



**HAL**  
open science

# Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux

Jean-François Barthelemy

► **To cite this version:**

Jean-François Barthelemy. Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. English. NNT : . pastel-00001296

**HAL Id: pastel-00001296**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001296>**

Submitted on 20 Jun 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
DOCTEUR  
DE  
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

par

**JEAN-FRANÇOIS BARTHÉLÉMY**

Sujet de la thèse :

**Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration  
dans les géomatériaux**

soutenue à Champs-sur-Marne le 12 avril 2005  
devant le jury composé de :

A.	Zaoui	<i>Président</i>
Y.	Leroy	<i>Rapporteur</i>
F.-J.	Ulm	<i>Rapporteur</i>
R.	de Borst	<i>Examineur</i>
C.	Boutin	<i>Examineur</i>
L.	Dormieux	<i>Directeur</i>



*À Pierre Leprêtre*



---

## Remerciements

Quelques années après avoir eu le privilège de suivre son cours de “Matériaux hétérogènes et composites”, j’ai eu l’immense honneur de retrouver Monsieur André Zaoui comme président de jury de thèse. Je profite de ces quelques lignes pour lui adresser mes remerciements et lui témoigner ma reconnaissance. Je souhaiterais également remercier très vivement Messieurs Franz-Josef Ulm et Yves Leroy pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter sur ce mémoire. Un grand merci aussi à Messieurs René de Borst et Claude Boutin pour avoir pris part à l’évaluation de ce travail.

Je voudrais maintenant exprimer toute ma gratitude à Luc Dormieux. Non seulement j’ai eu la chance de travailler à ses côtés sur divers sujets de recherche mais il m’a également inclus avec confiance dans son équipe d’enseignement. Ses grandes qualités scientifiques et pédagogiques demeureront des références tout au long de ma carrière au cours de laquelle j’espère avoir encore de multiples occasions de travailler avec lui.

Je tiens également à remercier Patrick de Buhan qui m’a accueilli au sein de son équipe et qui a largement contribué, avec Luc Dormieux, à me donner l’envie de m’engager dans la voie de la recherche en mécanique. Je ne saurais oublier de saluer tous les membres ou ex-membres que j’ai cotoyés dans cette équipe : Denise, Samir, Denis, Vincent, Éric, Sami, Ghazi, Mohammed, Malek, Ano, Yamen, Julien, Guy, Thierry et Moëz. Grand merci à mes amis Samir et Denis notamment pour leurs précieux conseils à propos de recherche ou d’enseignement.

Je voudrais aussi profiter de cette page pour témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui ont contribué à rendre mon travail plus facile. Je pense notamment à Jacques Daniel pour le support informatique à l’ENPC et à Jean Garrigues, professeur de mécanique à l’ESM2, qui distribue librement sa librairie de calcul tensoriel pour Maple <sup>(1)</sup> sur laquelle je me suis appuyé pour développer une librairie rassemblant divers outils dédiés à la micromécanique, notamment quelques tenseurs d’Eshelby.

À tous mes proches et amis qui m’ont offert leur soutien, je souhaite qu’ils trouvent ici la marque de ma grande reconnaissance. Bien évidemment, je n’oublierai pas l’essentiel en rendant hommage à ceux à qui je dois tout, mes parents et mes grands-parents, et en remerciant ma femme Sandra pour sa patience, pour sa compréhension pendant la phase ultime du travail et surtout pour m’avoir donné le plus grand bonheur qui soit : Alicia.

---

<sup>(1)</sup><http://esm2.imt-mrs.fr/gar/tens3d.html>



## Résumé

Cette étude porte sur des non linéarités physiques des géomatériaux à travers une approche micromécanique. Le caractère frottant de ces matériaux nécessite une adaptation des techniques d'homogénéisation non linéaire. Différentes méthodes de détermination de critères de résistance macroscopiques sont élaborées. On détermine notamment les états limites d'un milieu à matrice frottante suivant la nature de la règle d'écoulement (dilatante ou non). On élabore ensuite une théorie micromécanique de la poroplasticité. Elle permet d'apporter un éclairage sur l'existence d'une contrainte effective poroplastique. Dans le cas d'une matrice frottante, on montre qu'une telle contrainte effective fait défaut. Les non linéarités dues à la présence de fissures frottantes sont enfin examinées. On met en évidence l'impact de la règle d'écoulement régissant le mouvement relatif des faces des fissures (éventuellement dilatant) et de la propagation de celles-ci sur le comportement macroscopique.

**Mots-clés :** homogénéisation, non linéaire, résistance, calcul à la rupture, critère frottant, poroplasticité, contrainte effective, fissures, endommagement

---

## Abstract

This study deals with physical nonlinearities of geomaterials through a micromechanical approach. The frictional character of these materials needs to adapt the nonlinear homogenization techniques. Various methods for the determination of macroscopic strength criteria are elaborated. The limit states of a medium made up with a frictional matrix are found out depending on the nature of the flow rule (involving dilatancy or not). A micromechanical theory of poroplasticity is then built. It casts a new light on the existence of a poroplastic effective stress. It is proved that, in the case of a frictional matrix, no effective stress can be found. The nonlinearities due to the presence of frictional cracks are finally tackled. The impact of the flow rule governing the (possibly dilating) crack displacement jump and that of the damage propagation on the macroscopic behavior are highlighted.

**Keywords :** homogenization, nonlinear, strength, yield design, frictional criterion, poroplasticity, effective stress, cracks, damage



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Changement d'échelle et homogénéisation linéaire</b>	<b>9</b>
<b>1 Méthode de changement d'échelle</b>	<b>11</b>
1.1 Homogénéisation des grandeurs mécaniques . . . . .	13
1.1.1 Opération de moyenne . . . . .	13
1.1.2 Homogénéisation des contraintes . . . . .	15
1.1.3 Homogénéisation des déformations . . . . .	16
1.2 Conditions aux limites du V.E.R. . . . .	18
1.2.1 Contraintes homogènes au contour . . . . .	19
1.2.2 Déformations homogènes au contour . . . . .	19
1.2.3 Lemme de Hill . . . . .	20
1.3 Le V.E.R. de géomatériau . . . . .	20
1.3.1 Microstructure d'un V.E.R. de géomatériau . . . . .	20
1.3.2 Effet d'un fluide saturant les pores [34] . . . . .	23
<b>2 Comportement élastique linéaire</b>	<b>27</b>
2.1 Comportement du géomatériau sec . . . . .	29
2.1.1 Détermination du tenseur d'élasticité macroscopique . . . . .	29
2.1.2 Influence des conditions aux limites . . . . .	31
2.1.3 Approche énergétique . . . . .	33
2.1.4 Méthodes d'estimation . . . . .	33
2.1.5 Mise en œuvre d'un schéma d'homogénéisation linéaire . . . . .	36
2.2 Poroélasticité linéaire . . . . .	41
2.2.1 Énergie élastique macroscopique et variables d'état . . . . .	41
2.2.2 État initial non naturel : le théorème de Levin [102] . . . . .	43
2.2.3 Approche microscopique des équations d'état de la poroélasticité linéaire . . . . .	46
2.3 Calcul des moments dans la matrice . . . . .	51

2.3.1	Moments d'ordre 1	51
2.3.2	Moments d'ordre 2	54
<b>3</b>	<b>Annexes</b>	<b>59</b>
3.1	Problème d'Eshelby [44]	61
3.1.1	Inclusion d'Eshelby	61
3.1.2	Inhomogénéité d'Eshelby	62
3.1.3	Problème de l'inclusion rigide à interface lisse	64
3.2	Quelques expressions analytiques du tenseur d'Eshelby	67
3.2.1	Inclusion sphérique dans un milieu isotrope	67
3.2.2	Inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope	67
3.2.3	Inclusion cylindrique dans un milieu isotrope	70
3.3	Symétrie de l'estimation du tenseur d'élasticité macroscopique	71
3.4	Estimations de Mori-Tanaka pour des matériaux biphasés isotropes	72
3.4.1	Milieu poreux dont la phase solide est homogène	73
3.4.2	Milieu renforcé par des inclusions rigides parfaitement adhérentes	74
3.4.3	Milieu renforcé par des inclusions rigides lisses	75
<b>II</b>	<b>Critère de résistance</b>	<b>77</b>
<b>4</b>	<b>Définition et détermination du critère de résistance macroscopique</b>	<b>79</b>
4.1	Le critère de résistance macroscopique dans le cas sec	81
4.1.1	Caractéristiques des matériaux	81
4.1.2	Définition du critère macroscopique ([93], [27])	83
4.2	Le critère de résistance macroscopique en présence d'un fluide	87
4.2.1	Formulation générale du critère	88
4.2.2	Existence d'une contrainte effective	88
4.3	Méthodes de détermination du critère macroscopique	90
4.3.1	Comportement visqueux de la matrice	90
4.3.2	Loi contrainte-déformation non linéaire de la matrice	94
4.4	Techniques de résolution par homogénéisation non linéaire	99
4.4.1	Principe de l'homogénéisation non linéaire	99
4.4.2	Choix de la déformation effective	102
<b>5</b>	<b>Matrice de von Mises</b>	<b>107</b>
5.1	Le critère de von Mises	109
5.1.1	Définition du critère	109
5.1.2	Régularisation du critère	109

5.1.3	Loi élastique non linéaire . . . . .	113
5.2	Application à un milieu poreux à matrice homogène . . . . .	114
5.2.1	Cas sec tridimensionnel . . . . .	114
5.2.2	Cas pressurisé . . . . .	116
5.2.3	Cas sec bidimensionnel . . . . .	117
5.3	Application à un milieu renforcé . . . . .	118
5.3.1	Détermination du critère macroscopique . . . . .	119
5.3.2	Discussion sur le critère macroscopique . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Matrice de Drucker-Prager</b>	<b>125</b>
6.1	Le critère de Drucker-Prager . . . . .	127
6.1.1	Définition du critère . . . . .	127
6.1.2	Régularisation du critère . . . . .	128
6.1.3	Loi contrainte-déformation non linéaire . . . . .	133
6.2	Application à un milieu poreux à matrice homogène . . . . .	135
6.2.1	Cas sec tridimensionnel . . . . .	136
6.2.2	Cas pressurisé . . . . .	140
6.2.3	Cas sec bidimensionnel . . . . .	140
6.3	Application à un milieu renforcé . . . . .	141
6.3.1	États limites dans le cas associé (critère de résistance macroscopique)	141
6.3.2	États limites dans le cas non associé . . . . .	145
6.3.3	Validation expérimentale des modèles . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>149</b>
7.1	Régularité de la fonction d'appui . . . . .	151
7.1.1	Une condition suffisante de différentiabilité . . . . .	151
7.1.2	Non-différentiabilité à l'origine . . . . .	153
7.2	Règle de normalité sur une surface paramétrée . . . . .	153
7.3	Approche variationnelle de la méthode sécante modifiée . . . . .	155
7.4	Sphère creuse soumise à une pression externe . . . . .	157
7.4.1	Matrice de von Mises . . . . .	158
7.4.2	Matrice de Drucker-Prager . . . . .	162
<b>III</b>	<b>Poroplasticité</b>	<b>167</b>
<b>8</b>	<b>Comportement poroplastique</b>	<b>169</b>
8.1	Les lois d'état du comportement poroplastique . . . . .	171
8.2	Approche énergétique . . . . .	174

8.3	Le critère de plasticité macroscopique . . . . .	176
8.4	La règle d'écoulement macroscopique dans le cas associé . . . . .	178
<b>9</b>	<b>Contrainte effective en poroplasticité</b>	<b>181</b>
9.1	Existence d'une contrainte effective poroplastique . . . . .	183
9.1.1	Une condition nécessaire et suffisante . . . . .	183
9.1.2	Lien avec la règle d'écoulement dans le cas associé . . . . .	184
9.2	Cas des critères classiques . . . . .	185
9.2.1	Critère purement cohérent . . . . .	185
9.2.2	Critère dépendant de la pression de confinement . . . . .	187
9.2.3	Critère conique . . . . .	188
9.2.4	Critère macroscopique d'une sphère creuse de Drucker-Prager pressurisée . . . . .	191
<b>IV</b>	<b>Irréversibilités dans les milieux fissurés</b>	<b>197</b>
<b>10</b>	<b>Modélisation des fissures et comportement réversible</b>	<b>199</b>
10.1	Lien entre le modèle 2-D et le modèle 3-D de fissure . . . . .	201
10.1.1	Cohérence géométrique . . . . .	201
10.1.2	Cohérence cinématique . . . . .	202
10.2	Comportement réversible des fissures . . . . .	204
10.2.1	Cas des fissures ouvertes . . . . .	206
10.2.2	Cas des fissures fermées lisses . . . . .	209
10.2.3	Cas des fissures fermées adhérentes . . . . .	211
<b>11</b>	<b>Comportement irréversible des fissures</b>	<b>213</b>
11.1	Comportement plastique des fissures . . . . .	215
11.1.1	Critère de plasticité d'une fissure et règle d'écoulement . . . . .	216
11.1.2	Règle de localisation et comportement macroscopique . . . . .	217
11.1.3	Calcul de l'énergie libre macroscopique . . . . .	219
11.1.4	Critère de charge plastique . . . . .	221
11.2	Exemples de fissures plastiques . . . . .	222
11.2.1	Fissures purement cohérentes . . . . .	222
11.2.2	Fissures frottantes non dilatantes . . . . .	227
11.2.3	Fissures frottantes dilatantes . . . . .	229
11.3	Propagation de fissures plastiques . . . . .	234
11.3.1	Critère de propagation . . . . .	235
11.3.2	Fissures purement cohérentes . . . . .	237

---

11.3.3 Fissures frottantes non dilatantes . . . . .	239
11.3.4 Fissures frottantes dilatantes . . . . .	241
<b>12 Annexes</b>	<b>245</b>
12.1 Convention de Voigt . . . . .	247
12.2 Quelques tenseurs utiles pour l'étude des fissures . . . . .	247
12.3 Propriétés du tenseur de localisation des fissures ouvertes . . . . .	250
<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>253</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>259</b>
<b>Principales notations</b>	<b>267</b>
<b>Table des figures</b>	<b>269</b>



# INTRODUCTION



---

Les géomatériaux forment une classe de matériaux très complexes à divers égards. Tout d'abord, ils peuvent être d'origine naturelle (sols, roches) ou artificielle (bétons) et les microstructures rencontrées révèlent une grande diversité. Ils appartiennent à la famille des milieux poreux, présentant une phase solide généralement hétérogène et une phase poreuse éventuellement saturée ou partiellement saturée par un ou plusieurs fluides.

La description géométrique des géomatériaux, comme celle de tout matériau hétérogène, peut être envisagée selon deux points de vue. Le premier consiste à se placer à une échelle, dite microscopique, où toutes les phases, considérées comme homogènes, peuvent être discernées géométriquement. Le second point de vue est celui adopté par l'ingénieur notamment lorsqu'il s'agit de recourir au calcul numérique pour lequel la précision de la géométrie locale par rapport à la taille du domaine total est limitée par les moyens de calcul actuels. Ce point de vue consiste à considérer le volume élémentaire de la structure (c'est-à-dire l'élément d'intégration apparaissant dans les intégrales de volume sur la structure continue) comme la superposition des diverses phases formant le géomatériau en interaction les unes avec les autres. Ainsi, à cette échelle, dite macroscopique, le volume élémentaire correspond à un matériau multiphasique équivalent pour lequel on dispose tout de même d'informations géométriques restreintes (comme la fraction volumique des constituants) et dont il s'agit de déterminer les propriétés physico-chimiques.

On distingue deux approches permettant d'identifier ces propriétés. La première repose sur la compatibilité de celles-ci avec les principes de la thermodynamique. Elle ne fournit qu'un cadre général dans lequel on peut rechercher ces propriétés. Les équations de la poroélasticité linéaire formulées par Biot sont nées de cette approche ([13], [14], [15]). Celle-ci a également permis d'étendre la théorie au comportement poroélastoplastique en transformation finie [18]. Elle présente l'intérêt de fournir la nature des équations de comportement et permet ensuite de se livrer à une caractérisation expérimentale des propriétés. La seconde approche, celle que nous allons adopter par la suite, est plus récente et se fonde sur l'exploitation des propriétés des constituants à l'échelle microscopique et sur une connaissance pouvant être complète (milieux périodiques) ou partielle (milieux désordonnés) de la distribution spatiale de ceux-ci. Cette approche, qualifiée de micromécanique, a déjà apporté un grand nombre de solutions dans le domaine des matériaux hétérogènes en général [104] mais aussi en ce qui concerne les milieux poreux, tant sur le plan de la modélisation mécanique que des phénomènes de transport ([43], [2], [67], [35]). La nature des équations de comportement ainsi que les propriétés macroscopiques en fonction des données locales se déduisent directement d'un problème théorique posé sur un volume considéré comme une structure à l'échelle microscopique. Cette démarche est valable dès lors qu'un volume élémentaire du point de vue de l'échelle macroscopique

(ayant une dimension  $\ell$  infinitésimale par rapport à la taille caractéristique  $L$  de la structure) est suffisamment représentatif des hétérogénéités locales. Dans le cas d'un milieu périodique, il est suffisant d'imposer que la taille de la cellule de base soit petite devant celle de la structure et le problème à résoudre pourra être posé sur une cellule de base en respectant certaines règles de périodicité sur les conditions aux limites. Dans le cas d'un milieu désordonné, il faut que la taille caractéristique des hétérogénéités  $d$  soit petite devant la taille du volume élémentaire. Ainsi la définition d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) repose sur la condition de séparation des échelles (cf. FIG. 1) :

- $\ell \ll L$  : cette condition garantit que le matériau homogène équivalent défini à l'échelle macroscopique forme un milieu continu pour lequel on dispose des outils classiques de différentiation et d'intégration et sur lequel on est en mesure de déterminer des champs de contrainte et de déformation,
- $d \ll \ell$  : cette condition confère au volume élémentaire son caractère représentatif de la statistique des particules présentes à l'échelle microscopique et donne donc un sens aux propriétés issues du processus d'homogénéisation.

La description périodique des géomatériaux a déjà permis de traiter de nombreux problèmes en mécanique ou dans le domaine du transport ou de la diffusion ([43], [35], [67]). Dans un grand nombre de cas, elle conduit à une formulation rigoureuse des équations à résoudre dont la démonstration peut ne pas être acquise dans le cadre aléatoire (loi de Darcy par exemple [35]). Mais les équations mises en jeu dans ce travail sont bien adaptées au cadre aléatoire qui présente l'avantage d'être moins restrictif sur la géométrie de la microstructure du milieu étudié. C'est ce dernier point de vue que nous adopterons par la suite.

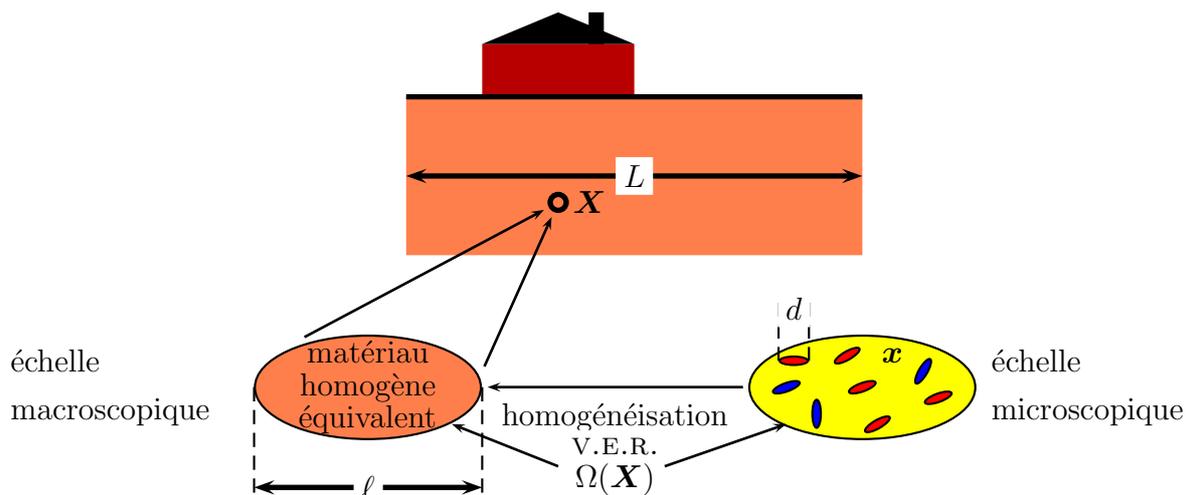


FIG. 1 – Différentes échelles

Ce mémoire se compose de quatre parties correspondant aux thèmes principaux.

- 
- La **partie I** a pour but de rappeler les bases de la technique du changement d'échelle ainsi que de l'homogénéisation linéaire dans le cadre des géomatériaux.

Le chapitre 1 s'appuie sur les raisonnements de [34] pour mettre en place les outils mathématiques permettant de passer des grandeurs définies à l'échelle microscopique aux grandeurs macroscopiques. On y rappelle également les conditions aux limites envisageables dans le cadre des milieux à distribution aléatoire des phases. Enfin, on précise la microstructure de géomatériau qui sera exploitée par la suite : celle-ci se compose d'une phase solide déformable, de renforts rigides à surface parfaitement adhérente ou lisse ainsi que de pores éventuellement saturés par un fluide visqueux dont on rappellera le rôle.

Dans le chapitre 2, après avoir présenté l'homogénéisation linéaire et les schémas classiques susceptibles d'être mis en œuvre sur les géomatériaux, nous nous proposons de les prolonger au cas où il existe des défauts d'adhérence entre les renforts rigides et la phase déformable. Nous effectuons également une étude critique de différents schémas en montrant notamment l'importance des hypothèses morphologiques sur l'effet de renforcement des inclusions rigides. Nous rappelons ensuite les équations d'état de la poroélasticité obtenues par un raisonnement micromécanique et nous les étendons au cas où la phase solide déformable présente une précontrainte sphérique. La présence de cette précontrainte sphérique trouvera son utilité lors de la détermination du critère de résistance macroscopique. Nous achevons enfin le chapitre en adaptant le calcul de moyennes représentatives du niveau de déformation dans la phase solide au cas où celle-ci est précontrainte.

- La **partie II** est consacrée à une approche micromécanique de la détermination d'un critère de résistance macroscopique d'un géomatériau.

Le chapitre 4 présente les différentes méthodes que l'on se propose d'employer pour estimer le critère macroscopique d'un géomatériau sec ou éventuellement saturé. Nous montrons également une technique permettant d'accéder aux états limites dans le cas d'une plasticité non associée du solide. Toutes les méthodes se ramènent à un problème d'homogénéisation non linéaire dont on présente le principe de résolution. Celle-ci s'appuie notamment sur une estimation du niveau de déformation dans le solide et sur l'exploitation d'un schéma linéaire.

Dans le chapitre 5, nous appliquons les méthodes du chapitre 4 au cas où la phase solide déformable satisfait un critère de von Mises. Nous retrouvons quelques résultats connus dans des cas simples (présence d'un seul type d'inclusions, pores ou renforts rigides adhérents) et des résultats nouveaux en incorporant des inclusions lisses. S'agissant des milieux poreux, nous traitons également le cas pressurisé et nous proposons une confrontation de l'estimation théorique à quelques calculs numériques dans le cadre bidimensionnel. Dans le cas des milieux renforcés notamment par des inclusions lisses, nous mettons en évidence l'impact majeur du choix du schéma d'homogénéisation sur l'effet des inclusions en montrant notamment que le schéma de Mori-Tanaka et le schéma auto-cohérent fournissent des résultats très différents.

Le chapitre 6 montre la puissance de la méthode en offrant la possibilité d'être appliquée dans le cadre original d'une phase solide frottante de Drucker-Prager. Nous trouvons ainsi les critères correspondant à un milieu poreux à matrice homogène sec ou pressurisé et nous envisageons également une confrontation avec diverses solutions numériques. Le cas du milieu renforcé est également traité en examinant tout particulièrement l'effet de renforcement ou de dégradation engendré par les inclusions lisses. Nous montrons pour chaque type de microstructure le rôle joué par la règle d'écoulement microscopique : on envisage notamment le cas de la plasticité associée et le cas de l'angle de dilatance nul.

Parmi d'autres résultats, nous présentons en annexe de cette partie la résolution complète, par le calcul à la rupture ou l'homogénéisation non linéaire, du critère macroscopique d'une sphère creuse de von Mises ou de Drucker-Prager soumise à un chargement sphérique. On montre notamment comment la décomposition du solide en sous-domaines peut améliorer l'estimation par homogénéisation non linéaire.

- La **partie III** se rapporte à la formulation du comportement poroplastique des géomatériaux par changement d'échelle.

Le chapitre 8 propose une construction micromécanique du comportement poroplastique. On retrouve notamment les lois d'état et on établit l'expression du critère de plasticité macroscopique.

Le chapitre 9 porte sur une notion fondamentale de l'étude théorique et expérimentale des géomatériaux, à savoir l'existence ou non d'une contrainte effective régissant le comportement poroplastique. Après avoir établi une condition nécessaire et suffi-

---

sante d'existence, nous la confrontons aux cas d'un géomatériau à matrice purement cohérente et d'un géomatériau à matrice frottante.

- La **partie IV** a pour objet l'étude des milieux fissurés et des irréversibilités physiques induites par les fissures sur le comportement macroscopique.

Dans le chapitre 10, on rappelle le lien entre le modèle classique de fissure considérée comme une interface et un modèle de fissure vue comme un objet tridimensionnel qui permet d'aborder les milieux fissurés à l'aide des schémas classiques de l'homogénéisation des milieux hétérogènes susceptibles de prendre en compte des interactions et éventuellement d'autres hétérogénéités. Plusieurs types de fissures non dissipatives sont envisagés. Le modèle tridimensionnel consiste à remplacer la fissure par un matériau élastique fictif occupant un domaine ellipsoïdal aplati et dont les caractéristiques doivent être adaptés au modèle bidimensionnel. Quelques exemples de milieux fissurés présentant différentes répartitions spatiales des phases sont traités au moyen des schémas de Mori-Tanaka et auto-cohérent. Dans ce dernier cas, nous mettons en évidence un phénomène de percolation.

Le chapitre 11 s'appuie encore sur le modèle tridimensionnel pour traiter le cas de fissures fermées à comportement plastique. La fissure bidimensionnelle est cette fois remplacée par un domaine occupé par un matériau plastique fictif. La méthode nous permet de construire le comportement macroscopique pour différents types de fissures : purement cohérentes, frottantes non dilatantes et frottantes dilatantes. Dans ce dernier cas, nous mettons en évidence l'effet de la dilataance microscopique sur le comportement macroscopique. Nous traitons enfin le couplage entre la plasticité et le phénomène de propagation de fissures alignées. Nous construisons notamment le critère de propagation.



## Première partie

# CHANGEMENT D'ÉCHELLE ET HOMOGENÉISATION LINÉAIRE



# Chapitre 1

## Méthode de changement d'échelle

### Sommaire

---

<b>1.1 Homogénéisation des grandeurs mécaniques</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1.1 Opération de moyenne . . . . .	13
1.1.2 Homogénéisation des contraintes . . . . .	15
1.1.3 Homogénéisation des déformations . . . . .	16
<b>1.2 Conditions aux limites du v.e.r.</b> . . . . .	<b>18</b>
1.2.1 Contraintes homogènes au contour . . . . .	19
1.2.2 Déformations homogènes au contour . . . . .	19
1.2.3 Lemme de Hill . . . . .	20
<b>1.3 Le v.e.r. de géomatériau</b> . . . . .	<b>20</b>
1.3.1 Microstructure d'un v.e.r. de géomatériau . . . . .	20
1.3.2 Effet d'un fluide saturant les pores [34] . . . . .	23

---



## 1.1 Homogénéisation des grandeurs mécaniques

En définissant les échelles de travail en introduction générale, nous avons précisé l'aspect géométrique de l'homogénéisation des milieux aléatoires : un volume élémentaire au point  $\mathbf{X}$  de l'échelle macroscopique correspond à une structure à part entière occupant un domaine noté  $\Omega(\mathbf{X})$  à l'échelle microscopique (cf. FIG. 1). Par définition, ces deux échelles sont pertinentes pour donner un sens aux grandeurs classiques des milieux continus notamment le tenseur des déformations et celui des contraintes. Nous supposons que l'hypothèse des petites perturbations (HPP) [92] est valable aux deux échelles. On réservera les notations en minuscules à l'échelle microscopique et les notations en majuscules à l'échelle macroscopique. Ainsi,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  désigneront respectivement le tenseur des déformations linéarisé et le tenseur des contraintes à l'échelle microscopique tandis que  $\mathbf{E}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}$  désigneront ceux de l'échelle macroscopique. Il s'agit maintenant de s'intéresser au lien existant entre les grandeurs homologues définies aux deux échelles. La première idée consiste à définir la valeur d'une grandeur macroscopique en un point  $\mathbf{X}$  comme la moyenne sur le v.e.r. en  $\mathbf{X}$  de la grandeur correspondante à l'échelle microscopique. Les paragraphes suivants ont pour objet de montrer la pertinence de cette intuition et s'inspirent des raisonnements présentés dans [34].

### 1.1.1 Opération de moyenne

Comme dans [34], on considère un v.e.r.  $\Omega(\mathbf{0})$  centré à l'origine (sa dimension caractéristique est donc  $\ell$ ) et on note  $\chi^\circ$  sa fonction caractéristique à l'échelle microscopique :

$$\chi^\circ(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega(\mathbf{0}) \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{0}) \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose que le domaine  $\Omega(\mathbf{X})$  obtenu à partir de  $\Omega(\mathbf{0})$  par la translation  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} + \mathbf{x}$  définit bien un v.e.r. au point macroscopique  $\mathbf{X}$ . La fonction caractéristique du domaine  $\Omega(\mathbf{X})$  notée  $\chi^{\mathbf{X}}$  est alors déduite de  $\chi^\circ$  par  $\chi^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \chi^\circ(\mathbf{x} - \mathbf{X})$ . On écrit alors la moyenne sur  $\Omega(\mathbf{X})$  d'un champ microscopique d'une grandeur physique  $e$  par la formule suivante :

$$\langle e \rangle(\mathbf{X}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega(\mathbf{X})} e(\mathbf{x}) \, d\Omega_x = \frac{1}{|\Omega|} \int \chi^\circ(\mathbf{x} - \mathbf{X}) e(\mathbf{x}) \, d\Omega_x \quad (1.2)$$

où  $|\Omega|$  désigne le volume de  $\Omega(\mathbf{X})$  ou de  $\Omega(\mathbf{0})$  :

$$|\Omega| = |\Omega(\mathbf{X})| = |\Omega(\mathbf{0})| \quad (1.3)$$

Par exemple, si  $\rho(\mathbf{x})$  désigne le champ microscopique de masse volumique, la masse volumique macroscopique définie comme le rapport de la masse totale du v.e.r.  $\Omega(\mathbf{X})$  sur

son volume est donnée par une formule de moyenne :

$$\langle \rho \rangle (\mathbf{X}) = \frac{1}{|\Omega|} \int \chi^o(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \rho(\mathbf{x}) d\Omega_x \quad (1.4)$$

De fait, la moyenne calculée en (1.2) dépend du point  $\mathbf{X}$  et définit donc un champ à l'échelle macroscopique dont la régularité est au moins égale à celle du champ microscopique  $e$ . En effet, un changement de variable élémentaire conduit à :

$$\langle e \rangle (\mathbf{X}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega(\mathbf{0})} e(\mathbf{X} + \mathbf{x}) d\Omega_x = \frac{1}{|\Omega|} \int \chi^o(\mathbf{x}) e(\mathbf{X} + \mathbf{x}) d\Omega_x \quad (1.5)$$

Sur l'expression (1.5), il est évident de constater que les dérivées (éventuellement multiples) de  $\langle e \rangle$  par rapport aux composantes de  $\mathbf{X}$  sont les moyennes des dérivées de  $e$  par rapport aux composantes correspondantes de  $\mathbf{x}$  :

$$\frac{\partial \langle e \rangle}{\partial X_i} = \frac{1}{|\Omega|} \int \chi^o(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial X_i} (e(\mathbf{X} + \mathbf{x})) d\Omega_x = \frac{1}{|\Omega|} \int \chi^o(\mathbf{x}) \frac{\partial e}{\partial x_i}(\mathbf{X} + \mathbf{x}) d\Omega_x \quad (1.6)$$

soit

$$\frac{\partial \langle e \rangle}{\partial X_i} = \langle \frac{\partial e}{\partial x_i} \rangle \quad (1.7)$$

Les grandeurs physiques que nous allons manipuler par la suite pourront être de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux ce qui signifie que l'on pourra éventuellement considérer des champs  $e$  présentant des surfaces de discontinuité. Il faudra alors interpréter les opérateurs différentiels sur  $e$  au sens des distributions. Par exemple, si le champ  $e$  présente une surface de discontinuité  $\mathcal{S}$  séparant  $\Omega(\mathbf{X})$  en  $\Omega_1(\mathbf{X})$  et  $\Omega_2(\mathbf{X})$ , la dérivation s'applique de la manière suivante par la formule des sauts [16] :

$$\frac{\partial e}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial e}{\partial x_i} \right\} + \llbracket e \rrbracket n_i \delta_{\mathcal{S}} \quad (1.8)$$

où l'on a noté  $\{\partial e/\partial x_i\}$  la distribution définie de part et d'autre de  $\mathcal{S}$  par la fonction intégrable  $\partial e/\partial x_i$  puis  $\mathbf{n}$  la normale à  $\mathcal{S}$  orientée arbitrairement de  $\Omega_1(\mathbf{X})$  vers  $\Omega_2(\mathbf{X})$  et enfin  $\llbracket e \rrbracket = e_2 - e_1$  le saut du champ  $e$  à la traversée de  $\mathcal{S}$ . La distribution notée  $\delta_{\mathcal{S}}$  désigne la masse de Dirac surfacique de support  $\mathcal{S}$ . En présence d'une discontinuité, la lecture de (1.7) au sens des distributions donne :

$$\frac{\partial \langle e \rangle}{\partial X_i} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega(\mathbf{X})} \left\{ \frac{\partial e}{\partial x_i} \right\}(\mathbf{x}) d\Omega_x + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathcal{S} \cap \Omega(\mathbf{X})} \llbracket e \rrbracket(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS_x \quad (1.9)$$

soit encore par application du théorème de Stokes (en intégrant successivement  $\partial e/\partial x_i$  sur  $\Omega_1(\mathbf{X})$  et  $\Omega_2(\mathbf{X})$  et en additionnant les deux contributions) :

$$\frac{\partial \langle e \rangle}{\partial X_i} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega(\mathbf{X})} e(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS_x \quad (1.10)$$

### 1.1.2 Homogénéisation des contraintes

Considérons maintenant que la structure macroscopique soit soumise à un certain chargement notamment un champ de force massique  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  à l'échelle microscopique. Notons  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  son homologue macroscopique. L'écriture de la force massique totale agissant sur  $\Omega(\mathbf{X})$  impose :

$$\langle \rho \rangle \mathbf{F} = \langle \rho(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.11)$$

Par hypothèse fondamentale de l'homogénéisation, on suppose que les efforts intérieurs sont décrits par un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  à l'échelle microscopique et  $\boldsymbol{\Sigma}$  à l'échelle macroscopique. Dans une évolution quasi-statique, l'équilibre se traduit à l'échelle microscopique par l'équation de champ suivante :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

et à l'échelle macroscopique par :

$$\mathbf{div}_X \boldsymbol{\Sigma} + \langle \rho \rangle \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

Il s'agit maintenant de déterminer un lien entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}$  offrant la compatibilité entre (1.12) et (1.13) sachant que l'on a (1.11). En prenant la moyenne de (1.12) et en exploitant la règle (1.7), on obtient :

$$\langle \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \rangle = \mathbf{div}_X \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle \rho \mathbf{f} \rangle = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

Comparant (1.14) et (1.13) en tenant compte de (1.11), il est naturel de poser :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (1.15)$$

Examinons à présent l'influence des forces massiques sur les variations de  $\boldsymbol{\sigma}$  à l'échelle microscopique. À la lumière de (1.15), il est clair que  $\boldsymbol{\sigma}$  est d'un ordre de grandeur au moins égal à celui de  $\boldsymbol{\Sigma}$ . De plus, l'équilibre macroscopique (1.13) montre que  $\|\rho \mathbf{F}\|_L = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\Sigma}\|)$ , ce qui signifie que  $\boldsymbol{\Sigma}$  est d'un ordre de grandeur au moins égal à celui de  $\|\rho \mathbf{F}\|_L$  mais il peut être supérieur en fonction des conditions aux limites appliquées à la structure macroscopique. Ainsi, invoquant la relation (1.11), on peut écrire

$$\|\rho \mathbf{f}\|_L = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\sigma}\|) \quad (1.16)$$

Or, il découle de (1.12) que les variations de  $\boldsymbol{\sigma}$  dues à la prise en compte des forces massiques à l'échelle microscopique sont de l'ordre de grandeur de  $\|\rho \mathbf{f}\|_L$ , autrement dit, en raison de la condition de séparation des échelles explicitée dans l'introduction générale, elles sont négligeables par rapport à l'ordre de grandeur de  $\boldsymbol{\sigma}$  (1.16). Ainsi, on peut conclure que les forces massiques ont un effet purement macroscopique dans la

mesure où elles induisent des variations sur  $\Sigma$  d'un ordre de grandeur plus important que les variations induites sur  $\boldsymbol{\sigma}$  à l'échelle du v.e.r.. L'équation d'équilibre microscopique (1.12) se réécrit donc simplement :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

Si le champ  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  admet une surface de discontinuité  $\mathcal{S}$ , la formule (1.8) permet de réécrire (1.17) :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \{\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}\} + \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \delta_{\mathcal{S}} = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

ce qui ajoute à l'équation de champ la condition classique de continuité du vecteur-contrainte :

$$\{\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{0} \quad (a) \quad (1.19)$$

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (b)$$

Montrons maintenant une propriété remarquable d'un champ  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifiant (1.17), à savoir que sa moyenne sur un domaine borné  $\omega$  ne dépend que des valeurs du vecteur-contrainte sur la frontière de  $\omega$ . Considérons donc un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  en équilibre. Il est aisé de montrer la propriété suivante en utilisant (1.17) ainsi que la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\mathbf{div}_x(\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial (x_i \sigma_{jk})}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma} \quad (1.20)$$

Puis, à l'aide du théorème de Stokes [16] et de (1.20), il vient :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante au domaine  $\omega$ . On constate bien sur (1.21) que la moyenne de  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dépend que de la valeur du vecteur-contrainte  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  au contour.

### 1.1.3 Homogénéisation des déformations

Alors que la règle de moyenne sur les contraintes (1.15) découle directement de la compatibilité entre les équations d'équilibre aux différentes échelles, il est légitime de se poser la question de l'homogénéisation du champ de déformation i.e. du passage de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  à  $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ . Considérons un champ de déplacement microscopique  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ . Le tenseur de déformation microscopique  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dérive de  $\boldsymbol{\xi}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_x \boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{grad}_x \boldsymbol{\xi}) \quad (1.22)$$

Si  $\boldsymbol{\xi}$  présente une surface de discontinuité  $\mathcal{S}$ , l'expression (1.22) devient, en exploitant la formule (1.8) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\{\mathbf{grad}_x \boldsymbol{\xi}\} + \{{}^t \mathbf{grad}_x \boldsymbol{\xi}\}) + \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n} \delta_{\mathcal{S}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n} \delta_{\mathcal{S}} \quad (1.23)$$

où  $\mathbf{a} \otimes^s \mathbf{b}$  désigne la partie symétrique du produit tensoriel  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

Considérons également un champ de contrainte microscopique  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  quelconque satisfaisant l'équilibre (1.17) et son état macroscopique associé  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X})$  (vérifiant (1.15)). Aucune relation de comportement ne lie les états de contrainte et ceux de déformation. Le point de départ du raisonnement consiste à postuler que le travail virtuel de déformation élémentaire à l'échelle macroscopique est égal au travail virtuel de déformation sur le v.e.r. calculé à l'aide des grandeurs microscopiques. D'une part, ce travail développé par le champ  $\boldsymbol{\sigma}$  dans le déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  s'écrit :

$$\mathcal{W}_{def} = \int_{\Omega(\mathbf{X})} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_x \quad (1.24)$$

En présence d'une discontinuité de déplacement, l'interprétation de (1.24) par les distributions donne :

$$\mathcal{W}_{def} = \int_{\Omega(\mathbf{X})} \boldsymbol{\sigma} : \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \, d\Omega_x + \int_S [[\boldsymbol{\xi}]] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS_x \quad (1.25)$$

D'autre part, ce même travail s'exprime en termes de grandeurs macroscopiques :

$$\mathcal{W}_{def} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \, |\Omega| \quad (1.26)$$

La comparaison de (1.24) et (1.26) permet d'écrire :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (1.27)$$

Le raisonnement étant valable pour tout champ  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  satisfaisant (1.17) et (1.15), on applique l'équation (1.27) à un état  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  uniforme valant  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X})$  sur le v.e.r.  $\Omega(\mathbf{X})$ . On en déduit immédiatement que :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.28)$$

L'équation (1.28) découle donc directement de la compatibilité entre les expressions des travaux de déformation microscopique et macroscopique. Il reste tout de même à vérifier que le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{X})$  ainsi défini est bien géométriquement compatible. Cette propriété s'obtient aisément en prenant la moyenne de (1.22) et en exploitant la règle (1.7) :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_X \langle \boldsymbol{\xi} \rangle + {}^t \mathbf{grad}_X \langle \boldsymbol{\xi} \rangle) \quad (1.29)$$

L'équation (1.22) montre que  $\mathbf{E}$  dérive du champ  $\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$  qui a donc le statut de champ de déplacement macroscopique.

Comme nous venons de donner un sens macroscopique à l'opération de moyenne du champ de déformation, il est utile de rappeler une propriété remarquable d'un tel champ : sa moyenne sur un domaine  $\omega$  ne dépend que des valeurs du champ de déplacement dont il dérive sur la frontière de  $\omega$ . Considérons donc un champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dérivant

du champ de déplacement  $\boldsymbol{\xi}$ . Utilisant le théorème de Stokes, on montre la propriété annoncée :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, d\Omega = \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \boldsymbol{\xi} \otimes \mathbf{n} \, dS \quad (1.30)$$

On peut également rappeler que la moyenne du travail virtuel de déformation d'un champ de contrainte équilibré dans un champ de déformation ne dépend elle aussi que des valeurs du vecteur-contrainte et du déplacement sur le bord et vaut (cf. intégration par parties classique dans la démonstration du théorème des travaux virtuels [92]) :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.31)$$

## 1.2 Conditions aux limites du v.e.r.

Après avoir déduit les correspondances naturelles entre les grandeurs mécaniques aux deux échelles, on se pose naturellement la question de l'homogénéisation des propriétés du matériau. Il s'agit donc d'exploiter les informations disponibles à l'échelle microscopique pour déterminer les propriétés macroscopiques en résolvant un problème sur le v.e.r. considéré comme une structure. Les équations dont on dispose pour l'instant sont :

- l'équation d'équilibre (1.17),
- les règles de moyenne (1.15) et (1.28),
- la relation entre la déformation et le déplacement (1.22),
- les propriétés locales (lois de comportement ou critères de résistance par exemple).

À ce stade, le chargement de la structure n'est perceptible que via les moyennes (1.15) et (1.28) qui montrent que les champs locaux  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  doivent être compatibles avec un certain état macroscopique. Mais ces conditions ne sont pas classiques en mécanique dans la mesure où elles ne suffisent pas pour établir un problème bien posé mathématiquement. Un tel problème nécessite en effet que le chargement se traduise en termes de conditions aux limites correctement définies sur la frontière du domaine d'étude. Sous réserve de rester compatible avec les équations de moyenne (1.15) et (1.28) mais aussi (1.27), on a a priori le choix des conditions aux limites. Dans les paragraphes 1.2.1 et 1.2.2 sont présentés les deux types classiques utilisés en homogénéisation des milieux aléatoires. Étant entendu que nous travaillons désormais sur un v.e.r. situé en un point macroscopique quelconque  $\mathbf{X}$ , nous pouvons supprimer toute référence à  $\mathbf{X}$  et considérer les valeurs des champs macroscopique en  $\mathbf{X}$  comme des constantes lorsqu'il s'agit de résoudre un problème sur le v.e.r.. De plus, les opérateurs différentiels (divergence et gradient) font implicitement référence aux coordonnées microscopiques  $\mathbf{x}$ .

### 1.2.1 Contraintes homogènes au contour

On se propose ici de définir des conditions aux limites portant, en tout point de la frontière du v.e.r., sur le vecteur-contrainte  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . En imposant également à ces conditions d'être satisfaites par le seul champ homogène (et donc en équilibre) compatible avec (1.15), soit  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$ , on aboutit à :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (1.32)$$

D'après la formule (1.21) avec  $\omega = \Omega$ , il apparaît clairement que les conditions aux limites (1.32) déterminent sans ambiguïté la valeur de la moyenne de  $\boldsymbol{\sigma}$  pourvu que ce champ satisfasse l'équilibre (1.17) et l'on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.33)$$

Remarquant que le champ homogène  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$  vérifie aussi (1.33), on en déduit que la relation de moyenne (1.15) est satisfaite.

Montrons également que les conditions aux limites (1.32) sont bien compatibles avec la condition énergétique (1.27). Il suffit pour cela d'invoquer le résultat (1.31) appliqué sur  $\boldsymbol{\sigma}$  quelconque vérifiant (1.32) et sur le champ homogène  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$  pour écrire :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.34)$$

ce qui prouve le résultat attendu en prenant (1.28) comme définition de  $\mathbf{E}$ .

### 1.2.2 Déformations homogènes au contour

À la place de (1.32), on se propose de définir des conditions aux limites de type cinématique en imposant le vecteur déplacement en tout de la frontière du v.e.r.. Si le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  était homogène et donc égal à  $\mathbf{E}$  en raison de (1.28), le champ de déplacement s'écrirait en tout point  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$  à un mouvement rigidifiant près. L'idée est donc ici de poser sur  $\partial\Omega$  :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (1.35)$$

Il est clair, d'après la formule (1.30) avec  $\omega = \Omega$ , que, comme le déplacement est connu au contour par (1.35), quelle que soit les valeurs prises dans l'intérieur du v.e.r., la moyenne du champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est déterminée. Celle-ci est donc égale à la moyenne du champ de déformation issu du champ de déplacement linéaire  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$  soit  $\mathbf{E}$ . Ainsi la condition de moyenne (1.28) est automatiquement satisfaite.

Il reste à montrer la compatibilité de (1.35) avec la condition énergétique (1.27). On

utilise encore la relation (1.31) appliquée à la fois à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  quelconque dérivant d'un champ de déplacement vérifiant (1.35) et au champ homogène  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}$  pour montrer :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \boldsymbol{E} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \quad (1.36)$$

ce qui prouve le résultat attendu en prenant (1.15) comme définition de  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

### 1.2.3 Lemme de Hill

Nous avons montré dans les deux paragraphes précédents que les conditions aux limites (1.32) et (1.35) présentaient l'intérêt majeur de respecter les relations de moyenne (1.15), (1.28) et (1.27). Précisons aussi que l'on appelle classiquement "lemme de Hill" le résultat venant d'être démontré en (1.34) et (1.36) et qui peut se résumer ainsi :

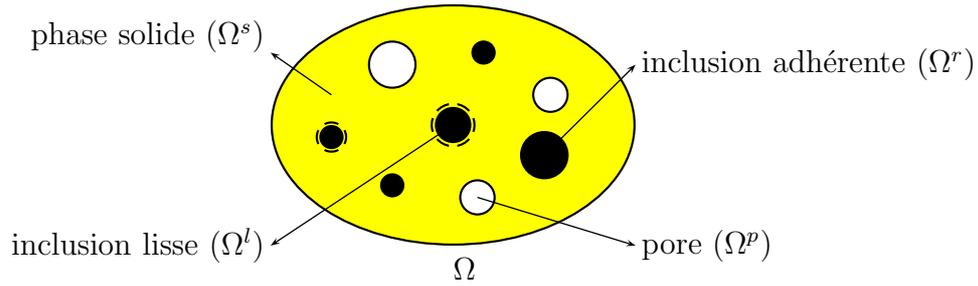
$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \exists \boldsymbol{\xi} \text{ tel que } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) \\ \exists \boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^6 \text{ tel que } \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} \text{ sur } \partial\Omega \\ \text{ou} \\ \exists \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^6 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.37)$$

## 1.3 Le v.e.r. de géomatériau

### 1.3.1 Microstructure d'un v.e.r. de géomatériau

#### Description

Le v.e.r. de géomatériau que nous allons considérer dans toute la suite sera composé d'une phase solide déformable occupant le domaine  $\Omega^s$ , d'inclusions poreuses  $\Omega^p$ , d'inclusions rigides adhérentes  $\Omega^r$  et d'inclusions rigides à interface lisse  $\Omega^l$ . Le domaine occupé par la réunion de ces inclusions est le complémentaire de  $\Omega^s$  i.e.  $\Omega^p \cup \Omega^r \cup \Omega^l = \Omega \setminus \Omega^s$  (cf. FIG. 1.1). Dans les géomatériaux, ces différents types d'inclusions ne coexistent pas forcément à la même échelle. Lorsque des échelles différentes sont concernées, il convient de procéder en plusieurs phases d'homogénéisation en considérant d'abord l'échelle la plus fine i.e. celle faisant intervenir les plus petites inclusions et en utilisant à chaque étape les propriétés homogénéisées de l'étape précédente. Néanmoins, le fait de faire intervenir toutes les inclusions à la même échelle et une phase solide déformable pouvant être elle-même le résultat d'une homogénéisation antérieure rend l'étude plus générale et présente

FIG. 1.1 – Microstructure du v.e.r.  $\Omega$ 

un intérêt sur le plan académique.

