



HAL
open science

Optimisation sous contrainte en probabilité

Laetitia Andrieu

► **To cite this version:**

Laetitia Andrieu. Optimisation sous contrainte en probabilité. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. Français. NNT: . pastel-00001239

HAL Id: pastel-00001239

<https://pastel.hal.science/pastel-00001239v1>

Submitted on 24 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de
Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Mathématiques et Informatique

par

Laetitia ANDRIEU

Sujet : *Optimisation sous contrainte en probabilité*

Soutenue le 7 décembre 2004 devant le jury composé de :

Président :	Jean-Baptiste Hiriart-Urruty	Université Paul Sabatier, Toulouse
Rapporteurs :	René Henrion Anatoli Juditsky	W.I.A.S., Allemagne Université Joseph Fourier, Grenoble
Examineurs :	René Aïd Felisa Vázquez-Abad	E.D.F. R&D, Clamart Université de Melbourne, Australie
Directeur de thèse :	Guy Cohen	E.N.P.C.
Invité :	Jean-Marc Bonnisseau	Université Paris 1

Pour Alexandra, ma sœur

Remerciements

Je remercie tout d'abord Guy Cohen de m'avoir proposé ce sujet de thèse, et de l'attention qu'il a portée à mon travail. J'ai découvert grâce à lui le monde de la recherche dans les meilleures conditions : conditions matérielles, mais surtout qualités pédagogiques dont Guy Cohen a fait preuve pendant ces trois années.

Felisa Vázquez-Abad a co-dirigé ce travail. Elle m'a fait découvrir le domaine de l'approximation stochastique, qui constitue l'une des bases essentielles des réflexions menées au cours de cette thèse. Elle s'est intéressée à mon travail durant toute cette période, ce dont je lui suis profondément reconnaissante.

Je remercie chaleureusement les membres de l'équipe Optimisation et Systèmes : Jean-Philippe Chancelier, pour sa disponibilité ; Michel de Lara, pour ses conseils et ses encouragements ; et enfin Pierre Carpentier, pour ses conseils concernant les aspects numériques de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à René Henrion et Anatoli Juditsky pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse en acceptant d'en être les rapporteurs ; ainsi qu'à René Aïd et Jean-Baptiste Hiriart-Urruty pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury de thèse.

Je remercie Bernard Lapeyre de m'avoir accueillie au CERMICS. J'ai eu la chance de bénéficier d'un environnement enrichissant et dynamique. Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du CERMICS, ainsi qu'à Vlad Bally pour son aide concernant le calcul de Malliavin. Merci aux doctorants du labo, ceux de mon équipe – Kengy, Anes et Cyrille – mais aussi tous ceux des autres équipes avec lesquels j'ai passé de très bons moments ; merci à Linda et Maxime pour toutes les discussions que nous avons eues ensemble.

Parallèlement à mon travail de thèse, j'ai découvert le plaisir d'enseigner. Je remercie les responsables d'enseignement qui m'ont fait confiance, et tout particulièrement Bernadette Miara et Patrick Ciarlet qui ont été les premiers à me donner la responsabilité des divers enseignements que j'ai assurés pendant cette période.

Je n'oublie pas mes anciens enseignants d'optimisation de l'Université Paris 1, Jean-Marc Bonnisseau, Bernard Cornet et Georges Haddad. Ils m'ont fait découvrir le domaine de l'optimisation, et m'ont donné envie de poursuivre mes études dans ce domaine.

Enfin, un grand merci à mes parents qui m'ont soutenue et encouragée tout au long de ces années.

Résumé. La décision dans l'incertain est un thème de recherche particulièrement actif à l'heure actuelle, en raison notamment de ses nombreuses applications dans différents domaines de l'ingénierie (télécommunications, transports,...), de la gestion et de la finance, etc. La formulation de ces problèmes en termes de problèmes d'optimisation sous contraintes est une approche classique. Cependant, dans un contexte aléatoire (ou stochastique), la nature des contraintes prises en compte requiert une attention particulière :

- les contraintes à satisfaire “presque sûrement” sont généralement irréalistes ou anti-économiques (on ne dimensionne pas les réseaux pour écouler le trafic des heures de pointe de l'année), en dehors bien sûr des relations mathématiques qui représentent les lois de la Physique ;
- les contraintes à satisfaire “en espérance”, quoique mathématiquement agréables, n'ont pas de signification pratique très utile dans la mesure où le respect d'une inégalité sur l'espérance ne garantit rien sur la fréquence des dépassements de cette inégalité ;
- les contraintes à satisfaire avec une certaine probabilité sont généralement celles qui ont le plus de signification pratique, mais elles sont difficiles à traiter mathématiquement ;
- d'autres mesures de risque ont été récemment proposées (CVaR, ordres stochastiques, ...), notamment dans le domaine de la finance, pour aller dans le sens d'un traitement mathématique plus facile (préservation de la convexité par exemple), mais avec une certaine perte de l'interprétation intuitive qu'on peut leur donner.

Sur le plan théorique, l'une des difficultés fondamentales que soulève le traitement des contraintes en probabilité est que ces contraintes s'expriment essentiellement comme l'espérance d'une fonction indicatrice d'ensemble, fonction à la fois non convexe et discontinue : le traitement de telles quantités par des méthodes d'approximation stochastique est donc très difficile.

Dans cette thèse, trois voies sont explorées pour contourner ces difficultés :

- le recours à d'autres formulations du risque qui amènent à des problèmes mathématiques plus simples ;
- des méthodes d'intégration par parties ou de changement de variables dans le calcul de l'espérance permettent, sous certaine condition, de remplacer la fonction indicatrice par sa primitive, évidemment plus régulière, et donc plus facile à traiter du point de vue de l'approximation stochastique : on obtient ainsi des estimateurs non biaisés mais présentant une certaine variance ;
- des méthodes de “lissage” remplaçant la fonction indicatrice par une approximation “adoucie”, ce qui introduit un certain biais dans l'estimation, biais que l'on cherche ensuite à faire tendre asymptotiquement vers zéro.

Ces méthodes sont évaluées et comparées à la fois sur les plans théorique et numérique, en utilisant pour cela deux exemples issus l'un d'un problème de parcours optimal avec risque et l'autre d'un problème d'investissement en finance.

Introduction générale

L'optimisation, une aide à la décision

L'optimisation est une technique qui permet de “quantifier” les compromis entre des critères parfois non commensurables, i.e. peu susceptibles de s'évaluer dans les mêmes unités ¹. En effet, si tout se ramenait à des euros, il suffirait d'additionner tous les effets d'une décision pour la comparer à une autre. Mais que vaut la vie humaine ? Penser par exemple à une politique de sécurité routière qui coûte des investissements en euros et qui rapporte des économies ... de morts.

En fait, la théorie de l'optimisation fournit des outils permettant de répondre à des questions du type “si on accepte de perdre x sur un critère, combien pourra-t-on gagner au mieux sur un autre critère ? ” au moins de façon marginale (i.e. lorsque x est petit). Voilà d'où vient “le prix de la vie humaine” : dans un contexte (et avec des contraintes) bien précis, x euros de plus de tel investissement en matière de sécurité permettront (statistiquement) d'économiser y morts, d'où le prix marginal du mort. Mais ce *prix marginal* pourra être très différent dans un autre cadre décisionnel, avec d'autres niveaux de contraintes par exemple ... ce qui doit donner à réfléchir.

Finalement, l'optimisation ne se substitue pas à la responsabilité du décideur ; elle rend les conséquences de certains choix a priori (fixation d'un budget, d'un niveau de sécurité) plus explicites en ayant fait le mieux possible à l'intérieur du contexte créé par ces choix.

Nomenclature de l'optimisation

L'idée d'optimisation étant très générale, nous allons entrer un peu plus dans la description de sous-catégories qui correspondent à des outils mathématiques et des niveaux de difficultés assez variables :

- *optimisation continue et optimisation discrète* : la première distinction à faire concerne la nature des “espaces” dans lesquels les variables de décision prennent leurs valeurs, c'est la dichotomie “discret-continu”, bien marqué en mathématiques et qui conditionne beaucoup les possibilités de recourir à certains outils. On se situera dans le cas continu, ce qui permet de considérer des variations infinitésimales et l'usage de la notion de dérivée des fonctions impliquées (les fonctions pourront ne pas être parfaitement “lisses” et seulement “sous-différentiables”, toujours est-il que l'on disposera d'une possibilité de parler de petites variations) ;

¹Le début de cette introduction est inspiré du cours *Convexité et Optimisation* enseigné par G. Cohen à l'École des Ponts en 1999-2000.

- *optimisation déterministe et optimisation dans l'incertain* : dans le cas déterministe, tous les facteurs intervenant dans le problème, en dehors des variables de décision à notre disposition, sont supposés connus avec précision. Mais bien souvent, dans la plupart des situations concrètes, le décideur doit faire face à un certain nombre de facteurs inconnus, ou plus précisément connus statistiquement par exemple. Une approche possible de la décision dans l'incertain consiste alors à utiliser un cadre probabiliste pour décrire mathématiquement l'incertain (on parle dans ce cas d'optimisation stochastique et on cherche en général à minimiser l'espérance de la fonction coût, ce qui suppose implicitement qu'on accepte un comportement "optimal en moyenne") ;
- *optimisation statique et optimisation dynamique* : le mot "dynamique" est le plus souvent utilisé lorsque le temps intervient, i.e. qu'un système évolue, qu'il faut prendre des décisions à diverses étapes de cette évolution, et que ces décisions auront une influence sur tout le futur. On parle alors de commande optimale qui peut être à nouveau déterministe ou stochastique. Pour être plus précis, dans une formulation déterministe, le mot "dynamique" implique que l'on manipule des "trajectoires" : les "commandes", comme les variables de décision, les états du système, ... , sont des objets indexés par le temps. À l'inverse, si on se place dans des situations dynamiques et en présence d'incertain, on entre le plus souvent dans le monde de la commande en boucle fermée ou en feedback, où l'on a intérêt à prendre les décisions à chaque instant au vu des observations disponibles jusqu'à cet instant.

Généralités sur l'optimisation stochastique sous contrainte

Il existe diverses notions mathématiques permettant de formuler des contraintes en optimisation stochastique :

- *les contraintes presque sûres* : elles sont trop exigeantes d'un point de vue économique et réservées par conséquent aux équations décrivant un modèle physique. En effet, si l'on considère par exemple l'optimisation du dimensionnement d'un système collectif (une autoroute, un réseau électrique), vouloir à tout prix satisfaire la demande quelle que soit celle-ci, ou quel que soit l'état de panne de certains éléments, conduit à un surdimensionnement du système économiquement inacceptable. On arrive donc à tolérer la violation des contraintes (défaillance de fourniture de la demande par exemple) dans un "certain nombre de cas pas trop grand" ;
- *les contraintes en espérance* : quoique mathématiquement agréables, elles n'ont pas de signification pratique très utile, dans la mesure où le respect d'une inégalité sur l'espérance ne garantit rien sur la fréquence des dépassements de cette inégalité ;
- *les contraintes en probabilité* : ces contraintes sont une formulation assez naturelle du risque, mais elles sont difficiles à manipuler mathématiquement.

À ce stade de l'introduction, il nous semble indispensable de distinguer deux types de "défaillance", qui sont pratiquement de signification et mathématiquement de difficultés très différentes :

- *la défaillance quantitative* : lorsque l'on ne satisfait pas à une demande d'électricité par exemple, il n'est pas indifférent de savoir combien de consommateurs ont été privés

d'électricité et pendant combien de temps ; il est naturel que le “coût de défaillance” soit au moins proportionnel à la demande non servie ; on est mathématiquement dans l'optique de “coûts convexes”, i.e. de coûts marginaux croissants ;

- *la défaillance qualitative* : il est des situations où le fait de violer une contrainte entraîne une issue fatale quel que soit le dépassement constaté du niveau de la contrainte souhaité ; par exemple, si la contrainte correspond à la définition d'une cible à atteindre pour récupérer l'équipage d'un aéronef en cas d'incident, et si le fait de ne pas pouvoir atteindre la cible doit être considéré comme fatal à la survie de l'équipage, il importe peu de savoir si on a de “beaucoup” ou “de peu” manqué la cible : le processus est “en tout ou rien”, on est mort ou on a survécu (coût marginal non monotone, ce qui correspond à une situation non convexe).

La formulation des contraintes en probabilité étant particulièrement bien adaptée à cette deuxième catégorie de défaillance, et s'agissant d'une formulation naturelle du risque, c'est précisément à ce type de contraintes que nous allons nous intéresser dans ce travail.

Aspects algorithmiques : gradient stochastique

Afin de mettre en évidence les difficultés rencontrées lors du traitement mathématique de la contrainte en probabilité, nous allons décrire succinctement la stratégie de résolution que nous envisageons, stratégie basée sur un algorithme de type gradient stochastique (dans [13], G. Cohen et J.-C. Culioli ont étendu la méthode du gradient stochastique et le traitement des contraintes par dualité aux contraintes formulées en espérance).

1. On commence par écrire la contrainte comme une contrainte en espérance. Si la contrainte en probabilité s'écrit

$$\mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq \alpha\} \geq p,$$

où

- u désigne la variable de décision,
- ξ désigne la variable aléatoire,
- \mathbb{P} désigne la probabilité d'un évènement,
- $p \in [0, 1]$ désigne le niveau de probabilité requis pour la satisfaction de la contrainte,
- α désigne le niveau de la contrainte,

et si $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ désigne la fonction indicatrice de la demi-droite réelle positive, i.e.,

$$\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors on peut écrire

$$\mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq \alpha\} = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha - g(u, \xi))\right].$$

2. On utilise ensuite la dualité pour faire entrer, à l'aide d'un multiplicateur λ , la contrainte comme une partie de la fonction coût : soit $\mathbb{E}[j(u, \xi)]$ la fonction coût initiale à minimiser en u sous la contrainte en probabilité ; le Lagrangien ainsi obtenu s'écrit comme une espérance

$$L(u, \lambda) = \mathbb{E}\left[j(u, \xi) - \lambda \left(p - \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha - g(u, \xi))\right)\right].$$

En supposant l'existence d'un point selle de L , il s'agit de mini-maximiser cette espérance par rapport aux variables primales et duales selon l'idée du gradient stochastique (algorithme de Arrow-Hurwicz stochastique étudié dans ce contexte de contrainte en espérance dans [13]). Concrètement, on doit donc résoudre un problème d'optimisation formulé à l'aide d'une espérance mathématique. Notons bien que l'on se place "en boucle ouverte", i.e. une situation où les décisions doivent être prises une fois pour toutes sur la base d'informations a priori (statistiques, ...). C'est le cas par exemple pour la détermination des investissements à faire une fois pour toutes pour faire face à des aléas (pannes, consommations, ...) qui ne sont connus à l'avance que par leurs statistiques. Le calcul des espérances est le plus souvent difficile, voire impossible. La méthode du gradient stochastique apporte une réponse à cette difficulté en "optimisant tout en calculant l'espérance". Il s'agit en fait d'une combinaison de l'idée de la méthode de Monte-Carlo (tirages pseudo-aléatoires permettant l'évaluation numérique des espérances) avec la procédure itérative des méthodes de gradient en optimisation.

Deux types de difficultés apparaissent alors. On sait en effet (il s'agit d'un théorème) que si l'on considère $J(u) = \mathbb{E}[h(u)]$, et si l'on suppose que h est Lipschitz p.s., alors $J'(u) = \mathbb{E}[h'(u)]$. La première difficulté, fondamentale, tient donc au fait que la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ est non seulement non différentiable mais non continue. Il n'est pas impossible que l'expression $\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha - g(u, \xi))\right]$ soit une fonction continue voire différentiable de u par le fait que la discontinuité de $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ "se déplace" avec chaque ξ et que l'on fait une opération de moyenne par \mathbb{E} . Mais le gradient stochastique opère malheureusement ξ par ξ , ce qui signifie que l'opération régularisante de moyenne n'a pas lieu et le gradient, voire même un sous-gradient, de $u \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha - g(u, \xi))$ n'existe pas. Pour contourner cette difficulté trois approches sont envisagées :

- chercher d'autres formulations du risque qui amèneraient à des problèmes mathématiques plus simples (partie II du mémoire) ;
- traiter directement le problème de discontinuité en utilisant des idées d'intégration par parties ou de régularisation obtenue par convolution avec des suites de fonctions régularisantes (partie III du mémoire, chapitre 5) ;
- reformuler la contrainte en probabilité comme une contrainte sur un quantile indépendant de la variable de décision (partie III du mémoire, chapitre 5).

La deuxième difficulté est liée à la stratégie de résolution elle-même. En effet, l'existence d'un point selle du Lagrangien n'étant pas du tout garantie, il est préférable de recourir à l'idée du Lagrangien augmenté pour augmenter les chances que ce point selle existe. Or le mélange de l'espérance (traitée comme dans le gradient stochastique) et des non linéarités du Lagrangien augmenté pose certains problèmes (partie III du mémoire, chapitre 6).

Table des matières

I	Compte-rendu de la littérature	17
1	Notations et résultats connus	19
1.1	Optimisation convexe	19
1.1.1	Optimisation libre	20
1.1.2	Dualité	22
1.1.3	Principe du problème auxiliaire	24
1.1.4	Lagrangien augmenté	25
1.2	Modèle probabiliste	26
1.3	Méthode de l'ODE	28
1.4	Méthode du gradient stochastique	28
1.4.1	Approches intuitive et probabiliste	28
1.4.2	Convergence	30
1.4.3	Vitesse de convergence	31
1.4.4	Amélioration asymptotique de l'algorithme de gradient stochastique	33
1.4.5	Analyse qualitative d'un algorithme de gradient stochastique	35
1.5	Optimisation sous contrainte en espérance	36
1.6	En résumé	38
2	L'état de l'art sur les contraintes en probabilité	39
2.1	Dérivée d'une fonction probabilité	39
2.2	Convexité de l'ensemble admissible	43
2.3	Connexité de l'ensemble admissible	44
2.4	L'aspect mesure de risque	46
2.5	En résumé	46
II	Contraintes en probabilité et mesures de risque	49
3	Mesures de risque et de sécurité	51
3.1	Les notions d'ordre stochastique	51
3.1.1	La dominance stochastique à l'ordre 1	52
3.1.2	La dominance stochastique à l'ordre 2	53
3.1.3	Le cas des variables aléatoires n -dimensionnelles	53
3.1.4	Caractérisation en terme de quantile	55
3.2	Les mesures de risque et de sécurité usuelles	56
3.2.1	Value-at-risk $q_u(p)$	56
3.2.2	Conditional value-at-risk $\phi_p(u)$	57
3.2.3	Une mesure de sécurité alternative $\mathcal{S}_p(u)$	59
3.2.4	Weighted mean deviation from a quantile $h_X(p)$	60

3.2.5	Tail value-at-risk $\text{TVaR}_X(p)$	61
3.2.6	Tail Gini's mean difference $\text{Gi}_X(p)$	61
3.2.7	D'autres mesures de risque	62
3.3	Reformulation de ces mesures	63
3.3.1	Tail value-at-risk	63
3.3.2	Weighted mean deviation from a quantile	64
3.3.3	Tail Gini's mean difference	64
3.3.4	CVaR	64
3.3.5	Les autres mesures de risque	65
3.4	En résumé	65
4	Les mesures de risque en optimisation	67
4.1	Application des mesures de risque en optimisation	67
4.2	Échange de la contrainte en probabilité avec une mesure de risque plus régulière	68
4.3	Exemple	69
4.3.1	Présentation du problème	70
4.3.2	Application de la CVaR	70
4.3.3	Relation à l'optimum entre les deux problèmes	70
4.3.4	La non interchangeabilité des mesures de risque	71
4.4	En résumé	71
III	Méthodes mathématiques pour les contraintes en probabilité	73
5	Optimisation sous contrainte en probabilité : le cas convexe	75
5.1	Exemples	75
5.1.1	Le problème du mobile	75
5.1.2	Le problème de finance	78
5.2	Quelques difficultés structurelles	82
5.2.1	La non convexité du problème	82
5.2.2	La dégénérescence du multiplicateur	87
5.2.3	Illustration sur le problème de finance	89
5.3	Première méthode : l'intégration par parties	90
5.3.1	Cas d'une seule fonction indicatrice	90
5.3.2	Cas du produit de deux fonctions indicatrices	96
5.4	Deuxième méthode : l'approximation par convolution	101
5.4.1	Rappels	101
5.4.2	Applications	104
5.5	Analyse qualitative des méthodes	108
5.5.1	L'analyse	108
5.5.2	Idée nouvelle : combiner les deux méthodes	109
5.6	Troisième méthode : l'approche par le quantile	111
5.7	En résumé	114
6	Optimisation sous contrainte en probabilité : le cas non convexe	117
6.1	Exemple : le problème de finance	117
6.2	Minimisation d'une fonction non linéaire de l'espérance	121
6.2.1	Motivation	121
6.2.2	Algorithme général	121
6.3	En résumé	123

Conclusions et nouveaux axes de recherche	125
A Calcul du gradient du coût pour un problème de commande optimale	127

Première partie

Compte-rendu de la littérature

Chapitre 1

Notations et résultats connus

On souhaite résoudre des problèmes d'optimisation stochastique par un algorithme de type gradient stochastique. On rappelle donc ici quelques résultats d'optimisation convexe et de théorie des probabilités, ainsi qu'un certain nombre d'hypothèses qui seront faites assez systématiquement par la suite. Enfin, on présente un algorithme dérivé de la méthode dite du "gradient stochastique", introduit par Robbins et Monro, et qui sera notre stratégie de résolution tout au long de ce mémoire.

1.1 Optimisation convexe

Pour cette synthèse, nous nous sommes inspirés de Aubin ([2], [3]), Faurre ([19]), Schwartz ([30], [31]) et Céa ([8]).

On se place dans un espace de Hilbert \mathcal{U} , de dimension quelconque, identifié à son dual \mathcal{U}' .

Définition 1.1. Soit C un sous-ensemble de \mathcal{C} . On dit que C est un **cône de sommet 0** si

$$\forall q \in C, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad tq \in C.$$

Par définition, $-C = \{q \in \mathcal{C} \mid -q \in C\}$. Dans la suite, on suppose C convexe, fermé d'intérieur non vide et tel que $C \cap (-C) = \{0\}$ (cône saillant). On définit alors la relation d'ordre \leq , compatible avec la structure d'espace vectoriel :

$$\forall p, q \in C, \quad p \leq q \Leftrightarrow p - q \in -C.$$

On considère des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes : on minimise la fonctionnelle convexe J sur le fermé U^{ad} de \mathcal{U} . On introduit un autre espace de Hilbert, \mathcal{C} , dit "espace des contraintes", lui aussi identifié à son dual \mathcal{C}' . On définit une contrainte par la donnée d'un opérateur $\Theta(\cdot)$ de U^{ad} dans \mathcal{C} et d'un cône convexe fermé C de \mathcal{C} . Ainsi posé, le problème s'écrit

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \left\{ J(u) \mid \Theta(u) \in -C \right\}. \quad (1.1)$$

Remarque 1.2. Les contraintes d'égalité correspondent au cas $C = \{0\}$.

Dans notre cas, J est l'espérance d'une fonctionnelle $j(u, \xi)$ définie de $\mathcal{U} \times \Xi$ dans \mathbb{R} , ξ étant une variable aléatoire sur Ω :

$$J(u) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_{\Omega} j(u, \xi) P(d\xi). \quad (1.2)$$

1.1.1 Optimisation libre

Définition 1.3. Une fonctionnelle J définie sur \mathcal{U} est dite **convexe** si

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \quad J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v).$$

Définition 1.4. Une fonctionnelle J définie sur \mathcal{U} est dite **strictement convexe** si

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, u \neq v, \quad J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v).$$

Définition 1.5. On appelle **épigraphe** et **domaine** de J respectivement les ensembles :

$$\text{epi } J = \left\{ (v, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \mid y \geq J(v) \right\},$$

et

$$\text{dom } J = \left\{ v \in \mathcal{U} \mid J(v) < +\infty \right\}.$$

J est dite **propre** si son domaine est non vide et si elle n'est pas identique à $-\infty$.

Définition 1.6. J est dite **semi-continue inférieurement** (ou s.c.i.) si

$$\forall u \in \mathcal{U}, \quad J(u) \leq \liminf_{v \rightarrow u} J(v).$$

Résultat 1.7. On a :

- (i) une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe ;
- (ii) le domaine d'une fonction convexe est convexe ;
- (iii) une fonction est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est fermé ;
- (iv) toute fonction convexe, s.c.i. et propre est minorée par une fonctionnelle affine.

Remarque 1.8. Le point (iv) est une application du théorème de séparation de Hahn-Banach appliqué à $\text{epi } J$.

Définition 1.9. Une fonctionnelle J est dite **coercive** sur U^{ad} si U^{ad} est borné ou si

$$\lim_{u \in U^{\text{ad}}, \|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Résultat 1.10. Soit \mathcal{U} un espace de Hilbert, $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe s.c.i. propre, et $U^{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ un convexe fermé. Si J est coercive sur U^{ad} , alors J admet au moins un minimum sur U^{ad} . Si J est strictement convexe, alors ce minimum est unique.

Démonstration. Soit $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite contenue dans U^{ad} , et telle que $J(u^k)$ tend vers $\inf_{u \in U^{\text{ad}}} J(u)$. Une telle suite, dite suite minimisante, est bornée, donc faiblement compacte, car J est coercive sur U^{ad} . Elle admet donc une sous-suite $u^{\phi(k)}$ faiblement convergente vers un point $u^* \in U^{\text{ad}}$ (car U^{ad} est convexe fermé, donc faiblement fermé). De plus, J étant s.c.i. pour la topologie faible (car convexe), $J(u^*) \leq \liminf J(u^{\phi(k)}) = \inf_{u \in U^{\text{ad}}} J(u)$. L'unicité est immédiate. \square

Définition 1.11. J est dite **fortement convexe** de module a , ou a -convexe, si

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \quad J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v) - \frac{a}{2}t(1-t)\|u-v\|^2.$$

Définition 1.12. Une fonctionnelle J est **différentiable** au point $u \in \mathcal{U}$ s'il existe une forme linéaire continue notée $J'(u) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall v \in \mathcal{U}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(u+hv) - J(u)}{h} = \langle J'(u), v \rangle.$$

J est dite **différentiable sur** \mathcal{U} si elle l'est pour tout $u \in \mathcal{U}$.

Définition 1.13. On appelle **sous-différentiel** de J au point $u \in \text{dom } J$, l'ensemble

$$\partial J(u) = \left\{ r \in \mathcal{U}' \mid \forall v \in \mathcal{U}, J(v) - J(u) \geq \langle r, v - u \rangle \right\}.$$

$r \in \partial J(u)$ est un **sous-gradient** de J au point u . Si $\partial J(u) \neq \emptyset$, J est dite **sous-différentiable** en u .

Définition 1.14. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction non identiquement égale à $+\infty$. La conjuguée ou **transformée de Fenchel** de f est la fonction $f^* : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall y \in \mathcal{U}, \quad f^*(y) := \sup_{x \in \mathcal{U}} (\langle y, x \rangle - f(x)).$$

L'application $f \mapsto f^*$ est appelée conjugaison ou transformation de Legendre-Fenchel. Par construction, f^* est convexe et semi-continue inférieurement (i.e. son épigraphe est fermé). Comme conséquence de cette définition, nous avons l'inégalité suivante :

Propriété 1.15.

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle y, x \rangle \quad \forall (y, x) \in \mathcal{U}^2.$$

Le calcul sous-différentiel et la transformation de Legendre-Fenchel sont très étroitement liés. En effet,

Propriété 1.16.

$$(y \in \partial f(x)) \Leftrightarrow (f(x) - f^*(y) - \langle y, x \rangle = 0).$$

Résultat 1.17. On a :

(i) si J est différentiable, l' a -convexité équivaut à

$$\forall (u, v) \in (\text{dom } J)^2, \quad J(v) - J(u) - \langle J'(u), v - u \rangle \geq \frac{a}{2} \|u - v\|^2,$$

ou

$$\forall (u, v) \in (\text{dom } J)^2, \quad \langle J'(v) - J'(u), v - u \rangle \geq a \|u - v\|^2;$$

(ii) une fonctionnelle J a -convexe est strictement convexe et coercive ;

(iii) si J est sous-différentiable, (i) reste vraie en remplaçant $J'(u)$ par tout $r \in \partial J(u)$; on dit que le sous-différentiel est **fortement monotone** de module a ou encore a -monotone.

Définition 1.18. (i) Une fonctionnelle J est dite **lipschitzienne** de constante L sur \mathcal{U} si

$$\forall (u, v) \in (\text{dom } J)^2, \quad |J(u) - J(v)| \leq L \|u - v\|;$$

(ii) J est à **sous-gradient linéairement borné** (de paramètres c_1 et c_2) si

$$\forall u \in \text{dom } J, \quad \forall r \in \partial J(u), \quad \|r\| \leq c_1 \|u\| + c_2,$$

on résumera cette dernière définition par J est $SGLB(c_1, c_2)$;

(iii) J est dite à **dérivée lipschitzienne** de constante B si

$$\forall (u, v) \in (\text{dom } J)^2, \quad \|J'(u) - J'(v)\| \leq B \|u - v\|.$$

Résultat 1.19. Si la fonctionnelle $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est à dérivée lipschitzienne de constante B , alors

$$\forall (u, v) \in (\text{dom } J)^2, \quad J(v) - J(u) \leq \langle J'(u), v - u \rangle + \frac{B}{2} \|v - u\|^2.$$

1.1.2 Dualité

On rappelle que \mathcal{C} , dit “espace des contraintes”, est un espace de Hilbert, identifié à son dual \mathcal{C}' ; et que l’on définit une contrainte par la donnée d’un opérateur $\Theta(\cdot)$ de U^{ad} dans \mathcal{C} et d’un cône C de \mathcal{C} . On considère toujours le problème

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \left\{ J(u) \mid \Theta(u) \in -C \right\}. \quad (1.3)$$

On note \mathcal{U}^* l’ensemble des solutions du problème (1.3).

Définition 1.20. On appelle **cône conjugué** de C , l’ensemble C' défini par

$$C' = \left\{ q' \in \mathcal{C}' \mid \langle q', q \rangle \geq 0, \quad \forall q \in C \right\}.$$

Définition 1.21. $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ est dite **C -convexe** si

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \forall t \in [0, 1], \quad \Theta(tu + (1-t)v) - t\Theta(u) - (1-t)\Theta(v) \in -C.$$

Θ est dite **C -sous-différentiable** en u si l’ensemble

$$\partial \Theta(u) = \left\{ \tau \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \mid \forall v \in \mathcal{U}, \tau(v - u) - (\Theta(v) - \Theta(u)) \in -C \right\}$$

est non vide. Cet ensemble est appelé **sous-différentiel** de Θ . Si Θ est C -convexe, la fonctionnelle convexe $f_p(\cdot) = \langle p, \Theta(\cdot) \rangle$ est convexe si $p \in C'$; et dans ce cas, elle est dite **régulièrement sous-différentiable** si $\partial f_p(u)$ se réduit aux éléments de la forme $\tau^\top p$ avec $\tau \in \partial \Theta(u)$, le signe $^\top$ désignant l’opérateur adjoint.

Définition 1.22. Le **Lagrangien** associé au problème (1.3), défini sur $U^{\text{ad}} \times C'$, est

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle.$$

On appelle “condition de Slater” la condition

$$0 \in \text{int} \left(\Theta(U^{\text{ad}}) + C \right),$$

int désignant l’intérieur d’un ensemble.

Résultat 1.23 (Théorème du point selle). *On suppose J convexe, s.c.i. et coercive sur U^{ad} ;*

- *si la condition de Slater est satisfaite, alors $u^* \in U^{\text{ad}}$ solution de (1.3)*

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists \lambda^* \in C', \forall (u, \lambda) \in U^{\text{ad}} \times C', \quad L(u^*, \lambda) \leq L(u^*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*) \\ &\Leftrightarrow \left[\forall u \in U^{\text{ad}}, J(u^*) \leq J(u) + \langle \lambda^*, \Theta(u) \rangle, \langle \lambda^*, \Theta(u^*) \rangle = 0, \Theta(u^*) \in -C, \quad \text{et} \quad \lambda^* \in C' \right]; \end{aligned}$$

- *si J est sous-différentiable et Θ est régulièrement C' -sous différentiable, alors $u^* \in U^{\text{ad}}$ est solution de (1.3) si et seulement si $\exists \lambda^* \in C'$ tel que*

$$\begin{aligned} &\exists r^* \in \partial J(u^*), \exists \tau^* \in \partial \Theta(u^*), \langle r^* + (\tau^*)^\top \lambda^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\text{ad}}, \\ &\langle \lambda^*, \Theta(u^*) \rangle = 0, \quad \text{et} \quad \Theta(u^*) \in -C. \end{aligned}$$

Les conditions ci-dessus sont les conditions de Kuhn et Tucker pour le problème (1.3). On est parfois amené à introduire le problème dual de (1.3), ainsi que les ensembles $\hat{U}(\lambda)$ et $\hat{P}(u)$ pour $u \in U^{\text{ad}}$ et $\lambda \in C'$.

Définition 1.24. On note P^* l'ensemble des solutions du **problème dual** suivant

$$\max_{\lambda \in C'} G(\lambda),$$

avec

$$G(\lambda) = \begin{cases} \min_{u \in U^{\text{ad}}} L(u, \lambda) & \text{si } \lambda \in C' \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$G(\cdot)$ est dite fonction duale de J .

On note

$$\hat{U}(\lambda) = \arg \min_{u \in U^{\text{ad}}} L(u, \lambda), \quad \text{et} \quad \hat{P}(u) = \arg \max_{\lambda \in C'} L(u, \lambda).$$

Proposition 1.25. *Sous les hypothèses du Résultat 1.23, G est concave et*

$$\forall (\lambda^*, u^*) \in P^* \times U^*, \quad U^* \subset \hat{U}(\lambda^*) \quad \text{et} \quad P^* \subset \hat{P}(u^*).$$

*On dit que le Lagrangien est **stable** en u si*

$$\forall \lambda^* \in P^*, \quad \hat{U}(\lambda^*) = U^*.$$

Résultat 1.26. *Solutions primales et duales de (1.3) et propriétés de \hat{U} :*

- *l'ensemble des points selles de L sur $U^{\text{ad}} \times C'$ est égal à $U^* \times P^*$;*
- *si $\hat{U}(\lambda)$ existe, alors G est sous-différentiable et $\partial G(\lambda)$ est l'enveloppe convexe fermée des $\Theta(u)$ pour $u \in \hat{U}(\lambda)$;*
- *si $\hat{U}(\lambda)$ est un singleton, G est différentiable (il suffit en fait que $\Theta(\hat{U}(\lambda))$ soit réduit à un singleton) ;*
- *si J est strictement convexe en u , alors L est stable en u .*

1.1.3 Principe du problème auxiliaire

Basé sur une méthode de point fixe, le principe du problème auxiliaire consiste à remplacer le problème

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u), \quad (1.4)$$

avec U^{ad} convexe fermé d'un espace de Hilbert \mathcal{U} et J fonctionnelle à valeurs réelles, sous différentiable et convexe, par la séquence de problèmes auxiliaires suivante :

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} K(u) + \langle \varepsilon r^k - K'(u^k), u \rangle \rightarrow u^{k+1}, \quad (1.5)$$

K étant une fonctionnelle fortement convexe choisie par le concepteur de l'algorithme, $r^k \in \partial J(u^k)$ et $\varepsilon > 0$.

Avec des hypothèses adéquates, la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi engendrée converge faiblement vers la solution u^* du problème (1.4).

Théorème 1.27. *On suppose :*

- J convexe, propre, s.c.i., et coercive sur U^{ad} ,
- $K : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ fortement convexe et différentiable.

Alors la solution de (1.5) existe et est unique. Si de plus,

- J est SGLB(c_1, c_2) et $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une σ -suite (i.e $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k = +\infty$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon^k)^2 < +\infty$),
- ou si $\varepsilon^k = \rho^k / \|r^k\|$, avec ρ^k une σ -suite

alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u^k) = J(u^*),$$

la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et tout point d'accumulation appartient à \mathcal{U}^* . Enfin, si J est fortement convexe, alors :

$$\mathcal{U}^* = \{u^*\} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k - u^*\| = 0.$$

La démonstration se trouve dans [11].

Donnons une interprétation de l'algorithme associé à ce principe du problème auxiliaire. On considère le problème

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \left\{ J(u) \mid \Theta(u) \in -C \right\}.$$

On suppose les hypothèses nécessaires pour pouvoir garantir l'existence d'un point selle du Lagrangien L . On choisit

$$\tilde{K}(u, \lambda) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2\alpha} \|\lambda\|^2,$$

avec $\alpha > 0$ et λ le multiplicateur associé à la contrainte. Il s'agit d'une fonction auxiliaire, fortement convexe-fortement concave et différentiable. Soit $(v, q) \in U^{\text{ad}} \times \mathcal{C}'$, $r \in \partial_u L(v, q)$, $s \in \partial_\lambda L(v, q)$, et $\varepsilon > 0$. Avec ces éléments, cherchons un point selle de

$$\tilde{K}(u, \lambda) + \langle \varepsilon r - \tilde{K}'_u(v, q), u \rangle + \langle \varepsilon s - \tilde{K}'_\lambda(v, q), \lambda \rangle$$

sur $U^* \times P^*$, ce qui revient à résoudre, pour $(u^*, \lambda^*) \in U^* \times P^*$ la paire d'inéquations variationnelles

$$\begin{aligned} \forall u \in U^{\text{ad}}, \langle \tilde{K}'_u(u^*, \lambda^*) + \varepsilon r - \tilde{K}'_u(v, q), u - u^* \rangle &\geq 0, \\ \forall \lambda \in P^*, \langle \tilde{K}'_\lambda(u^*, \lambda^*) + \varepsilon s - \tilde{K}'_\lambda(v, q), \lambda - \lambda^* \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

On remarque facilement que si (v, q) est une solution de ce système, c'est aussi un point selle de L sur les mêmes sous-ensembles admissibles. L'obtention de l'algorithme repose alors sur les observations suivantes :

- le problème du point selle est remplacé, lors du déroulement de l'algorithme, par une alternance de remises à jour des variables primales et duales : ces deux types de variables sont donc traités dans un schéma séquentiel ;
- la remise à jour des variables duales se fait par un algorithme de type gradient.

On obtient ainsi l'algorithme d'Arrow-Hurwicz qui revient à une alternance de pas de gradient projeté dans l'espace primal et dans l'espace dual selon le schéma :

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \Pi_{U^{\text{ad}}} \left(u^k - \varepsilon \nabla_u L(u^k, \lambda^k) \right), \\ \lambda^{k+1} &= \Pi_{C'} \left(\lambda^k + \alpha \varepsilon \nabla_\lambda L(u^{k+1}, \lambda^k) \right). \end{aligned}$$

1.1.4 Lagrangien augmenté

Pour une étude complète du Lagrangien augmenté, le lecteur pourra se reporter à [14].

Définition 1.28. On considère le problème

$$\left\{ \min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u) \mid \Theta(u) \in -C \right\}.$$

On définit le **Lagrangien augmenté** comme suit :

$$L_c(u, \lambda) = \min_{\chi \in -C} J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) - \chi \rangle + \frac{c}{2} \|\Theta(u) - \chi\|^2.$$

Remarque 1.29. Si $C = \{0\}$, alors $L_c(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle + \frac{c}{2} \|\Theta(u)\|^2$.

Cette définition n'étant pas très opératoire, les résultats suivants, extraits de [14], donnent plus d'informations sur les manipulations de Lagrangiens augmentés.

Résultat 1.30. L_c peut se réécrire

$$L_c(u, \lambda) = J(u) + \phi(\Theta(u), \lambda)$$

avec

$$\phi : C \times C' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\theta, \lambda) = \min_{\chi \in -C} \langle \theta - \chi \rangle + \frac{c}{2} \|\theta - \chi\|^2$$

$$\text{ou encore } \phi(\theta, \lambda) = \max_{q \in C'} \langle q, \theta \rangle - \frac{1}{2c} \|q - \lambda\|^2.$$

ϕ a les propriétés suivantes :

- ϕ est convexe en θ , concave en λ et différentiable en θ et λ , et on a

$$\phi'_\theta(\theta, \lambda) = \Pi_{C'}(\lambda + c\theta), \quad \phi'_\lambda(\theta, \lambda) = \frac{1}{c} \left[\Pi_{C'}(\lambda + c\theta) - \lambda \right];$$

- ϕ admet l'expression explicite

$$\phi(\theta, \lambda) = \frac{1}{2c} \left[\|\Pi_{C'}(\lambda + c\theta)\|^2 - \|\lambda\|^2 \right];$$

- enfin, on a les majorations suivantes

$$\forall \lambda \in C', \forall \theta \in -C, \phi(\theta, \lambda) \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in C, \forall \lambda \in C', \phi(\theta, \lambda) \geq \langle \lambda, \theta \rangle.$$

Remarque 1.31. On a également

$$\phi(\theta, \lambda) = \langle \phi'_\theta(\theta, \lambda), \theta \rangle - \frac{c}{2} \|\phi'_\lambda(\theta, \lambda)\|^2.$$

Tout l'intérêt de l'introduction du Lagrangien augmenté provient du résultat suivant :

Résultat 1.32. *Sous la condition de Slater, le Lagrangien augmenté a un point selle sur $U^{\text{ad}} \times C'$. Plus précisément, les Lagrangiens L et L_c ont le même ensemble de points selles $\mathcal{U}^* \times P^*$, respectivement sur les ensembles admissibles $U^{\text{ad}} \times C'$ et $U^{\text{ad}} \times C'$. De plus, L_c est stable en u : en notant $\hat{\mathcal{U}}_c(\lambda^*)$ l'ensemble des solutions de $\min_{u \in U^{\text{ad}}} L_c(u, \lambda^*)$, on a*

$$\forall \lambda^* \in P^*, u \in \hat{\mathcal{U}}_c(\lambda^*) \Rightarrow u \in \mathcal{U}^*.$$

1.2 Modèle probabiliste

Introduisons le modèle probabiliste permettant de décrire un algorithme de type gradient stochastique (pour plus de détails, on peut par exemple consulter [20]).

