HAL
open science

Compréhension de la biréfringence et du couplage de mode de polarisation dans les fibres de télécommunications

Grégory Bouquet

To cite this version:

Grégory Bouquet. Compréhension de la biréfringence et du couplage de mode de polarisation dans les fibres de télécommunications. domain_other. Télécom ParisTech, 2005. Français. NNT : . pastel-00001228

HAL Id: pastel-00001228

https://pastel.hal.science/pastel-00001228

Submitted on 22 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Présentée pour obtenir le grade de Docteur de

L'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : Electronique et Communications

Grégory Bouquet

Compréhension de la biréfringence et du couplage de mode de polarisation dans les fibres optiques de télécommunication

Soutenue le 17 Mars 2005 devant le jury composé de

Patrice MEGRET	Président du Jury
Stefano WABNITZ	Rapporteurs
Dominique PAGNOUX	
Didier ERASME	Examinateurs
Louis Anne DE MONTMORILLON	
Pierre SANSONETTI	
Guy DEBARGE	Directeur de thèse

Résumé

Le domaine des communications par fibres optiques est actuellement caractérisé par une augmentation de la demande en terme de capacité de transmission. On cherche à transmettre de plus en plus de données et de nouvelles applications voient le jour. Il persiste toutefois certaines limitations, comme les effets dispersifs, qui dégradent les performances des transmissions. Parmis ces effets, la Dispersion de Mode de Polarisation (PMD) est un élargissement temporel des signaux lié à la dépendance de la vitesse de groupe à la polarisation. Il existe deux approches pour s'affranchir des effets de la PMD. La première consiste à la compenser en ligne. La seconde approche, que nous avons abordée dans cette thèse, consiste à obtenir des faibles PMD en intervenant au niveau du processus de fabrication de la fibre.

La première étape de ce travail a consisté à modéliser la biréfringence, phénomène à l'origine de la PMD. Nous avons mis en valeur l'impact non négligeable sur la biréfringence des contraintes mécaniques engendrées dans la fibre lors de la fabrication. La seconde étape a concerné l'étude de l'effet d'une rotation périodique de la fibre sur la PMD. Nous avons montré que lorsque cette rotation est triangulaire, la réduction de la PMD est importante. Enfin, dans un troisième temps, nous avons utilisé deux méthodes de mesure, afin de caractériser la biréfringence et la rotation de la fibre. Cela nous a permis d'apporter certains éléments de validation aux résultats obtenus dans les deux premières parties.

De cette étude, nous avons dégagé des règles simples qui nous ont permis de réduire la PMD des fibres à fortes biréfringences.

Abstract

The domain of optical telecommunication is characterized by an increasing demand for better transmission capacity. One wants to transmit larger amount of information as new applications are appearing. However, some limitations are still present, like dispersive effects that degrade transmission performances. Polarization Mode Dispersion (PMD) is such an effect which is time broadening due to the dependence of the group velocity to the signal polarization. To overcome this effect, there are two common approaches. The first consists in mitigating PMD during transmission. The second, used in this thesis, consists in producing low PMD fibre by intervening at fabrication process level.

In the first part of our work, we studied birefringence, which is the cause of PMD. We showed that the mechanical stress ,frozen in the fibre during drawing, has an important contribution to the birefringence. As a second step, we studied the effect of spinning the fibre as it is drawn. We found that a triangular spinning permit to efficiently decrease PMD. Finally, we used two experimental methods to characterise birefringence and spinning of the fibre. We obtain some experimental validation of the theoretical results obtained in the two first parts of this work.

This study leads to deduce simple rules which permit to reduce PMD of high birefringence fibre

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du groupe modélisation d'Alcatel Cable et au sein du département COMELEC de l'ENST durant 3 ans et demi de 2001 à 2004. Je remercie monsieur Michel Carrat, monsieur Pierre Sansonetti et mademoiselle Pascale Nouchi de m'avoir accueilli au sein du groupe modélisation.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur Guy Debarge qui a accepté de diriger cette thèse, ainsi qu'à monsieur Louis Anne de Montmorillon, Co-directeur, qui a suivi mon travail avec beaucoup d'intérêt et qui m'a soutenu tout au long de ces trois années. Ses conseils ont permis de simplifier des problèmes que j'avais tendance à vouloir compliquer et ses "tours de passe-passe", très utiles dans les moments critiques, ont permis de débloquer un certain nombre de situation qui semblaient mal engagées.

Je voudrais remercier également messieurs Dominique Pagnoux et Stefano Wabnitz pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, ainsi que Messieurs Patrice Megret, Didier Erasme et Pierre Sansonetti pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais remercier l'ensemble des personnes avec qui j'ai pu collaborer au cours de ces trois années,

- Thierry Chartier pour les mesures de longueurs de battement.
- L'équipe de mesure d'Alcatel Cable, avec entre autre Philippe Fayolle et Vanessa Durel.
- Marc Nicolardot pour son aide sur la modélisation des contraintes.

Enfin je remercie mes collègues de travail à Alcatel, ce qui sont toujours présents : Pierre Sillard, Denis Molin expert es Matlab, Mariane Astruc, Ivo Flammer et ses idées bizarres, Elise Regnier, Cedric Gonnet, Christine Labatut, Alain Bertaina, Bruno Dany, Bernard Aladenize, Yves Lumineau, ainsi que les anciens : Denis Tschumperlé, Maxime Gorlier, Emmanuel Scolan, Ludovic Fleury, Philippe Guénot, Florent Beaumont et Lionel Expert.

Table des matières

Introduction générale.....5

Chapitre I : Notions de base sur la Dispersion de Mode de Polarisation.....11

1 Notions de base sur la polarisation ; milieux anisotropes.....13

2 Dispersion de Mode de Polarisation dans une fibre biréfringente.....17

3 Caractérisation des effets de polarisation.....26

4 Conclusion du chapitre.....28

Chapitre II : Calcul de la biréfringence de phase et de groupe.....29

1 Calcul de l'anisotropie dans une fibre optique.....35

2 Calcul de la biréfringence de phase et de groupe.....69

3 Conclusion du chapitre.....90

Chapitre III : Calcul de la PMD dans le régime longue distance.....93

1 Etat de l'art.....97

2 Vrillage sinusoïdal vs vrillage triangulaire.....109

3 Conclusion du chapitre.....130

Chapitre IV : Caractérisation du couplage de mode et de la biréfringence dans les fibres de télécommunication.....131

1 Les méthodes expérimentales utilisées.....135

2 Caractérisation des effets de polarisation dans le régime longue distance.....146

3 Caractérisation de la polarisation dans le régime longue distance.....156

4 Conclusion du chapitre.....178

Conclusion générale.....179

Annexes.....183

A I Formalisme de Stokes et formalisme de Jones.....183

A II Calcul du vecteur PMD dans une fibre vrillée triangulairement.....188

A III Simulation de l'évolution de la polarisation dans les méthodes réflectométriques.....190

A IV Formalisme utilisé pour décrire la méthode magnéto-optique.....192

Références.....197

Bibliographie de l'auteur.....205

Introduction

1 Les télécommunications optiques

Depuis l'invention du LASER dans les années 60, les technologies optiques ont connu un essor considérable. En effet, en raison de sa grande pureté spectrale et de la possibilité de moduler des signaux optiques à de grandes fréquences, la lumière LASER devenait un vecteur idéal pour transporter de l'information. Une des suites logiques à l'invention du LASER consistait à transmettre le signal lumineux dans un guide d'onde optique, i.e. la fibre optique. Néanmoins, l'utilisation de tels guides d'ondes optiques nécessitait à l'époque de résoudre un certain nombre de problèmes technologiques liés à la fabrication de composants à faible atténuation et à grande bande passante. Une étape cruciale fût franchie lorsque l'atténuation dans les fibres optiques devint compatible avec les exigences d'un réseau de télécommunication (20 dB/km à 850 nm en 1970 [Corning]). Depuis, des progrès considérables ont été réalisés et des atténuations de 0.2 dB/km sont couramment atteintes dans la fenêtre de longueur d'onde proche de 1550 nm. La fabrication de fibres à faibles pertes fût le point de départ d'une recherche intense du point de vue des réseaux de télécommunication. Destinés au départ à des applications militaires, les réseaux de télécommunication se sont rapidement ouverts aux structures commerciales. Cette démocratisation allait de pair avec une augmentation des débits et la fibre optique commençait alors à remplacer le câble (dont l'atténuation est plusieurs dizaines de fois supérieure à celle de la fibre optique) et le satellite (mal adapté à des liaisons points à points entre plusieurs utilisateurs). Aujourd'hui, le succès remporté par la fibre optique est tel que l'on parle de télécommunications optiques. La course aux débits engendre des efforts de recherche toujours plus importants, nécessite des fibres toujours plus "transparentes" et toujours plus performantes. Dans cette optique, les chercheurs et les industriels ont tenté de maîtriser les différents phénomènes physiques limitant l'augmentation des débits dans la fibre optique.

2 Les effets de dispersion dans les fibres monomodes

De façon simplifiée, une fibre optique est un guide d'onde diélectrique constitué de deux cylindres concentriques de verres différents. Le cylindre central est appelé cœur et le cylindre externe, gaine. La propagation de la lumière dans les fibres optiques est régie par les équations de Maxwell. Leur résolution dans une fibre optique conduit à l'existence d'une ou plusieurs solutions stationnaires, appelées communément modes de propagation du champ électromagnétique. Le nombre de mode dépend des caractéristiques géométriques de la fibre. Ainsi, les fibres dites multimodes possèdent un diamètre de cœur élevé (de l'ordre de 50 μm), compatible avec la propagation de plusieurs modes de propagation. Ces fibres sont principalement utilisées pour des applications courtes distances car les différents modes ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui devient pénalisant du point de vue de la bande passante lorsque les distances de propagation sont très élevées ; on parle de dispersion intermodale. Un ordre de grandeur des débits autorisés par les fibres multimodes est de l'ordre de 1

Gb/s sur environ 500 mètres [Schlager]. Les fibres dites monomodes possèdent un diamètre de cœur plus petit (de l'ordre de 8 μm), ce qui n'autorise la propagation que d'un seul mode de propagation. Les débits actuellement bien maîtrisés sur les fibres monomodes sont de l'ordre de 40 Gb/s par canaux sur des distances supérieures à 1000 km. La fibre monomode présente de plus l'avantage d'offrir une bande passante en longueur d'onde beaucoup plus importante que les fibres multimodes. Ainsi pour des transmissions sur longues distances on utilise exclusivement des fibres monomodes pour s'affranchir des effets de dispersion intermodale. Néanmoins, même pour des transmissions monomodes, il persiste certains effets physiques dispersifs conduisant à une dégradation du signal au cours de la propagation : la dispersion chromatique et la dispersion de mode de polarisation.

La dispersion chromatique est proportionnelle à la dérivée seconde de l'indice optique vu par le mode, ou indice effectif, par rapport à la longueur d'onde : un signal optique n'étant jamais parfaitement monochromatique, chaque composante spectrale du signal se déphase de façon différente au cours de la propagation ce qui se traduit par une déformation temporelle du signal. La dispersion chromatique dans les fibres monomodes peut être séparée en deux contributions : la première provient de la dépendance de l'indice optique avec la longueur d'onde et la seconde de la structure géométrique du guide d'onde, plus communément appelée profil d'indice. En jouant sur ces deux degrés de liberté on peut moduler la dispersion chromatique totale. A l'heure actuelle, la dispersion chromatique dans les fibres optiques est un phénomène bien maîtrisé [Nouchi02].

Un autre phénomène de dispersion est lié au caractère vectoriel de la lumière (plus communément désigné par le terme de polarisation) : il est appelé Dispersion de Mode de Polarisation ou PMD (de l'anglais Polarisation Mode Dispersion). Les fibres optiques monomodes permettent en fait la propagation de deux modes de propagation dont les polarisations sont orthogonales. Lorsque la fibre présente une symétrie circulaire, ces deux modes de polarisation se propagent avec la même vitesse de groupe. Lorsqu'en revanche la symétrie circulaire est brisée, ce qui est en pratique toujours le cas, les vitesses de groupe sont différentes : la PMD représente alors la différence entre les temps de groupes associés aux deux modes de polarisation orthogonaux. La PMD partage ainsi avec les phénomènes de dispersion usuels, la propriété de provoquer la déformation temporelle du signal transmis. De façon plus précise, la PMD repose sur deux phénomènes :

1) La biréfringence, qui est la différence entre les vitesses de phase associées aux deux modes de polarisation orthogonaux. Elle résulte de l'asymétrie géométrique du profil d'indice et du profil de contrainte résiduelle. C'est elle qui est à l'origine de la différence entre les vitesses de groupe des deux modes de polarisation.
2) Le couplage de mode qui est la conséquence de la faiblesse de la biréfringence dans les fibres de télécommunication. En raison de cette faiblesse, les deux modes de polarisation peuvent facilement se coupler et échanger de l'énergie. En fait, tout au long de la propagation dans une fibre réelle, des imperfections telles que des courbures ou des torsions réparties de façons aléatoires le long de la fibre vont entraîner un couplage permanent entre les deux modes de polarisation. Ce couplage peut varier dans le temps et dans l'espace, du fait de variation de température ou de défauts

distribués le long de la fibre, ce qui confère un comportement de type Brownien à la PMD : la PMD croît donc comme la racine carrée de la distance de propagation.

Le couplage de mode tend ainsi à réduire la PMD mais la rend difficilement contrôlable en lui donnant un caractère aléatoire.

3 Particularité et importance de la PMD dans les nouveaux réseaux de télécommunication optiques

Le tableau suivant présente la portée maximale d'un système optique fonction de la valeur moyenne de la PMD de la ligne et du débit du signal optique.

	Fibre actuelle	Bonne fibre historique	Mauvaise fibre historique
PMD (ps/√km)	0,05	0,2	2
2,5 Gbit/s (km)	640 000	40 000	400
10 Gbit/s (km)	40 000	2 500	25
40 Gbit/s (km)	2 500	150	1,5
160 Gbit/s (km)	150	10	0,1

tableau 1 : Limitations théoriques de portée (km) en fonction de la PMD et du débit par longueur d'onde [France Télécom]

Le terme "fibre historique" fait référence ici aux fibres utilisées lors de l'installation des premiers réseaux optiques dans les années 90 par France Télécom. Les valeurs extrêmes des PMD des fibres installées dans ces réseaux sont de l'ordre de 0.2 ps/km$^{0.5}$ et de 2 ps/km$^{0.5}$ ce qui pour un débit de 40 Gb/s limite la portée optique à 150 km et 1.5 km respectivement. Une attention particulière doit donc être prêtée au "paramètre" PMD dans le design des futurs réseaux de télécommunication optiques qui devront être en mesure de travailler à des débits égaux voire supérieurs à 40 Gb/s. Ce résultat illustre l'importance de la réduction de la PMD dans un contexte d'augmentation des débits. Deux approches sont généralement envisagées afin de réduire la PMD[1]. La première consiste à compenser la distorsion du signal en ligne, tout comme on compense les pertes subies lors de la propagation ou la dispersion chromatique. Cette compensation se fait périodiquement grâce à des compensateurs de PMD [Lanne]. Le principe consiste, de façon simplifiée, à imposer une PMD opposée à celle que le signal a subit au cours de la propagation. Cette compensation doit se faire en temps réel puisque la PMD évolue rapidement dans le temps. Elle nécessite donc des éléments dont les caractéristiques de biréfringence sont modulables très rapidement. Une approche parallèle consiste à obtenir des fibres à faible PMD, en intervenant au niveau du processus de fabrication. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse.

[1] La PMD désigne à la fois le phénomène physique et la grandeur que l'on cherche à réduire

4 Enjeux de la thèse

Du point de vue de la compréhension et de la réduction des causes intrinsèques de la PMD, les travaux effectués dans la littérature et en milieux industriels se focalisent principalement sur trois points :

Le premier point concerne les origines de la biréfringence. Celles ci sont la conséquence d'une faible déviation de la symétrie circulaire de la fibre qui entraîne l'apparition, après étirage de la fibre, de contraintes résiduelles qui rendent la fibre anisotrope. Tout comme la dispersion chromatique, la PMD résulte de la contribution de deux effets, l'anisotropie "géométrique" et l'anisotropie matériau, qui ont été très peu étudiées de façon simultanée dans la littérature [Chowdhury00], [Fontaine96]. De même, les causes de ces deux anisotropies sont étroitement liées et proviennent de la combinaison de la non-circularité du profil de composition initial et de l'histoire thermo-mécanique de la fibre. Actuellement, si les géométries de la préforme et de la fibre sont plutôt bien maîtrisées, l'histoire thermo-mécanique de la fibre est beaucoup moins bien connue [Nicolardot, Park].

Le second point consiste à comprendre l'effet du couplage de mode dans une fibre biréfringente. L'impact de la rotation déterministe des axes propres sur la PMD a été très largement étudié dans la littérature, et la plupart des fibres actuelles sont vrillées au cours de l'étirage [Chen, Li, Galtarossa]. Certaines interrogations persistent sur l'impact des effets aléatoires sur la PMD des fibres vrillées [Pizinat].

Enfin le troisième point concerne la mesure des phénomènes à l'origine de la PMD. Les mesures de biréfringence sur les fibres non vrillées et à faible biréfringence sont bien maîtrisées [Galtarossa, Wuilpart] mais la mesure sur les fibres vrillées en est à ses balbutiements [Schuh, Galtarossa].

Enjeux de la thèse

L'enjeu de cette thèse a donc été de faire avancer notre compréhension des phénomènes suivant ces trois points afin de permettre la mise en place de règles de design pour réaliser des fibres de télécommunication à faible PMD.

Le chapitre I est dédié à la présentation du phénomène de PMD et à l'introduction de la terminologie utilisée dans la littérature. Nous présentons, en particulier, la notion d'états principaux de polarisation permettant de définir la PMD dans les fibres réelles, ainsi que le formalisme permettant d'étudier la propagation de la lumière polarisée dans les fibres biréfringentes.

Le chapitre II présente la biréfringence dans un régime dit de courte distance, i.e. un régime de propagation tel que les effets du couplage de mode ne se sont pas fais ressentir. La fibre est étudiée du point de vue thermomécanique et les phénomènes conduisant à l'apparition de l'anisotropie sont présentés. Nous y étudions ensuite l'effet de l'anisotropie du matériau et l'effet d'une faible ellipticité sur la propagation de la lumière. Nous montrons que dans les fibres de télécommunication, l'anisotropie du verre après étirage joue un rôle non négligeable.

Le chapitre III s'intéresse à un régime dit de longue distance. On s'intéresse donc à l'effet du couplage sur l'évolution de la PMD. Après une étude des travaux effectués dans la littérature sur le sujet, nous avons choisi de ne nous intéresser qu'aux effets du couplage déterministe. Nous introduisons une nouvelle forme de rotation de la fibre qui permet de réduire de façon très importante la PMD comparée aux rotations traditionnelles. Nous étudions en parallèle l'effet du conditionnement sur la PMD des fibres vrillées périodiquement.

Enfin, au chapitre IV, nous caractérisons la distribution de la biréfringence et la du couplage de mode dans le régime courte distance et dans le régime longue distance :

-Dans le régime longue distance, nous utilisons une technique basée sur la diffusion Rayleigh. Cette technique dite réflectométrique nous permet de mesurer en particulier la période de rotation de la fibre et de vérifier la bonne application du vrillage. Nous proposons en parallèle une méthode pour tenter de caractériser la valeur de la PMD. Nous montrons que nous pouvons caractériser dans 70 % des cas, au moins qualitativement, les portions de fibres vrillées présentant une forte ou une faible PMD.

-Dans le régime courte distance, nous utilisons une technique basée sur l'effet Faraday. Cette technique, dite magnéto-optique, beaucoup plus résolvante que la précédente nous permet, entre autre, de mesurer le vrillage sur des fibres à fortes biréfringences. Nous montrons, de même, que nous pouvons utiliser cette technique pour caractériser la forme du vrillage effectivement appliquée à la fibre.

Chapitre I : Notions de base sur la Dispersion de Mode de Polarisation

1 NOTIONS DE BASE SUR LA POLARISATION DE LA LUMIERE ; MILIEUX ANISOTROPES 13

1.1 REPRESENTATION DE L'ETAT DE POLARISATION 13

1.1.1 Formalisme de Jones 13

1.1.2 Formalisme de Stokes 15

1.2 MILIEUX ANISOTROPES 16

2 DISPERSION DE POLARISATION DANS UNE FIBRE BIREFRINGENTE 17

2.1 REGIME COURTE DISTANCE : BIREFRINGENCE DE PHASE ET DE GROUPE 18

2.1.1 Point de vue fréquentiel 19

2.1.2 Point de vue temporel 20

2.1.3 Conséquence et intérêt des deux points de vue 21

2.2 REGIME LONGUE DISTANCE : COUPLAGE DE MODE 21

2.2.1 Etats Principaux de Polarisation 22

2.2.2 Interprétation géométrique de la PMD : Vecteur PMD 23

2.2.3 Equation d'évolution du vecteur PMD 24

3 CARACTERISATION DES EFFETS DE POLARISATION 26

3.1 MESURE DE LA PMD 27

3.2 MESURE DE BIREFRINGENCE 27

4 CONCLUSION 28

1 Notions de base sur la polarisation de la lumière ; Milieux anisotropes

La notion de polarisation de la lumière est liée au caractère vectoriel du champ électromagnétique $(\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t))$ associé à la propagation d'ondes lumineuses. En optique on choisit traditionnellement le champ électrique pour définir la polarisation. Pour une onde plane et monochromatique, la polarisation est associée à l'évolution temporelle du champ électrique en un point de l'espace. On définit différents états de polarisation en fonction de la figure décrite par l'extrémité de $\vec{E}$:

- Etats de polarisation linéaires lorsque l'extrémité du champ électrique décrit une droite dans le plan d'onde ;
- Etats de polarisation circulaires lorsque l'extrémité du champ électrique décrit un cercle dans le plan d'onde ;
- et plus généralement, états de polarisation elliptiques lorsque l'extrémité du champ électrique décrit une éllipse dans le plan d'onde ;

On définit un sens de parcours du champ électrique et on parle de polarisation droite (respectivement gauche) lorsqu'en regardant le plan d'onde dans le sens opposé au sens de propagation, le champ électrique tourne dans le sens direct (respectivement indirect).

1.1 Représentation de l'état de polarisation

Deux formalismes sont principalement utilisés pour représenter la polarisation d'une onde lumineuse ainsi que l'effet des dispositifs optiques sur celle ci : les formalismes de Jones et de Stokes. Le premier est particulièrement bien adapté à la description d'ondes lumineuses totalement polarisées, tandis que le second l'est pour la lumière partiellement polarisée. Le formalisme de Stokes est néanmoins couramment utilisé dans les deux cas car il fait appel, pour la représentation de la polarisation, à des grandeurs relatives à des intensités de composantes du champ ou à des combinaisons de ces intensités. Il est donc intrinsèquement lié à des grandeurs aisément mesurables.

1.1.1 Formalisme de Jones

Le champ électrique d'une onde plane monochromatique se propageant dans l'espace selon la direction de propagation $\vec{e}_z$ est :

$$E_x(z,t) = A_x \cos(\omega t - kz - \phi_x)$$
$$E_y(z,t) = A_y \cos(\omega t - kz - \phi_y)$$

équation I.1

où x, y sont portés par les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ du plan d'onde. En fonction des valeurs relatives de A_x et A_y et du déphasage $\phi = \phi_x - \phi_y$, on obtient les différents types de polarisation énoncés plus haut. La représentation de Jones consiste à associer au champ électrique de l'*équation I.1*, le vecteur complexe normé $\boldsymbol{J}$ exprimé dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x e^{-i\phi_x} \\ A_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x e^{-i\phi_x} \\ J_y e^{-i\phi_y} \end{pmatrix}$$

équation I.2

La donnée de $\boldsymbol{J}$ suffit donc à caractériser parfaitement l'état de polarisation de l'onde plane et monochromatique associée à $\vec{E}(z,t)$. La *figure I.1* représente un exemple de figure géométrique décrite par l'extrémité du champ électrique ainsi que les différents paramètres utilisés pour définir l'état de polarisation. Le *tableau I.1* présente les différents états de polarisation et les vecteurs de Jones associés écrits dans la base cartésienne ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$) en fonction des paramètres définis sur la *figure I.1*.

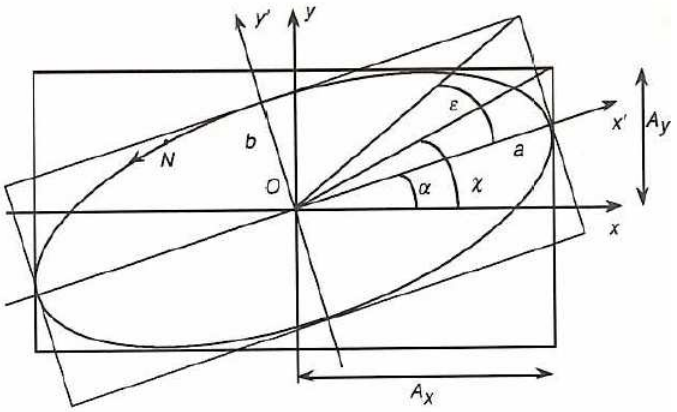

figure I.1 : la figure décrite par l'extrémité du champ électrique en fonction du temps est ici une ellipse ; les différents paramètres utilisés pour la décrire sont généralement l'azimuth α et l'ellipticité ε ou l'angle χ et le déphasage entre les deux composantes du champ électrique $\phi=\phi_x-\phi_y$ [Huard]

Linéaire d'angle α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
Circulaire droit/gauche	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +/-i \end{pmatrix}$
Elliptique	$\begin{pmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi\, e^{-i\phi} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\varepsilon - i\sin\alpha\sin\varepsilon \\ \sin\alpha\cos\varepsilon + i\cos\alpha\sin\varepsilon \end{pmatrix}$

Tableau I.1 : polarisation et vecteur de Jones associé

1.1.2 Formalisme de Stokes

Le formalisme de Stokes repose sur l'utilisation de quatre paramètres réels, définis par des combinaisons d'intensités. Si le champ électrique est représenté par l'*équation I.1*, alors les expressions des quatre paramètres de Stokes P_0, P_1, P_2 et P_3, sont données par :

$$\begin{aligned} P_0 &= I_x + I_y \\ P_1 &= I_x - I_y \\ P_2 &= I_{45} - I_{-45} \\ P_3 &= I_g - I_d \end{aligned}$$

équation I.3

où I_x, I_y sont les intensités mesurées respectivement par un polariseur linéaire orienté selon l'axe x et y ; I_{+45}, I_{-45} sont les intensités mesurées respectivement par un polariseur linéaire orienté à + et –45° de l'axe x ; I_g, I_d sont les intensités mesurées respectivement par un polariseur circulaire gauche et droit. A ces quatre quantités, on associe un vecteur de norme unité, le vecteur de Stokes qui est défini comme suit :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} P_1 / P_0 \\ P_2 / P_0 \\ P_3 / P_0 \end{pmatrix}$$

équation I.4

Ce vecteur peut s'exprimer en fonction de l'ellipticité ε et de l'azimuth α de l'ellipse de polarisation de la *figure I.1* de la façon suivante :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\alpha \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

équation I.5

Cette expression du vecteur de Stokes suggère une représentation géométrique associant à chaque état de polarisation un point sur une sphère de rayon unité (cf *figure I.2*). La latitude et la longitude de ce point sont données par 2ε et 2α respectivement. La sphère obtenue est appelée sphère de Poincaré. Les pôles de cette sphère sont associés aux états de polarisation droits et gauches ; l'équateur est associé aux états de polarisation linéaires tandis que les autres points sont associés aux états de polarisation elliptiques.

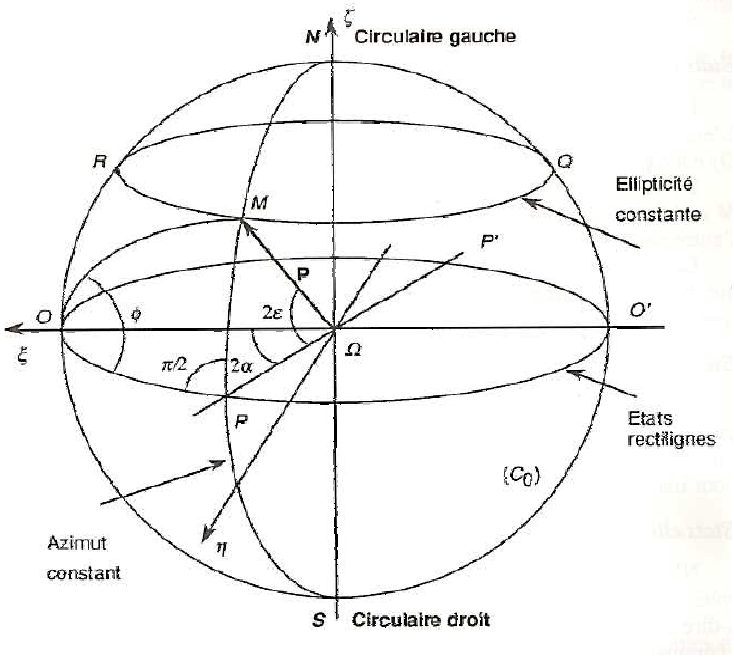

figure I.2 : sphère de Poincaré [Huard]

Lors de la propagation de la lumière dans un milieu isotrope, la différence de phase entre les deux composantes du champ électrique (*équation I.1*) ou du vecteur de Jones (*équation I.2*) n'est pas modifiée, de sorte que l'état de polarisation reste inchangé. Nous allons nous intéresser dans le paragraphe suivant aux milieux qui, par opposition au milieu isotrope, modifient la polarisation du champ électrique au cours de la propagation : ces derniers sont appelés milieux anisotropes.

1.2 Milieux anisotropes

De manière générale un milieu anisotrope est un milieu dont les propriétés optiques dépendent de la direction de propagation de l'onde. On peut citer les cristaux dont les arrangements d'atome dépendent de la direction dans l'espace, où les solutions dont les molécules présentent certaines propriétés de symétrie. Dans tout milieu anisotrope homogène[2] [Huard], il existe pour chaque direction de propagation deux états de polarisation orthogonaux qui sont tels que si le champ électrique est initialement polarisé selon l'un d'entre eux, sa polarisation reste inchangée tout au long de la propagation. Ils sont nommés états propres de polarisation et constituent une base de décomposition pour l'ensemble des états de polarisation d'une onde plane et monochromatique se propageant dans le milieu anisotrope considéré ; leurs vecteurs de Jones seront notés $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ dans la suite. On distingue généralement deux types de milieux anisotropes :

- Les milieux anisotropes linéaires, dont les états propres de polarisation sont linéaires.
- Les milieux anisotropes circulaires, dont les états propres de polarisation sont circulaires.

[2]Nous supposons que le milieu ne présente pas de non linéarités

A ces deux états propres de polarisation sont associés deux constantes de propagation différentes β_1 et β_2. La **biréfringence de phase** est définie comme la différence entre les constantes de propagation des deux états de "polarisation", elle est traditionnellement notée $\Delta\beta$. Elle peut s'exprimer en fonction des indices effectifs, n_1 et n_2, vus par les champs électriques respectifs des deux états de polarisation :

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2 - n_1)$$

équation I.6

De façon générale, un état de polarisation quelconque peut se décomposer sur la base formée par $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$. Au cours de la propagation, les composantes du champ électrique selon les deux états propres se déphasent d'une quantité évoluant linéairement avec la distance : $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \Delta\beta z$. Par conséquent, dans un milieu anisotrope homogène, la polarisation évolue généralement de façon périodique avec la distance. On définit la longueur de battement comme la période d'évolution de la polarisation. Plus la biréfringence est importante, plus la longueur de battement est faible et plus l'état de polarisation évolue rapidement avec la distance. Ainsi, dans un milieu anisotrope homogène, la description de l'évolution de la polarisation d'une onde plane est parfaitement déterminée par l'état de polarisation du champ électrique en entrée du milieu et par le déphasage engendré par la biréfringence. De même, dans un milieu anisotrope quelconque ne présentant pas de non-linéarités, la polarisation en entrée et en sortie du milieu sont reliées par une relation matricielle. Dans le formalisme de Jones, cette relation est représentée par une matrice 2×2 complexe, U, reliant le vecteur de Jones d'entrée $\boldsymbol{E}$ au vecteur de Jones de sortie $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}(\omega,z) = T\boldsymbol{E} \quad \text{avec} \quad T = e^{-i\phi_0}U(\omega,z)$$

équation I.7 : ϕ_0 est un terme de phase commun

Dans le formalisme de Stokes, ce sont les matrices de Mueller qui permettent de décrire les changements affectant l'état de polarisation d'une onde optique monochromatique à la traversée d'un milieu anisotrope. Lorsque le milieu étudié est purement biréfringent, elle est représentée par une matrice 3×3 réelle reliant le vecteur de Stokes d'entrée $\vec{E}$ au vecteur de Stokes de sortie $\vec{S}$:

$$\vec{S}(\omega,z) = R(\omega,z)\vec{E}$$

équation I.8

Nous allons dans le paragraphe suivant nous intéresser aux effets de polarisation dans les fibres optiques qui dans le cas général sont des milieux anisotropes.

2 Dispersion de polarisation dans une fibre biréfringente

En raison de leur symétrie circulaire parfaite les fibres monomodes idéales préservent la polarisation durant la propagation du champ électromagnétique. Inversement lorsque la symétrie radiale est brisée, accidentellement ou non, une fibre monomode se comporte comme un milieu anisotrope dans lequel la polarisation évolue en fonction des propriétés locales de biréfringence. Dans

une fibre réelle, ces propriétés ne sont pas définies de façon uniforme. Les modes propres de polarisation et leurs constantes de propagation ne peuvent alors être définies que localement. La dépendance fréquentielle des constantes de propagation associées aux modes propres de la fibre est à l'origine du phénomène de Dispersion de Mode de Polarisation (notée PMD, de l'Anglais "Polarisation Mode Dispersion"). Il existe différentes manifestations de la PMD en fonction du point de vue adopté :

- Du point de vue fréquentiel, la PMD se manifeste par une variation de l'état de polarisation en un point z de la fibre lorsque la fréquence du signal en entrée varie.
- Du point de vue temporel, la PMD se manifeste par une variation du temps de propagation d'une impulsion jusqu'au point z de la fibre, i.e. variation du temps de groupe, lorsque la polarisation du signal d'entrée varie.

Dans chaque point de vue, les effets de la PMD sont différents selon que les états propres de polarisation sont définis tout au long de la fibre ou pas. Dans le domaine temporel par exemple, la différence de temps de groupe entre les deux états propres de polarisation conduit localement à un élargissement temporel de l'impulsion. Cet élargissement local est contrarié globalement par un phénomène de couplage d'énergie, i.e. couplage de mode, entre les différents modes de polarisation définis tout au long de la fibre. Pour bien comprendre la PMD dans une fibre réelle, Il faut donc, dans les deux points de vue, distinguer deux régimes de propagation de la lumière polarisée :

- Un régime courte distance, où l'on suppose qu'il existe deux états propres de polarisation bien définis, et ou seules les caractéristiques locales de la biréfringence rentrent en compte.
- Un régime longue distance, où la distribution des axes propres et la distribution de la biréfringence doivent être prises en compte.

2.1 Régime courte distance : biréfringence de phase et de groupe

Sur une courte longueur de fibre, on peut toujours identifier deux états propres de polarisation. D'après le § 1.2, les états propres de polarisation peuvent servir de base pour définir l'expression du signal électrique se propageant dans la fibre. Si on suppose que la biréfringence est linéaire et si les directions des états propres de polarisation sont alignées selon $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, le champ électrique en un point z de la fibre au temps t est :

$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\vec{E}(z,\omega)d\omega$$

équation I.9

avec

$$\vec{E}(z,\omega) = E_x(\omega)e^{-i\beta_x(\omega)z}\vec{e}_x + E_y(\omega)e^{-i\beta_y(\omega)z}\vec{e}_y$$

équation I.10

$\beta_x(\omega)$, $\beta_y(\omega)$ sont les constantes de propagation associées aux états propres $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$; $E_x(\omega)$ et $E_y(\omega)$ sont les composantes du champ selon les états propres de polarisation à la pulsation ω. Si on

s'intéresse à l'évolution d'une composante monochromatique du champ à une pulsation ω_0 fixée en fonction de la position z dans la fibre, on observe le phénomène de déphasage présenté au § 1.2 : la polarisation évolue périodiquement dans la fibre avec une période L_b inversement proportionnelle à la biréfringence.

Nous allons nous intéresser maintenant aux conséquences de la dépendance des constantes de propagation avec la fréquence en fixant la position z_0 dans la fibre. Nous adopterons successivement un point de vue fréquentiel et un point de vue temporel. On suppose que la largeur spectrale du signal est suffisamment faible pour pouvoir représenter les constantes de propagation par leur développement de Taylor autours de la fréquence centrale du signal. Pour un écart $\delta\omega = \omega - \omega_0$ faible, on obtient, au premier ordre en $\delta\omega$, l'expression suivante de la constante de propagation :

$$\beta_i(\omega)z_0 = z_0\left[\beta_i(\omega_0) + \left.\frac{\partial\beta_i}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}\delta\omega\right] = z_0\,\beta_i(\omega_0) + \delta\omega\left(z_0\left.\frac{\partial\beta_m}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} \pm \frac{1}{2}z_0\left.\frac{\partial\Delta\beta}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}\right)$$

équation I.11

où β_m est la demi-somme des constantes de propagation et i=x ou y. Les deux termes proportionnels au décalage de fréquence sont homogènes à des temps, on les note respectivement τ_m et $\Delta\tau$:

$$\beta_i(\omega)z_0 = z_0\,\beta_i(\omega_0) + \delta\omega\left(\tau_m \pm \frac{1}{2}\Delta\tau\right)$$

équation I.12

En fonction du point de vue adopté, les termes τ_m et $\Delta\tau$ possèdent des significations différentes.

2.1.1 Point de vue fréquentiel

En insérant l'*équation I.12* dans l'*équation I.10* on obtient l'expression du champ électrique dans le domaine fréquentiel en fonction de $\Delta\tau$:

$$\vec{E}(z_0,\omega) = e^{-j\delta\omega\tau_m}\left(e^{-j\beta_x(\omega_0)z_0}E_x(\omega)e^{-j\delta\omega\frac{\Delta\tau}{2}}\vec{e}_x + e^{-j\beta_y(\omega_0)z_0}E_y(\omega)e^{+j\delta\omega\frac{\Delta\tau}{2}}\vec{e}_y\right)$$

équation I.13

On note qu'un décalage $\delta\omega$ faible en fréquence du signal d'entrée provoque un déphasage $\Delta\phi(z_0,\omega) = \Delta\tau\,\delta\omega$ entre les composantes du champ électrique au point z_0. Ce déphasage variant linéairement avec la fréquence, le vecteur de Jones et donc l'état de polarisation au point z_0 évoluent périodiquement avec ω (*figure I.3*). La grandeur $\Delta\tau$ permet de quantifier le taux de variation de la polarisation du signal à la position z_0 avec la fréquence.

figure I.3 : interprétation fréquentielle de la PMD dans le régime courte distance : lorsque la fréquence du signal d'entrée, polarisé ici à +45° des axes propres, varie, la polarisation de sortie évolue de façon périodique avec la fréquence

2.1.2 Point de vue temporel

Du fait de la dépendance fréquentielle des constantes de propagation, la différence de vitesse de phase se traduit par une différence des vitesses de groupe des deux modes de propagation. Cette différence de vitesse de groupe permet de définir un mode lent et un mode rapide dans une fibre monomode. Lorsque le signal est quasi-monochromatique (tel que le développement de Taylor à l'ordre 1 soit vérifié), on obtient l'expression du champ électrique dans le domaine temporel en insérant l'*équation I.13* dans l'*équation I.9* :

$$\vec{E}(z_0,t) = e^{i\omega_0 t} E_x(t-\tau_m-\frac{\Delta\tau}{2})e^{-i\beta_x(\omega_0)z_0}\vec{e}_x + E_y(t-\tau_m+\frac{\Delta\tau}{2})e^{-i\beta_y(\omega_0)z_0}\vec{e}_y$$

équation I.14

Le signal électrique à la position z_0 (*équation I.14*) est donc la somme de deux répliques du champ électrique d'entrée. La réplique polarisé selon $\vec{e}_x$ possède un temps de groupe égal à $\tau_x = \tau_m + \Delta\tau/2$ tandis que celle polarisée selon $\vec{e}_y$ possède un temps de groupe égal à $\tau_y = \tau_m - \Delta\tau/2$. τ_m représente le temps de groupe moyen de l'impulsion. Les deux répliques du champ sont décalées de la quantité $\Delta\tau$ que l'on appelle alors différence de temps de groupe. Dans le domaine temporel, la PMD provoque localement un élargissement des impulsions lors de la propagation.

figure I.4 : PMD du premier ordre dans le régime courte distance : élargissement d'une impulsion au cours de la propagation dans une fibre biréfringente

Remarque : le développement de Taylor est effectué au premier ordre en ω, on parle alors de PMD du premier ordre. Si on inclut les termes d'ordre supérieur, on montre que les répliques du champ électrique se déforment en se propageant : à l'élargissement induit par la PMD du premier ordre ($\Delta\tau(\omega_0)$) s'ajoutent des distorsions induites par la PMD des ordres supérieurs.

2.1.3 Conséquence et intérêt des deux points de vue

La Dispersion de Mode de Polarisation que l'on identifie avec la différence de temps de groupe dans le régime courte distance possède deux interprétations :

- Elle quantifie la sensibilité de la polarisation d'une composante monochromatique du champ à une variation de la fréquence.
- Elle quantifie l'élargissement subi par une impulsion quasi-monochromatique au cours de la propagation.

Ces deux points de vue sont complémentaires : le premier, plus intuitif, correspond à une vision "système" de la PMD au sens où l'élargissement d'une impulsion au cours de la propagation est synonyme d'interférence entre symbole et de perte d'information. Le second, plus abstrait, correspond à une vision "équipementier" au sens où la mesure de la sensibilité de la polarisation à une variation de fréquence est beaucoup plus simple à mettre en œuvre que la mesure d'une différence de temps de groupe.

2.2 Régime longue distance : couplage de mode

En régime de propagation longue distance, les modes propres de polarisation ne sont définis que localement. Pour modéliser l'effet de l'évolution des axes propres avec la distance sur la propagation d'un signal optique on modélise la fibre par une concaténation de tronçons biréfringents. Chaque tronçon possède individuellement des caractéristiques de biréfringence constante ; en revanche d'un tronçon à l'autre, la biréfringence et la direction des axes propres peuvent évoluer. Dans cette représentation, les effets locaux sont bien décris par le modèle du paragraphe précédent : la biréfringence de groupe de chaque tronçon provoque un étalement du signal optique au cours de la propagation. On modélise le passage du signal optique aux interfaces de chaque tronçon par un transfert d'énergie entre les modes propres de polarisation des tronçons successifs : c'est le couplage de mode. Du fait de l'évolution des axe propres avec la distance, le couplage de mode tend à égaliser la répartition de l'énergie de l'impulsion sur les deux modes de polarisation locaux, ce qui ralentit l'élargissement de l'impulsion [Gisin]. Cette description présente l'avantage de décrire la PMD dans le régime longue distance de façon locale au sens où on peut suivre l'évolution du signal "pas à pas". Lorsque l'on cherche à décrire la propagation d'un point de vue plus global[3], une approche différente doit cependant être utilisée. Pour un signal de spectre quelconque, on montre qu'il est possible de trouver deux états de polarisation en entrée de fibre qui rendent les temps de propagation extrémaux [Karlson98]. Lorsque le signal est fortement cohérent, comme c'est très souvent le cas dans les

[3] Lorsqu'on ne connaît pas la distribution de la biréfringence par exemple, ou lorsque celle ci est très complexe

transmissions télécoms, trouver les états de polarisation qui rendent le temps de groupe extrémal revient à trouver les états de polarisation en entrée et en sortie de fibre qui minimise la dépendance fréquentielle de l'état de polarisation de sortie [Karlson98]. On montre [Poole86] que pour de tels signaux, on peut toujours trouver pour chaque fréquence, deux états de polarisation orthogonaux en entrée qui permettent de minimiser cette dépendance. Les états de polarisation qui vérifient cette condition sont appelés états principaux de polarisation (PSP de l'anglais "Principal States of Polarisation").

2.2.1 Etats Principaux de Polarisation

Les états principaux de polarisation représentent par définition deux états de polarisation orthogonaux en entrée, tels que si le signal en entrée de fibre est polarisé selon un de ces deux états, le signal de sortie est polarisé selon l'état principal de polarisation de sortie correspondant et son état de polarisation est indépendant de la fréquence au premier ordre. Ils représentent aussi les états de polarisation en entrée qui rendent extrémal les temps de propagation dans la fibre. Tout comme les axes propres pour une fibre biréfringente homogène, les PSP d'entrée et de sortie représentent une base pratique de décomposition du champ électrique à n'importe quelle abscisse de la fibre[4]. En revanche, les PSP d'entrée et de sortie évoluent fortement avec la distance et avec la fréquence. Cette description globale présente beaucoup d'intérêt car elle permet de représenter la fibre comme une structure bi mode indépendamment de la distribution de la biréfringence et des axes propres : on peut ainsi se ramener à la description effectuée dans le paragraphe précédent et décrire la PMD dans le régime longue distance d'un point de vue fréquentiel et temporel. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la PMD du premier ordre, il suffit de reprendre les raisonnements du paragraphe 2.1 en remplaçant les états propres par les états principaux de polarisation.

- La PMD du premier ordre représente la différence entre les temps de groupe rapide et lent des signaux ayant été préalablement polarisés selon les PSP d'entrée. Une propriété importante de la PMD du premier ordre dans le régime courte distance qui est conservée dans le régime longue distance, est que la forme du signal injectée en entrée selon un des PSP est retrouvée en sortie de fibre selon le PSP de sortie correspondant (*figure I.5*).

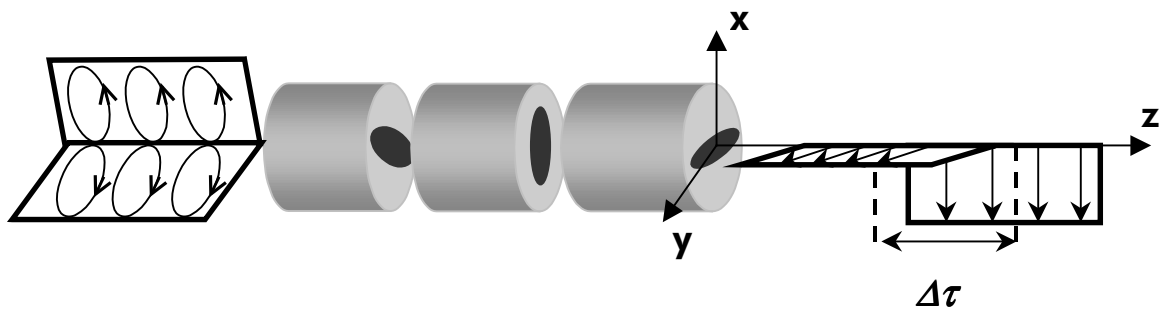

figure I.5 : PMD du premier ordre dans le régime longue distance : les PSP conservent la forme du signal

[4] Lorsque la biréfringence est homogène les PSP et les axes propres sont identiques

- Dans le domaine fréquentiel elle permet de quantifier le taux de variation de la polarisation de sortie lorsque la fréquence du signal en entrée varie. Lorsque le signal est initialement polarisé selon un des PSP d'entrée, le signal de sortie est polarisé selon le PSP de sortie correspondant, et sa polarisation est indépendante de la fréquence.

La PMD, dans le régime longue distance, est un phénomène complexe du fait que les états de polarisation, qui servent de référence pour la description du champ électrique, dépendent en général fortement de la fréquence et de la position dans la fibre. L'interprétation fréquentielle alliée à la représentation géométrique de la polarisation sur la sphère de Poincaré permet cependant d'appréhender la PMD de façon plus aisée.

2.2.2 Interprétation géométrique de la PMD : Vecteur PMD

L'interprétation géométrique de la PMD est basée sur le formalisme de Stokes et sur le vecteur PMD $\vec{\Omega}$. Celui ci est défini comme le produit de $\Delta\tau(z,\omega)$ et du vecteur de Stokes associé au PSP possédant la vitesse de groupe la plus grande. Elle s'obtient en calculant dans le formalisme de Stokes la sensibilité de la polarisation à l'abscisse z, à une variation de fréquence. En dérivant l'*équation 1.8* par rapport à la fréquence et en éliminant $\vec{E}$ on obtient :

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \omega} = \frac{\partial R(z,\omega)}{\partial \omega} R^{-1}(z,\omega)\vec{S}$$

équation I.15

Comme $\vec{S}$ est un vecteur unitaire, il est perpendiculaire à sa dérivée par rapport à la pulsation optique, le terme de droite de l'*équation I.15* peut donc se mettre sous la forme d'un produit vectoriel.

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \omega} = \vec{\Omega} \times \vec{S}$$

équation I.16

où $\times$ est le produit vectoriel usuel. Cette équation traduit le fait que lorsque ω varie de façon infinitésimale, le vecteur de Stokes, associé à l'état de polarisation à l'abscisse z, effectue une rotation infinitésimale autours du vecteur $\vec{\Omega}$ d'un angle $\Delta\phi$ tel que $\Delta\phi = \Delta\tau(\omega)\,\delta\omega$. La norme et la direction du vecteur PMD décrivent respectivement, la différence de temps de groupe $\Delta\tau(\omega)$ et les états principaux de polarisation à la fréquence ω. Au premier ordre, les états principaux de polarisation et la différence de temps de groupe sont indépendants de la fréquence sur l'ensemble du spectre du signal. Le vecteur PMD est donc de direction fixe et de module constant. Une variation de fréquence quelconque $\Delta\omega$ du signal d'entrée de fibre se traduit par une rotation uniforme de l'état de polarisation de sortie autours du vecteur PMD d'un angle égal à $\Delta\phi = \Delta\tau\,\Delta\omega$ (*figure I.6*).

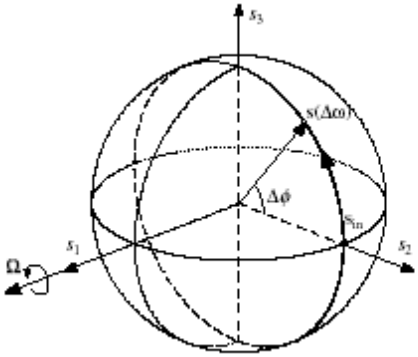

figure I.6 : représentation sur la sphère de Poincaré de la PMD du premier ordre : la PMD du premier ordre se caractérise par une rotation uniforme de l'état de polarisation de sortie autours du vecteur PMD [H.Sunnerud]

Lorsque l'état de polarisation en entrée est confondu avec un des PSP d'entrée, l'état de polarisation de sortie est confondu avec un des PSP de sortie : il n'y a donc pas de rotation du vecteur de Stokes correspondant. Dans le cas général, les états principaux et la différence de temps de groupe dépendent de la fréquence. La direction et la norme du vecteur PMD vont donc évoluer avec la fréquence du signal en entrée. L'évolution de l'état de polarisation de sortie est une succession de rotations uniformes infinitésimales autours d'un vecteur PMD évoluant sur la sphère de Poincaré (*figure I.7*).

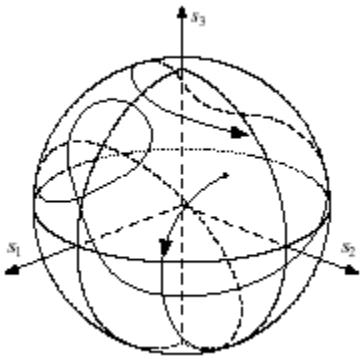

figure I.7 : représentation sur la sphère de Poincaré des effets d'ordre supérieur de la PMD : la direction de l'axe de rotation ainsi que l'angle de rotation évolue avec la fréquence. Ainsi l'état de polarisation de sortie effectue une série de rotations sur la sphère de Poincaré [H.Sunnerud].

2.2.3 Equation d'évolution du vecteur PMD

Les *équations I.15* et *I.16* que nous avons dérivées de la représentation de Mueller pour caractériser les variations de la polarisation en fonction de la fréquence peuvent être généralisées à l'étude de la sensibilité de la polarisation vis à vis de la position dans la fibre. On introduit pour cela un vecteur biréfringence $\vec{\beta}$ dont la direction sur la sphère de Poincaré est associée à l'état de polarisation des modes propres locaux, et dont le module est associé à la biréfringence locale. Ce vecteur permet de quantifier la sensibilité de la polarisation à une variation de la position dans la fibre.

En réitérant les calculs du § 2.2.2, en remplaçant ω par z et $\vec{\Omega}$ par $\vec{\beta}$ on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial z} = \vec{\beta} \times \vec{S}$$

équation I.17

Cette équation traduit le fait que lorsque z varie de façon infinitésimale, le vecteur de Stokes, associé à l'état de polarisation à l'abscisse z, effectue une rotation infinitésimale autours du vecteur $\vec{\beta}$ d'un angle égal à $\Delta\beta(z)\delta z$. La norme et la direction du vecteur biréfringence décrivent respectivement, la biréfringence locale de la fibre $\Delta\beta$ et la polarisation des états propres de polarisation à l'abscisse z. Cette équation est très intéressante pour étudier l'évolution de la polarisation en fonction de la position dans la fibre. Elle a une application très importante pour la mesure de la distribution de la biréfringence et des axes propres.

Les équations d'évolution précédentes peuvent être combinées en une équation décrivant l'évolution du vecteur PMD en fonction de la distance. En dérivant l'*équation I.16* par rapport à z et l'*équation I.17* par rapport à ω, on obtient l'équation d'évolution du vecteur PMD en fonction de z [Poole91] :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \omega} + \vec{\beta} \times \vec{\Omega}$$

équation I.18

Le premier terme du membre de droite de l'égalité s'identifie à l'effet local de la biréfringence décrit au paragraphe 2.1 (biréfringence de groupe) tandis que le second terme s'identifie aux effets de couplage. Le vecteur PMD en un point z de la fibre permet donc de caractériser l'ensemble des caractéristiques de biréfringence qui sont distribuées le long de la fibre. Une version discrétisée de cette équation permet de mieux mettre en évidence cette propriété, elle est obtenue en représentant la fibre par une concaténation de tronçons biréfringents [Gisin, Gordon] :

$$\vec{\Omega}_N = \Delta\vec{\tau}_N + R_N \vec{\Omega}_{N-1}$$

équation I.19

$\vec{\Omega}_N$ et $\vec{\Omega}_{N-1}$ sont les vecteurs PMD associé à une concaténation de N et de N-1 tronçons ; $\Delta\vec{\tau}_N$ et R_N les vecteurs PMD et la matrice de Mueller du N^{ième} tronçon. En itérant cette équation sur l'ensemble des tronçons, on peut exprimer le vecteur PMD des N tronçons en fonction des vecteurs PMD locaux de chacun des N tronçons et des produits de matrices de Mueller des différents tronçons. Ceci montre que les propriétés locales (les différents $\Delta\tau_N$) et les propriétés globales (les produits des R_N) déterminent la valeur du vecteur PMD en chaque point de la fibre.

La résolution de l'*équation I.18*, où le calcul de l'équation de récurrence (*équation I.19*) permet d'obtenir l'évolution du vecteur PMD en fonction de la distance. Ainsi, on a accès à l'évolution des PSP et de la PMD avec la distance. Les *équations I.18* et *I.19* sont les briques de base pour étudier l'effet d'un couplage de mode aléatoire [Gisin, Foschini] et déterministe [Galtarossa01b, Li98] sur l'évolution

de la PMD dans la fibre. Dans le cas du couplage de mode aléatoire, on assimile l'évolution du vecteur PMD à un mouvement brownien : au début de la propagation, le vecteur PMD croit dans une direction associée aux PSP d'une fibre non perturbée (les modes propres locaux) du fait de la biréfringence. Au fur et à mesure que la longueur de propagation augmente, le vecteur PMD perd la "mémoire" de son évolution initiale, en raison des "collisions" engendrées par le couplage de mode. Lorsque la longueur de propagation est grande devant la longueur dite de couplage L_c, i.e. la longueur au bout de laquelle le vecteur PMD a perdu toute mémoire de son évolution initiale, la distribution de probabilité de la différence de temps de groupe est donnée par une loi Maxwelienne. La valeur moyenne de la différence de temps de groupe évolue ainsi avec la racine carrée de la distance :

$$\langle \Delta\tau \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\partial \Delta\beta}{\partial \omega} \sqrt{L_c} \sqrt{z}$$

équation I.20

D'un point de vue temporel, la longueur de couplage représente la longueur au bout de laquelle, l'énergie d'une impulsion injectée en entrée de fibre, se retrouve équi-répartie sur les modes propres locaux de polarisation. Elle permet de quantifier l'importance du couplage de mode dans la fibre : plus la longueur de couplage est faible, i.e. plus le couplage de mode est important, plus la différence de temps de groupe est faible pour une position z donnée.

On peut aussi profiter des effets bénéfiques du couplage de mode en essayant d'inscrire lors du processus de fabrication de la fibre une rotation déterministe des axes de la fibre. L'idée serait de pouvoir échanger de façon alternative les axes lents et rapides des différents tronçons afin d'annuler périodiquement la différence de temps de groupe. Ceci implique de pouvoir imprimer une rotation instantanée de la fibre afin d'aligner deux axes orthogonaux successifs. Une rotation instantanée des axes propres étant techniquement impossible, le couplage de mode est imprimé de façon continue dans la partie fondue de la fibre au moment du fibrage. Des rotations uniformes ou sinusoïdales sont généralement utilisées. Le comportement de la PMD dans de tels milieux biréfringents est très complexe, et ne peut pas, en général, se mettre sous la forme d'une équation simple telle que l'*équation I.20*. Tout l'art consiste en fait à trouver les caractéristiques des fonctions de rotations permettant de réduire ou d'empêcher la croissance de la PMD.

3 Caractérisation des effets de polarisation

La mesure des effets de polarisation consiste grossièrement à mesurer l'évolution des vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\beta}$ en fonction de ω et de z à partir des *équations I.16* et *I.17*. La mesure de $\vec{\Omega}$ permet de mesurer la PMD de la fibre étudiée et la mesure de $\vec{\beta}$ permet de caractériser spatialement les sources de la PMD. Cette dernière mesure fournit un moyen efficace d'inspecter et de tester le processus de fabrication de la fibre de l'étirage au conditionnement.

3.1 Mesure de la PMD

Les méthodes de mesure de la PMD sont tributaires des interprétations fréquentielles et temporelles de la PMD. On sépare en effet les techniques de mesure de la PMD en technique fréquentielles et temporelles. Nous n'aborderons ici que les techniques fréquentielles puisque ce sont les plus répandues. Les techniques fréquentielles sont basées sur la mesure de la sensibilité de l'état de polarisation de sortie avec la fréquence et les techniques temporelles sur une mesure "directe" de la différence de temps de groupe. La méthode de la matrice de Jones et de la sphère de Poincaré sont deux exemples de mesures fréquentielles basées sur une caractérisation complète de l'évolution de l'état de polarisation de sortie avec la fréquence. La méthode de la sphère de Poincaré est directement basée sur l'*équation I.16* : à partir de deux états de polarisation en entrée $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, on peut déterminer le vecteur PMD de sortie en fonction de la fréquence [Poole88]. De même, la méthode de la matrice de Jones [Heffner] consiste à mesurer la matrice de Jones *U* de la fibre en fonction de la fréquence. Une équation similaire à l'*équation I.16* permet alors à partir des dérivées des éléments de la matrice de Jones d'obtenir la PMD [Gordon]. Les méthodes basées sur la mesure partielle sont de type "méthodes de l'analyseur fixe". Elles consistent à étudier la figure de transmission, à travers un polariseur, du signal de sortie de fibre lorsque la fréquence en entrée de fibre varie. Comme la PMD est liée au taux de variation de l'état de polarisation de sortie avec la fréquence, on peut déterminer la PMD en fonction de la rapidité de l'évolution de l'intensité.

3.2 Mesure de biréfringence

La mesure de la biréfringence consiste en toute rigueur à mesurer l'évolution du vecteur biréfringence :

- la donnée de son module en fonction de z permet d'obtenir la distribution de la biréfringence.
- la donnée de sa direction en fonction de z permet d'obtenir la distribution des axes propres.

On distingue deux types de mesure de la biréfringence en fonction de la résolution spatiale et de la longueur de mesure : les mesures par réflectométrie et les mesures par applications de perturbations locales.

Les méthodes réflectométriques tirent profit du phénomène suivant : la lumière se propageant dans une fibre optique est constamment diffusée par des inhomogénéités d'indice. Une partie de la lumière diffusée se propage dans le sens de propagation inverse de la lumière incidente et parvient jusqu'à l'entrée de la fibre. A partir de la mesure des caractéristiques de la lumière rétro-diffusée on peut obtenir des informations sur les caractéristiques de la lumière au point de rétro diffusion. En mesurant ainsi la polarisation de la lumière rétro diffusée, on peut déterminer l'évolution de la polarisation dans la fibre et déterminer, au moins en théorie, l'évolution de la biréfringence via l'*équation I.17*. Actuellement les techniques classiques de mesure par réflectométrie [Galtarossa00a, Wuilpart01] permettent d'obtenir facilement des résolutions de l'ordre du m, au deçà, des techniques basées sur le comptage de photon doivent être utilisées et permettent d'obtenir des résolutions de l'ordre de 10 cm [Huttner]. Les longueurs de mesure envisageables pouvant atteindre plusieurs

kilomètres, les techniques de mesure par réflectométrie sont bien adaptées pour des mesures de terrains sur des fibres câblées. Les résolutions atteintes, en revanche, ne sont pas suffisantes pour permettre une mesure locale de la biréfringence sur les fibres récentes qui, la plupart du temps, présentent des rotations importantes de leurs axes propres, ou sur les fibres à très fortes biréfringences telles que les fibres à cristaux photoniques.

Les méthodes de mesure par applications d'une perturbation locale permettent d'atteindre des résolutions de l'ordre du millimètre [Ulrich79, Halliday]. En revanche, les longueurs des fibres en mesures ne dépassent pas quelques mètres. Elles sont particulièrement bien adaptées pour la mesure locale du vecteur biréfringence, et en particulier, pour la caractérisation du processus de vrillage. Dans ces techniques, on modifie le vecteur biréfringence local en imposant une biréfringence parasite. Cette modification locale de la biréfringence modifie la propagation du champ électrique après le point de perturbation, ce qui entraîne une modification de la polarisation en sortie de la fibre en mesure. L 'amplitude et la nature de la modification de l'état de polarisation de sortie sont fonction à la fois des caractéristiques de biréfringence au point de perturbation et des caractéristiques de la perturbation (position, direction, intensité). En faisant varier le point d'application de la perturbation et en enregistrant simultanément les modifications engendrées sur l'état de polarisation de sortie, on peut en théorie remonter à l'évolution du vecteur biréfringence tout au long de la fibre. Les modifications locales de biréfringence sont généralement engendrées par une action mécanique (pression) [Chinone] ou électromagnétique (champ électrique ou magnétique) [Ulrich79, Halliday, Chartier01]. Les études effectuées ont concerné la mesure de forte biréfringence sur fibre à maintien de polarisation [Halliday], sur fibre à cristaux photonique [Peyrilloux] et sur fibre avec vrillage uniforme des axes [Ulrich79, Chartier03].

4 Conclusion

La PMD résulte de deux effets : la biréfringence de groupe, qui provoque localement un élargissement des signaux se propageant dans la fibre, et le couplage de mode, qui contrarie cet élargissement. Les modes propres de polarisation et les états principaux de polarisation permettent de définir la PMD respectivement dans les régimes courte et longue distance. Enfin, la représentation géométrique sur la sphère de Poincaré permet d'appréhender de façon plus aisée les effets de polarisation dans le régime longue distance. Nous allons successivement aborder la PMD dans le régime courte distance, dans le régime longue distance et enfin la caractérisation expérimentale de la biréfringence et de la PMD dans les trois prochains chapitres.

Chapitre II : Calcul de la biréfringence de phase et de groupe

1 CALCUL DE L'ANISOTROPIE DANS UNE FIBRE OPTIQUE 35

1.1 EFFETS MECANIQUES DANS UNE FIBRE OPTIQUE 36

1.1.1 Définition des déformations 38

1.1.2 Lois de comportement mécanique du verre 39

1.1.3 Dilatation thermique 42

1.2 EXPLICATIONS QUALITATIVES DE L'ORIGINE DES CONTRAINTES DANS UNE FIBRE OPTIQUE 44

1.2.1 Contraintes d'origine thermique 44

1.2.2 Contraintes d'origine mécanique 45

1.3 MODELISATION DES CONTRAINTES 46

1.3.1 Hypothèse de comportement élastique 46

1.3.2 Hypothèse de comportement visco-élasto-thermique 50

1.4 CALCUL DE L'ANISOTROPIE ENGENDREE DANS UNE FIBRE ELLIPTIQUE LORS DU PROCESSUS DE FIBRAGE 56

1.4.1 Maillage de la section de la fibre 56

1.4.2 Effet des contraintes d'origine mécanique sur un profil échelon 57

1.4.3 Comparaison de l'anisotropie des profils en échelons et en W 60

1.5 CONCLUSION DU § 1 67

2 CALCUL DE LA BIREFRINGENCE DE PHASE ET DE GROUPE69

2.1 MODELE DECOUPLE 69

2.1.1 Calcul de la biréfringence de forme 69

2.1.2 Calcul de la biréfringence de contrainte 74

2.2 MODELE COUPLE 75

2.3 CONCLUSION DU PARAGRAPHE 76

2.4 CALCUL DE LA BIREFRINGENCE DE PHASE ET DE GROUPE DANS UNE FIBRE ANISOTROPE : UTILISATION DE METHODES DE PERTURBATION DE L'EQUATION SCALAIRE 77

2.4.1 Modèles de calcul 77

2.4.1.1 Perturbation de l'équation scalaire pour une fibre elliptique 78

2.4.1.2 perturbation de l'équation scalaire pour un profil circulaire 82

2.4.2 Comparaisons des expressions obtenues dans les deux méthodes 84

2.4.3 Biréfringence de phase dans les fibres de télécommunication faiblement anisotropes 85

2.5 CONCLUSION DU § 2 88

3 CONCLUSION DU CHAPITRE 90

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à la biréfringence et à la PMD dans le régime courte distance. Dans le régime courte distance une fibre optique peut être considérée comme un milieu invariant par translation selon la direction de propagation. En raison de cette invariance, les solutions des équations de Maxwell pour le champ électrique, $\vec{E}(x,y,z)$, sont obtenues sous forme séparable

$$\vec{E}(x,y,z) = e^{-i\beta z}\vec{E}(x,y)$$

équation II.1

où β représente la constante de propagation du mode ; $\vec{E}(x,y) = \vec{E}_t(x,y) + E_z(x,y)\vec{z}$ est le champ électrique du mode, où $\vec{E}_t(x,y) = E_x(x,y)\vec{x} + E_y(x,y)\vec{y}$ est la composante transverse. Cette décomposition du champ électrique traduit une propagation de l'énergie dans la direction longitudinale de la fibre et permet d'identifier les modes de propagation, i.e. des solutions des équations de Maxwell se propageant selon z sans être altérées. Deux types de modes de propagation coexistent dans une fibre optique :

- Les modes guidés correspondent à des valeurs discrètes de la constante de propagation. L'intensité de ces modes est principalement concentrée dans le cœur. Ils sont obtenus à partir des équations de Maxwell en imposant les conditions de radiations de Sommerfeld à l'infini, i.e. une décroissance radiale exponentielle du champ dans la gaine de la fibre.
- Les modes rayonnants correspondent à des valeurs continues de la constante de propagation. Les modes rayonnants sont obtenus en relâchant la condition de Sommerfeld à l'infini. Ils ne satisfont pas la condition de décroissance exponentielle des composantes du champ électrique dans la gaine de la fibre.

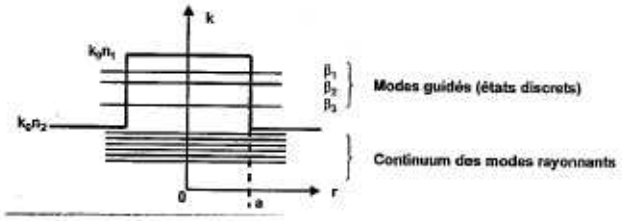

figure II.1 : modes de propagation et constantes de propagation dans une fibre optique au sens d'un "puit quantique" [Pocholle]

Le nombre de modes guidés varie en fonction des caractéristiques du guide (dimensions du guide, profil d'indice, anisotropie). Les fibres pour lesquelles la résolution des équations de Maxwell conduit à l'existence d'une seule constante de propagation sont appelées traditionnellement fibres monomodes. Dans les fibres isotropes et à symétrie circulaire, la constante de propagation du mode fondamental est deux fois dégénérée. Deux modes de propagation orthogonaux (au sens de la polarisation du mode), les modes HE_{11x} et HE_{11y}, se propagent dans la fibre avec la même constante de propagation.

figure II.2 : HE_{11x} et HE_{11y} dans une fibre circulaire isotrope [Zheng]

Lorsque la symétrie circulaire est brisée, on parle alors d'anisotropie géométrique, ces deux modes se propagent en général avec des vitesses de phase différentes selon la direction préférentielle de la polarisation. Cela se traduit par une levée de la dégénérescence du mode fondamental. La différence entre les constantes de propagation représente la biréfringence pour le mode fondamental. On parle dans ce cas de biréfringence de forme. En présence d'anisotropie du matériau, la propagation du champ dépend localement de la direction de polarisation dans la section transverse de la fibre. Il existe donc localement deux directions propres de polarisation orthogonales. Lorsque les axes propres du matériau sont globalement alignés sur l'ensemble de la section de la fibre, la biréfringence est non nulle même si le profil d'indice est circulaire.

Le phénomène de biréfringence dépend donc de nombreux paramètres géométriques et matériaux. La prise en compte de l'ensemble de ces paramètres dans les équations de Maxwell est a priori nécessaire pour appréhender le phénomène de biréfringence de façon correcte dans une fibre de télécommunication. La forme des équations de Maxwell dépend de la permittivité ε du milieu étudié. Lorsque le milieu est anisotrope et invariant par translation selon z, la permittivité est un tenseur qui prend la forme suivante :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

équation II.2

Lorsque le matériau est isotrope, les termes diagonaux sont identiques ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$) et les termes croisés sont nuls. La permittivité se réduit donc à une quantité scalaire. On fait appel, dans ce cas, à la notion d'indice optique, n, où $n^2 = \varepsilon$. Dans le cas général, l'anisotropie du matériau se combine à l'anisotropie géométrique. Elles contribuent de façon simultanée à la biréfringence de la fibre.

Lorsqu'on s'intéresse au comportement de la fibre optique en vue d'une application industrielle, on distingue la biréfringence d'origine intrinsèque et la biréfringence d'origine extrinsèque :

- La biréfringence intrinsèque comprend la biréfringence de forme et de contrainte engendrée lors du processus de fabrication. Elle est liée à la géométrie, à la composition du profil d'indice et au procédé de fibrage au cours duquel des contraintes sont engendrées.
- La biréfringence extrinsèque comprend la biréfringence de forme et de contrainte induite par une contrainte externe, i.e. courbure, tension, torsion, pression engendrées lors du

conditionnement. Une fibre optique de télécommunication étant destinée à subir une série de conditionnement (bobine d'expédition, câblage), il est intéressant de connaître les réactions de la fibre vis à vis des contraintes engendrées de façons externes.

Dans les deux cas, la détermination des contraintes résiduelles est une étape nécessaire pour le calcul de la biréfringence. Il est cependant possible de s'affranchir partiellement de l'effet des contraintes extrinsèques dans un environnement industriel par des techniques de conditionnement appropriées. On peut en effet réduire fortement l'impact des contraintes engendrées par la courbure et la tension en effectuant des conditionnements sur des bobines de grand diamètre et sous très faible tension. Les contraintes engendrées par la torsion sont en revanches beaucoup plus difficile à éliminer. Nous dirons simplement ici que l'on peut actuellement garantir des taux de torsion tels que la biréfringence et la PMD mesurées sur bobines de conditionnement possèdent une origine principalement intrinsèque. Nous nous sommes donc concentrés principalement dans ce paragraphe sur la biréfringence engendrée lors du processus de fibrage. Le § 1 sera consacré à la présentation du processus de fibrage d'un point vue thermo-mécanique. Nous expliquerons comment les contraintes apparaissent et présenterons les principales techniques utilisées pour les calculer. Le champ de contrainte résiduel permet ensuite de déterminer l'anisotropie par effet photo-élastique. Nous considérerons ensuite l'anisotropie résiduelle comme une donnée d'entrée nécessaire au calcul de la biréfringence, qui est présenté au § 2.

1 Calcul de l'anisotropie dans une fibre optique

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser les forces résiduelles qui persistent dans une fibre optique après le processus de fibrage et qui sont responsables de la modification de l'indice optique par effet photo-élastique [Aben]. En général cette modification dépend de la direction de l'espace, on parle d'anisotropie du matériau. Afin de caractériser cette anisotropie, il nous faut caractériser l'orientation et l'amplitude des efforts exercés en chaque point de la fibre. Pour ce faire, on utilise la notion de contrainte. La contrainte est une notion abstraite destinée à exprimer comment les efforts se répartissent dans un milieu continu. On la définit en effectuant une coupure dans un matériau en équilibre. Si l'on suppose que les actions mutuelles des deux corps S_1 et S_2 définis par la coupure sont des actions à courtes distances représentées par un champ de force, sur chaque élément d'aire $d\vec{S}$ de la surface existe une force de liaison entre les deux parties $d\vec{F} = \vec{C}dS$; $\vec{C}$ est le vecteur contrainte, il a les dimensions d'une force par unité de surface[5] (*figure II.3*).

