

# Géomécanique de la production froide des huiles lourdes Thierry Yalamas

## ► To cite this version:

Thierry Yalamas. Géomécanique de la production froide des huiles lourdes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. Français. NNT: 2004ENPC0030. pastel-00001150

# HAL Id: pastel-00001150 https://pastel.hal.science/pastel-00001150

Submitted on 10 Sep 2010  $\,$ 

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ANNEXES

Annexe 1 : Photos du dispositif expérimental 117
Annexe 2 : Procédures d'essai 118
Annexe 3: Etat de densité initial de l'échantillon121
Annexes 4 : Essai 14 123
A4.1 - Phase de consolidation123
Fig. A4-2 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat initial
A4.2 - Evolution des pressions lors des essais de mise en production125
Fig. A4-7 :Coupes de l'échantillon de sable. Etat final
Annexes 5 : Essai 17 129
A5.1 - Phase de consolidation129
Fig. A5-2 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat initial
A5.2 - Evolution des pressions lors des ouvertures132
Fig. A5-5 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat intermédiaire n°1
A5.3 - Evolution des pressions lors des ouvertures (suite)
Fig. A5-8 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat intermédiaire n°2
A5.4 - Evolution des pressions lors des ouvertures (suite)
Fig. A5-10 : Coupe de l'échantillon de sable. Etat final
Fig. A5-11 : Reconstruction 3D de la cavité à l'état final
Annexes 6 : Essai 27 143
A6.1 - Phase de consolidation143
Fig. A6-4 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat initial
A6.2 - Evolution des pressions lors des phases de production147
Fig. A6-6 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat intermédiaire n°1
A6.3 -Evolution des pressions lors des phases de production (suite)
Fig. A6-8 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat final
Annexe 7: Formation d'une cavité à une distance intermédiaire entre le puits et le centre de la cellule
Annexe 8: Granulométrie des sables154
Annexe 9: Discrétisation 2D 155
Annexe 10: Matrices élémentaire en 2D 158
Annexe 7: Formation d'une cavité à une distance intermédiaire entre le puits et le centre de la cellule

**Fig. A1-1 :** L'installation dans le laboratoire de géomécanique de l'IFP.



**Fig. A1-2 :** L'installation de la cellule sous scanner.

# Annexe 1 : Photos du dispositif expérimental

# Annexe 2 : Procédures d'essai.

## Préparation cellule wormhole

	Actions dans l'ordre	Mesures						
1	Remplir de sable sec sur une hauteur de 6,5 cm, égaliser	Poids du sable sec						
2	Bien nettoyer le corps interne de la cellule au-dessus du							
	sable pour ôter toute trace de poussière et de sable							
3	Nettoyer le piston de toutes traces de sable. Nettoyer les							
	joints, graisser légèrement l'entrée de la cellule et les							
	joints de centrage du piston							
4	Descendre le piston (trous du dessus ouverts) très							
	lentement avec le dispositif ad hoc							
5	Fermer les trous du dessus du piston avec beaucoup de	Profondeur du piston par rapport au						
	soin pour éviter les fuites	couvercle						
6	Nettoyer le couvercle, le dessus de la cellule et le joint							
	torique pour ôter toutes traces de sable.							
	Ne pas graisser							
7	Fermer le couvercle sans serrer excessivement les							
	boulons							
8	Alimenter en eau en vanne 2 (au dessus du piston), puis							
	fermer la vanne 1 sur le couvercle lorsque l'air est							
	expulsé							
9	Préparer GDS, remplir d'eau							
10	Connecter la vanne 2 sur GDS, purger les tuyaux, mettre							
	à zéro le volume sur l'interface LABVIEW.							
11	Vanne 2 fermée, vérifier l'absence de fuites sur le circuit							
	"GDS-cellule" en montant la pression GDS à 200 kPa							
12	Régler les zéros de tous les capteurs							
13	Ouvrir vanne 2, descente piston sur sable	Enregistrement total période 2s						
14	Descendre la pression de confinement à 100 kPa, fermer	Enregistrement total période 2s						
	vanne 2							
15	Faire le vide par la vanne 5 (secteur poreux), vannes 3 et	Enregistrement total période 2s						
	4 fermées							
16	Saturation du sable avec de l'eau désaérée	Mesure du volume d'eau introduit						
	Alimentation en vanne 3, vannes 4 et 5 fermées. La							
	saturation doit prendre au minimum <sup>1</sup> / <sub>2</sub> heure							
17	Circulation entre les secteurs poreux avec alimentation							
	en vanne 3 et retour sur vanne 4, vanne 5 fermée							
	Alimentation en vanne 3 et retour sur vanne 5, vanne 4							
	fermée							
18	Balayage vanne 4 et 5 ouvertes							
19	Fermer vannes 3, 4 et 5							
20	Pression GDS à 200 kPa	Enregistrement total période 2s						