On formulera des hypothèses sur la forme des inclusions et sur leur répartition spatiale lorsque cela s'avérera nécessaire. On ne définit pour l'instant que les fractions volumiques suivantes :

- fraction volumique de pores (ou porosité) :

$$\varphi = \frac{|\Omega^p|}{|\Omega|} \quad (1.38)$$

- fraction volumique d'inclusions rigides adhérentes :

$$\varphi^r = \frac{|\Omega^r|}{|\Omega|} \quad (1.39)$$

- fraction volumique d'inclusions rigides à interface lisse :

$$\varphi^l = \frac{|\Omega^l|}{|\Omega|} \quad (1.40)$$

- fraction volumique de solide déformable :

$$\varphi^s = \frac{|\Omega^s|}{|\Omega|} \quad (1.41)$$

On notera par la suite  $\langle e \rangle_{\mathcal{D}}$  la moyenne de la grandeur physique  $e$  sur le domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega$  :

$$\langle e \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} e \, d\Omega \quad (1.42)$$

On conservera la notation simplifiée  $\langle \cdot \rangle$  (sans préciser le domaine) pour désigner la moyenne sur l'ensemble du v.e.r.  $\Omega$ .

A priori la frontière du v.e.r. possède une intersection non vide avec certaines inclusions, ce qui est susceptible de poser un problème pour appliquer les conditions aux limites (1.32) ou (1.35). Sans nuire à la généralité des raisonnements d'homogénéisation, on supposera que la frontière du v.e.r. ne coupe que la phase matricielle. Ceci revient à modifier la

microstructure sur un domaine au voisinage de la frontière de mesure négligeable par rapport à la taille du v.e.r. en raison des conditions de changement d'échelle vus dans l'introduction générale.

Les inclusions vides ou rigides constituent des cas extrêmes de matériaux du point de vue de leur comportement. Les paragraphes suivants mettent en lumière quelques-unes de leurs particularités.

### Pores

Dans une inclusion vide, le champ de contrainte est nul tandis que le champ de déplacement n'est, a priori, pas défini. Néanmoins celui-ci est défini sur la frontière du pore et il est donc possible, par la formule (1.30) appliquée au domaine poreux, de calculer la contribution de ce dernier à la moyenne de la déformation :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^p} = \frac{1}{|\Omega^p|} \int_{\partial\Omega^p} \boldsymbol{\xi} \otimes \mathbf{n} \, dS \quad (1.43)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire à  $\partial\Omega^p$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega^p$ . Rien n'empêche en outre de prolonger arbitrairement le champ de déplacement par continuité à l'intérieur du pore, la moyenne du champ de déformation étant parfaitement insensible au choix du prolongement.

### Inclusions rigides

Le cas particulier des inclusions rigides à interface lisse mérite quelques précisions en ce qui concerne leur modélisation. Celle-ci se démarque en effet des inclusions adhérentes par des conditions spéciales de régularité sur les champs de déplacement ou de contrainte au niveau de l'interface avec la matrice : la composante tangentielle du déplacement peut être discontinue mais pas la composante normale (pas de décohésion ni d'interpénétration) et la contrainte tangentielle doit être nulle (le vecteur-contrainte, qui est forcément continu pour respecter l'équilibre, est purement normal). Autrement dit :

$$\begin{aligned} \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= \llbracket \xi_n \rrbracket = 0 \quad (a) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \sigma_{nn} \mathbf{n} \quad (b) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Les conditions (1.44) correspondent à un contact bilatéral pour lequel on autorise un signe positif de  $\sigma_{nn}$  sans que cela ne provoque de décohésion. Cette modélisation est sans doute peu réaliste mais présente l'avantage de se traiter dans un cadre linéaire. Le modèle d'interface lisse avec contact unilatéral, pouvant engendrer une décohésion dès lors que la contrainte normale cesse d'être strictement négative, est plus convaincant mais introduit une non linéarité. Nous choisissons donc plutôt le modèle bilatéral tout en précisant que

son caractère pertinent ne sera assuré que si aucune traction n'apparaît. On comprend bien que cette condition sera d'autant mieux réalisé que le v.e.r. sera soumis à des pressions de confinement suffisantes.

À l'inverse des pores, le champ de déformation est nul dans les inclusions rigides (i.e. le champ de déplacement correspond à un mouvement rigidifiant par phase rigide connexe). Néanmoins, lorsque des discontinuités de déplacement sont autorisées au niveau de l'interface, celles-ci contribuent à la moyenne du champ de déformation. On écrit donc, d'après (1.23) :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^l} = \frac{1}{|\Omega^l|} \int_{\partial\Omega^l} \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n} \, dS \quad (1.45)$$

Le champ de contrainte peut être quelconque pourvu qu'il réalise la continuité du vecteur-contrainte au niveau des interfaces entre la phase matricielle et les renforts (et la condition (1.44 b) si l'interface est lisse). Ce vecteur-contrainte étant fixé, on constate, en exploitant la relation (1.21) appliquée au domaine  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha = r$  ou  $l$ ), que, quel que soit le prolongement choisi pour  $\boldsymbol{\sigma}$  (respectant l'équilibre) dans les inclusions rigides, la moyenne de ce champ est déterminée sans ambiguïté :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega^\alpha} = \frac{1}{|\Omega^\alpha|} \int_{\partial\Omega^\alpha} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\alpha = r \text{ ou } l) \quad (1.46)$$

Pour conclure ce paragraphe, il est utile d'ajouter que le modèle (1.44) d'interface lisse ne contribue pas au travail de déformation (1.25) car on observe en tout point de la discontinuité :

$$\llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{nn} \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \sigma_{nn} \llbracket \xi_n \rrbracket = 0 \quad (1.47)$$

### 1.3.2 Effet d'un fluide saturant les pores [34]

La présence d'un fluide à l'intérieur de l'espace poreux ouvre la voie à l'étude de plusieurs types de phénomènes physiques comme par exemple le transport, la diffusion d'un soluté ainsi que l'effet mécanique sur le squelette. C'est ce dernier phénomène dont nous allons nous préoccuper dans la mesure où le fluide introduit un paramètre supplémentaire de chargement mécanique sur le v.e.r..

On suppose que le fluide sature les pores et il est modélisé comme un fluide visqueux incompressible. Son comportement s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} \quad \text{avec} \quad \text{tr} \mathbf{d} = 0 \quad (1.48)$$

où  $p$  désigne le champ de pression,  $\mu$  correspond à la viscosité dynamique du fluide et  $\mathbf{d}$  est le champ de taux de déformation (partie symétrique du gradient du champ de vitesse). Ainsi, d'après (1.48), l'action du fluide sur le solide a deux origines : le champ de pression et les contraintes visqueuses.

Examinons d'abord l'ordre de grandeur de la pression (ou de ses variations à l'échelle de la structure macroscopique) que l'on note  $\Pi$  et de ses variations à l'échelle du v.e.r.. D'après un résultat rigoureusement établi dans le cadre d'une microstructure périodique [2], le gradient de pression microscopique est de l'ordre de grandeur de  $\Pi/L$ . On peut se convaincre de ce résultat en examinant la solution d'un écoulement de Poiseuille à travers un conduit cylindrique. On note en effet que le gradient de pression est constant et dirigé suivant l'axe du cylindre; il ne présente donc aucune composante dans la section droite du conduit. Ainsi, à l'échelle du v.e.r., les variations de la pression sont de l'ordre de  $\Pi \ell/L$  et sont donc négligeables par rapport à  $p$  qui est de l'ordre de  $\Pi$ . On peut donc, en première approximation, considérer  $p$  comme constante à l'échelle du v.e.r. du point de vue de l'action mécanique du fluide sur le solide.

On cherche maintenant à évaluer l'ordre de grandeur de la composante visqueuse de l'interaction fluide/solide :

$$\mathbf{T}_v = 2 \mu \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \quad (1.49)$$

On admet que les effets inertiels sont négligeables par rapport aux effets visqueux. Ceci correspond à des valeurs faibles du nombre de Reynolds  $\mathcal{R} = \rho V/\mu$  où  $V$  désigne l'ordre de grandeur de la vitesse du fluide  $\mathbf{v}$ . Dans ce cas, l'équation d'équilibre est l'équation de Stokes :

$$\mathbf{grad} p = \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1.50)$$

Il est utile de rappeler la condition d'adhérence à une paroi solide de tout fluide visqueux, soit  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  sur l'interface fluide/solide, ce qui indique que la longueur caractéristique de variation de la vitesse est la taille des hétérogénéités  $d$ . Ce dernier résultat fait également l'objet d'une démonstration rigoureuse en périodique [2]. De l'équation (1.50), on déduit donc la relation suivante sur les ordres de grandeur :

$$\frac{\Pi}{L} = \mu \frac{V}{d^2} \quad (1.51)$$

De plus, l'ordre de grandeur de la force visqueuse (1.49) est donc  $T_v = \mu V/d$ , ce qui permet d'écrire en utilisant (1.51) que :

$$\frac{T_v}{\Pi} = \frac{d}{L} \ll 1 \quad (1.52)$$

Il découle de (1.52) qu'il existe deux ordres de grandeur de différence entre l'effet de la pression et l'effet de la viscosité dans l'interaction fluide/solide. On peut donc largement négliger ce dernier et considérer, au niveau du v.e.r., que le fluide agit sur le solide par un effort surfacique à l'interface valant  $-p \mathbf{n}$  où  $p$  est une constante et  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire dirigée du solide vers le fluide. Le raisonnement menant à la comparaison des ordres de grandeur des différentes contraintes est valable aussi à l'intérieur du domaine

fluide et l'on peut, dans (1.48), négliger la partie visqueuse et considérer que l'état de contrainte s'écrit simplement :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^p \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = -p \mathbf{1} \quad (1.53)$$

N.B. : Tous les développements de ce chapitre peuvent être transposés en vitesse : il suffit de remplacer les déplacements par des vitesses, les déformations par des taux de déformation et les travaux par des puissances.



# Chapitre 2

## Comportement élastique linéaire

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Comportement du géomatériau sec</b>	<b>29</b>
2.1.1	Détermination du tenseur d'élasticité macroscopique	29
2.1.2	Influence des conditions aux limites	31
2.1.3	Approche énergétique	33
2.1.4	Méthodes d'estimation	33
2.1.5	Mise en œuvre d'un schéma d'homogénéisation linéaire	36
<b>2.2</b>	<b>Poroélasticité linéaire</b>	<b>41</b>
2.2.1	Énergie élastique macroscopique et variables d'état	41
2.2.2	État initial non naturel : le théorème de Levin [102]	43
2.2.3	Approche microscopique des équations d'état de la poroélasticité linéaire	46
<b>2.3</b>	<b>Calcul des moments dans la matrice</b>	<b>51</b>
2.3.1	Moments d'ordre 1	51
2.3.2	Moments d'ordre 2	54

---



Pour compléter le système des équations présentées au chapitre 1 (équilibre et conditions aux limites) permettant de trouver les champs de contrainte et de déformation dans le V.E.R., il faut introduire des modèles de comportement pour les différentes phases. Le but de ce chapitre est de mettre en œuvre les méthodes classiques de l'homogénéisation linéaire dans le cas d'un géomatériau décrit à la section 1.3 ayant une matrice élastique linéaire. On considérera d'abord le géomatériau sec à l'état initial naturel puis on tiendra compte d'un fluide saturant pour exprimer les lois de la poroélasticité linéaire.

## 2.1 Comportement du géomatériau sec

### 2.1.1 Détermination du tenseur d'élasticité macroscopique

On considère un géomatériau sec, autrement dit les pores correspondent à un espace vide ( $p = 0$ ). La phase solide déformable est supposée élastique linéaire et l'évolution du V.E.R. s'effectue de manière isotherme. L'état initial est naturel en chaque point du V.E.R., ce qui signifie que, dans l'état de référence (à partir duquel sont comptés les déplacements), le tenseur des contraintes est nul. Ainsi le comportement de chaque point du V.E.R. peut être considéré comme élastique linéaire et s'écrit donc à l'aide d'un tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  (2.3). L'hétérogénéité du V.E.R. est bien prise en compte à travers la dépendance en  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{c}$  :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^s \quad (a) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega^p \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad (b) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega^r \cup \Omega^l \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) &\rightarrow \infty \quad (c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

L'objectif poursuivi est de trouver le lien existant entre les grandeurs macroscopiques  $\mathbf{E}$  (1.28) et  $\Sigma$  (1.15) en résolvant le problème d'élasticité isotherme formé par les équations suivantes :

- équilibre

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

- comportement élastique linéaire

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

- relation entre la déformation et le déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) \quad (2.4)$$

- conditions (1.44) sur l'interface lisse

$$[[\xi_n]] = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} \quad (2.5)$$

- conditions aux limites (cf. § 1.2.1 ou § 1.2.2)

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (2.6)$$

Quelles que soient les conditions aux limites choisies (2.6), la solution  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\sigma})$  de ce problème existe et est unique [92] sauf à l'intérieur des pores ou des inclusions rigides où le prolongement de l'un ou l'autre des champs est arbitraire (cf. section 1.3.1).

Considérons maintenant le problème correspondant aux déformations homogènes au contour,  $\mathbf{E}$  apparaît alors comme le paramètre de chargement du v.E.R.. Appliquons le raisonnement présenté dans [102] pour construire le tenseur d'élasticité macroscopique. Tout d'abord, la linéarité des équations du problème implique l'existence d'une relation linéaire entre le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{E}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Si le v.E.R. contient des inclusions rigides à interface lisse, par linéarité la partie singulière de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  peut aussi s'écrire :

$$[[\boldsymbol{\xi}]] \otimes^s \mathbf{n} = \mathfrak{a}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} \quad (2.8)$$

Ainsi, le tenseur de localisation  $\mathbb{A}$  dans (2.7) comporte un terme de distribution surfacique de Dirac :

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \{\mathbb{A}\}(\mathbf{x}) + \mathfrak{a}(\mathbf{x}) \delta_{\partial\Omega^i} \quad (2.9)$$

On note  $\mathbb{I}$  l'identité dans l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 opérant sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques. On introduit également  $\mathbb{J} = (1/3)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  le tenseur extrayant la partie sphérique et  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$  celui extrayant la partie déviatorique.

Seules les discontinuités tangentielles de déplacement sont autorisées (2.5), ce qui entraîne d'après (2.8) la propriété suivante :

$$\mathbb{J} : \mathfrak{a} = \mathbb{0} \quad (2.10)$$

Sans connaître a priori l'expression de  $\mathbb{A}$ , il est impératif que la relation (2.7) soit compatible avec (1.28). On a donc la règle de cohérence suivante :

$$\langle \mathbb{A}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \{\mathbb{A}\}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega^i} \mathfrak{a}(\mathbf{x}) \, dS = \mathbb{I} \quad (2.11)$$

Dans la suite, par convention, la moyenne de déformation dans la phase solide ne prendra pas en compte les éventuelles discontinuités de déplacement à l'interface entre celle-ci et les renforts lisses :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^s} = \langle \{\mathbb{A}\} \rangle_{\Omega^s} \quad (2.12)$$

En revanche, ces discontinuités seront intégrées à la moyenne de déformation sur le domaine des renforts rigides  $\Omega^l$  (1.45) :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^l} = \langle \{A\} \rangle_{\Omega^l} + \frac{1}{|\Omega^l|} \int_{\partial\Omega^l} \mathfrak{c}(\mathbf{x}) \, dS \quad \text{avec} \quad \lim_{\mathfrak{c}^l \rightarrow \infty} \langle \{A\} \rangle_{\Omega^l} = \mathbb{0} \quad (2.13)$$

Contrairement à la déformation, le tenseur des contraintes ne présente pas de terme singulier même en présence d'une interface lisse. Il en résulte que la moyenne de  $\boldsymbol{\sigma}$  sur le V.E.R. s'écrit :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega^s} + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega^r} + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega^l} \quad (2.14)$$

En combinant la loi de comportement (2.3), les règles de localisation (2.7) et de moyenne (1.15) et (2.14), on obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (2.15)$$

avec

$$\mathbb{C}^{hom} = \lim_{\substack{\mathfrak{c}^r \rightarrow \infty \\ \mathfrak{c}^l \rightarrow \infty}} \left( \varphi^s \mathfrak{c}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^s} + \varphi^r \mathfrak{c}^r : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^r} + \varphi^l \mathfrak{c}^l : \langle \{A\} \rangle_{\Omega^l} \right) \quad (2.16)$$

D'une part, il est à noter dans (2.16) que les produits  $\mathfrak{c}^r : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^r}$  et  $\mathfrak{c}^l : \langle \{A\} \rangle_{\Omega^l}$  correspondent à des formes indéterminées au passage à la limite puisque les tenseurs d'élasticité tendent vers l'infini alors que le tenseur de localisation tend vers  $\mathbb{0}$  en raison du caractère rigide des inclusions. D'autre part, même si le tenseur  $\mathfrak{c}$  (2.9) ne produit pas de terme explicite dans (2.16), l'effet de l'interface est bien présent puisque celle-ci affecte la valeur du champ  $\{A\}(\mathbf{x})$  en tout point.

L'expression (2.16) représente une adaptation en présence d'une interface lisse de la relation classique [102] :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle \mathfrak{c} : \mathbb{A} \rangle \quad (2.17)$$

en notant bien que seule la partie fonctionnelle  $\{\mathbb{A}\}$  de  $\mathbb{A}$  joue un rôle. Autrement dit, tout se passe comme si l'on avait conféré à l'interface lisse un tenseur d'élasticité caractérisé par un module de cisaillement nul et un module de compression quelconque non nul :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega^l \quad \mathfrak{c}(\mathbf{x}) = 3k^{int} \mathbb{J}, \quad k^{int} > 0 \quad (2.18)$$

ce qui, en vertu de la propriété (2.10), élimine de (2.17) la contribution explicite de l'interface.

### 2.1.2 Influence des conditions aux limites

Si l'on considère le problème défini par des conditions de contrainte homogène au contour,  $\boldsymbol{\Sigma}$  apparaît comme le paramètre de chargement du V.E.R.. On peut alors de manière analogue faire intervenir un tenseur de localisation en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.19)$$

Par suite, on obtient la loi de comportement macroscopique écrite à l'aide du tenseur de souplesse macroscopique  $\mathbb{S}^{hom}$  :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.20)$$

avec

$$\mathbb{S}^{hom} = \langle \mathfrak{s} : \mathbb{B} \rangle \quad (2.21)$$

Comme cela a été souligné à la section 1.2, les conditions aux limites en contrainte ou déformation homogènes au contour ne découlent pas d'un raisonnement de changement d'échelle et ne sont sans doute pas exactement respectées dans la réalité. Néanmoins ces deux types de condition aux limites constituent un artifice permettant de poser correctement le problème mathématique sur le v.e.r. tout en restant compatible avec les règles de moyenne. De plus, il est évident que les solutions des deux problèmes ne sont en général pas les mêmes : il n'y a aucune raison en effet pour que la solution relative à des conditions de déformation homogène au contour soit telle que le champ de contrainte satisfasse des conditions de contrainte homogène au contour. La méthode d'homogénéisation n'a donc de sens que si ces solutions sont peu différentes l'une de l'autre et si les caractéristiques macroscopiques peuvent être considérées comme identiques. D'après un résultat dû à Hill [56] et Mandel, cette situation est rencontrée dès lors que la séparation d'échelle (cf. introduction générale) est acquise. Dans ce cas, les solutions diffèrent l'une de l'autre uniquement sur une mince couche d'épaisseur de l'ordre de grandeur des hétérogénéités ( $d$ ). En dehors de cette mince couche, on peut donc confondre la solution en contrainte (2.19) avec celle relative aux conditions en déformation homogène au contour obtenue en combinant (2.3), (2.7) et (2.15) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathfrak{c}(\mathbf{x}) : \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} = \mathfrak{c}(\mathbf{x}) : \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbb{C}^{hom^{-1}} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.22)$$

soit donc :

$$\mathbb{B}(\mathbf{x}) \approx \mathfrak{c}(\mathbf{x}) : \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbb{C}^{hom^{-1}} \quad (2.23)$$

En prenant la moyenne des deux membres de (2.23) doublement contractés à gauche par  $\mathfrak{s}(\mathbf{x})$  et en utilisant (2.11) et (2.21), on déduit

$$\mathbb{S}^{hom} \approx \mathbb{C}^{hom^{-1}} \quad (2.24)$$

Autrement dit, le tenseur de souplesse macroscopique déduit de l'approche en contrainte est peu différent de l'inverse du tenseur de raideur macroscopique déduit de l'approche en déformation. Hill [56] et Mandel ont quantifié l'erreur commise en confondant ces deux tenseurs :

$$\mathbb{S}^{hom} : \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{I} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{d}{\ell}\right)^3\right) \quad (2.25)$$

### 2.1.3 Approche énergétique

Rappelant l'hypothèse présentée au paragraphe 1.1.3 selon laquelle le travail virtuel de déformation macroscopique par unité de volume est égal à la moyenne des travaux virtuels microscopiques, on déduit immédiatement de (1.27) appliqué à la solution (relative à l'une ou l'autre des conditions aux limites) que l'énergie élastique macroscopique par unité de volume s'écrit :

$$\Psi = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{s} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (2.26)$$

Dans le cas des déformations homogènes au contour (1.35), l'introduction de (2.7) et de la loi de comportement macro (2.15) dans (2.26) permet d'écrire :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle {}^t \mathbb{A} : \mathbf{c} : \mathbb{A} \rangle \quad (2.27)$$

Par application du lemme de Hill (§ 1.2.3), on peut également montrer la cohérence entre les expressions (2.17) et (2.27). Au passage, (2.27) prouve la symétrie de  $\mathbb{C}^{hom}$  ( $C_{klij}^{hom} = C_{ijkl}^{hom}$ ) liée à l'existence du potentiel macroscopique  $\Psi$ .

De manière parfaitement analogue, dans le cadre des contraintes homogènes au contour (1.32), on montre que  $\mathbb{S}^{hom}$  (2.21) peut également s'écrire sous une forme permettant de justifier son caractère symétrique :

$$\mathbb{S}^{hom} = \langle {}^t \mathbb{B} : \mathbf{s} : \mathbb{B} \rangle \quad (2.28)$$

### 2.1.4 Méthodes d'estimation

Comme on ne connaît que des éléments statistiques plus ou moins précis de la morphologie du V.E.R., il n'est pas possible de résoudre exactement le problème de localisation c'est-à-dire d'identifier les champs de tenseur  $\mathbb{A}(\mathbf{x})$  (2.7) ou  $\mathbb{B}(\mathbf{x})$  (2.19) dont les moyennes par phases sont nécessaires pour calculer les tenseurs macroscopiques de rigidité  $\mathbb{C}^{hom}$  (2.17)-(2.16) ou de souplesse  $\mathbb{S}^{hom}$  (2.21). Néanmoins, à partir des connaissances ou des hypothèses concernant la forme des phases et leur répartition spatiale, nous pouvons obtenir des estimations de  $\mathbb{C}^{hom}$  basées sur des estimations des moyennes du tenseur de localisation par phase. Celles-ci sont construites à partir de solutions de problèmes auxiliaires basés sur le problème d'Eshelby [44] rappelé en annexe 3.1. Le procédé d'estimation est le suivant [102] :

1. *Estimations des tenseurs de localisation du champ de déformation*

Pour chaque phase en jeu (phase solide déformable, pores, inclusions rigides adhérentes ou lisses), on identifie une famille d'ellipsoïdes censés représenter les différentes formes et orientations des inclusions de cette phase ainsi que leur répartition spatiale. Pour chacun des éléments de ces familles, on introduit le problème auxiliaire

d'Eshelby consistant à placer l'ellipsoïde en question dans un milieu de référence d'élasticité  $\mathbf{c}^o$  soumis à une déformation homogène à l'infini  $\mathbf{E}^\infty$ . Sauf dans le cas non adhérent, ce problème conduit à des champs de déformation et de contrainte homogènes dans l'inclusion (3.11) qui seront prises comme estimations pour le V.E.R. réel. Il faut bien noter que l'on introduit des tenseurs  $\mathbb{P}_o^\alpha$  a priori différents pour chaque phase, chacun de ces tenseurs dépendant non seulement de  $\mathbf{c}^o$  mais surtout de la forme et de l'orientation de l'inclusion symbolisées par  $\mathcal{E}$ . Pour simplifier, supposons qu'un seul ellipsoïde de référence soit suffisant pour chaque phase (pas d'orientations multiples des pores etc.)  $\mathbb{P}_o^\alpha_{(\alpha=s,p,r)}$ . Dans le cas d'une inclusion sphérique rigide lisse et d'un milieu de référence isotrope, les estimations seront calculées au moyen des expressions (3.18) et (3.19) avec (3.24) et (3.25). On a alors :

$$\forall \alpha \in \{s, p, r, l\}, \left\{ \begin{array}{l} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^\alpha} \approx \tilde{\mathbb{A}}^\alpha : \mathbf{E}^\infty \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega^\alpha} \approx \tilde{\mathbb{B}}^\alpha : \mathbf{E}^\infty \end{array} \right. \quad (2.29)$$

avec les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbb{A}}^s = (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^s : (\mathbf{c}^s - \mathbf{c}^o))^{-1} \\ \tilde{\mathbb{A}}^p = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o^p)^{-1} \\ \tilde{\mathbb{A}}^r = \mathbb{0} \\ \tilde{\mathbb{A}}^l = \mathbf{a}^o \quad (3.24) \end{array} \right. \quad (2.30)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbb{B}}^s = \mathbf{c}^s : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^s : (\mathbf{c}^s - \mathbf{c}^o))^{-1} \\ \tilde{\mathbb{B}}^p = \mathbb{0} \\ \tilde{\mathbb{B}}^r = \mathbb{P}_o^{r-1} \\ \tilde{\mathbb{B}}^l = \mathbf{b}^o \quad (3.25) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Le choix du milieu de référence est guidé par le type de microstructure que l'on cherche à modéliser. Citons par exemple [102] :

- $\mathbf{c}^o = \mathbf{c}^s$  (estimation de Mori-Tanaka [78])

Cette estimation est bien adaptée au cas où l'on a clairement identifié une phase matricielle dans laquelle sont plongées des inclusions (en l'occurrence la phase "s").

La matrice possède la propriété de connexité et entoure chacune des inclusions.

- $\mathbb{C}^o = \mathbb{C}^{hom}$  (estimation auto-cohérente)

Cette estimation peut être choisie lorsqu'il existe un désordre parfait dans la répartition spatiale des phases, aucune d'entre elles ne jouant un rôle de matrice. Cette estimation s'avère particulièrement efficace pour rendre compte des effets de percolation de phase.

## 2. Lien entre la déformation auxiliaire $\mathbf{E}^\infty$ et la déformation réelle $\mathbf{E}$

Si les pores et les inclusions rigides sont suffisamment éloignés les uns des autres (par rapport à leur taille caractéristique), il est raisonnable de négliger les interactions entre ces hétérogénéités baignées dans le solide d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ . On peut alors naturellement estimer la moyenne des déformations s'établissant dans une inclusion donnée par le tenseur de déformation solution du problème d'Eshelby relatif à cette inclusion plongée dans le milieu de référence d'élasticité  $\mathbb{C}^s$  sollicité à l'infini par  $\mathbf{E}^\infty = \mathbf{E}$ . Cette estimation est qualifiée de diluée.

Lorsque les distances entre les différentes inclusions ne sont plus très grandes devant leur taille caractéristique, il faut prendre en compte les interactions entre les phases. L'idée est de considérer que, dans les problèmes auxiliaires, la déformation à l'infini  $\mathbf{E}^\infty$ , en étant a priori différente de  $\mathbf{E}$ , intègre d'une certaine manière les interactions. Le lien entre  $\mathbf{E}^\infty$  et  $\mathbf{E}$  résulte simplement de la condition de cohérence (1.28) :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \approx \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle : \mathbf{E}^\infty \quad (2.32)$$

avec

$$\langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle = \sum_{\alpha=s,p,r,l} \varphi^\alpha \tilde{\mathbb{A}}^\alpha \quad (2.33)$$

On choisit donc  $\mathbf{E}^\infty$  tel que :

$$\mathbf{E}^\infty = \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle^{-1} : \mathbf{E} \quad (2.34)$$

Puis la combinaison de (2.29) et (2.34) fournit une approximation des localisations par phase :

$$\forall \alpha \in \{s, p, r, l\} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^\alpha} = \mathbb{A}^\alpha : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}^\alpha \approx \tilde{\mathbb{A}}^\alpha : \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle^{-1} \quad (2.35)$$

## 3. Estimation de $\mathbb{C}^{hom}$

L'état de contrainte macroscopique est estimé en utilisant la localisation en contrainte (2.29) et la règle de moyenne (1.15) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \approx \langle \tilde{\mathbb{B}} \rangle : \mathbf{E}^\infty \approx \langle \tilde{\mathbb{B}} \rangle : \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle^{-1} : \mathbf{E} \quad (2.36)$$

On en déduit donc l'estimation de  $\mathbb{C}^{hom}$  :

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \langle \tilde{\mathbb{B}} \rangle : \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle^{-1} \quad (2.37)$$

Il convient de remarquer que, même si la symétrie de  $\mathbb{C}^{hom}$  a été démontrée par (2.27), il n'en est pas nécessairement de même en ce qui concerne son estimation (2.37) sauf dans le cas particulier où l'on fait l'hypothèse d'isotropie locale et globale (tous les tenseurs sont isotropes et donc symétriques). On montre en annexe 3.3 que cette estimation préserve la symétrie si toutes les phases sont adhérentes et représentées par des inclusions semblables aux autres (tous les problèmes auxiliaires utilisent le même tenseur  $\mathbb{P}_o^T$ ) ou si le v.e.r. est un milieu poreux uniquement composé d'une matrice solide homogène et de pores de formes ellipsoïdales et d'orientations quelconques et que le schéma choisi est celui de Mori-Tanaka.

### 2.1.5 Mise en œuvre d'un schéma d'homogénéisation linéaire

#### Schéma de Mori-Tanaka

On rappelle que ce schéma s'emploie dans la situation où la phase "s" est connexe et représente une matrice dans laquelle sont plongées les autres phases.

Les estimations de Mori-Tanaka pour des matériaux biphasés (un seul type d'inclusion à la fois) isotropes sont rassemblées en annexe 3.4. Comme cela sera utile par la suite, on présente également dans cette annexe les dérivées des modules homogénéisés par rapport aux modules de la matrice ainsi que des développements limités lorsque le comportement de la matrice devient asymptotiquement incompressible. Il faut rappeler que, pour le milieu poreux à matrice homogène, l'estimation de Mori-Tanaka correspond à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman tandis que, pour le milieu à renforts rigides adhérents, cette estimation correspond à la borne inférieure de Hashin-Shtrikman ([53], [102], [17]). On note sur les formules (3.85) et (3.97) que l'expression de  $k^{hom}$  n'est pas modifiée lorsque l'on change la nature de l'interface matrice/renfort. Ceci est bien conforme à l'intuition car, comme cela est souligné en annexe 3.1.3, le chargement purement sphérique ne sollicite pas les défauts de l'interface lisse. En revanche,  $\mu^{hom}$  dépend fortement de la nature de cette interface. On montre en effet, sur la FIG. 2.1, que les inclusions lisses renforcent bien  $\mu^{hom}$  mais de manière nettement moins importante que les inclusions adhérentes. Dans le cas général où toutes les phases sont présentes, en adoptant toujours l'hypothèse d'isotropie locale et globale, les modules macroscopiques de compression et de cisaillement

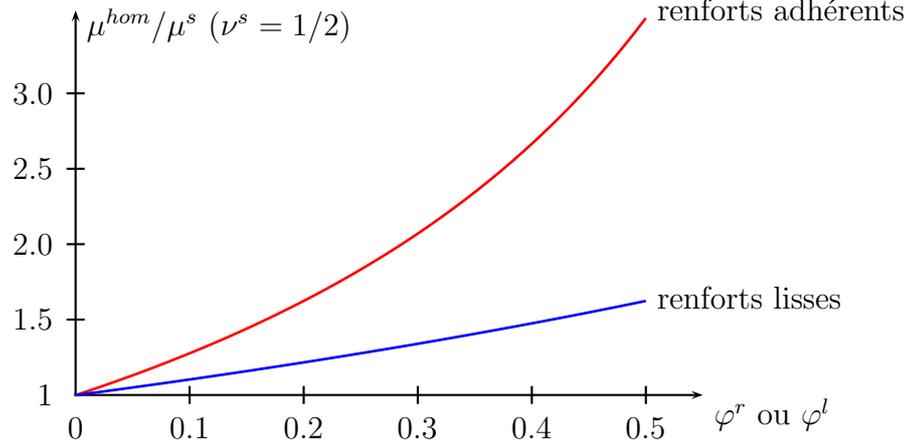


FIG. 2.1 – Effet de la nature de l'interface sur le module de cisaillement

issus du schéma de Mori-Tanaka s'écrivent :

$$k^{hom} = \frac{4}{3} \frac{(3(1-\varphi)k^s + 4(\varphi^r + \varphi^l)\mu^s)\mu^s}{3\varphi k^s + 4(1-\varphi^r - \varphi^l)\mu^s} \quad (2.38)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1}{6} \frac{9k^s + 8\mu^s}{k^s + 2\mu^s} \left( \begin{array}{l} (30 - 30\varphi + 45\varphi^r + 18\varphi^l) k^{s2} \\ + (108 - 108\varphi + 112\varphi^r + 52\varphi^l) k^s \mu^s \\ + (96 - 96\varphi + 64\varphi^r + 32\varphi^l) \mu^{s2} \\ \hline (45 + 30\varphi - 45\varphi^r - 18\varphi^l) k^{s2} \\ + (112 + 108\varphi - 112\varphi^r - 52\varphi^l) k^s \mu^s \\ + (64 + 96\varphi - 64\varphi^r - 32\varphi^l) \mu^{s2} \end{array} \right) \mu^s \quad (2.39)$$

La première remarque que l'on peut formuler sur  $k^{hom}$  (2.38) est que ce module ne dépend des fractions volumiques de renforts qu'à travers le groupement  $\varphi^r + \varphi^l$ , autrement dit, la nature de l'interface ne joue pas sur  $k^{hom}$  et donc seul le volume total de renfort intervient. Ce résultat est dû à la méthode d'estimation basée sur le problème d'Eshelby qui, du point de vue d'un chargement sphérique, est incapable de distinguer les inclusions adhérentes des inclusions lisses plongées dans le milieu infini. En effet, les interactions entre phases ne sont prises en compte qu'à travers un ajustement des conditions aux limites (à l'infini) des problèmes auxiliaires. Ceci peut être préjudiciable car cet ajustement relève d'une moyenne dont le résultat est ici isotrope et qui ne tient pas compte des spécificités locales de la microstructure et donc des interactions à distance qui peuvent s'avérer déterminantes : en l'occurrence, la présence d'un pore à proximité d'une inclusion lisse induit par exemple des discontinuités locales à l'interface. En revanche,  $\mu^{hom}$  (2.39) est très sensible à la nature de l'interface car, pour une fraction volumique totale de renforts  $\varphi^r + \varphi^l$  fixée et une porosité  $\varphi$  donnée, il peut présenter des variations importantes en fonction de  $\varphi^l$ , c'est-à-dire de la proportion de renforts lisses. Ainsi l'endommagement

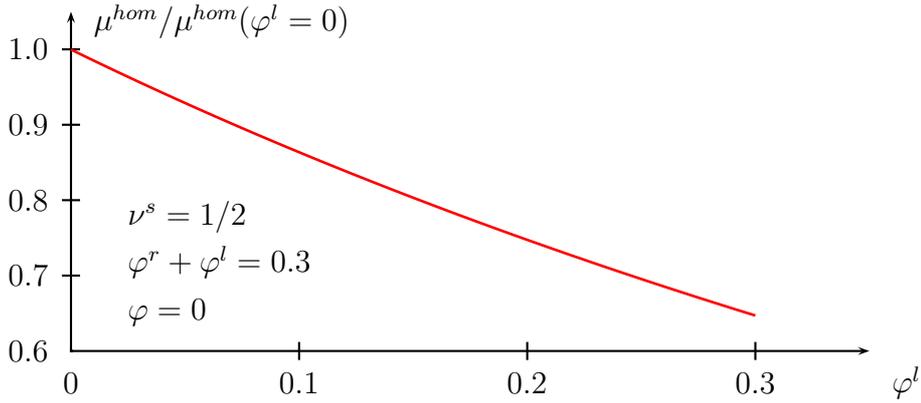


FIG. 2.2 – Endommagement du matériau par réduction de l’adhérence des renforts

du matériau modélisé par une réduction de l’adhérence des renforts (soit une augmentation de la proportion de renforts lisses par rapport à celle de renforts adhérents), peut engendrer une diminution notable de  $\mu^{hom}$ , ce qui est illustré par la FIG. 2.2 dans le cas particulier d’une matrice incompressible ( $\nu^s = 1/2$  ou  $\mu^s/k^s \rightarrow 0$ ). Dans ce cas, les modules homogénéisés (2.38) et (2.39) deviennent :

$$k^{hom} = \frac{4}{3} \frac{1 - \varphi}{\varphi} \mu^s \quad (2.40)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1 - \varphi + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l}{1 + \frac{2}{3}\varphi - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l} \mu^s \quad (2.41)$$

On constate que le module de compression  $k^{hom}$  (2.40) ne dépend plus de la fraction volumique de renforts mais uniquement de celle des pores. Conformément à l’intuition que l’on tire de la résolution du problème d’une sphère creuse soumise à une pression sur la paroi externe [92], la compressibilité du matériau est due à la présence des trous et à la possibilité d’induire des déformations déviatoriques dans la matrice ( $k^{hom}$  (2.40) dépend de  $\mu^s$ ). Ainsi, il semble naturel de penser que la présence d’inclusions rigides en quantité suffisante devrait provoquer une augmentation de cette raideur en cisaillement et donc une augmentation de  $k^{hom}$ . Mais, comme on vient de le souligner, le schéma de Mori-Tanaka n’est pas en mesure de rendre compte de ce raisonnement qualitatif pour une raison déjà évoquée à la suite de (2.38). En effet, ce schéma s’appuie sur des problèmes auxiliaires d’Eshelby (cf. 2.1.4) consistant à placer les inclusions dans le milieu matriciel en rejetant à l’infini des conditions aux limites modifiées pour tenir compte de l’interaction. En procédant ainsi, il est clair que, d’une part la matrice incompressible et les inclusions rigides ont le même comportement vis-à-vis d’un chargement purement sphérique, et d’autre part chaque phase (notamment les pores) ne “voit” autour d’elle que de la matrice dont la souplesse en cisaillement n’est pas altérée par la présence de renforts

rigides. Pour prendre en considération l'effet de ces derniers sur le milieu de référence des problèmes auxiliaires, on peut mettre en œuvre le schéma auto-cohérent pour lequel ce milieu de référence tient précisément compte de l'ensemble des phases en présence.

### Schéma auto-cohérent

Pour simplifier les calculs sans réduire l'intérêt du raisonnement, on choisit de ne s'intéresser qu'à un milieu poreux dont la phase solide est incompressible et renforcé par des inclusions rigides adhérentes. Dans ce cas, le schéma auto-cohérent fournit les modules suivants :

$$k^{hom} = \frac{4(1-\varphi)(1-2\varphi)(2+\varphi)}{\varphi(3-\varphi)(2+\varphi-5\varphi^r)} \mu^s \quad (2.42)$$

$$\mu^{hom} = \frac{3(1-2\varphi)(2+\varphi)}{(3-\varphi)(2+\varphi-5\varphi^r)} \mu^s \quad (2.43)$$

On constate sur la FIG. 2.3 que le schéma auto-cohérent, contrairement à celui de Mori-

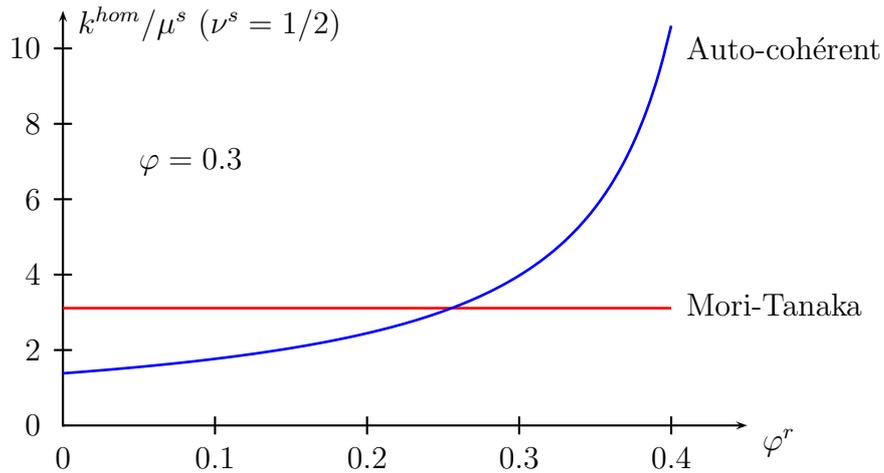


FIG. 2.3 – Effet des renforts sur le module de compression

Tanaka, révèle nettement le caractère renforçant des inclusions rigides. On obtient même une asymptote  $k^{hom} \rightarrow \infty$  lorsque  $\varphi^r \rightarrow (2+\varphi)/5$ , ce qui correspond à un phénomène de percolation des renforts. Ceci montre bien l'importance des hypothèses morphologiques faites sur le v.e.r. puisque l'on obtient des résultats radicalement différents d'un modèle à l'autre. Classiquement, le schéma auto-cohérent s'avère très efficace pour rendre compte des phénomènes de percolation. Il a déjà fourni des résultats intéressants dans le domaine des géomatériaux. Citons par exemple l'effet de l'endommagement sur la perméabilité d'un milieu fissuré [36] ou la modélisation du comportement élastique d'une pâte de ciment constituée de C-S-H, de particules de clinker anhydres, de cristaux de portlandites et de pores [11].

### Influence de la morphologie sur l'effet de renforcement

On a vu aux paragraphes précédents que la morphologie du V.E.R. était un critère crucial pour le choix du schéma d'homogénéisation. On a notamment montré que les renforts ont un effet rigidifiant sur le module de compression dans le schéma auto-cohérent alors qu'ils ne jouent aucun rôle dans le schéma de Mori-Tanaka lorsque la phase solide déformable est incompressible et qu'il existe une phase poreuse de fraction volumique fixée. En effet, deux V.E.R. ayant des volumes de renforts différents mais le même volume de pores ont a priori le même module de compression (2.40). À la suite de ce surprenant résultat, alors que l'on a déjà évoqué le défaut du schéma de Mori-Tanaka qui rejette les effets de l'interaction entre phases à l'infini et s'appuie sur la matrice pure comme milieu de référence, il faut aussi s'interroger sur les conséquences morphologiques d'une variation du volume de renforts pour pouvoir comparer deux V.E.R.. Pour mieux comprendre les effets d'une telle expérience, construisons un V.E.R. ayant une microstructure bien définie formée par un assemblage fractal de deux familles de sphères (composites) (cf. FIG. 2.4) :

- la première famille est constituée de sphères creuses (pores entourés de la phase solide déformable incompressible) de taille variable mais homothétiques les unes des autres c'est-à-dire de rapport entre le rayon interne  $R_i$  et le rayon externe  $R_e$  fixe, soit donc de porosité  $\eta = (R_i/R_e)^3$  fixe,
- la seconde famille se compose d'un ensemble de sphères rigides de taille variable.

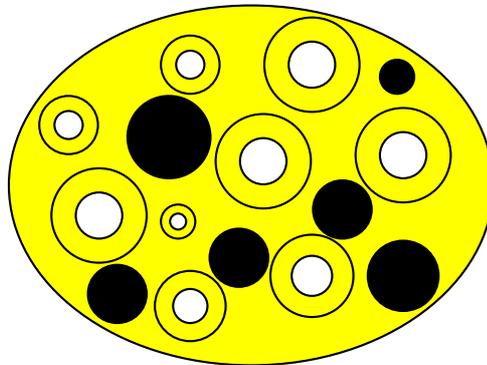


FIG. 2.4 – Assemblage de sphères creuses et de sphères rigides

On considère que le domaine  $\Omega$  est obtenu par la réunion disjointe de ces deux familles réparties de manière isotrope dans l'espace à la manière de l'assemblage des sphères composites de Hashin ([51], [103]). Ainsi la fraction volumique de renforts rigides  $\varphi^r$  correspond exactement au volume de la seconde famille rapporté au volume de  $\Omega$  tandis que la porosité totale et la fraction volumique de phase solide déformable sont données par :

$$\varphi = \eta (1 - \varphi^r) \quad ; \quad \varphi^s = (1 - \eta) (1 - \varphi^r) \quad (2.44)$$

Un tel assemblage confère à la phase solide déformable un rôle matriciel vis-à-vis des pores, ce qui est fondamental pour générer une certaine compressibilité macroscopique. On considère des conditions aux limites de type contraintes homogènes au contour (1.32) avec  $\Sigma = \Sigma_m \mathbf{1}$ . En ramenant cette condition portant sur le vecteur-contrainte sur le bord des sphères creuses, on est en mesure de contruire dans chacune des sphères un champ solution du problème d'élasticité classique de sphère creuse [92]. En prolongeant ce champ par continuité par la valeur uniforme  $\Sigma = \Sigma_m \mathbf{1}$  dans les renforts rigides, on a ainsi construit un champ de contrainte microscopique en équilibre compatible avec les conditions aux limites. Ce champ peut alors être exploité dans le théorème du minimum de l'énergie complémentaire ([92], [102]) pour donner une borne inférieure de  $k^{hom}$ . On choisit cette borne, calculée en fonction du module de compression de la sphère creuse de porosité  $\eta$  noté  $k^{sc}(\eta)$ , en guise d'estimation de  $k^{hom}$  :

$$k^{hom} = \frac{k^{sc}(\eta)}{1 - \varphi^r} \quad \text{avec} \quad k^{sc}(\eta) = \frac{4}{3} \frac{1 - \eta}{\eta} \mu^s \quad (2.45)$$

En rappelant (2.44), (2.45) devient :

$$k^{hom} = \frac{4}{3} \frac{1 - \varphi - \varphi^r}{\varphi(1 - \varphi^r)} \mu^s \quad (2.46)$$

On note que (2.46) est une fonction décroissante de  $\varphi^r$  lorsque  $\varphi$  est fixée. On aboutit là à un résultat encore plus surprenant a priori que celui obtenu pour Mori-Tanaka mais l'explication est évidente : quand on augmente  $\varphi^r$  en laissant  $\varphi$  fixe, il découle d'après (2.44) que l'on augmente la porosité des sphères  $\eta$  et que l'on diminue la fraction de coque matricielle qui contribuait directement à la raideur du v.E.R.. On a alors totalement modifié la nature morphologique du milieu poreux. En revanche, lorsque l'on maintient  $\eta$  fixé c'est-à-dire en gardant la géométrie des motifs poreux, l'augmentation de  $\varphi^r$  se fait au détriment de la phase solide aussi bien que de la phase poreuse, auquel cas  $k^{hom}$  (2.45) augmente. Cette dernière expérience semble être la plus convaincante pour appréhender l'effet d'une augmentation de la fraction de renforts.

## 2.2 Poroélasticité linéaire

Dans cette section, le domaine  $\Omega^p$  est saturé par un fluide visqueux incompressible tandis que la phase solide demeure élastique linéaire. Par une approche micromécanique ([33], [34]), on retrouve dans cette section les équations d'état de la poroélasticité linéaire.