Définition 1.33. On appelle **base stochastique** un quadruplet $(\Omega, (F^k)_{k \in \mathbb{N}}, F, \mathbb{P})$, dans lequel Ω est un ensemble dont on note $\tilde{\omega}$ un élément, F est une σ -algèbre de Ω , \mathbb{P} est une loi de probabilité sur (Ω, F) et F^k une suite croissante (au sens de l'inclusion des ensembles) de sous- σ -algèbres de F . On supposera en général que F est la σ -algèbre engendrée par la réunion des F^k .

Définition 1.34. Soit (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable. Un **processus stochastique** sur l'espace de probabilité (Ω, F, \mathbb{P}) d'espace d'état (Y, \mathcal{B}) est une application X de $\mathbb{N} \times \Omega$ dans Y mesurable. Les applications $X(\cdot, \tilde{\omega}) : k \rightarrow X(k, \tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} \in \Omega$ sont appelées **trajectoires** du processus.

Définition 1.35. Soit $(\Omega, (F^k)_{k \in \mathbb{N}}, F, \mathbb{P})$ une base stochastique et X un processus stochastique sur (Ω, F, \mathbb{P}) , d'espace d'état (Y, \mathcal{B}) . On dit que X est **adapté** à la filtration F (ou non-anticipatif) si pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\tilde{\omega} \rightarrow X(k, \tilde{\omega})$ est F^k -mesurable.

Définition 1.36 (Convergence d'une suite de variables aléatoires). Soit $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert \mathcal{U} , l'espace probabilisé associé étant (Ω, F, \mathbb{P}) . On dit que la suite converge vers 0

- en moyenne quadratique si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\|X^k\|^2 \right] = 0$;
- en probabilité si $\forall \varepsilon > 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left\{ \|X^k\| > \varepsilon \right\} = 0$;
- presque sûrement si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X^k(\omega) \rightarrow 0$.

Remarque 1.37. La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité; la convergence presque sûre implique également la convergence en probabilité.

Définition 1.38 (Martingale). Soit $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire adapté à une filtration F . On dit que $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une martingale si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[|X^k|] < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^k[X^{k+1}] = X^k,$$

où \mathbb{E}^k est l'espérance conditionnelle sachant F^k .

Définition 1.39 (Propriété caractéristique - Définition des quasi-martingales). Un processus stochastique (X_k) adapté à la filtration F , tel que :

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_k] > -\infty$$

et tel que,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{G_k} (X_{k+1} - X_k) \right] < +\infty$$

avec

$$G_k = \left\{ \tilde{\xi} \in \Omega \mid \mathbb{E}^k[X_{k+1} - X_k] > 0 \right\}$$

est appelé une (F, \mathbb{P}) -quasi-martingale.

Résultat 1.40 (Convergence p.s. des quasi-martingales). Soit $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une (F, \mathbb{P}) -quasi-martingale. Alors $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge p.s. vers une variable aléatoire mesurable X^∞ telle que

$$\mathbb{E}[|X^\infty|] \leq \liminf_k \mathbb{E}[|X^k|] < +\infty.$$

Nous rappelons ci-dessous deux lemmes techniques, souvent utiles dans les preuves de convergence des algorithmes que nous utilisons.

Lemme 1.41. Soit $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que α^k soit le terme d'une série convergente et

$$z^{k+1} \leq \sup_{l \leq k+1} \alpha^l z^l + \mu^k$$

les μ^k étant bornés. Alors $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

La démonstration de ce lemme se trouve dans Cohen [[11], p.146].

Lemme 1.42. Soit J , fonctionnelle lipschitzienne sur tout borné de Hilbert \mathcal{U} . Soient $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans \mathcal{U} et \mathbb{R}^+ respectivement, telles que

$$\exists \delta > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|u^{k+1} - u^k\| < \delta \varepsilon^k$$

avec

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k = +\infty \quad \text{et} \quad \exists \mu, \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k \|J(u^k) - \mu\| < +\infty$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u^k) = \mu.$$

La démonstration de ce lemme se trouve dans Cohen [[11], p.144].

1.3 Méthode de l'ODE

La méthode de l'ODE (ODE pour *Ordinary Differential Equation*), dont on peut trouver une présentation détaillée dans [23], permet d'analyser la convergence en moyenne d'un algorithme itératif de la forme

$$u^{k+1} = u^k + \varepsilon^k h(u^k) + \varepsilon^k \beta^k + \varepsilon^k \xi^k, \quad (1.6)$$

où $u^* \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur que l'on souhaite estimer de façon récursive. On supposera vraies les quatre hypothèses suivantes :

- (H1) $\varepsilon^k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon^k = 0$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k = +\infty$,
- (H2) $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue,
- (H3) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta^k = 0$ presque sûrement,
- (H4)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{m \geq k} \left\| \sum_{l=k}^m \varepsilon^l \xi^l \right\| > \varepsilon \right\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ces hypothèses permettent d'associer à un algorithme de la forme (1.6) son équation différentielle moyenne définie par

$$\frac{du}{d\tau} = \dot{u} = h(u(\tau)). \quad (1.7)$$

L'algorithme (1.6) est approximativement une discrétisation de cette équation différentielle déterministe avec l'équivalence temps continu/temps discret $t_k \leftrightarrow \sum_{l=0}^k \varepsilon^l$. Son obtention repose sur l'utilisation

- du fait que u^k varie lentement par rapport à β^k et ξ^k ($\varepsilon^k \ll 1$) et que h est régulière ;
- de la loi forte des grands nombres.

L'ODE caractérise le comportement statistique moyen d'un algorithme et son étude permet de traiter le problème de la convergence locale grâce au résultat suivant :

Théorème 1.43. *Supposons que $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par (1.6) vérifiant les hypothèses (H1) à (H4) soit bornée presque sûrement. Alors il existe $\tilde{\Omega}_0$ négligeable tel que si*

1. $u^* \in \mathbb{R}^n$ est une solution localement asymptotiquement stable de l'ODE $\dot{u} = h(u)$ ayant pour domaine d'attraction $DA(u^*)$;
2. pour $\tilde{\omega} \notin \tilde{\Omega}_0$ $u^k(\tilde{\omega}) \in A \subset DA(u^*)$ infiniment souvent ;

alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(\tilde{\omega}) = u^*.$$

Corollaire 1.44. *Si $u(t) = u^*$ est la seule trajectoire bornée de l'ODE, alors $u^k \rightarrow u^*$ presque sûrement.*

1.4 Méthode du gradient stochastique

1.4.1 Approches intuitive et probabiliste

Les deux approches que nous donnons ici sont extraites de [16]. On s'intéresse au problème suivant

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u) = \mathbb{E}[j(u, \xi)].$$

Le modèle probabiliste introduit précédemment permet de tenir compte du fait qu'à chaque expérience, on ne dispose que de l'information $j(u, \xi)$ et non de l'information $J(u)$. A fortiori, on ne disposera dans les bons cas que de $\nabla_u j(u, \xi)$, et le plus souvent, seul un sous-gradient de $j(u, \xi)$ sera disponible. D'où l'algorithme suivant :

- on choisit un u^0 dans U^{ad} ;
- à chaque étape k , on effectue un tirage aléatoire ξ^{k+1} suivant la loi \mathbb{P} , indépendamment des tirages précédents ;
- on procède à la mise à jour suivante :

$$u^{k+1} = u^k - \varepsilon^k r^k, \quad r^k \in \partial_u j(u^k, \xi^{k+1}), \quad (1.8)$$

la suite $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant une σ -suite.

En voici une première approche intuitive, motivant l'hypothèse de σ -suite. D'une part, on peut écrire $u^K = u^0 - \sum_{k=0}^K \varepsilon^k r^k$. En divisant les deux membres par $\sigma^K = \sum_{k=0}^K \varepsilon^k$, on obtient alors

$$\frac{u^K - u^0}{\sigma^K} = - \frac{\sum_{k=0}^K \varepsilon^k r^k}{\sigma^K}.$$

Si u^k converge vers \bar{u} (avec \bar{u} tel que $\nabla J(\bar{u}) = 0$) et $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite à série divergente, alors la suite de Cesaro

$$v^k = \frac{\sum_{k=0}^K \varepsilon^k r^k}{\sigma^k}$$

converge vers 0, et n'est pas éloignée de la véritable moyenne $\mathbb{E}[r] = \nabla J(\bar{u})$. La série divergente permet donc d'assurer la condition d'optimalité en moyenne de Cesaro. D'autre part, en supposant les sous-gradients bornés et en adaptant la preuve du cas déterministe, on démontrerait que la propriété $\sum_k (\varepsilon^k)^2 < +\infty$ permet de prouver la bornitude (presque sûre) de la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Considérons maintenant une motivation plus probabiliste d'un algorithme de gradient stochastique. Supposons qu'à la suite d'expériences répétées, on obtienne des mesures y^i , à des instants successifs $i = 1, 2, \dots$, et que l'on doive décider d'une action qui dépend de la moyenne estimée de ces nombres. Il est alors judicieux, aux instants $k, k+1, \dots$, d'effectuer des moyennes partielles avec les données déjà disponibles. Posons $u^k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y^i$. On note que ces moyennes (conditionnelles) peuvent se calculer de manière récursive de la façon suivante

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{k+1} (u^k - y^{k+1}). \quad (1.9)$$

On reconnaît (1.8) avec $r^k = u^k - y^{k+1}$ et $\varepsilon^k = \frac{1}{k+1}$. En effet, y^{k+1} n'est autre qu'une réalisation de y , variable aléatoire, dont chaque u^k constitue une espérance conditionnelle. Le problème résolu récursivement par (1.9) est en fait

$$\min_u \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(u - y)^2 \right], \quad (1.10)$$

et il est classique en probabilités que la moyenne soit le nombre "autour duquel" la variable aléatoire admet la dispersion minimale : (1.10) admet pour solution $u^* = \mathbb{E}[y]$ et le critère optimal $J(u^*)$ vaut

$$J(u^*) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[y] - y)^2 \right] = \frac{1}{2} \text{var}(y).$$

1.4.2 Convergence

Dans [15], J.-C. Culioli s'intéresse au problème

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \int_{\Omega} j(u, \xi) \mathbb{P}(d\xi) = J(u) \quad \text{s.c.} \quad \Theta(u) \in -C. \quad (1.11)$$

On appelle \mathcal{U}^* l'ensemble des solutions de ce problème. On suppose qu'il existe un point selle (u^*, λ^*) pour le Lagrangien de ce problème.

Lorsque J est strictement convexe, J.-C. Culioli propose l'algorithme suivant, basé sur le principe du problème auxiliaire décrit en (1.1.3) :

- soit $u^0 \in U^{\text{ad}}$ et $\lambda^0 \in C'$
- connaissant u^k et λ^k , on tire ξ^{k+1} suivant la loi \mathbb{P} et indépendamment des tirages précédents ; puis on calcule
 - u^{k+1} par

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} K(u) + \langle \varepsilon^k r^k - K'(u^k), u \rangle + \varepsilon^k \langle \lambda^k, \Theta(u) \rangle \quad (1.12)$$

avec $r^k \in \partial_u j(u^k, \xi^{k+1})$

- et λ^{k+1} par

$$\lambda^{k+1} = \Pi \left(\lambda^k + \varepsilon^k \Theta(u^{k+1}) \right)$$

Π étant la projection sur C' , cône conjugué de C .

Cet algorithme permet de trouver une suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement p.s. vers u^* et de prouver que la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ associée est bornée p.s..

Théorème 1.45. *En plus de l'existence d'un point selle au problème (1.11), on suppose :*

- $j(\cdot, \xi)$ convexe, propre, s.c.i. pour tout $\xi \in \Omega$; $j(u, \cdot)$ mesurable sur Ω pour tout $u \in U^{\text{ad}}$;
- $J(\cdot)$ strictement convexe ;
- $\Theta(\cdot)$ lipschitzienne de constante L ;
- K fonctionnelle fortement convexe de module $b > 0$, différentiable.

Alors, la solution de (1.12) existe et est unique. Si de plus, pour tout ξ , $j(\cdot, \xi)$ est à sous-gradient linéairement borné de paramètres c_1 et c_2 et si $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une σ -suite, alors les suites $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont bornées p.s. et $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement \mathbb{P} p.s. vers u^* (d'après la stricte convexité de J , $\mathcal{U}^* = \{u^*\}$). Enfin, si J est fortement convexe, la convergence vers u^* est forte.

Lorsque J est seulement convexe, on utilise le Lagrangien augmenté et l'algorithme est alors le suivant :

- soit $u^0 \in U^{\text{ad}}$ et $\lambda^0 \in C'$,
- connaissant u^k et λ^k , on tire ξ^{k+1} suivant la loi \mathbb{P} et indépendamment des tirages précédents ; puis on calcule
 - u^{k+1} par

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} K(u) + \langle \varepsilon^k r^k - K'(u^k), u \rangle + \varepsilon^k \langle q^k, \Theta(u) \rangle$$

avec $q^k = \phi'_{\theta} \left(\Theta(u^k), \lambda^k \right)$ et $r^k \in \partial_u j(u^k, \xi^{k+1})$,

- et λ^{k+1} par

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \varepsilon^k \phi'_\lambda \left(\Theta(u^{k+1}), \lambda^k \right).$$

Le Lagrangien augmenté permet alors d'exhiber une suite double $(u^k, \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ dont les points d'accumulation faibles p.s. $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ sont tels que $\bar{u} \in \mathcal{U}^*$ et $\bar{\lambda} \in P^*$, $\forall u^* \in \mathcal{U}^*$.

Théorème 1.46. *On fait les mêmes hypothèses sur J , j , K et Θ que pour le théorème précédent, excepté la stricte convexité de J . Alors la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée p.s. et tous ses points d'accumulation appartiennent à \mathcal{U}^* . La suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée p.s.. Tout point d'accumulation $\bar{\lambda}$ est tel que $\bar{\lambda} \in \hat{P}(u^*), \forall u \in \mathcal{U}^*$.*

1.4.3 Vitesse de convergence

Nous présentons ici les principaux résultats de [17]. L'idée originale de cet article est, selon nous, d'avoir cherché, sur un exemple particulier, à caractériser sur un algorithme de gradient stochastique la borne de Cramer-Rao.

(Ω, F, \mathbb{P}) est un espace probabilisé, et U^{ad} un convexe de \mathbb{R}^d . On suppose que

$$j \in L_1(\Omega, F, \mathbb{P}), \text{ est convexe, continue en } u \text{ pour tout } \xi \quad (1.13)$$

$$\text{et vérifie } \sup \{ |g|, g \in \partial_u j(u, \xi), u \in U^{\text{ad}}, \xi \in \Omega \} \leq q. \quad (1.14)$$

Notons

$$J^* = \min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u), \quad M = \arg \min_u J(u), \quad \text{et } l(u) = \text{distance de } u \text{ à } M.$$

On suppose que J est a -convexe, avec $a = 2c$; on a donc

$$J(u) - J^* \geq c(l(u))^2 \quad \forall u \in U^{\text{ad}}. \quad (1.15)$$

Si $g(u, \xi) \in \partial_u j(u, \xi)$ désigne une sélection mesurable du sous-différentiel de $u \mapsto j(u, \xi)$ et $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\varepsilon^k \downarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k = +\infty, \quad (1.16)$$

on peut définir la suite de variables aléatoires

$$u^{k+1} = \Pi_{U^{\text{ad}}} \left(u^k - \varepsilon^k g^k \right), u^0 \text{ donné}, \quad (1.17)$$

où $g^k = g(u^k, \xi^k)$. On note $y^k = \mathbb{E} \left[l(u^k)^2 \right]$. On a alors

Théorème 1.47 (Convergence en moyenne quadratique et vitesse de convergence). *Sous les hypothèses (1.13) à (1.16), la suite u^k vérifie $\lim_k y^k = 0$. De plus, pour une suite ε^k de la forme*

$$\varepsilon^k = \frac{1}{ck + q^2/y^0 c}, \quad \forall k,$$

on obtient la vitesse de convergence : $y^k \leq \frac{1}{(c^2 k)/q^2 + 1/y^0}$, $\forall k$.

Dans [17], J.-C. Dodu et al. ont cherché à caractériser, sur un algorithme de gradient stochastique, la borne de Cramer-Rao dans le cas où la loi est atomique. Pour cela, ils se sont intéressés à la minoration de la distance à l'optimum en fonction de la taille de l'échantillon.

On considère la structure statique $(\Omega, F, \mu \in S)$, S étant le simplexe de \mathbb{R}^m , i.e. que l'on est dans la situation où la probabilité $\mu \in S$ est discrète, de support constitué de m atomes. Étant donné $u \in \mathbb{R}^d$, la fonction coût est une application $j : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ fortement convexe en u et deux fois différentiable en u . On veut résoudre

$$\min_u \left(\mathbb{E}[j(u, \xi)] = J(u) \right).$$

Soit $(\Omega, F, \mu \in S)^{\otimes n}$ un échantillon de taille n , et r une paramétrisation du simplexe, par exemple $r = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$ et $\mu_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} r_i$. On considère alors u^* comme une fonction de r , et on peut ainsi prendre le gradient de u^* par rapport à r , qui est noté $\nabla_r u^*$. Une minoration au sens des matrices définies positives de $\mathbb{E}[(\hat{u} - u^*)^{\otimes 2}]$, \hat{u} étant une statistique sur l'échantillon et u^* l'optimum recherché, est donnée par la formule de Cramer-Rao :

$$\mathbb{E}[(\hat{u} - u^*)^{\otimes 2}] \geq \frac{1}{n} \nabla_r u^* \mathcal{I}^{-1} \nabla_r u^*, \quad \forall \hat{u} \text{ tel que } \mathbb{E}_\mu[\hat{u}] = u^*,$$

où \mathcal{I} désigne la matrice d'information

$$\mathcal{I} = \mathbb{E} \left[(\nabla_r \log \mu(r))^{\otimes 2} \right].$$

La minoration cherchée est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.48. *Si j est fortement convexe en u et deux fois différentiable en u , on a*

$$\mathbb{E}[(\hat{u} - u^*)^{\otimes 2}] \geq \frac{1}{n} \nabla^2 J^{-1}(u^*) Q \nabla^2 J^{-1}(u^*)$$

$\forall \hat{u}$ estimateur sans biais défini sur $(\Omega, F, \mu \in S)^{\otimes 2}$ et $Q = \mathbb{E}[\nabla_u j(u^*, \xi)^{\otimes 2}]$.

Le théorème suivant montre que la solution de

$$\min_u \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n j(u, \xi_i) = J(u) \right)$$

où ξ_1, \dots, ξ_n est une suite de tirages indépendants selon la loi μ , conduit à une solution optimale atteignant la borne du théorème précédent. On note

$$\hat{u}_n = \arg \min_u \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n j(u, \xi_i).$$

Lorsque j est fortement convexe en u et deux fois différentiable en u , \hat{u}_n est unique.

Théorème 1.49. *Lorsque j est fortement convexe en u , deux fois différentiable en u et que $u \mapsto j(u, \xi)$ a sa dérivée troisième bornée, on a, lorsque $n \rightarrow \infty$,*

$$\sqrt{n}(\hat{u}_n - u^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \nabla^2 J^{-1}(u^*) Q \nabla^2 J^{-1}(u^*)\right)$$

avec $Q = \mathbb{E} \left[(\nabla_u j(u^*, \xi))^{\otimes 2} \right]$.

Enfin, toujours dans [17], J.-C. Dodu et al. présentent une méthode du second ordre, et montrent que, dans le cas quadratique, l'algorithme de gradient stochastique atteint la vitesse de convergence optimale. On appelle méthode du second ordre une méthode du type

$$u^{k+1} = u^k - A^k \nabla_u j(u^k, \xi^k)$$

où A^k est une suite de matrices, ceci par analogie avec la méthode de Newton dans le cas déterministe

$$u^{k+1} = u^k - \nabla_{uu} j(u^k)^{-1} \nabla_u j(u^k).$$

Ils montrent alors que la vitesse asymptotique optimale du Théorème 1.48 est atteinte par une méthode du second ordre au moins dans le cas où la fonction à minimiser est quadratique

$$j(u, \xi) = \frac{1}{2} u^\top B u - b u + \xi u$$

où ξ est une variable aléatoire centrée, de loi μ , et admettant un moment d'ordre 2.

Théorème 1.50. *L'algorithme*

$$u^{k+1} = u^k - A^k \nabla_u j(u^k, \xi^k)$$

où $A^k = \left((k+1)B + QB^{-1} \mathbb{E}[(u^0 - u^*)^{\otimes 2}] \right)^{-1}$ atteint la vitesse de convergence optimale $B^{-1}QB^{-1}/n$ au moins dans le cas quadratique :

$$j(u, \xi) = \frac{1}{2} u^\top B u - b u + \xi u, \quad \mathbb{E}[\xi] = 0, \quad \mathbb{E}[\xi^{\otimes 2}] = Q.$$

On observe que la vitesse de convergence optimale est obtenue avec la méthode du second ordre, mais que le gain par rapport à la méthode avec pas scalaire est faible. Ceci vient du fait que, bien réglé, un algorithme de gradient stochastique permet d'atteindre la plus petite valeur propre de la borne de Cramer-Rao.

1.4.4 Amélioration asymptotique de l'algorithme de gradient stochastique

Dans [27], B.T. Poljak et A. Juditsky proposent une méthode permettant d'améliorer asymptotiquement un algorithme de gradient stochastique. L'idée consiste à laisser les trajectoires explorer un domaine plus large en ralentissant la décroissance vers 0 du pas, mais de réduire la variance en moyennant les trajectoires. Ils donnent pour ce nouvel algorithme un résultat de convergence en probabilité, et montrent que ce type d'algorithme permet d'atteindre le meilleur taux de convergence possible. L'avantage de l'algorithme de gradient stochastique moyenné est qu'il permet d'atteindre la borne de Cramer-Rao avec des pas scalaires. De plus, la robustesse sur le choix du pas est bien meilleure qu'avec le résultat de [17], où le réglage doit être très pointu pour atteindre la plus petite valeur propre de la borne de Cramer-Rao.

On suppose que l'on cherche à minimiser une fonction $J(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, supposée différentiable. On note u^* ce minimum. Pour résoudre ce problème, on utilise un algorithme de gradient stochastique moyenné de la forme :

$$u^t = u^{t-1} - \gamma^t \varphi(y^t), \quad y^t = \nabla J(u^{t-1}) + \xi^t \quad \text{où } \xi^t \text{ est un bruit aléatoire,}$$

$$\bar{u}^t = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} u^i, \quad u^0 \in \mathbb{R}^n.$$

On suppose

- (H1) J est deux fois continûment différentiable, et $lI \leq \nabla^2 J(u) \leq LI$ pour tout u , avec $l > 0$, $L > 0$ et I la matrice identité ;
- (H2) $(\xi^t)_{t \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $\mathbb{E}[\xi^1] = 0$;
- (H3) on a $|\varphi(u)| \leq K_1(1 + |u|)$;
- (H4) la fonction $\psi(u) = \mathbb{E}[\varphi(u + \xi^1)]$ est définie et admet une dérivée en 0, $\psi(0) = 0$ et $u^\top \psi(u) > 0$ pour tout $u \neq 0$; de plus, il existe ε , $K_2 > 0$ et $0 < \beta \leq 1$, telles que

$$|\psi'(0)u - \psi(u)| \leq K_2|u|^{1+\beta}, \quad \text{pour } |u| < \varepsilon ;$$

- (H5) la fonction $\chi(u) = \mathbb{E}[\varphi(u + \xi^1)\varphi(u + \xi^1)^\top]$ est définie et continue en zéro ;
- (H6) la matrice $-G = -\psi'(0) \nabla^2 J(u^*)$ est Hurwitz, i.e. $\text{Re } \lambda_i(G) > 0$, $i = 1, \dots, n$;
- (H7) on a $(\gamma^t - \gamma^{t+1})/\gamma^t = o(\gamma^t)$, $\gamma^t > 0 \quad \forall t$;

$$\sum_{t=1}^{+\infty} (\gamma^t)^{(1+\beta)/2} t^{-1/2} < +\infty.$$

On a alors

Théorème 1.51. *On suppose que (H1) – (H7) sont vérifiées. Alors $\bar{u}^t \rightarrow u^*$ presque sûrement et $\sqrt{t}(\bar{u}^t - u^*) \rightarrow N(0, V)$, i.e., la distribution de l'erreur normalisée $\sqrt{t}(\bar{u}^t - u^*)$ est asymptotiquement une loi normale, de moyenne zéro et de matrice de covariance*

$$V = G^{-1} \chi(0)(G^{-1})^\top.$$

Supposons que ξ^1 possède une densité q_ξ continûment différentiable et qu'il existe une matrice d'information de Fischer finie

$$f(q_\xi) = \int (\nabla q_\xi \nabla^\top q_\xi) q_\xi^{-1} dy.$$

Si l'on choisit la fonction φ selon la densité q_ξ

$$\varphi(u) = -f^{-1}(q_\xi) \nabla \ln q_\xi(u),$$

on obtient alors

$$V = \nabla^2 J(u^*)^{-1} f(q_\xi)^{-1} \nabla^2 J(u^*)^{-1}.$$

Comparons l'algorithme de gradient stochastique moyenné à l'algorithme d'optimisation stochastique asymptotiquement optimal

$$u^t = u^{t-1} - t^{-1} B \varphi(y^t),$$

où

$$B = \nabla^2 J(u^*)^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi(y) = -f^{-1}(q_\xi) \nabla \ln q_\xi(y).$$

Dans cet algorithme, on utilise la valeur de la matrice $\nabla^2 J(u^*)$. Il existe des versions implémentables de cet algorithme, dans lesquelles un estimateur de la matrice est utilisé à la place de la vraie valeur. On montre que l'algorithme de gradient stochastique moyenné atteint le même taux de convergence que l'algorithme optimal non implémentable.

1.4.5 Analyse qualitative d'un algorithme de gradient stochastique

On souhaite résoudre le problème

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u).$$

On suppose que ce problème admet une solution unique u^* . On s'intéresse à la situation pour laquelle la valeur exacte du gradient est difficile à évaluer, et où l'on ne dispose donc que d'un estimateur du gradient, obtenu par exemple par simulation. La qualité de l'estimateur (biais, variance,...) peut dépendre de la valeur de u en lequel il est évalué, mais elle peut aussi dépendre du temps de calcul que l'on est prêt à accepter pour faire la simulation. Nous présentons brièvement ici une analyse qualitative de cet estimateur, menée par P. L'Écuyer et G. Yin dans [24]. Lors de la résolution numérique de ce problème par un algorithme de type gradient stochastique, cette analyse va permettre d'établir un compromis entre le biais et la variance de l'estimateur.

On considère l'algorithme

$$u^{k+1} = u^k + \varepsilon^k \psi^k,$$

où ψ^k est un estimateur du gradient évalué en u^k et $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$. On définit le biais conditionnel et la variance de l'estimateur du gradient à l'itération k par

$$b_k = \mathbb{E}^k[\psi^k] - J'(u^k)$$

et

$$V_k = \mathbb{E} \left[\|\psi^k - \mathbb{E}^k[\psi^k]\|^2 \right]$$

respectivement, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Contrairement à V_k , b_k est une variable aléatoire. Remarquons également que V_k est la trace de la matrice de covariance $\mathbb{E}[(\psi^k - \mathbb{E}^k[\psi^k])(\psi^k - \mathbb{E}^k[\psi^k])^\top]$.

Pour simplifier les notations, nous allons supposer que $u^* = 0$. Les hypothèses suivantes permettent d'établir la convergence presque sûre de $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

(H1) $\varepsilon^k = k^{-\gamma}$ où $1/2 < \gamma \leq 1$; donc $\mathbb{E}[\|u^1\|^2] < +\infty$;

(H2) il existe des constantes $\beta > 0$ et $K_\beta \geq 0$ telles que $\gamma + \beta > 1$ et pour tout k ,

$$\|b_k\| \leq K_\beta k^{-\beta} \quad \text{p.s. et} \quad \mathbb{E}[\|b_k\|^2] \leq K_\beta^2 k^{-2\beta};$$

(H3) il existe des constantes $\delta \in \mathbb{R}$ et $K_\delta \geq 0$ telles que $2\gamma + \delta > 1$ et pour tout k

$$V_k = \mathbb{E} \left[\|\psi^k - \mathbb{E}^k[\psi^k]\|^2 \right] \leq K_\delta k^{-\delta};$$

(H4) J' est continue;

(H5) l'ODE $\dot{u} = -J'(u)$ a une solution unique pour chaque condition initiale et $J'(u) = 0$ a une racine unique, u^* ;

(H6) il existe une constante finie $K > 0$ telle que $\|J'(u)\| \leq K(1 + \|u\|)$ et il existe $\epsilon > 0$ et une matrice H telle que $J'(u) = Hu + O(\|u\|^2)$ pour $\|u\| \leq \epsilon$; toutes les valeurs propres de H ont des parties réelles positives; notons $\lambda_{\min} > 0$ le minimum de ces parties réelles.

La condition (H1) donne une forme explicite pour ε^k . (H2) force le biais à décroître en $O(k^{-\beta})$. Dans (H3), δ peut être positif, nul ou négatif, ce qui correspond à une variance qui (asymptotiquement) décroît, reste bornée ou augmente avec k respectivement. La condition $2\gamma + \delta > 1$ impose à la variance de ne pas augmenter trop vite. Enfin, (H6) requiert que la fonction J doit être quadratique près de l'optimum. En dimension 1, ceci signifie que la dérivée seconde doit être bornée au voisinage de 0; ceci signifie également que J' doit croître au plus linéairement.

Proposition 1.52. *Sous les hypothèses (H1)–(H6), $u^k \rightarrow u^*$ p.s. lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient grâce à la méthode de l'ODE développée dans Kushner et Clark [23]. \square

Le théorème suivant montre comment régler un algorithme de gradient stochastique de façon optimale afin d'assurer un compromis entre le biais et la variance de l'estimateur. Plus précisément, P. L'Écuyer et G. Yin montrent que si $\|b_k\| = O(k^{-\beta})$ p.s., $V_k = O(k^{-\delta})$ et $\varepsilon^k = k^{-\gamma}$, pour des constantes réelles β, δ , et $1/2 < \gamma \leq 1$, et si certaines conditions techniques sur J sont satisfaites alors

$$\mathbb{E}[\|u^k\|^2] = O(k^{-\kappa})$$

où $\kappa = \min(2\beta, \gamma + \delta)$.

Théorème 1.53. *Sous les hypothèses (H1)–(H6), avec $\gamma < 1$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|u^{k+1}\|^2] &\leq \frac{K_\beta^2}{\lambda_{\min}^2} k^{-2\beta} + \frac{3K_\delta^2}{2\lambda_{\min}^2} k^{-\gamma-\delta} + O(k^{-2\beta-1} + k^{-\gamma-\delta-1}) \\ &= O(k^{-\min(2\beta, \gamma+\delta)}) = O(k^{-\kappa}). \end{aligned}$$

Cette estimation reste valable pour $\gamma = 1$, à condition que

$$\lambda_{\min} > \max\left(\beta, (1 + \delta)/2\right).$$

Toujours pour des raisons de simplifications, nous allons également supposer que $\gamma = 1$ (comme κ est une fonction croissante de γ , on prend le plus grand γ possible, i.e. $\gamma = 1$). Lorsque $1 + \delta < 2\beta$, on observe que le biais diminue plus vite et devient asymptotiquement négligeable comparé à la variance. Le cas $2\beta < 1 + \delta$ correspond à une situation pour laquelle le biais est le facteur dominant. Enfin, si $2\beta = 1 + \delta$, le biais et le bruit contribuent chacun à la distribution asymptotique.

1.5 Optimisation sous contrainte en espérance

Étant donné $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, U^{ad} un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert \mathcal{U} et C un cône convexe fermé d'un espace de Hilbert \mathcal{C} . Dans ([13]), G. Cohen et J.-C. Culioli proposent un algorithme pour résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u) &= \mathbb{E}[j(u, \xi)] \\ \text{s.c. } \Theta(u) &= \mathbb{E}[\theta(u, \xi)] \in -C. \end{aligned}$$

On suppose que j et θ sont localement lipschitziennes sur U^{ad} pour tout ξ , $j(u, \cdot)$ et $\theta(u, \cdot)$ sont mesurables pour tout $u \in U^{\text{ad}}$, J est strictement convexe sur U^{ad} , Θ est C -convexe et le

Lagrangien associé à ce problème, $L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle$ admet un point selle (u^*, λ^*) . Cet algorithme, de type Arrow-Hurwicz stochastique, tient explicitement compte de la forme de la contrainte, en ne faisant intervenir à chaque itération, qu'une réalisation d'un sous-gradient de θ au point (u^k, ξ^{k+1}) pour la remise à jour des variables primales :

- soit $u^0 \in U^{\text{ad}}$ et $\lambda^0 \in C'$, ainsi que deux σ -suites $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- connaissant u^k et λ^k , on tire ξ^{k+1} suivant la loi \mathbb{P} , on calcule $r^k \in \partial_u j(u^k, \xi^{k+1})$, $\vartheta^k \in \partial_u \theta(u^k, \xi^{k+1})$ et on remet à jour u^{k+1} et λ^{k+1} par

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \Pi_{U^{\text{ad}}} \left[u^k - \varepsilon^k (r^k + (\vartheta^k)^\top \lambda^k) \right], \\ \lambda^{k+1} &= \Pi_{C'} \left[\lambda^k + \rho^k \theta(u^{k+1}, \xi^{k+1}) \right], \end{aligned}$$

où $\Pi_{U^{\text{ad}}}$ et $\Pi_{C'}$ sont respectivement les projections orthogonales sur U^{ad} et C' , cône conjugué de C .

Les auteurs démontrent ensuite la convergence de l'algorithme dans le sens où les variables primales $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et duales $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendrées sont bornées et la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers u^* .

Théorème 1.54. *En plus des hypothèses de mesurabilité ci-dessus, on suppose que le Lagrangien L admet un point selle, noté (u^*, λ^*) , et que*

- i) J est strictement convexe sur U^{ad} ;
- ii) pour tout ξ , $j(\cdot, \xi)$ est localement lipschitzienne sur U^{ad} ;
- iii) pour tout ξ , $\theta(\cdot, \xi)$ est localement lipschitzienne sur U^{ad} , régulièrement sous-différentiable, de sous-gradient par rapport à u borné par ρ (uniformément en ξ), et sous-lipschitzienne de constantes uniformes $\nu > 0$ et $\mu > 0$:

$$\forall \xi \in \Omega, \forall u, v \in U^{\text{ad}}, \quad \|\theta(u, \xi) - \theta(v, \xi)\| \leq \nu \|u - v\| + \mu;$$

- iv) Θ est C -convexe et lipschitzienne de constante τ ;
- v) il existe des constantes positives α et β telles que

$$\forall \xi \in \Omega, \forall u \in U^{\text{ad}}, \forall r \in \partial_u j(u, \xi), \quad \|r\| \leq \alpha \|u - u^*\| + \beta;$$

- vi) $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des σ -suites et la suite $(\varepsilon^k / \rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est monotone au sens large ;
- vii) il existe des constantes positives γ et δ positives telles que

$$\forall u \in U^{\text{ad}}, \quad \mathbb{E} \left[\theta(u, \xi) - \Theta(u) \right]^2 < \gamma \|u - u^*\|^2 + \delta.$$

Alors, presque sûrement, la suite (u^k, λ^k) engendrée est bornée, et $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers u^* . Si J est fortement convexe, alors $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers u^* .

Ce résultat a très largement motivé notre stratégie de résolution numérique, puisque l'on peut toujours réécrire une contrainte en probabilité sous la forme d'une contrainte en espérance.

Remarque 1.55. Concernant les problèmes convexes d'optimisation stochastique sous contrainte en espérance convexe, on peut également consulter [25].

1.6 En résumé

Tout au long de ce chapitre de rappels, on observe que les techniques de gradient stochastique, sur lesquelles repose notre stratégie numérique, sont en fait une combinaison de l'idée de la méthode de Monte-Carlo avec la procédure itérative des méthodes du gradient en optimisation. La méthode de Monte-Carlo nous permet "d'optimiser tout en calculant l'espérance", et d'éviter ainsi des calculs d'espérances, qui correspondent souvent en pratique à des calculs d'intégrales multiples, difficiles à effectuer. Grâce à la théorie de la dualité, nous transformons, quand cela est possible, un problème de minimisation en un problème de point selle du Lagrangien (ou du Lagrangien augmenté). Ce problème de point selle est alors remplacé, lors du déroulement de l'algorithme, par une alternance de remises à jour des variables primales et duales. On obtient ainsi un algorithme de type Arrow-Hurwicz stochastique, qui revient à une alternance de pas de gradient projeté dans l'espace primal et dans l'espace dual.

Chapitre 2

L'état de l'art sur les contraintes en probabilité

Depuis le milieu des années 1990, différents axes de recherche ont été développés autour des problèmes d'optimisation sous contrainte en probabilité. En 1995, S. Uryasev s'est intéressé au calcul du gradient d'une fonction probabilité. Dans [32], il donne une représentation possible de la dérivée de la fonction probabilité en proposant une formule générale du gradient d'une intégrale pour laquelle l'ensemble d'intégration est défini par des inégalités. Un an plus tôt, P. Kall et S.W. Wallace se sont intéressés à la propriété de convexité de l'ensemble admissible d'un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité (l'hypothèse centrale sur laquelle repose cette propriété est la quasi-concavité de la loi de probabilité). Mais pour R. Henrion et W. Römisch, la non convexité des ensembles admissibles associés à une contrainte en probabilité n'est rien, comparée aux difficultés engendrées par l'absence de connexité de ces mêmes ensembles ; ils se sont donc penchés sur les questions de structure et de stabilité des problèmes d'optimisation sous contraintes en probabilité. En 2000, R. Henrion donne, par exemple, un résultat de connexité pour une contrainte en probabilité. Enfin, dans le domaine de la finance, certaines mesures de risque (*conditional value-at-risk ...*) apparaissent comme un moyen possible pour traiter les contraintes en probabilité, ces dernières s'écrivant plutôt dans ce contexte comme les quantiles d'une fonction de répartition.

2.1 Dérivée d'une fonction probabilité

La dérivée d'une fonction probabilité a plusieurs représentations équivalentes : elle peut être représentée comme une intégrale sur une surface, une intégrale sur un volume, ou une somme d'intégrales sur un volume et sur une surface ; elle peut aussi être calculée en utilisant des dérivées faibles sur les mesures de probabilité ou bien encore des espérances conditionnelles. Dans [32], S. Uryasev s'intéresse à la première de ces trois représentations.

On considère une fonction $g(u, \xi) \in \mathbb{R}^k$, par exemple des pertes associées à la décision $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et un vecteur aléatoire $\xi \in \mathbb{R}^m$. En finance, le vecteur u peut représenter un portefeuille, \mathcal{U} étant l'ensemble des portefeuilles disponibles (soumis à différentes contraintes). Le vecteur ξ représente les incertitudes, par exemple les paramètres du marché, qui peuvent affecter l'objectif. Pour chaque u , la fonction objectif $g(u, \xi)$ est une variable aléatoire ayant une distribution dans \mathbb{R} induite par celle de ξ . La distribution de probabilité sous-jacente de ξ sera supposée avoir une densité, que l'on notera $q(u, \xi)$.

Soit la fonction

$$F(u) = \int_{g(u,\xi) \leq 0} q(u, \xi) d\xi \quad (2.1)$$

définie sur \mathbb{R}^n , où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

$$F(u) = \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq 0\},$$

une fonction de probabilité où $\xi \in \mathbb{R}^m$ a une densité de probabilité $q(u, \xi)$ qui dépend d'un paramètre $u \in \mathbb{R}^n$.

On divise l'ensemble des contraintes $K \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, \dots, k\}$ en deux sous-ensembles K_1 et K_2 . Sans perte de généralité, on suppose que

$$K_1 = \{1, \dots, l\} \quad \text{et} \quad K_2 = \{l+1, \dots, k\}.$$

Remarque 2.1. Le choix des sous-ensembles K_1 et K_2 est, a priori, arbitraire. Par la suite, nous verrons en fait que la représentation du gradient de (2.1) obtenue par cette méthode dépend de ce choix. En pratique, on choisira donc K_1 et K_2 de sorte que la représentation du gradient soit la plus simple possible; ce choix se révélera d'autant plus délicat que le nombre d'inégalités définissant l'ensemble d'intégration est important.

