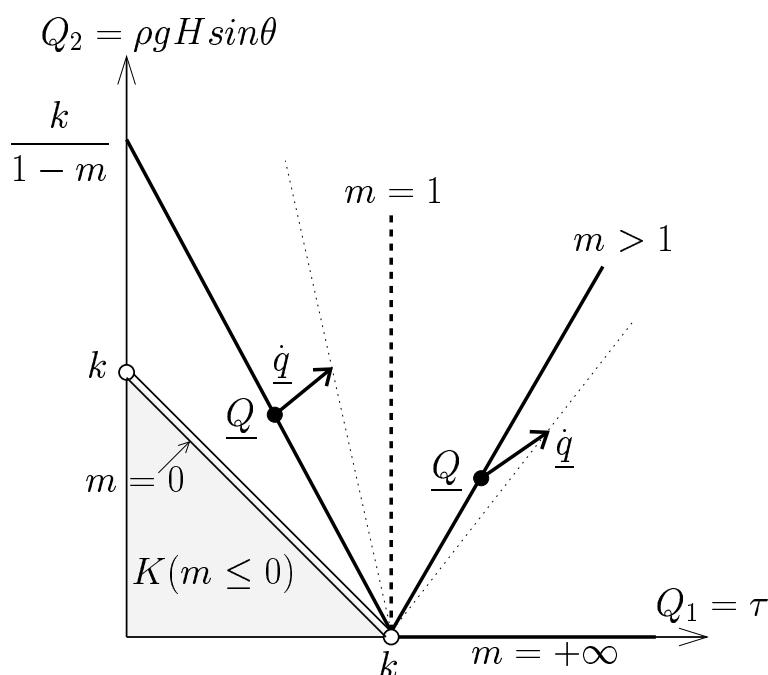


FIG. 3.7: Les différents régimes viscoplastiques représentés dans l'espace des paramètres de chargement et les vitesses généralisées associées.

3.5 Prise en compte d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum

Nous avons fait jusqu'à présent l'hypothèse que le contact entre le sol liquéfié et le substratum rigide était *parfaitement adhérent*, c'est-à-dire que la discontinuité de vitesse entre le sol et le substratum était nulle :

$$\forall \underline{x} \in \Sigma \quad \underline{\mathcal{V}}(\underline{x}) = \underline{U}^{\text{sol}}(\underline{x}) - \overbrace{\underline{U}^{\text{subs}}(\underline{x})}^{=0} = 0 \quad (3.78)$$

où Σ désigne l'interface de contact entre le massif de sol et le substratum supposé indéformable. Les simulations numériques effectuées dans le cadre d'une telle hypothèse sur

l'exemple du fluide visqueux newtonien (chapitre 2) ont mis en évidence qu'une telle condition était trop restrictive, car conduisant par exemple à des déformations peu réalistes au voisinage du front de propagation du massif de sol.

Nous proposons ci-après de "relaxer" une telle condition d'adhérence en introduisant une condition de glissement à l'interface sol/substratum dans le même esprit que celle proposée par Fortin et al (1991) [24] pour simuler l'écoulement d'un milieu de Bingham en contact avec des parois fixes.

3.5.1 Formulation d'une condition de glissement

Désignant par $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ le vecteur contrainte exercé par le massif de sol liquéfié en un point de l'interface Σ entre le sol et le substratum, de normale rentrante pour le massif \underline{n} , la condition de glissement peut être formulée de façon similaire à celle du milieu de Bingham (équations (3.2) à (3.4)) ; soit :

$$\underline{T} \in \mathcal{G} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{G}(\underline{T}) \leq 0 \Rightarrow \underline{\mathcal{V}} = 0 \quad (3.79)$$

où \mathcal{G} représente le domaine des vecteurs-contrainte pour lesquels il y a adhérence parfaite. En revanche, lorsque \underline{T} est situé à l'extérieur du domaine \mathcal{G} , la discontinuité de vitesse vaut :

$$\underline{T} \notin \mathcal{G} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{G}(\underline{T}) \geq 0 \Rightarrow \underline{T} = \underline{T}^* + \lambda_i \mathcal{V}_n \underline{n} + \mu_i \mathcal{V}_t \quad (3.80)$$

où λ_i et μ_i sont des coefficients de viscosité relatifs aux composantes normale $\mathcal{V}_n \underline{n}$ et tangentielle \mathcal{V}_t , définies par :

$$\mathcal{V}_n \underline{n} = (\underline{\mathcal{V}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \quad , \quad \mathcal{V}_t = \underline{\mathcal{V}} - \mathcal{V}_n \underline{n} = (\underline{\mathbb{I}} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot \underline{\mathcal{V}} \quad (3.81)$$

et où le vecteur-contrainte \underline{T}^* est tel que :

$$\mathcal{G}(\underline{T}^*) = 0 \quad , \quad \underline{\mathcal{V}} = \eta_i \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \underline{T}}(\underline{T}^*) \quad \eta_i \geq 0 \quad (3.82)$$

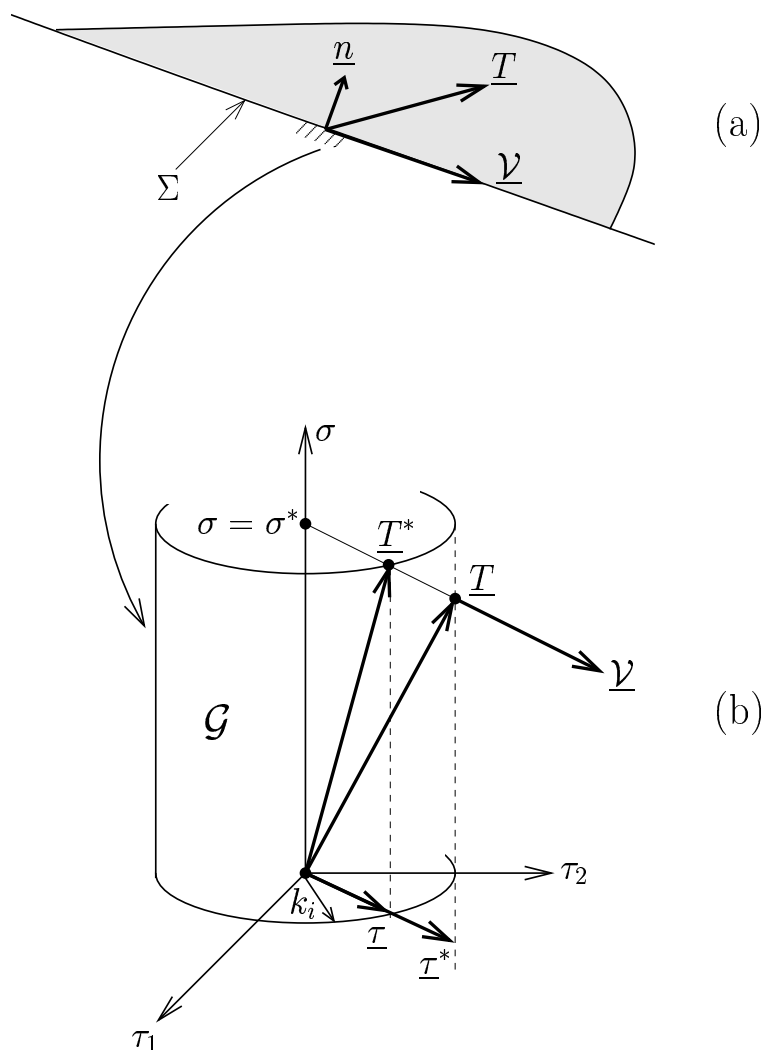


FIG. 3.8: Formulation d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum.

Nous considérons alors le cas particulier où le critère d'adhérence (3.79) est de type contrainte de cisaillement maximale :

$$\mathcal{G}(\underline{T}) = (\underline{\tau}^2)^{\frac{1}{2}} - k_i \leq 0 \quad \implies \quad \underline{v} = 0 \quad (3.83)$$

où $\underline{\tau} = \underline{T} - \sigma \underline{n}$, est la contrainte tangentielle (projection de \underline{T} sur la facette de normale \underline{n}), k_i étant la valeur limite de cette contrainte. Le domaine \mathcal{G} correspondant est représenté

sur la figure 3.8.b sous la forme d'un cylindre circulaire de rayon k_i et d'axe l'axe des contraintes normales σ . Par différenciation de la fonction \mathcal{G} , il vient :

$$d\mathcal{G} = d(\underline{\tau}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\underline{\tau} \cdot d\underline{\tau}}{(\underline{\tau}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\overbrace{\underline{\tau}}^{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \underline{\tau}}}}{(\underline{\tau}^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot d\underline{\tau} \quad (3.84)$$

et les relations (3.82) deviennent :

$$(\underline{\tau}^{*2})^{\frac{1}{2}} = k_i \quad , \quad \underline{\mathcal{V}} = \eta_i \frac{\underline{\tau}^*}{k_i} = \underline{\mathcal{V}}_t \quad (3.85)$$

d'où la réécriture de la loi (3.80) sous la forme :

$$\underline{\mathcal{V}}_t = \underline{\mathcal{V}} = \frac{1}{\mu_i} (\underline{\tau} - \underline{\tau}^*) = \frac{1}{\mu_i} (\underline{\tau} - \underline{\tau}^*) \quad (3.86)$$

soit :

$$\underline{\mathcal{V}} = \frac{1}{\mu_i} \underline{\tau} \left\langle 1 - \frac{k_i}{|\underline{\tau}|} \right\rangle \quad (3.87)$$

qui peut être inversée en :

$$\underline{\tau} = \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \quad (3.88)$$

avec σ indéterminé et :

$$\underline{\tau} = \mu_i \underline{\mathcal{V}} + k_i \frac{\overbrace{\underline{\tau}^*}}{\underline{\mathcal{V}}} \quad (3.89)$$

Ces diverses relations sont illustrées sur la figure 3.8.b : la vitesse est une *vitesse de glissement* colinéaire et de même sens que la contrainte tangentielle appliquée à l'interface Σ .

A noter que les relations (3.87) et (3.89) sont les homologues des équations de comportement (3.47) et (3.48) relatives au milieu de Bingham.

On obtient alors :

$$\underline{T}^* \cdot \underline{\mathcal{V}} = \underline{\tau}^* \cdot \underline{\mathcal{V}} = k_i |\underline{\mathcal{V}}| \quad (3.90)$$

tandis que :

$$\forall \underline{T}' \in \mathcal{G} \quad \underline{T}' \cdot \underline{\mathcal{V}} = \underline{\tau}' \cdot \underline{\mathcal{V}} \leq |\underline{\tau}'| \cdot |\underline{\mathcal{V}}| \leq k_i |\underline{\mathcal{V}}| \quad (3.91)$$

d'où

$$\underline{T}^* \cdot \underline{\mathcal{V}} = \text{Sup}\{\underline{T}' \cdot \underline{\mathcal{V}}, \underline{T}' \in \mathcal{G}\} = \pi(\underline{\mathcal{V}}) = k_i |\underline{\mathcal{V}}| \quad (3.92)$$

3.5.2 Principe de minimum généralisé

Nous allons montrer que la fonctionnelle définie par :

$$\mathcal{F}^i(\underline{U}') = \mathcal{F}(\underline{U}') + \int_{\Sigma} \left(\pi(\underline{\mathcal{V}}') + \frac{\mu_i}{2} \underline{\mathcal{V}}'^2 \right) d\Sigma \quad (3.93)$$

où $\mathcal{F}(\underline{U}')$ est donné par (3.24) tandis que \underline{U}' vérifie les conditions suivantes :

$$\forall \underline{x} \in \Sigma \quad \underline{U}'(\underline{x}) = \underline{U}^{\text{subs}}(\underline{x}) = 0 \quad (3.94)$$

$$\forall \underline{x} \in \Sigma \quad \underline{\mathcal{V}}'(\underline{x}) = \underline{U}'^{\text{sol}}(\underline{x}), \underline{\mathcal{V}}'(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad (3.95)$$

$$\forall \underline{x} \in \Omega_t \quad \text{div} \underline{U}'(\underline{x}) = \text{tr} \underline{d}'(\underline{x}) = 0 \quad (3.96)$$

est minimale pour le champ de vitesse \underline{U} solution.

Posant $\underline{U}' = \underline{U} + \delta \underline{U}$, il vient :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}^i = \mathcal{F}^i(\underline{U} + \delta\underline{U}) - \mathcal{F}^i(\underline{U}) &= \delta\mathcal{F} + \int_{\Sigma} [\pi(\underline{\mathcal{V}} + \delta\underline{\mathcal{V}}) - \pi(\underline{\mathcal{V}})] d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma} \left[\mu_i \underline{\mathcal{V}} \cdot \delta\underline{\mathcal{V}} + \frac{\mu_i}{2} \delta\underline{\mathcal{V}}^2 \right] d\Sigma\end{aligned}\quad (3.97)$$

avec (voir paragraphe 3.2.2) :

$$\delta\mathcal{F} \geq \int_{\Omega_t} (\underline{\sigma} : \delta\underline{d}) d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \delta\underline{q}\quad (3.98)$$

Or le principe des puissances virtuelles s'écrit dans le cas où le champ de vitesse comporte une surface de discontinuité localisée à l'interface sol/substratum Σ

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} (\underline{\sigma} : \underline{d}) d\Omega_t + \int_{\Sigma} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\mathcal{V}} d\Sigma\quad (3.99)$$

et par conséquent :

$$\delta\mathcal{F} \geq \int_{\Sigma} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\mathcal{V}} d\Sigma\quad (3.100)$$

Reportant cette inégalité dans (3.97), on obtient alors :

$$\delta\mathcal{F}^i \geq \int_{\Sigma} \left[k_i |\underline{\mathcal{V}} + \delta\underline{\mathcal{V}}| - k_i |\underline{\mathcal{V}}| + \mu_i \underline{\mathcal{V}} \cdot \delta\underline{\mathcal{V}} - \underbrace{(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot (\underline{\mathcal{V}} + \delta\underline{\mathcal{V}})}_{\underline{T}} + \underbrace{\underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot \underline{\mathcal{V}}}_{\underline{T}} \right] d\Sigma\quad (3.101)$$

soit en tenant compte de la loi de comportement viscoplastique à l'interface Σ , donnée par (3.88) et (3.89) :

$$\delta\mathcal{F}^i \geq \int_{\Sigma} \left[\underbrace{k_i |\underline{\mathcal{V}} + \delta\underline{\mathcal{V}}| - \underline{T}^* \cdot (\underline{\mathcal{V}} + \delta\underline{\mathcal{V}})}_{\geq 0} \right] d\Sigma + \int_{\Sigma} \left[\underbrace{k_i |\underline{\mathcal{V}}| - \underline{T}^* \cdot \underline{\mathcal{V}}}_{= 0} \right] d\Sigma \geq 0\quad (3.102)$$

Ce qui démontre le principe de minimum en vitesse incorporant une loi de glissement viscoplastique à l'interface entre le massif de sol et le substratum.

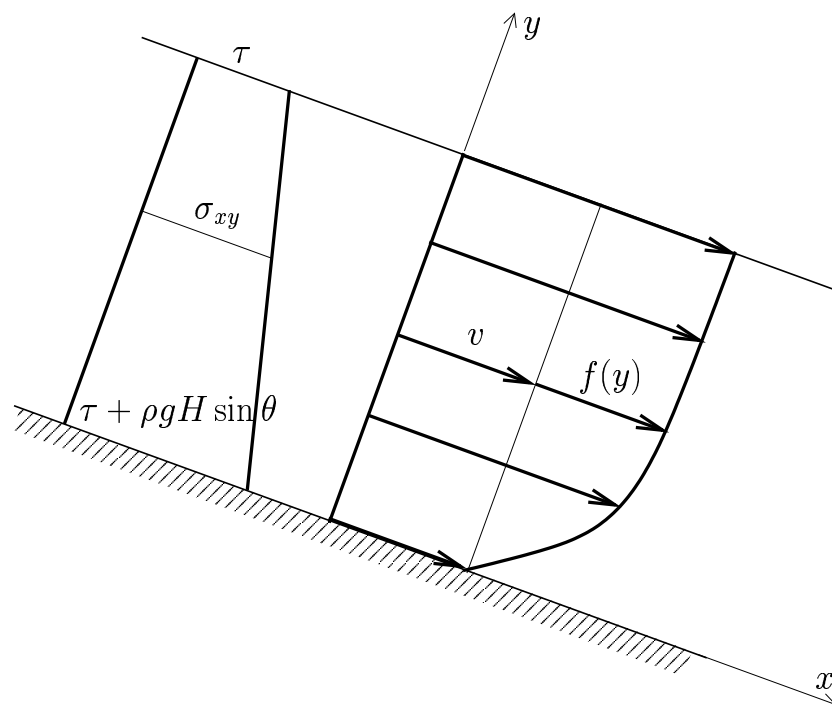


FIG. 3.9: Profils de contrainte de cisaillement et de vitesse relatifs à l'écoulement d'un milieu de Bingham avec prise en compte d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum.

La figure 3.9 illustre, sur l'exemple de l'écoulement d'un massif de sol liquéfié reposant sur un substratum incliné, la modification apportée par l'introduction d'une loi de glissement viscoplastique à l'interface sol/substratum. Le champ de contrainte étant toujours donné par la formule (3.53), le champ de vitesse est de la forme :

$$\underline{U} = (f(y) + \mathcal{V})\underline{e}_x \quad (3.103)$$

où $f(y)$ est donné par (3.67) (profil de vitesse correspondant à l'hypothèse d'adhérence parfaite), tandis que la discontinuité de vitesse s'écrit d'après (3.87) :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\mu_i} \langle \rho g H \sin \theta - k_i \rangle \quad (3.104)$$

* *

 *

Chapitre 4

Techniques de résolution numérique pour le problème de minimisation

Sommaire

4.1	Introduction	99
4.2	Minimisation par la méthode du polytope et l'utilisation d'une fonction de courant	100
4.2.1	La méthode du polytope (Nelder et Mead (1965) [46])	100
4.2.2	Introduction d'une fonction de courant	103
4.2.3	Une méthode inapplicable	106
4.3	Approximation par la technique de régularisation (Papanastasiou et Tasos (1987) [48])	107
4.3.1	Présentation de la technique	107
4.3.2	Procédure itérative de résolution	108
4.4	Méthode du lagrangien augmenté associée à la technique de décomposition-coordination	112
4.4.1	Présentation de la méthode	112
4.4.2	Algorithme adopté	116
4.4.3	Un exemple illustratif	117

4.5 Premières simulations et comparaison des méthodes de régularisation et de décomposition-coordination 122

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux différents techniques et algorithmes utilisés pour résoudre numériquement le problème d'évolution d'un massif de sol liquéfié. Rappelons que le principe du minimum en vitesses généralisé établi dans la section 3.5.2 du chapitre 3, où le sol liquéfié est modélisé comme un matériau de Bingham incompressible avec prise en compte d'une condition de glissement à l'interface sol/substratum, s'écrit :

$$\mathcal{F}(\underline{U}) = \min \left\{ \mathcal{F}(\underline{U}'); \operatorname{div} \underline{U}' = 0 \text{ dans } \Omega_t, \underline{U}' = 0 \text{ et } \underline{\mathcal{V}}' \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \right\} \quad (4.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{U}') &= \int_{\Omega_t} \mu \underline{d}(\underline{U}') : \underline{d}(\underline{U}') d\Omega_t + \overbrace{\int_{\Omega_t} \pi(\underline{d}(\underline{U}')) d\Omega_t}^{\mathcal{I}_1} - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') \\ &+ \int_{\Sigma} \frac{\mu_i}{2} \underline{\mathcal{V}}'^2 d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma} \pi(\underline{\mathcal{V}}') d\Sigma}_{\mathcal{I}_2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La difficulté à rechercher la solution par minimisation provient du caractère *non-différentiable* de la fonctionnelle \mathcal{F} dû aux intégrales \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 représentant respectivement les puissances dissipées dans le sol liquéfié et le long de l'interface sol/substratum.

\mathcal{I}_1 , qui s'écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\Omega_t} \pi(\underline{d}(\underline{U}')) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} k\sqrt{2}(\underline{d}(\underline{U}') : \underline{d}(\underline{U}'))^{\frac{1}{2}} d\Omega_t \quad (4.3)$$

est associée au "terme de seuil" de la loi de comportement *non-linéaire* du modèle de Bingham viscoplastique incompressible (chapitre 3, section 3.4.1) :

$$\underline{s} = 2\mu\underline{d} + k\sqrt{2} \frac{\underline{d}}{\|\underline{d}\|} \quad (4.4)$$

tandis que

$$\mathcal{I}_2 = \int_{\Sigma} \pi(\underline{\mathcal{V}}') d\Sigma = \int_{\Sigma} k_i |\underline{\mathcal{V}}'| d\Sigma \quad (4.5)$$

est liée au deuxième terme de l'équation *non-linéaire* traduisant la condition de glissement imposée à l'interface sol/substratum Σ , et donnée par (chapitre 3, section 3.5.1) :

$$\underline{\tau} = \mu_i \underline{\mathcal{V}} + k_i \frac{\underline{\mathcal{V}}}{|\underline{\mathcal{V}}|} \quad (4.6)$$

On note que les équation (4.4) et (4.6) sont homologues. Cette similarité va être très utile pour le traitement numérique.

Pour contourner les difficultés liées à la non-différentiabilité de la fonctionnelle à minimiser, plusieurs approches numériques sont successivement considérées dans ce chapitre.

Dans la section 4.2, une première méthode, appelée *méthode du polytope*, combinée à l'introduction d'une fonction de courant permettant d'assurer automatiquement en tout point la condition d'incompressibilité, est proposée. Nous verrons assez rapidement qu'elle est inopérante.

Une deuxième approche possible est donnée dans la section 4.3. Elle consiste à approcher, par *régularisation*, les lois de comportement non-linéaires (4.4) et (4.6).

Une troisième méthode, qui se révélera la plus performante, dite *méthode de décomposition-coordination par lagrangiens augmentés*, est décrite dans la section 4.4. La section 4.5 est précisément consacrée à la comparaison de cette dernière méthode avec la technique de régularisation, ainsi qu'à la validation de l'outil numérique mis en œuvre pour la simulation des écoulements bidimensionnels et la présentation des premières applications.

4.2 Minimisation par la méthode du polytope et l'utilisation d'une fonction de courant

4.2.1 La méthode du polytope (Nelder et Mead (1965) [46])

Cette méthode s'applique à la recherche du minimum *sans contrainte* d'une fonction scalaire, différentiable ou non, mais *convexe* de ses arguments. Elle peut être qualifiée de "directe" dans le sens où elle ne nécessite que le calcul des valeurs *locales* de la fonction et non de ses dérivées.