### 2.2.1 Énergie élastique macroscopique et variables d'état

Lorsque l'espace poreux est saturé par un fluide, on a montré à la section 1.3.2 que l'effet mécanique de celui-ci sur le squelette était uniquement dû à la pression que l'on

pouvait considérer constante à l'échelle du v.E.R.. On considère en outre que ce dernier est soumis à des déformations homogènes au contour. Ainsi,  $\mathbf{E}$  et  $p$  apparaissent comme les paramètres de chargement de la structure susceptibles de faire varier l'énergie élastique emmagasinée dans le squelette. L'énergie libre étant une grandeur extensive, on définit la densité volumique macroscopique d'énergie libre  $\Psi$  comme l'intégrale sur le squelette de la densité d'énergie libre microscopique  $\psi$  rapportée au volume total du v.E.R.. Ainsi, comme seule la phase solide déformable est en mesure de stocker de l'énergie, on a :

$$\Psi = \varphi^s \langle \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_{\Omega^s} = \varphi^s \langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} \quad (2.47)$$

Comme le comportement local est supposé élastique donc réversible, lors d'une évolution  $(\dot{\mathbf{E}}, \dot{p})$ , l'inégalité de Clausius-Duhem devient l'égalité :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \dot{\psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.48)$$

En prenant la moyenne de (2.48), on obtient :

$$\dot{\Psi} = \varphi^s \langle \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} \quad (2.49)$$

En exploitant le fait que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  reste constamment nul dans les renforts rigides, que les interfaces lisses n'entraînent aucune variation énergétique et que l'état de contrainte vaut  $-p\mathbf{1}$ , (2.49) devient à l'aide du lemme de Hill :

$$\dot{\Psi} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + p \varphi \mathbf{1} : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^p} \quad (2.50)$$

En se plaçant en HPP, nous avons systématiquement confondu la configuration initiale et la configuration actuelle. Pour interpréter géométriquement la grandeur duale de  $p$  dans le membre de droite de (2.50), il est toutefois nécessaire d'introduire explicitement la configuration initiale  $\Omega_o$  du v.E.R. ainsi que le volume des pores normalisé  $\Phi$  i.e. le rapport entre le volume actuel de pore et le volume initial du v.E.R. :

$$\Phi = \frac{|\Omega^p|}{|\Omega_o|} \quad (2.51)$$

On note également  $\Phi_o$  la porosité initiale et  $v$  la variation de volume des pores normalisé entre la configuration initiale et la configuration actuelle, c'est-à-dire la variation de volume poreux rapporté au volume initial total du v.E.R.. On a alors :

$$v = \Phi - \Phi_o = \Phi_o \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^p} \quad (\ll \Phi_o) \quad (2.52)$$

Ainsi, en HPP,  $\varphi \mathbf{1} : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^p} = \Phi_o \mathbf{1} : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^p}$  correspond au taux de variation de volume de l'espace poreux rapporté au volume total du v.E.R. soit le taux de variation de porosité  $\dot{v} = \dot{\Phi}$ . On a donc :

$$\dot{\Psi} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + p \dot{v} \quad (2.53)$$

D'un point de vue micromécanique, la grandeur énergétique  $\Psi$  est une fonction des paramètres de chargement, en l'occurrence  $\mathbf{E}$  et  $p$ . En notant que  $v$ , obtenu à partir de la solution du problème de poroélasticité, est une fonction de  $\mathbf{E}$  et  $p$ , on introduit  $\Psi^*$  dont la dérivée se déduit de (2.53) :

$$\Psi^*(\mathbf{E}, p) = \Psi - p v \quad \Rightarrow \quad \dot{\Psi}^* = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{p} v \quad (2.54)$$

En utilisant  $\Psi^*$ , les équations d'état s'écrivent donc :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}, p) \quad ; \quad v = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial p}(\mathbf{E}, p) \quad (2.55)$$

Considérant maintenant  $p$  comme une fonction de  $\mathbf{E}$  et  $v$ , on peut envisager  $\Psi$  elle-même comme une fonction de  $\mathbf{E}$  et  $v$ , ce qui permet d'exploiter la dérivée (2.53) pour déduire des équations d'état alternatives à (2.55) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}, v) \quad ; \quad p = \frac{\partial \Psi}{\partial v}(\mathbf{E}, v) \quad (2.56)$$

Il s'agit maintenant de préciser les expressions des équations d'état (2.55) à partir des informations disponibles à l'échelle microscopique. Il apparaîtra à la section 2.2.3 que ces expressions sont obtenus à partir d'un problème d'homogénéisation en élasticité linéaire avec un état initial non naturel dont la méthode de résolution est rappelée auparavant à la section suivante.

### 2.2.2 État initial non naturel : le théorème de Levin [102]

On s'intéresse à un comportement local présentant une précontrainte :

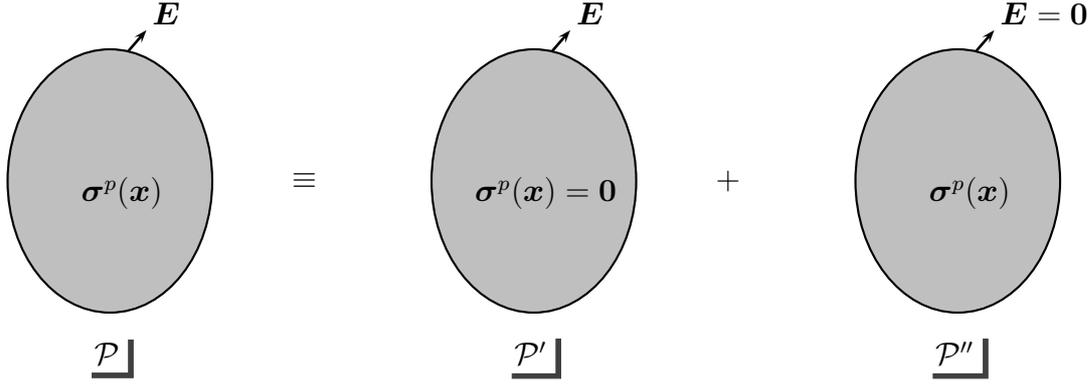
$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) \quad (2.57)$$

On peut également écrire (2.57) à l'aide d'un tenseur de déformation libre :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{x}) = -\mathbf{s}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) \quad (2.58)$$

Les autres équations formant le problème d'élasticité, à savoir (2.2), (2.6) et (2.4), restent inchangées. On choisit de traiter le cas des conditions aux limites de type déformations homogènes au contour. Conformément au raisonnement proposé dans [102], on décompose linéairement le problème  $\mathcal{P}$  à résoudre en deux sous-problèmes  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{P}''$  (cf. FIG. 2.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \\ \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^p \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}) \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}') \\ \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}' \\ \boldsymbol{\xi}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}' + {}^t \mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}') \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}'') \\ \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}'' + \boldsymbol{\sigma}^p \\ \boldsymbol{\xi}'' = \mathbf{0} \quad (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon}'' = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}'' + {}^t \mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}'') \end{array} \right. \quad (2.59)$$

FIG. 2.5 – Décomposition du problème élastique  $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$ 

D'un point de vue mathématique, il est clair sur les équations (2.59) que  $\mathbf{E}$  et le champ  $\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x})$  apparaissent comme deux chargements du v.e.r. découplés. Il s'agit donc d'additionner la solution de  $\mathcal{P}'$  (due à  $\mathbf{E}$ ) soit  $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\varepsilon}')$  et celle de  $\mathcal{P}''$  (dues à  $\boldsymbol{\sigma}^p$ ) soit  $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$  pour obtenir la solution au problème total  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ .

On cherche à écrire la loi de comportement macroscopique i.e. la relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Faisant référence à la décomposition, ce dernier tenseur s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle \quad (2.60)$$

On constate sur (2.59) que le problème  $\mathcal{P}'$  correspond au cas du matériau à l'état initial naturel traité au paragraphe 2.1. En particulier, ce sont  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  et  $\mathbf{E}$  qui sont maintenant liés par la règle de localisation (2.7) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} \quad (2.61)$$

Il vient également :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (2.62)$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  est le tenseur défini en (2.17). Ainsi  $\boldsymbol{\Sigma}$  (2.60) présente une partie linéaire en  $\mathbf{E}$  à laquelle s'ajoute un terme de précontrainte macroscopique :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^p \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Sigma}^p = \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle \quad (2.63)$$

Appliquant le lemme de Hill (1.37) au couple  $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\varepsilon}')$  ( $\boldsymbol{\sigma}''$  est un champ équilibré et  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  est géométriquement compatible avec  $\mathbf{E}$  au contour) et en exploitant la loi de comportement  $\boldsymbol{\sigma}'' = \mathbb{c} : \boldsymbol{\varepsilon}'' + \boldsymbol{\sigma}^p$ , on obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma}^p : \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\sigma}'' : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' : \underbrace{\mathbb{c} : \boldsymbol{\varepsilon}'}_{\boldsymbol{\sigma}'} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}^p : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle \quad (2.64)$$

Comme  $\boldsymbol{\sigma}'$  est équilibré et  $\boldsymbol{\varepsilon}''$  est géométriquement compatible avec des conditions de déplacement nul au contour, on écrit le lemme de Hill sur le couple  $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\varepsilon}'')$  pour annuler

le premier terme du membre de droite de (2.64). On exploite enfin la règle de localisation (2.61) dans le second terme pour aboutir à un résultat connu comme le théorème de Levin [69] :

$$\Sigma^p = \langle \sigma^p : \mathbb{A} \rangle \quad (2.65)$$

Il est clair sur (2.65) que la précontrainte macroscopique n'est, en général, pas égale à la moyenne du champ de précontrainte microscopique. Ce ne serait vrai que si ce champ satisfaisait l'équation d'équilibre (2.2), auquel cas il serait possible d'appliquer le lemme de Hill au membre de droite de (2.65) puis la règle de cohérence (2.11) pour montrer le résultat ou il suffirait plus simplement de remarquer que la solution du problème  $\mathcal{P}''$  (2.59) serait donnée par  $(\sigma'' = \sigma^p, \varepsilon'' = \mathbf{0})$ . Dans le cas général où il est nécessaire d'introduire un champ  $\varepsilon''$  non nul dans le problème  $\mathcal{P}''$  pour aboutir à un champ de contrainte en équilibre,  $\sigma^p$  doit être pondéré par le tenseur de localisation  $\mathbb{A}$  pour exprimer la précontrainte macroscopique (2.65).

Réécrivons maintenant le comportement macroscopique (2.63) sous la forme :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^L) \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}^L = -\mathbb{C}^{hom^{-1}} : \Sigma^p \quad (2.66)$$

Si l'on remplace  $\sigma^p$  dans (2.65) par son expression en fonction de  $\varepsilon^L$  donnée par (2.58), on obtient, en exploitant (2.66) :

$$\mathbf{E}^L = \langle \varepsilon^L : \mathbb{c} : \mathbb{A} : \mathbb{C}^{hom^{-1}} \rangle \quad (2.67)$$

Dans une approche en contraintes homogènes au contour, on démontrerait de manière analogue que la loi de comportement s'écrit :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \Sigma + \mathbf{E}^L \quad (2.68)$$

avec  $\mathbb{S}^{hom}$  défini par (2.21) et  $\mathbf{E}^L$  obtenu par le théorème de Levin :

$$\mathbf{E}^L = \langle \varepsilon^L : \mathbb{B} \rangle \quad (2.69)$$

La cohérence entre les expressions (2.67) et (2.69) est assurée en vertu de l'identité (2.23) obtenue grâce au résultat de Hill et Mandel évoqué au paragraphe 2.1.2. En résumé, le choix de l'un ou l'autre des deux types de conditions aux limites n'a d'impact ni sur la définition du tenseur d'élasticité macroscopique ni sur celle de la précontrainte (ou de la déformation libre) macroscopique si la séparation d'échelle est garantie.

Par la formule (2.69), il est possible de calculer par exemple un coefficient de dilatation thermique homogénéisé [102].

### 2.2.3 Approche microscopique des équations d'état de la poroélasticité linéaire

#### Cas général

Pour prendre en compte la présence du fluide dans les pores, on s'inspire d'une remarque d'André Zaoui et du raisonnement présenté dans [41] basé sur le fait que le comportement peut s'écrire en tout point sous la forme (2.57) à l'aide d'un tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  donné par (2.1) et d'une précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x})$  définie par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \Omega^s) & \quad (a) \\ \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) &= -p \mathbf{1} & (\mathbf{x} \in \Omega^p) & \quad (b) \\ \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \Omega^r \cup \Omega^l) & \quad (c) \end{aligned} \tag{2.70}$$

Ainsi le tenseur  $\boldsymbol{\Sigma}$  de la première des équations d'état (2.55) s'écrit sous la forme (2.63) avec  $\mathbb{C}^{hom}$  obtenu en (2.17) et  $\boldsymbol{\Sigma}^p$  calculé par le théorème de Levin (2.65) :

$$\boldsymbol{\Sigma}^p = -p \mathbf{B} \tag{2.71}$$

où le tenseur de Biot  $\mathbf{B}$  est défini par :

$$\mathbf{B} = \varphi \mathbf{1} :< \mathbb{A} >_{\Omega^p} = \mathbf{1} - \varphi^s \mathbf{1} :< \mathbb{A} >_{\Omega^s} \tag{2.72}$$

La seconde égalité dans (2.72) est obtenue en invoquant la règle de cohérence (2.11), la nullité de  $\mathbb{A}$  dans les inclusions rigides et en exploitant la propriété (2.10) signifiant que les discontinuités de déplacement au niveau des interfaces lisses n'induisent pas de variation de volume.

La seconde équation d'état (2.55) nécessite de décomposer  $v$  (2.52) en deux parties provenant respectivement des solutions des problèmes  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{P}''$  :

$$v = \varphi \mathbf{1} :< \boldsymbol{\varepsilon}' >_{\Omega^p} + \varphi \mathbf{1} :< \boldsymbol{\varepsilon}'' >_{\Omega^p} \tag{2.73}$$

Le premier terme de (2.73) s'écrit facilement à l'aide du tenseur de localisation puis en exploitant la définition (2.72) de  $\mathbf{B}$  :

$$\varphi \mathbf{1} :< \boldsymbol{\varepsilon}' >_{\Omega^p} = \varphi \mathbf{1} :< \mathbb{A} >_{\Omega^p} : \mathbf{E} = \mathbf{B} : \mathbf{E} \tag{2.74}$$

Le second terme de (2.73) dépend linéairement de la solution de  $\mathcal{P}''$ . Or celle-ci dépend elle-même linéairement de  $p$ , si bien qu'il existe un deuxième champ de tenseur de localisation  $\mathbf{L}$  d'ordre 2 tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}''(\mathbf{x}) = p \mathbf{L}(\mathbf{x}) \tag{2.75}$$

On introduit donc le module de Biot  $M$  tel que :

$$\varphi \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_{\Omega^p} = \frac{p}{M} \quad (2.76)$$

avec

$$\frac{1}{M} = \varphi \mathbf{1} : \langle \mathbf{L} \rangle_{\Omega^p} = -\varphi^s \mathbf{1} : \langle \mathbf{L} \rangle_{\Omega^s} \quad (2.77)$$

La seconde égalité dans (2.77) provient de la règle de cohérence selon laquelle la moyenne de  $\mathbf{L}$  sur le v.E.R. doit être nulle (en raison de la condition de déformation homogène nulle au contour dans  $\mathcal{P}''$ ) et du fait que  $\mathbf{L}$  est nul dans les inclusions rigides et que les éventuelles discontinuités de déplacement au niveau des interfaces lisses n'induisent pas de variation de volume.

En résumé les deux équations d'état de la poroélasticité s'écrivent :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p \mathbf{B} \quad (2.78)$$

$$v = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p}{M} \quad (2.79)$$

$\mathbb{C}^{hom}$  apparaît comme le tenseur d'élasticité en condition drainée ( $p = 0$ ). Ces lois d'état sont identiques à celles obtenues dans le cadre d'une approche thermodynamique macroscopique ([13], [14], [15]). On retrouve notamment que le comportement poroélastique s'écrit au moyen de la contrainte effective de Biot grâce à laquelle on peut déduire le comportement non drainé du v.E.R. à partir du comportement drainé :

$$\boldsymbol{\Sigma}^B(\boldsymbol{\Sigma}, p) = \boldsymbol{\Sigma} + p \mathbf{B} \quad (2.80)$$

Il découle également des expressions (2.55), (2.78) et (2.79) que  $\Psi^*$  s'écrit :

$$\Psi^*(\mathbf{E}, p) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p \mathbf{B} : \mathbf{E} - \frac{p^2}{2M} \quad (2.81)$$

On déduit ensuite de (2.54) que la densité macroscopique d'énergie libre s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{E}, v) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \frac{p^2}{2M} \quad \text{avec} \quad p = M(-\mathbf{B} : \mathbf{E} + v) \quad (2.82)$$

L'intérêt de la méthode de changement d'échelle est de pouvoir relier les grandeurs  $\mathbb{C}^{hom}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $M$  aux informations dont on dispose à l'échelle inférieure. Dans le cas présent, on est en mesure de construire des estimations de  $\mathbb{C}^{hom}$  et de  $\mathbb{B}$  grâce à la méthode exposée à la section 2.1.4 qui permet d'estimer les moyennes par phase du tenseur de localisation  $\mathbb{A}$ . En ce qui concerne  $M$  (2.77), il s'agit d'évaluer la moyenne sur la phase poreuse du tenseur de localisation  $\mathbf{L}$  du problème  $\mathcal{P}''$ . Puisque le chargement du problème  $\mathcal{P}''$  consiste en la présence d'une précontrainte dans une des phases inclusionnaires, il serait aisé de construire une méthode d'estimation comparable à celle de la section 2.1.4 c'est-à-dire

fondée sur les résultats de problèmes auxiliaires d'Eshelby.

Dans le cas où la phase matricielle est incompressible, il n'est toutefois pas utile de recourir à des estimations puisque l'on a :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \mathbf{1} : \mathbb{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{1} : \mathbf{L}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.83)$$

Ainsi  $\mathbf{B}$  (2.72) et  $M$  (2.77) deviennent :

$$\mathbf{B} = \mathbf{1} \quad ; \quad M \rightarrow \infty \quad (2.84)$$

Et la contrainte effective de Biot (2.80) devient la contrainte effective de Terzaghi :

$$\Sigma^T(\Sigma, p) = \Sigma + p \mathbf{1} \quad (2.85)$$

Le paragraphe suivant présente un autre cas de figure où la seule connaissance de  $\mathbb{C}^{hom}$  suffit à déterminer tout le comportement poroélastique.

Signalons que les résultats obtenus dans ce paragraphe peuvent être utilisés dans le cas où la phase poreuse est complètement absente ( $\varphi = 0$ ). En effet, dans ce cas,  $\mathbf{B}$  (2.72) et  $M$  (2.77) deviennent :

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad ; \quad M \rightarrow \infty \quad (2.86)$$

Il convient de préciser que le cas limite  $\varphi \rightarrow 0$  ne conduit pas nécessairement au résultat (2.86) car la microstructure de l'espace poreux peut jouer un rôle important même si le volume occupé par ce dernier est infinitésimal. Il suffit en effet de considérer un milieu fissuré dont les fissures sont modélisées par des pores ellipsoïdaux aplatis (de rapport d'aspect tendant vers 0) pour constater que (2.86) est mis en défaut ([37], [38], [79]). Dans le cas de figure où l'espace poreux est totalement inexistant, la seule équation de comportement macroscopique (élastique linéaire) (2.78) devient alors simplement :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (2.87)$$

L'énergie libre macroscopique  $\Psi$  est alors égale au potentiel  $\Psi^*$  et s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{E}) = \Psi^*(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (2.88)$$

### Cas de la phase solide homogène [41]

Dans ce paragraphe, on suppose que la phase complémentaire des pores est constituée de la seule phase solide homogène d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ . Elle est donc dépourvue de renforts ( $\varphi^r = 0$  et  $\varphi^l = 0$ ). Pour un tel v.E.R., le tenseur d'élasticité drainé  $\mathbb{C}^{hom}$  (2.16) s'écrit :

$$\mathbb{C}^{hom} = \varphi^s \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^s} \quad (2.89)$$

L'équation (2.89) permet d'exprimer  $\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^s}$  en fonction de  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\mathbf{c}^s$ , ce qui entraîne que  $\mathbf{B}$  (2.72) s'écrit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{1} - \mathbf{1} : \mathbf{c}^{s-1} : \mathbb{C}^{hom} \quad (2.90)$$

Pour exprimer  $M$ , il faut revenir à sa définition dans (2.76) et exploiter le fait que la moyenne de  $\boldsymbol{\varepsilon}''$  sur le v.E.R. est nulle :

$$\frac{p}{M} = \varphi \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_{\Omega^p} = -\varphi^s \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_{\Omega^s} \quad (2.91)$$

En utilisant successivement la loi de comportement de la phase matricielle, puis la définition (2.63) de  $\boldsymbol{\Sigma}^p$ , on écrit :

$$\frac{p}{M} = -\varphi^s \mathbf{1} : \mathbf{c}^{s-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_{\Omega^s} = \mathbf{1} : \mathbf{c}^{s-1} : (-\boldsymbol{\Sigma}^p + \varphi \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_{\Omega^p}) \quad (2.92)$$

Or le calcul de  $\boldsymbol{\Sigma}^p$  par le théorème de Levin fournit (2.71) et l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}''$  dans les pores vaut  $-p \mathbf{1}$ , ce qui implique :

$$\frac{1}{M} = \mathbf{1} : \mathbf{c}^{s-1} : (\mathbf{B} - \varphi \mathbf{1}) \quad (2.93)$$

Comme annoncé, seule l'identification de  $\mathbb{C}^{hom}$  suffit à déterminer  $\mathbf{B}$  (2.90) puis  $M$  (2.93) et donc le comportement poroélastique linéaire complet. Les formules (2.90) et (2.93) peuvent également être obtenues dans [34] avec des conditions aux limites homogènes en contraintes.

Adoptant l'hypothèse d'isotropie locale et globale, les tenseurs d'élasticité s'écrivent :

$$\mathbf{c}^s = 3k^s \mathbb{J} + 2\mu^s \mathbb{K} \quad (2.94)$$

et

$$\mathbb{C}^{hom} = 3k^{hom} \mathbb{J} + 2\mu^{hom} \mathbb{K} \quad (2.95)$$

Le tenseur  $\mathbf{B}$  devient alors sphérique :

$$\mathbf{B} = b \mathbf{1} \quad \text{avec} \quad b = 1 - \frac{k^{hom}}{k^s} \quad (2.96)$$

La forme isotrope de (2.93) quant à elle s'écrit :

$$\frac{1}{M} = \frac{b - \varphi}{k^s} \quad (2.97)$$

Au passage, en prenant la limite de (2.96) et (2.97) lorsque  $k^s$  tend vers l'infini (incompressibilité de la matrice), on retrouve le résultat (2.84).

### Précontrainte sphérique dans la matrice

Dans ce paragraphe, on étudie l'effet d'une précontrainte sphérique uniforme dans la matrice sur la solution du problème de poroélasticité :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_s^p = \sigma_s^p \mathbf{1} \quad (2.98)$$

L'idée est de décomposer linéairement le problème dont le chargement est  $(\mathbf{E}, p)$  avec la précontrainte  $\sigma_s^p \mathbf{1}$  dans la matrice en deux problèmes. Dans le premier, on retrouve le chargement  $\mathbf{E}$  au contour tandis que l'état de contrainte dans les pores vaut  $-(p + \sigma_s^p) \mathbf{1}$  sans précontrainte dans la matrice tandis que, dans le second, le contour est encastré (i.e.  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ) et l'état de contrainte dans les pores est égal à la précontrainte de la matrice autrement dit  $\sigma_s^p \mathbf{1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} + \sigma_s^p \mathbf{1} \quad (\Omega^s) \\ \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} \quad (\Omega^p) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (\Omega^r \cup \Omega^l) \\ \llbracket \xi_n \rrbracket = 0 \\ \text{et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} \quad (\partial\Omega^l) \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (\partial\Omega) \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}^{(1)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad (\Omega^s) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = -(p + \sigma_s^p) \mathbf{1} \quad (\Omega^p) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (\Omega^r \cup \Omega^l) \\ \llbracket \xi_n^{(1)} \rrbracket = 0 \\ \text{et } \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} \quad (\partial\Omega^l) \\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (\partial\Omega) \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}^{(2)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} + \sigma_s^p \mathbf{1} \quad (\Omega^s) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \sigma_s^p \mathbf{1} \quad (\Omega^p) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (\Omega^r \cup \Omega^l) \\ \llbracket \xi_n^{(2)} \rrbracket = 0 \\ \text{et } \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} \quad (\partial\Omega^l) \\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (\partial\Omega) \end{array} \right. \quad (2.99)$$

Il est clair, d'une part, que  $\mathcal{P}^{(1)}$  définit le problème de poroélasticité étudié précédemment dans lequel on a remplacé la pression dans les pores par  $p + \sigma_s^p$  (ce groupement peut très bien être négatif sans que cela ne soit préjudiciable sur le plan mathématique). D'autre part, la solution de  $\mathcal{P}^{(2)}$  est uniforme :  $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \sigma_s^p \mathbf{1}$  (cette solution satisfait notamment bien les conditions (2.5) au niveau des interfaces lisses). Ainsi pour passer de la solution sans précontrainte à la solution avec précontrainte, il suffit de changer la pression  $p$  en  $p + \sigma_s^p$  et d'ajouter  $\sigma_s^p \mathbf{1}$  à tous les états de contrainte. Par exemple, les lois d'état macroscopiques s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p \mathbf{B} + \sigma_s^p (\mathbf{1} - \mathbf{B}) \quad (2.100)$$

$$v = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p + \sigma_s^p}{M} \quad (2.101)$$

Le raisonnement reste évidemment valable lorsque la phase poreuse est inexistante. Dans ce cas, la solution en déformation est indépendante de l'éventuelle précontrainte sphérique dans la phase solide déformable et il faut ajouter  $\sigma_s^p \mathbf{1}$  aux états de contraintes microscopique et macroscopique.

## 2.3 Calcul des moments dans la matrice

Dans la suite de ce mémoire, nous aurons besoin d'obtenir des informations sur l'état de déformation régnant au sein de la phase matricielle. En s'inspirant de [41] et en apportant une généralisation au cas d'une matrice précontrainte, les paragraphes suivants présentent deux types de moyenne que l'on peut calculer sur cette phase.

### 2.3.1 Moments d'ordre 1

Le moment d'ordre 1 de l'état de déformation dans la phase matricielle noté  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est tout simplement la moyenne de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sur le domaine  $\Omega^s$  :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} \quad (2.102)$$

Le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se décompose en une partie sphérique et une partie déviatorique à partir desquels sont extraits les deux premiers invariants  $\varepsilon_v$  et  $\varepsilon_d$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_v = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \varepsilon_d = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d} \end{cases} \quad (2.103)$$

On définit les moments d'ordre 1 des invariants  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$  à partir de la moyenne  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\bar{\varepsilon}_v = \text{tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_d = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d} \quad \text{avec} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \mathbb{K} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.104)$$

Le moment d'ordre 1 est aisé à obtenir dans les cas où il n'existe qu'un seul type d'inclusion (pores ou inclusions rigides). Dans le cas général, il faut adapter la méthode d'estimation vue à la section 2.1.4.

- *Milieu poreux dont la phase solide est homogène*

On envisage ici un milieu poreux sans inclusion dans la phase solide. On a donc  $\varphi^r = \varphi^l = 0$  et  $\varphi^s = 1 - \varphi$ . En rappelant que l'état de contrainte dans le fluide est  $-p \mathbf{1}$  et en utilisant la loi de comportement élastique linéaire sans précontrainte dans le solide,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  s'obtient par la règle de moyenne (1.15) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \varphi^s \mathbf{c}^s : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - p \varphi \mathbf{1} \quad (2.105)$$

On a alors  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en fonction de  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $p$  :

$$(1 - \varphi) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{c}^{s-1} : (\boldsymbol{\Sigma} + p \varphi \mathbf{1}) \quad (2.106)$$

À l'aide de (2.78), on peut écrire  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en fonction de  $\mathbf{E}$  et  $p$  :

$$(1 - \varphi) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{c}^{s-1} : (\mathbf{C}^{hom} : \mathbf{E} + p (\varphi \mathbf{1} - \mathbf{B})) \quad (2.107)$$

On note que, dans (2.107),  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\mathbf{B}$  interviennent explicitement. Dans ce cas, la détermination de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en fonction de  $\mathbf{E}$  doit nécessairement passer par une estimation de  $\mathbb{C}^{hom}$ ,  $\mathbf{B}$  découlant de  $\mathbb{C}^{hom}$  par (2.90).

En cas d'isotropie de  $\mathbb{C}^s$  (2.94), on peut écrire les invariants :

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_v = \frac{\Sigma_m + p \varphi}{k^s} \quad \text{avec} \quad \Sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.108)$$

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_d = \frac{\Sigma_d}{2 \mu^s} \quad \text{avec} \quad \Sigma_d = \boldsymbol{\Sigma} - \Sigma_m \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \Sigma_d = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_d : \boldsymbol{\Sigma}_d} \quad (2.109)$$

ou encore, si  $\mathbb{C}^{hom}$  est également isotrope (2.95), en exploitant (2.96) dans (2.107) :

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_v = \frac{k^{hom}}{k^s} E_v + \frac{p}{k^s} \left( \varphi - 1 + \frac{k^{hom}}{k^s} \right) \quad (2.110)$$

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_v = \frac{\mu^{hom}}{\mu^s} E_d \quad (2.111)$$

S'il existe une précontrainte sphérique  $\sigma_s^p \mathbf{1}$  dans la matrice (cf. § 2.2.3), il suffit de remplacer, dans les formules ci-avant,  $p$  par  $p + \sigma_s^p$  et, le cas échéant,  $\boldsymbol{\Sigma}$  par  $\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_s^p \mathbf{1}$ . Par exemple, (2.108) et (2.110) deviennent respectivement :

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_v = \frac{\Sigma_m + p \varphi - (1 - \varphi) \sigma_s^p}{k^s} \quad (2.112)$$

et

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_v = \frac{k^{hom}}{k^s} E_v + \frac{p + \sigma_s^p}{k^s} \left( \varphi - 1 + \frac{k^{hom}}{k^s} \right) \quad (2.113)$$

- *Milieu renforcé (sans pores)*

On s'intéresse cette fois à un milieu solide renforcé par des inclusions rigides en l'absence de pores soit  $\varphi = 0$ . Du fait du caractère rigide des inclusions, outre la phase solide déformable, seules les discontinuités de vitesse au niveau des interfaces lisses contribuent à la déformation macroscopique. On écrit en effet d'après la règle de moyenne (1.28) :

$$\mathbf{E} = \varphi^s \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varphi^l \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^l} \quad (2.114)$$

En l'absence d'inclusions à interface lisse ( $\varphi^l = 0$  et donc  $\varphi^s = 1 - \varphi^r$ ), on a simplement :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{E}}{\varphi^s} = \frac{\mathbf{E}}{1 - \varphi^r} \quad (2.115)$$

Il n'est donc pas utile ici de faire appel à une méthode d'estimation pour écrire  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en fonction de  $\mathbf{E}$ . De plus, (2.115) est valable quel que soit l'état de précontrainte de la phase déformable. En revanche, si on veut exprimer  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en fonction de  $\boldsymbol{\Sigma}$  (en l'absence de précontrainte), il faut estimer  $\mathbb{C}^{hom}$  puisque l'on a, d'après (2.100) avec  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbb{C}^{hom^{-1}} : (\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_s^p \mathbf{1})}{\varphi^s} \quad (2.116)$$

Si maintenant l'ensemble des inclusions (sphériques)  $\Omega^l$  est non vide, on doit avoir recours à une méthode d'estimation pour éliminer  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^l}$  dans (2.114), ce qui revient à utiliser directement une estimation de type (2.35) pour  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . En adoptant l'estimation de Mori-Tanaka, on obtient en utilisant (3.24) :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varphi^s \mathbb{1} + \varphi^l \boldsymbol{\alpha}^o)^{-1} : \mathbf{E} \quad (2.117)$$

dont les invariants s'écrivent :

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{E_v}{\varphi^s} \quad (2.118)$$

$$\bar{\varepsilon}_d = \frac{E_d}{\varphi^s + \varphi^l \alpha^o} \quad (2.119)$$

avec  $\alpha^o$  donné par (3.22).

- *Cas général : adaptation de la méthode d'estimation*

En présence de fluide à la pression  $p$ , on adapte la technique d'estimation employée à la section 2.1.4 en ajoutant l'effet de cette pression. Dans les phases autres que les pores, la localisation conduit toujours aux expressions (2.29) ( $\alpha \neq p$ ), tandis que, dans les pores, celle-ci s'effectue maintenant en exploitant l'équation (3.15) (on choisit une précontrainte nulle dans le milieu de référence) :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^p} \approx \tilde{\mathbb{A}}^p : (\mathbf{E}^\infty + p \mathbb{P}_o^p : \mathbf{1}) \quad (2.120)$$

où  $\tilde{\mathbb{A}}^p$  est toujours donné par (2.30). Le lien entre  $\mathbf{E}^\infty$  et  $\mathbf{E}$ , issu de la condition de cohérence (1.28), s'écrit :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \approx \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle : \mathbf{E}^\infty + \varphi p \tilde{\mathbb{A}}^p : \mathbb{P}_o^p : \mathbf{1} \quad (2.121)$$

avec  $\langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle$  donné par (2.33). On choisit donc  $\mathbf{E}^\infty$  tel que :

$$\mathbf{E}^\infty = \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle^{-1} : (\mathbf{E} - \varphi p \tilde{\mathbb{A}}^p : \mathbb{P}_o^p : \mathbf{1}) \quad (2.122)$$

Ainsi l'estimation de la localisation dans la phase solide s'écrit finalement :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathbb{A}^s : (\mathbf{E} - \varphi p \tilde{\mathbb{A}}^p : \mathbb{P}_o^p : \mathbf{1}) \quad (2.123)$$

où l'on a toujours  $\mathbb{A}^s = \tilde{\mathbb{A}}^s : \langle \tilde{\mathbb{A}} \rangle^{-1}$ .

Ajoutons enfin que la présence d'une éventuelle précontrainte sphérique  $\sigma_s^p \mathbf{1}$  dans la phase solide déformable se traduit par une simple substitution de  $p$  en  $p + \sigma_s^p$  dans (2.123).

Il est clair que si l'on adopte l'hypothèse d'isotropie locale et globale, les moyennes par phase des tenseurs de localisation doivent être isotropes (ce n'est évidemment pas le cas

localement). Il découle alors un découplage total entre les effets sphérique et déviatorique du chargement sur le moment d'ordre 1 car  $\bar{\varepsilon}_v$  ne dépend que de  $E_v$  et  $p$  tandis que  $\bar{\varepsilon}_d$  ne dépend que de  $E_d$  (ce qui s'est clairement vérifié dans les cas particuliers (2.110), (2.111), (2.115), (2.118) et (2.119)). Néanmoins, ce découplage est mis en défaut localement, comme en témoigne par exemple l'effet déviatorique local induit dans une sphère creuse par une pression externe uniforme. Ainsi la moyenne directe masque les couplages locaux. Il faudra donc recourir à un autre type de moyenne, par exemple quadratique dans le paragraphe suivant, si l'on veut être capable de mesurer ces couplages.

### 2.3.2 Moments d'ordre 2

Le moment d'ordre 2 de l'état de déformation dans la matrice est le tenseur d'ordre 4 :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} = \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \rangle_{\Omega^s} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (2.124)$$

En ce qui concerne les deux premiers invariants, les moments d'ordre 2 sont définis par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_v = \sqrt{\langle \varepsilon_v^2 \rangle_{\Omega^s}} = \sqrt{\mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} : \mathbf{1}} \quad (2.125)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_d = \sqrt{\langle \varepsilon_d^2 \rangle_{\Omega^s}} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\Omega^s}} = \sqrt{\mathbb{K} :: \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s}} \quad (2.126)$$

Selon une idée présentée dans [60], [61] et [97] et étendue à la poroélasticité dans [41], les composantes de la moyenne (2.124) ou les invariants (2.125) et (2.126) peuvent être obtenus par dérivation du potentiel élastique par rapport aux composantes de  $\mathbf{c}^s$ . Dans les développements suivants de ce paragraphe, on note  $\delta$  l'opérateur générique désignant une dérivation par rapport à une composante de  $\mathbf{c}^s$  (ou par rapport à  $k^s$  ou  $\mu^s$  si  $\mathbf{c}^s$  est isotrope (2.94)). Montrons le résultat dans le cas général (toutes les phases sont présentes) avant de le particulariser aux cas d'absence de l'une ou l'autre des phases. En utilisant (2.47) et (2.52), on peut écrire le potentiel  $\Psi^*$  (2.54) de la façon suivante :

$$\Psi^* = \varphi^s \langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} - \varphi p \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^p} \quad (2.127)$$

Différentions  $\Psi^*$  à l'aide de l'opérateur  $\delta$ , en notant que  $p$  est une donnée du problème indépendante de  $\mathbf{c}^s$  tandis que la solution  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dépend de  $\mathbf{c}^s$  :

$$\delta \Psi^* = \varphi^s \langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} + \varphi^s \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^s : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} - \varphi p \mathbf{1} : \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^p} \quad (2.128)$$

Dans le membre de droite de (2.128), on peut utiliser la loi de comportement du solide  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}$ , l'état de contrainte  $-p \mathbf{1}$  dans le fluide, le caractère rigide des inclusions  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  ainsi que la propriété de l'interface lisse (2.5) selon laquelle aucun travail de déformation n'est produit au niveau de celle-ci ( $\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ). On obtient alors :

$$\delta \Psi^* = \varphi^s \langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^s} + \langle \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.129)$$

Dans le dernier terme de (2.129), on peut appliquer le lemme de Hill (1.37) au couple  $(\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\varepsilon})$  en remarquant, d'une part, que  $\boldsymbol{\sigma}$  est bien en équilibre et, d'autre part, que  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  dérive du champ  $\delta\boldsymbol{\xi}$  cinématiquement admissible avec  $\mathbf{0}$  au contour puisque  $\boldsymbol{\xi}$  est cinématiquement admissible avec  $\mathbf{E}$  qui est une donnée du problème (donc indépendante de  $\mathbf{c}^s$ )<sup>(1)</sup>. On a donc :

$$\delta\Psi^* = \varphi^s < \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \delta\mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} >_{\Omega^s} \quad (2.130)$$

Le moment d'ordre 2 (2.124) s'écrit par conséquent :

$$\varphi^s < \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} >_{\Omega^s} = 2 \frac{\partial\Psi^*}{\partial\mathbf{c}^s} = 2 \frac{\partial\Psi^*}{\partial c_{ijkl}^s} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (2.131)$$

avec  $\Psi^*$  exprimé en (2.81).

Lorsque  $\mathbf{c}^s$  est isotrope (2.94), on peut obtenir les moments d'ordre 2 des invariants (2.125) et (2.126) :

$$\delta \equiv \frac{\partial}{\partial k^s} \Rightarrow \delta\mathbf{c}^s = 3\mathbb{J} \Rightarrow < \boldsymbol{\varepsilon} : \delta\mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} >_{\Omega^s} = \overline{\overline{\varepsilon}}_v^2 \quad (2.132)$$

$$\delta \equiv \frac{\partial}{\partial \mu^s} \Rightarrow \delta\mathbf{c}^s = 2\mathbb{K} \Rightarrow < \boldsymbol{\varepsilon} : \delta\mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} >_{\Omega^s} = 2\overline{\overline{\varepsilon}}_d^2 \quad (2.133)$$

Lorsqu'il n'y pas de précontrainte dans la phase solide, on a donc :

$$\varphi^s \overline{\overline{\varepsilon}}_v^2 = \mathbf{E} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial k^s} : \mathbf{E} - 2p \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial k^s} : \mathbf{E} - p^2 \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \frac{1}{M} \right) \quad (2.134)$$

$$\varphi^s \overline{\overline{\varepsilon}}_d^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu^s} : \mathbf{E} - p \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial \mu^s} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{M} \right) \quad (2.135)$$

et, en présence d'une précontrainte sphérique uniforme dans la phase solide, en vertu du raisonnement de la section 2.2.3 :

$$\varphi^s \overline{\overline{\varepsilon}}_v^2 = \mathbf{E} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial k^s} : \mathbf{E} - 2(p + \sigma_s^p) \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial k^s} : \mathbf{E} - (p + \sigma_s^p)^2 \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \frac{1}{M} \right) \quad (2.136)$$

$$\varphi^s \overline{\overline{\varepsilon}}_d^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial\mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu^s} : \mathbf{E} - (p + \sigma_s^p) \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial \mu^s} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} (p + \sigma_s^p)^2 \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{M} \right) \quad (2.137)$$

Contrairement aux moments d'ordre 1, la forme générale des moments d'ordre 2 laisse entrevoir les effets couplés des parties sphérique et déviatorique du chargement sur l'état de déformation quadratique moyen du solide.

À ce stade, l'évaluation de  $\overline{\overline{\varepsilon}}_v$  et de  $\overline{\overline{\varepsilon}}_d$  passe, dans le cas général, par une estimation analytique ou numérique de  $\mathbb{C}^{hom}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $M$  et de leurs dérivées. En l'absence de certaines phases, les expressions (2.136) et (2.137) peuvent être précisées.

<sup>(1)</sup>Il faut bien noter que, contrairement à  $\mathbf{E}$ , le tenseur de contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  n'est pas une donnée mais un résultat du problème d'élasticité linéaire (2.78) et dépend donc de  $\mathbf{c}^s$ .

- *Milieu poreux dont la phase solide est homogène*

On retrouve, dans ce paragraphe, des résultats obtenus dans [41] généralisés par la présence de la précontrainte  $\sigma_s^p$ . Pour une telle microstructure, les expressions de  $\mathbf{B}$  et  $M$  ont été reliées à  $\mathbb{C}^{hom}$  (cf. (2.90) et (2.93)). Il suffira donc d'estimer  $\mathbb{C}^{hom}$  et ses dérivées pour déduire les moments d'ordre 2. Les dérivées de  $\mathbf{B}$  et  $M$  s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial k^s} = -\frac{1}{3 k^s} \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial k^s} : \mathbf{1} + \frac{1}{3 k^{s2}} \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{1} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \frac{1}{M} \right) &= -\frac{1}{9 k^{s2}} \mathbf{1} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial k^s} : \mathbf{1} \\ &\quad + \frac{2}{9 k^{s3}} \mathbf{1} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{1} - \frac{1}{k^{s2}} (1 - \varphi) \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mu^s} = -\frac{1}{3 k^s} \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu^s} : \mathbf{1} \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{M} \right) = -\frac{1}{9 k^{s2}} \mathbf{1} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu^s} : \mathbf{1} \quad (2.141)$$

Dans l'hypothèse d'isotropie globale, on peut utiliser les résultats (2.95), (2.96) et (2.97) dans (2.136) et (2.137) en rappelant que l'on a ici  $\varphi^s = 1 - \varphi$  :

$$\begin{aligned} (1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_v^2 &= \left( \frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} - \frac{1}{1 - \varphi} \left( \frac{k^{hom}}{k^s} \right)^2 \right) \left( E_v + \frac{p + \sigma_s^p}{k^s} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{1 - \varphi} \left( \frac{k^{hom}}{k^s} E_v + \frac{p + \sigma_s^p}{k^s} \left( \varphi - 1 + \frac{k^{hom}}{k^s} \right) \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} E_d^2 \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_d^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} \left( E_v + \frac{p + \sigma_s^p}{k^s} \right)^2 + \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} E_d^2 \quad (2.143)$$

Si le schéma d'homogénéisation utilisé est celui de Mori-Tanaka (cf. annexe 3.4.1), l'expression de  $\bar{\bar{\varepsilon}}_v$  (2.142) se simplifie :

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_v^2 = \frac{1}{1 - \varphi} \left( \frac{k^{hom}}{k^s} E_v + \frac{p + \sigma_s^p}{k^s} \left( \varphi - 1 + \frac{k^{hom}}{k^s} \right) \right)^2 + 2 \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} E_d^2 \quad (2.144)$$

avec  $k^{hom}$  de  $\mu^{hom}$  exprimés en (3.73) et (3.76).

Pour écrire les moments d'ordre 2 en fonction de  $\Sigma$  plutôt que  $\mathbf{E}$ , il suffit de rappeler la loi de comportement (2.100) et les dérivées de  $\mathbf{B}$  et  $1/M$  (2.138)-(2.141) ; on

obtient alors à partir de (2.136) et (2.137) :

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_v^2 = -(\Sigma + p \mathbf{1}) : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom-1}}{\partial k^s} : (\Sigma + p \mathbf{1}) - \frac{\sigma_s^p + p}{3 k^s} \mathbf{1} : \left( -2 (\Sigma + p \mathbf{1}) + (1 - \varphi) (\sigma_s^p + p) \mathbf{1} \right) \quad (2.145)$$

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_d^2 = -\frac{1}{2} (\Sigma + p \mathbf{1}) : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom-1}}{\partial \mu^s} : (\Sigma + p \mathbf{1}) \quad (2.146)$$

où l'on a utilisé l'expression reliant les dérivées de  $\mathbb{C}^{hom}$  aux dérivées de son inverse :

$$\mathbb{C}^{hom} : \mathbb{C}^{hom-1} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbb{C}^{hom} = -\mathbb{C}^{hom} : \delta \mathbb{C}^{hom-1} : \mathbb{C}^{hom} \quad (2.147)$$

Lorsque  $\mathbb{C}^{hom}$  est isotrope, (2.146) devient pour n'importe quel schéma linéaire :

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_d^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{k^{hom}} \right) (\Sigma_m + p)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{\mu^{hom}} \right) \Sigma_d^2 \quad (2.148)$$

et, dans le cas du schéma de Mori-Tanaka, (2.145) devient :

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{\varepsilon}}_v^2 = \frac{1}{1 - \varphi} \left( \frac{\Sigma_m + p \varphi - \sigma_s^p (1 - \varphi)}{k^s} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \frac{1}{\mu^{hom}} \right) \Sigma_d^2 \quad (2.149)$$

- *Milieu renforcé (sans pores)*

Dans le cas où l'espace poreux  $\Omega^p$  est réduit à l'ensemble vide, le potentiel  $\Psi^*$  prend la forme simple (2.88) du fait de (2.86). Ainsi les expressions (2.136) et (2.137) se réduisent ici à :

$$\varphi^s \bar{\bar{\varepsilon}}_v^2 = \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial k^s} : \mathbf{E} \quad (2.150)$$

$$\varphi^s \bar{\bar{\varepsilon}}_d^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu^s} : \mathbf{E} \quad (2.151)$$

Il faut bien préciser que ces résultats sont valables en présence des deux types d'inclusions rigides considérées (parfaitement adhérentes ou à interface lisse) et ne sont pas modifiées lorsque la phase solide déformable présente une précontrainte sphérique uniforme quelconque (cf. § 2.2.3).