## Préparation de la cellule tampon amont

21	Vanne de purge ouverte, remplir la cellule d'eau	
	par la vanne 10	
22	Lorsque l'eau sort par la purge, fermer toutes les	
	vannes	
23	Raccorder les trois vannes 10 sur les vannes 3,4 et	
	5, les vannes 3,4 et 5 étant fermées	
24	Monter la pression d'air à 100 kPa	Visualisation période 2s
25	Purger le circuit vanne 10 - vanne 4, sans ouvrir la	
	vanne 4 (resp. 5, 6)	

## Préparation cellule tampon avale

26	Raccorder le flexible sur la vanne 6 (sortie de la	
	cellule wormhole).	
27	Remplir partiellement la cellule tampon avale avec	
	de l'eau.	
28	Raccorder la cellule tampont aval au circuit d'air	
	comprimé et à l'électro-vanne.	
	Appliquer une pression égale à la pression amont	
	(vanne 6 fermée).	
29	Purger le flexible reliant la cellule tampon avale à	
	la cellule wormhole.	

#### Consolidation du sable sous 200 kPa

30	Pression cellule tampon amont = 100 KPa, GDS	Enregistrement total période 2s
	200 kPa, vannes 3 et 5 fermées	
31	Vannes 21, 22, 23 et 24 fermées	Enregistrement total période 2s
32	Ouvrir Vannes 4, 5 et 6 la pression interstitielle	Enregistrement total période 2s
	s'égalise dans le massif à 100 kPa	
33	Pression de confinement GDS à 300 kPa	Enregistrement total période 2s
34	Pression cellule tampon amont à 200 kPa	Enregistrement total période 2s
35	Pression de confinement GDS à 400 kPa	Enregistrement total période 2s

Pour des confinements plus importants on continue à augmenter la pression GDS

## Essai d'érosion

36	Ouvrir la ou les perforations	Enregistrement total période 2s
37	Ouvrir la vanne 6	Enregistrement total période 2s
38	Régler la pression avale désirée sur le régulateur	Enregistrement total période 2s
39	Lancer la régulation de pression, l'électro-vanne	Enregistrement total période 0.5s
	s'ouvre. Cela déclenche un flux radial dans la	et mesurer débit eau
	cellule wormhole.	

#### Ouverture de la cellule après essai.

40	Pression GDS à 300 kPa	Enregistrement total période 2s
41	Pression cocotte à 100 kPa	Enregistrement total période 2s
42	Pression GDS 200 à kPa	Enregistrement total période 2s
43	Pression cocotte à 0 kPa	Enregistrement total période 2s
44	Pression GDS à 100 kPa	Enregistrement total période 2s
45	Appliquer le vide par vanne 4, puis laisser entrer	Enregistrement total période 2s
	l'air	
46	Pression GDS à 0 kPa	Enregistrement total période 2s
47	Coupez électricité, déconnecter vanne 2, ouvrir	
	vanne 1	
48	Vider le volume d'eau au-dessus piston avec	
	trompe à vide sur vanne 2	
49	Ouvrir couvercle, aspirer eau résiduelle	
50	Ouvrir bouchons de vidange piston	
51	Remontée très lente du piston à l'aide du dispositif	
	ad hoc	

## Annexe 3: Etat de densité initial de l'échantillon

Le tableau joint donne les mesures de densité initiale (après saturation et consolidation) effectuées au scanner lors des principaux essais effectués à ce jour. Les mesures sont faites sur 16 zones différentes (cf. fig.1) pour chacune des 26 positions d'acquisition (coupe).