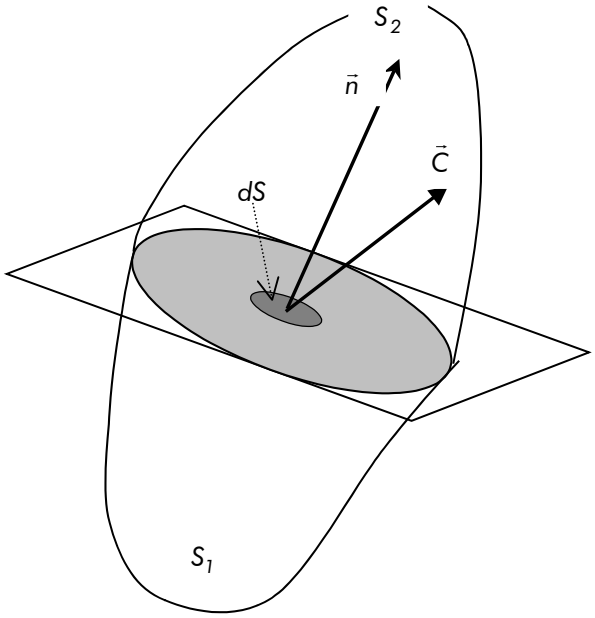

figure II.3 : Vecteur contrainte symbolisant les efforts exercés par la partie S_1 du solide sur la partie S_2

Comme le vecteur contrainte dépend de l'orientation de la surface $d\vec{S}$, il ne permet pas de caractériser l'ensemble des contraintes qui existent en ce point. On considère alors la relation tensorielle [Agassant] entre le vecteur contrainte, et la normale $\vec{n}$ qui permet de définir le tenseur des contraintes σ[6] en chaque point de la fibre : $\vec{C} = \sigma\vec{n}$ Les composantes diagonales de ce tenseur permettent de rendre compte de tractions ou de compressions du matériau au point considéré tandis que les éléments diagonaux permettent de rendre compte de forces de cisaillement. Réciproquement, la connaissance du tenseur des contraintes permet de caractériser la direction et l'amplitude des efforts qui s'exercent en chaque point du solide. Par conséquent, par l'intermédiaire du tenseur des contraintes, nous allons

[5] Le vecteur contrainte et le tenseur des contraintes sont donnés en Pascal.
[6] On montre que σ est un tenseur d'ordre deux, réel et symétrique.

pouvoir calculer l'anisotropie. Au niveau structurel, les contraintes et les déplacements de matières se traduisent par des modifications intermoléculaires des propriétés de la silice[7] ce qui altère le caractère optique isotrope du verre. En considérant que les modifications de l'indice qui en résultent sont faibles, l'indice optique du verre contraint s'obtient à partir du tenseur des contraintes et à partir de l'indice du verre non contraint [Aben] :

$$n_{pq}(r,\theta) = n(r,\theta)\delta_{pq} + \delta n_{pq}(r,\theta) = n(r,\theta)\delta_{pq} + \left((C_1 - C_2)\,\sigma_{pq} + C_2\, trace(\sigma)\delta_{pq}\right)$$

équation II.3

$n(r,\theta)$ représente l'indice en l'absence de contrainte. $\delta n_{pq}(r,\theta)$ représente la perturbation engendrée par le profil de contrainte. δ_{pq} est le symbole de Kronecker, C_1 et C_2 sont les constantes élasto-optiques de la silice dopée [Aben]. Il existe peu de données dans la littérature concernant l'impact des dopants Germanium, Bore et Fluor sur la valeur de ces constantes. Dans la majorité des articles que nous avons rencontrés, les valeurs utilisées correspondaient à celles de la silice pure à 0.546 μm : C_1=-6.5×10^{-7} mm^2/N et C_2=-42.2×10^{-7} mm^2/N [Primak]. Il semble que ces constantes soient considérées comme très peu dépendantes du dopage dans les fibres faiblement dopées en Germanium [Barlow]. Des études concernant l'impact d'autres dopants semblent pourtant montrer que la composition a un impact non négligeable dans la valeur des coefficients C_1 et C_2 [Aben], [Fuxi]. Le calcul de l'anisotropie découle du calcul du tenseur des contraintes en chaque point de la fibre. Nous présentons dans le paragraphe suivant, les principaux phénomènes responsables de l'apparition d'un champ de contrainte dans une fibre optique à température ambiante. Nous commençons par introduire certaines notions sur le comportement mécanique du verre à haute température, puis nous discutons de l'origine des contraintes proprement dites, en séparant les contraintes engendrées par les fortes variations de température des contraintes engendrées par la tension de fibrage. Nous présentons ensuite différentes techniques utilisées dans la littérature pour décrire le comportement mécanique des fibres lors du processus de fibrage. Enfin, nous présentons un modèle développé à Alcatel Cable pour le calcul des contraintes dans une fibre circulaire. Nous généralisons ce modèle à des fibres possédant des profils d'indices elliptiques.

1.1 Effets mécaniques dans une fibre optique

La présence des contraintes résiduelles, se comprend aisément si on s'intéresse au comportement du verre lors du fibrage. La *figure II.4* représente un cône de fibrage. Nous rappelons que la fibre optique de diamètre (d) de l'ordre de 125 µm, à température ambiante, est obtenue après étirage d'une préforme[8] de diamètre (D) de l'ordre de 10 cm chauffée à quelques 2000°. Lors du fibrage un élément de volume de la fibre est donc le siège de déformations et de variations de température très importantes. De manière intuitive, les contraintes sont reliées aux déformations engendrées dans le

[7] Modification de la densité et de la polarisabilité des molécules
[8] Par application de la tension de fibrage

matériau et vice versa. Comme les déformations sont figées lorsque la température de la fibre atteint sa valeur finale, un champ de contrainte résiduel va persister dans la fibre à la fin du fibrage.

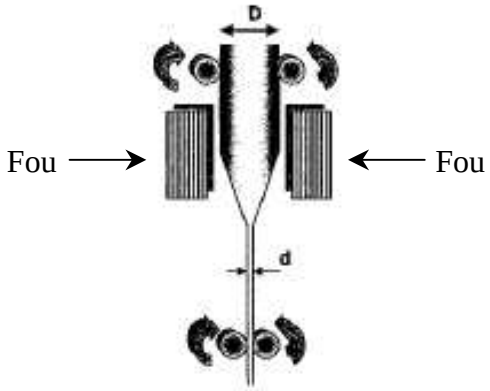

figure II.4 : formation de la fibre : la préforme passe dans le four de fibrage, une goutte de verre se forme et tombe sous l'effet de la gravité. Entre la goutte et la préforme la fibre se forme et est entraînée par la force de fibrage [Pocholle]

Lorsqu'un matériau fondu est refroidi, il cristallise normalement à une température égale à sa température de fusion. Cependant, pour certains matériaux, comme la silice, lorsque le refroidissement est suffisamment rapide, la température de fusion (T_f) peut être franchie sans cristallisation ; on dit alors que le matériau se trouve dans un état de liquide surfondu. Au fur et à mesure que la température diminue, la viscosité[9] du liquide surfondu augmente rapidement, jusqu'à atteindre une valeur seuil[10] très élevée pour laquelle un "pseudo" état solide, appelé l'état vitreux, apparaît [Zarzychi, Le Parc]. La température correspondante est appelée température de transition vitreuse ou température fictive, nous la noterons T_g. La *figure II.5* représente l'évolution du volume spécifique en fonction de la température pour un matériau cristallisant à sa température de fusion et pour un matériau se transformant en verre. On peut constater que le volume spécifique, V, des matériaux usuels présente une discontinuité abrupte à la température de fusion, tandis que pour les matériaux vitreux un changement de la pente apparaît à la température de transition vitreuse. Ce comportement implique que les quantités dérivées telles que le coefficient de dilatation ($\alpha = \partial V / \partial T$)[11] présente une variation importante autours de T_g [Zarzychi]. De façon plus générale, au cours du fibrage, les matériaux constituant la fibre passent par différentes "phases" ; de liquide à solide en passant par un état de liquide surfondu.

[9] La viscosité (cf 1.1.2) caractérise les propriétés d'écoulement d'un fluide ; elle s'exprime en Poise ; plus la viscosité est faible, plus le liquide s'écoule, et réciproquement.
[10] Environ 10^{13} Poises
[11] Cf 1.1.3

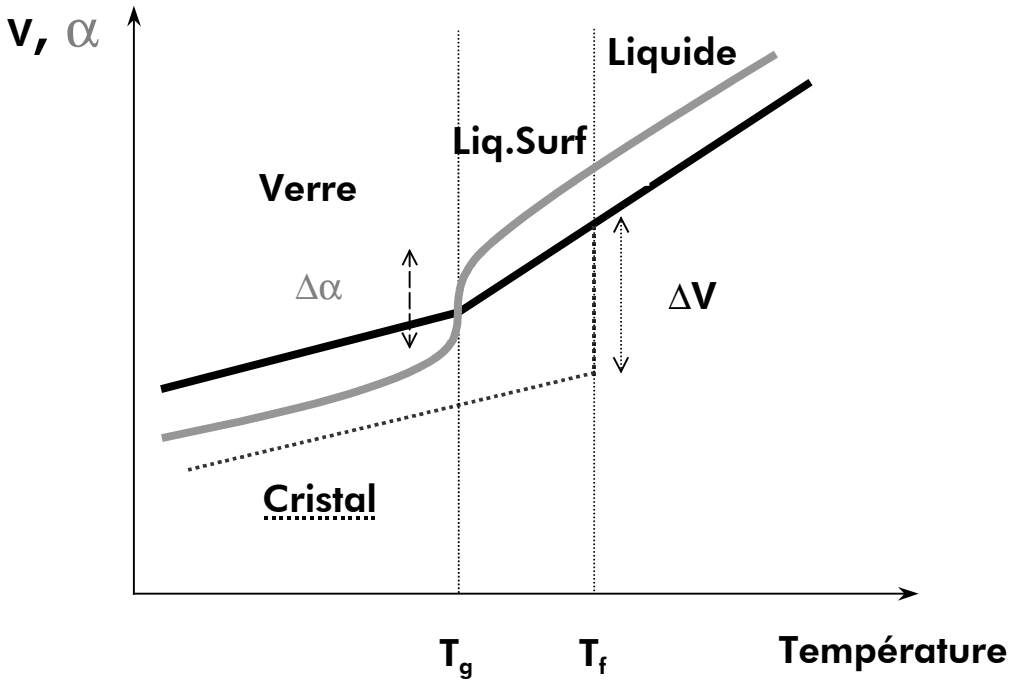

figure II.5 : Evolution du volume spécifique et du coefficient de dilatation dans le verre et dans un cristal en fonction de la température ; au passage de la température de transition vitreuse, le coefficient de dilatation présente une forte variation [Zarzychi]

On comprend donc que les relations entre les contraintes et les déformations ne seront pas les mêmes selon que l'on se situe dans les cas extrêmes d'états solides (faibles déformations) pour les températures inférieures à T_g et liquides (grandes déformations) pour les températures supérieures à T_f. Pour les températures intermédiaires, le comportement du verre vis à vis des déformations est dit visco-élastique. Nous verrons qu'il présente à la fois un caractère élastique et un caractère visqueux ce qui complique la description. Ainsi, la modélisation du fibrage, i.e. l'évolution des contraintes en fonction du temps, nécessite l'emploi de lois différentes permettant de modéliser les différentes phases que les matériaux constituants la fibre vont occuper : lois visqueuses, lois visco-élastiques, et enfin lois élastiques. Nous allons dans la suite préciser quelques notions sur les contraintes et les déformations afin d'aborder d'une part ces différentes lois de comportement et d'autre part de présenter les méthodes de calcul des contraintes engendrées lors du fibrage.

1.1.1 Définition des déformations

La déformation en mécanique est une notion plus intuitive que la contrainte. Elle permet de caractériser l'évolution de la position relative de deux points voisins avant et après déformation du solide. Elle est reliée aux déplacements des points engendrés lors de la déformation du solide. Si on dénote par $\vec{r}'$ et $\vec{r}$ les positions d'un point après et avant déformation, on définit un champ de vecteur associé au déplacement des points : $\vec{U}(x,y,z) = \vec{r}' - \vec{r}$. On montre [Timoshenko, Garrigues] que les déformations sont caractérisées par un tenseur d'ordre deux, dont les composantes sont données par $e_{ij} = 0.5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, où u_x, u_y et u_z sont les composantes du vecteur déplacement

, $\vec{U} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$, dans un repère cartésien. On parle de loi de comportement mécanique (ou loi macroscopique) lorsque l'on cherche à relier le tenseur des contraintes aux tenseurs des déformations[12]. L'intérêt de ces lois apparaît si l'on s'intéresse à la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de volume *dV* de silice. En appelant $\vec{f}$ la densité volumique des forces externes s'exerçant sur ce volume, on trouve une relation que doit vérifier tout le champ de contrainte en chaque point du solide [Timoshenko, Garrigues] :

$$div\sigma + \vec{f} = \rho\vec{a}$$

équation II.4

où ρ est la densité volumique du matériau, et $\vec{a}$ l'accélération. Si le solide est statique, l'accélération est nulle, et la relation précédente fournit une équation d'équilibre. Dans le cas général, l'*équation II.4* fournit trois équations pour 6 inconnues (les six composantes du tenseur des contraintes), afin de calculer les contraintes dans la section de la fibre, ils nous faut fournir des relations supplémentaires. Ces relations supplémentaires vont être fournies par les lois de comportement que nous avons évoquées précédemment. A partir de ces lois, on peut relier le tenseur des contraintes et les déplacements en chaque point, l'*équation II.4* se réduit alors à un système de trois équations aux dérivées partielles pour trois inconnues représentées par les trois composantes du tenseur des déplacements. Connaissant les données d'entrée que sont les forces externes et l'éventuelle accélération du solide on peut calculer les déplacements pour chaque point du matériau et remonter ensuite aux contraintes à l'aide des lois de comportement mécanique. Nous allons donc dans le paragraphe suivant présenter rapidement les différentes lois de comportement que nous aurons à utiliser pour décrire le processus de fibrage. Nous allons utiliser des représentations dites "analogiques" pour illustrer ces différentes lois. Nous nous limiterons à des explications qualitatives sur des matériaux unidimensionnels, puis nous généraliserons directement aux matériaux tridimensionnels. Nous renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés [Timoshenko, Agassant, Garrigues] pour un exposé plus rigoureux.

1.1.2 Lois de comportement mécanique du verre

Un matériau élastique linéaire idéal réagit à l'application d'une force par une déformation proportionnelle à cette force [Timoshenko]. Un tel matériau est représenté selon les conventions habituelles par un ressort (*figure II.6*). La relation constitutive générale dans un matériau élastique est appelée loi de Hooke. Elle prend la forme suivante dans un matériau mono-dimensionnel :

$$e = \frac{\sigma}{E}$$

équation II.5

[12] Ces lois macroscopiques sont établies par des considérations statistiques et thermodynamiques sur les matériaux étudiés [Zarzychi, Agassant]

Le coefficient de proportionnalité entre les déformations et les contraintes est appelé Module d'Young E, son unité est le Pascal. En dessous de la température de transition vitreuse, le verre se comporte comme un matériau élastique, le module d'Young E est de l'ordre de 73×10^9 Pa et varie en fonction de la composition [Zarzychi]. Il est généralement considéré comme indépendant de la température. La généralisation de la loi précédente à trois dimensions fait intervenir le coefficient de Poisson ν, qui traduit les déformations dans la section transverse à la force :

$$e = -\frac{\nu}{E} Tr(\sigma) I_d + \frac{1+\nu}{E}\sigma$$

équation II.6

Le coefficient de Poisson est sans dimension, il est compris entre –0.5 et +0.5 [Garrigues][13]. Cette loi est utilisée pour décrire le comportement des matériaux soumis à de petites déformations réversibles ; on parle de théorie des petits déplacements ou théorie élastique linéaire. Nous verrons par la suite que cette notion de linéarité est très importante pour le calcul des contraintes dans des matériaux se comportant de façon élastique. Un matériau visqueux linéaire idéal [Agassant] réagit à l'application d'une force par un flux de vitesse constante proportionnelle à cette force. Il est représenté selon les conventions habituelles par un amortisseur (*figure II.7*), la relation constitutive étant donnée par :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\sigma}{\eta}$$

équation II.7

Le coefficient de proportionnalité η est appelé coefficient de viscosité, son unité est le Poiseuil. Dans la silice, il dépend fortement de la température et de la composition et suit une loi d'Arrhénius $ln(\eta) = A + B/(T - C)$, où T est la température, A, B et C des constantes dépendantes de la composition [Zarzychi, Agassant]. Le logarithme de la viscosité dans la silice est typiquement compris entre 5 et 50 pour des températures allant respectivement de 2000 °C à 20 °C[14]. La généralisation à trois dimensions de l'équation précédente est donnée par :

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{(\sigma_{ij} - P\delta_{ij})}{2\eta}$$

équation II.8

où $P = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ est la pression hydrostatique.

[13] Le module d'Young renseigne sur les contraintes longitudinales, tandis que le coefficient de Poisson renseigne sur les contraintes transverses.

[14] Pour donner un ordre d'idée, le verre peut être travaillé en soufflerie lorsque sa viscosité est de l'ordre de 10^7 Poises, en dessous de 150 Poises il commence à couler [Sholze].

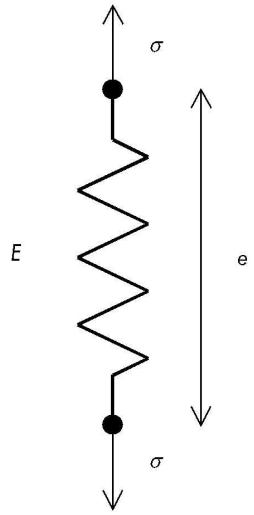

figure II.6 : ressort de raideur E

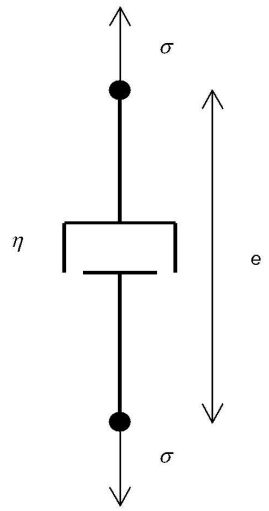

figure II.7 : piston de viscosité η

Connaissant les lois de comportement des matériaux idéaux, on peut les combiner afin de décrire des matériaux réels. Nous présentons dans la suite le comportement viscoélastique, associé au verre se situant en phase de liquide surfondu. Au-dessus de T_f, et en dessous de T_g, on suppose que le verre se comporte respectivement comme un matériau parfaitement visqueux et comme un matériau parfaitement élastique dont nous avons déjà présenté les propriétés.

Un matériau visco-élastique combine les propriétés d'élasticité et de viscosité. Il réagit à l'application d'une force par une déformation instantanée et un flux. Une propriété importante des matériaux visco-élastiques est de conserver la mémoire des états passés : l'état d'un matériau élastique n'est déterminé que par l'état des contraintes à l'instant présent, tandis que l'état d'un matériau visco-élastique est déterminé en plus par l'ensemble des états passés de contrainte qu'il a subi. Sous sa forme la plus générale, la théorie de la visco-élasticité dérivée de ces principes peut décrire des comportements mécaniques complexes et variés. Dans la pratique, on construit fréquemment un modèle visco-élastique par des combinaisons de composants élastiques et visqueux idéaux.

Les modèles les plus simples représentent un matériau visco-élastique par la combinaison en série ou en parallèle d'un composant élastique et d'un composant visqueux : La combinaison en parallèle est connue sous le nom de modèle de Voigt-Kelvin. Dans ce modèle, les deux composants présentent la même déformation alors que la force totale est la somme des forces dues à l'élément élastique et à l'élément visqueux. Le modèle de Voigt-Kelvin est la représentation de base d'un solide visco-élastique, car sa réponse à long terme à l'application d'une force est celle d'un solide (il cesse de se déformer). La combinaison en série est appelée modèle de Maxwell. Dans ce cas la force est la même dans les deux éléments, alors que la déformation totale est la somme des déformations dues à chaque élément. Le modèle de Maxwell est la représentation de base d'un fluide visco-élastique, car sa réponse à long terme à l'application d'une force est celle d'un fluide (il continue à se déformer).

Les considérations précédentes permettent d'obtenir aisément les relations constitutives pour les deux modèles à partir de l'*équation II.5* et de l'*équation II.7*. Nous citons la relation constitutive associée au modèle de Maxwell car le verre à haute température se comporte comme un fluide visco-élastique :

$$\sigma + \frac{\eta}{E}\frac{d\sigma}{dt} = \eta\frac{de}{dt}$$

équation II.9

Si le matériau est soumis à une vitesse de déformation constante, i.e. $e = \partial e / \partial t|_{t=0}\, t$, on obtient une décroissance exponentielle de la contrainte, $\sigma = \eta \dot{e}_o \left[1 - e^{-t/\tau}\right]$, caractérisée par une constante de temps τ égale à η / E. Lorsque t est très inférieur à la constante de temps, le fluide se comporte de façon élastique et $\sigma = Ee$. Pour un temps t très supérieur à τ, le comportement du fluide devient visqueux, $\sigma = \eta \dot{e}_o$, i.e. le fluide perd la mémoire de son évolution antérieure. A très haute température, la viscosité du verre est très faible d'après la loi d'Arrhenius de sorte qu'un verre soumis à des efforts perd rapidement la mémoire de son évolution antérieure. Cette dernière remarque est importante puisque au fibrage l'histoire thermique du verre dépend du temps. Il existe donc un seuil de température au-delà de laquelle l'histoire mécanique du verre peut être ignorée.

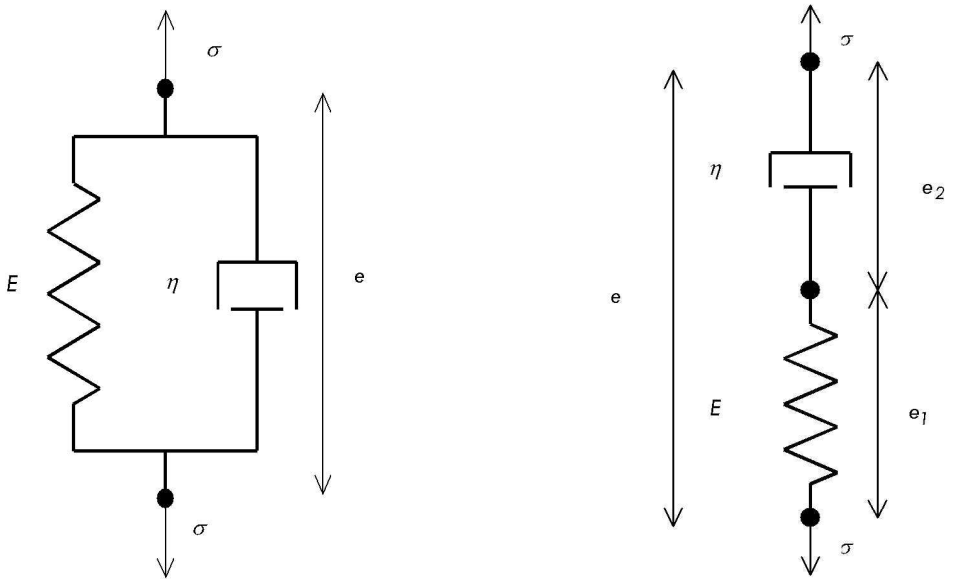

figure II.8 : Représentation schématique des modèles visco-élastiques de Voigt-Kelvin (à gauche) et de Maxwell (à droite).

Les deux modèles précédents ne fournissent que des représentations partielles des propriétés de matériaux visco-élastiques réels. D'autres assemblages constitués de plusieurs composants élémentaires peuvent être construits pour obtenir une modélisation plus complète du comportement du verre avec la température, en particulier pour approcher de façon plus précise l'évolution de la constante de relaxation avec la température [Zarzychi].

1.1.3 Dilatation thermique

Aux déformations que nous venons de présenter que nous qualifierons de déformations d'origine "mécanique"[15] s'ajoutent des déformations dont l'origine est purement thermique : on parle

[15] Elles résultent de l'application d'une force. Dans le cas du fibrage, ce sera la tension de fibrage.

de dilatation du matériau sous l'effet de variation de température. Cette propriété caractérise le fait que la densité d'un matériau varie avec la température, en raison de la modification des distances inter-atomiques moyennes sous l'effet de l'augmentation de la vibration des atomes. Le coefficient de proportionnalité entre la variation de température ΔT et les déplacements est le coefficient d'expansion thermique dont nous avons parlé en introduction. Nous le noterons α, il s'exprime en Kelvin^{-1} :

$$e_{th} = \alpha \Delta T$$

équation II.10

Dans la silice, on suppose en général que le coefficient de dilatation varie peu avec la température dans les phases solides et liquides. En revanche, il présente une transition importante au passage de la phase liquide à la phase solide. On considère que le coefficient de dilatation dans la phase liquide est environ trois fois supérieur à l'amplitude du coefficient de dilatation dans la phase vitreuse. Le coefficient de dilatation dépend en revanche fortement de la composition de la silice dopée. En général pour la silice dopée, $10^{-7} \leq \alpha(K^{-1}) \leq 10^{-6}$. Pour des variations de température de l'ordre de 1500°C on obtient ainsi des déplacements thermiques inférieurs au mm.

Nous sommes maintenant en possession de l'ensemble des éléments qui permettent de caractériser le champ des contraintes apparaissant lors du fibrage dans une fibre optique. Nous avons insisté sur le fait que les constantes apparaissant dans les lois de comportement dépendaient de la composition et que la viscosité et le coefficient de dilatation dépendaient de la température. Nous devons donc prendre en compte la géométrie multicouche de la fibre, sa composition et le profil de température afin de comprendre les origines des contraintes. Nous allons dans un premier temps expliquer de façon qualitative que les contraintes engendrées lors du processus de fibrage possèdent deux origines principales :

- **Une origine mécanique provenant de la combinaison des déformations d'origine mécanique et de la différence entre les coefficients de viscosité des différentes couches.**
- **Une origine thermique provenant de la combinaison des déformations d'origine thermique et de la différence entre les coefficients d'expansion thermique des différentes couches.**

A notre connaissance, la prise en compte simultanée des deux causes de contrainte n'a jamais été proposée dans le cas d'une fibre de profil non circulaire. Les auteurs se restreignent dans la majorité des cas au calcul des contraintes d'origine thermique. L'hypothèse sous-jacente semble être que les déplacements d'origine mécanique sont principalement longitudinaux. Par conséquent, les contraintes transverses d'origine mécanique sont très faibles devant les contraintes transverses d'origine thermique. Nous détaillons dans un premier temps comment les contraintes d'origine thermique se développent dans une fibre optique, puis nous nous intéressons aux contraintes d'origine mécanique.

1.2 Explications qualitatives de l'origine des contraintes dans une fibre optique

1.2.1 Contraintes d'origine thermique

Nous supposons dans ce paragraphe que les déformations de la fibre sont uniquement élastiques, c'est à dire que la fibre est dans un état solide dans la gamme de température considérée (ici entre 1500°C et 20°C). Quand une fibre optique est refroidie d'une température initiale élevée T_i, à une température finale basse T_f, les régions contenant des dopages différents vont exhiber des coefficients de dilatation différents de sorte que certaines régions vont se contracter plus que d'autres. Si on laisse évoluer par la pensée ces régions séparément, leurs dimensions relatives à la température finale ne seront pas compatibles. La continuité géométrique entre les différentes régions de la fibre implique donc la présence de déformations résiduelles à la température finale et donc la présence de contraintes résiduelles. La *figure II.9* illustre l'évolution d'une fibre à échelon d'indice subissant un gradient de température $\Delta T = T_f - T_i$. Nous avons représenté, dans cet exemple exagéré, l'évolution de la gaine et l'évolution du cœur prises séparément, et conjointement. On suppose ici que le coefficient d'expansion thermique du matériau de gaine est très petit devant celui du cœur, i.e. les déformations qui seraient engendrées par ΔT dans la gaine maintenue isolée sont très petites devant celles qui seraient engendrées dans le cœur dans les mêmes conditions. Cette situation est illustrée sur la *figure II.9* du haut, où les dimensions du cœur ont fortement varié tandis que celles de la gaine n'ont pratiquement pas changé. On suppose de plus que la gaine est plus rigide que le cœur de sorte que c'est elle qui fixe les déplacements à leur interface. Lorsque la température diminue, le cœur, qui a tendance à vouloir se contracter (*figure II.9*, en haut) est retenu par la gaine (*figure II.9*, en bas) dont les dimensions ne varient pratiquement pas. Il en résulte l'apparition d'un champ de contrainte dans le cœur au fur et à mesure que la température diminue.

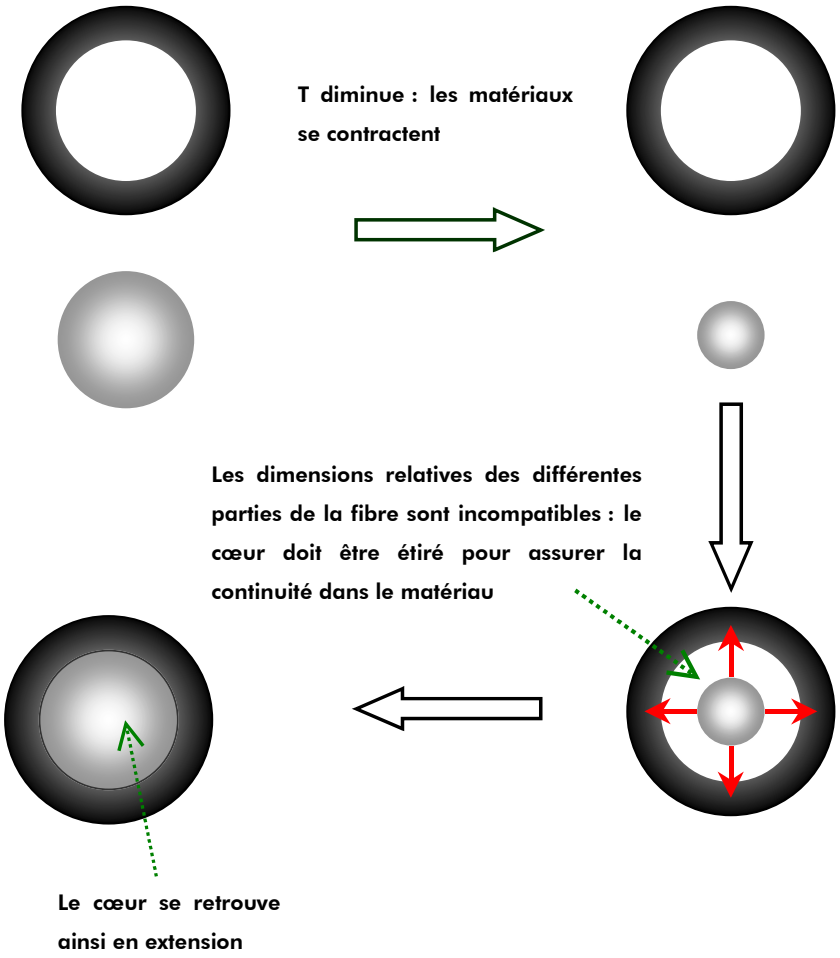

figure II.9 : illustration de l'apparition des contraintes d'origine thermique dans une fibre optique à échelon d'indice

1.2.2 Contraintes d'origine mécanique

Dans le cas d'une fibre à échelon d'indice, les contraintes d'origine mécanique sont engendrées par la tension de fibrage et par la différence entre les coefficients de viscosité des différentes couches de la fibre [Nicolardot, Park99, Yablon]. La *figure II.10* représente le bas d'un cône de fibrage d'une fibre à échelon d'indice soumise à une tension de fibrage *F*. Les viscosités η_c *et* η_g du cœur et de la gaine sont telles que $\eta_c > \eta_g$. A haute température, les matériaux s'allongent sous l'effet de la tension. Les contraintes engendrées se relaxent très rapidement avec une constante de temps proportionnelle à la viscosité (cf *équation II.9* et commentaires). Lorsque la température diminue, le temps de relaxation des contraintes augmente. Le cœur, de viscosité plus grande, a tendance à se solidifier plus rapidement que la gaine (La constante de relaxation des contraintes dans le cœur augmente plus rapidement que dans la gaine).

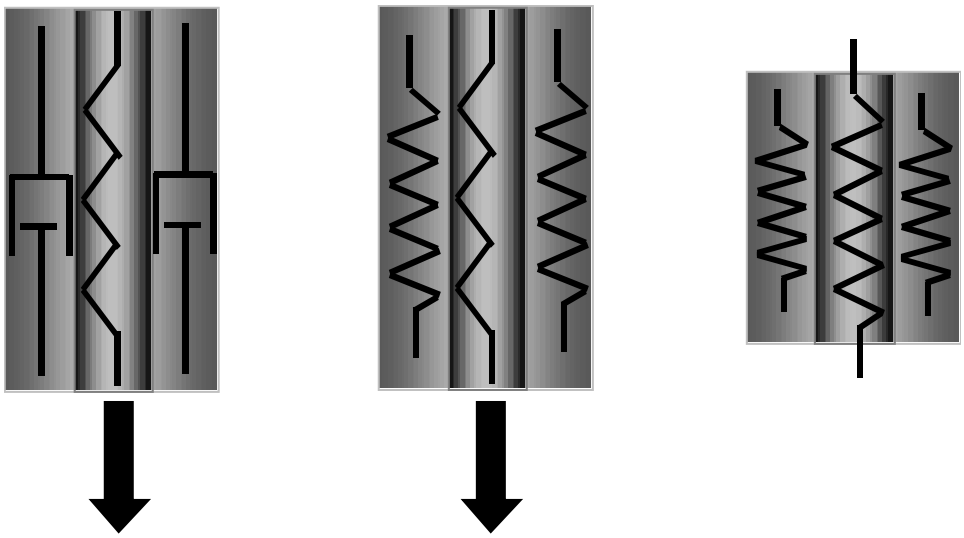

figure II.10 : illustration de l'apparition des contraintes d'origine mécanique dans une fibre optique à échelon d'indice ; à gauche, la gaine est encore visqueuse et se déforme sous l'action de la tension de fibrage ; au milieu la gaine se solidifie ; à droite la tension est relâchée, la gaine se contracte.

Lorsque la fibre a atteint son diamètre final, on peut supposer grossièrement que la gaine est encore visqueuse et le cœur totalement solidifié. Le cœur réagit de façon élastique à la force qui lui est appliquée et supporte toute la tension de fibrage. La gaine réagit de façon visqueuse et s'allonge de façon inélastique sous l'effet de la tension qui lui est appliquée (i.e. les contraintes engendrées sont relaxées quasi-instantanément). Nous avons représenté cette situation sur la *figure II.10* à gauche, où le cœur solidifié se comporte comme un ressort, et la gaine visqueuse comme un piston. Un champ de contrainte stationnaire est atteint rapidement du fait de la faible viscosité de la gaine et est figée lorsque la température descend en dessous de la température de transition vitreuse de la gaine. Ce champ de contrainte, qui correspond à un cœur en extension et à une gaine sous contrainte nulle, est conservé jusqu'au relâchement de la tension (*figure II.10* du milieu). Au relâchement de la tension (*figure II.10* de droite), le cœur aura tendance à se contracter et va entraîner la gaine qui, soumise à la force exercée par le cœur va réagir en opposant une force contraire. Les contraintes dans la section de la fibre se répartissent en fonction de la rigidité relative des deux couches jusqu'à ce que l'équilibre mécanique soit atteint sur la section de la fibre. En supposant, dans notre exemple, que la rigidité de la gaine est plus grande que celle du cœur, cet équilibre correspond à un cœur en forte extension et une gaine en faible compression.

Les raisonnements effectués dans ce chapitre permettent d'obtenir des explications qualitatives sur la présence des contraintes engendrées par les effets thermiques et mécaniques. Nous présentons au chapitre suivant, des méthodes permettant de calculer la répartition des contraintes.

1.3 Modélisation des contraintes

1.3.1 Hypothèse de comportement élastique

Nous présentons dans ce paragraphe, les méthodes de calcul des contraintes d'origine thermique utilisées dans la littérature "opticienne" pour évaluer la biréfringence de contrainte. Si nous

nous limitons à la partie du cône de fibrage où la silice est à l'état solide, i.e. si l'on se situe en dessous de la température de transition vitreuse, on peut se limiter à étudier les déplacements d'origine thermique. Comme nous l'avons énoncé précédemment, cette hypothèse revient à négliger la tension de fibrage, ce qui implique que $\vec{a} = 0$ dans l'*équation II.4*. En négligeant les forces d'origines externes on obtient ainsi l'équation d'équilibre $div\sigma = 0$. Nous supposons que la fibre est un cylindre infiniment long et homogène, les composantes σ_{iz} pour i=x, y sont alors nulles par symétrie. On suppose ensuite que les déformations sont uniquement planes, ce qui d'après la loi de Hooke implique que $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$. Ces hypothèses permettent de simplifier le calcul des contraintes en ramenant le problème à trois dimensions précédent à un problème à deux dimensions. L'équation d'équilibre se ramène alors à :

$$div\sigma_t = 0$$

équation II.11

σ_t est la partie transverse du tenseur des contraintes. On parle d'hypothèses de déformations planes [Timoshenko, Garrigues]. Pour des géométries simples, les solutions de l'équation aux dérivées partielles précédente peuvent être déterminées analytiquement. Pour des géométries complexes, impliquant des zones de différentes formes et tailles, une résolution numérique est nécessaire. Nous présentons dans la suite, quelques configurations géométriques pour lesquelles des résolutions analytiques sont possibles, puis nous présentons un exemple de résolution numérique appliquée à des profils d'indices complexes.

Les méthodes analytiques sont applicables lorsque les coefficients de dilatation sont constants dans les différentes couches de la fibre. Nous citons la méthode de la fonction d'Airy et la méthode des variables complexes en élasticité plane. Dans ces méthodes, les contraintes pour une géométrie particulière s'expriment à l'aide de fonctions intermédiaires, réelles pour la fonction d'Airy [Timoshenko, Garrigues] et complexes pour la méthode des variables complexes [Timoshenko, Tsai]. La linéarité des solutions en théorie de l'élasticité plane, permet de décomposer un problème particulier, en une somme de problèmes plus simples dont on connaît les fonctions solutions. En superposant ces solutions, on peut déterminer les contraintes dans des configurations telles que des fibres à échelon d'indice et/ou à gaine elliptique. Ces méthodes sont utilisées par [Chu82-Chu84], [Varnham], [Tsai] sur différents types de fibres. Nous citons, en particulier les résultats obtenus par [Chu82] pour une fibre à échelon d'indice à cœur elliptique et à gaine infinie. Dans le cœur de la fibre, la méthode de la fonction d'Airy conduit aux valeurs suivantes de σ_{xx}, σ_{yy} :

$$\sigma_{xx} = \frac{E\Delta\alpha\Delta T}{1-\nu}\frac{a}{a+b}$$
$$\sigma_{yy} = \frac{E\Delta\alpha\Delta T}{1-\nu}\frac{b}{a+b}$$
$$\sigma_{xy} = 0$$

équation II.12

2a représente la longueur du grand axe de l'ellipse et 2b la longueur du petit axe de l'ellipse ; $\Delta\alpha$ est la différence entre le coefficient de dilatation de la gaine et le coefficient de dilatation du cœur. On a supposé que le module d'Young et le coefficient de Poisson sont identiques dans le cœur et dans la gaine. On peut tirer deux conclusions à partir de ce modèle simple :

- Les contraintes engendrées de façon thermique sont constantes dans le cœur.
- La composante σ_{xx} selon le grand axe de l'ellipse est supérieure à la contrainte σ_{yy} engendrée selon le petit axe.

Lorsqu'on considère une gaine finie, il faut corriger les solutions précédentes par un terme polynomial en a et b [Varhnam], [Tsai]. La différence entre les contraintes au centre est ainsi donnée par (a et b sont normalisé par rapport au rayon de la fibre dans l'*équation II.13*):

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{E\Delta\alpha\Delta T}{1-\nu}\frac{a-b}{a+b}\left[1-\frac{3}{2}ab(a+b)^2\right]$$

équation II.13

L'évolution de cette différence[16] est représentée en fonction de l'ellipticité *e=(a-b)/(a+b)* sur la *figure II.11* pour différentes valeurs de *b* (exprimé en μm sur la figure).

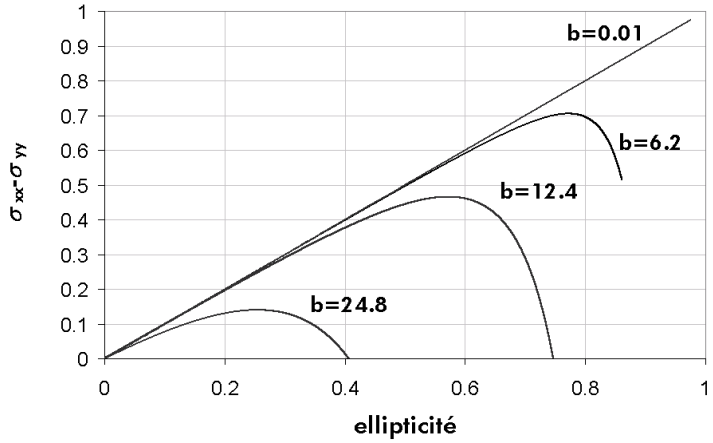

figure II.11 : évolution de la différence σ_{xx}-σ_{yy} normalisée en fonction de l'ellipticité dans une fibre à échelon d'indice pour différentes valeurs du petit axe de l'ellipse b

La valeur de *b*=0 correspond au calcul de [Chu82], i.e. les dimensions du cœur sont infiniment petites devant celle de la gaine. On peut constater que $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ est d'autant plus fort pour une ellipticité donnée que le cœur est petit. La valeur de $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ augmente de plus avec l'ellipticité jusqu'à ce que celle ci dépasse une valeur seuil. Au-delà, $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ diminue puis s'annule et change de signe[17]. Lorsque le profil d'indice varie de façon continue dans la section de la fibre, les coefficients de

[16] Normalisé par rapport à $E\Delta\alpha\Delta T/(1-\nu)$

[17] Nous faisons un aparté ici pour commenter ce résultat : pour chaque valeur du rayon de la fibre, il existe une combinaison des paramètres géométriques et matériaux telle que les axes optiques "géométriques" rapides (respectivement lents) et les axes optiques "matériaux" rapides (respectivement lents) sont orthogonaux. On constate néanmoins que les ellipticités nécessaires pour atteindre cette inversion dans les fibres de télécommunication (b≤10μm) sont très importantes.

dilatation vont eux aussi varier de façon continue de sorte qu'une résolution numérique de l'*équation II.11* devient nécessaire. En général, on utilise une équation aux dérivées partielles pour les déformations transverses lorsqu'on traite numériquement des problèmes de déformation planes. Nous utilisons donc successivement l'*équation II.11* d'équilibre, l'*équation II.6* de l'élasticité linéaire et l'expression des déformations d'origine thermique. A l'aide de l'expression du tenseur des déformations en fonction des composantes du vecteur déplacement, on obtient une équation aux dérivées partielles pour les deux composantes transverses du déplacement [Timoshenko, Chowdhury00] :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha(x,y)\Delta T(x,y)\right) + \nu\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha(x,y)\Delta T(x,y)\right)\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha(x,y)\Delta T(x,y)\right) + \nu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha(x,y)\Delta T(x,y)\right)\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right]$$

équation II.14

$\alpha(x,y)$ est le coefficient de dilatation thermique au point de coordonnées (x,y), $\Delta T(x,y)$ est le gradient de température imposé au point (x, y). On peut résoudre cette équation aux dérivées partielles, en imposant aux déplacements d'être continus, et en imposant à la circonférence de la fibre d'être libre de tout effort. A l'aide de cette méthode [Chowdhury00] détermine le profil de contrainte dans une fibre SMF et une fibre NZDSF pour une ellipticité de 5 %. L'évolution du coefficient de dilatation dans la section de la fibre est calculée à partir de la composition. Les résultats des calculs sont représentés, pour une composante diagonale σ_{rr} et pour la composante croisée $\sigma_{r\theta}$ sur la *figure II.12* et sur la *figure II.13* pour la SMF, sur la *figure II.14* et sur la *figure II.15* pour la NZDSF. On peut constater que les composantes diagonales du tenseur des contraintes sont supérieures aux composantes croisées pour les deux profils. Cette différence est plus marquée pour le profil d'indice NZDSF qui possède des différences d'indice plus importantes. De plus, de manière générale, le profil de contrainte de la fibre NZDSF est géométriquement plus complexe que le profil de contrainte de la fibre SMF. Nous verrons au chapitre de calcul de la biréfringence que cette complexité ne se traduit pas, comme on s'y attend intuitivement, à un comportement plus complexe de la biréfringence de phase et de groupe de la fibre NZDSF.

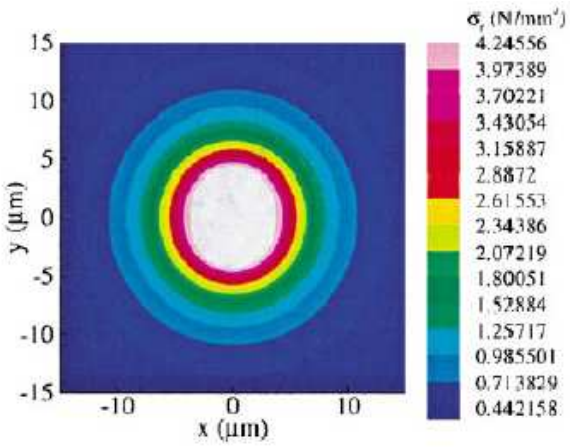

figure II.12 : Evolution de σ_{rr} dans la section de la fibre SMF

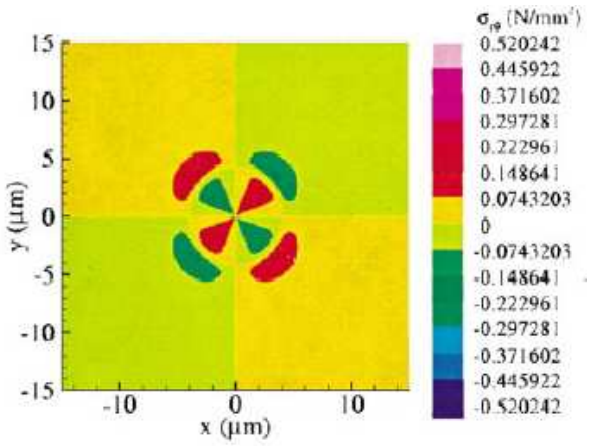

figure II.13 : Evolution de $\sigma_{r\theta}$ dans la section de la fibre SMF

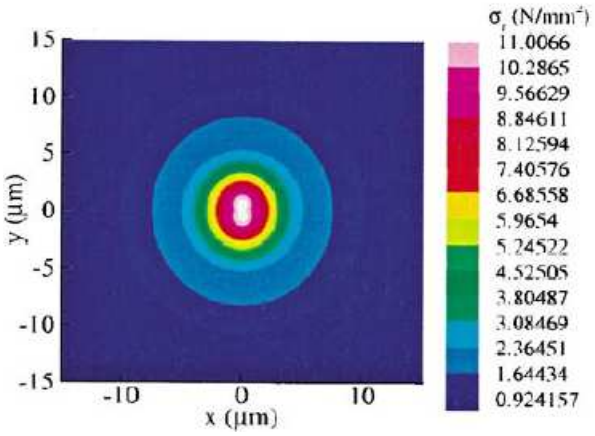

figure II.14 : Evolution de σ_{rr} dans la section de la fibre NZDSF

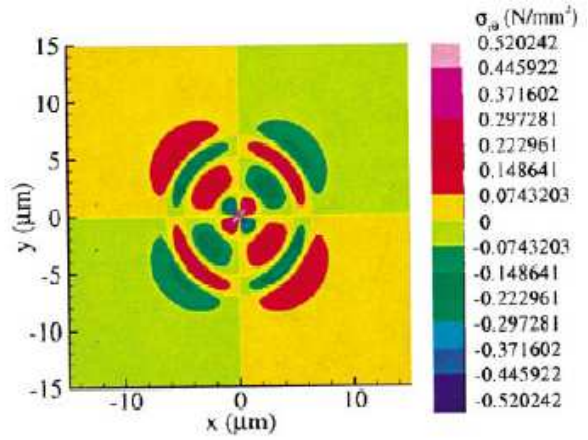

figure II.15 : Evolution de $\sigma_{r\theta}$ dans la section de la fibre NZDSF

1.3.2 Hypothèse de comportement visco-élasto-thermique

Les méthodes de calcul que nous présentons dans ce paragraphe sont basées sur une approche plus précise du processus de fibrage que les méthodes précédentes, car elles ne se limitent pas à la partie solide du cône de fibrage. L'histoire mécanique et thermique de la fibre est en effet prise en compte à travers un modèle visco-élastique basé sur le modèle de Maxwell présenté précédemment. Nous rappelons que dans ce modèle, le tenseur des taux de déformation est égal à la somme du tenseur des taux de déformation élastique et du tenseur des taux de déformation visqueuse. Pour prendre en compte les effets de la dilatation thermique, on lui rajoute le tenseur des taux de déformation thermique. On obtient alors l'expression suivante :

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{\left(\sigma_{ij} - P\delta_{ij}\right)}{2\eta} + \frac{\left[(1+\nu)\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} - 3\nu\frac{\partial P}{\partial t}\delta_{ij}\right]}{E} + \frac{\partial e_{th_{ij}}}{\partial t}$$

équation II.15 : Les différents paramètres intervenant dans cette équation sont a priori des fonctions du temps

Dans le problème que nous considérons, les variables η, α, dépendent a priori de la température. Le profil de température "vu" par la fibre au cours du fibrage est donc un des éléments clés du calcul. La *figure II.16* représente un cône de fibrage sur lequel nous avons représenté l'évolution spatiale d'une tranche de silice en fonction du temps.

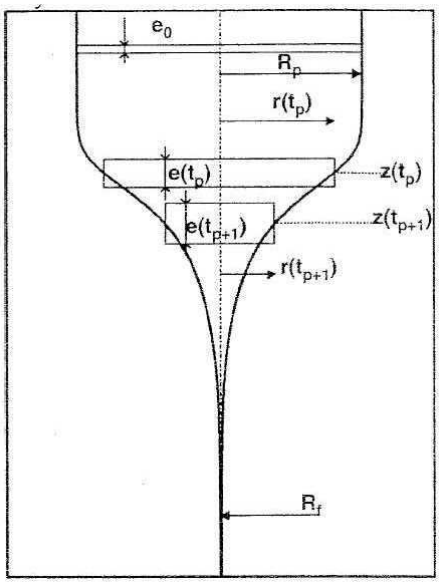

figure II.16 : représentation de l'évolution d'une tranche de silice d'épaisseur e en fonction du temps t (ou de la hauteur) dans le cône de fibrage [Nicolard]

R_p représente le rayon de la préforme, R_f le rayon de la fibre. $r(t_p)$ représente le rayon de la tranche de silice au temps t_p et $e(t_p)$ son épaisseur. L'évolution spatiale de la tranche de silice dans le cône de fibrage est une fonction du temps. Par conséquent, l'évolution de la température de la tranche est, elle aussi, une fonction du temps. Il existe ainsi une relation entre la forme du cône de fibrage, et le profil de température longitudinal, i.e. la dépendance de T avec l'abscisse longitudinale. Le profil de température est obtenu à partir d'un bilan d'énergie sur la tranche de silice à l'abscisse z_p (ou au temps t_p). Celui ci conduit à la relation suivante entre la température de la fibre T, le diamètre de la tranche d et le temps t [Park99] :

$$\frac{T - T_o}{T_s - T_o} = exp\left(-\frac{4ht}{\rho C_p d}\right)$$

équation II.16

où ρ et C_p représentent respectivement la densité et la chaleur spécifique des matériaux de la fibre. T_o est la température de l'air ambiant et T_s la température de fusion de la silice. h est le coefficient de transfert thermique (h=7.2×10^{-7} cal/cm²s°C). Cette expression montre que connaissant l'évolution du diamètre de la fibre en fonction du temps[18] on peut obtenir sa température (supposée constante sur toute la section) à chaque instant. Connaissant l'évolution de la température en fonction du temps, on peut déterminer l'évolution de la viscosité et du coefficient de dilatation en fonction du temps. On peut

[18] On peut le « mesurer » en fonction de la position en arrêtant le processus de fibrage est en effectuant des mesures de diamètre sur la préforme refroidie. Connaissant la vitesse de fibrage, on peut à partir de la position déterminer le temps correspondant.

de même déterminer les conditions initiales qui vont permettre d'initier le calcul des contraintes. D'après les résultats du § 1.1, et l'*équation II.9* nous connaissons l'expression du temps de relaxation des contraintes dans un matériau viscoélastique à trois dimensions : $\tau = 3\eta / E$. On peut estimer un ordre de grandeur des constantes de relaxation autour de la température de fusion de la silice pure, i.e. prés de 1500 °C. A 1500 °C, la viscosité de la silice est telle que le modèle de Maxwell décrit correctement l'évolution des contraintes en fonction du temps. En utilisant des données typiques pour la silice (E=73000 MPa, $\eta = 10^9$ Poises à 1500 °C), on obtient à l'instant t tel que la température de la fibre est 1500 °C, des temps de relaxation de l'ordre de 0.01 s. En choisissant une température initiale correspondant à un temps t'=t-5τ, on est sûr qu'au-delà de cette température, toute l'histoire de la fibre a été prise en compte de façon pertinente, i.e. les contraintes n'ont pas encore commencé à se développer. Cette température est estimée de façon expérimentale à environ 1800 °C dans [Nicolardot]. Nous possédons donc toutes les données d'entrées nécessaires à la résolution de l'équation aux dérivées partielles (*équation II.15*). Nous présentons dans la suite deux approches pour la résolution de cette équation :

- La première est une méthode par éléments finis développée à Conflans [Nicolardot] pour le calcul des contraintes dans des fibres à symétrie circulaire. Nous avons généralisé cette méthode à des fibres à géométrie non circulaire et présentons au paragraphe § 1.4 des résultats de calcul sur des fibres à profil elliptique. Nous présentons ici les résultats obtenus sur les fibres circulaires en insistant sur les hypothèses de modélisation.
- La seconde méthode consiste à calculer les effets thermiques et mécaniques de façon séparée, elle est présentée par [Park99]. En ce qui concerne les contraintes d'origine mécanique, seule la composante selon l'axe z est évaluée, ce qui permet de simplifier la résolution de l'*équation II.15*.

La résolution de l'*équation II.15* dans [Nicolardot] est effectuée par un logiciel de calcul de structure nommé systus. Le logiciel calcule les déplacements engendrés dans la structure par la tension de fibrage et par les variations de température à l'aide d'une méthode par éléments finis. Les déplacements réels sont obtenus par minimisation de l'énergie de déformation W de la structure où W est défini en fonction du tenseur des contrainte et du tenseur des déformations par $W = \int_{volume} tr(\sigma \cdot e) dV$.

A l'aide de l'*équation II.15* on peut exprimer W à chaque instant en fonction des déformations et donc en fonction des déplacements. A chaque instant le champ de déplacement admissible est celui qui minimisera l'énergie de déformation de la structure. Pour la résolution numérique, la structure est discrétisée en élément. On montre que la minimisation de l'énergie potentielle de la structure réelle conduit à la résolution d'un système linéaire dans la structure discrétisée dont les inconnues sont les valeurs des déplacements aux nœuds des éléments. Un maillage complet du cône de fibrage s'avérait trop lourd compte tenu des déformations d'amplitudes trop importantes qui ont lieu. La solution adoptée est d'étudier les déplacements et les contraintes dans une fine tranche de silice se déplaçant dans le cône sous l'effet de la tension de fibrage (*figure II.16*). Connaissant la température initiale, on

pourrait initier le processus de calcul à partir d'un diamètre calculé à partir de l'*équation II.16* et d'un champ de contrainte obtenu via la composante visqueuse de l'*équation II.15*; on résoudrait alors l'*équation II.15* en appliquant la force de fibrage à la tranche de silice jusqu'à ce que la température atteigne celle de l'air ambiant. Cette solution peut conduire à des imprécisions sur le diamètre final de la fibre, et donc sur les résultats du calcul. La raison provient du fait que les conditions initiales sont évaluées de façon qualitative. La solution retenue dans [Nicolardot] pour s'affranchir de ces imprécisions consiste à initier le calcul à partir d'une fibre de 125 μm exempte de contrainte à une température de 20°C. Le diamètre à haute température est obtenu à partir d'une phase de calcul, où un profil de température fictif et une force de fibrage fictive sont appliqués à la fibre. Ce profil de température fictif et cette force fictive correspondent précisément au profil de température réel et à la tension de fibrage réelle mais inversés par rapport au temps (*figure II.17*). Lorsque la température déterminée précédemment, est atteinte, le profil de température réel et la tension de fibrage sont appliquée à la fibre, la phase d'extension proprement dite est alors simulée (*figure II.17*). Le relâchement de la tension de fibrage est pris en compte, à la fin du processus, en imposant une force nulle à la dernière étape de calcul.

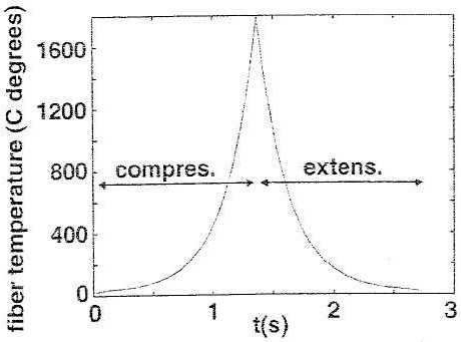

figure II.17 : Phase de compression fictive et phase d'extension réelle de la tranche de silice dopée. La phase de compression fournit les conditions initiales pour le calcul des contraintes et des déplacements lors de l'étirage de la préforme [Nicolardot]

La solution retenue par [Park99] est d'évaluer les contraintes d'origine thermique et mécanique de façon séparée. Dans [Park99], seule la composante axiale est prise en compte dans le calcul des composantes mécaniques, de sorte que l'*équation II.15* est simplifiée est aisément intégrable par une méthode de Runge Kunta. Les conditions initiales sont évaluées à la température de relaxation des contraintes définies précédemment[19], où on peut facilement établir une relation entre la force de fibrage, la viscosité des différentes couches et les composantes axiales initiales. Les contraintes d'origine thermique sont calculées en considérant la transition du coefficient de dilatation aux températures de transition vitreuse des différents matériaux.

Nous présentons dans la suite, les résultats obtenus par les deux approches. Les dépendances des coefficients α, η, E et ν en fonctions de la composition sont supposées linéaires dans les deux références. Nous précisons que la variation du coefficient de dilatation à la température de transition

[19] Cette température est estimée à 1600°C dans [Park99], par opposition au 1800°C de [Nicolardot]

vitreuse n'est pas pris en compte dans la référence [Nicolardot]. Ce choix est justifié par la difficulté de garantir une bonne précision sur la sensibilité du coefficient de dilatation vis à vis de la composition et des variations de température. Nous avons donc préféré nous restreindre à des coefficients de dilatation indépendants de la température.

Les *figures II.18*, et *II.19* d'une part et *II.20* et *II.21* d'autre part correspondent à des calculs des contraintes réalisées respectivement par la méthode [Nicolardot] et par la méthode [Park99] sur une fibre possédant trois couches : le cœur, la gaine et le tube. Les dimensions des deux fibres sont sensiblement les mêmes. La fibre simulée par Nicolardot est fortement dopée en Germanium de sorte que les différences d'indice entre le cœur et la gaine sont respectivement de 27×10^{-3} dans [Nicolardot] et de 4.5×10^{-3} dans [Park99]. Cette différence se répercute au niveau des valeurs des coefficients de dilatation utilisées dans les deux références. Ainsi dans [Nicolardot], le coefficient de dilatation dans le cœur est de 23.5×10^{-7} et constant sur toute la gamme de température. Dans [Park99], en revanche, le coefficient de dilatation dans le cœur varie entre 7.5×10^{-7} en dessous de la température de transition vitreuse, et 22×10^{-7} au-dessus. Nous avons effectué une évaluation séparée et conjointe des effets thermiques et mécaniques afin de les comparer avec les résultats de l'approche utilisée par [Park99]. Les tensions de fibrage utilisées dans les deux références sont respectivement de 76 g dans [Nicolardot] et de 50 g dans [Park99]. Les résultats des calculs montrent des comportements globalement identiques pour les deux composantes des contraintes :

- La composante thermique conduit à une extension dans le cœur, i.e. des composantes de sigma globalement positives dans les deux références (cf *figure II.18* et *II.20*).
- Relativement à la composante thermique, la composante mécanique conduit à une compression dans le cœur, i.e. des composantes de sigma globalement négatives (cf *figure II.19* et *II.21*).

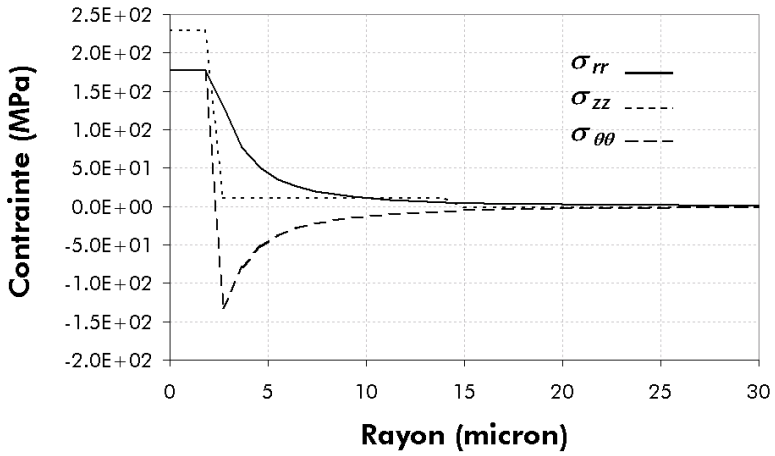

figure II.18 : composantes thermiques des contraintes dans un profil de type échelon [Nicolardot]

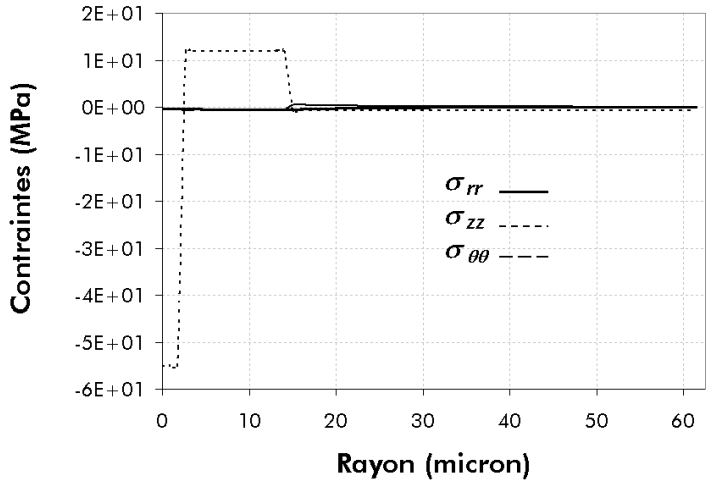

figure II.19 : Composantes mécaniques des contraintes dans un profil de type échelon [Nicolardot]

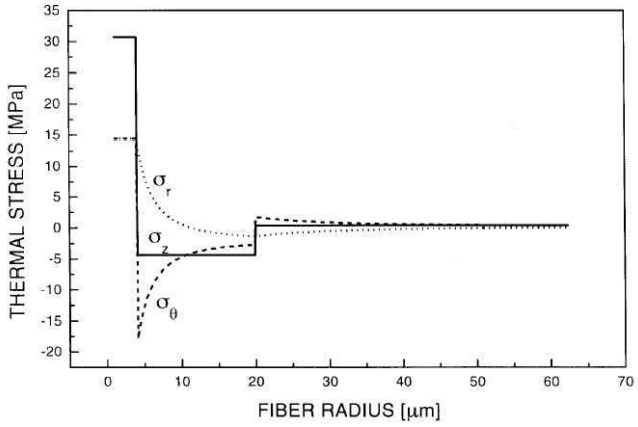

figure II.20 : Composantes thermiques dans un profil de type échelon [Park99]

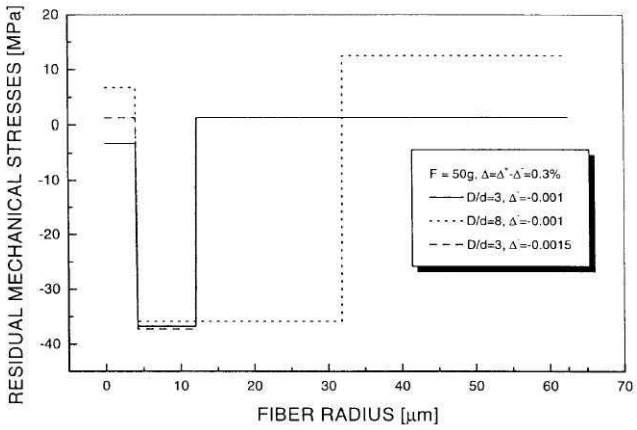

figure II.21 : Composantes mécaniques dans un profil de type échelon [Park99]

On peut noter la forte importance de la composante thermique calculée sur la fibre étudiée par [Nicolardot]. Cette composante étant engendrée par le coefficient de dilatation α, le calcul montre qu'une attention particulière doit être portée à la modélisation des coefficients de dilatation et de

viscosité. En négligeant l'impact de la température de transition vitreuse, on peut estimer grossièrement que les coefficients de dilatation utilisés par [Nicolardot] sont 3 fois supérieurs à ceux utilisés par [Park99]. On note cependant que les contraintes d'origine thermique calculées dans [Nicolardot] sont environ 10 fois supérieures aux valeurs calculées dans [Park99]. La différence entre ces valeurs peut être attribuée pour partie à la prise en compte de la variation du coefficient de dilatation avec la température. On vérifie enfin sur la *figure II.19* que pour une fibre à symétrie circulaire, les contraintes transverses engendrées de façon purement mécanique sont très faibles devant celle qui sont engendrées de façon thermique. La *figure II.22* présente le calcul prenant en compte les composantes mécaniques et thermiques de façon simultanée, en utilisant le modèle de [Nicolardot]. On constate que globalement, pour une géométrie circulaire, les composantes du tenseur des contraintes sont égales à la somme des composantes engendrées de façons thermique et mécanique.

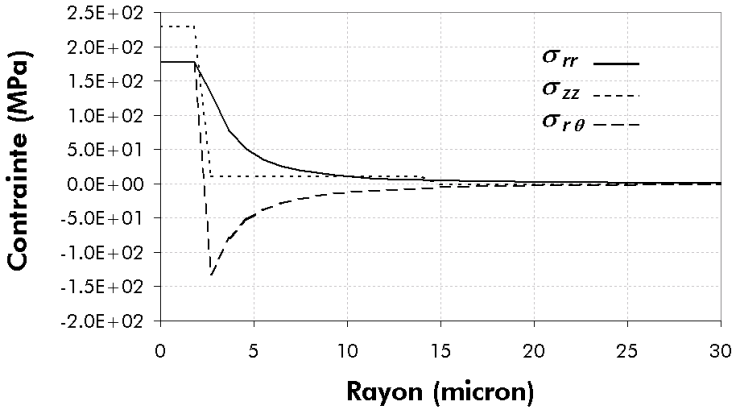

figure II.22 : contrainte radiale, orthoradiale et longitudinale dans un profil de type échelon [Nicolardot]

1.4 Calcul de l'anisotropie engendrée dans une fibre elliptique lors du processus de fibrage

Nous présentons dans ce paragraphe une extension du modèle développé à Conflans [Nicolardot] aux fibres à sections non nécessairement circulaires. La modification majeure repose sur le maillage utilisé pour la résolution : d'un maillage à deux dimensions, nous sommes passés à un maillage à trois dimensions. Nous présentons la forme de maillage utilisée au § 1.4.1 puis des résultats de simulations au § 1.4.2 sur des fibres ayant des profils d'indice de type échelon ou de type W (présence d'une gaine intérieure enterrée par rapport à la gaine extérieure et se situant entre le cœur et la gaine extérieure).

1.4.1 Maillage de la section de la fibre

Un maillage typique d'une tranche de silice est représenté sur la *figure II.23*. Comme nous nous limitons à des géométries elliptiques ou circulaires, seul un quart de la fibre est maillée. Ceci permet de diminuer le nombre de maille et donc de limiter les temps de calcul. Cela impose en revanche que

toutes les couches elliptiques possèdent les mêmes axes principaux. L'épaisseur de la tranche doit être fixée en respectant deux exigences contradictoires. La première exigence est d'ordre physique ; des mesures de diamètres montrent en effet qu'entre 1800°C et 20°C, le diamètre de la fibre varie environ de 140 µm à 125 µm, la tranche doit donc être assez fine afin qu'il soit possible de résoudre suffisamment la conicité de la fibre. La seconde exigence est d'ordre numérique, elle impose que la tranche ne doit pas être trop fine afin d'éviter de trop grandes disparités entre les dimensions relatives des différentes mailles. Cette disparité peut en effet conduire à une anisotropie "numérique" (la résolution conduit à des déplacements de matière beaucoup plus importants selon les plus grandes dimensions des mailles). Etant données les dimensions transverses de la fibre, et les dimensions minimales des différentes couches (les diamètres minimaux pour le cœur sont de l'ordre de 2 µm), l'épaisseur de la tranche est fixée dans notre problème à 1 µm. Cette dimension impose ainsi une restriction sur le nombre de mailles angulaires et sur le nombre de mailles radiales. Nous avons été conduit à ne pas dépasser 10 mailles angulaires, et 60 mailles radiales.

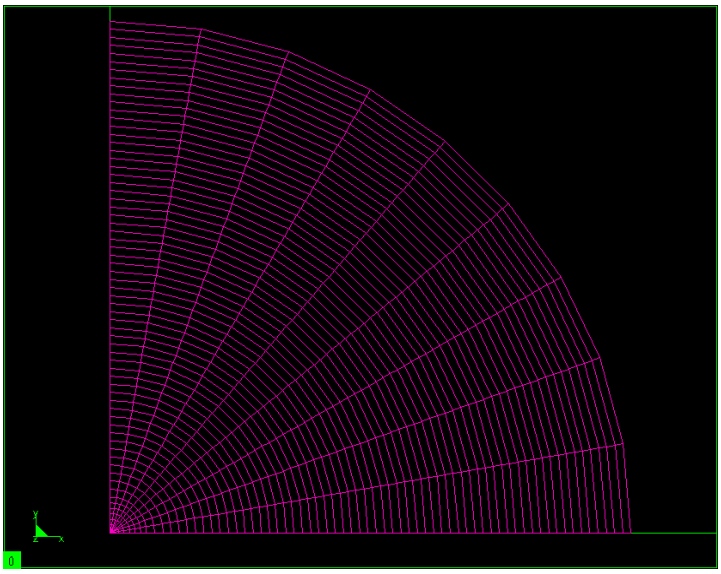

figure II.23 : maillage d'un quart de fibre représenté dans le plan transverse (x, y)

1.4.2 Effet des contraintes d'origine mécanique sur un profil échelon

Dans ce paragraphe nous évaluons l'effet de la tension de fibrage sur la répartition des contraintes dans une fibre à échelon d'indice. Les caractéristiques de la fibre étudiée sont résumées dans le *tableau II.1*. Le module d'Young et le coefficient de Poisson ont été choisis identiques dans le cœur et dans la gaine afin de se placer dans des conditions proches de celles utilisées dans la littérature [Chu82, Tsai]. Ils correspondent aux caractéristiques d'une fibre faiblement dopée en germanium communément appelées fibre SSMF (de l'anglais Standard Single Mode Fiber). Le comportement du logarithme de la viscosité en fonction de la température est représenté sur la *figure II.24*.

	r (µm)	E (MPa)	υ	α(K^{-1})	log(η) : [A, B, C]
Cœur	4.35	71.7×10^{3}	0.162	1×10^{-6}	[-5.16, 26625,-374.4]
gaine	62.5	71.7×10^{3}	0.162	5.8×10^{-7}	[-10.22, 37374,-388.8]

tableau II.1 : caractéristiques des matériaux constituants le cœur et la gaine

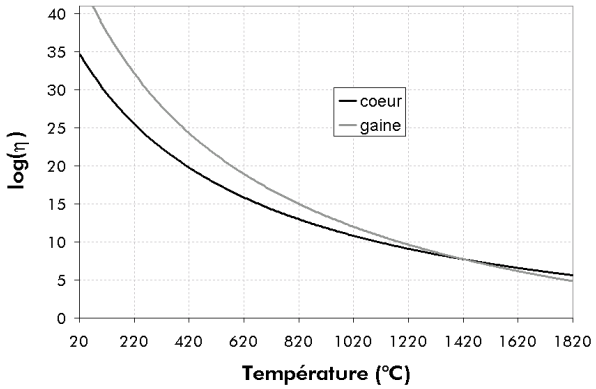

figure II.24 : évolution du logarithme de la viscosité dans le cœur (en noir), et dans la gaine (en gris)

Les *figures II.25*, *II.26* et *II.27* présentent les composantes du tenseur des contraintes calculées au centre de la fibre. Les calculs ont été effectués grâce aux données précédentes pour cinq valeurs de l'ellipticité (0, 0.5, 1, 1.5 et 2 %) et pour trois valeurs de la tension de fibrage (0 g, 50 g et 85 g). La *figure II.25* représente l'évolution de la différence $\sigma_{xx} - \sigma_{xx}$ prise au centre de la fibre en fonction de l'ellipticité. On peut constater que cette différence évolue linéairement avec l'ellipticité quelle que soit la valeur de la tension de fibrage. Si on calcule la pente de la courbe, on trouve une valeur de 13×10^{6} MPa/%. Cette valeur est inférieure à celle obtenue en utilisant les *équations II.12* et *II.13* et les caractéristiques du *tableau II.1* : $E\Delta\alpha\Delta T/(1-\nu)\approx60\times10^{6}$ MPa/%. Ce résultat nous conduit à faire trois remarque :

1) Ces deux valeurs sont du même ordre de grandeur.
2) Les *équations II.12* et *II.13* sont obtenues, on le rappelle, en supposant que les déformations sont planes et que le solide traité est un cylindre infiniment long non soumis à une force de traction. Dans un contexte de modélisation d'une partie d'un cône de fibrage, ces hypothèses sont discutables.
3) Aucune hypothèse n'est effectuée a priori sur le modèle que nous utilisons. De plus, dans notre problème, les déformations longitudinales sont non négligeables d'une part parce que les déplacements d'origine thermique s'effectuent dans les trois directions de l'espace, et d'autre part parce qu'une force, la tension de fibrage, dirigée selon l'axe longitudinal est appliquée à la fibre.

Ces trois remarques suggèrent qu'une démarche de validation doit être mise en place afin de fixer les domaines de validité des deux modèles.