Soit $y = f(\underline{x})$ une fonction de $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} dont on cherche le *minimum sans contrainte*. Un polytope dans l'espace \mathbb{R}^n est un polyèdre à $n + 1$ sommets. On désigne

par $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{n+1}$ ses sommets et par y_1, y_2, \dots, y_{n+1} les valeurs prises par la fonction f en ces sommets, ces valeurs étant ordonnées de la façon suivante : $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n+1}$.

On introduit alors; en se reportant à la figure 4.1 :

- \underline{x}_G le centre de gravité de la face du polyèdre opposée au sommet \underline{x}_{n+1} :

$$\underline{x}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \quad (4.7)$$

- \underline{x}_r le point de *réflexion* qui est le symétrique, par rapport au centre de gravité \underline{x}_G , du plus "mauvais" point \underline{x}_{n+1} :

$$\underline{x}_r = 2\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_G \quad (4.8)$$

- \underline{x}_e le point d'*expansion* qui est le symétrique de \underline{x}_G par rapport à \underline{x}_r :

$$\underline{x}_e = 2\underline{x}_G - \underline{x}_r \quad (4.9)$$

- \underline{x}_c le point de *contraction* qui est donné par l'expression suivante :

$$\underline{x}_c = \frac{1}{2}(\underline{x}_{n+1} + \underline{x}_G) \quad (4.10)$$

L'algorithme du polytope nécessite de partir de la donnée d'un polyèdre initial, obtenu en se donnant un point de départ \underline{x}_1 et puis en choisissant les autres points $\underline{x}_i, i = 2 \dots n+1$, de manière à construire le polyèdre autour de ce point. On pose :

$$\underline{x}_i = \underline{x}_1 + \lambda_i \underline{e}_i \quad \forall i = 2 \dots n+1 \quad (4.11)$$

où $(\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_{n+1})$ est la base canonique de \mathbb{R}^n et λ_i des réels définissant la taille du polyèdre, généralement compris entre 0 et 1.

Afin d'aboutir au minimum de la fonction f à minimiser, la méthode consiste à appliquer, à chaque itération, des transformations géométriques élémentaires sur le polyèdre : réflexion, expansion, contraction et rétrécissement (figure 4.1). Ce dernier s'adapte à l'allure de la fonction, s'approchant de l'optimum jusqu'à convergence.

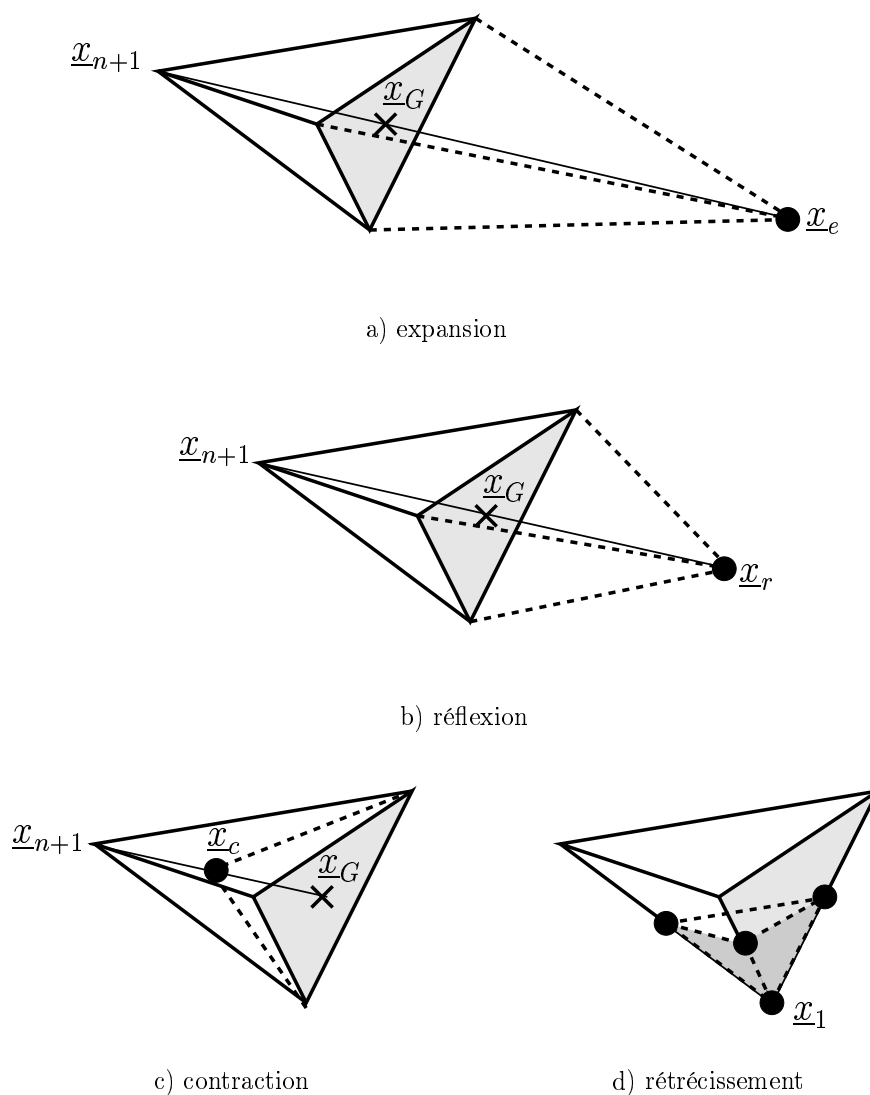


FIG. 4.1: Les différents cas possibles correspondant à une itération dans la méthode du polytope ($n = 3$).

L'algorithme est le suivant :

- Initialisation : se donner le polytope initial $P^0 = (\underline{x}_1^0, \dots, \underline{x}_{n+1}^0)$ en utilisant (4.11) et l'ordonner pour obtenir $y_1^0 = f(\underline{x}_1^0) \leq \dots \leq y_{n+1}^0 = f(\underline{x}_{n+1}^0)$.

- Pour $k \geq 1$, trois cas à examiner pour construire un nouveau polyèdre :

1^{er} cas $f(\underline{x}_r^k) < f(\underline{x}_1^k)$

- Si $f(\underline{x}_e^k) < f(\underline{x}_1^k)$ alors on remplace \underline{x}_{n+1}^k par \underline{x}_e^k [expansion] (figure 4.1-a).
- Sinon, le nouveau polyèdre s'obtient en remplaçant \underline{x}_{n+1}^k par \underline{x}_r^k [réflexion] (figure 4.1-b).

2^{ème} cas $f(\underline{x}_1^k) \leq f(\underline{x}_r^k) \leq f(\underline{x}_n^k)$, le nouveau polyèdre s'obtient en remplaçant \underline{x}_{n+1}^k par \underline{x}_r^k [réflexion] (figure 4.1-b).

3^{ème} cas $f(\underline{x}_r^k) > f(\underline{x}_n^k)$, on commence par remplacer \underline{x}_{n+1}^k par \underline{x}_r^k [réflexion] (figure 4.1-b) dans le cas où $f(\underline{x}_r^k) < f(\underline{x}_{n+1}^k)$, puis on examine les deux éventualités suivantes :

- Si $f(\underline{x}_c^k) < f(\underline{x}_{n+1}^k)$ alors on remplace \underline{x}_{n+1}^k par \underline{x}_c^k [contraction] (figure 4.1-c).
- Sinon le nouveau polyèdre s'obtient en remplaçant tous les \underline{x}_i^k par $\frac{1}{2}(\underline{x}_i^k + \underline{x}_1^k)$ pour $i = 2 \dots n + 1$ [rétrécissement] (figure 4.1-d).

- Critère d'arrêt : par exemple $\left| f(\underline{x}_{n+1}^k) - f(\underline{x}_1^k) \right| < \epsilon$

4.2.2 Introduction d'une fonction de courant

Dans le cadre de la méthode des éléments finis et pour des raisons purement numériques affectant le choix des éléments finis à adopter (voir chapitre 2, section 2.3.2), on s'est limité à ne vérifier la condition d'incompressibilité que de façon *globale*. C'est-à-dire que le volume total de l'élément reste constant au cours de l'évolution.

La méthode du polytope étant une méthode de minimisation *sans contrainte*, il convient d'éliminer la *condition d'incompressibilité* des champs de vitesse \underline{U}' . Cela peut être réalisé en ayant recours à une *fonction de courant*, notée ψ , (dans le cas bidimensionnel auquel

nous nous intéressons ici), telle que les composantes du champ de vitesse s'écrivent :

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.12)$$

de sorte que la condition d'incompressibilité est automatiquement satisfaite, puisque :

$$\operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

Une telle approche a notamment été développée par Maghous (1993) [42] et de Buhan et Maghous (1995) [13] dans le cadre d'une mise en œuvre numérique de l'*approche cinématique du calcul à la rupture*, afin d'assurer la *pertinence* des champs de vitesse pour des critères de type Tresca et Von Mises. Les fonctions de courant étant engendrées par le biais d'une discrétisation en éléments finis triangulaires à six nœuds, par exemple, (éléments $T6$), les champs de vitesse correspondants définis sur chaque élément par les relations 4.12, vérifient bien la condition de pertinence (i.e. d'incompressibilité) 4.13. Mais le gradient de cette fonction de courant étant discontinu au passage d'un élément à l'autre, le champ de vitesse correspondant est *discontinu* au franchissement de tout segment séparant deux triangles adjacents. On peut facilement montrer que de telles discontinuités sont *tangentes* à ces segments, ce qui assure leur pertinence vis-à-vis de l'approche cinématique du calcul à la rupture.

Il n'est en revanche pas possible d'appliquer directement cette méthode au problème de recherche du minimum de la fonctionnelle $\mathcal{F}(\underline{U}')$ définie par 4.2, puisque les champs \underline{U}' , qui n'ont pas le caractère virtuel de ceux utilisés dans l'approche cinématique du calcul à la rupture, ne peuvent plus comporter des discontinuités, même tangentes, au passage d'un élément à l'autre. L'idée est alors de discrétiser la structure en éléments rectangulaires de type Hermite (Dhatt et Touzout (1984) [15], Batoz et Dhatt (1990) [5]) qui permette d'assurer la continuité de la fonction de courant, ainsi que de son gradient, au passage d'un élément à l'autre.

Le principe d'une telle discrétisation est le suivant. Considérons un élément fini ayant la forme d'un rectangle centré à l'origine, et dont les côtés, de longueurs respectives $2a$ et $2b$, sont parallèles aux axes Ox et Oy (figure 4.2).

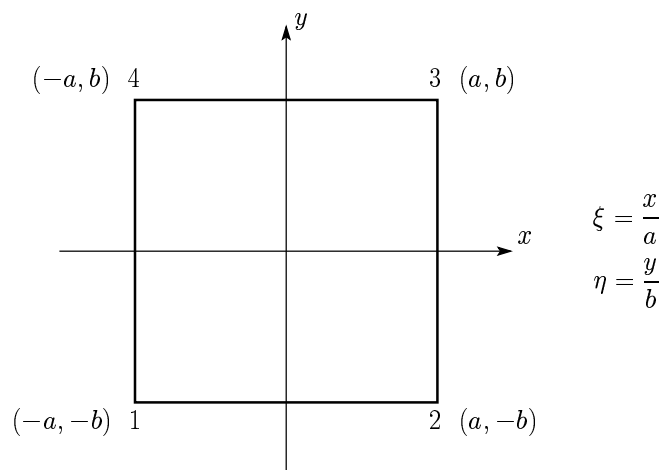


FIG. 4.2: Elément rectangulaire de type Hermite.

La valeur de la fonction de courant ψ en tout point (x, y) de cet élément s'écrit (Batoz et Dhatt (1990) [5]) :

$$\psi = {}^T\{N\}\{\psi\} \tag{4.14}$$

avec

$${}^T\{\psi\} = \left\{ \left(\psi_\alpha, (\psi_{,x})_\alpha, (\psi_{,y})_\alpha, (\psi_{,xy})_\alpha \right), \alpha = 1 \text{ à } 4 \right\} \tag{4.15}$$

et

$${}^T\{N\} = \left\{ p_1q_1, p_2q_1, p_1q_2, p_2q_2; p_3q_1, p_4q_1, p_3q_2, p_4q_2; p_3q_3, p_4q_3, p_3q_4, p_4q_4; p_1q_3, p_2q_3, p_1q_4, p_2q_4 \right\} \tag{4.16}$$

où les fonctions p_i et q_i sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) & ; \quad p_2 = \frac{a}{4}(1 - \xi^2)(1 - \xi) \\ p_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 + \xi) & ; \quad p_4 = \frac{a}{4}(-1 + \xi^2)(1 + \xi) \\ q_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta)^2(2 + \eta) & ; \quad q_2 = \frac{b}{4}(1 - \eta^2)(1 - \eta) \\ q_3 = \frac{1}{4}(1 + \eta)^2(2 - \eta) & ; \quad q_4 = \frac{b}{4}(-1 + \eta^2)(1 + \eta) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

On peut facilement vérifier que ψ_α , $(\psi, x)_\alpha$, $(\psi, y)_\alpha$ et $(\psi, xy)_\alpha$ représentent les valeurs au nœud α de la fonction ψ , de ses dérivées premières $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, ainsi que de sa dérivée seconde croisée $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$. Les fonctions ψ engendrées à partir de ces valeurs nodales et des relations (4.14) sont alors continues et continument différentiables, de sorte que les champs de vitesse associés définis par les relations (4.12) sont continus en tout point et satisfont la condition d'incompressibilité (4.13).

4.2.3 Une méthode inapplicable

En réalité, la technique de minimisation par la méthode du polytope associée à l'utilisation d'une fonction de courant, se révèle très peu commode d'emploi, et donc en pratique inapplicable, pour au moins trois raisons :

- La lourdeur des calculs engendrés par l'intégration sur l'ensemble des éléments de type Hermite des fonctions $\mu \underline{d} : \underline{d}$, et surtout $\pi(\underline{d}) = k\sqrt{2}(\underline{d} : \underline{d})^{\frac{1}{2}}$ qui n'est pas une fonction polynomiale des coordonnées (x, y) .
- La faible efficacité de la méthode de polytope lorsque le nombre de variables de minimisation dépasse les quelques centaines, ce qui exclut une discrétisation fine de la structure.
- Enfin et surtout, l'emploi des éléments de type Hermite exige que ceux-ci soient rectangulaires, les côtés demeurant parallèles aux axes du repère. Si une telle discrétisation est donc possible lorsque le volume de sol liquéfié est dans sa configuration initiale, elle devient évidemment impossible lorsque ces éléments, attachés aux mouvements du sol, subissent de grandes déformations de sorte que leur géométrie s'écarte très rapidement de celle des éléments rectangulaires initiaux.

En dépit de quelques tentatives, ces trois raisons rendent l'emploi de cette méthode numérique impraticable.

4.3 Approximation par la technique de régularisation (Papanastasiou et Tasos (1987) [48])

4.3.1 Présentation de la technique

Afin d'éviter les difficultés numériques dues à la non-linéarité de certaines lois de comportement, plusieurs auteurs de travaux de simulations numériques sur les fluides à seuil utilisent des lois approchées permettant le traitement numérique.

La loi de comportement (4.4) d'un matériau de Bingham peut être approchée par la loi *régularisée* suivante proposée par Papanastasiou et Tasos (1987) [48] ou Liu et al. (2002) [40] :

$$\underline{\underline{s}} = 2\mu\underline{\underline{d}} + k\sqrt{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\|\underline{\underline{d}}\|}{d_0}\right)\right)\frac{\underline{\underline{d}}}{\|\underline{\underline{d}}\|} \quad (4.18)$$

où d_0 est le paramètre de régularisation exprimé en s^{-1} .

Dans le cas d'une sollicitation de cisaillement pur, cette loi régularisée qui s'écrit de la façon suivante :

$$\tau = 2\mu d + k\left(1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}d}{d_0}\right)\right) \quad (4.19)$$

où selon les notations de la section 3.4.1 du chapitre 3, τ est la contrainte de cisaillement et $d = \frac{\dot{\gamma}}{2}$ le taux de déformation en cisaillement, est représentée sur la figure 4.3. On doit noter que ce modèle régularisé tend vers le modèle de Bingham initial lorsque $d_0 \rightarrow 0$.

L'écriture tensorielle de la loi de comportement régularisée donnée par (4.18) peut être mise sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{s}} = 2\tilde{\mu}(\underline{\underline{d}})\underline{\underline{d}} \quad (4.20)$$

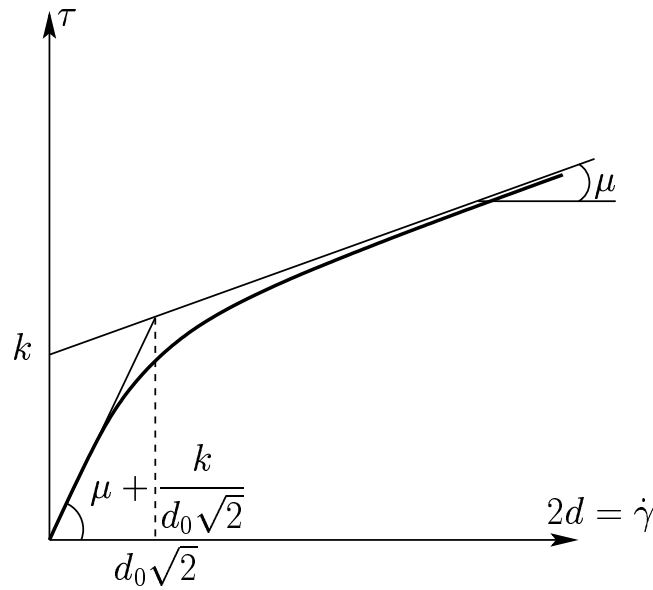


FIG. 4.3: Modèle de Bingham régularisé.

où $\tilde{\mu}$ est la *viscosité sécante* donnée par :

$$\tilde{\mu}(\underline{d}) = \mu + \frac{k\sqrt{2}}{2\|\underline{d}\|} \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\underline{d}\|}{d_0}\right) \right) \quad (4.21)$$

La loi de comportement du modèle de Bingham régularisé (4.18) peut donc prendre la forme classique du modèle Newtonien avec un coefficient de viscosité qui dépend du tenseur de taux de déformation \underline{d} . Cette propriété permet de faciliter énormément le traitement numérique de notre problème non-linéaire en utilisant une procédure itérative, dans laquelle *un problème Newtonien linéaire est à résoudre à chaque itération*, jusqu'à convergence.

4.3.2 Procédure itérative de résolution

- Initialisation : $\underline{d}^{(0)}$ donné (μ , k et d_0 sont des données du problème).
- Pour $i \geq 1$

- Etant donné $\underline{d}^{(i-1)}$, calculer $\tilde{\mu}^{(i-1)} = \tilde{\mu}(\underline{d}^{(i-1)})$ par (4.21).
- Calculer $\underline{d}^{(i)}$ en résolvant un problème Newtonien avec $\underline{s}^{(i)} = \tilde{\mu}^{(i-1)}\underline{d}^{(i)}$ (chapitre 2).
- Test de convergence : $\left\| \underline{d}^{(i)} - \underline{d}^{(i-1)} \right\| < \epsilon$.

Il convient de noter que le problème Newtonien à résoudre à chaque itération i correspond à celui d'un fluide Newtonien *hétérogène*, c'est-à-dire que le coefficient de viscosité sécante $\tilde{\mu}^{(i-1)}$ est fonction du point à travers la valeur prise par le taux de déformation $\underline{d}^{(i-1)}$ calculé en ce point à l'itération précédente. Un tel processus itératif peut être illustré sur l'exemple de l'écoulement d'un massif de sol liquéfié sur un plan incliné, traité au paragraphe 3.4.2 (chapitre 3) dans le cas d'un modèle de Bingham. Nous nous plaçons dans le cas où la contrainte de cisaillement en surface est nulle ($Q_1 = \tau = 0$), le champ de contrainte solution est donné par l'équation (3.53), d'où

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \rho g(H - y) \sin \theta \quad (4.22)$$

c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement croît linéairement avec la profondeur. Elle est reliée au taux de déformation de cisaillement $d = \frac{\dot{\gamma}}{2}$, par la loi de comportement régularisée (4.19), d'où

$$\rho g(H - y) \sin \theta = 2\tilde{\mu}(d)d \quad (4.23)$$

avec en vertu de (4.21)

$$\tilde{\mu}(d) = \mu + \frac{k}{2d} \left(1 - \exp \left(- \frac{d\sqrt{2}}{d_0} \right) \right) \quad (4.24)$$

Le processus itératif est par exemple initié en prenant :

$$d^{(0)}(y) = 0 \quad (4.25)$$

d'où

$$\tilde{\mu}^{(0)}(y) = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\mu + \frac{k}{2d} \left(1 - \exp \left(- \frac{d\sqrt{2}}{d_0} \right) \right) \right] = \frac{k}{\sqrt{2}d_0} \quad (4.26)$$

et donc

$$d^{(1)}(y) = \frac{\rho g(H-y) \sin \theta}{2\tilde{\mu}^{(0)}(y)} \quad (4.27)$$

On obtient ainsi à l'itération i la relation de récurrence

$$d^{(i+1)}(y) = \frac{\rho g(H-y) \sin \theta}{2\tilde{\mu}^{(i)}(y)} = \frac{\rho g(H-y) \sin \theta}{2\mu + \frac{k}{d^{(i)}(y)} \left[1 - \exp \left(- \frac{\sqrt{2}}{d_0} d^{(i)}(y) \right) \right]} \quad (4.28)$$

La convergence de la suite $d^{(i)}(y)$ est illustrée sur la figure 4.4.