On note

$$\mu(u) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m : g(u, \xi) \leq 0 \right\} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m : g_l(u, \xi) \leq 0, \quad 1 \leq l \leq k \right\},$$

et $\partial \mu(u)$ la frontière de $\mu(u)$. On désignera donc par $\partial_i \mu(u)$ une partie de la surface qui correspond à $g_i(u, \xi)$, i.e. :

$$\partial_i \mu(u) = \mu(u) \cap \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m : g_i(u, \xi) = 0 \right\}.$$

On utilise également les notations

$$g_l(u, \xi) = \begin{pmatrix} g_1(u, \xi) \\ \vdots \\ g_l(u, \xi) \end{pmatrix}, \quad g(u, \xi) = g_{1k}(u, \xi) \quad \text{et} \quad \nabla_\xi g(u, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(u, \xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial g_k(u, \xi)}{\partial \xi_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1(u, \xi)}{\partial \xi_m} & \dots & \frac{\partial g_k(u, \xi)}{\partial \xi_m} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on rappelle que la divergence pour la matrice H , $n \times m$, composée des éléments h_{ji} est définie par

$$\text{div}_\xi H = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_{1i}}{\partial \xi_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_{ni}}{\partial \xi_i} \end{pmatrix}.$$

S. Uryasev propose alors de représenter la dérivée de l'intégrale (2.1) comme la somme d'une intégrale sur le volume $\mu(u)$ et d'intégrales sur les surfaces $\partial_i \mu(u)$:

$$\begin{aligned} \nabla_u F(u) &= \int_{\mu(u)} \nabla_u q(u, \xi) + \text{div}_\xi \left(q(u, \xi) H_l(u, \xi) \right) d\xi \\ &\quad - \sum_{i=l+1}^k \int_{\partial_i \mu(u)} \frac{q(u, \xi)}{\|\nabla_\xi g_i(u, \xi)\|} \left[\nabla_u g_i(u, \xi) + H_l(u, \xi) \nabla_\xi g_i(u, \xi) \right] d\xi, \quad (2.2) \end{aligned}$$

où la fonction $H_l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifie l'équation

$$H_l(u, \xi) \nabla_\xi g_{1l}(u, \xi) + \nabla_u g_{1l}(u, \xi) = 0. \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) peut avoir plusieurs solutions et on en choisit alors une arbitrairement, différentiable par rapport à la variable ξ .

Remarque 2.2. Rappelons que le choix de K_1 et de K_2 est arbitraire. Lorsque l'ensemble K_1 est vide, la matrice H_l n'apparaît pas dans la formule générale du gradient ; cette dernière se réduit alors à l'intégrale sur la surface. Lorsque l'ensemble K_2 est vide, on obtient une intégrale sur le volume. Il y a donc plusieurs représentations équivalentes du gradient correspondant à différents ensembles K_1 et K_2 et solutions de (2.3). Du point de vue numérique, un inconvénient potentiel de cette formulation de la dérivée est que, dans la mesure où les choix de K_1 , K_2 , et des solutions de (2.3) sont arbitraires, il semble difficile d'évaluer, a priori, la difficulté liée aux calculs de ces deux intégrales.

L'équation (2.3) peut être résolue explicitement. En général, cette équation a plusieurs solutions. La matrice

$$-\nabla_u g_{1l}(u, \xi) \left(\nabla_\xi^T g_{1l}(u, \xi) \times \nabla_\xi g_{1l}(u, \xi) \right)^{-1} \nabla_\xi^T g_{1l}(u, \xi)$$

est solution de (2.3). Très souvent, l'équation (2.3) peut être résolue à l'aide d'un changement de variables. Supposons qu'il existe un changement de variables

$$\xi = \gamma(u, z)$$

qui élimine le vecteur u de la fonction $g(u, \xi)$ définissant l'ensemble d'intégration ; autrement dit, la fonction $g(u, \gamma(u, z))$ ne dépend plus de la variable u . Notons $\gamma^{-1}(u, \xi)$ la fonction inverse définie par l'équation

$$\gamma^{-1}(u, \gamma(u, z)) = z.$$

Alors la matrice

$$H(u, \xi) = \nabla_u \gamma(u, z) \Big|_{z=\gamma^{-1}(u, \xi)}$$

est solution de (2.3). En effet, le gradient de la fonction $\gamma(u, \xi(u, z))$ par rapport à u vaut 0 ; par conséquent

$$0 = \nabla_u g_{1l}(u, \gamma(u, z)) = \nabla_u \gamma(u, z) \nabla_\xi g_{1l}(u, \xi) \Big|_{\xi=\gamma(u, z)} + \nabla_u g_{1l}(u, \xi) \Big|_{\xi=\gamma(u, z)}$$

et la fonction $\nabla_u \gamma(u, z) \Big|_{z=\gamma^{-1}(u, \xi)}$ est une solution de (2.3).

Illustrons cette approche sur un exemple, toujours extrait de [32]. On souhaite calculer le gradient de

$$F(u) = \int_{\substack{b(\xi) \leq u \\ \xi_i \geq \theta, i=1, \dots, m}} q(\xi) d\xi, \quad (2.4)$$

où $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta > 0$, $b(\xi) = \sum_{i=1}^m \xi_i^\alpha$. En reprenant les notations précédentes, on a

$$g(u, \xi) = \begin{pmatrix} b(\xi) - u \\ \theta - \xi_1 \\ \vdots \\ \theta - \xi_m \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F(u) = \int_{g(u, \xi) \leq 0} q(\xi) d\xi = \int_{\mu(u)} q(\xi) d\xi.$$

On commence par diviser l'ensemble des contraintes en deux sous-ensembles K_1 et K_2 . On considère par exemple le cas où $l = 1$, i.e., $K_1 = \{1\}$ et $K_2 = \{2, \dots, m+1\}$. En reprenant la formule générale (2.2), le gradient $\nabla_u F(u)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \nabla_u F(u) &= \int_{\mu(u)} \left[\nabla_u q(\xi) + \operatorname{div}_\xi (q(\xi) H_1(u, \xi)) \right] d\xi \\ &\quad - \sum_{i=2}^{m+1} \int_{\partial_i \mu(u)} \frac{q(\xi)}{\|\nabla_\xi g_i(u, \xi)\|} \left[\nabla_u g_i(u, \xi) + H_1(u, \xi) \nabla_\xi g_i(u, \xi) \right] d\xi, \end{aligned}$$

où la matrice $H_1(u, \xi)$ vérifie l'équation (2.3). Déterminons donc une solution de l'équation (2.3). Comme

$$\nabla_\xi g_1(u, \xi) = \alpha \begin{pmatrix} \xi_1^{\alpha-1} \\ \vdots \\ \xi_m^{\alpha-1} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \nabla_u g_1(u, \xi) = -1,$$

une solution $H_1^*(u, \xi)$ de (2.3) est

$$H_1^*(u, \xi) = h(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} (h_1(\xi_1), \dots, h_m(\xi_m)) = \frac{1}{\alpha m} (\xi_1^{1-\alpha}, \dots, \xi_m^{1-\alpha}).$$

Notons

$$(\theta_i \mid \xi) = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m),$$

$$\xi^{-i} = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m), \quad \text{et} \quad b(\theta_i \mid \xi) = \theta^\alpha + \sum_{j=1, j \neq i}^m \xi_j^\alpha.$$

Désignons par $\xi^{-i} \geq \theta$ l'ensemble des inégalités $\xi_j \geq \theta$, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$. Les ensembles $\partial_i \mu(u)$, $i = 2, \dots, m+1$ s'écrivent alors

$$\partial_i \mu(u) = \mu(u) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^m : \xi_i = \theta\} = \{\xi^{-i} \in \mathbb{R}^{m-1} : b(\theta_i \mid \xi) \leq u, \xi^{-i} \geq \theta\}.$$

Pour $i = 2, \dots, m+1$, on a

$$\left(\nabla_\xi g_i(\xi) \right)_j = 0, \quad j = 1 \dots m, j \neq i-1, \quad \left(\nabla_\xi g_i(\xi) \right)_{i-1} = -1, \quad \text{et} \quad \|\nabla_\xi g_i(\xi)\| = 1.$$

La fonction $q(\xi)$ et les fonctions $g_i(\xi)$, $i = 2, \dots, m+1$ ne dépendent pas de u , par conséquent,

$$\nabla_u q(\xi) = 0, \quad \text{et} \quad \nabla_u g_i(\xi) = 0, \quad i = 2, \dots, m+1;$$

et on peut ainsi simplifier l'écriture de $\nabla_u F(u)$:

$$\begin{aligned} \nabla_u F(u) &= \int_{\mu(u)} \operatorname{div}_\xi (q(\xi) h(\xi)) d\xi - \sum_{i=2}^{m+1} \int_{\partial_i \mu(u)} \frac{q(\xi)}{\|\nabla_\xi g_i(\xi)\|} h(\xi) \nabla_\xi g_i(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mu(u)} \operatorname{div}_\xi (q(\xi) h(\xi)) d\xi - \sum_{i=2}^{m+1} h_{i-1}(\theta) \int_{\partial_i \mu(u)} q(\xi) d\xi \\ &= \int_{\substack{b(\xi) \leq u \\ \xi_i \geq \theta, i=1, \dots, m}} \operatorname{div}_\xi (q(\xi) h(\xi)) d\xi + \sum_{i=1}^m \frac{\theta^{1-\alpha}}{\alpha m} \int_{\substack{b(\xi) \leq u \\ \xi^{-i} \geq \theta}} q(\theta_i \mid \xi) d\xi^{-i}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\operatorname{div}_\xi (q(\xi) h(\xi)) = h(\xi) \nabla_\xi q(\xi) + q(\xi) \operatorname{div}_\xi (h(\xi)) = \frac{1}{\alpha m} \sum_{i=1}^m \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_i} \xi_i^{1-\alpha} + q(\xi) \frac{1-\alpha}{\alpha m} \sum_{i=1}^m \xi_i^{-\alpha},$$

on obtient finalement la représentation du gradient de (2.4) suivante :

$$\nabla_u F(u) = \int_{\substack{b(\xi) \leq u \\ \xi_i \geq \theta, i=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^{-\alpha}}{\alpha m} \left[\xi_i \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_i} + (1 - \alpha)q(\xi) \right] d\xi + \frac{\theta^{1-\alpha}}{\alpha m} \sum_{i=1}^m \int_{\substack{b(\xi|\xi) \leq u \\ \xi^{-i} \geq \theta}} q(\theta_i | \xi) d\xi^{-i}.$$

Cette formule est valable pour n'importe quelle fonction $q(\xi)$ suffisamment régulière.

La démarche que nous venons de présenter ne nous semble pas très intuitive, et conduit à une formulation de la dérivée relativement complexe. De plus, comme nous l'avons déjà fait remarquer, la représentation du gradient que l'on obtient dépend des choix faits pour K_1 et K_2 : il faut donc choisir ces deux sous-ensembles de sorte que la représentation du gradient soit la plus simple possible. Or, dès que le nombre d'inégalités définissant l'ensemble d'intégration augmente, ce choix devient de plus en plus délicat ; et l'on risque alors de devoir manipuler des représentations plus ou moins compliquées du gradient. D'un point de vue numérique, cette approche ne semble donc effectivement applicable que si l'ensemble d'intégration n'est défini que par un nombre limité d'inégalités.

2.2 Convexité de l'ensemble admissible

Dans [22], P. Kall et S.W. Wallace considèrent des contraintes de la forme

$$\mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq 0\} \geq p.$$

L'ensemble admissible associé est $B(p) = \{u \mid \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq 0\} \geq p\}$. En général, $B(p)$ n'est pas convexe même si $\{u \mid g(u, \xi) \leq 0\}$ est convexe $\forall \xi$.

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 2.3. Une mesure de probabilité \mathbb{P} est dite quasi-concave si pour tout ensemble convexe $S_i \in F, i = 1, 2, \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}\{\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2\} \geq \min(\mathbb{P}\{S_1\}, \mathbb{P}\{S_2\}).$$

Définition 2.4. Une mesure de probabilité \mathbb{P} est dite log-concave si pour tout ensemble convexe $S_i \in F, i = 1, 2, \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}\{\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2\} \geq \mathbb{P}^\lambda\{S_1\} + \mathbb{P}^{1-\lambda}\{S_2\}.$$

Sous certaines hypothèses, on peut assurer la convexité et la fermeture de $B(p)$:

Proposition 2.5. Si $g(\cdot, \cdot)$ est conjointement convexe en (u, ξ) et si la mesure de probabilité \mathbb{P} est quasi-concave alors $B(p)$ est convexe $\forall p \in [0, 1]$.

Proposition 2.6. Si $g : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue alors $B(p)$ est fermé.

Proposition 2.7. Considérons le problème

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U^{\text{ad}}} \mathbb{E}_{\tilde{\xi}}[c^\top(\tilde{\xi})u] \\ \text{s.c. } & \mathbb{P}\{T(\xi)u \geq h(\xi)\} \geq p. \end{aligned}$$

Supposons que $\tilde{\xi}$ ait une distribution discrète finie telle que $\mathbb{P}\{\xi = \xi^j\} = p_j$ pour $j = 1, \dots, r$ et avec $p_j > 0 \forall j$. Alors pour $p > 1 - \min_{j \in \{1, \dots, r\}} p_j$, l'ensemble admissible

$$B(p) = \left\{ u \mid \mathbb{P}\{T(\xi)u \geq h(\xi)\} \geq p \right\}$$

est convexe.

Les démonstrations de ces trois propositions sont données dans [22].

Dans le cas d'une mesure de probabilité définie sur \mathbb{R}^k , et admettant une densité q , les auteurs rappellent également les relations suivantes :

$$q \text{ log-concave} \Leftrightarrow \mathbb{P} \text{ log-concave} \Rightarrow \mathbb{P} \text{ quasi-concave} \Rightarrow q^{-1/k} \text{ convexe}.$$

Remarque 2.8. q est log-concave si le logarithme de q est une fonction concave.

Supposons par exemple que la contrainte s'écrive

$$\mathbb{P}\{T(\xi)u \geq h(\xi)\} \geq p.$$

Dans le cas de distributions continues, supposons que $T(\xi) = T$ (constante); deux situations favorables peuvent alors se présenter :

- si h est la fonction identité et si la fonction de répartition de ξ est quasi-concave alors l'ensemble admissible est convexe fermé (notons que si $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition étant monotone est quasi-concave);
- si $\xi \in \mathbb{R}$, et si l'inverse de la fonction de répartition, ψ^{-1} , peut se calculer facilement, alors, dans ce cas particulier, toute contrainte en probabilité se ramène à une contrainte linéaire. En effet

$$\mathbb{P}\{Tu \geq h(\xi)\} = \psi(Tu) \geq p \Leftrightarrow Tu \geq \psi^{-1}(p), \text{ où } \psi^{-1}(p) = \min \left\{ \eta \in \mathbb{R} \mid \psi(\eta) \geq p \right\}.$$

Les principales hypothèses faites par P. Kall et S.W. Wallace, nous semblent, en pratique, être des hypothèses assez fortes, notamment la propriété de convexité conjointe de g en (u, ξ) . En effet, il existe en pratique de nombreux cas où u et ξ se multiplient, comme dans le problème de finance que nous présentons au chapitre 5, ou, dans un tout autre domaine, lorsque l'on modélise la panne d'un actionneur (l'action de l'aléa vient alors tuer le contrôle); et dans toutes ces situations, la propriété de convexité conjointe de g en (u, ξ) n'est pas réaliste. De plus, une autre technique efficace pour pallier la non convexité d'un problème d'optimisation est le recours au Lagrangien augmenté, et ce, afin d'augmenter les chances que le point selle du problème existe. Mais dans notre cas, on sait aussi que le mélange de l'espérance (traité comme dans le gradient stochastique) et des non linéarités du Lagrangien augmenté pose des problèmes; ce sera l'objet du chapitre 6 de la partie (III) de ce mémoire.

2.3 Connexité de l'ensemble admissible

À la fois pour les applications numériques et pour les investigations théoriques (stabilité), les propriétés de convexité de l'ensemble admissible d'un problème d'optimisation sont des résultats de base. En se limitant aux solutions stationnaires d'un problème, la convexité des ensembles admissibles n'est pas un prérequis indispensable à l'application de méthodes d'optimisation non linéaire, comme par exemple la programmation quadratique séquentielle. Des ensembles admissibles non connexes engendrent en revanche de sérieuses difficultés comparées à la simple violation de la convexité. Les résultats de cette section sont extraits de [21].

On considère $T \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble arbitraire et on note $\mathcal{C}(T)$ l'ensemble des fonctions définies de T dans \mathbb{R} continues.

Définition 2.9. Une fonction $g : \mathcal{U} \times \mathcal{C}(T_1) \rightarrow \mathcal{C}(T_2)$ définie pour des ensembles arbitraires \mathcal{U} et $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}$ est min stable par rapport à \mathcal{U} si pour tous $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$, il existe $u^* \in \mathcal{U}$ tels que

$$g(u^*, y)(t) \leq \min \left(g(u^1, y)(t), g(u^2, y)(t) \right) \quad \forall y \in \mathcal{C}(T_1), \forall t \in T_2.$$

Considérons l'ensemble

$$M = \left\{ u \in \mathcal{U} \mid \mathbb{P}\{g(u, Y(\xi, \cdot)) \leq 0\} \geq p \right\}, \quad (2.5)$$

où \mathcal{U} est un espace de Banach, $g : \mathcal{U} \times \mathcal{C}(T_1) \rightarrow \mathcal{C}(T_2)$, $Y : \Omega \times T_1 \rightarrow \mathbb{R}$ est un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $p \in [0, 1]$ un niveau de probabilité. Le premier signe d'inégalité dans (2.5) doit être compris dans le sens de l'ordre partiel sur $\mathcal{C}(T_2)$ défini point par point. On suppose que $Y(\xi, \cdot) \in \mathcal{C}(T_1)$ pour tout $\xi \in \Omega$ et que la fonction $\xi \mapsto g(u, Y(\xi, \cdot))(t)$ est mesurable par rapport à \mathcal{A} et par rapport aux sous-ensembles de Borel de \mathbb{R} pour tout $u \in \mathcal{U}$ et pour tout $t \in T_2$ (cette seconde hypothèse est toujours vérifiée dans le cas séparable $g(u, y) = h(u) - y$).

Théorème 2.10. Si $g(\cdot, y)(t)$ est quasi-convexe pour tout $y \in \mathcal{C}(T_1)$ et pour tout $t \in T_2$ et si g est min stable par rapport à \mathcal{U} alors M est connexe.

Un critère plus simple est même donné dans le cas d'une contrainte en probabilité linéaire :

Corollaire 2.11. On considère la contrainte en probabilité linéaire

$$M = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{P}\{Au \geq \xi(\omega)\} \geq p \right\},$$

avec A une matrice $s \times n$ et ξ un vecteur aléatoire de dimension s . Si les lignes de A sont linéairement indépendantes positivement alors M est connexe.

Notons bien qu'aucune hypothèse sur la distribution de ξ n'a été faite.

Illustrons ce résultat sur un exemple, toujours extrait de [21]. On considère le niveau d'eau d'un barrage dont les apports sont aléatoires et sur lequel on peut agir en turbinant pour produire de l'électricité. On fait les hypothèses suivantes :

- (H1) $Y : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est un processus stochastique décrivant le niveau cumulé d'apports (aléatoires) dans le barrage durant l'intervalle $[0, T]$; on suppose que $Y(\xi, \cdot) \in \mathcal{C}([0, T]) \forall \xi \in \Omega$;
- (H2) $u \in \mathcal{U} = L^\infty[0, T]$ est la vitesse (contrôlée) à laquelle on turbine;
- (H3) \bar{l} est le niveau maximum d'eau dans le barrage que l'on est autorisé à atteindre sur l'ensemble de l'intervalle $[0, T]$ avec un niveau de probabilité $p \in [0, 1]$.

En notant $l(t, \xi, u)$ le niveau d'eau dans le barrage à l'instant t , étant données ξ et u , on a

$$l(t, \xi, u) = l_0 + Y(\xi, t) - \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

où l_0 désigne le niveau d'eau initial (en $t = 0$) dans le barrage. La contrainte en probabilité s'écrit alors

$$\mathbb{P}\{l(t, \xi, u) \leq \bar{l}\} \geq p.$$

Comme précédemment, on note M le sous-ensemble des $u \in \mathcal{U}$ vérifiant la contrainte en probabilité ; on a

$$T_1 = T_2 = [0, T], \quad g(u, y)(t) := l_0 - \bar{l} + y(t) - \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Notons que h est séparable par rapport à u et y ; par conséquent l'hypothèse de mesurabilité est satisfaite. On vérifie que $h(\cdot, y)(t)$ est quasi-convexe pour tout $y \in \mathcal{C}([0, T])$ et tout $t \in [0, T]$. Ainsi, pour appliquer le Théorème 2.10, il suffit de vérifier que h est min stable par rapport à \mathcal{U} . Pour cela, on se donne u^1 et $u^2 \in \mathcal{U}$. Alors, en posant

$$u^*(t) := \max(u^1(t), u^2(t)), \quad t \in [0, T],$$

on a $u^* \in \mathcal{U}$ et

$$\int_0^t u^*(\tau) d\tau \geq \max\left(\int_0^t u^1(\tau) d\tau, \int_0^t u^2(\tau) d\tau\right),$$

ce qui démontre la propriété cherchée par définition de h . On peut donc en déduire la connexité de l'ensemble des contrôles admissibles.

2.4 L'aspect mesure de risque

Depuis quelques années en économie, et plus particulièrement en finance, une littérature abondante s'est développée autour des mesures de risque. En finance, la mesure la plus connue, et la plus utilisée dans les établissements financiers est la *value-at-risk* (VaR) : la VaR de la perte $g(u, \xi)$ associée à la décision u , notée $q_u(p)$, est la plus petite quantité q telle que, avec une probabilité au moins égale à p , la perte n'excède pas q . Autrement dit,

$$q_u(p) = \min\left\{q \mid \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq q\} \geq p\right\} = \psi_u^{-1}(p),$$

où ψ_u^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition associée à $g(u, \xi)$. Mais son calcul est difficile et nécessite en pratique des hypothèses relativement fortes et parfois contestées par les faits, comme l'hypothèse de normalité des prix. Ces limites ont amené certains chercheurs, comme S. Uryasev, à proposer d'autres mesures de risque alternatives à la value-at-risk, ayant de "bonnes propriétés mathématiques" (*conditional value-at-risk*, ...).

D'après la définition même de la VaR, un problème d'optimisation sous contrainte de VaR n'est donc rien d'autre qu'un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité : on réécrit la contrainte en probabilité comme une contrainte sur un quantile d'une fonction de répartition. Dans la mesure où il existe des mesures de risque alternatives à la VaR, et possédant de meilleures propriétés mathématiques, une question naturelle s'est alors posée à nous : au lieu de résoudre directement un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité, ne pourrait-on pas résoudre un problème auxiliaire formulé avec une autre mesure de risque plus régulière sur le plan mathématique ; et obtenir au final la solution du problème initial ? C'est l'objet de la première partie de ce mémoire.

2.5 En résumé

Les problèmes d'optimisation sous contraintes en probabilité font l'objet d'un certain nombre de recherches depuis quelques années. Mais la plupart des résultats que l'on trouve dans la littérature ne concernent que certains aspects du sujet, plutôt théoriques, comme le calcul du

gradient de la fonction probabilité, les propriétés de convexité, de connexité, ... L'objectif principal de ce mémoire est de proposer une méthode générale permettant de résoudre ce type de problèmes, basée sur un algorithme de type gradient stochastique, en donnant des résultats aussi bien théoriques que numériques.

Deuxième partie

**Contraintes en probabilité et
mesures de risque**

Chapitre 3

Mesures de risque et de sécurité

La contrainte en probabilité étant une formulation assez naturelle de la notion de risque, une approche possible pour traiter ce type de contraintes consiste à chercher d'autres formulations du risque qui amèneraient à des problèmes mathématiques plus simples. Dans ce chapitre, nous rappelons quelques mesures de risque et de sécurité usuelles basées sur les quantiles et les caractéristiques de la queue de la distribution d'une variable aléatoire X ; puis nous montrons que presque toutes ces mesures peuvent être reformulées simplement à partir de l'espérance de X , notée μ_X , du quantile, $q_X(p)$, de la fonction de répartition ψ_X , d'une espérance conditionnelle, et de l'une de ces mesures de sécurité.

3.1 Les notions d'ordre stochastique

Soit X une variable aléatoire réelle représentant des pertes que l'on cherche à minimiser. Dans la suite de ce chapitre, nous notons ψ_X sa fonction de répartition, qui est croissante et continue à droite :

$$\begin{aligned}\psi_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ \eta &\rightarrow \mathbb{P}\{X \leq \eta\}.\end{aligned}$$

Les résultats de cette section reposent essentiellement sur les définitions et propriétés suivantes.

Propriété 3.1. *Voici quelques propriétés utiles sur l'intégrale et l'inverse d'une fonction :*

- l'intégrale d'une fonction positive est croissante intégrable ;
- l'intégrale d'une fonction croissante est convexe ;
- soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens que f .

Bien que très populaire, le critère “moyenne-variance” ne suffit pas toujours à comparer deux variables aléatoires, et peut même conduire à des aberrations, comme le montrent P. Bernhard et G. Cohen dans [10]. En effet, supposons que l'on souhaite minimiser un coût J pour les décisions u et v , et pour les “états de la nature” ξ_1 et ξ_2 de probabilités égales :

	u	v
ξ_1	0	21
ξ_2	20	21

On a $\mathbb{E}[J(u, \xi)] = 10$ et $\mathbb{E}[J(v, \xi)] = 21$. On prend comme mesure de l'incertitude l'écart-type : $\sigma(J(u, \xi)) = 10$ et $\sigma(J(v, \xi)) = 0$. Alors, si on choisit de minimiser $\mathbb{E}[J] + \alpha \sigma(J)$, avec $\alpha > 0$, la stratégie v devient préférable à la stratégie u dès que $\alpha > 1.1$. Cependant, ce résultat est absurde car la stratégie u est optimale, puisqu'elle a une probabilité 1 d'être optimale (elle est la meilleure pour tout ξ).

Une approche systématique pour assurer cette comparaison consiste à utiliser la notion d'ordre stochastique. Un ordre stochastique peut être vu comme un ordre partiel sur un ensemble de fonctions de répartition cumulées. Il existe plusieurs types d'ordres stochastiques : nous commençons tout d'abord par présenter la dominance stochastique, largement utilisée en économie et en finance pour comparer des variables aléatoires réelles représentant des gains ou des pertes ; puis nous définissons d'autres ordres stochastiques pour des variables aléatoires n -dimensionnelles.

3.1.1 La dominance stochastique à l'ordre 1

Soient X et Y des variables aléatoires réelles, représentant par exemple des pertes.

Définition 3.2. La **dominance stochastique à l'ordre 1 (DS1)** est définie par :

$$X \succeq_{\text{DS1}} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[f(Y)], \quad \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ croissante continue.}$$

La dominance stochastique à l'ordre 1 peut également être caractérisée à l'aide des fonctions de répartition :

Propriété 3.3.

$$X \succeq_{\text{DS1}} Y \Leftrightarrow \psi_X(\eta) \leq \psi_Y(\eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

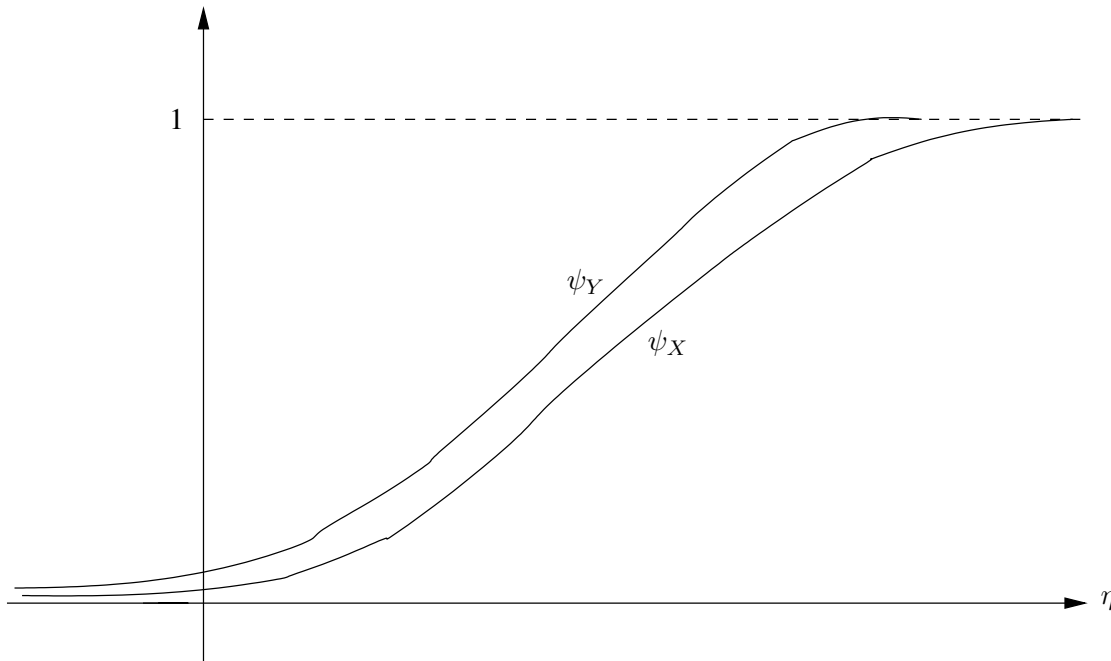


FIG. 3.1 – $X \succeq_{\text{DS1}} Y$

3.1.2 La dominance stochastique à l'ordre 2

X et Y sont toujours des variables aléatoires réelles, représentant par exemple des pertes.

Définition 3.4. La **dominance stochastique à l'ordre 2** (DS2) est définie par :

$$X \succeq_{\text{DS2}} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[f(Y)], \quad \forall f \text{ fonction croissante convexe.}$$

Introduisons la fonction ψ_X^2 qui est la primitive de la fonction de répartition :

Définition 3.5. On définit

$$\begin{aligned} \psi_X^2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \eta &\mapsto \int_{-\infty}^{\eta} \psi_X(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

continue, convexe, positive et croissante.

Propriété 3.6. Il existe deux formulations pour ψ_X^2 :

$$\psi_X^2(\eta) = \mathbb{E}[(\eta - X)^+] = \psi_X(\eta) \left(\eta - \mathbb{E}[X | X \leq \eta] \right).$$

Démonstration.

$$\psi_X^2(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \mathbb{P}\{X \leq \xi\} d\xi = \int_{-\infty}^{\eta} \mathbb{I}_{\{\xi \leq \eta\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X \leq \xi\}}] d\xi = \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\eta} \mathbb{I}_{\{X \leq \xi \leq \eta\}} d\xi \right] = \mathbb{E}[(\eta - X)^+],$$

où $\mathbb{I}_{\{B\}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble B . Et, en se rappelant que, si A est un évènement,

$$\mathbb{E}[X | A] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{I}_A]}{\mathbb{P}\{A\}} \quad \text{si} \quad \mathbb{P}\{A\} \neq 0,$$

on a

$$\mathbb{E}[(\eta - X)^+] = \mathbb{E}[(\eta - X) \mathbb{I}_{\{X \leq \eta\}}] = \eta \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X \leq \eta\}}] - \mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X \leq \eta\}}] = \psi_X(\eta) \left(\eta - \mathbb{E}[X | X \leq \eta] \right).$$

□

On peut alors utiliser ψ_X^2 pour caractériser la dominance stochastique à l'ordre 2 :

Propriété 3.7. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables. Alors

$$\begin{aligned} X \succeq_{\text{DS2}} Y &\Leftrightarrow \psi_X^2(\eta) \leq \psi_Y^2(\eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}[(\eta - X)^+] \leq \mathbb{E}[(\eta - Y)^+], \quad \forall \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 3.8. On a DS1 \Rightarrow DS2.

3.1.3 Le cas des variables aléatoires n -dimensionnelles

Les résultats suivants sont extraits de [4].

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des probabilités sur \mathbb{R}^n et \mathcal{L} un sous-ensemble des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} mesurables.

Définition 3.9. La relation $\leq_{\mathcal{L}}$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$F \leq_{\mathcal{L}} G \quad \text{si} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)F(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)G(dx),$$

$\forall f \in \mathcal{L}$ telle que les intégrales soient bien définies.

Définition 3.10. Soient X et Y deux vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n . $X \leq_{\mathcal{L}} Y$ si leur distribution de probabilité sont telles que $F_X \leq_{\mathcal{L}} F_Y$. En utilisant la notation $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, ceci est équivalent à

$$\mathbb{E} \left[f(X_1, \dots, X_n) \right] \leq \mathbb{E} \left[f(Y_1, \dots, Y_n) \right],$$

$\forall f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{L}$.

Différents exemples d'ensembles \mathcal{L} vont être considérés dans la suite :

- $\{\text{i}\} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}\}$ génère l'ordre intégral croissant sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$;
- $\{\text{cx}\} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ convexe}\}$ génère l'ordre intégral convexe sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$;
- $\{\text{icx}\} = \{\text{i}\} \cap \{\text{cx}\}$, génère l'ordre convexe croissant sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$;
- $\{\text{cxs}\} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ convexe paire}\}$ génère l'ordre convexe symétrique;
- $\{\text{ip}\} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+; f = \prod_{i=1}^n f_i(x_i), f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \in \{\text{i}\}\}$ génère l'ordre partiel produit croissant.

Remarque 3.11. L'ordre intégral croissant correspond en fait à la dominance stochastique d'ordre 1 et l'ordre convexe croissant à la dominance stochastique d'ordre 2.

On a évidemment les relations suivantes :

$$\leq_i \Rightarrow \leq_{icx}, \quad \leq_i \Rightarrow \leq_{ip} \quad \text{et} \quad \leq_{cx} \Rightarrow \leq_{icx} .$$

Un résultat utile à retenir est le suivant : pour des variables aléatoires positives, chacune des inégalités $X \leq_i Y$, $X \leq_{cx} Y$, $X \leq_{icx} Y$ et $X \leq_{ip} Y$ implique l'inégalité correspondante entre les moments (de n'importe quel ordre) des coordonnées de X et Y .

Enfin, en considérant également les ordres convexe décroissant (\leq_{dcx}) et concave décroissant (\leq_{dcv}) on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccc} X \leq_{icx} Y & \Leftrightarrow & -X \leq_{dcx} -Y \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Y \leq_{dcv} X & \Leftrightarrow & -Y \leq_{icv} -X . \end{array}$$

Théorème 3.12 (Théorème de Strassen pour \leq_i). *Pour F et G dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $F \leq_i G$ si et seulement s'il existe deux variables aléatoires dans \mathbb{R}^n , X et Y , définies sur le même espace de probabilité avec les distributions de probabilité F et G respectivement, et telles que $X \leq Y$ p.s..*

Théorème 3.13 (Théorème de Strassen pour \leq_{cx}). *Soient F et G deux distributions intégrables dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $F \leq_{cx} G$ (resp. $F \leq_{icx} G$) si et seulement s'il existe deux variables aléatoires dans \mathbb{R}^n , X et Y , définies sur le même espace de probabilité avec les distributions de probabilité F et G respectivement, et telles que $\mathbb{E}[Y | X] = X$ (resp. $\mathbb{E}[Y | X] \geq X$) p.s..*

Dans la suite, X et Y désignent à nouveau des variables aléatoires réelles représentant des pertes.

3.1.4 Caractérisation en terme de quantile

Dans [26], W. Ogryczak et A. Ruszczyński ont introduit des formulations duales de dominance stochastique et ont exploité la dualité de Fenchel pour caractériser la dominance stochastique en termes de quantiles. Les résultats suivants sont extraits de [26].

Définition 3.14. Soit $p \in [0, 1]$, $q_X(p) \in \mathbb{R}$ est un p -quantile de la variable aléatoire X si

$$\mathbb{P}\{X < q_X(p)\} \leq p \leq \mathbb{P}\{X \leq q_X(p)\}.$$

Définition 3.15. On définit

$$\begin{aligned} \psi_X^{-1} :]0, 1] &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ p &\mapsto \inf \{ \eta : \psi_X(\eta) \geq p \}, \end{aligned}$$

l'inverse de ψ_X ; alors ψ_X^{-1} est croissante et continue à gauche.

Remarque 3.16. Lorsque l'on manipule des fonctions monotones, mais pas strictement, et/ou discontinues (continue à droite ou à gauche), la théorie de la résiduabilité permet de définir une fonction inverse monotone. Ceci est valable non seulement pour des fonctions numériques, mais également pour des fonctions ordonnées sur des ensembles généraux. La référence historique pour cette théorie est [9]; mais pour une présentation plus synthétique, on peut aussi consulter [5]. Dans notre cas, $\psi_X : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ étant une fonction monotone et continue à droite, elle est s.c.s et dualement résiduable. La fonction $\psi_X^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ n'est autre que la résiduée duale de ψ_X ; et on sait alors qu'elle est monotone et continue à gauche de \mathbb{R} dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc s.c.i. (ψ_X^{-1} est elle-même résiduable et sa résiduée est ψ_X).

Remarque 3.17. Pour tout $p \in]0, 1[$, l'ensemble des p -quantiles est un intervalle fermé; $\psi_X^{-1}(p)$ représente le plus petit p -quantile de cet intervalle :

$$p \leq \psi_X(\eta) \Leftrightarrow \psi_X^{-1}(p) \leq \eta.$$

Définition 3.18. Définissons

$$\begin{aligned} \psi_X^{-2} : \mathbb{R} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ p &\mapsto \int_0^p \psi_X^{-1}(\alpha) d\alpha, \quad \forall p \in]0, 1], \end{aligned}$$

convexe par construction.

En fait, ψ_X^{-2} n'est rien d'autre que la transformée de Fenchel de ψ_X^2 et inversement :

Théorème 3.19. *Pour tout X tel que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$, on a*

(i) $\psi_X^{-2} = [\psi_X^2]^*$

(ii) $\psi_X^2 = [\psi_X^{-2}]^*$.

Les Théorèmes 3.20 et 3.21 donnent d'autres caractérisations pour DS1 et DS2.

Théorème 3.20.

$$X \succeq_{\text{DS1}} Y \Leftrightarrow \psi_X^{-1}(p) \geq \psi_Y^{-1}(p), \quad \forall p \in]0, 1[.$$

Théorème 3.21.

$$X \succeq_{\text{DS2}} Y \Leftrightarrow \psi_X^{-2}(p) \geq \psi_Y^{-2}(p), \quad \forall p \in [0, 1].$$

Théorème 3.22 (Caractérisation d'un quantile). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) η est un p -quantile de X ;

(ii) $\sup_{\xi} (\xi p - \psi_X^2(\xi))$ est atteint en η , ou encore $\eta \in \partial \psi_X^{-2}(p)$;

(iii) $\sup_{\alpha} (\eta \alpha - \psi_X^{-2}(\alpha))$ est atteint en p , ou encore $p \in \partial \psi_X^2(\eta)$;

(iv) $\psi_X^{-2}(p) + \psi_X^2(\eta) = p\eta$.

Remarque 3.23. Ce théorème repose sur la Propriété 1.16, qui est rappelons-le

$$\left(y \in \partial f(x) \right) \Leftrightarrow \left(f(x) - f^*(y) - \langle y, x \rangle = 0 \right).$$

3.2 Les mesures de risque et de sécurité usuelles

Le lecteur intéressé par les démonstrations des résultats concernant la *value-at-risk* et la *conditional value-at-risk*, ou par une présentation plus détaillée de ces notions, pourra consulter [29].