La *figure II.26* représente l'évolution de σ_{xy} et la *figure II.27* l'évolution de σ_{zz} en fonction de l'ellipticité. On remarque premièrement que la composante croisée présente des valeurs négligeables

devant les autres composantes pour toutes les valeurs de la tension de fibrage et de l'ellipticité. Deuxièmement, la composante σ_{zz} dépend clairement de la tension de fibrage contrairement aux autres composantes. Enfin, l'ellipticité n'a pas d'influences notables sur les composantes σ_{xy} et σ_{zz}. De façon plus précise, on constate que plus la tension de fibrage augmente, plus la composante σ_{zz} diminue. On passe ainsi d'un matériau en extension au centre pour T=0 g et T=50 g, à un matériau en compression pour T= 85 g. La tension de fibrage joue donc un rôle important dans la valeur des composantes diagonales du tenseur des contraintes.

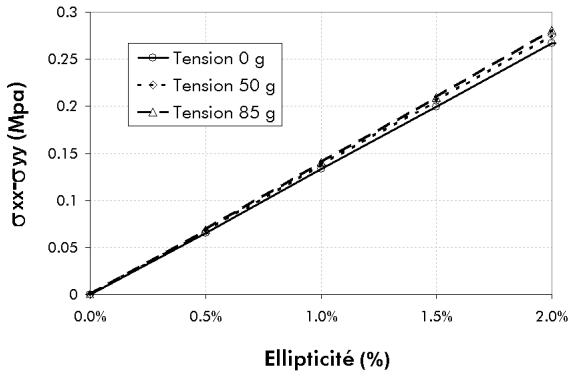

figure II.25 : évolution de la différence entre σ_{xx} et σ_{yy} en fonction de l'ellipticité pour trois valeurs de la tension de fibrage (0 g, 50 g et 85 g)

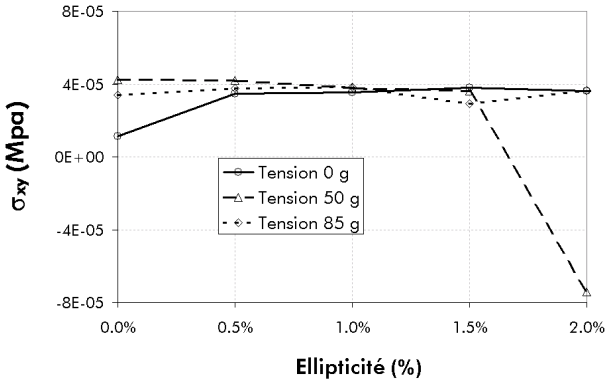

figure II.26 : évolution de σ_{xy} en fonction de l'ellipticité pour trois valeurs de la tension de fibrage (0 g, 50 g et 85 g)

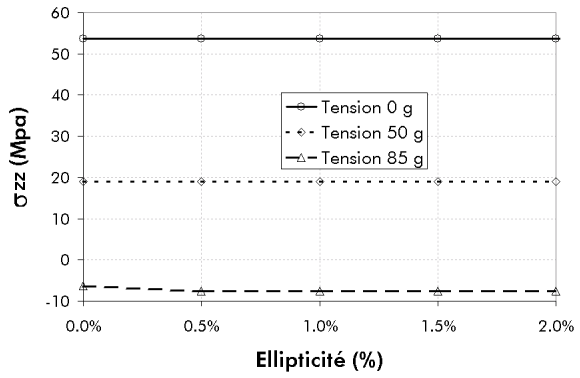

figure II.27 : évolution de σ_{zz} en fonction de l'ellipticité pour trois valeurs de la tension de fibrage (0 g, 50 g et 85 g)

Ces résultats sont à aborder avec prudence, car les caractéristiques des matériaux dépendent fortement du dopage et donc du type de fibre. Les comportements observés dans ce paragraphe peuvent donc varier d'une fibre à l'autre. Néanmoins, la décroissance de σ_{zz} avec la tension de fibrage est un phénomène commun à la plupart des fibres que nous fabriquons et résulte du fait que la viscosité de la gaine est supérieure à celle du cœur. De ce fait la gaine se solidifie plus rapidement que le cœur (les températures de transition vitreuses sont respectivement de 1300 °C et 1170 °C). En exerçant une force sur la fibre on met ainsi la gaine sous tension (les valeurs σ_{zz} sont positives) et ce d'autant plus que l'amplitude de la force est importante. Avant le relâchement de la tension, le cœur et la gaine sont sous tension, et tels que $\sigma_{zzcoeur} < \sigma_{zzgaine}$ du fait que $T_{gcoeur}<T_{ggaine}$. Au relâchement de la tension, la gaine exerce une force de compression sur le cœur d'autant plus importante que la tension de fibrage est importante. Lorsque cette tension dépasse un certain seuil, le cœur peut être mis en compression comme c'est le cas pour T=85 g sur la fibre que nous étudions. La tension de fibrage semble donc ne jouer un rôle important que pour la composante axiale du tenseur des contraintes. Nous allons dans le paragraphe suivant étudier l'effet de la différence d'indice entre le cœur et la gaine sur la répartition des contraintes en fixant l'ellipticité à 1 % et la tension de fibrage à 85 g.

1.4.3 Comparaison de l'anisotropie des profils en échelons et en W

Dans ce paragraphe nous fixons l'ellipticité à 1% et nous étudions l'effet de la différence d'indice entre le coeur et la gaine sur les contraintes. Cinq profils à échelon d'indice E100, E147, E194, E241 et E288 et quatre profils W (profil à échelon d'indice comportant une gaine intérieure) W147, W194, W241 et W288 ont été étudiés (*figure II.28* et *II.29*).

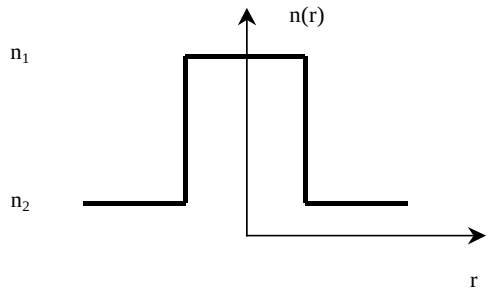

figure II.28 : profil de type échelon

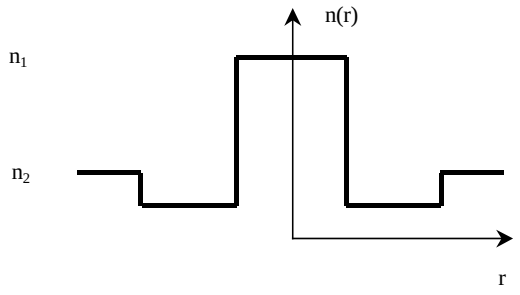

figure II.29 : profil de type W

Le numéro des profils désigne la différence d'indice entre le cœur et la gaine de la fibre. Ainsi la E100 possède une différence d'indice entre le cœur et la gaine de 10×10^{-3} soit à 1550 nm un indice de cœur de 1.454 lorsque l'indice de gaine est égal à 1.444. Pour les profils W, l'indice de la gaine intérieure est de 1.4434 à la même longueur d'onde. Tous ces profils ont été choisis de façon à garantir un indice effectif constant, soit un comportement en courbure et micro courbure équivalent sur l'ensemble de ces profils. De façon plus précise, nous avons fait varier l'indice du cœur, en gardant les caractéristiques des autres couches identiques. Ainsi pour chaque profil, plus la différence d'indice est forte, plus le

rayon du cœur est faible. Les caractéristiques E, ν et α dans le cœur sont représentées en fonction de la différence d'indice entre le coeur et la gaine sur les *figures II.30* et *II.31*.

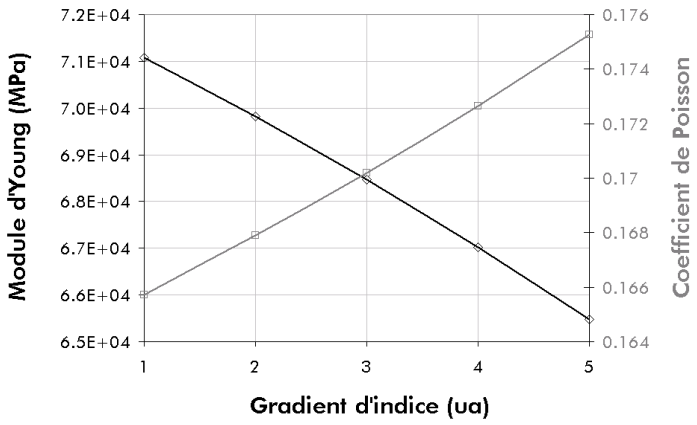

figure II.30 : évolution du module d'Young et du coefficient de Poisson en fonction de la différence d'indice entre le coeur et la gaine.

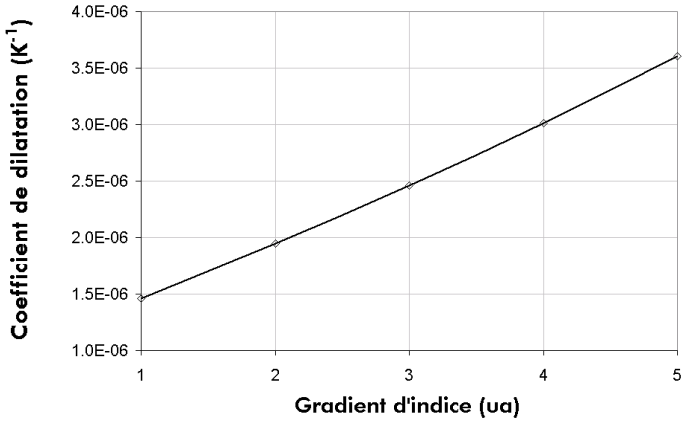

figure II.31 : Evolution du coefficient de dilatation en fonction de la différence d'indice entre le coeur et la gaine

Leurs valeurs dans la gaine extérieure, le tube et la recharge sont résumées dans le *tableau II.2*.

	Gaine extérieure	tube	recharge
E (MPa)	66.5×10^{3}	73×10^{3}	73×10^{3}
υ	0.161	0.162	0.162
$\alpha(K^{-1})$	5.57×10^{-7}	5.8×10^{-7}	5.8×10^{-8}

tableau II.2 : caractéristiques des matériaux dans la gaine extérieure, le tube et la recharge

De même l'évolution de la viscosité est représentée sur la *figure II.32* en fonction de la température pour les cinq profils d'indice. Pour chaque profil, le tenseur des contraintes a été calculé pour une tension de fibrage égale à 85 g.

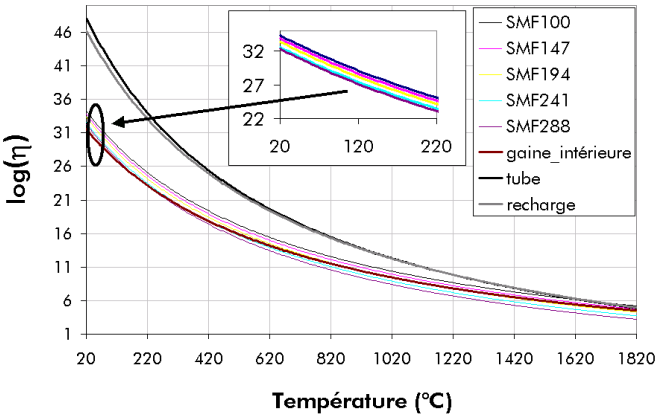

figure II.32 : évolution de la viscosité en fonction de la température pour les cinq profils d'indice. La viscosité dans le cœur (E100, 147, 194, 241 et 288) diminue lorsque la différence d'indice cœur/gaine augmente. Les viscosités dans la gaine intérieure, le tube et la recharge sont identiques pour les cinq profil d'indice

Un exemple de répartition des composantes σ_{xx} et σ_{xy} est représenté sur les *figures II.33* et *II.34*.

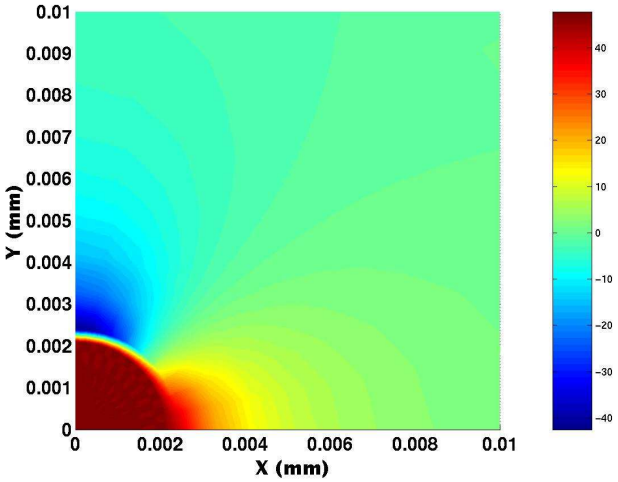

figure II.33 : composante σ_{xx} dans le plan transverse ; l'amplitude des contraintes est exprimée en MPa dans l'échelle colorée

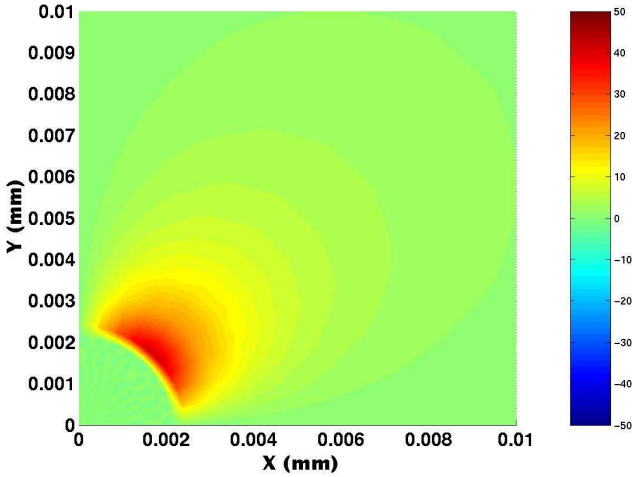

figure II.34 : composante σ_{xy} dans le plan transverse ; l'amplitude des contraintes est exprimée en MPa dans l'échelle colorée

On peut noter que les valeurs de σ_{xx} sont à peu près constantes dans le cœur. Elles dépendent en revanche fortement de l'angle dans la gaine intérieure à l'interface cœur/gaine. La dépendance angulaire de σ_{xx} y est en effet périodique de période π. On observe un comportement identique pour la composante σ_{yy} [20], la composante σ_{zz} [20] ayant quant à elle une répartition angulaire relativement uniforme. La composante σ_{xy} présente, elle aussi, un comportement périodique de période π mais déphasée de π/4 par rapport à celui des composantes σ_{xx} et σ_{yy}. On constate de plus sur la *figure II.34* que σ_{xy} est nulle presque partout, sauf autours de θ=45°, où θ est la coordonnée angulaire.

[20] Non représentées ici

Afin d'effectuer un traitement global des composantes du tenseur des contraintes nous avons considéré les valeurs moyennées sur l'angle de chacune des composantes. Dans cette approche, la composante σ_{xy} est nulle en moyenne sur la section de la fibre et nous la négligerons dans la suite devant les autres composantes. A l'aide des composantes diagonales effectives du tenseur des contraintes nous avons calculé l'anisotropie correspondante en utilisant l'*équation II.3*. Les *figures II.35*, *II.36* et *II.37* représentent les corrections δn_{xx}, δn_{zz} et la différence δn_{xx}-δn_{yy} calculées sur chacun des profils échelons.

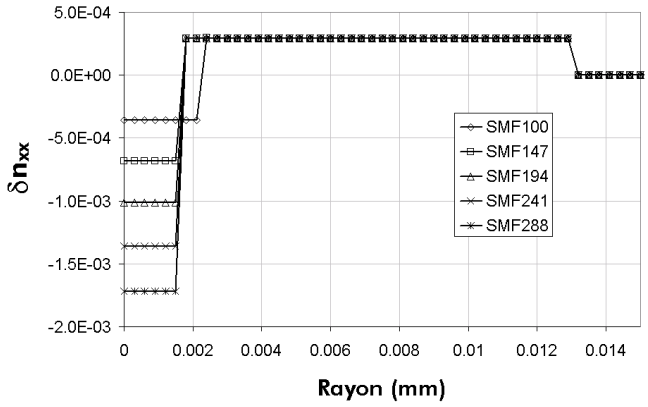

figure II.35 : évolution de δn_{xx} en fonction du rayon pour les cinq profils échelons

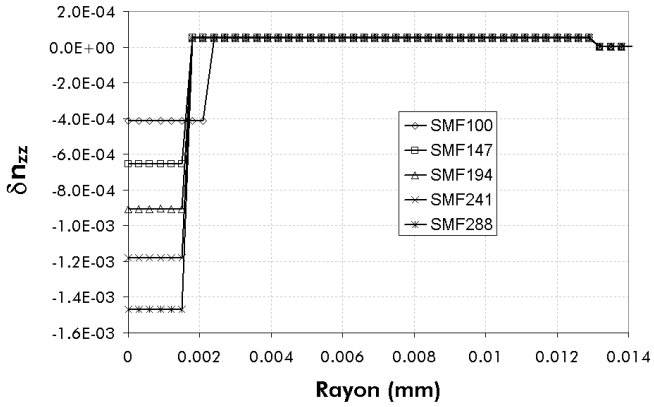

figure II.36 : évolution de δn_{zz} en fonction du rayon pour les cinq profils échelons

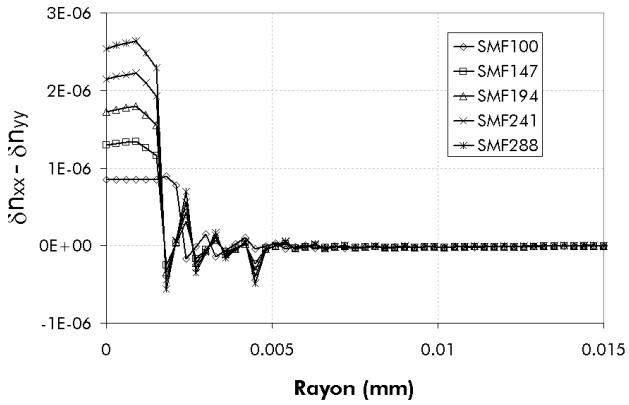

figure II.37 : évolution de la différence δn_{xx}-δn_{yy} en fonction de la différence d'indice entre le coeur et la gaine dans des fibres à échelon d'indice

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de ces résultats :

- La première concerne l'importance relative des différentes composantes du tenseur des indices. Du fait que la composante σ_{xy} est nulle en moyenne et d'après l'*équation II.3* la correction $\boldsymbol{\delta n_{xy}}$ est nulle sur toute la section de la fibre.
- Les composantes $\boldsymbol{\delta n_{xx}}$, $\boldsymbol{\delta n_{yy}}$, $\boldsymbol{\delta n_{zz}}$ sont constantes dans chaque tranche et on peut constater que dans le cœur les corrections sont toutes négatives, ceci d'autant plus que la différence d'indice entre le cœur et la gaine est importante. Une explication liée à l'augmentation du coefficient de dilatation en fonction de la différence d'indice entre le coeur et la gaine peut être avancée (*figure II.31*). Ainsi, pour des raisons identiques à celles avancées au § 1.2.1, plus le coefficient de dilatation augmente dans le cœur, plus le cœur va se retrouver en extension après fibrage et plus l'indice vu par les différentes composantes du champ électrique va diminuer. Enfin, les composantes $\boldsymbol{\delta n_{xx}}$, $\boldsymbol{\delta n_{yy}}$, $\boldsymbol{\delta n_{zz}}$ ne sont pratiquement pas affectées dans la gaine extérieure dans le tube et dans la recharge. Ce comportement provient de la combinaison de deux facteurs : les valeurs de E, ν, α et η sont inchangées dans ces trois couches pour les cinq profils et leurs dimensions sont supérieures à celles du cœur. Ces deux facteurs confèrent à ces trois couches une rigidité constante et supérieure à celle du cœur. Les déplacements engendrés dans le cœur affectent donc peu l'état mécanique des couches adjacentes.
- Enfin, la différence $\boldsymbol{\delta n_{xx}}$-$\boldsymbol{\delta n_{yy}}$ évolue de façon notable dans le cœur et n'est pratiquement pas affectée dans les autres couches. On peut constater sur la *figure II.37* que cette différence augmente de façon linéaire lorsque la différence d'indice entre le cœur et la gaine augmente. L'augmentation linéaire du coefficient de dilatation avec le dopage (*figure II.31*) peut, ici aussi, expliquer ce comportement.

Les figures suivantes représentent l'effet de l'adjonction d'une couche supplémentaire, la gaine intérieure, sur les contraintes et sur l'anisotropie. Les caractéristiques de cette couche sont résumées dans le *tableau II.3*. Les matériaux des autres couches, cœur, gaine externe, tube et recharge possèdent les même caractéristiques que les profils échelons correspondants.

	E (MPa)	υ	α(K^{-1})	log(η) : [A, B, C]
Gaine intérieure	37.3×10^{3}	0.1532	2.62×10^{-6}	[-5.1, 24197,-401]

tableau II.3 : caractéristiques des matériaux dans la gaine intérieure

Les *figures II.38*, *II.39*, *II.40* représentent les corrections δn_{xx}, δn_{zz} et la différence δn_{xx}-δn_{yy} calculées sur chacun des profils W. On peut constater que les comportements observés sur les profils échelons se réitèrent sur les profils W, i.e. la composante croisée δn_{xy} est très inférieure presque partout aux composantes diagonales δn_{xx}, δn_{yy} et δn_{zz}, et le module de chaque composante augmente linéairement lorsque la différence d'indice entre le cœur et la gaine augmente. On peut constater cependant que la composante croisée n'est non nulle que dans la gaine intérieure. Enfin la différence principale avec les profils échelons réside dans l'amplitude des corrections sur l'indice. Celles ci sont en effet supérieures sur les profils échelons.

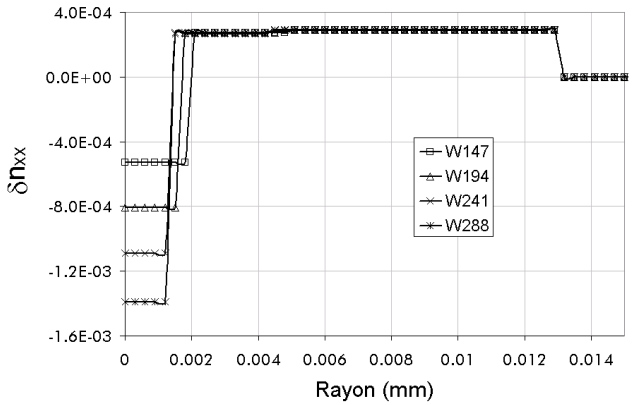

figure II.38 : évolution de δn_{xx} en fonction du rayon pour quatre profils W

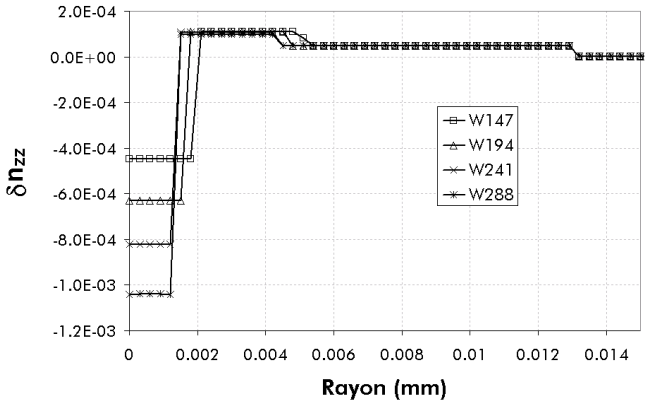

figure II.39 : évolution de δn_{zz} en fonction du rayon pour quatre profils W

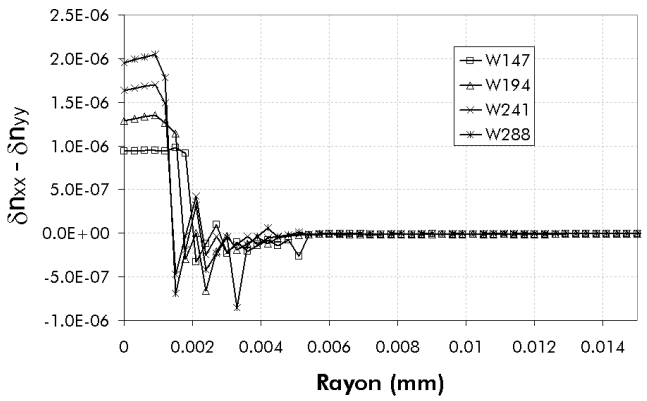

figure II.40 : évolution de δn_{xx}–δn_{yy} en fonction du rayon pour quatre profils W

Sur la *figure II.41* et sur la *figure II.42* nous avons comparé respectivement la différence δn_{xx}-δn_{yy} et la composante δn_{zz} sur le profil échelon E147 et sur le profil correspondant W147. On peut constater, sur les deux figures, que les corrections à l'indice sont moins importantes sur le profil W. La gaine intérieure, qui est moins visqueuse, moins rigide et se dilate moins que les autres couches, semble jouer le rôle de tampon vis à vis des déplacements et des contraintes imposées par les couches extérieures ce qui diminuerait l'amplitude des contraintes dans le cœur.

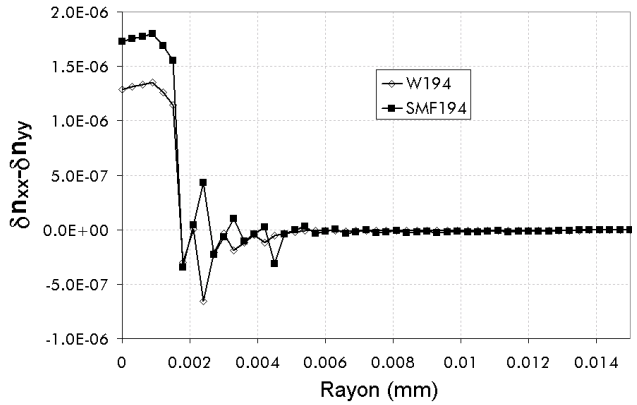

figure II.41 : comparaison de δn_{xx} – δn_{yy} sur profil échelon et profil W

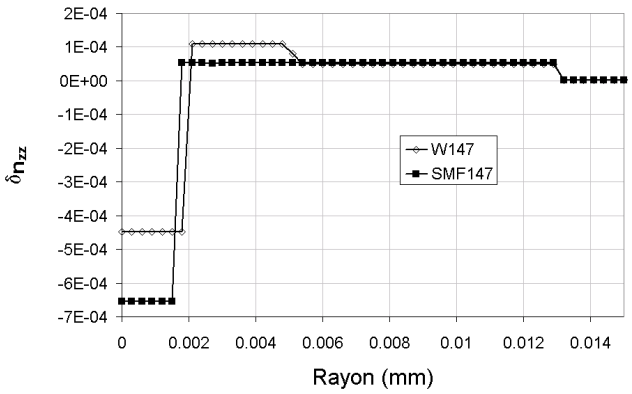

figure II.42 : comparaison de δn_{zz} sur profil échelon et profil W

1.5 Conclusion du § 1

Le fibrage est un processus complexe impliquant de nombreux phénomènes thermomécaniques. Cette complexité est accentuée par le comportement rhéologique singulier du verre. L'importance des déplacements et des variations de température lors du processus de fibrage conduit à l'apparition de contraintes résiduelles. De façon simplifiée, les conditions d'apparition de ces contraintes correspondent à des désaccords des coefficients d'expansion thermique et des coefficients de viscosité des différentes couches. Couplés à un fort gradient de température et à la tension de fibrage, ces désaccords conduisent à l'apparition d'un champ de contraintes résiduel. Les désaccords entre les coefficients d'expansion thermique et les coefficients de viscosité conduisent respectivement à des composantes globalement positives et négatives[21]. Du point de vue de la littérature, lorsqu'on étudie l'effet d'une non circularité d'indice sur le tenseur des contraintes, on néglige les composantes mécaniques. Des modèles analytiques montrent que dans une fibre à échelon d'indice, la différence $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ augmente de façon linéaire avec l'ellipticité pour des faibles ellipticités et pour des petits cœurs. Pour des profils plus élaborés, i.e. pour des fibres possédant un nombre de tranche plus élevée :

- les valeurs globales des contraintes augmentent avec le dopage.
- la complexité de la distribution de la composante croisée σ_{xy} augmente avec le nombre de tranches.

Nous avons utilisé une méthode par éléments finis pour calculer le tenseur des contraintes et surtout l'anisotropie dans des fibres à profil échelon et à profil W engendré lors de l'étirage d'une fibre optique. Notre contribution se résume en deux points :

1) *Nous avons, dans un premier temps, étudié l'effet de l'ellipticité sur les contraintes au centre d'un profil échelon composé de deux régions, afin de comprendre pourquoi seule la composante thermique était étudiée dans la littérature quand il s'agissait de calculer l'anisotropie dans une fibre optique. Nous avons pu constater, d'une part, que les composantes diagonales transverses évoluaient linéairement avec l'ellipticité sur un profil simple, et d'autre part, que la tension de fibrage influait peu sur la différence* σ_{xx}-σ_{yy} *Ce dernier point justifie, au moins sur un profil très simple et pour les ellipticité envisagées, l'étude des contraintes d'origine thermique uniquement. Nous avons noté que la pente de cette évolution était différente de celle calculée avec les expressions analytiques données par [Chu82] et [Tsai]. Ce point nécessiterait des études supplémentaires afin d'évaluer les domaines de validité des modèles utilisés dans la littérature et du modèle que nous avons utilisé. Néanmoins, nous pensons que l'hypothèse des déformations planes n'est pas adaptée pour l'étude d'un cône de fibrage soumis à une force de traction. De plus, la tension de fibrage est un paramètre clé puisque d'une part elle affecte de façon notable la composante* σ_{zz}, *et d'autre part cette composante intervient dans le calcul des corrections de*

[21] Matériau respectivement en extension et en compression

toutes les composantes diagonales du tenseur des indices (équation II.3, § 1). Un calcul précis du tenseur des indices implique donc la prise en compte de la tension de fibrage.

2) *Nous avons ensuite étudié l'anisotropie engendrée dans des fibres de géométrie et de composition plus conforme à la réalité, fibre de type échelon et W, en fixant l'ellipticité à 1% et en faisant varier la différence d'indice dans le cœur. Nous avons décidé de considérer les valeurs moyennées sur l'angle des différentes composantes du tenseur des contraintes afin de nous ramener à des grandeurs ne dépendant que du rayon dans la fibre. Nous avons pu constater que l'amplitude des différentes corrections de l'indice augmente avec la différence d'indice entre le cœur et la gaine. Les composantes diagonales de ce tenseur sont presque partout très supérieures à la composante croisée qui a donc été négligée. Des résultats similaires sont obtenus sur le profil W qui présente cependant une anisotropie beaucoup moins importante que le profil échelon. Ce comportement semblant provenir de la gaine intérieure, de rigidité faible, qui jouerait le rôle de couche tampon face aux couches externes dont les rigidités sont plus importantes (gaine extérieure, tube et recharge).*

Nous allons dans le paragraphe suivant, étudier l'effet de l'anisotropie sur la propagation, en nous intéressant particulièrement au calcul de la biréfringence dans une fibre faiblement elliptique et faiblement anisotrope.

2 Calcul de la biréfringence de phase et de groupe

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé l'anisotropie résultant de la présence de contraintes résiduelles dans la fibre optique. Nous allons dans ce paragraphe utiliser cette anisotropie comme donnée d'entrée pour le calcul de la biréfringence intrinsèque. Deux méthodes sont envisagées dans la littérature afin d'appréhender les effets de forme et de contrainte :

- La première méthode, exposée au paragraphe 2.1, est approximative et consiste à séparer les effets de forme et de contrainte. La biréfringence est alors la somme d'un terme de forme et d'un terme de contrainte : $\Delta\beta = \Delta\beta_{forme} + \Delta\beta_{contrainte}$, chaque terme étant évalué indépendamment de l'autre [Rashleigh, Sakai81-Sakai82, Eickhoff81-82].
- La seconde méthode, exposée au paragraphe 2.2, consiste à prendre en compte les effets de forme et de contrainte de façon simultanée [Fontaine93-96, Chowdhury00] : La biréfringence est le résultat de la résolution des équations de Maxwell avec le tenseur permittivité (*équation II.2*, §1, Chapitre II) pour donnée d'entrée.

2.1 Modèle découplé

La biréfringence de phase est la somme d'un terme de contrainte $\Delta\beta_c$ et d'un terme de forme $\Delta\beta_f$: $\Delta\beta = \Delta\beta_f + \Delta\beta_c$. Par conséquent, la biréfringence de groupe est la somme de la biréfringence de groupe due aux effets de forme et de la biréfringence de groupe due aux effets de contrainte :

$$\Delta\tau = \Delta\tau_f + \Delta\tau_c$$

équation II.17

$\Delta\beta_f$ peut être évalué par perturbation [Sammut, Tjaden, Skorobogatiy02-03, Chowdhury95], ou par des méthodes de résolution numériques des équations de propagation [Vengsarkar92-93, Fontaine93-96]. Deux approches sont généralement utilisées pour évaluer $\Delta\beta_c$. Dans la première, on ne tient pas compte de la distribution du champ sur la section de la fibre. La biréfringence de contrainte est alors simplement proportionnelle à l'anisotropie locale évaluée au centre de la fibre. La biréfringence de groupe correspondante est indépendante de la fréquence [Eickhoff81]. Dans la seconde, le champ électrique, calculé sur une fibre isotrope et circulaire, joue le rôle de facteur de pondération de l'anisotropie locale [Sakai82]. La dépendance de la biréfringence de groupe avec la fréquence devient par conséquent plus complexe. Nous exposons dans le paragraphe 2.1.1 les techniques de calcul de la biréfringence de forme, nous poursuivons au 2.1.2 par le calcul de la biréfringence de contrainte.

2.1.1 Calcul de la biréfringence de forme

La biréfringence de forme est la conséquence d'imperfections géométriques du profil d'indice engendrées lors de la fabrication. On retient principalement la non-circularité du profil d'indice et son

excentrement. Nous décrivons successivement des méthodes exactes de calcul de la biréfringence puis des méthodes perturbatives.

Les équations de propagation pour le champ électrique $\vec{E}$ et pour le champ magnétique $\vec{H}$ prennent la forme suivante dans un milieu isotrope [Snyder83a]:

$$\nabla^2\vec{E} + k^2 n^2 \vec{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) \qquad \vec{\nabla}\times\left\{n^{-2}\vec{\nabla}\times\vec{H}\right\} = k^2\vec{H}$$

équation II.18

Les méthodes de résolution numériques sont exactes au sens où elles permettent de résoudre ces équations sans faire d'approximation. L'une des plus utilisée dans le domaine de la propagation d'onde guidée est la méthode des éléments finis [Fontaine93-96], [Silvester]. Celle-ci est particulièrement indiquée pour des problèmes impliquant des géométries et des variations d'indices compliquées. Elle a été appliquée à des fibres elliptiques [Fontaine93-96], ainsi qu'à des fibres à cristaux photoniques [Peyrilloux].

Les autres méthodes de résolution numériques sont appelées méthodes modales. Les champs électriques et magnétiques sont ici développés sur une base de solutions orthogonales que l'on sait calculer aisément. Cette décomposition est ensuite injectée dans les équations de propagation. A l'aide des relations d'orthonormalisation des solutions connues, on ramène le problème à une équation aux valeurs propres algébriques. [Vengsarkar92-93] et [Silvestre] utilisent cette technique en développant les composantes transverses du champ électromagnétique, pour un profil quelconque, $(\vec{E}_t, \vec{H}_t)$, sur l'ensemble des solutions propres pour un profil échelon circulaire, $(\vec{E}_{ti}, \vec{H}_{ti})$. Le calcul de biréfringence est appliquée aux fibres de compensation de dispersion [Vengsarkar93] et aux fibres PCF [Silvestre]. Une bonne concordance entre la méthode des éléments finis et la méthode modale a été démontrée [Fontaine95]. Les méthodes numériques sont donc des méthodes puissantes de par l'étendue des types de fibres et des géométries que l'on peut aborder. Ce sont également des méthodes de résolution exactes, au sens où aucune hypothèse n'est effectuée sur le problème que l'on souhaite traiter. Ces méthodes sont néanmoins complexes à mettre en œuvre et très coûteuses en temps de calcul. Il est par conséquent difficile d'en extraire des informations qualitatives sur le comportement de la solution vis à vis des paramètres caractéristiques du problème étudié. Nous abordons donc dans la suite, des méthodes semi-analytiques : les méthodes perturbatives.

Les méthodes perturbatives [Cohen-Tannoudji] permettent d'obtenir des solutions approchées de problèmes dont on ne peut pas déterminer les solutions exactes de façons analytiques. Elles sont applicables lorsque l'opérateur différentiel $\hat{H}$, associé à l'équation de propagation exacte, peut se décomposer sous la forme de la somme d'un opérateur différentiel dont on connaît les solutions, que nous appellerons $\hat{H}_o$, et d'un opérateur différentiel perturbateur, que nous appellerons $\hat{W}$. Les solutions propres de $\hat{H}^o$ sont connues, nous les notons ici $\vec{V}_n^{oi}$ et β_n : $H^o\vec{V}_n^{oi} = \beta_n\vec{V}_n^{oi}$, l'indice i servant à différencier l'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre. $\hat{W}$ est supposé petit devant $\hat{H}^o$, c'est l'élément perturbateur. Si on s'intéresse à un vecteur propre non

dégénéré $\vec{V}_n^o$ de $\hat{H}^o$ associés à la valeur propre β_n^0, les solutions propres β_n et $\vec{V}_n$ de $\hat{H}$ sont données à l'ordre 1 en $\hat{W}$ par :

$$\beta_n = \beta_n^o + \frac{\left\langle \vec{V}_n^o \cdot \hat{W}\vec{V}_n^o \right\rangle}{\left\langle \vec{V}_n^o \cdot \vec{V}_n^o \right\rangle} \text{ et } \vec{V}_n = \vec{V}_n^o + \sum_{p \neq n} \sum_i \frac{\left\langle \vec{V}_p^{oi} \cdot \hat{W}\vec{V}_n^o \right\rangle}{\beta_p^o - \beta_n^o} \vec{V}_p^{oi}$$

équation II.19

où $\langle \cdot \rangle$ est le produit scalaire défini de telle sorte que $\left\langle \vec{V}_n \cdot \vec{V}_n \right\rangle$ représente l'énergie transportée par le mode d'ordre n. Les $\vec{V}_p^{oi}$ représentent les modes d'ordre p de l'opérateur $\hat{H}^o$. Lorsque la constante de propagation du mode d'ordre n est dégénérée, plusieurs modes vérifient l'équation aux valeurs propres associées à $\hat{H}^o$. On montre que dans ce cas, $\vec{V}_n^o$ doit être remplacé dans l'*équation II.19* par les vecteurs propres de la matrice **W**, dont les éléments sont donnés par $\mathbf{W}_{ij} = \left\langle \vec{V}_n^{oi} \cdot \hat{W}\vec{V}_n^{oj} \right\rangle$, où i et j parcourent l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre β_n^o. Les corrections à β_n^o sont alors données par les valeurs propres de matrice **W**. Dans le cas non dégénéré comme dans le cas dégénéré, la méthode des perturbations permet d'évaluer, analytiquement ou semi-analytiquement, l'effet d'une faible perturbation sur un problème que l'on peut aisément résoudre à l'origine.

Les éléments perturbateurs des équations de propagation dans le domaine des fibres de télécommunication, sont l'ellipticité e^2 et éventuellement le paramètre $\Delta = \left(n_c^2 - n_g^2\right)/2n_c^2$ où n_c et n_g sont les indices respectifs du cœur et de la gaine. L'ellipticité est définie, ici, comme le rapport $(a-b)/(a+b)$, où a et b représentent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Lorsque les deux paramètres sont faibles, i.e. $\Delta, e^2 < 5\%$, ce qui est le cas pour les fibres de télécommunications traditionnelles, des méthodes de perturbation de l'équation de propagation scalaire sont utilisées pour calculer la biréfringence [Sammut, Snyder83a, Tjaden]. Pour des valeurs plus élevées de la différence d'indice entre le coeur et la gaine, des méthodes de perturbation de l'équation vectorielle de propagation sont nécessaires pour calculer la biréfringence [Chowdhury95, Skorobogatiy02-03].

Le point de départ de la méthode de Sammut [Sammut] est l'équation de propagation pour les composantes transverses du champ :

$$\left\{\nabla_t^2 + n(r,\theta)^2 k^2 - \beta^2\right\}\vec{E}_t + \vec{\nabla}_t\left(\vec{E}_t.\vec{\nabla}_t \ln n(r,\theta)^2\right) = 0$$

équation II.20

Le découplage entre les composantes transverses et la composante longitudinale est toujours possible lorsque le milieu est invariant par translation selon l'axe de propagation [Snyder83a]. Cette équation de propagation est la somme de l'équation scalaire et d'un terme en gradient provoquant un couplage entre la polarisation du mode et la structure géométrique du guide (présence d'un gradient d'indice et non circularité de la fibre). Lorsque l'on néglige ce terme, on se réduit à l'équation scalaire. Le terme en

gradient est donc à l'origine des effets de polarisation dans les fibres sans anisotropie de matériau. Il est responsable, en particulier, de la courbure des lignes de champ que l'on observe sur la *figure II.2*. Lorsque le profil de la fibre est non circulaire, ce terme donne ainsi naissance à la biréfringence. En écrivant l'indice $n(r,\theta)$ sous la forme $n(r,\theta) = n_{coeur}^2(1-2\Delta f(r,\theta))$, où la fonction $f(r,\theta)$ décrit l'évolution radiale et angulaire de l'indice, on obtient l'*équation II.21* :

$$\left\{\nabla_t^2 + n(r,\theta)^2 k^2 - \beta^2\right\}\vec{E}_t - 2\Delta\vec{\nabla}_t\left(\vec{E}_t.\vec{\nabla}_t f(r,\theta)\right) = 0$$

équation II.21

Dans l'approximation de faible guidage, le paramètre Δ est petit devant un, ce qui permet de considérer le terme vectoriel comme un terme perturbateur. On associe alors $\hat{H}^o$ à l'équation scalaire, et $\hat{W}$ au terme vectoriel. Nous nous intéressons ici au mode fondamental, ou mode d'ordre 0. Ce mode est une solution dégénérée deux fois de l'équation scalaire. La biréfringence du mode fondamental est représentée par la levée de dégénérescence induite par le terme perturbateur en gradient, elle est déterminée par l'expression suivante [Snyder83a, Sammut] :

$$\Delta\beta = \frac{\Delta}{\langle\phi(r,\theta)\cdot\phi(r,\theta)\rangle\beta_s}\left(\left(\mathbf{W}_{xx} - \mathbf{W}_{yy}\right)^2 + 4\mathbf{W}_{xy}^2\right)^{1/2}$$

équation II.22

où $\mathbf{W}_{ij} = -\left\langle\vec{E}_i^s\cdot\vec{\nabla}_t\left(\vec{\nabla}_t f(r,\theta)\cdot\vec{E}_j^s\right)\right\rangle$, β_s est la constante de propagation scalaire, et les $\vec{E}_i^s = \phi(r,\theta)\vec{i}$ avec i =x ou y sont tels que $\phi(r,\theta)$ est la solution de l'équation scalaire pour l'indice $n(r,\theta)$. Le produit scalaire des fonctions g et h est ici défini par $\langle gh\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} fgdxdy$.

L'*équation II.22* dépend des solutions scalaires pour le profil $n(r,\theta)$. Si ce dernier est faiblement non circulaire, i.e. si $f(r,\theta) = f^o(r) + f^1(r,\theta)$, où $f^1(r,\theta) << f^o(r)$ représente l'écart à la circularité, la partie scalaire de l'équation transverse se met sous la forme d'un terme circulaire et d'un terme perturbateur [Sammut] :

$$\left\{\nabla_t^2 + k^2 n(r)^2 - \beta^2\right\}\phi(r,\theta) - 2\Delta k^2 n_{coeur}^2 f^1(r,\theta)\phi(r,\theta) = 0$$

équation II.23

En utilisant l'*équation II.22* avec $\hat{W} = -2\Delta k^2 n_{coeur}^2 f^1(r,\theta)$, on obtient des solutions propres de l'*équation II.23* à l'ordre 1 en $\hat{W}$:

$$\phi(r,\theta)\vec{i} = \phi^o(r)\vec{i} + \sum_{q>0}\frac{\left\langle\phi^q\cdot\hat{W}\phi^o\right\rangle}{\beta_o^2 - \beta_q^2}\phi^q\vec{i}$$

équation II.24

où q est l'ensemble des indices permettant de repérer les solutions propres, ϕ^q, de l'équation scalaire pour un profil circulaire[22]. Connaissant les ϕ^q, on peut calculer la biréfringence pour un profil faiblement elliptique à l'aide de l'*équation II.22* et de l'*équation II.24*.

L'avantage de cette méthode repose sur le fait que la résolution de l'équation scalaire pour un profil d'indice circulaire est très rapide. Elle est en revanche restreinte à des problèmes impliquant à la fois des faibles gradients d'indice et des faibles circularités ce qui est acceptable lorsqu'on s'intéresse aux fibres de télécommunication.

Dans la méthode précédente, l'effet de la non circularité est inclus implicitement dans les solutions scalaires de l'équation transverse. Elle suppose donc le terme vectoriel comme une perturbation vis à vis des éventuels écarts de la fibre à la circularité. Dans la référence [Chowdhury95], une démarche plus précise est utilisée : on suppose que l'écart à la circularité est une perturbation de l'équation vectorielle transverse pour un profil circulaire :

$$\underbrace{\left\{\nabla_t^2 + n(r)^2 k^2 - \beta^2\right\}\vec{E}_t + \vec{\nabla}_t\left(\vec{E}_t.\vec{\nabla}_t \ln n(r)^2\right)}_{\hat{H}^o\vec{E}_t} + \underbrace{2\Delta\left[k^2 n(r)^2 f(r,\theta)\vec{E}_t + \vec{\nabla}_t\left(\vec{E}_t \cdot \vec{\nabla}_t f(r,\theta)\right)\right]}_{\hat{W}\vec{E}_t} = 0$$

équation II.25

On associe le terme de droite au terme perturbateur de l'équation de propagation transverse pour un profil circulaire, cette dernière étant représentée par le terme de gauche. Les corrections à la constante de propagation sont obtenues à partir des valeurs propres de la matrice $\mathbf{W}$ dont les éléments $\mathbf{W}_{ij}$ sont obtenus grâce à l'*équation II.25* et grâce aux solutions de l'équation de propagation vectorielle pour i=x et y pour un profil circulaire :

$$\mathbf{W}_{ij} = -2\Delta\int_0^\infty\int_0^\infty \vec{E}_i \cdot \left[k^2 n(r)^2 f(r,\theta)\vec{E}_j + \vec{\nabla}_t\left(\vec{E}_j \cdot \vec{\nabla}_t f(r,\theta)\right)\right] ds$$

équation II.26

La méthode proposée par Skorobogatiy [Skorobogatiy02-03] repose sur le fait que les techniques de perturbation précédentes ne permettent pas de traiter les structures guidantes contenant des sauts d'indice abrupts et importants. Les modes propres de la structure circulaire ne constituent pas , en effet, une base adéquate pour décrire les larges variations des solutions réelles dans les régions perturbées du profil d'indice. La méthode proposée dans [Skorobogatiy02-03] consiste à effectuer un changement de coordonnées permettant de transformer le profil d'indice de forme quelconque en un profil d'indice de forme circulaire. Cette transformation des coordonnées est insérée dans les équations de Maxwell ce qui modifie leur forme. Cette modification est ensuite traitée comme une perturbation vis à vis des équations de Maxwell usuelles. Aux techniques traditionnelles consistant à trouver des nouvelles solutions sur une structure dont les interfaces "diélectriques" ont été modifiées, on substitue

---

[22] $\phi^q(r,\theta) = R_m(\beta_n, r)\Theta_{sm}(\theta)$, où $R_m(\beta_n, r)$ est la solution radiale de l'équation de propagation scalaire pour un profil circulaire ; $\Theta_{sm}(\theta) = \cos m\theta$ si s=1 et $\Theta_{sm}(\theta) = \sin m\theta$ si s=-1 où θ est l'angle polaire dans la section de la fibre ; ainsi q=(m, n, s), où m est le numéro azimutal du mode, n le numéro radial et s permet de différencier les solutions paires et impaires en θ.

une technique consistant à trouver les solutions d'une structure dont les interfaces "diélectriques" restent inchangées (structure circulaire) mais décrite par des équations légèrement modifiées. Sans rentrer dans le détail des calculs, la biréfringence pour un profil d'indice légèrement élliptique est donnée dans ce formalisme pour le mode HE_{11} par l'expression suivante :

$$\Delta\beta = \frac{e^2}{2}\frac{\omega}{c}\int\left[\left(-n(r)^2|E_z|^2 + |H_z|^2\right) + 2\,Im\left(n(r)^2 E_r^* E_\theta - H_r^* H_\theta\right)\right]dr$$

équation II.27

où E_r, E_θ, E_z, H_r, H_θ, H_z sont respectivement les coordonnées cylindriques du champ électrique et magnétique des équations non modifiées ; E_r^*, H_r^* sont les complexes conjugués de E_r et H_r ; Im() représente la partie imaginaire. [Skorobogatiy02] montre en particulier, à l'aide de ce modèle, que pour les fibres à fortes différences d'indice entre le cœur et la gaine, i.e. $\Delta > 10\%$ dans l'article, la PMD de forme est proportionnelle à la dispersion chromatique. La corrélation entre ces deux grandeurs est d'autant plus importante que Δ augmente. Soulignons que ce comportement a été observé sur des fibres de type spécial[23] [Nouchi] possédant des valeurs du paramètre Δ beaucoup moins importantes ($\Delta \approx 0.03$), grâce au modèle scalaire développé par [Sammut].

2.1.2 Calcul de la biréfringence de contrainte

Les effets de la dilatation thermique sur la biréfringence ont été étudiés de nombreuses fois dans la littérature [Kaminov, Rashleigh, Chu82-84, Eickhoff81-82]. Le modèle le plus simple consiste à confondre $\Delta\beta_c$ et l'anisotropie locale au centre de la fibre [Kaminov] , i.e. $\Delta\beta_c = \frac{\omega}{c}(n_x - n_y)$. L'anisotropie est évaluée grâce aux composantes selon x et y du tenseur des contraintes. Cette procédure est appliquée par [Chu82] sur la fibre à échelon d'indice présentée au paragraphe 1.3.1 :

$$\Delta\beta_c = (C_1 - C_2)\frac{E}{1-\nu}\frac{a-b}{a+b}\Delta\alpha\Delta T \cdot \frac{\omega}{c}$$

équation II.28

Dans ce modèle simple (la répartition du champ sur la section de la fibre n'est pas prise en compte), la biréfringence de contrainte dépend linéairement de ω. La biréfringence de groupe globale est obtenue par un déplacement de la biréfringence de groupe engendrée par les effets de forme d'une quantité proportionnelle à l'ellipticité et indépendante de la fréquence.

Un modèle plus raffiné [Sakai82] consiste à prendre en compte la répartition du champ scalaire sur la section de la fibre. Dans une fibre à échelon d'indice à cœur elliptique et gaine circulaire, [Sakai82] obtient la biréfringence par une méthode de couplage de mode [Marcuse]. La prise en compte de la

[23] Par fibres de type spécial nous entendons des fibres à profils particuliers dont nous ne pouvons préciser la structure pour des raisons de confidentialité. Ces fibres possèdent la particularité d'avoir des différences d'indice cœur/gaine très importantes.

répartition du champ a pour conséquence de modifier l'évolution linéaire de la biréfringence de phase avec la fréquence observée avec le modèle précédent.
L'hypothèse de découplage entre les composantes de forme et de contrainte de la biréfringence est séduisante car elle conduit à une forme simple et aisément calculable de la biréfringence de groupe. Cette hypothèse permet pour certains type de fibre de différencier expérimentalement les effets de forme et de contrainte [Eickhoff81]. Dans les fibres de télécommunication, de nombreux profils d'indice présentent des variations d'indice plus complexes que le profil échelon, rendant encore plus complexe la dépendance fréquentielle du champ avec la fréquence. Nous allons voir dans le paragraphe suivant, qu'un modèle traitant les effets de contrainte et les effets de forme de façon simultanée, conduit à des valeurs différentes de celles obtenues avec le modèle présenté dans ce paragraphe.

2.2 Modèle couplé

Dans cette approche, les contributions des effets de forme et de contrainte [Fontaine94-96] sont prises en compte simultanément. La donnée d'entrée du calcul de la biréfringence de phase et de groupe est le tenseur permittivité de la fibre anisotrope. Une première approche consiste à résoudre les équations de propagation par éléments finis en n'effectuant aucune hypothèse sur l'importance de l'anisotropie et de la non circularité du profil d'indice. Cette méthode permet en particulier de traiter des fibres possédant une forte ellipticité. Les méthodes par éléments finis ont été appliquées à des fibres optiques anisotropes [Fontaine94-96], dont le champ des contraintes provient des effets de dilatations thermiques [Tsai]. L'auteur montre numériquement que l'hypothèse d'un découplage entre biréfringences de forme et de contrainte n'est pas raisonnable sur les fibres à très hautes biréfringences.
La seconde approche, consiste à considérer l'anisotropie et la non circularité comme une perturbation d'un profil d'indice circulaire dans une fibre isotrope. La méthode proposée par [Chowdhury00] est similaire à celle présentée au paragraphe de calcul de la biréfringence de forme. La non circularité du profil d'indice et l'anisotropie sont ici prises en compte grâce à l'équation. La perturbation est définie par $\delta\varepsilon(r,\theta) = \varepsilon(r,\theta) - \varepsilon(r)$ où $\varepsilon(r)$ est la permittivité de la fibre circulaire et isotrope. La méthode de calcul est un peu différente d'une technique de perturbation traditionnelle, mais semble se ramener à une généralisation du traitement effectué par Skorobogatiy [Skorobogatiy02-03] à des permittivités anisotropes. Sans rentrer dans le détail des calculs, les corrections de la constante de propagation sont données par les valeurs propres de la matrice **W,** dont les éléments de matrice $\mathbf{W}_{ij}$, pour i, j=x ou y, sont donnés par :

$$\mathbf{W}_{ij} = \omega \frac{\int_S \vec{E}_i^{\,*} \cdot \delta\varepsilon(r,\theta)\vec{E}_j \, ds}{\iint_S \left(\vec{E}_i^{\,*} \times \vec{H}_i + \vec{E}_i \times \vec{H}_i^{\,*}\right) \cdot \vec{e}_z \, dxdy}$$

équation II.29

La différence entre les valeurs propres correspondantes permet d'obtenir la biréfringence en milieu anisotrope. En utilisant cette méthode sur une fibre SMF et une fibre NZDSF, dont les profils radiaux

sont représentés sur la *figure II.43*, l'auteur évalue la biréfringence de forme et la biréfringence totale sur chacun des deux profils pour une ellipticité de 5 %. Les composantes thermiques des contraintes sont calculées à partir de la résolution de l'équation d'équilibre au paragraphe 1.3.1. Les résultats sont représentés dans le *tableau II.4*.

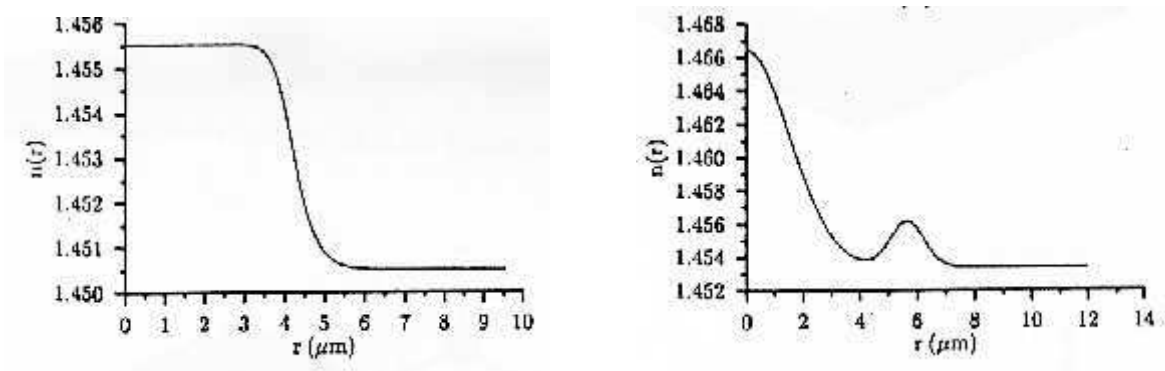

figure II.43 : Profil d'indice utilisé pour le calcul de la biréfringence: Fibre SMF (a) et NZDSF (b).

	Δn_{eff_forme}	Δn_{eff_cont}	$\Delta\beta_{m\,forme}$	$\Delta\beta_{m\,cont}$
SMF	1.5×10^{-5}	3×10^{-5}	1.19	4.2
NZDSF	3.9×10^{-5}	7.6×10^{-5}	6	15.1

tableau II.4 : Calcul de la biréfringence et du DGD linéaire pour un milieu avec et sans contrainte.

Nous rappelons, d'une part, que les contraintes calculées pour le profil NZDSF sont en moyenne deux fois plus importantes que celles calculées pour le profil SMF, et d'autre part, que la répartition géométrique de la composante croisée du tenseur des contraintes est plus complexe pour le profil NZDSF (cf paragraphe 1.3.1). On constate néanmoins que la biréfringence augmente d'un facteur deux sur les deux profils lorsque les contraintes sont prises en compte. En revanche la biréfringence de groupe augmente d'un facteur 4 sur le profil SMF comparé au facteur 2.6 dans la fibre NZDSF. Etant donné que la biréfringence de forme est plus importante dans le profil NZDSF, il semble que la contribution relative des contraintes dans la fibre NZDSF est moins importante que dans la fibre SMF.

2.3 Conclusion du paragraphe

Nous avons présenté dans ce paragraphe, les techniques de calcul de la biréfringence de phase et de groupe dans une fibre de télécommunication. Différentes approches sont utilisées afin d'appréhender les effets de contrainte, et les effets de forme. La première solution consiste à découpler les effets de forme et de contrainte, tandis que la seconde consiste à les prendre en compte de façon simultanée. Du point de vue expérimental, nous mentionnons les résultat de [Legré]. La conclusion de ses travaux semble renforcer l'idée qu'en ce qui concerne les fibres "conventionnelles" les effets de forme et de contrainte doivent être appréhendés de façon simultanée.

2.4 Calcul de la biréfringence de phase et de groupe dans une fibre anisotrope : utilisation de méthodes de perturbation de l'équation scalaire

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'utiliser une méthode perturbatrice de l'équation scalaire de propagation afin de calculer la biréfringence dans une fibre faiblement elliptique et faiblement anisotrope. Nous présentons une première approche basée sur un traitement perturbatif séparé de l'ellipticité et des termes vectoriels, puis une seconde approche où nous traitons ces termes simultanément. N'ayant pas eu le temps de mettre en œuvre ces méthodes numériquement, nous utiliserons les résultats du § 1.4 en comparant la biréfringence de forme isotrope évaluée sur les différents profils échelon et W utilisés au § 1.4 et la biréfringence scalaire calculé à partir de ces mêmes profils mais modifiés par l'anisotropie.

2.4.1 Modèles de calcul

La méthode de perturbation de l'équation scalaire présentée au § 2.1.1 est étendue dans ce chapitre à des fibres présentant un profil de contrainte non-circulaire. Le calcul démarre à partir de l'équation d'onde du champ électrique :

$$\left(\Delta^2 + k^2\varepsilon\right)\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)$$

équation II.30

Les trois composantes du champ sont reliées par la relation constitutive : $\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon\vec{E}) = 0$. En raison de l'invariance par translation selon z de la fibre, les composantes ε_{iz} pour i=x ou y sont nulles sur toute la section de la fibre. On sépare donc ε en une partir transverse ε_t et une partie axiale ε_z. L'hypothèse d'invariance axiale et la relation constitutive, permettent d'écrire l'équation d'onde du champ électrique sous la forme d'une équation de propagation pour la composante transverse du champ électrique $\vec{E}_t$:

$$\left(\Delta_t^2 + k^2\varepsilon_t - \beta^2\right)\vec{E}_t = \vec{\nabla}_t\left(\vec{\nabla}_t\cdot\vec{E}_t - \frac{\vec{\nabla}_t\cdot\varepsilon_t\vec{E}_t}{\varepsilon_{zz}}\right) \textbf{ avec } \varepsilon_t = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}$$

équation II.31

Nous simplifions le problème en supposant qu'en chaque point de la section de la fibre les directions principales des contraintes du matériau sont alignées avec les axes de symétrie de la fibre [Fontaine96]. Cela se traduit par une permittivité diagonale sur toute la section de la fibre. Nous supposons de plus que les composantes ε_{xx} et ε_{yy} (que nous noterons désormais ε_x et ε_y) sont constantes dans chaque couche. Compte tenu des résultats du § 1.4, il semble légitime de faire ces hypothèses. Ces dernières nous permettent d'écrire le terme à droite de l'égalité dans l'*équation II.31* sous la forme $\vec{\nabla}_t\left(\vec{P}\cdot\vec{E}_t\right)$, où $\vec{P}\cdot\vec{E}_t = P_xE_x + P_yE_y$, et :

$$P_x E_x = \left[1 - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right]\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} E_x \frac{\partial \ln \varepsilon_x}{\partial x} \quad \textbf{et} \quad P_y E_y = \left[1 - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}\right]\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} E_y \frac{\partial \ln \varepsilon_y}{\partial y}$$

équation II.32

Nous allons dans les paragraphes suivant utiliser des hypothèses de faible guidage et de faible ellipticité pour chaque composante de ε, afin de traiter ce terme de façon perturbative. Deux approches peuvent être suivies. La première est basée sur une application de la méthode de [Sammut] à une fibre anisotrope faiblement ellitpique : le terme en gradient est considéré comme une perturbation de l'équation scalaire pour un profil faiblement anisotrope et elliptique. La seconde est basée sur la méthode d'Alexeyev [Alexeyev], le terme vectoriel et les termes proportionnels à l'ellipticité sont considérés comme des termes perturbateurs de l'équation scalaire pour un profil circulaire. Cette seconde méthode présente l'avantage de simplifier considérablement les calculs.

2.4.1.1 Perturbation de l'équation scalaire pour une fibre elliptique

On décrit le profil d'indice par une fonction f qui dépend des coordonnées transverses x et y : $\varepsilon_i = \varepsilon_{i1}(1 - 2\Delta_i f_i(x,y))$, où ε_{i1} représente la valeur maximale de la permittivité, elle est généralement obtenue dans le cœur. Le paramètre Δ_i est associé à la direction i. Sous l'hypothèse de faible guidage $\Delta_i << 1$, on peut effectuer des développements de Taylor au premier ordre en Δ_i des différentes composantes du tenseur ε. On obtient ainsi : $\varepsilon_i / \varepsilon_z \approx (\varepsilon_{i1} / \varepsilon_{z1})(1 - 2\delta_{iz})$ avec $\delta_{iz} = \Delta_i f_i - \Delta_z f_z$ et $(\partial \ln \varepsilon_i / \partial i) = -2\Delta_i(\partial f_i / \partial i)$, pour i=x ou y, ce qui conduit à l'expression suivante des $P_i E_i$:

$$P_i E_i = \left[1 - \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{z1}}(1 - 2\delta_{iz})\right]\frac{\partial E_i}{\partial i} - \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{z1}}(1 - 2\delta_{iz})\left(-2\Delta_i \frac{\partial f_i}{\partial i}\right)E_i$$

équation II.33

Nous ne retenons que les termes à l'ordre 1 en Δ_i et négligeons les termes proportionnels à δ_{iz} et obtenons les expressions finales des $P_i E_i$:

$$P_i E_i \approx \left[1 - \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{z1}}\right]\frac{\partial E_i}{\partial i} + 2\Delta_i \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{z1}} E_i \frac{\partial f_i}{\partial i} \quad \textbf{avec} \quad P_i \approx \left[1 - \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{z1}}\right]\frac{\partial}{\partial i} + 2\Delta_i \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{z1}}\frac{\partial f_i}{\partial i}$$

équation II.34

Comme $\varepsilon_{i1} \approx \varepsilon_{z1}$ et $\Delta_i << 1$, nous considérons $\vec{\nabla}_t(\vec{P} \cdot \vec{E}_t)$ comme un terme perturbateur de l'équation de propagation. L'équation de propagation se met alors sous la forme d'un terme scalaire (membre de gauche) et d'un terme vectoriel perturbateur (membre de droite) :

$$\underbrace{\left(\Delta_t^2 + k^2 \varepsilon_t - \beta^2\right)\vec{E}_t}_{H^\circ} = \underbrace{\vec{\nabla}_t(\vec{P} \cdot \vec{E}_t)}_{W}$$

équation II.35

Avant de calculer les corrections, nous devons nous intéresser aux solutions propres de la partie scalaire de l'équation de propagation. Dans un milieu dont la permittivité est décrite par un tenseur diagonal, la partie scalaire se réduit au système suivant :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\varepsilon_x(r,\theta)-\beta^2\right)E_x=0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\varepsilon_y(r,\theta)-\beta^2\right)E_y=0$$

équation II.36

A partir des hypothèses effectuées sur ε, ce système possède deux solutions : une pour laquelle $E_x=\phi_x$ et $E_y=0$, où ϕ_x est solution d'une équation scalaire pour le profil d'indice $n_x=\sqrt{\varepsilon_x}$, l'autre pour laquelle $E_x=0$ et $E_y=\phi_y$, où ϕ_y est solution d'une équation scalaire pour $n_y=\sqrt{\varepsilon_y}$. Ces deux solutions correspondent à deux modes propres de propagation dont les états de polarisation sont linéairement polarisés selon x et selon y. On peut donc conclure que les solutions propres de l'*équation II.36* sont non dégénérées : nous les notons β_x^s, $\vec{E}_x^s=\phi_x\vec{x}$, pour le mode polarisé selon x, et β_y^s, $\vec{E}_y^s=\phi_y\vec{y}$, pour le mode polarisé selon y [Snyder83b, Snyder86][24]. Nous écrivons les constantes de propagation, et la solution de l'équation de propagation transverse à l'ordre 1 en $\vec{P}$: $\beta_i=\beta_i^s+\beta_i^v$, $\vec{E}_t=\vec{E}_t^s+\vec{E}_t^v$, où β_i^s et $\vec{E}_t^s$ sont les solutions scalaires de l'équation de propagation pour le mode d'ordre 1. β_i^v et $\vec{E}_t^v$ sont les corrections apportées au solutions scalaires par le terme en gradient. On obtient l'expression de la correction de la constante de propagation scalaire selon l'axe x et selon l'axe y à l'aide de l'*équation II.37* :

$$\beta_i^v=-\frac{\left\langle\phi_i,\frac{\partial P_i\phi_i}{\partial i}\right\rangle}{2\beta_i^s\langle\phi_i,\phi_i\rangle}$$

équation II.37

En utilisant l'expression des P_i et en intégrant par partie, on obtient :

$$\beta_i^v=\frac{(1-d_i)\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial i}\right)^2dxdy-2\Delta_i d_i\int_0^\infty\int_0^\infty f_i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial i^2}dxdy}{2\beta_i^s N_i^o}$$

équation II.38

où nous avons introduit les notations $d_i=\varepsilon_{i1}/\varepsilon_{z1}$ et $N_i^o=\langle\phi_i,\phi_i\rangle$ représente la constante de normalisation du champ scalaire. Pour pouvoir calculer l'effet de la non circularité, il faut connaître les solutions scalaires ϕ_i, β_i^s pour un profil faiblement elliptique. Nous utilisons la méthode décrite au

[24] Lorsque les axes propres des différentes couches ne sont pas colinéaires, la direction du champ électrique associée à chaque mode propre peut varier en fonction de la position dans la section de la fibre

paragraphe § 2.1.1 et nous traitons l'ellipticité comme une perturbation. Le profil d'indice est décrit par une fonction f qui dépend des coordonnées cylindriques ρ et θ, $f_i(\rho,\theta) = f_i^o(\rho\sqrt{1-e^2\cos^2\theta})$ où ρ est le rayon normalisé de la fibre. La dépendance de $f_i^o(\rho,\theta)$ vis à vis des coordonnées cylindriques ρ et θ traduit une déformation du profil d'indice de géométrie initialement circulaire décrit par la fonction $f_i^o(r)$ en un profil d'indice de géométrie légèrement élliptique. Les géométries avant et après déformation sont représentées sur la *figure II.44*:

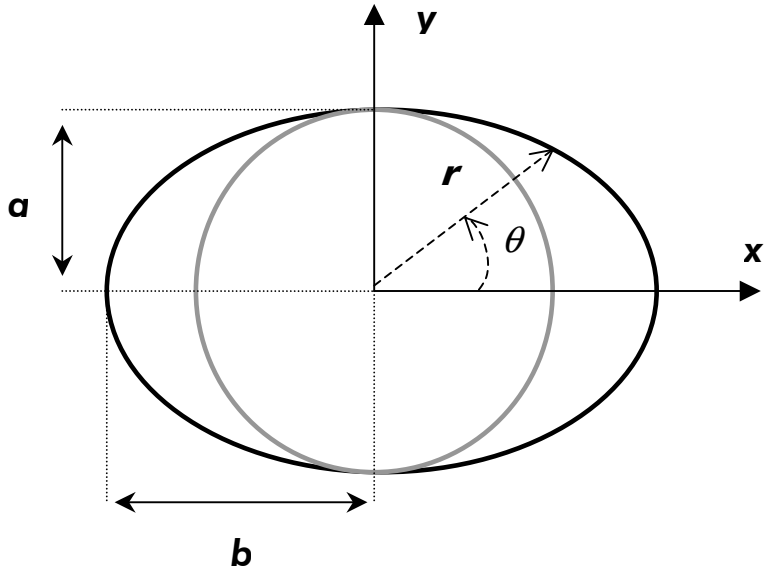

figure II.44 : profil d'indice circulaire (en gris) utilisé pour approcher le profil d'indice elliptique (en noir) : dans cette approche l'aire du profil elliptique est supérieure à l'aire du profil circulaire

L'hypothèse de faible ellipticité permet de développer f_i^o en fonction de e^2 :

$$f_i(\rho,\theta) = f_i^o(\rho) - e^2(\rho/2)\cos^2\theta(\partial f_i^o(\rho)/\partial\rho) = f_i^o(\rho) + e^2 f_i^e(\rho,\theta)$$

$f_i^o(\rho)$ est la fonction décrivant la distribution radiale de l'indice, i.e. $\varepsilon_i(\rho) = \varepsilon_{i1}(1-\Delta_i f_i^o(\rho))$, où ε_{i1} est la permittivité au centre de la fibre. Cette fonction doit être telle que $f_i^o(\rho) = 1$ dans la gaine, de sorte que $\varepsilon_i = \varepsilon_{i2}$, où ε_{i2} est la permittivité dans la gaine, et elle doit décrire des variations d'indice continues dans le cœur. $f_i^o(\rho)$ s'écrit donc sous la forme $f_i^o(\rho) = H(\rho-1) + g_i(\rho)H(1-\rho)$, où g est une fonction décrivant les variations d'indice continues dans le cœur et H est la fonction de Heaviside. A l'aide de cette expression, on obtient facilement la dérivée de la fonction f :

$$(\partial f_i^o(\rho)/\partial\rho) = (1-g_i(1))\delta(\rho-1) + (\partial g_i(\rho)/\partial\rho)H(1-\rho)$$

En utilisant les résultats du § 2.1.1, on obtient la constante de propagation à l'ordre 1 en e^2 :

$$\beta_i^s = \beta_i^{so} - e^2 k^2 n_{ci}^2 \Delta_i \frac{\langle \phi_i^o, f_i^e \phi_i^o \rangle}{4\langle \phi_i^o, \phi_i^o \rangle} \quad \text{avec} \quad i = x, y$$

équation II.39

Afin de calculer le champ scalaire, on utilise l'*équation II.19* avec l'expression précédente de f_i^e. Celle ci permet d'obtenir aisément la correction vectorielles dans la gaine puisque les solutions scalaires pour un profil circulaire y sont connues [Sammut]. Dans le cœur en revanche, cette approche conduit à une correction scalaire du champ s'écrivant sous la forme d'une somme infinie (cf [Sammut]). L'évaluation de cette somme posant des problèmes d'ordre numérique, il est plus simple de supposer que la correction scalaire possède la même forme que le terme perturbateur. Comme ce dernier est de la forme $f_i^e \propto -(\rho/2)(\partial f_i^o(\rho)/\partial\rho)(1+\cos 2\theta)$, on donne à la correction scalaire la forme $\phi_i^e(\rho,\theta) = F_{0i}(\rho) + F_{2i}(\rho)\cos(2\theta)$ [Sammut]. Les expressions des deux fonctions inconnues F_{0i}, F_{2i} sont obtenues en les insérant dans l'équation scalaire pour chaque axe propre (*équations II.36*). On montre alors que ces fonctions vérifient deux équations différentielles dans lesquelles n'interviennent que des fonctions exprimables à partir des solutions scalaires pour un profil circulaire :

$$\frac{\partial^2 F_{0_i}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_{0_i}}{\partial\rho} + a^2\left(k^2\varepsilon_i(r) - \beta_i^2\right)F_{0_i} + \left(\frac{8}{a^2}\beta_i^{se} + \frac{2a^2k^2\varepsilon_{ci}\Delta_i}{4}\rho\frac{\partial g_i}{\partial\rho}\right)\phi_i^o = 0$$
$$\frac{\partial^2 F_{2_i}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_{2_i}}{\partial\rho} + \left(a^2\left(k^2\varepsilon_i(r) - \beta_i^2\right) - \frac{4}{\rho^2}\right)F_{2_i} + \left(\frac{2a^2k^2\varepsilon_{ci}\Delta_i}{4}\rho\frac{\partial g_i}{\partial\rho}\right)\phi_i^o = 0$$

équation II.40

Les conditions aux limites des deux fonctions F_{0i}, F_{2i}, i.e. leurs valeurs à l'interface cœur gaine sont connues grâces aux expressions précédemment obtenues dans la gaine. Nous sommes maintenant en possession de l'ensemble des éléments qui permettent de calculer les corrections de la constante de propagation scalaire données par l'*équation II.39*.