Pour chaque essai:

- ✓ Les cases en jaunes correspondent aux trois zones de plus faible densité initiales.
- ✓ En rouge, toutes les valeurs de densité inférieures à la densité moyenne de l'échantillon.

Les numéros d'essais 34-1 et 34-2 se référent aux deux positions de la cellule lors de l'essai 34

Les zones 2, 13 et 16, ont des densités nettement plus faibles que les autres.

$\mathbf{N}^{\circ}$	Résultats	СТ	CTmax	CTmin	ROI 1	ROI 2	ROI 3	ROI 4	ROI 5	ROI 6	ROI 7	ROI 8	ROI 9	ROI	<b>ROI 11</b>	<b>ROI 12</b>	<b>ROI 13</b>	<b>ROI 14</b>	<b>ROI 15</b>	<b>ROI 16</b>
		moyen												10						
14	Chute Pceff	831,53	935,00	717,67	850,00	724,33	781,67	793,50	751,00	905,83	895,17	874,83	935,00	860,50	829,50	930,83	717,67	810,33	878,50	765,83
17	Cavité	851,11	968,38	741,81	838,05	741,81	819,48	881,52	820,71	942,48	916,14	887,00	968,38	840,62	790,29	927,48	773,90	876,24	850,10	743,57
18	erreur manip	836,77	945,80	723,15	888,25	723,15	778,40	808,10	780,80	911,35	895,15	887,20	945,80	849,55	797,35	945,60	743,20	825,35	859,65	749,45
19	Chute Pceff	837,59	945,65	721,65	863,40	721,65	789,50	840,45	786,25	917,90	909,30	887,55	945,65	834,05	792,65	925,75	743,45	851,70	851,60	740,65
23	Cavité	855,04	1009,95	741,90	905,30	741,90	801,75	858,85	832,80	1009,95	918,55	898,90	950,65	848,45	783,10	871,85	779,10	877,40	856,35	745,80
25	rien (perfo 3	852,63	997,30	728,35	823,55	728,35	811,60	879,90	838,10	962,90	928,35	907,40	997,30	837,90	778,15	900,15	768,15	895,20	849,45	735,60
	mm)																			
27	Venue Massive	864,21	980,15	736,00	837,90	736,00	823,15	876,75	824,20	932,25	954,30	929,55	980,15	874,25	823,15	933,65	762,20	888,90	892,10	758,85
28	Venue massive	848,95	985,80	737,55	845,15	737,55	811,85	866,20	785,95	829,25	918,55	895,85	971,75	840,00	829,75	985,80	741,45	859,15	883,70	781,25
29	Chute Pceff	858,18	993,50	735,40	861,10	745,45	820,45	886,05	860,40	993,50	933,35	899,80	973,55	839,50	764,20	873,25	797,90	908,20	838,70	735,40
30	Cavité "décalée"	865,22	980,05	750,45	857,35	750,45	821,20	884,85	849,75	941,55	938,60	919,55	980,05	848,45	796,65	931,45	784,60	910,25	869,05	759,65
31	Cavité "décalée"	872,31	1014,30	743,30	832,10	743,30	826,30	882,80	828,00	938,45	960,10	945,25	1014,30	878,45	824,50	944,90	761,45	907,10	903,10	766,80
32	Cavité	861,63	977,30	735,05	839,30	735,05	822,85	876,55	821,00	926,10	944,10	927,10	977,30	869,55	822,40	934,00	759,10	886,20	891,00	754,45
34-1	Venue massive	857,14	987,73	727,82	822,73	727,82	802,27	871,59	826,59	910,18	947,27	939,23	987,73	854,27	810,05	918,59	758,27	902,77	883,55	751,41
34-2	Venue massive	857,87	970,23	725,95	827,59	725,95	799,82	860,55	796,36	909,82	946,14	936,91	970,23	880,95	843,36	925,50	737,45	876,32	918,64	770,27

## Annexes 4 : Essai 14

#### A4.1 - Phase de consolidation

La figure A4-1 illustre la phase de consolidation lors de la préparation de l'essai 14. La pression confinement est augmentée progressivement, parallèlement à la pression de pore, jusqu'à atteindre 500 kPa de pression effective.