Considérons $g(u, \xi)$ une variable aléatoire réelle représentant des pertes, où u est la variable de décision et ξ un aléa. Soit p un niveau de probabilité donné. On suppose $g(u, \xi)$ continue en u , mesurable en ξ et

$$\mathbb{E} \left[|g(u, \xi)| \right] < +\infty, \quad \forall u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n.$$

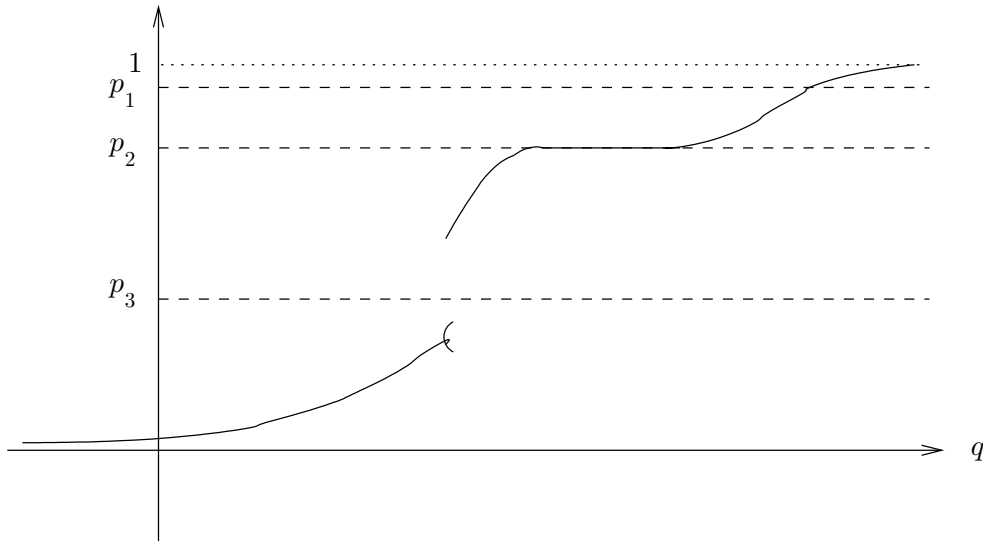
3.2.1 Value-at-risk $q_u(p)$

Définition 3.24. La p -**VaR** de la perte $g(u, \xi)$ associée à la décision u , notée $q_u(p)$, est la plus petite quantité q telle que, avec une probabilité au moins égale à p , la perte n'excède pas q . Autrement dit,

$$q_u(p) = \min \left\{ q \mid \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq q\} \geq p \right\} = \psi_u^{-1}(p),$$

où ψ_u^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition associée à $g(u, \xi)$.

Ce minimum est atteint car $\psi_u(q) = \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq q\}$ est croissante et continue à droite. Lorsque $\psi_u(\cdot)$ est continue et strictement croissante, $q_u(p)$ est l'unique solution de l'équation $\psi_u(q) = p$, ce qui correspond au niveau de probabilité p_1 sur la Figure 3.2. Autrement, cette équation peut n'avoir aucune solution (lorsqu'il existe une masse atomique de probabilité, comme pour p_3), ou au contraire avoir plusieurs solutions (lorsque la densité de probabilité est nulle pour une plage de valeurs, comme pour p_2).

FIG. 3.2 – Fonction de répartition $\psi(u, q)$

Remarque 3.25. La p -VaR de la perte associée à la décision u n'est rien d'autre que le plus petit p -quantile de la variable aléatoire $g(u, \xi)$.

Remarque 3.26. Sur le plan mathématique, l'absence de convexité et de sous-additivité sont les inconvénients majeurs de la VaR. En effet, en raison de l'absence de sous-additivité, on peut par exemple rencontrer des cas où la VaR d'un portefeuille composé de deux actifs est plus grande que la somme des VaR de chacun de ces deux actifs.

3.2.2 Conditional value-at-risk $\phi_p(u)$

Définition 3.27. La p -CVaR de la perte associée à la décision u est la valeur

$$\phi_p(u) = \text{moyenne de la } p\text{-queue de distribution de } g(u, \xi),$$

où la distribution en question est celle qui a pour fonction de répartition $\psi_p(u, \cdot)$, avec

$$\psi_p(u, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < q_u(p) \\ \frac{\psi_u(q) - p}{1 - p} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$\psi_u(q)$ étant la fonction de répartition associée à la variable aléatoire $g(u, \xi)$.

Dans le cas où $\psi_u(\cdot)$ a une probabilité atome en $q_u(p)$, cette définition comporte une subtilité. En effet, introduisons les notions de CVaR^+ et CVaR^- :

Définition 3.28. La p -CVaR⁺ de la perte associée à la décision u est la valeur

$$\phi_p^+(u) = \mathbb{E} \left[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) > q_u(p) \right],$$

alors que la p -CVaR⁻ de la perte est la valeur

$$\phi_p^-(u) = \mathbb{E} \left[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \geq q_u(p) \right].$$

La proposition ci-dessous permet alors de définir la p -CVaR plus simplement. Dans le cas de distributions continues, elle correspond à l'espérance des pertes dépassant la VaR ; et dans le cas de distributions quelconques, elle est définie comme une moyenne pondérée entre la VaR et la p -CVaR⁺ (les poids dépendent alors de la décision u).

Proposition 3.29. *Soit $\lambda_p(u)$ la probabilité assignée à la perte $q_u(p)$ par la fonction de répartition*

$$\lambda_p(u) = [\psi_u(q_u(p)) - p] / [1 - p] \in [0, 1].$$

1. *Si $\psi_u(q_u(p)) < 1$, i.e. si la perte peut être plus grande que $q_u(p)$, alors*

$$\phi_p(u) = \lambda_p(u)q_u(p) + (1 - \lambda_p(u))\phi_p^+(u),$$

avec $\lambda_p(u) < 1$.

2. *Si $\psi_u(q_u(p)) = 1$, i.e. $q_u(p)$ est la perte la plus importante qui puisse apparaître,*

$$\phi_p(u) = q_u(p).$$

Démonstration. Ces relations découlent de la Définition 3.27 et du fait que l'on a toujours $p \leq \psi(u, q_u(p))$, et ce, d'après la Définition 3.24. \square

On définit la fonction

$$F_p(u, \nu) \stackrel{\text{déf}}{=} \nu + \frac{1}{1-p} \mathbb{E} \left[[u - \nu]^+ \right], \quad \text{où } [t]^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(0, t).$$

F_p est une fonction conjointement convexe de (u, ν) (comme enveloppe supérieure de deux fonctions affines en (u, ν)), et croissante en u .

Le théorème ci-dessous est un résultat fondamental puisque, contrairement à ce que peut laisser penser la définition, il révèle que la p -CVaR peut être calculée sans avoir auparavant calculé la p -VaR.

Théorème 3.30 (Formule fondamentale de minimisation). *On a*

$$\phi_p(u) = \min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu).$$

En particulier, on a toujours

$$q_u(p) \in \arg \min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu) \quad \text{et} \quad \phi_p(u) = F_p(g(u, \xi), q_u(p)).$$

Remarque 3.31. La CVaR est monotone par rapport à DS1.

L'une des propriétés utiles de la CVaR est la propriété de convexité.

Proposition 3.32. *Si $g(u, \xi)$ est convexe en u , alors $F_p(g(u, \xi), \nu)$ est conjointement convexe en (u, ν) et $\phi_p(u)$ est convexe en u .*

Cette mesure de risque est très utilisée dans le domaine des assurances. Lorsque l'on considère des défaillances quantitatives, elle permet de remédier aux limites de la VaR (notamment son incapacité à rendre compte de la concentration des risques) en prenant en compte la totalité de la queue de la distribution et non plus un point précis de celle-ci.

3.2.3 Une mesure de sécurité alternative $\mathcal{S}_p(u)$

En nous appuyant sur la définition et les propriétés de la CVaR, nous avons défini une nouvelle mesure de sécurité, $\mathcal{S}_p(u)$.

On définit

$$\mathcal{S}_p^-(u) = \mathbb{E}\left[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)\right].$$

Les événements $\{g(u, \xi) \leq q_u(p)\}$ et $\{g(u, \xi) > q_u(p)\}$ sont complémentaires. Dans le cas de distributions continues, ils sont de probabilité p et $1 - p$ respectivement. En se rappelant que pour des distributions continues, $\phi_p(u) = \phi_p^+(u)$, on a donc

$$p \mathcal{S}_p^-(u) + (1 - p) \phi_p(u) = \mathbb{E}[g(u, \xi)].$$

Dans le cas de distributions discontinues, ces événements sont de probabilité $\psi_u(q_u(p))$ et $1 - \psi_u(q_u(p))$ respectivement. Comme on a

$$\psi_u(q_u(p)) \mathcal{S}_p^-(u) + (1 - \psi_u(q_u(p))) \phi_p^+(u) = \mathbb{E}[g(u, \xi)],$$

l'idée est de définir la mesure de sécurité $\mathcal{S}_p(u)$ de sorte que

$$p \mathcal{S}_p(u) + (1 - p) \phi_p(u) = \mathbb{E}[g(u, \xi)].$$

Définition 3.33. Dans le cas de distributions continues, la mesure de sécurité $\mathcal{S}_p(u)$ est définie par

$$\mathcal{S}_p(u) = \mathbb{E}\left[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)\right].$$

Dans le cas de distributions discontinues, elle est définie par

$$\mathcal{S}_p(u) = \lambda_p^s(u) \mathbb{E}\left[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)\right] + (1 - \lambda_p^s(u)) q_u(p), \quad \text{avec} \quad \lambda_p^s(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\psi_u(q_u(p))}{p} \in [0, 1].$$

On définit la fonction

$$G_p(u, \nu) \stackrel{\text{déf}}{=} \nu + \frac{1}{p} \mathbb{E}[\min(u - \nu, 0)].$$

G_p est une fonction conjointement concave de (u, ν) (comme enveloppe inférieure de deux fonctions affines en (u, ν)), et croissante en u . On a

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) + (1 - p) F_p(g(u, \xi), \nu) = \mathbb{E}[g(u, \xi)];$$

ainsi, lorsque $g(u, \xi)$ est convexe en u pour tout ξ , comme $F_p(u, \nu)$ est convexe en u , $G_p(u, \nu)$ est une fonction d.c. (i.e. “différence de fonctions convexes”).

Remarque 3.34. Comme

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) + (1 - p) F_p(g(u, \xi), \nu) = \mathbb{E}[g(u, \xi)],$$

en se rappelant que $\psi_u^2(\nu) = \mathbb{E}[(\nu - g(u, \xi))^+]$, $G_p(g(u, \xi), \nu)$ peut aussi s'écrire

$$G_p(g(u, \xi), \nu) = \nu - \frac{1}{p} \mathbb{E}[(\nu - g(u, \xi))^+] = \nu - \frac{1}{p} \psi_u^2(\nu).$$

On a ainsi

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) = p \nu - \psi_u^2(\nu),$$

et on en déduit

$$p \max_{\nu} G_p(g(u, \xi), \nu) = \max_{\nu} (p \nu - \psi_u^2(\nu)) = \psi_u^{-2}(p),$$

car ψ_u^{-2} est la transformée de Fenchel de ψ_u^2 (Théorème 3.19).

Théorème 3.35 (Formule fondamentale de maximisation). On a

$$\mathcal{S}_p(u) = \max_{\nu} G_p(g(u, \xi), \nu),$$

et en particulier,

$$q_u(p) \in \arg \max_{\nu} G_p(g(u, \xi), \nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_p(u) = G_p(g(u, \xi), q_u(p)).$$

Les mesures qui suivent, dites mesures de risque duales, sont basées sur la notion de dominance stochastique. Pour une présentation plus détaillée de ces mesures, et en particulier pour les démonstrations des résultats, le lecteur pourra se référer à [26].

X désigne désormais un gain aléatoire. On note μ_X son espérance.

3.2.4 Weighted mean deviation from a quantile $h_X(p)$

Cette mesure de risque est obtenue grâce à une interprétation graphique de ψ_X^{-2} , illustrée sur la Figure 3.3.

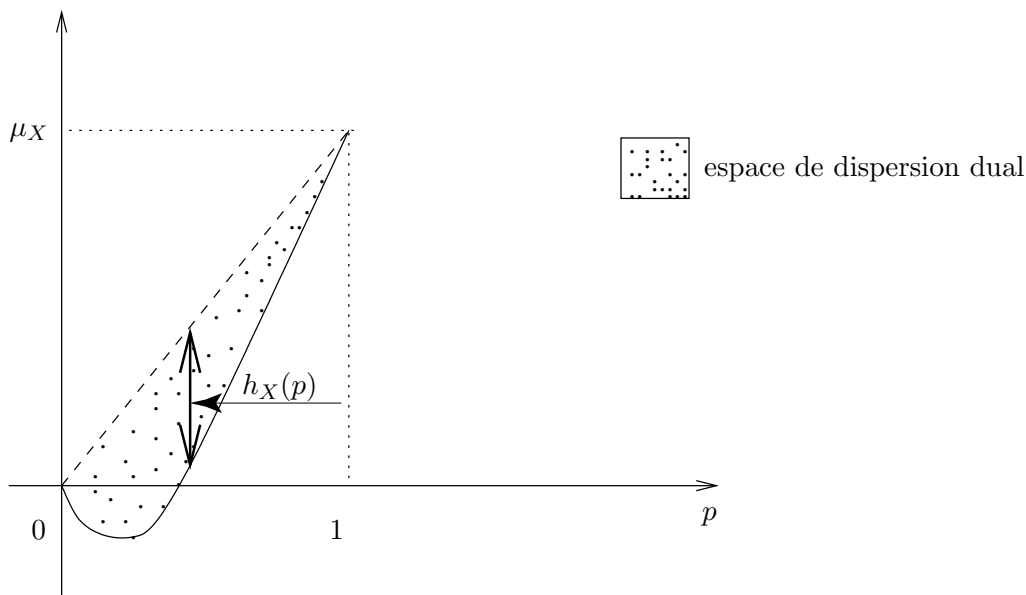


FIG. 3.3 – Graphe de $\psi_X^{-2}(p)$

Pour tout rendement aléatoire X , ψ_X^{-2} est continue, convexe, et relie les points $(0,0)$ et $(1, \mu_x)$, où μ_x est le rendement espéré de X ; à l'inverse, un rendement certain avec la même valeur espérée correspond à la corde reliant ces points. La quantité $h_X(p)$ correspond alors au diamètre vertical de l'espace entre la courbe $(p, \psi_X^{-2}(p))$, $0 \leq p \leq 1$, et sa corde, appelé espace de dispersion dual. Ainsi,

$$h_X(p) = \mu_X p - \psi_X^{-2}(p). \quad (3.1)$$

Lemme 3.36. *Pour tout $p \in]0, 1[$,*

$$h_X(p) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\max (p(X - \xi), (1 - p)(\xi - X)) \right],$$

et ce minimum est atteint pour tout p -quantile.

Cette mesure est croissante et continue. Pour $p \in [0, 1]$, $X \rightarrow h_X(p)$ est convexe et positivement homogène sur \mathcal{L}^1 .

3.2.5 Tail value-at-risk $\text{TVaR}_X(p)$

Définition 3.37.

$$\text{TVaR}_X(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\psi_X^{-2}(p)}{p}.$$

Il s'agit d'une mesure de sécurité. La fonction ψ_X^{-2} étant convexe, $\text{TVaR}_X :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, continue, et $\text{TVaR}_X(1) = \mu_X$. En partant de la définition de la TVaR_X , et en utilisant le Lemme 3.36, il vient

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_X(p) &= \frac{\psi_X^{-2}(p)}{p} \\ &= \mu_X - \frac{h_X(p)}{p} \\ &= \mathbb{E}[X] - \min_{\xi \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\max \left(X - \xi, \frac{1-p}{p}(\xi - X) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}[X] - \min_{\xi \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[(X - \xi) + \left[\frac{1}{p}(\xi - X) \right]^+ \right] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] - \min_{\xi \in \mathbb{R}} \left(-\xi + \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[[\xi - X]^+ \right] \right) \\ &= \max_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\xi - \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[[\xi - X]^+ \right] \right) \\ &= \max_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\xi - \frac{1}{p} \psi_X^2(\xi) \right). \end{aligned}$$

D'après le Théorème 3.22, on sait que ce maximum est atteint pour tout p -quantile $q_X(p)$, donc finalement,

$$\text{TVaR}_X(p) = q_X(p) - \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[[q_X(p) - X]^+ \right]. \quad (3.2)$$

Remarque 3.38. Cette expression rappelle fortement celle de la CVaR obtenue grâce à la formule fondamentale de minimisation (Théorème 3.30). La tail-VaR est en fait une mesure duale de la CVaR : on utilise la tail-VaR pour éviter les petits gains alors que la CVaR permet d'éviter les pertes importantes.

3.2.6 Tail Gini's mean difference $\text{Gi}_X(p)$

Cette mesure de risque est basée sur les caractéristiques de l'aire de l'espace de dispersion dual.

Définition 3.39.

$$\text{Gi}_X(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{p^2} \int_0^p h_X(\alpha) d\alpha.$$

Proposition 3.40. *Pour $p \in]0, 1[$, $X \rightarrow \text{Gi}_X(p)$ est convexe et positivement homogène sur \mathcal{L}^1 .*

3.2.7 D'autres mesures de risque

Expected shortfall

La perte moyenne pour un niveau souhaité η est définie par

$$r_X(\eta) = \mathbb{E}[\eta - X]^+.$$

Cette mesure de risque est en fait une autre formulation pour ψ_X^2 . En effet, d'après la Propriété 3.6, on a

$$\psi_X^2(\eta) = \mathbb{E}[\eta - X]^+.$$

Absolute semideviation et standard semideviation

Ces deux quantités sont basées sur l'analyse des semi-moments centrés qui mesurent l'étalement moyen de la variable aléatoire en dessous de son espérance. La première mesure de risque est définie comme suit :

$$\bar{\delta}_X = \int_{-\infty}^{\mu_X} (\mu_X - \xi) P_X(d\xi).$$

Lemme 3.41.

$$\max_{p \in [0,1]} h_X(p) = \bar{\delta}_X,$$

et le maximum est atteint en tout point p_X pour lequel

$$\mathbb{P}\{X < \mu_X\} \leq p_X \leq \mathbb{P}\{X \leq \mu_X\}.$$

En d'autres termes, $\bar{\delta}_X$ représente le diamètre vertical maximal de l'espace de dispersion dual pour la variable aléatoire X .

Remarque 3.42. Si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$, alors $\psi_X^2(\mu_X) = \bar{\delta}_X$.

L'autre mesure de risque, très proche de la précédente, vaut :

$$\bar{\sigma}_X = \left(\int_{-\infty}^{\mu_X} (\mu_X - \xi)^2 P_X(d\xi) \right)^{1/2}.$$

Proposition 3.43. Si $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$, alors $\bar{\sigma}_X \geq \bar{\delta}_X$ et cette inégalité est stricte sauf dans le cas où $\bar{\sigma}_X = \bar{\delta}_X = 0$.

Gini's mean (absolute) difference

Cette mesure correspond au double de l'aire de l'espace de dispersion dual :

$$\Gamma_X = 2 \int_0^1 (\mu_X p - \psi_X^{-2}(p)) dp = \frac{1}{2} \int \int |\eta - \xi| P_X(d\xi) P_X(d\eta). \quad (3.3)$$

Elle peut également être formulée comme l'intégrale de ψ_X^2 par rapport à la mesure de probabilité P_X :

$$\Gamma_X = \int \int_{\xi \leq \eta} (\eta - \xi) P_X(d\xi) P_X(d\eta) = \int \mathbb{E}[\eta - X]^+ P_X(d\eta).$$

Worst conditional expectation

Cette mesure a été introduite dans [1] pour pallier le manque de sous-additivité de la VaR.

$$\text{WCE}_p(X) = - \inf \left\{ \mathbb{E}[X|A] \mid \mathbb{P}\{A\} > p \right\},$$

où X désigne une variable aléatoire représentant des pertes. Elle est très peu utilisée en pratique car son calcul n'est possible que dans des situations très particulières.

3.3 Reformulation de ces mesures

Après avoir répertorié ces différentes mesures, nous allons montrer finalement qu'elles peuvent presque toutes se réécrire dans un "alphabet minimal" composé de cinq éléments : l'espérance de la variable aléatoire $g(u, \xi)$ représentant des pertes, le quantile $q_p(u)$, la fonction de répartition ψ_u , la quantité \mathcal{S}_p^- et la mesure de sécurité \mathcal{S}_p .

3.3.1 Tail value-at-risk

En écrivant la formule fondamentale de maximisation (Théorème 3.35), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p(u) &= G_p(g(u, \xi), q_u(p)) \\ &= q_u(p) + \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[\min(g(u, \xi) - q_u(p), 0) \right] \\ &= q_u(p) + \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[- \max(q_u(p) - g(u, \xi), 0) \right] \\ &= q_u(p) - \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[[q_u(p) - g(u, \xi)]^+ \right] \\ &= \text{TVaR}_u(p) \end{aligned}$$

d'après l'équation (3.2). La mesure de sécurité que nous avons définie n'est donc qu'une formulation différente de la tail-VaR.

Remarque 3.44. On a établi que

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) + (1 - p) F_p(g(u, \xi), \nu) = \mathbb{E}[g(u, \xi)],$$

et

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) = p \nu - \psi_u^2(\nu);$$

on obtient ainsi

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) = \mathbb{E}[g(u, \xi)] - (1 - p) F_p(g(u, \xi), \nu) = p \nu - \psi_u^2(\nu),$$

puis, comme $p \max_{\nu} G_p(g(u, \xi), \nu) = \psi_u^{-2}(p)$,

$$\max_{\nu} \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - (1 - p) F_p(g(u, \xi), \nu) \right) = \mathbb{E}[g(u, \xi)] - (1 - p) \min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu) = \psi_u^{-2}(p),$$

et comme $\phi_p(u) = \min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu)$, on a

$$\mathbb{E}[g(u, \xi)] - (1 - p) \phi_p(u) = \psi_u^{-2}(p).$$

3.3.2 Weighted mean deviation from a quantile

En factorisant p dans la définition de $h_u(p)$ (Définition 3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
 h_u(p) &= \mathbb{E}[g(u, \xi)] p - \psi_u^{-2}(p) \\
 &= p \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - \frac{\psi_u^{-2}(p)}{p} \right) \\
 &= p \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - \text{TVaR}_u(p) \right) \\
 &= p \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - \mathcal{S}_p(u) \right).
 \end{aligned}$$

3.3.3 Tail Gini's mean difference

En réécrivant la définition de Gi_u à l'aide de la reformulation de h_u , on a

$$\begin{aligned}
 \text{Gi}_u(p) &= \frac{2}{p^2} \int_0^p h_u(\alpha) d\alpha \\
 &= \frac{2}{p^2} \int_0^p \left[\alpha \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - \mathcal{S}_\alpha(u) \right) \right] d\alpha \\
 &= \mathbb{E}[g(u, \xi)] - \frac{2}{p^2} \int_0^p \alpha \mathcal{S}_\alpha(u) d\alpha.
 \end{aligned}$$

3.3.4 CVaR

En écrivant la formule fondamentale de minimisation (Théorème 3.30), on a

$$\begin{aligned}
 \phi_p(u) &= F_p(g(u, \xi), q_u(p)) \\
 &= q_u(p) + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[[g(u, \xi) - q_u(p)]^+] \\
 &= q_u(p) - \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[[q_u(p) - g(u, \xi)]^-] \\
 &= q_u(p) - \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[(q_u(p) - g(u, \xi)) \mathbb{I}_{\{q_u(p) < g(u, \xi)\}}] \\
 &= q_u(p) - \frac{1}{1-p} \mathbb{P}\{q_u(p) < g(u, \xi)\} \left[q_u(p) - \mathbb{E}[g(u, \xi) \mid q_u(p) < g(u, \xi)] \right] \\
 &= q_u(p) - \frac{1}{1-p} \left(1 - \psi_u(q_u(p)) \right) \left[q_u(p) - \mathbb{E}[g(u, \xi) \mid q_u(p) < g(u, \xi)] \right] \\
 &= \frac{1}{1-p} \left[q_u(p) \left(\psi_u(q_u(p)) - p \right) + \frac{1 - \psi_u(q_u(p))}{1-p} \left[\mathbb{E}[g(u, \xi)] - p \mathbb{E}[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)] \right] \right] \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^2} \left[q_u(p) \frac{\psi_u(q_u(p))}{p^2} - q_u(p) \frac{\psi_u(q_u(p))}{p} - \frac{q_u(p)}{p} + q_u(p) + \frac{1 - \psi_u(q_u(p))}{p^2} \mathbb{E}[g(u, \xi)] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{p} \mathbb{E}[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)] + \frac{\psi_u(q_u(p))}{p} \mathbb{E}[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)] \right] \\
 &= \frac{1}{(1-p)^2} \left[p^2 \mathcal{S}_p(u) + q_u(p) \left(\psi_u(q_u(p)) - p \right) - p \mathcal{S}_p^-(u) + \left(1 - \psi_u(q_u(p)) \right) \mathbb{E}[g(u, \xi)] \right].
 \end{aligned}$$

et ce, d'après la définition de $\mathcal{S}_p(u)$ (Définition 3.33).

Remarquons que, dans le cas de distributions continues, on a

$$\mathcal{S}_p(u) = \mathbb{E}[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \leq q_u(p)] \quad \text{et} \quad \psi_u(q_u(p)) = p,$$

et donc on retrouve bien que

$$\phi_u(p) = \frac{1}{1-p} \left[\mathbb{E}[g(u, \xi)] - p \mathcal{S}_p(u) \right].$$

3.3.5 Les autres mesures de risque

Expected shortfall

Soit η un niveau de perte souhaité. En utilisant le Théorème de Fubini et le Théorème 3.22 caractérisant la dominance stochastique en terme de quantile, et à condition que η soit le quantile de la variable aléatoire $g(u, \xi)$ associé au niveau de probabilité p , on peut donner la formule suivante :

$$r_u(\eta) = \mathbb{E}[[\eta - g(u, \xi)]^+] = \psi_u^2(\eta) = p\eta - \psi_u^{-2}(p) = p \left(\eta - \frac{\psi_u^{-2}(p)}{p} \right) = p \left(\eta - S_p(u) \right).$$

Absolute semideviation

Cette mesure n'est rien d'autre que l'expected shortfall lorsque le niveau de perte souhaité vaut $\mathbb{E}[g(u, \xi)]$. Ainsi,

$$\bar{\delta}_u = p \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - S_p(u) \right) = h_u(p).$$

Gini's mean (absolute) difference

D'après (3.3.2), en remplaçant dans (3.3) h_u par sa nouvelle formulation, on obtient

$$\Gamma_u = 2 \int_0^1 p \left(\mathbb{E}[g(u, \xi)] - S_p(u) \right) dp.$$

3.4 En résumé

La contrainte en probabilité est une formulation naturelle du risque mais difficile à manipuler sur le plan mathématique. Nous avons donc dans ce chapitre recensé les mesures de risque et de sécurité les plus usuelles en économie et en finance. La littérature sur ce sujet étant très abondante, nous avons alors décidé d'essayer de relier toutes ces mesures entre elles, en les reformulant dans un alphabet minimal : en notant $X = g(u, \xi)$ une variable aléatoire représentant des pertes et μ_X son espérance, on a

Définition	Reformulation
$\text{TVaR}_X(p) = \frac{\psi_X^{-2}(p)}{p}$	$\text{TVaR}_X(p) = \mathcal{S}_p(u)$
$h_X(p) = \mu_X p - \psi_X^{-2}(p)$	$h_X(p) = p (\mu_X - \mathcal{S}_p(u))$
$\text{Gi}_X(p) = \frac{2}{p^2} \int_0^p h_X(\alpha) d\alpha$	$\text{Gi}_X(p) = \mu_X - \frac{2}{p^2} \int_0^p \alpha \mathcal{S}_\alpha(u) du$
$\phi_p(u) = \min_\nu F_p(g(u, \xi), \nu)$	$\phi_p(u) = \frac{1}{(1-p)^2} \left[p^2 \mathcal{S}_p(u) + q_X(p) (\psi_X(q_X(p)) - p) \right. \\ \left. - p \mathcal{S}_p^-(u) + (1 - \psi_X(q_X(p))) \mu_X \right]$
$r_X(\eta) = \mathbb{E}[\eta - X]^+$	$r_X(\eta) = p (\eta - \mathcal{S}_p(u))$
$\bar{\delta}_X = \mathbb{E}[\mu_X - X]^+$	$\bar{\delta}_X = h_X(p)$
$\Gamma_X = 2 \int_0^1 (\mu_X p - \psi_X^{-2}(p)) dp$	$\Gamma_X = 2 \int_0^1 p (\mu_X - \mathcal{S}_p(u)) dp$

Parmi toutes ces mesures, on s'aperçoit que la contrainte en probabilité peut s'écrire, de façon équivalente comme une contrainte de VaR. La CVaR ayant été proposée comme une mesure alternative à la VaR, et possédant des propriétés mathématiques intéressantes, nous allons tenter, dans le prochain chapitre, d'exploiter cette autre mesure de risque dans la résolution des problèmes d'optimisation sous contrainte en probabilité.

Chapitre 4

Les mesures de risque en optimisation

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'application des mesures de risque dans les problèmes d'optimisation. Plus précisément, nous proposons des conditions et hypothèses sous lesquelles il est possible de remplacer un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité par le même problème d'optimisation formulé sous une contrainte de risque plus régulière sur le plan mathématique, tout en récupérant la solution du problème initial sous contrainte en probabilité.

4.1 Application des mesures de risque en optimisation

Notre stratégie de résolution étant basée sur la notion de gradient stochastique, la CVaR, formulée en termes d'espérance et possédant de “bonnes” propriétés mathématiques, apparaît être la mesure de risque la plus adaptée à notre approche.

On rappelle que $g(u, \xi)$ est une variable aléatoire réelle (représentant des pertes par exemple), où u est la variable de décision et ξ un aléa. Les deux théorèmes suivants, démontrés dans [29], révèlent l'un des avantages majeurs de la CVaR sur les autres mesures de risque dans les problèmes d'optimisation stochastique.

Théorème 4.1. *On a*

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \phi_p(u) = \min_{(u, \nu) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}} F_p(g(u, \xi), \nu),$$

où de plus,

$$(u^*, \nu^*) \in \arg \min_{(u, \nu) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}} F_p(g(u, \xi), \nu) \Leftrightarrow u^* \in \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \phi_p(u), \quad \nu^* \in \arg \min_{\nu \in \mathbb{R}} F_p(g(u, \xi), \nu).$$

Théorème 4.2. *Pour toute sélection de seuils de probabilité p_i et de tolérance de perte $\gamma_i, i = 1, \dots, l$, le problème*

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{U}} J(u) \\ & \text{s.c. } \phi_{p_i}(u) \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

est équivalent au problème

$$\begin{aligned} & \min_{(u, \nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}} J(u) \\ \text{s.c. } & F_{p_i}(g(u, \xi), \nu_i) \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

En effet, $(u^*, \nu_1^*, \dots, \nu_l^*)$ est solution du second problème si et seulement si u^* est solution du premier problème et l'inégalité $F_{p_i}(g(u^*, \xi), \nu_i^*) \leq \gamma_i$ est vraie pour $i = 1, \dots, l$. De plus, on a alors $\phi_{p_i}(u^*) \leq \gamma_i$ pour chaque i , et même $\phi_{p_i}(u^*) = \gamma_i$ pour chaque i tel que $F_{p_i}(g(u^*, \xi), \nu_i^*) = \gamma_i$, i.e. tel que la contrainte de CVaR associée est active.

Démonstration. Ce résultat provient de la formule de minimisation (3.30) : comme

$$\phi_{p_i}(u) = \min_{\nu_i \in \mathbb{R}} F_{p_i}(g(u, \xi), \nu_i),$$

on a $\phi_{p_i}(u) \leq \gamma_i$ si et seulement s'il existe ν_i tel que $F_{p_i}(g(u, \xi), \nu_i) \leq \gamma_i$. \square

Enfin, on peut passer d'une contrainte CVaR à une contrainte de tail-VaR de la façon suivante.

Théorème 4.3. *Pour tout niveau de probabilité p et de contrainte γ , le problème*

$$\begin{aligned} & \min_{(u, \nu) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}} J(u) \\ \text{s.c. } & F_p(g(u, \xi), \nu) \leq \gamma, \end{aligned}$$

est équivalent au problème

$$\begin{aligned} & \min_{(u, \nu) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}} J(u) \\ \text{s.c. } & G_p(g(u, \xi), \nu) \geq \gamma'(u), \end{aligned}$$

avec

$$\gamma'(u) = \frac{\mathbb{E}[g(u, \xi)] - \gamma(1-p)}{p}.$$

Démonstration. Cette équivalence est simplement basée sur le fait que

$$p G_p(g(u, \xi), \nu) + (1-p) F_p(g(u, \xi), \nu) = \mathbb{E}[g(u, \xi)].$$

\square

Remarque 4.4. Il est important de noter que si la CVaR préserve la convexité en u , ce n'est pas a priori le cas pour la tail-VaR.

4.2 Échange de la contrainte en probabilité avec une mesure de risque plus régulière

Théorème 4.5. *Considérons deux problèmes d'optimisation*

$$\begin{aligned} & \min_u J(u) \\ \text{s.c. } & f(u) \leq a \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \min_u J(u) \\ \text{s. c. } & g(u) \leq \bar{b} \end{aligned}$$

avec $\bar{b} = \sup_{u \in \mathcal{U}_a^f} g(u) = g(\bar{u})$, \mathcal{U}_a^f et $\mathcal{U}_{\bar{b}}^g$ désignant les ensembles admissibles. On suppose que

$$\forall u, u', \quad g(u) \leq g(u') \Rightarrow f(u) \leq f(u'),$$

alors toute solution du second problème est aussi une solution du premier problème.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on a $\mathcal{U}_a^f \subset \mathcal{U}_{\bar{b}}^g$, i.e toute solution admissible du premier problème est admissible pour le second problème. En effet, si $\tilde{u} \in \mathcal{U}_a^f$, alors $g(\tilde{u}) \leq \bar{b}$ puisque $\bar{b} = \sup_{u \in \mathcal{U}_a^f} g(u)$, et donc $\tilde{u} \in \mathcal{U}_{\bar{b}}^g$.

Si

$$\forall u, u', \quad g(u) \leq g(u') \Rightarrow f(u) \leq f(u'),$$

on a en particulier pour u^* solution du second problème,

$$g(u^*) \leq g(\bar{u}) \Rightarrow f(u^*) \leq f(\bar{u}).$$

De plus, comme $\bar{u} \in \mathcal{U}_a^f$, on a $f(\bar{u}) \leq a$ et donc $f(u^*) \leq a$: autrement dit, u^* est aussi admissible pour le premier problème. Les critères étant identiques dans les deux problèmes, et comme $\mathcal{U}_a^f \subset \mathcal{U}_{\bar{b}}^g$, u^* est donc solution du premier problème. \square

Si ce théorème est intéressant du point de vue théorique, ses hypothèses restent, en pratique, difficiles à vérifier. En effet, considérons le cas où le premier problème correspond à un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité, et le second problème correspond à un problème d'optimisation sous contrainte de CVaR. Il y a très peu de chance que l'hypothèse sur la monotonie des contraintes soit satisfaite, du fait que la CVaR se situe, en quelque sorte, à un degré d'intégration supérieur. De plus, pour déterminer le niveau \bar{b} , on doit résoudre un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité, or c'est justement ce type de problème que l'on cherche à éviter !

Néanmoins, si l'on considère une situation où l'hypothèse sur la monotonie des contraintes est vérifiée, on peut très bien imaginer de trouver \bar{b} par tâtonnement, et non en résolvant le problème d'optimisation sous-jacent.

En effet, dans le théorème précédent, le choix strict de \bar{b} et l'hypothèse de monotonie des contraintes servent d'une part à garantir l'admissibilité de u^* pour le premier problème, et d'autre part, l'inclusion des ensembles admissibles. Cette dernière inclusion est assurée dès que b est "assez grand", i.e. plus grand que \bar{b} . Quant à l'admissibilité de u^* , elle peut être testée directement. On propose donc la stratégie suivante :

- choisir un b assez grand,
- résoudre le problème avec une contrainte de CVaR,
- tester l'admissibilité de u^* : si u^* est admissible on s'arrête, sinon on recommence en choisissant un b plus petit.

4.3 Exemple

Afin d'illustrer que les hypothèses du Théorème 4.5 sont, en pratique, difficiles à vérifier, nous allons donner un contre-exemple, dans lequel une solution d'un problème avec contrainte CVaR n'est pas une solution du même problème avec contrainte en probabilité.

4.3.1 Présentation du problème

On doit minimiser un temps de parcours en voiture, $f(u, \xi)$, où $u \in \mathcal{U}$ désigne la variable de pilotage et ξ un incident, à savoir les freins qui lâchent. On note v la vitesse au-delà de laquelle tout incident devient mortel. Si on désigne par $g(u, \xi)$ la vitesse, ceci nous amène à introduire une contrainte en probabilité puisqu'il s'agit d'ajuster la vitesse de parcours pour assurer une probabilité minimale de rester en vie. Ce problème s'écrit donc

$$\begin{aligned} & \min_u \mathbb{E}[f(u, \xi)] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq v\} \geq p. \end{aligned}$$

Enfin, en notant $v_u(p)$ le quantile de la fonction de répartition associée à $g(u, \xi)$, on peut considérer la contrainte

$$v_u(p) \leq v.$$

4.3.2 Application de la CVaR

La notion de CVaR conduit à réécrire le problème de la façon suivante

$$\begin{aligned} & \min_{u, \nu} \mathbb{E}[f(u, \xi)] \\ \text{s.c.} \quad & F_p(g(u, \xi), \nu) \leq \gamma, \end{aligned}$$

avec

$$F_p(g(u, \xi), \nu) = \nu + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[[g(u, \xi) - \nu]^+].$$

On sait que

$$\min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu) = \phi_p(u).$$

Soit (u^*, ν^*) la solution de ce problème. On a

$$\phi_p(u^*) \leq \gamma \quad \text{et} \quad \arg \min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu) = v_u(p).$$

Ainsi $\nu^* = v_{u^*}(p)$, et il suffit de comparer $v_{u^*}(p)$ à v pour vérifier si la contrainte du problème initial est vérifiée.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'avantage de cette reformulation du problème est la possibilité de mettre en œuvre un algorithme de gradient stochastique pour obtenir la solution.

4.3.3 Relation à l'optimum entre les deux problèmes

Considérons le problème initial. La variable est u et les paramètres sont v et p . Notons $\mathcal{U}^{\text{ad}}(p, v) \subset \mathcal{U}$ l'ensemble admissible de ce problème.

Les variables du problème avec contrainte CVaR sont u et ν ; les paramètres sont p et γ . Notons $C^{\text{ad}}(p, \gamma) \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ son ensemble admissible. Rappelons que

$$\gamma \geq F_p(g(u, \xi), \nu) \geq \min_{\nu} F_p(g(u, \xi), \nu) = \phi_p(u) \geq v_u(p).$$

Notons u^* une solution du problème avec contrainte CVaR. Pour que u^* soit solution du problème initial, il suffit, d'après le Théorème 4.5, que :

$$\mathcal{U}^{\text{ad}}(p, v) \subset \text{Proj}(C^{\text{ad}}(p, \gamma)) = \left\{ u \in C^{\text{ad}}(p, \gamma) \right\} \quad \text{et que} \quad \phi_p(u^*) \leq \phi_p(u) \Rightarrow v_{u^*}(p) \leq v_u(p).$$

4.3.4 La non interchangeabilité des mesures de risque

On s'intéresse ici à un exemple numérique simple dans lequel la solution du problème initial ne peut être obtenue comme la solution du problème avec contrainte de CVaR.

Posons

$$g(u, \xi) = 0.9u + \xi(1 - u),$$

où ξ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} = [0, 1]$. On considère le cas où $u \neq 1$ (pour rester dans un cadre stochastique). On a

$$\psi_u(q) = \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq q\} = \mathbb{P}\left\{\xi \leq \frac{q - 0.9u}{1 - u}\right\} = \min\left(1, \max\left(0, \frac{q - 0.9u}{1 - u}\right)\right).$$

On a $v_u(p) = \min\{q \mid \psi_u(q) \geq p\}$, donc

$$v_u(p) = (0.9 - p)u + p.$$

Pour $p \in [0, 0.9]$, v_u est croissante en u ; pour $p > 0.9$, v_u est décroissante en u .

Comme ξ suit une loi uniforme, sa fonction de répartition est continue, et on a donc

$$\phi_p(u) = \mathbb{E}\left[g(u, \xi) \mid g(u, \xi) \geq v_u(p)\right].$$

Calculons $\phi_p(u)$. On a

$$g(u, \xi) \geq v_u(p) \Leftrightarrow 0.9u + \xi(1 - u) \geq p + u(0.9 - p) \Leftrightarrow \xi \geq p,$$

et donc

$$\phi_p(u) = \frac{1}{1 - p} \int_p^1 [0.9u + \xi(1 - u)] d\xi = 0.9u + \frac{1 - u}{1 - p} \left(\frac{1}{2} - \frac{p^2}{2}\right) = \left(0.4 - \frac{p}{2}\right)u + \frac{1 + p}{2}.$$

Pour $p \in [0, 0.8]$, ϕ_p est croissante en u ; pour $p > 0.8$, ϕ_p est décroissante en u .

Pour $p \in]0.8, 0.9[$, on est donc dans la situation où, lorsque u^* est une solution du problème avec contrainte CVaR, on a

$$\phi_p(u^*) \leq \gamma = \phi_p(\bar{u}) = \max_{v_u(p) \leq v} \phi_p(u) \quad \text{et} \quad v_{u^*}(p) > v \geq v_{\bar{u}}(p).$$

Posons par exemple $p = 0.85$ et $v = 0.88$. Dans ce cas, $u \in [0, \frac{3}{5}]$, $\phi_{0.85}(u) = -0.025u + 0.925$ et $\gamma = 0.925$.

Sur cet exemple, on ne peut pas trouver de valeur de γ qui permette d'obtenir la solution du problème original grâce à la résolution du problème avec une contrainte CVaR $< \gamma$.