Dans le cas isotrope, (2.150) et (2.151) deviennent :

$$\varphi^s \bar{\bar{\varepsilon}}_v^2 = \frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} E_v^2 + 2 \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} E_d^2 \quad (2.152)$$

$$\varphi^s \bar{\bar{\varepsilon}}_d^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} E_v^2 + \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} E_d^2 \quad (2.153)$$

En utilisant (2.147) et la loi de comportement (2.100) avec  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , (2.150) et (2.151) peuvent s'écrire en fonction de  $\boldsymbol{\Sigma}$  :

$$\varphi^s \overline{\overline{\varepsilon}}_v^2 = -(\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_s^p \mathbf{1}) : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom^{-1}}}{\partial k^s} : (\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_s^p \mathbf{1}) \quad (2.154)$$

$$\varphi^s \overline{\overline{\varepsilon}}_d^2 = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_s^p \mathbf{1}) : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom^{-1}}}{\partial \mu^s} : (\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_s^p \mathbf{1}) \quad (2.155)$$

# Chapitre 3

## Annexes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Problème d'Eshelby [44]</b>	<b>61</b>
3.1.1	Inclusion d'Eshelby	61
3.1.2	Inhomogénéité d'Eshelby	62
3.1.3	Problème de l'inclusion rigide à interface lisse	64
<b>3.2</b>	<b>Quelques expressions analytiques du tenseur d'Eshelby</b>	<b>67</b>
3.2.1	Inclusion sphérique dans un milieu isotrope	67
3.2.2	Inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope	67
3.2.3	Inclusion cylindrique dans un milieu isotrope	70
<b>3.3</b>	<b>Symétrie de l'estimation du tenseur d'élasticité macroscopique</b>	<b>71</b>
<b>3.4</b>	<b>Estimations de Mori-Tanaka pour des matériaux biphasés isotropes</b>	<b>72</b>
3.4.1	Milieu poreux dont la phase solide est homogène	73
3.4.2	Milieu renforcé par des inclusions rigides parfaitement adhérentes	74
3.4.3	Milieu renforcé par des inclusions rigides lisses	75

---



## 3.1 Problème d'Eshelby [44]

### 3.1.1 Inclusion d'Eshelby

Considérons un domaine infini ( $\Omega = \mathbb{R}^3$ ) occupé par un matériau élastique linéaire homogène de tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}^o$ . Le matériau est à l'état initial naturel sauf dans une inclusion  $\mathcal{I}$  de forme ellipsoïdale où règne un champ de polarisation uniforme  $\mathbf{p}$  (cf. FIG. 3.1). On impose des déplacements nuls à l'infini. La solution du problème de l'inclusion satisfait

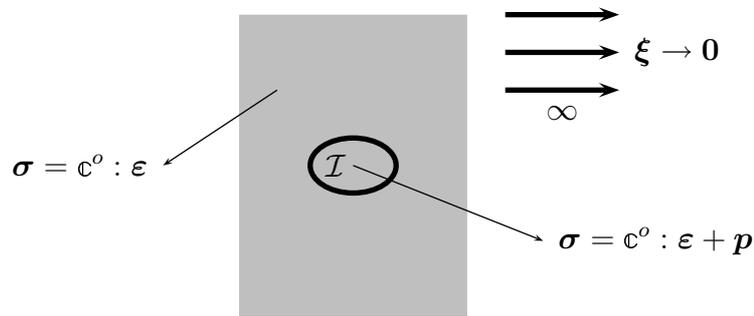


FIG. 3.1 – Problème de l'inclusion d'Eshelby

le système d'équations :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & (\mathbb{R}^3) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}^o : \boldsymbol{\varepsilon} & (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{I}) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}^o : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{p} & (\mathcal{I}) \\
 \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) & (\mathbb{R}^3)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Définissons l'espace occupé par l'inclusion par :

$$\mathcal{I} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot ({}^t \mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{x} \leq 1 \right\} \tag{3.2}$$

où  $\mathbf{A}$  est un tenseur d'ordre 2 indiquant l'orientation et les longueurs des axes de l'ellipsoïde. En notant  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  les directions et  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  les demi-longueurs des axes,  $\mathbf{A}$  s'écrit :

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \tag{3.3}$$

et l'équation de l'ellipsoïde :

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 \leq 1 \quad (3.4)$$

Le résultat remarquable obtenu par Eshelby [44] est que les champs de déformation et de contrainte solutions de (3.1) sont uniformes à l'intérieur de l'inclusion. On écrit classiquement :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : \mathbf{p} \quad (3.5)$$

où  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$  est un tenseur d'ordre 4 symétrique ( $P_{kl ij} = P_{ij kl}$ ). L'exposant  $o$  fait référence à l'élasticité  $\mathbf{c}^o$  et  $\mathcal{I}$  symbolise ici la forme et l'orientation de l'inclusion. On montre que l'expression générale de  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$  s'écrit sous la forme d'une intégrale sur la sphère unité ([3], [38], [45], [101]) :

$$\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} = \frac{\det \mathbf{A}}{4\pi} \int_{\|\mathbf{v}\|=1} \frac{\mathbf{v} \overset{s}{\otimes} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}^o \cdot \mathbf{v})^{-1} \overset{s}{\otimes} \mathbf{v}}{(\mathbf{v} \cdot ({}^t \mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{v})^{3/2}} dS_{\mathbf{v}} \quad (3.6)$$

L'opérateur  $\overset{s}{\otimes}$  indique que le produit tensoriel est suivi d'une symétrisation entre les indices encadrant celui-ci, en l'occurrence entre les indices 1 et 2 d'une part et entre les indices 3 et 4 d'autre part. Écrit sous la forme (3.6), il apparaît clairement que  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$  dépend de  $\mathbf{c}^o$  mais aussi de la forme de l'inclusion (rapports entre les axes de l'ellipsoïde) et de son orientation. On introduit également le tenseur d'Eshelby défini par :

$$\mathbb{S}_o^{\mathcal{I}} = \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : \mathbf{c}^o \quad (3.7)$$

Il faut bien noter que, dans le cas général, le tenseur d'Eshelby (3.7) n'admet pas la symétrie par rapport aux couples d'indices (1, 2) et (3, 4). Différents cas de figure pour lesquels une expression analytique du tenseur d'Eshelby est disponible figurent en annexe 3.2. Signalons également que le problème d'Eshelby peut être transcrit dans un cadre bidimensionnel où il s'agit de traiter le cas d'une inclusion cylindrique à base elliptique plongée dans un milieu infini [100].

### 3.1.2 Inhomogénéité d'Eshelby

Considérons maintenant le problème de l'inhomogénéité d'Eshelby, c'est-à-dire que le domaine  $\mathcal{I}$  ne se distingue plus par l'existence d'une polarisation uniforme mais par la présence d'un matériau différent de celui caractérisé par le tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}^o$ . Le matériau occupant le domaine  $\mathcal{I}$  est supposé élastique linéaire de tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$ . On suppose maintenant que le domaine infini est soumis à des conditions de déformation homogène à l'infini (cf. FIG. 3.2). Le problème à résoudre est alors défini par les équations :

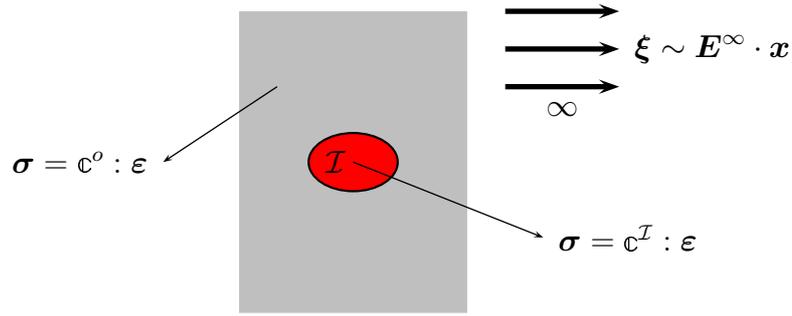


FIG. 3.2 – Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & (\mathbb{R}^3) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}^o : \boldsymbol{\varepsilon} & (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{I}) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}^{\mathcal{I}} : \boldsymbol{\varepsilon} & (\mathcal{I}) \\
 \boldsymbol{\xi} &\sim \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x} & (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty) \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) & (\mathbb{R}^3)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour résoudre (3.8), on commence par faire l'hypothèse que le champ de déformation est uniforme dans  $\mathcal{I}$  et vaut  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}}$ . On peut alors constater que les systèmes (3.1) et (3.8) sont équivalents si l'on prend :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{c}^{\mathcal{I}} - \mathbf{c}^o) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}} \tag{3.9}$$

Par linéarité, la solution en déplacement de (3.8) est la somme d'un terme dû à  $\mathbf{p}$  (3.9) qui se présente sous la forme (3.5) à l'intérieur de  $\mathcal{I}$  et d'un terme dû à  $\mathbf{E}^\infty$  qui est uniforme valant  $\mathbf{E}^\infty$  en tout point :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}} = -\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : (\mathbf{c}^{\mathcal{I}} - \mathbf{c}^o) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}} + \mathbf{E}^\infty \tag{3.10}$$

Il découle alors de (3.10) que la solution de (3.8) s'écrit :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : (\mathbf{c}^{\mathcal{I}} - \mathbf{c}^o))^{-1} : \mathbf{E}^\infty \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^{\mathcal{I}} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : (\mathbf{c}^{\mathcal{I}} - \mathbf{c}^o))^{-1} : \mathbf{E}^\infty \end{cases} \tag{3.11}$$

On vérifie donc bien a posteriori que l'hypothèse d'uniformité de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dans  $\mathcal{I}$  était fondée puisque l'on a trouvé un candidat satisfaisant les équations (3.8) et que la solution de ce système est unique.

Dans le cas limite d'une inclusion vide ( $\mathbf{c}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbf{0}$ ), la solution (3.11) s'écrit :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \text{ (pore)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{1} - \mathbb{S}_o^{\mathcal{I}})^{-1} : \mathbf{E}^\infty \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.12)$$

et si l'inclusion est rigide ( $\mathbf{c}^{\mathcal{I}} \rightarrow \infty$ ), (3.11) devient :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \text{ (rigide)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}-1} : \mathbf{E}^\infty \end{cases} \quad (3.13)$$

Remarquons que le raisonnement menant à (3.11) tient toujours si l'on remplace le comportement élastique linéaire du matériau de  $\mathcal{I}$  par un comportement élastique non linéaire défini par un tenseur sécant  $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ . En effet, on démontre alors, en supposant encore l'uniformité de la déformation dans  $\mathcal{I}$  et en vérifiant cette hypothèse a posteriori, que ce tenseur sécant définit en fait un tenseur d'élasticité uniforme  $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}})$  dans  $\mathcal{I}$ . Mais, pour exprimer  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}}$  en fonction de  $\mathbf{E}^\infty$ , il faudra résoudre l'équation non linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}} = (\mathbb{1} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : (\mathbf{c}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{I}}) - \mathbf{c}^o))^{-1} : \mathbf{E}^\infty \quad (3.14)$$

On peut aussi adapter le raisonnement si le comportement du matériau dans le domaine  $\mathcal{I}$  présente à la fois un tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$  a priori différent de  $\mathbf{c}^o$  ainsi qu'une précontrainte uniforme  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{I}}^p$  et si le milieu de référence présente également une précontrainte uniforme  $\boldsymbol{\sigma}_o^p$ . En effet, on montre sans peine en invoquant la linéarité des équations en jeu que le tenseur des déformations est uniforme dans  $\mathcal{I}$  et s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{1} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : (\mathbf{c}^{\mathcal{I}} - \mathbf{c}^o))^{-1} : (\mathbf{E}^\infty + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : (\boldsymbol{\sigma}_o^p - \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{I}}^p)) \quad (3.15)$$

### 3.1.3 Problème de l'inclusion rigide à interface lisse

Le problème d'Eshelby conduit à une évaluation de la déformation régnant dans une inclusion élastique baignée dans un milieu élastique linéaire infini dans l'hypothèse où le champ de déplacement recherché vérifie certaines conditions de régularité et notamment la continuité. Par conséquent, en utilisant la solution de ce problème, on suppose que l'interface entre la matrice et l'inclusion est à adhérence parfaite. Dans [52], il est prouvé qu'une interface imparfaite modélisée par une loi de comportement élastique (liant le vecteur-contrainte et la discontinuité de déplacement) conduit à une solution non uniforme au sein de l'inclusion. On se propose, dans ce paragraphe, de revisiter le problème d'Eshelby dans le cas extrême d'une inclusion rigide et d'une interface lisse modélisée par

les équations (1.44). Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{I}) \\
\boldsymbol{\sigma} &= \mathfrak{c}^\circ : \boldsymbol{\varepsilon} & (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{I}) \\
\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} &= 0 & (\partial \mathcal{I}) \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &\parallel \mathbf{n} & (\partial \mathcal{I}) \\
\boldsymbol{\xi} &\sim \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x} & (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty) \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) & (\mathbb{R}^3)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Pour obtenir une solution analytique du problème (3.16), nous ne considérons que le cas de l'inclusion sphérique (on se placera donc dans le système de coordonnées sphériques de la FIG. 3.3) et du comportement isotrope de la matrice. Le tenseur  $\mathfrak{c}^\circ$  s'écrit donc :

$$\mathfrak{c}^\circ = 3k^\circ \mathbb{J} + 2\mu^\circ \mathbb{K} \tag{3.17}$$

L'objectif est d'évaluer les moyennes sur le domaine  $\mathcal{I}$  des tenseurs de déformation et

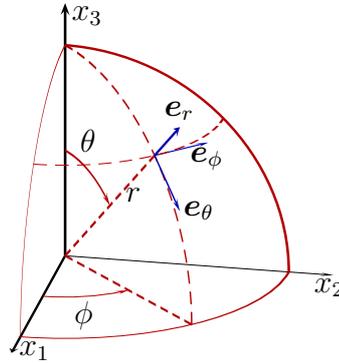


FIG. 3.3 – Coordonnées sphériques

de contrainte. Conformément aux résultats obtenus en (1.45) et (1.46), ces moyennes s'écrivent comme des intégrales au contour du domaine. La linéarité des équations (3.16) implique que ces intégrales dépendent linéairement de  $\mathbf{E}^\infty$  :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{1}{|\mathcal{I}|} \int_{\partial \mathcal{I}} \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \otimes \mathbf{n} \, dS = \mathfrak{a}^\circ : \mathbf{E}^\infty \tag{3.18}$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{1}{|\mathcal{I}|} \int_{\partial \mathcal{I}} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS = \mathfrak{b}^\circ : \mathbf{E}^\infty \tag{3.19}$$

où  $\mathfrak{a}^\circ$  et  $\mathfrak{b}^\circ$  sont deux tenseurs isotropes d'ordre 4, c'est-à-dire qu'ils se décomposent sur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  en raison de l'isotropie du comportement de la matrice et de la symétrie

géométrique du problème. Il suffit donc de considérer un tenseur  $\mathbf{E}^\infty$  purement sphérique (resp. déviatorique) pour identifier les coefficients de  $\mathfrak{a}^\circ$  et  $\mathfrak{b}^\circ$  sur  $\mathbb{J}$  (resp.  $\mathbb{K}$ ).

En ce qui concerne la partie sphérique, il apparaît que l'interface ne joue aucun rôle. En effet, la solution du problème avec adhérence parfaite à l'interface présente une symétrie sphérique et vérifie donc les conditions (1.44). On en déduit qu'il s'agit également de la solution du problème avec interface lisse. Ainsi, comme le déplacement est continu à l'interface, la composante sur  $\mathbb{J}$  de  $\mathfrak{a}^\circ$  est nulle tandis que celle de  $\mathfrak{b}^\circ$  se déduit de (3.13) (avec  $\mathbb{P}_o^\mathcal{I}$  relatif à une inclusion sphérique (3.28)) et vaut donc  $3k^\circ + 4\mu^\circ$ .

Pour déterminer la composante déviatorique, on fixe arbitrairement  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  et on considère le tenseur :

$$\mathbf{E}^\infty = E^\infty (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \quad (3.20)$$

La forme de la solution en déplacement à la sollicitation (3.20) est donnée dans [24] ou [54]. En tenant compte des conditions à l'infini et à l'interface, on obtient les expressions suivantes des composantes du déplacement dans la matrice (dans les coordonnées sphériques de la FIG. 3.3) avec  $R_o$  désignant le rayon de l'inclusion sphérique :

$$\begin{cases} \xi_r &= \left( r - \frac{5(k^\circ + \mu^\circ) R_o^3}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \frac{R_o^3}{r^2} - \frac{3\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \frac{R_o^5}{r^4} \right) \sin^2 \theta \cos(2\phi) E^\infty \\ \xi_\theta &= \left( r - \frac{10\mu^\circ}{3(5k^\circ + 8\mu^\circ)} \frac{R_o^3}{r^2} + \frac{2\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \frac{R_o^5}{r^4} \right) \sin \theta \cos \theta \cos(2\phi) E^\infty \\ \xi_\phi &= - \left( r - \frac{10\mu^\circ}{3(5k^\circ + 8\mu^\circ)} \frac{R_o^3}{r^2} + \frac{2\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \frac{R_o^5}{r^4} \right) \sin \theta \sin(2\phi) E^\infty \end{cases} \quad (3.21)$$

En rappelant que  $\boldsymbol{\xi}$  est nul dans l'inclusion, on exploite (3.21) dans (3.18) pour obtenir :

$$\frac{1}{|\mathcal{I}|} \int_{\partial\mathcal{I}} \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \otimes \mathbf{n} \, dS = \alpha^\circ \mathbf{E}^\infty \quad \text{avec} \quad \alpha^\circ = \frac{3k^\circ + 4\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \quad (3.22)$$

et, en utilisant la loi de comportement  $\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{c}^\circ : \boldsymbol{\varepsilon}$  dans la matrice, on a :

$$\frac{1}{|\mathcal{I}|} \int_{\partial\mathcal{I}} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS = \beta^\circ \mathbf{E}^\infty \quad \text{avec} \quad \beta^\circ = \frac{16\mu^\circ}{3} \frac{3k^\circ + 4\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \quad (3.23)$$

Par conséquent, les tenseurs  $\mathfrak{a}^\circ$  et  $\mathfrak{b}^\circ$  s'écrivent :

$$\mathfrak{a}^\circ = \frac{3k^\circ + 4\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \mathbb{K} \quad (3.24)$$

$$\mathfrak{b}^\circ = (3k^\circ + 4\mu^\circ) \mathbb{J} + \frac{16\mu^\circ}{3} \frac{3k^\circ + 4\mu^\circ}{5k^\circ + 8\mu^\circ} \mathbb{K} \quad (3.25)$$

Contrairement au cas classique d'application du résultat d'Eshelby, dans le cas présent de l'interface lisse, il n'est pas simple de déduire des résultats précédents l'effet d'une

précontrainte dans la matrice et/ou dans l'inclusion. Toutefois, si ces précontraintes sont sphériques, il est immédiat de constater que la nature de l'interface ne va pas intervenir puisque la solution du problème avec adhérence parfaite convient également pour le problème avec interface lisse (pas de cisaillement induit). Ainsi les précontraintes n'auront un effet que sur les contraintes (le même que dans le cas adhérent) et non sur la discontinuité de déplacement.

## 3.2 Quelques expressions analytiques du tenseur d'Eshelby

### 3.2.1 Inclusion sphérique dans un milieu isotrope

Le milieu infini dans lequel baigne l'inclusion sphérique est isotrope, ce qui signifie que son tenseur d'élasticité est donné par (3.17). Il est défini par son module de compression  $k^o$  et son module de cisaillement  $\mu^o$  ou, de manière équivalente, par son module d'Young  $E^o$  et son coefficient de Poisson  $\nu^o$  :

$$\left. \begin{aligned} 3k^o &= \frac{E^o}{1-2\nu^o} \\ 2\mu^o &= \frac{E^o}{1+\nu^o} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} E^o &= 9 \frac{k^o \mu^o}{3k^o + \mu^o} \\ \nu^o &= \frac{1}{2} \frac{3k^o - 2\mu^o}{3k^o + \mu^o} \end{aligned} \right. \quad (3.26)$$

Par symétrie, le tenseur d'Eshelby est isotrope et se décompose donc sur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  ([38], [102]) :

$$\mathbb{S}_o^{\mathcal{I}} = \frac{3k^o}{3k^o + 4\mu^o} \mathbb{J} + \frac{6}{5} \frac{k^o + 2\mu^o}{3k^o + 4\mu^o} \mathbb{K} = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu^o}{1 - \nu^o} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu^o}{1 - \nu^o} \mathbb{K} \quad (3.27)$$

D'après (3.7), le tenseur  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$  s'écrit donc :

$$\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} = \frac{1}{3k^o + 4\mu^o} \mathbb{J} + \frac{3}{5\mu^o} \frac{k^o + 2\mu^o}{3k^o + 4\mu^o} \mathbb{K} \quad (3.28)$$

### 3.2.2 Inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope

Dans cette section, le milieu infini est toujours isotrope mais l'inclusion est maintenant de forme ellipsoïdale de révolution autour d'un axe que l'on prendra par convention dirigé suivant le vecteur  $\mathbf{e}_3$ . Ainsi les axes selon  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont de longueur identique i.e.  $a_2 = a_1$ . Le rapport entre la longueur du troisième axe et celle-ci, appelé rapport d'aspect et noté  $\omega$ , définit la forme de l'ellipsoïde :

$$\omega = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \quad (3.29)$$

Outre le cas déjà traité de la sphère  $\omega = 1$ , on distingue deux types d'ellipsoïde :

- l'ellipsoïde aplati <sup>(1)</sup> tel que  $a_3 < a_1$  i.e.  $\omega < 1$  (cf. FIG. 3.4(a)),

<sup>(1)</sup> "oblate spheroid" en anglais

– l'ellipsoïde allongé <sup>(2)</sup> tel que  $a_3 > a_1$  i.e.  $\omega > 1$  (cf. FIG. 3.4(b)).

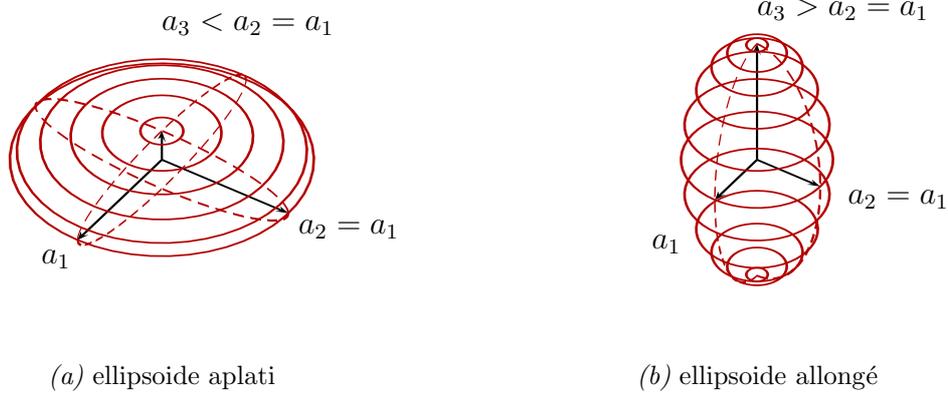


FIG. 3.4 – Ellipsoïdes de révolution

Quel que soit le rapport d'aspect de l'inclusion ellipsoïdale, la symétrie du problème mène naturellement à un tenseur  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$  isotrope transverse. Ses composantes dans la base  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)_{i,j,k,l=1,2,3}$  sont donc totalement déterminés à partir de 5 d'entre elles tandis que le tenseur d'Eshelby, qui ne présente pas la symétrie entre le couple d'indices (1, 2) et le couple d'indices (3, 4), sera lui déterminé à partir de 6 coefficients. On introduit les notations suivantes :

$$Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu^o)} \quad (3.30)$$

$$R = \frac{1-2\nu^o}{8\pi(1-\nu^o)} \quad (3.31)$$

$$I_1 = \begin{cases} 2\pi\omega \frac{\arccos\omega - \omega\sqrt{1-\omega^2}}{(1-\omega^2)^{3/2}} & \text{si } \omega < 1 \text{ (ell. aplati)} \\ 2\pi\omega \frac{\omega\sqrt{\omega^2-1} - \operatorname{argch}\omega}{(\omega^2-1)^{3/2}} & \text{si } \omega > 1 \text{ (ell. allongé)} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$I_3 = 4\pi - 2I_1 \quad (3.33)$$

$$I_{13} = -\frac{I_1 - I_3}{3(1-\omega^2)} \quad (3.34)$$

$$I_{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{I_{13}}{4} \quad (3.35)$$

$$I_{11} = 3I_{12} \quad (3.36)$$

$$I_{33} = \frac{4\pi}{3\omega^2} - 2I_{13} \quad (3.37)$$

<sup>(2)</sup> "prolate spheroid" en anglais

Voici les composantes de  $\mathbb{S}_o^{\mathcal{I}}$  à partir desquelles les autres composantes non nulles peuvent être déduites [38], soit en raison de l'isotropie transverse soit en invoquant la propriété de symétrie entre les deux premiers et entre les deux derniers indices (i.e.  $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ ) :

$$S_{1111} = Q I_{11} + R I_1 \quad (3.38)$$

$$S_{3333} = Q \omega^2 I_{33} + R I_3 \quad (3.39)$$

$$S_{1122} = Q I_{12} - R I_1 \quad (3.40)$$

$$S_{1133} = Q \omega^2 I_{13} - R I_1 \quad (3.41)$$

$$S_{3311} = Q I_{13} - R I_3 \quad (3.42)$$

$$S_{2323} = \frac{Q}{2} (1 + \omega^2) I_{13} + \frac{R}{2} (I_1 + I_3) \quad (3.43)$$

L'isotropie transverse et les rôles symétriques joués par les axes 1 et 2 impliquent que le coefficient  $S_{1212}$  s'écrit :

$$S_{1212} = \frac{1}{2} (S_{1111} - S_{1122}) \quad (3.44)$$

Les autres composantes non nulles sont obtenues à partir de (3.38) à (3.44) par permutation entre l'axe 1 et l'axe 2 et par permutation entre les deux premiers indices et/ou les deux derniers (par exemple  $S_{2222} = S_{1111}$  ou encore  $S_{3131} = S_{1313} = S_{1331} = S_{2323}$  etc.). Toutes les composantes dont les indices ne peuvent se ramener, par ce procédé, à ceux de l'une des expressions (3.38) à (3.44) sont nulles (par exemple  $S_{1112} = 0$ ).

### Développement limité au voisinage de $\omega = 0$

Au voisinage de  $\omega = 0$  (l'ellipsoïde est aplati, proche d'un disque), les composantes (3.38) à (3.43) deviennent :

$$S_{1111} = \frac{\pi}{32} \frac{13 - 8\nu^o}{1 - \nu^o} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.45)$$

$$S_{3333} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1 - 2\nu^o}{1 - \nu^o} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.46)$$

$$S_{1122} = -\frac{\pi}{32} \frac{1 - 8\nu^o}{1 - \nu^o} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.47)$$

$$S_{1133} = -\frac{\pi}{8} \frac{1 - 2\nu^o}{1 - \nu^o} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.48)$$

$$S_{3311} = \frac{\nu^o}{1 - \nu^o} - \frac{\pi}{8} \frac{1 + 4\nu^o}{1 - \nu^o} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.49)$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \frac{2 - \nu^o}{1 - \nu^o} \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.50)$$

### Développement limité au voisinage de $\omega = +\infty$

Au voisinage de  $\omega = +\infty$  (l'ellipsoïde est allongé, proche d'un segment), les composantes (3.38) à (3.43) deviennent :

$$S_{1111} = \frac{1}{8} \frac{5 - 4\nu^o}{1 - \nu^o} - \frac{1}{4} \frac{1 - 2\nu^o}{1 - \nu^o} \frac{\ln \omega}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.51)$$

$$S_{3333} = \frac{2 - \nu^o}{1 - \nu^o} \frac{\ln \omega}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.52)$$

$$S_{1122} = -\frac{1}{8} \frac{1 - 4\nu^o}{1 - \nu^o} + \frac{1}{4} \frac{1 - 2\nu^o}{1 - \nu^o} \frac{\ln \omega}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.53)$$

$$S_{1133} = \frac{1}{2} \frac{\nu^o}{1 - \nu^o} + \frac{1}{2} \frac{1 + \nu^o}{1 - \nu^o} \frac{\ln \omega}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.54)$$

$$S_{3311} = -\frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu^o}{1 - \nu^o} \frac{\ln \omega}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.55)$$

$$S_{2323} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{1 + \nu^o}{1 - \nu^o} \frac{\ln \omega}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.56)$$

### 3.2.3 Inclusion cylindrique dans un milieu isotrope

L'inclusion sur laquelle est basé ce paragraphe correspond à une généralisation de la limite d'un ellipsoïde de type allongé (cf. FIG. 3.4(b)) avec  $a_3/a_1 \rightarrow \infty$  et  $a_3/a_2 \rightarrow \infty$  au cas où les axes  $a_1$  et  $a_2$  sont différents. On note le rapport d'aspect  $\varpi = a_2/a_1$ . L'ellipsoïde n'est plus de révolution mais s'apparente dans ce cas limite à un cylindre à base elliptique d'axe dirigé selon  $\mathbf{e}_3$  (cf. FIG. 3.5). Toutes les composantes du tenseur d'Eshelby qui

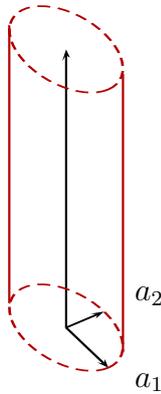


FIG. 3.5 – Inclusion cylindrique

ne sont pas engendrées par les symétries  $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$  à partir des composantes

suivantes sont nulles [98] :

$$S_{1111} = \frac{\varpi (3 - 2\nu^o + 2\varpi (1 - \nu^o))}{2 (1 + \varpi)^2 (1 - \nu^o)} \quad (3.57)$$

$$S_{2222} = \frac{2 (1 - \nu^o) + \varpi (3 - 2\nu^o)}{2 (1 + \varpi)^2 (1 - \nu^o)} \quad (3.58)$$

$$S_{1122} = \frac{\varpi (- (1 - 2\nu^o) + 2\varpi \nu^o)}{2 (1 + \varpi)^2 (1 - \nu^o)} \quad (3.59)$$

$$S_{2211} = \frac{2\nu^o - \varpi (1 - 2\nu^o)}{2 (1 + \varpi)^2 (1 - \nu^o)} \quad (3.60)$$

$$S_{1133} = \frac{\varpi \nu^o}{(1 + \varpi) (1 - \nu^o)} \quad (3.61)$$

$$S_{2233} = \frac{\nu^o}{(1 + \varpi) (1 - \nu^o)} \quad (3.62)$$

$$S_{1212} = \frac{1 - \nu^o + \varpi (1 - 2\nu^o) + \varpi^2 (1 - \nu^o)}{2 (1 + \varpi)^2 (1 - \nu^o)} \quad (3.63)$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2 (1 + \varpi)} \quad (3.64)$$

$$S_{3131} = \frac{\varpi}{2 (1 + \varpi)} \quad (3.65)$$

Dans le contexte bidimensionnel de la déformation plane et d'une inclusion cylindrique à base elliptique, les composantes du tenseur d'Eshelby bidimensionnel coïncident avec les composantes "utiles" (ne faisant pas intervenir le coefficient 3) explicitées dans ce paragraphe [100].

On peut également trouver dans la littérature les expressions exactes ou approchées du tenseur d'Eshelby dans certains cas d'anisotropie de la matrice et pour certaines formes et orientations de l'inclusion ([62], [3], [98]).

### 3.3 Symétrie de l'estimation du tenseur d'élasticité macroscopique

On cherche dans cette section à montrer la symétrie de l'estimation (2.37) de  $\mathbb{C}^{hom}$  dans deux cas :

- *Toutes les phases sont adhérentes (pas d'inclusions lisses) et représentées par des inclusions semblables les unes aux autres (même tenseur  $\mathbb{P}_o^I$ ).*

Quitte à effectuer a posteriori un passage à la limite sur le tenseur d'élasticité des inclusions rigides, on travaille dans un premier temps avec une valeur finie de celui-ci. Le tenseur d'élasticité en un point courant sera simplement noté  $\mathbf{c}$  et on définit

l'écart à l'élasticité de référence :

$$\delta \mathbf{c} = \mathbf{c} - \mathbf{c}^o \quad (3.66)$$

Par des manipulations algébriques et compte tenu de l'uniformité du tenseur  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$ , (2.37) s'écrit successivement :

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \langle \mathbf{c} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle : \langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle^{-1} \quad (3.67)$$

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \mathbf{c}^o + \langle \delta \mathbf{c} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle : \langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}} : \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle^{-1} \quad (3.68)$$

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \mathbf{c}^o + \langle \delta \mathbf{c} : (\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}-1} + \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle : \langle (\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}-1} + \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle^{-1} \quad (3.69)$$

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \mathbf{c}^o - \mathbb{P}_o^{\mathcal{I}-1} + \langle (\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}-1} + \delta \mathbf{c})^{-1} \rangle^{-1} \quad (3.70)$$

Le membre de droite de cette dernière expression est clairement symétrique en raison de la symétrie des tenseurs  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}^o$  et  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$ .

- *Le V.E.R. est un milieu uniquement composé d'une phase solide homogène et de pores de formes ellipsoïdales et d'orientations quelconques et le schéma d'homogénéisation est celui de Mori-Tanaka i.e.  $\mathbf{c}^o = \mathbf{c}^s$ .*

On commence par regrouper les pores en  $N$  familles, chacune étant définie par une forme et une orientation données. On note  $\varphi^j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) la fraction volumique de la famille indexée par  $j$ . On a donc  $\varphi^s = 1 - \sum_{j=1}^N \varphi^j$ . On note également  $\mathbb{P}_s^j$  le tenseur  $\mathbb{P}_o^{\mathcal{I}}$  relatif à la famille  $j$  et au milieu de référence d'élasticité  $\mathbf{c}^s$ .

L'estimation (2.37) de  $\mathbb{C}^{hom}$  s'écrit ici :

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \varphi^s \mathbf{c}^s : \left( \varphi^s \mathbb{I} + \sum_{j=1}^N \varphi^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}_s^j : \mathbf{c}^s)^{-1} \right)^{-1} \quad (3.71)$$

ou encore

$$\mathbb{C}^{hom} \approx \varphi^s \left( \varphi^s \mathbf{c}^{s-1} + \sum_{j=1}^N \varphi^j (\mathbf{c}^s - \mathbf{c}^s : \mathbb{P}_s^j : \mathbf{c}^s)^{-1} \right)^{-1} \quad (3.72)$$

L'expression (3.72) montre que la symétrie de l'estimation de  $\mathbb{C}^{hom}$  découle de celles de  $\mathbf{c}^s$  et  $\mathbb{P}_s^j$ .

### 3.4 Estimations de Mori-Tanaka pour des matériaux biphasés isotropes

### 3.4.1 Milieu poreux dont la phase solide est homogène

Cas général

$$k^{hom} = \frac{4(1-\varphi)k^s\mu^s}{3\varphi k^s + 4\mu^s} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} = \frac{16(1-\varphi)\mu^{s2}}{(3\varphi k^s + 4\mu^s)^2} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{12(1-\varphi)\varphi k^{s2}}{(3\varphi k^s + 4\mu^s)^2} \quad (3.75)$$

$$\mu^{hom} = \frac{(1-\varphi)(9k^s + 8\mu^s)\mu^s}{(9+6\varphi)k^s + (8+12\varphi)\mu^s} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} = \frac{60(1-\varphi)\varphi\mu^{s2}}{((9+6\varphi)k^s + (8+12\varphi)\mu^s)^2} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{(1-\varphi)((81+54\varphi)k^{s2} + (144+96\varphi)k^s\mu^s + (64+96\varphi)\mu^{s2})}{((9+6\varphi)k^s + (8+12\varphi)\mu^s)^2} \quad (3.78)$$

Cas incompressible - D.L. en  $\rho^s = \mu^s/k^s$  au voisinage de 0

$$k^{hom} = \frac{4}{3} \frac{1-\varphi}{\varphi} \mu^s (1 + \mathcal{O}(\rho^s)) \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} = \frac{16}{9} \frac{1-\varphi}{\varphi^2} \rho^{s2} + \mathcal{O}(\rho^{s3}) \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{4}{3} \frac{1-\varphi}{\varphi} + \mathcal{O}(\rho^s) \quad (3.81)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1-\varphi}{1+\frac{2}{3}\varphi} \mu^s (1 + \mathcal{O}(\rho^s)) \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} = \frac{20}{27} \frac{(1-\varphi)\varphi}{(1+\frac{2}{3}\varphi)^2} \rho^{s2} + \mathcal{O}(\rho^{s3}) \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{1-\varphi}{1+\frac{2}{3}\varphi} + \mathcal{O}(\rho^s) \quad (3.84)$$

### 3.4.2 Milieu renforcé par des inclusions rigides parfaitement adhérentes

Cas général

$$k^{hom} = \frac{1}{3} \frac{3k^s + 4\varphi^r \mu^s}{1 - \varphi^r} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} = \frac{1}{1 - \varphi^r} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{4}{3} \frac{\varphi^r}{1 - \varphi^r} \quad (3.87)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1}{6} \frac{((6 + 9\varphi^r) k^s + (12 + 8\varphi^r) \mu^s) \mu^s}{(1 - \varphi^r) (k^s + 2\mu^s)} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} = \frac{5}{3} \frac{\varphi^r \mu^{s2}}{(1 - \varphi^r) (k^s + 2\mu^s)^2} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{1}{6} \frac{(6 + 9\varphi^r) k^{s2} + (24 + 16\varphi^r) k^s \mu^s + (24 + 16\varphi^r) \mu^{s2}}{(1 - \varphi^r) (k^s + 2\mu^s)^2} \quad (3.90)$$

Cas incompressible - D.L. en  $\rho^s = \mu^s/k^s$  au voisinage de 0

$$k^{hom} = \frac{k^s}{1 - \varphi^r} (1 + \mathcal{O}(\rho^s)) \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} = \frac{1}{1 - \varphi^r} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{4}{3} \frac{\varphi^r}{1 - \varphi^r} \quad (3.93)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^r}{1 - \varphi^r} \mu^s (1 + \mathcal{O}(\rho^s)) \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} = \frac{5}{3} \frac{\varphi^r}{1 - \varphi^r} \rho^{s2} + \mathcal{O}(\rho^{s3}) \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^r}{1 - \varphi^r} + \mathcal{O}(\rho^s) \quad (3.96)$$

### 3.4.3 Milieu renforcé par des inclusions rigides lisses

Cas général

$$k^{hom} = \frac{1}{3} \frac{3k^s + 4\varphi^l \mu^s}{1 - \varphi^l} \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} = \frac{1}{1 - \varphi^l} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{4}{3} \frac{\varphi^l}{1 - \varphi^l} \quad (3.99)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1}{3} \frac{((15 + 9\varphi^l) k^s + (24 + 8\varphi^l) \mu^s) \mu^s}{(5 - 2\varphi^l) k^s + (8 - 4\varphi^l) \mu^s} \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} = \frac{20}{3} \frac{(1 - \varphi^l) \varphi^l \mu^{s2}}{((5 - 2\varphi^l) k^s + (8 - 4\varphi^l) \mu^s)^2} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} &= \frac{(5 - 2\varphi^l) (5 + 3\varphi^l) k^{s2}}{((5 - 2\varphi^l) k^s + (8 - 4\varphi^l) \mu^s)^2} + \frac{16}{3} \frac{(5 - 2\varphi^l) (3 + \varphi^l) k^s \mu^s}{((5 - 2\varphi^l) k^s + (8 - 4\varphi^l) \mu^s)^2} \\ &+ \frac{32}{3} \frac{(2 - \varphi^l) (3 + \varphi^l) \mu^{s2}}{((5 - 2\varphi^l) k^s + (8 - 4\varphi^l) \mu^s)^2} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Cas incompressible - D.L. en  $\rho^s = \mu^s/k^s$  au voisinage de 0

$$k^{hom} = \frac{k^s}{1 - \varphi^l} (1 + \mathcal{O}(\rho^s)) \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial k^s} = \frac{1}{1 - \varphi^l} \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{4}{3} \frac{\varphi^l}{1 - \varphi^l} \quad (3.105)$$

$$\mu^{hom} = \frac{1 + \frac{3}{5}\varphi^l}{1 - \frac{2}{5}\varphi^l} \mu^s (1 + \mathcal{O}(\rho^s)) \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} = \frac{4}{15} \frac{(1 - \varphi^l) \varphi^l}{(1 - \frac{2}{5}\varphi^l)^2} \rho^{s2} + \mathcal{O}(\rho^{s3}) \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{1 + \frac{3}{5}\varphi^l}{1 - \frac{2}{5}\varphi^l} + \mathcal{O}(\rho^s) \quad (3.108)$$



Deuxième partie

## **CRITÈRE DE RÉSISTANCE**



# Chapitre 4

## Définition et détermination du critère de résistance macroscopique

### Sommaire

---

<b>4.1 Le critère de résistance macroscopique dans le cas sec . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1.1 Caractéristiques des matériaux . . . . .	81
4.1.2 Définition du critère macroscopique ([93], [27]) . . . . .	83
<b>4.2 Le critère de résistance macroscopique en présence d'un fluide</b>	<b>87</b>
4.2.1 Formulation générale du critère . . . . .	88
4.2.2 Existence d'une contrainte effective . . . . .	88
<b>4.3 Méthodes de détermination du critère macroscopique . . . . .</b>	<b>90</b>
4.3.1 Comportement visqueux de la matrice . . . . .	90
4.3.2 Loi contrainte-déformation non linéaire de la matrice . . . . .	94
<b>4.4 Techniques de résolution par homogénéisation non linéaire .</b>	<b>99</b>
4.4.1 Principe de l'homogénéisation non linéaire . . . . .	99
4.4.2 Choix de la déformation effective . . . . .	102

---



Après avoir rappelé les éléments fondamentaux de l'homogénéisation linéaire, on se propose dans cette partie d'étudier un problème d'homogénéisation de nature non linéaire, à savoir les propriétés de résistance des géomatériaux. On obtient classiquement un encadrement du critère de résistance macroscopique en mettant en œuvre les théorèmes de la théorie du calcul à la rupture [91] mais on proposera d'autres méthodes fondées sur l'attribution d'un comportement non linéaire fictif à la phase solide du V.E.R..

## 4.1 Le critère de résistance macroscopique dans le cas sec

### 4.1.1 Caractéristiques des matériaux

Nous considérons un V.E.R.  $\Omega$  de géomatériau tel qu'il a été modélisé à la section 1.3.1. On s'intéressera par la suite à un V.E.R. simplifié ne comportant qu'une seule famille d'inclusions (vides ou rigides) et d'une phase solide. Il s'agira par exemple d'examiner l'influence de chaque type d'inclusion sur le critère macroscopique.

On suppose dans un premier temps que les pores sont vides. La matrice se caractérise par son critère de résistance qui peut être défini de deux manières : la définition directe et celle dite duale. L'approche directe repose sur la définition de l'ensemble convexe  $G^s$  des états de contrainte microscopique compatibles avec la résistance du solide. D'un point de vue mathématique, on peut décrire cet ensemble au moyen d'un critère convexe  $f^s(\boldsymbol{\sigma})$  tel que :

$$G^s = \{\boldsymbol{\sigma} \mid f^s(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0\} \quad (4.1)$$

On note alors que la frontière  $\partial G^s$  a pour équation  $f^s(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . On suppose en outre que l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  est compatible avec le critère i.e.  $f^s(\mathbf{0}) \leq 0$ .

On introduit ensuite classiquement la fonction d'appui  $\pi^s$  du convexe  $G^s$ . Cette fonction opère sur l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 symétriques (physiquement l'ensemble des taux de déformation) de la façon suivante :

$$\pi^s(\mathbf{d}) = \sup \{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}, \boldsymbol{\sigma} \in G^s\} \in [0, +\infty] \quad (4.2)$$

Il est aisé de vérifier que  $\pi^s$  est une fonction convexe. De plus, on montre que  $\pi^s$  est positivement homogène de degré 1 :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad \pi^s(\theta \mathbf{d}) = \theta \pi^s(\mathbf{d}) \quad (4.3)$$

La fonction d'appui permet de définir le domaine de résistance de la matrice de manière duale :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G^s \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{d} \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq \pi^s(\mathbf{d}) \quad (4.4)$$

Pour une valeur donnée de  $\mathbf{d}$  telle que  $\pi^s(\mathbf{d}) < +\infty$  (c'est-à-dire dans une direction bornée de  $G^s$ ), la condition  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \pi^s(\mathbf{d})$  apparaît comme l'équation d'un hyperplan  $\mathcal{H}(\mathbf{d})$  dans l'espace des contraintes. Ce dernier est tangent à la frontière  $\partial G^s$  en un point  $\boldsymbol{\sigma}$  où la normale à  $\partial G^s$  est parallèle à  $\mathbf{d}$  (cf. FIG. 4.1). Si  $\pi^s$  est suffisamment régulière (une

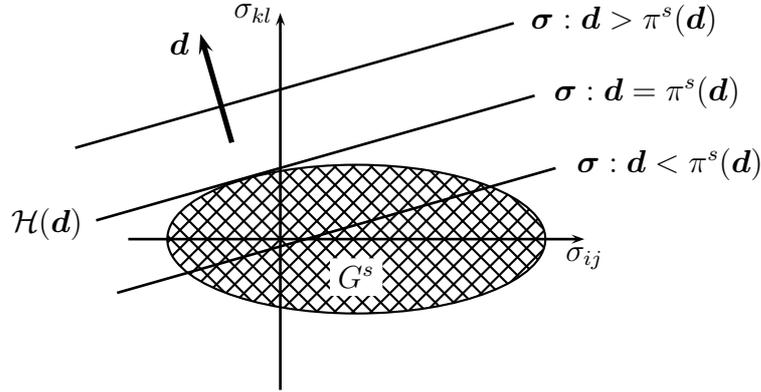


FIG. 4.1 – Interprétation géométrique de la fonction d'appui

condition suffisante est fournie en annexe 7.1.1), la dérivation de (4.3) par rapport à  $\theta > 0$  fournit l'identité d'Euler :

$$\frac{\partial \pi^s}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) : \mathbf{d} = \pi^s(\mathbf{d}) \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) implique que l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma} = \partial \pi^s / \partial \mathbf{d}(\mathbf{d})$  appartient à  $\mathcal{H}(\mathbf{d})$ . De plus, la convexité de  $\pi^s$  permet d'écrire :

$$\pi^s(\mathbf{d}') - \pi^s(\mathbf{d}) \geq \frac{\partial \pi^s}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) : (\mathbf{d}' - \mathbf{d}) \quad (4.6)$$

En exploitant (4.5) dans (4.6), on obtient :

$$\forall \mathbf{d}' \quad \pi^s(\mathbf{d}') \geq \frac{\partial \pi^s}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) : \mathbf{d}' \quad (4.7)$$

Selon la définition duale (4.4) du domaine de résistance, (4.7) indique que l'état de contrainte  $\partial \pi^s / \partial \mathbf{d}(\mathbf{d})$  appartient à  $G^s$ . Par conséquent  $\partial \pi^s / \partial \mathbf{d}(\mathbf{d})$  est situé à l'intersection entre  $\mathcal{H}(\mathbf{d})$  et  $\partial G^s$ .

Précisons maintenant les critères de résistance des inclusions vides et rigides apparaissant comme des cas extrêmes. On notera  $G^p$  et  $\pi^p$  (resp.  $G^r$  et  $\pi^r$ ) le domaine de résistance et la fonction d'appui de l'inclusion vide (resp. rigide). Tout d'abord, les pores offrent une résistance nulle, ce qui signifie que le seul état de contrainte compatible est le tenseur nul :

$$G^p = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \forall \mathbf{d} \quad \pi^p(\mathbf{d}) = 0 \quad (4.8)$$

À l'opposé, les inclusions rigides sont dotées d'une résistance infinie, c'est-à-dire que tout état de contrainte appartient au domaine de résistance  $G^r$ . On définit donc un critère valable en tout point de l'intérieur d'une inclusion rigide adhérente ou lisse :

$$G^r = \mathbb{R}^6 \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^r(\mathbf{d}) = +\infty & \forall \mathbf{d} \neq \mathbf{0} \\ \pi^r(\mathbf{0}) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Il est utile de rappeler que, même si la définition (4.2) est purement mathématique,  $\mathbf{d}$  représente physiquement un taux de déformation dérivant d'un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + {}^t \mathbf{grad} \mathbf{u}) \quad (4.10)$$

En calcul à la rupture, on s'intéresse souvent à des mécanismes présentant des discontinuités de vitesse. Dans le cas général, il suffit d'invoquer la formule (1.23) transcrite en vitesse

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}\} + \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n} \delta_S \quad (4.11)$$

pour constater qu'en un point de discontinuité, on évalue simplement la fonction d'appui locale en  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n}$  [91]. Toutefois, le cas de l'interface lisse est particulier car il faut définir un critère propre à celle-ci. Si  $\mathbf{n}$  désigne la normale à la surface de discontinuité (ici la normale à  $\partial\Omega^I$ ), on note  $G^I$  le domaine de résistance de l'interface dans l'espace des vecteurs-contrainte  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . La grandeur duale de  $\mathbf{T}$  étant la discontinuité de vitesse dans l'écriture de la puissance de déformation, cette discontinuité sera l'argument naturel de la fonction d'appui  $\pi^I$  du critère surfacique. Pour l'interface lisse, on aura :

$$G^I = \{\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{T} // \mathbf{n}\} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^I(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{n}) = 0 & \text{si } \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \pi^I(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{n}) = +\infty & \text{si } \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \neq 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

#### 4.1.2 Définition du critère macroscopique ([93], [27])

Afin de définir le critère macroscopique, il convient d'écrire le problème à résoudre sur le v.e.r. considéré comme une structure et notamment le mode de chargement. Par le lien qu'il entretient avec l'analyse limite, le calcul à la rupture s'écrit classiquement à l'aide de grandeurs cinématiques en vitesse [91]. On pourra donc utiliser les résultats du chapitre 1 transposés en vitesse. Parmi plusieurs modes de chargement possibles exposés dans [27], on choisit un chargement défini par des conditions aux limites de type taux de déformation homogène au contour du v.e.r.  $\Omega$  c'est-à-dire que l'ensemble des champs de vitesse microscopiques cinématiquement admissibles s'écrit :

$$\mathcal{CA}(\mathbf{D}) = \{\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}\} \quad (4.13)$$

En ce qui concerne la régularité des champs de vitesse cinématiquement admissibles, on rappelle que l'on admet des champs  $\mathcal{C}^1$  par morceaux ce qui signifie en particulier que sont autorisées les discontinuités de vitesse.