A l'aide de l'expression du champ scalaire dans la fibre elliptique et de l'expression du terme perturbateur f_i^e, on obtient les expressions explicites des termes intervenant au numérateur de l'*équation II.38* en fonctions de ϕ_i^o, F_{0i} et F_{2i}. Le premier terme du numérateur est donné par l'expression :

$$(1-d_i)\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial i}\right)^2 dxdy = (1-d_i)2\pi\int_0^\infty\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i^o}{\partial\rho}\right)^2 + 2e^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_i^o}{\partial\rho}\frac{\partial F_{0i}}{\partial\rho} + \frac{1}{4}\frac{\partial F_{2i}}{\partial\rho}\frac{\partial\phi_i^o}{\partial\rho} + \frac{F_{2i}}{2\rho}\frac{\partial\phi_i^o}{\partial\rho}\right)\right]\rho d\rho$$

équation II.41

et le second terme par :

$$2\Delta_i d_i\int_0^\infty\int_0^\infty f_i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}dxdy = 2\Delta_i d_i\pi\left[\begin{array}{l}(1-g_i(1))\left(-\frac{\partial X_{0i}}{\partial\rho} - e^2\left(\frac{\partial Y_{0i}}{\partial\rho} + (-1)^A Y_{2i} + (-1)^A\frac{1}{2}\frac{\partial Y_{2i}}{\partial\rho} + \frac{1}{8}\left(B\frac{\partial^2 X_{0i}}{\partial\rho^2} + C\frac{\partial X_{0i}}{\partial\rho}\right)\right)\right)_{1+} \\ + F_i\end{array}\right] \textbf{ avec}$$

$$F_i = -\int_0^1\frac{\partial g_i}{\partial\rho}\frac{\partial X_{0i}}{\partial\rho}\rho d\rho - e^2\left\{\int_0^1\frac{\partial g_i}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial Y_{0i}}{\partial\rho} + (-1)^A Y_{2i} + (-1)^A\frac{1}{2}\frac{\partial Y_{2i}}{\partial\rho} + \frac{\rho^2}{8}\left(B\frac{\partial^2 X_{0i}}{\partial\rho^2} + C\frac{1}{\rho}\frac{\partial X_{0i}}{\partial\rho}\right)\right]d\rho\right\}$$

équation II.42

Les coefficients A, B, C et D valent respectivement A=0, B=3 et C=1 pour i=x, et A=1, B=1 et C=3 pour i=y. Nous avons de plus utilisés les notations suivantes : $X_{0i} = 2F_{0i}\phi_i^o$ et $Y_{2i} = 2F_{2i}\phi_i^o$. Si nous prenons en compte l'ensemble des corrections calculées précédemment, nous obtenons pour chaque axe, une constante de propagation égale à la somme de trois termes :

$$\beta_i = \beta_i^{so} + e^2\beta_i^{se} + \beta_i^{v}$$

équation II.43

- β_i^{so} représente la constante de propagation scalaire de l'axe i, pour un profil circulaire.
- β_i^{se} représente la correction à la constante de propagation scalaire engendrée par la faible ellipticité de la fibre.
- β_i^{v} représente la correction vectorielle à la constante de propagation scalaire pour le profil elliptique. Elle dépend elle même de l'ellipticité et de la différence d'indice entre le coeur et la gaine pour l'axe i.

La biréfringence calculée ici dessus est obtenue en supposant que le terme en gradient représente une perturbation de l'équation scalaire pour un profil elliptique. Cette hypothèse impose de calculer le champ scalaire se propageant dans la fibre elliptique et "justifie" la complexité des calculs des corrections scalaires et la place importante que ces dernières prennent dans l'expression de la constante de propagation finale (termes en F_0, F_2). Nous proposons dans le paragraphe suivant, une approche dans laquelle les effets engendrés par l'ellipticité et par le gradient d'indice sont pris en compte simultanément. Cette approche a été utilisée par Alexeyev [Alexeyev] pour calculer les corrections engendrées par une très faible ellipticité dans une fibre isotrope. Nous n'utiliserons de ce fait que des champs scalaires pour un profil circulaire pour calculer la constante de propagation. Nous introduisons en parallèle une paramétrisation du profil d'indice qui permet de simplifier les calculs [Tjaden, Skorogobatiy02, Alexeyev].

2.4.1.2 Perturbation de l'équation scalaire pour un profil circulaire

On considère que la fibre est faiblement élliptique et que les dimensions de ses axes sont données par $b=R(1+\zeta)$, et $a=R(1-\zeta)$ [Tjaden], où R représente le rayon d'une couche de la fibre non déformée (le cœur par exemple).

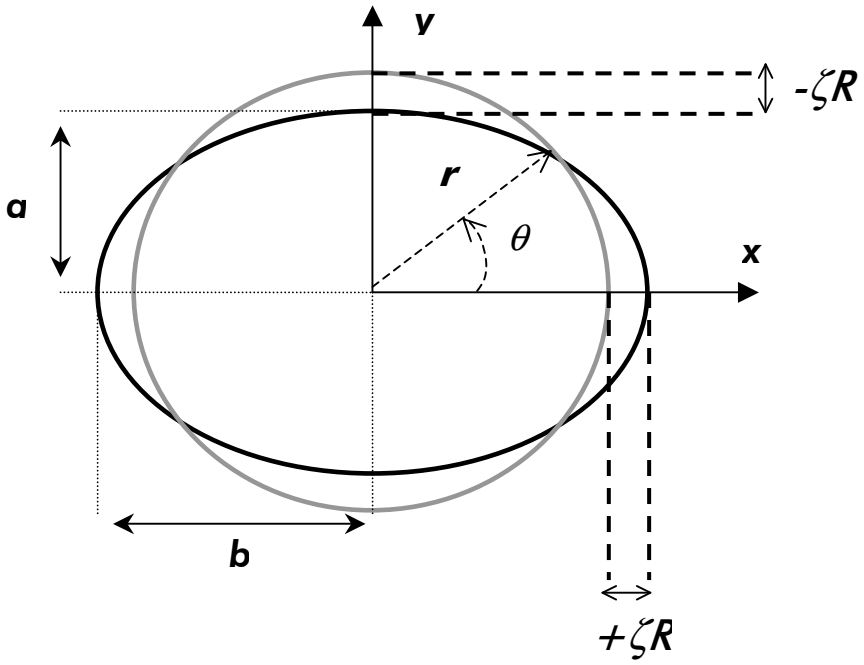

figure II.45 : profil d'indice circulaire (en gris) utilisé pour approcher le profil d'indice elliptique (en noir) : dans cette approche les aires des deux profils sont égales

Lorsque la fibre est faiblement elliptique, $\zeta \approx e^2/4$, la fonction f_i décrivant le profil d'indice suivant i peut alors s'exprimer en fonction de e^2 comme suit : $f_i(x,y) = f_i^o(x(1+e^2/4), y(1-e^2/4))$. Pour des faibles valeurs de e^2, la fonction est donnée à l'ordre 1 par $f_i(x,y) = f_i^o(x,y) + (e^2/4) f_i^e(x,y)$ où $f_i^e(x,y) = (\partial f_i^o/\partial x)x - (\partial f_i^o/\partial y)y = r(\partial f_i^o/\partial r)\cos 2\theta$ et $f_i^o(x,y) = f_i^o(r)$. En paramétrisant ainsi la déformation des différentes couches de la fibre, on conserve une surface constante au passage de la forme circulaire à la forme elliptique. Nous allons utiliser la nouvelle expression de la permittivité qui découle de cette paramétrisation dans l'*équation II.31*. Les calculs sont identiques à ceux effectués au paragraphe précédent. Nous effectuons des développement limités à l'ordre 1 en e^2, et en Δ_i de la permittivité et des fonctions apparaissant dans l'opérateur $\vec{P}$. Nous réitérons les hypothèses effectuées au paragraphe précédent, et obtenons l'expression des composantes P_i :

$$P_i = (1-d_i)\frac{\partial}{\partial i} + 2d_i\Delta_i\frac{\partial f_i^o}{\partial i} + d_i\Delta_i\frac{e^2}{2}\left(\frac{\partial f_i^e}{\partial i}\right)$$

équation II.44

La correction à la constante de propagation scalaire pour un profil circulaire s'obtient ensuite grâce à l'*équation II.37*, en utilisant pour ϕ_i, le champ scalaire calculé pour la permittivité circulaire $\varepsilon_i(r)$[25]. Cette procédure simplifie les calculs puisque la seule équation différentielle à résoudre est l'équation de propagation scalaire pour un profil uniforme et circulaire. En intégrant par partie le second terme du

[25] C'est ce qui différencie principalement cette approche de la précédente

numérateur de l'*équation II.37*, on obtient l'expression suivante de la correction à la constante de propagation scalaire :

$$\beta_i^v = \frac{1}{2\beta_i^s N_{o_i}}\left[\underbrace{(1-d_i)\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial i}\right)^2 dxdy}_{(1)} + \underbrace{d_i\Delta_i\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\partial f_i^o}{\partial i}\frac{\partial\phi_i^2}{\partial i}dxdy}_{(2)} - \underbrace{d_i\Delta_i\frac{e^2}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\partial f_i^o}{\partial x}x-\frac{\partial f_i^o}{\partial y}y\right)\frac{\partial^2\phi_i^2}{\partial i^2}dxdy}_{(3)}\right]$$

équation II.45

En utilisant des coordonnées cylindriques et en effectuant les intégrations sur la variable angulaire, nous obtenons les expressions des trois termes de correction :

- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial i}\right)^2 dxdy = \pi\int_0^\infty\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right)^2 rdr$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_i^o}{\partial i}\frac{\partial\phi_i^2}{\partial i}dxdy = \pi\int_0^\infty\frac{\partial f_i^o}{\partial r}\frac{\partial\phi_i^2}{\partial r}rdr$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial f_i^o}{\partial x}x-\frac{\partial f_i^o}{\partial y}y\right)\frac{\partial^2\phi_i^2}{\partial i^2}dxdy = (-1)^p\frac{\pi}{2}\int_0^\infty r\frac{\partial f_i^o}{\partial r}\left[\frac{\partial^2\phi_i^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_i^2}{\partial r}\right]rdr$, où p=1 si i=x et p=-1 si i=y.

La correction scalaire (*équation II.39*) engendrée par le terme proportionnel à e^2 est nulle. Ce résultat provient de la dépendance angulaire de la perturbation f_i^e qui est en $\cos 2\theta$, comme le mode d'ordre 0 dépend uniquement de la coordonnée radiale, l'intégrale permettant d'obtenir les corrections au premier ordre est nulle. Ainsi, la constante de propagation ne fait intervenir que le champ scalaire et ses différentes dérivées jusqu'à l'ordre deux, et la dérivée du profil d'indice. Son expression est extrêmement simplifiée comparée à celle obtenue dans le paragraphe précédent.

$$\beta_i = \beta_i^{so} + \beta_i^v$$

équation II.46

Nous allons dans le paragraphe suivant comparer et interpréter les deux expressions de la constante de propagation

2.4.2 Comparaisons des expressions obtenues dans les deux méthodes

Dans le modèle du § 2.4.1.1 , la constante de propagation du mode polarisé selon la direction $\vec{i}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\beta_i = \beta_i^{so} + e^2\beta_i^{se} + (1-d_i)\beta_i^{1v} + (1-d_i)e^2\beta_i^{2v} + \Delta_i d_i\beta_i^{3v} + \Delta_i d_i e^2\beta_i^{4v}$$

où les expressions de β_i^{1v}, β_i^{2v}, β_i^{3v} et β_i^{4v} s'obtiennent par identification avec les *équations II.41* et *II.42*. La paramétrisation choisie pour décrire l'ellipse est responsable de la présence de la correction scalaire proportionnelle à l'ellipticité. Nous regroupons les termes proportionnels à e^2, et nous obtenons la biréfringence sous la forme d'une somme de six termes.

$$\Delta\beta = \underbrace{\beta_x^{so} - \beta_y^{so}}_{(1)} + \underbrace{(1-d_x)\beta_x^{1v} - (1-d_y)\beta_y^{1v}}_{(2)} + \underbrace{\Delta_x d_x \beta_x^{3v} - \Delta_y d_y \beta_y^{3v}}_{(3)} + \underbrace{e^2\left(\beta_x^{se} - \beta_y^{se}\right)}_{(4)} +$$
$$\underbrace{e^2\left[(1-d_x)\beta_x^{2v} - (1-d_y)\beta_y^{2v}\right]}_{(5)} + \underbrace{e^2\left(\Delta_x d_x \beta_x^{4v} - \Delta_y d_y \beta_y^{4v}\right)}_{(6)}$$

équation II.47

Les trois premiers termes représentent la biréfringence associée à une fibre circulaire et anisotrope. Les trois derniers termes représentent quant à eux la correction engendrée par la faible ellipticité du profil d'indice. La biréfringence n'est donc pas la somme d'un terme engendré uniquement par les contraintes et d'un terme engendré uniquement par l'asymétrie du guide d'onde puisque les effets de contrainte et de forme sont intriqués dans les termes 4, 5 et 6.

Dans le modèle du § 2.4.1.2, la constante de propagation du mode polarisé selon la direction $\vec{i}$ est égale à la somme de quatre termes :

$$\beta_i = \beta_i^{so} + (1-d_i)\beta_i^{1v} + \Delta_i d_i \beta_i^{2v} + \frac{e^2}{4}\Delta_i d_i \beta_i^{3v}$$

Les expressions de β_i^{1v}, β_i^{2v} et β_i^{3v} s'obtiennent ici aussi par identification avec l'*équation II.45*, elles sont différentes de celles obtenues dans le modèle précédent. La biréfringence est, par conséquent, la somme de quatre termes :

$$\Delta\beta = \underbrace{\beta_x^{os} - \beta_y^{os}}_{(1)} + \underbrace{\left((1-d_x)\beta_x^{1v} - (1-d_y)\beta_y^{1v}\right)}_{(2)} + \underbrace{\left(\Delta_x d_x \beta_x^{2v} - \Delta_y d_y \beta_y^{2v}\right)}_{(3)} + \underbrace{e^2\left(\Delta_x d_x \beta_x^{3v} - \Delta_y d_y \beta_y^{3v}\right)}_{(4)}$$

équation II.48

Les trois premiers termes de cette somme représentent la biréfringence dans une fibre anisotrope à profil circulaire. Le dernier terme représentant l'effet de la faible ellipticité du profil d'indice. Cette approche fournit donc, ici aussi, une expression qui ne se met pas sous la forme d'une somme d'un terme engendré uniquement par les contraintes et d'un terme engendré uniquement par l'asymétrie du guide d'onde. Les effets de contrainte et de forme étant intriqués dans le terme 4.

Nous n'avons pas pu, faute de temps, mettre en place numériquement l'une de ces deux méthodes. Nous présentons néanmoins dans le paragraphe suivant une étude qualitative de la biréfringence dans les fibres faiblement anisotropes. Nous comparons pour cela la biréfringence de forme évaluée sur les profils isotropes échelon100-288 et W147-288 avec la biréfringence de contrainte scalaire ($\beta_x^{os} - \beta_y^{os}$) évaluée sur les profils modifiés par l'anisotropie.

2.4.3 Biréfringence de phase dans les fibres de télécommunication faiblement anisotropes

Compte tenu de la faiblesse du terme δn_{xy} vis à vis des termes δn_{xx}, δn_{yy}, δn_{zz} (cf § 1.4), on peut estimer que les hypothèses que nous avons effectuées au § 2.4 sont valides sur la majeure partie de la section de la fibre. Nous avons donc comparé la biréfringence de contrainte scalaire $\beta_x^{os} - \beta_y^{os}$

(terme 1 des *équations II.47* et des *équations II.48*) et la biréfringence de forme isotrope (terme 6 dans l'*équation II.47* lorsque $\phi_x = \phi_y$). Une remarque doit être faite sur le profil d'indice que nous avons utilisé pour le calcul de la biréfringence de forme. Celui ci correspond au profil dit "sur préforme", c'est à dire qu'il prend en compte les écarts modèles mesures inhérents au procédé de fabrication. Le profil "isotrope" attendu et mesuré sur fibre est donc lui aussi différent du profil sur "préforme" en raison du champ de contrainte engendré dans la fibre. L'indice que nous obtenons en pratique correspond, du fait de la configuration de mesure, à un indice effectif vu par un signal dépolarisé se propageant dans un milieu anisotrope. Ne sachant pas à l'heure actuelle déterminer cet indice, nous avons opté pour le profil sur préforme. Les constantes de propagation β_x^{os}, β_y^{os} sont calculées sur les profils d'indice modifiés à l'aide des corrections δn_{xx} et δn_{yy} évaluées au § 1.4. Les caractéristiques des profils d'indice échelons et W sont résumées dans les tableaux II.5 et II.6 et les résultats des calculs dans les tableaux II.7 et II.8.

On note premièrement, que l'anisotropie tend à faire décroître le paramètre Δ sur les deux types de profil. Deuxièmement, cette diminution se caractérise pour les profils W par une diminution de l'indice dans le cœur et une augmentation dans la gaine intérieure. Enfin, pour tous les profils $\Delta_x > \Delta_y$. Les résultats des calculs effectués à l'aide des profils d'indice précédents sont représentés dans le *tableau II.7* pour le profil échelon et *II.8* pour le profil W. Une comparaison de l'ensemble des résultats est représentée sur la *figure II.46*. Trois grandes tendances se dégagent de ces résultats :

1) Les biréfringences de forme et de contrainte sont du même ordre de grandeur pour les deux types de profil ; les biréfringences des profils en W sont plus importantes que les biréfringences des profils en échelon.
2) La biréfringence de forme est supérieure en valeur absolue à la biréfringence de contrainte et les deux grandeurs augmentent avec la différence d'indice pour les deux profils d'indice.
3) La contribution relative des contraintes dans la valeur finale de la biréfringence semble identique pour les deux profils d'indice comme on peut le constater sur la *figure II.46*.

Il est intéressant de constater de plus que la biréfringence de contrainte est supérieure en valeur absolue dans les profils de type W même si l'anisotropie y est plus faible que dans les fibres de type échelon. Cette étude étant incomplète, des conclusions définitives sur le comportement de la biréfringence dans ces deux types de profil ne sauraient être tirées. Ces résultats suggère cependant que, du point de vue de la biréfringence, les effets de contrainte ont une contribution non négligeable.

	n_{coeur}-$n_{gaine\ ext}$ ($\times 10^3$)
E100	10.000
E100x	9.641
E100y	9.639
E147	14.700
E147x	14.016
E147y	14.015
E194	19.400
E194x	18.385
E194y	18.383
E241	24.100
E241x	22.739
E241y	22.737
E288	28.800
E288x	27.078
E288y	27.076

tableau II.5 : caractéristiques des profils isotropes E147-288 et des profils anisotropes correspondants indicés par x ou y selon que l'on s'intéresse au champ polarisé selon x ou y respectivement ; l'indice de la gaine extérieure est égal à l'indice de la silice à 1550 nm : $n_{gaine\ int}$=1.444

	n_{coeur}-$n_{gaine\ ext}$ ($\times 10^3$)	$n_{gaine\ int}$-$n_{gaine\ ext}$ ($\times 10^3$)
W147	14.70000	-6.00000
W147x	14.17030	-5.72456
W147y	14.16930	-5.72443
W194	19.40000	-6.00000
W194x	18.59139	-5.72495
W194y	18.59010	-5.72477
W241	24.10000	-6.00000
W241x	23.00846	-5.72576
W241y	23.00683	-5.72566
W288	28.80000	-6.00000
W288x	27.40745	-5.73341
W288y	27.40549	-5.73319

tableau II.6 : caractéristiques des profils isotropes W147-288 et des profils anisotropes correspondants indicés par x ou y selon que l'on s'intéresse au champ polarisé selon x ou y respectivement ; l'indice de la gaine extérieure est égal à l'indice de la silice à 1550 nm : $n_{gaine\ int}$=1.444

	$\beta_x^{os} - \beta_y^{os}$ (rad/m)	$\Delta\beta_{forme}$(rad/m)
E100	1.87	1.15
E147	2.20	2.13
E194	2.44	3.20
E241	2.56	4.32
E288	2.66	5.50

tableau II.7 : résultats des calculs de la biréfringence de contrainte scalaire et biréfringence de forme sur les profils de type échelon

	$\beta_x^{os} - \beta_y^{os}$ (rad/m)	$\Delta\beta_{forme}$(rad/m)
W147	2.50	4.94
W194	3.02	7.43
W241	3.46	10.07
W288	3.51	12.85

tableau II.8 : résultats des calculs de la biréfringence de contrainte scalaire et biréfringence de forme sur les profils W

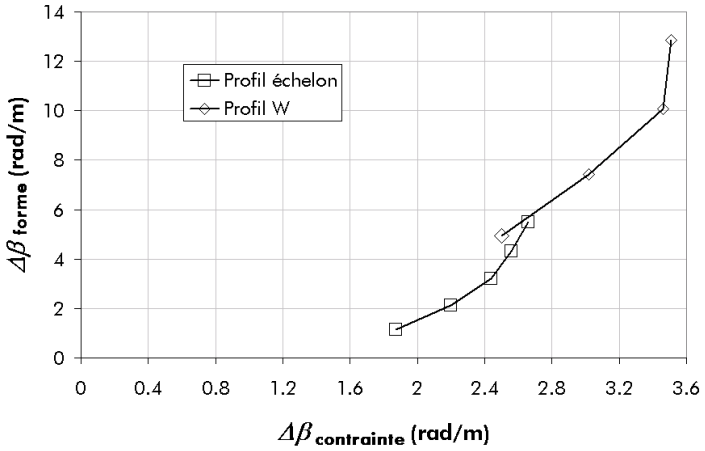

figure II.46 : évolution relative de la biréfringence de forme et de la biréfringence de contrainte scalaire dans les profils échelons et W

2.5 Conclusion du § 2

Dans ce chapitre, nous avons abordé la modélisation de la biréfringence de phase et de groupe dans les fibres de télécommunication faiblement elliptiques et faiblement anisotropes. Dans la littérature, deux approches sont utilisées dans le but de modéliser la biréfringence. La première consiste à évaluer séparément les effets de forme et de contrainte sur la biréfringence tandis que la seconde consiste à les évaluer conjointement. Différentes méthodes de calcul sont utilisées pour le calcul proprement dit, les principales étant les méthodes par éléments finis et les méthodes perturbatives. Très peu d'études ont été effectuées sur l'effet du profil d'indice sur l'anisotropie et sur la biréfringence qui en résulte. La seule référence s'intéressant à ce problème [Chowdhury00] montre que les profils de type

SMF semblent plus affectés par l'anisotropie engendrée par les contraintes que les profils plus complexes de type NZDSF.

Afin d'étudier les contributions relatives des effets de forme et de contrainte, nous avons utilisé une méthode perturbative de l'équation scalaire pour évaluer la biréfringence dans une fibre faiblement elliptique et faiblement anisotrope. Deux approches ont été envisagées : la première est basée sur une méthode développée par [Sammut] et la seconde sur une méthode développée par [Alexeyev]. Compte tenu des résultats du § 1.4, nous avons supposé que la composante croisée du tenseur permittivité est négligeable devant les composantes diagonales. La biréfringence s'obtient par conséquent grâce à la différence entre les constantes de propagation d'un champ électrique se propageant dans une fibre elliptique biaxe. Nous avons, dans un premier temps, calculé la différence entre les constantes de propagation scalaires évaluées sur deux profils d'indice n_x *et* n_y *obtenus par modification du profil isotrope originel. Nous avons ensuite comparé cette valeur avec la biréfringence de forme calculée sur le profil originel. Deux types de fibres ont été étudiés : des fibres de type échelon et des fibres de type W obtenues à partir des profils échelons par rajout d'une gaine intérieure enterrée. Les premiers résultats de calcul montrent que les effets de contrainte sont relativement importants pour les deux profils d'indice. Nous avons constaté d'une part que les valeurs de la biréfringence de forme et les valeurs de la biréfringence de contrainte sont du même ordre de grandeur, et d'autre part qu'elles évoluent de façon linéaire avec la différence d'indice. De plus, la biréfringence de contrainte et la biréfringence de forme sont du même ordre de grandeur pour les deux types de profil, la biréfringence de forme étant supérieure à la biréfringence de contrainte pour les fortes différences d'indice cœur/gaine. Ces premiers résultats penchent en faveur d'une prise en compte des termes négligés dans le calcul des constantes de propagation afin d'aborder le calcul de la biréfringence de façon plus précise.*

3 Conclusion du chapitre

Nous avons abordé dans ce chapitre la biréfringence dans le régime courte distance.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation thermomécanique de l'étirage d'une fibre optique. Nous avons utilisé pour cela un logiciel de calcul de contrainte basé sur la méthode des éléments finis. Un modèle développé à Conflans [Nicolardot] pour le calcul des contraintes dans une fibre circulaire a ainsi été adapté à des géométries elliptiques. Ce modèle nous permet de prendre en compte les contraintes d'origine thermique et les contraintes d'origine mécanique qui proviennent respectivement d'un désaccord entre les coefficients de dilatation et d'un désaccord entre les coefficients de viscosité des différents constituants de la fibre. A l'aide de ce modèle nous avons alors comparé les anisotropies induites sur deux types de profil : des profils de type échelon et des profils de type W, ce dernier étant doté d'une couche enterrée entre le cœur et la gaine. Pour chacun des types, la différence d'indice entre le cœur et la couche adjacente a été modifiée de façon à conserver un indice effectif constant et l'impact sur l'anisotropie a été étudié grâce à l'équation II.3. Nous avons pu faire les observations générales suivantes :

1) *L'anisotropie augmente linéairement avec la différence d'indice cœur/gaine.*
2) *La composante croisée du tenseur des indices est très faible devant les composantes diagonales.*
3) *L'anisotropie est plus importante dans les profils de type échelon.*

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'effet de l'anisotropie sur la biréfringence. A l'aide du tenseur des indices, et forts des observations précédentes, nous avons proposé une méthode de calcul de la biréfringence basée sur une méthode de perturbation de l'équation scalaire de propagation. Nous avons supposé, compte tenu des résultats précédents, que seules les composantes diagonales du tenseur permittivité avaient une influence notable sur la biréfringence. Nous avons alors obtenu théoriquement les deux corrections vectorielles des constantes de propagation scalaire d'une fibre circulaire dont le matériau est originellement anisotrope et caractérisé par trois "indices" : $\boldsymbol{n_{xx}}$ *,* $\boldsymbol{n_{yy}}$ *et* $\boldsymbol{n_{zz}}$*. La différence entre ces constantes de propagation se met sous la forme d'une somme de plusieurs termes associés chacun à différentes composantes de la biréfringence : composantes scalaires et vectorielles associées à une fibre circulaire et anisotrope, et composantes scalaires et vectorielles associées à une fibre anisotrope et faiblement elliptique (cf équations II.47 et II.48). Nous avons alors comparé la biréfringence scalaire calculée à l'aide de* $\boldsymbol{n_{xx}}$ *et* $\boldsymbol{n_{yy}}$ *, i.e. différence entre les constantes de propagation scalaires obtenues sur* $\boldsymbol{n_{xx}}$ *et* $\boldsymbol{n_{yy}}$ *, avec la biréfringence de forme calculée sur le profil originel* $\boldsymbol{n}$*, i.e. la différence entre les constantes de propagation lorsque l'anisotropie tend vers zéro. Nous avons pu faire les observations suivantes :*

1) *Les valeurs de la biréfringence de contrainte scalaire et de la biréfringence de forme sont du même ordre de grandeur.*

2) *Elles augmentent toutes deux avec la différence d'indice entre le cœur et la gaine, la biréfringence de forme étant supérieure à la biréfringence de contrainte pour les fortes différences d'indice cœur/gaine.*
3) *La biréfringence de contrainte scalaire est supérieure dans les profils de type W*

Ces résultats préliminaires nous confortent dans l'idée que les différentes composantes de la biréfringence que nous avons déterminées théoriquement doivent, elles aussi, être étudiées. L'ensemble des résultats précédents montre qu'il est indispensable de prendre en compte le profil de contrainte résiduel afin d'appréhender de façon correcte la biréfringence et par extension la PMD dans un régime où les effets du couplage de mode sont négligeables.

Chapitre III Calcul de la PMD

1 ETAT DE L'ART 97

1.1 DIFFERENTS TYPES DE ROTATION ET LEURS CARACTERISTIQUES 98

1.2 FORMALISME D'ETUDE DU DGD DANS LES FIBRES VRILLEES 100

1.2.1 Propriétés de la PMD des fibres vrillées dans le régime court 101

1.2.2 Propriétés de la PMD des fibres vrillées dans le régime long 102

1.2.3 Effet d'un vrillage externe uniforme sur la PMD 106

1.2.3.1 DGD d'une fibre vrillée uniformément : prise en compte de la biréfringence circulaire 107

1.2.3.2 Fibre vrillée sinusoïdalement 108

2 VRILLAGE SINUSOÏDAL VS VRILLAGE TRIANGULAIRE 109

2.1 LE VRILLAGE TRIANGULAIRE DANS LE REGIME T/L_B<<1 110

2.2 METHODE DE CALCUL 111

2.3 COMPARAISONS NUMERIQUES DES VRILLAGES TRIANGULAIRES ET SINUSOÏDAUX 113

2.3.1 Calcul du DGD en fonction de A_{max}, T pour différentes valeurs de L_b 113

2.3.2 Comportement vis à vis d'un vrillage uniforme parasite 118

2.3.3 Conclusion du paragraphe 121

2.4 ETUDE DU VRILLAGE TRIANGULAIRE EN FONCTION DE LA LONGUEUR DE BATTEMENT 122

2.4.1 DGD et vecteur PMD associés à N périodes 122

2.4.2 Régime $0 \leq A_{max} \leq T\beta_l/4$: cas des fibres de type spécial 124

2.4.3 Régime $A_{max} >> T\beta_l/4$: cas des fibres NZDSF et RDF 126

2.4.4 Etude de l'enveloppe de l'évolution du DGD 128

3 CONCLUSION DU CHAPITRE 130

Au chapitre précédent, nous avons présenté les phénomènes de biréfringence de phase et de groupe dans des fibres invariantes selon l'axe de propagation. Cette description n'est valable que sur des courtes distances, car du fait des imperfections liées au processus de fabrication, le profil d'indice vu par la lumière va varier en fonction de la distance de propagation. Lorsque la longueur de propagation excède quelques mètres, ces imperfections entraînent des phénomènes de couplages entre les modes propres de propagation et les équations de propagation présentées au chapitre précédent ne sont plus adaptées à la description de la propagation de la lumière polarisée. Un formalisme prenant en compte le couplage entre les modes propres de polarisation doit être utilisé afin de décrire correctement la PMD. Ainsi, au produit de la biréfringence de groupe et de la distance de propagation, quantité parfaitement définie tout au long d'une fibre "idéale", on substitue la différence de temps de groupe (DGD de l'anglais Differential Group Delay) entre deux états principaux de polarisation, dont les caractéristiques évoluent en fonction de la position dans une fibre réelle. Etudier la PMD dans une fibre réelle revient donc à étudier les états principaux de polarisation. Le formalisme adapté à cette étude, qui découle des équations de Maxwell, est le formalisme de Jones. Au formalisme de Jones, permettant une description en terme de champ électrique complexe des effets de polarisation, on associe le formalisme de Mueller permettant une description en terme d'intensité des effets de polarisation. Ces deux formalismes sont utilisés indifféremment dans la littérature lorsqu'il s'agit d'étudier la PMD sur de grandes longueurs de fibre. Nous allons donc en faire fréquemment usage dans ce chapitre. Nous introduisons auparavant les notations que nous utiliserons tout au long du chapitre. La biréfringence linéaire notée $\Delta\beta$ dans les chapitres précédents sera ici désignée par β_l.

L	: Longueur de la fibre
β_l	: Biréfringence linéaire intrinsèque
L_b	: Longueur de battement intrinsèque ($L_b = 2\pi/\beta_l$)
$\Delta\tau$	: Différence de temps de groupe locale ($\Delta\tau = \partial\beta_l / \partial\omega$)
$\theta(z_b)$	: Angle de rotation de la fibre
A_{max}	: Amplitude maximale de l'angle de rotation de la fibre
T	: Période spatiale de la rotation de la fibre
$\tau(z)$	: Taux de rotation, $\theta(z_b) = \int_0^{z_b} \tau(u)du$
X^T	: Transposé de la grandeur X
$U(z', z)$	: Matrice de Jones entre les abscisses z' et z
$\vec{\beta}_t(z_b) = \begin{vmatrix} \beta_l \\ 0 \\ -2\tau(z_b) \end{vmatrix}$	: Vecteur biréfringence local dans le repère tournant avec les axes de la fibre.
$\Delta = \sqrt{(T\beta_l / 4)^2 + A_{max}^2}$	: Déphasage induit par une demi-période de fibre

2δ , $\vec{e}_\delta$: Déphasage et axe propre équivalent au biréfringent associé à une période de vrillage de la fibre

Enfin, nous utiliserons au § 2 une notation exponentielle de la matrice de Jones $U = exp(-j\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \phi)$ [Gordon]. Ce formalisme est présenté de façon plus précise en Annexe I.

1 Etat de l'art

Une méthode efficace permettant de réduire la PMD dans une fibre biréfringente consiste à provoquer une rotation des axes propres lors de l'étirage. L'alternance des axes rapides et lents qui en résulte permet de réduire la dispersion des temps de propagation engendrée par la biréfringence. Cette rotation peut être permanente, i.e. figée de façon structurelle dans le verre, ou provisoire, i.e. une torsion mécanique de la fibre. Cette dernière solution présente le désavantage de provoquer des contraintes dans la fibre qui, dans le meilleur des cas, engendrent de la biréfringence circulaire [Ulrich79], et dans le pire des cas, conduisent à la casse de la fibre. On utilise donc en pratique la première solution. Du point de vue technique, la rotation des axes propres est engendrée au cours du fibrage. La *figure III.1* représente une tour de fibrage. La préforme est désignée par le numéro 10, la fibre par le numéro 25. Nous rappelons qu'une force est exercée sur la fibre, (symbolisée par les flèches droites) et qu'une succession de poulies (cadre en pointillés) permet de guider la fibre jusqu'à un système d'enroulement. L'objectif est de provoquer une rotation de la partie "liquide" du cône de fibrage (partie 15) afin que celle ci soit conservée lorsque la fibre descend et se refroidit, tout en évitant d'engendrer des contraintes de torsion. Cet objectif peut être atteint de deux manières différentes :

Par une rotation de la préforme autours de son axe longitudinal [Barlow] : Cette méthode engendre une rotation uniforme de la fibre et est peu utilisée à l'heure actuelle car elle est difficile à mettre en œuvre techniquement. Elle présente de plus l'inconvénient de provoquer l'accumulation de rotations parasites dans les bobines de conditionnement.

Par une rotation de la fibre autour de son axe longitudinal : Pour éviter cette accumulation, on doit moduler périodiquement la rotation de la fibre, afin de désenrouler périodiquement la rotation parasite. Cette technique permet en théorie de réduire le vrillage parasite de façon très importante, même si en pratique l'imperfection des réglages mécaniques ne permet pas de l'éliminer totalement. Les deux principaux procédés utilisant cette technique portent le nom de procédé AT&T et procédé FSU. Dans le procédé AT&T, la rotation est engendrée à la base de la tour de fibrage par une poulie oscillante. La partie provoquant la rotation de la fibre est encadrée en pointillé sur la *figure III.1*. Elle est représentée vue de dessus dans la *figure III.2*. Nous désignons par γ, l'angle déterminé par les plan contenant les poulies 292, 293 et 200 et le plan contenant la poulie 291. Lors de l'étirage de la fibre, une force est exercée à l'extrémité de la fibre (*figure III.1*). Lorsque $\gamma = 0$ (Partie gauche de la *figure III.2*), cette force provoque la rotation des différentes poulies (symbolisée par les flèches circulaires sur les mêmes figures). Dans cette configuration, aucune force exceptée la force de traction, n'est exercée sur la fibre, de sorte qu'elle ne tourne pas autour de son axe. Lorsqu'un angle $\gamma \neq 0$ (Partie droite de la *figure III.2*) est imposé et maintenu dans le temps, la force de traction provoque la rotation de la poulie 291, qui en retour exerce une force non colinéaire à l'axe de la fibre. Il en résulte une rotation de la fibre autours de son axe longitudinal.

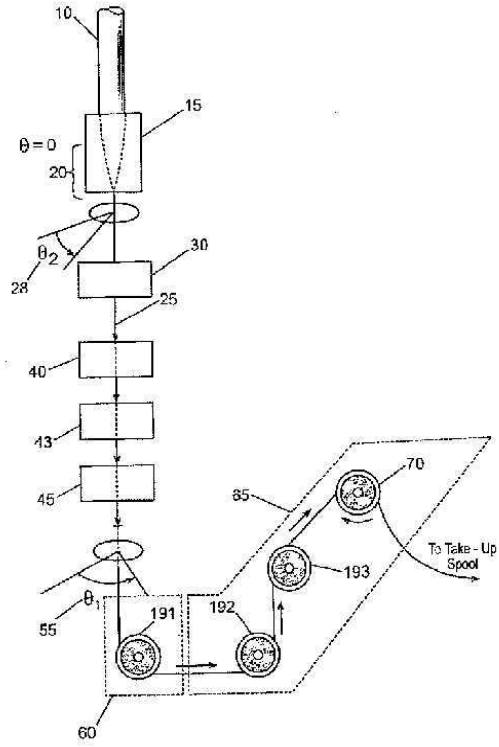

figure III.1 : représentation d'une tour de fibrage et du système de guidage de la fibre

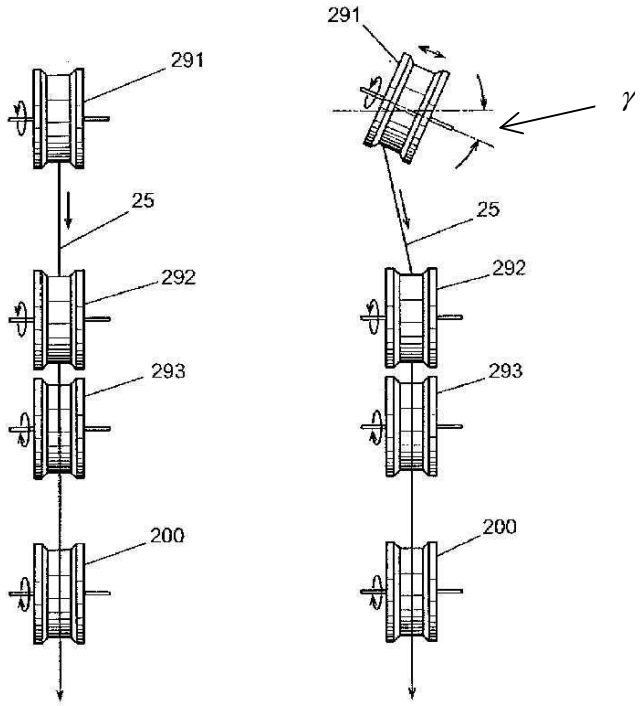

figure III.2 : représentation du système ATT

Cette rotation "mécanique de la fibre" est transmise le long de la fibre (la rotation est symbolisée par les angles θ_1 et θ_2 sur la *figure III.1*, la différence d'amplitude traduit un retard à la transmission de la rotation) jusqu'au cône de fibrage où elle y est inscrite, puis figée lorsque la fibre redescend et refroidit. Dans le procédé FSU, la rotation mécanique de la fibre est mise en œuvre à l'aide de quatre poulies oscillantes se situant légèrement au-dessus de la poulie oscillante du procédé AT&T. Le principe conduisant à la rotation de la fibre est identique à celui que nous avons décrit précédemment. Les taux de rotation obtenus avec ce procédé sont, en général, moins importants et distribués de façon plus uniforme que dans le procédé AT&T. Nous allons dans la suite passer en revue l'ensemble des rotations qui peuvent être engendrées à l'aide des méthodes présentées précédemment, ainsi que les conséquences sur l'évolution de la PMD.

1.1 Différents types de rotation et leurs caractéristiques

Différentes formes de rotation sont abordées dans la littérature : rotations uniformes, sinusoïdales, modulées en fréquence et/ou en amplitude. Elles sont recensées dans le *tableau III.1*. Le taux de rotation $\tau(z)$ représente la vitesse de rotation de la fibre en rad/m (la vitesse spatiale avec laquelle la fibre tourne autour de son axe longitudinal) :

$$\tau(z) = \frac{d\theta(z)}{dz}$$

équation III.1

où $\theta(z)$ est l'angle de rotation cumulé (que nous appellerons profil de rotation) qui s'exprime en radian et qui permet de définir les différents types de rotation appliquées.

	Taux de rotation $\tau(z)$
Rotation uniforme	$\propto \frac{A_{max}}{T}$
Rotation sinusoïdale	$\frac{\pi A_{max}}{T} sin\left(\frac{2\pi}{T} z\right)$
Rotation modulée en fréquence	$\frac{\pi A_{max}}{T} sin\left\{2\pi\left[\left(\frac{2\pi}{T} z\right) + f_m \, sin\left(\frac{2\pi}{t} z\right)\right]\right\}$
Rotation modulée en amplitude	$\frac{\pi A_{max}}{T} sin\left(\frac{2\pi}{t} z\right) sin\left(\frac{2\pi}{T} z\right)$

Tableau III.1 : taux de rotation associés aux principaux profils de rotation. A_{max} et T représentent l'amplitude maximale de rotation et la période de rotation dans une fibre vrillée sinusoïdalement, de sorte que $\pi A_{max} / T$ représente la vitesse de rotation maximale. Nous conservons cette notation pour les autres types de rotation.

Le profil uniforme présente l'avantage de conduire à des calculs entièrement faisables analytiquement. Il est donc simple à modéliser et son efficacité[26] vis à vis de la réduction de la PMD augmente lorsque le nombre de tours par longueur de battement augmente [Nolan]. Comme nous l'avons dit au paragraphe d'introduction, ce type de rotation n'est pas appliqué en pratique et on lui préfère des rotations sinusoïdales. D'un point de vue technique, les rotations sinusoïdales présentent l'avantage de prévenir, en théorie, l'accumulation de contraintes de torsion dans les fibres. Du point de vue théorique, les profils de rotation sinusoïdaux présentent la particularité de rendre le DGD périodique, lorsque certaines relations reliant la longueur de battement, l'amplitude et la période de rotation sont satisfaites [Chen02a, Galtarossa01b]. Dans le cas où ces conditions ne sont pas réunies, le DGD présente une évolution globalement linéaire entrecoupée d'oscillations de très faibles amplitudes. La pente moyenne de cette évolution peut être associée au coefficient de PMD pour les longues distances de propagation. Pour un profil de rotation fixé, la réduction du DGD peut donc être affectée lorsque la biréfringence, par exemple, varie fortement dans une même fibre. Pour surmonter ce problème, des profils de rotation modulés en fréquence et/ou en amplitude ont été proposés [Li98]. L'idée est d'utiliser des profils de rotation dont le spectre est suffisamment large et dense pour s'adapter aux variations de la biréfringence. La réduction du DGD, quoique plus importante dans le cas d'une rotation sinusoïdale parfaitement adaptée, serait ainsi imposée sur une plage de longueur de battement plus étendue.

[26] Le terme "efficacité" d'un certain type de vrillage sera associée par la suite à sa capacité à diminuer la PMD.

L'étude précise de l'efficacité de ces différents profils de rotation repose sur le calcul du DGD en fonction de la distance. Nous présentons dans le paragraphe suivant les deux principaux modèles de calcul du DGD.

1.2 Formalisme d'étude du DGD dans les fibres vrillées

Dans ce paragraphe nous présentons les principaux résultats concernant l'étude de la PMD dans les fibres vrillées. Le calcul du DGD peut être abordé à l'aide du formalisme de Jones ou à l'aide du formalisme de Mueller. Dans ces deux formalismes, le DGD est obtenu en quantifiant la sensibilité de la polarisation en un point z de la fibre, vis à vis d'une variation de la fréquence du signal en entrée. Nous présentons brièvement l'équation d'évolution du champ électrique (formalisme de Jones) et rappelons l'équation d'évolution du vecteur PMD (formalisme de Mueller) afin de fixer les notations utilisées dans ce paragraphe.

Nous utilisons ici le formalisme de Jones pour décrire la propagation du champ électrique dans un milieu biréfringent linéaire de biréfringence β_l, dont les axes propres évoluent avec la distance. En repérant la direction des axes propres par l'angle $\theta(z)$ et en utilisant une base circulaire pour repérer les états de polarisation, le vecteur de Jones associé au champ électrique vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial z} = i\frac{\beta_l}{2}\begin{pmatrix} 0 & \exp(2i\theta(z)) \\ \exp(-2i\theta(z)) & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J} \qquad avec \qquad \theta(z) = \int_0^z \tau(u)du$$

équation III.2

L'intégration de l'*équation III.2* permet d'obtenir le vecteur de Jones et par conséquent la matrice de Jones pour toutes les valeurs de z. En dérivant ensuite par rapport à la fréquence ω, on obtient le DGD grâce à l'*équation* ***A I.7*** de l'Annexe I. Le formalisme de Mueller est utilisé pour calculer l'évolution du vecteur PMD (*équation I.18*) dans un repère tournant avec les axes propres de la fibre [Galtarossa01b] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} &= \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} + 2\tau\Omega_2 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} &= -\beta_l\Omega_3 - 2\tau\Omega_1 \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial z} &= \beta_l\Omega_2 \end{aligned}$$

équation III.3

Le DGD est ensuite obtenu grâce au module du vecteur PMD. Lorsque β_l et $\tau(z)$ sont quelconques, l'intégration numérique de l'*équation III.2* et de l'*équation III.3* est nécessaire. Cependant, lorsque le profil de rotation de la fibre est périodique et lorsque le rapport T/L_b est petit devant 1, les équations différentielles précédentes peuvent être traitées par des méthodes perturbatrices. Une expression analytique du DGD est donnée au premier ordre en T/L_b par l'intégrale suivante [Chen02a, Pizzinat03a] :

$$DGD(z) = \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \left| \int_0^z \exp[-2i\theta(u)]\, du \right|$$

équation III.4

Dans une fibre vrillée, le DGD est égal au produit de la biréfringence de groupe, $\partial\beta_l / \partial\omega$, et d'une fonction des paramètres de rotation de la fibre. Nous verrons que la valeur de cette fonction est toujours inférieure à z, quelle que soit la fonction de rotation, de sorte que le vrillage de la fibre réduit toujours la PMD. Nous allons dans la suite analyser le comportement du DGD dans les fibres vrillées dans le régime déterministe et dans le régime aléatoire.

1.2.1 Propriétés de la PMD des fibres vrillées dans le régime courte distance

Pour illustrer le comportement des fibres vrillées sinusoïdalement, on utilise l'*équation III.4* avec $\tau(z) = (\pi A_{max} / T)\sin((2\pi / T)z)$. Après calcul de l'intégrale on obtient :

$$DGD(z) = \frac{\partial \beta_l}{\partial z} \sqrt{R^2(z) + I^2(z)}$$

équation III.5

avec

$$R(z) = J_0(A_{max})z + \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n}(A_{max})}{2n} \sin\left(2n \frac{2\pi}{T} z\right) \qquad I(z) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(A_{max})}{2n+1} \sin\left((2n+1) \frac{2\pi}{T} z\right)$$

équation III.6 ***équation III.7***

où les J_n sont les fonctions de Bessel d'ordre n. Le DGD comporte donc une partie évoluant linéairement avec la distance, et une partie évoluant périodiquement avec la distance. Lorsque l'amplitude maximale de l'angle de rotation A_{max} est égale à un zéro de la fonction J_0, le DGD est une fonction périodique. Pour les autres valeurs de A_{max}, le DGD va croître linéairement lorsque z est grand, de sorte qu'il est bien approché par l'*équation III.8* :

$$DGD(z) \approx \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \left| J_0(A_{max}) \right| z$$

équation III.8

Lorsque $T << L_b$, le DGD est indépendant de la biréfringence, de la période de rotation de la fibre, et dépend de A_{max} à travers la fonction de Bessel d'ordre 0. Il est, de plus, proportionnel au DGD de la fibre non vrillée $(\partial\beta_l / \partial\omega)z$. La réduction du DGD est quantifiée par le module de la fonction de Bessel d'ordre 0. La *figure III.3* représente le DGD (normalisé par le DGD d'une fibre non vrillée) dans une fibre vrillée sinusoïdalement. Les cercles indiquent des exemples de valeurs de A_{max} pour lesquelles le DGD évolue linéairement ou périodiquement avec la distance.

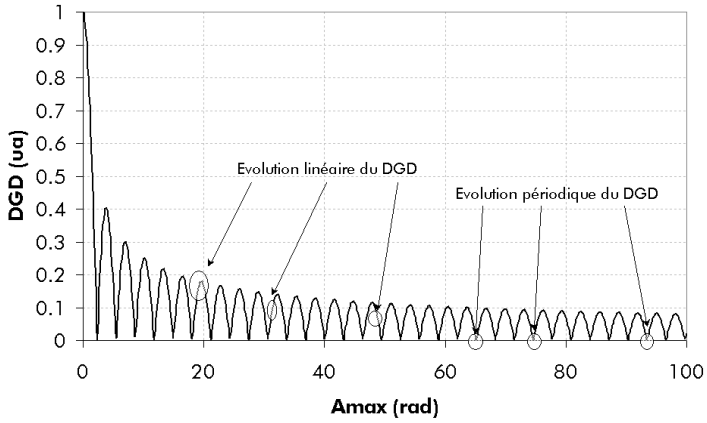

figure III.3 : Evolution du DGD normalisé dans une fibre vrillée sinusoïdalement en fonction de A_{max}

1.2.2 Propriétés de la PMD des fibres vrillées dans le régime long

La description de l'évolution du DGD dans le régime longue distance nécessite la prise en compte des effets aléatoires. Nous présentons dans un premier temps les modèles permettant de décrire le comportement aléatoire de la biréfringence, puis dans un second temps, nous nous intéressons à l'interaction de ces effets aléatoires avec les rotations déterministes des axes propres et à l'effet de ces interactions sur le DGD. Il va sans dire que le DGD est maintenant une variable aléatoire que nous allons décrire par sa distribution et les différents moments qui lui sont associés. Trois modèles aléatoires sont généralement utilisés dans la littérature pour décrire la composante aléatoire de la biréfringence. Chaque modèle est définis à partir du vecteur biréfringence $\vec{\beta} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$, où $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont les composantes du vecteur biréfringence sur la sphère de Poincaré.

Modèle 1. La biréfringence comprend deux termes, un terme déterministe $\vec{\beta}$, et un terme aléatoire perturbatif $\vec{\gamma}(z)$: $\vec{\beta}(z) = \vec{\beta} + \vec{\gamma}(z)$. Ce premier modèle est basé directement sur la notion de couplage d'énergie présentée au chapitre I. Les couplages d'énergie ont lieu à des endroits discrets dans la fibre et sont engendrés par des rotations aléatoires des axes ou des changements de phase aléatoires.

Modèle 2. Le module du vecteur biréfringence est fixé, tandis que son orientation évolue de façon aléatoire [Wai]. Ce modèle suppose que la valeur de la biréfringence ne change pas, et que seuls les axes propres évoluent aléatoirement en fonction de la distance selon un processus de Wiener, i.e. l'angle de rotation obéit à l'équation différentielle $(d\theta / dz) = \sigma_F \eta(z)$, où σ_F est une constante et $\eta(z)$ un bruit blanc. Ce modèle suppose donc, que l'ellipticité de la fibre par exemple est constante tout le long de la fibre, ce que l'on sait être faux dans la réalité. Ce modèle est appelé FMM dans la littérature pour "Fixed Modulus Model".

Modèle 3. Dans le troisième modèle [Wai] appelé RMM pour "Random Modulus Model", le module et l'orientation du vecteur biréfringence linéaire évoluent de façon aléatoire dans la fibre. Les composantes du vecteur biréfringence obéissent à l'équation différentielle [Wai, Oksendal] :

$$\frac{\partial \beta_i(z)}{\partial z} = -\frac{\beta_i(z)}{L_F} + \sqrt{\frac{\langle \beta^2 \rangle}{L_F}}\ \eta_i(z) \text{ i=1,2 et } \beta_3 = 0$$

équation III.9

η_1 et η_2 sont des bruits blancs gaussiens indépendants de moyenne nulle, et de variance unité. L_F est la longueur de corrélation du vecteur biréfringence. Elle représente la longueur de fibre au bout de laquelle, le vecteur biréfringence a perdu la mémoire de son évolution antérieure. Dans ce modèle on suppose qu'il n'y a pas de biréfringence circulaire, ce qui semble être une hypothèse raisonnable pour les fibres télécoms si on ne tient pas compte de l'effet du conditionnement. Chaque composante de $\vec{\beta}(z)$ est, d'après l'*équation III.9*, une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $\langle \beta^2 \rangle / 2$ ce qui conduit à une distribution de Rayleigh pour la biréfringence et à une distribution uniforme pour la direction des axes propres [Wai] :

$$\text{pdf}(\beta) = \frac{\pi\beta}{2\langle \beta \rangle^2} \exp - \frac{\pi\beta^2}{4\langle \beta \rangle^2} \text{ pour } \beta \geq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

$$\text{pdf}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } 0 \leq \theta < 2\pi$$

équation III.10

La longueur de corrélation L_F s'obtient à partir de la fonction d'auto-corrélation du vecteur biréfringence :

$$\left\langle \vec{\beta}(z).\vec{\beta}(z+u) \right\rangle = \frac{2}{\pi} \langle \beta \rangle^2 \exp - \frac{z}{L_F}$$

équation III.11

Ces trois modèles de biréfringence représentent les données d'entrées nécessaires au calcul de la PMD dans une fibre présentant une distribution de biréfringence aléatoire. La résolution des équations conduit à un DGD dont la distribution de probabilité est Maxwellienne, et dont la valeur moyenne est donnée par l'équation :

$$\langle DGD \rangle = \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} L_F \left(\exp\left(-\frac{z}{L_F} \right) + \frac{z}{L_F} - 1 \right)^{1/2}$$

équation III.12

Lorsque la longueur de fibre est très supérieure à L_F, l'expression se simplifie, et la valeur moyenne du DGD devient :

$$\langle DGD \rangle = \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \sqrt{L_F} \sqrt{z}$$

équation III.13

Le DGD croît donc comme la racine carrée de la longueur de fibre et est proportionnelle à la racine carré de la longueur de corrélation. Plus cette longueur est faible, i.e. plus les effets aléatoires sont importants et plus la valeur moyenne du DGD est faible. On définit dans la littérature une longueur de

couplage L_c correspondant à la longueur au bout de laquelle la puissance initialement contenue dans un mode de polarisation est équirépartie sur les modes propres locaux [Corsi99a]. Dans les modèles 2 et 3, la longueur de couplage et la longueur de corrélation sont identiques. Ce n'est en revanche pas le cas dans le modèle 1, ou la longueur de corrélation du vecteur biréfringence est infinie [Wai]. Cette dernière remarque associée au fait que la longueur de corrélation est une grandeur mesurable par des techniques POTDR [Galtarossa04, Wuilpart01] renforce l'intérêt pour les deux modèles associés à la description de l'évolution du vecteur biréfringence. Nous allons dans la suite étudier l'impact de ces modèles sur l'évolution de la PMD dans une fibre vrillée.

Chen modélise l'effet de la distribution aléatoire de la biréfringence dans l'hypothèse où la période de rotation de la fibre est inférieure à la longueur de couplage, i.e. $T<<L_c$. Il définit une fibre de longueur L comme une concaténation aléatoire de N tronçon de longueur égale à la longueur de couplage L_c et suppose que les couplages entre modes propres de polarisation ont lieu aux interfaces entre tronçon. Ce modèle permet de traiter les différences de temps de groupe accumulées selon chaque tronçon comme des quantités indépendantes. La valeur moyenne du DGD est alors simplement :

$$\langle DGD \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{L/L_c} DGD_i^2}$$

équation III.14

où DGD_i est le DGD accumulé sur un tronçon. Deux situations peuvent se présenter :

- Situation 1 : Le vrillage déterministe est tel que $J_0(A_{max})\neq 0$. L'expression de la valeur moyenne de $\Delta\tau$ est obtenue en insérant $DGD_i = (\partial\beta_l / \partial\omega)|J_0(A_{max})|$ dans l'*équation III.14* ce qui conduit au résultat 1 du *tableau III.2*.
- Situation 2 : Le vrillage déterministe est tel que $J_0(A_{max})=0$. Le DGD évolue périodiquement dans le régime courte distance. En appelant $\langle \Delta\tau^2 \rangle_T$ la valeur quadratique moyenne du DGD sur une période de vrillage, i.e. $\langle \Delta\tau^2 \rangle_T = \int_0^T DGD_i^2 dz$, on obtient le résultat 2 du *tableau III.2*. Il est important de noter que dans cette situation, le DGD peut augmenter lorsque la longueur de couplage diminue : les perturbations aléatoires de la rotation de la fibre ou de la biréfringence détruisent les relations conduisant à une évolution périodique du DGD. Ceci se traduit de façon statistique par une augmentation du DGD.

Dans ces deux situations, les différences de temps de groupe suivent une distribution Maxwelienne dont les valeurs moyennes sont données dans le *tableau III.2*.

Cas 1 : Evolution linéaire et T<<L_c	***Cas 2 : Evolution périodique et T<<L_c***
$\langle \Delta\tau(z) \rangle = \lvert J_0(A_{max}) \rvert \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \sqrt{L_c} \sqrt{z}$	$\langle \Delta\tau(z) \rangle \ \alpha \ \langle \Delta\tau^2 \rangle_T \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{L_c}}$

Tableau III.2 : Expressions du DGD dans le régime longue distance dans une fibre dont le profil de rotation est sinusoïdal

Galtarossa utilise le formalisme de Mueller et résout l'équation du vecteur PMD en utilisant les modèles 2 et 3 et distingue les situations suivantes : $T/L_b >> 1$, $T/L_b \approx 1$ et $T/L_b << 1$. Lorsque $T<<L_b$, un traitement perturbatif de l'*équation III.3* permet de déterminer une expression analytique de la valeur moyenne du DGD :

$$\langle DGD \rangle = \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \Phi \sqrt{L_F} \sqrt{z}$$

équation III.15

Φ est une fonction permettant de rendre compte de l'effet combiné du couplage de mode aléatoire et déterministe sur le DGD. Elle dépend de la longueur de corrélation L_F, et de la fonction de rotation de la fibre. Cette fonction est représentée sur la *figure III.4* pour différentes valeurs de L_F, T et A_{max} (A_o sur la figure).

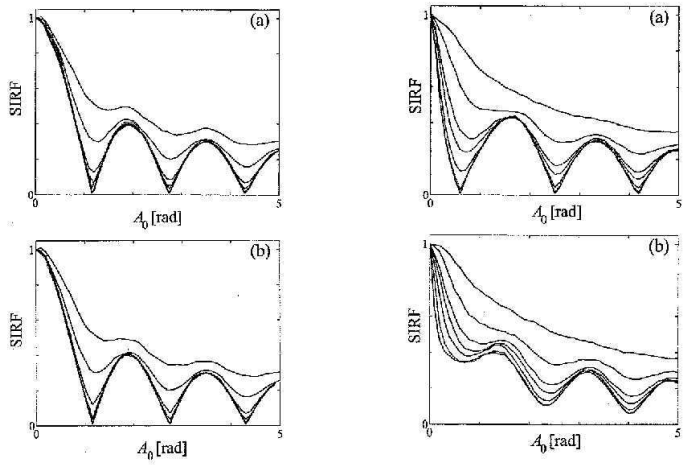

figure III.4 : Evolution du rapport de la valeur moyenne du DGD sur fibre vrillée et de la valeur moyenne du DGD sur fibre non vrillée en fonction de l'amplitude maximale de rotation pour un profil de rotation sinusoïdal. Les calculs sont effectués dans l'hypothèse de courte période (T<<L_b à gauche) et longue période (T≥L_b à droite). Les modèles FMM (modèle 2) et RMM (modèle 3) sont utilisés dans les deux cas, et sont représentés respectivement par les figures du haut et du bas. Sur chaque figure, les courbes du bas représentent des grandes longueurs de corrélation (faible couplage de mode), les courbes du haut des faibles longueurs de corrélation (fort couplage de mode).

Dans ce cas présent, le modèle de distribution de la biréfringence n'importe pas sur la valeur moyenne du DGD (*figures III.4 (a)* et *(b)* de gauche) et le comportement de la PMD est similaire à celui que l'on obtient dans une fibre ne présentant pas de biréfringence aléatoire[27]. En revanche lorsque, $T/L_b \approx 1$ ou $T/L_b >> 1$, et $L_F << L_b$, les deux modèles conduisent à des résultats différents concernant l'évolution du DGD en fonction de l'amplitude de rotation. En particulier, lorsque le FMM (modèle 2) est utilisé, les

[27] La fonction Φ tend vers la fonction de Bessel d'ordre 0 lorsque $L_F \rightarrow \infty$

conditions rendant le DGD périodique continuent d'exister, alors qu'elles disparaissent dans le RMM (modèle 3) (*figures III.4 (a)* et *(b)* de droite). Les résultats présentés sur la *figure III.4* montrent que l'efficacité du vrillage se détériore lorsque la longueur de corrélation décroît. Ce comportement est d'autant plus marqué que le rapport T/L_b est petit. Ce comportement s'explique par le fait que lorsque $T<<L_F$, l'évolution du DGD est gouvernée par les effets de rotation déterministe, tandis que lorsque $T/L_F \approx 1$ ou $T/L_F > 1$ les effets aléatoires contribuent au DGD sur des échelles de distance comparables à celles sur lesquelles les effets de rotation déterministes s'exercent. Les deux types de rotation peuvent donc s'influencer et se détruire mutuellement. En conclusion, nous pouvons dire que les trois modèles de biréfringence aléatoires présentés conduisent à des résultats cohérents en ce qui concerne la valeur moyenne du DGD dans le régime longue distance lorsque $T/L_F <<1$. La situation $T/L_F \geq 1$ nécessite des approfondissements. Du point de vue physique, il semble cependant que le troisième modèle soit le plus vraisemblable. Nous verrons au chapitre IV que ce point de vue est validé expérimentalement dans la littérature par des mesures de distribution de la biréfringence. Nous rappelons cependant que ces modèles supposent que la biréfringence est linéaire, et négligent donc toute présence de contraintes engendrant de la biréfringence circulaire. Or, nous avons vu dans le paragraphe d'introduction de ce chapitre que la biréfringence circulaire est toujours présente dans les bobines de conditionnement. De plus, le processus de câblage induit, lui aussi, des torsions mécaniques. Nous étudions donc dans le paragraphe suivant, l'effet de torsions externes sur le DGD dans le régime courte distance.

1.2.3 Effet d'un vrillage externe uniforme sur la PMD

La torsion mécanique d'une fibre optique, engendre de la biréfringence circulaire par effet photo-élastique [Ulrich79]. Un élément biréfringent initialement linéaire soumis à cette torsion devient elliptique. La biréfringence circulaire qui y est engendrée est proportionnelle au taux de rotation τ et au coefficient de contrainte optique g [Ulrich79]. La valeur du coefficient g est comprise entre 0.13 et 0.145 dans les fibres de télécommunication, et varie relativement peu en fonction du dopage dans les fibres faiblement dopées au Germanium [Ulrich79]. Pour décrire l'effet d'une torsion sur la PMD nous utilisons ici le formalisme de Mueller. Le vecteur biréfringence d'un milieu biréfringent linéaire dont les axes propres sont repérés par l'angle $\theta(z)$, et soumis à une torsion τ est donné par :

$$\vec{\beta}(z) = \begin{vmatrix} \beta_l \cos(2\theta(z) + 2\tau z) \\ \beta_l \sin(2\theta(z) + 2\tau z) \\ g\tau \end{vmatrix}$$

équation III.16

La prise en compte de la variation du coefficient g avec la fréquence conduit au vecteur PMD local suivant :

$$\vec{\Omega}_{local}(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \cos(2\theta(z) + 2\tau z) \\ \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} \sin(2\theta(z) + 2\tau z) \\ \frac{\partial g}{\partial \omega} \tau \end{vmatrix}$$

équation III.17

L'effet du vrillage externe uniforme est étudié respectivement par Schuh et par Li [Schuh95, Li04] sur des fibres initialement non vrillées ou vrillées sinusoïdalement.

1.2.3.1 DGD d'une fibre vrillée uniformément : prise en compte de la biréfringence circulaire

Pour des grandes longueurs de fibre, L'expression du DGD dans une fibre vrillée de façon uniforme est donnée par [Schuh95] :

$$DGD(z) = \frac{\left| \beta_l \frac{\partial \beta_l}{\partial \omega} + \frac{\partial g}{\partial \omega}(g-2)\tau^2 \right|}{\sqrt{\beta_l^2 + (g\tau - 2\tau)^2}} z$$

équation III.18

Le DGD s'annule pour une valeur de $\tau_o = \sqrt{-\beta_l (\partial \beta_l / \partial \omega) / [(g-2)(\partial g / \partial \omega)]}$ (β_l et sa dérivée par rapport à la fréquence sont des grandeurs de même signe)[28]. En dessous de cette valeur, le couplage de mode induit par la rotation des axes prédomine sur la "PMD circulaire", ce qui entraîne une diminution du DGD. Au-delà de cette valeur, la "PMD circulaire" devient prédominante et le DGD augmente linéairement avec le taux de rotation. Cette augmentation linéaire permet de mesurer la dérivée du coefficient g avec la fréquence. Les valeurs de $\partial g / \partial \omega$ sont obtenues de façon expérimentale par Schuh sur des fibres de type DSF (Dispersion Shifted Fiber). Il montre qu'une bonne approximation de la dépendance de g avec la fréquence est donnée par $\alpha(g/\omega)$, où le coefficient α vaut environ 0.09 dans les fibres DSF, et varie peu en fonction du dopage ($0.08 < \alpha < 0.09$). L'évolution du DGD normalisé par rapport au DGD en l'absence de vrillage est représentée sur la *figure III.5* en fonction du taux de rotation pour L_b= 5 m. Comme g et $\partial g / \partial \omega$ dépendent peu du dopage, τ_o ne va dépendre que de la biréfringence et de sa dérivée par rapport à la fréquence. Plus le produit $\beta_l(\partial \beta_l / \partial \omega)$ est grand, plus le taux de rotation de transition entre un régime de décroissance du DGD et un régime de croissance sera élevé. Ce dernier point suggère que la PMD des fibres non vrillées à fortes biréfringences est moins sensible que celle des fibres à faibles biréfringences à la torsion induite lors du conditionnement.

[28] En toute rigueur, pour cette valeur du taux de rotation, l'évolution du DGD en fonction de la distance est sinusoïdale.

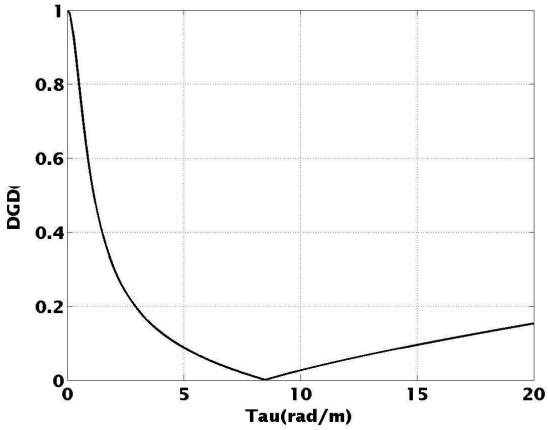

figure III.5 : Evolution du DGD normalisé dans une fibre biréfringente initialement non vrillée en fonction du taux de torsion τ

1.2.3.2 Fibre vrillée sinusoïdalement

Schuh à également étudié l'effet d'un vrillage externe sur une fibre vrillée sinusoïdalement [Schuh98]. La *figure III.6* représente l'évolution du DGD dans une fibre vrillée sinusoïdalement, telle que, A_{max}=12.56 rad, T=8 m et L_b=2.5 m ou 4.5 m. Le comportement vis à vis de la torsion est sensiblement différent de celui des fibres vrillées uniformément pour les faibles valeurs de τ où le DGD oscille fortement. Pour les très fortes valeurs de τ, on retrouve en revanche l'influence du terme circulaire de la biréfringence qui fait croître le DGD linéairement.

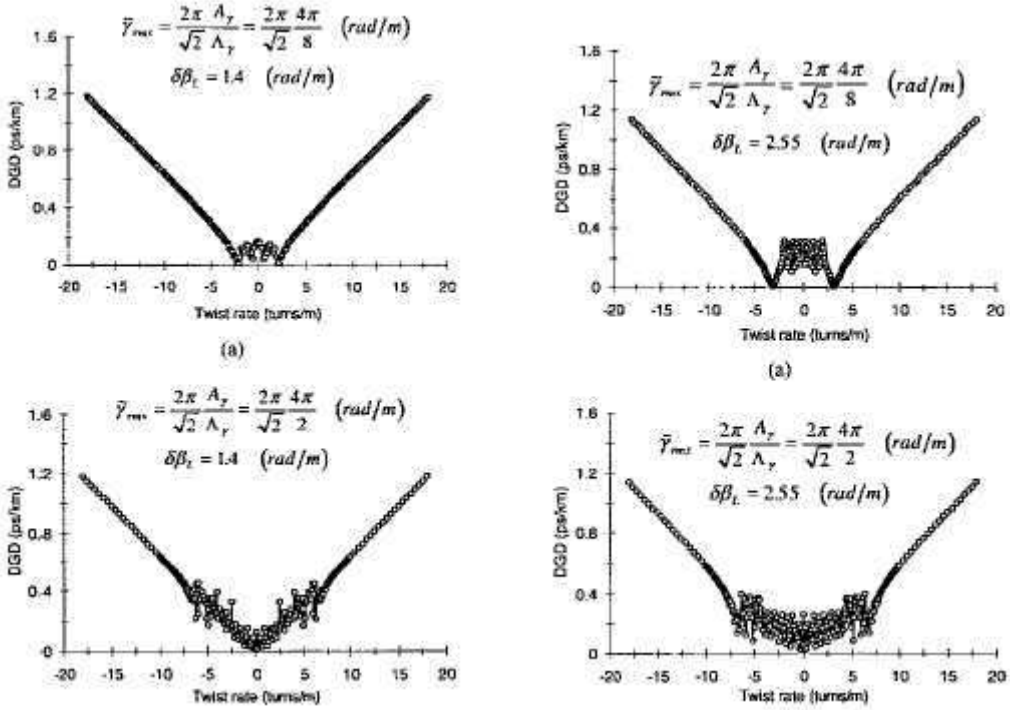

figure III.6 : Evolution du DGD dans une fibre vrillée de manière sinusoïdale en fonction d'une torsion externe uniforme ; sur les figures de gauche $\Delta\beta_l$=1.4 m^{-1} tandis que sur les figures de droite $\Delta\beta_l$=2.55 m^{-1} ; l'amplitude maximale de la rotation est de 4π rad ; la période de rotation est de 8 m sur les figures du haut, et de 2m sur les figures du bas.

Le comportement oscillatoire tend à diminuer en amplitude lorsque la période diminue (voir les deux figures du bas), mais tend aussi à persister pour des valeurs de τ plus grandes. Dans tous les cas, le comportement oscillatoire du DGD est hautement indésirable du point de vue du processus de fabrication. En effet, des valeurs de vrillage parasite de l'ordre de 0-3 trs/m sont fréquentes dans les bobines de conditionnement, une mauvaise optimisation de la rotation de la fibre pourra donc provoquer des fluctuations importantes du DGD. Lorsqu'on souhaite vriller une fibre de façon périodique lors de l'étirage, il faut veiller à obtenir un taux de vrillage maximal important afin de réduire l'amplitude des oscillations engendrées par la torsion parasite.

Cet état de l'art montre que la PMD est fortement affectée par la composante aléatoire de la biréfringence. L'approche envisagée dans la littérature pour réduire la PMD consiste à imprimer une rotation périodique à la fibre. En général, la PMD d'une fibre vrillée dépend de l'ensemble des paramètres β_l, T et $A_{max.}$. Certaines combinaisons de ces paramètres permettent d'obtenir une évolution périodique du DGD en fonction de la distance dans la fibre. Cette propriété est très intéressante mais est cependant impossible à obtenir dans la pratique pour deux raisons :

- Il est très difficile d'un point de vue technique de garantir des valeurs de T et de A_{max} avec une précision suffisante.
- La biréfringence évolue de façon aléatoire dans la fibre de sorte que les combinaisons rendant le DGD périodique évoluent avec la position dans la fibre.

Lorsque la longueur de battement est très importante comme dans les fibres SMF ($L_b \approx 20$ m), on peut, cependant, obtenir une réduction importante de la PMD en réduisant la période de rotation de la fibre. Lorsque $T/L_b << 1$, le DGD ne dépend que de A_{max} et décroît rapidement avec A_{max}. Lorsque la longueur de battement est petite comme dans les fibres de type spécial ($L_b < 1$ m), une limite technique apparaît et il devient difficile de se placer dans le régime $T/L_b << 1$. La PMD des fibres de type spécial est donc a priori une fonction complexe des paramètres β_l, T et $A_{max.}$. Afin de contourner cette limite, de nouveaux profils de rotation permettant d'obtenir des réductions importantes de la PMD, mais avec des taux de vrillage moins importants ont été recherchés. C'est dans cette optique que les rotations modulées en amplitude et en fréquences ont été proposées dans la littérature. En raison du nombre de paramètres à optimiser pour obtenir une bonne réduction de la PMD dans les fibres vrillées avec de tels profils, nous avons opté pour une approche différente. Nous proposons au paragraphe suivant une approche consistant à modifier simplement la forme de la rotation. Nous montrons au paragraphe suivant, qu'un vrillage triangulaire des axes permet de réduire considérablement le DGD ceci quelle que soit la biréfringence, sans modifier la période et l'amplitude maximale de rotation.

2 Vrillage sinusoïdal vs vrillage triangulaire

Dans les références [Galtarossa01b] et [Nolan], les auteurs étudient divers profils de rotation dans le régime tel que $T/L_b << 1$. Parmis les profils étudiés, le profil sinusoïdal semble le plus efficace, et c'est celui qui est le plus étudié dans la littérature. Suite à des essais de fibrage montrant une très bonne efficacité des rotations triangulaires nous avons décidé d'étudier le profil de rotation triangulaire de façon plus approfondie. Nous comparons dans ce paragraphe, le vrillage triangulaire et sinusoïdal des

axes vis à vis de la valeur du DGD sur des fibres à faibles et fortes biréfringences, avec et sans contraintes de torsion externes. Ce profil de rotation présente de plus l'avantage d'être abordable analytiquement pour l'ensemble des valeurs des paramètres β_l, T et A_{max}. Nous utilisons cette particularité afin d'étudier le comportement du DGD dans une fibre vrillée triangulairement vis à vis de la biréfringence.