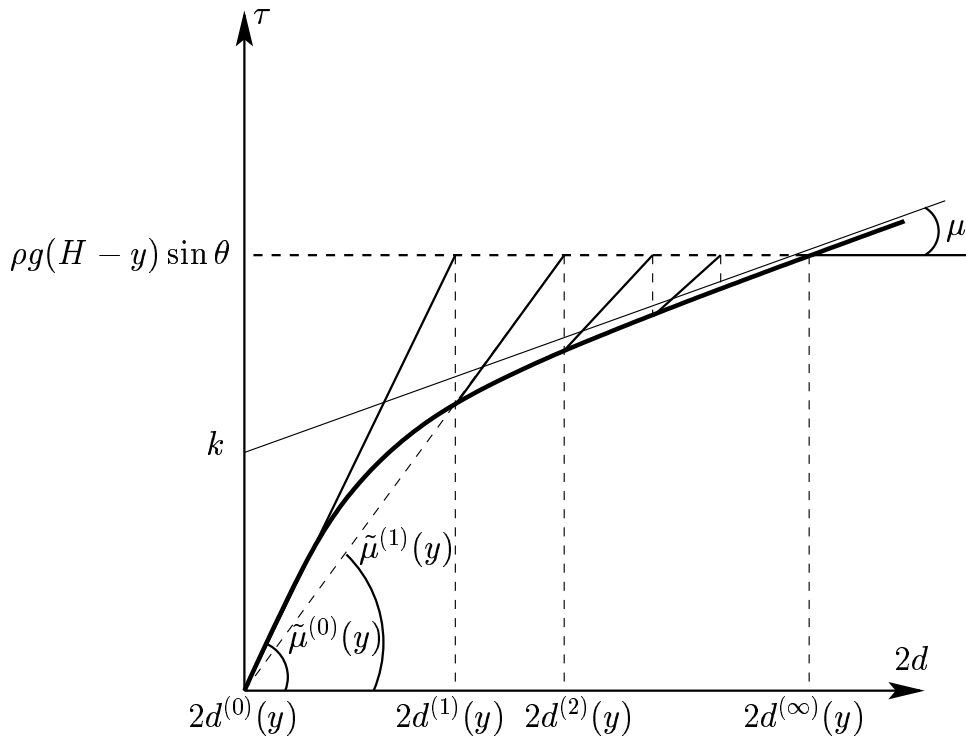
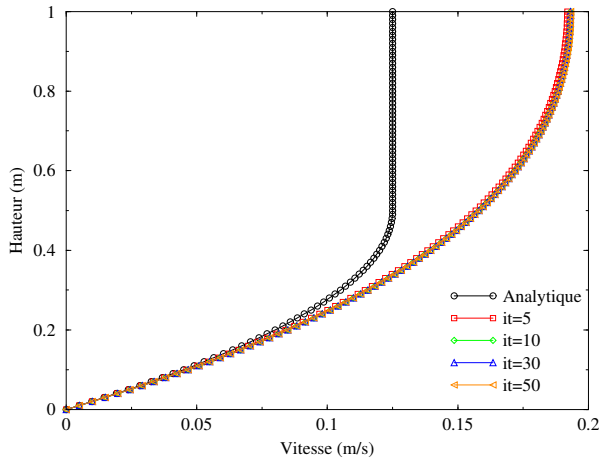


FIG. 4.4: Illustration de la convergence du processus itératif.

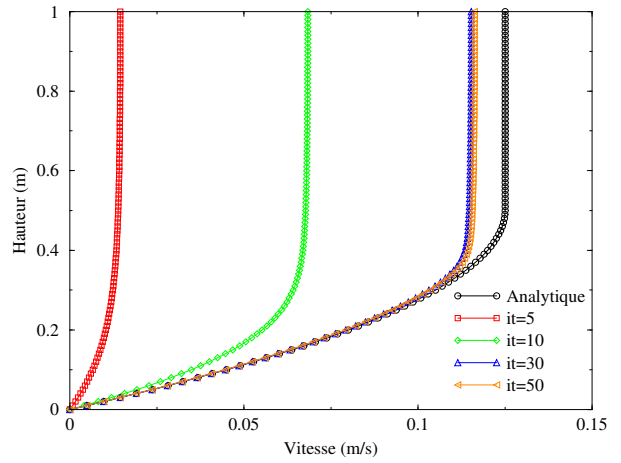
La figure 4.5 montre, pour différentes valeurs du paramètre de régularisation d_0 , la convergence du profil de vitesse d'écoulement en fonction du nombre d'itérations noté it ,

pour le jeu de paramètres suivants : $H = 1m$, $\rho g = 20kN/m^3$, $\mu = 1kPa.s$, $k = 0,5kPa$ et $\sin \theta = 0,05$.

On observe que pour un paramètre de régularisation égal par exemple à $d_0 = 0,1$ la convergence est très rapide (dès la cinquième itération), mais la solution régularisée ainsi obtenue constitue une approximation très grossière du profil analytique exact (figure 4.5-a). L'obtention d'une meilleure approximation de la solution exacte exige de prendre une valeur beaucoup plus faible du paramètre de régularisation (par exemple $d_0 = 0,001$, voir figure 4.5-b), ce qui nécessite un nombre d'itérations et donc un temps de calcul plus important.



(a) $d_0 = 0.1$



(b) $d_0 = 0.001$

FIG. 4.5: Simulation par la méthode de régularisation de l'écoulement d'un milieu de Bingham sur un plan incliné.

L'équation non-linéaire (4.6) traduisant la condition de glissement imposée à l'interface sol/substratum peut être traitée de la même façon. On aura donc :

$$\underline{\tau} = \mu_i \underline{\mathcal{V}} + k_i \left[1 - \exp \left(- \frac{|\underline{\mathcal{V}}|}{d_0^i} \right) \right] \frac{\underline{\mathcal{V}}}{|\underline{\mathcal{V}}|} = \tilde{\mu}_i \underline{\mathcal{V}} \quad (4.29)$$

avec

$$\tilde{\mu}_i(\underline{\mathcal{V}}) = \mu_i + \frac{k_i}{|\underline{\mathcal{V}}|} \quad (4.30)$$

Une procédure itérative, homologue de celle décrite auparavant appliquée au modèle de Bingham régularisé, permet donc de résoudre numériquement ce deuxième problème régularisé. On se ramène à résoudre, à chaque itération, un problème de condition de frottement visqueux classique, imposée à l'interface sol/substratum.

4.4 Méthode du lagrangien augmenté associée à la technique de décomposition-coordination

Nous décrivons ci-dessous le principe de cette méthode, appliquée au problème de l'écoulement d'un sol liquéfié modélisé comme un milieu de Bingham, sans entrer dans les développements mathématiques auxquels cette méthode peut donner lieu. Le lecteur pourra se reporter à des ouvrages de référence tels que Fortin et Glowinski (1982) [25] ou Glowinski et Letallec (1989) [26], ainsi qu'aux développements numériques récemment effectués par Roquet et Saramito (2003) [58] en vue de la simulation d'écoulements permanents de fluides à seuil autour d'obstacles.

4.4.1 Présentation de la méthode

Afin de ne pas alourdir inutilement l'exposé, et sans que cela nuise à la généralité du propos, nous donnons le principe de la méthode dans le cas où l'on suppose qu'il y a adhérence parfaite entre le massif de sol et le substratum rigide, de sorte que la fonctionnelle 4.2 à minimiser se réduit à

$$\mathcal{F}(\underline{U}') = \int_{\Omega_t} \left[\mu \|\underline{d}(\underline{U}')\|^2 + k\sqrt{2} \|\underline{d}(\underline{U}')\| \right] d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') \quad (4.31)$$

sous la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \underline{U}' = 0 \quad (4.32)$$

L'idée de cette méthode consiste à considérer le taux de déformation comme une *variable distincte* de la vitesse \underline{U}' , que l'on notera $\underline{\delta}'$, liée à cette vitesse par la condition

$$\underline{\delta}' = \underline{d}(\underline{U}') = \frac{1}{2} \left(\underline{\operatorname{grad}} \underline{U}' + {}^T \underline{\operatorname{grad}} \underline{U}' \right) \quad (4.33)$$

de sorte que la fonctionnelle $\mathcal{F}(\underline{U}')$ peut s'écrire comme une fonction des champs $\underline{\underline{\delta}}'$ et \underline{U}' , considérées comme des *variables séparées* :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\underline{U}', \underline{\underline{\delta}}') = \int_{\Omega_t} \left[\mu \|\underline{\underline{\delta}}'\|^2 + k\sqrt{2} \|\underline{\underline{\delta}}'\| \right] d\Omega_t - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') \quad (4.34)$$

et le problème de minimisation devient alors :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\underline{U}, \underline{\underline{\delta}}) = \min_{(\underline{U}', \underline{\underline{\delta}}')} \left\{ \tilde{\mathcal{F}}(\underline{U}', \underline{\underline{\delta}}') ; \operatorname{div} \underline{U}' = 0, \underline{\underline{d}}(\underline{U}') - \underline{\underline{\delta}}' = 0 \right\} \quad (4.35)$$

On introduit alors classiquement le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\underline{U}', p', \underline{\underline{\delta}}', \underline{\underline{\lambda}}') = \tilde{\mathcal{F}}(\underline{U}', \underline{\underline{\delta}}') - \int_{\Omega_t} p' \operatorname{div} \underline{U}' d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\lambda}}' : (\underline{\underline{d}}(\underline{U}') - \underline{\underline{\delta}}') d\Omega_t \quad (4.36)$$

où p' et $\underline{\underline{\lambda}}'$ représentent les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux conditions $\operatorname{div} \underline{U}' = 0$ et $\underline{\underline{d}}(\underline{U}') = \underline{\underline{\delta}}'$, ainsi que pour $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ le le *Lagrangien augmenté* défini par :

$$\mathcal{L}_r(\underline{U}', p', \underline{\underline{\delta}}', \underline{\underline{\lambda}}') = \mathcal{L}(\underline{U}', p', \underline{\underline{\delta}}', \underline{\underline{\lambda}}') + \int_{\Omega_t} \frac{r_1}{2} (\operatorname{div} \underline{U}')^2 d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \frac{r_2}{2} \|\underline{\underline{d}}(\underline{U}') - \underline{\underline{\delta}}'\|^2 d\Omega_t \quad (4.37)$$

Il convient de noter qu'à p' , $\underline{\underline{\delta}}'$ et $\underline{\underline{\lambda}}'$ *fixés*, le lagrangien \mathcal{L} est linéaire en \underline{U}' , tandis que le lagrangien augmenté \mathcal{L}_r est une forme quadratique définie positive de \underline{U}' , de sorte que la recherche du minimum s'effectue classiquement par le biais de la résolution d'un système linéaire.

Un des résultats imposants, démontré dans Fortin et Glowinski (1983) [25], est que les points -selle de \mathcal{L} coïncident avec ceux de \mathcal{L}_r , et le problème de minimisation initial revient à résoudre ce dernier problème de point-selle :

$$\mathcal{L}_r(\underline{U}^*, p^*, \underline{\underline{\delta}}^*, \underline{\underline{\lambda}}^*) = \min_{\underline{U}'} \max_{p'} \min_{\underline{\underline{\delta}}'} \max_{\underline{\underline{\lambda}}'} \mathcal{L}_r(\underline{U}', p', \underline{\underline{\delta}}', \underline{\underline{\lambda}}') \quad (4.38)$$

Il importe de souligner en particulier que le champ de vitesse \underline{U}^* solution de ce problème de point-selle est identique au champ de vitesse solution recherché :

$$\underline{U}^* = \underline{U} \quad (4.39)$$

En outre, à p' , \underline{U}' et $\underline{\lambda}'$ fixés, la minimisation du lagrangien augmenté \mathcal{L}_r par rapport à $\underline{\delta}'$ conduit à rechercher le minimum de la fonctionnelle suivante déduite de \mathcal{L}_r en éliminant les termes constants en $\underline{\delta}'$:

$$\min_{\underline{\delta}'} \left\{ \int_{\Omega_t} \left[\left(\mu + \frac{r_2}{2} \right) \|\underline{\delta}'\|^2 + k\sqrt{2} \|\underline{\delta}'\| - \left(\frac{r_2}{2} \underline{d}(\underline{U}') + \underline{\lambda}' \right) : \underline{\delta}' \right] d\Omega_t \right\} \quad (4.40)$$

or ce dernier problème est équivalent au problème de minimisation *local* suivant :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_t \quad \min_{\underline{\delta}'} \left\{ \left(\mu + \frac{r_2}{2} \right) \|\underline{\delta}'\|^2 + k\sqrt{2} \|\underline{\delta}'\| - \left(\frac{r_2}{2} \underline{d}(\underline{U}') + \underline{\lambda}' \right) : \underline{\delta}' \right\} \quad (4.41)$$

dont la solution peut être explicité comme suit, où l'on a posé :

$$\underline{\beta}' = \underline{\lambda}' + \frac{r_2}{2} \underline{d}(\underline{U}') \quad (4.42)$$

- **1^{er} cas :** $\|\underline{\beta}'\| \leq k\sqrt{2}$

On obtient dans ce cas en tenant compte de l'inégalité : $\underline{\beta}' : \underline{\delta}' \leq \|\underline{\beta}'\| \|\underline{\delta}'\|$

$$\left(\mu + \frac{r_2}{2} \right) \|\underline{\delta}'\|^2 + k\sqrt{2} \|\underline{\delta}'\| - \underline{\beta}' : \underline{\delta}' \geq \left(\mu + \frac{r_2}{2} \right) \|\underline{\delta}'\|^2 \geq 0 \quad \forall \underline{\delta}' \quad (4.43)$$

de sorte que le minimum est obtenu pour

$$\underline{\delta}' = 0 \quad (4.44)$$

- **2^{ème} cas :** $\|\underline{\beta}'\| > k\sqrt{2}$

Posant :

$$F(\underline{\underline{\delta}}') = \left(\mu + \frac{r_2}{2}\right) \|\underline{\underline{\delta}}'\|^2 + k\sqrt{2}\|\underline{\underline{\delta}}'\| - \underline{\underline{\beta}}' : \underline{\underline{\delta}}' \quad (4.45)$$

il vient pour $\underline{\underline{\delta}}' \neq 0$:

$$dF = (2\mu + r_2)\underline{\underline{\delta}}' : d\underline{\underline{\delta}}' + k\sqrt{2} \frac{\underline{\underline{\delta}}' : d\underline{\underline{\delta}}'}{\|\underline{\underline{\delta}}'\|} - \underline{\underline{\beta}}' : d\underline{\underline{\delta}}' \quad (4.46)$$

de sorte que la valeur de $\underline{\underline{\delta}}'$ rendant la fonction F minimale vérifie :

$$(2\mu + r_2)\underline{\underline{\delta}}' + k\sqrt{2} \frac{\underline{\underline{\delta}}'}{\|\underline{\underline{\delta}}'\|} - \underline{\underline{\beta}}' = 0 \quad (4.47)$$

ce qui implique que $\underline{\underline{\delta}}'$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\delta}}' = \alpha \underline{\underline{\beta}}' \quad (4.48)$$

Supposant alors que $\alpha > 0$, ce qu'il conviendra à vérifier a posteriori, on a :

$$\frac{\underline{\underline{\delta}}'}{\|\underline{\underline{\delta}}'\|} = \frac{\underline{\underline{\beta}}'}{\|\underline{\underline{\beta}}'\|} \quad (4.49)$$

d'où

$$\underline{\underline{\delta}}' = \frac{1}{2\mu + r_2} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\|\underline{\underline{\beta}}'\|}\right) \underline{\underline{\beta}}' \quad (4.50)$$

permettant ainsi de vérifier que $\alpha > 0$, puisque $\|\underline{\underline{\beta}}'\| > k\sqrt{2}$.

Le résultat de la minimisation locale de F peut s'écrire en définitive :

$$\underline{\underline{\delta}}' = \frac{1}{2\mu + r_2} \left\langle 1 - \frac{k\sqrt{2}}{\|\underline{\underline{\beta}}'\|} \right\rangle \underline{\underline{\beta}}' \quad (4.51)$$

où $\langle x \rangle$ désigne la partie positive de x .

4.4.2 Algorithme adopté

Nous avons adapté l'algorithme ALG2 de type UZAWA présenté dans Fortin et Glowinski (1983) [25] à notre problème.

L'algorithme est initialisé à l'itération $i = 0$, où l'on se donne arbitrairement les valeurs de \underline{U}' , p' et $\underline{\lambda}'$:

$$\underline{U}' = \underline{U}^{(0)} \quad , \quad p' = p^{(0)} \quad , \quad \underline{\lambda}' = \underline{\lambda}^{(0)} \quad (4.52)$$

A l'itération $i \geq 1$, les étapes de calcul suivantes sont réalisées :

- **Etape n°1** : Calcul de $\underline{\delta}^{(i)}$ en fonction de $\underline{\lambda}^{(i-1)}$ et $\underline{U}^{(i-1)}$ évaluée à l'itération précédente $i - 1$, par la formule :

$$\underline{\delta}^{(i)} = \frac{1}{2\mu + r_2} \left\langle 1 - \frac{k\sqrt{2}}{\|\underline{\beta}^{(i-1)}\|} \right\rangle \underline{\beta}^{(i-1)} \quad (4.53)$$

avec $\underline{\beta}^{(i-1)} = \underline{\lambda}^{(i-1)} + \frac{r_2}{2} \underline{d}(\underline{U}^{(i-1)})$.

- **Etape n°2** : Actualisation du multiplicateur de Lagrange associé à la condition $\underline{d}(\underline{U}) = \underline{\delta}$ par la relation suivante :

$$\underline{\lambda}^{(i)} = \underline{\lambda}^{(i-1)} + r_2 \left(\underline{d}(\underline{U}^{(i-1)}) - \underline{\delta}^{(i)} \right) \quad (4.54)$$

- **Etape n°3** : Détermination de $\underline{U}^{(i)}$ en fonction de $p^{(i-1)}$, $\underline{\lambda}^{(i)}$ et $\underline{\delta}^{(i)}$ en minimisant la fonctionnelle quadratique suivante de \underline{U}' :

$$\mathcal{G} \left(\underline{U}^{(i)}, p^{(i-1)}, \underline{\delta}^{(i)}, \underline{\lambda}^{(i)} \right) = \min_{\underline{U}'} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_t} \frac{r_1}{2} (\operatorname{div} \underline{U}')^2 d\Omega_t - \int_{\Omega_t} p^{(i-1)} \operatorname{div} \underline{U}' d\Omega_t \\ + \int_{\Omega_t} \left[\frac{r_2}{2} \left(\underline{d}(\underline{U}') - 2\underline{\delta}^{(i)} \right) + \underline{\lambda}^{(i)} \right] : \underline{d}(\underline{U}') d\Omega_t \\ - \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}') \end{array} \right. \quad (4.55)$$

- **Etape n°4** : Actualisation du multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité

$$p^{(i)} = p^{(i-1)} - r_1 \operatorname{div} \underline{U}^{(i)} \quad (4.56)$$

La procédure itérative s'achève lorsque des tests de convergence appropriés sont satisfaits. Grâce à une telle procédure de *décomposition*, l'algorithme ci-dessus transforme le problème de minimisation initial, difficile à traiter, en une famille de problèmes classiques (calcul explicite de l'étape n°1, recherche du minimum d'une forme quadratique à l'étape n°3), *coordonnés* par le biais des multiplicateurs de Lagrange, dont les valeurs sont actualisées à chaque itération.

4.4.3 Un exemple illustratif

Afin de bien comprendre cette méthode et de la valider, on se propose de l'appliquer sur le problème simple d'une couche de sable liquéfié d'extension infinie et d'épaisseur constante H , reposant sur un plan incliné d'un angle θ . Pour simplifier l'application, on suppose que le sol liquéfié est soumis à un seul paramètre de chargement (les forces de pesanteur), et qu'il est en adhérence parfaite avec le substratum incliné, supposé rigide.

Le champ de vitesse étant recherché sous la forme :

$$\underline{U} = f(y)\underline{e}_x \quad \text{avec } f(y=0) = 0 \quad (4.57)$$

le tenseur taux de déformation s'écrit donc :

$$\underline{d} = \frac{f'}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (4.58)$$

Le problème de minimisation relatif à ce cas simple de référence se réduit à :

$$\mathcal{F}(\underline{U}^*) = \mathcal{F}(f^*) = \min_f \left\{ \mathcal{F}(f); f(0) = 0 \right\} \quad (4.59)$$

où f^* désigne le profil de vitesse solution.

$$\mathcal{F}(f) = \int_0^H \left(\frac{\mu}{2} f'^2 + k\sqrt{2} |f'| - pf \right) dy \quad \text{avec} \quad p = \rho g \sin \theta \quad (4.60)$$

Le Lagrangien augmenté s'écrit alors pour tout $r \geq 0$:

$$\mathcal{L}_r(f, \delta, \lambda) = \int_0^H \left[\frac{\mu}{2} \delta^2 + k\sqrt{2} |\delta| - pf + \lambda(f' - \delta) + \frac{r}{2} (f' - \delta)^2 \right] dy \quad (4.61)$$

En choisissant une modélisation simple par éléments finis linéaires à une dimension d'espace, on découpe l'intervalle $[0, H]$ en un nombre fini de segments sur chacun desquels le profil de vitesse reste une fonction affine et continue de y (figure 4.6).

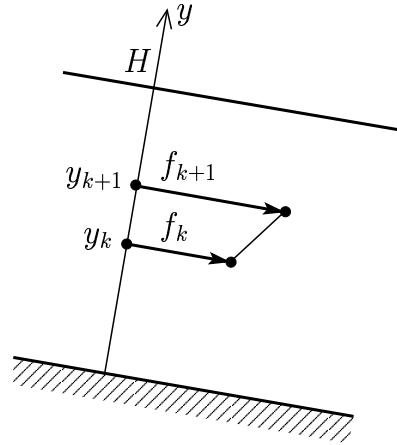


FIG. 4.6: Modélisation unidimensionnelle.

Sur le segment $[y_k, y_{k+1}]$, la vitesse s'écrit sous la forme :

$$f(y) = f_k + \left(\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} \right) (f_{k+1} - f_k) \quad (4.62)$$

où $f_k = f(y_k)$ et $f_{k+1} = f(y_{k+1})$.

* En fixant f et δ , λ^* maximise $\mathcal{L}_r(f, \delta, \lambda)$.

* A f et λ fixés, δ^* rend minimale $\mathcal{L}_r(f, \delta, \lambda)$. On obtient alors le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\delta} \left\{ \int_0^H \left[\frac{\mu+r}{2} \delta^2 + k\sqrt{2}|\delta| - (rf' + \lambda)\delta \right] dy \right\} \quad (4.63)$$

dont la solution se calcule explicitement comme suit :

$$\begin{cases} \delta^* = 0 & \text{si } |\beta| \leq k\sqrt{2} \\ \delta^* = \frac{1}{\mu+r} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{|\beta|} \right) \beta & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.64)$$

avec $\beta = \lambda + rf'$.