Conformément à la théorie du calcul à la rupture [91], le chargement macroscopique est déterminé en calculant la grandeur duale au taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  permettant d'exprimer la puissance des efforts extérieurs par unité de volume. Pour cela transcrivons d'abord la règle de moyenne (1.27) en vitesse en utilisant un champ de vitesse  $\mathbf{u} \in \mathcal{CA}(\mathbf{D})$  et un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  en équilibre et de moyenne  $\boldsymbol{\Sigma}$  :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle \quad (4.14)$$

Cette règle de moyenne n'est autre que le lemme de Hill (cf. § 1.2.3) transposé en vitesse dans le cas de conditions aux limites de type (4.13). Le membre de droite de (4.14) est la puissance de déformation par unité de volume qui est donc égale, d'après le PPV [92], à la puissance des efforts extérieurs par unité de volume. On trouve naturellement dans le membre de gauche que  $\boldsymbol{\Sigma}$  est le chargement macroscopique recherché. On définit alors l'ensemble des champs de contrainte microscopique  $\boldsymbol{\sigma}$  statiquement admissibles avec un état de contrainte macroscopique donné  $\boldsymbol{\Sigma}$  par :

$$\mathcal{SA}(\boldsymbol{\Sigma}) = \{ \boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ et } \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} \} \quad (4.15)$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'ensemble  $G^{hom}$  des états de contrainte macroscopiques compatibles avec les données en résistance du problème. Un tel état de contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}$  est compatible si et seulement s'il est possible de l'équilibrer par un champ  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{SA}(\boldsymbol{\Sigma})$  qui respecte en tout point le critère de résistance local :

$$G^{hom} = \left\{ \boldsymbol{\Sigma} \mid \exists \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{SA}(\boldsymbol{\Sigma}) \left| \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \ (\alpha = s, p, r, l) \quad \boldsymbol{\sigma} \in G^\alpha \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega^l \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \in G^l \end{array} \right. \right\} \quad (4.16)$$

Examinons maintenant la définition duale de  $G^{hom}$ . Prenons  $\boldsymbol{\Sigma} \in G^{hom}$  et un champ  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfaisant les propriétés explicitées dans (4.16). Considérons également l'ensemble des champs de vitesse  $\mathbf{u} \in \mathcal{CA}(\mathbf{D})$ . Comme le champ  $\boldsymbol{\sigma}$  respecte en tout point le critère de résistance local, il découle de (4.14) et de la définition de la fonction d'appui locale notée  $\pi$  (dans  $\Omega_{(\alpha=s,p,r,l)}^\alpha$  on a  $\pi = \pi^\alpha$  et sur  $\partial\Omega^l$  on a  $\pi = \pi^l$ ) que :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \leq \Pi^{hom}(\mathbf{D}) \text{ avec } \Pi^{hom}(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}(\mathbf{D})} \langle \pi(\mathbf{d}) \rangle \quad (4.17)$$

en notant que la moyenne de  $\pi$  peut comporter des termes d'intégrale de surface en présence d'une discontinuité de vitesse :

$$\langle \pi(\mathbf{d}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_{\Omega} \pi(\{\mathbf{d}\}) \, d\Omega + \int_S \pi([\mathbf{u}], \mathbf{n}) \, dS \right) \quad (4.18)$$

Le cas d'une surface de discontinuité traversant un domaine donné  $\Omega^\alpha$  (même matériau de part et d'autre de la surface) se traite aisément en calculant  $\pi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{n}) = \pi^\alpha(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \overset{s}{\otimes} \mathbf{n})$  [91]. Si la surface de discontinuité sépare deux domaines délimitant des matériaux distincts, on évalue la fonction  $\pi$  de chacun d'entre eux en  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \overset{s}{\otimes} \mathbf{n}$  ainsi que la fonction  $\pi$  relative à l'éventuel critère d'interface (ici  $\pi^l$  si la surface de discontinuité est localement tangente à  $\partial\Omega^l$ ) puis on prendra pour valeur de  $\pi$  dans l'intégrale surfacique de (4.18) la plus petite de ces deux ou trois valeurs [90], ce qui revient en quelque sorte à considérer que la discontinuité se situe localement soit sur l'interface soit dans l'intérieur de l'un des domaines à une distance infinitésimale de l'interface. Par exemple, si la surface de discontinuité est localement tangente à la frontière de  $\Omega^l$  et si la discontinuité est purement tangentielle (i.e.  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0$ ), alors, d'après (4.12), on a  $\pi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{n}) = \pi^l(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{n}) = 0$ . En revanche, on considérera qu'une discontinuité ayant une composante normale non nulle se situe à l'intérieur du domaine  $\Omega^s$  et non précisément sur l'interface où  $\pi^l$  est infini.

Selon un résultat classique [46], la fonction  $\Pi^{hom}$  introduite en (4.17) et obtenue en résolvant un problème d'optimisation sur l'espace  $\mathcal{CA}(\mathbf{D})$  correspond exactement à la fonction d'appui du convexe  $G^{hom}$  défini en (4.16). Il est évident, d'après (4.17), que les candidats pertinents  $\mathbf{u} \in \mathcal{CA}(\mathbf{D})$  utilisés pour résoudre ce problème d'optimisation doivent correspondre à une valeur de  $\pi$  finie. Si de tels champs n'existent pas, cela signifie que  $\mathbf{D}$  rend  $\Pi^{hom}$  infini. Ainsi, pour que  $\pi$  soit fini, il est nécessaire d'après (4.9) que le champ de vitesse satisfasse  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  dans les inclusions rigides, ce qui donne une valeur nulle de  $\pi$  dans  $\Omega^r$  et  $\Omega^l$ . La fonction  $\pi$  prend également une valeur nulle dans les pores (4.8) mais  $\mathbf{d}$  y est quelconque. D'après (4.12), on doit aussi imposer  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega^l$ , ce qui annule encore  $\pi$ . Notons que l'on peut quand même imaginer des mécanismes présentant une discontinuité normale au niveau de cette interface ou même une discontinuité quelconque au niveau de l'interface entre la matrice et un renfort adhérent mais alors, conformément au raisonnement proposé quelques lignes plus haut, on considérera que la surface de discontinuité est située dans l'intérieur de  $\Omega^s$  (dans lequel  $\pi = \pi^s$ ). Une telle discontinuité contribue alors à  $\Pi^{hom}$  comme toute discontinuité traversant  $\Omega^s$ . On introduit le sous-ensemble suivant de  $\mathcal{CA}(\mathbf{D})$  :

$$\mathcal{CA}'(\mathbf{D}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{CA}(\mathbf{D}) \left| \begin{array}{ll} \forall \mathbf{x} \in \Omega^r \cup \Omega^l & \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega^l & \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right. \right\} \quad (4.19)$$

Ainsi, en tenant compte implicitement des remarques formulées plus haut sur la prise en compte d'une discontinuité au niveau d'une interface en fonction de la nature de celle-ci, la fonction d'appui du critère macroscopique s'écrit :

$$\Pi^{hom}(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s < \pi^s(\mathbf{d}) >_{\Omega^s} \quad (4.20)$$

La relation (4.17) prouve que  $G^{hom}$  est borné par l'hyperplan d'équation  $\Sigma : \mathbf{D} = \Pi^{hom}(\mathbf{D})$ . En particulier, si  $\Sigma$  appartient à la fois à cet hyperplan et à  $G^{hom}$ , ce tenseur appartient alors à la frontière  $\partial G^{hom}$  en un point où la normale à  $\partial G^{hom}$  est parallèle à  $\mathbf{D}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma : \mathbf{D} = \Pi^{hom}(\mathbf{D}) \\ \Sigma \in G^{hom} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \in \partial G^{hom} \quad (4.21)$$

Le raisonnement classique du calcul à la rupture permet d'obtenir une estimation par l'intérieur de  $G^{hom}$  (en trouvant un ensemble contenu dans  $G^{hom}$ ) et une estimation par l'extérieur (en trouvant un ensemble qui contient  $G^{hom}$ ) (cf. FIG. 4.2). Les deux approches

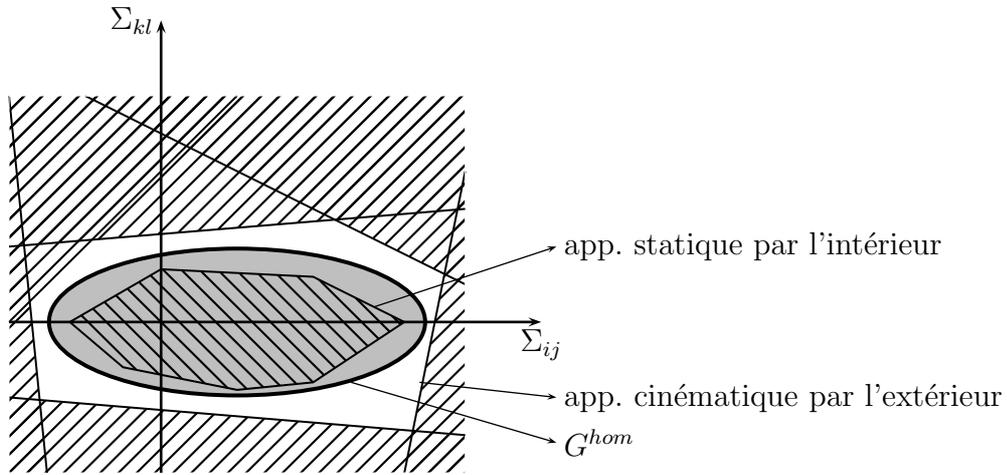


FIG. 4.2 – Approches statique et cinématique du calcul à la rupture

peuvent être ainsi résumées ([90],[91]) :

- *Approche statique par l'intérieur*

Il s'agit de trouver des états de contrainte macroscopiques  $\Sigma \in G^{hom}$  en construisant explicitement, pour chaque  $\Sigma$ , un champ statiquement admissible et compatible avec le critère au sens de (4.16). L'enveloppe convexe de tous ces états  $\Sigma$  est alors incluse dans  $G^{hom}$ . Une idée possible est de conférer à la matrice un comportement fictif élastique parfaitement plastique ayant pour critère de plasticité le critère de résistance et de charger le v.e.r. selon diverses évolutions définies par  $\mathbf{D}(t)$ . Le chemin parcouru par  $\Sigma(t) = \langle \sigma(t) \rangle$  est alors appartenir à  $G^{hom}$ .

- *Approche cinématique par l'extérieur*

S'il était possible de calculer explicitement la fonction  $\Pi^{hom}(\mathbf{D})$  définie par (4.20) pour toutes les orientations possibles de  $\mathbf{D}$ ,  $G^{hom}$  serait alors complètement déterminé. Dans le cas général, il n'est pas envisageable d'effectuer la minimisation (4.20) sur un espace aussi important que  $\mathcal{CA}'(\mathbf{D})$ . Toutefois, on peut obtenir une estimation

par excès de  $\Pi^{hom}(\mathbf{D})$  en restreignant la minimisation sur un sous-espace de  $\mathcal{CA}'(\mathbf{D})$  bien choisi. D'après l'inégalité (4.17), trouver un majorant de  $\Pi^{hom}$  pour chaque  $\mathbf{D}$  envisagé revient à séparer l'espace des contraintes en deux demi-espaces dont l'un contient entièrement  $G^{hom}$ .

La combinaison des approches par l'intérieur et par l'extérieur permet d'encadrer  $G^{hom}$ . Il faut noter que la mise en œuvre de ces approches repose sur la connaissance précise de la microstructure puisque l'une nécessite la construction de champs de contrainte et l'autre de champs de vitesse. Or, on ne connaît que des informations partielles sur la microstructure dans le cas d'une distribution aléatoire. Il s'agira donc d'exploiter ces informations pour obtenir une estimation de  $G^{hom}$ . Il faudra au préalable montrer que  $G^{hom}$  peut être obtenu par la résolution d'un problème classique de mécanique non linéaire susceptible d'être abordé par le biais de techniques d'homogénéisation non linéaire.

## 4.2 Le critère de résistance macroscopique en présence d'un fluide

On suppose maintenant que les pores sont saturés par un fluide à la pression  $p$ . Le chargement mécanique du v.e.r., c'est-à-dire l'argument naturel du critère de résistance macroscopique, n'est plus le seul tenseur  $\Sigma$  mais le couple  $(\Sigma, p)$ . De manière équivalente, on peut considérer que le critère de résistance continue à être argumenté par  $\Sigma$  et que  $p$  est un paramètre. On définit encore un domaine de résistance dans l'espace des contraintes macroscopiques mais ce domaine est paramétré par  $p : G^{hom}(p)$ . On rappelle que, pour certains types de critère de la phase solide, le critère macroscopique est régi par une contrainte effective s'écrivant comme une fonction de  $\Sigma$  et  $p$ . Cette situation est très intéressante dans la mesure où la détermination du critère sec ( $p = 0$ ) suffit pour en déduire le cas non drainé ( $p \neq 0$ ), comme ce fut le cas pour le comportement poroélastique avec l'introduction de la contrainte effective de Biot (2.80).

### 4.2.1 Formulation générale du critère

La définition primale du domaine  $G^{hom}$  diffère de celle fournie en (4.16) puisque l'état de contrainte dans les pores vaut maintenant  $-p\mathbf{1}$ . On a donc :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & (\Omega) \quad (a) \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \Sigma & (b) \\ f^s(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 & (\Omega^s) \quad (c) \\ \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} & (\Omega^p) \quad (d) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} & (\partial\Omega^l) \quad (e) \end{array} \right. \quad (4.22)$$

La définition duale, quant à elle, s'écrit :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \forall \mathbf{D} \quad \Sigma : \mathbf{D} \leq \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} (\varphi^s \langle \pi^s(\mathbf{d}) \rangle_{\Omega^s} - p \varphi \langle \text{tr} \mathbf{d} \rangle_{\Omega^p}) \quad (4.23)$$

Si l'on souhaite faire jouer un rôle symétrique à  $\Sigma$  et  $p$ , on écrit :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \forall (\mathbf{D}, \dot{v}) \quad \Sigma : \mathbf{D} + p \dot{v} \leq \inf_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D}) \\ \varphi \langle \text{tr} \mathbf{d} \rangle_{\Omega^p} = \dot{v}}} \varphi^s \langle \pi^s(\mathbf{d}) \rangle_{\Omega^s} \quad (4.24)$$

### 4.2.2 Existence d'une contrainte effective

Ce paragraphe rappelle des résultats montrés dans [28] ou [34] ayant pour but d'exhiber une contrainte effective pour le critère de résistance macroscopique. L'existence d'une contrainte effective est assurée lorsque le critère de la phase solide est purement cohérent ou conique.

#### Critère purement cohérent

On suppose que le critère de la phase solide est indépendant de la contrainte moyenne, autrement dit :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f^s(\boldsymbol{\sigma} + \alpha \mathbf{1}) = f^s(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.25)$$

Les critères de Tresca ou de von Mises respectent cette condition.

En introduisant la notation  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + p \mathbf{1}$  dans (4.22), il est facile de montrer :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \exists \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} & (\Omega) \quad (a) \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \Sigma + p \mathbf{1} & (b) \\ f^s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = f^s(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 & (\Omega^s) \quad (c) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} & (\Omega^p) \quad (d) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} // \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} & (\partial\Omega^l) \quad (e) \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Le système (4.26) traduit exactement l'équivalence :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \Sigma + p \mathbf{1} \in G^{hom}(0) \quad (4.27)$$

soit  $G^{hom}(p) + p \mathbf{1} = G^{hom}(0)$ , ce qui signifie que le critère de résistance macroscopique est régi par la contrainte effective de Terzaghi  $\Sigma + p \mathbf{1}$ .

### Critère conique

On considère maintenant que le domaine de résistance de la phase solide est un cône dans l'espace des contraintes tel que le sommet du cône se situe sur l'axe isotrope (il s'écrit  $h \mathbf{1}$  où  $h \geq 0$  définit la limite en traction isotrope du critère) :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6 \quad \forall \alpha \geq 0 \quad \boldsymbol{\sigma} \in G^s \Rightarrow (\alpha \boldsymbol{\sigma} + (1 - \alpha) h \mathbf{1}) \in G^s \quad (4.28)$$

En choisissant une écriture du critère homogène à une contrainte et telle que les isovalues soient homothétiques à la frontière de  $G^s$ , on écrit :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6 \quad \forall \alpha \geq 0 \quad f^s(\alpha \boldsymbol{\sigma} + (1 - \alpha) h \mathbf{1}) = \alpha f^s(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.29)$$

Les critères de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager respectent cette condition.

En supposant  $p > -h$  et en prenant  $\alpha = 1/(1 + p/h)$  dans (4.29), on obtient aisément :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \left(1 + \frac{p}{h}\right) f^s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} + p \mathbf{1}}{1 + p/h} \quad (p > -h) \quad (4.30)$$

On montre alors l'équivalence suivante à partir de (4.22) :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \exists \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} & (\Omega) \quad (a) \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \frac{\Sigma + p \mathbf{1}}{1 + p/h} & (b) \\ f^s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = f^s(\boldsymbol{\sigma}) / (1 + p/h) \leq 0 & (\Omega^s) \quad (c) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} & (\Omega^p) \quad (d) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} // \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} & (\partial\Omega^l) \quad (e) \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Ceci prouve :

$$\Sigma \in G^{hom}(p) \Leftrightarrow \frac{\Sigma + p\mathbf{1}}{1 + p/h} \in G^{hom}(0) \quad (4.32)$$

Ainsi le critère macroscopique est régi par la contrainte effective :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma + p\mathbf{1}}{1 + p/h} \quad (4.33)$$

Contrairement à la contrainte effective de Terzaghi,  $\tilde{\Sigma}$  (4.33) n'est pas linéaire en  $p$  et présente surtout la particularité de dépendre explicitement d'une caractéristique physique d'un de ses constituants, à savoir la limite en traction isotrope de la phase solide.

### 4.3 Méthodes de détermination du critère macroscopique

Cette section est consacrée à la formulation de problèmes permettant une détermination formelle dans le cas sec du critère de résistance macroscopique ou, de manière équivalente, de sa frontière. En présence d'un fluide, on se ramène au cas sec lorsque l'on a démontré l'existence d'une contrainte effective (cf. § 4.2.2) ou, dans le cas contraire, on adapte facilement les problèmes qui suivent en tenant compte d'une pression dans les pores. Ces problèmes sont construits à partir de comportements fictifs non linéaires de la matrice.

#### 4.3.1 Comportement visqueux de la matrice

##### Formulation du problème ([85], [65], [47])

Donnons-nous un taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  et supposons que  $\Sigma$  désigne un point de la frontière de  $G^{hom}$  où  $\mathbf{D}$  est normale extérieure. Supposons également avoir trouvé un couple  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  tel que  $\boldsymbol{\sigma}$  soit statiquement admissible avec  $\Sigma$  et compatible en tout point du v.e.r. avec le critère et que  $\mathbf{u}$  réalise le minimum de (4.20). D'après le théorème d'association [91], en tout point où  $\mathbf{d}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  appartient à la frontière du critère local où  $\mathbf{d}(\mathbf{u})$  est dirigé suivant la normale extérieure et, en tout point où  $\mathbf{d}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  peut se trouver n'importe où dans le domaine de résistance.

On a vu (§ 4.1.1) que l'état de contrainte défini par  $\partial\pi^s/\partial\mathbf{d}(\mathbf{d})$ , sous réserve que la fonction  $\pi^s$  soit différentiable, est situé sur la frontière de  $G^s$  c'est-à-dire qu'il sature le critère ( $f^s(\partial\pi^s/\partial\mathbf{d}(\mathbf{d})) = 0$ ). Supposons donc que  $\pi^s$  soit suffisamment régulière (rappelons qu'une condition suffisante est fournie en annexe 7.1.1) pour introduire la relation  $\boldsymbol{\sigma} = \partial\pi^s/\partial\mathbf{d}(\mathbf{d})$  comme comportement fictif visqueux de la matrice. Il faut tout de même

préciser que  $\pi^s$  n'est jamais différentiable en  $\mathbf{0}$  si le domaine de résistance n'est pas réduit à  $\{\mathbf{0}\}$  (cf. 7.1.2). On remplace alors la relation  $\boldsymbol{\sigma} = \partial\pi^s/\partial\mathbf{d}(\mathbf{d})$  en  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  par :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\mathbf{d}}\pi^s(\mathbf{0}) \quad (4.34)$$

où  $\partial_{\mathbf{d}}\pi^s(\mathbf{0})$  est le sous-différentiel de  $\pi^s$  en  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ . Par définition  $\partial_{\mathbf{d}}\pi^s(\mathbf{d}_o)$  désigne l'ensemble des états de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\forall \mathbf{d}, \quad \pi^s(\mathbf{d}) - \pi^s(\mathbf{d}_o) \geq \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}_o) \quad (4.35)$$

Rappelant que  $\pi^s(\mathbf{0}) = 0$ , la condition (4.35) appliquée à  $\mathbf{d}_o = \mathbf{0}$  est satisfaite si et seulement si  $\boldsymbol{\sigma} \in G^s$  (cf. (4.4)). En d'autres termes, on peut conclure que  $\partial_{\mathbf{d}}\pi^s(\mathbf{0}) = G^s$ . Par conséquent la condition devant être remplie par  $\boldsymbol{\sigma}$  si  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  devient simplement  $\boldsymbol{\sigma} \in G^s$ . En particulier,  $\boldsymbol{\sigma}$  n'appartient pas nécessairement à  $\partial G^s$  en tout point où  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ . Ceci est parfaitement cohérent avec le théorème d'association évoqué ci-avant.

Il paraît naturel d'exploiter ce comportement fictif visqueux dans un problème posé sur le V.E.R.. On impose naturellement  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  dans les pores et  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  dans les renforts rigides et on adapte les conditions d'interface lisse (2.5). Ainsi les équations de ce problème de viscosité sont :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & (\Omega) & \quad (a) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial\pi^s}{\partial\mathbf{d}}(\mathbf{d}) & (\Omega^s) & \quad (b) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & (\Omega^p) & \quad (c) \\ \mathbf{d} &= \mathbf{0} & (\Omega^r \cup \Omega^l) & \quad (d) \\ \mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + {}^t\operatorname{grad} \mathbf{u}) & (\Omega) & \quad (e) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} & (\partial\Omega) & \quad (f) \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= 0 & (\partial\Omega^l) & \quad (g) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} & & (\partial\Omega^l) & \quad (h) \end{aligned} \quad (4.36)$$

On note immédiatement que le problème (4.36) se présente formellement comme un problème d'élasticité non linéaire dans lequel le taux de déformation jouerait le rôle de la déformation elle-même et la fonction d'appui jouerait le rôle de l'énergie libre volumique locale.

D'une part, il apparaît clairement que les équations (4.36 a), (4.36 b), (4.36 c) et (4.36 h), en générant un champ de contrainte compatible avec le critère en tout point, suffisent pour affirmer que  $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  est situé dans  $G^{hom}$  (4.16). En particulier, l'inégalité (4.17) est satisfaite. D'autre part, nous pouvons exploiter la relation (4.5) ainsi que (4.36 b) pour obtenir :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \pi^s(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (4.37)$$

qui est également vérifié pour  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ . En prenant la moyenne de (4.37) sur la phase matricielle et en utilisant le lemme de Hill (1.37), il vient :

$$\varphi^s < \pi^s(\mathbf{d}) >_{\Omega^s} = \varphi^s < \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} >_{\Omega^s} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \Pi^{hom}(\mathbf{D}) \leq \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \quad (4.38)$$

En combinant (4.17) et (4.38), on déduit que  $\Pi^{hom}(\mathbf{D}) = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}$ . Ainsi les deux prémisses de (4.21) sont vérifiées et il en résulte que  $\boldsymbol{\Sigma}$  est une charge extrême ( $\boldsymbol{\Sigma} \in \partial G^{hom}$ ). Ajoutons que cela confère à  $\Pi^{hom}$  le statut de fonction d'appui de  $G^{hom}$ . De plus, si  $\Pi^{hom}$  est suffisamment régulière, on a, pour  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$  :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi^{hom}}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (4.39)$$

Calculant  $\boldsymbol{\Sigma}$  par (4.39) lorsque  $\mathbf{D}$  varie dans toutes les directions de  $\mathbb{R}^6$ , on décrit ainsi la frontière de  $G^{hom}$ .

Il est également important de souligner le fait qu'un champ de vitesse solution de (4.36) a un statut privilégié puisqu'il réalise le minimum de (4.20), c'est donc un mécanisme solution au sens du calcul à la rupture.

### Critère de la phase solide fonction des deux premiers invariants

Dorénavant on supposera que le critère de résistance de la phase solide est régi par la contrainte moyenne et la contrainte déviatorique équivalente :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{F}(\sigma_m, \sigma_d) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \\ \sigma_d = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d} \end{cases} \quad (4.40)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{1}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

Selon la définition (4.2), la fonction d'appui s'écrit maintenant à l'aide du taux de déformation volumique  $d_v$  et de la partie déviatorique du taux de déformation  $\mathbf{d}_d$  :

$$\pi^s(\mathbf{d}) = \sup \{ \sigma_m d_v + \boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{d}_d, \mathcal{F}(\sigma_m, \sigma_d) \leq 0 \} \quad (4.41)$$

Pour une valeur donnée de  $\sigma_d$ , le choix de  $\boldsymbol{\sigma}_d$  qui maximise  $\boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{d}_d$  est parallèle à  $\mathbf{d}_d$ , c'est-à-dire  $\boldsymbol{\sigma}_d = (\sigma_d/d_d) \mathbf{d}_d$ . Ainsi (4.41) prend la forme suivante :

$$\pi^s(\mathbf{d}) = \sup \{ \sigma_m d_v + \sigma_d d_d, \mathcal{F}(\sigma_m, \sigma_d) \leq 0 \} \quad (4.42)$$

Ceci implique immédiatement que la fonction d'appui ne dépend que des invariants  $d_v$  et  $d_d$  de  $\mathbf{d}$  :

$$\pi^s(\mathbf{d}) = \pi^s(d_v, d_d) \quad (4.43)$$

L'équation d'état (4.36 b) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \pi^s}{\partial d_v}(d_v, d_d) \mathbf{1} + \frac{1}{d_d} \frac{\partial \pi^s}{\partial d_d}(d_v, d_d) \mathbf{d}_d = \mathbf{c}^s(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \quad (4.44)$$

Ainsi le comportement fictif visqueux de la matrice peut s'écrire au moyen d'un tenseur sécant isotrope  $\mathbf{c}^s(\mathbf{d})$  (formellement comparable à un tenseur de raideur mais de dimension différente) c'est-à-dire au moyen de "modules" de compression et de cisaillement sécants  $k^s(d_v, d_d)$  et  $\mu^s(d_v, d_d)$  :

$$\mathbf{c}^s(\mathbf{d}) = 3 k^s(d_v, d_d) \mathbb{J} + 2 \mu^s(d_v, d_d) \mathbb{K} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k^s(d_v, d_d) = \frac{1}{d_v} \frac{\partial \pi^s}{\partial d_v}(d_v, d_d) \\ 2 \mu^s(d_v, d_d) = \frac{1}{d_d} \frac{\partial \pi^s}{\partial d_d}(d_v, d_d) \end{cases} \quad (4.45)$$

Il est rappelé dans [97] que la décomposition au moyen d'un tenseur sécant n'est pas unique. Toutefois, l'expression (4.45) fournit le seul tenseur  $\mathbf{c}^s$  isotrope satisfaisant (4.44). Comme  $\pi^s$  est positivement homogène de degré 1 (4.3),  $\boldsymbol{\sigma}$  défini par (4.36 b) ne dépend que de l'orientation de  $\mathbf{d}$  et pas de sa norme et les modules  $k^s$  et  $\mu^s$  sont positivement homogènes de degré  $-1$  :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad k^s(\theta d_v, \theta d_d) = \frac{1}{\theta} k^s(d_v, d_d) \quad ; \quad \mu^s(\theta d_v, \theta d_d) = \frac{1}{\theta} \mu^s(d_v, d_d) \quad (4.46)$$

Il est important de noter que la décomposition sécante du comportement fictif visqueux figurant dans (4.44) n'est pas la seule décomposition possible. En effet,  $\boldsymbol{\sigma}$  peut également être exprimé selon une formulation "affine" (non linéaire) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^s(\mathbf{d}) : \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}_s^p(\mathbf{d}) \quad (4.47)$$

pourvu que  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfasse toujours l'équation d'état (4.36 b). On notera en particulier que  $\boldsymbol{\sigma}_s^p(\mathbf{d})$  ne doit dépendre que de l'orientation de  $\mathbf{d}$ .

Il existe une formulation affine particulière faisant intervenir le tenseur des modules tangents ([76], [75], [77], [72]). Celle-ci est définie par :

$$\mathbf{c}^s(\mathbf{d}) = \frac{\partial^2 \pi^s}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_s^p(\mathbf{d}) = \frac{\partial \pi^s}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) - \frac{\partial^2 \pi^s}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \quad (4.48)$$

Signalons que, partant d'une fonction  $\pi^s$  de type (4.43), les tenseurs  $\mathbf{c}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  ne satisfont généralement pas la propriété d'isotropie. Si l'on souhaite respecter l'isotropie dans la formulation "affine" générale (4.47), on est amené à ne considérer que des tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  sphériques :

$$\boldsymbol{\sigma}_s^p = \sigma_s^p \mathbf{1} \quad (4.49)$$

Le choix d'une formulation et notamment le recours à un terme de précontrainte sera essentiellement motivé par le caractère défini positif que doit prendre le tenseur  $\mathbf{c}^s(\mathbf{d})$ .

### Régularisation de la fonction d'appui par une suite de critères

Les développements précédents ont été effectués dans l'hypothèse d'une certaine régularité de  $\pi^s$ . Or il s'avère que, dans le cas des critères usuels (von Mises, Tresca, Drucker-Prager ou Coulomb), la fonction d'appui n'est pas différentiable. Pour pouvoir se ramener au problème fictif visqueux (4.36), on décide de régulariser  $\pi^s$  en construisant une suite de critères  $(f_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  correspondant à une suite croissante de domaines bornés strictement convexes  $(G_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers le domaine  $G^s$  au sens suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad G_n^s \subset G_{n+1}^s \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n^s} = G^s \quad (4.50)$$

où  $\overline{\mathcal{D}}$  désigne l'adhérence du domaine  $\mathcal{D}$  dans la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^6$ . Pour tout  $n$ , le caractère borné strictement convexe de  $G_n^s$  assure à sa fonction d'appui  $\pi_n^s$  la différentiabilité requise (cf. 7.1.1).

Supposons maintenant pouvoir trouver, pour chaque problème paramétré par  $n$ , le domaine macroscopique correspondant  $G_n^{hom}$ . Ce domaine est théoriquement obtenu en suivant la démarche exposée précédemment. En appliquant pour tout  $n$  la définition (4.16) d'un critère homogénéisé à partir des critères locaux, il apparaît que  $(G_n^{hom})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de parties de  $G^{hom}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad G_n^{hom} \subset G_{n+1}^{hom} \subset G^{hom} \quad (4.51)$$

On admettra par la suite que le choix de la suite de critères  $(G_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  est suffisamment judicieux pour que la suite  $(G_n^{hom})_{n \in \mathbb{N}}$  tende bien vers le critère macroscopique au sens suivant :

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n^{hom}} = G^{hom} \quad (4.52)$$

### Régularisation de la fonction d'appui par une suite de potentiels

Afin de régulariser la fonction d'appui  $\pi^s$ , on peut adopter un point de vue légèrement différent que celui du paragraphe précédent. En effet, au lieu de s'intéresser à une suite de critères tendant vers celui de la matrice, on construit une suite de fonctions convexes de classe  $\mathcal{C}^1$   $(\psi_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $\pi^s$  au sens de la limite simple :

$$\forall \mathbf{d} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^s(\mathbf{d}) = \pi^s(\mathbf{d}) \quad (4.53)$$

À la différence des fonctions d'appui  $\pi_n^s$  du paragraphe précédent, les fonctions  $\psi_n^s$  ne sont pas nécessairement positivement homogènes de degré 1 et ne sont donc pas des fonctions d'appui.

Ce point de vue, adopté dans [7] et [9], sera illustré à la section 6.1.2.

#### 4.3.2 Loi contrainte-déformation non linéaire de la matrice

### Du calcul à la rupture à l'analyse limite

On se propose, dans cette section, de déterminer les éléments de la frontière de  $G^{hom}$  non comme des solutions de problèmes posés en vitesse mais comme des états asymptotiques de problèmes d'évolution. Dans cet esprit, on confère à la matrice un comportement élasto-plastique fictif : l'élasticité est linéaire quelconque tandis que la plasticité est supposée parfaite, de critère de plasticité le critère de résistance  $f^s$ , et associée. Rappelons que, dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), le tenseur de déformation se décompose additivement en une déformation élastique (liée linéairement au tenseur des contraintes par le tenseur d'élasticité  $\mathfrak{c}^s$ ) et une déformation plastique dont le taux est obtenu par la règle d'écoulement satisfaisant la règle de normalité dans le cas de la plasticité associée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} = \mathfrak{c}^{s-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

Rappelons que, pour les états de contrainte pour lesquels  $f^s$  n'est pas dérivable, il faut remplacer le terme  $\partial f^s / \partial \boldsymbol{\sigma}$  par l'une des directions du cône convexe des normales extérieures à  $G^s$  [91].

Les inclusions peuvent également être considérées comme des domaines occupés par des matériaux fictifs élasto-plastiques extrêmes (vides ou renforts rigides) de plasticité parfaite et associée. Le v.e.r. est soumis à des conditions en déplacement de type "déformation homogène au contour" selon un trajet radial :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}(t) = t\mathbf{D} \quad (4.55)$$

où  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$  désigne une direction fixe donnée.

Une première constatation est que, quel que soit le trajet de chargement, le tenseur de contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  ne cesse d'appartenir à  $G^{hom}$  puisque le champ de contrainte microscopique est en équilibre et respecte le critère en tout point. Mais ce qui est davantage intéressant à signaler est que, en vertu du théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème d'évolution élasto-plastique quasi-statique [19], tout point intérieur à  $G^{hom}$  peut effectivement être atteint pour un certain trajet de chargement. On ne peut rien conclure en ce qui concerne la frontière mais celle-ci peut toujours s'obtenir asymptotiquement (lorsque  $t$  tend vers l'infini) et  $\mathbf{D}$  correspond alors à la direction normale extérieure au point de la frontière vers lequel  $\boldsymbol{\Sigma}$  tend. On cherche donc la limite du tenseur des contraintes macroscopique obtenu à partir de la solution du problème d'élasto-plasticité lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\Sigma}(t) \in \partial G^{hom} \quad (4.56)$$

### De l'élasto-plasticité à une loi contrainte-déformation non linéaire

La prise en compte d'un comportement élasto-plastique local, dont la définition est de nature incrémentale, s'avère impossible dans la mise en œuvre de techniques analytiques d'homogénéisation non linéaire. Celles-ci sont en effet mieux adaptées aux lois de comportement mettant en jeu une relation explicite entre les contraintes et les déformations. C'est pourquoi on choisit de remplacer ce comportement élasto-plastique, menant théoriquement au critère macroscopique, par un comportement non linéaire compatible avec le critère microscopique et défini par une relation de type :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{avec} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \quad f^s(\mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon})) \leq 0 \quad (4.57)$$

L'idée est ici de simuler le comportement élasto-plastique local par une relation du type (4.57) et de suivre l'état de contrainte macroscopique au cours du chargement. La relation  $\mathcal{R}$  (4.57) est construite de manière à ce que  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfasse toujours en tout point le critère. Cette méthode fournit donc une approche par l'intérieur (cf. § 4.1.2). Il est ensuite raisonnable de s'attendre à ce que l'état de contrainte macroscopique fournisse une bonne estimation de la charge limite macroscopique si les champs de déformation et de contrainte se comportent comme les solutions du problème élasto-plastique au moins dans le régime asymptotique menant à cette charge limite (c'est-à-dire lorsque  $t$  tend vers l'infini).

Rappelant que le trajet de chargement est défini par un chemin radial dans l'espace des déformations macroscopiques (4.55), il est évident que le v.e.r. va subir des déformations locales grandes (diffuses ou localisées) lorsque  $t$  tendra vers l'infini. Les zones concernées correspondent au cas où  $\boldsymbol{d}$  est différent de  $\mathbf{0}$  dans le théorème d'association [91] et donc, pour se rapprocher au mieux d'une solution de calcul à la rupture,  $\boldsymbol{\sigma}$  doit saturer le critère lorsque  $\boldsymbol{\varepsilon}$  devient grand :

$$f^s \left( \lim_{\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \rightarrow \infty} \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right) = 0 \quad (4.58)$$

Il convient de préciser que cette étude se place dans le cadre HPP et le fait de faire tendre  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$  vers l'infini n'est qu'un artifice mathématique, pour l'instant purement formel, conçu pour approcher le critère. Ce que l'on désigne ici par "grandes déformations" n'a donc rien à voir avec sa définition habituelle. D'ailleurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est un tenseur de déformation linéarisé et il n'est donc utilisable que lorsque les déformations sont infinitésimales.

La saturation du critère est une condition nécessaire pour simuler le comportement élasto-plastique parfait mais ce n'est pas suffisant. Il s'agit en outre de rendre le nouveau modèle cohérent avec la règle d'écoulement (4.54). Il faut donc s'assurer que le tenseur de déformation, lorsqu'il tend vers l'infini, soit tel que le taux de déformation plastique soit aligné et de même direction que  $\partial f^s / \partial \boldsymbol{\sigma}$ . En fait, on vérifiera que c'est le tenseur de

déformation lui-même qui s'aligne sur  $\partial f^s / \partial \boldsymbol{\sigma}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \lambda \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (4.59)$$

En effet, dans le cadre élasto-plastique [91], lorsque la charge limite macroscopique est atteinte, le système est en écoulement plastique libre ; le taux de déformation est alors égal au taux de déformation plastique  $\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  et reste constant puisque le taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  intervenant dans (4.55) est constant. On peut donc considérer que, dans les zones où  $\mathbf{d}$  est non-nul, le tenseur de déformation, tendant vers l'infini et devenant équivalent à  $t\mathbf{d}$ , s'oriente dans la même direction que  $\mathbf{d}$ .

### Extension au matériau non standard

On considère maintenant le cas où la matrice correspond à un matériau non standard, c'est-à-dire que la plasticité n'est plus associée. Ainsi la règle d'écoulement ne satisfait plus la règle de normalité (4.54) et s'écrit maintenant à partir d'un potentiel plastique  $g^s$  différent du critère  $f^s$  :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.60)$$

Dans le cas de la plasticité non associée, le résultat selon lequel il est possible d'atteindre tout point intérieur à  $G^{hom}$  pour une certaine évolution n'est plus assuré. Néanmoins, il est bien évident que, pour toute histoire de chargement de type (4.55), le trajet du tenseur des contraintes macroscopiques  $\boldsymbol{\Sigma}$  est contenu dans  $G^{hom}$ . On peut donc s'interroger dans ce cas sur le domaine des états limites (inclus dans  $G^{hom}$ ) obtenu lorsque  $t$  tend vers l'infini pour toutes les directions de  $\mathbf{D}$  dans (4.55). Ainsi, on se propose d'adapter la méthodologie précédente au cas non standard. Il s'agit tout d'abord de remplacer le comportement élasto-plastique par une loi non linéaire définie par une relation du type (4.57). Notant toujours le critère de plasticité  $f^s$ , il est naturel de continuer à rechercher la saturation de ce dernier à travers la propriété (4.58). En revanche, la propriété (4.59) devient caduque et doit être remplacée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \lambda \frac{\partial g^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (4.61)$$

### Une écriture "affine" de la loi non linéaire

Qu'il s'agisse d'un matériau standard ou d'un matériau non standard composant la matrice, il apparaîtra clairement à la section 4.4 que les techniques d'homogénéisation non linéaire qui vont être mises en œuvre sont adaptées aux relations non linéaires entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  du type de celle qui existait entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{d}$  dans (4.47). Ainsi, on supposera que la relation (4.57) s'écrit de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^s(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_s^p(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.62)$$

où  $\mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon})$  a le statut et la dimension d'un tenseur de raideur (contrairement à (4.47) où le terme de raideur ne faisait référence qu'à la structure de la relation et non à la dimension de la grandeur physique).

Les tenseurs  $\mathbf{c}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  satisfaisant la formulation (4.62) ne sont pas uniques. Parmi les différentes possibilités, il existe en particulier une formulation tangente définie par ([76], [75], [77], [72]) :

$$\mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_s^p(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.63)$$

On cherchera par la suite dans la formulation (4.62) des tenseurs  $\mathbf{c}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  isotropes et dépendant uniquement des deux premiers invariants de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon}) = 3k^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \mathbb{J} + 2\mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \mathbb{K} \quad (a) \quad (4.64)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s^p(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_s^p(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \mathbf{1} \quad (b)$$

ce qui ne sera pas vérifié en général par les tenseurs (4.63).

Aucune hypothèse autre que l'appartenance au domaine de résistance de la matrice n'est a priori requise en ce qui concerne la relation (4.57). En particulier, le raisonnement tenu à partir d'un tel comportement fictif ne requiert pas l'existence d'un potentiel  $\psi^s$  par lequel la relation (4.57) deviendrait une loi élastique non linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.65)$$

Notons toutefois que, dans le cadre d'une écriture du type (4.62) satisfaisant l'isotropie (4.64), l'existence d'un tel potentiel est conditionnée par la relation suivante :

$$\varepsilon_v \frac{\partial k^s}{\partial \varepsilon_d} + \frac{\partial \sigma_s^p}{\partial \varepsilon_d} = 2\varepsilon_d \frac{\partial \mu^s}{\partial \varepsilon_v} \quad \left( = \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial \varepsilon_v \partial \varepsilon_d} \right) \quad (4.66)$$

Ainsi, nous venons de présenter deux méthodes différentes conduisant au critère macroscopique, l'une basée sur un comportement fictif visqueux de la matrice (§ 4.3.1) et l'autre sur une loi fictive contrainte-déformation non linéaire (§ 4.3.2). Dans les deux cas, nous nous sommes ramenés à un problème non linéaire faisant intervenir une loi de comportement reformulée de manière "affine" au sein de la matrice : dans le cas visqueux, il s'agit de la relation (4.47) entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{d}$  tandis que dans le second cas, il s'agit de la relation (4.62) entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Dans la section 4.4, nous allons nous intéresser à des techniques d'homogénéisation non linéaire conçues pour fournir des estimations du comportement macroscopique issu de telles relations microscopiques.

## 4.4 Techniques de résolution par homogénéisation non linéaire

Cette section a pour objectif de présenter des techniques permettant d'accéder à des estimations de comportements macroscopiques à partir de comportements locaux non linéaires tels que (4.47) ou (4.62). Ces deux relations sont de toute évidence formellement identiques. On choisit de présenter les développements de cette section dans le cadre de la relation “ $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$ ” (4.62). On remplacera le déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  par la vitesse  $\mathbf{u}$  et le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (resp.  $\mathbf{E}$  à l'échelle macroscopique) par le taux de déformation  $\mathbf{d}$  (resp.  $\mathbf{D}$ ) pour traiter le cas visqueux (4.47).

Les techniques d'homogénéisation non linéaire ont fait l'objet de travaux récents ([86], [87]), [94], [95], [97]). Ils ont été exploités dans le contexte des milieux poreux saturés dans [41]. On montre comment ramener le problème non linéaire à un problème d'élasticité linéaire, la non linéarité initiale se manifestant alors par un lien entre les propriétés des matériaux fictifs linéaires et le niveau de chargement. Le problème linéaire pourra donc être traité par un schéma classique d'homogénéisation linéaire tandis qu'il faudra examiner différents moyens de coupler le niveau de chargement et les propriétés élastiques à travers des déformations effectives (quelquefois appelées déformations de référence).

### 4.4.1 Principe de l'homogénéisation non linéaire

En adoptant (4.62) pour loi de comportement de la matrice, le problème non linéaire à résoudre est formé par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & (\Omega) & \quad (a) \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) & (\Omega) & \quad (b) \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) & (\Omega) & \quad (c) \\
 \llbracket \boldsymbol{\xi} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} & (\partial\Omega^l) & \quad (d) \\
 \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & (\partial\Omega) & \quad (e)
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_s^p(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) & (\mathbf{x} \in \Omega^s) & \quad (a) \\
 \mathbf{c}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \Omega^p) & \quad (b) \\
 \mathbf{c}(\mathbf{x}) &\rightarrow \infty \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \Omega^r \cup \Omega^l) & \quad (c)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Le problème (4.67) n'est pas classique dans la mesure où, d'après (4.68), le tenseur de raideur de la matrice  $\mathbf{c}^s$  n'est pas uniforme puisqu'il est une fonction explicite du champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  qui est hétérogène et dépend du niveau de déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ . Ainsi les méthodes usuelles d'homogénéisation linéaire ne sont pas directement applicables. Le principe de résolution approchée que nous allons alors adopter consiste à se ramener à un problème linéaire en remplaçant les champs hétérogènes  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  et  $\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x})$  à l'intérieur de la matrice par des champs uniformes, autrement dit la matrice est remplacée par un matériau linéaire équivalent dont il faut ajuster les propriétés. Dans cet optique, on introduit un tenseur de déformation effective  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  et on approche les champs de raideur et de précontrainte hétérogènes "réelles" par les valeurs uniformes prises en  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}) \\ \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_s^p(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_s^p(\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}) \end{array} \right. \quad (4.69)$$

La déformation effective  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  sera choisie de manière à être représentative du champ hétérogène, au sens par exemple d'une certaine moyenne sur le domaine  $\Omega^s$ . En particulier,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  devra être fonction de l'état de déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ . Plusieurs choix sont présentés à la section 4.4.2.

En fonction de la décomposition (4.62) choisie, on construit des méthodes d'homogénéisation différentes (cf. FIG. 4.3) :

- lorsque  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  est pris nul, il s'agit de la méthode sécante [97],
- si  $\mathbf{c}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  sont ceux de la formulation tangente (4.63), il s'agit de la méthode tangente ([76], [75], [77]) ou affine [72],
- si enfin  $\mathbf{c}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  n'ont pas de propriété particulière par rapport à la loi non linéaire (4.57) si ce n'est qu'ils vérifient (4.62), il s'agit d'une méthode affine quelconque.

L'inconvénient de la méthode sécante réside dans le fait qu'elle peut générer un tenseur  $\mathbf{c}^s$  non positif (ce sera le cas pour une matrice de Drucker-Prager au chapitre 6), ce qui explique l'intérêt pour une formulation affine contruite de manière à satisfaire la positivité de  $\mathbf{c}^s$ . La formulation tangente présente l'avantage de fournir l'approximation la plus proche de la loi non linéaire au voisinage de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  alors que la méthode sécante par exemple s'appuie sur un tenseur  $\mathbf{c}^s$  trop raide (cf. FIG. 4.3). Mais elle possède une faiblesse majeure :  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  (4.63) dépend en général du tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  et non uniquement de ses invariants. Le caractère tensoriel de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  peut s'avérer préjudiciable s'il est défini comme une moyenne et si le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  présente d'importants changements d'orientation au sein de la matrice. Considérant par exemple un cas de figure où les phases du v.E.R. sont réparties de manière isotrope et où le chargement  $\mathbf{E}$  est sphérique, il est alors naturel de considérer que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$  défini comme la moyenne de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sur  $\Omega^s$  sera sphérique et ne reflètera donc pas le niveau de déformation déviatorique dans  $\Omega^s$ . Par exemple, dans le cas d'une

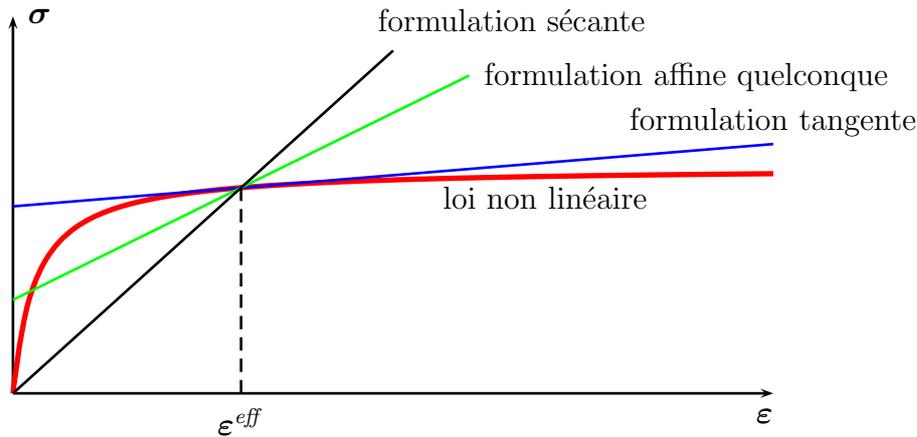


FIG. 4.3 – Formulations sécante, affine et tangente du comportement

matrice de von Mises traitée au chapitre 5 pour laquelle on utilise la loi (5.23), il est facile de montrer que  $\sigma_s^p$  s'écrit :

$$\sigma_s^p(\varepsilon^{eff}) = -2 \varepsilon_d^{eff} \mu^{s'}(\varepsilon_d^{eff}) \varepsilon_d^{eff} \quad (4.70)$$

Appliquant le raisonnement précédent, on obtient dans le cas d'un chargement isotrope,  $\varepsilon_d^{eff} = \mathbf{0}$  et donc  $\sigma_s^p(\varepsilon^{eff}) = \mathbf{0}$  alors que le champ  $\sigma_s^p(\varepsilon)$  n'est certainement pas nul. On ne choisira donc pas cette méthode par la suite. Lorsque la méthode sécante fournit un tenseur  $\mathbf{c}^s$  non positif, on construit plutôt une formulation affine avec des tenseurs  $\mathbf{c}^s$  (positif) et  $\sigma_s^p$  satisfaisant l'isotropie et la dépendance en les deux premiers invariants de  $\varepsilon$ .