2.1 Le vrillage triangulaire dans le régime $T/L_b << 1$

La raison première de l'étude d'un vrillage triangulaire provient d'essais de rotation réalisés à Conflans. Nous avons noté que les formes de rotation triangulaires obtenaient de bons résultats vis à vis de la PMD sur des fibres à faibles biréfringences. Nous étudions donc dans ce paragraphe le profil de rotation triangulaire dans le régime $T/L_b << 1$ grâce à l'*équation III.4*. Nous définissons une rotation triangulaire des axes de période T et d'amplitude maximale A_{max} comme suit :

$$\theta(z) = \begin{cases} 2A_{max} z / T & 0 < z < T/2 \\ 2A_{max}(1 - z/T) & T/2 < z < T \end{cases}$$

équation III.19

En utilisant l'*équation III.4* pour une longueur de fibre correspondant à un nombre entier N de période, on obtient l'expression suivante du DGD :

$$\Delta\tau(NT) = \frac{\partial\beta_l}{\partial\omega}\left|\frac{\sin A_{max}}{A_{max}}\right| NT$$

équation III.20

Le DGD, dans une fibre faiblement biréfringente vrillée triangulairement, évolue ainsi en sinus cardinal de l'amplitude maximale de la rotation. Les valeurs de résonance sont obtenues pour la fibre vrillée triangulairement lorsque A_{max} est un multiple de π. Si l'on compare les fonctions sinus cardinal et bessel d'ordre 0, associées respectivement au vrillage triangulaire et sinusoïdal, on se rend compte que le DGD d'une fibre vrillée triangulairement est toujours inférieure au DGD d'une fibre vrillée sinusoïdalement (voir *figure III.7*). La décroissance du DGD avec A_{max}, si l'on s'affranchit des effets de résonnance, est plus rapide dans la fibre vrillée triangulairement. Ceci se confirme mathématiquement par le comportement asymptotique des fonctions de Bessel d'ordre 0, et sinus cardinal qui sont respectivement en $1/\sqrt{A_{max}}$ et $1/A_{max}$. La décroissance dans la fibre vrillée triangulairement est donc $\sqrt{A_{max}}$ fois plus rapide que dans la fibre vrillée sinusoïdalement. Physiquement, ce comportement ressemble à un principe de moindre action, au sens où il semble préférable vis à vis du DGD, que la fibre ne s'arrête jamais de tourner, plutôt que d'alterner des phases de rotation très lentes et très rapides.

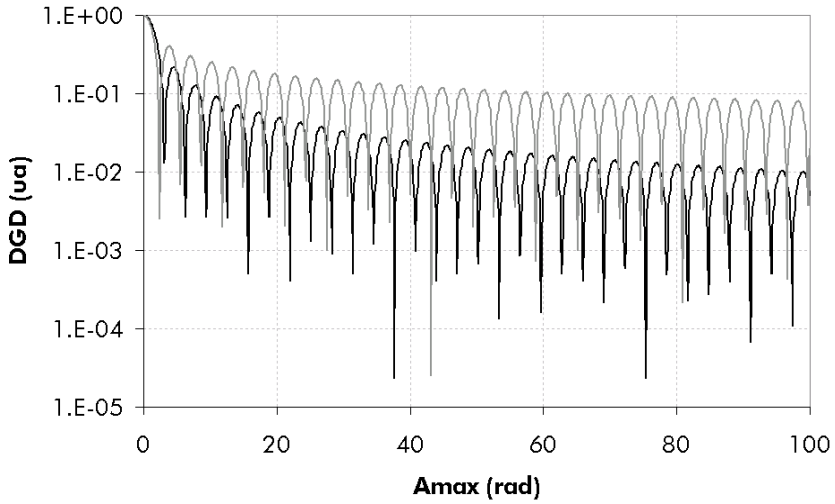

figure III.7 : Comparaison de l'évolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé dans des fibres à faible biréfringence vrillée triangulairement (en noir) et sinusoïdalement (en gris)

L'*équation III.20* n'étant valide que pour $T<<L_b$, elle n'est pas applicable sur des fibres de types spécial (10 cm$<L_b<$1 m) et est en limite d'application pour les fibres de types NZDSF 1 m $< L_b <$ 10 m ce qui nous amène à la seconde raison nous ayant poussé à étudier le vrillage triangulaire : une rotation triangulaire étant une succession de rotation uniforme, le calcul du DGD peut se faire aisément de façon entièrement analytique. On peut de ce fait avoir des informations intéressantes sur l'influence de la biréfringence sur le DGD. Nous commençons, à l'aide d'une méthode numérique, par comparer l'efficacité des deux profils pour des longueurs de battement comprises entre 10 cm et 10 m. Puis dans un second temps, nous étudions analytiquement le DGD d'une fibre vrillée triangulairement.

2.2 méthode de calcul

Nous utilisons la version discrétisée de l'équation d 'évolution du vecteur PMD (*équation I.18*) pour effectuer les calculs du DGD dans les fibres vrillées. Le calcul est effectué comme suit :

-On définit une concaténation de N tronçons sur une fibre de longueur L.

-Pour chaque tronçon, on définit une valeur de la biréfringence et une orientation des axes propres.

Calcul du DGD :

-Calcul du vecteur PMD local $\Delta\vec{\tau}_N = \dfrac{\partial\beta_N\vec{e}_N}{\partial\omega}$, où $\vec{e}_N$ est le vecteur de Stokes associé aux axes propres du tronçon N.

-Calcul de la matrice de Mueller R_N du tronçon N à partir de β_N et de $\vec{e}_N$.

-Calcul du vecteur PMD au bout de N tronçons puis calcul de son module.

Le calcul de la matrice de Mueller est effectué en utilisant l'expression ***A I.11*** [Gordon] :

$$R_N = I_d + sin(\beta_N\Delta z)(\vec{e}_N\times) + [1-cos(\beta_N\Delta z)](\vec{e}_N\times)(\vec{e}_N\times)$$

équation III.21

Chaque vecteur de Stokes unitaire associé aux axes propres des tronçons est défini de la manière suivante :

$$\vec{e}_N = \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}} \left| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \right.$$

équation III.22

où les β_i sont les composantes du vecteur biréfringence sur la sphère de Poincaré dans une base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\beta_N = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$ représente la biréfringence locale du tronçon.

Dans les simulations que nous avons effectuées pour comparer les profils sinusoïdaux et triangulaires nous avons supposé que la biréfringence de la fibre était linéaire et constante sur chaque tronçon. Pour un tronçon biréfringent linéaire, dont les axes propres font un angle θ_N avec l'axe x de la fibre, le vecteur de Stokes associé à l'axe propre est :

$$\vec{e}_N = \left| \begin{matrix} \cos 2\theta_N \\ \sin 2\theta_N \\ 0 \end{matrix} \right.$$

équation III.23

L'angle θ_N étant donné par une fonction sinusoïdale ou triangulaire suivant le cas. Les paramètres A_{max} et T sont définis dans le *tableau III.3* et sur la *figure III.8* :

Profil Triangle	***Profil sinus***
$\theta(z) = \begin{cases} 2A_{max} z / T & 0 < z < T/2 \\ 2A_{max}(1 - z/T) & T/2 < z < T \end{cases}$	$\theta(z) = \frac{A_{max}}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T} z\right)\right)$

Tableau III.3

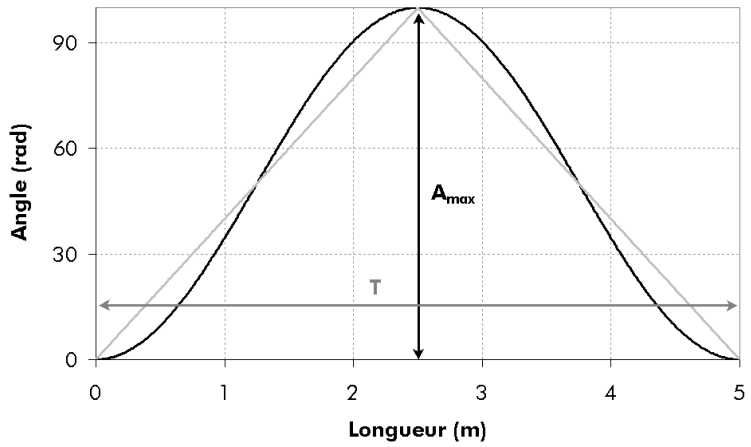

figure III.8 : profil de rotation triangulaire et sinusoïdal utilisés pour les calculs de PMD

La biréfringence locale est une constante que nous fixons au départ de la simulation. Le vecteur PMD local est donné par :

$$\Delta\vec{\tau}_N = \frac{\partial\beta_N}{\partial\omega}\vec{e}_N$$

équation III.24

La biréfringence de groupe est calculée en négligeant la dépendance de l'indice effectif avec la longueur d'onde : $\frac{\partial\beta_N}{\partial\omega} = \frac{\lambda}{cL_b}$. Pour les simulations concernant l'impact d'un vrillage externe, nous avons pris en compte l'effet de la biréfringence circulaire engendrée par la torsion ainsi que sa dispersion avec la longueur d'onde. Le vecteur de Stokes unitaire associé à chaque tronçon est obtenu en combinant l'*équation III.22* et l'*équation III.16* :

$$\vec{e}_N = \begin{vmatrix} \cos 2\theta_N \cos 2\varepsilon_N \\ \sin 2\theta_N \cos 2\varepsilon_N \\ \sin 2\varepsilon_N \end{vmatrix}$$

équation III.25

avec $\cos 2\varepsilon_N = \frac{\beta_N}{\delta\beta_N}$, $\sin 2\varepsilon_N = \frac{g\tau}{\delta\beta_N}$ et $\delta\beta_N = \sqrt{\beta_N^2 + g^2\tau^2}$

Le vecteur PMD devient :

$$\Delta\vec{\tau}_N = \begin{vmatrix} \frac{\partial\beta_l}{\partial\omega}\cos 2\theta_N \\ \frac{\partial\beta_l}{\partial\omega}\sin 2\theta_N \\ \frac{\partial g}{\partial\omega}\tau \end{vmatrix}$$

équation III.26

L'angle θ_N est obtenu pour chaque tronçon en sommant l'angle accumulé de façon interne (fonction triangle ou sinus) et l'angle accumulé de façon externe (pour la fonction sinus par exemple $\theta_N = (A_{max}/2)(1+\cos((2\pi/T)N\Delta z)) + \tau N\Delta z$).

2.3 Comparaisons numériques des vrillages triangulaires et sinusoïdaux

2.3.1 Calcul du DGD en fonction de A_{max}, T pour différentes valeurs de L_b

Dans ce paragraphe, nous calculons numériquement le DGD dans une fibre vrillée sinusoïdalement et triangulairement pour trois longueurs de battement différentes et une longueur de fibre de 100 m. La première valeur de L_b correspond aux longueurs de battements mesurées sur des fibres SMF, $L_b \approx 10$ m, la seconde aux longueurs de battements mesurées sur des fibres NZDSF, $L_b \approx 1$ m, et la troisième aux longueurs de battements mesurées sur des fibres de type spécial, $L_b \approx 10$ cm. Pour chaque longueur de battement, nous étudions l'évolution du DGD en fonction de l'amplitude maximale de rotation A_{max} pour trois valeurs de la période de rotation, T=1 m, 4.6 m et 9.55 m. On représente sur chaque figure, les résultats de simulations du profil triangulaire par des carrés et ceux du profil

sinusoïdal par des triangles. Nous avons rajouté en parallèle la fonction de Bessel J_0 en gris, et la fonction sinus cardinal en noir.

Les *figures III.9* à *III.11* représentent le calcul du DGD pour L_b=10 m. On note que la concordance entre les expressions analytiques *III.8* et *III.20* est très bonne pour les périodes T= 1 m et 4.6 m sur toute la plage de A_{max} et pour A_{max}>10 rad pour T=10 m. On peut constater que le DGD obtenu pour un vrillage sinusoïdal et triangulaire évolue très peu en fonction de la période de rotation conformément aux *équations III.8* et *III.20*. On note ensuite que la valeur du DGD obtenue par vrillage triangulaire est toujours inférieure à la valeur du DGD obtenu par vrillage sinusoïdal et qu'elle décroît plus vite en fonction de A_{max}.

Les *figures III.12* à *III.14* représentent le calcul du DGD pour L_b=1 m. On note que la décroissance en fonction de A_{max} du DGD obtenu pour un vrillage triangulaire est toujours plus importante que celle obtenue pour un vrillage sinusoïdal. Pour T= 1 m, les profils triangulaires et sinusoïdaux possèdent quasiment la même efficacité que pour la longueur de battement précédente. Cette efficacité commence à diminuer pour les périodes 4.6 m et surtout T=10 m, ou le profil sinusoïdal ne devient efficace (le DGD est divisé par 10) qu'à partir de A_{max}>80 rad. On note de plus que les points de résonance commencent à disparaître au faible A_{max} pour le profil sinusoïdal. Une bonne réduction du DGD est donc possible à l'aide du profil triangulaire pour des fibres de type SMF lorsque A_{max}>50 rad, le DGD est au moins divisée par 10 pour chaque période. Pour le profil sinusoïdal, en revanche, l'efficacité est discutable, le DGD n'est divisé par 10 que lorsque T=1 m et A_{max} > 60 rad.

Enfin, les *figures III.15* à *III.17* représentent le calcul du DGD pour L_b=10 cm. Les profils sinusoïdaux et triangulaires perdent dans presque tous les cas leurs efficacités. On note qu'une réduction appréciable du DGD est obtenue à l'aide du profil triangulaire lorsque T=1m et A_{max} > 50 rad et que les points de résonance disparaissent progressivement sur le profil sinusoïdal lorsque T augmente, mais qu'ils restent présents pour le profil triangulaire, ceci sera expliqué à l'aide de l'expression analytique du DGD dans une fibre vrillée triangulairement que nous développons au paragraphe 2.4.

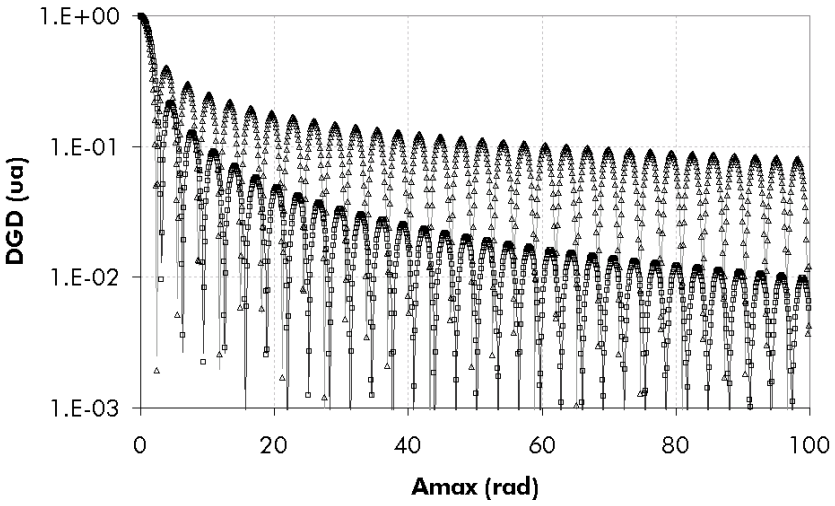

figure III.9 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de A_{max}, pour T=1m et L_b=10 m; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

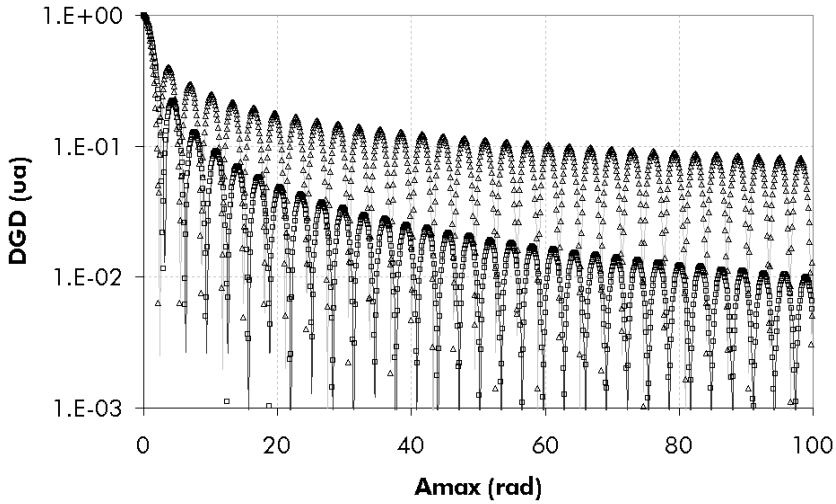

figure III.10 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=4.6m et L_b=10 m; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

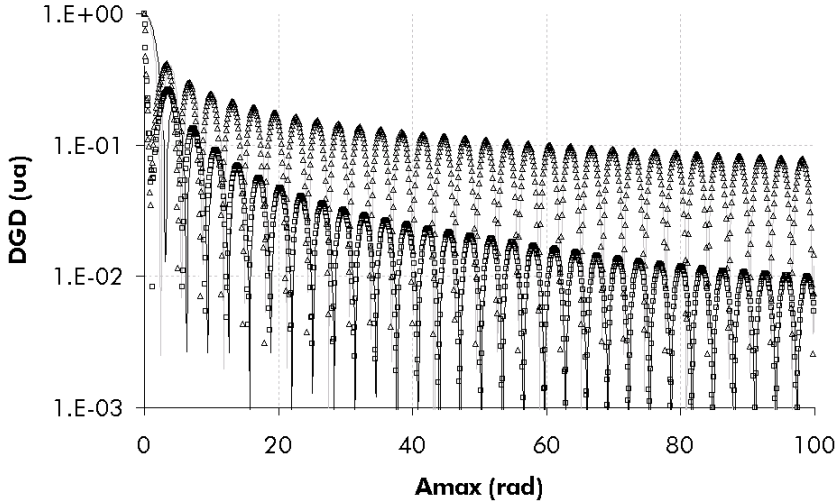

figure III.11 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=9.55 m et L_b=10 m; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

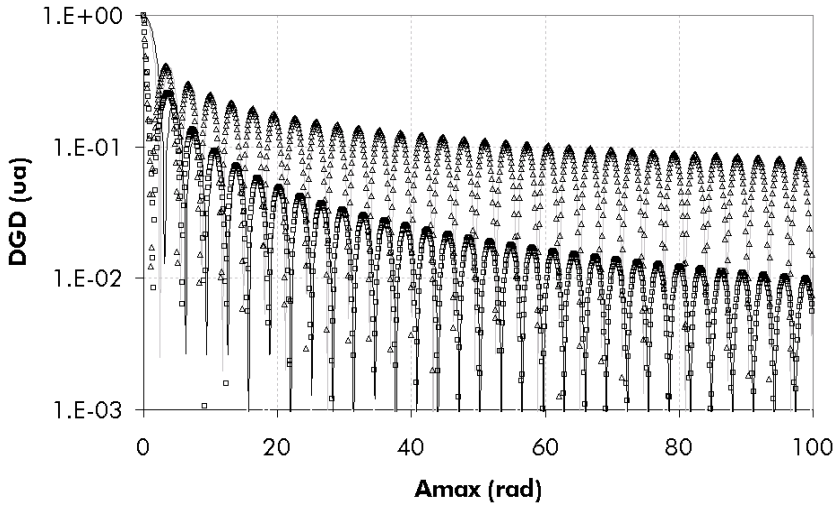

figure III.12 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=1 m et L_b=1m ; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

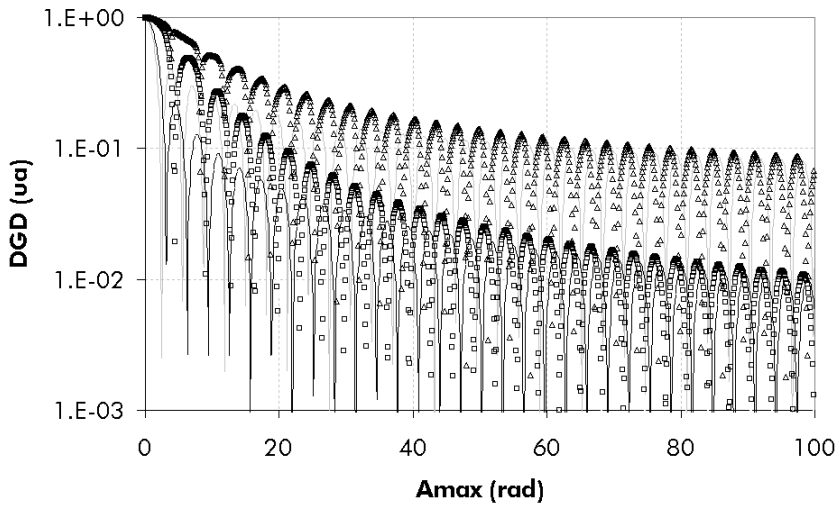

figure III.13 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=4.6 m et L_b=1 m; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

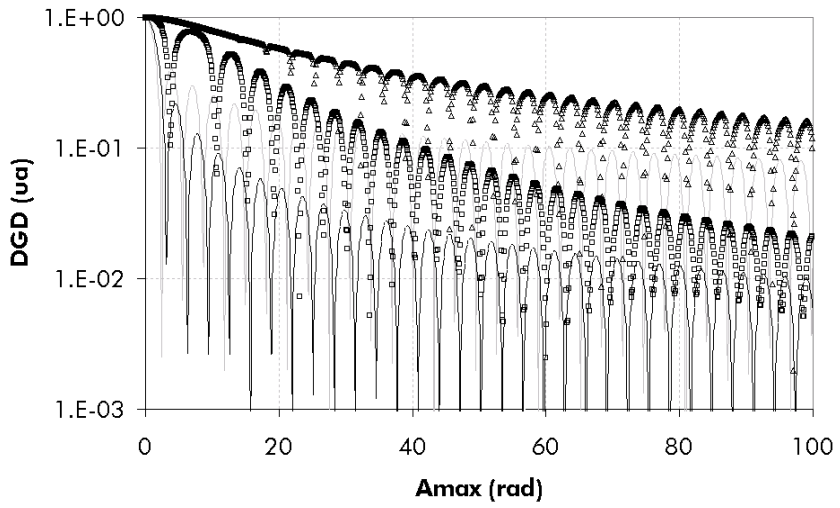

figure III.14 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=9.55 m et L_b=1 m ; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

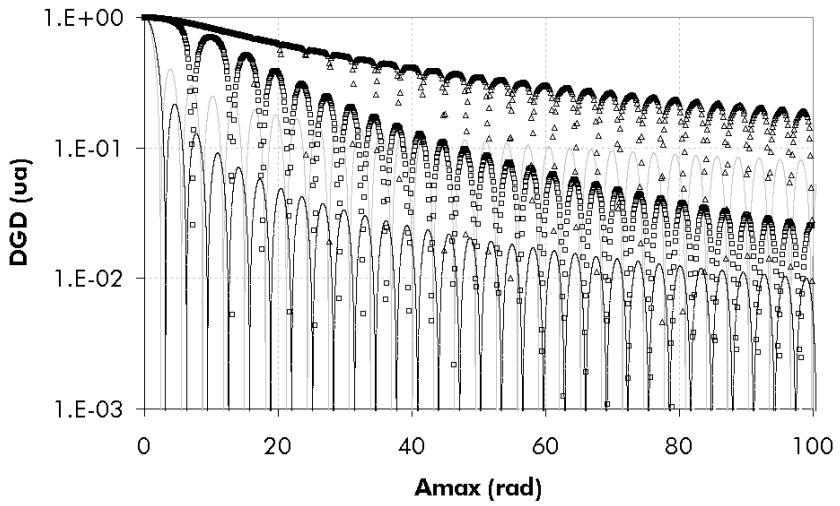

figure III.15 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=1 m et L_b=10 cm; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

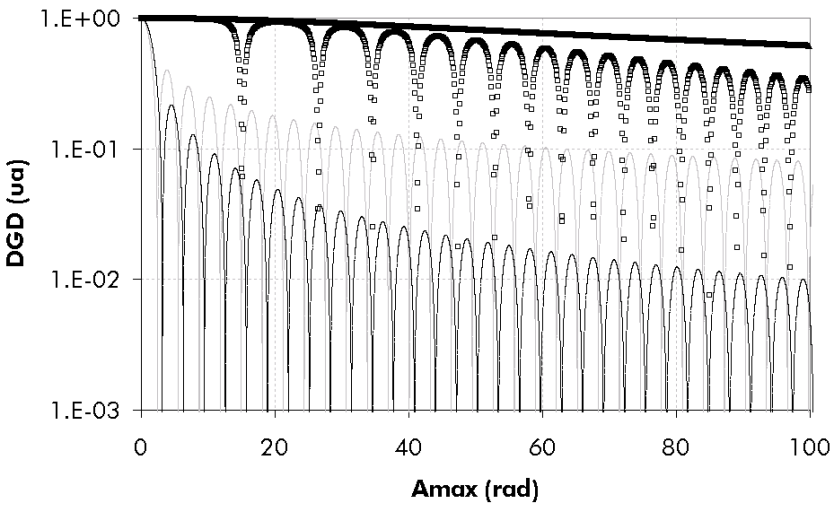

figure III.16 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=4.6 m et L_b=10 cm; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

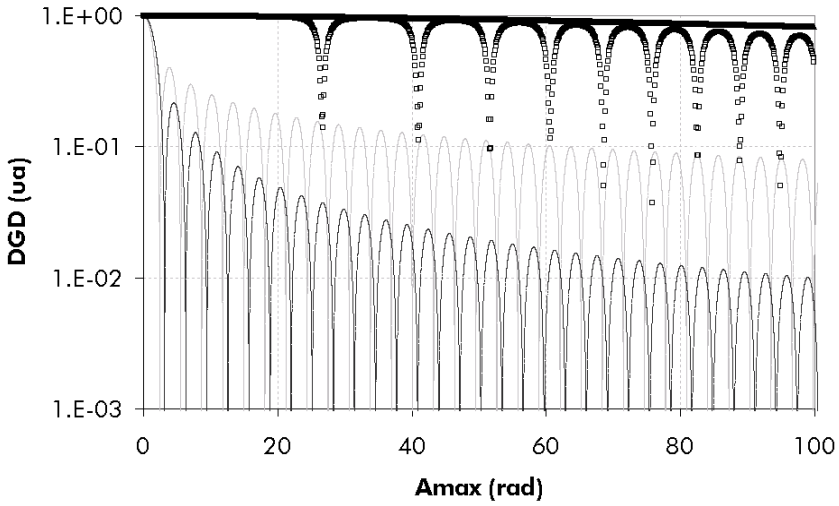

figure III.17 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé en fonction de $A_{max,}$ pour T=9.55 m et L_b=10 cm; les carrés représentent le vrillage triangulaire ; les triangles représentent le vrillage sinusoïdal

On peut tirer trois conclusions de ces simulations. La première concerne l'efficacité relative des deux profils de rotation : un vrillage triangulaire des axes propres est dans tous les cas plus efficace qu'un vrillage sinusoïdal du point de vue de la réduction du DGD. La seconde concerne l'efficacité des vrillages périodiques en général : pour une longueur de battement donnée, réduire le DGD revient à augmenter le A_{max} et réduire T (i.e. augmenter le taux de rotation maximum de la fibre). La dernière conclusion enfin concerne l'évolution "des points de résonance": nous avons pu constater que ceux ci dépendent fortement de l'ensemble des paramètres $\Delta\beta_l$, T et A_{max} et tendent à disparaître lorsque le taux de rotation diminue. L'importance de ces points de résonance doit cependant être relativisée : d'une part les effets aléatoires vont "gommer" les points de résonance de sorte que la courbe de variation du DGD en fonction des paramètres A_{max} et T apparaît lissée dans la réalité [Galtarossa02a, Chen02b]. D'autre part, il est utopique de vouloir "viser" un point de résonance du point de vue technique. En effet la précision maximale que nous pouvons atteindre dans la réalité sur le nombre de

tour imposé à la fibre est de l'ordre de ½ tours, soit π radians, ce qui correspond plus ou moins à la distance entre deux minima dans les courbes précédentes. Le comportement du DGD doit être appréhendé de façon globale, ce que nous ferons dans le paragraphe 2.4. Ces résultats ont été obtenus en supposant que la biréfringence est linéaire et déterministe. Nous prenons en compte dans le paragraphe suivant l'impact du conditionnement à travers une torsion uniforme surimposée à la rotation imprimée lors du fibrage. Nous comparons alors l'efficacité respective des deux profils de rotation.

2.3.2 Comportement vis à vis d'un vrillage uniforme parasite

Nous présentons dans ce paragraphe des simulations du DGD d'une fibre soumise à un vrillage triangulaire ou sinusoïdal en fonction d'une torsion τ appliquée à la fibre. Nous comparons ensuite les comportements relatifs des profils triangulaires et sinusoïdaux. Les *figures III.18* à *III.21* représentent le comportement du DGD d'une fibre vrillée de manière sinusoïdale et d'une fibre vrillée triangulairement en fonction du taux de vrillage uniforme τ. Les valeurs des paramètres de fibrage sont dans les deux cas A_{max}=100 rad, T=2 m, L=1000 m, τ=0-60 rad/m (0-10 tours/m). Des longueurs de battement de 10 cm, 1 m, 2 m et 3 m ont été utilisées. De manière générale, on constate que le DGD fluctue de façon importante pour les faibles valeurs de τ, et que ces fluctuations sont plus importantes pour le profil de rotation sinusoïdal. La diminution des fluctuations, et l'augmentation linéaire avec le taux de vrillage provient de la contribution de plus en plus importante de la biréfringence circulaire qui croît linéairement avec le taux de vrillage uniforme. La relative faiblesse des fluctuations pour le profil de rotation triangulaire pour les valeurs de L_b supérieure à 10 cm est en revanche plus difficile à expliquer. Ce dernier point ainsi que le comportement du profil de rotation triangulaire vis à vis du profil de rotation sinusoïdal pour la longueur de battement 10 cm renforce l'intérêt de ce profil pour une utilisation process. Les *figures III.22* à *III.25* représentent des simulations pour T=4 m et pour les mêmes paramètres que précédemment. Les comportements observés pour cette valeur de la période sont similaires au cas précédent. On note cependant qu'en général, le DGD fluctue de manière plus importante pour les deux profils de rotation. Le profil de rotation triangulaire reste cependant plus fiable. Ce comportement rejoint celui observé par Siddiqui sur de faibles taux de rotation (cf 0). On observe de plus un décrochage du DGD pour le profil de rotation triangulaire pour des valeurs de τ proches de 55 rad/m pour les trois dernière valeurs de la longueur de battement.

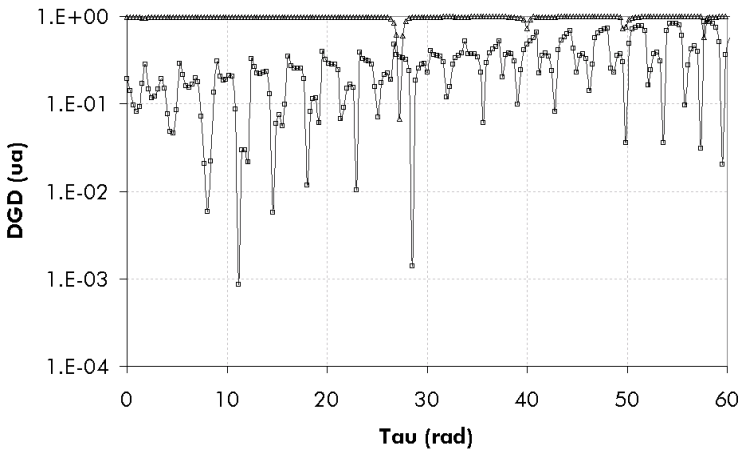

figure III.18 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=2 m ; la longueur de battement vaut 10 cm

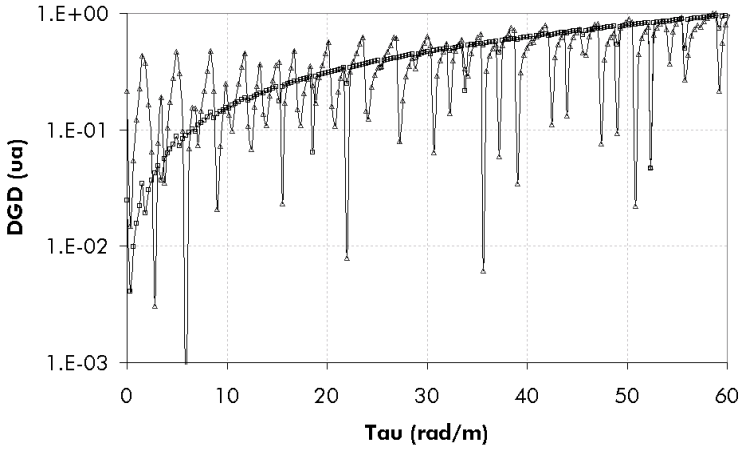

figure III.19 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=2 m ; la longueur de battement vaut 1 m

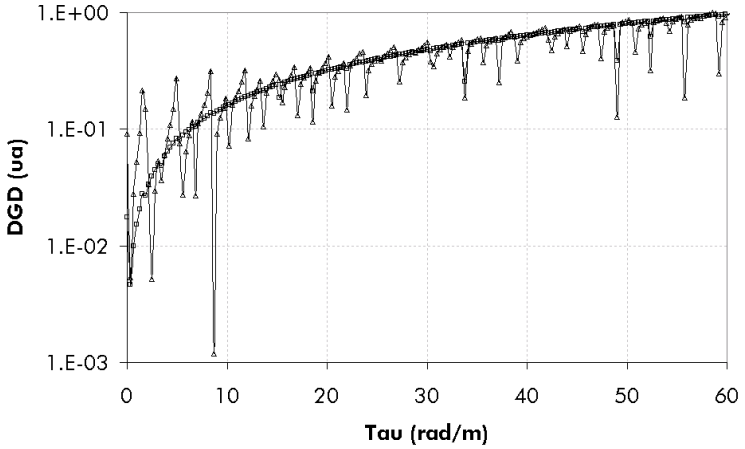

figure III.20 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=2 m ; la longueur de battement vaut 2 m

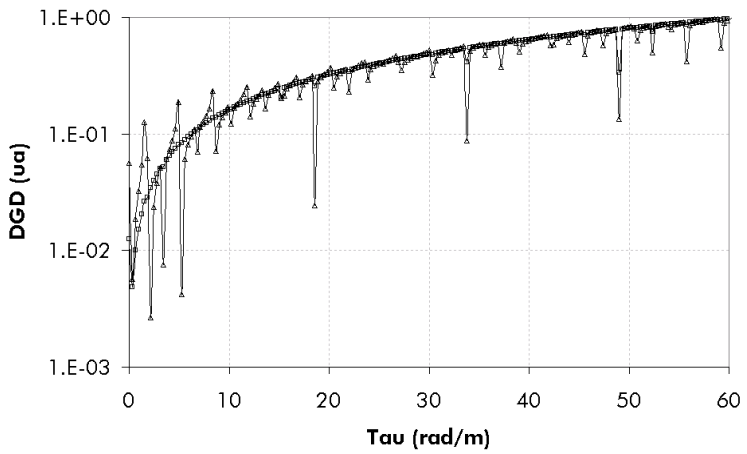

figure III.21 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=2 m ; la longueur de battement vaut 3 m

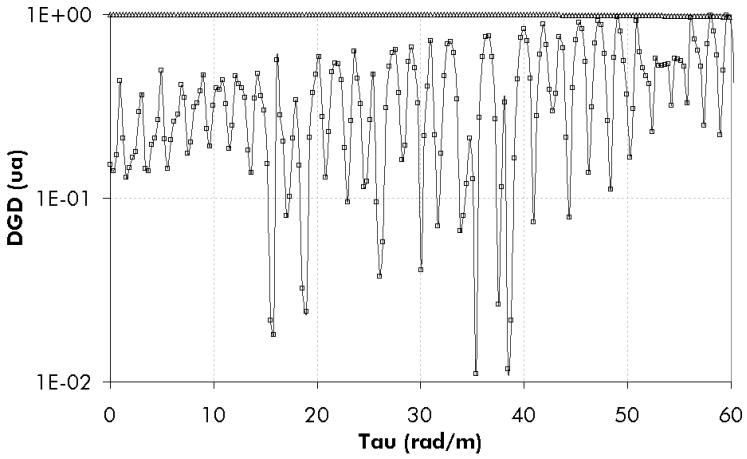

figure III.22 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=4 m ; la longueur de battement vaut 10 cm

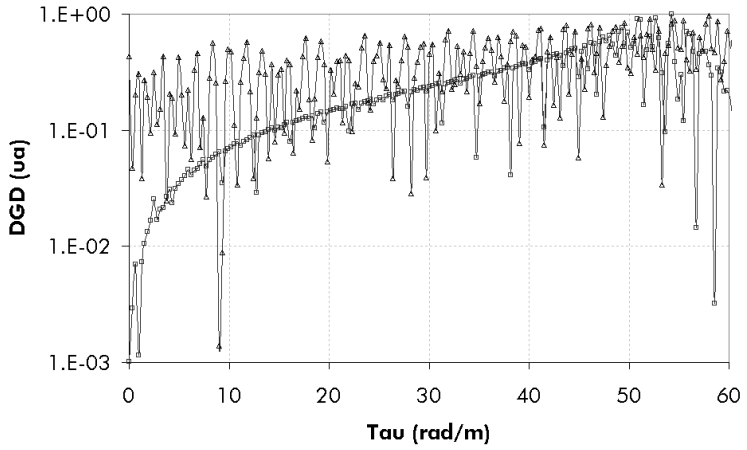

figure III.23 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=4 m ; la longueur de battement vaut 1.08 m

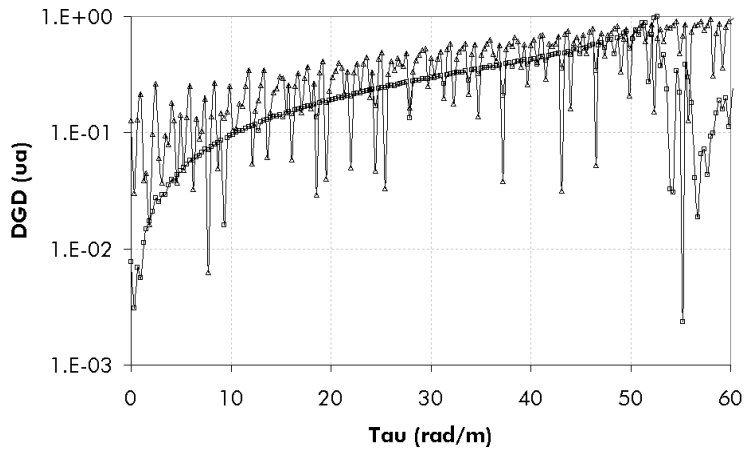

figure III.24 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=4 m ; la longueur de battement vaut 2.08 m

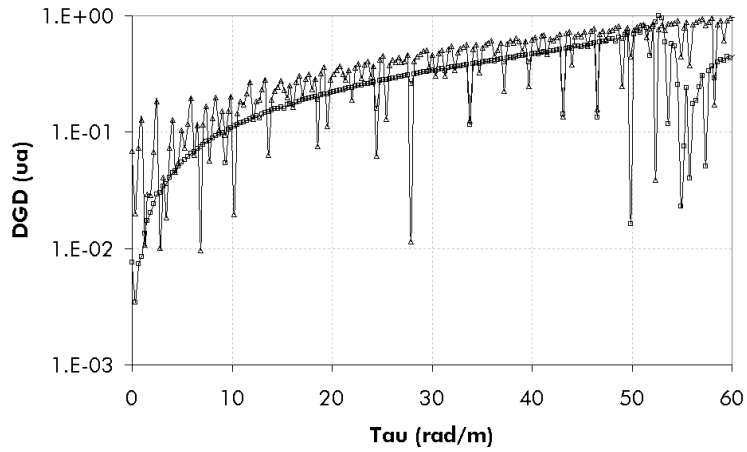

figure III.25 : Evolution du DGD normalisé par rapport au cas non vrillé de fibres vrillées triangulairement (carré) et sinusoïdalement (triangle) en fonction du taux de rotation externe. Les paramètres de rotation sont A_{max}=100 rad, T=4 m ; la longueur de battement vaut 3.07 m

Ces simulations montrent que le vrillage triangulaire est toujours plus stable vis à vis des contraintes de torsion engendrées lors du conditionnement. Nous ne possédons cependant pas d'explications

satisfaisantes sur les origines de cette résistance, et de façon plus générale sur l'origine des fluctuations observées lorsqu'une fibre vrillée périodiquement est soumise à un vrillage externe uniforme.

2.3.3 Conclusion du paragraphe

Nous avons montré numériquement qu'une rotation triangulaire des axes propres est plus efficace qu'une rotation sinusoïdale pour toutes les valeurs de la longueur de battement et qu'elle est plus résistante aux contraintes de torsion engendrées lors du conditionnement. Des expressions analytiques du DGD disponibles pour les deux types de rotation lorsque $T<<L_b$ confirment les tendances numériques. Ces données numériques et analytiques permettent de comprendre le

comportement du DGD vis à vis de la biréfringence et des paramètres de fibrage dans les fibres de types SMF et NZDSF. Une description analytique du domaine $L_b < T$ n'est pas disponible dans la littérature, excepté pour de faible valeur de A_{max} [Pizzinat03a]. Nous allons dans le paragraphe suivant décrire une méthode permettant de déterminer l'expression analytique du DGD dans une fibre soumise à un vrillage triangulaire de ses axes propres. Cette expression analytique va nous permettre, entre autres, d'obtenir des informations supplémentaires sur l'effet de la biréfringence dans les fibres vrillées de type spécial.

2.4 Etude du vrillage triangulaire en fonction de la longueur de battement

Nous calculons dans ce paragraphe une expression analytique du DGD d'une fibre dont les axes évoluent de façon triangulaire avec la distance [Bouquet]. Nous utilisons cette expression pour mieux comprendre l'impact de la biréfringence, de l'amplitude maximale et de la période de la rotation sur l'évolution de la PMD dans une fibre vrillée périodiquement. Notre objectif est de dégager des paramètres clés ou des comportements clés intéressants pour la réduction du DGD et sa mesure. Nous utilisons, dans ce paragraphe, la représentation exponentielle de la matrice de Jones exposée en Annexe I. Nous déterminons dans un premier temps la matrice de Jones du milieu biréfringent équivalent à la fibre située entre l'abscisse 0 et l'abscisse T. Nous en déduisons ensuite la matrice de Jones associée à N périodes ainsi que le vecteur PMD et le DGD. Nous étudions enfin différents régimes délimités par le rapport $T\beta_l/4A_{max}$ et obtenons une expression extrêmement simple du DGD.

2.4.1 DGD et vecteur PMD associés à N périodes

L'angle de rotation θ de la fibre évolue entre 0 et T selon la fonction triangle donné dans le *tableau III.3*. La matrice $U(T,0)$ est obtenue en concaténant la matrice de Jones du milieu biréfringent situé entre 0 et $T/2$ et la matrice de Jones du milieu biréfringent situé entre $T/2$ et T. La matrice de Jones d'un milieu biréfringent uniformément twisté s'exprime de la façon suivante entre les abscisses z et z' [Pellat Finet] :

$$U(z',z) = exp(-j\sigma_3\theta(z'))exp\left(-j(\beta_l\sigma_1 - 2\tau\sigma_3)\frac{z'-z}{2}\right)exp(j\sigma_3\theta(z))$$

équation III.27

Les matrices $exp(-j\sigma_3\theta(z'))$, $exp(j\sigma_3\theta(z))$ sont les matrices de passage du repère fixe au repère tournant avec les axes propres de la fibre. En concaténant les matrices de Jones de chaque demi-période et en utilisant l'*équation III.27*, on obtient la matrice de Jones suivante pour le milieu biréfringent compris entre 0 et T (Annexe II.1) :

$$U(T,0) = \cos\delta\, I_d - j\hat{e}_\delta \sin\delta$$

équation III.28

où $\vec{e}_\delta$ et 2δ sont respectivement le vecteur propre et le déphasage de l'élément biréfringent équivalent au tronçon de fibre compris entre 0 et T. Le vecteur $\vec{e}_\delta$ vérifie l'*équation III.29* :

$$\vec{e}_\delta = \frac{1}{\sin\delta}\left(\frac{\sin 2\Delta}{2\Delta}\frac{T}{2}\beta_l\vec{e}_1 + \left(\frac{\sin\Delta}{\Delta}\right)^2\frac{T}{2}\beta_l A_{max}\vec{e}_2\right)$$

équation III.29

où $2\Delta = 2\sqrt{(T\beta_l/4)^2 + A_{max}^2}$ est le déphasage de l'élément équivalent au tronçon de fibre compris entre 0 et T/2. C'est un paramètre clé pour la suite des calculs. Les expressions de $\cos\delta$ et $\sin\delta$ sont données en Annexe II.1. Elles dépendent de A_{max}, T et β_l. Il est intéressant de remarquer ici que quelles que soient les valeurs de ces trois paramètres, l'élément biréfringent équivalent au tronçon de fibre compris entre 0 et T reste toujours linéaire. On obtient la matrice de Jones associée à N périodes en concaténant N matrices de Jones $U(T,0)$. Comme la fonction de rotation de la fibre est périodique et comme la biréfringence linéaire est supposée constante, les éléments biréfringents compris entre kT et (k+1)T pour k=1 à N sont identiques. Il est donc possible d'écrire la matrice de Jones de N éléments de la façon suivante :

$$U(NT,0) = (\cos\delta\, I_d - j\hat{e}_\delta \sin\delta)^N = \cos N\delta\, I_d - j\hat{e}_\delta \sin N\delta$$

équation III.30

A partir de cette expression on peut calculer le vecteur PMD associé à N tronçons (Annexe II.2) :

$$\vec{\Omega} = 2N\frac{\partial\delta}{\partial\omega}\vec{e}_\delta - 2\left|\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}\right|\sin^2(N\delta)\left|\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}\right|^{-1}\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}\times\vec{e}_\delta + \left|\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}\right|\sin(2N\delta)\left|\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}\right|^{-1}\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}$$

équation III.31

Les vecteurs $\vec{e}_\delta$, $\left|\partial\vec{e}_\delta/\partial\omega\right|^{-1}\partial\vec{e}_\delta/\partial\omega$ et $\left|\partial\vec{e}_\delta/\partial\omega\right|^{-1}(\partial\vec{e}_\delta/\partial\omega)\times\vec{e}_\delta$ étant des vecteurs unitaires et orthogonaux, le DGD s'obtient directement à partir de l'*équation III.31* :

$$DGD(NT) = 2\sqrt{N^2\left(\frac{\partial\delta}{\partial\omega}\right)^2 + \left|\frac{\partial\vec{e}_\delta}{\partial\omega}\right|^2 \sin^2 N\delta}$$

équation III.32

L'expression générale du DGD comporte deux termes, un terme évoluant périodiquement avec le nombre de période et un terme évoluant linéairement avec le nombre de période. Suivant la distance de propagation z (A_{max}, T et L_b étant fixés), le DGD va d'abord passer par une phase transitoire (z allant de 0 à quelques périodes T) pendant laquelle il va osciller fortement. Au-delà de cette phase, l'évolution linéaire du DGD est dominante. On va voir dans la suite, que l'importance de cette évolution transitoire est d'autant plus grande que $T\beta_l/4$ est grand devant A_{max}. En utilisant les expressions de $\cos\delta$, $\sin\delta$ ainsi que l'expression de $\vec{e}_\delta$, on peut calculer explicitement $\partial\delta/\partial\omega$ et $\partial\vec{e}_\delta/\partial\omega$. On obtient après calcul les expressions suivantes des deux termes intervenant dans l'*équation III.32* :

$$\left|\frac{\partial \vec{e}_\delta}{\partial \omega}\right|^2 \sin^2 N\delta = \left(\frac{T\beta_l/4}{\Delta}\right)^2 \left(\frac{A_{max}}{\Delta}\right)^2 \left(1-\frac{\sin 2\Delta}{2\Delta}\right)^2 \left(\cos^2\Delta + \frac{A_{max}^2}{\Delta^2}\sin^2\Delta\right)^{-2} \frac{T^2\Delta\tau^2}{16}\sin^2 N\delta$$

équation III.33

$$N^2\left(\frac{\partial\delta}{\partial\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sin\Delta}{\Delta}\right)^2 \left(\frac{A_{max}}{\Delta}\right)^4 \left(1+\left(\frac{T\beta_l}{4A_{max}}\right)^2 \frac{\Delta}{\tan\Delta}\right)^2 \left(\cos^2\Delta + \frac{A_{max}^2}{\Delta^2}\sin^2\Delta\right)^{-1} \frac{T^2\Delta\tau^2}{4}N^2$$

équation III.34

Ces expressions dépendent de β_l, A_{max}, N, T, Δ et du DGD local $\Delta\tau = \partial\beta_l/\partial\omega$. Δ peut se simplifier lorsque l'un des deux termes A_{max} ou $T\beta_l/4$ est dominant par rapport à l'autre (i.e. on étudie le comportement du rapport $4A_{max}/T\beta_l$ qui représente physiquement le nombre de tour par longueur de battement). On donne dans le tableau suivant la valeur typique charnière de A_{max} (i.e. cas $A_{max}=T\beta_l/4$) en fonction du type de fibre et de T.

	T≈ 1 m	T≈ 4 m
NZDSF : $L_b \approx$ 4 m → 10 m		A_{max} ≈ 1.6←0.63 rad
RDF : $L_b \approx$ 1 m → 2 m		A_{max} ≈ 6.3←3 rad
Fibres de type spécial : $L_b \approx$ 10 cm → 50 cm	A_{max} ≈ 16←3 rad	A_{max} ≈ 64←12 rad

Tableau III.4 : valeurs charnières de A_{max} en fonction du type de fibre

Les valeurs de A_{max} utilisées en usine sont de l'ordre de 100 rad. Elles dépassent donc largement les valeurs charnières des fibres NZDSF et RDF[29] ; on peut donc supposer que pour ces fibres $A_{max} >> T\beta_l/4$. Pour les fibres de type spécial en revanche, les valeurs charnières de A_{max} sont très élevées de sorte qu'en usine $A_{max} \approx T\beta_l/4$.

Dans la suite nous allons étudier le comportement du DGD dans deux régimes : le premier régime est tel que A_{max} est au plus de l'ordre de $T\beta_l/4$ (Cas des fibres de type spécial ; § 2.4.2) : Cette situation représente physiquement une fibre dont le nombre de tour par longueur de battement est faible ou moyen (i.e. l'évolution de la polarisation dans la fibre est principalement dominée par la biréfringence). Le second régime est tel que $A_{max} >> T\beta_l/4$ (Cas des fibres NZDSF et RDF ; § 2.4.3) : Cette situation représente physiquement une fibre dont le nombre de tour par longueur de battement est très élevé (i.e. l'évolution de la polarisation dans la fibre est principalement dominée par la rotation de la fibre)

2.4.2 Régime $0 \leq A_{max} \leq T\beta_l/4$: cas des fibres de type spécial

La *figure III.26* et la *figure III.27* correspondent au calcul du DGD en fonction de A_{max} pour une période T=19.2 m, une longueur de battement de 11.23 cm (soit β_l= 56 rad/m) et une longueur de

[29] Les fibres de type RDF sont des fibres à dispersion inversée.

fibre L=96 m (N=5) et L= 960 m (N=50). Les cercles noirs représentent les simulations et les traits pleins noirs l'*équation III.32*.

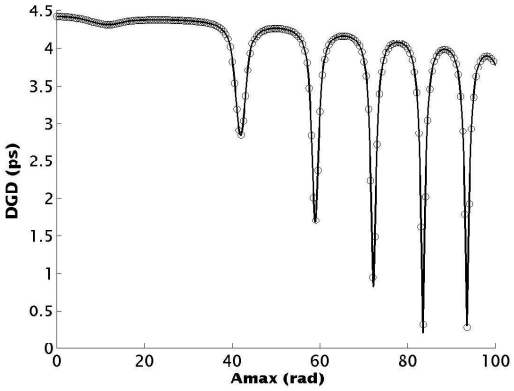

figure III.26 : Evolution du DGD en fonction de A_{max} pour une longueur de fibre L=5T

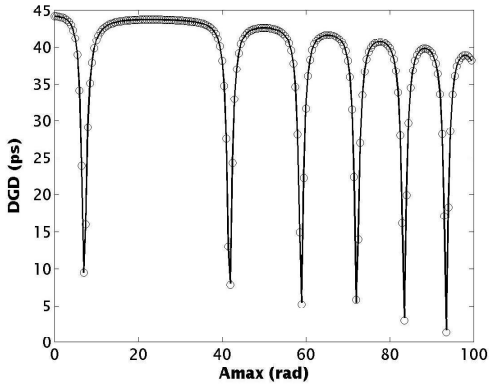

figure III.27 : Evolution du DGD en fonction de A_{max} pour une longueur de fibre L=50T

On peut constater tout d'abord que les valeurs du DGD obtenues analytiquement et numériquement sont en très bon accord, ce qui valide les *équations III.32*, *III.33* et *III.34* pour ce jeu de paramètres. On remarque ensuite sur ces figures que les minimums du DGD sont mieux marqués pour L=960 m et se rapprochent de la valeur zéro, et que plus A_{max} augmente à L constant plus les minimums tendent vers zéro. Pour comprendre ces résultats, il faut s'intéresser respectivement aux comportements du terme proportionnel à N et au comportement du terme proportionnel à $\sin N\delta$ en fonction de A_{max}, T et L_b. La *figure III.28* représente l'*équation III.34* en pointillé, et l'*équation III.33* en traits pleins pour des paramètres de simulation identiques à ceux utilisés pour les *figures III.26* et *III.27*. On peut constater que sur cette plage de A_{max}, les minimums de l'*équation III.34* atteignent la valeur zéro et semblent correspondre aux maximums de l'*équation III.33*.

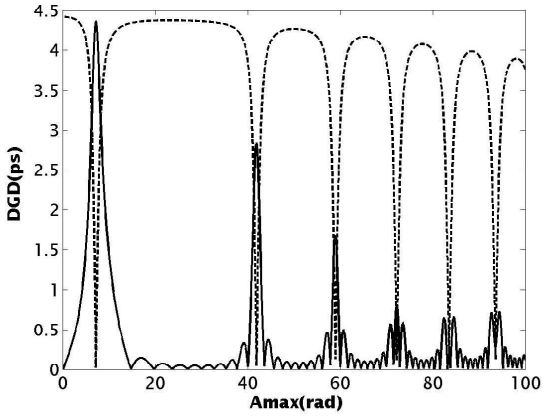

figure III.28 : Evolution du terme linéaire et du terme sinusoïdal en fonction de A_{max}

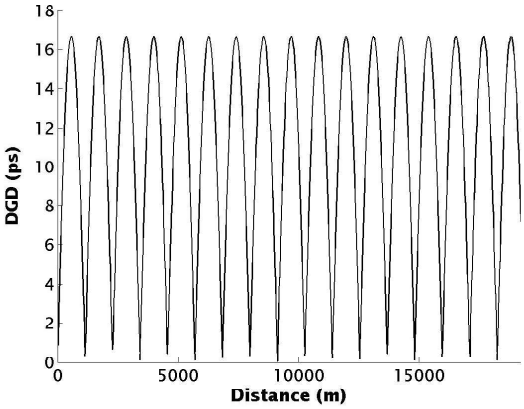

figure III.29 : Evolution périodique du DGD en fonction du nombre de période

Les "points de résonance" sont obtenus pour des valeurs nulles de l'*équation III.34*, soit pour :

$$\frac{\tan \Delta}{\Delta} = -\frac{(\beta_l T / 4)^2}{A_{max}^2}$$

équation III.35

Dans ce cas, le DGD est une fonction périodique du nombre de période comme représentée sur la *figure III.29* pour les paramètres de simulation de la *figure III.28* et A_{max}=7,105 rad. On peut constater ensuite sur la *figure III.28* que plus A_{max} augmente, plus la contribution de l'*équation III.33* dans la valeur du DGD diminue, ce qui explique la forme similaire des *figures III.26* et *figure III.27* aux forts A_{max}. La différence entre les courbes de ces deux figures aux faibles A_{max} provient donc du terme sinusoïdal, et reflète le comportement transitoire du DGD :

- Aux faibles longueurs, le comportement oscillatoire domine. Les valeurs de "résonance" du DGD sont très peu différentes des autres valeurs (celles donnant un comportement linéaire du DGD) et sont donc peu marquées dans la courbe DGD en fonction de A_{max} (voir la figure *III.26* aux deux premières résonances en particulier).
- Aux grandes longueurs, le comportement linéaire domine. Les valeurs de "résonances" du DGD sont faibles devant les autres valeurs et sont donc très marquées dans la courbe DGD en fonction de A_{max}.

Aux grandes longueurs, le DGD pour des fibres de type spécial est dominé par le terme linéaire (*équation III.34*) lorsque A_{max} est différent d'une valeur de résonance. Du fait des variations aléatoires de la biréfringence et de la difficulté de garantir un A_{max} et un T strictement constant tout au long de la fibre du point de vue du processus de fabrication, on peut supposer que ces résonances n'existent pas sur les fibres réelles ou qu'elles sont fortement atténuées. De ce fait, seule l'évolution "globale" du DGD avec les paramètres A_{max}, T, $\Delta\beta$ est importante. Pour une fibre de type spécial réelle, le DGD sera donc décrit correctement par l'expression suivante :

$$DGD(L = N\times T) = L\,\Delta\tau\left|\frac{\sin\Delta}{\Delta}\right|\underbrace{\left(\frac{A_{max}}{\Delta}\right)^2\sqrt{\left(1+\left(\frac{T\beta_l/4}{A_{max}}\right)^2\frac{\Delta}{\tan\Delta}\right)^2\left(\cos^2\Delta+\frac{A_{max}^2}{\Delta^2}\sin^2\Delta\right)^{-1}}}_{*}$$

équation III.36

Le DGD est proportionnel au DGD local $\Delta\tau$, à la longueur L de fibre, à la valeur absolue du sinus cardinal de Δ, et à un terme supplémentaire (*) dépendant de A_{max}, T, β_l de façon complexe. Il est important de remarquer que le DGD dépend explicitement de la biréfringence, ceci de façon non linéaire. Cette dépendance complexe permet d'expliquer la sensibilité importante des fibres de type spécial à la longueur de battement, ainsi qu'à ses variations avec la longueur d'onde.

2.4.3 Régime $A_{max} >> T\beta_l/4$: cas des fibres NZDSF et RDF

L'expression du vecteur PMD et du DGD est obtenue lorsqu'à T et β_l fixé, A_{max} devient très grand ou lorsqu' à A_{max} fixé, la période de rotation de la fibre devient très petite devant la longueur de battement à la longueur d'onde de calcul. Après calcul, on constate que le terme $N^2(\partial\delta/\partial\omega)^2$ devient très supérieur au terme $\left|\partial\vec{e}_\delta/\partial\omega\right|^2 \sin^2 N\delta$ quel que soit N et pour presque toutes les valeurs de A_{max}

,T et β_l (valeurs de résonances exclues puisqu'elles annulent $\partial\vec{e}_\delta / \partial\omega$). les *équations III.32* et *III.34* se réduisent alors aux *équations III.37* et *III.38* (Annexe II.3) :

$$\vec{\Omega} = 2N\frac{\partial\delta}{\partial\omega}\vec{e}_\delta$$

équation III.37

$$DGD(L = N\times T) = L\Delta\tau\left|\frac{\sin A_{max}}{A_{max}}\right|$$

équation III.38

avec

$$\vec{e}_\delta = \frac{\sin A_{max}}{|\sin A_{max}|}\cos A_{max}\vec{e}_1 + |\sin A_{max}|\vec{e}_2$$

équation III.39

On retrouve le résultat du § 2.1 : le DGD d'une fibre optique dont les axes ont été vrillés de façon triangulaire évolue en sinus cardinal de l'amplitude maximum de rotation de la fibre ; les états principaux de polarisation ne dépendent que de A_{max} (ils sont notamment indépendants de la longueur d'onde). Lorsque A_{max} est un multiple de π, l'évolution du DGD est périodique. La *figure III.29* représente les deux composantes des états principaux de polarisation calculées à l'aide des paramètres de simulation précédents. La courbe en pointillé et la courbe en trait pleins représentent respectivement les projections selon $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ des états principaux de polarisation calculés numériquement. Les cercles et les étoiles représentent respectivement les composantes selon $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ données par l'*équation III.39*.

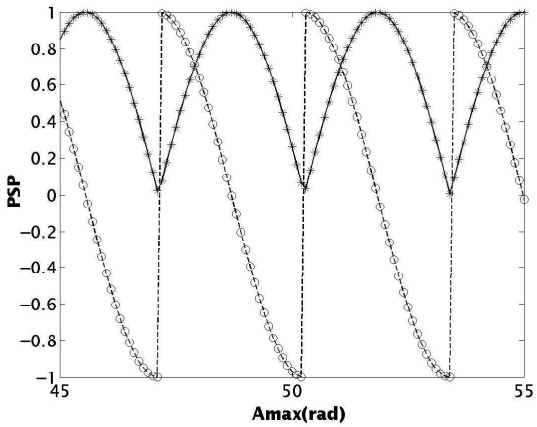

figure III.29 : Evolution des PSP en fonction de A_{max} lorsque $T<<L_b$

Contrairement aux fibres de type spécial, le DGD des fibres NZDSF et RDF et donnée par une expression extrêmement simple : l'*équation III.38*. Comme pour les fibres de type spécial, le DGD est proportionnel au DGD local, et à la longueur L de fibre. En revanche, la dépendance aux autres paramètres A_{max}, T, β_l est uniquement contenue dans le sinus cardinal de A_{max}. Le DGD est donc indépendant de la période T de la rotation de la fibre, et surtout il ne dépend pas explicitement de la biréfringence. La sensibilité des fibres NZDSF et RDF à la biréfringence est donc beaucoup moins importante que celle des fibres de type spécial.

2.4.4 Etude de l'enveloppe de l'évolution du DGD

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'impact relatif de l'amplitude maximale de rotation A_{max}, de la période T et de la biréfringence β_l dans l'évolution du DGD. Nous faisons l'hypothèse que seule "l'enveloppe " du DGD est une information pertinente, compte tenu des effets aléatoires et de l'incertitude sur les valeurs des rotations appliquées. Pour déterminer cette enveloppe, nous négligeons le terme périodique (*équation III.33*) et nous cherchons les valeurs de A_{max}, T et β_l qui permettent de découpler l'évolution des termes périodiques en Δ des autres termes dans l'*équation III.36* [Bouquet]. Nous obtenons ainsi une expression extrêmement simple décrivant l'enveloppe de l'évolution du DGD en fonctions de A_{max}, T et β_l :

$$NT\frac{\partial\beta_l}{\partial\omega}\frac{\sqrt{A_{max}^2+(T\beta_l/4)^4}}{\Delta^2}$$

équation III.40

Les *figures III.30* et *III.31* représentent l'évolution du DGD calculé grâce à l'*équation III.40* et représenté en trait continu, puis l'évolution du DGD calculé grâce à l'*équation III.32* et symbolisé par des carrés. La *figure III.30* et la *figure III.31* représentent le DGD calculé sur une période et sur 100 périodes. Sur chaque figure, le DGD est calculé pour trois valeurs de la biréfringence, 1 rad/m, 12 et 56 rad/m. La période de 5 m est choisie pour être de l'ordre de grandeur des longueurs de battement usuelles, i.e. T compris entre 1 m et 20 m. A partir de l'*équation III.40*, on peut discuter plus simplement de l'impact de la biréfringence sur le DGD dans les fibres vrillées triangulairement. On constate premièrement que le produit de la biréfringence et de la période apparaît à la puissance quatre au dénominateur, et que l'amplitude de rotation maximale apparaît à la puissance deux. En fonction des valeurs relatives de la période et de la longueur de battement, l'impact du terme $(T\beta_l/4)^2$ évolue plus rapidement que le terme A_{max}^2.

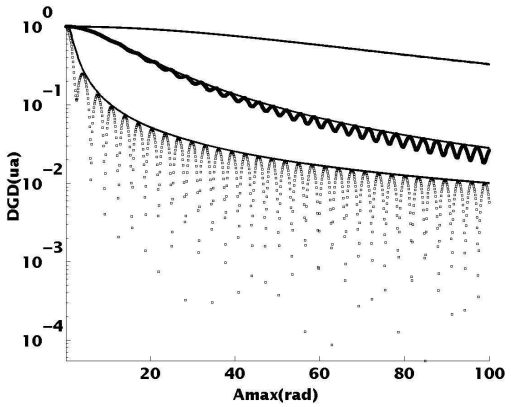

figure III.30 : Evolution du DGD et évolution de l'enveloppe du DGD en fonction de A_{max} pour une longueur de fibre L=T

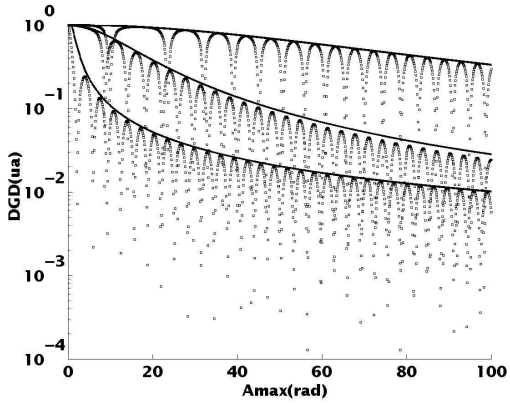

figure III.31 : Evolution du DGD et évolution de l'enveloppe du DGD en fonction de Amax pour une longueur de fibre L=100T

On note ensuite, que le DGD obtenu au bout de 1 période fixe le DGD obtenu au bout d'un nombre quelconque de période, i.e. $DGD(NT) \leq NDGD(T)$. Ce comportement est une caractéristique des fonctions de rotation périodiques, elle peut être démontrée en utilisant la décomposition de Floquet de

la matrice de Jones de la fibre vrillée. Cette décomposition permet d'écrire la matrice de Jones de n'importe quel milieu vrillé périodiquement sous la forme suivante :

$$U(z,0) = \Lambda(z) exp - j\hat{F}z$$

équation III.41

où $\Lambda(z)$, $\hat{F}$ sont deux matrices présentant les propriétés suivantes :

- $\Lambda(z) = \Lambda(z+T)$ avec $\Lambda(0) = I_d$
- $\hat{F}$ est indépendant de z

Ces deux propriétés permettent de déduire que $U(NT,0) = exp - j\hat{F}NT$. Dans le cas d'une rotation triangulaire nous avons pu obtenir une expression analytique et $\hat{F}T = \delta\hat{e}_\delta$. Dans le cas d'une rotation périodique quelconque en revanche, il est beaucoup plus difficile d'obtenir une expression analytique et on doit avoir recours à des méthodes perturbatives [Casas]. Dans tous les cas, Le vecteur $\vec{F}$ représente une sorte de vecteur biréfringence effectif, et sont module F la biréfringence effective associée au biréfringent équivalent situé entre les abscisses z=0 et z=T. Ce résultat généralise la notion de vecteur biréfringence effectif développée par [Ellison00a] lorsque la biréfringence est très faible. Ainsi, pour les grandes longueurs de fibre, on peut déterminer la forme de l'évolution du DGD à partir de l'évolution sur une période. Cette propriété de la PMD des fibres vrillées périodiquement présente un intérêt du point de vue de la mesure. Nous verrons, en effet, dans le chapitre concernant la mesure à l'aide de méthodes réflectométriques, que la PMD peut être estimée en théorie sur les fibres à faibles biréfringences à l'aide de cette notion de biréfringence effective. Dans le cas de fibres à forte biréfringence, le DGD est relié à la dérivée par rapport à la fréquence de la grandeur *F*.

3 Conclusion du chapitre

Nous avons étudié dans un premier temps le comportement de la PMD dans les fibres vrillées. Nous avons vu qu'une rotation périodique permet de réduire de façon significative la valeur du DGD et permet de limiter l'accumulation de vrillage parasite engendrant de la biréfringence circulaire. Nous avons vu, d'un point de vue théorique, que les vrillages périodiques permettent d'annuler périodiquement la valeur du DGD. Du fait de la présence d'une composante aléatoire dans la biréfringence, ces effets de résonance sont détruits. De fait, seule l'évolution "globale" du DGD en fonction de la biréfringence et des paramètres de vrillage possède une réelle signification. Afin de faire face aux distributions de biréfringence, des rotations modulées en amplitude et en fréquence ont récemment été proposées.

Du fait du nombre de paramètres à optimiser du point de vue théorique et technique nous avons opté pour une solution plus simple en conservant une rotation périodique mais en modifiant la forme de la rotation. Nous avons alors comparé une forme triangulaire du vrillage et une forme sinusoïdale. Il ressort de cette étude qu'un vrillage triangulaire des axes propres de la fibre offre deux avantages comparés à une rotation sinusoïdale :

- *Il permet d'obtenir une meilleure réduction du DGD ceci quelles que soient les* valeurs *de la biréfringence et des paramètres de vrillage.*
- *Il offre une meilleure résistance aux contraintes de torsion externes. Les oscillations du DGD observées aux faibles valeurs de torsions lorsque la rotation de la fibre est sinusoïdale sont pratiquement éliminées lorsque la rotation de la fibre est triangulaire.*

Nous avons ensuite étudié le vrillage triangulaire de façon analytique. Nous avons pu obtenir une expression simple qui majore les valeurs de DGD et permet d'obtenir aisément le comportement global en fonction de la biréfringence et des paramètres de vrillage.

Nous mentionnons cependant qu'une rotation triangulaire parfaite est impossible à obtenir du point de vue technique. Il est en effet mécaniquement impossible d'inverser instantanément le sens de rotation de la fibre. Ainsi, lorsqu'un profil de rotation triangulaire est théoriquement visé, le profil de rotation obtenu réellement, présente nécessairement des temps d'arrêt. L'effet de ces temps d'arrêt sur la valeur du DGD reste à approfondir. Nous verrons cependant au chapitre IV, que le profil de rotation triangulaire obtenu sur fibre est très proche d'un profil de rotation triangulaire réel. On peut donc estimer que les résultats théoriques présentés dans ce chapitre restent raisonnablement valables dans la réalité.

Chapitre IV : Caractérisation du couplage de mode et de la biréfringence dans les fibres de télécommunication

1 LES METHODES EXPERIMENTALES UTILISEES 135

1.1 METHODES REFLECTOMETRIQUES 135

1.1.1 Exemple de configuration de mesure 137

1.1.2 Caractérisation de la distribution de la biréfringence 137

1.1.2.1 Mesure de biréfringence et de la longueur de corrélation 138

1.1.2.2 Mesure de la rotation des axes propres 139

1.1.2.3 Mesure du vrillage imprimé lors du fibrage 141

1.1.3 Conclusion du paragraphe 143

1.2 METHODE MAGNETO OPTIQUE 144

2 CARACTERISATION DES EFFETS DE POLARISATION DANS LE REGIME LONGUE DISTANCE 146

2.1 MESURE DE LA PERIODE DE ROTATION DE LA FIBRE 146

2.1.1 Caractéristiques de l'appareil de mesure et description du montage 146

2.1.2 Caractérisation du vrillage 147

2.1.2.1 Simulation de trace POTDR et extraction des paramètres de vrillage 148

2.1.2.1.1 Exemple sur une fibre vrillée sinusoïdalement 148

2.1.2.1.2 Mesure de la période de rotation 149

2.2 MESURE DE LA PMD A L'AIDE D'UNE TECHNIQUE POTDR EN RESOLUTION METRIQUE : APPLICATIONS AUX FIBRES VRILLEES SINUSOÏDALEMENT 150

2.2.1 Lien entre la notion de vecteur biréfringence effectif et le DGD 151

2.2.2 Mesure de la PMD sur fibre vrillée 152

2.3 CONCLUSION DU PARAGRAPHE 154

3 CARACTERISATION DE LA POLARISATION DANS LE REGIME COURTE DISTANCE 156

3.1 BANC DE MESURE ET REGLAGE 156

3.2 EXEMPLES DE MESURE 157

3.3 LA MESURE MAGNETO-OPTIQUE APPLIQUEE AUX FIBRES VRILLEES 158

3.3.1 Calcul de l'état de polarisation en sortie de fibre 158

3.3.2 Vecteur biréfringence magnéto-optique 160

3.4 APPROXIMATION LONGUEUR DE BOBINE INFINIMENT FINE 161

3.4.1 Expression simplifiée de l'état de polarisation de sortie 161

3.4.2 Expression simplifiée du vecteur biréfringence magnéto-optique 162

3.5 APPLICATION DU MODELE 162

3.5.1 Application aux fibres non vrillées 162

3.5.2 Application du formalisme aux fibres uniformément vrillées 163

3.5.2.1 Mesure dans la configuration standard : mesure de g 163

3.5.2.2 Domaine de validité de l'approximation bobine infiniment fine : calcul du vecteur biréfringence (cas d'une fibre uniformément vrillée) 165

3.5.2.2.1 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1mm 166

3.5.2.2.2 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1cm 167

3.5.3 Application du formalisme aux fibres possédant un vrillage sinusoïdal 168

3.5.3.1 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1mm 168

3.5.3.2 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1cm 168

3.5.3.3 Méthode de reconstruction des caractéristiques locales de biréfringence 169

3.5.3.3.1 Mesure exacte de β_l et de τ 169

3.5.3.3.1.1 Calcul du taux de rotation pour h=1 mm 170

3.5.3.3.1.2 Calcul du taux de rotation pour h=1cm 171

3.5.3.3.2 Calcul approché du taux de rotation 172

3.5.3.3.2.1 Validation numérique 172

3.5.3.3.2.2 Détermination expérimentale du taux de rotation 173

3.5.4 Application du formalisme aux fibres vrillées de façon quelconque 174

3.6 CONCLUSION DU PARAGRAPHE 3 176

4 CONCLUSION DU CHAPITRE 178

Nous avons vu aux chapitres II et III que le DGD dépend, de façon générale, de la biréfringence, et des caractéristiques de la fonction de rotation (forme, période et amplitude) imprimée lors de l'étirage. Il est donc important de pouvoir caractériser expérimentalement ces paramètres, afin de contrôler, d'une part, la qualité des fibres, et d'autre part, de veiller à la bonne application du vrillage. Cette double nécessité est renforcé par le fait que si l'on connaît parfaitement la fréquence et l'amplitude de l'oscillation de la poulie lors de l'étirage, on ne connaît pas la rotation qui est réellement appliquée à la fibre. Dans ce chapitre nous allons donc nous intéresser à la caractérisation de la biréfringence et du couplage de mode dans le régime longue distance et courte distance. Dans le régime longue distance nous utilisons des méthodes réflectométriques afin de caractériser les évolutions de la polarisation sur des distances comprises entre 10 cm et 10 m. Dans le régime courte période, nous utilisons une méthode nous permettant de caractériser l'évolution de la polarisation sur des distances nettement inférieures à la celles autorisées par la méthode réflectométrique. Cette méthode est basée sur l'effet magnéto-optique. Après un bref état de l'art des deux méthodes, nous nous intéressons premièrement au § 2 aux mesures effectuées en POTDR (de l'anglais Polarization Optical Time Domain Reflectometry) : mesure de la période de rotation et étude qualitative de la PMD dans une fibre vrillée périodiquement et faiblement biréfringente. Ensuite, au § 3 nous nous intéressons aux mesures effectuées grâce à la méthode magnéto optique : modélisation de la mesure au § 3.3 et § 3.4, application à la mesure du coefficient de contrainte optique g sur des fibres uniformément vrillées au § 3.5.2 et enfin applications aux fibres vrillées périodiquement au § 3.5.3. Nous présentons en particulier une mesure du taux de rotation sur une fibre vrillée sinusoïdalement au § 3.5.3.3.2.2.
Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous nous arrêtons quelques instants sur les notations que nous allons utiliser tout au long de ce chapitre.