Fig. A4-1 : Phase de consolidation de l'échantillon. Essai

Remarques :

- On constate sur la figure A4-1 que la pression à la sortie de la cellule tampon (P<sub>ct</sub>) n'est pas constante tout au long de la consolidation. Cela s'explique par le fait que la pression dans la cellule tampon diminue très lentement au fil du temps (légères fuites d'air). On fait donc épisodiquement remonter cette pression en réinjectant de l'air comprimé dans la cellule tampon.
- Lors de chaque augmentation de la pression de confinement le volume d'eau injecté par la pompe GDS augmente fortement dans un premier puis tend assez rapidement à se stabiliser, ce qui signifie que l'essentiel de la consolidation a eu lieu. On constate malgré tout une petite dérive résiduelle, mais celle-ci est principalement due à la dérive de pression dans la cellule tampon.

## Fig. A4-2 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat initial.



z=0 mm



z=10 mm



z=20 mm



z=30 mm



z=40 mm



z=50 mm



z=60 mm

#### A4.2 - Evolution des pressions lors des essais de mise en production.

L'essai n°14 est le premier essai réalisé sous scanner. C'est un essai qui a donné lieu à des venues de sable avec décompaction de la partie de l'échantillon concernée par l'écoulement d'eau. Ce sont les images scanner qui ont permis de détecter l'existence de l'érosion. La première venue de sable a eu lieu au cours de l'une des deux premières phases de mise en production, puis des venues de sable ont également été observées au cours des deux phases de production suivantes. La masse de sable recueillie durant l'ensemble de l'essai 14 est m=113 g, i.e. 1,9% de la masse du sable constituant l'échantillon. Cette masse, ramenée à la densité initiale de l'échantillon représente un volume V=85 cm<sup>3</sup>.

Les figures A4-3 à A4-6 représentent les évolutions de pression (amont, aval et cocotte), ainsi que le volume d'eau injecté au cours du temps par la pompe GDS pour maintenir la pression de confinement lors des différents essais de production au cours de l'essai n°14.

On constate sur la figure A3-3 que la pression de confinement reste stable lors des mises en production alors que sur les figures A3-4, A3-5 et A3-6 la pression de confinement chute à chaque mise en production. La pompe GDS ne parvient pas à maintenir la pression de confinement et injecte donc de l'eau pour rétablir la pression. Un accumulateur de pression a par la suite été rajouté.



Fig. A4-3 : Essai n°14. Phase de mise en production (1).





Fig. A4-4 et A4-5 : Essai n°14. Phase de mise en production (2 et 3).



**Fig. A4-6 :** Essai n°14. Phase de mise en production (4).

## Fig. A4-7 :Coupes de l'échantillon de sable. Etat final.



z=0 mm



z=10 mm



z=20 mm



z=30 mm



z=40 mm



z=50 mm



z=60 mm

Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.

## Annexes 5 : Essai 17

#### A5.1 - Phase de consolidation

La figure A5-1 illustre la phase de consolidation lors de la préparation de l'essai 17. La pression de confinement est augmentée progressivement, parallèlement à la pression de pore, jusqu'à atteindre 500 kPa de pression effective.



Fig. A4-1 : Phase de consolidation de l'échantillon. Essai 17.

On constate que les remarques concernant l'évolution de la pression à la sortie de la cellule tampon et l'évolution du volume d'eau injecté par la pompe GDS qui ont été faites sur la figure A5-1 (essai 14) restent valables pour la figure A5-1 (essai 17).



Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



z=36 mm



z=39 mm



z=42 mm



z=45 mm



z=48 mm



z=51 mm



z=54 mm



z=57 mm

## A5.2 - Evolution des pressions lors des ouvertures.

L'essai n°17 est le premier essai sous scanner ayant donnée lieu à des venues de sable avec formation d'une cavité. La masse de sable recueillie durant l'ensemble de l'essai 17 est m=40 g, i.e. 0,65% de la masse du sable constituant l'échantillon. Cette masse, ramenée à la densité initiale de l'échantillon représente un volume V=85 cm<sup>3</sup>.