* A δ et λ fixés, f^* rend minimale $\mathcal{L}_r(f, \delta, \lambda)$. On obtient alors le problème de minimisation suivant :

$$\min_f \left\{ \int_0^H \left[\frac{r}{2} f'^2 + (\lambda - r\delta)f' - pf \right] dy \right\} = \min_f \{ \mathcal{G}(f) \} = \mathcal{G}(f^*) \quad (4.65)$$

Les différents termes de la fonctionnelle \mathcal{G} relatifs au segment $[y_k, y_{k+1}]$ sont aisément calculables :

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} p f dy = \frac{p}{2} (y_{k+1} - y_k) (f_{k+1} - f_k) \quad (4.66)$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{r}{2} f'^2 dy = \frac{r}{2} \frac{1}{y_{k+1} - y_k} (f_{k+1}^2 + f_k^2 - 2f_k f_{k+1}) \quad (4.67)$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} (\lambda_k - r\delta_k) f' dy = (\lambda_k - r\delta_k) (f_{k+1} - f_k) \quad (4.68)$$

L'indice k attribué à λ_k et δ_k désigne la maille k relative au segment $[y_k, y_{k+1}]$.

La fonctionnelle \mathcal{G}_k peut ainsi s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{G}_k = \frac{1}{2} {}^t \{f\}_k [d]_k \{f\}_k - {}^t \{la\}_k \{f\}_k - {}^t \{p\}_k \{f\}_k \quad (4.69)$$

avec

$$\{f\}_k = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$[d]_k = \frac{r}{y_{k+1} - y_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\{p\}_k = \frac{p}{2}(y_{k+1} - y_k) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$[la]_k = (\lambda_k - r\delta_k) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

La fonctionnelle \mathcal{G} calculée sur toute l'épaisseur du massif en tenant compte de la condition aux limites $f(0) = 0$, a pour expression :

$$\mathcal{G} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{G}_k = \frac{1}{2} {}^t\{F\}[D]\{F\} - {}^t\{LA\}\{F\} - {}^t\{P\}\{F\} \quad (4.74)$$

avec ${}^t\{F\} = [f_1, \dots, f_m]$. Les matrices $[D]$, $\{P\}$ et $\{LA\}$ étant obtenues par assemblage des matrices élémentaires $[d]_k$, $\{p\}_k$ et $\{la\}_k$.

La recherche du minimum de la forme quadratique par rapport aux variables f_k donne par dérivation le système linéaire suivant :

$$[D]\{F\} = \{P\} + \{LA\} \quad (4.75)$$

L'algorithme décrit de façon générale dans la section 4.4.2 devient alors :

- Initialisation : $\lambda_k^{(0)}$ et $f_k^{(0)}$ donnés arbitrairement.
- Pour $n \geq 1$:
 - Calcul de $\delta_k^{(n)}$ en fonction de $\lambda_k^{(n-1)}$, $f_k^{(n-1)}$ et $f_{k+1}^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} \delta_k^{(n)} = 0 & \text{si } |\beta_k^{(n-1)}| \leq k\sqrt{2} \\ \delta_k^{(n)} = \frac{1}{\mu + r} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{|\beta_k^{(n-1)}|} \right) \beta_k^{(n-1)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.76)$$

où $\beta_k^{(n-1)} = \lambda_k^{(n-1)} + r f_k^{(n-1)}$ et $f_k^{(n-1)} = \frac{f_{k+1}^{(n-1)} - f_k^{(n-1)}}{y_{k+1} - y_k}$.

– Actualisation du multiplicateur de Lagrange $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n-1)} + r (f_k^{(n-1)} - \delta_k^{(n)})$.

– Résolution de (4.75) en fonction de $\lambda_k^{(n)}$ et $\delta_k^{(n)}$, pour trouver $f_k^{(n)}$.

- Tests de convergence.

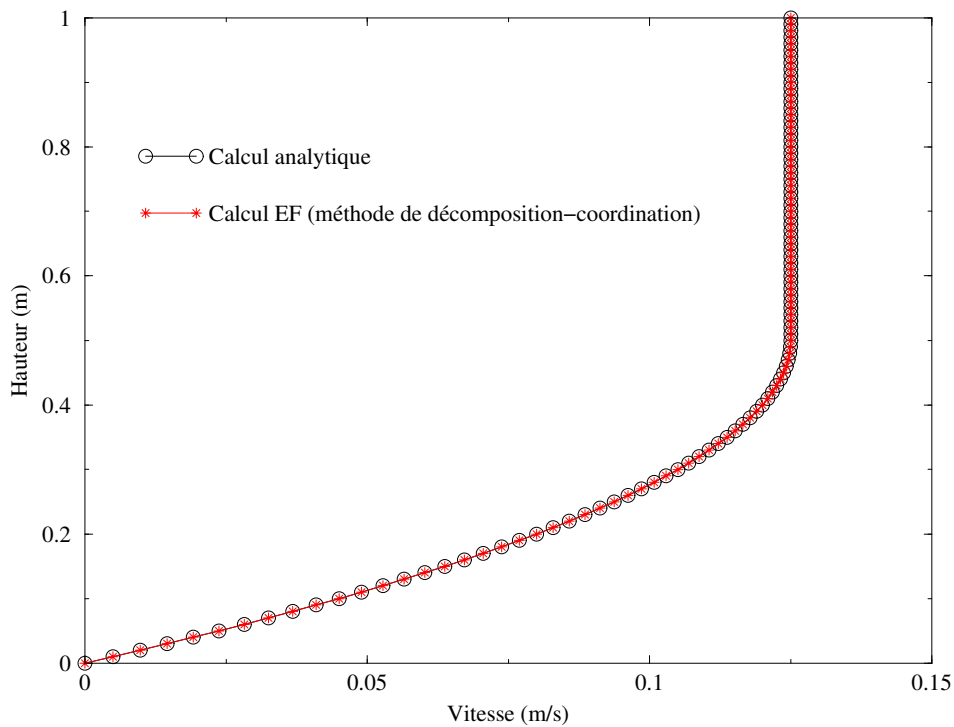


FIG. 4.7: Profil de vitesse ($\rho g = 20kN/m^3$, $\mu = 1kPa.s$, $H = 1m$, $\sin \theta = 0,05$ et $k = 0,5kPa$).

En appliquant cette procédure numérique mise en œuvre dans le cadre d’une méthode des éléments finis (éléments $P1$ pour la vitesse et $P0$ pour la variable taux de déformation), on retrouve (figure 4.7), avec une très bonne précision et pour un temps de calcul très court, le profil de vitesse suivant établi par un calcul analytique (cf. paragraphe 3.4.2 du chapitre 3)

$$\underline{U} = f(y)\underline{e}_x \text{ avec } f(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \begin{cases} y \left(H - H^* - \frac{y}{2} \right) & 0 \leq y \leq H - H^* \\ \frac{(H - H^*)^2}{2} & y > H - H^* \end{cases} \quad \text{où } H^* = \frac{k}{\rho g \sin \theta} \quad (4.77)$$

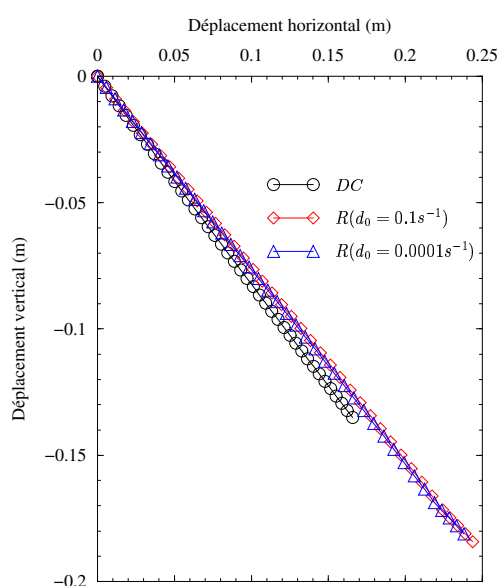
4.5 Premières simulations et comparaison des méthodes de régularisation et de décomposition-coordination

La méthode d'approximation par régularisation et celle de décomposition-coordination par Lagrangien augmenté ont été implémentées dans un code de calcul, écrit en langage *C*, développé dans le contexte de la méthode des éléments finis en utilisant notre approche. Ce dernier a été utilisé pour simuler le problème bidimensionnel de l'évolution dans le temps d'un massif de sable liquéfié (de hauteur initiale $h = 1m$ et de longueur $l = 3m$) modélisé comme un matériau de Bingham de viscosité $\mu = 1kPa.s$ et de seuil de cisaillement variant de $k = 0$ (fluide Newtonien) à $4kPa$. Le moteur de cette évolution est constitué des forces de pesanteur ($\rho g = 18kN/m^3$). Le sol est supposé, provisoirement pour cet exemple de comparaison, en adhérence parfaite avec ses deux bases fixes en dessous et à gauche, ces bases peuvent être un substratum rocheux, ou tout simplement du sol non liquéfié. Les autres bords sont libres d'efforts.

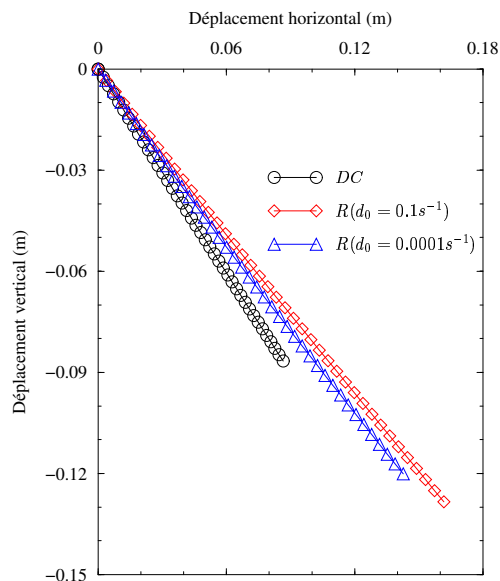
Nous modélisons le massif du sol à l'aide d'un maillage d'éléments finis de type Q4 relativement fin (30×10 éléments). Toutes les simulations sont conduites sur un intervalle de temps $t = 1s = n \times \Delta t$, $\Delta t = 0,025s$ étant le pas de temps adopté, soit $n = 40$ pas de temps.

Une comparaison des performances des deux méthodes est donnée sur la figure 4.8. Nous nous sommes concentrés sur l'analyse des trajectoires du point d'extrémité droite du massif pendant la période de temps $t = 1s$, pour les différentes valeurs de k , en utilisant la méthode de décomposition-coordination, notée *DC*, puis la méthode de régularisation, notée *R*, pour deux différentes valeurs du paramètre de régularisation $d_0 = 0,1s^{-1}$ et $d_0 = 0,0001s^{-1}$.

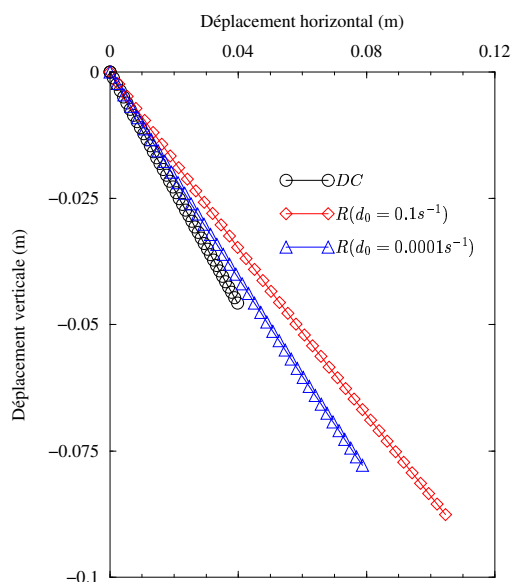
Les résultats des simulations obtenues en utilisant les deux méthodes sont bien évidemment identiques dans le cas d'une modélisation Newtonienne ($k = 0$). Ils commencent à s'écarter, et divergent de plus en plus lorsque le seuil de cisaillement k augmente. Le code



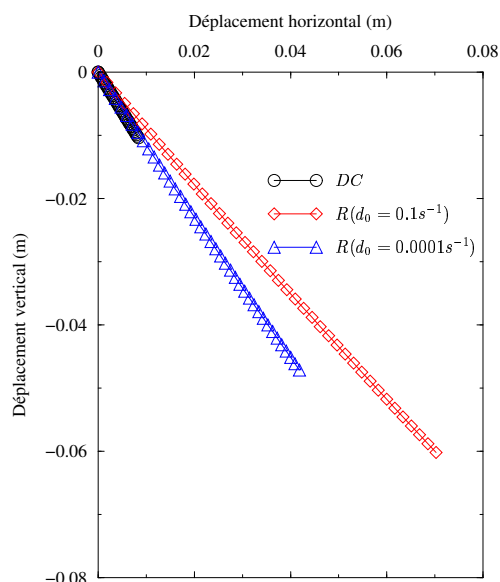
(a) $k = 1kPa$



(b) $k = 2kPa$



(c) $k = 3kPa$



(d) $k = 4kPa$

FIG. 4.8: Comparaison des trajectoires du point d'extrémité droite du massif en utilisant les méthodes de régularisation (R) et de décomposition-coordination (DC) pour les différentes valeurs du seuil de cisaillement k .

de calcul incorporant la méthode de régularisation surestime les déplacements, même pour une valeur relativement petite du paramètre de régularisation ($d_0 = 0.0001s^{-1}$). Ceci est prévisible, puisque pour un état de contrainte donné, le taux de déformation associé dans

le cas du modèle de Bingham régularisé est plus important que celui correspondant au modèle de Bingham initial (figure 4.9).

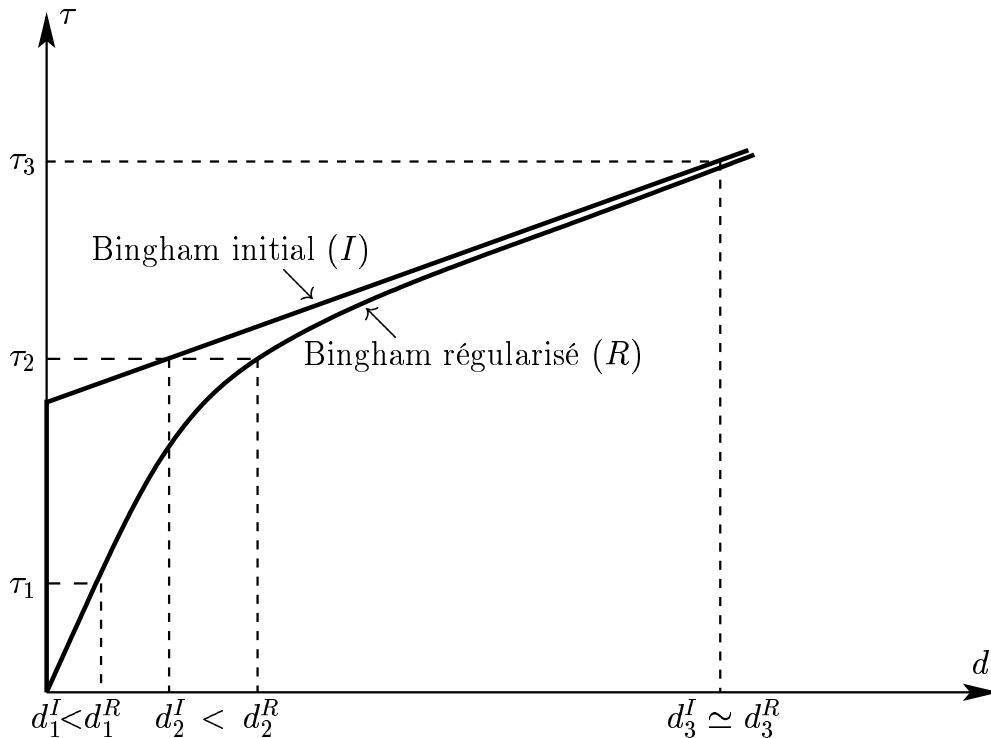


FIG. 4.9: Taux de déformation associés à un état de contrainte donné dans les cas des modèles de Bingham initial et régularisé.

La technique de régularisation présente donc l'inconvénient de ne conduire qu'à une approximation de la solution, d'autant meilleure que le paramètre de régularisation est petit, mais au prix de temps de calcul de plus en plus importants au fur et à mesure que ce paramètre diminue. Cette technique surestime considérablement la solution quand les déformations sont petites (figure 4.8-d). La méthode de décomposition-coordination par lagrangiens augmentés semble en revanche être très performante. Elle présente aussi l'avantage d'être facile à formuler et pratique à utiliser. Dans tout ce qui suivra, toutes les simulations seront faites en utilisant cette dernière méthode.

La figure 4.10 illustre les configurations déformées du massif de sable liquéfié à l'instant $t = 1s$ ainsi que les vitesses associées aux nœuds pour différentes valeurs du seuil de

cisaillement, obtenues en utilisant la méthode de décomposition-coordination par lagrangiens augmentés.

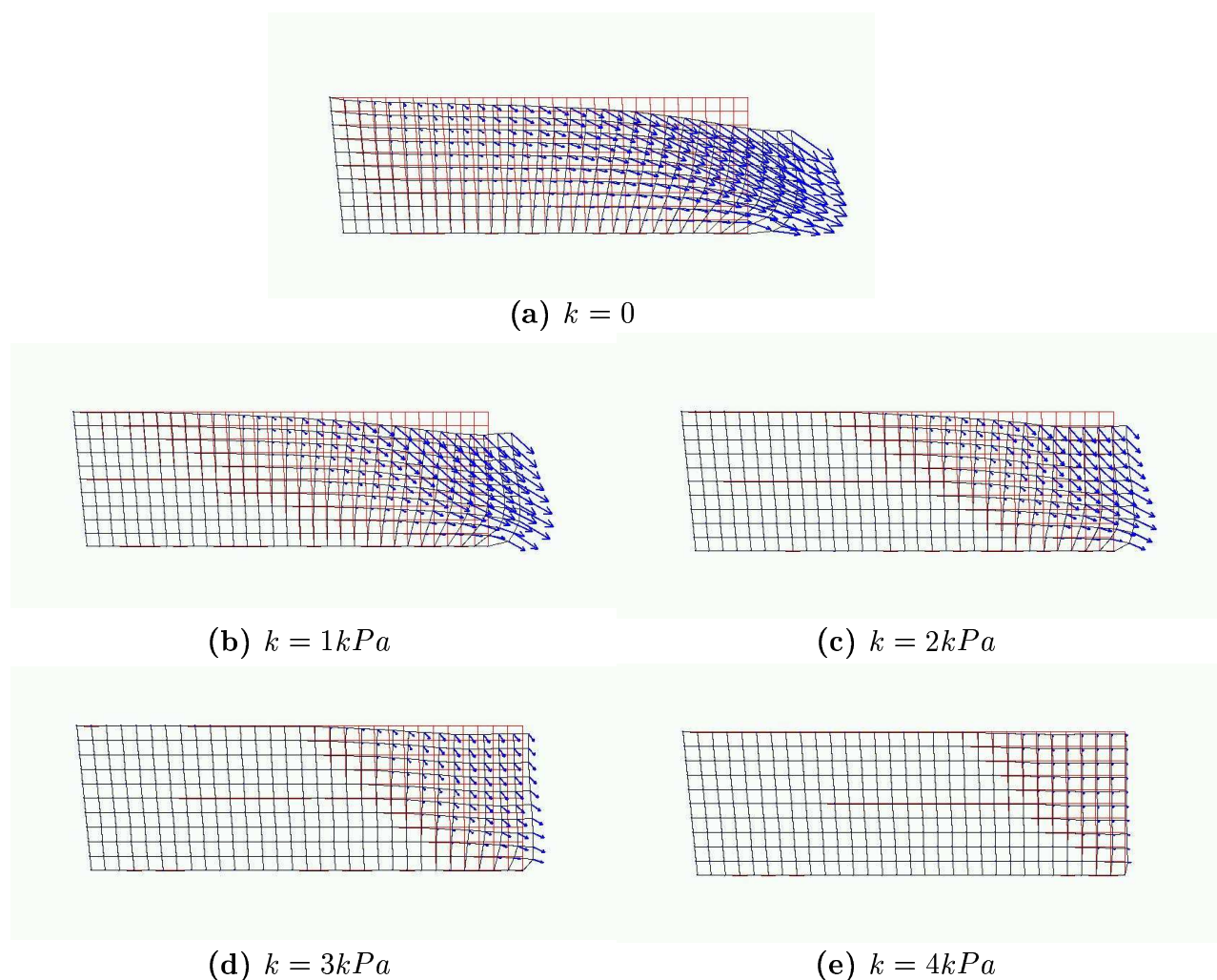


FIG. 4.10: les configurations déformées du sol liquéfié à l'instant $t = 1s$ pour les différentes valeurs du seuil de cisaillement

En analysant les champs des vitesses dans les différentes simulations représentés par des flèches, on voit clairement que l'adoption d'un modèle de Bingham à la place d'un modèle Newtonien revient à augmenter la résistance du sol et par la suite limite l'amplitude des changements de géométrie et de l'écoulement du massif.

Le volume du sol déformé mobilisé pendant l'écoulement devient de moins en moins important lorsqu'on augmente la valeur du seuil de cisaillement k , et le massif demeure immobile à partir d'une certaine valeur $k = k^l$. Ce résultat est facilement confirmé en utilisant la théorie de l'analyse limite ou le raisonnement du calcul à la rupture (voir

section 3.3 du chapitre 3). En effet, un résultat classique stipule que la stabilité d'un talus vertical constitué de sol purement cohérent est assurée quand (Salençon (1990) [59]) :

$$\frac{\rho g H}{k} \leq K \quad (4.78)$$

avec $K \simeq 3,8$ un paramètre sans dimension. Il s'ensuit, en adoptant les paramètres géométriques et mécaniques donnés ci-dessus, que la valeur du seuil de cisaillement au dessus de laquelle le massif demeure immobile est $k^l \simeq 4,7kPa$.

* *
 *
 *

Chapitre 5

Calcul des efforts sur les structures et analyse des problèmes d'écoulements bidimensionnels

Sommaire

5.1	Introduction	129
5.2	Calcul des efforts sur les structures	129
5.2.1	Le problème posé	129
5.2.2	Modélisation newtonienne	134
5.2.3	Modélisation de Bingham	137
5.3	Etude de l'influence de la prise en compte des termes d'accélération dans les problèmes d'évolution et de calcul des efforts	141
5.3.1	Problèmes à simuler	141
5.3.2	$k = 0$ (modèle Newtonien)	142
5.3.3	$k \neq 0$ (modèle de Bingham)	145
5.4	Mise au point d'un outil numérique pour l'analyse des problèmes bidimensionnels	146

5.1 Introduction

Ce dernier chapitre se propose de valoriser l'outil numérique mis au point dans le chapitre précédent pour traiter les problèmes d'écoulements de massifs de sol liquéfié, modélisé comme un milieu de Bingham, et plus précisément de mettre en œuvre la méthode de décomposition-coordination par Lagrangien augmenté, reconnue comme étant la plus performante.