Partie POTDR

$\vec{S}(z_{rd})$	: état de polarisation mesuré en sortie pour un point de rétro-diffusion situé à l'abscisse z_{rd}
$\vec{e}$	: état de polarisation en entrée de fibre
$R(z_{rd},0)$	: matrice de Mueller associée à la portion de fibre située entre les abscisses z=0 et $z=z_{rd}$
M	: matrice de Mueller associée à la réflexion
$\vec{S}_{avant}$	: état de polarisation avant la réflexion
$\vec{S}_{aprés}$	: état de polarisation après la réflexion
$\vec{\beta}_{eff}, L_{beff}$	: vecteur biréfringence effectif et biréfringence effective associés à une fibre vrillée sinusoïdalement

Partie magnéto-optique

L, z_b et h	: longueur de la fibre, position et épaisseur de la bobine ;
$\vec{e}$, $\vec{p}$	: état de polarisation des polariseurs d'entrée et de sortie ;
$\vec{\beta}(z)$	: vecteur biréfringence local correspondant à la position z de la fibre ;
β_l	: biréfringence linéaire ;

β_c	: biréfringence circulaire ;
$\theta(z)$	: angle de rotation des axes propres de la fibre à la position z ;
τ	: taux de rotation de la fibre, $\tau(z_b) = \partial\theta(z_b)/\partial z_b$;
$\beta_H = 2VH$	: biréfringence circulaire induite par le champ magnétique ;
$\alpha_H = \beta_H h$	: angle de Faraday (partie circulaire du déphasage induit par la bobine) ;
V , H	: constante de Verdet (10^{-6} dans la silice) et champ magnétique appliqué par la bobine.
$\Re, \Re_t$	: repère fixe et repère tournant suivant les axes propres de la fibre ;
X_t	: le t en indice d'une grandeur X quelconque représente l'expression de cette grandeur dans $\Re_t$; la même grandeur sans indice est exprimée dans $\Re$;
X^{-1}	: inverse de la grandeur X ;
$\vec{S}(L, z_b)$	: état de polarisation pour une position z dans la fibre ;
$\vec{S}(L)$, $\vec{S}(z)$	: état de polarisation pour une position z dans la fibre en l'absence de champ ;
$R(z', z)$	: Matrice de Mueller (MdM) entre les abscisses z et z' ;
$R_{bob}(z', z)$	: MdM de la bobine entre z et z' ;
$R_{mo}(z_b)$	: MdM représentant l'ensemble de la fibre pour une position z_b de la bobine ;
$R(2\theta(z_b))$	: matrice de rotation des axes propres de la fibre, i.e. matrice de rotation autour de l'axe circulaire d'un angle égal à $2\theta(z_b)$.

1 Les méthodes expérimentales utilisées

1.1 Méthodes réflectométriques

Lors de la propagation dans une fibre optique inhomogène, un signal lumineux est constamment diffusé par des inhomogénéités de l'indice optique. Ce phénomène est appelé diffusion Rayleigh lorsque la taille des centres diffusants est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière. Une partie de la lumière diffusée se propage dans le sens inverse de propagation du signal lumineux incident et peut parvenir jusqu'à l'entrée de la fibre. Ce phénomène est à la base de techniques de mesure [Roger]. Il permet une caractérisation de paramètres comme l'atténuation, le diamètre de mode, mais encore la détection de défauts ponctuels. En ce qui concerne les phénomènes de biréfringence et de PMD, il paraît naturel de se demander si la caractérisation de l'état de polarisation rétro-diffusé pourrait apporter une information.

Du point de vue de la polarisation, la réflexion ne modifie par les états de polarisation linéaires. En revanche, les états de polarisation circulaires droits et circulaires gauches sont respectivement transformés en états de polarisation circulaire gauches et droits. De façon plus précise, le sens de rotation du champ électrique est inchangé à la réflexion, mais comme le sens de propagation est inversé, les états de polarisation droits et gauches sont inter-changés. Par extension, à la réflexion d'un état de polarisation elliptique, l'axe d'inclinaison de l'ellipse n'est pas modifié par la réflexion, tandis que sa "circularité" est inversée [Brinkmeyer, Van Deventer, Bebbington00].

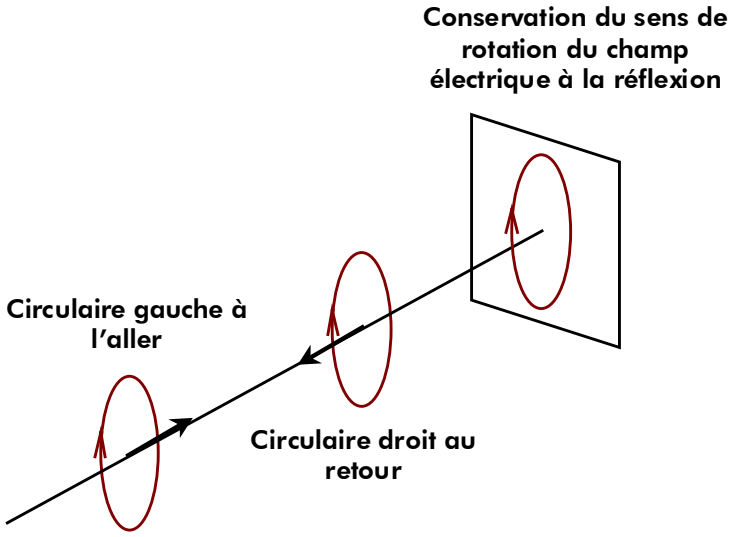

figure IV.1 : comportement d'une onde polarisée circulairement à la réflexion sur un miroir

Si on conserve un unique référentiel physique pour décrire la polarisation à l'aller et au retour, ce changement du sens de rotation du champ électrique est représenté sur la sphère de Poincaré par une réflexion par rapport au plan équatorial, i.e. une inversion des composantes circulaires de l'état de polarisation [Bebbington92-00]. Les vecteurs de Stokes avant et après rétro-diffusion, $\vec{S}_{avant}$ et $\vec{S}_{aprés}$ obéissent donc à la relation suivante [van Deventer, Ellison98] :

$$\vec{S}_{aprés} = M\vec{S}_{avant} \quad avec \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

équation IV.1

Nous utilisons dans la suite l'*équation IV.1* et le formalisme de Mueller afin de décrire l'évolution de la polarisation d'un signal optique rétro-diffusé dans une fibre biréfringente. Nous supposons que la polarisation évolue entre l'abscisse z=0 et l'abscisse $z=z_{rd}$ sous l'effet de la biréfringence. L'état de polarisation en entrée $\vec{e}$, et l'état de polarisation au point de rétro-diffusion $\vec{S}_{avant}(z_{rd})$ sont reliés par la matrice de Mueller de la fibre entre l'abscisse 0 et l'abscisse de rétro-diffusion $\vec{S}_{avant}(z_{rd}) = R(z_{rd},0)\vec{e}$. Au point de rétrodiffusion z_{rd}, nous tenons compte du changement du sens de rotation du champ électrique vis à vis de la direction de propagation, et la lumière se propage dans l'autre sens. D'après l'*équation IV.1*, nous obtenons la relation $\vec{S}_{aprés}(z_{rd}) = M\vec{S}_{avant}(z_{rd})$ entre l'état de polarisation avant et après la rétro-diffusion. Si on suppose que la fibre est un élément biréfringent réciproque, la relation entre l'état de polarisation de sortie rétro-diffusé $\vec{S}(z_{rd})$ et l'état de polarisation juste après la rétro-diffusion, $\vec{S}_{aprés}(z_{rd})$, s'obtient, dans cette représentation, grâce à la matrice transposée de la matrice de Mueller, $R(z_{rd},0)$, [Van Deventer, Bebbington00] soit $\vec{S}(z_{rd}) = R^t(z_{rd},0)\vec{S}_{aprés}(z_{rd})$. En tenant compte de l'expression de l'état de polarisation avant et après la rétro-diffusion, on obtient la relation entre l'état de polarisation rétro-diffusé, $\vec{S}(z_{rd})$, mesuré en sortie pour un point précis de rétro-diffusion z_{rd}, et l'état de polarisation en entrée, $\vec{e}$, [Van Deventer, Bebbington00] :

$$\vec{S}(z_{rd}) = R^t(z_{rd},0)\, M\, R(z_{rd},0)\, \vec{e}$$

équation IV.2

D'autres expressions, basées sur des conventions de représentation de la polarisation rétro-diffusée différentes de celle présentée plus haut, sont utilisées dans la littérature [Wuilpart01, Song, GaltaSept00]. A l'aide de l'*équation IV.2*, on peut expliquer le fonctionnement de la mesure par POTDR de façon qualitative. A l'aller, la polarisation évolue le long de la fibre en fonction de la distribution de la biréfringence, i.e. sous l'action de $R(z_{rd},0)$, et en chaque point la lumière est rétro-diffusée. Si lors de la réflexion, les états de polarisation étaient inchangés, l'état de polarisation injectée dans la fibre, et l'état de polarisation rétro-diffusé détecté en sortie seraient identiques du fait des transformations inverses de la polarisation à l'aller et au retour. En raison du changement de circularité à la réflexion, l'état de polarisation injectée et l'état de polarisation rétro-diffusé sont différents et sont reliés par l'*équation IV.2*. La mesure de la polarisation de sortie, en fonction de la position de rétro-diffusion est donc une mesure indirecte de l'état de polarisation au point de rétro-diffusion. En particuliers, lorsque l'état de polarisation à la réflexion est linéaire, l'état de polarisation rétro-diffusé en entrée de fibre est identique à l'état de polarisation injecté ; lorsque l'état de polarisation est circulaire,

l'état de polarisation rétro-diffusé en entrée est orthogonal à l'état de polarisation injecté. La mesure de l'état de polarisation rétro-diffusé permet ainsi d'obtenir une cartographie de l'évolution de la polarisation le long de la fibre et donc une cartographie de la distribution des caractéristiques de biréfringence locale [Bebbington00, Ellison98, Wuilpart01, Galtarossa00a].

1.1.1 Exemple de configuration de mesure

Les avantages procurés par une caractérisation de la fibre par POTDR reposent sur trois points : La mesure est non destructive, elle s'effectue par une extrémité de la fibre, enfin, les longueurs de fibre accessibles à la mesure peuvent être supérieures à plusieurs dizaines de kilomètres.

Un montage typique est composé d'une partie émission, de la fibre en mesure et d'une partie réception. A l'émission, une séquence d'impulsion est injectée dans la fibre. A l'aide de la mesure du temps mis par le signal rétro diffusé pour revenir en entée de fibre, on peut déterminer le point de rétro-diffusion. En réception, la polarisation du signal rétro-diffusé est analysée à l'aide d'un simple polariseur ou d'un dispositif plus sophistiqué, comme un analyseur de Stokes. Les montages présentés sur la *figure IV.2* [Wuilpart01] et sur la *figure IV.3* [Ellison00a] représentent ces deux types de configurations de mesure. La première configuration, qui utilise un unique polariseur en entrée et en sortie, permet une analyse d'une composante de l'état de polarisation de sortie pour chaque état de polarisation injecté en entrée. Cette configuration présente l'avantage d'être simple, mais ne permet qu'une analyse partielle de la polarisation de sortie. Dans la seconde, en revanche, la partie émission et la partie analyse sont séparées. Un analyseur de Stokes en sortie permet une détermination complète de l'état de polarisation de sortie pour chaque état de polarisation injecté en entrée au prix d'une complexification du montage.

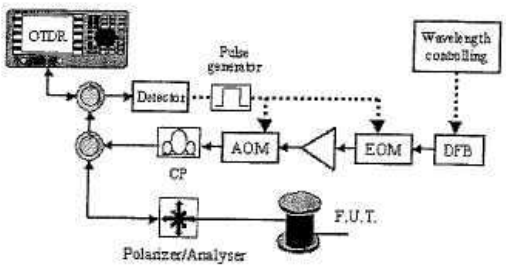

figure IV.2 : Caractérisation partielle de l'état de polarisation rétro-diffusé

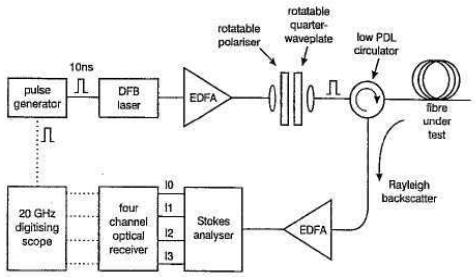

figure IV.3 : Caractérisation exacte de l'état de polarisation rétro-diffusé

1.1.2 Caractérisation de la distribution de la biréfringence

La caractérisation de la distribution de la biréfringence dans une fibre optique représente une étape importante pour quantifier la PMD et pour mieux appréhender son comportement vis à vis du conditionnement. La mesure de la distribution de la biréfringence peut également fournir un procédé d'inspection et de validation du processus de fabrication de la fibre. Trois paramètres importants concernant la biréfringence rentrent en ligne de compte dans la valeur de PMD finale : La distribution

aléatoire de la biréfringence, la fonction de rotation imprimée lors de l'étirage et enfin, la présence éventuelle de contraintes extrinsèques engendrées lors du conditionnement

Nous présentons dans ce paragraphe l'état de l'art concernant la caractérisation de ces trois paramètres par la technique de mesure POTDR.

1.1.2.1 Mesure de biréfringence et de la longueur de corrélation

Galtarossa [Galtarossa00a] utilise l'état de polarisation rétro-diffusé pour définir un vecteur biréfringence rétro-diffusé : $\partial\vec{S}(z_{rd})/\partial z_{rd} = \left(2MR^t(z_{rd},0)\vec{\beta}_l(z_{rd})\right)\times\vec{S}(z_{rd})$, où $\vec{\beta}_l(z_{rd})$ représente la partie linéaire du vecteur biréfringence au point de rétro-diffusion. A partir de la mesure de $\vec{S}(z_{rd})$, on peut déduire, le vecteur biréfringence rétro-diffusé puis en déduire la biréfringence linéaire puisque $\left|2MR^t(z_{rd})\vec{\beta}_l(z_{rd})\right| = \left|\vec{\beta}_l(z_{rd})\right|$. A partir d'une mesure du vecteur biréfringence pour chaque point de rétro-diffusion, on peut donc avoir accès à la distribution de la biréfringence linéaire .

Deux techniques sont proposées par Wuilpart. La première est basée sur le formalisme de Jones et sur une caractérisation partielle de la polarisation rétro-diffusée. La matrice de Jones correspondant à l'aller puis au retour dans la fibre s'écrit : $U_{rd}(z_{rd}) = (U(z_{rd},0))^t U(z_{rd},0)$. En décomposant $U(z_{rd},0)$ sous la forme d'un produit de deux biréfringents $U = C_e L_e$ [Huard], où L_e est un biréfringent purement linéaire, et C_e, un biréfringent purement circulaire, on montre que la matrice de Jones de rétro-diffusion est équivalente à un biréfringent linéaire [Wuilpart01]. On peut déterminer ses caractéristiques si on connaît les vecteurs de Jones pour chaque point de rétro-diffusion. Connaissant le biréfringent linéaire équivalent pour chaque point de rétro-diffusion, on peut calculer le produit de matrice $C_e^{-1}U(z_{rd}+h, z_{rd})C_e$, où h est la distance entre deux points de mesure. Dans ce produit, la biréfringence linéaire apparaît dans la partie réelle des termes diagonaux sous la forme du terme $\cos\beta_l h$. En répétant le processus, pour chaque point de rétro-diffusion, on a accès à la distribution de la biréfringence linéaire le long de la fibre. La seconde méthode [Wuilpart02] est basée sur une "cartographie" de l'intensité POTDR rétro-diffusé. En étudiant la vitesse de variation de l'enveloppe inférieure de l'intensité POTDR et en comptant le nombre de maximum de l'intensité POTDR par unité de longueur, la longueur de couplage et la longueur de battement peuvent être mesurées et la PMD déterminée [Wuilpart02]. Une différence notable entre les deux techniques mérite d'être citée. La technique utilisée par Galtarossa nécessite la mesure exacte de l'état de polarisation rétro-diffusé, alors que celles proposées par Wuilpart ne nécessitent qu'une mesure partielle. Cette dernière configuration est plus compatible avec des applications industrielles.

Les longueurs de battement de fibre de type SMF, DSF et NZDSF conditionnées sous fortes tensions sont mesurées dans [Galtarossa01a] et sur des fibres de types SI et DSF conditionnées sur bobines de 20 cm [Wuilpart01]. Les valeurs de biréfringence mesurées sur les types SMF sont inférieures aux valeurs mesurées sur les types DSF dans [Galtarossa01a]. De mêmes, les fibres SMF présentent des longueurs de battements moyennes plus grandes que celles des fibres DSF [Wuilpart01]. L'hypothèses avancées pour expliquer cette différence repose sur la présence de contraintes plus

importantes dans les types DSF en raison d'une différence d'indice cœur gaine plus importante et d'un profil d'indice plus complexe. [Galtarossa00b], montre de plus, que pour les mêmes raisons, la biréfringence des fibres SMF semble fortement affectée par le câblage comparé aux fibres DSF et NZDSF. Les longueurs de corrélation du vecteur biréfringence sont mesurées dans [Galtarossa01a] grâce à l'analyse de la fonction d'auto corrélation du vecteur biréfringence rétro-diffusé. Les fibres sont conditionnées sur des bobines sous fortes tensions. Les valeurs de L_F sont de 2 à 4 fois inférieures aux valeurs mesurées de la longueur de battement (de 5 m à 15 m environ). Les fibres de type SMF semblent présenter les longueurs de couplage les plus importantes (~10 m) et les fibres de type DSF les plus courtes. Une remarque intéressante concernant les mesures effectuées par [Wuilpart02] est que les longueurs de corrélation mesurées sur des fibres conditionnées sur bobines de 20 cm sont beaucoup plus grandes que celles mesurées par [Galtarossa01a], et nettement supérieures à la longueur de battement, alors que c'est l'inverse dans [Galtarossa01a]. Ce résultat est sans doute lié aux conditionnement utilisé dans les deux cas (conditionnement sous forte tension pour [Galtarossa01a] et faible tension pour [Wuilpart02]). Les PMD calculées grâce à la longueur de battement et à la longueur de corrélation mesurée sont dans les deux cas en très bon accord avec les valeurs mesurées par une technique classique (méthode de la matrice de Jones dans l'étude de [Galtarossa01a] et méthode interférométrique dans [Wuilpart02]). Ces techniques de mesure permettent donc de mesurer la PMD à partir de la mesure de la longueur de battement et de la longueur de corrélation de la fibre. Nous donnons dans le *tableau IV.1*, un ordre de grandeur des longueurs de battement et longueurs de corrélation typiquement mesurées dans des fibres de télécommunication ***G652*** et ***G653*** conditionnées sur bobines [Galtarossa01a, Wuilpart02]

	L_b (m)	L_F (m)
G652	~25, 20	~13, 42
G653	~18, 19	~5, 80

tableau IV.1 : longueurs de battement et longueurs de corrélation mesurées en POTDR sur trois fibres de télécommunication typiques ; les valeurs de gauche sont mesurées par Galtarossa, celles de droite par Wuilpart

Dans le paragraphe précédent la biréfringence circulaire était supposée négligeable dans la fibre. Dans une fibre de télécommunication installée dans un câble ou conditionnée sur bobine, la biréfringence circulaire est généralement engendrée par une torsion mécanique externe de la fibre (cf Chapitre III). A cette rotation externe, s'ajoute la rotation interne engendrée lors du processus de vrillage. La rotation de la fibre est donc un paramètre qu'il est important de caractériser. Nous présentons au paragraphe suivant, l'application de la POTDR à la caractérisation de la biréfringence circulaire induite par une torsion uniforme de la fibre et à la mesure de la fonction de rotation interne.

1.1.2.2 Mesure de la rotation des axes propres

La caractérisation de la rotation des axes propres dans une fibre optique par POTDR a été effectuée par [Schuh96–Schuh97, Bebbington00, Ellison98-Ellison00a, Galtarossa02b]. [Schuh96-Schuh97,

Bebbington00, Ellison98-Ellison00a] utilisent la forme caractéristique de l'évolution de la polarisation sur la sphère de Poincaré dans une fibre vrillée uniformément pour déterminer la biréfringence et le taux de rotation dans le régime courte distance. La forme caractéristique en "8" de l'évolution de l'état de polarisation rétro-diffusé sur la sphère de Poincaré représentée sur la *figure IV.4* permet par des considérations géométriques de remonter à la biréfringence linéaire et à la partie circulaire apparente (cf Chapitre III) [Schuh96-Schuh97, Ellison00b, Bebbington00].

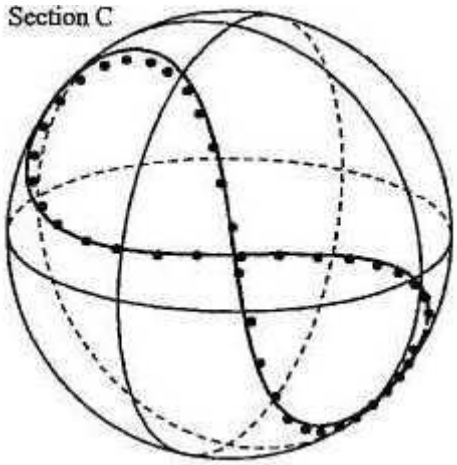

figure IV.4 : évolution de la polarisation rétro diffusée dans une fibre uniformément vrillée [Ellison00b]

Des études réalisées sur des fibres conditionnées en bobines d'expédition (conditionnements sous fortes contraintes) et sur des fibres reposant sur le sol (sans contraintes) montrent que la technique développée permet de caractériser la présence de twist résiduel [Schuh96-Schuh97, Ellison98-Ellison00a, Bebbington00] et d'apprécier qualitativement l'effet de la biréfringence de courbure [Ellison00b]. La technique développée par [Galtarossa02b] est destinée à mesurer la biréfringence circulaire engendrée par une rotation uniforme de la fibre dans le régime longue distance. La méthode est basée sur l'analyse de la fonction d'auto-corrélation des composantes du vecteur biréfringence rétro-diffusé. Si on inclut l'hypothèse de torsions uniformes de la fibre, cette analyse permet de séparer les effets engendrés par la biréfringence linéaire, β_l, des effets engendrés par la biréfringence circulaire apparente, $(g-2)\tau$ et permet donc de mesurer la torsion mécanique de la fibre. Les résultats de mesure sur des fibres SMF permettent de mettre en évidence l'impact important du terme $(g-2)\tau$ sur l'évolution de la polarisation. En revanche, les longueurs de battement associées à la biréfringence circulaires[30] sont de 3 à 10 fois supérieures aux longueurs de battement associées à la biréfringence linéaire. En associant ce résultat à la faible dépendance de la biréfringence circulaire avec la longueur d'onde, [Galtarossa02b] conclut que la PMD est peu affectée par la torsion externe. Il résulte de ces deux observations qu'une mauvaise estimation de la PMD est généralement effectuée par les techniques basées sur la caractérisation du taux de variation de l'état de polarisation en présence de torsions externes non négligeables [Wegmuller].

[30] On peut associer une longueur de battement à la biréfringence circulaire engendrée par la torsion grâce à l'expression $L_{bc}=2\pi/g\tau$

1.1.2.3 Mesure du vrillage imprimé lors du fibrage

L'intérêt d'une mesure du vrillage par POTDR repose sur la possibilité de pouvoir contrôler la qualité du processus de fibrage. Les paramètres permettant de caractériser de façon exacte le vrillage appliqué à une fibre à partir d'une mesure dépendent du type de vrillage. Lorsque ce vrillage est sinusoïdal, la biréfringence de la fibre, la période de rotation et l'amplitude maximale de la rotation permettent de caractériser de façon exacte la rotation. [Ellison00a-Ellison00b] utilise un analyseur de Stokes afin de caractériser l'état de polarisation rétro-diffusé de façon complète. Dans [Ellison00b], une torsion externe connue est appliquée à une fibre vrillée sinusoïdalement. Une analyse fréquentielle du signal POTDR obtenu est effectuée pour chaque valeur du taux de rotation externe. Une fréquence particulière est aisément identifiable et correspond à la période de rotation de la fibre. La biréfringence et l'amplitude maximale de rotation sont, en revanche, plus difficilement identifiables, et doivent être déterminées par optimisation. Pour ce faire, le processus de mesure est simulé numériquement à partir de valeur d'essai de la biréfringence linéaire, de la période et de l'amplitude maximale de rotation de la fibre. Une optimisation est ensuite effectuée sur la transformée de Fourier du signal expérimental et sur la transformée de Fourier du signal numérique. La valeur de T trouvée par optimisation sur une fibre DSF correspond à la valeur observée expérimentalement, T=1.7m. L'amplitude maximale de rotation est estimée à 1.1 tour et la biréfringence à 3 rad/m. La biréfringence est ensuite mesurée sur une fibre issue de la même préforme mais non twistée. La valeur obtenue, 1.7 rad/m amènent les auteurs à suggérer que le vrillage modifierait la biréfringence linéaire.

La méthode présentée précédemment est très générale, car basée sur une optimisation entre un signal POTDR mesuré et un signal POTDR simulé. Elle s'applique donc à tout type de vrillage, pourvu que l'on en connaisse le type à l'avance. La méthode proposée par [Ellison00a] s'applique quant à elle à des fibres vrillées telles que $T\beta_l << 1$ (la période de rotation est très petite devant la longueur de battement). Lorsque cette condition est remplie, l'évolution du vecteur de Stokes avant la rétro diffusion et l'évolution du vecteur de Stokes de sortie rétro diffusé présentent un aspect particulier. La *figure IV.5* représente l'évolution de $\vec{S}(z_{rd})$ dans une fibre vrillée dont la fonction de rotation est sinusoïdale.

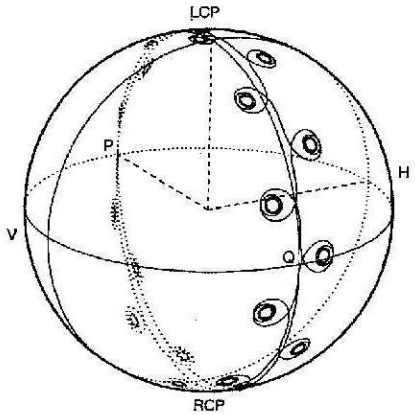

figure IV.5. : Evolution de la polarisation rétro-diffusée dans une fibre vrillée sinusoïdalement lorsque $T<<L_b$

L'évolution du vecteur de Stokes dans une fibre vrillée résulte de la rotation de l'état de polarisation autour du vecteur biréfringence qui, lui même, tourne dans le plan équatorial de la sphère de Poincaré. Cette rotation peut se décomposer en deux évolutions distinctes :

- Une évolution globale qui correspond aux régions dans la fibre où les axes propres arrêtent de tourner. Cette évolution est associée à une rotation autours d'un vecteur biréfringence linéaire fixe et aligné selon la direction H/V sur la *figure IV.5*.
- Des "boucles", qui apparaissent avec une périodicité de T/2 et qui correspondent aux régions dans la fibre où les axes propres atteignent leurs vitesses de rotation maximales.

L'effet de ces boucles est de ralentir l'évolution de la polarisation incidente et de la polarisation rétro-diffusée sur la sphère de Poincaré. Le milieu vrillé sinusoïdalement apparaît donc "globalement" comme un milieu biréfringent linéaire, d'axe fixe, et de biréfringence significativement plus petite que la biréfringence linéaire locale. L'amplitude de cette biréfringence effective peut être obtenue intuitivement grâce à la valeur moyenne du vecteur biréfringence sur une période de rotation [Ellison00a][31] :

$$\begin{aligned}\langle\beta_1(z)\rangle &= \beta_l \cos\left(\frac{A_{max}}{2}\right)J_0(A_{max})\\ \langle\beta_2(z)\rangle &= \beta_l \sin\left(\frac{A_{max}}{2}\right)J_0(A_{max})\\ \langle\beta_3(z)\rangle &= 0\end{aligned}$$

équation IV.3

La biréfringence effective est alors donnée par le module du vecteur biréfringence effectif :

$$\beta_{eff} = \beta_l J_0(A_{max})$$

équation IV.4

Elle est égale au produit de la biréfringence linéaire locale, par un facteur de pondération dépendant du type de rotation appliquée (ici une fonction de Bessel d'ordre 0 pour une rotation sinusoïdale). La biréfringence effective est donc réduite d'un facteur correspondant à la fonction de Bessel d'ordre 0 et d'argument l'amplitude maximale de rotation. Comme l'évolution de la polarisation rétro diffusée s'effectue à une vitesse deux fois plus rapide, la biréfringence effective rétro diffusée est obtenue en multipliant par deux l'*équation IV.4*. En mesurant l'évolution de l'état de polarisation rétro diffusé, on peut obtenir la biréfringence effective de la fibre vrillée et estimer la PMD [Ellison00a] à partir de l'expression simplifiée de la différence de temps de groupe $\Delta\tau_{eff} = \beta_{eff} / \omega$. Nous utiliserons cette technique au § 3 pour tenter de mesurer la PMD sur des fibres vrillées à l'aide d'un OTDR du commerce.

Enfin, une méthode de mesure de la période de rotation dans une fibre vrillée périodiquement est proposée par Galtarossa [Galtarossa04]. Elle repose sur le fait que les techniques de mesure par POTDR actuelle ne sont pas assez résolvantes pour permettrent de distinguer les évolutions de la polarisation dans les "boucles". Dans une fibre vrillée, il est courant d'atteindre des amplitudes de rotation maximale de 20 tours par mètres, soit un tour sur 5 cm. Il faut donc une résolution au moins

[31] Cette valeur moyenne étant étroitement liée à l'expression du DGD donnée au § 1.2 du chapitre III

centimétriques pour pouvoir espérer obtenir toute l'information sur l'évolution de l'état de polarisation rétro-diffusé. De fait, seule une évolution lissée peut être obtenue par des méthodes classiques. La *figure IV.6* représente une simulation de la composante selon $\vec{e}_1$ de l'état de polarisation rétro-diffusé avant et après lissage. Les boucles correspondent aux évolutions rapides et les transitions de fortes amplitudes aux évolutions lentes sur la sphère de Poincaré. On peut constater que toutes les évolutions se faisant à des fréquences supérieures à 2 Hz sont effacées en raison de la largeur d'impulsion.

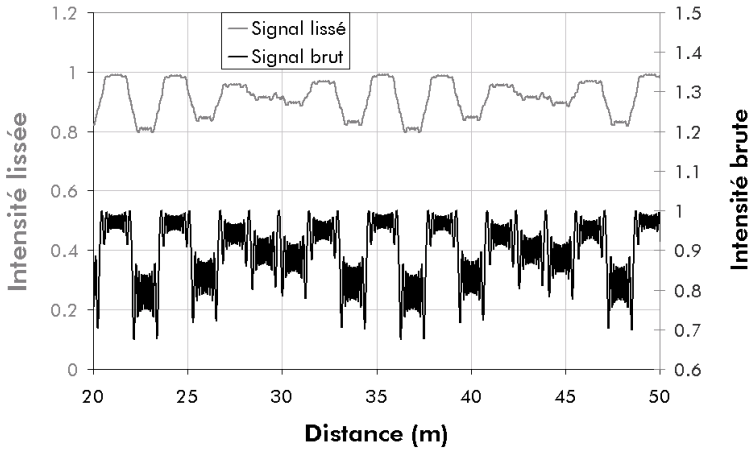

figure IV.6 : évolution de la composante selon l'axe x du vecteur biréfringence rétro-diffusée en fonction de la distance

Si on dérive le signal lissé par rapport à z, on obtient des valeurs nulles au niveau des boucles, et des "pics" au niveau des transitions. Cette dérivée est proportionnelle au module du vecteur biréfringence rétro-diffusé (car proportionnelle à la dérivée par rapport à la distance de l'état de polarisation rétro-diffusée). A partir de l'analyse fréquentielle du module du vecteur biréfringence rétro-diffusé mesuré sur une fibre vrillée, on peut donc remonter à la distribution de la période de rotation le long de la fibre et inspecter la qualité du processus de vrillage.

1.1.3 Conclusion du paragraphe

La POTDR est une technique utilisée dans la littérature sur les fibres sans vrillage interne pour mesurer la distribution aléatoire de la biréfringence et pour caractériser la biréfringence circulaire induite par une torsion externe de la fibre. Les utilisations sur des fibres avec vrillage interne sont limitées, du fait que les fonctions de rotations appliquées en pratique sont inconnues. Néanmoins, une estimation de la PMD est effectuée sur des fibres à faibles biréfringences en utilisant la notion de vecteur biréfringence effectif. Cette notion rejoint celle développée au paragraphe dédiée au calcul de la PMD. Le vecteur biréfringence effectif, calculé par [Ellison00a] et le vecteur du biréfringent équivalent à une période de vrillage sont en effet équivalent lorsque la longueur de battement est petite devant la période de rotation. Nous utilisons cette notion au paragraphe 2.2 et présentons une ébauche de méthode permettant de mesurer la PMD sur des fibres avec vrillage. Nous présenterons d'abord au paragraphe 2.1 la POTDR du point de vue d'une résolution centimétrique afin de mieux appréhender les effets de polarisation dans les fibres vrillées périodiquement. Avant cela, nous introduisons une méthode plus résolvante basée sur l'effet Faraday.

1.2 Méthode magnéto optique

La mesure de la biréfringence par effet magnéto-optique est basée sur l'effet Faraday. L'effet Faraday consiste en une rotation de l'azimuth de l'état de polarisation d'un faisceau lumineux se propageant dans un milieu soumis à un champ magnétique orienté selon l'axe de propagation. L'angle de rotation est proportionnel au champ appliqué, que nous appellerons H, à la longueur d'application du champ h, et à une constante appelée constante de Verdet V. Cette constante traduit la réponse électronique du milieu au champ magnétique. Soumis au champ magnétique, le milieu se comporte ainsi comme un biréfringent circulaire dont la biréfringence est donnée par $\beta_H = VH$. Dans les verres, une expression approchée de l'angle de rotation α_H est donnée en fonction de la longueur d'onde par [Tan] :

$$\alpha_H(\lambda) = V(\lambda)Hh \quad \text{avec} \quad V(\lambda) = \frac{\mu e \lambda}{4mcn}\frac{dn^2}{d\lambda}$$

équation IV.5 : c, m et e sont respectivement la vitesse de la lumière, la masse et la charge de l'électron ; μ et n sont respectivement la perméabilité relative et l'indice optique du verre

Autour de 1550 nm dans la silice pure, on obtient des valeurs de V de l'ordre de 10^{-6} *rad/A*. Nous illustrons dans la suite le fonctionnement de la mesure sur des fibres linéairement biréfringentes et homogènes. L'évolution de la polarisation y est caractérisée par la longueur de battement, qui, rappelons le, représente la longueur au bout de laquelle l'état de polarisation redevient identique à lui-même.

Dans une fibre de longueur L, il correspond à chaque état de polarisation en entrée, un état de polarisation en sortie. Cet état de polarisation, est fonction de la longueur de propagation, de la biréfringence, et de l'état de polarisation en entrée. Entre l'entrée et la sortie, l'état de polarisation effectue un certain nombre de cycle d'évolution. Si on vient perturber localement, par un moyen quelconque, cette évolution, l'état de polarisation de sortie va être modifié. On peut montrer qu'en déplaçant le point de perturbation, l'état de polarisation de sortie va effectuer des cycles dont la période est égale à la longueur de battement. Dans les mesures par effet magnéto-optique, la perturbation est appliquée par une bobine magnétique de longueur h générant un champ magnétique H [Turpin]. Si on néglige la biréfringence de la portion de fibre située sous la bobine, l'azimut de la polarisation en entrée de bobine est tournée d'un angle égal à α_H en sortie de bobine. La translation de la bobine le long de la fibre et l'enregistrement de l'évolution de la polarisation en sortie nous fournit la longueur de battement.

Cette technique de mesure est utilisée depuis le milieu des années 80 pour la mesure de la biréfringence sur les fibres à maintien de polarisation [Turpin, Zhang, Halliday]. Elle est particulièrement bien adaptée aux fibres fortement biréfringentes, i.e. présentant des longueurs de battement inférieures à 1 m, puisque l'on peut appliquer le champ magnétique sur de très petites distances. Pour atteindre de telles précisions, on utilise une technique dite du "magnetic gap" [Zhang,

Halliday]. Cette technique consiste à décaler la bobine par rapport à la fibre et à utiliser un entrefer de fer doux afin de guider le champ magnétique jusqu'à la fibre (*figure IV.7*).

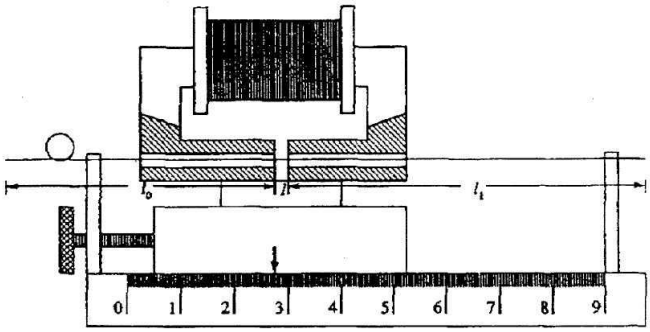

figure IV.7 : Schéma d'un entrefer permettant de régler la longueur d'application du champ magnétique

En réglant la distance entre les entrefers, on peut faire varier la longueur d'application du champ. La précision obtenue avec cette technique est de l'ordre du mm [Zhang, Halliday]. Plus récemment, la technique de mesure par effet magnéto-optique a été utilisée pour caractériser les fibres à cristaux photoniques [Peyrilloux], ou la biréfringence circulaire induite par torsion externe [Chartier01-Chartier03]. Les biréfringences présentes dans ce type de fibre étant beaucoup moins importantes que dans des fibres à maintien de polarisation, les contraintes sur la résolution de la mesure sont moins fortes, de sorte que des bobines de 1 cm de longueur ont été jusqu'à présent suffisantes[32] .

Du point de vue théorique, l'intensité mesurée en sortie de fibre à travers un polariseur est obtenue dans le formalisme de Jones dans des fibres à biréfringence uniforme, linéaire [Zhang] et elliptique [Chartier01], en supposant que la longueur de la fibre et l'effet Faraday sont des quantités très petites :

$$I(z_b)\ \alpha\ \alpha_H Sinc(\beta_l h)\cos\left(\beta_l\left(L - z_b - \frac{h}{2}\right)\right) \quad et \quad I(z_b)\ \alpha\ \frac{\beta_l^2}{\beta_t^3} sin\left(\frac{\beta_h h}{2}\right)\cos\left(\beta_t\left(L - z_b + \frac{h}{2}\right)\right)$$

équation IV.6 : Intensité dans une fibre biréfringente linéaire (Zhang, formule de gauche) et intensité dans une fibre biréfringente elliptique (Chartier01, formule de droite)

où z_b correspond à la position de la bobine ; $\beta_t = \sqrt{\beta_l^2 + \beta_c^2}$ est la biréfringence totale en l'absence de champ magnétique où β_c est la biréfringence circulaire ; $\beta_h = \sqrt{\beta_l^2 + (\beta_c + \beta_H)^2}$ représente la biréfringence totale en présence du champ magnétique. Ces expressions permettent de donner deux caractéristiques essentielles de la mesure :

- La présence de biréfringence linéaire est indispensable afin que la mesure puisse fonctionner. Cette remarque se justifie intuitivement, par le fait qu'un milieu biréfringent circulaire reste circulaire si on lui applique un champ magnétique. Il devient donc impossible de perturber l'évolution de la polarisation dans la fibre, et on ne peut pas détecter de modulation en sortie.

[32] Cette remarque est à nuancer, car les longueurs de battement attendues sur certaines fibres à cristaux photoniques sont de l'ordre de quelques millimètres.

- La période et l'amplitude du signal diminuent lorsque la biréfringence circulaire augmente. Nous verrons toute l'importance de cette remarque dans les paragraphes suivants.

2 Caractérisation des effets de polarisation dans le régime longue distance

Dans ce paragraphe nous essayons à partir de comparaison entre des simulations de trace POTDR et des mesures effectuées sur des fibres vrillées de déterminer les caractéristiques de vrillage. Du point de vue expérimental, nous utilisons successivement un OTDR à résolution centimétrique distribuée par la société Luciolle et un OTDR à résolution métrique de type Tecktronix TFP2 Fiber Master. Du point de vue numérique, nous calculons l'intensité rétro-diffusée à partir de l'*équation IV.2* dans une fibre biréfringente vrillée.

2.1 Mesure de la période de rotation de la fibre

2.1.1 Caractéristiques de l'appareil de mesure et description du montage

Afin de réaliser des mesures avec une précision de l'ordre du centimètre, il est indispensable d'utiliser de nouvelles techniques de détection. En effet une résolution entre deux points de mesure de l'ordre de 10 cm nécessite une largeur spatiale d'impulsion inférieure au cm. De tels ordres de grandeur conduisent à des intensités rétro-diffusées extrêmement faibles, des techniques particulières doivent être utilisées pour les détecter. L'OTDR que nous avons utilisée dans ce paragraphe utilise une technique de comptage de photon lui offrant une sensitivité de –110 dBm, une résolution point à point de l'ordre de 5 cm ainsi qu'une précision de mesure de l'ordre de 5 mm. La longueur de fibre mesurable est d'environ 40 km par fenêtre de 800 m. Afin d'adapter cet OTDR à une mesure polarisée, l'OTDR millimétrique est connecté à l'aide d'une jarretière de 2 mètres à un contrôleur de polarisation *OZ optics* (polariseur + lame demi-onde). Puis, un pigtail d'environ 2 mètres connectés au contrôleur de polarisation est soudé à la fibre en test afin d'éviter les pics de réflexion trop importants.

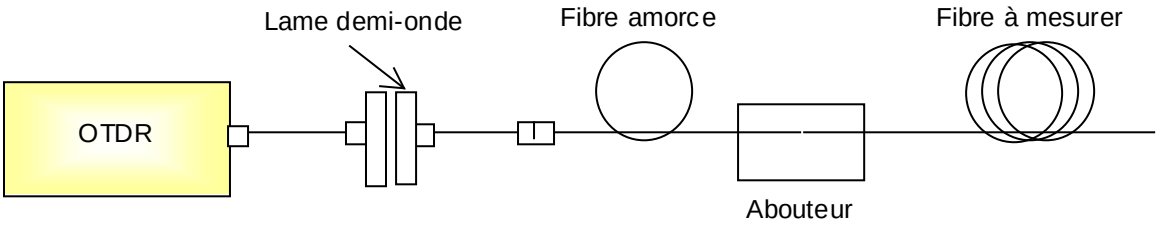

figure IV.8 : Caractéristiques du banc de mesure

2.1.2 Caractérisation du vrillage

Les figures *IV.9* à *IV.11* représentent des mesures effectuées sur des fibres de type TeraLight conditionnées sur des bobines de 60 cm de diamètre sous une tension quasiment nulle. Ce conditionnement est celui qui est utilisé pour effectuer des mesures routinières de PMD. Il limite l'application de contrainte dans la fibre. La *figure IV.9* représente une mesure sur une fibre sans vrillage interne, tandis que la *figure IV.10* et la *figure IV.11* représentent une fibre vrillée sinusoïdalement sur deux échelles de longueurs. On peut déjà constater la similitude avec la *figure IV.6*. On observe en effet des transitions de grandes amplitudes et de grandes périodes entrecoupées de transitions de petites amplitudes et de petites périodes. On remarque cependant que l'évolution globale est nettement perturbée comparée à celle présentée sur la *figure IV.6*. Afin de pouvoir expliquer ce comportement et, de façon plus générale, afin d'exploiter les courbes de mesures, nous avons effectué des simulations de l'intensité rétro-diffusée en fonction de la position de rétro-diffusion.

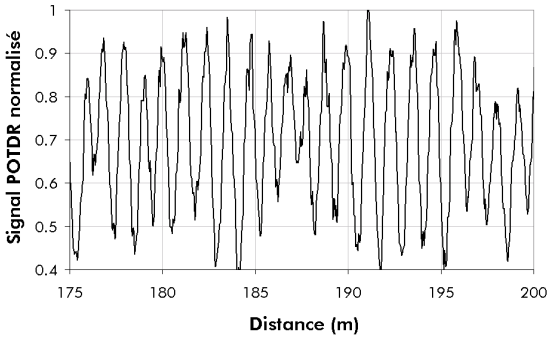

figure IV.9 : Evolution de l'intensité POTDR mesurée à l'aide du POTDR millimétrique sur une fibre non vrillée

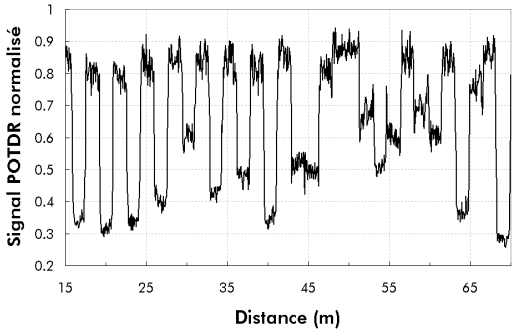

figure IV.10 : Evolution de l'intensité POTDR mesurée à l'aide du POTDR millimétrique sur une fibre avec vrillage sinusoïdal des axes : Evolution globale

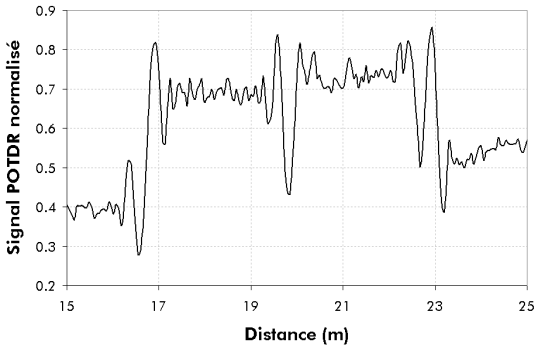

figure IV.11 : Evolution de l'intensité POTDR mesurée à l'aide du POTDR millimétrique sur une fibre avec vrillage sinusoïdal des axes : Evolution locale

2.1.2.1 Simulation de trace POTDR et extraction des paramètres de vrillage

Les simulations de l'évolution de la polarisation sont effectuées d'après le modèle décrit en Annexe III et d'après l'*équation IV.2*. L'intensité est calculée grâce à l'expression $I(z_{rd}) = 0.5I_0\left(1 + \vec{p} \cdot \vec{S}(z_{rd})\right)$ [Gordon], où I_0 représente l'intensité totale, $\vec{p}$ représente le vecteur de Stokes associé à l'état de polarisation de l'analyseur.

2.1.2.1.1 Exemple sur une fibre vrillée sinusoïdalement

Les *figures IV.12* et *IV.13* représentent des simulations de trace POTDR d'une fibre dont la rotation est sinusoïdale. La longueur de battement vaut 2 mètres, la période de rotation et l'amplitude maximale de rotation valent respectivement 3 mètres et 30 rad. Avec de telles caractéristiques nous obtenons des traces POTDR simulées proches de celles mesurées à l'aide de notre POTDR.

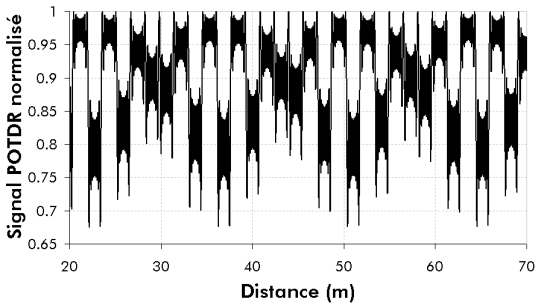

figure IV.12 : Evolution de l'intensité rétro-diffusée en fonction de la distance pour une longueur de battement de 2 m. La période et l'amplitude maximale de rotation sont respectivement de 3 m et de 30 rad. L'évolution est représentée sur une distance de 50 m.

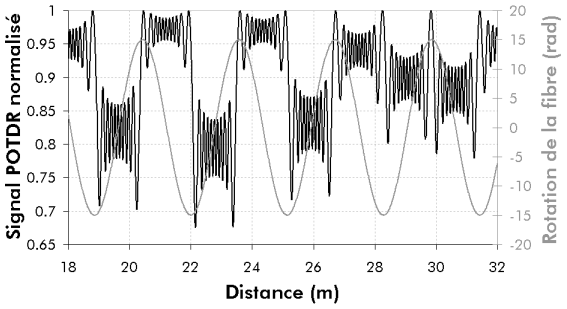

figure IV.13 : Evolution de l'intensité rétro-diffusée en fonction de la distance pour une longueur de battement de 2 m. La période et l'amplitude maximale de rotation sont respectivement de 3 m et de 30 rad. L'évolution est représentée sur une distance de 14 m.

On distingue très nettement sur cette trace les transitions de grandes amplitudes observées sur les *figures IV.12* et *IV.13*. Nous avons représenté en parallèle sur la *figure IV.13* l'évolution de l'angle de rotation de la fibre en fonction de la distance. Il est représenté par la courbe grise. Les extremums de la courbe grise correspondent aux positions où la vitesse de rotation de la fibre s'annule, i.e. aux changements du sens de rotation de la fibre, à l'opposé, entre deux extremums, on obtient les positions pour lesquelles la vitesse de rotation est maximale. L'identification des abscisses correspondant aux changements du sens de rotation de la fibre est ainsi aisée. Ces abscisses correspondent aux variations de plus grandes amplitudes et de plus grandes périodes sur la trace POTDR. En identifiant deux abscisses successives, on peut ainsi mesurer la période de rotation de la fibre. La mesure de l'amplitude de la rotation est en revanche beaucoup plus difficile. D'une part, nous ne possédons pas la résolution nécessaire pour discriminer les variations extrêmement rapides de la polarisation lorsque la fibre atteint sa vitesse de rotation maximale. D'autre part, nous ne possédons pas d'expression analytique nous permettant de relier les paramètres de fibrage T et A_{max} et β_l à l'intensité rétro diffusée. Au § 3 nous utiliserons une méthode plus résolvante, qui nous permettra d'estimer la rotation de la fibre sur des fibres à fortes biréfringences. Nous présentons cependant au paragraphe 2.1.2.1.2 des mesures de période de rotation sur des fibres à faibles biréfringences vrillées avec deux vrillages différents.

2.1.2.1.2 Mesure de la période de rotation

La figure suivante illustre la mesure de la période de rotation de la fibre à partir de la trace POTDR. Afin de valider les mesures, nous allons déterminer la fréquence d'oscillation de la poulie. Cette grandeur représente en effet un paramètre connu et fixé avant le fibrage. La relation entre la période de rotation T et la fréquence d'oscillation de la poulie f est obtenue trivialement grâce à la vitesse de fibrage v : $f=(1/T) \times v$.

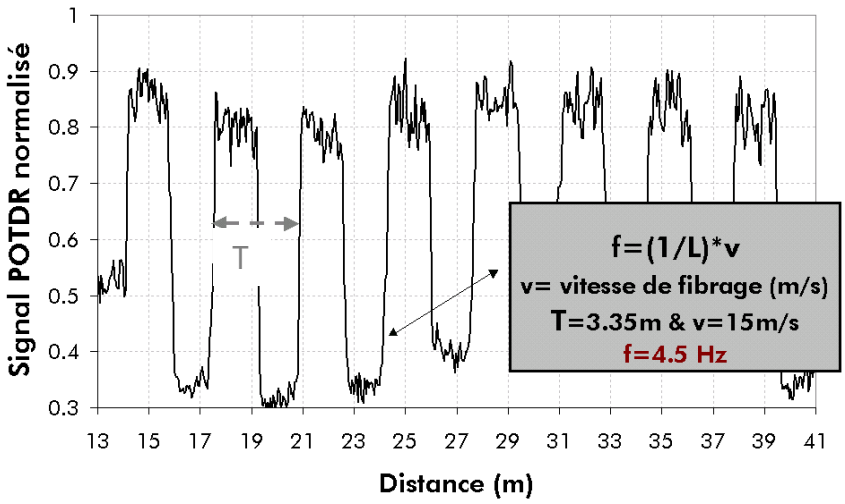

figure IV.14 : Mesure de la période de rotation sur une fibre à faible biréfringence

Les résultats des mesures de fréquence à partir des traces POTDR millimétriques sont résumés dans le *tableau IV.2*. Trois fibres de type Tera Light ont été mesurées. La seconde et la troisième fibre ont été fibrées avec des paramètres de fibrage différents de ceux de la première fibre. Les fréquences retrouvées à partir des mesures concordent très bien avec les fréquences attendues pour chaque essai de vrillage.

	Fréquence théorique (Hz)	V (m/min)	T (m)	Fréquence retrouvée (Hz)
Fibre 1	5	900	3.33	4.5
Fibre 2	2.5	900	5.5	2.7
Fibre 3	2.5	900	6	2.7

tableau IV.2 : fréquences de rotation mesurées sur des fibres vrillées sinusoïdalement et fréquences théoriques

2.2 Estimation de la PMD à l'aide d'une technique POTDR en résolution métrique : applications aux fibres vrillées sinusoïdalement

Dans un contexte industriel, la mesure de la PMD est une étape coûteuse en temps du fait du caractère aléatoire de l'évolution de la PMD. De nombreuses procédures de mesures doivent être respectées afin de garantir une valeur moyenne et un écart type sur chaque type de fibre produite. Les procédures de mesure habituelles nécessitent l'emploi des deux extrémités de la fibre et donne une valeur globale de la PMD. Les mesures par réflectométrie sont intéressantes d'un point de vue industriel, car elles sont rapides et ne nécessitent que l'emploi d'un seul bout de la fibre. Elles permettent de plus d'identifier des sections de fibres dont la PMD serait trop importante. Nous présentons dans le paragraphe suivant, une tentative de mesure de la PMD sur fibre vrillée à l'aide d'une technique POTDR basée sur la notion de longueur de battement effective présentée au paragraphe 1.1.2.3.

2.2.1 Lien entre la notion de vecteur biréfringence effectif et le DGD

La méthode que nous présentons dans ce paragraphe, est identique sur le fond à celle présentée par [Ellison00a] et [Chen03]. Nous rappelons que dans le modèle exposé par [Ellison00a], une fibre vrillée sinusoïdalement de faible biréfringence, se comporte en POTDR comme un biréfringent linéaire dont la biréfringence effective est donnée par $\Delta\beta_{effective} = 2\Delta\beta_l J_0(A_{max})$. Nous proposons dans ce paragraphe, d'utiliser ce comportement pour quantifier la PMD d'une fibre vrillée périodiquement. La *figure IV.15* représente des simulations de traces POTDR pour un vrillage sinusoïdal et pour différentes valeurs de A_{max} dans le régime "courte période". Les valeurs de A_{max} ont été choisies proches des valeurs couramment utilisées en usine (A_{max}≈100 rad). La période de rotation est de deux mètres, la longueur de battement locale de 20 mètres. On peut constater que la longueur de battement effective varie de façon importante avec A_{max}, et on peut vérifier, au moins pour les deux premières valeurs de A_{max} qu'elle suit une loi en $L_{b\,effective} = L_b / (2J_0(A_{max}))$.

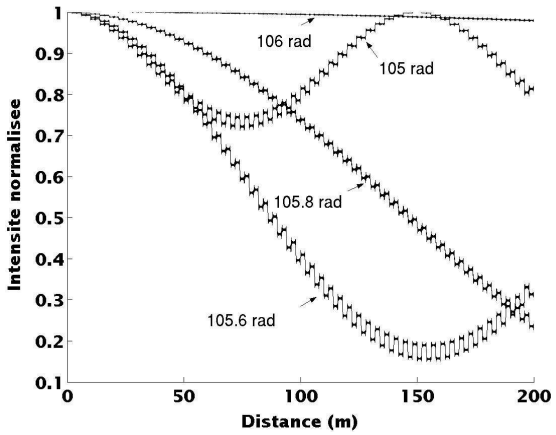

figure IV.15 : évolution de l'intensité rétro-diffusée dans une fibre faiblement biréfringente pour quatre valeurs de A_{max}

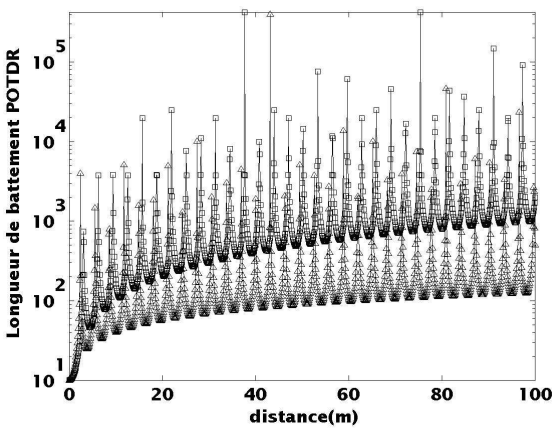

figure IV.16 : évolution de la longueur de battement effective en fonction de A_{max} pour une rotation triangulaire et sinusoïdale des axes propres

La *figure IV.16* illustre le comportement de la longueur de battement effective en fonction de l'amplitude maximale de rotation pour une rotation sinusoïdale et triangulaire des axes propres de la fibre et pour une longueur de battement locale de 20 mètres. On constate que périodiquement, la longueur de battement présente des pics, qui correspondent respectivement aux zéros de la fonction de bessel d'ordre 0, $J_0(A_{max})$, et aux zéros de la fonction sinus cardinal, $Sinc(A_{max})$. Comme nous l'avons fait remarquer au chapitre III, compte tenu des incertitudes que nous avons sur la valeur de l'amplitude maximale de rotation et compte tenu des effets aléatoires, la probabilité d'obtenir un comportement périodique devient très faible, de fait seules les enveloppes des fonctions représentées sur la *figure IV.16* vont effectivement jouer un rôle dans l'évolution de la longueur de battement effective. Nous supposons, par conséquent, que la longueur de battement effective réelle va évoluer en fonction du A_{max} selon les deux asymptotes des longueurs de battement effectives théoriques associées au vrillage triangulaire et sinusoïdal. De même dans une fibre réelle, la longueur de battement effective est une grandeur statistique ; nous identifions donc dans la suite la longueur de battement effective à sa valeur

moyenne. En négligeant la dépendance de l'indice effectif avec la longueur d'onde, et en supposant que la longueur de corrélation est très supérieure à la période de rotation de la fibre, on obtient l'expression usuelle du DGD en fonction de la longueur de battement effective :

$$DGD(z) = \frac{8}{\sqrt{3}\pi}\frac{2\lambda}{cL_{beff}}\sqrt{L_F}\sqrt{z}$$

équation IV.7

On peut ainsi associer une longueur de battement effective mesurée en POTDR à la valeur de la différence de temps de groupe de la fibre. Nous allons utiliser cette relation dans le paragraphe suivant afin de mesurer la différence de temps de groupe dans une fibre vrillée périodiquement.

2.2.2 Estimation de la PMD sur fibre vrillée

La technique utilisée est basée sur des méthodes développées par [Wuilpart01], [Huttner]. L'objectif est de pouvoir quantifier la PMD à l'aide d'un OTDR du "commerce" et d'un simple polariseur. L'OTDR présente les caractéristiques suivantes : il est de type Tecktronix TFP2 Fiber Master, il est associé à un polariseur/analyseur + lame demi-onde connectorisée, lié à une fibre amorce, permettant la connexion à la fibre à mesurer. Le montage expérimental est identique à celui que nous avons décrit dans la *figure IV.8*. La résolution spatiale du système dépend de la durée d'impulsion, et est comprise entre 1 m pour une durée d'impulsion de 10 ns, et 10 m pour une durée de 100 ns. De même les longueurs de fibres accessibles à la mesure dépendent de la résolution et sont comprises entre 3000 m et 32000 m pour les durées d'impulsion précédentes. Les impulsions utilisées avec cet OTDR possèdent donc des largeurs temporelles plus importantes que celles obtenues avec l'OTDR à comptage de photon. De plus, du fait de la largeur spectrale de la source utilisée dans l'OTDR Tecktronicx, ces impulsions ont une cohérence faibles. De ce fait, le lien entre la différence de temps de groupe de la fibre et les "longueurs de battements effectives", n'est plus donné par l'*équation IV.7*. Un traitement rigoureux devrait prendre en compte l'incohérence de la source et la largeur temporelle à travers la fonction de transfert de l'OTDR. Cette fonction de transfert, agissant de manière similaire à un filtre, est censée "lisser" l'évolution de la polarisation qui serait obtenue dans la fibre à une longueur d'onde précise et avec une largeur d'impulsion très faible. On espère cependant observer un lien entre la PMD et le comportement de l'intensité rétro-diffusée. De façon plus précise, plus la PMD est forte plus la polarisation est censée évoluer "rapidement" dans la fibre et plus la fréquence et l'amplitude de la trace observée à l'aide de notre POTDR sont censées diminuer (de manière similaire à ce qui serait obtenu avec l'*équation IV.7* si nous utilisions la technique à comptage de photon). La *figure IV.17* représente une mesure effectuée à l'aide de l'appareil précédent sur une fibre vrillée présentant la particularité de posséder une première portion à faible PMD (**PMD_1** sur la *figure IV.17*) et une seconde portion à forte PMD (**PMD_2** sur la *figure IV.17*). Des mesures de PMD effectuées à l'aide d'une technique de mesure classique (basée sur la méthode des analyseurs fixes) sur le premier et le second tronçon ont permis de mettre en évidence une différence de 40 % entre les valeurs des PMD. On peut constater que la trace POTDR associées aux deux tronçons présente les caractéristiques suivantes :

oscillations de grandes amplitudes sur le premier tronçon et inversement sur le second tronçon. Nous avons ainsi effectué une étude comparative entre la distribution de l'amplitude de la trace POTDR et la PMD correspondante sur un ensemble de fibres vrillées sinusoïdalement. Le paramètre statistique utilisé pour quantifier la distribution de l'amplitude est la variance de l'intensité POTDR.

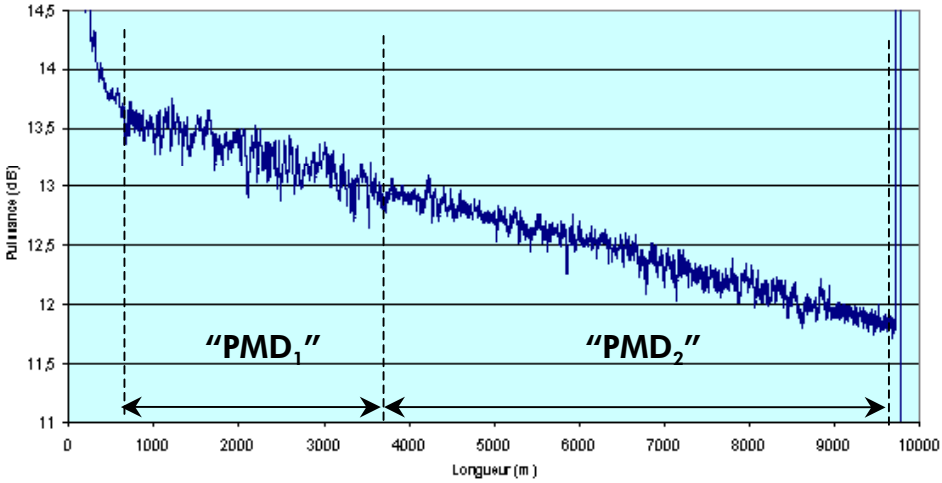

figure IV.17 : Courbe de rétro-diffusion d'une fibre présentant deux régions : l'une à forte PMD (tronçon de gauche) l'autre à faible PMD (tronçon de droite)

Une courbe d'étalonnage reliant la PMD et la variance de l'intensité POTDR à ainsi pu être réalisée sur un ensemble de 26 fibres Teralight. Les fibres ont été conditionnées sur des bobines de diamètres 400 mm à 0 g de tension. Une courbe de calibration a été obtenue et permet, à partir de l'amplitude des oscillations d'évaluer la valeur de la PMD le long de la fibre. La courbe d'étalonnage obtenue à Conflans est la suivante :

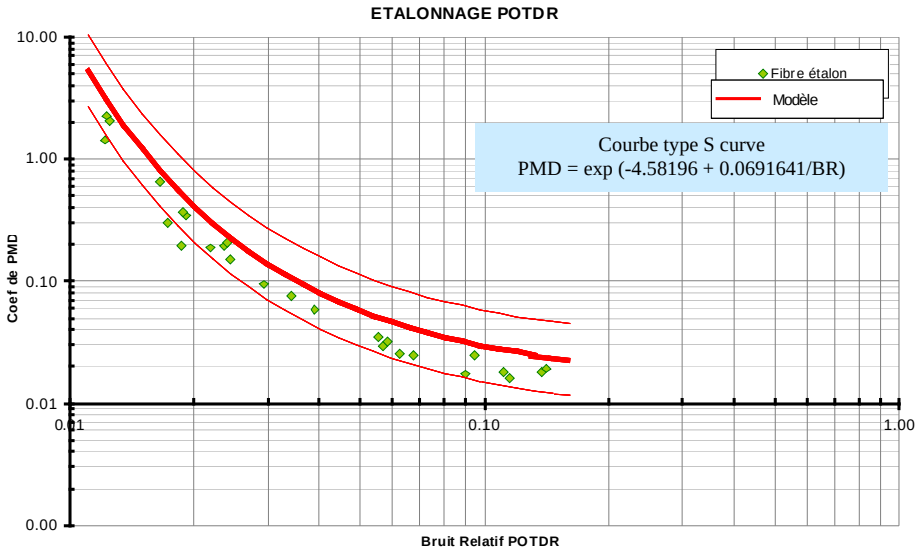

figure IV.18 : Courbe d'étalonnage de la mesure de la PMD par POTDR ; la quantité BR est une mesure de l'amplitude des oscillations de l'intensité POTDR

Les résultats des mesures effectuées en utilisant cette technique montre malheureusement que dans 30 % des cas, les fibres mesurées en PMD ne rentrent pas dans le gabarit de la courbe. De plus certaines traces POTDR ne présentent pas le comportement statistique requis pour pouvoir appliquer la méthode. La *figure IV.19* représente une telle courbe.

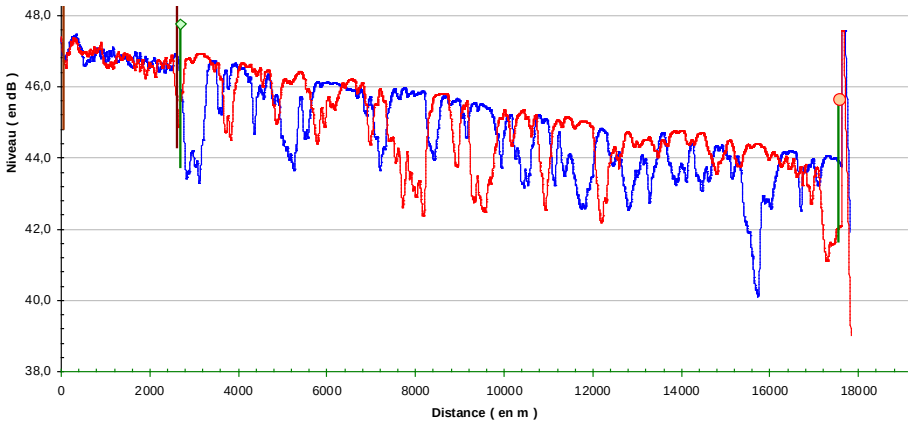

figure IV.19 : Courbe POTDR ne permettant pas l'application de la méthode

On peut constater que la trace "oscille" de façon beaucoup moins prononcée que sur la *figure IV.17*, on est tenté de lui associer une très faible PMD. Il se trouve que de telles courbes peuvent aussi bien présenter une forte ou une faible PMD. Plusieurs hypothèses ont été avancées afin d'expliquer ce comportement, mais nous n'avons pu en valider aucune. Nous citons les principales :

- Présence de torsions externes engendrant une biréfringence circulaire telle que la trace POTDR s'en trouve fortement affectée.
- Les effets aléatoires sont tels que la longueur de corrélation du vecteur biréfringence est petite devant la période de rotation de la fibre, et le comportement effectif s'en trouve modifié.
- La biréfringence des fibres est trop importante pour que l'évolution de la trace permettent d'appliquer le formalisme proposé par [Ellison00a].

2.3 Conclusion du paragraphe

Les techniques de mesure par réflectométrie permettent de caractériser l'évolution de la polarisation le long de la fibre et par conséquent permettent de caractériser la distribution de la biréfringence sur fibre non vrillée. Le modèle RMM de biréfringence a été validé par deux auteurs différents sur des fibres à faibles biréfringences. Ce modèle de biréfringence n'incorpore pas la biréfringence circulaire engendrée par des torsions externes ce qui peut conduire à une surestimation de la PMD mesurée par POTDR.

La mesure sur fibre vrillée en est à ses balbutiements, le problème réside dans la résolution des techniques POTDR. Nous avons pu mesurer la période de la fonction de rotation appliquée à une fibre optique à l'aide d'une technique de réflectométrie basée sur une technique de comptage de photons autorisant une résolution de l'ordre de la dizaine de cm. Nous n'avons pas pu en revanche nous attaquer à l'amplitude de la fonction de la rotation du fait des fréquences d'évolution extrêmement importantes.

Nous proposons dans le § 3 une étude plus localisée mais mieux résolue de l'évolution de la polarisation dans la fibre basée sur l'effet Faraday : la méthode magnéto–optique. Cette méthode va nous permettre de remonter à l'amplitude de rotation de la fibre ainsi qu'à sa période.

En ce qui concerne la mesure de la PMD par POTDR sur des fibres vrillées sinusoïdalement, nous pouvons à l'heure actuelle distinguer dans la plupart des cas les fibres à fortes PMD des fibres à faibles PMD. Nous ne pouvons garantir la PMD de façon quantitative que dans 70 % des cas.

3 Caractérisation de la polarisation dans le régime courte distance

3.1 Banc de mesure et réglage

Le banc que nous avons utilisé à Conflans est représenté sur la *figure IV.20*. Il est composé d'une fibre, d'une bobine délivrant un champ magnétique parallèle à la fibre, d'une partie émission et d'une partie réception. La partie émission est composée d'un polariseur et d'une lame $\lambda/2$ permettant de sélectionner la polarisation d'entrée. La partie réception est composée d'un polariseur permettant d'analyser la polarisation de sortie. Le couplage dans les fibres se fait à l'aide d'objectifs de microscope.

Afin d'améliorer la détection, le courant passant dans la bobine est modulé en amplitude et le signal est détecté en sortie à l'aide d'une détection synchrone. L'utilisation de cette technique se comprend si l'on effectue un calcul approximatif de la modulation de l'état de polarisation engendrée par le champ magnétique. Les bobines que nous utilisons délivrent des champs magnétiques compris entre 10^4 A/m et 10^5 A/m sur une longueur d'environ 1 cm. Compte tenu de la valeur de la constante de Verdet dans la silice à 1.55 μm, nous obtenons une modulation de l'angle de Faraday compris entre 10^{-2} et 10^{-3} rad. Cette faible valeur, combinée à la haute sensibilité de ce type de mesure aux vibrations, impose l'utilisation d'une détection synchrone.

Le déplacement de la bobine est assuré par un chariot actionné par un moteur électrique (les deux éléments ne sont pas représentés sur la figure). Enfin, il est important de prévoir une méthode permettant à la fibre d'éviter au maximum la présence de contrainte tout en restant peu sensible aux vibrations extérieures. Nous avons d'abord placé la fibre à l'intérieur d'un tube de verre pour ce faire. Cependant, la longueur du banc ($\approx$ 2 m) était telle que la flèche du tube au milieu du banc devenait gênante pour déplacer la bobine sans risquer d'induire des chocs entre la bobine et le tube. Nous avons décidé de travailler à l'aide de "scotch". Une bande de scotch est ainsi pliée en forme de "V", et déployée entre la partie émission et la partie réception. La fibre est alors délicatement positionnée dans la rainure du V de façon à éviter les courbures et les torsions. Le positionnement doit être effectué de façon à ce que tout au long du parcours du chariot, la fibre reste bien au centre de la bobine. Le champ magnétique n'étant pas parfaitement homogène dans la section de la bobine, un déplacement transversal de la fibre se caractérise par des modulations parasites de l'intensité en sortie.

Enfin, une attention particulière doit être apportée au conditionnement de la fibre qui ne se trouve pas en mesure. Celle ci doit être positionnée de façon à limiter l'impact des courants d'air et autres vibrations. On doit donc limiter la longueur de cette portion de fibre, la fixer et éviter au maximum les boucles et les torsions.