4.4 En résumé

Dans ce chapitre, nous avons donné des conditions sous lesquelles il est possible de remplacer la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité par la résolution d'un problème auxiliaire, formulé avec une mesure de risque plus régulière, tout en récupérant, bien entendu, la solution du problème initial.

Troisième partie

**Méthodes mathématiques pour les
contraintes en probabilité**

Chapitre 5

Optimisation sous contrainte en probabilité : le cas convexe

Nous présentons dans ce chapitre trois méthodes ayant pour objectif la mise en œuvre d'un algorithme de type gradient stochastique pour résoudre un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité. Les deux premières méthodes, *l'intégration par parties* et *l'approximation par convolution*, permettent de surmonter la discontinuité de la fonction indicatrice qui apparaît lorsque l'on écrit la contrainte en probabilité sous la forme d'une contrainte en espérance. L'objectif de ces deux méthodes est de donner un estimateur du gradient de la contrainte en probabilité. La troisième méthode, *l'approche par le quantile*, consiste, lorsque c'est possible, à réécrire la contrainte en probabilité comme une contrainte sur un quantile indépendant des variables de décision. L'une de ces méthodes, l'intégration par parties, conduit, dans un cadre général, à des formules assez complexes. Aussi, afin de rendre ce mémoire aussi clair que possible, nous allons commencer par introduire deux exemples volontairement simples, mais qui posent de réelles difficultés mathématiques. Puis nous présenterons quelques difficultés structurelles relatives à un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité. Enfin, nous montrerons, sur chacun de ces exemples, ce qu'il est possible de faire (ou de ne pas faire) avec ces trois méthodes.

5.1 Exemples

5.1.1 Le problème du mobile

Un mobile doit traverser le segment $[0, 1]$ en minimisant le temps pour atteindre $x = 1$, en tenant compte de plus d'un critère d'énergie : $u(t)$ désignant la vitesse à l'instant t (c'est le contrôle), on minimise le critère

$$t_f + \int_0^{t_f} u^2(t) dt.$$

Le temps final t_f est tel que $x(t_f) = 1$, la condition initiale est $x(0) = 0$ et la dynamique du modèle est donnée par

$$\frac{dx}{dt}(t) = u(t).$$

On introduit enfin une contrainte en probabilité qui est due au fait qu'une bombe peut tomber sur le parcours en une position ξ et un temps τ tous les deux aléatoires. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes et distribuées selon des densités $q(\xi)$ et $\bar{q}(\tau)$. Un impact en ξ cause la destruction du mobile s'il tombe à une distance inférieure ou égale à D de la position qu'occupe ce dernier à l'instant τ . On suppose enfin que le mobile est à l'abri aux

extrémités du segment $[0, 1]$, c'est-à-dire avant $t = 0$ et après $t = t_f$ (nous ne considérerons donc que le cas où $\tau < t_f$). La contrainte à respecter s'écrit

$$\mathbb{P}\{x(\cdot)\} = \int_0^{t_f} \int_{x(\tau)-D}^{x(\tau)+D} q(\xi) \bar{q}(\tau) d\xi d\tau \leq 1 - p, \quad (5.1)$$

autrement dit, on souhaite que la probabilité de récupérer le mobile soit d'au moins p .

Afin de servir de référence à une résolution par une approche de type "gradient stochastique", on va chercher une solution du problème dans un cas particulier en utilisant une formulation déterministe. Pour cela, on introduit la variable $z(t)$ définie par

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t \int_{x(\tau)-D}^{x(\tau)+D} q(\xi) \bar{q}(\tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t (\psi(x(\tau) + D) - \psi(x(\tau) - D)) \bar{q}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

en utilisant la fonction de répartition ψ de la densité q . On a $z(0) = 0$ et

$$\frac{dz}{dt}(t) = (\psi(x(\tau) + D) - \psi(x(\tau) - D)) \bar{q}(\tau)$$

On veut donc respecter la contrainte $z(t_f) \leq 1 - p$.

L'Hamiltonien du problème s'écrit

$$\mathcal{H}(x, t, u, \lambda, \mu) = u^2 + \lambda u + \mu(\psi(x(\tau) + D) - \psi(x(\tau) - D)) \bar{q}.$$

Les équations adjointes sont

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\mathcal{H}'_x = -\mu(q(x + D) - q(x - D)) \bar{q}, & \lambda(t_f) &= \lambda_1, \\ \dot{\mu} &= -\mathcal{H}'_z = 0, & \mu(t_f) &= \lambda_2, \end{aligned}$$

où λ_1 est le multiplicateur de la contrainte sur $x(t_f)$ et λ_2 celui sur $z(t_f)$. Pour compléter les conditions d'optimalité, il faut écrire que $\mathcal{H}'_u = 0$, soit

$$u(\cdot) = -\lambda(\cdot)/2,$$

et la condition d'optimalité sur t_f qui s'écrit

$$1 + u^2(t_f) + \lambda_1 u(t_f) + \lambda_2 (\psi(x(t_f) + D) - \psi(x(t_f) - D)) \bar{q}(t_f) = 0.$$

On observe que

- μ est constant et égal à λ_2 ; on remplacera partout μ par λ_2 ;
- avec la supposition que le support de \bar{q} est inclus dans un intervalle $[0, t_i] \subset [0, t_f]$, alors $\bar{q}(t) = 0$ pour $t_i < t \leq t_f$; on en déduit que z , λ , et donc aussi u sont constants au delà de l'instant t_i ; λ vaut alors λ_1 et z vaut $1 - p$ (dans l'hypothèse où la contrainte en probabilité est saturée);
- la condition de transversalité sur t_f s'écrit simplement

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + u^2(t_f) + \lambda_1 u(t_f) \\ &= 1 + \lambda_1^2/4 - \lambda_1^2/2 \end{aligned}$$

puisque $u = -\lambda/2$ et $\lambda(t_f) = \lambda_1$. On en déduit que $\lambda_1^2 = 4$, donc $\lambda_1 = \pm 2$, mais il faut privilégier la valeur -2 puisque $u(t_f) = -\lambda_1/2$; le parcours au delà de t_i se fait donc à la vitesse 1. Les valeurs de λ et z dans cet intervalle (et en particulier à t_i) sont respectivement de -2 et $1 - p$. Enfin, la valeur de $x(t_i)$ est $1 - (t_f - t_i)$ puisque $x(t_f) = 1$ et que $u = 1$ au delà de t_i .

Malgré ces observations, le problème n'est pas très facile à résoudre sans se placer dans des cas plus particuliers. On va considérer le cas d'une densité $q(\cdot)$ linéairement croissante et d'une densité \bar{q} uniforme sur $[0, 0,5]$ (donc $\bar{q}(\tau) = 2$ sur ce support).

On pose $D = 0,2$ et

$$q(\xi) = \begin{cases} 0,2 + \xi & \text{pour } -0,2 \leq \xi \leq 1,21421, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La borne supérieure de l'intervalle ci-dessus a été calculée pour que q soit une densité de probabilité d'intégrale égale à 1. Notons que cet intervalle englobe le segment $[-D, 1 + D]$.

On a alors

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \xi \leq -0,2, \\ 0,5\xi^2 + 0,2\xi + 0,02 & \text{pour } -0,2 \leq \xi \leq 1,21421, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus $q(x+D) - q(x-D) = 0,4$ et $\psi(x+D) - \psi(x-D) = 0,4x + 0,08$ dans la zone intéressante.

Déterminons d'abord le niveau de probabilité p^* "naturel", celui atteint par la commande optimale du problème sans contrainte ($u(\cdot) = 1$ donc $x(t) = t$). On a

$$1 - p^* = \int_0^{0,5} 2(\psi(t+0,2) - \psi(t-0,2)) dt \quad \text{d'où } p^* = 0,82.$$

Sachant que u optimale est égale à $-\lambda/2$, on intègre les équations en \dot{x} , $\dot{\lambda}$, \dot{z} , en partant de $x(0) = 0$, $\lambda(0) = \lambda_0$ (paramètre inconnu) et $z(0) = 0$. Avec Mathematica, on obtient, pour $0 \leq t \leq 0,5$,

$$\begin{aligned} x(t) &= 0,2\lambda_2 t^2 - 0,5\lambda_0 t, \\ \lambda(t) &= \lambda_0 - 0,8\lambda_2 t, \\ z(t) &= (4/75)\lambda_2 t^3 - 0,2\lambda_0 t^2 + 0,16t. \end{aligned}$$

Pour déterminer les inconnues λ_0 et λ_2 , il faut résoudre le système

$$\lambda(0,5) = -2, \quad z(0,5) = 1 - p,$$

ce qui conduit à

$$\lambda_2 = 75p - 123/2, \quad \lambda_0 = 30p - 133/5.$$

Avec ces valeurs de λ_0 et λ_2 , on obtient en particulier

$$u(t) = -\lambda(t)/2 = (30p - 123/5)t + 13,3 - 15p.$$

- On observe que $u(\cdot)$ est une fonction linéaire dans l'intervalle $[0, 0,5]$ (rejoignant la valeur 1 et s'y maintenant, comme déjà dit, après l'instant 0,5).
- Mais $u(0)$ devient négative au delà de la valeur critique $p^\circ = 13,3/15 = 0,88666\dots$: à partir de ce niveau de probabilité, la stratégie consiste donc à s'enfuir vers le côté négatif de l'axe des x , avant de revenir vers $x = 1$. Ceci est dû au fait que l'on n'a pas modélisé le fait que l'on est sous abri si l'on reste immobile en $x = 0$ après l'instant 0. Il faut imaginer que l'abri est retiré dès que le jeu commence à $t = 0$.
- En deçà de la valeur critique p° du niveau de probabilité exigé pour rester en vie, la stratégie consiste à courir toujours dans le sens positif, mais à une vitesse inférieure à 1 (en rejoignant la vitesse de croisière 1 après que l'on soit sûr que la bombe est tombée, c'est-à-dire après $t = 0,5$).

Pour terminer, évaluons le coût optimal. Puisque l'on court à la vitesse 1 à partir de l'instant 0,5 et que l'on a atteint la distance $x(0,5)$ avant cet instant, on a

$$t_f = 1 - x(0,5) + 0,5 = (15/4)p - 83/40.$$

Le coût optimal J^* vaut alors

$$J^* = t_f + \int_0^{0,5} u^2(t)dt + \int_{0,5}^{t_f} 1dt.$$

Tous calculs faits, on obtient

$$J^* = (75/2)p^2 - (123/2)p + 5443/200,$$

donc une fonction convexe de p . On peut vérifier, comme c'est normal, que J^* vaut 2 et est minimum en $p^* = 0,82$: en effet 2 est la valeur optimale sans contrainte, correspondant à une valeur "naturelle" de p égale à 0,82, et le multiplicateur λ_2 est la dérivée de J^* considéré comme fonction de p (et il est nul pour $p = 0,82$). Bien sûr, l'expression ci-dessus de J^* n'est valable que pour $p \geq 0,82$, car en deçà de cette valeur, J^* reste égal à 2.

La Figure 5.1 résume un certain nombre de ces résultats.

5.1.2 Le problème de finance

On emprunte un capital x_0 que l'on doit rembourser en fin de période avec un taux d'intérêt l . Ce capital peut servir à

- faire un placement au taux fixe b ;
- faire un placement au taux risqué ξ ;
- ou enfin consommer le restant disponible, ce qui apporte une "satisfaction" mesurée par une fonction concave f (satisfaction marginale décroissante).

On cherche à maximiser la somme de cette satisfaction et de l'espérance du capital final (auquel il faudrait retrancher le remboursement, mais celui-ci est une quantité connue d'avance). Soit

- u la fraction du capital placée au taux fixe;
- v la fraction du capital placée au taux risqué.

Les variables de décisions u et v sont soumises aux conditions :

$$u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad \text{et} \quad u + v \leq 1. \quad (5.2)$$

On doit résoudre sous ces contraintes le problème suivant :

$$\max_{u,v} \mathbb{E} \left[f(x_0(1-u-v)) + x_0((1+b)u + (1+\xi)v) \right]. \quad (5.3)$$

On veut également être en mesure de rembourser le capital et les intérêts (soit $x_0(1+l)$) en fin de période, et ce avec une probabilité d'au moins p . On veut donc respecter la contrainte que la probabilité que le capital disponible en fin de période, i.e. $x_0((1+b)u + (1+\xi)v)$, soit supérieur ou égal à la somme due, ce qui s'écrit, en supposant $v \neq 0$ (le cas où $v = 0$ sera traité à part) :

$$\mathbb{P}\{(1+b)u + (1+\xi)v \geq 1+l\} \geq p;$$

ceci est équivalent à

$$\mathbb{P}\left\{\xi \geq \frac{1+l}{v} - \frac{(1+b)u}{v} - 1\right\} \geq p. \quad (5.4)$$

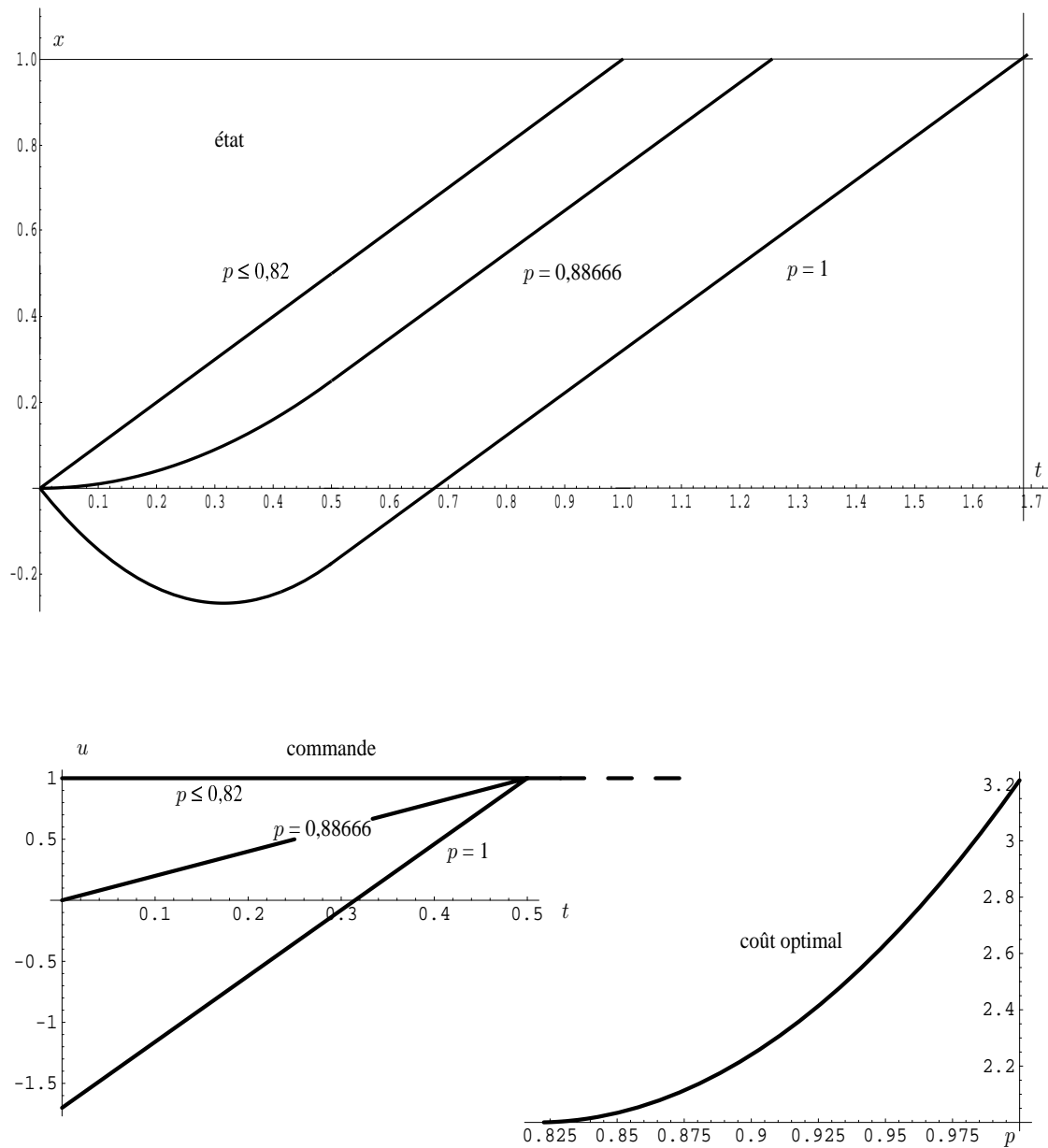


FIG. 5.1 – Quelques résultats concernant le problème du mobile

Remarque 5.1. Sous les hypothèses $\bar{\xi} \geq l > b$, la solution optimale du problème de maximiser (5.3) sous les contraintes (5.2) – (5.4) est telle que $u = 0$. Dans la suite, nous ferons donc les hypothèses :

$$\bar{\xi} > b > l, \quad (5.5)$$

dans l'espoir d'obtenir, au moins pour certains niveaux p de la contrainte en probabilité, des solutions avec $u > 0$.

On utilise les données suivantes :

$$x_0 = 1, \quad l = 0.15, \quad b = 0.2,$$

$$f(x) = -x^2/2 + 2x,$$

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < \bar{\xi} - \sigma \\ \frac{1}{16} \left[3 \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{\sigma} \right)^5 - 10 \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{\sigma} \right)^3 + 15 \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{\sigma} \right) + 8 \right] & \text{si } \xi < \bar{\xi} + \sigma \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ψ est la fonction de répartition, les paramètres $\bar{\xi}$ et σ permettant de faire varier respectivement la moyenne ($\bar{\xi}$) et la variance de ξ égale à $\sigma^2/7$. Les expériences numériques sont réalisées dans le cas où $\bar{\xi} = 0.4$ et $\sigma = 3$.

Pour résoudre numériquement ce problème d'optimisation, nous allons plutôt nous intéresser au problème de minimisation équivalent. Notons

$$\begin{aligned} j(u, v, \xi) &= -f(x_0(1 - u - v)) - x_0((1 + b)u + (1 + \xi)v), \\ \Theta_1(u, v) &= u + v - 1, \\ \Theta_2(u, v) &= p - \mathbb{P}\left\{ \xi \geq \frac{1 + l}{v} - \frac{(1 + b)u}{v} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Les contraintes de positivité sur u et v seront traitées par projection, et nous désignerons respectivement par λ_1 et λ_2 les multiplicateurs associés aux contraintes $\Theta_1 \leq 0$ et $\Theta_2 < 0$.

Pour simuler une variable aléatoire ayant comme fonction de répartition ψ , nous pouvons soit utiliser la technique classique qui consiste à inverser la fonction de répartition, soit utiliser la méthode du rejet. La première méthode, dite "méthode de la fonction de répartition", ne nous a pas semblé être très pertinente sur cet exemple : il faudrait inverser un polynôme de degré 5, ce qui ralentirait l'algorithme programmé en Scilab. La méthode du rejet est particulièrement intéressante lorsque la variable aléatoire possède une densité qui est d'expression compliquée, ou qui n'est pas connue analytiquement (mais qui est approchée par un histogramme). Nous choisissons donc d'utiliser cette méthode, dont le principe est le suivant : soit à simuler une variable aléatoire ξ de densité q . Supposons que l'on ait pu trouver une densité de probabilité g telle que

- une variable de densité g soit aisée à simuler ;
- il existe une constante k telle que $q \leq k g$.

Alors la procédure suivante permet de simuler une variable aléatoire ξ de densité q :

- 1) on simule une variable \mathcal{U} de densité g et une variable W indépendante uniformément distribuée sur $[0, 1]$, puis on pose $V = k W g(\mathcal{U})$;

2) si $V < q(\mathcal{U})$, on pose $\xi = \mathcal{U}$; sinon on retourne en 1).

Sur cet exemple, nous choisirons g comme étant la densité d'une loi uniforme sur $[\bar{\xi} - \sigma, \bar{\xi} + \sigma]$, et $k = 2$. En effet, q est maximale en $\bar{\xi}$ et $q(\bar{\xi}) = 15/(16\sigma)$; on aura alors bien

$$q(\xi) \leq q(\bar{\xi}) \leq 2g(\xi).$$

La Figure 5.2 représente le coût optimal associé à ce problème d'optimisation.

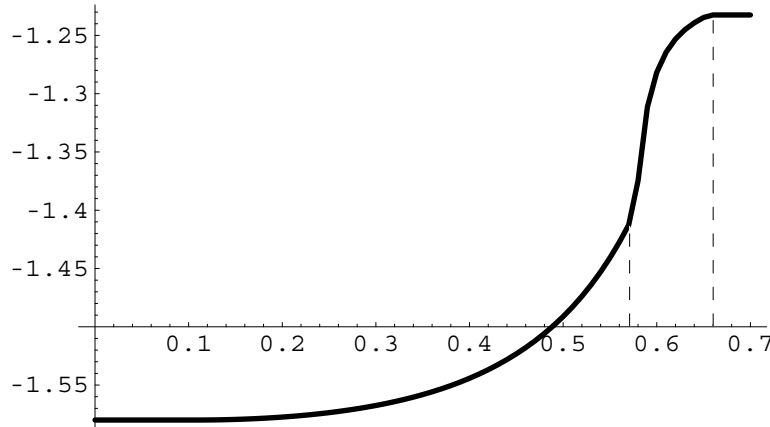


FIG. 5.2 – Coût optimal

On observe que le coût optimal comme fonction du niveau de probabilité p n'est pas convexe. En fait, ce coût est convexe pour des niveaux de probabilité inférieurs à 0.57. Pour des niveaux de probabilité proches de 0.57, le risque de ne pas pouvoir rembourser le capital et les intérêts en fin de période est grand; la variable de décision associée au placement risqué, v , décroît vers 0, alors que simultanément, celle associée au placement sans risque, u , décolle de la valeur 0. Le coût optimal, qui était jusqu'alors une fonction convexe du niveau de probabilité p requis, devient concave sur un transitoire assez rapide, la plage de valeurs des niveaux de probabilité allant de 0.58 à 0.65. Au-delà de 0.65, v passe à 0, $u = (1+l)/(1+b) = 0.95833$, et le coût optimal devient donc constant. Pour rester dans le cadre classique de la convexité, nous ne considérerons dans ce chapitre que des niveaux de probabilité inférieurs à 0.57, le cas non convexe sera traité au chapitre suivant.

Remarque 5.2. Afin de servir de référence à une résolution par une approche de type “gradient stochastique”, nous avons considéré des exemples numériques qui ont pu parallèlement être résolus grâce à un programme FORTRAN utilisant le solveur NAG. Il faut signaler que l'initialisation de l'algorithme s'est avérée délicate, probablement en raison de la non convexité du problème. Il a fallu, pour chaque valeur de p , choisir assez soigneusement cette initialisation. La contrainte en probabilité a été codée sous la forme d'une contrainte écrite à l'aide de la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ , avec une borne inférieure sur v de l'ordre de 10^{-2} . Lorsque cette borne était atteinte, on considérait que la “vraie” solution correspondait à $v = 0$, et il était alors facile, d'après ce qui a été expliqué plus haut, de calculer u .

Remarque 5.3. Sur le plan numérique, pour le problème du mobile comme pour le problème de finance, nous nous intéresserons toujours aux erreurs sur les variables primales et duales en fonction du nombre d'itérations : $u^k - u^*$ en fonction de k lorsque la variable est scalaire ou $\|u^k - u^*\|_\infty$ lorsqu'il s'agit de vecteurs, u^* étant la solution obtenue par la formulation déterministe.

5.2 Quelques difficultés structurelles

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en évidence quelques difficultés structurelles relatives aux problèmes d'optimisation sous contrainte en probabilité.

5.2.1 La non convexité du problème

On considère le problème

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{R}} \quad & \frac{1}{2}(u-1)^2 \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}\{u \leq \xi\} \geq p, \end{aligned}$$

avec $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$. La contrainte s'écrit aussi

$$\psi(u) \leq 1 - p,$$

où ψ est la fonction de répartition de ξ . Le Lagrangien associé à ce problème est

$$L(u, \lambda) = \frac{1}{2}(u-1)^2 + \lambda(\psi(u) - 1 + p).$$

En fixant $p = 0.7$, $m = -2$ et $\sigma = 0.1$, la solution de Kuhn-Tucker est

$$u^* = -2.05244 \quad \text{et} \quad \lambda^* = 0.877913,$$

le coût optimal vaut alors 4.6587.

La Figure 5.3 représente le graphe de la fonction Lagrangien et la position de la solution primale-duale. Pour la section $\lambda = 0$, on reconnaît la forme de la fonction coût seule. Lorsque λ augmente, la forme de la fonction de répartition se superpose avec un poids de plus en plus grand à celle du coût, ce qui crée deux bassins d'attraction pour un algorithme de type Arrow-Hurwicz dont l'équation différentielle associée est

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -L'_u(u, \lambda) = -u + 1 - \lambda \frac{10e^{-50(u+2)^2}}{\sqrt{2\pi}}, \\ \dot{\lambda} &= L'_\lambda(u, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{10(u+2)}{\sqrt{2}} \right) - 0.3 \right). \end{aligned}$$

Ceci est mieux illustré par le champs de vecteurs correspondant, représenté sur la Figure 5.4.

Le double cercle représente la solution qui n'est qu'un point selle local. La zone blanche correspond grossièrement au bassin d'attraction de ce point. La zone grise conduit à s'éloigner plus ou moins indéfiniment (en λ) dans une vallée située à $u = 1$ (le minimum sans contrainte). En effet, pour cette valeur de u , le gradient de la fonction coût est nul et le reste de la dérivée en u du Lagrangien est égal à λ fois la densité de la variable aléatoire gaussienne (de moyenne -2 et d'écart-type 0.1) au point 1 , à savoir $-1.47 \times 10^{-195} \lambda$! Autant dire 0 même pour λ très grand ! Alors que la composante en $\dot{\lambda}$ de ce champs de vecteurs est égale à la valeur de la contrainte pour $u = 1$, donc quelque chose de positif (si le minimum sans contrainte ne satisfait pas la contrainte). Ce qui signifie effectivement que, une fois atteinte la valeur $u = 1$, on se déplace verticalement pratiquement jusqu'à l'infini.

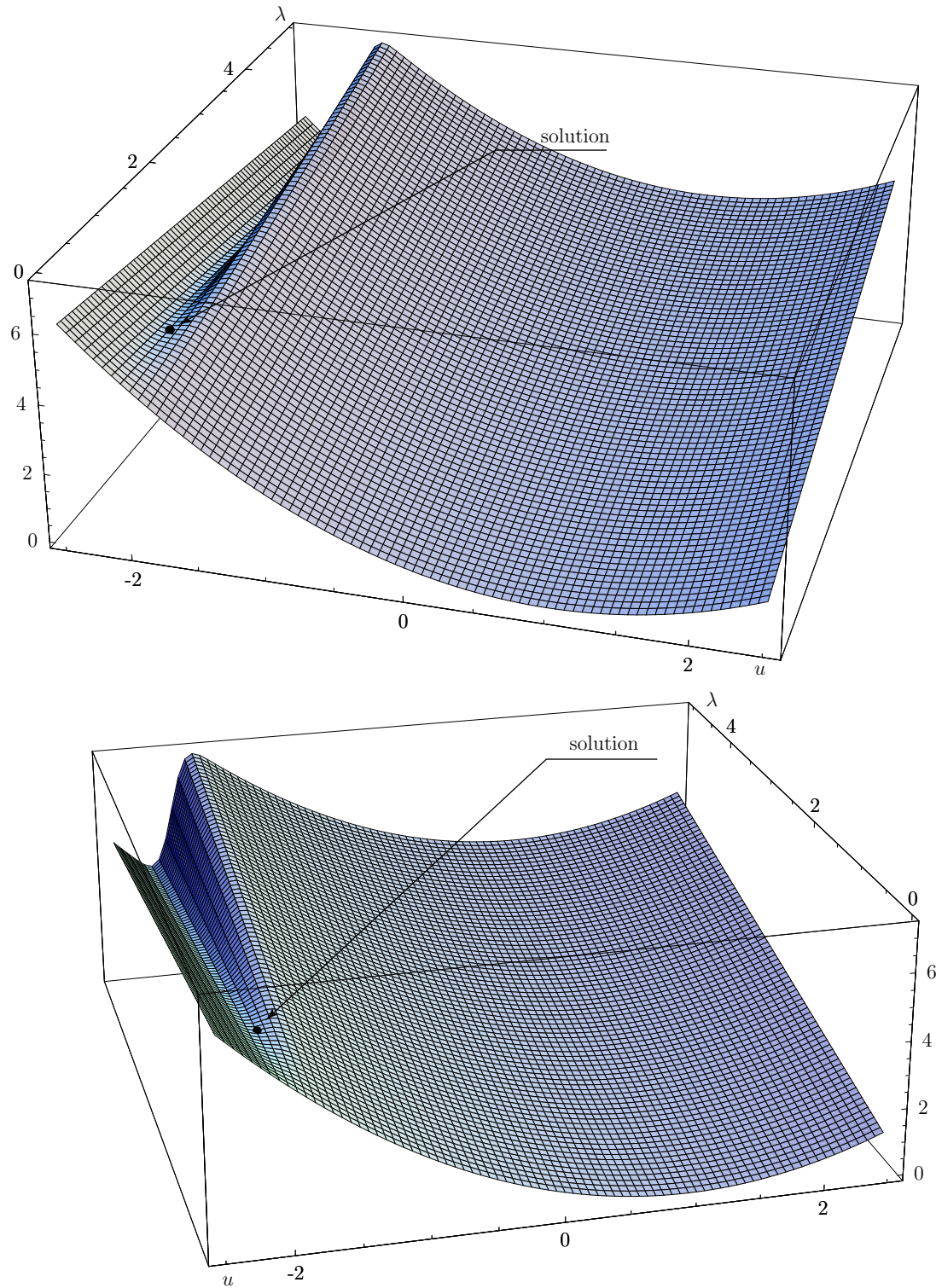


FIG. 5.3 – Lagrangien et solution

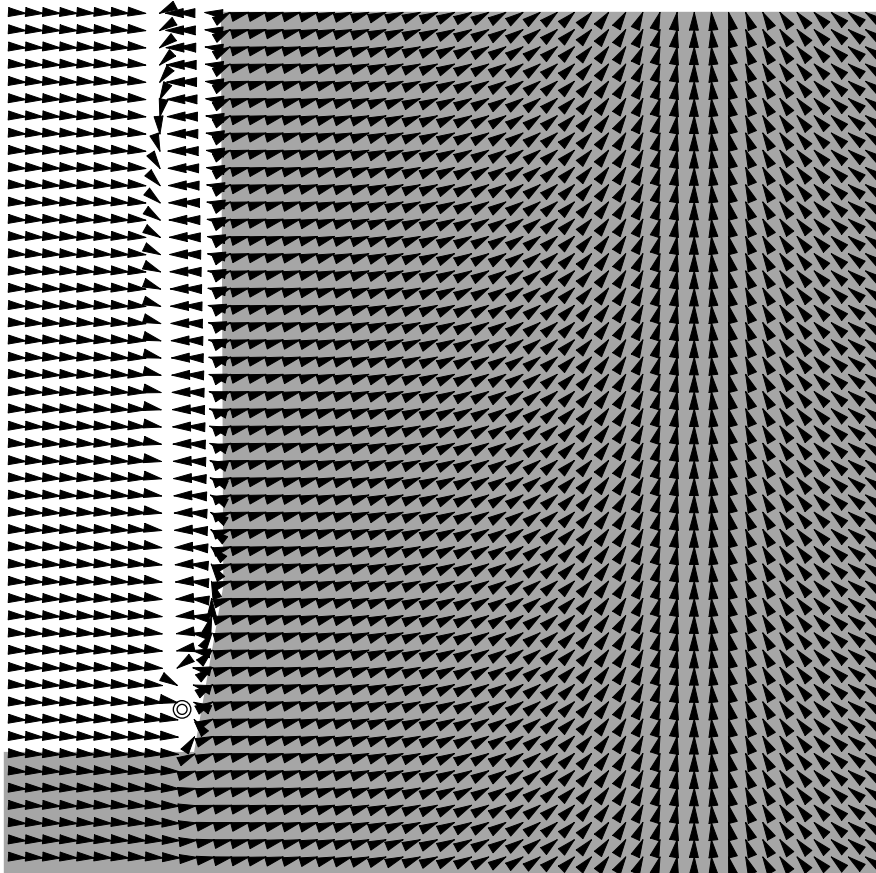


FIG. 5.4 – Champs de vecteurs pour l'algorithme d'Arrow-Hurwicz

On considère maintenant le problème de finance réduit à la variable v (on fixe $u = 0$) et à la contrainte en probabilité (la contrainte $u + v \leq 1$ se réduit à $v \leq 1$ et peut être traitée par projection ; seule la contrainte en probabilité est traitée par dualité et on désigne par λ le multiplicateur correspondant). Autrement dit, le problème s'écrit

$$\min_{0 \leq v \leq 1} \left(\frac{1}{2}(1-v)^2 - 2(1-v) - (1 + \bar{\xi})v \right)$$

$$\text{s.c. } \psi \left(\frac{1+\ell}{v} - 1 \right) \leq 1-p,$$

avec $\bar{\xi} = 0.4$ et $\ell = 0.15$.

La solution du problème sans contrainte est $v^* = 0.4$, le coût optimal vaut alors -1.28 , correspondant à une probabilité 0.107959 de rembourser la dette en fin de période.

Plaçons-nous dans le cas où $p = 0.24$. On a alors $v^* = 0.504075$, $\lambda^* = 0.0881451$, et le coût optimal vaut -1.57458 . La surface du Lagrangien est représentée sur la Figure 5.5.

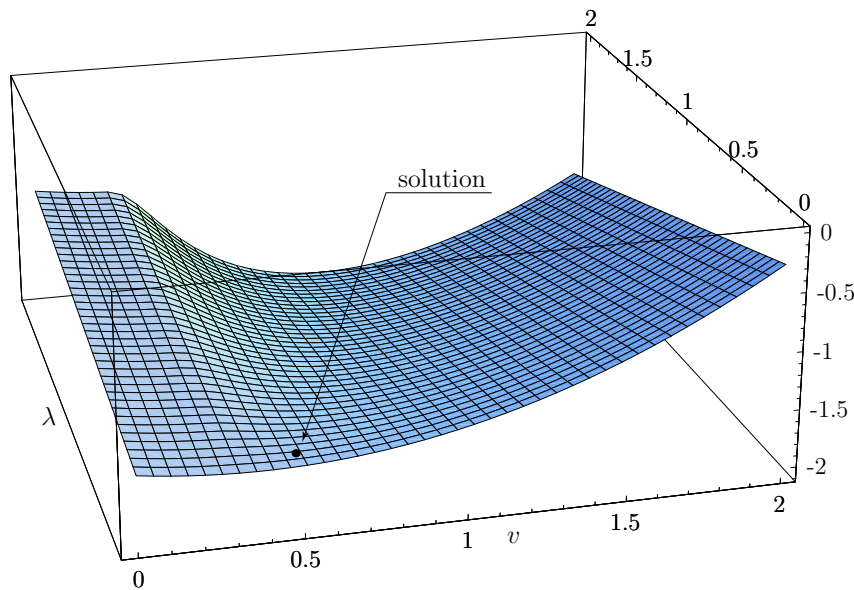


FIG. 5.5 – Lagrangien et solution — Cas $p = 0.24$

La Figure 5.6 représente le champs de vecteurs de l'algorithme d'Arrow-Hurwicz. Le phénomène de superposition entre la forme convexe de la fonction coût et la forme non convexe de la fonction de répartition (pondérée par λ) peut encore s'observer, sauf que la fonction de répartition est maintenant composée avec la fonction décroissante en v de la contrainte. Au final, on voit que le champs de vecteurs comporte un vortex autour de la solution, mais aussi une zone, pour v petit, dans laquelle l'algorithme tend à éloigner les itérées vers des valeurs grandes de λ un peu comme dans le cas du problème élémentaire précédent. Ce phénomène sera plus prononcé avec le cas où $p = 0.57$ par exemple. Pour ce niveau de probabilité, $v^* = 0.978591$, $\lambda^* = 1.55926$, et le coût optimal vaut -1.41262 . La surface du Lagrangien est représentée sur la Figure 5.7. Le champs de vecteurs de l'algorithme d'Arrow-Hurwicz est représenté sur la Figure 5.8.

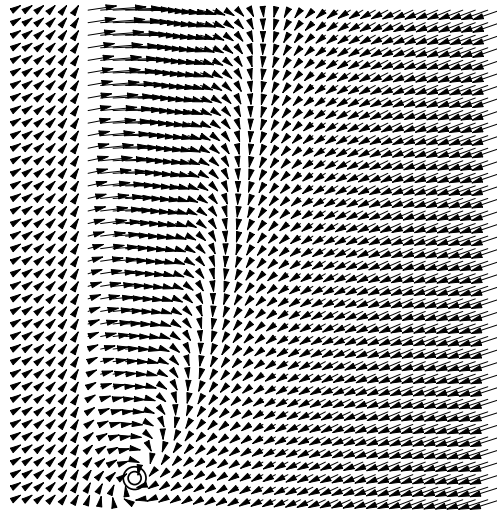


FIG. 5.6 – Champs de vecteurs pour l'algorithme d'Arrow-Hurwicz — Cas $p = 0.24$

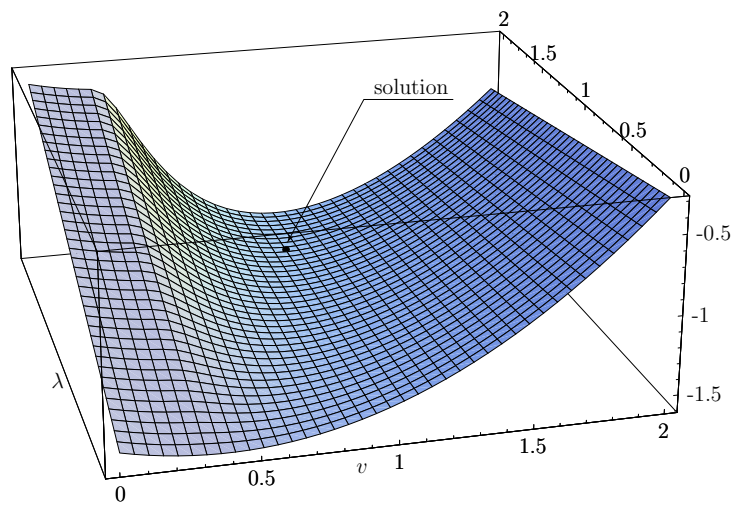


FIG. 5.7 – Lagrangien et solution — Cas $p = 0.57$

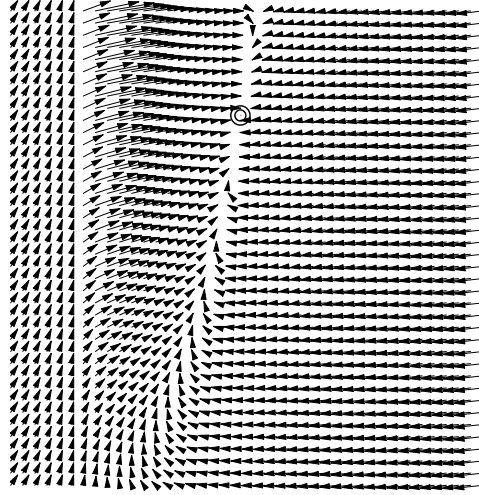


FIG. 5.8 – Champs de vecteurs pour l’algorithme d’Arrow-Hurwicz — Cas $p = 0.57$

5.2.2 La dégénérescence du multiplicateur

On considère le problème

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{R}} & \frac{1}{2}(u-1)^2 \\ \text{s.c. } & \mathbb{P}\{u\xi \leq \alpha\} \geq p, \end{aligned}$$

où ξ est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$. La contrainte peut encore une fois se réécrire sous la forme

$$\psi(u, \alpha) \geq p,$$

où la fonction de répartition de la variable aléatoire $u\xi$ est donnée par :

$$\psi(u, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < u(1-\varepsilon), \\ (\alpha - u(1-\varepsilon))/(2u\varepsilon) & \text{si } u(1-\varepsilon) \leq \alpha \leq u(1+\varepsilon), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La solution de ce problème, en considérant le Lagrangien $L(u, \lambda, \alpha, p) = J(u) + \lambda(\psi(u, \alpha) - p)$, avec $\lambda \leq 0$, est donnée par

$$u^* = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon(2p-1)}, \quad \lambda^* = -\frac{2\alpha\varepsilon(1 - \alpha + \varepsilon(2p-1))}{(1 + \varepsilon(2p-1))^3},$$

si $u^* \leq 1$, i.e. si $\alpha \leq 1 + \varepsilon(2p-1)$; sinon, la solution optimale est $u^* = 1$ et $\lambda^* = 0$, c’est le cas où la contrainte n’est pas saturée.