La section 5.2 est consacrée à la problématique du calcul des efforts exercés par l'écoulement du massif sur des structures. Moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, on montre que ce problème peut être découpé de celui de la simulation de l'écoulement proprement dit, et se ramener à celui de l'écoulement stationnaire autour d'un obstacle cylindrique fixe. L'outil numérique précédent est alors exploité afin d'établir des formules analytiques donnant directement la valeur de l'effort exercé par l'écoulement sur l'obstacle.

La section 5.3 traite la simulation d'un écoulement bidimensionnel de sol liquéfié et de son action sur une structure, en mettant plus particulièrement l'accent sur la nécessité ou non de prendre en compte les termes d'accélération dans les calculs.

Enfin la dernière partie du chapitre porte sur une analyse paramétrique complète d'un écoulement bidimensionnel, c'est-à-dire la simulation proprement dite de l'évolution du massif d'une part, le calcul des efforts exercés par cet écoulement sur une rangée d'obstacles cylindriques (piles de pont, pieux de fondation) placée en travers, d'autre part. On y analyse plus spécifiquement l'influence, parfois considérable, de l'introduction d'une condition de glissement à l'interface entre le sol liquéfié et le substratum, considéré comme rigide.

5.2 Calcul des efforts sur les structures

5.2.1 Le problème posé

Nous nous proposons d'évaluer les efforts exercés par l'écoulement de sol liquéfié sur les structures avoisinantes. La configuration traitée, représentée sur la figure 5.1, est celle d'une rangée d'obstacles cylindriques circulaires verticaux (rayon R), régulièrement espacés (intervalle $2H$), placée perpendiculairement à la direction de l'écoulement. Ces obstacles schématisent par exemple une file de pieux ou de piles de pont.

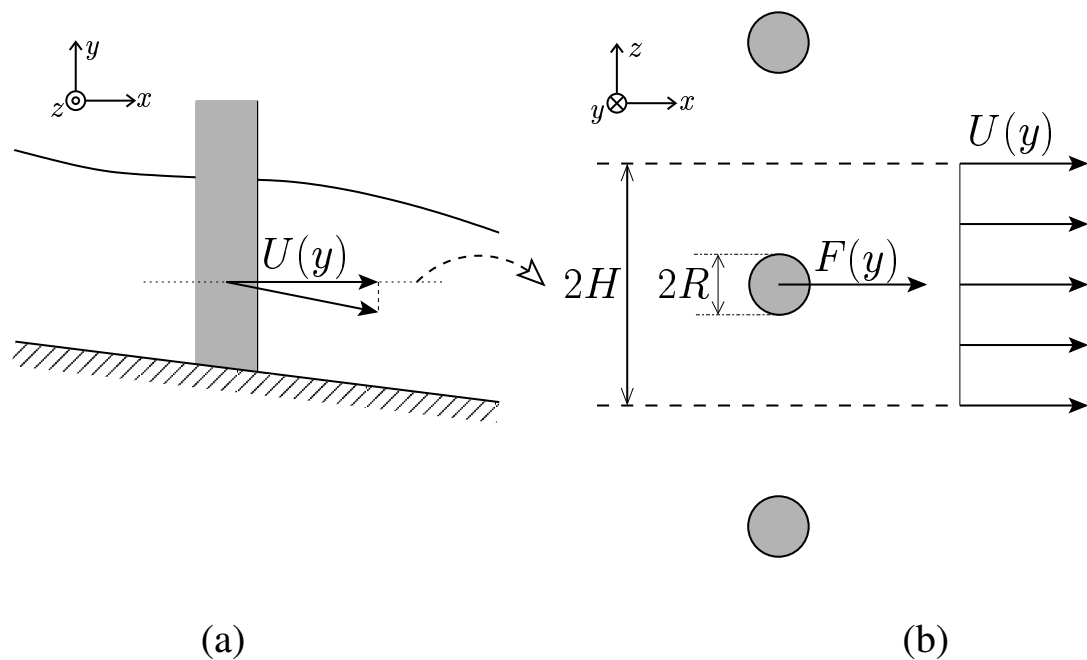


FIG. 5.1: Action d'un écoulement de sol liquéfié sur une rangée d'obstacles cylindriques régulièrement espacés, placée en travers.

On adoptera le jeu d'hypothèses simplificatrices suivant :

(H1) Les obstacles sont *fixes et indéformables*.

(H2) Leur présence n'a pas d'influence significative sur la cinématique d'évolution *globale* du massif liquéfié. Cela suppose en particulier que l'intervalle $2H$ entre deux obstacles successifs soit suffisamment grand au regard de leur diamètre $2R$. Cette hypothèse entraîne en particulier un "découplage" entre le calcul de l'écoulement du massif et celui des efforts exercés sur les obstacles.

(H3) Désignant par $F(y)$ la densité par unité de longueur verticale de chaque obstacle, de la composante horizontale de l'effort exercé par l'écoulement du massif, cette densité peut être calculée à partir de la résolution du problème d'écoulement dans le plan horizontal (x, z) , représenté sur la figure 5.1-b (vue *de dessus*) et pour lequel l'écoulement en des points situés suffisamment loin en amont et en aval des obstacles est

uniforme, de vitesse $U(y)$ égale à la composante *horizontale* de la vitesse au point du massif où est situé l'obstacle. Cette vitesse est alors une *donnée* du problème d'écoulement stationnaire plan, ainsi défini.

La résolution de ce dernier problème peut être effectuée en se limitant à un domaine quadrilatère de hauteur $2H$ et de longueur $2L$ suffisamment grande ($L \gg R$), au centre duquel est placé l'obstacle cylindrique (figure 5.2).

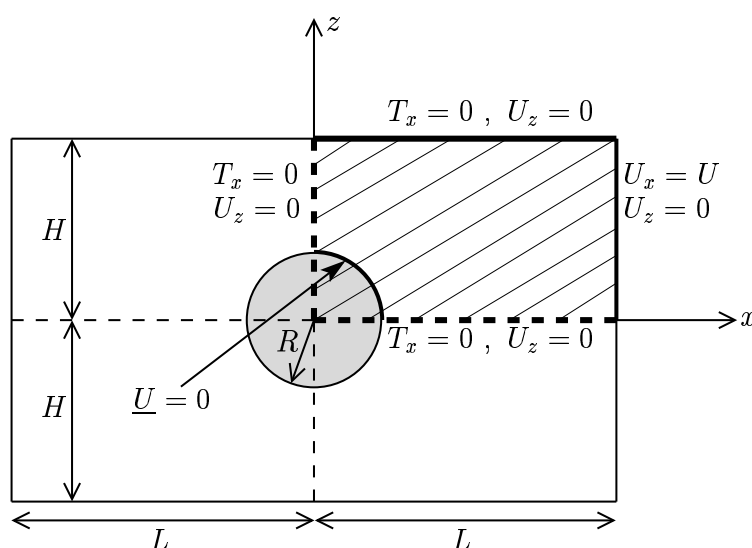


FIG. 5.2: Calcul de l'effort exercé par l'écoulement du massif sur un obstacle circulaire.

Les conditions aux limites imposées sont les suivantes :

* en $x = \pm L$

$$U_x = U \quad , \quad U_z = 0 \quad (5.1)$$

* en $z = \pm H$

$$T_x = 0 \quad , \quad U_z = 0 \quad (5.2)$$

* en $r = R$ (contour de l'obstacle)

$$\underline{U} = 0 \quad (5.3)$$

où T_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante ($i = x, z$) du vecteur contrainte s'exerçant en un point du bord correspondant.

En outre, l'exploitation des symétries va nous permettre de réduire le domaine étudié au quart supérieur droit du domaine précédent (zone hachurée sur la figure 5.2), avec en sus des conditions aux limites précédentes :

* en $z = 0$

$$T_x = 0 \quad , \quad U_z = 0 \quad (5.4)$$

ainsi que :

* en $x = 0$

$$T_x = 0 \quad , \quad U_z = 0 \quad (5.5)$$

Si la condition (5.4) résulte à l'évidence de la symétrie du problème par rapport à l'axe Ox , la condition (5.5) peut être déduite du raisonnement suivant.

Désignant par \underline{U}^+ (resp. \underline{U}^-) le champ de vitesse solution du problème d'écoulement pour lequel on impose la vitesse $+U\mathbf{e}_x$ (resp. $-U\mathbf{e}_x$) suffisamment loin en amont et en aval de l'obstacle, on a bien évidemment :

$$U_x^+(x = 0, z) = -U_x^-(x = 0, z) \quad (5.6)$$

et

$$U_z^+(x = 0, z) = U_z^-(x = 0, z) \quad (5.7)$$

Etant donné par ailleurs que la superposition de ces champs est égale au champ identiquement nul :

$$\underline{U}^+ + \underline{U}^- = 0 \quad (5.8)$$

il en résulte par comparaison de (5.7) et (5.8) :

$$U_z^+(x = 0, z) = U_z^-(x = 0, z) = 0 \quad (5.9)$$

La condition de nullité de la contrainte normale sur ce même bord :

$$T_x(x = 0, z) = 0 \quad (5.10)$$

découle d'un raisonnement analogue portant cette fois-ci sur les champs de contrainte.

L'algorithme de calcul mis au point dans le chapitre précédent, qui se base sur la technique de décomposition coordination par la méthode du lagrangien augmenté, pour déterminer à tout instant le champ de vitesse correspondant à l'évolution du massif liquéfié, est utilisé ici pour résoudre numériquement ce problème d'écoulement stationnaire.

Les simulations ont été effectuées en choisissant la valeur du rapport $\frac{L}{H}$ autour de 5 ou 6 (valeur à partir de laquelle ce rapport n'a plus d'influence sur le résultat) et en faisant varier le rapport $\frac{H}{R}$ (>1).

Des éléments finis de type $Q4$ ont été adoptés pour simuler ce problème auxiliaire de calcul des efforts appliqués par l'écoulement stationnaire d'un fluide Newtonien (ou viscoplastique) autour d'un obstacle cylindrique. La figure 5.3 illustre le maillage utilisé pour effectuer les simulations dans le cas particulier où $\frac{H}{R} = 2$ et $\frac{L}{H} = 6$.

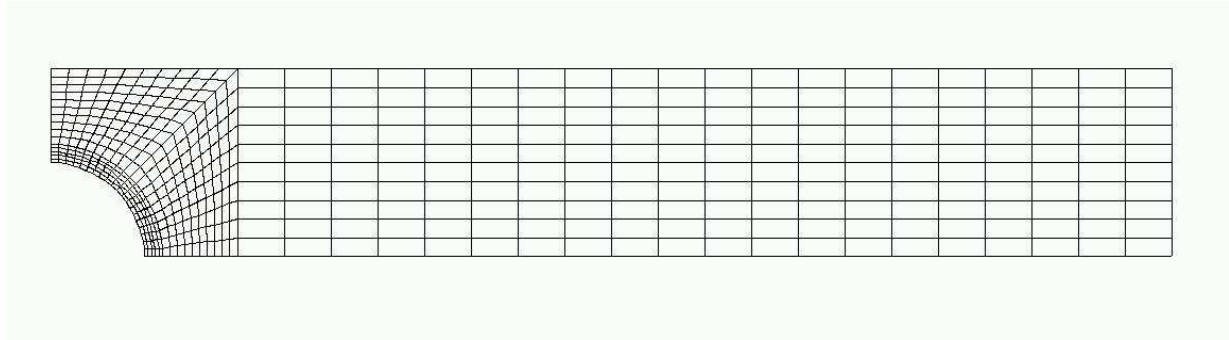


FIG. 5.3: Exemple de maillage d'éléments finis $Q4$ utilisé pour résoudre le problème auxiliaire du calcul des efforts sur un obstacle cylindrique.

5.2.2 Modélisation newtonienne

L'analyse dimensionnelle du problème représenté sur la figure 5.2, montre que l'effort $F_{(N)}$ par unité de longueur du cylindre, exercé par l'écoulement du massif de sable liquéfié modélisé comme un matériau newtonien, et défini par :

$$F_{(N)} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}(R, \theta) \cdot \underline{e}_r R d\theta \quad (5.11)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(R, \theta) \cdot \underline{e}_r$ est le vecteur-contrainte représentant à l'action du fluide sur la facette de normale \underline{e}_r du contour du cylindre, se met nécessairement sous la forme :

$$F_{(N)} = \mu U f\left(\frac{H}{R}\right) \quad (5.12)$$

où μ est la viscosité du fluide, tandis que $f\left(\frac{H}{R}\right)$ est une fonction sans dimension du paramètre adimensionnel $\frac{H}{R}$ caractérisant l'espace relatif entre deux obstacles voisins. L'indice (N) désigne le modèle newtonien.

Nous introduisons le paramètre sans dimension suivant :

$$F_{(N)}^* = \frac{F_N}{\mu U} = f\left(\frac{H}{R}\right) \quad (5.13)$$

Les résultats des simulations numériques sont reportés sur la figure 5.4, sous forme de points.

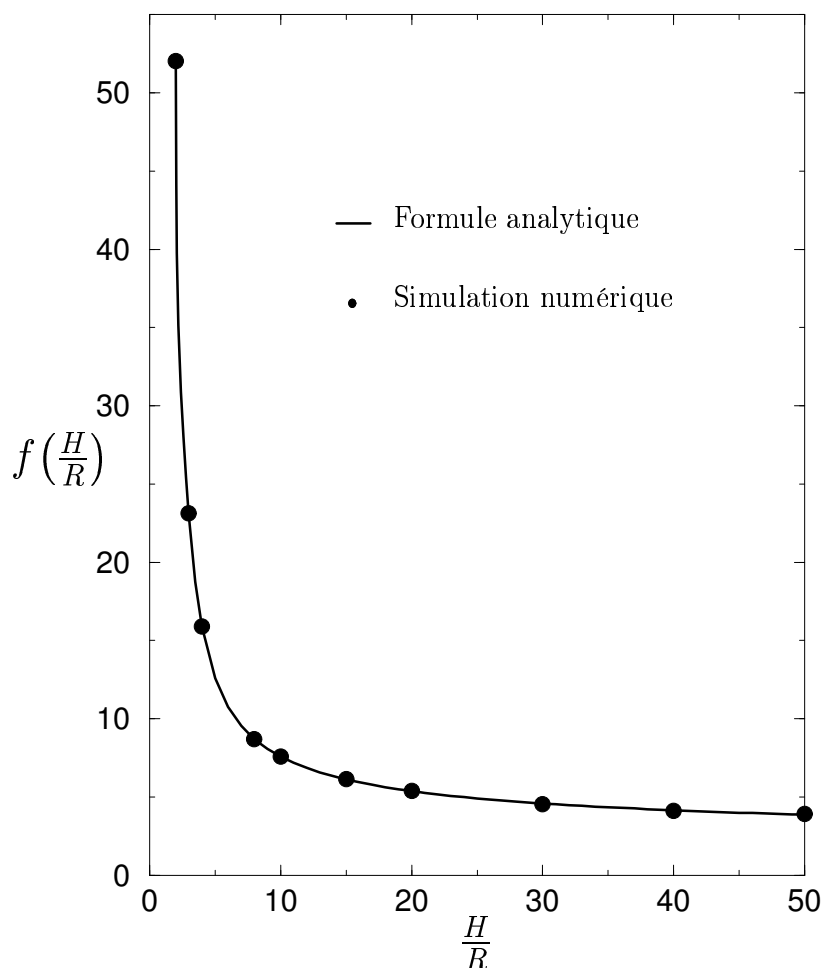


FIG. 5.4: Courbe donnant l'évaluation de la fonction $f\left(\frac{H}{R}\right)$.

Ces valeurs numériques ont été ajustées par une courbe, représentée sur la même figure, dont l'équation est de la forme :

$$f\left(\frac{H}{R}\right) = \frac{4\pi}{\text{Ln}\left(\frac{H}{R}\right) + a_1 + a_2\left(\frac{R}{H}\right)^2 + a_3\left(\frac{R}{H}\right)^4 + a_4\left(\frac{R}{H}\right)^6 + a_5\left(\frac{R}{H}\right)^8} = F_{(N)}^* \quad (5.14)$$

où les coefficients a_i ont été déterminés en utilisant la méthode des moindres carrés :

$$a_1 = -0,6334; a_2 = -2,6082; a_3 = 91,6333; a_4 = -750,8805; a_5 = 1750,854 \quad (5.15)$$

Le tableau 5.1 donne les valeurs numériques de $F_{(N)}^*$ pour différents rapports $\frac{H}{R}$, ainsi que l'écart relatif avec celles fournies par l'équation (5.14) où les coefficients sont donnés

par (5.15). L'équation (5.14) constitue donc un moyen très pratique de calculer avec une très bonne approximation l'effort adimensionnel pour les différentes géométries possibles. Cette approximation peut devenir encore bien meilleure si l'on adopte d'autres géométries (c'est-à-dire pour d'autres valeurs de $\frac{H}{R}$) et l'on utilise des maillages d'éléments finis plus fins.

H/R	L/R	$F_{(N)}^*$ (M.E.F.)	$F_{(N)}^*$ (Eq (5.14))	% Erreur
2 : 1	12 : 1	52, 0218	52, 0252	0, 006
3 : 1	18 : 1	23, 1168	23, 12	0, 014
4 : 1	24 : 1	15, 8865	15, 8823	0, 026
10 : 1	60 : 1	7, 5799	7, 6089	0, 38
15 : 1	90 : 1	6, 1277	6, 086	0, 68
30 : 1	150 : 1	4, 5314	4, 5448	0, 29
40 : 1	200 : 1	4, 1151	4, 1149	0, 005

TAB. 5.1: Comparaison des valeurs de $F_{(N)}^*$ trouvées numériquement avec celles calculées en utilisant l'équation (5.14.)

Il convient d'observer :

- D'une part que l'effort exercé par l'écoulement sur un tel obstacle cylindrique, ne dépend que de l'espacement relatif $\frac{H}{R}$, et non pas par exemple du diamètre de l'obstacle.
- D'autre part que la valeur de la fonction $F_{(N)}^*$ tend asymptotiquement vers zéro lorsque les obstacles s'écartent indéfiniment ($\frac{H}{R} \rightarrow +\infty$), de sorte qu'un obstacle circulaire placé dans un écoulement d'extension infinie, n'est soumis à aucun effort ! Ce résultat *a priori* surprenant est appelé *paradoxe de Stokes* (Happel et Brenner (1973) [31]).

Un tel paradoxe n'est en fait qu'apparent, car on peut montrer que l'*approximation quasi-statique*, faite jusqu'à présent, revient à négliger les termes d'accélération vis-à-vis des termes de viscosité, lorsque l'on s'éloigne de l'obstacle cylindrique, c'est-à-dire en pratique lorsque :

$$\frac{r}{R} \sim \frac{1}{\mathcal{R}_e} = \frac{\mu}{\rho R U} \tag{5.16}$$

où \mathcal{R}_e est le *nombre de Reynolds*, supposé petit. Or la prise en compte de ces termes d'accélération en champ lointain permet de calculer l'effort linéique, qui vaut alors (Proudman et Pearson (1957) [55]; Moffat (1998) [44]) :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{\text{Ln}\left(\frac{1}{\mathcal{R}_e}\right)} \quad (5.17)$$

soit

$$\lim_{\frac{H}{R} \rightarrow \infty} F_{(N)}^* = \frac{4\pi}{\text{Ln}\left(\frac{1}{\mathcal{R}_e}\right)} \quad (5.18)$$

Les résultats trouvés ont été comparés avec ceux obtenus par Faxén (1946) [22], qui a donné une formule analytique de la forme (5.14), et tout récemment repris par Mitsoulis (2004) [43], qui a utilisé la méthode des éléments finis, sur le *problème légèrement différent* d'un cylindre circulaire se déplaçant dans un fluide newtonien (ou viscoplastique), compris entre deux plans parallèles, fixes, et pour lequel la condition (5.2) doit être remplacée par :

$$\text{en } z = \pm H \quad U_x = U, \quad U_z = 0 \quad (5.19)$$

On observe, comme il fallait s'y attendre que la résolution de ce dernier problème donne des évaluations légèrement supérieures de la force exercée sur l'obstacle, mais que pour les grandes valeurs de $\frac{H}{R}$, notre problème converge vers celui traité par Faxén et Mitsoulis (figure 5.5) puisque la vitesse U_x en $z = \pm H$ devient celle de l'écoulement à l'infini, qui n'est autre que U .

5.2.3 Modélisation de Bingham

Ce problème a été abordé dans le cas particulier où $\mu = 0$ (modèle "rigide-plastique") afin, par exemple, d'analyser dans le cadre de l'analyse limite ou du calcul à la rupture l'action d'une conduite circulaire sur un sol purement cohérent (Murff et al. (1989) [45]; Salençon (2001) [60]), ou bien encore d'évaluer la pression limite exercée par un sol sur un pieu de fondation sollicité latéralement (Randolph et Houlsby (1984) [56]). L'extension au cas du milieu viscoplastique de Bingham a été faite par Adachi et Yoshioka (1973) [2] mettant en œuvre des principes variationnels portant sur les vitesses d'une part, les

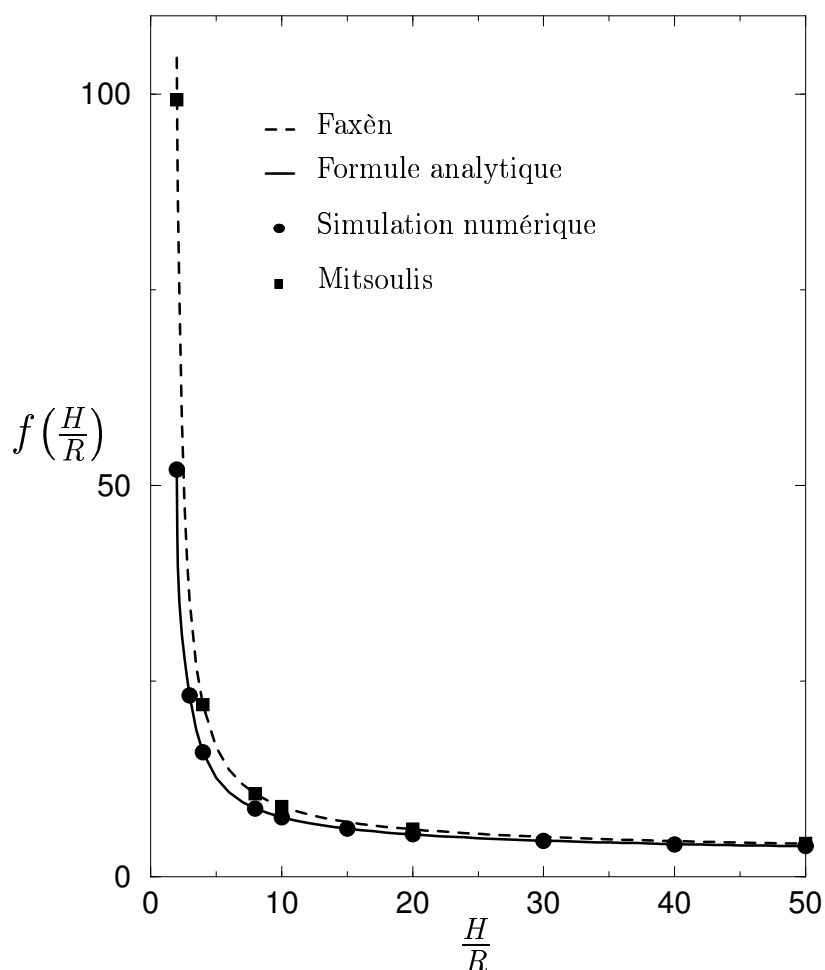


FIG. 5.5: Comparaison des courbes donnant les évaluations de la fonction $f\left(\frac{H}{R}\right)$ dans notre cas avec celles obtenues par Faxèn (formule analytique) et Mitsoulis (MEF) pour un problème légèrement différent.

contraintes d'autre part. Comme nous avons déjà eu l'occasion de l'indiquer, un problème similaire à celui de la figure 5.3 a été traité à plusieurs reprises (Faxèn (1946) [22] a proposé une formule analytique de type (5.14); Zisis et Mitsoulis (2002) [78] ont utilisé le modèle de Bingham régularisé; Deglo De Besses et al. (2003) [14] ont adopté le modèle de Hershel-Bulkley régularisé).