La réduction du bruit est le facteur principal de la réussite de la mesure. Les facteurs secondaires sont représentés par le réglage de la position relative de la lame $\lambda/2$ et du polariseur. [Chartier01] montre que la configuration optimale du point de vue de la mesure est obtenue lorsque l'on est proche de l'extinction en sortie. C'est en effet la configuration permettant de réduire le bruit

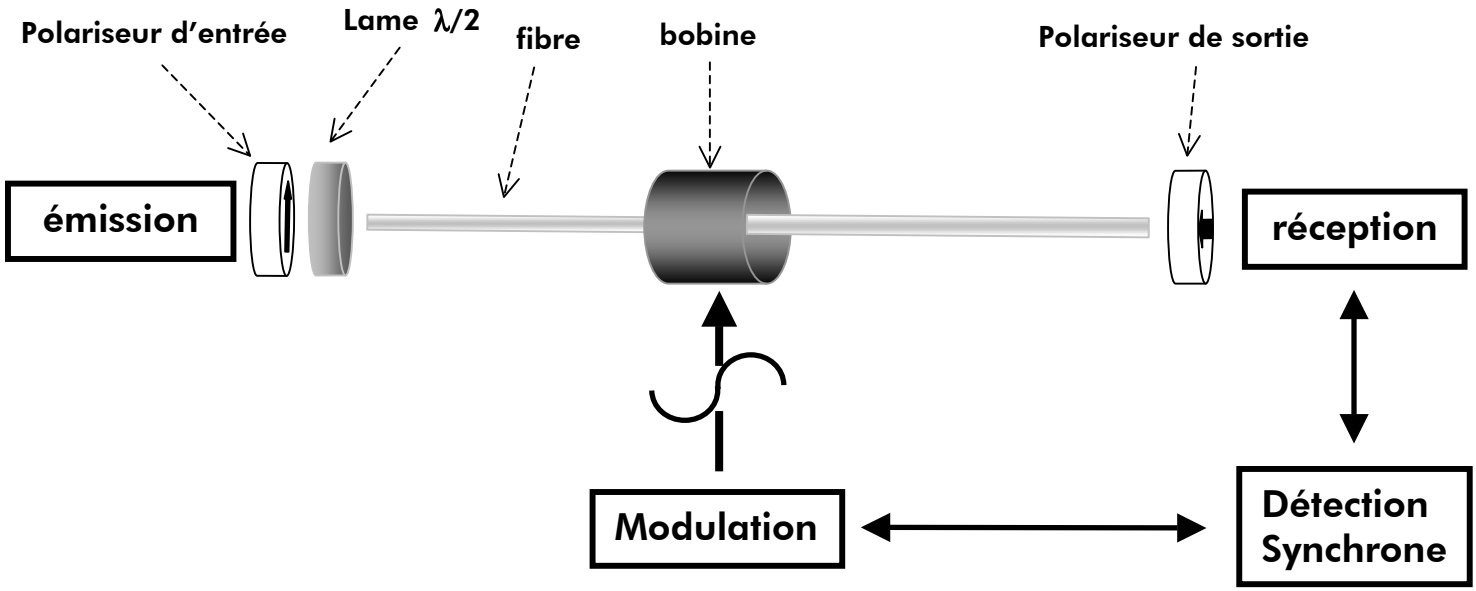

figure IV.20 : Configuration expérimentale de la mesure par effet magnéto-optique

(proportionnel à l'intensité). Les réglages se font donc en jouant sur l'orientation de la lame λ/2 et sur celle du polariseur d'analyse afin d'obtenir l'extinction du signal. Lorsque celle ci est obtenue, la polarisation d'entrée est telle que la polarisation de sortie est linéaire et orthogonale au polariseur. En déréglant légèrement l'analyseur (ou la lame λ/2) de quelques degrés, on se retrouve dans une configuration optimale de mesure. La mesure consiste ensuite, de façon simplifiée, à déplacer la bobine sur la longueur L de fibre et à enregistrer la modulation de l'intensité engendrée en sortie de fibre. L'étude de cette perturbation en fonction de la position de la bobine permet de remonter aux caractéristiques locales de biréfringence.

3.2 Exemples de mesure

La *figure IV.21* et la *figure IV.22* représentent deux exemples de mesures effectuées sur des fibres à fortes biréfringences. La première est une fibre de type spécial non vrillée, la seconde est une fibre de type spécial vrillée sinusoïdalement. Sur la seconde mesure, les trois courbes correspondent à trois orientations différentes de la lame λ/2. La longueur de battement mesurée sur la fibre non vrillée est d'environ 12.5 cm, et on peut constater sur la *figure IV.22* que des oscillations de périodes de l'ordre de 5 cm, sont aisément visibles à "l'œil nu". Nous estimons que la résolution de notre méthode de mesure est de l'ordre de la longueur de notre bobine soit environ 3 cm.

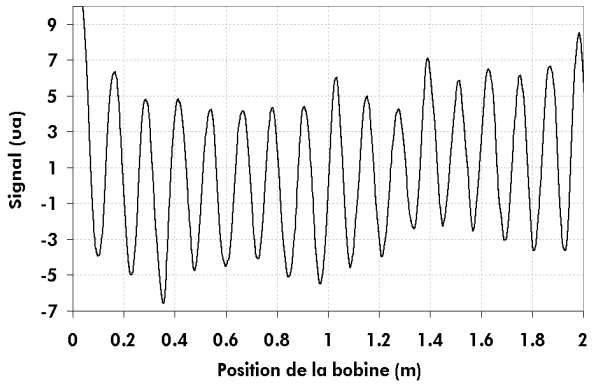

figure IV.21 : mesure de longueur de battement sur une fibre non vrillée

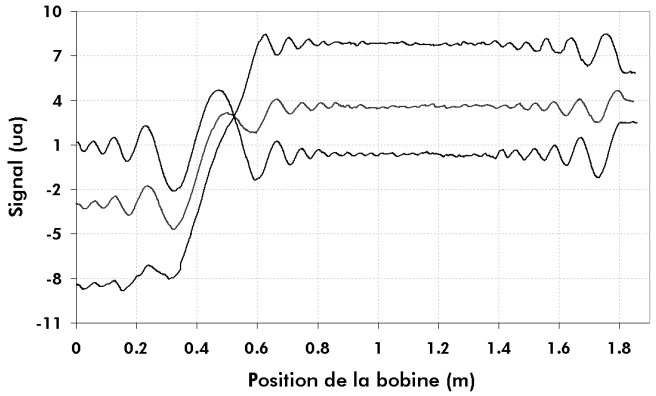

figure IV.22 : évolution de l'intensité dans une fibre vrillée sinusoïdalement pour trois positions du polariseur de sortie

Nous constatons que la résolution de la mesure nous permet d'envisager de mesurer des variations de la polarisation s'effectuant sur des distances très petites. On remarque de plus la ressemblance des courbes des figures précédentes avec les courbes expérimentales et numériques présentées au § 2. Il existe ici aussi, comme en POTDR, un lien entre l'évolution des caractéristiques locales de biréfringence avec z et l'évolution du signal mesuré en sortie de fibre.

Nous allons donc dans la suite étudier la mesure par effet Faraday de façon théorique afin de déterminer des paramètres qui nous permettraient éventuellement de remonter aux caractéristiques locales de biréfringences. Nous utiliserons, pour cela, le formalisme de Stokes qui se prête particulièrement bien aux mesures des effets de polarisation.

3.3 La mesure magnéto-optique appliquée aux fibres vrillées

Dans ce paragraphe, nous présentons le formalisme qui va être utilisé dans la suite de ce chapitre. Au § 3.3.1, nous exprimons l'état de polarisation de sortie en fonction de la position de la bobine et en fonction de la polarisation d'entrée ce qui nous permet de définir la matrice de Mueller de la mesure. On utilise ce résultat au § 3.3.2 pour définir le vecteur biréfringence magnéto-optique.

3.3.1 Calcul de l'état de polarisation en sortie de fibre

Pour chacune des positions de la bobine, on découpe la fibre de longueur L en trois tronçons se situant respectivement avant la bobine, à l'intérieur de la bobine et après la bobine [Zhang, Halliday, Chartier01] . A chaque tronçon, on associe un élément biréfringent décrit par sa matrice de Mueller. La *figure IV.23* illustre la concaténation des trois éléments biréfringents et les matrices de Mueller correspondantes.

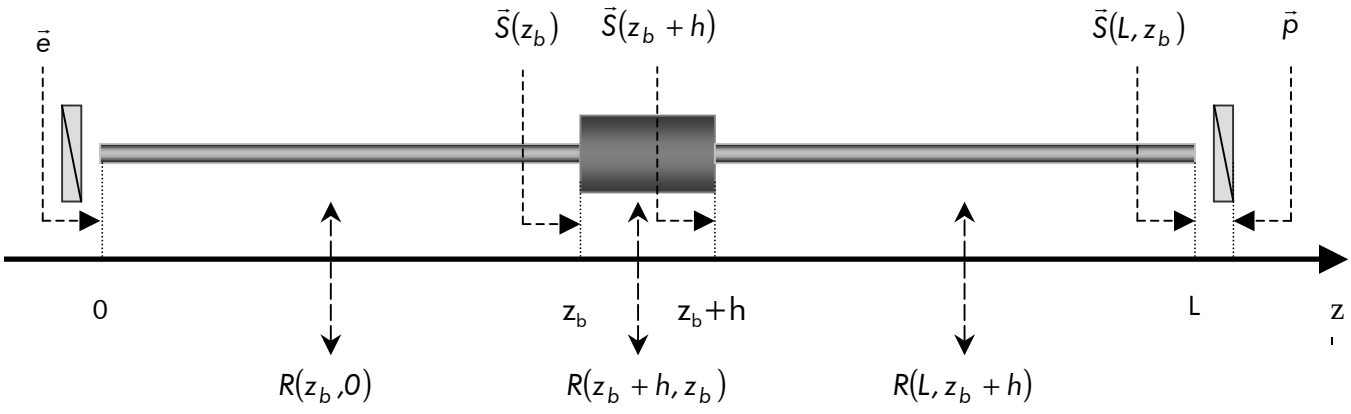

figure IV.23 : description du banc de mesure à l'aide du formalisme de Stokes

Les vecteurs de Stokes associés à l'état de polarisation de sortie et d'entrée sont reliés par le produit de ces trois matrices, produit que l'on note $R_{mo}(z_b)$:

$$\vec{S}(L,z_b) = R_{mo}(z_b)\vec{e} = R(L,z_b+h)R_{bob}(z_b+h,z_b)R(z_b,0)\vec{e}$$

équation IV.8

Dans l'*équation IV.8*, toutes les matrices sont exprimées dans un repère $\Re$, fixe par rapport à la fibre (notre référentiel). Il est commode, lorsqu'on étudie des fibres réelles (i.e. avec couplage de mode), d'exprimer la matrice de Mueller dans un repère $\Re_t$, tournant avec les axes propres de la fibre [Pellat-Finet]. La relation suivante permet de relier les matrices de Mueller du biréfringent dans les deux repères :

$$R(z',z) = R(2\theta(z'))R_t(z',z)R(-2\theta(z))$$

équation IV.9

Les matrices de passage entre les deux repères sont les matrices de rotation des axes propres de la fibre (rotation autours de l'axe $\vec{e}_3$ sur la sphère de Poincaré). Il est important de comprendre que chaque matrice de la *figure IV.23* peut être réécrite à l'aide de l'*équation IV.9* et que les matrices de rotation des axes d'un tronçon particulier s'éliminent avec les matrices de rotation du tronçon précédant et suivant. L'expression de $\vec{S}(L,z_b)$ devient donc (avec la convention $\theta(0)=0$) :

$$\vec{S}(L,z_b) = R(2\theta(L))R_t(L,z_b+h)R_{bob_t}(z_b+h,z_b)R_t(z_b,0)\vec{e}$$

équation IV.10

Du point de vue de la sortie de la fibre, l'association de la fibre et de la bobine est caractérisée pour chaque z_b par un biréfringent elliptique. Lorsque la position de la bobine varie, les paramètres caractérisant ce biréfringent varient, et $\vec{S}(L,z_b)$ est modifié en sortie. C'est le sens de l'*équation IV.8* et de l'*équation IV.10*. Afin de quantifier ces variations, nous allons définir au paragraphe suivant un vecteur biréfringence magnéto-optique.

3.3.2 Vecteur biréfringence magnéto-optique

En dérivant l'*équation IV.8* par rapport à z_b, on obtient, sachant que $\vec{e} = R_{mo}^{-1}(z_b)\vec{S}(L, z_b)$, l'équation d'évolution du vecteur $\vec{S}(L, z_b)$ en fonction de la position de la bobine [Foschini, Gordon] :

$$\frac{\partial \vec{S}(L, z_b)}{\partial z_b} = \frac{\partial R_{mo}(z_b)}{\partial z_b} R_{mo}^{-1}(z_b)\vec{S}(L, z_b)$$

équation IV.11

Le membre de droite de cette expression différentielle peut être réécrit sous la forme d'un produit vectoriel [Foschini, Gordon] :

$$\frac{\partial \vec{S}(L, z_b)}{\partial z_b} = \vec{\beta}_{mo}(z_b) \times \vec{S}(L, z_b)$$

équation IV.12

Il est possible de donner une interprétation géométrique de ce résultat à l'aide de la sphère de Poincaré. Lorsque z_b varie de façon infinitésimale, $\vec{S}(L, z_b)$ effectue une rotation infinitésimale autours d'un certain vecteur que l'on va appeler le vecteur biréfringence "magnéto-optique", $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$, par analogie avec l'équation décrivant l'évolution de la polarisation dans une fibre biréfringente. L'*équation IV.12* est formellement la même que celle décrivant la sensibilité de la polarisation en un point de la fibre lorsque la fréquence ω du signal injectée en entrée varie (*équation I.16*). Dans notre problème, z_b remplace ω et $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ remplace $\vec{\Omega}$. Grâce à cette formulation, on peut appliquer à la méthode magnéto-optique tout l'arsenal théorique et expérimental qui a été développé pour étudier et mesurer la PMD [Jopson, Shieh, Poole88]. Une des particularités de ces équations est que $\vec{\beta}$, $\vec{\Omega}$ et donc $\vec{\beta}_{mo}$ peuvent être déterminés à partir de la mesure exacte de $\vec{S}(L, z_b)$ [Jopson] (i.e. à partir de la mesure de $R_{mo}(z_b)$). Ce genre d'équation est en fait généralisable à tous les effets de polarisation ne faisant pas intervenir de perte dépendante de la polarisation (PDL) [Shieh]. On s'intéresse dans la suite à des fibres dont les axes propres font un angle $\theta(z)$ avec l'axe x du repère (x, y, z). Dans ce cas, le vecteur biréfringence s'écrit respectivement dans $\Re$ et dans $\Re_t$ sous les formes suivantes :

$$\vec{\beta}(z) = [\beta_l(z)\cos 2\theta(z)\ ;\ \beta_l(z)\sin 2\theta(z)\ ;\ \beta_c(z)]$$

équation IV.13

$$\vec{\beta}_t(z) = [\vec{\beta}_l(z)\ ;\ 0\ ;\ \beta_c(z) - 2\tau(z)]$$

équation IV.14

Les caractéristiques de biréfringence vont donc être identifiées à la biréfringence linéaire et à la biréfringence circulaire, β_l et β_c, et au taux de rotation $\tau(z)$. Nous allons considérer dans ce paragraphe que la biréfringence circulaire est engendrée par un champ magnétique ou par une torsion à froid de la fibre.

Nous allons supposer dans la suite que la bobine est infiniment fine. Cette hypothèse va nous permettre de simplifier les expressions de $\vec{\beta}_{mo}$ et de $\vec{S}(L, z_b)$ et de les relier aux caractéristiques locales de biréfringence.

3.4 Approximation longueur de bobine infiniment fine

Dans cette approximation, on suppose que le déphasage introduit par la partie de fibre se trouvant sous la bobine est très faible devant 2π. Cette hypothèse permet d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 en h de la matrice de Mueller du milieu biréfringent se situant sous la bobine, ce qui permet de simplifier considérablement les expressions de $\vec{S}(L, z_b)$ et de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$.

3.4.1 Expression simplifiée de l'état de polarisation de sortie

La matrice de Mueller associée à une bobine infiniment fine vérifie l'expression [Huard] :

$$R_{bob_t}(z+h, z) = I_d + h[\vec{\beta}_H + \vec{\beta}_t(z)] \cdot \vec{J}$$

équation IV.15

où $\vec{\beta}_H = [0\ ;\ 0\ ;\ \beta_H]$ est le vecteur biréfringence associé à l'effet du champ magnétique.

Nous pouvons exprimer $\vec{S}(L, z_b)$ en fonction de l'état de polarisation de sortie en l'absence de champ magnétique, $\vec{S}(L)$, (Annexe IV.1), lorsque la bobine est infiniment fine :

$$\vec{S}(L, z_b) = \underset{(*)}{\vec{S}(L)} + \alpha_H \underset{(**)}{[R(L, z_b)\vec{e}_3]} \times \vec{S}(L)$$

équation IV.16

L'état de polarisation en sortie de fibre pour une position z_b est ici la somme de deux termes : le premier (*) représente l'état de polarisation en sortie de fibre en l'absence de champ, le second (**) représente une perturbation proportionnelle à l'angle de Faraday α_H. En faisant intervenir $\vec{S}(z_b)$ au lieu de $\vec{S}(L)$ dans le 2e terme de l'*équation IV.16*, on obtient une expression qui permet de donner une explication plus qualitative de l'effet du champ magnétique (Annexe IV.2) :

$$\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + hR(L, z_b)[\vec{\beta}_H \times \vec{S}(z_b)] = \vec{S}(L) + \alpha_H R(L, z_b)\underset{(***)}{[\vec{e}_3 \times \vec{S}(z_b)]}$$

équation IV.17

Lorsque la bobine est infiniment fine, le champ magnétique provoque une rotation infinitésimale de $\vec{S}(z_b)$ autour de l'axe circulaire d'un angle égal à α_c (***). Cette modulation se "propage" ensuite dans la fibre jusqu'en sortie, grâce à $R(L, z_b)$, où elle est détectée. Lorsque l'état de polarisation au point d'application du champ est circulaire, la modulation de l'état de polarisation de sortie est nulle. Lorsque l'état de polarisation au point d'application du champ est linéaire, la modulation de l'état de polarisation de sortie est maximale.

3.4.2 Expression simplifiée du vecteur biréfringence magnéto-optique

L'expression exacte de $\vec{\beta}_{mo}$ est calculée en Annexe IV.3. Elle se simplifie dans le cas d'une bobine infiniment fine (cf. Annexe IV.4) :

$$\vec{\beta}_{mo}(z_b) = \alpha_H R(L, z_b)\left(\vec{e}_3 \times \vec{\beta}(z_b)\right)$$

équation IV.18

A l'aide de cette expression, on constate que la présence de biréfringence linéaire est indispensable pour que la mesure fonctionne. En effet, si la biréfringence de la fibre étudiée est purement circulaire, $\vec{\beta}$ est orienté selon $\vec{e}_3$ et le produit vectoriel est nul : il n'y a donc pas d'effet de la bobine sur l'état de polarisation de sortie. En utilisant l'expression usuelle du vecteur biréfringence, l'*équation IV.18* se développe sous la forme équivalente suivante :

$$\vec{\beta}_{mo}(z_b) = \alpha_H \beta_l(z_b) R(L, z_b) R(2\theta(z_b))\vec{e}_2 \quad \text{avec} \quad \left|\vec{\beta}_{mo}\right| = \alpha_H \beta_l(z)$$

équation IV.19

Le vecteur $\vec{\beta}_{mo}$ est le produit de la biréfringence linéaire locale de la fibre et d'un vecteur unitaire $\vec{e}_{\beta_{mo}}$ obtenu en appliquant la matrice de rotation $R(L, z_b)R(2\theta(z_b))$ au vecteur unitaire $\vec{e}_2$: $\vec{e}_{\beta_{mo}} = R(L, z_b)R(2\theta(z_b))\vec{e}_2$. Le module du vecteur $\vec{\beta}_{mo}$ fournit aisément une première relation entre une quantité mesurable en sortie de fibre et une des caractéristiques locales, la biréfringence linéaire locale $\beta_l(z)$: $\left|\vec{\beta}_{mo}\right| = \alpha_H \beta_l(z)$. L'étude de la direction de $\vec{\beta}_{mo}$, i.e. $\vec{e}_{\beta_{mo}}$, va fournir une deuxième relation reliant les caractéristiques locales et globales. En effet, la dérivée de la matrice $R(L, z_b)R(2\theta(z_b))$ est reliée aux caractéristiques locales de biréfringence, on peut donc espérer faire apparaître le taux de rotation en dérivant l'*équation IV.19* par rapport à z_b. On obtient (Annexe IV.5) :

$$\left|\frac{\partial \vec{\beta}_{mo}(z_b)}{\partial z_b}\right| = \alpha_H \sqrt{\left(\frac{\partial \beta_l}{\partial z_b}\right)^2 + \beta_l(z)^2 \left|\vec{\beta}_t\right|^2} \quad \text{avec} \quad \left|\vec{\beta}_t\right|^2 = \beta_l^2(z) + \left(\beta_c(z) - 2\tau\right)^2$$

équation IV.20

L'*équation IV.20* fait explicitement intervenir la biréfringence linéaire et sa dérivée, la biréfringence circulaire et le taux de rotation $\tau(z_b)$. Les expressions de $\vec{\beta}_{mo}$ et de sa dérivée par rapport à la position de la bobine permettent donc de faire le lien entre les grandeurs mesurables en sortie de fibre et toutes les caractéristiques locales de biréfringence.

3.5 Application du modèle

3.5.1 Application aux fibres non vrillées

Lorsque la fibre est non vrillée, la direction des axes propres est fixe tout au long de la fibre. Le vecteur $\vec{\beta}$ est donné par $\vec{\beta} = \beta_l \vec{e}_1 + \beta_H \vec{e}_3$ sous la bobine et par $\vec{\beta} = \beta_l \vec{e}_1$ ailleurs. Dans ce cas, l'intensité mesurée en sortie du polariseur d'analyse de la *figure IV.23* est suffisante pour caractériser la

fibre. L'intensité détectée en sortie du polariseur d'analyse est donnée par [Gordon] (on normalise le résultat par rapport à l'intensité avant le polariseur) :

$$I(L, z_b) = (1 + \vec{p} \cdot \vec{S}(L, z_b)) / 2$$

équation IV.21

soit d'après l'*équation IV.16*, $I(L, z_b) = (1 + \vec{p} \cdot \vec{S}(L) + \alpha_H (\vec{S}(L) \times \vec{p}) \cdot (R(L, z_b)\vec{e}_3) / 2$.

La mesure est effectuée dans une configuration où, en l'absence de champ magnétique, la polarisation en sortie de fibre est linéaire. Le polariseur d'analyse est réglé pour que l'on soit proche de l'extinction ($1 + \vec{p} \cdot \vec{S}(L) = 1 + \cos(\vec{S}(L), \vec{p}) \cong 0$ et $\vec{S}(L) \times \vec{p} = sin(\vec{S}(L), \vec{p})\vec{e}_3 << \vec{e}_3$).

Pour obtenir l'intensité, on a besoin de l'expression de la matrice de Mueller d'une fibre non vrillée. La matrice de rotation d'un angle ϕ autour d'un vecteur unitaire $\vec{e}$ a pour expression (équation ***A I.11***, Annexe I) :

$$R = I_d + sin\phi\, \vec{e} \cdot \vec{J} + (1 - \cos\phi)(\vec{e} \cdot \vec{J})(\vec{e} \cdot \vec{J})$$

équation IV.22

Pour un élément biréfringent de biréfringence linéaire β_l, de longueur $\Delta z = z' - z$ et d'axe propre orienté selon x, le vecteur unitaire $\vec{e}$ et l'angle de rotation ϕ, sont respectivement donnés par $\vec{e}_1$ et $\beta_l \Delta z$. Le calcul de $I(L,z_b)$ donne alors :

$$I(L, z_b) = [1 + \cos(\vec{S}(L), \vec{p}) + \alpha_H\, sin(\vec{S}(L), \vec{p}) \cos(\beta_l (L - z_b))] / 2$$

équation IV.23

L'évolution de $I(L, z_b)$ est sinusoïdale, la période de cette sinusoïde est la longueur de battement, $L_b = 2\pi / \beta_l$ [33] [Zhang, Halliday]. La mesure magnéto-optique sur fibre non-vrillée permet donc la caractérisation de la biréfringence par une mesure de longueur de battement.

3.5.2 Application du formalisme aux fibres uniformément vrillées

3.5.2.1 Mesure dans la configuration standard : mesure de g

Deux situations peuvent se présenter :

1) La fibre est vrillée "à chaud" avec un taux de rotation τ et aucune contrainte n'est engendrée. La biréfringence locale reste égale à β_l et le vecteur $\vec{\beta}$ tourne de façon uniforme dans le plan équatorial de la sphère de Poincaré (plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$) : $\vec{\beta} = \beta_l \cos(2\tau z)\vec{e}_1 + \beta_l \sin(2\tau z)\vec{e}_2$.
2) La fibre est vrillée "à froid". Des contraintes de torsion sont engendrées et entraînent l'apparition d'une biréfringence circulaire $\beta_c = g\tau$, proportionnelle au taux de rotation τ et

[33] Du fait de l'approximation que nous avons choisie, la longueur de la bobine n'intervient pas dans le terme en cosinus. Nous n'avons pas non plus de terme nous permettant d'apprécier l'effet de la longueur de la bobine sur le signal (terme en sinus cardial de l'*équation IV.6*).

au coefficient de contrainte optique g. La biréfringence locale devient $\beta = \left(\beta_l^2 + g^2\tau^2\right)^{1/2}$, le vecteur $\vec{\beta}$ se décompose en une composante linéaire tournant de façon uniforme dans le plan équatorial et une composante circulaire égale à $g\tau$: $\vec{\beta} = \beta_l \cos(2\pi z)\,\vec{e}_1 + \beta_l \sin(2\pi z)\,\vec{e}_2 + g\tau\,\vec{e}_3$. Le coefficient de proportionnalité g est censé dépendre du dopage mais évolue relativement peu dans les fibres de télécommunication faiblement dopées en Germanium [Schuh95].

Dans le cas simple d'une fibre uniformément vrillée, le vecteur biréfringence est fixe dans le repère tournant et s'exprime sous la forme $\vec{\beta}_t = \beta_l\,\vec{e}_1 + (lg - 2)\tau\,\vec{e}_3$, avec l=1 si la fibre est vrillée à froid et l=0 si la fibre est vrillée à chaud. En utilisant l'expression de la matrice de Mueller calculée en Annexe IV.6, on aboutit à l'expression de l'intensité pour une fibre vrillée uniformément :

$$I(L, z_b) = 0.5\left[1 + \cos(\vec{S}(L), \vec{p}) + \alpha_H \sin(\vec{S}(L), \vec{p})\left(1 - \left(\frac{\beta_l}{\beta_t}\right)^2 \left(1 - \cos\left(\beta_t (L - z_b)\right)\right)\right)\right]$$

équation IV.24

où $\beta_t = \sqrt{\beta_l^2 + 4\tau^2}$ (vrillage à "chaud") ou $\beta_t = \sqrt{\beta_l^2 + (g-2)^2\tau^2}$ (vrillage "à froid").

L'évolution de l'intensité mesurée en sortie du banc en fonction de la position de la bobine est sinusoïdale. La période de cette sinusoïde est la longueur de battement apparente $L_{bmo} = 2\pi / \beta_t$. Il est important de noter ici que cette longueur de battement n'est pas, dans les deux cas considérés, directement reliée à la biréfringence locale. La relation entre $\vec{\beta}_t$ et L_{bmo} a été utilisée par T. Chartier (CORIA) pour déterminer le coefficient de contrainte optique g dans des fibres fortement dopées en Germanium [Chartier03]. Le principe de la mesure de g consiste à appliquer une torsion externe à une fibre initialement non vrillée et à mesurer la période de l'intensité correspondante. L'utilisation de l'expression analytique permet ensuite de remonter par optimisation au coefficient g. Le dispositif de mesure utilisé par T. Chartier est identique à celui de la *figure IV.20*, à l'exception d'un dispositif supplémentaire en fin de fibre permettant d'appliquer une rotation à la fibre. Un résultat de mesure est présenté sur la *figure IV.24*. On peut constater premièrement que conformément à l'expression analytique, la biréfringence effective augmente avec le taux de torsion. Deuxièmement, le minimum de la biréfringence effective n'est pas obtenu pour un taux de torsion nul. Ceci est probablement dû à une torsion initiale τ_0 induite lors du positionnement de la fibre dans l'appareillage. En enlevant et repositionnant la fibre on obtient, à chaque fois, différentes valeurs de τ_0, ce qui confirme la remarque précédente. La courbe de la *figure IV.24* permet d'avoir trois informations, la biréfringence linéaire β_l, le coefficient g et la torsion initiale τ_0. Pour extraire ces paramètres, nous avons représenté sur la *figure IV.25*, le carré de la biréfringence en fonction du taux de rotation. Selon l'*équation IV.24* et en tenant compte de τ_o, cette courbe doit vérifier la relation suivante : $\beta^2 = \beta_l^2 + (g-2)^2(\tau - \tau_o)^2$. En utilisant une méthode des moindres carré, on obtient les paramètres de meilleur ajustement suivants : β_l=49,19±0,17 rad/m, τ_o=-6,54±0,12 rad/m et g=0,145± 0,006. La valeur de β_l obtenue est caractéristique d'une fibre de télécommunication à forte biréfringence. La valeur de τ_o n'a pas de réelle

signification puisqu'elle dépend de la configuration de la mesure. Nous trouvons une bonne concordance entre les valeurs de g mesurées et les valeurs habituellement utilisées dans la littérature [Schuh95, Ulrich79, Wegmuller].

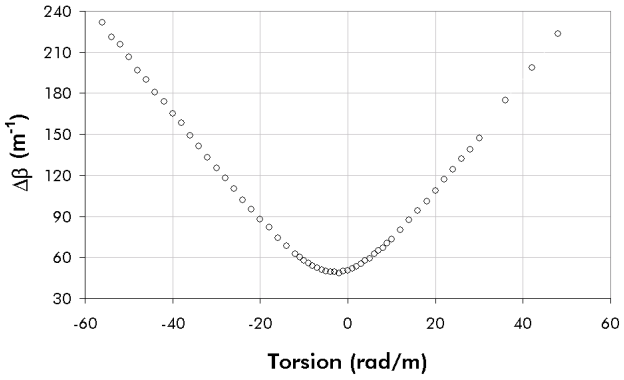

figure IV.24 : Evolution de la biréfringence effective en fonction de la torsion

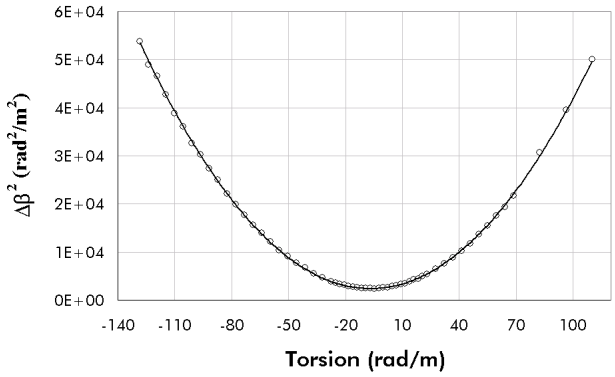

figure IV.25 : Evolution du carré de la biréfringence effective en fonction de la torsion : les cercles représentent les points de mesure ; la courbe de meilleure approximation est représentée en trait pleins

Les précisions de mesure de β_l, τ_o et g ont été obtenues par la méthode dite de "boot-strap" [Davidson]. La précision donnée correspond à un intervalle de confiance de 95%. Il faut ici souligner la très bonne précision de mesure de g obtenue grâce à cette méthode. En suivant la même procédure, quatre fibres ont été mesurées. Les fibres 1 et 2 mesurées présentent un cœur central dopé au germanium dont l'indice est surélevé de 1,6 % par rapport à celui de la silice tandis que les fibres 3 et 4 mesurées présentent un cœur central dopé au germanium dont l'indice est surélevé de 0,9 %. L'intérêt ici, est d'évaluer l'impact de ce fort dopage en germanium sur le coefficient g. Les paramètres de meilleur ajustement obtenus sont résumés dans le *tableau IV.3*.

	Fibre 1	Fibre 2	Fibre 3	Fibre 4
$\Delta\beta_l$	51.86+/-0.14	49.18+/-0.11	14.27+/-0.1	14.72+/-0.11
g	0.147+/-0.008	0.144+/-0.004	0.136+/-0.007	0.143+/-0.009
τ_o	4.37+/-0.14	-6.55+-0.09	3.34+/-0.08	-3.07+/-0.07

tableau IV.3 : résultats des mesures du coefficient g sur des fibres fortement dopées en germanium

On peut constater que l'augmentation du dopage a peu d'impact sur la valeur de g mais provoque une augmentation importante de la valeur de la biréfringence linéaire. Ce résultat est en accord avec les mesures antérieures effectuées sur des fibres plus faiblement dopées en germanium [Wegmuller, Galtarossa02b].

3.5.2.2 Domaine de validité de l'approximation bobine infiniment fine : calcul du vecteur biréfringence (cas d'une fibre uniformément vrillée)

Il est important d'étudier le domaine de validité de l'approximation bobine infiniment fine qui permet de simplifier l'expression du vecteur $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$. En effet, le déphasage local, grossièrement

approchée par $\Delta\phi = \sqrt{\beta_l^2 + 4\tau^2}h$, "vu" par la polarisation augmente avec le taux de rotation, ce qui pourrait invalider l'hypothèse d'un très faible déphasage sous la bobine. Nous avons donc lancé des simulations de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ pour un ensemble de taux de rotation, compris entre 10 et 130 rad/m, et pour des longueurs de bobine respectivement égales à 1 mm et 1 cm. La biréfringence a été choisie égale à 56 rad afin de représenter les valeurs attendues sur les fibres de type spécial. Le taux de rotation maximum choisi, correspond à ce que l'on sait faire en pratique. Ces valeurs de h, τ, β_l conduisent à des déphasages locaux compris entre 0.06 et 0.3 rad pour la bobine de 1 mm, et 0.6 et 2.66 rad pour la bobine de 1 cm. Pour la dernière valeur, on est clairement en dehors du domaine d'application de l'hypothèse de bobine infiniment fine. Nous allons donc vérifier numériquement les domaines de validité de l'*équation IV.19*. Nous avons ici considéré qu'il n'y avait pas de contraintes de torsion dans la fibre et que la biréfringence linéaire de la fibre est constante. Pour chacune des données d'entrée du problème considéré, nous avons calculé $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ avec l'expression exacte [cf. Annexe IV.3] et avec la forme simplifiée (*équation IV.19*). L'expression exacte de $\vec{\beta}_{mo}$ a été obtenue par deux méthodes :

- Calcul numérique de l'évolution de la matrice $R_{mo}(z_b)$ par concaténation de tronçons biréfringents (la méthode est identique à celle utilisée pour le calcul de la trace POTDR en Annexe II) puis calcul du produit $(\partial R_{mo}(z_b)/\partial z_b)R_{mo}^{-1}(z_b)$ pour chaque z_b et obtention de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ via (***A IV.1***).
- Utilisation de l'expression analytique de $R(L,z_b)$ obtenue dans le cas d'un vrillage uniforme (Annexe IV.6) et calcul de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ à partir de (***A IV.4***).

Remarque : On notera que l'on connaît ici les éléments de matrice de $R_{mo}(z_b)$ (ici ils sont calculés et en pratique il faudrait les mesurer). Cette démarche suppose que l'on connaisse une méthode expérimentale pour pouvoir remonter à la matrice $R_{mo}(z_b)$ à partir de la mesure de $\vec{S}(L, z_b)$; différentes méthodes de ce genre existent dans la littérature et ont été appliquées à la mesure de la PMD [Foschini, Gordon, Jopson] et à la mesure de $\vec{\beta}$ par POTDR [Galtarossa01a] (Annexe IV.7).

3.5.2.2.1 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1mm

Les *figures IV.26* à *IV.28* représentent la comparaison de l'expression simplifiée (cercles), de l'expression exacte (traits pleins) et du calcul numérique (étoiles) de la composantes selon x de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ pour des valeurs respectives de τ égales à 10, 70 et 130 rad/m. Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau suivant :

	L (m)	dz (m)	h (m)	H (A/m)	$\Delta\beta$ (m)	τ (rad/m)
figure 3.7	0.1	10^{-5}	10^{-3}	$5*10^4$	56	10
figure 3.8	0.1	10^{-5}	10^{-3}	$5*10^4$	56	70
figure 3.9	0.1	10^{-5}	10^{-3}	$5*10^4$	56	130

tableau IV.4 : paramètres de simulations de β_{mo} pour une fibre uniformément vrillée

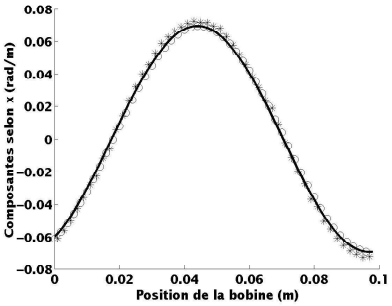

figure IV.26 : expression simplifiée (cercles), expression exacte (traits pleins), calcul numérique (étoiles) pour τ=10 rad/m

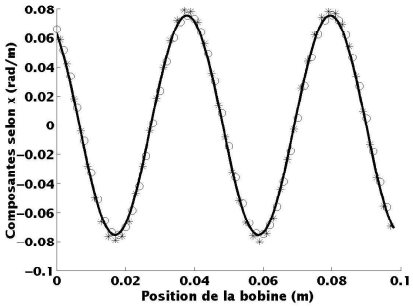

figure IV.27 : expression simplifiée (cercles), expression exacte (traits pleins), calcul numérique (étoiles) pour τ=70 rad/m

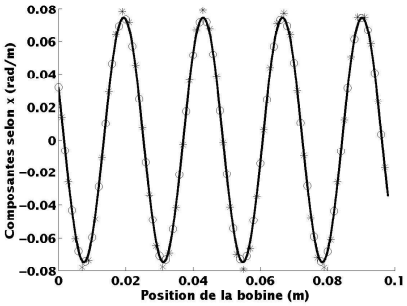

figure IV.28 :expression simplifiée (cercles), expression exacte (traits pleins), calcul numérique (étoiles) pour τ=130 rad/m

On observe sur les trois figures une bonne concordance entre les trois méthodes de calcul, ce qui permet de valider le calcul analytique, d'une part, et l'approximation de la bobine infiniment fine, d'autre part. On note ensuite que la période de variation de la composante selon x diminue lorsque le taux de rotation augmente. On peut vérifier que sa valeur évolue selon l'expression de L_{bmo} donnée plus haut.

3.5.2.2.2 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1cm

La *figure IV.29* et la *figure IV.30* représentent les mêmes simulations pour une bobine de 1 cm avec les deux cas extrêmes de rotation. Sur chaque figure on a représenté l'expression exacte (trait plein) et l'expression simplifiée (cercles).

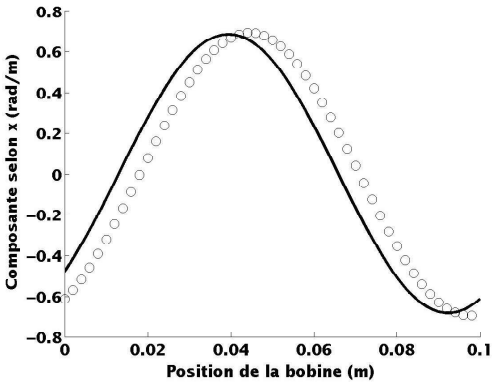

figure IV.29 : expression exacte (trait plein) et simplifiée (cercle) pour τ=10 rad/m

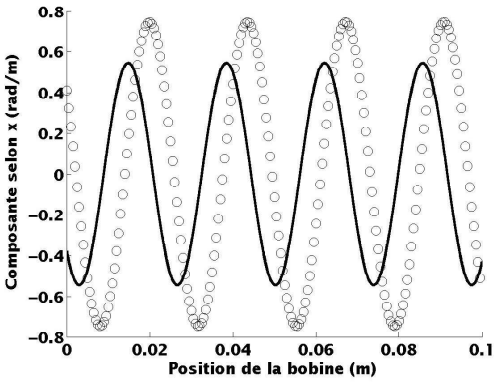

figure IV.30 : expression exacte (trait plein) et simplifiée (cercle) pour τ=130 rad/m

On observe, pour h=1cm, une différence d'amplitude et un déphasage entre les deux courbes qui s'accroît avec la valeur du taux de rotation. La fréquence du signal, en revanche, semble ne pas être affectée. La bobine joue donc le rôle d'un filtre, dont la bande passante est inversement proportionnelle à la longueur de battement apparente [Zhang, Halliday, Chartier01]. L'approximation de la bobine infiniment fine qui n'est plus strictement valable pour ce jeu de paramètres, permet néanmoins de bien décrire l'évolution de la longueur de battement effective en fonction du taux de rotation.

3.5.3 Application du formalisme aux fibres possédant un vrillage sinusoïdal

Nous étudions maintenant l'exemple d'une fibre vrillée sinusoïdalement. Nous rappelons l'expression de l'angle de rotation dans une fibre vrillée sinusoïdalement en fonction de A_{max} et de T :

$$\theta(z_b) = \frac{A_{max}}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi}{T} z_b))$$

équation IV.25

Nous comparons les expressions exactes (***A IV.4***) et simplifiées (*équation IV.19*) pour des longueurs de bobine égales à 1 mm et 1 cm. A l'heure actuelle, il n'existe pas d'expression analytique pour les matrices $R(L, z_b)$ d'un milieu biréfringent vrillé de façon sinusoïdale, ces dernières ont donc été calculées numériquement par concaténation de tronçon pour chaque position de la bobine.

3.5.3.1 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1mm

La *figure IV.31* représente l'évolution de la composante de $\vec{\beta}_{mo}$ selon $\vec{e}_1$ avec la position de la bobine z_b. La courbe pleine représente l'expression exacte, et les cercles, la formule simplifiée (*équation IV.19*). Nous utilisons les mêmes paramètres de simulations que le *tableau IV.4* et nous choisissons des valeurs typiques pour les paramètres A_{max}=130 rad et T=2 m de la fonction de rotation.

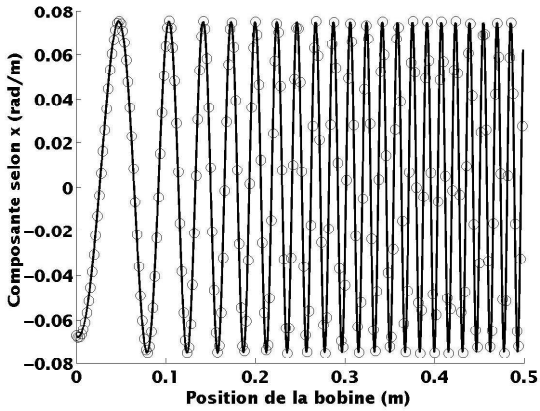

figure IV.31 : Composante selon $\vec{e}_1$ de $\vec{\beta}_{mo}$ pour un vrillage sinusoïdal ; la courbe pleine représente l'expression exacte et les cercles l'expression simplifiée

On observe une bonne concordance entre l'approximation simplifiée et l'expression exacte pour une valeur h=1 mm.

3.5.3.2 Simulations de $\vec{\beta}_{mo}$ pour h=1cm

La *figure IV.32* et la *figure IV.33* représentent respectivement les résultats obtenus en utilisant l'expression exacte et simplifiée du vecteur $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ pour h= 1 cm. On peut constater que l'amplitude de cette composante diminue progressivement avec z_b pour l'expression exacte alors qu'elle reste

constante avec l'expression simplifiée. L'approximation de la bobine infiniment fine n'est donc pas valable pour une bobine de 1 cm et pour les valeurs de A_{max}, T et L_b utilisées dans la simulation. On peut cependant noter que les pseudo-périodes obtenues avec l'expression exacte et avec l'expression simplifiée sont identiques. Comme dans le cas uniforme, l'expression simplifiée peut être utilisée pour caractériser partiellement le spectre de l'intensité magnéto-optique.

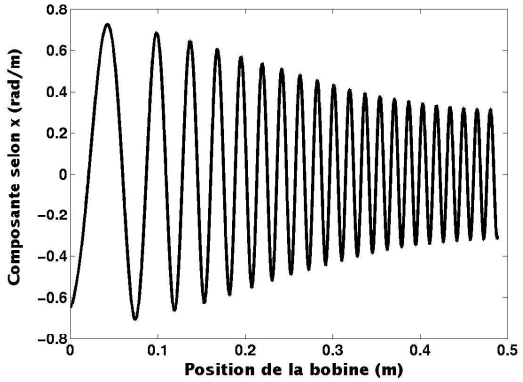

figure IV.32 : Expression exacte de la composante suivant e_1 de β_{mo} pour un vrillage sinusoïdal.

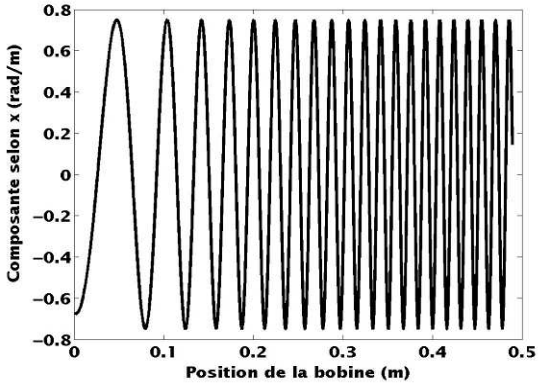

figure IV.33 : Expression simplifiée de la composante suivant e_1 de β_{mo} pour un vrillage sinusoïdal.

3.5.3.3 Méthode de reconstruction des caractéristiques locales de biréfringence

Pour la reconstruction du taux de rotation, nous allons utiliser les expressions de $\vec{\beta}_{mo}$ et de sa dérivée par rapport à z_b et les résultats du paragraphe précédent concernant la description des pseudo-périodes. Nous allons faire deux hypothèses sur la biréfringence linéaire et sur la biréfringence circulaire afin de pouvoir les utiliser aisément.

On considère que le vrillage à chaud n'engendre pas de biréfringence circulaire. La biréfringence circulaire est donc engendrée par un vrillage à froid de la fibre, lors de la préparation de la mesure. Au § 3.5.2.1, nous avons vu que des rotations parasites de l'ordre de 5 rad/m sont en effet généralement engendrées lors du conditionnement. Avec $\beta_c = g\tau_{parasite}$, ces torsions conduisent à une valeur de biréfringence circulaire inférieure à 1 rad pour g=0.15. On peut donc estimer, lorsque le vrillage à froid n'est pas introduit volontairement, que la biréfringence circulaire dans la fibre est négligeable devant le taux de rotation du vrillage à chaud. Enfin, si on suppose que le vrillage à chaud ne modifie pas la géométrie de la fibre, la dérivée de la biréfringence linéaire peut-elle aussi être négligée en première approximation sur la longueur de la fibre en mesure.

3.5.3.3.1 Mesure exacte de β_l et de τ

Nous exprimons le taux de rotation et la biréfringence linéaire en fonction du vecteur $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ grâce aux *équations IV.19* et *IV.20* :

$$\tau(z_b) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\left|\frac{\partial\vec{\beta}_{mo}(z_b)}{\partial z_b}\right|^2}{\left|\vec{\beta}_{mo}(z_b)\right|^2} - \frac{\left|\vec{\beta}_{mo}(z_b)\right|^2}{\alpha_H^2}\right)} \quad \text{avec} \quad \beta_l = \frac{\left|\vec{\beta}_{mo}(z_b)\right|}{\alpha_H}$$

équation IV.26

Une procédure de mesure de τ se décompose alors en trois étapes :

3) Mesure de $R_{mo}(z_b)$ en fonction de z_b (Annexe IV.7).
4) Calcul du vecteur $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ à l'aide de ***A IV.1*** et calcul de sa dérivée.
5) A partir du module de $\vec{\beta}_{mo}$, on peut déterminer la biréfringence linéaire. A partir du module de $\frac{\partial\vec{\beta}_{mo}(z_b)}{\partial z_b}$ on peut déterminer le taux de rotation.

Dans la suite nous utilisons l'*équation IV.26*, en calculant $\vec{\beta}_{mo}$ et $\frac{\partial\vec{\beta}_{mo}}{\partial z_b}$ à partir de simulation de R_{mo}, pour une fibre dont la rotation des axes propres est sinusoïdale. Trois cas de figure sont envisagés : bobine de 1 mm et α_H connu, bobine de 1cm et α_H connu, enfin bobine de 1cm et α_H inconnu. Le premier correspond au domaine de validité de l'hypothèse d'une bobine infiniment fine et suppose que l'on connaît α_H, ou que l'on peut le mesurer. Le second et le troisième correspondent à la configuration de mesure Conflans[34].

3.5.3.3.1.1 Calcul du taux de rotation pour h=1 mm

Sur la *figure IV.34*, on a représenté le taux de rotation ayant servi à faire les simulations et le taux de rotation calculé à partir de la simulation en utilisant l'*équation IV.26*. Les cercles et les étoiles représentent respectivement le résultat de calcul de $\tau(z_b)^2$ lorsque (***A IV.4***) et l'*équation IV.19* sont utilisées; la courbe pleine représente le taux de rotation exact. On note une bonne concordance des trois courbes.

[34] Le champ magnétique délivré par la bobine et sa longueur d'application ne sont connus qu'imparfaitement

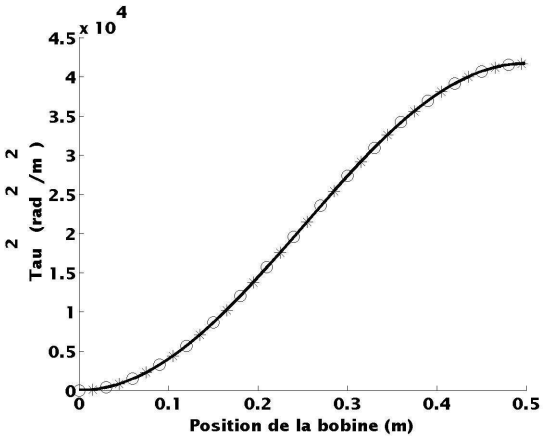

figure IV.34 : Calcul de τ^2 : la ligne représente le taux de rotation exact, les cercles et les étoiles correspondent respectivement à l'utilisation de l'expression exacte et à l'utilisation de l'expression simplifiée du vecteur $\vec{\beta}_{mo}$

3.5.3.3.1.2 Calcul du taux de rotation pour h=1cm

La *figure IV.35* représente les résultats des simulations pour une bobine de 1 cm et pour le jeu de paramètres du § 3.5.31. Les courbes sont repérées de la même façon qu'au paragraphe précédent. Les résultats du calcul semblent plus précis lorsqu'on utilise l'*équation IV.19* pour le calcul de $4\tau^2$. La différence entre l'expression analytique de $4\tau^2$ et les expressions calculées reste très faible malgré la non validité de l'hypothèse d'une bobine infiniment fine. A titre de comparaison, les calculs précédents ont été refaits en négligeant le terme β_l^4 dans l'*équation IV.20* (expérimentalement parlant cela évite de mesurer l'angle de Faraday). Ces paramètres expérimentaux (bobine 1cm, angle Faraday inconnu) sont proches de ce que l'on pourrait faire avec la configuration actuelle du banc. Le résultat est représenté en logarithme sur la *figure IV.36*. On peut constater que les résultats sont bons sauf aux faibles vitesses de rotation de la fibre (z<10 cm) ou le terme β^2 ne peut plus être négligé devant $4\tau^2(z_b)$.

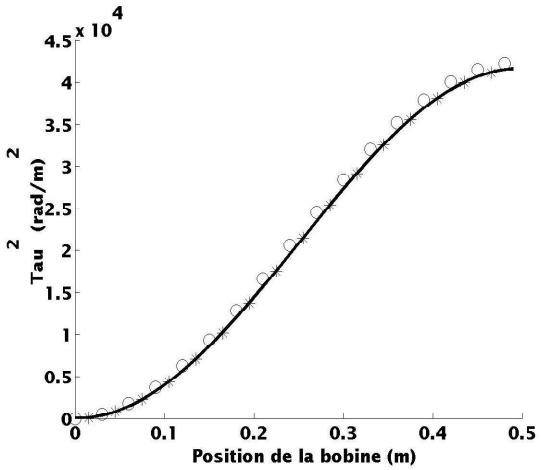

figure IV.35 : τ^2 pour h=1cm

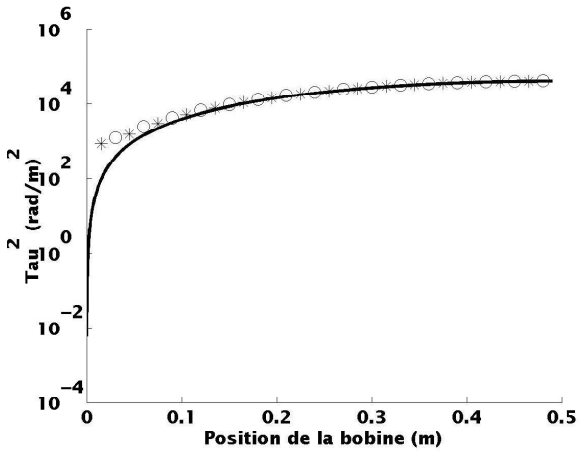

figure IV.36 : τ^2 pour h=1cm : β_l^4 négligé dans l'équation IV.20

3.5.3.3.2 Calcul approché du taux de rotation

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'expression simplifiée de $\vec{\beta}_{mo}$ permettait de décrire correctement les pseudo-périodes observées sur la mesure de fibre avec vrillage sinusoïdale. Nous allons utiliser ce résultat pour déterminer la biréfringence et le taux de rotation à partir d'une mesure de $I(L, z_b)$ (configuration Conflans). La méthode est d'abord explicitée et validée théoriquement à partir d'une simulation de l'intensité magnéto-optique mesurée sur une fibre vrillée sinusoïdalement. La méthode est ensuite appliquée à une mesure réelle.

3.5.3.3.2.1 Validation numérique

Nous avons représenté sur la *figure IV.37*, une simulation de l'intensité mesurée en sortie de fibre lorsque les axes sont vrillés sinusoïdalement (L_b= 10 cm, A_{max}=100 rad, T=2 m). Cette simulation représente un cas typique de mesure sur une fibre de type spécial avec vrillage à chaud. La simulation est effectuée sur une longueur égale à une demi période de vrillage. Le taux de rotation est maximal pour z_b = 50 cm et minimal pour z_b=0 et 1 m, il est représenté sur la *figure IV.38* par la courbe pleine. On peut constater sur la *figure IV.37* que l'intensité se comporte de façon "pseudo-périodique". En particulier, l'amplitude et la fréquence des oscillations varient de façon inversement proportionnelle au taux de rotation.

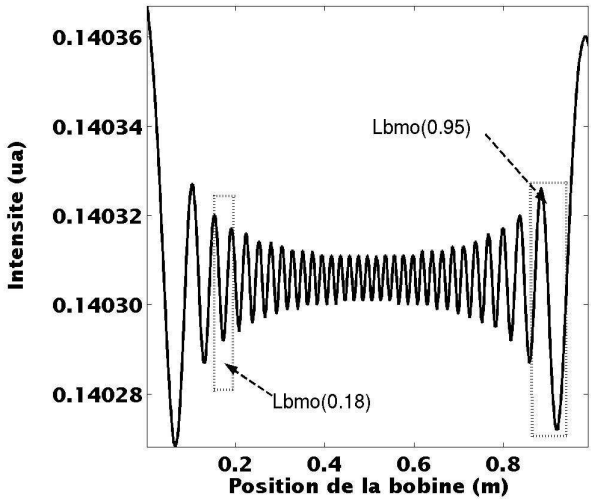

figure IV.37 : Intensité magnéto-optique pour un vrillage sinusoïdal (A_{max}=100, T=2, L_b=10 cm)

La méthode de reconstruction du taux de rotation consiste à relier la valeur des pseudo-périodes au taux de rotation. Pour cela, on suppose que sur chaque pseudo-période du signal, le taux de rotation $\tau(z_b)$ varie peu. Cela revient à considérer la fibre comme une succession de tronçons uniformément vrillés. On utilise ensuite les résultats du § 3.5.2.1 sur chaque tronçon en supposant que la biréfringence circulaire est négligeable et que la biréfringence linéaire est constante. Sur chaque tronçon, on suppose donc que la rotation de la fibre est proche d'une rotation uniforme : d'après le § 3.5.2.1 cela consiste à dire que l'intensité évolue périodiquement avec une fréquence proportionnelle à

$\left|\vec{\beta}_t(z_b)\right| = \sqrt{\beta_l^2 + 4\tau(z_b)^2} = 2\pi / L_{bmo}(z_b)$. On exprime ensuite le taux de rotation sur chaque tronçon en fonction de la longueur de battement apparente L_{bmo} :

$$\tau(z_b) = \frac{\pi}{L_b}\sqrt{\left(\frac{L_b}{L_{bmo}(z_b)}\right)^2 - 1}$$

équation IV.27

Cette relation indique que tant que l'on peut distinguer un semblant d'évolution périodique autours du point z_b on peut mesurer le taux de rotation en ce point. La longueur de battement est donnée par la valeur des pseudo-périodes aux points où la rotation de la fibre est nulle (z_b=0 m et z_b= 1m). En mesurant la valeur des "pseudo périodes " en fonction de la position sur la simulation précédente (deux exemples sont donnés sur la figure pour z_b=18 cm et z_b=95 cm), et en appliquant l'*équation IV.27*, on obtient le taux de rotation aux points de mesure. Le résultat du calcul est représenté sur la figure ci dessous :

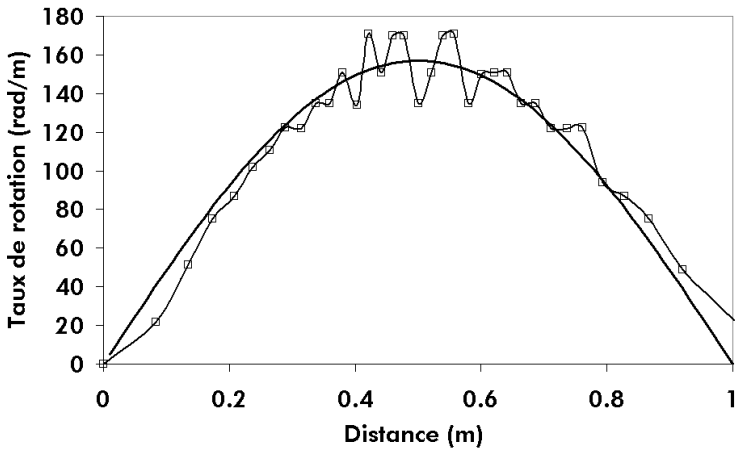

figure IV.38 : Taux de rotation exact (trait plein) et taux de rotation calculé avec l'équation IV.27 (carré).

On peut noter que le taux de rotation exact est en bon accord avec le taux de rotation calculé. Les hypothèses effectuées pour obtenir l'*équation IV.27* sont donc valables pour les valeurs des paramètres β_l, A_{max} et T utilisées pour la simulation. De façon plus générale, cette méthode fonctionnera d'autant mieux que l'évolution de l'intensité s'écarte peu d'une évolution périodique (c'est à dire pour des valeurs pas trop élevées du rapport du taux de rotation par la biréfringence linéaire).

3.5.3.3.2.2 Détermination expérimentale du taux de rotation

La *figure IV.39* représente un exemple de mesure sur une fibre de type spécial avec vrillage sinusoïdal des axes propres. On peut noter une bonne ressemblance avec la simulation de la *figure IV.37*.

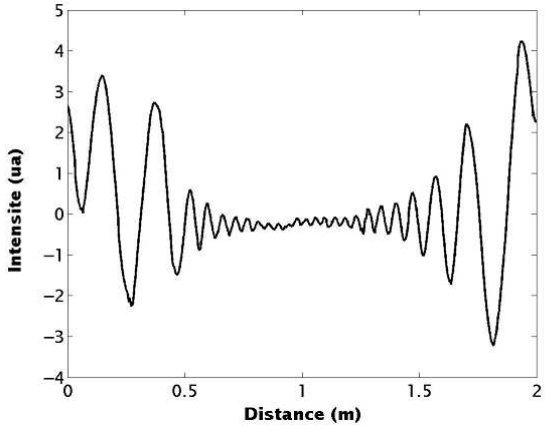

figure IV.39 : Intensité mesurée sur une fibre avec vrillage sinusoïdal des axes propres

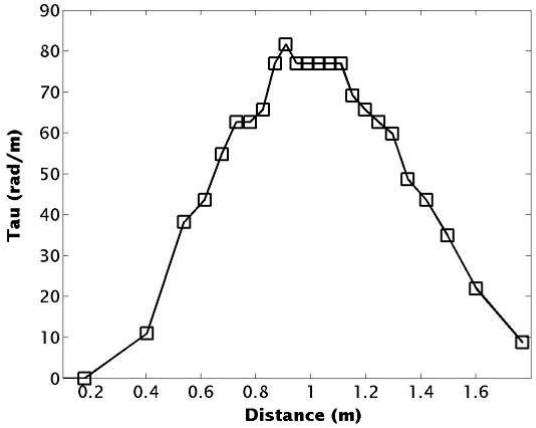

figure IV.40 : Taux de rotation mesuré sur une fibre avec vrillage sinusoïdal des axes propres

A l'aide de la *figure IV.39*, nous avons reproduit le schéma de calcul exposé au paragraphe précédent. La longueur de battement estimée autours de z_b=0.25 m et z_b=2 m est de l'ordre de 25 cm. Le résultat du calcul du taux de rotation en fonction de la position de la bobine est représenté sur la *figure IV.40*. Le vrillage des axes étant supposé sinusoïdal, la valeur maximum du taux de rotation, τ_{max}, est reliée à l'amplitude maximale, A_{max}, par la relation suivante : $\tau_{max} = \frac{\pi A_{max}}{T}$, où T est la période de rotation de la fibre. Au vu de ces résultats, nous pouvons estimer la valeur de la période à environ 4 m, ce qui nous donne un A_{max} de 100 rad (16 tours). Les valeurs de L_b, A_{max} et T ainsi obtenues sont en bon accord avec les valeurs attendues sur des fibres de type spécial.

3.5.4 Application du formalisme aux fibres vrillées de façon quelconque

La façon dont l'intensité mesurée en sortie de fibre évolue est caractéristique de la fonction de rotation des axes propres de la fibre et de sa biréfringence. Dans la suite deux types de rotation sont étudiés :

- la première correspond à une rotation sinusoïdale conventionnelle
- la seconde correspond à une rotation triangulaire réellement appliquée à la fibre. Elle comporte de ce fait des régions où la fibre s'arrête de tourner (par opposition à une rotation triangulaire idéale ou la fibre ne s'arrête jamais de tourner). Nous désignons ce type de vrillage par triangulaire amorti dans la suite.

La *figure IV.41* représente les rotations sinusoïdales et triangulaires utilisées pour les simulations de l'intensité magnéto-optique. La période *T* et l'amplitude A_{max} ont été choisies de façon à ajuster les simulations avec les mesures. La rotation triangulaire se décompose en trois parties, une partie sinusoïdale de 0 à Z_1, une partie linéaire de Z_1 à Z_2 et une partie sinusoïdale de Z_2 à *T*. La partie sinusoïdale correspond aux temps d'arrêt de la rotation. A l'aide de ces fonctions de rotation, nous obtenons les résultats de simulation de la *figure IV.42*.

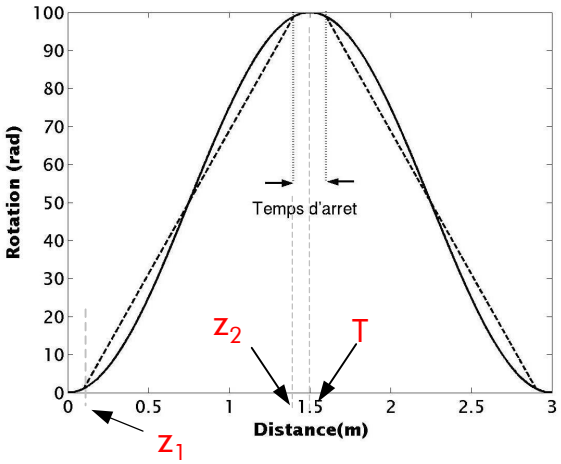

figure IV.41 : vrillage sinusoîdal (trait plein) et triangulaire (pointillé)

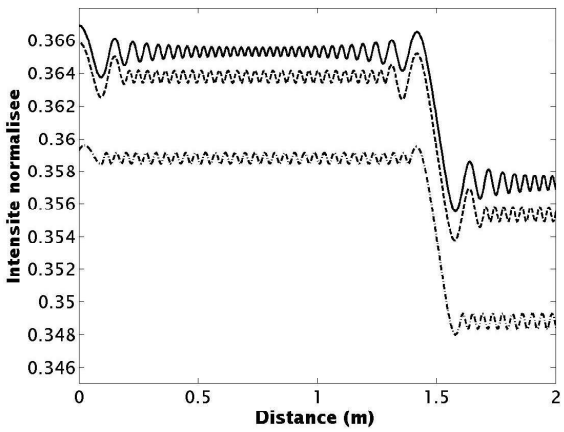

figure IV.42 : Intensité pour un vrillage sinusoïdal (trait pleins) et deux vrillage triangulaires amortis (pointillé et pointillé plus point) pour deux temps d'arrêt différents (40 cm et 20 cm respectivement)

On peut constater, sur cette dernière figure, que l'amplitude du signal diminue de façon continue avec la vitesse de rotation de la fibre lorsque le vrillage est sinusoïdal et de façon discontinue lorsque que le vrillage est triangulaire amorti. Sur une distance correspondant au temps d'arrêt l'évolution du signal est la même pour les deux types de vrillage. Pour une distance comprise entre Z_1 et Z_2, la rotation de la fibre est linéaire pour le vrillage triangulaire amorti ce qui donne lieu à une évolution uniforme du signal mesuré. La courbe en pointillé plus point est très proche de celle que l'on obtiendrait à l'aide d'un vrillage triangulaire parfait. Le signal se décompose en une série d'évolutions uniformes entrecoupées de transitions brutales lorsque la fibre change de sens de rotation. Il est donc possible en théorie de distinguer un vrillage triangulaire réel d'un vrillage sinusoïdal par des mesures magnéto-optiques. La *figure IV.43* représente deux mesures effectuées sur des fibres de type spéciales fibrées avec un vrillage sinusoïdal et un vrillage triangulaire amorti.

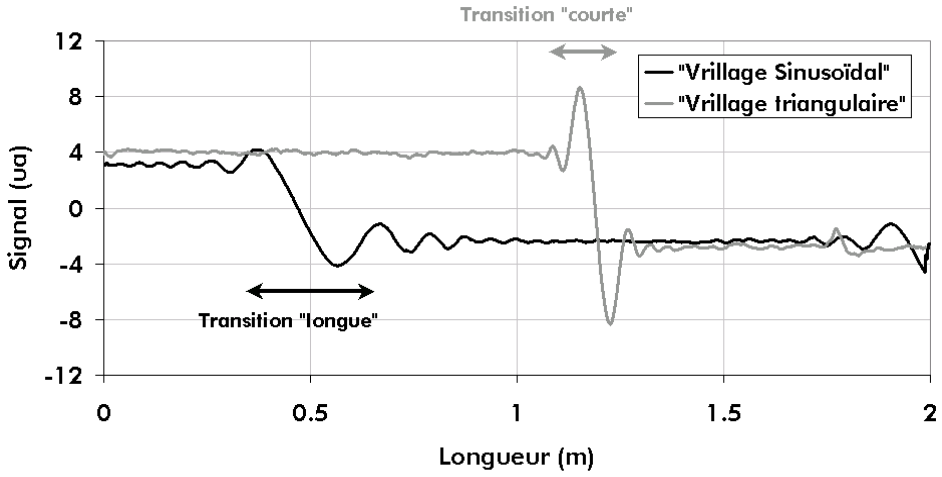

figure IV.43 : Mesure magnéto-optique sur deux essais de vrillage : vrillage traditionnel en noir ; vrillage carré en gris

On constate que l'on retrouve les conclusions tirées des simulations : L'évolution de l'amplitude du vrillage triangulaire est plus "brutale" que celle du vrillage sinusoïdal. Les pentes des transitions sont en

revanche différentes ce qui est la conséquence d'une biréfringence plus élevée. On rappelle l'expression de l'intensité mesurée en sortie de fibre lorsque l'approximation de la bobine infiniment fine est vérifiée : $I(L,z_b) = 0.5\sin(\vec{S}(L),\vec{p})\alpha_H(\vec{e}_3 \cdot R(L,z_b)\vec{e}_3)$. La dépendance vis à vis de la position de la bobine est contenue dans l'élément de matrice $R(L,z_b)_{33}$. Lorsque la fibre n'est pas twistée, il vaut $R(L,z_b)_{33} = \cos\beta_l(L-z_b)$. La rotation de la fibre étant périodique, la fibre s'arrête de tourner tous les z=T. A ces instants, on va utiliser l'expression de l'intensité pour une fibre non vrillée. L'expression de l'intensité fait intervenir le terme $0.5\sin(\vec{S}(L),\vec{p})\alpha_H$ qui n'est pas connu à priori. Ce terme est de plus multiplié par un coefficient lorsque la mesure est faite à l'aide d'une détection synchrone. Pour s'en affranchir, on combine l'intensité mesurée et sa dérivée par rapport à la position. A l'ordre 1 en α_H la dérivée de l'intensité est donnée par $2(\partial I/\partial z) = -\sin(\vec{S}(L),\vec{p})\alpha_H\,\beta_l\sin\beta_l(L-z_b)$. Le rapport de la dérivée de l'intensité et de l'intensité ne dépend donc que de la biréfringence : $(1/I)(\partial I/\partial z) = -\beta_l\,tg\beta_l(L-z_b)$. En calculant cette expression autours des zones de transitions, il devient aisé de déterminer la biréfringence. La *figure IV.44* et la *figure IV.45* représentent le calcul du rapport $(1/I)(\partial I/\partial z)$ appliqué aux mesures précédentes. On constate que la dépendance vis à vis de la position de la bobine à effectivement la forme d'une tangente et que la biréfringence de la fibre vrillée triangulairement semble plus importante.

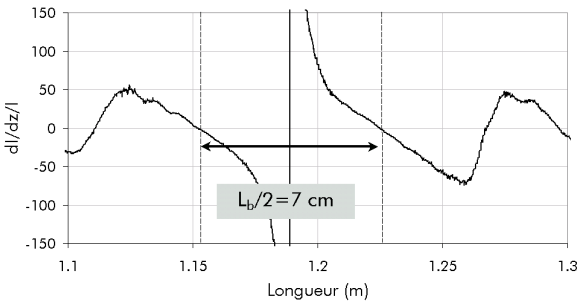

figure IV.44 : mesure de la longueur de battement sur la fibre avec vrillage triangulaire amorti

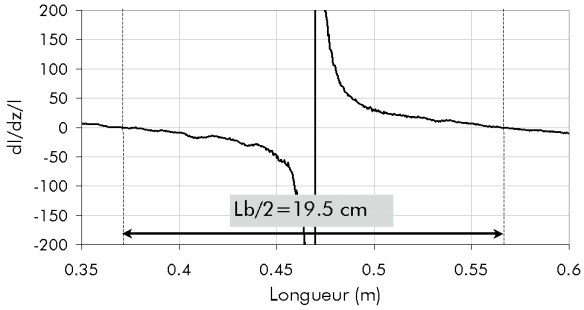

figure IV.45 : mesure de la longueur de battement sur la fibre avec vrillage sinusoïdal

3.6 Conclusion du paragraphe 3

Ce chapitre dédié à la mesure de la biréfringence sur des fibres à haute biréfringence s'articule autours de deux axes.

Le premier, théorique, a consisté à modéliser la mesure par effet magnéto-optique à l'aide du formalisme de Stokes. Nous nous sommes concentrés sur deux points :

- *L'évolution de l'intensité mesurée en sortie du banc avec la position de la bobine*
- *L'évolution de l'état de polarisation de sortie avec la position de la bobine et la définition d'un vecteur biréfringence magnéto-optique.*

Les expressions de l'intensité et du vecteur biréfringence magnéto-optique, obtenues en supposant que la bobine a une épaisseur très fine (1 mm), concordent avec les résultats obtenus numériquement. Les simulations montrent que lorsqu'on prend des valeurs de h plus grandes (1 cm) pour les mêmes jeux de paramètres, les résultats analytiques permettent de décrire correctement les variations de la fréquence du signal, mais ne permettent pas de décrire les variations de son amplitude. Deux méthodes de mesure des caractéristiques de biréfringence sur fibre avec vrillage des axes propres sont proposées :

1) *La première est basée sur un traitement de $I(L, z_b)$ et suppose que la biréfringence linéaire est constante et que la biréfringence circulaire est négligeable. Elle a été validée qualitativement sur des fibres de type spécial.*
2) *La seconde est basée sur une mesure précise de $\vec{S}(L, z_b)$ et suppose que la biréfringence circulaire est négligeable. La mise en œuvre expérimentale est cependant lourde car elle nécessite une bobine très fine et un très bon rapport signal à bruit.*

Le second, expérimental, a consisté à effectuer des mesures sur des fibres de type spécial, vrillées et non vrillées. Deux types de mesure ont été effectuées :

1) *L'application de la méthode magnéto-optique aux fibres vrillées uniformément a permis de mesurer le coefficient de contrainte optique g sur quatre fibres fortement dopées en germanium [Chartier03]. Les résultats de mesure montrent que le dopage influe peu sur la valeur de g et confirment les tendances observées précédemment dans la littérature. L'expression analytique de la biréfringence effective associée à une fibre uniformément vrillée nous a permis de comprendre de façon plus approfondie les résultats de mesure obtenus par T. Chartier.*
2) *Nous avons ensuite pu mettre en place une méthode de mesure du vrillage basée sur le traitement de la périodicité de l'intensité de sortie. Les taux de rotation mesurés sont conformes avec ceux implémentés en pratique. Cette méthode permet d'identifier la forme de la rotation imprimée à la fibre. Nous avons, en particuliers, confirmé que le profil de rotation dit "triangulaire amorti" avait effectivement la forme triangulaire attendue. Enfin, nous avons pu mesurer la biréfringence sur des fibres vrillées dans des zones où la fibre s'arrête de tourner.*

4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a été consacré à la caractérisation de la biréfringence et du couplage de mode.

Nous avons dans un premier temps caractérisé la biréfringence et le couplage de mode dans le régime longue distance à l'aide de techniques réflectométriques à haute et basse résolution. Ces techniques sont adaptées, de par leur résolution, aux fibres à faibles biréfringences (fibres SMF et NZDSF). La technique à haute résolution nous a permis de vérifier la bonne application du vrillage et nous a permis de mesurer la périodicité du vrillage. Cette mesure a pu être effectuée à partir de l'étude de l'évolution caractéristique de la polarisation dans une fibre vrillée périodiquement. La méthode à basse résolution nous a permis, de manière similaire à la mesure dans les fibres non vrillées, de différencier les fibres à hautes et à faibles PMD. La mesure repose sur l'évaluation chiffrée du degré de variation de l'amplitude de l'intensité rétro-diffusée et sur la mesure de la PMD obtenue avec une technique traditionnelle. L'association du degré de variation de l'intensité rétro-diffusée et de la valeur de PMD correspondante permet de définir une abaque reliant la valeur de la PMD à la mesure en POTDR. Une étude statistique a été effectuée à l'aide de cette méthode ce qui a permis d'obtenir des résultats satisfaisant dans 70 % des cas. Un travail plus approfondi sur le comportement des fibres périodiquement vrillées dans le régime longue distance reste à effectuer afin de comprendre l'échec de la mesure dans 30 % des cas.