Voici les étapes successives de la procédure d'homogénéisation dans le cas d'une formulation affine quelconque (la formulation sécante en est un cas particulier) [97] :

1. En procédant au remplacement (4.69) de la raideur et de la précontrainte dans la matrice, le système (4.67) correspond maintenant à un problème d'élasticité linéaire. Il est donc possible de déterminer la contrainte macroscopique  $\Sigma = \langle \sigma \rangle$  sous la forme :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \Sigma^p \quad (4.71)$$

Cette première étape fait appel à des schémas d'homogénéisation linéaire choisis en fonction de données ou d'hypothèses morphologiques. Certains schémas ont été exposés au chapitre 2.  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\Sigma^p$  dépendent donc directement des propriétés effectives  $\mathbf{c}^s(\varepsilon^{eff})$  et  $\sigma_s^p(\varepsilon^{eff})$ .

2. La deuxième étape consiste en la détermination de la déformation effective. Comme nous avons supposé que  $\mathbf{c}^s$  et  $\sigma_s^p$  ne dépendaient que des deux premiers invariants

de  $\varepsilon$  (4.64), ce n'est pas un tenseur  $\varepsilon^{eff}$  que nous recherchons mais deux invariants effectifs  $\varepsilon_v^{eff}$  et  $\varepsilon_d^{eff}$  en fonction de  $\mathbf{E}$  :

$$\varepsilon_v^{eff} = \varepsilon_v^{eff}(\mathbf{E}, \mathbf{c}^s, \boldsymbol{\sigma}_s^p) \quad ; \quad \varepsilon_d^{eff} = \varepsilon_d^{eff}(\mathbf{E}, \mathbf{c}^s, \boldsymbol{\sigma}_s^p) \quad (4.72)$$

avec

$$\mathbf{c}^s \left( \varepsilon_v^{eff}, \varepsilon_d^{eff} \right) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_s^p \left( \varepsilon_v^{eff}, \varepsilon_d^{eff} \right) \quad (4.73)$$

On présente à la section 4.4.2 plusieurs choix possibles d'invariants effectifs. Il convient de préciser que les calculs conduisant à la détermination des fonctions  $\varepsilon_v^{eff}(\mathbf{E})$  et  $\varepsilon_d^{eff}(\mathbf{E})$  seront menés dans un cadre linéaire et celles-ci seront positivement homogènes de degré 1.

3. La dernière étape consiste à résoudre la non linéarité du problème posé par (4.71), (4.72) et (4.73). La non linéarité provient du fait que  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}^p$  dépendent de  $\varepsilon_v^{eff}$  et  $\varepsilon_d^{eff}$  qui sont des fonctions de  $\mathbf{E}$ . En combinant ces équations, nous obtenons une relation macroscopique de la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^p(\mathbf{E}) \quad (4.74)$$

Une relecture de la démarche dans le cas visqueux conduit donc à une expression du type :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom}(\mathbf{D}) : \mathbf{D} + \boldsymbol{\Sigma}^p(\mathbf{D}) \quad (4.75)$$

Pour respecter l'homogénéité des grandeurs physiques, il est clair que  $\mathbb{C}^{hom}$  est homogène de degré 1 par rapport à  $\mathbf{c}^s(\mathbf{d}^{eff})$ . De même  $\boldsymbol{\Sigma}^p(\mathbf{D})$  est homogène de degré 0 par rapport à  $\mathbf{c}^s(\mathbf{d}^{eff})$  et de degré 1 par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}_s^p(\mathbf{d}^{eff})$ . Or on a vu en (4.46) que  $\mathbf{c}^s(\mathbf{d}^{eff})$  était homogène de degré  $-1$  et que  $\boldsymbol{\sigma}_s^p(\mathbf{d}^{eff})$  ne dépendait que de l'orientation de  $\mathbf{d}^{eff}$ . De plus, le choix de  $\mathbf{d}^{eff}$  est tel que  $\mathbf{d}^{eff}(\mathbf{D})$  est homogène de degré 1. Au final, il apparaît que la relation  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{D})$  ne dépend que de l'orientation de  $\mathbf{D}$  et non de sa norme, soit de cinq paramètres indépendants (par exemple les rapports de cinq composantes de  $\mathbf{D}$  sur la sixième), ce qui définit bien une surface dans l'espace des contraintes. Contrairement à l'expression exacte (4.39), il n'est pas garanti que la technique d'homogénéisation non linéaire fournisse une relation  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{D})$  (4.75) satisfaisant le critère de normalité (tel que  $\mathbf{D}$  soit normal extérieur à la surface en  $\boldsymbol{\Sigma}$ ). On montre à l'annexe 7.2 que cette propriété est obtenue si et seulement si  $\boldsymbol{\Sigma}$  dérive d'un potentiel. On montre aussi que ce potentiel n'est autre que la fonction d'appui de la surface d'équation  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{D})$ .

#### 4.4.2 Choix de la déformation effective

Lors de la deuxième étape du processus d'homogénéisation, on a vu qu'il s'agissait de déterminer des invariants de déformation effectifs. Pour prendre en compte du mieux

possible le niveau de déformation dans la phase solide induit par le chargement  $\mathbf{E}$ , on définit les déformations effectives comme des moyennes sur la phase solide des champs correspondants. On propose trois choix de déformations effectives qui définissent trois méthodes différentes d'homogénéisation non linéaire : la méthode classique, la méthode modifiée ([95],[97]) et la méthode mixte ([41], [68]).

### Méthode classique

Cette méthode se caractérise par le choix d'une moyenne directe des déformations, c'est-à-dire les moments d'ordre 1 sur la phase solide :

$$\varepsilon_v^{eff} = \bar{\varepsilon}_v = \langle \varepsilon_v \rangle_{\Omega^s} \quad ; \quad \varepsilon_d^{eff} = \bar{\varepsilon}_d = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\Omega^s} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\Omega^s}} \quad (4.76)$$

En pratique, le calcul de ces déformations effectives s'effectue dans le cadre linéaire de la section 2.3.1 avec  $\mathfrak{c}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  fonctions de  $\varepsilon_v^{eff}$  et  $\varepsilon_d^{eff}$  (4.73). Pour ce choix de déformations effectives, on notera :

$$\mathfrak{c}^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{\mathfrak{c}}^s \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_s^p(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s^p \quad (4.77)$$

Si  $\mathfrak{c}^s$  est isotrope, on notera les modules effectifs :

$$k^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{k}^s \quad ; \quad \mu^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{\mu}^s \quad (4.78)$$

En gardant à l'esprit que les moyennes choisies doivent être représentatives du niveau des invariants de déformation de la phase solide en fonction de  $\mathbf{E}$ , le recours à une moyenne sur le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$  peut être préjudiciable dans la mesure où  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$  n'a pas une orientation fixe alors que l'on cherche le niveau moyen de sa norme. Dans le cas d'une distribution isotrope des phases et d'un chargement sphérique, il ne fait aucun doute que la moyenne de  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$  sur la phase solide et donc le moment d'ordre 1 correspondant sont nuls alors que des déformations déviatoriques importantes apparaissent sur la périphérie des pores ou des inclusions [89]. Ce problème est intimement lié au découplage entre les contributions sphérique et déviatorique du chargement sur les moments d'ordre 1 déjà évoqué à la section 2.3.1.

### Méthode modifiée

La méthode modifiée proposée par Suquet ([95],[97]) consiste à choisir le moment d'ordre 2 pour déformation effective déviatorique. Comme nous avons également besoin d'une déformation effective volumique, nous nous proposons dans cette méthode de la définir aussi comme le moment d'ordre 2. Les déformations effectives sont donc données ici par :

$$\varepsilon_v^{eff} = \bar{\varepsilon}_v = \sqrt{\langle \varepsilon_v^2 \rangle_{\Omega^s}} \quad ; \quad \varepsilon_d^{eff} = \bar{\varepsilon}_d = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\Omega^s}} \quad (4.79)$$

Comme pour les moments d'ordre 1, ceux-ci sont calculés à l'aide du schéma linéaire choisi à la première étape. La section 2.3.2 montre qu'ils s'obtiennent grâce à la méthode énergétique inspirée de Kreher [60]. Pour ce choix de déformations effectives, on notera :

$$\mathfrak{c}^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{\mathfrak{c}}^s \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_s^p(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s^p \quad (4.80)$$

Si  $\mathfrak{c}^s$  est isotrope, on notera les modules effectifs :

$$k^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{k}^s \quad ; \quad \mu^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \bar{\mu}^s \quad (4.81)$$

Dans le cas où la précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p$  est nulle et où le comportement de la matrice est élastique non linéaire c'est-à-dire qu'il s'écrit à partir d'un potentiel, cette méthode dite sécante modifiée présente un intérêt majeur par rapport à son homologue classique : elle permet en effet de construire une formulation variationnelle simple équivalente ainsi qu'un potentiel dont dérive la loi macroscopique (la démonstration figure en annexe 7.3). L'interprétation de ce résultat dans le contexte du comportement visqueux (4.44) indique immédiatement que la méthode sécante modifiée conduit à la détermination d'un potentiel dont dérive  $\boldsymbol{\Sigma}$ , ce qui signifie encore, d'après l'annexe 7.2, que le tenseur  $\boldsymbol{D}$  intervenant dans l'écriture des conditions aux limites respecte la propriété de normalité à la frontière de l'estimation de  $G^{hom}$  par cette méthode.

Néanmoins la méthode modifiée n'est pas exempte de tout reproche. En effet, alors que le caractère tensoriel de  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$  posait problème dans la méthode classique, ici c'est le caractère scalaire algébrique de  $\varepsilon_v$  (i.e. qui peut, a priori, changer de signe) dont il n'est pas possible de rendre compte avec une moyenne quadratique (4.79).

### Méthode mixte

La méthode mixte tire profit des deux méthodes précédentes en choisissant les déformations effectives qui présentent le moins d'inconvénients. En considérant les remarques formulées plus haut, il semble naturel que le choix se porte sur :

$$\varepsilon_v^{eff} = \bar{\varepsilon}_v = \langle \varepsilon_v \rangle_{\Omega^s} \quad ; \quad \varepsilon_d^{eff} = \bar{\varepsilon}_d = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\Omega^s}} \quad (4.82)$$

Pour ce choix de déformations effectives, on notera :

$$\mathfrak{c}^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \hat{\mathfrak{c}}^s \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_s^p(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s^p \quad (4.83)$$

Si  $\mathfrak{c}^s$  est isotrope, on notera les modules effectifs :

$$k^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \hat{k}^s \quad ; \quad \mu^s(\bar{\varepsilon}_v, \bar{\varepsilon}_d) = \hat{\mu}^s \quad (4.84)$$

C'est cette méthode que nous utiliserons en général par la suite.

Les techniques d'obtention du critère macroscopique sont mises en œuvre dans les chapitres suivants pour un critère purement cohérent de la phase solide (critère de von Mises) puis pour un critère frottant (critère de Drucker-Prager).



# Chapitre 5

## Matrice de von Mises

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Le critère de von Mises</b>	<b>109</b>
5.1.1	Définition du critère	109
5.1.2	Régularisation du critère	109
5.1.3	Loi élastique non linéaire	113
<b>5.2</b>	<b>Application à un milieu poreux à matrice homogène</b>	<b>114</b>
5.2.1	Cas sec tridimensionnel	114
5.2.2	Cas pressurisé	116
5.2.3	Cas sec bidimensionnel	117
<b>5.3</b>	<b>Application à un milieu renforcé</b>	<b>118</b>
5.3.1	Détermination du critère macroscopique	119
5.3.2	Discussion sur le critère macroscopique	121

---



Ce chapitre a pour but d'appliquer les techniques évoquées au chapitre précédent à un V.E.R. dont le critère de la phase matricielle est celui de von Mises pour obtenir le critère macroscopique. Cette démarche va nous permettre de valider nos méthodes lorsque les inclusions sont des pores ou des renforts rigides adhérents puisque celles-ci permettent de retrouver des résultats obtenus par plusieurs auteurs par la technique des potentiels en loi puissance (par exemple [86], [99], [74], [65], [97]) mais nous examinerons également l'effet des renforts lisses sur le critère macroscopique.

## 5.1 Le critère de von Mises

### 5.1.1 Définition du critère

Le critère de von Mises correspond à une limitation de la contrainte déviatorique équivalente

$$\sigma_d = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d} :$$

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d - b \quad \text{avec} \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_o \quad (5.1)$$

où  $\sigma_o$  désigne la résistance en traction simple.

Dans le demi-plan  $(\sigma_m, \sigma_d \geq 0)$ , l'ensemble  $G^s$  des états de contrainte admissibles est représenté par la zone délimitée par les droites d'équations  $\sigma_d = b$  et  $\sigma_d = 0$ .

La fonction d'appui (4.2) de ce critère est donnée par ([90], [91]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_v = 0 \Rightarrow \pi^s(\mathbf{d}) = b d_d \\ d_v \neq 0 \Rightarrow \pi^s(\mathbf{d}) = +\infty \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Il est clair que cette fonction d'appui n'est différentiable en aucun point car il n'existe aucun ouvert de l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques sur lequel  $\pi^s$  prenne des valeurs finies. On ne peut donc pas simplement définir le problème visqueux (4.36) et il faut recourir à une technique de régularisation du critère (cf. § 4.3.1) ou utiliser une loi de comportement élastique non linéaire fictive (cf. § 4.3.2) pour mettre en œuvre la technique d'homogénéisation de la section 4.4 dans le but d'obtenir une estimation de  $G^{hom}$ .

### 5.1.2 Régularisation du critère

#### Définition de la suite de régularisation

Conformément à la méthode de régularisation exposée à la section 4.3.1, on définit une suite de critères  $(f_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  correspondant à des domaines  $G_n^s$  tendant au sens de (4.50) vers

le critère de von Mises :

$$f_n^s(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\sigma_m}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{b}\right)^2 - 1 \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad (5.3)$$

Chaque critère  $f_n^s$  définit donc un ensemble borné strictement convexe  $G_n^s$  représenté par

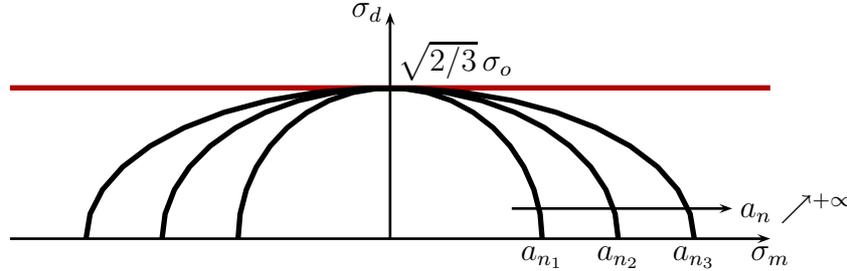


FIG. 5.1 – Approximation du critère de von Mises par une suite d'ellipses

une demi-ellipse dans le demi-plan  $(\sigma_m, \sigma_d)$  (cf. FIG. 5.1).

En vertu de la propriété montrée à l'annexe 7.1.1, la fonction d'appui  $\pi_n^s$  associée à chaque critère  $f_n^s$  est différentiable (sauf à l'origine). Pour calculer cette fonction  $\pi_n^s$ , il suffit d'exploiter le résultat intermédiaire (7.2) de 7.1.1 indiquant qu'il existe pour chaque  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ , un tenseur  $\boldsymbol{\sigma}^* \in \partial G_n^s$  tel que  $\pi_n^s(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d}$ . Puis comme  $f_n^s$  (5.3) est différentiable,  $\mathbf{d}$  est orienté selon la normale extérieure à  $G_n^s$  c'est-à-dire parallèle à  $\partial f_n^s / \partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*)$  :

$$\mathbf{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial f_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^*) = 2 \dot{\lambda} \left( \frac{1}{3} \frac{\sigma_m^*}{a_n^2} \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_d^*}{b^2} \right) \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (5.4)$$

On peut donc exprimer  $\pi_n^s(\mathbf{d})$  en exploitant (5.4) ainsi que l'équation  $f_n^s(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0$  due au fait que  $\boldsymbol{\sigma}^*$  se situe sur  $\partial G_n^s$  :

$$\pi_n^s(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d} = 2 \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma}^* : \left( \frac{1}{3} \frac{\sigma_m^*}{a_n^2} \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_d^*}{b^2} \right) = 2 \dot{\lambda} \quad (5.5)$$

En identifiant les invariants dans les deux membres de (5.4), on obtient :

$$\frac{\sigma_m^*}{a_n} = \frac{a_n d_v}{2 \dot{\lambda}} \quad ; \quad \frac{\sigma_d^*}{b} = \frac{b d_d}{2 \dot{\lambda}} \quad (5.6)$$

Utilisant à nouveau  $f_n^s(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0$ , il découle de (5.6) une relation entre  $\dot{\lambda}$  et les invariants  $d_v$  et  $d_d$  permettant de déterminer  $\pi_n^s(\mathbf{d})$  :

$$\pi_n^s(\mathbf{d}) = 2 \dot{\lambda} = \sqrt{(a_n d_v)^2 + (b d_d)^2} \quad (5.7)$$

On peut encore écrire  $\pi_n^s$  sous la forme :

$$\pi_n^s(\mathbf{d}) = \sqrt{\mathbf{d} : \mathbb{L}_n^s : \mathbf{d}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{L}_n^s = 3 a_n^2 \mathbb{J} + b^2 \mathbb{K} \quad (5.8)$$

Une telle fonction d'appui présente bien la régularité requise pour définir un problème visqueux en suivant la méthode proposée à la section 4.3.1. En particulier, elle permet de construire le tenseur isotrope  $\mathbf{c}_n^s(\mathbf{d})$  (4.45) défini à partir des modules :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_n^s(d_v, d_d) = \frac{a_n^2}{\sqrt{(a_n d_v)^2 + (b d_d)^2}} \\ 2 \mu_n^s(d_v, d_d) = \frac{b^2}{\sqrt{(a_n d_v)^2 + (b d_d)^2}} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Les modules  $k_n^s$  et  $\mu_n^s$  exprimés en (5.9) sont clairement positifs; il n'est par conséquent pas utile d'introduire une précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}_s^p$  comme dans (4.47).

Il est intéressant de noter que l'on déduit de (5.9) que :

$$\frac{\mu_n^s}{k_n^s} = \frac{b^2}{2a_n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \quad (5.10)$$

En d'autres termes, quelles que soient les taux de déformation effectifs, ce matériau visqueux fictif se comporte de manière incompressible lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### Estimation du critère macroscopique par une méthode variationnelle

Connaissant la suite de fonctions d'appui  $\pi_n^s$ , il s'agit maintenant de construire des estimations de  $G_n^{hom}$  en mettant en œuvre la technique d'homogénéisation non linéaire exposée à la section 4.4. Notons  $\Pi_n^{hom}$  la fonction d'appui de  $G_n^{hom}$ . En utilisant la formulation (4.20) de la fonction d'appui macroscopique, on écrit :

$$\Pi_n^{hom}(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s \langle \pi_n^s(\mathbf{d}) \rangle_{\Omega^s} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s \langle \sqrt{\mathbf{d} : \mathbb{L}_n^s : \mathbf{d}} \rangle_{\Omega^s} \quad (5.11)$$

Comme la fonction "racine carrée" est concave,  $\Pi_n^{hom}(\mathbf{D})$  (5.11) se majore ainsi :

$$\Pi_n^{hom}(\mathbf{D}) \leq \overline{\overline{\Pi}}_n(\mathbf{D}) \quad (5.12)$$

avec

$$\overline{\overline{\Pi}}_n(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s \sqrt{\langle \mathbf{d} : \mathbb{L}_n^s : \mathbf{d} \rangle_{\Omega^s}} \quad (5.13)$$

$$= \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s \sqrt{\left(a_n \overline{\overline{d}}_v\right)^2 + \left(b \overline{\overline{d}}_d\right)^2} \quad (5.14)$$

$$= \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s \pi_n^s(\overline{\overline{d}}_v, \overline{\overline{d}}_d) \quad (5.15)$$

On constate donc sur (5.15) que  $\overline{\overline{\Pi}}_n(\mathbf{D})$  est déterminé par le problème variationnel équivalent à la méthode sécante modifiée (cf. annexe 7.3 adaptée au cas visqueux). Dans

le cas d'une matrice de von Mises, cette méthode fournit donc une estimation par excès du critère macroscopique.

La fonction "racine carrée" est également croissante donc (5.13) devient :

$$\overline{\overline{\Pi}}_n(\mathbf{D}) = \varphi^s \sqrt{\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \langle \mathbf{d} : \mathbb{L}_n^s : \mathbf{d} \rangle_{\Omega^s}} \quad (5.16)$$

On reconnaît immédiatement, sous la racine de (5.16), la formulation variationnelle d'un problème formel d'élasticité linéaire (transposé en vitesse). Par conséquent, on peut définir un tenseur  $\mathbb{L}_n^{hom}$  tel que :

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{D})} \varphi^s \langle \mathbf{d} : \mathbb{L}_n^s : \mathbf{d} \rangle_{\Omega^s} = \mathbf{D} : \mathbb{L}_n^{hom} : \mathbf{D} \quad (5.17)$$

Le tenseur  $\mathbb{L}_n^{hom}$  peut être estimé ou éventuellement borné par les techniques usuelles d'homogénéisation linéaire. En combinant (5.16) et (5.17), il vient :

$$\overline{\overline{\Pi}}_n(\mathbf{D}) = \sqrt{\varphi^s \mathbf{D} : \mathbb{L}_n^{hom} : \mathbf{D}} \quad (5.18)$$

Lorsqu'une borne supérieure est disponible pour  $\mathbb{L}_n^{hom}$ , on dispose finalement d'une fonction majorant  $\Pi_n^{hom}(\mathbf{D})$  (5.12) et donc  $\Pi^{hom}(\mathbf{D})$  par passage à la limite.

Dans le cadre isotrope, on constate que l'expression (5.18) est comparable à (5.8) et représente donc formellement la fonction d'appui d'un critère elliptique du même type que  $f_n^s$  :

$$\varphi^s \mathbb{L}_n^{hom} = 3 A_n^2 \mathbb{J} + B_n^2 \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad G_n^{hom} = \left\{ \Sigma \left| \left( \frac{\Sigma_m}{A_n} \right)^2 + \left( \frac{\Sigma_d}{B_n} \right)^2 \leq 1 \right. \right\} \quad (5.19)$$

Il suffira ensuite de faire tendre  $n$  vers l'infini pour obtenir une estimation de  $G^{hom}$ .

L'équation paramétrique permettant de décrire la frontière de  $G_n^{hom}$  est donnée par (7.46) :

$$\Sigma(\mathbf{D}) = \sqrt{\varphi^s} \frac{\mathbb{L}_n^{hom} : \mathbf{D}}{\sqrt{\mathbf{D} : \mathbb{L}_n^{hom} : \mathbf{D}}} \quad (5.20)$$

### Régularisation par une suite de potentiels

Une alternative à la méthode précédente de régularisation peut être envisagée en introduisant une suite de potentiels convergeant vers la fonction d'appui (5.2) au sens (4.53) :

$$\psi_n^s(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} k_n^s d_v^2 + b d_d \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n^s = +\infty \quad (5.21)$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_n^s}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) = k_n^s d_v \mathbf{1} + 2 \mu^s(d_d) \mathbf{d}_d \quad \text{avec} \quad 2 \mu^s(d_d) = \frac{b}{d_d} \quad (5.22)$$

Ce matériau fictif se comporte également de manière incompressible lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### 5.1.3 Loi élastique non linéaire

Selon le principe de la méthode présentée à la section 4.3.2, on cherche à construire une loi de comportement de type (4.57) saturant le critère de von Mises pour des “grandes valeurs” de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (4.58). Comme le critère de von Mises porte uniquement sur le deuxième invariant des contraintes  $\sigma_d$ , on propose de construire une loi non linéaire de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = k^s \varepsilon_v \mathbf{1} + 2 \mu^s(\varepsilon_d) \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad \text{avec} \quad k^s > 0 \quad (5.23)$$

Il s’agit pour la loi (5.23) de satisfaire la limite :

$$\lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} \sigma_d = \lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} 2 \mu^s(\varepsilon_d) \varepsilon_d = b \quad (5.24)$$

On peut donc prendre n’importe quelle fonction  $\mu^s(\varepsilon_d)$  dont le comportement à l’infini

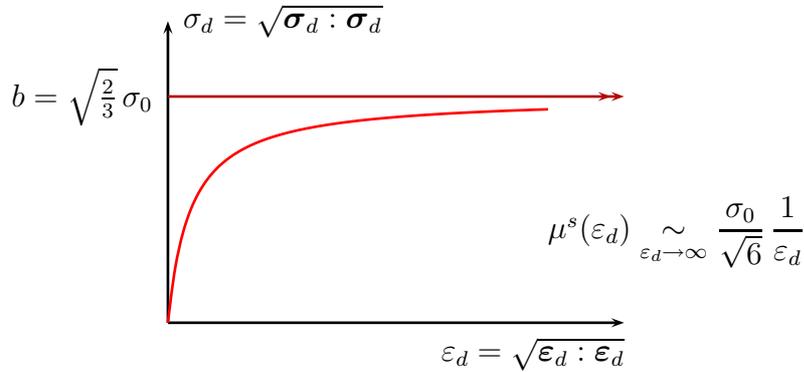


FIG. 5.2 – Saturation du critère de von Mises

vérifie (cf. FIG. 5.2) :

$$2 \mu^s(\varepsilon_d) \underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{b}{\varepsilon_d} \quad (5.25)$$

Le comportement que l’on vient d’introduire mérite les remarques suivantes :

- pour les grandes valeurs de  $\varepsilon_d$ , le matériau fictif devient incompressible :

$$\lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} \frac{\mu^s(\varepsilon_d)}{k^s} = 0 \quad (5.26)$$

En supposant que  $\sigma_m = k^s \varepsilon_v$  prenne une valeur finie, le rapport  $\varepsilon_v / \varepsilon_d$  tend vers 0. Ceci signifie, dans le cadre de la loi (5.23) et du critère de von Mises (5.1), que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  satisfait asymptotiquement la règle de normalité (4.59).

- la loi est élastique non linéaire : on peut exhiber un potentiel dont dérive  $\boldsymbol{\sigma}$  dans (5.23) :

$$\psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} k^s \varepsilon_v^2 + b \varepsilon_d \quad (5.27)$$

Appliquons maintenant une méthode d'homogénéisation non linéaire pour traiter le cas d'un milieu poreux simple ou renforcé à matrice de von Mises. On choisit d'établir les résultats par la méthode visqueuse régularisée par la suite de critères (5.3) en ajoutant quelques commentaires sur les autres méthodes. Pour alléger les notations dans la suite, on ne fera pas référence à  $n$  dans les champs microscopiques  $\mathbf{d}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  solutions du problème visqueux écrit avec  $\pi_n^s$  ni dans les grandeurs effectives mais cette dépendance est implicite.

## 5.2 Application à un milieu poreux à matrice homogène

### 5.2.1 Cas sec tridimensionnel

On suppose que la phase solide déformable a bien un statut matriciel par rapport aux pores et que ces derniers sont répartis d'une manière isotrope dans le v.e.r.. On peut alors légitimement recourir au schéma de Mori-Tanaka exprimé en annexe 3.4.1 pour estimer le tenseur  $\mathbb{C}^{hom}$  (4.71). Comme toutes les méthodes se ramènent au cas d'une matrice incompressible, on pourra utiliser les développements limités des modules.

En ce qui concerne les déformations effectives, on choisit a priori la méthode mixte mais on montre aisément qu'elle est équivalente à la méthode modifiée. En effet, en exploitant d'une part (2.110), (3.79) et (5.10), on montre :

$$\bar{d}_v \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{3} \frac{\hat{\mu}_n^s}{\hat{k}_n^s} D_v = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \quad (5.28)$$

On a également d'autre part, d'après (2.144), (3.79), (3.83) et (5.10)

$$\bar{\bar{d}}_v \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\bar{\bar{\mu}}_n^s}{\bar{\bar{k}}_n^s} \sqrt{\frac{16}{9} \frac{D_v^2}{\varphi^2} + \frac{40}{27} \frac{\varphi}{(1 + 2\varphi/3)^2} D_d^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \quad (5.29)$$

La condition de pertinence du critère de von Mises est donc respectée asymptotiquement pour les deux moyennes ( $\bar{d}_v = 0$  et  $\bar{\bar{d}}_v = 0$ ). L'interprétation de ce résultat dans le cadre de l'analyse limite signifie que la matrice tend vers un comportement plastiquement incompressible. Le deuxième invariant est quant à lui fourni par les équations (2.143), (3.81) et (3.84) :

$$\bar{\bar{d}}_d^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3} \frac{D_v^2}{\varphi} + \frac{1}{1 + 2\varphi/3} D_d^2 \quad (5.30)$$

Le choix d'une moyenne directe (5.28) ou quadratique (5.29) pour  $d_v$  conduit dans les deux cas à négliger l'influence du premier invariant effectif dans  $\hat{k}_n^s$  et  $\hat{\mu}_n^s$  (5.9) car on a

$a_n \bar{d}_v \ll b \bar{d}_d$  aussi bien que  $a_n \bar{d}_v \ll b \bar{d}_d$  d'après (5.28), (5.29) et (5.30). Les modules effectifs obtenus à partir de (5.9) deviennent alors

$$\begin{aligned} \hat{k}_n^s &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \bar{\bar{k}}_n^s \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_n^2}{b \bar{d}_d} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty \\ 2 \hat{\mu}_n^s &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2 \bar{\bar{\mu}}_n^s \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{b}{\bar{d}_d} \end{aligned} \quad (5.31)$$

D'après (5.31), il ne fait aucun doute que la méthode que nous avons choisie est équivalente à celle consistant à régulariser le critère par la suite de potentiels (5.21). On note également l'analogie avec les modules construits dans le cadre de la loi élastique non linéaire fictive (5.23) et (5.24). Dans ce dernier cas, les modules ne se comportent pas comme dans la méthode visqueuse ( $k^s$  est fini et  $\hat{\mu}^s$  varie en  $1/\bar{\varepsilon}_d$  qui tend vers 0) mais le contraste entre les modules est respecté.

En conclusion, la méthode mixte est rigoureusement équivalente à la méthode modifiée qui présente plusieurs avantages liés à l'existence d'une formulation variationnelle (cf. § 5.1.2) : elle peut être résolue de manière totalement linéaire (à travers le problème (5.17)), elle donne un statut de borne à l'estimation du critère si le schéma linéaire choisi fournit une borne supérieure (c'est le cas ici puisque l'estimation de Mori-Tanaka d'un milieu poreux correspond à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman [102]) et enfin elle assure à  $\mathbf{D}$  la propriété de normalité au critère estimé.

Le tenseur  $\mathbb{L}_n^{hom}$  s'obtient formellement comme le tenseur d'élasticité macroscopique d'un milieu poreux dont la matrice a pour module de compression  $a_n^2$  et pour module de cisaillement  $b^2/2$  (5.8). En exploitant les formules (3.79) et (3.82), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}_n^{hom} = b^2 (1 - \varphi) \left( \frac{2}{\varphi} \mathbb{J} + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\varphi} \mathbb{K} \right) \quad (5.32)$$

Rappelant le lien existant entre  $\mathbb{L}_n^{hom}$  et  $G_n^{hom}$  (5.19) et en utilisant  $\varphi^s = 1 - \varphi$  (pas d'inclusions rigides), le critère macroscopique est estimé par une demi-ellipse dans le plan  $(\Sigma_m, \Sigma_d)$  :

$$\frac{3}{2} \varphi \Sigma_m^2 + \left( 1 + \frac{2}{3} \varphi \right) \Sigma_d^2 = (1 - \varphi)^2 b^2 \quad (5.33)$$

On retrouve un résultat mis en évidence par plusieurs auteurs ([86], [99], [74], [65], [97]). Ce critère est comparé à celui de Gurson [50] sur la FIG. 5.3. On constate qu'il améliore le critère de Gurson (qui est une borne supérieure) pour un taux de triaxialité nul (sur l'axe déviatorique  $\Sigma_m = 0$ ) mais qu'il est nettement moins bon pour un taux de triaxialité infini (sur l'axe sphérique  $\Sigma_d = 0$ ). Cette faiblesse est intimement liée à la méthode d'homogénéisation consistant à choisir une déformation effective comme une moyenne sur la phase solide. Il est clair que cette méthode sera d'autant plus mauvaise que le mécanisme que l'on cherche à estimer en prenant des moyennes sera hétérogène. Or dans le cas d'un

chargement sphérique, si l'on se réfère à la solution du problème de la sphère creuse soumise à une pression externe (cf. annexe 7.4.1) qui fournit un champ de vitesse en  $1/r^2$  et donc une déformation déviatorique en  $1/r^3$ , on note que l'erreur commise en prenant une moyenne est fortement préjudiciable si les pores sont petits. Ceci est bien illustré sur la FIG. 5.3 dans la mesure où le critère de Gurson coïncide sur l'axe sphérique avec la pression limite de la sphère creuse. Pour remédier à cet inconvénient, il est possible de

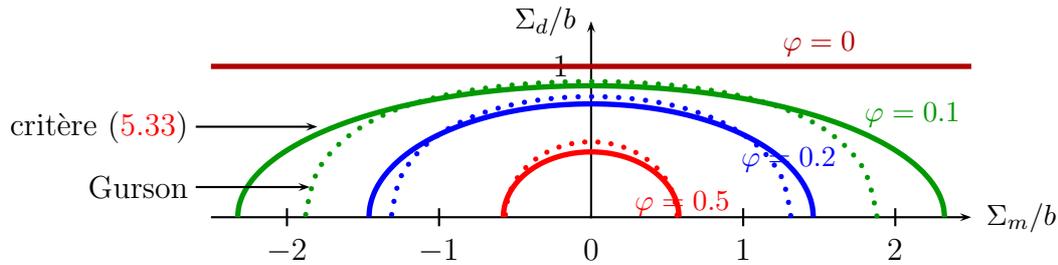


FIG. 5.3 – Critère d'un milieu poreux à pores sphériques et à matrice de von Mises

recourir à une partition de la phase solide en sous-domaines dans chacun desquels est calculé un taux de déformation effectif [12]. On illustre l'intérêt de cette démarche de manière analytique sur le problème de la sphère creuse en annexe 7.4.1.

### 5.2.2 Cas pressurisé

On a montré à la section 4.2.2 que le critère macroscopique d'un milieu poreux à matrice de von Mises saturé par un fluide à la pression  $p$  s'écrit au moyen de la contrainte effective de Terzaghi (4.27). Autrement dit, le critère (5.33) devient :

$$\frac{3}{2} \varphi (\Sigma_m + p)^2 + \left(1 + \frac{2}{3} \varphi\right) \Sigma_d^2 = (1 - \varphi)^2 b^2 \quad (5.34)$$

On peut également traiter le problème d'homogénéisation non linéaire en considérant la présence du fluide. Appliquons cette fois, par exemple, la méthode consistant à employer le comportement élastique non linéaire fictif (5.23)-(5.25) pour la matrice. En invoquant (2.148), on note que  $\Sigma$  et  $p$  n'interviennent que par le groupement de la contrainte effective de Terzaghi. Utilisant ensuite (3.79) et (3.82) dans (2.148), on retrouve facilement le critère (5.34). Ainsi, s'agissant d'un problème de calcul de résistance d'un V.E.R. à matrice de von Mises, la méthode d'homogénéisation non linéaire basée sur le moment d'ordre 2  $\bar{\varepsilon}_d$  (méthode mixte ou méthode modifiée car  $\varepsilon_v$  ne joue pas de rôle) démontre une certaine robustesse en préservant la propriété de l'écriture du critère en contrainte effective de Terzaghi [41]. Cette remarque encourage à l'utilisation de cette méthode d'homogénéisation si l'on rencontre des situations pour lesquelles il n'est pas possible de statuer par la théorie sur l'existence d'une contrainte effective.

Signalons enfin que le choix de la méthode d'homogénéisation est primordial pour montrer l'existence d'une contrainte effective car dans le cas général où les modules  $k^s$  et  $\mu^s$  dépendent des deux invariants, il est prouvé dans [41] que les méthodes classique et modifiée peuvent donner des résultats totalement différents, la première menant à une contrainte effective mais pas la seconde.

### 5.2.3 Cas sec bidimensionnel

Afin de pouvoir facilement comparer les résultats obtenus par homogénéisation non linéaire à des calculs numériques, on se propose de reproduire le raisonnement de 5.2.1 au cas des déformations planes en considérant un milieu poreux dont les pores sont des inclusions cylindriques à base circulaire d'axe  $\mathbf{e}_3$  perpendiculaire au plan de déformation  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . On choisit toujours le schéma de Mori-Tanaka pour l'étape linéaire. On utilise notamment le tenseur d'Eshelby fourni en annexe 3.2.3 avec  $\omega = 1$  pour estimer le tenseur de localisation dans les pores (2.30). Il est utile de rappeler que, dans le cas bidimensionnel, le schéma de Mori-Tanaka appliqué à un milieu poreux à matrice homogène correspond à la borne supérieure de Willis [100] lorsque les phases sont réparties de manière isotrope. On oriente  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  dans les directions principales de  $\mathbf{D}$  i.e. :

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + D_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (5.35)$$

Dans le régime asymptotique, on montre que l'incompressibilité de la phase solide implique que  $\Sigma (= \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{D})$  s'écrit :

$$\Sigma = \Sigma_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \Sigma_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (5.36)$$

Il est alors légitime d'adopter les notations :

$$\Sigma_m = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \quad ; \quad \Sigma_d = \frac{|\Sigma_1 - \Sigma_2|}{\sqrt{2}} \quad (5.37)$$

Par application de la méthode mixte (ou modifiée puisque l'on montre encore qu'elles sont équivalentes) à l'un ou l'autre des problèmes de 4.3, on obtient l'homologue bidimensionnel de (5.33) :

$$2\varphi \Sigma_m^2 + (1 + \varphi) \Sigma_d^2 = (1 - \varphi)^2 b^2 = \frac{2}{3} (1 - \varphi)^2 \sigma_o^2 \quad (5.38)$$

La FIG. 5.5 représente ce critère pour une porosité  $\varphi = 0.3$ . Celui-ci est confronté à des résultats numériques correspondant aux ensembles de charges limites (obtenus par des calculs élasto-plastiques) dans les cas suivants :

- calcul par éléments finis en conditions aux limites périodiques sur la cellule de base de la FIG. 5.4<sup>(1)</sup>,

<sup>(1)</sup>On trouvera des détails concernant ce type de conditions aux limites dans le cadre du calcul à la rupture dans [27] et [71].

- calcul par éléments finis en déformations homogènes au contour (D.H.) sur la cellule de la FIG. 5.4,
- calcul par éléments finis en déformations homogènes au contour (D.H.) sur un cylindre creux.

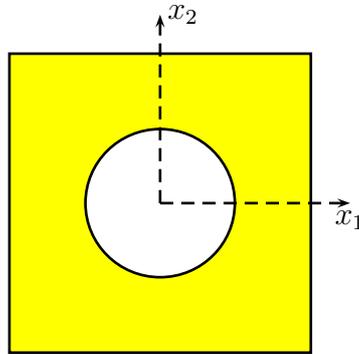
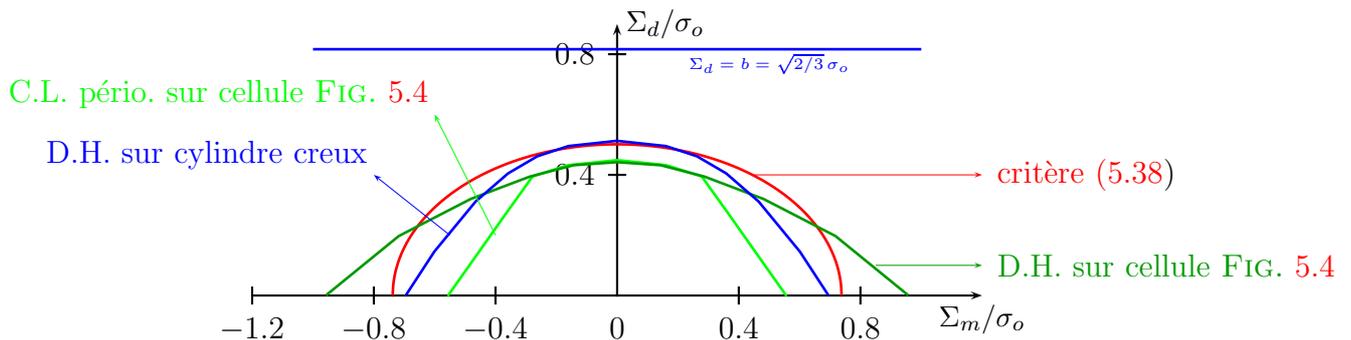


FIG. 5.4 – Cellule de base

FIG. 5.5 – Critère de rupture d'un milieu poreux en déformations planes -  $\varphi = 0.3$ 

Même s'il semble difficile de comparer des résultats fondés sur une distribution aléatoire des phases d'une part et sur une microstructure périodique d'autre part, on constate sur la FIG. 5.5 que l'ordre de grandeur de tous les critères est sensiblement le même. On peut toutefois noter qu'il est logique d'après [27] ou [71] de trouver que le domaine obtenu avec des conditions aux limites périodiques est inclus dans celui avec déformations homogènes au contour sur la cellule de la FIG. 5.4.

### 5.3 Application à un milieu renforcé

### 5.3.1 Détermination du critère macroscopique

Intéressons-nous à présent au cas d'un milieu renforcé où coexistent des inclusions rigides parfaitement adhérentes à la matrice et des inclusions rigides à surface lisse ( $\varphi^s = 1 - \varphi^r - \varphi^l$ ). On suppose que ces inclusions sont réparties de manière isotrope dans la matrice du V.E.R.. C'est donc à nouveau l'estimation de Mori-Tanaka que nous utiliserons pour construire  $\mathbb{C}^{hom}$  (4.71). Les modules  $k^{hom}$  et  $\mu^{hom}$  se déduisent alors de (2.38) et (2.39) avec  $\varphi = 0$ . Commençons par mettre en œuvre la méthode sécante modifiée par la formulation variationnelle de la section 5.1.2 et montrons a posteriori le lien qu'elle entretient avec la méthode mixte. Il faut noter ici que l'emploi du schéma linéaire de Mori-Tanaka pour estimer  $\mathbb{L}_n^{hom}$  ne conduit plus à une borne supérieure mais à la borne inférieure de Hashin-Shtrikman [102] lorsque l'on ne considère que des inclusions adhérentes. Ainsi l'estimation (5.18) de la fonction d'appui perd son statut de borne supérieure (5.12) (mais garde bien entendu celui d'estimation). Comme dans le cas poreux,  $\mathbb{L}_n^{hom}$  s'obtient formellement comme le tenseur d'élasticité macroscopique d'un milieu renforcé par des inclusions rigides dont la matrice a pour module de compression  $a_n^2$  et pour module de cisaillement  $b^2/2$  :

$$\mathbb{L}_n^{hom} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n^2 \frac{3}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \mathbb{J} + b^2 \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l} \mathbb{K} \quad (5.39)$$

En rappelant  $\varphi^s = 1 - \varphi^r - \varphi^l$ , les demi-axes du critère macroscopique définis en (5.19) s'écrivent ici, dans le régime asymptotique, à partir de (5.39) :

$$A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n \quad ; \quad B_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left(1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l\right)}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l}} = B \quad (5.40)$$

Il apparaît donc que, lorsque  $n$  tend vers l'infini, le domaine elliptique  $G_n^{hom}$  (5.19) de demi-axes exprimés en (5.40) tend vers le critère de von Mises dont la frontière est définie par l'équation :

$$\Sigma_d = B = b \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left(1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l\right)}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l}} \quad (5.41)$$

Autrement dit, le critère macroscopique issu d'un schéma de Mori-Tanaka est un critère de von Mises de résistance en traction simple :

$$\Sigma_o^{hom} = \sigma_o \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left(1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l\right)}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l}} \quad (5.42)$$

Il faut rappeler à ce stade qu'en présence d'inclusions lisses le schéma linéaire sous-jacent n'est physiquement pertinent que dans le domaine des forts confinements (cf. remarque consécutive à (1.44)). On continue néanmoins à considérer l'ensemble du domaine en gardant à l'esprit que sa validité n'est assurée que lorsque  $-\Sigma_m$  est suffisamment grand.

Lorsque  $n$  est au voisinage de l'infini, la frontière de  $G_n^{hom}$  est obtenue par la courbe paramétrique (5.20) qui s'écrit ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_m \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_n^2 \frac{D_v}{D_d}}{\sqrt{a_n^2 \left(\frac{D_v}{D_d}\right)^2 + B^2}} \\ \Sigma_d \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{B^2}{\sqrt{a_n^2 \left(\frac{D_v}{D_d}\right)^2 + B^2}} \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Il est clair que lorsque  $n$  tend vers l'infini, il n'est possible de tendre vers n'importe quel point de la frontière du critère (5.41) qu'en faisant varier le rapport  $D_v/D_d$  avec  $n$  de sorte que l'on ait :

$$\frac{D_v}{D_d} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \quad (5.44)$$

On vérifie bien au passage que cela est parfaitement cohérent avec la règle de normalité du critère de von Mises puisque l'on a  $D_v \ll D_d$ . Le couplage entre  $D_v/D_d$  et  $a_n$  a des conséquences sur les taux de déformations effectifs. Exprimons d'abord les moments  $\bar{d}_v$  et  $\bar{\bar{d}}_v$  pour comparer la méthode mixte et la méthode modifiée. En changeant les déformations en taux de déformations, le premier s'obtient par (2.118) et le second par (2.152). On a donc :

$$\bar{d}_v = \frac{D_v}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \quad (5.45)$$

et

$$\bar{\bar{d}}_v \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{(1 - \varphi^r - \varphi^l)^2} D_v^2 + \frac{2}{15} \frac{25\varphi^r(1 - \varphi^r) + 4\varphi^l(1 - \varphi^l) - 20\varphi^r\varphi^l}{(1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l)^2} \left(\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^s}{\bar{\bar{k}}_n^s}\right)^2 D_d^2} \quad (5.46)$$

A priori,  $\bar{d}_v$  et  $\bar{\bar{d}}_v$  ne sont pas équivalents. En revanche, on montre à l'aide de (5.10) et (5.44) que le groupement  $(\bar{\bar{\mu}}_n^s/\bar{\bar{k}}_n^s)^2 D_d^2$  est de l'ordre de grandeur de  $D_v^2$  et donc  $\bar{d}_v$  (5.45) et  $\bar{\bar{d}}_v$  (5.46) sont tous les deux de l'ordre de grandeur de  $D_v$ . D'autre part, on calcule  $\bar{\bar{d}}_d$  en adaptant (2.153) et en utilisant (2.38) et (2.39) :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{d}}_d &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\varphi^r + \varphi^l}{(1 - \varphi^r - \varphi^l)^2} D_v^2 + \frac{(1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l)}{(1 - \varphi^r - \varphi^l)(1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l)} D_d^2} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{(1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l)}{(1 - \varphi^r - \varphi^l)(1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l)}} D_d \end{aligned} \quad (5.47)$$

On déduit donc de (5.45), (5.46) et (5.47) que l'on a :

$$\frac{\bar{d}_v}{\bar{\bar{d}}_d} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\bar{\bar{d}}_v}{\bar{\bar{d}}_d} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \quad (5.48)$$

Ceci implique immédiatement que le rapport des invariants effectifs se comporte de la même manière lorsque  $n$  est au voisinage de l'infini que dans le cas poreux (cf. § 5.2.1). Les modules effectifs prennent la même expression que (5.31). Ainsi, asymptotiquement, les modules ne dépendent plus du premier invariant et la méthode mixte fournit donc le même critère que la méthode modifiée. On vérifie sans peine que l'utilisation de toutes les méthodes présentées en 4.3 conduit toujours au critère macroscopique de von Mises (5.41).