Les résultats des simulations effectuées à l'aide de notre outil numérique sont donnés en fonction de la valeur du paramètre adimensionnel, appelé *nombre de Bingham*, défini par :

$$\mathcal{B}_n = \frac{kR}{\mu U} \quad (0 \leq \mathcal{B}_n < \infty) \quad (5.20)$$

qui compare la contribution due à la résistance au cisaillement résiduelle du sol liquéfié à celle due à sa viscosité.

En gardant les valeurs du rayon du cylindre R , du coefficient de viscosité μ et de la vitesse U fixes et égales à l'unité, augmenter le nombre de Bingham revient à augmenter la valeur du seuil de cisaillement k .

On désigne par $F_{(B)}$ l'effort par unité de longueur de l'obstacle cylindrique appliqué par l'écoulement du massif de sol liquéfié, modélisé ici comme un milieu de Bingham (l'indice (B) désigne ce modèle).

L'analyse dimensionnelle de ce problème permet de montrer que cet effort peut s'écrire sous la forme :

$$F_{(B)} = \mu U F_{(B)}^* \left(\frac{H}{R}, \mathcal{B}_n \right) \quad (5.21)$$

où $F_{(B)}^*$ est un facteur sans dimension ne dépendant que de l'espacement relatif $\frac{H}{R}$ entre les obstacles et du nombre de Bingham \mathcal{B}_n précédemment introduit.

La figure 5.6 représente les résultats des simulations numériques effectuées pour différentes géométries, correspondants à des valeurs du rapport $\frac{H}{R}$, et des valeurs croissantes du nombre de Bingham. Comme suggéré par Zisis et Mitsoulis (2002) [78], les valeurs numériques des simulations pour les sept géométries choisies ont été ajustées par des courbes, représentées par des traits continus sur la même figure, dont les équations sont de la forme :

$$F_{(B)}^* \left(\frac{H}{R}, \mathcal{B}_n \right) = F_{(N)}^* \left(\frac{H}{R} \right) (1 + a\mathcal{B}_n)^b \quad (5.22)$$

où $F_{(N)}^*$ est la valeur de l'effort adimensionnel pour le cas Newtonien (équations (5.14) et (5.15)) tandis que a et b sont des coefficients ne dépendant que de $\frac{H}{R}$.

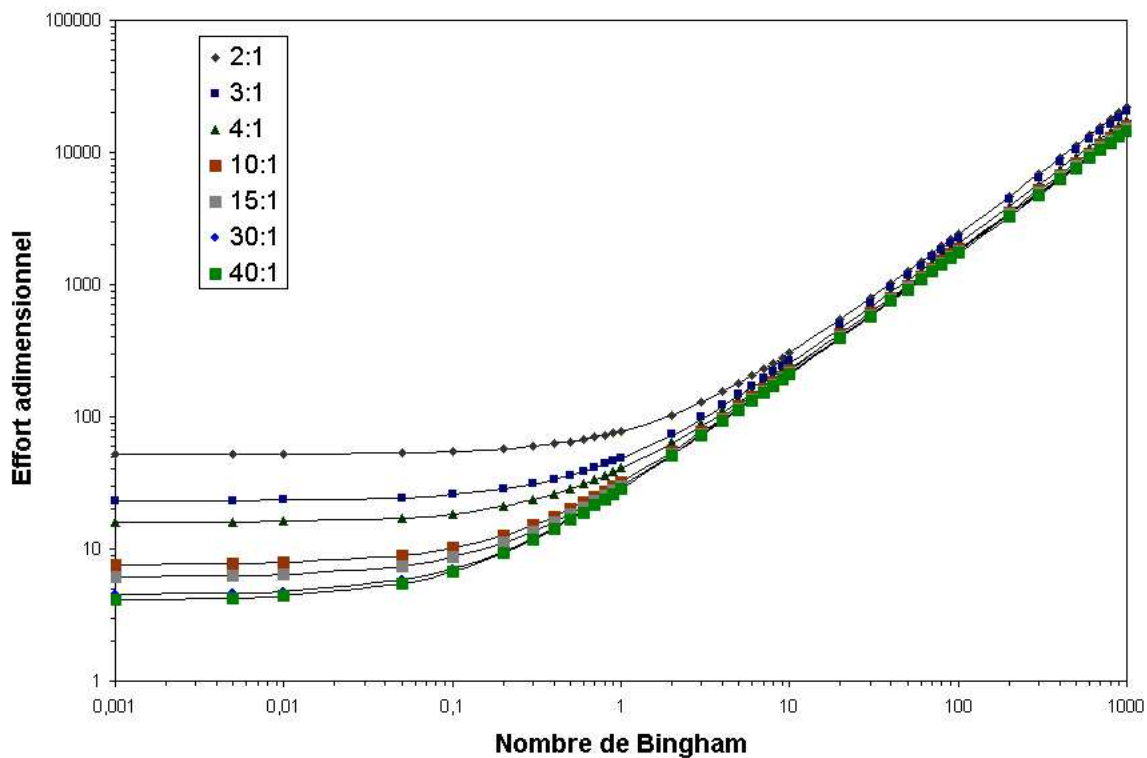


FIG. 5.6: Courbes donnant l'effort adimensionnel en fonction du nombre de Bingham pour diverses géométries.

H/R	L/R	$F_{(N)}^*$	a	b
2 : 1	12 : 1	52,0218	0,5162	0,969
3 : 1	18 : 1	23,1168	1,1879	0,958
4 : 1	24 : 1	15,65	1,7463	0,938
10 : 1	60 : 1	7,5799	3,6822	0,931
15 : 1	90 : 1	6,1277	4,5548	0,928
30 : 1	150 : 1	4,5314	6,3293	0,923
40 : 1	200 : 1	4,1151	7,0842	0,921

TAB. 5.2: Valeurs des coefficients a et b pour les différentes géométries adoptées.

Le tableau 5.2 synthétise l'ensemble des résultats de ces simulations numériques en donnant pour différentes valeurs de $\frac{H}{R}$, l'effort adimensionnel relatif au cas Newtonien ($\mathcal{B}_n = 0$), ainsi que les valeurs des coefficients a et b . La combinaison de ce tableau et de

la formule (5.22) permet alors de calculer immédiatement la valeur de $F_{(B)}^*$ et donc celle de $F_{(B)}$ grâce à (5.21).

5.3 Etude de l'influence de la prise en compte des termes d'accélération dans les problèmes d'évolution et de calcul des efforts

5.3.1 Problèmes à simuler

Dans toutes les simulations données dans ce paragraphe, on considère un massif de sable liquéfié (à $t = 0$) initialement de hauteur $h = 1m$ et de longueur $l = 3m$, soumis à la seule action des forces de pesanteur ($\rho g = 18kN/m^3$), et on suppose la présence d'un ouvrage de forme cylindrique situé à une distance $d = 2m$ de la base gauche du massif, de rayon $R = 0,1m$ appartenant à une rangée d'obstacles cylindriques de même nature, régulièrement espacés de $2 \times H = 2m$. Le sol est pour l'instant supposé en adhérence parfaite avec ses deux bases fixes en dessous et à gauche. Le pas de temps choisi est $\Delta t = 0,02s$. Les simulations sont conduites sur un intervalle de temps $T = 2s$ ce qui correspond à 100 pas de temps. On adopte un maillage d'éléments finis de type $Q4$ relativement fin (30×10 éléments).

Le sol liquéfié est modélisé dans un premier temps comme un fluide Newtonien dont on fait varier le coefficient de viscosité μ , puis comme un matériau de Bingham de viscosité fixée (soit $\mu = 1kPa.s$) et de seuil de cisaillement k allant jusqu'à k^l , valeur à partir de laquelle le massif demeure immobile (voir section 4.5 du chapitre 4).

Notre but est d'analyser l'influence de la *prise en compte des termes d'accélération* sur d'une part les résultats des simulations de l'écoulement d'un massif de sable liquéfié, d'autre part le calcul des efforts appliqués par cet écoulement sur un obstacle cylindrique.

Pour ce faire, nous choisissons d'analyser la trajectoire du point d'extrémité supérieure droite du massif pour le problème d'évolution, et l'effort global appliqué sur l'obstacle pour le problème auxiliaire du calcul des forces appliquées sur les structures.

5.3.2 $k = 0$ (modèle Newtonien)

En adoptant le modèle de fluide Newtonien, les simulations sont faites pour trois valeurs différentes du coefficient de viscosité : $\mu = 0,4kPa.s$ (ce qui correspond à un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = 45,6$), $\mu = 1kPa.s$ ($\mathcal{R}_e = 4,2$), $\mu = 4kPa.s$ ($\mathcal{R}_e = 1,85$) et $\mu = 10kPa.s$ ($\mathcal{R}_e = 0,12$).

Le nombre de Reynolds utilisé ci-dessus, et qui est relatif au problème d'évolution, est donné par :

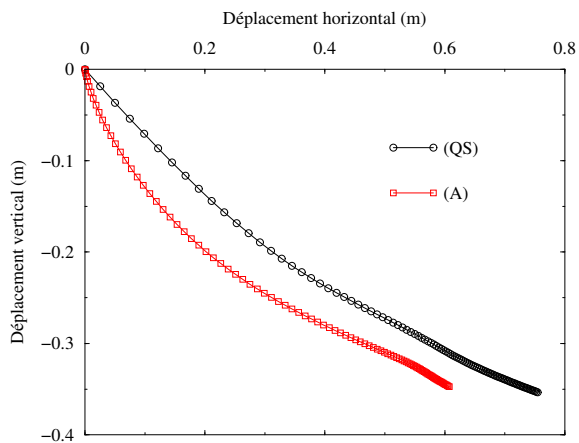
$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho H U}{\mu} \quad (5.23)$$

En analysant la figure 5.7, qui illustre les trajectoires du point d'extrémité supérieure droite du massif pour les différentes valeurs du coefficient de viscosité et donc du nombre de Reynolds, on observe que deux cas se présentent :

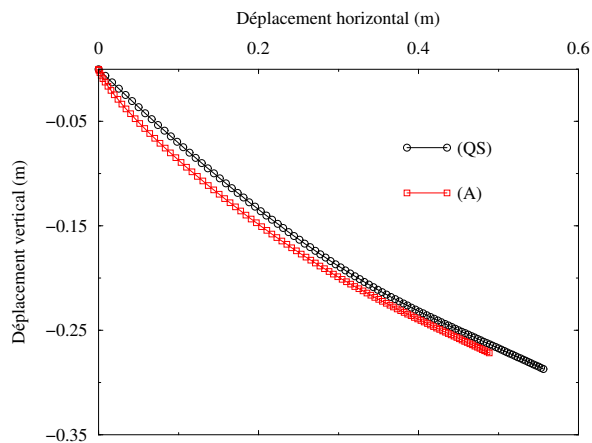
- Lorsque le nombre de Reynolds est relativement faible, ce qui correspond à un *coefficient de viscosité élevé*, la période d'accélération est très courte. Les deux trajectoires du même point matériel dans le cas d'une évolution quasi-statique (QS) et avec la prise en compte des termes d'accélération (A) sont presque confondues. La résolution du problème d'évolution peut donc se faire en conditions quasi-statiques, c'est-à-dire en négligeant les termes d'accélération.
- Quand le nombre de Reynolds est relativement grand, la période d'accélération est beaucoup plus longue. Les trajectoires ne sont plus les mêmes. L'hypothèse d'évolution quasi-statique n'est donc pas vérifiée, et les termes d'accélération doivent être pris en compte pour simuler l'évolution du massif liquéfié dans le temps.

Par ailleurs, comme l'on pouvait s'y attendre, la comparaison des courbes de la figure 5.7 montre bien que le sol se déforme de moins en moins lorsque le coefficient de viscosité devient de plus en plus grand.

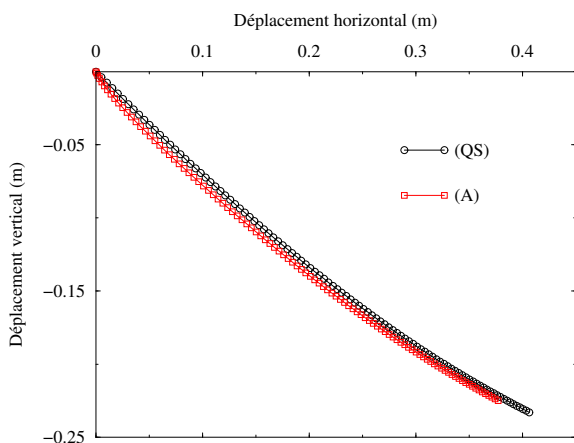
Les courbes de la figure 5.8, qui représentent l'évolution de la force globale appliquée par le sol liquéfié sur l'obstacle cylindrique en fonction du temps pour les différentes valeurs du coefficient de viscosité, montrent que, tout comme dans le problème d'évolution,



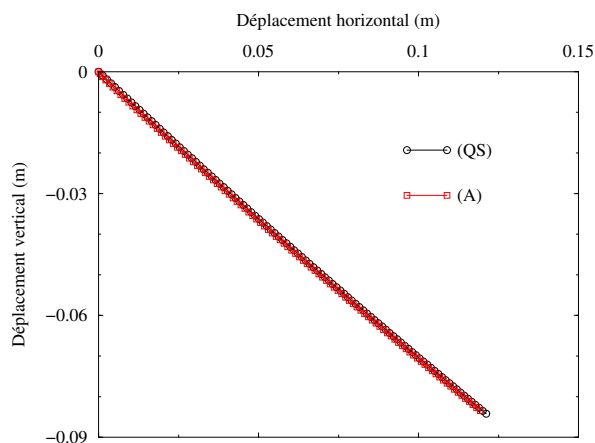
(a) $\mu = 0, 4kPa.s$ ($R_e = 45, 6$).



(b) $\mu = 1kPa.s$ ($R_e = 4, 2$).



(c) $\mu = 4kPa.s$ ($R_e = 1, 85$).

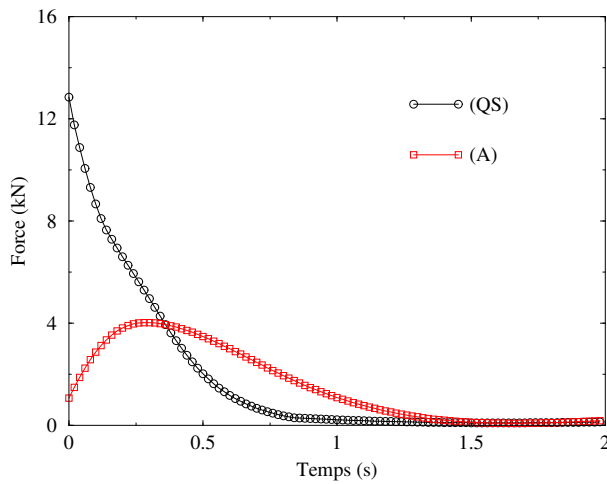


(d) $\mu = 10kPa.s$ ($R_e = 0, 12$).

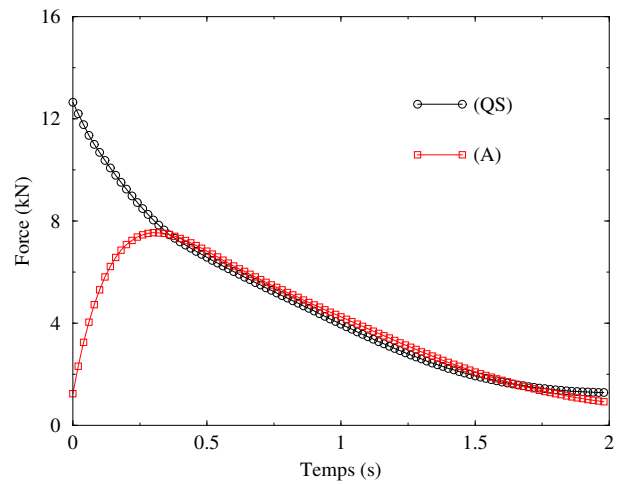
FIG. 5.7: Comparaison des trajectoires du point d'extrémité supérieure droite du massif dans les cas quasi-statique (*QS*) et avec prise en compte des termes d'accélération (*A*).

l'hypothèse d'évolution quasi-statique est bien vérifiée pour résoudre le problème auxiliaire du calcul des efforts lorsque le nombre de Reynolds correspondant est faible, mais elle est violée dès que ce dernier devient relativement important.

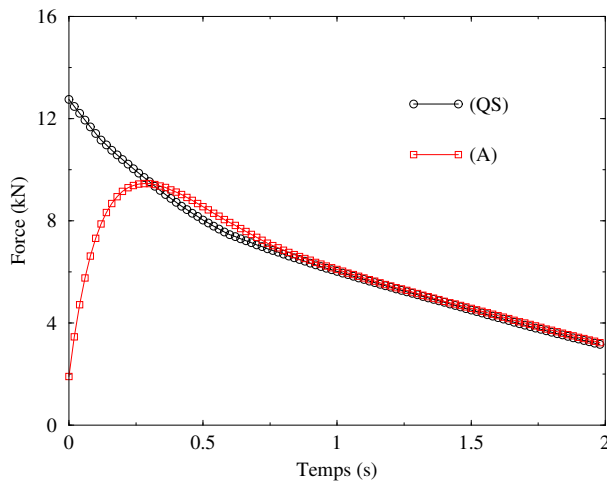
Ces résultats peuvent être interprétés en termes de puissances. Dans le cas où le nombre de Reynolds est relativement petit (ce qui correspond à un coefficient de viscosité élevé), quasiment toute la puissance fournie par les forces de gravité est dissipée par viscosité.



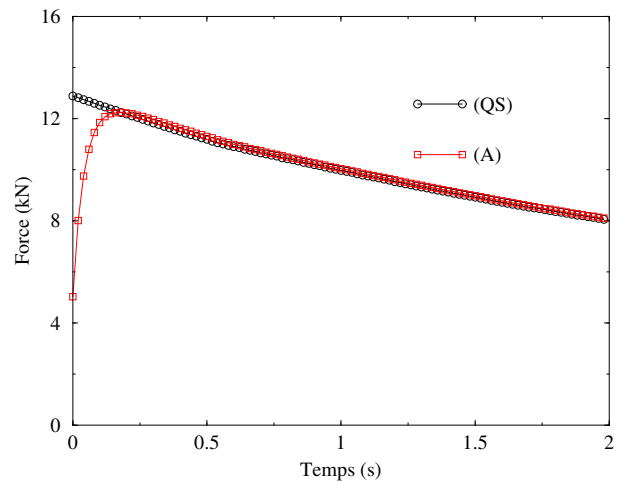
(a) $\mu = 0, 4kPa.s$ ($Re = 45, 6$).



(b) $\mu = 1kPa.s$ ($Re = 4, 2$).



(c) $\mu = 4kPa.s$ ($Re = 1, 85$).



(d) $\mu = 10kPa.s$ ($Re = 0, 12$).

FIG. 5.8: Comparaison de l'effort global appliqué sur un obstacle cylindrique dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A).

Les termes d'accélération n'ont plus d'effet sur les calculs et peuvent être donc négligés. Ceci n'est plus valable lorsque la viscosité diminue puisque la puissance des quantités d'accélération n'est plus négligeable par rapport à celle dissipée par viscosité, les calculs doivent être menés en tenant compte des termes d'accélération.

5.3.3 $k \neq 0$ (modèle de Bingham)

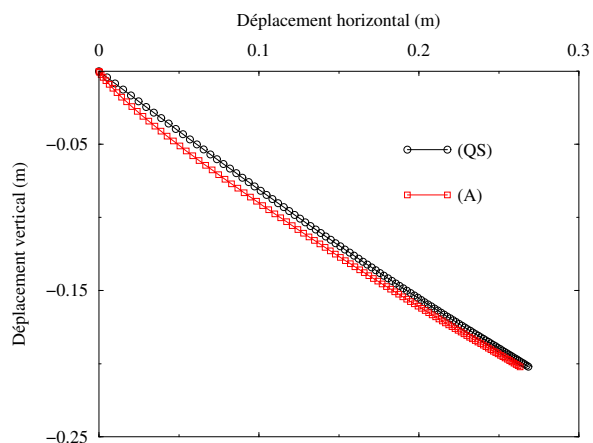
En considérant toujours les mêmes paramètres géométriques et mécaniques du problème à simuler donnés dans la section 5.3.1, nous modélisons maintenant le sol liquéfié comme un matériau viscoplastique de Bingham. La valeur du coefficient de viscosité étant fixée à $\mu = 1kPa.s$, on fait varier la valeur du seuil de cisaillement k jusqu'à une valeur proche de $k^l = 4.7kPa$, à partir de laquelle le massif de sol liquéfié demeure immobile. Cette dernière a été déterminée dans la section 4.5 du chapitre 4 en utilisant un raisonnement de calcul à la rupture.