Fig. A5-3 : Essai n°17. Phase Phase de mise en production

Aucune venue de sable n'ayant été constaté lors des trois premières ouvertures de la vanne 20, la pression de confinement effective a ensuite été baissée à 300 kPa.



**Fig. A5-4 :** Essai n°17. Phase de mise en production (2).



Fig. A5-5 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat intermédiaire n°1.

Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



z=36 mm



z=39 mm



z=42 mm



z=45 mm



z=48 mm



z=51 mm



z=54 mm



z=57 mm



## A5.3 - Evolution des pressions lors des ouvertures (suite).



Fig. A5-6 et A5-7 : Essai n°17. Phase de mise en production (3 et 4).



Fig. A5-8 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat intermédiaire n°2.

Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



z=36 mm



z=39 mm



z=42 mm



z=45 mm



z=48 mm



z=51 mm



z=54 mm



z=57 mm





**Fig. A5-9 :** Essai n°17. Phase de mise en production (5).

## Fig. A5-10 : Coupe de l'échantillon de sable. Etat final.



z=27 mm

z=30 mm



z=24 mm

z=6 mm

z=15 mm

z=33 mm

Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



z=36 mm



z=39 mm



z=42 mm



z=45 mm



z=48 mm



z=51 mm



z=54 mm



z=57 mm



Fig. A5-11 : Reconstruction 3D de la cavité à l'état final.

## Annexes 6 : Essai 27

#### A6.1 - Phase de consolidation

La figure A6-1 illustre la phase de consolidation lors de la préparation de l'essai 27. La pression de confinement est augmentée progressivement, parallèlement à la pression de pore, jusqu'à atteindre 400 kPa de pression effective. La position du piston est connue à partir du capteur de déplacement LVDT. A l'état initial, c'est à dire avant saturation et confinment, le capteur indique 4,90 mm.



Fig. A6-1 : Phase de consolidation de l'échantillon. Essai 27.

On constate que la remarques concernant l'évolution de la pression à la sortie de la cellule tampon qui a été faite sur la figure A4-1 (essai 14) et A5-1 (essai 17) reste valable pour la figure A6-1 (essai 27).





Fig. A6-2 et A6-3 : Phase de consolidation de l'échantillon. Essai 27.



## Fig. A6-4 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat initial.

Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



z=36 mm



z=39 mm



z=42 mm



z=45 mm



z=48 mm



z=51 mm



z=54 mm



z=57 mm

#### A6.2 - Evolution des pressions lors des phases de production.

L'essai n°27 est un des essais sous scanner ayant donnés lieu à des venues massives de sable avec une forte baisse de la densité dans un secteur de la couche de sable. La masse de sable recueillie durant l'ensemble de l'essai 27 est m=391 g, i.e. 28% du sable initialement présent dans la zone de densité affaiblie.



**Fig.** A6-5 : Essai n°27. Phase de mise en production (1).

Une venue massive de sable ayant été constaté dès la création du gradient de pression entre la pression amont et la pression aval de la cellule "wormhole", la pression aval a très rapidement été ramené au niveau de la pression amont afin de réaliser une série d'acquisition d'images scanners après cette première phase de production (Fig. A6-6). Ensuite la pression de confinement effective a été augmenté à 500 kPa avant la deuxième phase de mise en production.



Fig. A6-6 : Coupes de l'échantillon de sable. Etat intermédiaire n°1.

Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



z=36 mm



z=39 mm



z=42 mm



z=45 mm



z=48 mm



z=51 mm



z=54 mm



z=57 mm

## A6.3 -Evolution des pressions lors des phases de production (suite).



Fig. A6-7 : Essai n°27. Phase de mise en production (2).

La deuxième phase de mise en production a également donné lieu à une venue massive et immédiate de sable. L'essai a alors été arrété et une nouvelle série d'acquisition d'images scanners a été effectuée (Fig. A6-8).



Rq. : La position z=0 mm se situe à l'extrémité de la couche de sable la plus éloignée du piston.