Pour pouvoir comparer l'influence du schéma et des hypothèses morphologiques comme on l'a fait à la section 2.1.5 dans le cadre de l'élasticité, on reproduit le même raisonnement en utilisant le schéma auto-cohérent comme schéma linéaire. On aboutit alors également à un critère macroscopique de type von Mises de résistance à la traction simple :

$$\Sigma_o^{hom(AC)} = \sigma_o \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left(1 - \frac{3}{5}\varphi^l\right)}{1 - \frac{5}{2}\varphi^r - \frac{8}{5}\varphi^l}} \quad (5.49)$$

On voit apparaître sur (5.49) un critère de percolation pour lequel  $\Sigma_o^{hom(AC)}$  tend vers l'infini :

$$1 - \frac{5}{2}\varphi^r - \frac{8}{5}\varphi^l = 0 \quad (5.50)$$

### 5.3.2 Discussion sur le critère macroscopique

#### Inclusions adhérentes seules

Dans le cas où les inclusions sont toutes adhérentes, la résistance en traction simple s'écrit dans le cas de Mori-Tanaka (5.42) :

$$\Sigma_o^{hom} = \sigma_o \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varphi^r} \quad (5.51)$$

Il ne fait donc aucun doute que, conformément à l'intuition, la présence de renforts rigides tend à augmenter la résistance du matériau puisque  $\Sigma_o^{hom}$  (5.51) croît avec  $\varphi^r$  (cf. FIG. 5.6). L'utilisation du schéma auto-cohérent (5.49) conduit également à cette conclusion avec une percolation atteinte pour  $\varphi^r = 2/5$ .

#### Inclusions lisses seules

Dans le cas où les inclusions sont toutes lisses, la résistance en traction simple dans le cas de Mori-Tanaka (5.42) devient :

$$\Sigma_o^{hom} = \sigma_o \sqrt{\frac{(1 - \varphi^l) \left(1 + \frac{3}{5}\varphi^l\right)}{1 - \frac{2}{5}\varphi^l}} \quad (5.52)$$

L'analyse de la fonction (5.52) démontre que  $\Sigma_o^{hom}$  décroît avec  $\varphi^l$ , ce qui tend à prouver que la présence de renforts lisses affaiblit le matériau (cf. FIG. 5.6). Ainsi, d'une part, l'espace occupé par les renforts gênent le développement de certains mécanismes de rupture mais, d'autre part, le défaut d'adhérence à la surface qui permet l'apparition de glissements sans dissipation énergétique en favorise d'autres. D'après (5.52), on peut conclure que le deuxième effet (affaiblissant) est prépondérant sur le premier (renforçant).

Il faut rapprocher les deux résultats précédents concernant l'analyse du renforcement par l'un ou l'autre des deux types d'inclusion rigide à ce qui a été fait à la section 2.1.5 dans le cadre des propriétés élastiques (i.e. on peut notamment comparer la FIG. 2.2 et la FIG. 5.6). Alors que les inclusions lisses contribuait à rigidifier le v.e.r., elles tendent au contraire ici à diminuer la capacité de résistance.

Ce raisonnement ne tient plus du tout si on considère le schéma auto-cohérent (5.49) qui

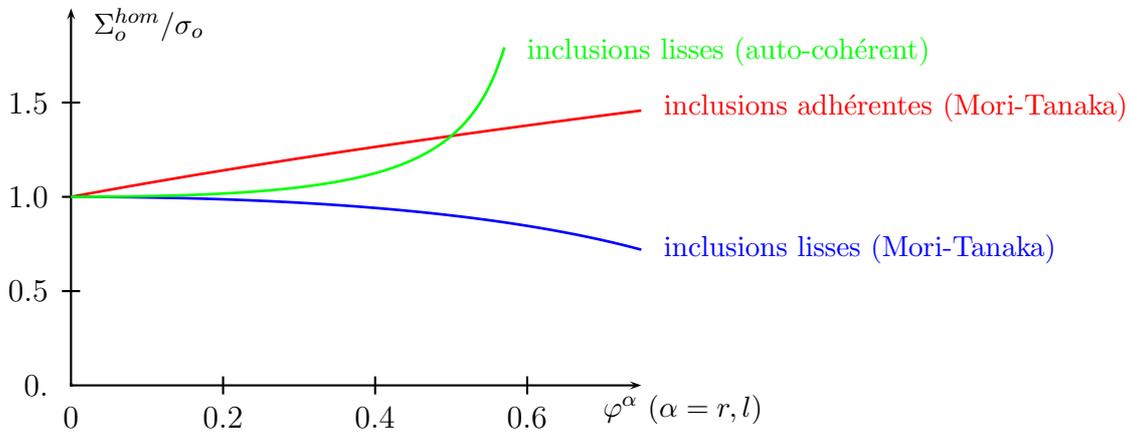


FIG. 5.6 – Résistance en traction simple macroscopique

donne ici :

$$\Sigma_o^{hom(AC)} = \sigma_o \sqrt{\frac{(1 - \varphi^l) \left(1 - \frac{3}{5}\varphi^l\right)}{1 - \frac{8}{5}\varphi^l}} \quad (5.53)$$

En effet, on assiste alors à une augmentation de la résistance du matériau (cf. FIG. 5.6) lorsque  $\varphi^l$  augmente. Dans le cas du schéma auto-cohérent qui s'appuie sur une morphologie totalement désordonnée, il est raisonnable de penser que les mécanismes de rupture seront moins favorisés, même si les inclusions sont lisses, que dans le cas où il existe une phase matricielle connexe (Mori-Tanaka). Le choix du schéma reposant sur une hypothèse morphologique, il s'agira donc d'être très vigilant sur la validité de l'hypothèse choisie.

### Coexistence des deux types de renforts

Comme on l'a fait dans le cadre de l'élasticité à la section 2.1.5, on fixe la fraction volumique de renforts  $\varphi^r + \varphi^l$  et on évalue sur la FIG. 5.7 l'incidence de l'augmentation de  $\varphi^l$

sur la résistance du matériau (dans le cadre du schéma de Mori-Tanaka). Comme prévu,

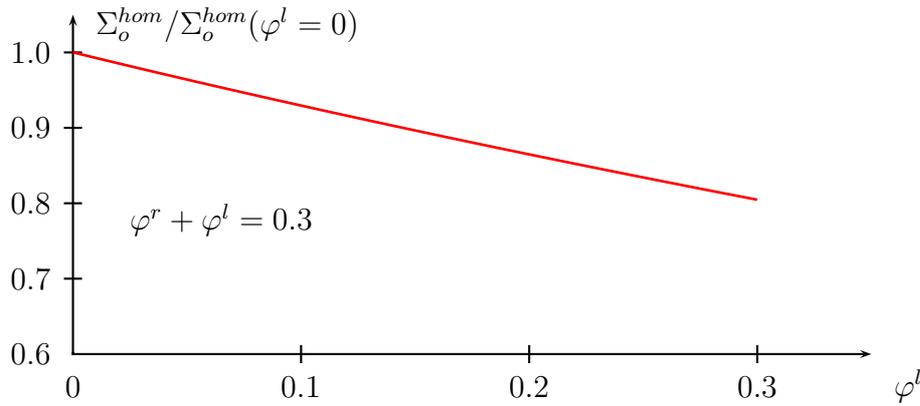


FIG. 5.7 – Endommagement de la résistance du matériau par réduction de l’adhérence des renforts

l’augmentation des inclusions lisses au détriment de celles adhérentes diminue la capacité de résistance du matériau tout comme elle diminue sa raideur (cf. FIG. 2.2). Néanmoins ce modèle ne rend pas compte de la perte d’adhérence sur une partie seulement de l’inclusion et ne prévoit pas de loi d’évolution de l’endommagement.

On a déjà montré dans le cadre de l’élasticité à la section 2.1.5 que la prise en compte de plusieurs types d’inclusions dans le schéma de Mori-Tanaka pouvait conduire à des incohérences si l’on n’était pas vigilant sur les hypothèses morphologiques de ce schéma. On a également montré au paragraphe précédent que le choix du schéma avait une importance cruciale sur le rôle des renforts lisses (même d’un point de vue purement qualitatif). On envisage ici de fixer la valeur de  $\varphi^l$  et d’examiner l’évolution de  $\Sigma_o^{hom}$  avec le schéma de Mori-Tanaka (5.42) et le schéma auto-cohérent (5.49). On constate sur la FIG. 5.8 que, pour  $\varphi^l = 0.1$ , le schéma de Mori-Tanaka prévoit une légère croissance de  $\Sigma_o^{hom}$  avec  $\varphi^r$  puis une nette décroissance jusque 0. Cette nouvelle incohérence peut être écartée en notant que la fraction volumique pour laquelle la décroissance intervient est trop grande pour lui accorder un réel sens physique (de l’ordre de 0.7). En fait, on peut calculer que cette phase s’amorce lorsque  $\varphi^r$  et  $\varphi^l$  satisfont :

$$\varphi^r = 1 - \frac{2}{5}\varphi^l - \sqrt{\varphi^l} \quad (5.54)$$

On montre donc que cette phase de décroissance n’intervient que pour  $\varphi^r + \varphi^l \geq 7/12 \approx 0.58$  c’est-à-dire pour des fractions volumiques trop grandes pour que l’on puisse toujours accorder un crédit au schéma de Mori-Tanaka. Néanmoins il faut encore percevoir là une faiblesse du schéma de Mori-Tanaka du même type que celle mise en évidence à la section 2.1.5. L’évolution de  $\Sigma_o^{hom}$  dans le cas du schéma auto-cohérent est différente puis-

qu'elle prévoit une augmentation très prononcée qui atteint la percolation (5.50). Il paraît encore une fois évident que le choix du schéma est crucial.

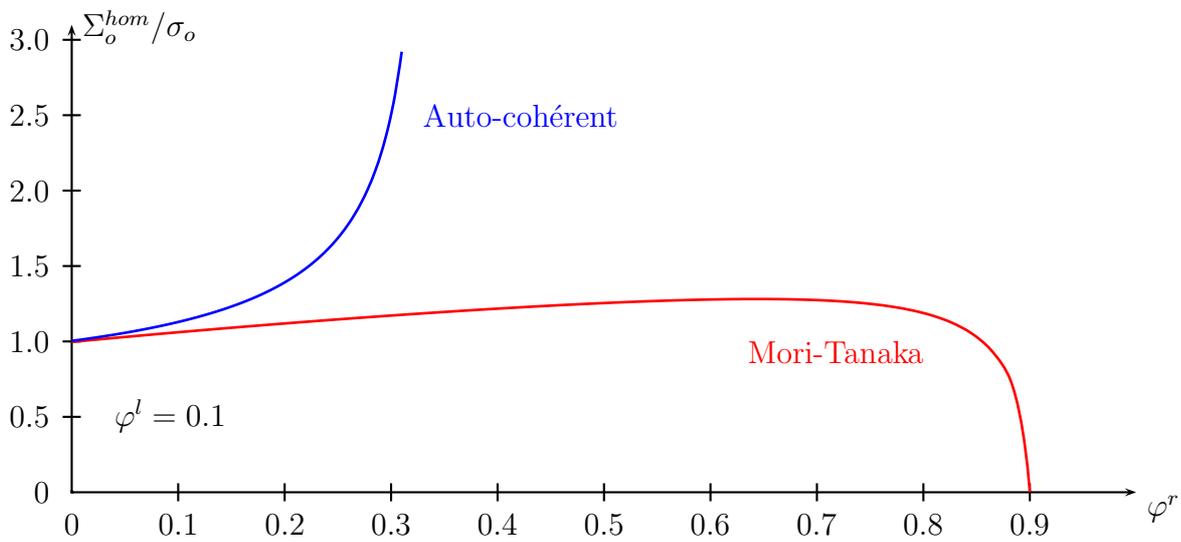


FIG. 5.8 – Effet de l'ajout de renforts rigides en présence de renforts lisses sur la résistance macroscopique

# Chapitre 6

## Matrice de Drucker-Prager

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Le critère de Drucker-Prager</b>	<b>127</b>
6.1.1	Définition du critère	127
6.1.2	Régularisation du critère	128
6.1.3	Loi contrainte-déformation non linéaire	133
<b>6.2</b>	<b>Application à un milieu poreux à matrice homogène</b>	<b>135</b>
6.2.1	Cas sec tridimensionnel	136
6.2.2	Cas pressurisé	140
6.2.3	Cas sec bidimensionnel	140
<b>6.3</b>	<b>Application à un milieu renforcé</b>	<b>141</b>
6.3.1	États limites dans le cas associé (critère de résistance macroscopique)	141
6.3.2	États limites dans le cas non associé	145
6.3.3	Validation expérimentale des modèles	147

---



Les méthodes du chapitre 4 nous ont permis de traiter le critère de résistance d'un v.e.r. à matrice de von Mises au chapitre 5. Nous avons retrouvé des résultats obtenus par divers auteurs par des méthodes différentes et nous avons étendu ces résultats en introduisant des inclusions lisses. Mais l'originalité de notre méthode est qu'elle permet également de traiter le cas d'une phase solide dont le critère de résistance est frottant, en l'occurrence celui de Drucker-Prager. Après la présentation du critère et la mise en place des outils nécessaires à l'homogénéisation non linéaire, on mettra en œuvre celle-ci dans le cas du milieu poreux et du milieu renforcé.

## 6.1 Le critère de Drucker-Prager

### 6.1.1 Définition du critère

Le critère de Drucker-Prager fait partie des critères frottants : contrairement à von Mises (5.1),  $f^s$  dépend de la pression de confinement :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d + t(\sigma_m - h) \quad (6.1)$$

où  $t$ ,  $h$  et  $c = ht$  désignent respectivement le coefficient de frottement, la résistance en traction isotrope et la cohésion. Dans l'espace des contraintes, le domaine des états de contrainte admissibles  $G^s$  (4.1) est représenté par un cône de sommet  $h\mathbf{1}$  et de demi-angle au sommet  $\arctan t$ . Dans le demi-plan  $(\sigma_m, \sigma_d \geq 0)$ , l'ensemble  $G^s$  est représenté par la zone délimitée par les droites d'équations  $\sigma_d = t(h - \sigma_m)$  et  $\sigma_d = 0$ .

Le coefficient de frottement ne peut pas prendre des valeurs aussi grandes que l'on souhaite. En effet, dans [30] l'auteur avance l'argument d'origine physique que lorsque la cohésion est nulle, il faut limiter le coefficient de frottement afin d'éviter que des états de contrainte possédant au moins une valeur principale positive n'appartiennent au domaine de résistance. Il admet également que cette limitation vaut aussi lorsque la cohésion est non nulle. Le coefficient de frottement est ainsi limité par :

$$0 \leq t \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (6.2)$$

La fonction d'appui (4.2) du critère de Drucker-Prager s'écrit [90] :

$$\begin{cases} d_v \geq t d_d \Rightarrow \pi^s(\mathbf{d}) = h d_v \\ d_v < t d_d \Rightarrow \pi^s(\mathbf{d}) = +\infty \end{cases} \quad (6.3)$$

La fonction d'appui (6.3) ne présente pas la régularité requise pour poser le problème visqueux (4.36). Cette fonction n'est en effet différentiable que sur  $\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^6 \mid d_v > t d_d\}$

et le seul état de contrainte que l'on puisse atteindre par différentiation de  $\pi^s$  sur cet ensemble est le sommet  $h\mathbf{1}$ . Il faut donc à nouveau recourir à une régularisation du critère (cf. § 4.3.1) ou utiliser une loi de comportement fictive (cf. § 4.3.2) pour estimer  $G^{hom}$  par la technique d'homogénéisation de la section 4.4.

### 6.1.2 Régularisation du critère

#### Définition de la suite de régularisation

Comme on l'a fait pour von Mises en (5.3), on introduit une suite de critères  $(f_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  correspondant à des domaines  $G_n^s$  bornés strictement convexes tendant vers le critère de Drucker-Prager au sens de (4.50) :

$$f_n^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d + \frac{t}{2(h + a_n)} (\sigma_m - h) (\sigma_m + h + 2a_n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad (6.4)$$

Le caractère borné strictement convexe des domaines  $G_n^s$ , représentés par des para-

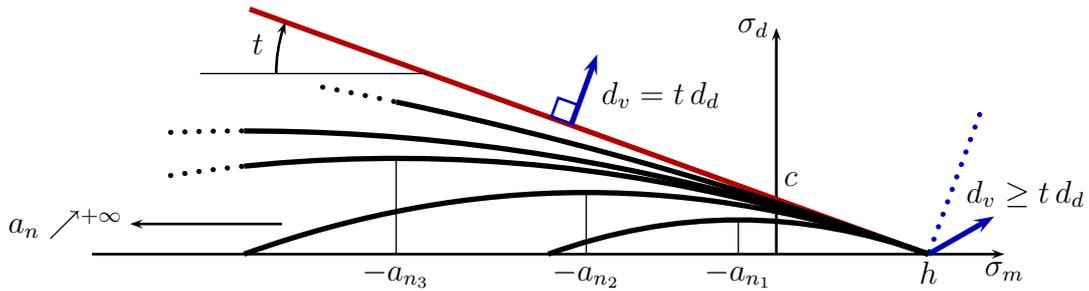


FIG. 6.1 – Approximation du critère de Drucker-Prager par une suite de paraboles

boles dans le demi-plan  $(\sigma_m, \sigma_d)$  (cf. FIG. 6.1), assure à leurs fonctions d'appui  $\pi_n^s$  la différentiabilité sur  $\mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{0}\}$  d'après l'annexe 7.1.1. Pour calculer  $\pi_n^s$ , on utilise à nouveau le résultat (7.2) selon lequel, pour tout  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ , il existe un unique état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^* \in \partial G_n^s$  tel que  $\pi_n^s(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d}$ . Un raisonnement géométrique simple montre que si  $d_v \geq t d_d$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^* = h\mathbf{1}$  et donc  $\pi_n^s(\mathbf{d}) = h d_v$ , et, si  $d_v \leq -t d_d$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^* = -(h + 2a_n)\mathbf{1}$  et donc  $\pi_n^s(\mathbf{d}) = -(h + 2a_n)d_v$ . Lorsque  $|d_v| < t d_d$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^*$  se situe en un point régulier de  $\partial G_n^s$  (i.e.  $\sigma_d^* \neq 0$ ). Puis comme  $f_n^s$  (6.4) est différentiable,  $\mathbf{d}$  est orienté selon la normale extérieure à  $G_n^s$  c'est-à-dire parallèle à  $\partial f_n^s / \partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*)$  :

$$\mathbf{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial f_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^*) = \dot{\lambda} \left( \frac{1}{3} t \frac{\sigma_m^* + a_n}{h + a_n} \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_d^*}{\sigma_d^*} \right) \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (6.5)$$

ce qui donne en termes d'invariants :

$$d_v = \dot{\lambda} t \frac{\sigma_m^* + a_n}{h + a_n} \quad ; \quad d_d = \dot{\lambda} \quad (6.6)$$

En exploitant (6.6) et l'équation  $f_n^s(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0$  (car  $\boldsymbol{\sigma}^* \in \partial G_n^s$ ), on obtient :

$$\sigma_m^* = -a_n + \frac{h + a_n}{t} \frac{d_v}{d_d} \quad ; \quad \sigma_d^* = \frac{h + a_n}{2t} \left( t^2 - \left( \frac{d_v}{d_d} \right)^2 \right) \quad (6.7)$$

En notant que  $\boldsymbol{\sigma}_d^*$  et  $\mathbf{d}_d$  sont parallèles (6.5), la fonction  $\pi_n^s$  s'écrit :

$$\pi_n^s(\mathbf{d}) = \sigma_m^* d_v + \sigma_d^* d_d \quad (6.8)$$

En remplaçant  $\sigma_m^*$  et  $\sigma_d^*$  par leurs expressions (6.7),  $\pi_n^s$  s'écrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_v \geq t d_d \Rightarrow \pi_n^s(\mathbf{d}) = h d_v \\ d_v \leq -t d_d \Rightarrow \pi_n^s(\mathbf{d}) = -(h + 2a_n) d_v \\ |d_v| \leq t d_d \Rightarrow \pi_n^s(\mathbf{d}) = \frac{1}{2t d_d} (h (d_v^2 + t^2 d_d^2) + a_n (d_v - t d_d)^2) \end{array} \right. \quad (6.9)$$

On rappelle que le critère macroscopique est théoriquement obtenu en résolvant le problème d'optimisation (4.20) donnant la fonction d'appui macroscopique  $\Pi^{hom}$ . Il s'agit donc de s'intéresser aux tenseurs  $\mathbf{D}$  pertinents (i.e. tels que  $\Pi^{hom}(\mathbf{D}) < +\infty$ ) pour déterminer  $G^{hom}$ . Pour une telle direction pertinente  $\mathbf{D}$ , la solution du problème d'optimisation doit être telle que  $\pi^s(\mathbf{d}) < +\infty$  partout dans  $\Omega^s$ . Il est clair sur (6.9) que cette condition est asymptotiquement atteinte, quand  $n$  tend vers l'infini, si la suite des taux de déformation solutions des problèmes d'optimisation analogues à (4.20) en remplaçant la fonction  $\pi^s$  par  $\pi_n^s$  vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_v}{d_d} \geq t \quad (6.10)$$

Notons au passage que, comme dans le chapitre 5 consacré à von Mises, la dépendance du champ  $\mathbf{d}$  en  $n$  est implicite.

D'après (6.9), pour  $n$  au voisinage de l'infini, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_v}{d_d} \geq t \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \pi_n^s}{\partial \mathbf{d}} = h \mathbf{1} \quad (a) \\ \frac{d_v}{d_d} < t \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_v}{d_d} = t \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \pi_n^s}{\partial \mathbf{d}} \in \partial G^s \quad (b) \quad (6.11)$$

Dans le cas (6.11 b), n'importe quel état de contrainte de la frontière du critère de Drucker-Prager (6.1) peut être atteint par les expressions (6.7) pourvu que soit assurée l'existence de la limite :

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left( \frac{d_v}{d_d} - t \right) \quad (6.12)$$

Les modules sécants  $k_n^s$  et  $\mu_n^s$  se déduisent des valeurs de  $\pi_n^s$  (6.9) par les formules (4.45). Il apparaît clairement sur la FIG. 6.1 qu'un tel calcul va générer des valeurs négatives de  $k_n^s = \sigma_m^*/d_v$  pour certaines directions de  $\mathbf{d}$  dans le cas  $|d_v| \leq t d_d$ . En fait, le seul moyen d'assurer la positivité de  $k_n^s$  est d'introduire une précontrainte isotrope comme dans la formulation (4.47)-(4.49) de sorte que le rapport  $k_n^s = (\sigma_m^* - \sigma_{s_n}^p)/d_v$  garde un signe positif pour toutes les directions de  $\mathbf{d}$ . On constate sur la FIG. 6.1 que le seul candidat correspond au centre de symétrie de la parabole i.e.  $\sigma_{s_n}^p = -a_n$ . Pour ce choix, la formulation (4.47) du comportement visqueux est entièrement défini par :

$d_v \geq t d_d$	$k_n^s = \frac{h}{d_v}$	$2 \mu_n^s = 0$	$\sigma_{s_n}^p = 0$	(a)	(6.13)
$d_v \leq -t d_d$	$k_n^s = -\frac{h + 2 a_n}{d_v}$	$2 \mu_n^s = 0$	$\sigma_{s_n}^p = 0$	(b)	
$ d_v  \leq t d_d$	$k_n^s = \frac{h + a_n}{t d_d}$	$2 \mu_n^s = \frac{h + a_n}{2 t d_d} \left( t^2 - \left( \frac{d_v}{d_d} \right)^2 \right)$	$\sigma_{s_n}^p = -a_n$	(c)	

D'après (6.13), pour  $|d_v| \geq t d_d$ , le rapport  $\mu_n^s/k_n^s$  est nul et pour  $|d_v| \leq t d_d$ , on a :

$$\frac{\mu_n^s}{k_n^s} = \frac{1}{4} \left( t^2 - \left( \frac{d_v}{d_d} \right)^2 \right) \quad (6.14)$$

qui tend vers 0 car, d'après le raisonnement effectué un peu plus haut, on sait que, dans cette situation,  $d_v/d_d$  tend vers  $t$ . Ainsi, dans tous les cas, le comportement visqueux fictif de la phase solide satisfait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^s}{k_n^s} = 0 \quad (6.15)$$

Pour caractériser les invariants effectifs lorsque  $n$  tend vers l'infini, on peut obtenir des informations par moyenne quadratique des relations de (6.11). Il existe deux cas de figure :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{d_v}} &\geq t \overline{\overline{d_d}} & (a) \\ \text{ou} & & (6.16) \\ \overline{\overline{d_v}} &< t \overline{\overline{d_d}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\overline{d_v}}}{\overline{\overline{d_d}}} = t & (b) \end{aligned}$$

Lorsque le mécanisme optimal du problème visqueux est tel que l'état de déformation vérifie (6.11 b), autrement dit tous les états de contrainte de la frontière de  $G^s$  sont accessibles et la règle de dilatance est satisfaite partout dans  $\Omega^s$  soit  $d_v \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} t d_d$ , on retrouve (6.16 b) en passant à la moyenne quadratique et on peut introduire les notations

suivantes :

$$\begin{aligned} X_n &= t - \frac{\bar{d}_v}{\bar{d}_d} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \\ Y_n &= a_n X_n \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y \geq 0 \quad \text{et} \quad a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{X_n}\right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Dans le cadre de la méthode modifiée basée sur les moments d'ordre 2, le rapport des modules effectifs s'écrit alors :

$$\frac{\bar{\mu}_n^s}{\bar{k}_n^s} = \frac{1}{4} \left( t^2 - \left( \frac{\bar{d}_v}{\bar{d}_d} \right)^2 \right) = \frac{t}{2} X_n + \mathcal{O}(X_n^2) \quad (6.18)$$

Ainsi dans les deux cas (6.16 a) et (6.16 b), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\mu}_n^s}{\bar{k}_n^s} = 0 \quad (6.19)$$

Bien que l'on préfère les déformations effectives mixtes, il est manifeste que seule la méthode modifiée permet de démontrer que la règle de dilatance reste valable sur les déformations effectives. Alors que les éventuels changements de signe de  $d_v$  représentent l'inconvénient majeur de la méthode modifiée, dans le cas présent, la règle de dilatance locale assure à  $d_v$  un signe constamment positif et la moyenne quadratique de  $d_v$  est bien représentative de l'état moyen de déformation volumique. On s'attachera néanmoins dans la suite à montrer que la méthode mixte est identique à la méthode modifiée dans le sens où  $\bar{d}_v$  et  $\bar{\bar{d}}_v$  sont équivalents.

Il faut préciser à ce stade que le problème variationnel équivalent à la méthode sécante modifiée de l'annexe 7.3 adaptée au cas de la fonction d'appui  $\pi_n^s$  (6.9) ne fournit pas de majoration de la fonction d'appui macroscopique comme ce fut le cas pour von Mises (5.12). Il n'est pas non plus possible de montrer que la résolution de ce problème variationnel se ramène à celle d'un problème d'homogénéisation linéaire comme en (5.17). Il est nécessaire, cette fois, d'appliquer strictement la technique présentée à la section 4.4.

### Régularisation par une suite de potentiels

Une méthode alternative à la régularisation par une suite de critères est la régularisation par une suite de potentiels convergeant vers la fonction d'appui (6.3) au sens (4.53) (cf. § 4.3.1). En retranchant à la fonction d'appui de Drucker-Prager (6.3) le terme  $h d_v$ , on construit une fonction de  $\mathbf{d}$  valant 0 lorsque le groupement  $d_v - t d_d$  est positif et  $+\infty$  lorsque ce dernier est strictement négatif. On choisit donc, comme dans [7] et [9], de régulariser  $\pi^s$  par une suite de potentiels  $\psi_n^s$ , chacun écrit comme la somme d'une fonction (à variable scalaire) de  $d_v - t d_d$  et de  $h d_v$  :

$$\psi_n^s(\mathbf{d}) = f_n(d_v - t d_d) + h d_v \quad (6.20)$$

où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de fonctions de classe au moins  $\mathcal{C}^2$  convexes décroissantes telles que (cf. FIG. 6.2) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in ]-\infty, -\epsilon_n] & f_n(x) = +\infty \\ \text{sur } ]-\epsilon_n, 0[ & f_n \text{ convexe décroissante} \\ \forall x \in [0, +\infty[ & f_n(x) = 0 \end{array} \right. \quad (6.21)$$

En faisant tendre le paramètre  $\epsilon_n$  vers 0, il est clair que  $\psi_n^s$  (6.20) tend vers  $\pi^s$  (6.3).

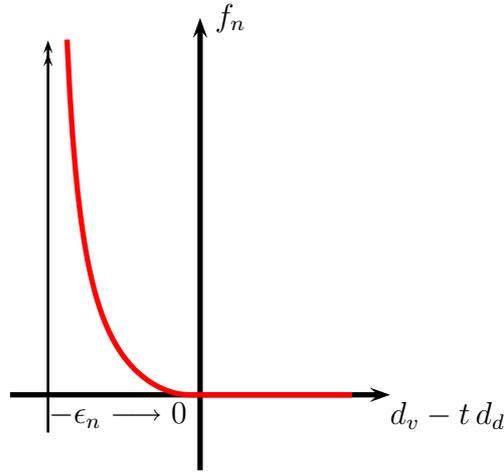


FIG. 6.2 – Fonctions  $f_n$

On montre la convexité de  $\psi_n^s$  en calculant sa différentielle seconde. En introduisant la notation

$$\delta = d_v - t d_d \quad (6.22)$$

on a :

$$\frac{\partial^2 \psi_n^s}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}} = f_n''(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{d}} \otimes \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{d}} + f_n'(\delta) \frac{\partial^2 \delta}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}} \quad (6.23)$$

En raison de la convexité de  $f_n$ , le premier terme du membre de droite de (6.23) correspond à une forme quadratique positive. Pour montrer la positivité du second terme, comme  $f_n$  est décroissante, il suffit de montrer que  $\partial^2 \delta / \partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}$  est une forme quadratique négative, ce que l'on prouve en appliquant le théorème de Cauchy-Schwartz à :

$$\forall \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} : \frac{\partial^2 \delta}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}} : \mathbf{X} = -\frac{t}{d_d} \left( \mathbf{X}_d : \mathbf{X}_d - \frac{(\mathbf{X}_d : \mathbf{d}_d)^2}{d_d^2} \right) \leq 0 \quad (6.24)$$

La loi de comportement issue du potentiel  $\psi_n^s$  (6.20) s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = f_n'(\delta) \left( \mathbf{1} - t \frac{\mathbf{d}_d}{d_d} \right) + h \mathbf{1} \quad (6.25)$$

On cherche alors à exprimer la relation (6.25) sous une forme (4.47) qui assure la positivité des modules  $k^s$  et  $\mu^s$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{f'_n(\delta)}{\delta}}_{k_n^s} d_v \mathbf{1} + \underbrace{\left(-\frac{t f'_n(\delta)}{d_d}\right)}_{2 \mu_n^s} \mathbf{d}_d + \underbrace{\left(h - \frac{t d_d f'_n(\delta)}{\delta}\right)}_{\sigma_{s_n}^p} \mathbf{1} \quad (6.26)$$

Cette décomposition n'est pas l'unique possible puisqu'il suffit de vérifier  $k_n^s d_v + \sigma_{s_n}^p = \partial \psi_n^s / \partial d_v$  mais tout autre choix ne modifierait pas les résultats ultérieurs [7]. Le choix (6.26) correspond à la plus petite valeur possible de  $k_n^s$  dans la mesure où ce module tend vers 0 lorsque  $\delta$  tend vers 0. On constate en effet que, pour  $\delta = d_v - t d_d \in ]-\epsilon_n, 0]$ , lorsque  $\epsilon_n$  tend vers 0,  $\delta$  ainsi que le rapport  $\mu_n^s / k_n^s = -t \delta / (2 d_d)$  tendent vers 0. Il est intéressant de remarquer que la loi de comportement (6.26) permet de générer n'importe quel état de contrainte appartenant à la frontière du critère de Drucker-Prager si et seulement si  $\mathbf{d}$  est tel que  $\delta = d_v - t d_d \in ]-\epsilon_n, 0]$  puisque  $f'_n(\delta)$  peut alors prendre n'importe quelle valeur négative. Ainsi, à part peut-être au niveau des zones où  $\boldsymbol{\sigma}$  se trouve sur le sommet du critère, on vérifie asymptotiquement la relation de dilatance  $d_v = t d_d$  et  $\mu_n^s / k_n^s \rightarrow 0$ . Supposons que, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $f'_n(\delta)$  tende vers  $F \in \mathbb{R}_-$ . La loi de comportement (6.25) devient alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = F \left( \mathbf{1} - t \frac{\mathbf{d}_d}{d_d} \right) + h \mathbf{1} \quad ; \quad F \leq 0 \quad (6.27)$$

On remarque que l'expression (6.27) correspond exactement à la loi de comportement (transposée en taux de déformation) dérivée du potentiel  $\pi^s(\mathbf{d}) = h d_v$  en tenant compte d'une liaison interne s'écrivant  $d_v - t d_d \geq 0$  [92]. Le scalaire négatif  $F$  désigne alors le multiplicateur de Lagrange relatif à cette liaison. Par des passages à la limite, on déduit de (6.26) les relations :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n^s d_v + \sigma_{s_n}^p = h + F \quad (6.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \mu_n^s d_d = -t F \quad (6.29)$$

### 6.1.3 Loi contrainte-déformation non linéaire

Par la méthode visqueuse et les régularisations spécifiques à Drucker-Prager (cf. § 6.1.2), on est en mesure d'estimer la critère de résistance macroscopique, c'est-à-dire l'ensemble des états de contrainte macroscopiques que l'on peut atteindre si le comportement local est élasto-plastique associé (discussion du paragraphe 4.3.2). Dans le cas de Drucker-Prager, la règle de normalité signifie que l'angle de dilatance est égal à l'angle de frottement i.e.  $t' = t$  dans :

$$d_v = t' d_d \quad (6.30)$$

Or la plasticité associée est loin d'être une propriété acquise en ce qui concerne les géomatériaux. On peut donc se poser la question de la détermination des états limites lorsque la plasticité n'est pas associée.

### Loi élastique non linéaire

Essayons dans un premier temps de construire une loi de comportement fictive élastique non linéaire i.e. dérivant d'un potentiel  $\psi^s$  (4.65) telle que, lorsque les déformations deviennent grandes, l'état de contrainte sature le critère au sens de (4.58). On a donc ici asymptotiquement :

$$\frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_d} + t \left( \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_v} - h \right) = 0 \quad (6.31)$$

Les seules fonctions vérifiant (6.31) s'écrivent :

$$\psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}) = f(\varepsilon_v - t \varepsilon_d) + h \varepsilon_v \quad (6.32)$$

où  $f$  est une fonction arbitraire décroissante et convexe pour satisfaire la convexité de  $\psi^s$ . Ce potentiel est analogue à celui utilisé en (6.20) pour régulariser la fonction d'appui à la mince différence qu'il est argumenté à présent par le tenseur de déformation. D'après les commentaires du paragraphe 6.1.2, il est évident que l'on peut modéliser le cas associé en choisissant à la place de  $f$ , la suite de fonctions  $f_n$  (6.21). En transposant ici les résultats obtenus dans le cas du potentiel visqueux en (6.26), (6.28) et (6.29), on obtient [6] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{f'_n(\varepsilon_v - t \varepsilon_d)}{\varepsilon_v - t \varepsilon_d}}_{k_n^s} \varepsilon_v \mathbf{1} + \underbrace{\left( -\frac{t f'_n(\varepsilon_v - t \varepsilon_d)}{\varepsilon_d} \right)}_{2 \mu_n^s} \boldsymbol{\varepsilon}_d + \underbrace{\left( h - \frac{t \varepsilon_d f'_n(\varepsilon_v - t \varepsilon_d)}{\varepsilon_v - t \varepsilon_d} \right)}_{\sigma_{sn}^p} \mathbf{1} \quad (6.33)$$

et les limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\varepsilon_v - t \varepsilon_d) = F \quad (6.34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n^s \varepsilon_v + \sigma_{sn}^p = h + F \quad (6.35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \mu_n^s \varepsilon_d = -t F \quad (6.36)$$

Par construction des  $f_n$  (6.21) assurant asymptotiquement le caractère associé, la loi que l'on vient de présenter ne semble pas appropriée pour le cas non associé ( $t' \neq t$  dans (6.30)).

### Loi non linéaire sans potentiel

On se propose maintenant de s'affranchir de l'idée de potentiel pour écrire une loi contrainte-déformation de la forme (4.57) qui sature asymptotiquement le critère de Drucker-Prager

(4.58). Partant du constat que pour un niveau de confinement donné  $-\sigma_m$ , le critère de Drucker-Prager (6.1) constitue, tout comme von Mises, une limitation de la contrainte déviatorique équivalente  $\sigma_d$ , on s'inspire de la construction de la loi (5.23)-(5.25) pour proposer ([68], [34]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = k^s \varepsilon_v \mathbf{1} + 2 \mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k^s = cste > 0 \\ 2 \mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t (h - k^s \varepsilon_v)}{\varepsilon_d} \end{cases} \quad (6.37)$$

La loi ainsi obtenue n'est pas une loi élastique : en effet,  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dérive pas d'un potentiel car la relation (4.66) (dans laquelle on prend  $\sigma_s^p = 0$ ) n'est pas satisfaite par les modules (6.37). Mais cela n'empêche pas d'appliquer le raisonnement tenu à la section 4.3.2. Tout d'abord, la loi de comportement (6.37) est telle que la frontière du critère de Drucker-Prager est obtenue asymptotiquement (4.58). En effet, si l'on fixe la contrainte moyenne à un certain niveau  $\sigma_m$ , on déduit immédiatement que  $\varepsilon_v$  prend une valeur finie valant  $\sigma_m/k^s$ , puis que, d'après le comportement de  $\mu^s$  lorsque  $\varepsilon_d$  tend vers l'infini (6.37),  $\sigma_d$  tend vers  $t(h - \sigma_m)$ . Ainsi, la notation abusive " $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \rightarrow \infty$ " dans (4.58) signifie ici, comme ce fut le cas pour von Mises,  $\varepsilon_d \rightarrow \infty$  (i.e.  $\varepsilon_d$  grand par rapport à une déformation de référence). Rappelons encore, comme cela a été fait dans le paragraphe suivant (4.58), qu'il ne s'agit pas ici de grandes déformations mais d'un artifice mathématique pour atteindre une asymptote dans l'écriture du comportement. Comme la valeur de  $\varepsilon_v$  est fixée par la contrainte moyenne, le rapport  $\varepsilon_v/\varepsilon_d$  tend vers 0 dans le régime asymptotique, ce qui signifie que l'on vérifie asymptotiquement une règle d'écoulement de type (4.61) avec un potentiel plastique  $g^s$  de type von Mises. En conclusion, ce comportement fictif va nous permettre d'estimer, par homogénéisation non linéaire, les états limites macroscopiques lorsque la phase solide est élasto-plastique avec une plasticité parfaite (de critère de Drucker-Prager) et non associée (d'angle de dilatance nul). Pour un v.E.R. donné, on s'attend bien évidemment à ce que le domaine obtenu ici soit inclus dans celui trouvé par une des méthodes précédentes censées modéliser la plasticité associée.

Dans la pratique, on peut trouver des angles de dilatance compris entre l'angle nul et l'angle de frottement du matériau. Les deux cas que nous sommes en mesure de modéliser constituent donc des cas extrêmes.

## 6.2 Application à un milieu poreux à matrice homogène

### 6.2.1 Cas sec tridimensionnel

#### États limites dans le cas associé (critère de résistance macroscopique)

On choisit de traiter d'abord le cas du milieu poreux sec à matrice de Drucker-Prager en déterminant les états limites macroscopiques dans le cas de la plasticité associée, autrement dit le critère de résistance macroscopique. On utilise la méthode visqueuse et la régularisation du critère par la suite (6.4). On se limitera au schéma linéaire de Mori-Tanaka pour traiter une morphologie supposée décrite par des inclusions sphériques vides réparties de façon isotrope dans la matrice frottante.

On suppose que la règle de dilatance est vérifiée en tout point. Pour pouvoir utiliser (6.17) et (6.18) dans la méthode mixte, commençons par montrer que celle-ci est équivalente à la méthode modifiée, autrement dit le moment d'ordre 1 de  $d_v$  est équivalent au moment d'ordre 2. Ce dernier s'écrit d'après (2.144) :

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{d}}_v = \sqrt{\left( \frac{k^{hom}}{\bar{\bar{k}}_n^s} \left( D_v + \frac{\sigma_{sn}^p}{\bar{\bar{k}}_n^s} \right) - (1 - \varphi) \frac{\sigma_{sn}^p}{\bar{\bar{k}}_n^s} \right)^2 + 2(1 - \varphi) \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \bar{\bar{k}}_n^s} D_d^2} \quad (6.38)$$

Les ordres de grandeurs des termes de (6.38) peuvent être précisés en exploitant (3.79), (3.83), (6.13 c) et (6.18). On montre en effet :

$$k^{hom}/\bar{\bar{k}}_n^s = \mathcal{O}(X_n) \quad (6.39)$$

$$\partial \mu^{hom}/\partial \bar{\bar{k}}_n^s = \mathcal{O}(X_n^2) \quad (6.40)$$

$$\sigma_{sn}^p/\bar{\bar{k}}_n^s = -t \bar{\bar{d}}_d \frac{a_n}{h + a_n} = -t \bar{\bar{d}}_d (1 + \mathcal{O}(X_n)) \quad (6.41)$$

À l'aide de ces développements limités et en supposant  $D_v$  et  $D_d$  fixés, on transforme successivement l'équation (6.38) en :

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{d}}_v = \sqrt{\left( \frac{k^{hom}}{\bar{\bar{k}}_n^s} \left( D_v + \frac{\sigma_{sn}^p}{\bar{\bar{k}}_n^s} \right) - (1 - \varphi) \frac{\sigma_{sn}^p}{\bar{\bar{k}}_n^s} \right)^2 + \mathcal{O}(X_n^2)} \quad (6.42)$$

$$(1 - \varphi) \bar{\bar{d}}_v = \frac{k^{hom}}{\bar{\bar{k}}_n^s} \left( D_v + \frac{\sigma_{sn}^p}{\bar{\bar{k}}_n^s} \right) - (1 - \varphi) \frac{\sigma_{sn}^p}{\bar{\bar{k}}_n^s} + \mathcal{O}(X_n^2) \quad (6.43)$$

Il apparaît, en comparant l'équation (6.43) et l'équation (2.113) transposée en taux de déformation et dans laquelle  $p = 0$ , que  $\bar{\bar{d}}_v$  est équivalent à  $\bar{d}_v$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On adopte donc désormais la terminologie et les notations de la méthode mixte. On déduit de (2.113) que :

$$(1 - \varphi) \left( \bar{d}_v + \frac{\sigma_{sn}^p}{\hat{k}_n^s} \right) = \frac{k^{hom}}{\hat{k}_n^s} \left( D_v + \frac{\sigma_{sn}^p}{\hat{k}_n^s} \right) \quad \left( = \mathcal{O}(X_n) \right) \quad (6.44)$$

Le calcul de  $\bar{\bar{d}}_d$  provient de l'adaptation de (2.143) aux taux de déformation. En utilisant (3.81), (3.84) et (6.41), (2.143) donne au premier ordre :

$$\bar{\bar{d}}_d^2 = \frac{2}{3\varphi} \left( D_v - t \bar{\bar{d}}_d \right)^2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\varphi} D_d^2 \quad (6.45)$$

De (6.45), on extrait  $\bar{\bar{d}}_d$  :

$$\bar{\bar{d}}_d = \frac{1}{1 - \frac{2t^2}{3\varphi}} \left( \sqrt{\frac{2}{3\varphi} D_v^2 + \frac{1 - \frac{2t^2}{3\varphi}}{1 + \frac{2}{3}\varphi} D_d^2} - \frac{2t}{3\varphi} D_v \right) \quad (6.46)$$

On constate immédiatement que l'expression (6.46) n'a un sens que si la porosité  $\varphi$  est supérieure à  $2t^2/3$ . Pour des porosités inférieures, la technique d'homogénéisation basée sur une déformation effective unique dans tout le domaine  $\Omega^s$  n'est pas acceptable. Comme on l'a déjà mentionné pour une matrice de von Mises, ce problème est lié au fait que plus les pores sont petits, plus le champ de déformation est hétérogène au voisinage de ceux-ci et moins la déformation effective est représentative. Pour éliminer cet inconvénient, il faut procéder à une décomposition du domaine  $\Omega^s$ . On montre l'intérêt de cette méthode sur l'exemple de la sphère creuse soumise à une pression externe résolu analytiquement en annexe 7.4.2.

La loi de comportement macroscopique permettant de décrire la frontière de l'estimation de  $G^{hom}$  est donnée par (2.100)-(2.96) avec  $p = 0$ . En passant aux invariants, on obtient :

$$\Sigma_m = k^{hom} \left( D_v + \frac{\sigma_{s_n}^p}{\hat{k}_n^s} \right) \quad ; \quad \Sigma_d = 2\mu^{hom} D_d \quad (6.47)$$

D'après les expressions des modules microscopiques (6.13 c) et macroscopiques (3.79) et (3.82) et avec les notations (6.17),  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_d$  (6.47) se comportent de la façon suivante lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\Sigma_m \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2(1-\varphi)}{3\varphi} Y \left( \frac{D_v}{\bar{\bar{d}}_d} - t \right) \quad ; \quad \Sigma_d \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\varphi}{1 + \frac{2}{3}\varphi} Y \frac{D_d}{\bar{\bar{d}}_d} \quad (6.48)$$

Il reste donc à exprimer  $Y$  en fonction de  $\mathbf{D}$  pour achever la détermination de la nappe paramétrique  $\Sigma(\mathbf{D})$ . L'équation donnant  $Y$  est issue du passage à la limite de (6.44). En multipliant (6.44) par  $\hat{k}_n^s$ , on reconnaît dans le membre de droite l'expression (6.47) de  $\Sigma_m$  dont la limite est donnée en (6.48). Le calcul de la limite du membre de gauche s'appuie sur (6.13 c) :

$$\begin{aligned} \hat{k}_n^s \bar{d}_v + \sigma_{s_n}^p &= h - \frac{h + a_n}{t} \left( t - \frac{\bar{d}_v}{\bar{\bar{d}}_d} \right) = h - \frac{h + a_n}{t} X_n \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{k}_n^s \bar{d}_v + \sigma_{s_n}^p &= h - \frac{Y}{t} \end{aligned} \quad (6.49)$$

On en déduit donc l'équation :

$$h - \frac{Y}{t} = \frac{2}{3\varphi} Y \left( \frac{D_v}{\bar{d}_d} - t \right) \quad (6.50)$$

ou encore

$$Y = \frac{ht}{1 - \frac{2t^2}{3\varphi} + t \frac{D_v}{\bar{d}_d}} \quad (6.51)$$

qui achève la détermination de  $Y$  avec l'aide de (6.46).

Notons que la comparaison entre (6.49) et (6.28) avec  $F = -Y/t$  permet de faire le lien entre la méthode de régularisation par une suite de critères et celle par une suite de potentiels.

On déduit de (6.48), (6.46) et (6.51) l'équation paramétrique donnant l'estimation de la frontière de  $G^{hom}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_m \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2ht(1-\varphi)}{3\varphi \left(1 - \frac{2t^2}{3\varphi}\right)} \left( \frac{\frac{D_v}{\bar{d}_d}}{\sqrt{\frac{2}{3\varphi} \left(\frac{D_v}{\bar{d}_d}\right)^2 + \frac{1 - \frac{2t^2}{3\varphi}}{1 + \frac{2}{3}\varphi}}} - t \right) \\ \Sigma_d \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{ht(1-\varphi)}{1 + \frac{2}{3}\varphi} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3\varphi} \left(\frac{D_v}{\bar{d}_d}\right)^2 + \frac{1 - \frac{2t^2}{3\varphi}}{1 + \frac{2}{3}\varphi}}} \end{array} \right. \quad (6.52)$$

Le paramètre  $D$  apparaissant dans (6.52) respecte la règle de normalité, d'après l'annexe 7.2, puisque l'on vérifie aisément la relation  $\partial \Sigma_m / \partial D_d = \partial \Sigma_d / \partial D_v$ .