Le coût optimal vaut donc

$$\varphi(\alpha, p) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha - 1 + \varepsilon(1-2p)}{1 + \varepsilon(2p-1)} \right)^2 & \text{si } \alpha \leq 1 + \varepsilon(2p-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a aussi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, p) = \begin{cases} \frac{\alpha - 1 + \varepsilon(1 - 2p)}{(1 + \varepsilon(2p - 1))^2} & \text{si } \alpha \leq 1 + \varepsilon(2p - 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(\alpha, p) = \begin{cases} -2\alpha\varepsilon \frac{\alpha - 1 + \varepsilon(1 - 2p)}{(1 + \varepsilon(2p - 1))^3} & \text{si } \alpha \leq 1 + \varepsilon(2p - 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On observe que $\lambda^* = -\partial\varphi/\partial p$ comme il se doit. Cependant, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda^* = 0$ alors que la contrainte reste pourtant active (du moins lorsque $\alpha \leq 1 + \varepsilon(2p - 1) \rightarrow 1$). Ceci s'explique par le fait que la dérivée en u de la contrainte à l'optimum tend vers l'infini lorsque ε tend vers 0. En effet,

$$\left. \frac{\partial \psi(u, \alpha)}{\partial u} \right|_{u=u^*} = -\left. \frac{\alpha}{2\varepsilon u^2} \right|_{u=\frac{\alpha}{1+\varepsilon(2p-1)}} = -\frac{(1 + \varepsilon(2p - 1))^2}{2\alpha\varepsilon}.$$

Par contre, $\partial\varphi/\partial\alpha \rightarrow \alpha - 1$ qui est non nul sauf si $\alpha \rightarrow 1$, auquel cas la contrainte devient en fait inactive (en effet, $u^* \rightarrow \alpha$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et 1 est la solution du problème sans contrainte). Autrement dit, alors que la contrainte reste active si $\alpha < 1$ et $p > 0$ lorsque ε tend vers 0, la sensibilité du coût optimal φ par rapport à p (ou le multiplicateur λ^*) devient nulle alors que la sensibilité du coût optimal φ par rapport à α garde une valeur non nulle.

Pour comprendre ce phénomène, on peut aussi étudier la relation générale qui existe entre ces deux sensibilités. On a

$$\varphi(\alpha, p) = \min_u \max_{\lambda \leq 0} L(u, \lambda, \alpha, p),$$

et, dans l'hypothèse où ces dérivées existent, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, p) = \frac{\partial L}{\partial \alpha}(u^*, \lambda^*, \alpha^*, p^*) = \lambda^* \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(u^*, \alpha) = \lambda^* d(u^*, \alpha),$$

$d(u^*, \alpha)$ désignant la densité de la variable aléatoire $u^* \xi$ au point α , et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(\alpha, p) = \frac{\partial L}{\partial p}(u^*, \lambda^*, \alpha^*, p^*) = -\lambda^*.$$

On en déduit la relation, que l'on peut vérifier sur l'exemple,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, p) = -\frac{\partial \varphi}{\partial p}(\alpha, p) d(u^*, \alpha).$$

Dans le cas qui nous intéresse, lorsque ε tend vers 0, la densité, évaluée pour u^* qui tend vers α , tend vers l'infini, λ^* tend vers 0, mais $\partial\varphi/\partial\alpha$ tend vers une valeur finie et non nulle, à savoir $\alpha - 1$.

L'explication de ces phénomènes est la suivante. On sait que la contrainte s'écrit en général (avec dans notre exemple particulier $g(u, \xi) = u\xi$) :

$$\mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq \alpha\} = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha - g(u, \xi))\right] \geq p.$$

Lorsque la variable $g(u, \xi)$ est vraiment aléatoire, la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ a priori discontinue (donc de dérivée infinie au point crucial) est lissée par l'aléa. On ne bénéficie plus de ce lissage lorsque la variable tend à devenir déterministe (ici lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans le problème de finance lorsque v^* se trouve être nul). La méthode de l'approximation par convolution, qui s'attaque directement à la discontinuité de I en la lissant, apporte une certaine forme de remède à ce problème. Ce n'est pas le cas avec la méthode d'intégration par parties, qui est elle une méthode exacte.

5.2.3 Illustration sur le problème de finance

Les considérations qui précèdent ont montré que la non convexité typique d'un problème avec contrainte en probabilité provient de l'apparition de la fonction de répartition dans l'expression du Lagrangien. La forme typique d'une fonction de répartition (pour le cas le plus simple d'une densité de probabilité "à une seule bosse") est d'être plate pour les valeurs extrêmes (grandes et petites) de son argument (donc de gradient pratiquement nul dans ces plages de valeurs), et d'être pentue (donc de gradient "grand") pour les valeurs intermédiaires, c'est-à-dire là où la densité de probabilité est condensée.

Ce phénomène de non convexité sera d'autant plus brutal que la densité sera concentrée dans un petit intervalle. Ceci peut se produire lorsque la variance des bruits est "petite" (cas du problème au paragraphe précédent) ou bien, et c'est ce qui se passe dans le problème de finance, lorsque pour certaines valeurs des décisions, le bruit est "tué". Pour illustrer ce phénomène, la Figure 5.9 montre la forme de la fonction "contrainte" des deux variables de décision u et v du problème de finance (à savoir, $\psi((1+\ell)/v - (1+b)u/v - 1)$, où ψ est la fonction de répartition du taux aléatoire), sachant que le phénomène de "killing" du bruit se produit lorsque v passe à 0 : la discontinuité se produit alors selon que $u < (1+\ell)/(1+b) = 0.9583333$ (contrainte satisfaite avec la probabilité 0) ou plus grand que cette valeur (contrainte satisfaite avec la probabilité 1). On rappelle qu'en raison de cette discontinuité, le multiplicateur associé à la contrainte en probabilité peut passer à 0 (pour compenser un gradient infini de la contrainte) même si la contrainte est active.

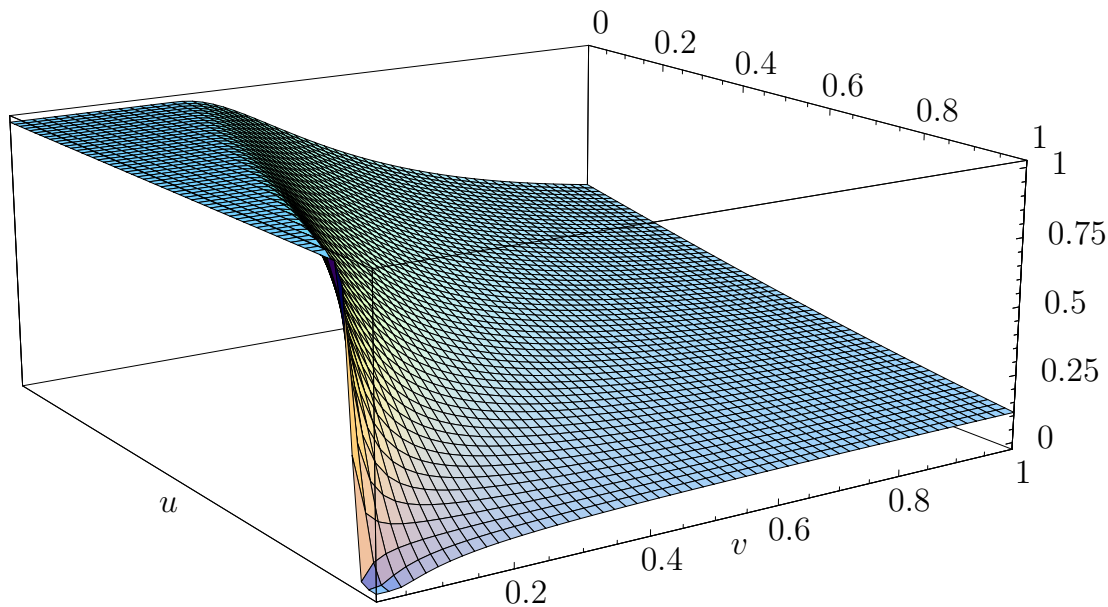


FIG. 5.9 – Discontinuité de la fonction contrainte pour le problème de finance

Nous présentons dans la suite de ce chapitre trois méthodes permettant de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité par un algorithme de type gradient stochastique.

5.3 Première méthode : l'intégration par parties

5.3.1 Cas d'une seule fonction indicatrice

Lemme 5.4. Soit $J(u) = \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u)) \right]$, où

- ξ est une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité admet une densité q par rapport à la mesure de Lebesgue, q est supposée $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;
- u est une variable de décision ;
- g est à valeurs dans \mathbb{R} et \mathcal{C}^1 .

Alors

$$J'(u) = \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u)) g'(u) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \right].$$

Démonstration. Notons $\mathbb{Y}(x)$ une primitive de $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$. On a

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u)) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u)) q(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Y}'(\xi - g(u)) q(\xi) d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Y}(\xi - g(u)) q'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J'(u) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} \left(\mathbb{Y}(\xi - g(u)) q'(\xi) \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u)) g'(u) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} q(\xi) d\xi \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u)) g'(u) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \right]. \end{aligned}$$

□

Cette méthode peut facilement se généraliser au cas où ξ est une variable aléatoire multidimensionnelle, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$: l'intégration par parties se fait alors uniquement par rapport à l'une des variables aléatoires ξ_i :

Théorème 5.5. Soit $\psi(u) = \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(g(u, \xi)) \right]$, où $\xi \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur aléatoire de densité q , g est à valeurs dans \mathbb{R} et \mathcal{C}^1 . On suppose que $\forall \xi, q(\xi) \neq 0$. Notons $\mathbb{Y}_{\mathbb{R}^+}(\cdot)$ la primitive de $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\cdot)$. Alors, par intégration par parties, on a

$$\psi(u) = \mathbb{E} \left[\mathbb{Y}_{\mathbb{R}^+}(g(u, \xi)) M_i(u, \xi) \right],$$

avec

$$M_i(u, \xi) = \frac{1}{g'_{\xi_i}(u, \xi)} \frac{\partial \log(g'_{\xi_i}(u, \xi)/q(\xi))}{\partial \xi_i}.$$

On en déduit alors que

$$\psi'(u) = \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(g(u, \xi)) g'_u(u, \xi) M_i(u, \xi) + \mathbb{Y}_{\mathbb{R}^+}(g(u, \xi)) (M_i)'_u(u, \xi) \right],$$

avec

$$(M_i)'_u(u, \xi) = \frac{q'_{\xi_i}(\xi)}{q(\xi)} \frac{g''_{\xi_i u}(u, \xi)}{(g'_{\xi_i}(u, \xi))^2} + \frac{g'''_{\xi_i^2 u}(u, \xi)}{(g'_{\xi_i}(u, \xi))^2} - 2 \frac{g''_{\xi_i^2}(u, \xi) g''_{\xi_i u}(u, \xi)}{(g'_{\xi_i}(u, \xi))^3}.$$

Application au problème de finance

Nous pouvons désormais calculer facilement le gradient du Lagrangien associé au problème de finance. Ce Lagrangien s'écrit

$$L(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E} \left[j(u, v, \xi) + \lambda_1 (u + v - 1) + \lambda_2 \left(p - \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u, v)) \right) \right],$$

avec

$$g(u, v) = \frac{1+l}{v} - \frac{(1+b)u}{v} - 1.$$

Grâce au Lemme 5.4, on a alors

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E} \left[j'_u(u, v, \xi) + \lambda_1 - \lambda_2 \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u, v)) (g')_u(u, v) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \right] \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial v}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E} \left[j'_v(u, v, \xi) + \lambda_1 - \lambda_2 \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u, v)) (g')_v(u, v) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \right] \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = u + v - 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = p - \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u, v)) \right],$$

avec

$$\begin{aligned} (j')_u(u, v, \xi) &= u + v - b, \\ (j')_v(u, v, \xi) &= u + v - \xi, \\ (g')_u(u, v) &= -\frac{1+b}{v}, \\ (g')_v(u, v) &= \frac{(1+b)u - 1 - l}{v^2} \\ \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} &= 4 \frac{(\xi - \bar{\xi})}{(\xi - \bar{\xi})^2 - \sigma^2} \mathbb{I}_{[\bar{\xi} - \sigma, \bar{\xi} + \sigma]}(\xi). \end{aligned}$$

Notons ℓ la fonction sous l'espérance, i.e.,

$$L(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E}[\ell(u, v, \lambda_1, \lambda_2, \xi)].$$

L'algorithme général est donc le suivant :

- on se donne $(u^0, v^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0) \in (\mathbb{R}^+)^4$, et 2 σ -suites $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- à l'étape k de l'algorithme, u^k, v^k, λ_1^k et λ_2^k étant donnés, on tire (ou on observe) ξ^{k+1} selon sa loi de probabilité, puis on remet à jour les variables primales par

$$u^{k+1} = \max(0, u^k - \varepsilon^k (\ell')_u(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})),$$

$$v^{k+1} = \max(0, v^k - \varepsilon^k (\ell')_v(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})),$$

et les variables duales par

$$\lambda_1^{k+1} = \max(0, \lambda_1^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_1}(u^{k+1}, v^{k+1}, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})),$$

$$\lambda_2^{k+1} = \max(0, \lambda_2^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_2}(u^{k+1}, v^{k+1}, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})).$$

Nous avons programmé cet algorithme. Nous avons fixé le niveau de probabilité à 0.24, on a alors $u^* = 0$ et $v^* = 0.50407$, $\lambda_1^* = 0$ et $\lambda_2^* = 0.106$. Les courbes de la Figure 5.10 représentent,

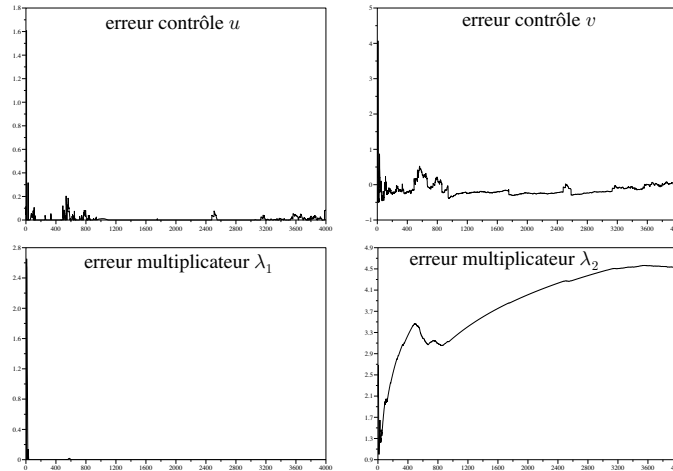


FIG. 5.10 – I.P., $p = 0.24$, version séquentielle

rappelons-le, les erreurs sur les variables primales et duales en fonction du nombre d’itérations ($u^k - u^*$ en fonction de k par exemple). Sur cet essai, les variables primales ainsi que le multiplicateur λ_1 associé à la contrainte $u + v \leq 1$ convergent. Par contre, le multiplicateur λ_2 associé à la contrainte en probabilité ne converge pas, mais à tendance à s’éloigner au contraire de la solution. Ceci illustre l’une des difficultés structurelles relatives à un problème d’optimisation sous contrainte en probabilité, que l’on a décrite au paragraphe 5.2.1.

Afin de limiter ces instabilités numériques, nous avons programmé la version parallèle de l’algorithme :

- on se donne $(u^0, v^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0) \in (\mathbb{R}^+)^4$, et 2 σ -suites $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- à l’étape k de l’algorithme, u^k, v^k, λ_1^k et λ_2^k étant donnés, on tire (ou on observe) ξ^{k+1} selon sa loi de probabilité, puis on remet à jour les variables primales par

$$u^{k+1} = \max(0, u^k - \varepsilon^k (\ell')_u(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})),$$

$$v^{k+1} = \max(0, v^k - \varepsilon^k (\ell')_v(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})),$$

et les variables duales par

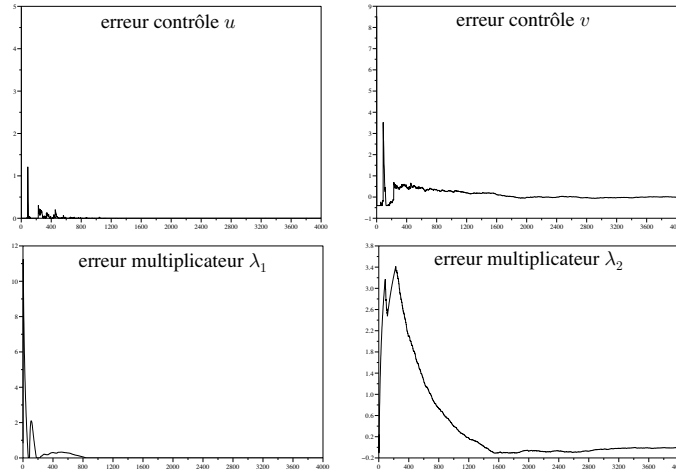
$$\lambda_1^{k+1} = \max(0, \lambda_1^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_1}(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})),$$

$$\lambda_2^{k+1} = \max(0, \lambda_2^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_2}(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})).$$

Toujours pour $p = 0.24$, nous avons obtenu les résultats présentés sur la Figure 5.11.

On constate que la version parallèle de l’algorithme, lorsque l’initialisation des variables duales est “raisonnable”, réduit fortement les instabilités observées précédemment avec la version séquentielle.

Remarque 5.6. : Une initialisation “raisonnable” des variables duales signifie que ces variables ont été initialisées à des valeurs inférieures à 10.

FIG. 5.11 – I.P., $p = 0.24$, version parallèle

Application au problème du mobile

On écrit la contrainte (5.1) sous la forme d'une contrainte en espérance :

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t_f - \tau) \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \right] \leq 1 - p. \quad (5.6)$$

Si nous supposons que le support de la loi de τ est inclus dans $[0, t_f]$, on a $\mathbb{I}_{[0, t_f]}(\tau) = 1$ (comme t_f dépend des commandes utilisées, cette hypothèse doit être vérifiée pour toute commande que l'on peut être amené à utiliser raisonnablement dans le problème). La contrainte (5.6) s'écrit alors

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \right] \leq 1 - p.$$

Sur cet exemple, les calculs des gradients sont plus compliqués et nous n'allons pas directement appliquer le résultat du Lemme 5.4, mais certains calculs qui ont été faits dans la démonstration. Notons $Y(x)$ une primitive de $\mathbb{I}_{[-D, D]}(x)$. En faisant une intégration par parties sur ξ , on montre que

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \right] = \mathbb{E} \left[Y(x(\tau) - \xi) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \right]. \quad (5.7)$$

Nous pouvons désormais calculer le gradient du Lagrangien associé au problème du mobile. En utilisant cette nouvelle expression de la contrainte, ce Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} L(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2) = & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[t_f + \int_0^{t_f} u^2(t) dt + \lambda_1 (x(t_f) - 1) \right. \\ & \left. + \lambda_2 \left(Y(x(\tau) - \xi) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} - 1 + p \right) \right] q(\xi) \bar{q}(\tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Notons ℓ la fonction sous l'espérance, i.e.,

$$L(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E}[\ell(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau)].$$

En utilisant la technique de l'état adjoint présentée dans l'annexe A, la variation de ℓ s'écrit

$$\delta\ell(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau) = \langle 2u + \lambda, \delta u \rangle + \langle \lambda_1 u(t_f) + 1 + u^2(t_f), \delta t_f \rangle.$$

Notons $\mathcal{H} = u^2 + \lambda u$ l'Hamiltonien. A l'optimum, l'adjoint est défini par :

$$\dot{\lambda} = -\mathcal{H}'_x = 0, \quad (5.8)$$

$$\lambda(t_f) = \lambda_1, \quad (5.9)$$

$$\lambda_2 \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} + \lambda_+(\tau) - \lambda_-(\tau) = 0. \quad (5.10)$$

L'équation (5.8) montre que λ est constante par morceaux, égale à λ_1 après l'instant τ , et à $\lambda_- = \lambda_2 \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} + \lambda_1$ avant τ d'après (5.10).

On a

$$\begin{aligned} \ell'_u(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau) &= 2u + \lambda, \\ \ell'_{t_f}(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau) &= 1 + u^2(t_f) + \lambda_1 u(t_f), \\ \ell'_{\lambda_1}(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau) &= x(t_f) - 1, \\ \ell'_{\lambda_2}(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau) &= Y(x(\tau) - \xi) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} - 1 + p; \end{aligned}$$

et l'algorithme est le suivant :

- on se donne $t_f^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0$, 2 σ -suites $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on tire τ^0 et ξ^0 selon leur loi de probabilité; on discrétise l'intervalle $[0, t_f^0]$ en 100 pas; on se donne u^0 ; on calcule l'état x^0 (dans ce calcul, la commande u^0 à l'instant t est obtenue par interpolation linéaire), puis l'état adjoint λ^0 ;
- à l'étape k de l'algorithme, u^k, t_f^k, λ_1^k et λ_2^k étant donnés, on tire (ou on observe) ξ^{k+1} et τ^{k+1} selon leur loi de probabilité, puis on remet à jour les variables primales sur $[0, t_f^k]$ par

$$u^{k+1} = u^k - \varepsilon^k (\ell')_u(u^k, t_f^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1}, \tau^{k+1}),$$

$$t_f^{k+1} = \max(0.5, t_f^k - \varepsilon^k (\ell')_{t_f}(u^k, t_f^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1}, \tau^{k+1})),$$

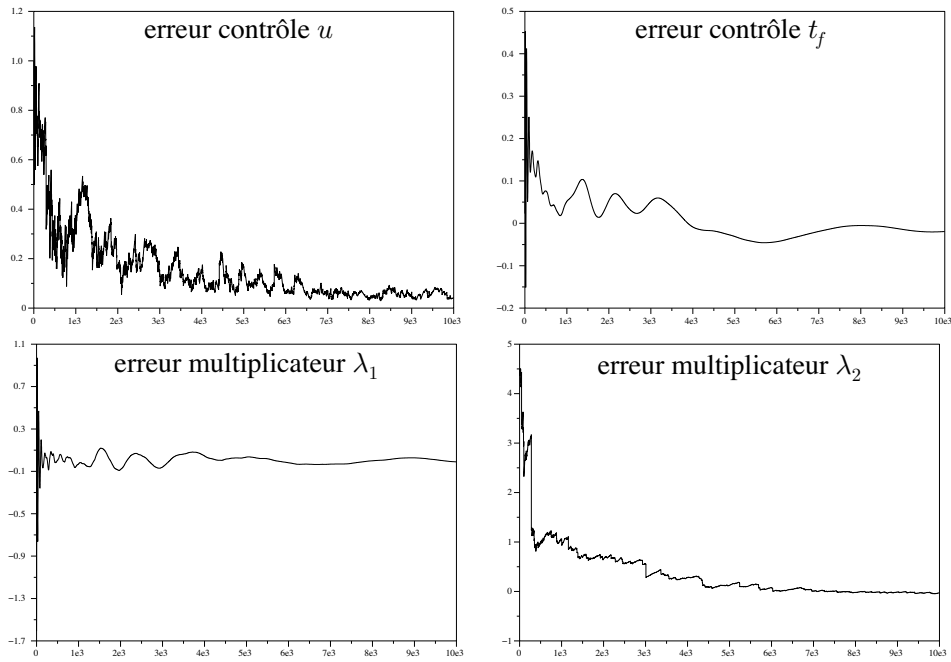
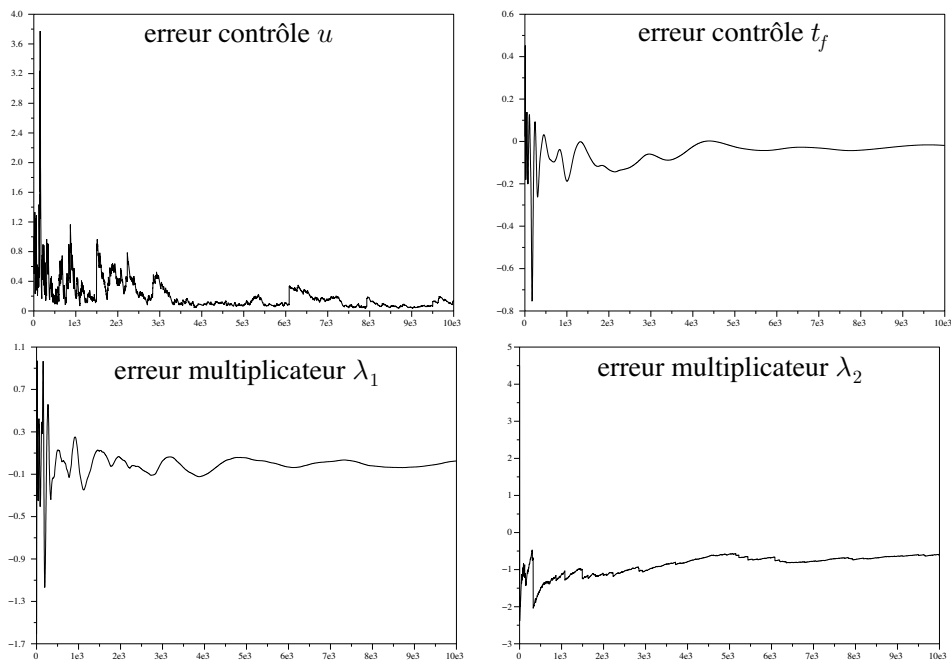
on remet à jour la discrétisation de $[0, t_f]$ car t_f^{k+1} a pu bouger; puis, sur ce nouvel intervalle, on recalcule u^{k+1} (par interpolation linéaire), on rééchantillonne u^* sur $[0, t_f^{k+1}]$, et on recalcule x^{k+1} à partir de u^{k+1} sur $[0, t_f^{k+1}]$ ainsi que l'état adjoint; enfin, on remet à jour les variables duales par

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_1}(u^{k+1}, t_f^{k+1}, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1}, \tau^{k+1}),$$

$$\lambda_2^{k+1} = \max(0, \lambda_2^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_2}(u^{k+1}, t_f^{k+1}, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1})).$$

Remarque 5.7. Comme on a supposé que la densité \bar{q} de τ est uniforme sur $[0, 0.5]$, la projection dans la remise à jour de t_f^{k+1} permet d'exclure les cas où le mobile termine le parcours avant que la bombe ne soit tombée.

Les résultats sont présentés sur la Figure 5.12. L'algorithme a convergé sur la plupart des essais que nous avons faits; mais on a rencontré quelques essais sur lesquels l'algorithme n'a pas convergé, comme le montre la Figure 5.13. Sur cet essai, le multiplicateur associé à la contrainte en probabilité n'a pas convergé.

FIG. 5.12 – I.P., $p = 0.88$ FIG. 5.13 – I.P., $p = 0.88$, cas de non convergence

Nous avons souhaité améliorer la convergence asymptotique de l'algorithme décrit ci-dessus en utilisant l'algorithme de Poljak. Rappelons que l'idée de cet algorithme consiste à laisser les trajectoires explorer un domaine plus large en ralentissant la décroissance vers 0 du pas, mais de réduire la variance en moyennant les trajectoires ; cette méthode permet d'améliorer asymptotiquement un algorithme de gradient stochastique. Pour cela, nous avons repris l'essai présenté sur la Figure 5.12, sur lequel l'algorithme converge. Les résultats sont présentés sur la Figure 5.14. On observe que les courbes d'erreur sont plus lisses.

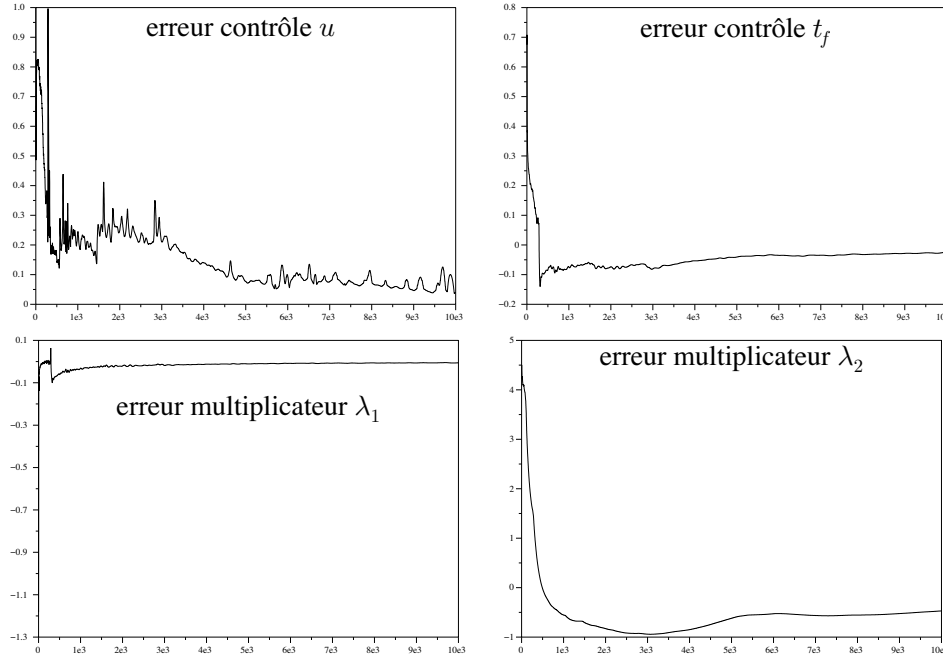


FIG. 5.14 – I.P., $p = 0.88$, algorithme de Poljak

Une difficulté apparaît en revanche lorsque l'on doit traiter un produit de fonctions indicatrices : comment écrire une primitive de ce produit de fonctions sans faire apparaître la fonction indicatrice ? Si l'aléa est de dimension 2 une solution envisageable consiste alors à faire précéder l'intégration par parties d'un changement de variables.

5.3.2 Cas du produit de deux fonctions indicatrices

Nous considérons le cas où l'on doit traiter le produit de deux fonctions indicatrices. Ce produit survient lorsque l'événement critique à la probabilité duquel on s'intéresse est défini par le "et" logique de deux conditions. Par exemple, dans le problème du mobile, pour que le mobile soit détruit il faut que la bombe tombe avant l'arrivée du mobile à l'extrémité du segment à parcourir, i.e. $\tau < t_f$, et que le point d'impact soit à une distance de moins de D de la position du mobile au moment de l'impact. On peut très bien également concevoir des exemples pour lesquels il faut deux conditions, bien que l'aléa soit de dimension 1. Avec la méthode de l'intégration par parties, il ne nous semble a priori pas possible de traiter de tels cas : on ne sait pas écrire une primitive du produit des deux fonctions indicatrices sans faire apparaître la fonction indicatrice. Par contre, ces cas pourront facilement être traités avec la méthode de l'approximation par convolution, présentée à la section suivante. Lorsque l'aléa est de dimension 2, ce qui est le cas pour le problème du mobile, l'intégration par parties est précédée d'un changement de variables (on va faire en fait deux intégrations par parties successives).

Cas général

Les calculs étant assez compliqués, on ne fait qu'esquisser la démarche qu'il est préférable de chercher à reproduire sur chaque exemple particulier plutôt que de chercher à appliquer des formules générales beaucoup plus touffues.

On cherche à transformer l'expression suivante

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathbb{P}\left\{(g_1(u, \xi) \leq \alpha_1) \cap (g_2(u, \xi) \leq \alpha_2)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_1 - g_1(u, \xi)) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_2 - g_2(u, \xi))\right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

où

- ξ est une variable aléatoire dans \mathbb{R}^n dont la loi de probabilité admet une densité q par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- u est une variable de décision dans un espace \mathcal{T} ;
- g_1 et g_2 sont des applications de $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} ;
- α_1 et α_2 sont des scalaires.

Rappelons que l'objectif est d'écrire (5.11) sous la forme d'une autre espérance où $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ disparaît au profit de \mathbb{Y} , une primitive de $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ avec $\mathbb{Y}(x) = x$ si $x \geq 0$, $\mathbb{Y}(x) = 0$ sinon. La motivation est de pouvoir ensuite calculer un "gradient stochastique" de l'expression (5.11) par rapport à u .

Le point de départ de la démarche est qu'il est facile de trouver une "double" primitive de la fonction $(z_1, z_2) \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z_1)\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z_2)$, en ce sens que

$$\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z_1)\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z_2) = \frac{\partial^2 \mathbb{Y}(z_1)\mathbb{Y}(z_2)}{\partial z_1 \partial z_2},$$

alors qu'il serait plus difficile de partir d'une stratégie analogue si on voulait travailler avec un sous-vecteur (ξ_1, ξ_2) de ξ . On suppose ici que $n \geq 2$.

L'idée est donc celle d'un "changement de variables" qui introduit, dans le calcul de (5.11), les variables $(z_1, z_2) = (g_1(u, \xi), g_2(u, \xi))$ à la place de deux variables scalaires (ξ_1, ξ_2) du vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$. On a ici un choix (il ne s'agit pas forcément des deux premières coordonnées de ξ) sous réserve que le changement de variables — qui dépend paramétriquement de u et des autres coordonnées de ξ — soit bien défini, c'est-à-dire que

$$\Delta(u, \xi) = \det \begin{vmatrix} \partial g_1(u, \xi)/\partial \xi_1 & \partial g_1(u, \xi)/\partial \xi_2 \\ \partial g_2(u, \xi)/\partial \xi_1 & \partial g_2(u, \xi)/\partial \xi_2 \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

soit presque partout non nul.

On va noter ξ_{-2} le vecteur de \mathbb{R}^{n-2} obtenu en enlevant au vecteur ξ les coordonnées ξ_1 et ξ_2 impliquées dans le changement de variables (donc $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_{-2})$), et $(h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2))$ le changement de variables inverse, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} z_1 = g_1(u, \xi) \\ z_2 = g_2(u, \xi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 = h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2) \\ \xi_2 = h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Notons que

$$\det \begin{vmatrix} \partial h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)/\partial z_1 & \partial h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)/\partial z_2 \\ \partial h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)/\partial z_1 & \partial h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)/\partial z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(u, (h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), \xi_{-2}))}, \quad (5.14)$$

où Δ a été défini par (5.12). Alors

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_1 - g_1(u, \xi)) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_2 - g_2(u, \xi)) \right] \\ &= \int \int \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_1 - g_1(u, \xi)) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_2 - g_2(u, \xi)) q(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \\ &= \int \int \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_1 - z_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_2 - z_2) \frac{q(h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), \xi_{-2})}{\left| \Delta(u, (h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), \xi_{-2})) \right|} d\xi_{-2} dz_1 dz_2 \\ &= \int \int \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_1 - z_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_2 - z_2) \ell(u, \xi_{-2}, z_1, z_2) d\xi_{-2} dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

en ayant posé

$$\ell(u, \xi_{-2}, z_1, z_2) = \frac{q(h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), \xi_{-2})}{\left| \Delta(u, (h_1(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), h_2(u, \xi_{-2}, z_1, z_2), \xi_{-2})) \right|}. \quad (5.16)$$

On accomplit les étapes suivantes :

- on observe d'abord que $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\alpha_1 - z_1) = -\partial \mathbb{Y}(\alpha_1 - z_1)/\partial z_1$ (et de même pour l'indice 2) ;
- l'intégration par parties en z_1 fait alors apparaître $\mathbb{Y}(\alpha_1 - z_1)$ au prix du remplacement de ℓ par sa dérivée $\partial \ell / \partial z_1$;
- l'opération analogue sur la variable z_2 fait apparaître $\mathbb{Y}(\alpha_2 - z_2)$ au prix du remplacement de $\partial \ell / \partial z_1$ par sa dérivée $\partial^2 \ell / \partial z_2 \partial z_1$;
- il est clair que la conduite des calculs en commençant plutôt par l'intégration par parties en z_2 suivie de celle en z_1 aurait conduit au même résultat qui s'énonce finalement

$$\begin{aligned} J(u) &= \int \int \mathbb{Y}(\alpha_1 - z_1) \mathbb{Y}(\alpha_2 - z_2) \frac{\partial^2 \ell(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} d\xi_{-2} dz_1 dz_2 \\ &= \int \int \mathbb{Y}(\alpha_1 - g_1(u, \xi)) \mathbb{Y}(\alpha_2 - g_2(u, \xi)) \frac{\partial^2 \ell(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} \Bigg|_{\substack{z_1=g_1(u, \xi) \\ z_2=g_2(u, \xi)}} \frac{|\Delta(u, \xi)|}{q(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

en ayant procédé au changement de variables inverse

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{Y}(\alpha_1 - g_1(u, \xi)) \mathbb{Y}(\alpha_2 - g_2(u, \xi)) \frac{\partial^2 \ell(u, \xi_{-2}, z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} \Bigg|_{\substack{z_1=g_1(u, \xi) \\ z_2=g_2(u, \xi)}} \frac{|\Delta(u, \xi)|}{q(\xi)} \right].$$

On voit à quel point cette expression serait compliquée une fois développée, et cette complexité augmente encore si l'on veut calculer la différentielle en u . Cette différentielle ferait apparaître a priori des termes en \mathbb{Y} comme des termes en $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+} = \mathbb{Y}'$; de nouvelles opérations d'intégration par parties pourraient avoir pour objectif soit de faire disparaître les termes en \mathbb{Y} , soit de faire disparaître les termes en $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$.

Application au problème du mobile

On considère dans ce problème la quantité

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t_f - \tau) \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \right], \quad (5.17)$$

les variables aléatoires étant ici ξ et τ , de densités respectives $q(\cdot)$ et $\bar{q}(\cdot)$. On note $Y(x)$ une primitive de $\mathbb{I}_{[-D, D]}(x)$.

En vertu de la démarche générale précédente, on introduit le changement de variables

$$z_1 = x(\tau) - \xi, \quad z_2 = t_f - \tau,$$

et $\Delta(\cdot, \cdot)$ de (5.12) se trouve ici être identiquement égal à 1. Le changement de variables inverse s'écrit

$$\xi = x(t_f - z_2) - z_1, \quad \tau = t_f - z_2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t_f - \tau) \right] &= \int \int \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t_f - \tau) q(\xi) \bar{q}(\tau) d\xi d\tau \\ &= \int \int \mathbb{I}_{[-D, D]}(z_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z_2) q(x(t_f - z_2) - z_1) \bar{q}(t_f - z_2) dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

par changement de variables,

$$= \int \int Y(z_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z_2) q'(x(t_f - z_2) - z_1) \bar{q}(t_f - z_2) dz_1 dz_2$$

par intégration par parties en z_1 ,

$$\begin{aligned} &= \int \int Y(z_1) \mathbb{Y}(z_2) \left(q''(x(t_f - z_2) - z_1) \dot{x}(t_f - z_2) \bar{q}(t_f - z_2) \right. \\ &\quad \left. + q'(x(t_f - z_2) - z_1) \bar{q}'(t_f - z_2) \right) dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

par intégration par parties en z_2 ,

$$\begin{aligned} &= \int \int Y(x(\tau) - \xi) \mathbb{Y}(t_f - \tau) \left(q''(\xi) u(\tau) \bar{q}(\tau) \right. \\ &\quad \left. + q'(\xi) \bar{q}'(\tau) \right) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (5.18)$$

par changement de variables inverse (et avec $\dot{x} = u$),

$$= \mathbb{E} \left[Y(x(\tau) - \xi) \mathbb{Y}(t_f - \tau) \left(\frac{q''(\xi)}{q(\xi)} u(\tau) + \frac{q'(\xi) \bar{q}'(\tau)}{q(\xi) \bar{q}(\tau)} \right) \right]. \quad (5.19)$$

Dans la section précédente, on a supposé que le support de $\bar{q}(\cdot)$ est toujours contenu dans l'intervalle $[0, t_f]$ et, sous cette hypothèse, on a trouvé l'expression suivante :

$$\mathbb{E} \left[Y(x(\tau) - \xi) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \right] \quad (5.20)$$

Le lien entre (5.19) et (5.20) ne saute pas aux yeux mais est bien réel sous l'hypothèse retenue. En effet, dans ce cas, $\mathbb{Y}(t_f - \tau) = t_f - \tau$. Alors (5.19) prend la forme

$$\int \int Y(x(\tau) - \xi)(t_f - \tau)(q''(\xi)\bar{q}(\tau)\dot{x}(\tau) + q'(\xi)q'(\tau)) d\xi d\tau.$$

Dans le premier terme de la somme ci-dessus, on opère une intégration par parties en ξ pour transformer q'' en q' . Dans le second terme de cette somme, on opère une intégration par parties en τ pour transformer \bar{q}' en \bar{q} . Ceci donne

$$\begin{aligned} & \int \int \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi)(t_f - \tau)q'(\xi)\bar{q}(\tau)\dot{x}(\tau) d\xi d\tau \\ & + \int \int \left(Y(x(\tau) - \xi) - \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi)(t_f - \tau)\dot{x}(\tau)q'(\xi)\bar{q}(\tau) \right) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Après simplification, le résultat se réécrit bien sous la forme (5.20).