## Annexe 7: Formation d'une cavité à une distance intermédiaire entre le puits et le centre de la cellule

Image scanner au centre de la couche de sable (coupe 13) ans le cas des essais 30 et 31

Essai 30:



Essai 31:



## Annexe 8: Granulométrie des sables



On remarque sur les courbes ci-dessus un écart plus ou moins important selon les sables entre les courbes granulométriques obtenues par tamisage et celles qui sont obtenues par méthode optique (laser). Ces écarts liés aux principes physiques des mesures nous renseignent sur la forme des grains. En effet si les grains sont élancés le tamisage aura tendance à retenir la plus petite dimension caractéristique du grain tandis que les méthodes laser retiendront la plus grande.

On constate plus précisément que le sable d'Elk Point est celui qui présente le moins d'écart entre les courbes par tamisage et par méthode laser, il a donc des grains peu élancés. Les sables de Manche et de Fontainebleau ont quant à eux des formes de grains plus élancées.

## Annexe 9: Discrétisation 2D

Les interpolations utilisées pour la pression et le déplacement sont données dans les repères locaux associés à chacun des triangles, par:

Pour les triangles de type 1:  $P(x,t) = P_1(t)N_1^p(x, y) + P_2(t)N_2^p(x, y) + P_3(t)N_3^p(x, y)$ avec  $N_1^p(x, y) = -\frac{x}{l} - \frac{y}{d} + 1$  $N_2^p(x, y) = \frac{x}{1}$  $N_3^p(x, y) = \frac{y}{d}$  $\xi_x(\underline{x},t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{xk}(t) N_k^{\xi}(x,y)$  $\xi_{y}(\underline{x},t) = \sum_{k=1,6} \xi_{yk}(t) N_{k}^{\xi}(x,y)$ avec  $N_{1}^{\xi}(x, y) = 1 - \frac{3x}{l} - \frac{3y}{d} + \frac{4xy}{ld} + \frac{2x^{2}}{l^{2}} + \frac{2y^{2}}{d^{2}}$  $N_2^{\xi}(x, y) = -\frac{x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}$  $N_{3}^{\xi}(x, y) = -\frac{y}{d} + \frac{2y^{2}}{d^{2}}$  $N_{4}^{\xi}(x, y) = \frac{4x}{l} - \frac{4xy}{ld} - \frac{4x^{2}}{l^{2}}$  $N_5^{\xi}(x, y) = \frac{4xy}{ld}$  $N_{6}^{\xi}(x, y) = \frac{4y}{d} - \frac{4xy}{ld} - \frac{4y^{2}}{d^{2}}$ 

155

Pour les triangles de type 2:

 $P(\underline{x},t) = P_1(t)N_1^p(x,y) + P_2(t)N_2^p(x,y) + P_3(t)N_3^p(x,y)$ avec

$$N_{1}^{p}(x, y) = -\frac{x}{l} + 1$$
$$N_{2}^{p}(x, y) = \frac{x}{l} + \frac{y}{d} - 1$$
$$N_{3}^{p}(x, y) = -\frac{y}{d} + 1$$

et

$$\begin{aligned} \xi_x(\underline{x},t) &= \sum_{k=1,6} \xi_{xk}(t) N_k^{\xi}(x,y) \\ \xi_y(\underline{x},t) &= \sum_{k=1,6} \xi_{yk}(t) N_k^{\xi}(x,y) \end{aligned}$$

avec

$$N_{1}^{\xi}(x, y) = 1 - \frac{3x}{l} + \frac{2x^{2}}{l^{2}}$$

$$N_{2}^{\xi}(x, y) = 3 - \frac{5x}{l} - \frac{5y}{d} + \frac{4xy}{ld} + \frac{2x^{2}}{l^{2}} + \frac{2y^{2}}{d^{2}}$$

$$N_{3}^{\xi}(x, y) = 1 - \frac{3y}{d} + \frac{2y^{2}}{d^{2}}$$

$$N_{4}^{\xi}(x, y) = 4\left(-1 + \frac{2x}{l} + \frac{y}{d} - \frac{xy}{ld} - \frac{x^{2}}{l^{2}}\right)$$

$$N_{5}^{\xi}(x, y) = 4\left(1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{d} + \frac{xy}{ld}\right)$$

$$N_{6}^{\xi}(x, y) = 4\left(-1 + \frac{x}{l} + \frac{2y}{d} - \frac{xy}{ld} - \frac{y^{2}}{d^{2}}\right)$$

Les 2(2n+1)(2m+1) degrés de liberté en déplacement sont rassemblés dans la matrice colonne [ $\xi$ ].