De la même manière que dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à examiner la nécessité ou non de prendre en compte les termes d'accélération dans les calculs faits pour résoudre le problème d'évolution, en suivant la trajectoire du point d'extrémité supérieure droite du massif dans le temps, et celui de calcul des efforts sur les structures cylindriques, en analysant l'évolution de l'effort en fonction du temps, pour les différentes valeurs du seuil de cisaillement.

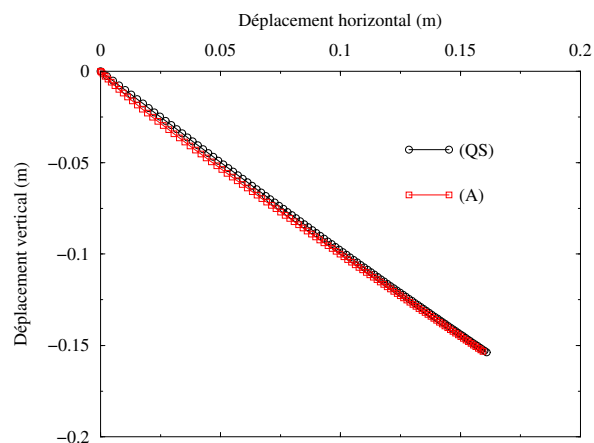
Les courbes de la figure 5.9 qui donnent les trajectoires du point d'extrémité supérieure droite du massif choisi pour comparer les résultats des simulations du problème d'évolution menées sans et avec la prise en compte des termes d'accélération pour les différentes valeurs du seuil de cisaillement et pour un coefficient de viscosité fixé, permettent de constater que l'adoption d'un modèle de Bingham à la place d'un modèle Newtonien conduit à diminuer les effets dynamiques sur l'écoulement du sol liquéfié.

Dans le paragraphe précédent, on a montré (figure 5.7-b) que lorsque $k = 0$ et $\mu = 1kPa.s$ les trajectoires (QS) et (A) du même point sont différentes. Ces deux dernières se rapprochent de plus en plus lorsque la valeur de $k > 0$ augmente (figure 5.9). Ces trajectoires deviennent coïncidentes lorsque $k \geq 3kPa$.

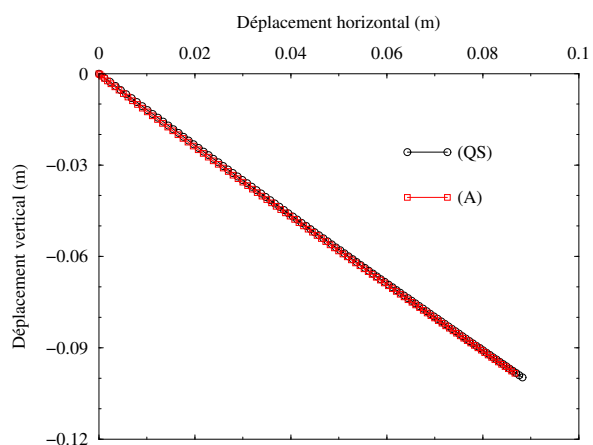
Les mêmes conclusions sur l'influence de l'adoption ou non de l'hypothèse d'évolution quasi-statique sur le problème de l'évaluation des efforts appliqués sur les obstacles, peuvent être tirées en analysant les courbes de la figure 5.10, qui donnent l'évolution dans le temps de l'effort global appliqué pour trois valeurs non nulles croissantes du seuil de cisaillement. L'hypothèse d'évolution quasi-statique est bien plus justifiée dans le cas d'un modèle de Bingham, surtout pour les grandes valeurs du seuil de cisaillement, que dans celui d'un fluide Newtonien.



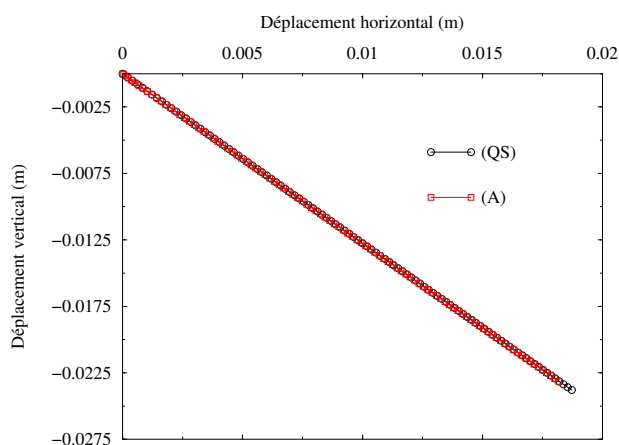
(a) $k = 1kPa$.



(b) $k = 2kPa$.



(c) $k = 3kPa$.



(d) $k = 4kPa$.

FIG. 5.9: Comparaison des trajectoires du point d'extrémité supérieure droite du massif dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A) pour différentes valeurs du seuil de cisaillement.

5.4 Mise au point d'un outil numérique pour l'analyse des problèmes bidimensionnels

Le code de calcul d'éléments finis développé, en s'appuyant sur la méthode de décomposition-coordination par lagrangien augmenté, permet donc de simuler l'évolution dans le temps

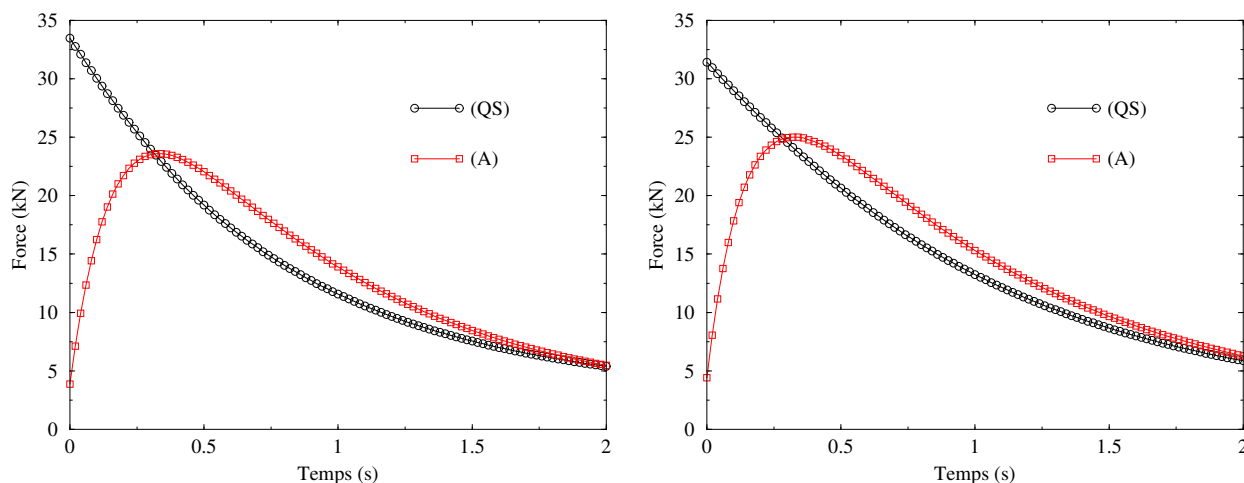
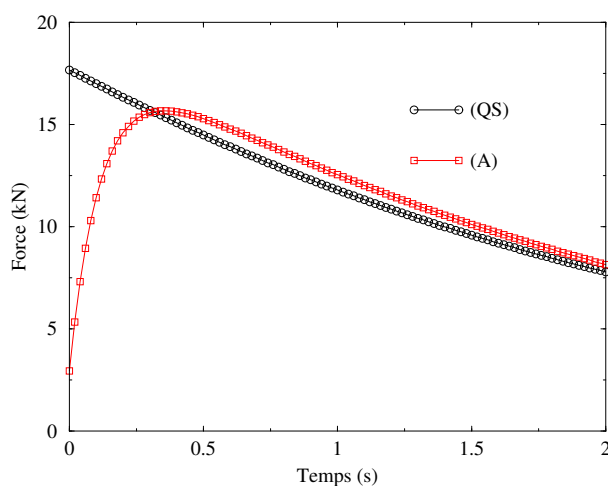
(a) $k = 1kPa$.(b) $k = 2kPa$.(c) $k = 3kPa$.

FIG. 5.10: Comparaison de l'effort global appliqué dans les cas quasi-statique (QS) et avec prise en compte des termes d'accélération (A) pour différentes valeurs du seuil de cisaillement.

d'un massif de sable liquéfié modélisé comme un matériau de Bingham viscoplastique, avec ou sans prise en compte des termes d'accélération, et de calculer l'effort appliqué par l'écoulement de ce massif sur les ouvrages avoisinants de forme cylindrique.

Nous nous proposons d'appliquer ce code de calcul en adoptant les mêmes données que celles du paragraphe précédent, hormis la condition d'encastrement remplacée par une condition (rigide)-viscoplastique de glissement entre le sol et le substratum supposé rigide

au niveau de ses deux bases en dessous et à gauche (section 3.5 du chapitre 3). Les deux coefficients caractérisant cette condition, beaucoup plus réaliste, sont fixés aux valeurs suivantes : $\mu_i = 1kPa.s/m$ et $k_i = 0,5kPa$.

Nous choisissons en particulier une valeur du seuil k_i , à partir de laquelle le glissement peut avoir lieu, *inférieure* à celle du seuil de cisaillement du sol liquéfié k , ce qui nous permet d'analyser son effet sur l'écoulement du massif.

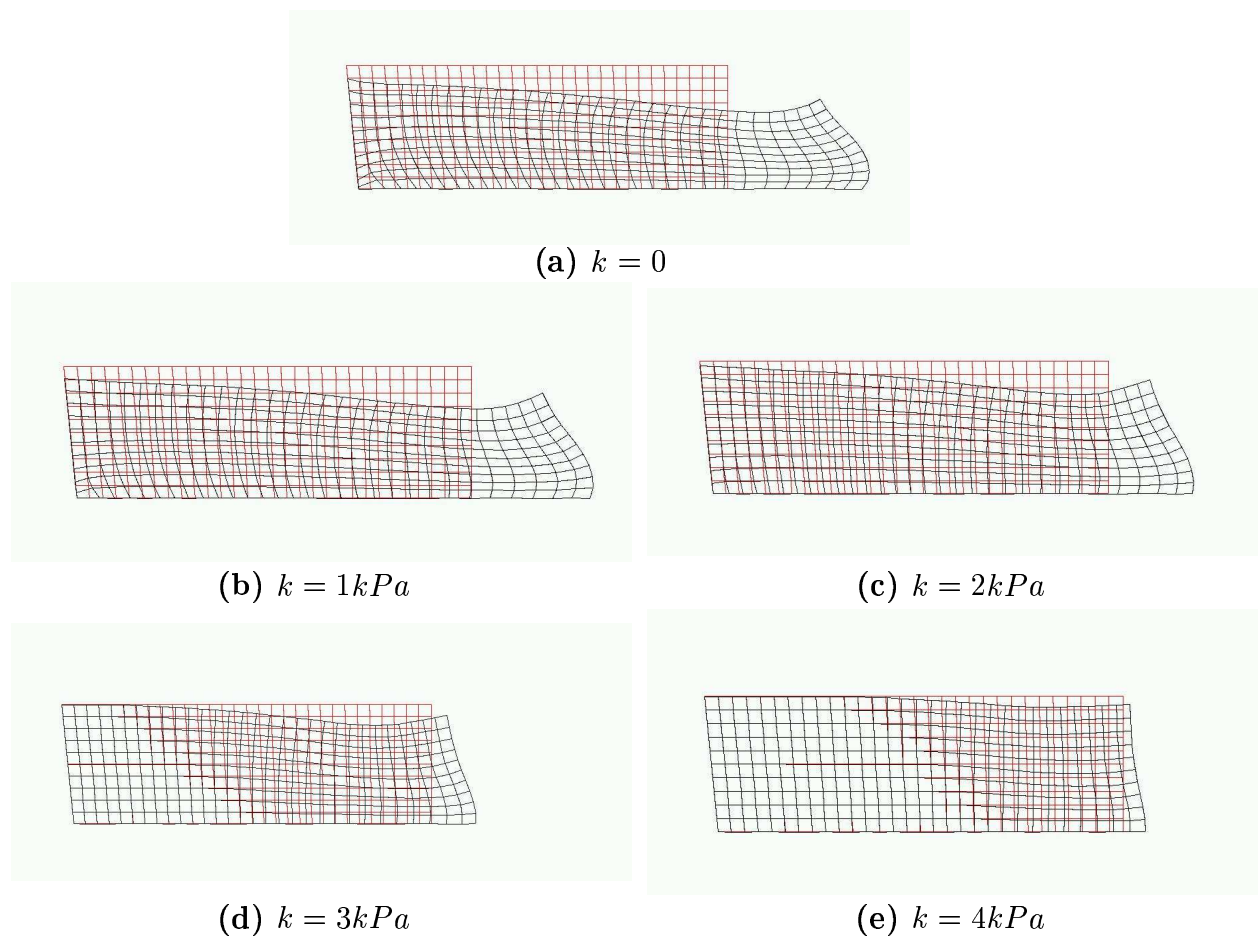


FIG. 5.11: Configurations déformées du sol liquéfié à l'instant $t = 3s$ pour différentes valeurs du seuil de cisaillement du sol liquéfié, avec une condition de glissement à l'interface sol/substratum.

La figure 5.11 illustre les configurations déformées du massif de sable liquéfié à l'instant $t = 3s$ pour différentes valeurs du seuil de cisaillement. Nous observons que pour les faibles valeurs du seuil ($k = 1$ et $2kPa$), le glissement entre le sol liquéfié et le substratum est clairement activé tout au long des deux bases en dessous et à gauche. Quasiment toutes les

parties du massif se déforment, le changement de géométrie du massif est total. Pour les grandes valeurs du seuil de cisaillement ($k = 3$ et $4kPa$), le glissement ne peut avoir lieu qu'en dessous, à droite du massif et les déformations sont concentrées dans cette même partie, la partie gauche demeure inchangée.

Afin de pouvoir caractériser la configuration finale stabilisée après déformation du massif de sol liquéfié (c'est-à-dire lorsque son écoulement s'arrête), nous conduisons les simulations sur un intervalle plus grand : $[0, 20s]$.

En examinant les courbes de la figure 5.12, qui illustrent l'évolution dans le temps des déplacements horizontal et vertical du point d'extrémité supérieure droite du massif de sol liquéfié pour plusieurs valeurs croissantes du seuil de cisaillement, nous constatons que :

- pour les faibles valeurs du seuil de cisaillement, le déplacement horizontal peut dépasser le double de la valeur du déplacement vertical et donc les déformations latérales du massif lors de son écoulement sont beaucoup plus importantes que celles dans le sens vertical descendant, alors que les déplacements dans les deux sens sont du même ordre pour les grandes valeurs de k .
- Les déplacements diminuent lorsque le seuil en cisaillement augmente puisque, bien évidemment, la résistance du sol liquéfié croît. Le massif demeure immobile à partir de la valeur limite $k^l = 4,7kPa$.
- Le mouvement du sol liquéfié est ralenti au fur et à mesure que le temps passe. Ce ralentissement est mis en évidence par l'apparition des paliers surtout pour les courbes correspondant à des petites valeurs du seuil de cisaillement.

La figure 5.13, représentant les courbes qui donnent l'évolution dans le temps de l'effort global appliqué par l'écoulement du sol liquéfié sur un obstacle cylindrique situé à $2,5m$ de la base gauche du massif pour diverses valeurs du seuil de cisaillement, confirment qu'après une certaine période, le massif de sol liquéfié peut atteindre une configuration déformée stable et arrête de s'écouler puisque sa hauteur, en diminuant, atteint la valeur critique en dessous de laquelle le massif est stable. Le temps caractéristique de stabilisation dépend de la valeur du seuil de cisaillement ; il semble s'accroître lorsque k augmente.

* *
*

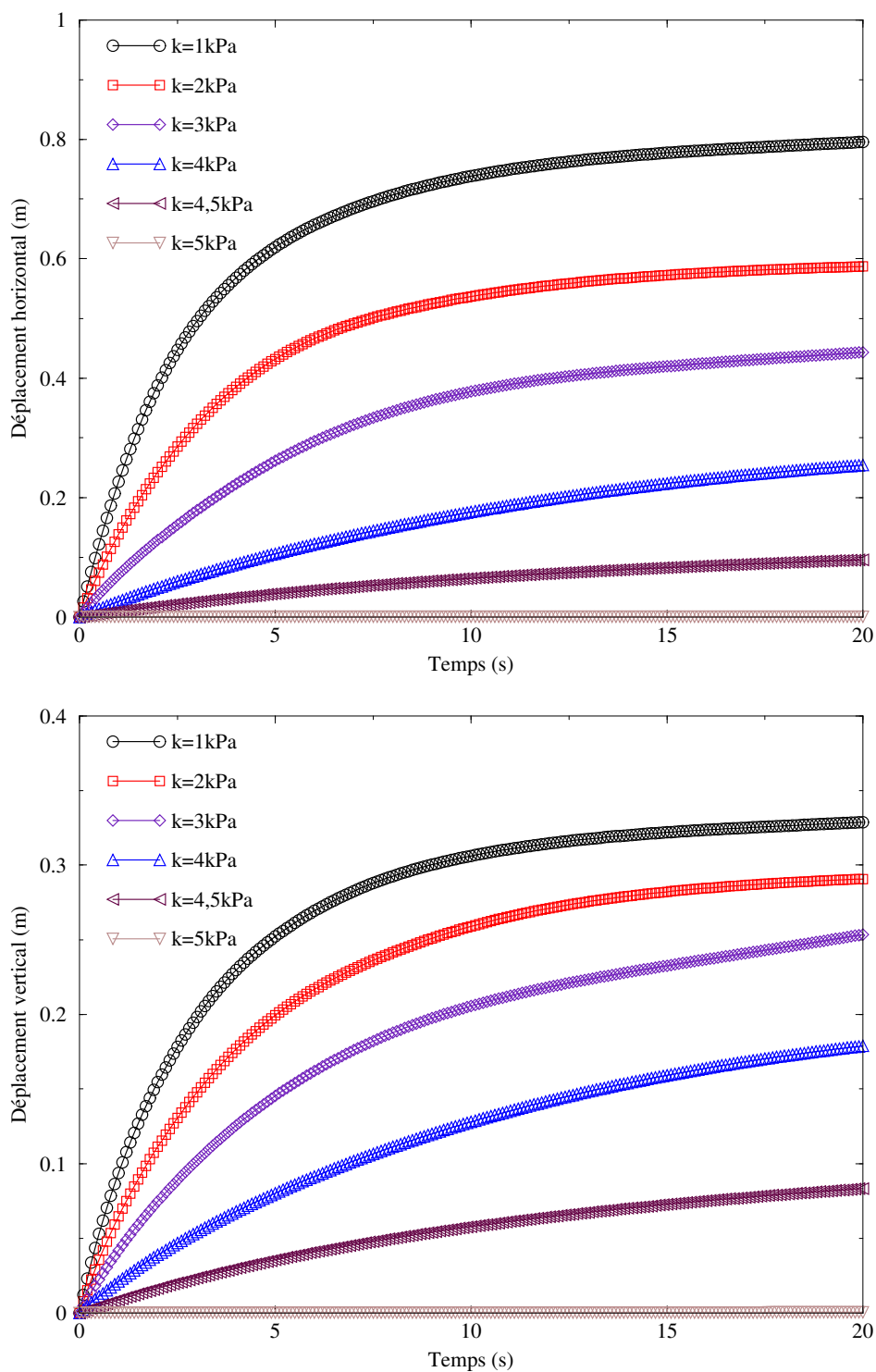


FIG. 5.12: Déplacements horizontaux et verticaux du point d'extrémité supérieure droite du massif en fonction du temps pour différentes valeurs du seuil de cisaillement k du sol liquéfié.

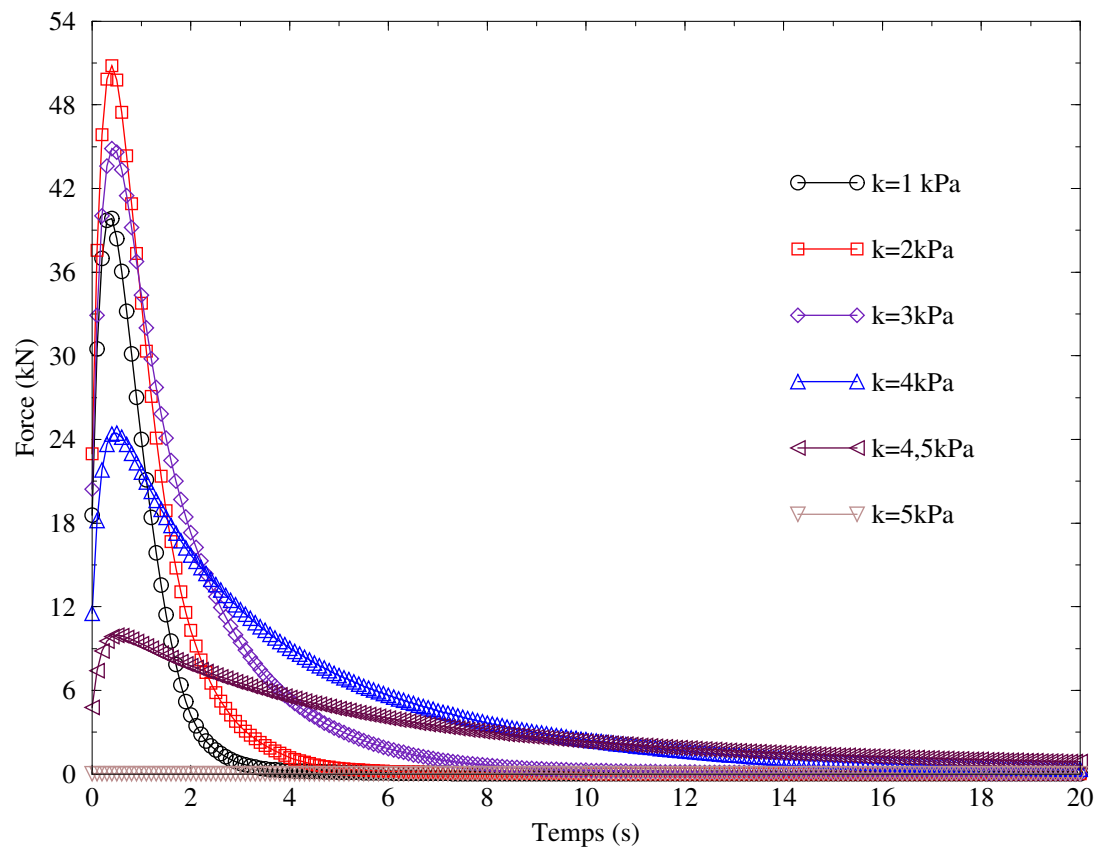


FIG. 5.13: Evolution dans le temps de l'effort global appliqué sur l'obstacle cylindrique pour différentes valeurs du seuil de cisaillement k .