Intéressons-nous maintenant au gradient du Lagrangien associé à ce problème. On a

$$\begin{aligned} L(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2) = & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[t_f + \int_0^{t_f} u^2(t) dt + \lambda_1 (x(t_f) - 1) + \lambda_2 \left(Y(x(\tau) - \xi) \mathbb{Y}(t_f - \tau) \left[(\log \bar{q}(\tau))' (\log q(\xi))' \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{q''(\xi)}{q(\xi)} u(\tau) \right] - 1 + p \right) \right] q(\xi) \bar{q}(\tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Pour une variation $\delta u(\cdot)$ de la commande autour d'une trajectoire nominale, on obtient une variation $\delta x(\cdot)$ de la trajectoire de x et une variation δt_f de l'instant final. Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta \ell(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \tau) = & \delta t_f + u^2(t_f) \delta t_f + \int_0^{t_f} 2u(s) \delta u(s) ds + \lambda_1 (u(t_f) \delta t_f + \delta x(t_f)) \\ & + \lambda_2 \mathbb{I}_{[-D, D]}(x(\tau) - \xi) \mathbb{Y}(t_f - \tau) \left[(\log \bar{q}(\tau))' (\log q(\xi))' + \frac{q''(\xi)}{q(\xi)} u(\tau) \right] \delta x(\tau) \\ & + \lambda_2 Y(x(\tau) - \xi) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t_f - \tau) \left[(\log \bar{q}(\tau))' (\log q(\xi))' + \frac{q''(\xi)}{q(\xi)} u(\tau) \right] \delta t_f \\ & + \lambda_2 Y(x(\tau) - \xi) \mathbb{Y}(t_f - \tau) \left[\frac{q''(\xi)}{q(\xi)} \right] \delta u(\tau). \end{aligned}$$

Le terme $\delta u(\tau)$ pose deux difficultés :

- comme $u \in L^2(0, 1)$, la quantité \dot{u} n'est pas bien définie ;
- le terme $\delta u(\tau)$ revient en fait à introduire un Dirac en τ sur la variation $\delta u(\cdot)$ de la trajectoire, ce qui est difficile à gérer d'un point de vue informatique.

Ainsi, même lorsqu'elle est facilement envisageable, la technique d'intégration par parties suppose un degré suffisant de régularité des contrôles (autrement, cette technique ne fait que déplacer le problème de régularité). On pourrait par exemple envisager que l'espace des contrôles soit l'espace de Sobolev

$$H^1(]0, 1[) = \left\{ u \in L^2(0, 1), \dot{u} \in L^2(0, 1) \right\},$$

autrement dit, $H^1(]0, 1[)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(0, 1)$ dont les dérivées (au sens des distributions) à l'ordre 1 sont dans $L^2(0, 1)$.

5.4 Deuxième méthode : l'approximation par convolution

5.4.1 Rappels

Cette méthode peut être décrite comme l'approximation d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par sa convolution avec une fonction approximant le Dirac lorsqu'un paramètre r tend vers 0. On considère pour cela une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs non négatives, d'intégrale égale à 1, paire et maximale en 0, et on bâtit l'approximation

$$f_r(x) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h\left(\frac{x-y}{r}\right) dy = f * h_r,$$

où

$$h_r(x) = \frac{1}{r} h\left(\frac{x}{r}\right),$$

en observant que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{x}{r}\right) dx = 1.$$

Comme on a supposé h paire, une autre écriture possible de f_r est

$$f_r(x) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h\left(\frac{y-x}{r}\right) dy,$$

ce qui s'interprète comme l'espérance de f pour une variable aléatoire y et de distribution $h(\cdot/r)/r$ centrée autour de x , donc de distribution de plus en plus concentrée autour de x lorsque $r \rightarrow 0$. L'approximation f_r est différentiable, et la théorie des distributions donne

$$(f_r)'(x) = f * (h_r)'(x) = f' * h_r(x) = \delta_0 * h_r(x) = h_r(x). \quad (5.22)$$

On peut considérer diverses expressions pour h . En notant $H(x) = \int_{-\infty}^x h(y) dy$ l'approximation de la fonction de Heaviside $\mathcal{H}(\cdot) = (1 + \text{sign}(\cdot))/2$, et \mathbb{I}_1 la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1[$, on a par exemple

	$h(x)$	$H(x)$
1	$\mathbb{I}_1(x)/2$	$(x+1)\mathbb{I}_1(x)/2 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-1)$
2	$(1- x)\mathbb{I}_1(x)$	$(1/2+x-x x /2)\mathbb{I}_1(x) + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-1)$
3	$\pi \cos(\pi x/2)\mathbb{I}_1(x)/4$	$(1+\sin(\pi x/2))\mathbb{I}_1(x)/2 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-1)$
4	$3(1-x^2)\mathbb{I}_1(x)/4$	$(-x^3+3x+2)\mathbb{I}_1(x)/4 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-1)$
5	$15(1-x^2)^2\mathbb{I}_1(x)/16$	$(3x^5-10x^3+15x+8)\mathbb{I}_1(x)/16 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-1)$
6	$35(1-x^2)^3\mathbb{I}_1(x)/32$	$(-5x^7+21x^5-35x^3+35x+16)\mathbb{I}_1(x)/32 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-1)$
7	$e^{-x}/(1+e^{-x})^2$	$1/(1+e^{-x})$
8	$e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$	$(1+\text{sign}(x)\text{erf}(x /\sqrt{2}))/2$

Étudions le biais et la variance de l'estimateur obtenu par cette méthode, lorsque h est à support borné (fonctions 1 à 6 du tableau ci-dessus); cette étude nous permettra, lorsque l'on appliquera cette méthode au problème de finance, de choisir le paramètre r de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne. La quantité qui nous intéresse est la dérivée d'une quantité du type

$$J(u) = \mathbb{P}\{g(u, \xi) \leq \alpha\},$$

où u est une variable de contrôle, et ξ est une variable aléatoire. Remarquons que l'on peut aussi écrire, à l'aide de la fonction de Heaviside introduite ci-dessus,

$$J(u) = \mathbb{E}\left[1 - \mathcal{H}(g(u, \xi) - \alpha)\right]. \quad (5.23)$$

Lorsque $g(u, \cdot)$ est strictement croissante, on peut écrire

$$J'(u) = \frac{\partial}{\partial u} \mathbb{P}\{\xi \leq g_u^{-1}(\alpha)\} = \frac{\partial}{\partial u} \psi(g_u^{-1}(\alpha)) = \left(\frac{\partial}{\partial u} g_u^{-1}(\alpha)\right) q(g_u^{-1}(\alpha)), \quad (5.24)$$

où ψ et q désignent respectivement la fonction de répartition et la densité de ξ , et g_u^{-1} désigne la solution en ξ de l'équation (paramétrée par u) $g(u, \xi) = \alpha$. Dans la suite, nous noterons plutôt cette solution sous la forme $z(u, \alpha)$, qui est donc définie par l'identité

$$\forall y, \quad g(u, z(u, y)) = y,$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi}(u, z(u, y)) \frac{\partial z}{\partial y}(u, y) &= 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(u, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, z(u, y))\right)^{-1}, \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, z(u, y)) + \frac{\partial g}{\partial \xi}(u, z(u, y)) \frac{\partial z}{\partial u}(u, y) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}(u, y) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, z(u, y))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial u}(u, z(u, y)). \end{aligned}$$

La formule (5.24) se réécrit maintenant :

$$J'(u) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, z(u, \alpha))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial u}(u, z(u, \alpha)) q(z(u, \alpha)). \quad (5.25)$$

Étude du biais de l'estimateur

On rappelle que le principe de l'approximation stochastique utilisé est de partir de l'approximation de (5.23) où l'on a remplacé \mathcal{H} par H_r , de dériver en u , puis de remplacer l'espérance par un tirage indépendant de ξ , ce qui donne la formule

$$e_r(u, \xi) = -\frac{1}{r} h\left(\frac{g(u, \xi) - \alpha}{r}\right) \frac{\partial g}{\partial u}(u, \xi). \quad (5.26)$$

On veut donc estimer la différence $|J'(u) - \mathbb{E}[e_r(u, \cdot)]|$ en fonction de r . On a

$$\mathbb{E}[e_r(u, \cdot)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} h\left(\frac{g(u, \xi) - \alpha}{r}\right) \frac{\partial g}{\partial u}(u, \xi) q(\xi) d\xi.$$

On commence par effectuer le changement de variables

$$y = g(u, \xi) \Leftrightarrow \xi = l(u, y) \Rightarrow d\xi = \frac{\partial l}{\partial y}(u, y) dy = \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, l(u, y))\right)^{-1} dy, \quad (5.27)$$

d'où

$$\mathbb{E}[e_r(u, \cdot)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} h\left(\frac{y-\alpha}{r}\right) \frac{\partial g}{\partial u}(u, l(u, y)) q(l(u, y)) \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, l(u, y))\right)^{-1} dy.$$

Pour alléger les notations, on va poser provisoirement

$$F(y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, l(u, y)) q(l(u, y)) \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, l(u, y))\right)^{-1}, \quad (5.28)$$

d'où

$$\mathbb{E}[e_r(u, \cdot)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} h\left(\frac{y-\alpha}{r}\right) F(y) dy.$$

On effectue maintenant le changement de variables

$$x = \frac{y-\alpha}{r} \Leftrightarrow y = \alpha + rx \Rightarrow dy = r dx, \quad (5.29)$$

d'où

$$\mathbb{E}[e_r(u, \cdot)] = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) F(\alpha + rx) dx.$$

Comme on a supposé dans cette étude que h est à support borné, on peut effectuer un développement limité en r sous l'intégrale — ceci est possible car la variable rx reste bien un infiniment petit dans l'intégrale —. Le développement donne

$$\mathbb{E}[e_r(u, \cdot)] = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \left(F(\alpha) + rx F'(\alpha) + \frac{1}{2} r^2 x^2 F''(\alpha) + \frac{1}{6} r^3 x^3 F'''(\alpha) + O(r^4) \right) dx.$$

Comme h est une fonction paire, les moments d'ordre impair sont nuls — on notera σ^2 le moment d'ordre 2 égal à $\int x^2 h(x) dx$ —, et par ailleurs h est d'intégrale 1; alors

$$\mathbb{E}[e_r(u, \cdot)] = -F(\alpha) - \frac{1}{2} r^2 \sigma^2 F''(\alpha) + O(r^4). \quad (5.30)$$

En revenant sur le changement de notation (5.28), on observe d'abord que le terme d'ordre 0 (la limite quand r tend vers 0) est bien égal à la formule exacte (5.25). Ensuite, on voit que le biais est d'ordre r^2 .

Étude de la variance de l'estimateur

On repart de l'estimateur (5.26) et on s'intéresse maintenant à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_r(u, \cdot)]^2 &= \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2\left(\frac{g(u, \xi)-\alpha}{r}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, \xi)\right)^2 q(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2\left(\frac{y-\alpha}{r}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, l(u, y))\right)^2 q(l(u, y)) \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, l(u, y))\right)^{-1} dy \quad (\text{par (5.27)}) \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, l(u, \alpha + rx))\right)^2 q(l(u, \alpha + rx)) \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(u, l(u, \alpha + rx))\right)^{-1} dx \\ &\quad (\text{par (5.29)}). \end{aligned}$$

Comme h^2 est paire, puisque h est paire, on peut dire que ce moment d'ordre 2 est en $O(r)$. Par ailleurs, la soustraction du carré de la moyenne à cette espérance apporte un terme en $O(r^0)$ à l'erreur (le carré de la vraie moyenne puis un terme en $O(r^2)$, ce dernier dominé par le $O(r)$ que l'on vient de trouver). En conclusion, la variance est en $1/r + O(r^0)$.

L'avantage principal de cette méthode est qu'elle s'applique individuellement à chaque occurrence d'une fonction indicatrice. Mais, contrairement à la méthode d'intégration par parties, cette méthode est biaisée, et le paramètre r va permettre d'assurer un compromis entre le biais et la variance de l'estimateur du gradient de la fonction probabilité.

5.4.2 Applications

Application au problème du mobile

Nous supposons toujours que t_f est supérieur au support de la loi de τ . Les contraintes que l'on dualise, sont, rappelons-le,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(D - |x(\tau) - \xi|)\right] \leq 1 - p \quad \text{et} \quad x(t_f) = 1.$$

Il s'agit d'approximer la fonction $f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$; pour cela, nous allons choisir par exemple

$$h(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

L'approximation $f_r(x)$ est alors donnée par

$$f_r(x) = f * h_r(x);$$

et finalement, on approximera donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(D - |x(\tau) - \xi|)\right] \quad \text{par} \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{r}(D - |x(\tau) - \xi|)}}\right].$$

Le Lagrangien associé au problème s'écrit

$$L(u, t_f, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E}\left[t_f + \int_0^{t_f} u^2(t) dt + \lambda_1 (x(t_f) - 1) + \lambda_2 \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{r}(D - |x(\tau) - \xi|)}} - 1 + p\right)\right].$$

Nous noterons encore ℓ la fonction sous l'espérance. Toujours d'après la technique de l'état adjoint présentée dans l'annexe A, l'adjoint est défini à l'optimum par

$$\dot{\lambda} = -\mathcal{H}'_x = 0, \tag{5.31}$$

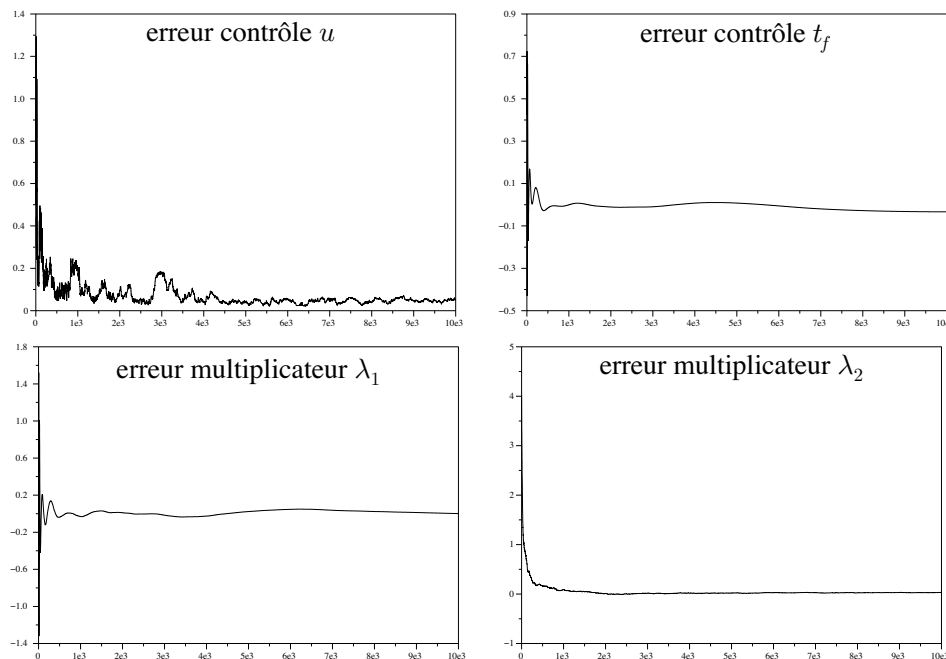
$$\lambda(t_f) = \lambda_1, \tag{5.32}$$

$$-\lambda_2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{r}(D - x(\tau) + \xi)}}{r(1 + e^{-\frac{1}{r}(D - x(\tau) + \xi)})^2} + \lambda_+(\tau) - \lambda_-(\tau) = 0 \quad \text{si } x(\tau) \geq \xi, \tag{5.33}$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{r}(D + x(\tau) - \xi)}}{r(1 + e^{-\frac{1}{r}(D + x(\tau) - \xi)})^2} + \lambda_+(\tau) - \lambda_-(\tau) = 0 \quad \text{sinon.} \tag{5.34}$$

L'algorithme est quasiment analogue à celui décrit pour la méthode de l'intégration par parties, si ce n'est la remise à jour de λ , qui s'obtient à partir de (5.33) et (5.34). Dans nos essais numériques, nous avons posé $r^k = 1/(k^{1/3})$, k faisant référence à la $k^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme. Les résultats sont présentés sur la Figure 5.15. L'algorithme converge sur cet essai, et sur tous les autres essais que nous avons faits.

Remarque 5.8. Lorsque nous avons fait ces essais, nous ne savions pas encore quelle était la règle asymptotiquement la meilleure pour choisir le paramètre r . Cet essai montre donc une certaine robustesse de la méthode de l'approximation par convolution, puisqu'elle donne de bons résultats même lorsque le paramètre r n'est pas choisi de façon optimale.

FIG. 5.15 – A.C., $p = 0.88$

Application au problème de finance

Réécrivons (5.4) sous la forme d'une contrainte en espérance :

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+} (\xi - g(u, v)) \right] \geq p.$$

Il s'agit d'approximer la fonction $f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$; pour cela, nous allons choisir par exemple

$$h(x) = \frac{3(1-x^2)\mathbb{I}_1(x)}{4},$$

où $\mathbb{I}_1(x)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1[$. On rappelle que l'approximation $f_r(x)$ est alors donnée par

$$f_r(x) = f * h_r(x),$$

et d'après (5.22), on a

$$(f_r)'(x) = \frac{1}{r} \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{x}{r} \right)^2 \right) \mathbb{I}_1 \left(\frac{x}{r} \right).$$

Finalement, on approximera donc

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+} (\xi - g(u, v)) \right] \quad \text{par} \quad \mathbb{E} \left[f_r(\xi - g(u, v)) \right].$$

En utilisant cette autre expression de la contrainte en probabilité, le Lagrangien s'écrit

$$L(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E} \left[j(u, v, \xi) + \lambda_1(u + v - 1) + \lambda_2 \left(p - f_r(\xi - g(u, v)) \right) \right].$$

L'algorithme est identique à celui décrit dans la section précédente, avec maintenant

$$\begin{aligned} (l')_u(u, v, \lambda_1, \lambda_2) &= j'_u(u, v, \xi) + \lambda_1 - \frac{3\lambda_2}{4r} \left(1 - \left(\frac{\xi - g(u, v)}{r}\right)^2\right) \left(-g'_u(u, v)\right) \mathbb{I}_1\left(\frac{x}{r}\right), \\ (l')_v(u, v, \lambda_1, \lambda_2) &= j'_v(u, v, \xi) + \lambda_1 - \frac{3\lambda_2}{4r} \left(1 - \left(\frac{\xi - g(u, v)}{r}\right)^2\right) \left(-g'_v(u, v)\right) \mathbb{I}_1\left(\frac{x}{r}\right), \\ (l')_{\lambda_1}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) &= u + v - 1, \\ (l')_{\lambda_2}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) &= p - f_r(\xi - g(u, v)). \end{aligned}$$

Nous l'avons déjà dit, l'estimateur du gradient de la fonction probabilité obtenu est un estimateur biaisé (bien qu'il soit asymptotiquement sans biais). Contrairement au problème du mobile, cet exemple est de petite taille (on travaille en dimension 4 puisqu'il y a deux variables primales réelles et deux variables duales); nous allons donc essayer d'aller plus loin dans notre étude en choisissant le paramètre r de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne asymptotiquement, autrement dit, la somme des erreurs quadratiques sur toutes les composantes du gradient.

L'approximation par convolution nous a amené à approximer

$$\Theta_2(u, v) = \mathbb{E}[\theta_2(u, v, \xi)] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u, v))]$$

par

$$\mathbb{E}[f_r(\xi - g(u, v))],$$

où

$$f_r(x) = \frac{1}{4} \left[-\left(\frac{x}{r}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{r}\right) + 2 \right] \mathbb{I}_1(x) + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x - 1).$$

On va donc s'intéresser aux estimateurs des gradients $(\Theta'_2)_u$ et $(\Theta'_2)_v$, ainsi qu'à l'estimateur de la fonction probabilité elle-même. Dans toute cette analyse, nous considérerons que les gradients sont évalués pour les valeurs des arguments prises à leur valeur optimale (celle de la solution que nous connaissons). D'un point de vue numérique, nous avons fixé le niveau de probabilité à 0.55, on a alors

$$u^* = 0 \quad \text{et} \quad v^* = 0.92765.$$

Notons $(\theta'_2)^r$ l'estimateur du gradient de la fonction probabilité basé sur un seul tirage. Il s'agit d'un estimateur biaisé. On construit l'estimateur basé sur N tirages indépendants

$$(\theta'_2)_N^r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta'_2)_i^r.$$

En faisant des développements limités par rapport à r (voir 5.30), on a trouvé

$$\mathbb{E}[(\theta'_2)_N^r] - \Theta'_2 \sim a r^2,$$

et

$$\text{var}\left((\theta'_2)_N^r\right) \sim \frac{b}{Nr}.$$

L'erreur quadratique de $(\theta'_2)_N^r$ par rapport à Θ'_2 , qui est rappelons-le, la somme de la variance de $(\theta'_2)_N^r$ et du carré du biais s'écrit donc :

$$\text{EQ}\left((\theta'_2)_N^r, \Theta'_2\right) \sim \frac{b}{Nr} + a^2 r^4.$$

En effet, d'après l'étude de la variance présentée dans (5.4.1), on sait que

$$\text{EQ}\left((\theta_2)'_N, \Theta_2\right) \sim \frac{b}{Nr} + a^2 r^4 + \frac{cste}{N},$$

où *cste* est même égale au carré de la moyenne. Dans cette expression, le premier terme est décroissant en r , le deuxième terme est croissant en r , et le dernier terme ne dépend pas de r (tant que r et N ne sont pas liés). La minimisation de cette erreur quadratique en r à N fixé donne $r = (b/(4a^2N))^{1/5}$. Les deux termes retenus sont alors d'ordre $N^{-4/5}$, ce qui justifie a posteriori de négliger le terme $cste/N$ dominé par les deux autres.

On va donc évaluer a et b numériquement. Pour cela, nous avons considéré des estimateurs basés sur 100 tirages ($N = 100$), pour lesquels nous avons évalué le biais et la variance en répétant 1 000 000 fois cette expérience. En prenant $r = \frac{1}{100^{1/5}}$ on a trouvé les constantes a_u , a_v , b_u et b_v , qui sont celles de la théorie générale expliquée ci-dessus pour les composantes de la dérivée partielle en u puis en v de la fonction probabilité :

$$\begin{aligned} a_u &\sim 1,74 \cdot 10^{-2}, & a_v &\sim 1,80 \cdot 10^{-2} \\ b_u &\sim 0,247 & \text{et} & & b_v &\sim 0,263. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \text{EQ}\left(((\theta_2)'_u)_{100}, (\Theta_2)'_u\right) &\sim 0,0026, \\ \text{EQ}\left(((\theta_2)'_v)_{100}, (\Theta_2)'_v\right) &\sim 0,0028. \end{aligned}$$

Notons enfin $f_{r,N}$ l'estimateur de la fonction probabilité basé sur N tirages indépendants. En refaisant un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, on montre que l'erreur quadratique de $f_{r,N}$ par rapport à Θ_2 est

$$\text{EQ}(f_{r,N}, \Theta_2) \sim \frac{j}{Nr} + e^2 r^4,$$

avec

$$e = -1,95 \quad \text{et} \quad j = 3,90.$$

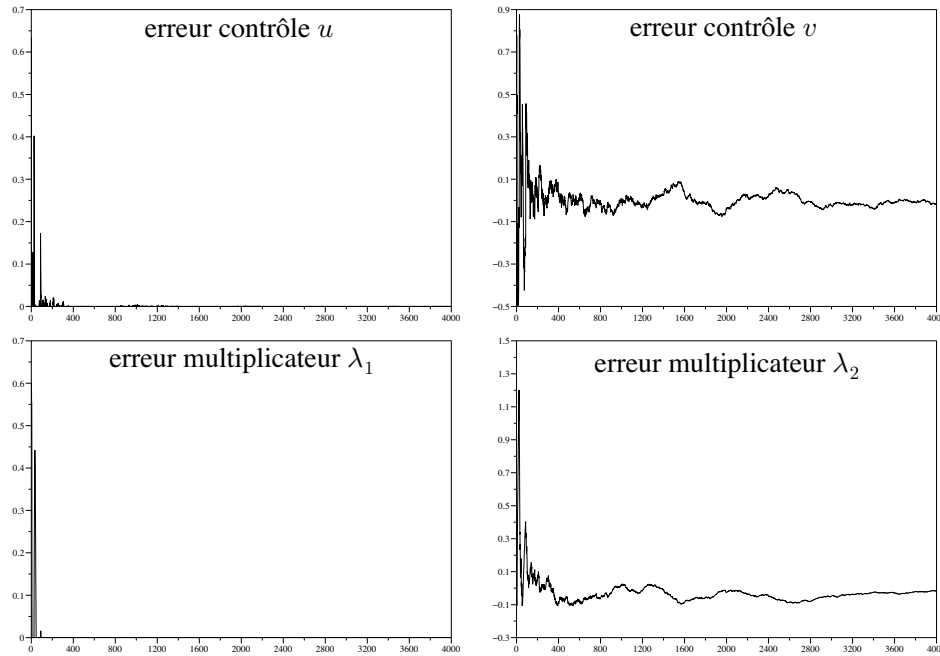
Finalement, l'erreur quadratique moyenne vaut

$$\text{EQ} = \frac{b_u}{Nr} + a_u^2 r^4 + \frac{b_v}{Nr} + a_v^2 r^4 + \frac{j}{Nr} + e^2 r^4,$$

et elle est minimale pour

$$r = \left(\frac{b_u + b_v + j}{4N(a_u^2 + a_v^2 + e^2)} \right)^{1/5}.$$

Pour un niveau de probabilité fixé à 0.24, nous avons obtenu les résultats présentés sur la Figure 5.16. L'algorithme converge sur cet essai, et sur tous les autres essais que nous avons faits.

FIG. 5.16 – A.C., $p = 0.24$

5.5 Analyse qualitative des méthodes

5.5.1 L'analyse

Les méthodes de gradient stochastique utilisant une estimation non biaisée du gradient ont une erreur quadratique moyenne asymptotiquement en $1/N$ (voir par exemple [24]). Notre estimation de cette erreur asymptotique avec la méthode biaisée basée sur l'approximation par convolution est en $1/(N^{4/5})$, donc moins bonne. Mais dans la pratique, lorsque l'on met en œuvre un algorithme de type gradient stochastique, on ne travaille que sur quelques milliers d'itérations. L'objet de cette sous-section est donc de présenter une analyse qualitative de ces deux méthodes, sans se placer du point de vue asymptotique. Pour simplifier cette analyse, et ne pas présenter au lecteur des formules trop compliquées, nous avons fait cette analyse directement sur le problème de finance.

On rappelle que $\Theta_2(u, v) = \mathbb{E}[\theta_2(u, v, \xi)] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\xi - g(u, v))]$.

Dans la section précédente, nous avons montré qu'avec la méthode de l'approximation par convolution, on obtient

$$\begin{aligned} \text{EQ}\left(\left((\theta_2)'_u\right)_{100}^r, (\Theta_2)'_u\right) &\sim 0,0026, \\ \text{EQ}\left(\left((\theta_2)'_v\right)_{100}^r, (\Theta_2)'_v\right) &\sim 0,0028. \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à la méthode de l'intégration par parties. Rappelons qu'il s'agit d'une méthode dite non biaisée, dans le sens où le biais de l'estimateur est nul, mais qui a une certaine variance. Ainsi, en notant $(\theta_2)'_N^{\text{ip}}$ l'estimateur obtenu sur N tirages indépendants, on a :

$$\mathbb{E}[(\theta_2)'_N^{\text{ip}}] - \Theta_2' = 0 \quad \text{et} \quad \text{var}\left((\theta_2)'_N^{\text{ip}}\right) = \frac{c}{N}.$$

En faisant des calculs analogues à ceux faits dans la section précédente pour l'approximation par convolution, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\theta_2)'_{100}]^{\text{ip}} - (\Theta_2)'_u &= 1,50 \cdot 10^{-5}, \\ \mathbb{E}[(\theta_2)'_{100}]^{\text{ip}} - (\Theta_2)'_v &= 1,55 \cdot 10^{-5}, \\ c_u &= 0,766 \quad \text{et} \quad c_v = 0,818.\end{aligned}$$

Finalement, pour la méthode d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\text{EQ}\left(\left((\theta_2)'_{100}\right)^{\text{ip}}, (\Theta_2)'_u\right) &= 0,0076, \\ \text{EQ}\left(\left((\theta_2)'_{100}\right)^{\text{ip}}, (\Theta_2)'_v\right) &= 0,00818.\end{aligned}$$

5.5.2 Idée nouvelle : combiner les deux méthodes

Dans un algorithme de gradient stochastique, on s'attend généralement à effectuer autour de 4 000 itérations. Une nouvelle méthode est alors envisageable, dans laquelle l'estimateur du gradient est en fait une combinaison linéaire des deux estimateurs obtenus d'une part par la technique d'intégration par parties, et d'autre part par l'approximation par convolution :

$$(\theta_2)'_N = \alpha (\theta_2)'_N^{\text{ip}} + (1 - \alpha) (\theta_2)'_N^{\text{r}}, \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'intérêt de cette nouvelle méthode est de donner, en fonction du nombre d'itérations, un poids plus important à la meilleure des deux méthodes.

Calculons l'erreur quadratique.

$$\begin{aligned}\text{EQ}\left((\theta_2)'_N, \Theta_2'\right) &= \mathbb{E}\left[\left((\theta_2)'_N - \Theta_2'\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left((\theta_2)'_N - \mathbb{E}[(\theta_2)'_N] + \mathbb{E}[(\theta_2)'_N] - \Theta_2'\right)^2\right] \\ &= \alpha^2 \text{EQ}\left((\theta_2)'_N^{\text{ip}}, \Theta_2'\right) + (1 - \alpha)^2 \text{EQ}\left((\theta_2)'_N^{\text{r}}, \Theta_2'\right) + 2\alpha(1 - \alpha) \text{cov}\left((\theta_2)'_N^{\text{ip}}, (\theta_2)'_N^{\text{r}}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\text{cov}\left((\theta_2)'_N^{\text{ip}}, (\theta_2)'_N^{\text{r}}\right) \sim \frac{d}{N},$$

où d est une constante à évaluer numériquement. Pour cela, nous avons à nouveau considéré des estimateurs basés sur 100 tirages, pour lesquels nous avons évalué la covariance en répétant 1 000 000 fois cette expérience ; les résultats sont les suivants :

$$d_u = -0,112 \quad \text{et} \quad d_v = -0,118.$$

Ainsi, il vient

$$\text{EQ}\left((\theta_2)'_N, \Theta_2'\right) = \alpha^2 \frac{c}{N} + (1 - \alpha)^2 \left(\frac{b}{Nr} + a^2 r^4\right) + 2\alpha(1 - \alpha) \frac{d}{N}.$$

Cette erreur quadratique est minimale pour

$$r = \left(\frac{b}{4Na^2}\right)^{1/5}.$$

On peut désormais substituer à r sa valeur optimale dans l'expression de l'erreur quadratique, et minimiser cette erreur par rapport à α ; elle est minimale pour

$$\alpha = \frac{4d - 5 \cdot 2^{2/5} a^{2/5} b^{4/5} N^{1/5}}{8d - 4c - 5 \cdot 2^{2/5} a^{2/5} b^{4/5} N^{1/5}}.$$

On remarque que α tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini — ce qui est logique puisque l'estimateur obtenu par intégration par parties est asymptotiquement meilleur —, et que la correction par rapport à 1 est d'ordre $1/(N^{1/5})$. On peut ainsi donner l'expression de l'erreur quadratique obtenue pour les valeurs optimales de r et de α :

$$\text{EQ}\left((\theta'_2)_N, \Theta'_2\right) = \frac{1}{N} \left(c + \beta N^{-1/5} + O(N^{-2/5}) \right),$$

avec

$$\beta = -\frac{2^{8/5}(c-d)^2}{5a^{2/5}b^{4/5}}.$$

On observe que le gain par rapport à c/N , qui est l'erreur quadratique de l'estimateur obtenu par intégration par parties, est d'autant plus grand que d est négatif et grand en valeur absolue, i.e. que les deux estimateurs sont fortement corrélés négativement.

L'algorithme associé à cette méthode est le suivant :

- on se donne $(u^0, v^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0) \in (\mathbb{R}^+)^4$, et 2 σ -suites $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- à l'étape k de l'algorithme, u^k, v^k, λ_1^k et λ_2^k étant donnés, on tire (ou on observe) ξ^{k+1} selon sa loi de probabilité, puis on remet à jour les variables primales par

$$u^{k+1} = \max \left(0, u^k - \varepsilon^k (j'_u(u^k, v^k, \xi^{k+1}) + \lambda_1^k - \lambda_2^k \tilde{l}'_u(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \alpha^k, \xi^{k+1})) \right),$$

$$v^{k+1} = \max \left(0, v^k - \varepsilon^k (j'_v(u^k, v^k, \xi^{k+1}) + \lambda_1^k - \lambda_2^k \tilde{l}'_v(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \alpha^k, \xi^{k+1})) \right),$$

et les variables duales par

$$\lambda_1^{k+1} = \max \left(0, \lambda_1^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_1}(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1}) \right),$$

$$\lambda_2^{k+1} = \max \left(0, \lambda_2^k + \rho^k (\ell')_{\lambda_2}(u^k, v^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \xi^{k+1}) \right),$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{l}'_u(u, v, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) &= \alpha \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+} \left(\xi - g(u, v) \right) (g')_u(u, v) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \\ &\quad + (1 - \alpha) \frac{3}{4r} \left(1 - \left(\frac{\xi - g(u, v)}{r} \right)^2 \right) \left(-g'_u(u, v) \right) \mathbb{I}_1 \left(\frac{\xi - g(u, v)}{r} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}'_v(u, v, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) &= \alpha \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+} \left(\xi - g(u, v) \right) (g')_v(u, v) \frac{q'(\xi)}{q(\xi)} \\ &\quad + (1 - \alpha) \frac{3}{4r} \left(1 - \left(\frac{\xi - g(u, v)}{r} \right)^2 \right) \left(-g'_v(u, v) \right) \mathbb{I}_1 \left(\frac{\xi - g(u, v)}{r} \right), \end{aligned}$$

$$(\ell')_{\lambda_1}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = u + v - 1,$$

$$(\ell')_{\lambda_2}(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = p - f_r(\xi - g(u, v)),$$

$$\alpha^k = \frac{4(d_u + d_v) - 5 \cdot 2^{2/5} (a_u + a_v + e)^{2/5} (b_u + b_v + j)^{4/5} k^{1/5}}{8(d_u + d_v) - 4(c_u + c_v) - 5 \cdot 2^{2/5} (a_u + a_v + e)^{2/5} (b_u + b_v + j)^{4/5} k^{1/5}},$$

$$r^k = \left(\frac{b_u + b_v + j}{4k(a_u + a_v + j)^2} \right)^{1/5}.$$

Remarque 5.9. Les essais sont faits en utilisant des évaluations des constantes a, b, c, d, e et j , dont on ne dispose pas normalement. Ceci est simplement destiné à illustrer le potentiel de la méthode dans un cas idéal. Dans la pratique, il faut utiliser une loi de variation de α qui s'inspire des résultats théoriques ci-dessus : $\alpha \sim 1 - m N^{-1/5}$ pour un m à ajuster heuristiquement.

Encore une fois, nous avons fixé le niveau de probabilité à 0,24. Les résultats numériques montrent une amélioration significative concernant les variables primales et la variable duale associée à la contrainte $\Theta_1(u, v) \leq 1$. Malheureusement, sur cet exemple particulier, le fait de combiner les estimateurs réintroduit le comportement pathologique lié au champs de vecteurs : lorsque l'on fait 4 000 itérations, α vaut 0.95, l'intégration par parties a donc un poids considérable par rapport à l'approximation par convolution. On rencontre ainsi des situations où cette méthode améliore les résultats pour u , v , et λ_1 , mais pas pour le multiplicateur associé à la contrainte en probabilité, comme le montre la Figure 5.17.

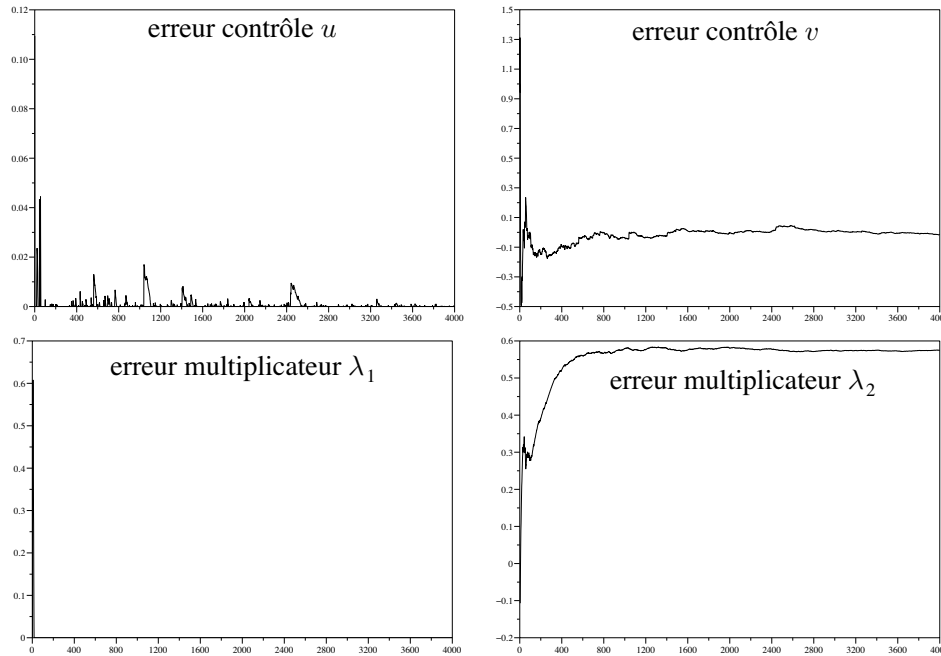


FIG. 5.17 – Combinaison des deux estimateurs

5.6 Troisième méthode : l'approche par le quantile

Afin d'éviter les difficultés engendrées par la nature très particulière du champs de vecteurs gradient, nous allons essayer de résoudre, lorsque la variable aléatoire est scalaire, un problème d'optimisation, équivalent, formulé à l'aide d'un quantile indépendant des variables de décision.

On souhaite résoudre le problème

$$\begin{aligned} \min_u \mathbb{E}[j(u, \xi)] \\ \text{s.c. } \mathbb{P}\{g(u) \leq \xi\} \geq p. \end{aligned}$$

On a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{g(u) \leq \xi\} \geq p &\Leftrightarrow \psi(g(u)) \leq 1 - p, \quad \psi \text{ étant la fonction de répartition} \\ &\Leftrightarrow g(u) \leq Q_{1-p}, \quad Q_{1-p} \text{ étant le quantile d'ordre } 1 - p. \end{aligned}$$

Nous allons donc désormais résoudre le problème

$$\begin{aligned} & \min_u \mathbb{E}[j(u, \xi)] \\ \text{s.c. } & g(u) \leq Q_{1-p}. \end{aligned}$$

Avec cette nouvelle formulation de la contrainte en probabilité, il apparaît clairement que si g est convexe en u , l'ensemble admissible défini par la contrainte en probabilité est convexe. Par ailleurs, du point de vue algorithmique, les conséquences de cette formulation seront discutées à la Remarque 5.10.

Pour évaluer le quantile, nous procédons de la façon suivante. Soient ξ_1, \dots, ξ_n n tirages indépendants d'une loi donnée. On peut les réordonner en ordre croissant Y_1, \dots, Y_n et estimer le quantile d'ordre $1 - p$ par Y_j avec

$$j/n \leq 1 - p \leq (j + 1)/n.$$

Cela revient à calculer le quantile d'ordre $1 - p$ de la fonction de répartition empirique

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_i^n \mathbb{I}_{\{Y_k \leq x\}}.$$

L'algorithme général est donc le suivant :

- on se donne $(u^0, v^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0) \in (\mathbb{R}^+)^4$, et 2 σ -suites $(\varepsilon^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- à l'étape k de l'algorithme, u^k, v^k, λ_1^k et λ_2^k étant donnés, on tire (ou on observe) ξ^{k+1} selon sa loi de probabilité, on remet à jour les variables primales par

$$u^{k+1} = \max\left(0, u^k - \varepsilon^k \left(u^k + v^k - b + \lambda_1^k - \lambda_2^k \left(\frac{1+b}{v^k}\right)\right)\right),$$

$$v^{k+1} = \max\left(0, v^k - \varepsilon^k \left(u^k + v^k - \xi^{k+1} + \lambda_1^k + \lambda_2^k \left(\frac{(1+b)u^k - 1 - l}{(v^k)^2}\right)\right)\right),$$

puis on calcule Q_{1-p}^{k+1} , le quantile d'ordre $1 - p$ estimé sur $k + 1$ tirages, et enfin, on remet à jour les variables duales par

$$\lambda_1^{k+1} = \max\left(0, \lambda_1^k + \rho^k (u^{k+1} + v^{k+1} - 1)\right),$$

$$\lambda_2^{k+1} = \max\left(0, \lambda_2^k + \rho^k \left(\frac{1+l}{v^{k+1}} - \frac{(1+b)u^{k+1}}{v^{k+1}} - 1 - Q_{1-p}^{k+1}\right)\right).$$

Nous avons fixé le niveau de probabilité à 0.24. On a obtenu des résultats présentés sur la Figure 5.18. A titre indicatif, nous avons également tracé l'estimation du quantile en fonction du nombre d'itérations (Figure 5.19).

Cette approche par le quantile donne donc de meilleurs résultats que l'intégration par parties ou l'approximation par convolution : d'une part elle permet d'éviter les instabilités numériques liées au phénomène de superposition entre la forme convexe de la fonction coût et la forme non convexe de la fonction de répartition dans l'écriture du Lagrangien ; et d'autre part, elle donne des courbes d'erreur beaucoup plus lisses.