Les (n+1)(m+1) degrés de liberté en pression sont rassemblés dans la matrice colonne [P].

On note:  

$${}^{T}\left[N_{e}^{\xi}\right] = \begin{bmatrix} N_{1}^{\xi} & 0 & N_{2}^{\xi} & 0 & N_{3}^{\xi} & 0 & N_{4}^{\xi} & 0 & N_{5}^{\xi} & 0 & N_{6}^{\xi} & 0 \\ 0 & N_{1}^{\xi} & 0 & N_{2}^{\xi} & 0 & N_{3}^{\xi} & 0 & N_{4}^{\xi} & 0 & N_{5}^{\xi} & 0 & N_{6}^{\xi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{e} \\ \xi_{y} \\ \vdots \\ \xi_{y} \\ \xi_{y} \\ \vdots \\ \xi_{y} \\ \xi_{y} \\ \vdots \\ \xi_{y} \\ \xi_{y} \\ \vdots \\ \xi_{y} \\ \xi_{y}$$

On a alors:  $\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} = {}^T \begin{bmatrix} N_e^{\xi} \end{bmatrix} \xi_e \end{bmatrix} \text{ et } P = {}^T \begin{bmatrix} N_e^{P} \end{bmatrix} P_e \end{bmatrix}$ 

L'indice "e" indique de même que dans le cas 1D qu'il s'agit de matrices élémentaires.

# Annexe 10: Matrices élémentaire en 2D

On pose:

$$r_{1} = \frac{\lambda_{0} + \mu}{6}; r_{2} = \frac{\mu l}{3d}; r_{3} = \frac{d(\lambda_{0} + 2\mu)}{3l}; r_{4} = \frac{\lambda_{0}d^{2} + \mu l^{2} + 2\mu d^{2}}{ld}$$
$$r_{5} = \frac{l(\lambda_{0} + 2\mu)}{3d}; r_{6} = \frac{\mu d}{3l}; r_{7} = \frac{\lambda_{0}l^{2} + \mu d^{2} + 2\mu l^{2}}{ld}$$

On obtient pour les triangles de type 1:

$$\begin{bmatrix} K_{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{4}}{2} & 3r_{1} & \frac{r_{3}}{2} & \frac{\mu}{6} & \frac{r_{2}}{2} & \frac{\lambda_{0}}{6} & -2r_{3} & -\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} \\ 3r_{1} & \frac{r_{7}}{2} & \frac{\lambda_{0}}{6} & \frac{3r_{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{0}}{6} & -2r_{3} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 0 & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} \\ \frac{r_{3}}{2} & \frac{\lambda_{0}}{6} & \frac{3r_{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{0}}{6} & -2r_{3} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{6} & \frac{r_{6}}{2} & 0 & \frac{3r_{6}}{2} & -\frac{\mu}{6} & 0 & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{6} & \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{6} & \frac{r_{5}}{2} & -\frac{\lambda_{0}}{6} & 0 & 0 & \frac{3r_{5}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{3} & -2r_{2} & -\frac{2\mu}{3} \\ \frac{\lambda_{0}}{6} & \frac{r_{5}}{2} & -\frac{\lambda_{0}}{6} & 0 & 0 & \frac{3r_{5}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} \\ -2r_{3} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{3} & -\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} & -4r_{2} & -4r_{1} & 0 & 4r_{1} \\ -\frac{2\mu}{3} & -2r_{6} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{6} & 0 & 0 & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & -4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{3} & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & -4r_{2} & -4r_{1} & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} & -4r_{3} & -4r_{1} \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & \frac{2\mu}{3} & 0 & -4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & 4r_{4} & 4r_{1} & -4r_{6} \\ -2r_{2} & -\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 4r_{1} & -4r_{3} & -4r_{1} & 4r_{4} & 4r_{1} \\ -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & 4r_{4} & 4r_{1} & -4r_{6} \\ -2r_{2} & -\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & 4r$$