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Sommaire

6.1	Conclusions	155
6.2	Perspectives	157

Arrivé au terme de ce travail, nous nous proposons de dresser le bilan des contributions apportées sur les deux plans théorique et numérique, et d'envisager les perspectives d'améliorations et de développements ultérieurs.

6.1 Conclusions

Dans le présent travail, nous avons proposé une approche dans le but de simuler d'une part l'évolution dans le temps d'un massif de sol liquéfié et plus particulièrement de prévoir les changements de sa géométrie, immédiatement après sa liquéfaction, et d'évaluer d'autre part les efforts exercés sur les structures que ce sol liquéfié rencontre en s'écoulant. Cette approche consiste à découpler les deux problèmes d'évolution et de calcul des efforts sur les ouvrages. Elle repose sur l'hypothèse que les caractéristiques rhéologiques du sol liquéfié demeurent constantes au cours de l'évolution, c'est-à-dire que le temps caractéristique de dissipation des surpressions interstitielles qui sont à l'origine du phénomène de liquéfaction, soit significativement plus grand que l'intervalle de temps pendant lequel on étudie l'évolution.

La résolution du premier problème est fondée sur un principe variationnel selon lequel le champ de vitesse qui décrit à tout instant l'évolution du massif de sol liquéfié dont le moteur est constitué des forces de pesanteur, rend minimale une certaine fonctionnelle définie sur l'espace des champs de vitesses cinématiquement admissibles, et qui prend en compte les quantités d'accélération. La détermination de ce champ de vitesse à chaque instant permet alors d'actualiser de proche en proche la géométrie du massif entre deux configurations successives séparées par un pas de temps suffisamment faible en utilisant un algorithme explicite d'intégration dans le temps.

Dans un premier temps, le comportement rhéologique du sol liquéfié est modélisé par un fluide visqueux Newtonien incompressible. La fonctionnelle à minimiser pour résoudre le problème d'évolution possède la propriété d'être quadratique. Un premier outil numérique, formulé dans le cadre de la méthode des éléments finis, a été élaboré puis validé sur des exemples de référence, pour lesquels nous avons déterminé les solutions d'une façon analytique ou semi-analytique.

Cette première modélisation Newtonienne ne rendant que très imparfaitement compte du comportement réel du matériau liquéfié, ce dernier est ensuite modélisé comme un milieu (rigide)-viscoplastique. Une étude générale du comportement d'une structure, en ce milieu, soumise à plusieurs paramètres de chargement a été faite en démontrant que

le principe du minimum en vitesse reste toujours valable, et en examinant le lien avec le raisonnement du calcul à la rupture ou de l'analyse limite.

L'extension du code de calcul déjà élaboré pour le modèle Newtonien, est faite pour le modèle de Bingham qui est un cas particulier du modèle (rigide)-viscoplastique. Sur le plan théorique, nous avons bien illustré analytiquement les propriétés de ce comportement sur des exemples de référence. Sur un plan pratique relatif au traitement numérique, les difficultés rencontrées dans la recherche de la solution du problème variationnel par minimisation, provenant du caractère non-différentiable de la fonctionnelle à minimiser, sont résolues par trois méthodes différentes : la méthode du polytope combinée à l'introduction d'une fonction de courant permettant d'assurer automatiquement en tout point la condition d'incompressibilité, la méthode de régularisation se basant sur une approximation de la loi de comportement non-linéaire, et enfin la méthode du lagrangien augmenté associée à la technique de décomposition-coordination. Une fois les trois méthodes implémentées dans le code de calcul et leurs performances comparées, la troisième, qui s'est révélée être la plus efficace, a été retenue. Il est apparu que la première est inapplicable, hormis dans les cas simples, tandis que la seconde ne conduit qu'à une approximation de la solution liée au paramètre de régularisation.

A l'interface entre le sol liquéfié et le substratum supposé rigide, l'hypothèse classique d'adhérence parfaite jusqu'ici adoptée, est remplacée par une condition de bord beaucoup plus réaliste autorisant le glissement à partir d'un seuil de cisaillement, formulée d'une façon analogue à celle du modèle de Bingham. Le principe du minimum généralisé, qui en découle, est alors établi.

Par ailleurs, nous avons montré que la résolution du second problème, relatif au calcul des efforts appliqués par l'écoulement du matériau liquéfié sur les ouvrages avoisinants, peut être découplée de celle du premier en adoptant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices permettant de se ramener à la problématique de l'écoulement stationnaire d'un fluide de Bingham autour d'un obstacle cylindrique fixe. Le même outil numérique nous a alors permis d'établir des formules analytiques, facilement exploitables, permettant d'évaluer directement et le plus précisément possible, la valeur de l'effort recherché.

Nous avons enfin exploité le code de calcul ainsi mis au point pour effectuer les premières simulations d'écoulements bidimensionnels d'un massif de sol liquéfié, et évaluer les efforts exercés par ces écoulements sur une rangée d'obstacles cylindriques. Une analyse des résultats a été faite où l'on a étudié l'influence de la prise en compte des termes d'accélération dans les calculs, de l'incorporation de la condition de glissement entre le

sol liquéfié et le substratum dans l'outil numérique, et du choix des valeurs de la viscosité et de la résistance du sol liquéfié.

6.2 Perspectives

Afin de pouvoir aboutir à un outil de calcul efficace et opérationnel destiné à être utilisé par les ingénieurs, nous envisageons plusieurs prolongements de ce travail, qui peuvent être conduits dans les directions suivantes :

- L'introduction de modèles plus élaborés du sol liquéfié, tel que celui de Herschel-Bulkley.
- L'utilisation de techniques de remaillage telles que celles utilisées dans le domaine de la mise en forme des métaux (Cheng et Kikuchi (1986) [11]; Aymon et al. (2001) [3]), pourrait être envisagée pour remédier au problème des distorsions excessives subies par certains éléments du maillage et de dégénérescence possible de ces derniers (alignement de trois sommets de l'élément).
- L'extension de l'approche proposée aux configurations tridimensionnelles, ce qui nécessitera bien évidemment de recourir à des techniques plus sophistiquées pour la génération des maillages d'éléments finis permettant de traiter à la fois les changements de géométrie importants et la condition d'incompressibilité du sol liquéfié. Il conviendra néanmoins de tenir compte des simplifications de type "faibles profondeurs" correspondant au fait que dans de nombreuses situations l'épaisseur du massif de sol liquéfié est faible en regard de ses dimensions transversales.

* *
 *
 *

Bibliographie

- [1] T. Abdoun, Dobry R., T.D. O'Rourke, and S.H. Goh. Pile response to lateral spreads : centrifuge modeling. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 129(10) :869–878, 2003.
- [2] K. Adachi and N. Yoshioka. On creeping flow of a viscoplastic fluid past a cylinder. *Chemical Engineering Science*, (28) :215–226, 1973.
- [3] J.L.F. Aymon, E. Bittencourt, and G.J. Creus. Simulation of 3d metal-forming using an arbitrary lagrangian-eulerian finite elemnt method. *Journal of Materials Processing Technology*, 110 :218–232, 2001.
- [4] S.F. Bartlet and T.L. Youd. Empirical prediction of lateral spreading displacement. *In : Proceedings from the 4th US?Japan Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures against Soil Liquefaction, Technical Report NCEER-92-0019, Honolulu, USA,, 1 :65–351, 1992.*
- [5] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis - volume2 : poutres et plaques*. Hermès, 1990.
- [6] N. Benahmed. *Comportement mécanique d'un sable sous cisaillement monotone et cyclique : application aux phénomènes de liquéfaction et de mobilité cyclique*. Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2001.
- [7] R.W. Boulanger, W.W. Wilson, and B.L. Kutter. Soil-pile-superstructure interaction in liquefiable sand. *Transportation Research Record, Transportation Research Board, Washington, D.C.*, 1569.
- [8] J. Canou, N. Benahmed, J.C. Dupla, and V. De Gennaro. Instabilités de liquéfaction et phénomène de mobilité cyclique dans les sables. *Revue Française de Géotechnique*, (98) :29–46, 2002.

- [9] J. Canou, L. Thorel, and E. de Laure. Influence d' un déviateur de contrainte initial sur les caractéristiques de liquéfaction statique d'un sable. *Proc. 10th Europ. Conf. On Soil Mechanics and Found. Eng.*, 1 :49–52, 1991.
- [10] H. Chen and C.F. Lee. Runout analysis of slurry flows with bingham model. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128(12) :1032–1042, 2002.
- [11] J.H. Cheng and N. Kikuchi. A mesh re-zoning technique for finite element simulations of metal forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 :219–228, 1986.
- [12] P. Coussot. Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. *Journal of Hydraulic Research*, 32(4) :535–559, 1994.
- [13] P. de Buhan and S. Maghous. A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures. *European Journal of Mechanics, A/ Solids*, 14(2) :309–328, 1995.
- [14] B. Deglo De Besses, A. Magnin, and P. Jay. Viscoplastic flow around a cylinder in an infinite medium. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 115 :27–49, 2003.
- [15] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, 1984.
- [16] R. Dobry and T. Abdoun. Post-triggering response of liquefied sand in the free field and near foundations. In : *Dakoulas, P., Yegian, M., Holtz., R.D. (Eds.), Proceedings Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics III. Geotechnical Special Publication. ASCE*, 1(75) :270–300, 1998.
- [17] R. Dobry, T. Abdoun, T.D. O'Rourke, and S.H. Goh. Single piles in lateral spreads : field bending moment evaluation. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 129(10) :879–889, 2003.
- [18] L. Dormieux. Influence de la houle sur la stabilité d' un massif sous-marin. *Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris*, 1989.
- [19] L. Dormieux, J.L. Auriault, and O. Coussy. Pore pressure generation in a seabed subjected to a wave loading. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 12(6) :773–801, 1993.

- [20] A. Ekstrom and T. Oloffson. Water and frost-stability risks for embankments of fine grained soils. *Proceedings of Symposium on Failures in Earthworks, Institution of Civil Engineers, London, Telford (Thomas) Ltd., London, UK*, pages 155–166, 1985.
- [21] R.B. Fallgren and J.L. Smith. Ground displacement at san fernando valley juvenile hall during san fernando earthquake. *In : San Fernando California Earthquake of February 9, 1971, U.S. Dept. of Commerce, NOAA, Washington, DC*, 3 :189–196, 1973.
- [22] O.H. Faxèn. Forces exerted on a rigid cylinder in a viscous fluid between two parallel fixed planes. *Proceedings of the royal Swedish academy of engineering and science*, (187) :1–13, 1946.
- [23] W. D. L. Finn. State-of-the-art of geotechnical earthquake engineering practice. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 20 :1–15, 2000.
- [24] A. Fortin and Côté D. On the imposition of friction boundary conditions for the numerical simulation of bingham fluid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (88) :97–109, 1991.
- [25] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes de lagrangien augmenté : applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*. DUNOD, 1982.
- [26] R. Glowinski and P. le Tallec. *Augmented lagrangian and operator splitting method in non-linear mechanics*. SIAM studies Appl. Math., 1989.
- [27] S. Hadush, A. Yashima, and R. Uzuoka. Importance of viscous fluid characteristics in liquefaction induced lateral spreading analysis. *Computers and Geotechnics*, 27(3) :199–224, 2000.
- [28] S. Hadush, A. Yashima, R. Uzuoka, and K. Moriguchi, S.and Sawada. Liquefaction induced lateral spread analysis using the cip method. *Computers and Geotechnics*, 28(8) :549–574, 2001.
- [29] M. Hamada, H. Sato, and T. Kawakami. A consideration of mechanism for liquefaction-related large ground displacement. *In : Proceedings of the 5th US-Japan Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures against Soil Liquefaction. Technical Report NCEER-94-0026, Salt Lake City, USA*, pages 32–217, 1994.

- [30] M. Hamada, S. Yasuda, and K. Isoyama, R. and Emoto. Study on liquefaction-induced permanent ground displacements and earthquake damage (in Japanese). *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, 6(3) :221–229, 1986.
- [31] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1973.
- [32] J.N. Hutchinson. A sliding-consolidation model for flow slides. *Can. Geotech. Journal*, (23) :115–126, 1986.
- [33] S. Imamura, T. Hagiwara, Y. Tsukamoto, and K. Ishihara. Response of pile groups against seismically induced lateral flow in centrifuge model tests. *Soils and Foundations*, 44 :39–55.
- [34] K. Ishihara and M. Cubrinovski. Soil-pile interaction in liquefied deposits undergoing lateral spreading. *Geotechnical Hazards (eds. by Maric, B. et al.)*, Balkema, pages 51–64, 1998.
- [35] C.D. Jan. A study on the numerical modelling of debris flows. In *Debris-flow hazards mitigation : Mechanics, prediction and assessment (ed. C.-L. Chen)*. New York : American Society of Civil Engineers, pages 717–726, 1997.
- [36] M. Jellouli. *Effet de l'écoulement des sables liquéfiés sur les ouvrages*. Rapport de DEA, ENPC, 2001.
- [37] M. Jin and D.L. Fread. One-dimensional routing of mud/debris flows using nws flid-way model. In *Debris-flow hazards mitigation : Mechanics, prediction and assessment (ed. C.L. Chen)*. New York : American Society of Civil Engineers, pages 687–696, 1997.
- [38] T. Kawakami, N. Suemasa, M. Hamada, H. Sato, and T. Katada. Experimental study on mechanical properties of liquefied sand. In : *Proceedings of the 5th US-Japan Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures against Soil Liquefaction. Technical Report NCEER-94-0026, Salt Lake City, USA*, pages 99–285, 1994.
- [39] J.M. Konrad. Undrained response of loosely compacted sands during monotonic and cyclic compression tests. *Geotechnique*, 43(1) :69–89.

- [40] B.T. Liu, S.J. Muller, and M.M. Denn. Convergence of regularization method for creeping flow of a bingham material about a rigid sphere. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 102 :179–191.
- [41] K.F. Liu and C.C. Mei. Slow spreading of a sheet of bingham fluid on an inclined plane. *Journal Fluid Mechanics*, 207 :505–529.
- [42] S. Maghous. Numerical prediction of ultimate loads : Case of von mises and tresca materials. *Mechanics Research Communications*, 20(6) :467–474, 1993.
- [43] E. Mitsoulis. On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder : wall effects. *Chemical Engineering Science*, (59) :789–800, 2004.
- [44] H.K. Moffat. Microhydrodynamics-tome1. *Editions de l'école*, 1989.
- [45] J.D. Murff, D.A. Wagner, and M.F. Randolph. Pipe penetration in cohesive soil. *Géotechnique*, 39(2) :213–229, 1989.
- [46] J.A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, (7) :308–313, 1965.
- [47] R.P. Orense and I. Towhata. Three dimensional analysis on lateral displacement of liquefied subsoil. *Soils and Foundations*, 38(4) :1–15, 1998.
- [48] Papanastasiou and Tasos C. Flow of materials with yield. *Journal of Rheology*, (31) :385–404, 1987.
- [49] M. Pastor, J.A. Fernández Merodo, M. Quecedo, M.I. Herreros, E. González, and P. Mira. Modelling of debris flows and flow slides. *Revue Française du génie civil - Numerical Modelling in Geomechanics - Hermes-Lavoisier - Paris*, 6 :1213–1232, 2002.
- [50] M. Pastor, M. Quecedo, J.A. Fernández Merodo, M.I. Herreros, E. González, and P. Mira. Modelling tailings dams and mine waste dumps failures. *Géotechnique*, 52(8) :579–591, 2002.
- [51] A. Pecker. *Dynamique des sols*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées-Paris, 1984.
- [52] A. Pecker, J.H. Prevost, and L. Dormieux. Analysis of pore pressure generation and dissipation in cohesionless materials during seismic loading. *Journal of Earthquake Engineering*, 4(5) :441–464, 2001.

- [53] J.M. Piau. Flow of yield stress fluid in a long domain. application to flow on an inclined plane. *Journal of Rheology*, 40(4) :711–723, 1996.
- [54] J.H. Prevost and C.M. Keane. Shear stress-strain curve generation from simple material parameters. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 116(8) :1255–1263, 1990.
- [55] I. Proudman and J.R.A. Pearson. Expansions at small reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, (2) :237–262, 1957.
- [56] M.F. Randolph and G.T. Houlsby. The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil. *Géotechnique*, 34(4) :613–623, 1984.
- [57] D. Rickenmann and T. Koch. Comparison of debris flow modelling approaches. *In Debris-flow hazards mitigation : Mechanics, prediction and assessment (ed. C.-L. Chen)*. New York : American Society of Civil Engineers, pages 576–585, 1997.
- [58] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for bingham fluid flows around a cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (192) :3317–3341, 2003.
- [59] J. Salençon. An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *European Journal of Mechanics, A/ Solids*, 9(5) :477–500, 1990.
- [60] J. Salençon. Action d' une conduite circulaire sur un sol cohérent. *C.R. Cong. Int. Mécanique des sols et Géotechnique, Istanbul*, pages 1311–1314, 2001.
- [61] J. Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics - General Concepts - thermoelasticity*. Springer, 2003.
- [62] P. Saramito and N. Roquet. An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(40-41), 2001.
- [63] H.B Seed. Landslides during earthquakes. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Div., ASCE*, 94(5) :1053–1122, 1968.
- [64] H.B Seed and J. Harder. Spt-based analysis of cyclic pore pressure generation and undrained residual strength. *In : J.M. Duncan, Editor, Proceedings, H. Bolton Seed Memorial Symposium, University of California, Berkeley, May 9-11, 2* :351–376, 1990.

- [65] H.B Seed and I.M. Idriss. Analysis of soil liquefaction : Niigata earthquake. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Div., ASCE*, 93(3) :83–108, 1967.
- [66] S. Tamate and I. Towhata. Numerical simulation of ground flow caused by seismic liquefaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 18(7) :473–485, 1999.
- [67] Y. Tanigawa and H. Mori. Analytical study on the deformation of fresh concrete. *Journal Eng. Mech.*, 115(3) :493–508, 1989.
- [68] F. Tatsuoka and K. Ishihara. Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction. *Soils and Foundations*, 14(3) :51–65, 1974.
- [69] I. Towhata and T.M. Al-Hussaini. Lateral loads on offshore structures exerted by submarine mudflows. *Soils and Foundations*, 28(3) :26–34, 1988.
- [70] I. Towhata, Y. Sasaki, K. Tokida, H. Matumoto, Y. Tamari, and K. Yamada. Prediction of permanent displacement of liquefied ground by mean of minimum energy principle. *Soils and Foundations*, 32(3) :97–116, 1992.
- [71] I. Towhata, H. Toyota, and W. Vargas-Monge. Dynamics in lateral flow of liquefied ground. *Proc. 10th Asian Regional Conference on SMFE, Beijing*, 1 :497–500, 1995.
- [72] I. Towhata, W. Vargas-Monge, R.P. Orense, and M. Yao. Shaking table tests on subgrade reaction of pipe embedded in sandy liquefied subsoil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 18(5) :347–361, 1999.
- [73] R. Uzuoka, A. Yashima, T. Kawakami, and J.M. Konrad. Fluid dynamics based prediction of liquefaction induced lateral spreading. *Computers and Geotechnics*, 22(3-4) :243–282, 1998.
- [74] D. Vola, L. Boscardin, and J.C. Latché. Laminar unsteady flows of bingham fluids : a numerical strategy and some benchmark results. *Journal of Computational Physics*, 187(2) :441–456, 2003.
- [75] D.W. Wilson, R.W. Boulanger, and B.L. Kutter. Observed seismic lateral resistance of liquefying sand. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 126(10) :898–906, 2000.
- [76] S. Yazuda, S. Kiku, and T. Yosida. Shaking table tests on the friction force between the buried pipelines and the ground during liquefaction. *Proc. 24th National Conference JSSMEF (en Japonais)*, pages 759–760, 1989.

-
- [77] N. Yoshida and M. Hamada. Damage to foundation piles and deformation pattern of ground due to liquefaction-induced permanent ground deformations. *3rd Japan-U.S. Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures for Soil Liquefaction, Tech. Rep. NCEER 91-0001, NCEER, Buffalo, N.Y.*, pages 147–161, 1991.
- [78] Th. Zisis and E. Mitsoulis. Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 105 :1–20, 2002.

Résumé

La liquéfaction d'un massif de sol, due à l'action des sollicitations sismiques, provoque son instabilité et engendre des efforts importants sur les ouvrages avoisinants, qu'il convient de prendre en compte dans le dimensionnement de ces derniers.

Nous proposons dans ce travail une approche dans le but d'une part de simuler l'évolution dans le temps du massif de sol liquéfié, modélisé comme un matériau viscoplastique de Bingham, d'autre part d'évaluer les efforts exercés sur les ouvrages que le sol liquéfié rencontre en s'écoulant.

La résolution du problème d'évolution repose sur un principe de minimum en vitesses, combiné à un schéma d'intégration explicite dans le temps, permettant d'actualiser de proche en proche la géométrie du massif entre deux configurations successives. Une condition de bord réaliste autorisant le glissement à partir d'un seuil de cisaillement est par ailleurs formulée. Les efforts exercés sur les structures avoisinantes sont alors évalués en analysant le problème bidimensionnel de l'écoulement d'un fluide de Bingham autour d'un obstacle.

Un outil numérique reposant sur une formulation de type "éléments finis" et utilisant la méthode du Lagrangien augmenté associée à la technique de décomposition-coordination, a été élaboré et mis en œuvre sur un certain nombre d'applications.

Abstract

Liquefaction of saturated granular soil embankments induced by seismic loading triggers flow failure and causes serious damage to civil engineering structures.

In this work an approach is proposed in order to simulate the evolution of liquefied soil masses, modelled as a viscoplastic Bingham material, on the one hand, to calculate the drag force exerted by the liquefied soil flow on obstacles on the other hand.

A numerical scheme based on the combination of a variational principle for the velocity field defined on the current configuration and a step-by-step time integration procedure is first presented in order to solve the evolution problem. A realistic boundary condition, which allows the slippage at the liquefied soil/substratum interface when a critical value of the shear stress is reached, is formulated and introduced in the numerical simulation. The efforts exerted by the liquefied soil flow on civil engineering structures are then evaluated by analysing the auxiliary problem of a Bingham fluid flow around an obstacle.

A numerical tool using the decomposition-co-ordination method by augmented Lagrangian in the context of a finite element formulation is developed and numerical illustrations are presented and interpreted.