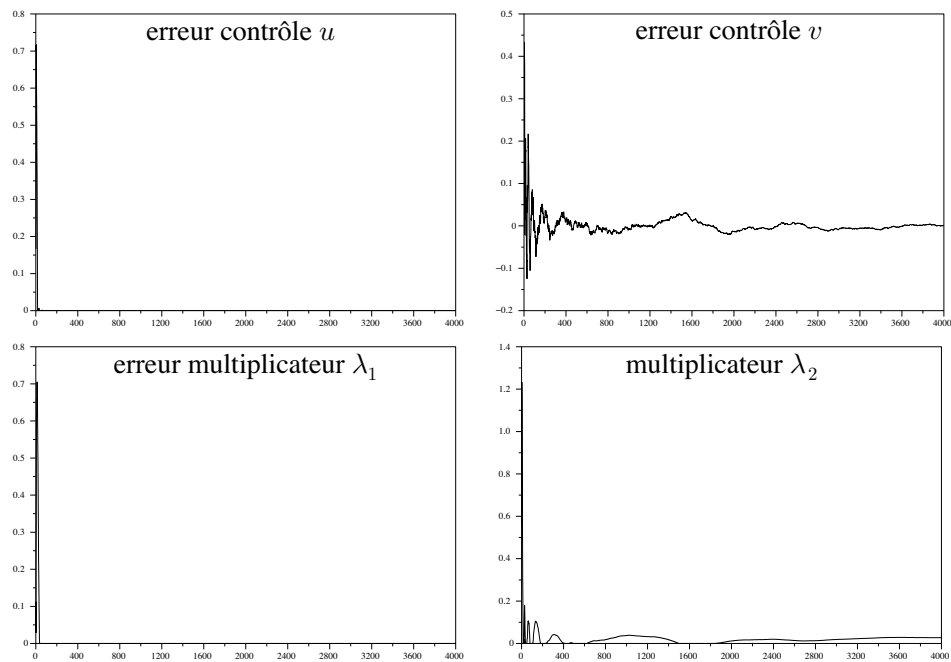
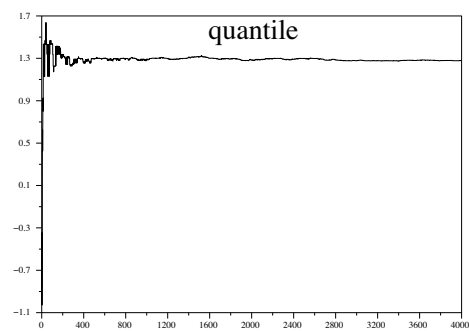
FIG. 5.18 – Formulation avec le quantile, $p = 0.24$ 

FIG. 5.19 – Estimation du quantile

Remarque 5.10. Dans un algorithme de gradient stochastique, les espérances sont remplacées par une estimation basée sur une seule réalisation à chaque itération, et donc cette estimation n'est jamais asymptotiquement exacte. Les réalisations successives du bruit intervenant dans le gradient "sautent" brutalement ; on utilise alors des "petits pas" pour moyenniser ces sauts. L'accumulation de l'information apportée par tous les tirages est donc faite par les itérées des variables elles-mêmes grâce aux "petits pas" et à la formule linéaire du gradient (présentation heuristique du gradient stochastique).

Dans la formulation que nous proposons ici, le quantile n'est pas calculable exactement, et n'est pas exprimable, à notre connaissance, comme une espérance. Le principe a donc été de remplacer ce quantile par une approximation asymptotiquement exacte car utilisant toutes les réalisations passées du bruit. Autrement dit, l'estimation du quantile ne "saute" pas, mais au contraire bouge de moins en moins au cours de l'algorithme. Heuristiquement, on pourrait donc très bien imaginer, dans la remise à jour des variables duales, choisir des "grands pas" (i.e. le contraire de pas tendant vers 0).

5.7 En résumé

Nous avons tout d'abord montré dans ce chapitre que les contraintes en probabilité engendrent très souvent des difficultés structurelles dans la mise en œuvre d'algorithmes de type primal-dual (difficultés structurelles en termes de champs de vecteurs et de multiplicateurs notamment). Nous avons ensuite présenté trois méthodes permettant de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité par un algorithme de type gradient stochastique : l'intégration par parties, l'approximation par convolution et l'approche par le quantile.

L'intégration par parties est plus ou moins adaptée selon les situations auxquelles on est confronté. Lorsque l'on doit traiter une seule fonction indicatrice, quelle que soit la dimension de l'aléa, la technique d'intégration par parties ne pose pas de difficulté, du moins tant que la densité de probabilité de la variable aléatoire reste non nulle (car cette densité apparaît au dénominateur des estimateurs obtenus). Lorsque l'on a un produit de deux fonctions indicatrices, et que l'aléa est de dimension 2, l'intégration par parties est envisageable si elle est précédée d'un changement de variables ; mais elle suppose alors un degré suffisant de régularité sur les contrôles (autrement, elle ne fait que déplacer le problème de régularité). Enfin, il ne nous semble pas possible de gérer le cas de deux fonctions indicatrices, si l'on ne considère qu'un seul aléa. Par ailleurs, cette technique nécessite de connaître l'expression analytique de la densité de la variable aléatoire, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Les avantages de l'approximation par convolution sont, d'une part qu'elle s'applique individuellement à chaque occurrence d'une fonction indicatrice, et d'autre part, qu'elle ne nécessite pas de connaître l'expression de la densité de la variable aléatoire. Enfin, cette méthode semble, sur le plan numérique, moins sensible que l'intégration par parties aux différentes difficultés structurelles que nous avons mises en évidence au début de ce chapitre. Cette relative robustesse de la méthode peut s'expliquer par le fait que l'approximation par convolution revient pratiquement à l'introduction d'un bruit auxiliaire supplémentaire qui contribue à lisser le problème, surtout lorsque le bruit original tend à disparaître comme on l'a vu sur l'application en finance. Ce bruit artificiel se paie par l'introduction d'un biais qu'il faut faire disparaître asymptotiquement, mais qui aide beaucoup dans les transitoires de l'algorithme. Lorsque l'aléa est scalaire, et que la variable de décision et l'aléa sont séparés (i.e. $\mathbb{P}\{g(u) \leq \xi\} \geq p$) l'approche par le quantile permet d'éviter les difficultés structurelles liées à la superposition, dans l'écriture du Lagrangien, entre la forme convexe de la fonction coût et la forme non convexe de la fonction de répartition ; de plus, si la fonction g

est convexe, alors on vérifie facilement que l'ensemble admissible défini par cette contrainte est convexe.

Chapitre 6

Optimisation sous contrainte en probabilité : le cas non convexe

La méthode primale-duale que nous avons appliquée au chapitre précédent repose sur l'existence d'un point selle du Lagrangien du problème d'optimisation. Or, dans le cadre non convexe, les sauts de dualité rendent l'utilisation de ce type de méthode impossible. La technique du Lagrangien augmenté a été introduite pour surmonter ces sauts de dualité : elle permet de retrouver un point selle "local", local au sens d'une limitation des variables primales à un voisinage de la solution (pour les cas non convexes, on peut consulter [33] et [7]). Ce chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section, nous reprenons le problème de finance présenté au chapitre précédent, mais nous étudions cette fois le cas non convexe, lorsque la contrainte en probabilité est reformulée comme une contrainte sur un quantile indépendant des variables de décision. Dans la seconde section, nous donnons un algorithme général permettant de minimiser une fonction non linéaire de l'espérance.

6.1 Exemple : le problème de finance

Nous ne redonnons pas ici l'interprétation économique de ce problème de finance (elle est donnée à la section 5.1.2), nous réécrivons simplement la formulation mathématique du problème :

$$\begin{aligned} \min_{u,v} \mathbb{E}[j(u, v, \xi)] \\ \text{s.c. } u + v - 1 \leq 0 \\ g(u, v) - Q_{1-p} \leq 0 \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} j(u, v, \xi) &= -f(1 - u - v) - (1 + b)u - (1 + \xi)v, \quad \text{avec } f(x) = -x^2/2 + 2x, \\ g(u, v) &= \frac{1+l}{v} - \frac{(1+b)u}{v} - 1, \\ Q_{1-p} &\text{ est le quantile d'ordre } 1 - p. \end{aligned}$$

Nous avons vu que pour des niveaux de probabilité supérieurs à 0.57, le coût optimal, comme fonction du niveau de probabilité, n'est pas convexe (voir Figure 5.2).

Le Lagrangien augmenté associé à ce problème est

$$L_c(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E}[j(u, v, \xi)] + \frac{1}{2c} \left[\left(\max(0, \lambda_1 + c(u + v - 1)) \right)^2 - \lambda_1^2 + \left(\max(0, \lambda_2 + c(g(u, v) - Q_{1-p})) \right)^2 - \lambda_2^2 \right],$$

avec $c > 0$.

L'algorithme de Arrow-Hurwicz s'écrit alors :

$$u^{k+1} = \max \left(0, u^k - \varepsilon^k \left(j'_u(u^k, v^k, \xi^{k+1}) + \max(0, \lambda_1^k + c(u^k + v^k - 1)) + \max(0, \lambda_2^k + c(g(u^k, v^k) - Q_{1-p}^{k+1})) g'_u(u^k, v^k) \right) \right),$$

$$v^{k+1} = \max \left(0, v^k - \varepsilon^k \left(j'_v(u^k, v^k, \xi^{k+1}) + \max(0, \lambda_1^k + c(u^k + v^k - 1)) + \max(0, \lambda_2^k + c(g(u^k, v^k) - Q_{1-p}^{k+1})) g'_v(u^k, v^k) \right) \right),$$

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \rho^k \frac{1}{c} \left[\max(0, \lambda_1^k + c(u^{k+1} + v^{k+1} - 1)) - \lambda_1^k \right],$$

$$\lambda_2^{k+1} = \lambda_2^k + \rho^k \frac{1}{c} \left[\max(0, \lambda_2^k + c(g(u^{k+1}, v^{k+1}) - Q_{1-p}^{k+1})) - \lambda_2^k \right],$$

où Q_{1-p}^{k+1} est le quantile d'ordre $1 - p$ de la fonction de répartition empirique estimé sur $k + 1$ tirages.

Nous avons posé $p = 0.68$, $c = 3$. Sur 4 000 itérations, nous avons obtenu les résultats présentés sur la Figure 6.1. Sur la Figure 6.2, nous avons également tracé l'estimation du quantile en fonction du nombre d'itérations.

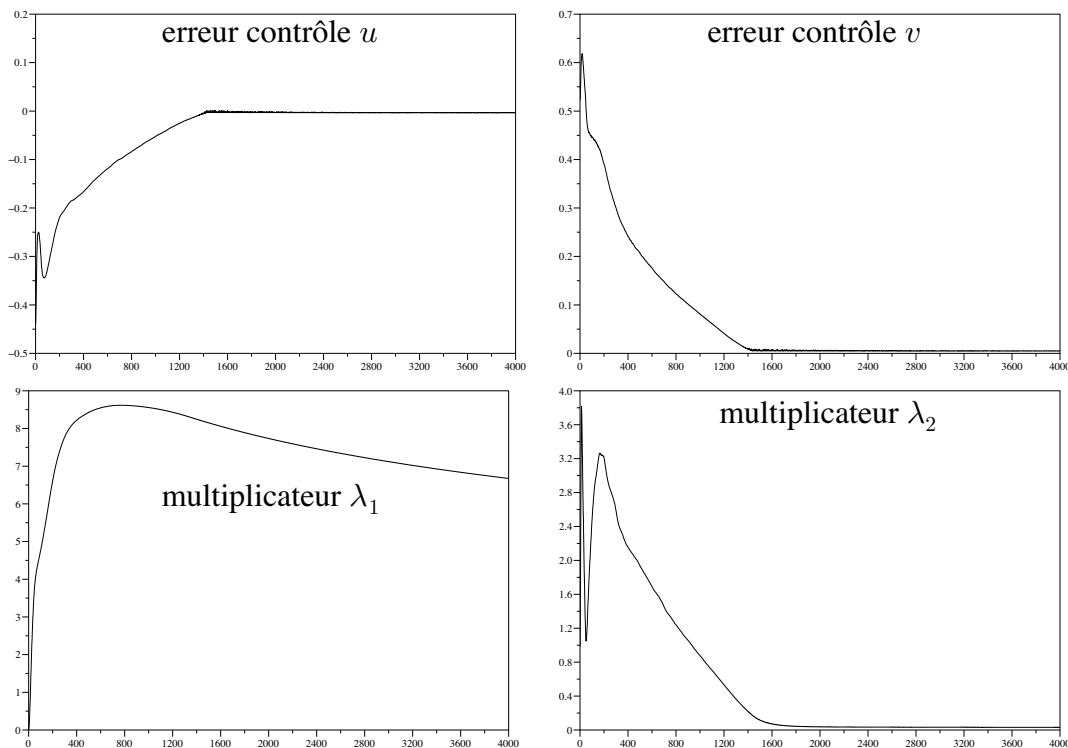


FIG. 6.1 – Formulation avec le quantile, $p = 0.68$

Les variables primales ainsi que le multiplicateur associé à la contrainte sur le quantile convergent ; par contre, le multiplicateur associé à la contrainte $u + v - 1 \leq 0$ n'a pas encore convergé. Nous avons donc relancé l'expérience sur 100 000 itérations (Figure 6.3).

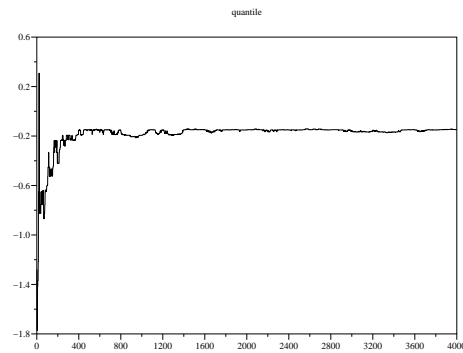
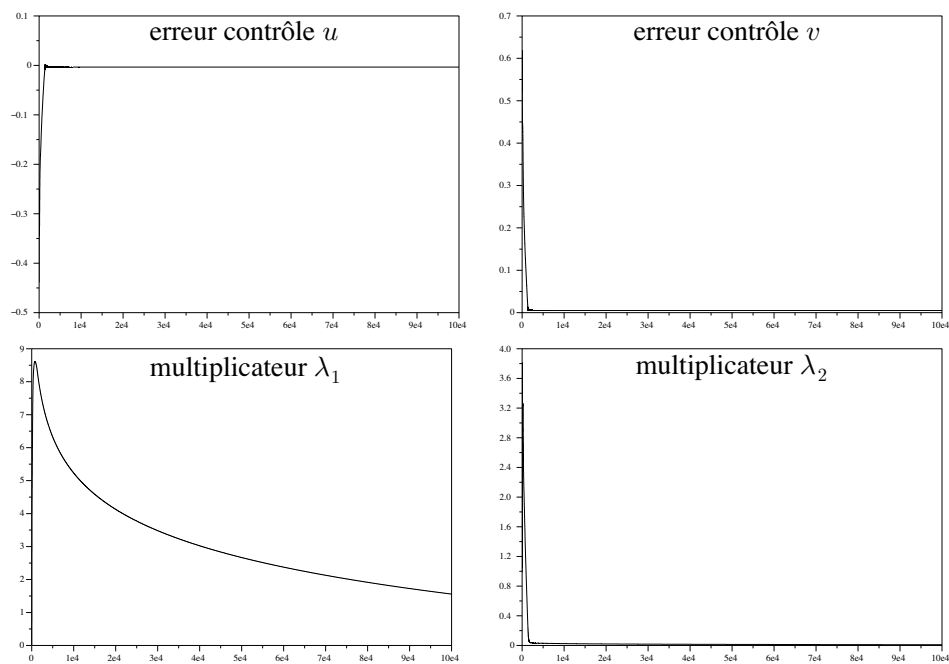
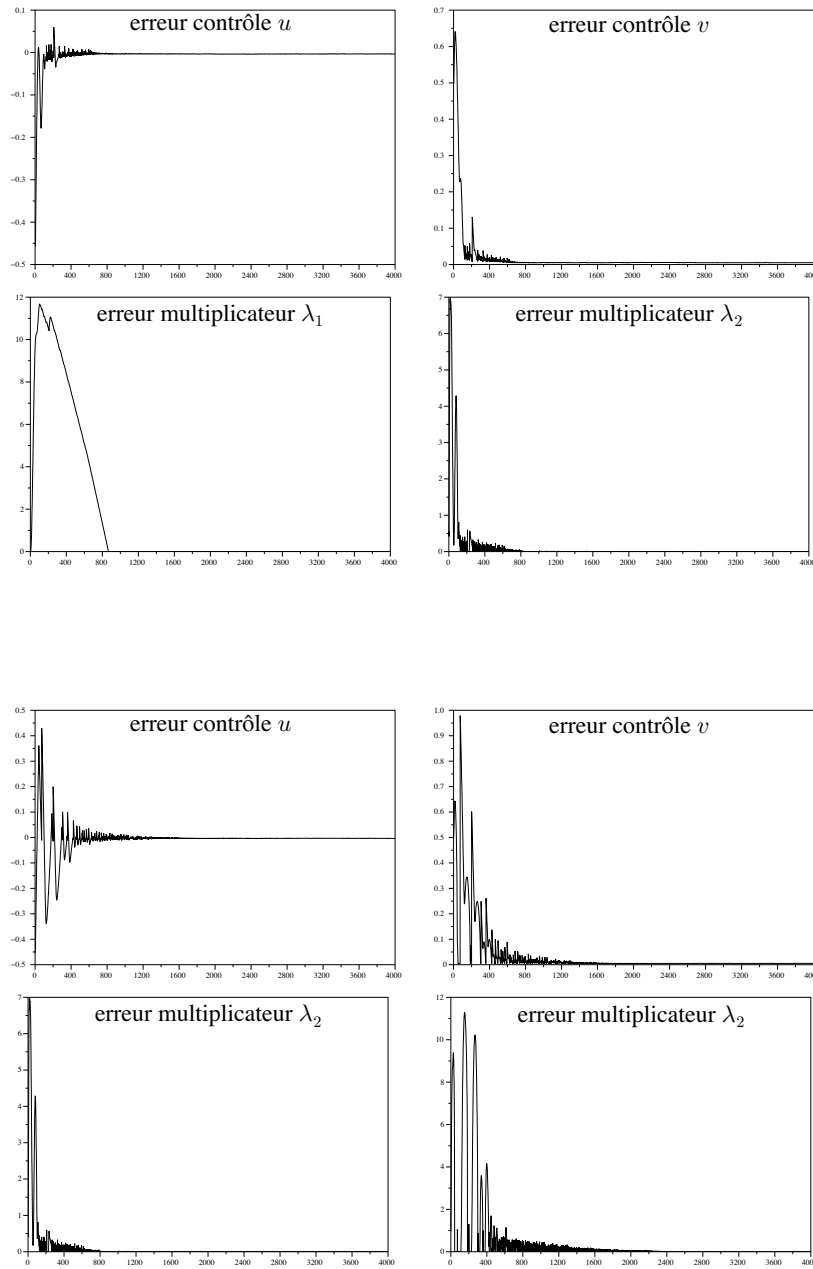


FIG. 6.2 – Estimation du quantile

FIG. 6.3 – Formulation avec le quantile, $p = 0.68$, 100 000 itérations

Comme l'un des multiplicateurs converge extrêmement lentement, nous reprenons l'idée de la Remarque 5.10, et nous renouvelons l'expérience en modifiant le choix du pas dans la remise à jour des variables duales : au lieu de choisir une σ -suite, nous allons poser $\rho^k = c$ (car d'après [12], pour assurer la convergence de l'algorithme dans le cas de contraintes de type inégalité, on doit choisir $0 < \rho \leq c$). Voici par exemple deux séries de résultats que nous avons obtenues :



Avec ce choix de pas pour les variables duales, l'algorithme a convergé sur tous les essais que nous avons faits.

6.2 Minimisation d'une fonction non linéaire de l'espérance

6.2.1 Motivation

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u) &= \mathbb{E}[j(u, \xi)] \\ \text{s.c. } \Theta(u) &= \mathbb{E}[\theta(u, \xi)] = 0, \end{aligned}$$

avec $j : \mathcal{U} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta : \mathcal{U} \times \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ (fonctions mesurables en ξ), \mathcal{U} et \mathcal{C} étant des espaces de Hilbert, U^{ad} un sous-ensemble convexe fermé de \mathcal{U} , et (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité.

Dans le chapitre précédent, notre approche pour résoudre ce problème à consister à dualiser la contrainte en espérance (avec un multiplicateur *déterministe* λ), puis à utiliser un algorithme de type Arrow-Hurwicz basé sur un gradient stochastique : le gradient en u et λ du Lagrangien ordinaire $L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle$ est évalué, à chaque itération k , sur *un seul* tirage ξ^{k+1} indépendant de la variable aléatoire ξ suivant la loi P . Essentiellement, ceci est possible parce que le Lagrangien s'écrit comme une espérance :

$$L(u, \lambda) = \mathbb{E}[j(u, \xi) + \langle \lambda, \theta(u, \xi) \rangle].$$

Supposons que l'on souhaite utiliser le Lagrangien augmenté :

$$L_c(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle + \frac{c}{2} \|\Theta(u)\|^2, \quad (6.1)$$

où c est une constante positive. Alors L_c ne peut plus s'écrire comme une espérance (il apparaît le *carré* d'une espérance) et l'idée du gradient stochastique est plus difficile à utiliser pour cette raison. D'une manière plus générale, toute fonction coût faisant intervenir une fonction *non linéaire* d'une espérance posera la même difficulté vis-à-vis de l'utilisation du gradient stochastique. Nous proposons dans la section suivante deux approches possibles pour écrire un algorithme général permettant de résoudre ce type de problème.

6.2.2 Algorithme général

La première approche part de l'algorithme de Arrow Hurwicz stochastique pour le Lagrangien augmenté et construit en parallèle une estimation de l'espérance sous le carré pour l'utiliser dans les autres formules de gradient. Concrètement, l'algorithme est le suivant :

$$u^{k+1} = \Pi_{U^{\text{ad}}}\left(u^k - \varepsilon^k (j'_u(u^k, \xi^{k+1})^\top + \theta'_u(u^k, \xi^{k+1})^\top (\lambda^k + c y^k))\right),$$

$$y^{k+1} = (1 - c \varepsilon^k) y^k + c \varepsilon^k \theta(u^{k+1}, \xi^{k+1}),$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho^k y^{k+1},$$

ε^k et ρ^k étant deux σ -suites.

La deuxième approche est basée sur une interprétation du Lagrangien augmenté. D'après le Résultat 1.30, on peut remplacer l'expression (6.1) par l'expression équivalente suivante :

$$L_c(u, \lambda) = \max_{q \in \mathcal{C}^*} \left(J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle - \frac{1}{2c} \|q - \lambda\|^2 \right). \quad (6.2)$$

Alors le problème consistant à calculer $\min_{u \in U^{\text{ad}}} \max_{\lambda \in \mathcal{C}^*} L_c(u, \lambda)$ s'écrit, en tenant compte de (6.2),

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \max_{\lambda \in \mathcal{C}^*} \max_{q \in \mathcal{C}^*} \left(J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle - \frac{1}{2c} \|q - \lambda\|^2 \right) = \min_{u \in U^{\text{ad}}} \max_{\lambda \in \mathcal{C}^*} \max_{q \in \mathcal{C}^*} \left(\mathbb{E}[j(u, \xi) + \langle q, \theta(u, \xi) \rangle] - \frac{1}{2c} \|q - \lambda\|^2 \right),$$

et donc, en supposant que le min max est un point selle, on est revenu à la situation où il s'agit de calculer le point selle d'une espérance de fonction, par exemple avec un algorithme de type Arrow-Hurwicz stochastique :

$$u^{k+1} = \Pi_{U^{\text{ad}}} \left(u^k - \varepsilon^k (j'_u(u^k, \xi^{k+1})^\top + (\theta'_u(u^k, \xi^{k+1}))^\top q^k) \right), \quad (6.3)$$

$$q^{k+1} = q^k + \rho^k \left(\theta(u^{k+1}, \xi^{k+1}) - \frac{q^k - \lambda^k}{c} \right), \quad (6.4)$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau^k \left(\frac{q^k - \lambda^k}{c} \right), \quad (6.5)$$

ε^k , ρ^k et τ^k étant des σ -suites.

En fait, on peut envisager de nombreuses variantes de cet algorithme qui a été écrit dans l'optique $\max_{q, \lambda} \min_u$. A priori, on se rapproche plus de l'origine du problème $\max_{\lambda} \min_u L_c$ en cherchant à résoudre $\max_{\lambda} \min_u \max_q L_c$ qui conduit à :

- utiliser d'abord (6.4) avec u^k à la place de u^{k+1} ,
- puis utiliser (6.3) avec q^{k+1} ,
- puis utiliser (6.5) avec q^{k+1} .

Une autre variante consisterait (dans l'idée que q est la variable "qui doit converger plus vite que les autres" pour approcher le Lagrangien augmenté) à répéter deux fois la remise à jour de q dans une itération, ce qui signifie

- que l'on passe d'abord de q^k à $q^{k+1/2}$ sachant u^k ,
- puis de u^k à u^{k+1} en utilisant ce $q^{k+1/2}$,
- puis de $q^{k+1/2}$ à q^{k+1} en utilisant u^{k+1} ,
- puis de λ^k à λ^{k+1} en utilisant q^{k+1} .

Remarque 6.1. Si la première méthode nous semble parfaitement concevable, la seconde méthode l'est peut-être un peu moins. En effet, d'après l'interprétation du Lagrangien augmenté, le schéma $\min_u \max_{\lambda}$ a des chances de commuter (existence d'un point selle) à condition

d'avoir fait le calcul exact du \max_q . Or dans toutes les variantes que l'on a décrites, le \max_q est fait en même temps que les autres $\min \max$, et non pas complètement à chaque itération ... Mais la comparaison des formules obtenues par ces deux méthodes nous a semblé intéressante en soi.

6.3 En résumé

Dans ce chapitre, nous avons étudié les problèmes d'optimisation sous contrainte en probabilité dans le cas non convexe. Du point de vue théorique, l'outil essentiel que nous avons utilisé est le Lagrangien augmenté. Lorsque l'existence même du point selle est remise en cause, il permet de retrouver un point selle "local", ce qui constitue un progrès décisif pour appliquer une méthode duale à un problème d'optimisation sous contrainte non convexe. L'intérêt de l'utilisation du Lagrangien augmenté a été confirmé dans ce chapitre par les résultats numériques que nous avons obtenus pour un problème d'optimisation sous contrainte en probabilité non convexe, lorsque l'on reformule la contrainte en probabilité comme une contrainte sur un quantile indépendant des variables de décision. Plus généralement, l'utilisation du Lagrangien augmenté nous a également permis de donner un algorithme général permettant de minimiser une fonction non linéaire de l'espérance par un algorithme de type gradient stochastique.

Conclusions et nouveaux axes de recherche

À travers ce mémoire, notre objectif principal a été de proposer une méthode générale permettant de résoudre un problème d'optimisation stochastique sous contrainte en probabilité en boucle ouverte :

- transformation de la contrainte en probabilité en une contrainte en espérance,
- recours à la dualité,
- recours à un algorithme d'Arrow-Hurwicz stochastique.

Cette méthode présente deux avantages majeurs : d'une part, elle permet de résoudre simultanément le problème d'optimisation et celui de l'évaluation des espérances par Monte-Carlo ; d'autre part, c'est une méthode qui a déjà été utilisée pour la gestion des problèmes d'optimisation sous contrainte en espérance, et donc pour laquelle on dispose d'un certain nombre de résultats théoriques et numériques. Mais sur le plan mathématique, cette méthode soulève une difficulté importante : on réécrit la contrainte en probabilité comme une contrainte en espérance à l'aide de la fonction indicatrice, mais cette fonction indicatrice introduit un problème de discontinuité, problème fondamental pour calculer ensuite le gradient de la contrainte. Pour lever cette difficulté, nous avons proposé trois méthodes :

- lorsque c'est possible, remplacer la résolution du problème d'optimisation sous contrainte en probabilité par la résolution d'un problème auxiliaire écrit avec une contrainte de risque plus régulière sur le plan mathématique ;
- utiliser les techniques d'intégration par parties ou d'approximation par convolution pour obtenir un estimateur du gradient de la contrainte en espérance, et si c'est possible, combiner ces deux techniques pour réduire l'erreur quadratique de l'estimateur ;
- lorsque c'est possible, reformuler la contrainte en probabilité comme une contrainte sur un quantile indépendant des variables de décision.

A ce stade de nos réflexions, deux nouveaux axes de recherche nous semblent particulièrement intéressants : d'une part l'étude de la combinaison des idées du gradient stochastique avec les techniques de décomposition-coordination pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contrainte en probabilité de grande taille ; et d'autre part, l'étude de problèmes d'optimisation sous contrainte en probabilité en boucle fermée.

Annexe A

Calcul du gradient du coût pour un problème de commande optimale

On considère ici un problème relativement général (d'un degré de généralité suffisant pour notre utilisation) et on donne le calcul du gradient du coût par rapport à la commande. De cela, on déduit la forme des conditions d'optimalité à la Pontriaguine.

Soit

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \text{ donné}, \quad (\text{A.1})$$

et il s'agit de minimiser le coût

$$J = K(x(t_f), t_f) + M(x(t_i), t_i) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(s), u(s), s) ds, \quad (\text{A.2})$$

où l'instant t_i , supposé inférieur à t_f , est le premier instant intermédiaire où

$$\varphi_i(x(t_i), t_i) = 0, \quad (\text{A.3})$$

et t_f est le premier instant final où

$$\varphi_f(x(t_f), t_f) = 0. \quad (\text{A.4})$$

À noter qu'au temps intermédiaire t_i est associé le paiement d'un coût instantané M .

Pour une variation $\delta u(\cdot)$ de la commande autour d'une trajectoire nominale, on obtient une variation $\delta x(\cdot)$ de la trajectoire de x et une variation δt_i et δt_f des instants intermédiaire et final. Par définition de t_i et t_f à travers (A.3) et (A.4), ces variations sont liées par les équations (on résume tous les arguments des fonctions par la seule indication de l'instant où il faut évaluer les arguments — x, t, u — de ces fonctions)

$$(\varphi_i)'_x(t_i)(\delta x(t_i) + \dot{x}(t_i)\delta t_i) + (\varphi_i)'_t(t_i)\delta t_i = 0, \quad (\text{A.5a})$$

$$(\varphi_f)'_x(t_f)(\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f) + (\varphi_f)'_t(t_f)\delta t_f = 0. \quad (\text{A.5b})$$

Par ailleurs,

$$\delta \dot{x} = f'_x(\dots)\delta x + f'_u(\dots)\delta u, \quad \delta x(t_0) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Alors,

$$\begin{aligned} \delta J = & K'_x(t_f)(\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f) + K'_t(t_f)\delta t_f + M'_x(t_i)(\delta x(t_i) + \dot{x}(t_i)\delta t_i) + M'_t(t_i)\delta t_i \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (L'_x(s)\delta x(s) + L'_u(s)\delta u(s)) ds + L(t_f)\delta t_f. \end{aligned}$$

On introduit l'état adjoint dont l'équation différentielle est

$$\dot{\lambda} = - (f'_x(\dots))^\top \lambda - (L'_x(\dots))^\top, \quad (\text{A.7})$$

et l'on précisera les conditions en t_i et t_f plus loin. De cette équation différentielle, on tire $L'_x(\dots)$ que l'on reporte dans l'expression de δJ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta J &= K'_x(t_f)(\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f) + K'_t(t_f)\delta t_f + M'_x(t_i)(\delta x(t_i) + \dot{x}(t_i)\delta t_i) + M'_t(t_i)\delta t_i \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left((-\dot{\lambda}^\top(s) - \lambda^\top(s)f'_x(s))\delta x(s) + L'_u(s)\delta u(s) \right) ds + L(t_f)\delta t_f. \end{aligned}$$

Dans cette expression, on peut éliminer $f'_x\delta x$ à l'aide de (A.6), ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta J &= K'_x(t_f)(\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f) + K'_t(t_f)\delta t_f + M'_x(t_i)(\delta x(t_i) + \dot{x}(t_i)\delta t_i) + M'_t(t_i)\delta t_i \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left((-\dot{\lambda}^\top(s)\delta x(s) - \lambda^\top(s)\delta \dot{x}(s)) + (\lambda^\top(s)f'_u(s) + L'_u(s))\delta u(s) \right) ds + L(t_f)\delta t_f. \end{aligned}$$

On voit donc apparaître la dérivée de $-\lambda^\top\delta x$ par rapport au temps, mais comme λ subit une discontinuité en t_i (nous allons l'imposer!), il faut scinder l'intégrale de t_0 à t_f en deux morceaux avant de prendre la primitive (on notera λ_- et λ_+ les parties continues avant et après t_i). Alors,

$$\begin{aligned} \delta J &= K'_x(t_f)(\delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f) + K'_t(t_f)\delta t_f + M'_x(t_i)(\delta x(t_i) + \dot{x}(t_i)\delta t_i) + M'_t(t_i)\delta t_i \\ &\quad + [-\lambda_-^\top\delta x]_{t_0}^{t_i} + [-\lambda_+^\top\delta x]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{H}'_u(s)\delta u(s) ds + L(t_f)\delta t_f \end{aligned}$$

où nous avons fait apparaître la dérivée partielle en u de l'Hamiltonien $\mathcal{H} = \lambda^\top f + L$,

$$\begin{aligned} &= (K'_x(t_f) - \lambda_+^\top(t_f))\delta x(t_f) + (K'_x(t_f)f(t_f) + K'_t(t_f) + L(t_f))\delta t_f \\ &\quad + (M'_x(t_i) + \lambda_+^\top(t_i) - \lambda_-^\top(t_i))\delta x(t_i) + (M'_x(t_i)f(t_i) + M'_t(t_i))\delta t_i \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{H}'_u(s)\delta u(s) ds. \end{aligned}$$

L'idée est maintenant de faire en sorte que tous les termes ci-dessus, en dehors du terme intégral, soient nuls dès que les variations $\delta x(t_i)$, δt_i , $\delta x(t_f)$ et δt_f sont liées par les relations (A.5). D'après le lemme de Farkas, ceci est vrai si, et seulement si, il existe des coefficients de proportionnalité entre les coefficients de ces variations, c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs α_i et α_f (de la taille respective de (A.3) et (A.4)) tels que

$$K'_x(t_f) - \lambda_+^\top(t_f) + \alpha_f^\top(\varphi_f)'_x(t_f) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$K'_x(t_f)f(t_f) + K'_t(t_f) + L(t_f) + \alpha_f^\top((\varphi_f)'_x(t_f)f(t_f) + (\varphi_f)'_t(t_f)) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$M'_x(t_i) + \lambda_+^\top(t_i) - \lambda_-^\top(t_i) + \alpha_i^\top(\varphi_i)'_x(t_i) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$M'_x(t_i)f(t_i) + M'_t(t_i) + \alpha_i^\top((\varphi_i)'_x(t_i)f(t_i) + (\varphi_i)'_t(t_i)) = 0. \quad (\text{A.11})$$

La condition (A.8) impose la valeur finale de λ . En se servant de cette valeur finale, on peut réécrire la condition (A.9) sous la forme

$$\mathcal{H}(t_f) + K'_t(t_f) + \alpha_f^\top(\varphi_f)'_t(t_f) = 0. \quad (\text{A.12})$$

De même, la condition (A.10) impose la condition de saut de l'adjoint. Ensuite, (A.11) se réécrit

$$\mathcal{H}((t_i)_-) - \mathcal{H}((t_i)_+) + M'_t(t_i) + \alpha_i^\top(\varphi_i)'_t(t_i) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Dans cette expression, on a tenu compte du fait de L est continue au point t_i .

On en déduit qu'à l'optimum, l'adjoint étant défini par les conditions (A.7)–(A.8)–(A.10), on doit avoir que $\mathcal{H}'_u(\cdot) = 0$ (si la commande ne supporte aucune autre contrainte), les conditions de transversalité (A.12)–(A.13) doivent être satisfaites ainsi bien sûr que les contraintes (A.1)–(A.3)–(A.4). Évidemment, α_i et α_f s'interprètent comme les multiplicateurs associés aux contraintes (A.3)–(A.4).

Bibliographie

- [1] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath : Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9 (3), 203-228, 1999.
- [2] J.-P. Aubin : Analyse Hilbertienne, *Cours de l'École Polytechnique*, édition 1980.
- [3] J.-P. Aubin : Inclusions différentielles, *Cours de l'Université de Dauphine*, 1982.
- [4] F. Baccelli and P. Brémaud : Elements of Queuing Theory, *Springer*, Second Edition.
- [5] B. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat : Synchronization and Linearity, an Algebra for Discrete Event Systems, téléchargeable sur <http://www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/book-online.html>
- [6] D.P. Bertsekas : Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods, *Academic Press*, New-York, 1982.
- [7] D.P. Bertsekas : Nonlinear Programming, *Athena Scientific*, Belmont, USA, 2nd Ed, 1995.
- [8] J. Céa : Optimisation, théorie et algorithmes, Dunod, 1971.
- [9] T.S. Blyth and M.F. Janowitz : Residuation Theory, *Pergamon Press*, Oxford, 1972.
- [10] G. Cohen, P. Bernhard : On the Rationality of some Decision Rules in a Stochastic Environment, *IEEE Transactions on Automatical Control*, vol AC-24, no. 5, 1979.
- [11] G. Cohen : Décomposition et coordination en optimisation déterministe différentiable et non-différentiable. *Thèse de doctorat ès-Sciences Mathématiques*, Université de Paris IX-Dauphine, 1984.
- [12] G. Cohen : Optimisation des grands systèmes, *Cours de D.E.A.*, 2003.
- [13] G. Cohen, J.-C. Culioli : Optimisation stochastique sous contraintes en espérance, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.320, Série I, pp. 753-758, 1995.
- [14] G. Cohen et D.L. Zhu : Decomposition Coordination Methods in Large-Scale Optimization Problems. The Non-differentiable Case and the Use of Augmented Lagrangians. *J.B. Cruz (Ed), Advances in Large-Scale Systems, Theory and Applications*, vol. 1, JAI Press Inc., Greenwich, Connecticut, 1984.
- [15] J.-C. Culioli : Algorithmes de décomposition-coordination en optimisation stochastique, *Thèse de l'ENSMP*, 1987.
- [16] J.-C. Culioli : Introduction à l'optimisation, *Ellipses*, 1994.
- [17] J.-C. Dodu, M. Goursat, A. Hertz, J.-P. Quadrat, M. Viot : Méthodes de gradient stochastique pour l'optimisation des investissements dans un réseau électrique, *E.D.F. Bulletin de la Direction des Études et Recherches*, série C - mathématiques, informatique no. 2, pp. 133-164, 1981.
- [18] Y.M. Ermoliev, V.I. Norkin, R. J.-B. Wets : The Minimization of Semicontinuous Functions, Mollifier Subgradients, *SIAM J. Optim.*, vol. 33, pp. 149-167, 1995.
- [19] P. Faure : Notes d'Optimisation, *Cours de l'École Polytechnique*, édition 1983.

- [20] I. Guikman et A. Skorokhod : Introduction à la théorie des processus aléatoires, *Éditions du MIR*, 1977
- [21] R. Henrion : On the Connectedness of Probabilistic Constraint Sets, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 112, no. 3, pp. 657-663, 2002.
- [22] P. Kall and S.W. Wallace : Stochastic Programming, *John Wiley and Sons, Chichester, UK*, 1994.
- [23] J. Kushner et D.S. Clark : Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 26, Springer-Verlag, 1978.
- [24] P. L'Écuyer et G. Yin : Budget Dependent Convergence Rate of Stochastic Approximation, *SIAM J. Optim*, vol. 8, pp.217-247, 1998.
- [25] A. Nemirovski et D. Yudin : Problem complexity and method efficiency in optimization, *Nauka Publishers, Moscow*, 1978 ; English translation : John Wiley and Sons, 1983.
- [26] W. Ogryczak and A. Ruszczyński : Dual Stochastic Dominance and Related Mean-Risk Models, *RUTCOR Research Report*, 2001.
- [27] B.T. Poljak and A.B. Juditsky : Acceleration of Stochastic Approximation by Averaging, *SIAM J. Optim*, vol. 30, pp. 838-855, 1992.
- [28] A. Prekopa : Stochastic Programming, *Math. and Applications 324, Kluwer ed.*, 1995.
- [29] R.T. Rockafellar and S. Uryasev : Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, *Research Report*, 2001.
- [30] L. Schwartz : Analyse Hilbertienne, *Hermann*, 1979.
- [31] L. Schwartz : Analyse : Topologie générale et Analyse fonctionnelle, *Hermann*, 1970.
- [32] S. Uryasev : Introduction to the Theory of Probabilistic Functions and Percentiles (Value-at-Risk), *S. Uryasev (Ed), Probabilistic Constrained Optimization : Methodology and Applications, Kluwer Academic Publishers*, pp. 1-25, 2000.
- [33] Handbook in O.R. and Management Science, vol.10, *Stochastic Programming, Ruszczyński and Shapiro ed.*, 2003.