Et pour les triangles de type2:

$$\left[K_{\epsilon}\right] = \begin{bmatrix} \frac{3r_{3}}{2} & 0 & \frac{r_{3}}{2} & \frac{\lambda_{0}}{6} & 0 & -\frac{\lambda_{0}}{6} & -2r_{3} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r_{6}}{2} & \frac{\mu}{6} & \frac{r_{6}}{2} & -\frac{\mu}{6} & 0 & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{6} & \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_{3}}{2} & \frac{\mu}{6} & \frac{r_{4}}{2} & 3r_{1} & \frac{r_{2}}{2} & \frac{\lambda_{0}}{6} & -2r_{3} & -\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} \\ \frac{\lambda_{0}}{6} & \frac{r_{6}}{2} & 3r_{1} & \frac{r_{7}}{2} & \frac{\mu}{6} & \frac{r_{5}}{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{6} & 0 & 0 & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} \\ 0 & -\frac{\mu}{6} & \frac{r_{2}}{2} & \frac{\mu}{6} & \frac{3r_{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{3} & -2r_{2} & -\frac{2\mu}{3} \\ -\frac{\lambda_{0}}{6} & 0 & \frac{\lambda_{0}}{6} & \frac{r_{5}}{2} & 0 & \frac{3r_{5}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} \\ -2r_{3} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{3} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 0 & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} & -4r_{2} & -4r_{1} & 0 & 4r_{1} \\ -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{6} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{6} & 0 & 0 & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & -4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & 0 \\ 0 & \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\lambda_{0}}{3} & -4r_{2} & -4r_{1} & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} & -4r_{3} & -4r_{1} \\ \frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{3} & 0 & -4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{2} & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & 0 & 4r_{1} & -4r_{5} & 4r_{1} & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -2r_{2} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & 4r_{1} & 0 & -4r_{1} & -4r_{6} & 4r_{1} & \frac{4r_{4}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & 4r_{1} & 0 & -4r_{1} & -4r_{6} & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & 4r_{1} & 0 & -4r_{1} & -4r_{6} & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & 4r_{1} & 0 & -4r_{1} & -4r_{6} & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & 4r_{1} & 0 & -4r_{1} & -4r_{6} & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3} & -2r_{5} & 4r_{1} & 0 & -4r_{1} & -4r_{6} & 4r_{1} & \frac{4r_{7}}{3} & 4r_{1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda_{0}}{3} & -2r_{5} & -\frac{2\mu}{3$$

Triangles de type 1: 
$$[C_e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 \\ -l & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \\ d & -d & 0 \\ -l & -2l & -l \\ d & d & 2d \\ l & 2l & l \\ -d & -d & -2d \\ l & 0 & -l \end{bmatrix}$$

Triangles de type 2: 
$$\begin{bmatrix} C_e \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l \\ d & -d & 0 \\ 2l & l & l \\ -d & -d & -2d \\ -2l & -l & -l \\ d & d & 2d \\ 0 & -l & l \end{bmatrix}$$

Triangles de type 1:

Triangles de type 2:

$$[R_{1e}] = \frac{ldk_{p}dt}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^{2}} + \frac{1}{d^{2}} & \frac{-1}{l^{2}} & \frac{-1}{d^{2}} \\ \frac{-1}{l^{2}} & \frac{1}{l^{2}} & 0 \\ \frac{-1}{d^{2}} & 0 & \frac{1}{d^{2}} \end{bmatrix}$$

$$[R_{1e}] = \frac{ldk_{p}dt}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^{2}} & \frac{-1}{l^{2}} & 0\\ \frac{-1}{l^{2}} & \frac{1}{l^{2}} + \frac{1}{d^{2}} & \frac{-1}{d^{2}}\\ 0 & \frac{-1}{d^{2}} & \frac{1}{d^{2}} \end{bmatrix}$$

Triangles de type 1:

Triangles de type 2:

$$[R_{2e}] = \frac{ld}{12M} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{2e}] = \frac{ld}{12M} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$