Nous avons dans un second temps caractérisé la biréfringence et le couplage de mode dans le régime courte distance. Nous avons utilisé une méthode basée sur l'effet Faraday. Cette méthode consiste à moduler localement la biréfringence par application d'un champ magnétique et à mesurer simultanément la modulation de la polarisation de sortie qui en résulte. Elle offre une résolution de l'ordre de 4 cm et est, de ce fait, particulièrement adaptée à la mesure sur des fibres à hautes biréfringences. Nous avons dans un premier temps effectué un travail théorique afin de relier l'état de polarisation mesuré en sortie de fibre à la position d'application du champ magnétique. Nous avons appliqué le formalisme développé à trois types de fibres : fibres non vrillées, fibres vrillées uniformément et fibres vrillées périodiquement. Il ressort de cette étude que le taux de variation de la polarisation de sortie est intimement relié au taux de variation de la biréfringence au point d'application du champ magnétique. Ce travail théorique nous a permis de comprendre de façon plus approfondie les résultats de mesure obtenus par Thierry Chartier sur la mesure du coefficient de contrainte optique g. Nous avons pu ensuite mesurer la période et l'amplitude de rotation dans une fibre vrillée sinusoïdalement en l'assimilant à une succession de tronçons de fibre uniformément vrillée. Les valeurs numériques que nous avons obtenues sont en bon accord avec celles qui sont utilisées en pratique. Nous avons pu différencier expérimentalement les fibres vrillées de façons sinusoïdales des fibres vrillées de façons triangulaires, et en parallèle nous avons pu mesurer la biréfringence en nous intéressant aux régions ou la fibre s'arrête de tourner. Enfin, nous avons proposé une méthode de mesure des caractéristiques de biréfringence basée sur l'utilisation d'une bobine de très faible longueur et sur la mesure exacte de la polarisation de sortie. Cette méthode permettrait de mesurer de façon beaucoup plus précise la biréfringence linéaire et la rotation des axes propres

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les phénomènes physiques à l'origine de la PMD dans les fibres optiques de télécommunication, à savoir la biréfringence et le couplage de mode. Nous avons considéré les trois points suivants :

- Dans un premier temps (chapitre II), nous avons étudié les moyens permettant de modéliser la biréfringence dans une fibre optique en prenant en compte les anisotropies de la géométrie et du matériau. L'anisotropie de géométrie est induite lors du processus de fabrication de la préforme alors que l'anisotropie du matériau est générée par le profil de contrainte asymétrique induit lors du fibrage de la préforme. Nous avons en particulier développé un modèle de calcul des contraintes afin d'évaluer l'anisotropie matériau dans des fibres à faible guidage et faiblement elliptique. A l'aide de ce modèle, il ressort que l'anisotropie matériau est principalement concentrée dans les termes diagonaux du tenseur de permittivité et qu'elle se décompose ainsi suivant les mêmes axes que l'anisotropie géométrique. Il ressort de plus que l'anisotropie matériau induite est suffisamment faible pour que l'on puisse se satisfaire de nos hypothèses. Nous avons également constaté que l'anisotropie matériau augmentait linéairement avec le gradient d'indice pour des profils de type échelon ou W et qu'elle était réduite dans ce dernier cas : la présence d'une gaine intérieure enterrée semble agir comme une couche tampon limitant les contraintes. Enfin, il apparaît que la biréfringence induite par la seule anisotropie du matériau est du même ordre de grandeur que celle induite par la seule géométrie du profil. L'utilisation d'un modèle de calcul de la biréfringence prenant simultanément en compte ces deux anisotropies semble donc particulièrement pertinente : nous proposons une méthode perturbative pour faire ce calcul. Il faut ici noter que la modélisation de la biréfringence permet de comprendre le phénomène de PMD en se plaçant dans un régime courte distance, c'est à dire en supposant négligeable les effets du couplage de mode.

- Dans un deuxième temps (chapitre III), nous avons étudié la modélisation du couplage de mode dans une fibre biréfringente. Du point de vue du processus de fabrication, les effets de polarisation dans le régime longue distance sont la conséquence de perturbations aléatoires de la biréfringence, du procédé de vrillage et du vrillage parasite engendré lors du conditionnement. Dans ce régime, les effets locaux engendrés par la biréfringence de phase et de groupe sont contrariés par le couplage de mode. Ainsi l'élargissement d'une impulsion se propageant dans une fibre réelle résulte de deux effets : un effet local, engendré par la biréfringence de groupe, contribuant à augmenter l'élargissement, et un effet global, engendré par la rotation des axes propres de la fibre, contribuant du fait du couplage de mode à diminuer cet élargissement. En général, le vrillage de la fibre engendré lors de l'étirage est périodique afin d'éviter l'accumulation de contrainte externe. Différents paramètres de ces rotations peuvent être optimisés afin de réduire la PMD. Parmi ceux ci, la période T de la rotation de la fibre joue un rôle très important. Lorsque cette période est très petite devant la longueur de

battement L_b, la rotation de la fibre est très efficace pour la réduction de la PMD. Lorsque cette condition n'est pas remplie ou lorsque la biréfringence varie de façon aléatoire la rotation de la fibre devient moins efficace. Compte tenu des contraintes technologiques, les fibres spéciales sont souvent directement concernées par les régimes tels que $L_b<T$ ou $L_b \approx T$. Pour réduire la PMD sur ce genre de fibre, deux solutions peuvent être envisagées. La première, proposée dans la littérature, consiste à moduler l'amplitude et (ou) la fréquence de la rotation de la fibre. Les rotations modulées en amplitude ou en fréquence semblent en effet montrer une très bonne efficacité vis à vis de la réduction de la PMD sur une large plage de biréfringence. La seconde méthode consiste à chercher les formes de rotation périodiques les plus efficaces pour la réduction de la PMD. Nous avons proposé une rotation triangulaire des axes de la fibre et nous avons montré qu'elle est beaucoup plus efficace vis à vis de la réduction de la PMD que la rotation sinusoïdale, ceci quelle que soit la biréfringence et les paramètres de vrillage. Ce profil de rotation présente de plus l'avantage de pouvoir être traité de façon analytique ce qui nous a ainsi permis d'appréhender la contribution de la biréfringence sur l'évolution de la PMD. Il faut ici noter que la prise en compte de la biréfringence et du couplage de mode permet de comprendre le phénomène de PMD dans le régime longue distance qui est représentatif d'une fibre optique utilisée dans un système réel.

- Enfin dans un troisième temps, nous avons étudié les méthodes de mesure permettant de caractériser expérimentalement les phénomènes de biréfringence et de couplage de mode. Nous avons utilisé deux techniques de mesures afin de caractériser la biréfringence et le couplage de mode dans le régime longue distance et dans le régime courte distance. Dans le régime longue distance nous avons utilisé des méthodes réflectométriques à haute et basse résolutions spatiales. Les méthodes réflectométrique à haute résolution se montrent efficace pour mesurer les faibles biréfringences (SMF et NZDSF) et pour caractériser la période du vrillage. Nous avons tenté de mesurer la PMD sur des fibres vrillées à l'aide d'une méthode réflectométrique à basse résolution et faiblement cohérente en caractérisant la distribution de l'amplitude de l'évolution de l'intensité rétro-diffusée. Le comportement est censé être similaire à celui des fibres non vrillées : plus la trace présente une amplitude élevée plus la PMD est faible. En associant l'amplitude de la trace POTDR sur une fibre vrillée à des valeurs de PMD mesurées sur la même fibre on peut tracer une abaque reliant de façon générale la PMD à l'amplitude de la trace POTDR. Cette technique ne fonctionne malheureusement pas pour toutes les fibres et semble dépendre du processus de fabrication. Afin d'étudier la biréfringence de façon plus résolue, nous avons utilisé une méthode magnéto-optique. Celle ci nous a permis de distinguer des variations de la polarisation sur des distances de l'ordre de 4 cm. Nous avons effectué un travail théorique sur cette méthode afin de relier l'état de polarisation de sortie avec la position de la bobine. Cela nous a permis d'exprimer la fréquence de variation du signal de sortie dans une fibre vrillée uniformément en fonction de la biréfringence locale et du taux de rotation dans la fibre. Nous avons ainsi pu comprendre les résultats expérimentaux que nous avons obtenus sur les fibres uniformément vrillées [Chartier03] et qui nous ont permis de déterminer le coefficient de contrainte optique dans des fibres fortement dopées en germanium. Cela nous a également permis de remonter au vrillage périodique imprimé dans une fibre,

en assimilant la fibre périodiquement vrillée à une succession de fibre uniformément vrillée. Ces mesures magnéto-optiques du vrillage imprimé ont donné des résultats cohérents avec les vrillages réellement induits au fibrage. Elles nous ont permis de distinguer clairement un vrillage triangulaire d'un vrillage sinusoïdal. Nous sommes également en mesure d'évaluer la biréfringence sur les fibres périodiquement vrillées dans les régions où la fibre s'arrête de tourner. Enfin, nous avons proposé une méthode avancée qui permettrait de remonter de manière beaucoup plus précise à la biréfringence et au vrillage imprimé. Cette méthode, qui est basée sur la méthode magnéto-optique, nécessite de repenser d'une part les techniques de caractérisation de la polarisation du signal de sortie, d'autre part l'application du champ magnétique.

Les perspectives de ce travail sont les suivantes :

- La compréhension approfondie du processus de fibrage reste un élément incontournable pour la compréhension des phénomènes de biréfringence de phase et de groupe dans le régime courte distance. Cette compréhension passe par une étude précise du comportement des différentes caractéristiques des matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation, viscosité et coefficient de contrainte optique) vis à vis des variations de température et de composition. Enfin, il est impératif que la modélisation soit couplée à une étude expérimentale afin d'étudier le domaine de validité du modèle que nous utilisons pour le calcul des contraintes. Du point de vue du calcul de la biréfringence et de la PMD, le modèle que nous avons développé reste à mettre en place. Une prise en compte de l'ensemble du tenseur permittivité pourrait être effectuée afin d'évaluer l'impact des composantes croisées du tenseur des contraintes. Enfin, une comparaison des résultats avec des méthodes entièrement numériques permettrait, ici aussi, de tester la validité du modèle de perturbation scalaire.

- Du point de vue de la PMD dans le régime longue distance, une compréhension approfondie des raisons pour lesquelles une rotation triangulaire de la fibre est aussi efficace reste à effectuer. Enfin, une étude des rotations modulées en amplitude et en fréquence et une comparaison avec la rotation triangulaire serait intéressante.

- Enfin du point de vue de la mesure, la méthode que nous avons développée au § 4.3 du chapitre IV reste à mettre en place. Une étude théorique approfondie du comportement de la polarisation dans des milieux biréfringents périodiquement vrillés, permettrait éventuellement de dégager des paramètres clés pour la caractérisation du vrillage et, pour la mesure de la PMD proprement dite.

Annexes

A I Formalisme de Stokes et formalisme de Jones

Dans cette annexe, nous abordons le formalisme de Jones et le formalisme de Stokes de façon plus approfondie. Nous présentons en particulier, les équations et les notations que nous allons utiliser dans les chapitres III et IV.

Pour représenter convenablement les effets de polarisation, on doit faire un choix de repère dans lequel on peut décrire mathématiquement la polarisation associée à l'onde optique et les opérateurs associés aux dispositifs optiques modifiant cette polarisation. Dans notre cas, le dispositif optique est une fibre optique. Il est donc commode de choisir un repère cartésien (x, y, z), où l'axe z est orienté selon l'axe longitudinal de la fibre. Nous supposons qu'il n'y a pas d 'effets non linéaires dans la fibre, et que cette dernière ne présente pas de pertes dépendantes de la polarisation.

A I.1 Formalisme de Jones appliqué aux fibres optiques

Le formalisme de Jones permet de décrire les transformations de la polarisation d'une onde électromagnétique lors de la propagation dans un milieu biréfringent [Jones]. Il est basé sur une représentation complexe du champ électrique transverse associé à une onde électromagnétique se propageant traditionnellement dans un milieu homogène et infini. Dans une fibre optique, la notion de polarisation est plus difficile à définir du fait que le champ électrique n'est pas transverse et du fait que la direction des lignes de champ évolue dans le plan d'onde. Néanmoins lorsque la fibre est faiblement guidante, les champs électriques associés aux modes de propagation sont quasi-transverses [Snyder83a, Huard] et les lignes de champs sont quasiment rectilignes. On peut donc définir un état de polarisation à partir de la composante transverse du champ électrique [Huard] associé à un mode particulier pouvant se propager dans la fibre. Nous avons vu au chapitre II que l'anisotropie locale, et l'anisotropie "géométrique" pouvait être traitée en tant que perturbation dans une fibre isotrope faiblement guidante. L'anisotropie lève la dégénérescence entre les deux modes propres de propagation, et, est caractérisée par la biréfringence. D'un point de vue "perturbatif", la biréfringence représente une sorte de valeur moyenne de l'anisotropie locale et géométrique. Le facteur de pondération étant le champ scalaire dans une fibre isotrope et à géométrie circulaire. Dans une fibre optique réelle, les directions des axes géométriques et des axes propres du matériau évoluent généralement en fonction de la position. Par conséquent, les modes propres de propagation ne sont définis que localement. On montre que l'on peut, comme dans un milieu anisotrope infini, décrire les variations de la polarisation associées au mode de propagation d'ordre 1 avec la distance à partir d'une équation de propagation effective [Gordon]. Le tenseur permittivité associé à cette équation est effectif au sens ou il prend en compte les effets de l'anisotropie géométrique et de l'anisotropie locale de façon globale :

$$\varepsilon_{\text{eff}}(z) = \beta_o^2(z) I_d + \beta_o(z)\hat{\beta}(z)$$

A I.1

avec $\hat{\beta}(z) = \begin{bmatrix} \beta_1(z) & \beta_2(z) - i\beta_3(z) \\ \beta_2(z) + i\beta_3(z) & -\beta_1(z) \end{bmatrix}$. Ici β_o est une constante de propagation moyenne, et les variables β_i pour i=1, 2 et 3 traduisent les différentes propriétés de biréfringence au point z de la fibre. Elle constitue les composantes du vecteur biréfringence que nous avons introduit au Chapitre I (*équation I.17*). Pour une fibre isotrope, par exemple, de profil d'indice elliptique, dont les axes de symétrie sont alignés avec les axes x et y d'un repère x, y, z, on a $\beta_x = \beta_o + \beta_1$ et $\beta_y = \beta_o - \beta_1$. β_1 représente dans ce cas la biréfringence linéaire engendrée par la faible ellipticité du profil d'indice. De façon générale, β_1 et β_2 sont associées aux valeurs de la biréfringence linéaire selon l'axe x et y, et selon les axes orientés à +/- 45° de l'axe x, β_3 est associée à la valeur et au signe de la biréfringence circulaire. A l'aide du tenseur permittivité effectif, on peut montrer que l'évolution du vecteur de Jones associé au champ électrique du mode d'ordre 1 obéit à l'équation différentielle suivante [Gordon]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial z} = -i\frac{1}{2}\hat{\beta}\boldsymbol{J}$$

A I.2

Dans la suite, nous nous intéresserons à des fibres optiques telles que les β_i peuvent varier avec la distance de propagation. Dans le cas d'un profil elliptique cela signifie par exemple que les axes propres de l'ellipse peuvent évoluer avec la distance. Le champ électrique en chaque point de la fibre est obtenu par intégration de l'équation ***A I.2***. Le résultat de l'intégration est une matrice appelée matrice de Jones. Elle permet de relier le vecteur de Jones au point z au vecteur de Jones en entrée :

$$\boldsymbol{J}(z) = U(z,0)\boldsymbol{J}(0)$$

A I.3

A l'aide de l'équation ***A I.2*** et de l'équation ***A I.3***, on montre que la matrice de Jones et le vecteur de Jones obéissent à la même équation différentielle :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -i\frac{1}{2}\hat{\beta}U$$

A I.4

Lorsque $\hat{\beta}$ est indépendant de z, où lorsque seul le module de $\vec{\beta}$ varie, on peut écrire la solution de l'équation ***A I.4*** sous une forme exponentielle : $U(z,0) = exp - i\int_0^z \hat{\beta}(u)\,du$. La matrice $\hat{\beta}$ se décompose de manière unique à l'aide des matrices de Pauli :

$$\hat{\beta} = \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \beta_3\sigma_3 \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

A l'aide de cette dernière expression, on peut écrire la matrice de Jones U sous la forme équivalente $U(z,0) = exp-j\frac{\delta(z)}{2}\hat{e}_\delta(z)$ avec $\delta(z)\vec{e}_\delta(z) = \int_0^z \vec{\beta}(u)du$, où $\delta(z)$ est un scalaire, et $\vec{e}_\delta(z)$ un vecteur de l'espace de Stokes. Le calcul de l'exponentielle précédente conduit à l'expression finale de la matrice de Jones :

$$U(z,\ 0) = \cos\frac{\delta(z)}{2}I_d - j\hat{e}_\delta(z)\sin\frac{\delta(z)}{2}$$

A I.5

Dans le cas où $\hat{\beta}$ ne dépend pas de z, la fibre est assimilée à une lame de phase, dont les axes propres sont spécifiés par les trois $e_{\delta i}$ et le déphasage par le terme δ. En général, on utilise la paramétrisation $e_{\delta 1} = \cos(2\theta_l)\cos(2\theta_c)$, $e_{\delta 2} = \sin(2\theta_l)\cos(2\theta_c)$, $e_{\delta 3} = \sin(2\theta_c)$; θ_l est l'angle entre l'axe x du repère physique et la direction des axes propres linéaires de la lame de phase ; θ_c caractérise le degré de biréfringence circulaire de la lame de phase[35]. Dans une fibre à cœur elliptique dont les axes propres sont orientés selon les axes x et y, $\delta = \beta_l z$, $e_1 = 1$ et $e_2 = e_3 = 0$. Si les axes propres sont orientés à $+45°$ de l'axe x, $e_1 = \cos(\pi/4), e_2 = \sin(\pi/4), e_3 = 0$ etc… Cette notation présente l'intérêt de mettre en valeur les axes propres du biréfringent et facilite les calculs lorsque l'onde électromagnétique traverse plusieurs lames de phase. Connaissant l'évolution du vecteur de Jones avec z, on peut déterminer son évolution avec la fréquence. Ainsi en dérivant l'équation ***A I.3*** par rapport à la fréquence, et en éliminant $\boldsymbol{J}(0)$ on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \omega} = \frac{\partial U}{\partial \omega}U^{-1}\boldsymbol{J}$$

A I.6

Comme le milieu est supposé sans perte la matrice U est unitaire : $UU^* = I_d$, où U^* est la matrice conjuguée hermitique de U. A l'aide de cette propriété, on peut montrer que l'équation ***A I.6*** peut s'écrire, elle aussi, sous une forme mathématique similaire à l'équation ***A I.2*** [Gordon] :

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \omega} = -\frac{j}{2}\hat{\Omega}\,\boldsymbol{J}$$

A I.7

où $\hat{\Omega} = \vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}$ et $\vec{\Omega}$ est le vecteur PMD introduit au chapitre I (*équation I.16*). Ainsi, en connaissant la matrice de Jones de la fibre étudiée, on peut déterminer le vecteur PMD et, en calculant son module, en déduire la PMD.

A cette description complexe de la propagation de la lumière dans une fibre biréfringente est associée une description géométrique basée sur l'utilisation de la sphère de Poincaré [Pellat Finet]. Cette

[35] Pour une lame de phase présentant de la biréfringence linéaire β_l et de la biréfringence circulaire β_c, $\tan 2\theta_c = \beta_c / \sqrt{\beta_l^2 + \beta_c^2}$.

description géométrique est généralement effectuée à l'aide d'un formalisme réel de représentation de la polarisation, le formalisme de Stokes.

A I.2 Formalisme de Stokes

Le formalisme de Stokes fait appel, pour la représentation de la polarisation, à des grandeurs relatives à des combinaisons linéaires d'intensité. Il est donc intrinsèquement lié à des grandeurs aisément mesurables et de ce fait particulièrement bien adapté à la description des méthodes de mesure des effets de polarisation. Un état de polarisation quelconque est caractérisé dans le plan d'onde par deux nombres : son ellipticité ε et l'inclinaison de son grand axe α. A chaque couple (ε, α), c'est à dire à chaque état de polarisation, on peut associer un point sur une sphère [Pellat Finet]. On obtient ainsi la sphère de Poincaré. Sur cette sphère on peut définir un repère orthonormé, $\Re$, en choisissant trois axes orthogonaux. Le choix usuel consiste à prendre deux axes linéaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, associés respectivement aux états de polarisation linéaires selon x et linéaires à + 45° de l'axe x, et un axe circulaire, $\vec{e}_3$, associé à l'état de polarisation circulaire droit. A chaque point de cette sphère, on associe un vecteur réel de dimension trois que l'on appelle vecteur de Stokes $\vec{S}(z)$ dont les composantes à la position z permettent de définir sans ambiguïté l'état de polarisation d'une onde optique. La composante S_i selon l'axe i du vecteur de Stokes est reliée au vecteur de Jones par la relation suivante $S_i = \boldsymbol{J}^* \cdot \sigma_i \boldsymbol{J}$ [Huard], où $\boldsymbol{J}^*$ est le complexe conjugué du vecteur de Jones $\boldsymbol{J}$. En dérivant cette expression par rapport à z pour i=1, 2 et 3, on obtient l'évolution du vecteur de Stokes en fonction de la position [*équation I.17*, chapitre I] :

$$\frac{\partial \vec{S}(z)}{\partial z} = \vec{\beta}(z) \times \vec{S}(z)$$

A I.8

On voit donc, à l'aide des équations ***A I.1***, ***A I.2*** et ***A I.8***, que le vecteur biréfringence $\vec{\beta}(z)$ et son interprétation en tant qu'axe de rotation sur la sphère de Poincaré sont directement reliées aux anisotropies géométriques et matériaux locales de la fibre optique. Son module représente la biréfringence locale et sa direction, sur la sphère de Poincaré, permet de caractériser la direction des axes propres linéaires et la biréfringence circulaire. La résolution de l'équation vectorielle permet d'obtenir les matrices de Mueller $R(z', z)$ de la fibre. Les matrices de Mueller sont des matrices réelles carrées de dimension 3 permettant de relier les vecteurs de Stokes à différentes abscisses :

$$\vec{S}(z') = R(z', z)\vec{S}(z)$$

A I.9

Dans une fibre purement biréfringente[36], le module de $\vec{S}(z)$ n'est pas modifié lors de la propagation. On peut donc, d'un point de vue géométrique, identifier les matrices de Mueller à des matrices de

[36] Sans pertes dépendantes de la polarisation (Polarization Dependent Loss)

rotation sur la sphère de Poincaré. D'un point de vue physique, l'équation ***A I.2*** et l'équation ***A I.8*** montrent que la variation relative locale de la polarisation est reliée à la biréfringence locale et à la direction des axes propres locaux. D'un point de vue géométrique, elles sont associées à des rotations infinitésimales sur la sphère de Poincaré, dont l'angle et l'axe de rotation sont spécifiés par $\vec{\beta}(z)$. Enfin, si l'on écrit l'opération "produit vectoriel" sous une forme matricielle, on obtient comme pour le formalisme de Jones, une équation différentielle matricielle reliant la matrice de Mueller, et le vecteur biréfringence :

$$\frac{\partial R(z,z_0)}{\partial z} R^{-1}(z,z_0) = \vec{\beta}(z)\cdot\vec{J}$$

$$\text{avec } \vec{\beta}\cdot\vec{J} = \beta_1 J_1 + \beta_2 J_2 + \beta_3 J_3 \text{ [37]}, \quad \vec{J} = \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{vmatrix} \quad et \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A I.10

Lorsque $\vec{\beta}$ est indépendant de z, la solution de l'équation ***A I.10*** peut tout comme la matrice de Jones être écrite sous la forme d'une exponentielle : $R(z,z_0) = exp\left(\vec{\beta}\cdot\vec{J}\right)$. En utilisant le développement en série de l'exponentielle, on montre que $R(z,z_0)$ prend la forme d'une matrice de rotation dans l'espace de Stokes :

$$R(z,z_0) = I_d + \frac{sin(\beta(z-z_0))}{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{J}\right) + \frac{(1-\cos\beta(z_0-z))}{\beta^2}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{J}\right)\left(\vec{\beta}\cdot\vec{J}\right)$$

A I.11

Nous donnons enfin deux relations de bases concernant les matrices de rotation [Gordon, Delamotte] qui seront utilisées dans le § 3 du chapitre IV :

$$R\left(\vec{X}\times\vec{Y}\right) = R\vec{X}\times R\vec{Y} \qquad R^{-1}\left(\vec{J}\cdot\vec{X}\right)R = \left(R^{-1}\vec{X}\right)\cdot\vec{J}$$

A I.12

$\vec{X}$ ***et*** $\vec{Y}$ ***sont deux vecteurs à trois composantes et*** R ***est une matrice de rotation***

[37] [Delamotte]

A II Calcul du vecteur PMD dans une fibre dont la rotation des axes propres est représentée par une fonction triangle

A II.1 Calcul de la matrice de Jones sur 1 période

En utilisant l'*équation III.27* entre z=0 et z'=T/2 et entre z=T/2 et z'=T, et en concaténant les deux expressions on obtient la matrice de Jones suivante avec $\theta(T)=0$:

$$U(T,0)=exp\left(j\left(\frac{\beta_l\sigma_1+2\tau\sigma_3}{2}\right)\frac{T}{2}\right)exp\left(-j\left(\frac{\beta_l\sigma_1-2\tau\sigma_3}{2}\right)\frac{T}{2}\right)$$

En utilisant l'équation ***A I.5*** pour chaque matrice de l'équation précédente ainsi que les propriétés des matrices de Pauli [Gordon], on peut simplifier $U(T,0)$ et la mettre sous la forme de l'*équation III.28*. On obtient par identification les expressions suivantes de $cos\,\delta$ et de $sin\,\delta$ [38].

$$cos\,\delta=1-2\left(\frac{T\beta_l}{4\Delta}\right)^2 sin^2\,\Delta \qquad sin\,\delta=2\left(\frac{T\beta_l}{4}\right)\left|\frac{sin\,\Delta}{\Delta}\right|\sqrt{cos^2\,\Delta+\left(\frac{A_{max}}{\Delta}\right)^2 sin^2\,\Delta}$$

L'expression de la matrice de Jones pour une longueur comprise entre L=kT et L=(k+1)T est la suivante :

$$U((k+1)T,kT)=exp(-j\sigma_3\theta((k+1)T))(cos\,\delta\,I_d-j\hat{e}_\delta\,sin\,\delta)exp(j\sigma_3\theta(kT))$$

La matrice de Jones de N périodes est obtenue par concaténation des matrices de Jones des périodes k pour k allant de 1 à N. Sachant que $\theta(kT)=0$ quel que soit k, on obtient au bout de N périodes l'expression suivante de U :

$$U(NT,0)=\prod_{k=0}^{k=N}(cos\,\delta\,I_d-j\hat{e}_\delta\,sin\,\delta)=(cos\,\delta\,I_d-j\hat{e}_\delta\,sin\,\delta)^N$$

Soit

$$U(NT,0)=(exp-j\hat{e}_\delta\delta)^N=(exp-j\hat{e}_\delta N\delta)=(cos\,N\delta-j\hat{e}_\delta\,sin\,N\delta)$$

où $cos\,N\delta=T_N(cos\,\delta)$ et $sin\,N\delta=sin\,\delta\,S_{N-1}(cos\,\delta)$ et T_N,S_N sont les polynômes de Chebychev du premier et du second ordre.

A II.2 Calcul du vecteur PMD

On calcule d'abord la dérivée de $U(NT,0)$ par rapport à ω, dérivée que l'on va noter U_ω :

$$\frac{\partial U}{\partial\omega}=U_\omega=\left(-N\delta_\omega\,sin\,N\delta-j\frac{\partial\hat{e}_\delta}{\partial\omega}sin\,N\delta-j\,\hat{e}_\delta\,N\delta_\omega\,cos\,N\delta\right)$$

puis on calcule la conjuguée de $U(NT,0)$:

$$U^*=cos\,N\delta+j\hat{e}_\delta\,sin\,N\delta$$

Le produit de ces deux matrices donne :

[38] δ est ici égal à deux fois le déphasage accumulé entre 0 et T par opposition à la convention habituellement utilisée (équation ***A I.5***)

$$U_\omega U^* = -N\delta_\omega \cos N\delta \sin N\delta - N\delta_\omega \sin^2 N\delta\, j\hat{e}_\delta - \cos N\delta \sin N\delta\, j\frac{\partial \hat{e}_\delta}{\partial \omega}$$

$$-\left(j\frac{\partial \hat{e}_\delta}{\partial \omega}\right)(j\hat{e}_\delta)\sin^2 N\delta - jN\delta_\omega \cos^2 N\delta\, \hat{e}_\delta - (j\hat{e}_\delta)(j\hat{e}_\delta)N\delta_\omega \cos N\delta \sin N\delta$$

Sachant que $iU_\omega U^* = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}$ (cf équation ***A I.6*** et ***A I.7***) , en utilisant les propriétés des matrices de Pauli, et en tenant compte du fait que $\vec{e}_\delta$ et $\left|\frac{\partial \vec{e}_\delta}{\partial \omega}\right|^{-1}\frac{\partial \vec{e}_\delta}{\partial \omega}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, on obtient l'*équation III.31* du vecteur PMD.

A II.3 Calcul du DGD dans l'approximation $A_{max} >> T\Delta\beta_l/2$

En remplaçant Δ par A_{max} dans les *équations III.33* et *III.34* on obtient :

$$\left|\frac{\partial \vec{e}_\delta}{\partial \omega}\right|^2 \sin^2 N\delta = \left(\frac{\beta_l T/4}{A_{max}}\right)^2\left(1-\left(\frac{\sin 2A_{max}}{2A_{max}}\right)\right)^2 \frac{T^2\Delta\tau^2}{16}\sin^2 N\delta$$

$$N^2\frac{\partial \delta}{\partial \omega}^2 = \left(\frac{\sin A_{max}}{A_{max}}\right)^2\left(1+\left(\frac{T\beta_l/4}{A_{max}}\right)^2\frac{A_{max}}{\tan A_{max}}\right)^2\frac{T^2\Delta\tau^2}{4}N^2$$

$$N^2\frac{\partial \delta}{\partial \omega}^2 + \left|\frac{\partial \vec{e}_\delta}{\partial \omega}\right|^2 \sin^2 N\delta = \frac{T^2}{4}\Delta\tau^2\left(N^2\left(\frac{\sin A_{max}}{A_{max}}\right)^2 + O\left(\frac{\beta_l^2 T^2}{16A_{max}{}^2}\right)\right)$$

A III Simulation de l'évolution de la polarisation dans les méthodes réflectométriques

Le calcul de la matrice de Mueller d'une fibre optique biréfringente vrillée est effectuée en utilisant la forme exponentielle des matrices de Jones et les propriétés des matrices de Pauli. Le formalisme sous jacent est celui des quaternions, nous renvoyons le lecteur à des références spécialisées [Pellat Finet], [Karlsson04] et [Bruyère] pour une introduction à l'utilisation du formalisme des quaternions pour traiter les effets de polarisation. Nous dirons simplement que ce choix repose sur le fait que l'évolution de la polarisation dans des éléments purement biréfringents se représente par des compositions de rotation sur la sphère de Poincaré et que les quaternions sont particulièrement indiqués pour le calcul des rotations dans un espace à trois dimensions. Leur utilisation du point de vue numérique a été éprouvée dans de nombreux domaines faisant intervenir le calcul de rotation : positionnement dans l'espace de satellite [Chiavassa], animations graphiques.

La méthode de simulation se décompose comme suit :

1 On définit une concaténation de N tronçons sur une fibre de longueur L.

2. Pour chaque tronçon, on définit une biréfringence et une orientation des axes propres sur la sphère de Poincaré, et on calcule la matrice de Jones associées :

$$u(k) = u_0(k)\sigma_0 - ju_1(k)\sigma_1 - ju_2(k)\sigma_2 - ju_3(k)\sigma_3$$

où σ_0 est la matrice identité et σ_i sont les matrices de Pauli. Comme nous l'avons mentionné dans l'annexe 1, les $u_i(k)$ pour i=0, 1, 2, 3 sont définis à partir de la valeur de la biréfringence et de la direction des axes propres du tronçon k :

$$u_0(k) = \cos\beta(k)\Delta z \quad et \quad u_i(k) = \frac{\beta_i(k)}{\beta(k)}\sin(\beta(k)\Delta z)$$

où les $\beta_i(k)$ sont les composantes du vecteur biréfringence du tronçon k sur la base $\vec{e}_i$;

$\beta(k) = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$ est la biréfringence du tronçon k.

3. On calcule la matrice de Jones à l'abscisse $z_k = k\Delta z$, $U(k\Delta z,0)$, à partir du produit de la matrice de Jones du tronçon k, $u(k)$, et de la matrice de Jones calculée à l'abscisse z_{k-1}, $U((k-1)\Delta z,0)$:

$$U(k\Delta z,0) = u(k)U((k-1)\Delta z,0)$$

Une relation de récurrence est établie entre les composantes de la matrice de Jones $U(k\Delta z,0)$ et les composantes du produit de matrice $u(k)U((k-1)\Delta z,0)$ en utilisant les propriétés des matrices de Pauli [Gordon] :

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\sigma_0 + j(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

où $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont deux vecteurs quelconques dans l'espace de Stokes ;

4. A l'aide des composantes de la matrice de Jones $U(k\Delta z,0)$ on calcule la matrice de Mueller

correspondante [Chiavassa] :

$$R(k\Delta z,0)=\begin{bmatrix} 2\left(U_0^2+U_1^2\right)-1 & 2(U_1U_2-U_0U_3) & 2(U_1U_3+U_0U_2) \\ 2(U_1U_2+U_0U_3) & 2\left(U_0^2+U_2^2\right)-1 & 2(U_2U_3-U_0U_1) \\ 2(U_1U_3-U_0U_2) & 2(U_2U_3+U_0U_1) & 2\left(U_0^2+U_3^2\right)-1 \end{bmatrix}$$

5. En appelant R_{ij} les composantes de la matrice de Mueller $R(k\Delta z,0)$, on peut montrer que $\vec{S}(z_{rd})$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\vec{S}(z_{rd})=\begin{bmatrix} 1-2R_{31}^2 & -2R_{31}R_{32} & -2R_{31}R_{33} \\ -2R_{31}R_{32} & 1-2R_{32}^2 & -2R_{32}R_{33} \\ -2R_{31}R_{33} & -2R_{32}R_{33} & 1-2R_{33}^2 \end{bmatrix}\vec{e}$$

Après calcul de l'état de polarisation rétrodiffusé, on peut calculer l'intensité POTDR résultant du passage de cet état de polarisation à travers un polariseur dont les états propres sont spécifiés par le vecteur de Stokes $\vec{p}$. L'intensité résultante étant donnée par [Gordon] :

$$I(k)=\frac{I_0}{2}\left(1+\vec{p}\cdot\vec{S}(z_{rd})\right)$$

A IV Formalisme utilisé pour décrire la méthode magnéto-optique

A IV.1 Calcul de $\vec{S}(L, z_b)$ en fonction de $\vec{S}(L)$

Point de départ : $\begin{cases} \vec{S}(L, z_b) = R(2\theta(L))R_t(L, z_b + h)R_{bob_t}(z_b + h, z_b)R_t(z_b, 0)\vec{e} \\ R_{bob_t}(z + h, z) = I_d + h[\vec{\beta}_H + \vec{\beta}_t(z)] \cdot \vec{J} \end{cases}$

Comme $R_t(L, z_b + h) = R_t(L, z_b)R_t^{-1}(z_b + h, z_b) = R_t(L, z_b)[I_d - h\vec{\beta}_t(z) \cdot \vec{J}]$

On en déduit que : $\vec{S}(L, z_b) = R(2\theta(L))R_t(L, z_b)(I_d + h\vec{\beta}_H \cdot \vec{J})R_t(z_b, 0)\vec{e}$

$$\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + \alpha_H R(2\theta(L))R_t(L,0)R_t^{-1}(z_b,0)\,(\vec{e}_3 \cdot \vec{J})\,R_t(z_b,0)\vec{e}$$

A l'aide de la relation $R^{-1}\left(\vec{J} \cdot \vec{X}\right)R = \left(R^{-1}\vec{X}\right) \cdot \vec{J} = \left(R^{-1}\vec{X}\right)\times$, on obtient :

$$\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + h\alpha_H R(2\theta(L))R_t(L,0)\,[(R_t^{-1}(z_b,0)\,\vec{e}_3) \times \vec{e}]$$

Ensuite, grâce à la relation $R\left(\vec{X} \times \vec{Y}\right) = R\vec{X} \times R\vec{Y}$ (équation ***A I.12***), on aboutit à la relation :

$$\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + \alpha_H[R(2\theta(L))R_t(L, z_b)\vec{e}_3] \times \vec{S}(L)$$

Il suffit enfin de noter que le vecteur $\vec{e}_3$ n'est pas modifié en passant du repère fixe au repère tournant pour écrire que $R(2\theta(L))R_t(L, z_b)\vec{e}_3 = R(L, z_b)\vec{e}_3$ (cf. *équation IV.9*). On obtient ainsi la relation recherchée : $\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + \alpha_H[R(L, z_b)\vec{e}_3] \times \vec{S}(L)$

A IV.2 Calcul de $\vec{S}(L, z_b)$ en fonction de $\vec{S}(z_b)$

Point de départ : $\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + \alpha_H[R(L, z_b)\vec{e}_3] \times \vec{S}(L)$

Comme $\vec{S}(L) = R(L, z_b)\,\vec{S}(z_b)$, on en déduit rapidement l'expression recherchée :

$$\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + \alpha_H[R(L, z_b)\vec{e}_3] \times [R(L, z_b)\vec{S}(z_b)]$$

ainsi d'après l'équation ***A I.12 :*** $\vec{S}(L, z_b) = \vec{S}(L) + \alpha_H R(L, z_b)[\vec{e}_3 \times \vec{S}(z_b)]$

A IV.3 Calcul de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$

Point de départ : $\begin{cases} \vec{S}_t(L, z_b) = R_{mo_t}(z_b)\vec{e} = R_t(L, z_b + h)R_{bob_t}(z_b + h, z_b)R_t(z_b, 0)\vec{e} \\ \dfrac{\partial \vec{S}_t(L, z_b)}{\partial z_b} = \dfrac{\partial R_{mo_t}(z_b)}{\partial z_b} R_{mo_t}^{-1}(z_b)\vec{S}_t(L, z_b) \\ \dfrac{\partial \vec{S}(L, z_b)}{\partial z_b} = \vec{\beta}_{mo}(z_b) \times \vec{S}(L, z_b) \end{cases}$

Une variante de ces expressions est :

$$\vec{\beta}_{mo_t}(z_b)\cdot\vec{J} = \frac{\partial R_{mo_t}(z_b)}{\partial z_b} R_{mo_t}^{-1}(z_b)$$

A IV.1

De l'*équation IV.10* du chapitre IV, on déduit : $R_{mo_t}(z_b) = R_t(L, z_b + h) R_{bob_t}(z_b + h, z_b) R_t(z_b, 0)$

En utilisant la relation $\frac{\partial R_t(z, z_0)}{\partial z} = (\vec{\beta}_t(z)\cdot\vec{J}) R(z, z_0)$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_t(L, z_b + h)}{\partial z_b} &= \frac{\partial [R_t(L,0) R_t^{-1}(z_b + h, 0)]}{\partial z_b} = R_t(L,0)\frac{\partial R_t^{-1}(z_b + h, 0)}{\partial z_b} \\ &= -R_t(L,0) R_t^{-1}(z_b + h, 0)(\beta_t(z_b)\cdot\vec{J}) = -R_t(L, z_b + h)(\vec{\beta}_t(z_b + h)\cdot\vec{J})\end{aligned}$$

AIV.2

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{bob_t}(z_b + h, z_b)}{\partial z_b} &= \frac{\partial [R_{bob_t}(z_b + h, 0) R_{bob_t}^{-1}(z_b, 0)]}{\partial z_b} \\ &= \left[\left(\vec{\beta}_t(z_b + h) + \vec{\beta}_H - R_{bob_t}(z_b + h, z_b)(\vec{\beta}_t(z_b) + \vec{\beta}_H)\right)\cdot\vec{J}\right] R_{bob_t}(z_b + h, z_b)\end{aligned}$$

A IV.3

Il suffit de développer l'expression ***A IV.1*** à l'aide des expressions ***A IV.2*** à ***A IV.3*** et d'utiliser la relation $R^{-1}\left(\vec{J}\cdot\vec{X}\right)R = \left(R^{-1}\vec{X}\right)\cdot\vec{J}$ (équation ***A I.12***), pour obtenir finalement :

$$\vec{\beta}_{mo_t}(z_b)\cdot\vec{J} = [R_t(L, z_b + h)(I_d - R_{bob_t}(z_b + h, z_b))\vec{\beta}_H]\cdot\vec{J}$$

Soit :

$$\vec{\beta}_{mo_t}(z_b) = \beta_H R_t(L, z_b + h)(\vec{e}_3 - R_{bob_t}(z_b + h, z_b)\vec{e}_3)$$

A IV.4

A IV.4 Calcul de $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ sous l'hypothèse d'une bobine infiniment fine

Point de départ : $\begin{cases}\vec{\beta}_{mo_t}(z_b) = \beta_H R_t(L, z_b + h)(\vec{e}_3 - R_{bob_t}(z_b + h, z_b)\vec{e}_3) \\ R_{bob_t}(z + h, z) = I_d + h[\vec{\beta}_H + \vec{\beta}_t(z)]\cdot\vec{J}\end{cases}$

Le calcul est immédiat dans le repère tournant:

$$\vec{\beta}_{mo_t}(z_b) = \beta_H R_t(L, z_b)[I_d - h\vec{\beta}_t\cdot\vec{J}][\vec{e}_3 - (I_d + h\vec{\beta}_H\cdot\vec{J} + h\vec{\beta}_t(z_b)\cdot\vec{J})\vec{e}_3]$$

$$\vec{\beta}_{mo_t}(z_b) = -h\beta_H R_t(L, z_b)[\vec{\beta}_t(z_b)\times\vec{e}_3]$$

$$\vec{\beta}_{mo_t}(z_b) = \alpha_H R_t(L, z_b)[\vec{e}_3\times\vec{\beta}_t(z_b)]$$

On aboutit ainsi à l'expression recherchée dans le repère fixe :

$$\vec{\beta}_{mo}(z_b) = \alpha_H R(L, z_b)[\vec{e}_3\times\vec{\beta}(z_b)]$$

A IV.5

A IV.5 Calcul de $\frac{\partial \vec{\beta}_{mo}}{\partial z_b}$

Point de départ : $\vec{\beta}_{mo}(z_b) = \alpha_H \beta_l(z_b) \vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b)$ avec $\vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b) = R(L, z_b) R(2\theta(z_b)) \vec{e}_2$

Par dérivation de cette expression on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\beta}_{mo}(z_b)}{\partial z_b} = \alpha_H \frac{\partial \beta_l(z_b)}{\partial z_b} \vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b) + \alpha_H \beta_l(z_b) \frac{\partial \vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b)}{\partial z_b}$$

Le calcul de $\frac{\partial \vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b)}{\partial z_b}$ est similaire au calcul de $\vec{\beta}_{mo}$:

$$\frac{\partial \vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b)}{\partial z_b} = \vec{\omega}_{mo} \times \vec{e}_{\beta_{mo}}(z_b) \text{ avec } \vec{\omega}_{mo} = R(L, z_b)\left(2\vec{\tau} - \vec{\beta}\right)$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\beta}_{mo}}{\partial z_b} = \frac{1}{\beta_l} \frac{\partial \beta_l}{\partial z_b} \vec{\beta}_{mo} + \vec{\omega}_{mo} \times \vec{\beta}_{mo}$$

Comme les deux vecteurs à droite du signe d'égalité sont perpendiculaires, le module se calcule aisément :

$$\left| \frac{\partial \vec{\beta}_{mo}}{\partial z_b} \right| = \alpha_H \sqrt{\left(\frac{\partial \beta_l}{\partial z_b} \right)^2 + \beta_l^2 \left| \vec{\beta}_t \right|^2}$$

A IV.6

A IV.6 Calcul de la matrice de Mueller d'une fibre uniformément vrillée dans le repère tournant

La matrice de Mueller, $R_t(z', z)$, d'un tronçon de fibre uniformément vrillé compris entre les positions z et z' est une matrice de rotation d'un angle égal à $\left|\vec{\beta}_t\right|(z'-z) = \sqrt{\beta_l^2 + (lg - 2\tau)^2}(z'-z)$ autour de la direction de $\vec{\beta}_t$. D'après l'équation ***A I.11,*** on déduit que la matrice de Mueller, $R(z', z)$, d'un tronçon de fibre uniformément vrillé entre les positions z et z' est :

$$R_t(z', z) = I_d + \frac{\sin \beta_t (z'-z)}{\beta_t} \left(\vec{\beta}_t \cdot \vec{J}\right) + \frac{(1 - \cos \beta_t (z'-z))}{\beta_t^2} \left(\vec{\beta}_t \cdot \vec{J}\right)\left(\vec{\beta}_t \cdot \vec{J}\right)$$

avec

$$\beta_t = \left|\vec{\beta}_t\right| \quad \text{et} \quad \vec{\beta}_t \cdot \vec{J} = \begin{bmatrix} 0 & -(lg-2)\tau & 0 \\ (lg-2)\tau & 0 & -\beta_l \\ 0 & \beta_l & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$(\vec{\beta}_t \cdot \vec{J})(\vec{\beta}_t \cdot \vec{J}) = \begin{bmatrix} -(lg-2)^2 \tau^2 & 0 & \beta_l (lg-2)\tau \\ 0 & -(lg-2)^2 \tau^2 - \beta_l^2 & 0 \\ \beta_l (lg-2)\tau & 0 & -\beta_l^2 \end{bmatrix}$$

A IV.7 Techniques de mesure de la matrice de Mueller et du vecteur biréfringence d'une fibre optique

Mesure de la matrice de Mueller [Jopson] :

La mesure de la matrice de Mueller consiste grossièrement à mesurer l'état de polarisation de sortie $\vec{S}_i$ pour trois états de polarisation d'entrée $\vec{E}_i$. Si on choisit les $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ égaux aux vecteurs unitaires du repère $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de la sphère de Poincaré, les éléments de la matrice de Mueller sont données par : $R_{ij}^t = \vec{S}_{ij}$ ou i indique l'indice de l'état de polarisation d'entrée $\vec{E}_i$, et j indique la composante de l'état de polarisation de sortie. L'application de cette méthode à la mesure magnéto-optique consisterait à effectuer la mesure de $\vec{S}_i(L, z_b)$ pour chaque position de la bobine. La matrice de Mueller magnéto-optique R_{mo} est ensuite obtenue pour trois états de polarisation en entrée :

$$R_{mo_{ij}}(z_b) = \vec{S}_{ij}(L, z_b)$$

Mesure du vecteur biréfringence [Poole88] :

Pour deux états de polarisation en entrée de fibre $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ l'évolution de la polarisation en sortie de fibre est donnée respectivement par :

$$\frac{\partial \vec{S}_1(L, z_b)}{\partial z_b} = \vec{\beta}_{mo}(z_b) \times \vec{S}_1(L, z_b) \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial \vec{S}_2(L, z_b)}{\partial z_b} = \vec{\beta}_{mo}(z_b) \times \vec{S}_2(L, z_b)$$

On montre en utilisant les propriétés du double produit vectoriel que le vecteur $\vec{\beta}_{mo}(z_b)$ s'obtient grâce aux deux équations précédentes :

$$\vec{\beta}_{mo}(z_b) = \frac{\dfrac{\partial \vec{S}_1(L, z_b)}{\partial z_b} \times \dfrac{\partial \vec{S}_2(L, z_b)}{\partial z_b}}{\dfrac{\partial \vec{S}_1(L, z_b)}{\partial z_b} \cdot \vec{S}_2(L, z_b)}$$

Références

[Aben] H. Aben and C. Guillemet, "Photoelasticity of glass ", Berlin, Germany : Springer-Verlag, 1993

[Agassant] Agassant. J-F, Avenas. P, Sergent. J-P, Vergnes. B, Vincent. M, "La mise en forme des matières plastiques ", editions Lavoisier Tec&Doc

[Alexeyev] C. N. Alexeyev, M. S. Soskin, A. V. Volyar, "Spin-orbit interaction in a generic vortex field transmitted through an elliptic fiber ", *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics,* 2000, vol. 3, N°4, pp. 501-513

[Barlow] A. J. Barlow, J. J. Ramskov-Hansen, and D. N. Payne, " Birefringence and polarization mode-dispersion in spun single-mode fiber ", Applied. Optics., Vol. 20, pp. 2963, 1981

[Bebbington92] D. H. O. Bebbington, " Target vectors – spinorial concepts and geometry ", presented at the *Second International Workshop on Radar Polarimetry*, Nantes, France, September 8-11, 1992

[Bebbington00] D. H. O. Bebbington and A. S. Siddiqui, "Analytical description of backscatered sates of polarization in polarization optical time-domain reflectometry measurements on uniformly twisted birefringent optical fiber ", *Journal of Optical Society of America, part A,* vol. 17, N° 12, 2000

[Bouquet] G. Bouquet, L-A de Montmorillon, P. Nouchi, "Analytical solution of polarization mode dispersion in triangular spun fibers ", Optics Letters, Vol. 29 , N° 18, pp 2118-2120, 2004

[Brinkmeyer] E. Brinkmeyer, " Forward-backward transmission in birefringent single-mode fibers : interpretation of polarization-sensitive measurements ", *Optics Letters*, Vol. 6, N° 11, November 1981

[Bruyère] F. Bruyère, " Effets de polarisation dans les systèmes a amplification optique de longue distance ", Thèse de Doctorat de l'université de d'Orsay, 1995

[Casas] F. Casas, J. A . Oteo, J. Rios, " Floquet theory : exponential perturbative treatment ", *Journal of Physique A : Mathematical and General*, vol. 34, N°16, pp. 3379-3388, 2001

[Chartier01] T. Chartier, A. Hideur, C. zkul, O. Sanchez, G. M Pham, "Measurement of the elliptical birefringence of single mode optical fibers", *Applied Optics*, Vol. 40, N°30, pp. 5343-5353, 2001

[Chartier03] T. Chartier, C. Greverie, L. Selle, L. Carlus, G. Bouquet, L-A. de Montmorillon, "Measurement of the stress optic coefficient of single mode fibers using a magneto-optic method ", *Optic Express*, Vol.11, N°20, pp. 2561-2566, 2003

[Chavassa]http://artemis.univmrs.fr/cybermeca/formcont/mecaspa/SCAO/QUATERN/QUATERN0.HTM

[Chen02a] X. Chen, M-J.Li,D.A.Nolan, "Polarization mode dispersion of spun fiber : an analytical solution", *Optics Letters*, Vol.27, N°5, 2002

[Chen02b] X. Chen, M-J. Li, D. A. Nolan, "Scaling properties of polarization mode dispersion of spun fibers in the presence of random mode coupling", *Optics Letters*, Vol. 27, N°18, 2002

[Chen03] X. Chen, T. L. Hunt, M-J. Li, D. A. Nolan, "Properties of polarization evolution in spun fibers", *Optics Letters*, Vol. 28, N°21, 2003

[Chinone] N. Chinone, R. Ulrich, "Elasto-optic polarization measurement in optical fiber" *Optics Letters*, Vol.6, pp. 16-18, 1981

[Chowdhury95] D.Q.Chowdhury, D.A.Nolan, " Perturbation model for computing optical fiber birefringence from a two-dimensional refractive index profile " *Optics Letters,* Vol.20, N°19, pp. 1973-1975, 1995

[Chowdhury00] D.Q.Chowdhury, " Comparison of stress anisotropy and geometric deformation ", *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol.6, N°2, 2000

[Chu82] P.L.Chu, " Thermal stress induced birefringence in single mode elliptical optical fibre ", *Electonics Letters* , Vol.18, N°1, pp. 45-47, 1982,

[Chu84] P.L.Chu, " Analytical method for calculation of stresses and material birefringence in polarization-maintening optical fiber", *Lightwave technology, journal of*, Vol.2, N°5, pp. 650-661, 1984

[Cohen-Tannoudji], C. Cohen-Tannoudji, "Mécanique Quantique Tome II", Hermann, 2000

[Corsi98] F. Corsi, A. Galtarossa, L. Palmieri " Polarization mode sipersion characterization of single-mode optical fiber using backscattering technique", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 16, N°10, 1998,

[Corsi99a] F. Corsi, A. Galtarossa, L. Palmieri, " Analytical treatment of polarization-mode dispersion in single-mode fibers by means of the backscattered signal", *Journal of Optical Society of America, Part A*, Vol. 16, N°3, 1999

[Corsi99b] F. Corsi, A. Galtarossa, L. Palmieri, M. Schiano, T. Tambosso " Continuous-Wave backreflection measurement of polarization mode dispersion", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.4, N°11, 1999

[Davidson] A. C. Davidson, D. V . Hinkley, "Bootstrap methods and their application", Cambridge University Press

[Delamotte] B. Delamotte, "groupe des rotations et groupe de Poincaré", cours de troisième cycle du DEA "Champs, Particules, Matières", www.lpthe.jussieu.fr/DEA/delamotte.html

[Eickhoff81] W.Eickhoff, Y. Yen and R. Ulrich, " Wavelength dependence of birefringence in single-mode fiber, *Applied Optics*, Vol.20, N°19, October 1981

[Eickhoff82] W. Eickhoff, " Stress-induced single-polarization single-mode fiber ", *Optics Letters*, Vol.7, n°12 , 1982

[Ellison98] J. G. Ellison and A. S. Siddiqui, " A fully polarimetric Optical Time Domain Reflectometer ", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.10, N°2, 1998

[Ellison00a] J. G. Ellison and A. S. Siddiqui, " Using polarimetric optical time-domain reflectometry to estimate linear birefringence suppression in spun fibre", *IEE Proc.-Optoelectron.*, Vol. 146, N°3, 1999

[Ellison00b] J. G. Ellison and A. S. Siddiqui, " Automatic Matrix-Based analysis method for extraction of optical fiber parameters from Polarimetric Optical Time Domain Reflectometry Data ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 18, N°9, September 2000

[Ellison01] J. G. Ellison and A. S. Siddiqui, " Using polarimetric optical time domain reflectometry to extract spun fibre parametrer " *Optoelectronics, IEE Proceedings-* ,Vol.148 , N° 4 , pp 176 – 182, 2001

[Fontaine93] M.Fontaine, " A new numerical method for computing the optical characteristics of birefringent fibers ", *Journal of Applied Physic*, Vol.73, N°4, pp 1557-1560, 1993

[Fontaine94] M. Fontaine, " Computations of optical birefringence characteristics of highly eccentric elliptical core fibers under various thermal stress conditions ", *Journal of Applied Physic,* Vol.75, N°1, pp 68-72, 1994

[Fontaine95] M. Fontaine, " Theoretical analysis of birefringent and form-induced polarization mode dipersion in birefringent optical fibers : A full-vectorial approach ", *Journal of Applied Physic,* Vol. 77 N°1, pp 1-6, 1995

[Fontaine96] M. Fontaine, " Theoretical and experimental analysis of thermal stress effects on Modal Polarization properties of highly birefringent optical fibers ", *Lightwave Technology*, *Journal of*, Vol.14, N°4, pp 585-591, 1996

[Foschini] G. J. Foschini, C.D.Poole, " Statistical Theory of Polarization Dispersion in Single Mode Fibers ", *Lightwave Technology, Journal of* , Vol.9, N°. 11, pp 1439-1456, 1991

[Fuxi] G. Fuxi, " Optical and spectroscopic properties of glass ", Springer-Verlag, Shangai scientific and technical Publisher, 1991

[Galtarossa94] Galtarossa A., Gianello. G, Giacomo S., Schiano M., " Stress investigation in Optical Fiber Ribbon Cable by means of polarization sensitive techniques ", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.6, N°10, Oct 1994

[Galtarossa99] A. Galtarossa, L. Palmieri , M. Schiano, T. Tambosso, "Single-end polarization mode dispersion measurement using backreflected spectra through a linear polarizer", *Lightwave Technology, Journal of,* Vol. 17, N°10, October 1999

[Galtarossa00a] A. Galtarossa, L. Palmieri , M. Schiano, T. Tambosso, "Statistical characterization of fiber random birefringence", *Optics Letters*, Vol. 25, N°18, September 2000

[Galtarossa00b] A. Galtarossa, L. Palmieri , M. Schiano, T. Tambosso, "Measurement of local beat length and differential group delay in installed single-mode fibers", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 18, N°10, October 2000

[Galtarossa01a] A. Galtarossa, L. Palmieri , " Measurement of birefringence correlation length in long, single-mode fibers ", *Optics Letters*, Vol. 26, N°13, July 2001

[Galtarossa01b] A. Galtarossa, L.Palmieri, A.Pizzinat, "Optimized spinning design for low PMD fibers : An analytical approach", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol :19 Issue 10, Oct.2001

[Galtarossa02a] A. Galtarossa, P. Griggio, A. Pizzinat, "Calculation of the mean differential group delay of periodically spun, randomly birefringent fibers" ,*Optics Letters*, Vol. 27, N° 9, May 2002

[Galtarossa02b] A. Galtarossa, L. Palmieri , " Measure of Twist-Induced circular birefringence in long single-mode fibers : Theory and Experiments ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.20, N°7, July 2002

[Galtarossa03] A. Galtarossa, P. Griggio, L. Palmieri, A. Pizzinat, "Polarization mode dispersion properties of constantly spun randomly fibers" ,*Optics Letters*, Vol. 28, N° 18, Sept 2003

[Galtarossa04] A. Galtarossa, L. Palmieri , " Measure of Period in spun fiber in long single-mode fibers ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.20, N°7, July 2002

[Garrigues] J. Garrigues, "Cours de Mécanique de l'Ecole de Mécanique de Marseille" : http://esm2.imt-mrs.fr/gar/gd.html

[Garth] S. J.Garth ,” Birefringence in bent single mode fibers ” , *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.6, N°3, pp 445-449, 1988

[Gisin] N. Gisin, J.P. Pellaux, “Polarization Mode Dispersion : time versus frequency domains”, *Optics Communications*, Vol.89, Issue 2-4, pp 316-323

[Gordon] J . P. Gordon and H.Kogelnik, ” PMD fundamentals : Polarization Mode Dispersion in optical fibers ”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol.97, N°9, pp 4541-455, 1997

[Halliday] D.Irvine-Halliday, M.R.Khan,P.-G.Zhang, “Beat-length measurement of high-birefringence polarization-maintaining optical fiber using the dc Faraday magneto-optic effect”, *Optical Engineering*. Vol.39, pp 1310-1315, 2000

[Hart] A. C. Hart Jr, R. G. Huff and K. L. Walker, “Method of making a fiber having low polarisation polarisation mode dispersion due to a permanent spin”, *U.S. Patent 5 298047*, 1994

[Heffner], B. L. Heffner, “Automated Measurement of Polarization Mode Dispersion Using Jones Matrix Eigenanalysis”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.4, N°9, pp 1066-1069, 1992

[Huard] S. Huard, ” Polarisation de la lumière ”, Editions Masson 1994

[Huttner] B. Huttner, B. Gisin, N. Gisin, ” Distributed PMD measurement with a polarization-OTDR in optical fibers ”, *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 17, N°10, October 1999

[Imoto] N.Imoto, J.I.Sakai, ” Birefringence in single-Mode optical fiber due to elliptical core deformation and stress anisotropy ”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 16, N°11, pp 1267-1271, 1980

[Johnson] S. G. Johnson, M.Ibanescu, M.A. skorobogatiy, O. Weisberg, J.D. Joannopoulos, Y. Fink, “Perturbation theory for Maxwell’s equation with shifting material boundaries ”, *Physical Review E*, Vol 65, 066611

[Jones] R. C. Jones, ” A new calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus ” *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 31, pp 488-493 , 1941

[Jopson] R. M. Jopson, L. E. Nelson, and H. Kogelnik, ”Measurement of second-order polarization-mode dispersion vectors in optical fibers ”, *Lightwave Technology, Journal of*, Vol:11, N°9, 1999

[Kaminov] I.P. Kaminov, V. Ramaswamy, ” Single-polarization optical fibers : Slab model, *Applied Physics Letters*, Vol.34, N°4, 1979

[Karlsson98] M .Karlsson, “Polarization Mode Dispersion-induced pulse broadening in optical fibers”, *Optics Letters*, Vol.23, N°9 , pp 688-690, 1998

[Karlsson04] M .Karlsson, M. Petersson, “Quaternion approach to PMD and PDL phenomena in optical fiber systems”, *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.22, N° 4 , pp 1137-1146, 2004

[Laklalech] Habiba Laklalech, ” Modèle de calcul de la biréfringence de forme ”, rapport interne Alcatel Câble, 1995

[Lanne] S. Lanne, E. Corbel, ” Practical considerations for optical polarization-mode dispersion compensators ”, *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.22, N°4, 2004

[Legre] M. Legre, M. Wegmuller, N. Gisin, ” Investigation of the ratio between phase and group birefringence in optical single-mode fibers ”, *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.21, N°12, December 2003

[Le Parc] Le Parc Rozen, ″ diffusion de rayonnements et relaxation structurale dans les verres de silice et les préformes de fibres optiques ″, Thèse de Doctorat de l'université Claude Bernard, 2002

[Li98] M-J. Li, D. A. Nolan, "Fiber spin_profile designs for producing fibers with low polarization mode dispersion", *Optics Letters*, Vol. 23,1998

[Li04] M-J. Li, X. Chen, D. A. Nolan, "Effects of residual stress on polarization mode dispersion of fibers made with different types of spinning", *Optics Letters*, Vol.29, N°5, March 1, 2004

[Marcuse] D. Marcuse, Theory of dielectric optical waveguides,Academic press, Ney York1974

[Nicolardot] M. Nicolardot, B. Aladenize, "Stresses in optical fibers : computation and impact on refractive index", IWCS, 2001

[Nolan] D. A. Nolan, X. Chen, M-J. Li, "Fibers with low polarization mode dispersion", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 22, N°4, April 2004

[Nouchi95] P. Nouchi, H. Laklalech, P. Sansonetti, J. Von Wirth, J. Ramos, F. Bruy`ere, C. Brehm, J. Y. Boniort, B. Perrin, ″Low-PMD Dispersion-Compensating fibers," Proc. 21st Eur. Conf. Opt. Commun. (ECOC'95-Brussels)

[Nouchi02] P. Nouchi, L-A. de Montmorillon, P. Sillard, A. Bertaina, P. Guenot, "Conception des fibres optiques pour la transmission multiplexée en longueur d'onde", *Compte Rendus Physique*, Vol.4, pp 29-39, 2003

[Oksendal] B.Oksendal, ″ Stochastic differential equations ″, Springer, Fifth edition

[Paek] U.C.Paek, Determination of the viscosity of high silica glasses during fiber drawing ″,*glass Technology*, Vol. 29, pp 263-266

[Park99] Y. Park, Residual stresses in a doubly clad fiber with depressed inner cladding, *Lightwave Technology, Journal of,* Vol.17, N°10, Oct 1999

[Park02] Y. Park, U-C. Paek and D.Y. Kim, ″Determination of stress-induced intrinsic birefringence in a single-mode fiber by measurement of the two-dimensionnal stress profile ″, ″, *Optics Letters*, Vol. 27, N°15, pp. 1291-1293, 2002

[Peyrilloux] A. Peyrilloux, T. Chartier, ″Theoretical and experimental study of the birefringence of a photonic crystal fiber ″, *Lightwave Technology, Journal of*, Vol:21, N°2, pp. 536-539, 2003

[Pellat-Finet] P.P Pellat Finet, ″Millieux anisotropes ″, cours de DEA d'électronique de l'ENSTB

[Pizzinat03a] A. Pizzinat, B.S. Marks, L. Palmieri , C.R. Menyuk, and A. Galtarossa, "Polarization mode dispersion of spun fibers with randomly varying birefringence", *Optics Letters*, Vol.28, N°6, March 2003

[Pizzinat03b] A. Pizzinat, L. Palmieri, B. S. Marks, C. R. Menyuk, and A. Galtarossa, "Analytical treatment of randomly birefringent periodically spun fibers", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 21, N°12, Dec 2003

[Pocholle], J.P. Pocholle, "Fibres Optiques ", cours de troisième année de l'ENST, 2001

[Poole86] C.D. Poole, R.E. Wagner, ″Phenomenological approach to polarisation mode dispersion in long single-mode fibres", *Electronics Letters*, Vol. 22, N°19, pp 1029-1030 , 1986

[Poole88] C.D.Poole,N.S.Bergano, ″Polarization Dispersion and Principal States in a 147-km Undersea Light Cable", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 6, N°7, pp 1185-1190, 1988

[Poole91] C.D.Poole, J.H.Winters and J. A. Nagel, "Dynamical equation for polarization dispersion", *Optics Letters*, Vol. 16, N°6, pp 372-374, 1991

[Primak] W. Primak, D. Post, " Photoelastic constants of vitreous silica and its elastic coefficient of refractive index ", *Journal of Applied Physics*, Vol.30, N°5, pp 779-788, 1959

[Rashleigh] S.C. Rashleigh, " Origins and control of polarization effects in single-mode fibers ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.1, N°.2, 1983

[Rogers] A. J.Rogers, " Polarization-optical time domain reflectometry : a technique for the measurement of field distributions ", *Applied Optics*, Vol. 20, N°6, 1981

[Sakai81] J .I.Sakai, T.Kimura , " Birefringence and polarization characteristics of single-mode optical fibers under elastic deformations " , *Journal of Quantum Electronics,* Vol.17, N°6, pp 1041-1051, 1981

[Sakai82] J-I.Sakai, T. Kimura, " Birefringence caused by thermal stress in elliptically deformed core optical fibers ", *IEEE Journal of quantum electronics*, Vol.18, N°11, 1982

[Sammut] R.A.Sammut, C.D.Hussey,J.D.Love, A.W.Snyder, " Modal analysis of polarisation effects in weakly-guiding fibres " *IEE Proceedings,* Vol.128*,* N°.4, pp 173-187, 1981

[Schlager] J. B. Schlager, M. J. Hackert, P. Pepeljugoski, J. Gwinn, "Measurements for enhanced bandwith performance over 62.5 mm multimode fiber in short wavelength local area networks", Lightwave technology, Journal of, Vol.21, N° 5, 2003

[Schuh95] R. E. Schuh, E.S.R. Sikora, N.G. Walker, A. S. Siddiqui, L.M. Gleeson and D.H.O. Bebbington, "Theoretical analysis and measurement of effects of fibre twist on polarisation mode dispersion of optical fibres", *Electronics Letters*, Vol. 31, N°20, 1995

[Schuh96] R. E. Schuh and A. S. Siddiqui, " Polarisation OTDR measurement and theoretical analysis on fibres with twist and their implications for estimation of PMD", *Electronics Letters*, Vol. 32, N°4, 1996

[Schuh97] R. E. Schuh and A. S. Siddiqui, " Single channel polarimetric OTDR for measurement of backscattered SOP evolution along a fibre with twist ", *Electronics Letters*, Vol. 33, N°25, 1997

[Schuh98] R. E. Schuh, X. Shan, A. S. Siddiqui, " Polarization mode sipersion in spun fibers with different linear birefringence and spinning parameters ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.16, N°9, 1998

[Shieh] W. Shieh, H. Kogelnik, "Dynamic eigenstates of polarization ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.13, N°1, pp 40-42, 2001

[Shibata] N.Shibata, M.Tateda, S.Seikai, N. Uchida, " Birefringence and Polarization mode dispersion caused by thermal stress in single-mode fibers with various core ellipticities ", *IEEE journal of quantum electronics*, Vol.19, N°8, 1983

[Sholze] H. Sholze, " Le verre ", Institut du verre (Paris), 1969

[Silvester] P.P. Silvester, R .L. Ferrari, " Finite Element for electrical engineers ", Cambridge University Press, Third edition

[Silvestre] E. Silvestre, M.V. Andrés, P. Andrés, " Biorthonormal-basis method for the vector description of optical-fibers modes ", *Lightwave Technologies, Journal of*, Vol.16, N°5, 1998

[Skorobogatiy02] M. Skorobogatiy et al, " Analysis of general geometric scaling perturbations in a transmitting waveguide : fundamental connection between polarization-mode dispersion and group velocity dispersion, *Journal of Optical Society of America, part B,* Vol. 19, N°.12, 2002,

[Skorobogatiy03] M.A. Skorobogatiy, S. G. Johnson, S.A. Jacobs, Y. Fink, " Dielectric variation in high-index-contrast waveguides, coupled mode theory, and perturbation expansions, Physical Review E 67, 046613, 2003

[Snyder83a] A. Snyder, J.D.Love, "Optical waveguide theory", Chapmann and Hall, NY, 1983

[Snyder83b] A. Snyder, F. Rühl, "Single-mode, single-polarization fibers made of birefringent material", *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 73, N°9, 1983

[Snyder86] A.Snyder, A. Ankiewicz, "Anisotropic fibers with nonaligned optical (stress) axes", *Journal of the Optical Society of America, part A*, Vol.3, N°6, 1986

[Song] G.-H. Song, S. S. Choi, " Analysis of birefringence in single-mode fibers and theory for the backscattering measurement ", *Journal of the Optical Society of America, Part A*, Vol. 2, N° 2, 1985

[Sunnerud] H. Sunnerud, "Polarization-Mode Dispersion in optical fibers : Characterization, Trnasmission Impairements and Compensation", PHD Thesis of the Chalmers University of Technology, 2001

[Tan] C. Z. Tan, "Wavelength dependence of the Faraday effect in glassy SiO2", *Journal of Physics and Chemistry of solids*, Vol.60, N°10, pp 1689-1692, 1999

[Timoshenko] S. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity. New York : Mc-Graw Hill, 1951,

[Tjaden] D.L.A. Tjaden, " Birefringence in single-mode optical fibres due to core ellipticity, Philips Journal of Research, Vol.33, N°5-6, pp 254-263, 1978

[Tsai] K-H. Tsai, K-S.Kim, T.F. Morse, "General solutions for stress-induced polarization in optical fibers ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.9, N°1, 1991

[Turpin] M .Turpin, M. Valentin, J. Dubos et J. Auge, " Mesure de la birefringence des fibres optiques monomodes à maintien de polarisation linéaire ", *Revue technique Thomson-CSF*, Vol.15, N°4, 1983

[Ulrich79] R. Ulrich, A. Simon, " Polarization optics of twisted single-mode fibers ", *Applied Optics*, Vol.18, N°13, 1979

[Ulrich80] R.Ulrich, S.C.Rashleigh, " Bending induced birefringence in single mode fibers ", *Optics Letters*, Vol.5, N°6, pp 273-275, 1980

[van Deventer] M .O. van Deventer, " Polarization Properties of Rayleigh Backscattering in single-mode fibers ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.11, N°12, 1993

[Varnham] M. Varnham, "Analytic solution for the birefringence produced by thermal stress in polarization-maintening optical fibers", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.1, N°2, pp 332-339, 1983

[Vengsarkar92] A. M. Vengsarkar, L.G.Cohen, " Theoritical analysis of highly elliptical-core optical fibers with arbitrary refractive-index profiles ", *Optics Letters,* Vol. 17, N°23, pp 1658-1660, 1992

[Vengsarkar93] A.M.Vengsarkar, A.H.Moesle, L.G.Cohen, W.L.Mammel, " Polarization mode dispersion in dispersion-shifted fibers : an exact analysis ", *Optics Letters*, Vol.18, N°17, pp1412-1414, 1993

[Wai] P. K. A. Wai and C. R. Menyuk, " Polarization Mode Dispersion, decorrelation, and diffusion in Optical fibers with randomly varying birefringence ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.14, N° 148, 1986

[Wegmuller] M .Wegmuller, M. Legré, and N. Gisin, " Distributed beatlength measurement in single-mode fibers with Optical Frequency-Domain Reflectometry ", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol.20, N°5, 2002

[Wuilpart01] M. Wuilpart, P. Mégret, M. Blondel, A. J. Rogers, Y. Defosse, " Measurement of the spatial distribution of birefringence in optical fibers ", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 13, N°8, 2001

[Wuilpart02] M. Wuilpart, G. Ravet, P. Mégret, M. Blondel " Polarization mode dispersion mapping in optical fibers with a polarization-OTDR", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 14, N°12, 2002

[Yablon04] A. Yablon, Optical and Mechanical effects of frozen-in stresses and strains in optical fibers, *IEEE journal of selected topics in quantum electronics*, Vol.10, N°2, 2004

[Yeh] C.Yeh , " Elliptical dieletric waveguides ", *Journal of Applied Physic*, Vol.33, N°11, pp 3225-3243, 1962

[Zarzychi] Zarzychi. J, " Les verres et l'état vitreux ", éditions Masson

[Zhang] P,-Zhang, D.Irvine-Halliday, "Measurement of the beat length in high-birefringent optical fiber by way of magnetooptic modulation", *Lightwave Technol, Journal of*, Vol.12, N°4, pp597-602, 2002

[Zheng] X.-H. Zheng, W. M. Henry, A. W. Snyder, "Polarization characteristics of the fundamental mode of optical fibers", *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 6, N°8, pp 1300-1305, 1988

Bibliographie de l'auteur

Publications

[1] **G. Bouquet**, L-A de Montmorillon, P. Nouchi, "Analytical solution of polarization mode dispersion in triangular spun fibers ", Optics Letters, Vol. 29 , N° 18, pp 2118-2120, 2004

[2] T. Chartier, C. Greverie, L. Selle, L. Carlus, **G. Bouquet**, L-A. de Montmorillon, "Measurement of the stress optic coefficient of single mode fibers using a magneto-optic method ", *Optic Express*, Vol.11, N°20, pp. 2561-2566, 2003

Présentation

Présentation de l'article [2] en poster au JNOG'03

Brevet

Y. Fayolle, Y. Lumineau, **G. Bouquet**, V. Durel, "Procédé et système de réflectometrie à onde optique polarisée", déposé au nom d'Alcatel le 12/08/2003 sous le numéro 03292021.7