La courbe paramétrique (6.52) correspond, dans le demi-plan  $(\Sigma_m, \Sigma_d)$ , à une demi-ellipse d'équation :

$$\left( \frac{\Sigma_m - C}{A} \right)^2 + \left( \frac{\Sigma_d}{B} \right)^2 = 1$$

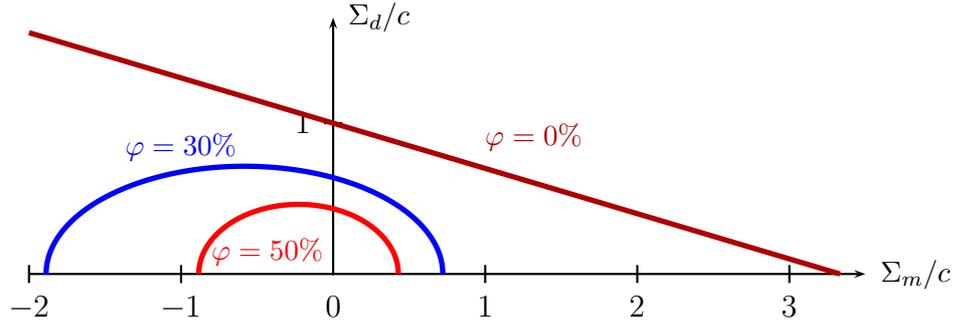
avec  $C = -\frac{2ht^2(1-\varphi)}{3\varphi \left(1 - \frac{2t^2}{3\varphi}\right)}$ ; (6.53)

$$A = \sqrt{\frac{2}{3\varphi} \frac{ht(1-\varphi)}{1 - \frac{2t^2}{3\varphi}}}; \quad B = \frac{ht(1-\varphi)}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\varphi\right) \left(1 - \frac{2t^2}{3\varphi}\right)}}$$

Sur la FIG. 6.3 sont représentés des domaines d'équation (6.53) pour différentes valeurs de  $\varphi$  (respectant toujours la condition  $\varphi \geq 2t^2/3$ ) ainsi que le critère de la matrice. Tout comme pour le milieu poreux à matrice de von Mises, le domaine de résistance macroscopique est un ellipsoïde dans l'espace des contraintes. Mais, dans le cas de Drucker-Prager, celui-ci n'est pas centré à l'origine ; il est en effet translaté dans la direction des contraintes moyennes négatives.

### États limites dans le cas non associé

Alors que la méthode consistant à régulariser la fonction d'appui par une suite de potentiels (6.20) ainsi que la méthode basée sur la loi élastique non linéaire (6.32) conduisent

FIG. 6.3 – Critère d'un milieu poreux isotrope à matrice de Drucker-Prager -  $t = 0.3$ 

également au critère (6.53), il est naturel de se poser la question des états limites obtenus en utilisant la loi non linéaire sans potentiel (6.37) censée représenter une plasticité non associée.

Dans le cadre de la méthode mixte, on écrit les déformations effectives en fonction de  $\Sigma$ . D'une part, l'équation (2.108) avec  $p = 0$  fournit  $\bar{\varepsilon}_v$  :

$$(1 - \varphi) \bar{\varepsilon}_v = \frac{\Sigma_m}{k^s} \quad (6.54)$$

D'autre part,  $\bar{\varepsilon}_d$  s'écrit à partir de (2.148) avec  $p = 0$ . En constatant sur (6.37) que le rapport  $\hat{\mu}^s/k^s$  tend vers 0 dans le régime asymptotique ( $\bar{\varepsilon}_d \rightarrow \infty$ ), on peut exploiter les développements limités des modules (3.79) et (3.82) dans (2.148) :

$$(1 - \varphi)^2 \hat{\mu}^{s2} \bar{\varepsilon}_d^2 = \frac{3\varphi}{8} \Sigma_m^2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{3}\varphi\right) \Sigma_d^2 \quad (6.55)$$

Or d'après (6.37) et (6.54), le membre de gauche de (6.55) possède une limite lorsque  $\bar{\varepsilon}_d$  tend vers l'infini :

$$t^2 \left( h (1 - \varphi) - \Sigma_m \right)^2 = \frac{3\varphi}{2} \Sigma_m^2 + \left(1 + \frac{2}{3}\varphi\right) \Sigma_d^2 \quad (6.56)$$

Il est facile de montrer que l'équation (6.56) correspond exactement à la même ellipse que celle définie par (6.53). Ainsi, dans le cas du milieu poreux à matrice de Drucker-Prager, les états limites macroscopiques ne semblent pas dépendre de la règle d'écoulement plastique. Pour illustrer cette conclusion sur un cas analytique, on montrera à la section 9.2.4 que, lorsque la totalité de l'objet est en écoulement plastique, le champ de contrainte d'une sphère creuse de Drucker-Prager soumise à un chargement isotrope dans le cadre de l'élasto-plasticité peut être déterminé sans référence à la cinématique et donc ne dépend pas de la règle d'écoulement. Il n'en est pas de même dans le cas dans le cas d'inclusions rigides, ce que l'on vérifiera par homogénéisation non linéaire à la section 6.3.

### 6.2.2 Cas pressurisé

Lorsque le critère de la phase solide est conique, ce qui est le cas du critère de Drucker-Prager (6.1), on a montré à la section 4.2.2 que le critère macroscopique du milieu saturé se déduisait du milieu sec à l'aide de la contrainte effective (4.33). Le critère saturé s'écrit donc ici :

$$\left( \frac{\Sigma_m + p - (1 + p/h) C}{(1 + p/h) A} \right)^2 + \left( \frac{\Sigma_d}{(1 + p/h) B} \right)^2 = 1 \quad (6.57)$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  exprimés en (6.53).

Montrons maintenant que, comme pour von Mises, les techniques d'homogénéisation non linéaire sont saines en ce qui concerne la prise en compte d'un fluide sous pression dans le sens où l'on retrouve le critère (6.57) en incluant le fluide dans le raisonnement dès la formulation du problème non linéaire. Utilisons par exemple la loi élastique non linéaire (6.33) pour le cas associé et la relation non linéaire (6.37) pour le cas non associé.

Le premier invariant s'exprime dans le cas général en exploitant (2.108) (pas de précontrainte dans le cas non associé) :

$$(1 - \varphi) \left( \hat{k}^s \bar{\varepsilon}_v + \hat{\sigma}_s^p \right) = \Sigma_m + p \varphi \quad (6.58)$$

Le deuxième invariant s'écrit à partir de (2.148) avec les modules (3.79) et (3.82) :

$$(1 - \varphi)^2 \hat{\mu}^{s2} \bar{\varepsilon}_d^2 = \frac{3\varphi}{8} (\Sigma_m + p)^2 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{3} \varphi \right) \Sigma_d^2 \quad (6.59)$$

En tenant compte soit de (6.35) et (6.36), soit de (6.37), on déduit de (6.58) et (6.59) pour les deux modèles :

$$t^2 \left( h (1 - \varphi) - (\Sigma_m + p \varphi) \right)^2 = \frac{3\varphi}{2} (\Sigma_m + p)^2 + \left( 1 + \frac{2}{3} \varphi \right) \Sigma_d^2 \quad (6.60)$$

que l'on peut encore écrire :

$$t^2 \left( h (1 - \varphi) - \frac{\Sigma_m + p}{1 + p/h} \right)^2 = \frac{3\varphi}{2} \left( \frac{\Sigma_m + p}{1 + p/h} \right)^2 + \left( 1 + \frac{2}{3} \varphi \right) \left( \frac{\Sigma_d}{1 + p/h} \right)^2 \quad (6.61)$$

La démonstration s'achève en notant que (6.61) dépend de la contrainte effective (4.33) et constitue une formulation équivalente du critère (6.57).

### 6.2.3 Cas sec bidimensionnel

On se propose de comparer les résultats de l'homogénéisation non linéaire à des calculs par éléments finis dans les mêmes conditions que pour von Mises à la section 5.2.3. On simplifie notamment le modèle numérique en considérant une situation de déformations

planes.

Le critère bidimensionnel s'écrit ici :

$$\left(\frac{\Sigma_m - C}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Sigma_d}{B}\right)^2 = 1$$

$$\text{avec } C = -\frac{ht^2(1-\varphi)}{2\varphi\left(1-\frac{t^2}{2\varphi}\right)}; \quad (6.62)$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\varphi} \frac{ht(1-\varphi)}{1-\frac{t^2}{2\varphi}}}; \quad B = \frac{ht(1-\varphi)}{\sqrt{(1+\varphi)\left(1-\frac{t^2}{2\varphi}\right)}}$$

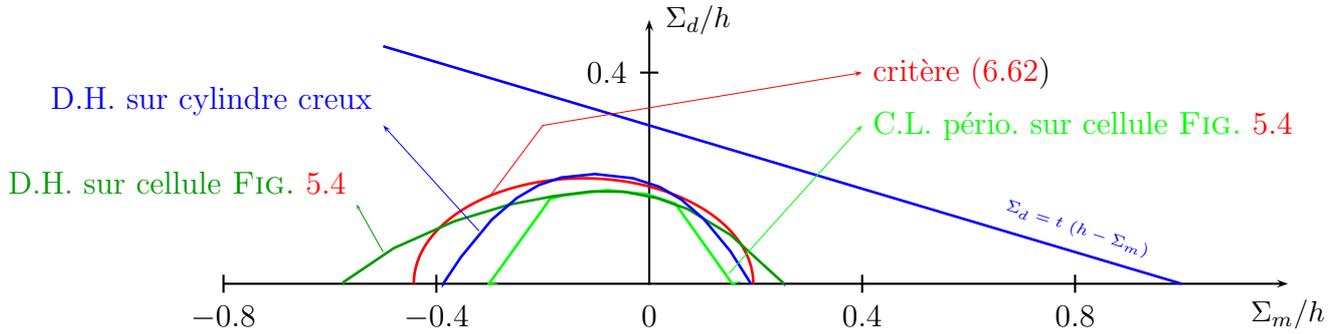


FIG. 6.4 – Critère de résistance d'un milieu poreux en déformations planes -  $\varphi = 0.3$ ,  $t = 0.3$

## 6.3 Application à un milieu renforcé

On cherche maintenant à exprimer le critère macroscopique d'un matériau de Drucker-Prager renforcé par des inclusions rigides. La phase poreuse est donc ici réduite à l'ensemble vide i.e.  $\varphi = 0$ .

### 6.3.1 États limites dans le cas associé (critère de résistance macroscopique)

Comme pour le milieu poreux à la section 6.2, on met en œuvre la méthode visqueuse régularisée par les critères (6.4) et le schéma linéaire est celui de Mori-Tanaka.

Donnons-nous un tenseur taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  dont les invariants  $D_v$  et  $D_d$  sont fixes (indépendantes de  $n$  contrairement au cas d'une matrice de von Mises (5.44)). Pour pouvoir confondre les méthodes mixte et modifiée, montrons que  $\bar{d}_v$  et  $\bar{\bar{d}}_v$  sont équivalents. Ces grandeurs sont encore données par (5.45) et (5.46). Comme  $D_v$  et

$D_d$  sont fixes, on déduit de (5.45), (5.46) et (6.19) que l'on a :

$$\bar{\bar{d}}_v \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \bar{d}_v = \frac{D_v}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \quad (6.63)$$

Le deuxième taux de déformation effectif s'écrit comme en (5.47) :

$$\bar{\bar{d}}_d \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\varphi^r + \varphi^l}{(1 - \varphi^r - \varphi^l)^2} D_v^2 + \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l}{(1 - \varphi^r - \varphi^l) (1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l)} D_d^2} \quad (6.64)$$

Suivant les expressions des invariants effectifs (6.63) et (6.64) et en référence à (6.16), on distingue deux cas de figure :

- $\bar{d}_v > t \bar{\bar{d}}_d$

D'après (6.63) et (6.64), cette condition est équivalente à :

$$D_v > t \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) (1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l)}{(1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l) (1 - \frac{2}{3}(\varphi^r + \varphi^l) t^2)}} D_d \quad (6.65)$$

Précisons qu'il n'y a aucun problème concernant le signe positif de  $(1 - 2(\varphi^r + \varphi^l)t^2/3)$  dans (6.65) puisque le coefficient  $t$  est inférieur à  $\sqrt{3/2}$  [30].

D'après les expressions des modules macroscopiques (2.38) et (2.39) avec  $\varphi = 0$  ainsi que des modules effectifs tirés de (6.13) dans le cas  $\bar{d}_v \geq t \bar{\bar{d}}_d$ , le seul état macroscopique qui puisse être atteint par (6.69) est  $\Sigma = h\mathbf{1}$ .

- $\bar{d}_v \leq t \bar{\bar{d}}_d$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_v / \bar{\bar{d}}_d = t$

D'après (6.63) et (6.64), cette condition est équivalente à :

$$D_v = t \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) (1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l)}{(1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l) (1 - \frac{2}{3}(\varphi^r + \varphi^l) t^2)}} D_d \quad (6.66)$$

En présence des seules inclusions rigides et en vertu de (6.19) et (6.17) écrits avec les grandeurs de la méthode mixte, les modules macroscopiques (2.38) et (2.39) deviennent :

$$\begin{cases} k^{hom} &= \frac{1}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \left( \hat{k}_n^s + \frac{4}{3} (\varphi^r + \varphi^l) \hat{\mu}_n^s \right) \\ \mu^{hom} &= \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l} \hat{\mu}_n^s + \mathcal{O}(X_n) \end{cases} \quad (6.67)$$

Avec l'aide des modules effectifs (6.13) dans le cas  $0 \leq \bar{d}_v \leq t \bar{\bar{d}}_d$ , les modules macroscopiques (6.67) s'écrivent :

$$\begin{cases} k^{hom} &= \frac{1}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \left( \frac{h + a_n}{t \bar{\bar{d}}_d} + \frac{2}{3} (\varphi^r + \varphi^l) \frac{Y}{\bar{\bar{d}}_d} \right) + \mathcal{O}(X_n) \\ \mu^{hom} &= \frac{1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l} \frac{Y}{2 \bar{\bar{d}}_d} + \mathcal{O}(X_n) \end{cases} \quad (6.68)$$

On utilise la loi de comportement macroscopique donnée par (2.100) avec ici  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  pour écrire les invariants de contrainte macroscopiques :

$$\Sigma_m = k^{hom} D_v + \sigma_{s_n}^p \quad ; \quad \Sigma_d = 2 \mu^{hom} D_d \quad (6.69)$$

On montre à l'aide de (6.68) que les termes dominants de (6.69) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_m \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} h - \frac{Y}{t} \left( 1 - \frac{2}{3} (\varphi^r + \varphi^l) t^2 \right) \\ \Sigma_d \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} Y \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left( 1 + \frac{3}{2} \varphi^r + \frac{3}{5} \varphi^l \right) \left( 1 - \frac{2}{3} (\varphi^r + \varphi^l) t^2 \right)}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5} \varphi^l}} \end{array} \right. \quad (6.70)$$

Il est clair sur (6.70) que  $\Sigma$ , paramétré par  $Y$ , décrit le cône d'équation :

$$\Sigma_d + T^{hom} (\Sigma_m - h) = 0 \quad \text{avec} \quad T^{hom} = t \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left( 1 + \frac{3}{2} \varphi^r + \frac{3}{5} \varphi^l \right)}{(1 - \varphi^r - \frac{2}{5} \varphi^l) \left( 1 - \frac{2}{3} (\varphi^r + \varphi^l) t^2 \right)}} \quad (6.71)$$

Le résultat que nous venons d'obtenir prouve que le critère macroscopique d'un v.E.R. composé d'une matrice de Drucker-Prager renforcée par des inclusions rigides adhérentes et lisses peut être estimé par un critère de Drucker-Prager défini par un cône de sommet  $h\mathbf{1}$  et de demi-angle au sommet  $\arctan(T^{hom})$  (6.71). Or, il est utile de rappeler que la présence d'inclusions lisses rend le modèle peu pertinent lorsque l'on sort du cadre des forts confinements (i.e.  $-\Sigma_m$  suffisamment grand). Ajoutons que l'hypothèse même d'adhérence est contestable lorsqu'il s'agit par exemple de modéliser un béton dans lequel il peut exister une zone de faiblesse entre les granulats et la pâte cimentaire [55]. Ainsi la zone des contraintes moyennes positives dans laquelle se trouve le sommet du cône est sans doute peu réaliste. En revanche,  $T^{hom}$  constitue bien une grandeur que le modèle est fondé à estimer.

On note que la propriété de normalité est satisfaite car  $\mathbf{D}$  est normal à la frontière du critère macroscopique en tout point où cette surface est régulière et appartient au cône des normales extérieures au niveau du sommet :

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma = h \mathbf{1} \\ \Sigma_d + T^{hom} (\Sigma_m - h) = 0 \\ \Sigma \neq h \mathbf{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D_v \geq T^{hom} D_d \\ D_v = T^{hom} D_d \end{array} \quad (6.72)$$

À ce stade, il serait possible de discuter sur les hypothèses morphologiques conduisant à un tel critère en le comparant notamment à celui qui serait donné par un schéma

auto-cohérent comme à la section 5.3 consacrée à un milieu de von Mises renforcé. Le raisonnement serait analogue à celui mené pour von Mises.

Examinons maintenant plus en détail les cas où un seul type de renfort existe dans le V.E.R..

### Inclusions adhérentes seules

Dans le cas où toutes les inclusions sont adhérentes ( $\varphi^l = 0$ ),  $T^{hom}$  (6.71) devient :

$$T^{hom} = t \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{3} \varphi^r}{1 - \frac{2}{3} \varphi^r t^2}} \quad (6.73)$$

L'effet de renforcement est démontré par le fait que  $T^{hom}$  est une fonction croissante de la fraction d'inclusions  $\varphi^r$ .

### Inclusions lisses seules

Dans le cas où toutes les inclusions sont lisses ( $\varphi^r = 0$ ),  $T^{hom}$  (6.71) devient :

$$T^{hom} = t \sqrt{\frac{(1 - \varphi^l) (1 + \frac{3}{5} \varphi^l)}{(1 - \frac{2}{5} \varphi^l) (1 - \frac{2}{3} \varphi^l t^2)}} \quad (6.74)$$

On montre dans [7] que les critères (6.73) et (6.74) peuvent être retrouvés à l'aide de la régularisation du comportement visqueux par la suite de potentiels (6.20).

Contrairement au cas adhérent, le caractère renforçant des inclusions n'est pas acquis ici. En effet, le coefficient macroscopique  $T^{hom}$  (6.74) n'est pas une fonction monotone de  $\varphi^l$  :  $T^{hom}$  croît avec  $\varphi^l$  lorsque  $\varphi^l \in [0, \hat{\varphi}^l]$  avec

$$\hat{\varphi}^l(t) = \frac{5}{2} \frac{9 + 4t^2 - \sqrt{3(3 - 2t^2)(9 + 10t^2)}}{9 + 19t^2} \quad (6.75)$$

La FIG. 6.5 montre dans le plan  $(t, \varphi^l)$ , la fonction  $\hat{\varphi}^l(t)$  ainsi que la fonction  $\tilde{\varphi}^l(t)$  (courbe 2) sur laquelle on a  $T^{hom} = t$  :

$$\tilde{\varphi}^l(t) = \frac{10t^2}{9 + 4t^2} \quad (6.76)$$

Ainsi, pour un coefficient de frottement microscopique donné  $t$ , les inclusions ont un effet de renforcement si  $\varphi^l < \tilde{\varphi}^l(t)$  et un effet dégradant si  $\varphi^l > \tilde{\varphi}^l(t)$ . Il apparaît encore sur la FIG. 6.5 que cet effet dégradant se manifeste pour des fractions  $\varphi^l$  d'autant plus grandes que  $t$  est grand.

On représente sur la FIG. 6.6 les expressions (6.73) et (6.74) de  $T^{hom}$  en fonction de  $\varphi^r$

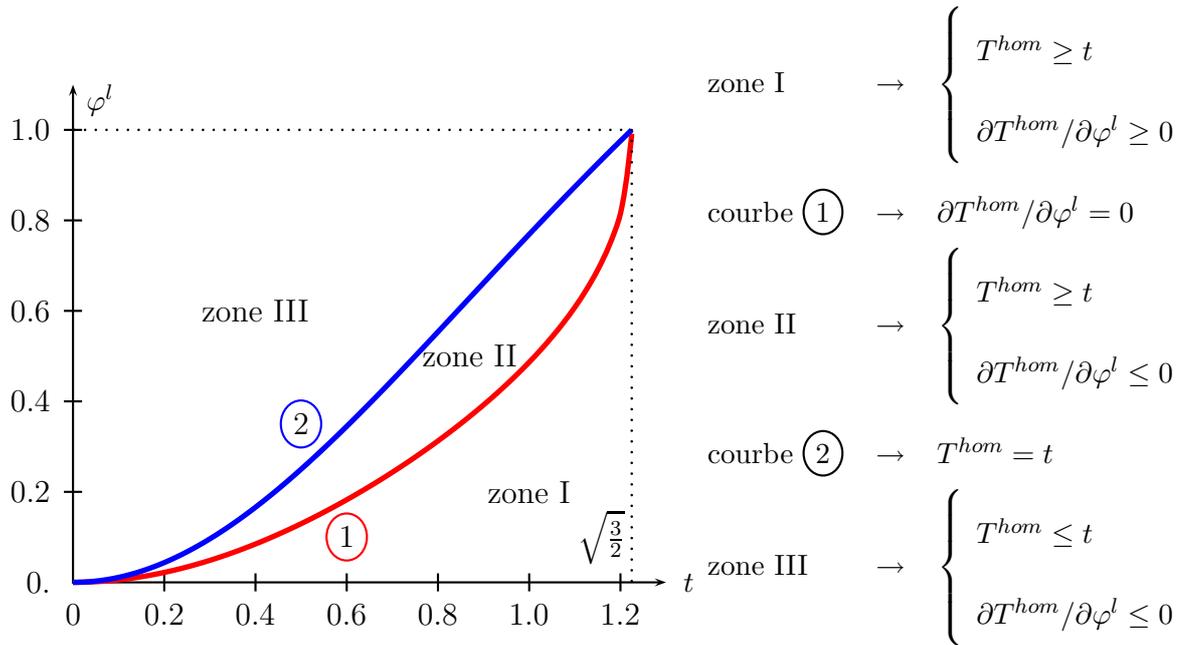


FIG. 6.5 – Influence du coefficient  $t$  et de la fraction volumique  $\varphi^l$  sur  $T^{hom}$  (plasticité associée)

ou  $\varphi^l$ . Pour chaque type d'inclusion, on trace  $T^{hom}$  pour deux valeurs de  $t$  (0.7 et 1.2). Comme on l'a déjà souligné, dans le cas des renforts adhérents,  $T^{hom}$  croît avec  $\varphi^r$ . C'est également le cas pour les renforts lisses si  $t = 1.2$  (au moins pour  $\varphi^l < 70\%$ ) mais cela devient faux pour  $t = 0.7$ . En effet, après une très légère augmentation,  $T^{hom}$  commence à décroître à partir de  $\varphi^l = 20\%$ .

### 6.3.2 États limites dans le cas non associé

Dans ce paragraphe, on souhaite trouver les états limites du V.E.R. composé d'une matrice de Drucker-Prager à plasticité non associée et d'inclusions rigides. On suppose donc que la matrice est dotée du comportement fictif non linéaire (6.37).

Le schéma linéaire choisi étant toujours celui de Mori-Tanaka, les modules macroscopiques sont obtenus de manière analogue à (6.67) puisque le rapport  $\hat{\mu}^s / \hat{k}^s$  tend vers 0 lorsque  $\bar{\varepsilon}_d$  tend vers 0 :

$$\begin{cases} k^{hom} &= \frac{1}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \left( \hat{k}^s + \frac{4}{3} (\varphi^r + \varphi^l) \hat{\mu}^s \right) \underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\hat{k}^s}{1 - \varphi^r - \varphi^l} \\ \mu^{hom} &\underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1 + \frac{3}{2} \varphi^r + \frac{3}{5} \varphi^l}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5} \varphi^l} \hat{\mu}^s \end{cases} \quad (6.77)$$

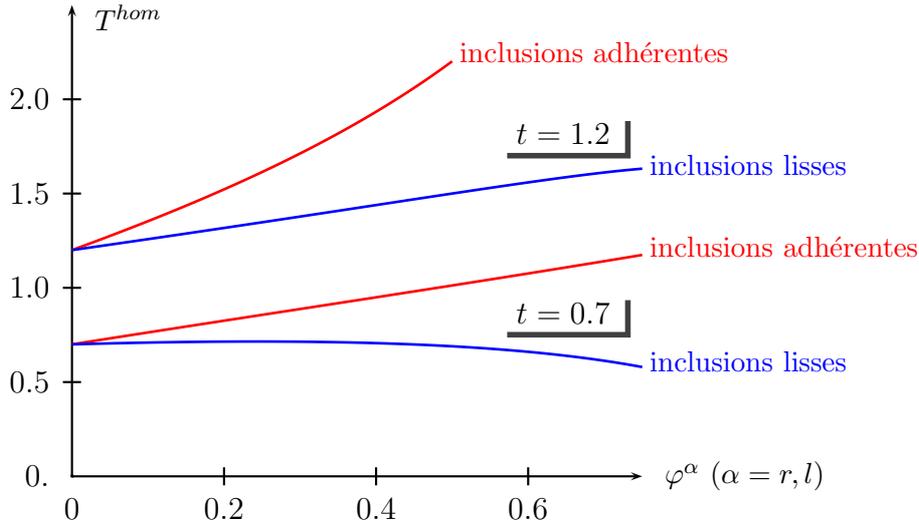


FIG. 6.6 – Coefficient de frottement macroscopique (plasticité associée)

Écrivons les déformations effectives en fonction de  $\Sigma$ . La déformation effective volumique s'obtient à partir de (2.116) avec ici  $\sigma_s^p = 0$  et (6.77) :

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{\Sigma_m}{(1 - \varphi^r - \varphi^l) k^{hom}} \underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Sigma_m}{\hat{k}^s} \quad (6.78)$$

La déformation volumique déviatorique s'obtient grâce à (2.155) avec ici  $\sigma_s^p = 0$  et (6.77) :

$$\bar{\varepsilon}_d \underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3} (\varphi^r + \varphi^l) \left( \frac{\Sigma_m}{\hat{k}^s} \right)^2 + \frac{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l}{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left( 1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l \right)} \left( \frac{\Sigma_d}{2\hat{\mu}^s} \right)^2 \quad (6.79)$$

On a donc au premier ordre :

$$2\hat{\mu}^s \bar{\varepsilon}_d \underset{\varepsilon_d \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l}{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left( 1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l \right)}} \Sigma_d \quad (6.80)$$

Le domaine des états limites apparaît en exploitant (6.37) et (6.78) dans (6.80). On retrouve à nouveau un domaine de Drucker-Prager :

$$\Sigma_d + T^{hom} (\Sigma_m - h) = 0 \quad \text{avec} \quad T^{hom} = t \sqrt{\frac{(1 - \varphi^r - \varphi^l) \left( 1 + \frac{3}{2}\varphi^r + \frac{3}{5}\varphi^l \right)}{1 - \varphi^r - \frac{2}{5}\varphi^l}} \quad (6.81)$$

Contrairement au cas du milieu poreux, on remarque que l'hypothèse de plasticité non associée conduit à un coefficient de frottement différent de celui obtenu avec la plasticité associée (6.71). Le deuxième se déduit du premier en le corrigeant par un facteur  $1/\sqrt{1 - 2(\varphi^r + \varphi^l)t^2/3}$ .

On note également une similitude entre le coefficient de frottement (6.81) et la limite en traction simple (5.42) obtenue dans le cadre de la même microstructure mais avec une

matrice de von Mises.

Examinons maintenant les expressions de  $T^{hom}$  en présence d'une seule famille d'inclusions.

### Inclusions adhérentes seules

Dans le cas où toutes les inclusions sont adhérentes ( $\varphi^l = 0$ ),  $T^{hom}$  (6.81) devient :

$$T^{hom} = t \sqrt{1 + \frac{3}{2} \varphi^r} \quad (6.82)$$

On retrouve en (6.82) le résultat obtenu dans [68] pour la méthode mixte. Dans cet article, les auteurs mettent également en œuvre la méthode classique (basée sur les moments d'ordre 1) et la méthode modifiée (basée sur les moments d'ordre 2). Les trois méthodes aboutissent à des résultats différents mais qu'il est possible d'ordonner.

### Inclusions lisses seules

Dans le cas où toutes les inclusions sont lisses ( $\varphi^r = 0$ ),  $T^{hom}$  (6.81) devient :

$$T^{hom} = t \sqrt{\frac{(1 - \varphi^l) \left(1 + \frac{3}{5} \varphi^l\right)}{1 - \frac{2}{5} \varphi^l}} \quad (6.83)$$

En comparant (6.83) à (5.52), il est clair que l'on peut transposer ici les remarques consécutives à l'expression (5.52) de la limite en traction simple du milieu de von Mises dans lequel baignent des inclusions lisses. On met notamment en évidence que les inclusions lisses ont un effet de dégradation du matériau puisque  $T^{hom}$  diminue avec  $\varphi^l$  alors qu'il fallait mener une discussion incluant l'effet du coefficient microscopique  $t$  dans le cas de la plasticité associée (6.74).

### 6.3.3 Validation expérimentale des modèles

Pour valider notre approche, nous avons comparé les différents modèles de coefficients de frottement (inclusions adhérentes ou lisses, plasticité associée ou non) à des essais de rupture effectués à l'aide d'un appareil triaxial par Pédro [80]. Les échantillons sont constitués d'une matrice de sable dans laquelle sont introduits aléatoirement des graviers. Le coefficient de frottement expérimental est obtenu, pour une fraction volumique donnée d'inclusions, en déterminant les états limites pour différentes valeurs de la pression de confinement de l'échantillon. La FIG. 6.7 représente les valeurs expérimentales de  $T^{hom}$  en fonction de la fraction volumique de graviers ainsi que les courbes correspondant aux différents modèles d'inclusions et de règles d'écoulement de la matrice.

La matrice de sable est ici modélisée par un matériau dont les états limites obtenus à partir de l'état initial naturel appartiennent à la frontière d'un domaine de Drucker-Prager de

coefficient  $t$ . On suppose que l'on modélise également la règle d'écoulement à l'aide d'un potentiel plastique de Drucker-Prager, ce qui revient à définir un coefficient de dilatance  $t'$  (6.30) compris entre 0 et le coefficient de frottement  $t$ . Ainsi les coefficients obtenus dans le cadre des modèles associé et non associé encadrent en quelque sorte les modèles correspondant aux coefficients de dilatance intermédiaires.

On constate sur la FIG. 6.7 que les essais fournissent bien des coefficients situés dans le fuseau des courbes théoriques. On peut interpréter les résultats en notant que le coefficient de frottement macroscopique de l'échantillon résulte de la compétition entre deux paramètres : la nature de l'interface entre la matrice et les graviers et le coefficient de dilatance du sable. La courbe expérimentale est très proche de celle correspondant au modèle des renforts adhérents dans le cas non associé (i.e. non dilatant). Mais, d'une part, le sable utilisé possède un coefficient de dilatance non nul, ce qui a tendance à faire augmenter la valeur du coefficient macroscopique. D'autre part, il est fort probable qu'il existe des défauts d'adhérence à l'interface entre les graviers et la matrice de sable, ce qui a tendance cette fois à faire diminuer  $T^{hom}$  et justifie ainsi le positionnement de la courbe expérimentale.

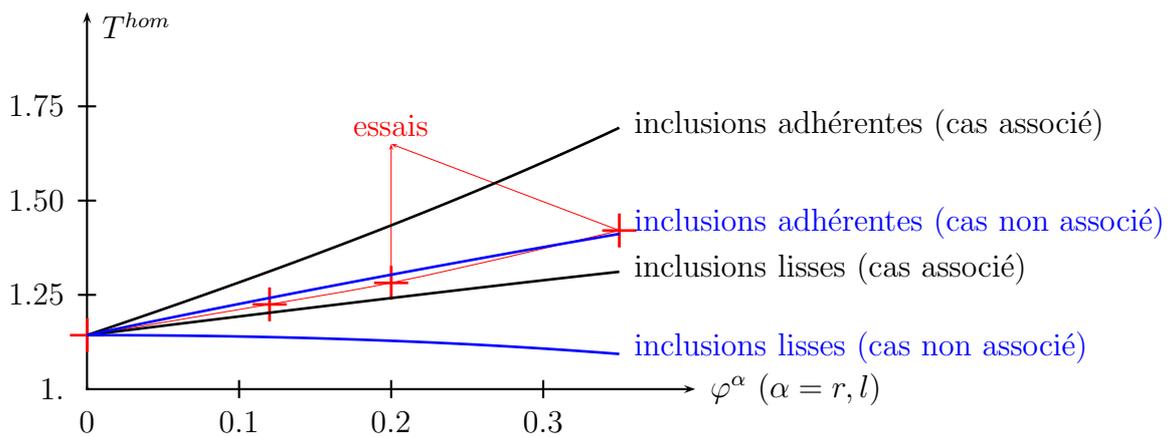


FIG. 6.7 – Effet de la fraction volumique d'inclusions sur le coefficient de frottement macroscopique - comparaison avec des essais

# Chapitre 7

## Annexes

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Régularité de la fonction d'appui</b>	<b>151</b>
7.1.1	Une condition suffisante de différentiabilité	151
7.1.2	Non-différentiabilité à l'origine	153
<b>7.2</b>	<b>Règle de normalité sur une surface paramétrée</b>	<b>153</b>
<b>7.3</b>	<b>Approche variationnelle de la méthode sécante modifiée</b>	<b>155</b>
<b>7.4</b>	<b>Sphère creuse soumise à une pression externe</b>	<b>157</b>
7.4.1	Matrice de von Mises	158
7.4.2	Matrice de Drucker-Prager	162

---



## 7.1 Régularité de la fonction d'appui

### 7.1.1 Une condition suffisante de différentiabilité

L'objectif de cette section est de montrer que si le domaine de résistance  $G^s$  est *borné* et *strictement convexe* (défini au sens de (4.1) par une fonction  $f^s$  continue et strictement convexe), alors la fonction d'appui  $\pi^s$  (4.2) restreinte à l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 symétriques non-nuls est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus, si  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ ,  $\partial\pi^s/\partial\mathbf{d}(\mathbf{d})$  est l'unique état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^*$  situé sur la frontière de  $G^s$  (i.e.  $f^s(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0$ ) tel que  $\pi^s(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d}$ .

*Preuve*

Fixons un tenseur taux de déformation  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  et considérons la forme linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^6 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\sigma} &\mapsto \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \end{aligned} \quad (7.1)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet d'écrire  $|\varphi(\boldsymbol{\sigma})| \leq \|\mathbf{d}\| \|\boldsymbol{\sigma}\|$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est une forme linéaire continue. Puis  $G^s = f^{s-1}(\cdot - \infty, 0]$  est une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^6$  donc un compact de  $\mathbb{R}^6$ . Par conséquent  $\varphi(G^s)$  est un compact de  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $\varphi$  atteint son maximum sur  $G^s$  en au moins un élément de  $G^s$  :

$$\max_{\boldsymbol{\sigma} \in G^s} \varphi(\boldsymbol{\sigma}) = \varphi(\boldsymbol{\sigma}^*) = \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d} = \pi^s(\mathbf{d}) \quad (7.2)$$

Un tel état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^*$  appartient nécessairement à la frontière de  $G^s$ . En effet, si  $\boldsymbol{\sigma}^*$  appartenait à l'intérieur de  $G^s$ , il serait possible de construire une boule fermée  $\mathcal{B}(\boldsymbol{\sigma}^*, R)$  centrée en  $\boldsymbol{\sigma}^*$  et de rayon  $R > 0$  entièrement incluse dans  $G^s$ . Comme  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ , nous pourrions alors construire le tenseur  $\boldsymbol{\tau} = R\mathbf{d}/\|\mathbf{d}\|$  tel que  $(\boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{\sigma}^*, R) \subset G^s$  et  $\varphi(\boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\tau}) = \varphi(\boldsymbol{\sigma}^*) + R\|\mathbf{d}\| > \varphi(\boldsymbol{\sigma}^*)$ , ce qui contredit (7.2).

Montrons alors que  $\boldsymbol{\sigma}^*$  satisfaisant (7.2) est unique. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\boldsymbol{\sigma}_1^*$  et  $\boldsymbol{\sigma}_2^* \neq \boldsymbol{\sigma}_1^*$  satisfassent tous les deux (7.2). La linéarité de  $\varphi$  implique immédiatement que tout état de contrainte situé sur le segment  $[\boldsymbol{\sigma}_1^*, \boldsymbol{\sigma}_2^*]$  satisfait aussi (7.2) et appartient donc à la frontière de  $G^s$  selon le précédent paragraphe. Ceci est en complète contradiction avec la stricte convexité de  $f^s$  et  $G^s$ .

L'unicité de  $\boldsymbol{\sigma}^*$  nous permet de créer l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{0}\} &\rightarrow \partial G^s \\ \mathbf{d} &\mapsto \boldsymbol{\sigma}^* \end{aligned} \quad (7.3)$$

qui associe à un tenseur non-nul  $\mathbf{d}$  l'unique état de contrainte satisfaisant (7.2).

Prouvons maintenant que  $\psi$  (7.3) est une application continue. Supposons qu'elle ne le soit pas. Il est alors possible de trouver un réel  $\epsilon > 0$  et une suite  $(\mathbf{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{h}_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad \|\psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}_n) - \psi(\mathbf{d})\| > \epsilon \quad (7.4)$$

Comme la suite  $(\boldsymbol{\sigma}_n = \psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  appartient au compact  $\partial G^s$ , on peut en extraire une sous-suite  $(\boldsymbol{\sigma}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \partial G^s$ . Ainsi, passant à la limite la seconde inéquation de (7.4) appliquée à la sous-suite, on obtient :

$$\|\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*\| \geq \epsilon \quad (7.5)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^* = \psi(\mathbf{d})$ . Selon la définition de  $\psi$  appliquée à  $\boldsymbol{\sigma}_{n_k} = \psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}_{n_k})$ , on a :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in G^s, \quad \boldsymbol{\sigma}_{n_k} : (\mathbf{d} + \mathbf{h}_{n_k}) \geq \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{d} + \mathbf{h}_{n_k}) \quad (7.6)$$

La limite de (7.6) quand  $k$  tend vers l'infini donne :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in G^s, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{d} \geq \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (7.7)$$

On déduit de (7.7) que  $\pi^s(\mathbf{d}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{d}$  et donc  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^* = \psi(\mathbf{d})$  qui contredit (7.5). D'où  $\psi$  est continue.

Montrons maintenant que  $\pi^s$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Étant donné un incrément  $\mathbf{h}$ , la définition de  $\psi$  permet d'écrire :

$$\pi^s(\mathbf{d} + \mathbf{h}) - \pi^s(\mathbf{d}) = \psi(\mathbf{d}) : \mathbf{h} + (\psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}) - \psi(\mathbf{d})) : (\mathbf{d} + \mathbf{h}) \quad (7.8)$$

ainsi que les inéquations suivantes :

$$\psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}) : (\mathbf{d} + \mathbf{h}) \geq \psi(\mathbf{d}) : (\mathbf{d} + \mathbf{h}) \quad (7.9)$$

$$\psi(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \geq \psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}) : \mathbf{d} \quad (7.10)$$

En combinant (7.9) et (7.10), on obtient :

$$0 \leq (\psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}) - \psi(\mathbf{d})) : (\mathbf{d} + \mathbf{h}) \leq (\psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}) - \psi(\mathbf{d})) : \mathbf{h} \quad (7.11)$$

Rappelant que  $\psi$  est continue, (7.11) prouve que :

$$(\psi(\mathbf{d} + \mathbf{h}) - \psi(\mathbf{d})) : (\mathbf{d} + \mathbf{h}) = o(\mathbf{h}) \quad (7.12)$$

Ainsi (7.8) peut se réécrire :

$$\pi^s(\mathbf{d} + \mathbf{h}) - \pi^s(\mathbf{d}) = \psi(\mathbf{d}) : \mathbf{h} + o(\mathbf{h}) \quad (7.13)$$

ce qui signifie que  $\pi^s$  est différentiable en un tenseur  $\mathbf{d}$  non-nul et :

$$\forall \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \pi^s}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) = \psi(\mathbf{d}) \quad (7.14)$$

(7.14) montre aussi que  $\partial \pi^s / \partial \mathbf{d}$  est continue en  $\mathbf{d}$  non-nul.

### 7.1.2 Non-différentiabilité à l'origine

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\pi^s$  soit différentiable en  $\mathbf{0}$ . Appelons  $\boldsymbol{\kappa}$  la "dérivée" de  $\pi^s$  en  $\mathbf{0}$ . Par définition de la dérivée par rapport à un tenseur et en notant que  $\pi^s(\mathbf{0}) = 0$ , on a :

$$\pi^s(\mathbf{h}) = \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \epsilon(\mathbf{h}) \quad \text{avec} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = 0 \quad (7.15)$$

Or la fonction d'appui  $\pi^s$  doit être positive donc si l'on choisit un tenseur  $\mathbf{d}$  quelconque et un scalaire positif  $\lambda$ , on a :

$$\pi^s(\lambda \mathbf{d}) = \lambda \left( \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{d} + \|\mathbf{d}\| \epsilon(\lambda \mathbf{d}) \right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{d} + \|\mathbf{d}\| \epsilon(\lambda \mathbf{d}) \geq 0 \quad (7.16)$$

En faisant tendre  $\lambda$  vers 0 dans (7.16), on obtient :

$$\forall \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{d} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (7.17)$$

En exploitant le résultat (7.17) dans la relation (7.16) et le fait que  $\pi^s$  soit positivement homogène de degré 1, il vient :

$$\forall \mathbf{d}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \pi^s(\lambda \mathbf{d}) = \lambda \|\mathbf{d}\| \epsilon(\lambda \mathbf{d}) \quad \Rightarrow \quad \pi^s(\mathbf{d}) = \|\mathbf{d}\| \epsilon(\lambda \mathbf{d}) \quad (7.18)$$

En faisant tendre  $\lambda$  vers 0 dans (7.18), on a :

$$\forall \mathbf{d}, \quad \pi^s(\mathbf{d}) = 0 \quad (7.19)$$

ce qui signifie que  $G^s$  est alors nécessairement réduit à  $\{\mathbf{0}\}$ . Dès que ce n'est pas le cas,  $\pi^s$  n'est pas différentiable en  $\mathbf{0}$ .

## 7.2 Règle de normalité sur une surface paramétrée

Considérons une partie de  $\mathbb{R}^6$  définie par une équation  $\Sigma(\mathbf{D})$ . La relation  $\Sigma(\mathbf{D})$  est supposée positivement homogène de degré 0 i.e. :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad \Sigma(\theta \mathbf{D}) = \Sigma(\mathbf{D}) \quad (7.20)$$

Ainsi  $\Sigma$  ne dépend que de cinq paramètres indépendants au lieu des six composantes de  $\mathbf{D}$ . Le domaine décrit par  $\Sigma(\mathbf{D})$  est donc une nappe paramétrique ou surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^6$  ( $\dim \mathcal{S} = 5$ ). Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbf{D}$  soit normal à la surface est que  $\Sigma$  derive d'un potentiel. Ce potentiel n'est autre que  $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}) = \Sigma(\mathbf{D}) : \mathbf{D}$  à une constante additive près.

*Preuve*

Montrons d'abord que  $\mathbf{D}$  est normal à  $\mathcal{S}$  au point  $\Sigma$  si et seulement si  $\Sigma$  derive de  $\tilde{\Pi}$ .

$$\mathbf{D} \perp \mathcal{S} \text{ at point } \Sigma \Leftrightarrow \mathbf{D} : d\Sigma(\mathbf{D}) = 0 \quad (7.21)$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(\mathbf{D}) : d\mathbf{D} = d(\Sigma(\mathbf{D}) : \mathbf{D}) \quad (7.22)$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(\mathbf{D}) : d\mathbf{D} = d\tilde{\Pi}(\mathbf{D}) \quad (7.23)$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(\mathbf{D}) = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (7.24)$$

Nous devons maintenant montrer que, si  $\Sigma$  derive d'un potentiel  $\Psi$ , celui-ci est nécessairement  $\tilde{\Pi}$  à une constante additive près.

Comme  $\Sigma(\mathbf{D})$  est positivement homogène de degré 0, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad \Sigma(\theta \mathbf{D}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}}(\theta \mathbf{D}) = \Sigma(\mathbf{D}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (7.25)$$

En utilisant (7.25), on montre facilement par différentiation par rapport à  $\mathbf{D}$  que le groupement  $\theta \Psi(\mathbf{D}) - \Psi(\theta \mathbf{D})$  ne dépend pas de  $\mathbf{D}$  mais seulement de  $\theta$  :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad \theta \Psi(\mathbf{D}) - \Psi(\theta \mathbf{D}) = F(\theta) \quad (7.26)$$

Différentiant (7.26) par rapport à  $\theta$ , on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi(\mathbf{D}) - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}}(\theta \mathbf{D}) : \mathbf{D} = F'(\theta) \quad (7.27)$$

Rappelant d'après (7.25) que  $\partial \Psi / \partial \mathbf{D}(\theta \mathbf{D}) = \Sigma(\mathbf{D})$ , il vient que  $F'(\theta)$  est une constante  $C$  (indépendant de  $\theta$ ). On a alors :

$$\Psi(\mathbf{D}) = \Sigma(\mathbf{D}) : \mathbf{D} + C = \tilde{\Pi}(\mathbf{D}) + C \quad (7.28)$$

ce qui achève la démonstration.

Comme conséquence première de cette démonstration, il est suffisant de montrer que la propriété de normalité est obtenue si et seulement si les composantes de  $\Sigma$  satisfont les égalités des dérivées croisées :

$$\forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \quad \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial D_{kl}} = \frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial D_{ij}} \quad (7.29)$$

Dans le cas d'une équation paramétrique ne dépendant que des deux premiers invariants de  $\mathbf{D}$ , i.e.  $\Sigma_m = \Sigma_m(D_v, D_d)$ ,  $\Sigma_d = \Sigma_d(D_v, D_d)$  et  $\Sigma_d$  est parallèle à  $\mathbf{D}_d$ , les conditions (7.29) deviennent simplement :

$$\frac{\partial \Sigma_m}{\partial D_d} = \frac{\partial \Sigma_d}{\partial D_v} \quad (7.30)$$

## 7.3 Approche variationnelle de la méthode sécante modifiée

La démonstration qui figure dans cette section est adaptée de [97].

Plaçons-nous dans le contexte d'une loi de comportement de la phase solide de type “ $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$ ”. Supposons que cette loi soit élastique non linéaire et s'écrive à partir d'un potentiel  $\psi^s$  qui ne dépend que des deux premiers invariants de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . La loi (4.65) devient alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_v}(\varepsilon_v, \varepsilon_d)}_{k^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)} \varepsilon_v \mathbf{1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_d} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_d}(\varepsilon_v, \varepsilon_d)}_{2\mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)} \boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{c}^s(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.31)$$

Le potentiel macroscopique  $\Psi(\mathbf{E})$ , dont dérive la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$ , s'écrit à partir d'un problème d'optimisation sur l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles avec la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  au contour (i.e. vérifiant (4.67 e)) tels que la déformation soit nulle dans les inclusions rigides et admettant éventuellement une discontinuité de déplacement tangentielle uniquement sur  $\partial\Omega^l$  (analogue de  $\mathcal{CA}'$  (4.19) avec des conditions de régularité supplémentaires puisque la seule discontinuité possible ne concerne que  $\partial\Omega^l$ ) :

$$\Psi(\mathbf{E}) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{E})} \varphi^s \langle \psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_{\Omega^s} \quad (7.32)$$

Sous réserve que la fonction  $\psi^s$  soit bien strictement convexe, la solution de ce problème d'élasticité non linéaire existe et sa restriction à la phase solide est unique [92]. Celle-ci satisfait également le système (4.67) avec  $\mathbf{c}^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = 3k^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)\mathbb{J} + 2\mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)\mathbb{K}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^p = \mathbf{0}$ . On se propose d'estimer  $\Psi(\mathbf{E})$  par la fonction  $\overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E})$  définie par le problème de minimisation suivant :

$$\overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E}) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{E})} \varphi^s \psi^s(\overline{\overline{\varepsilon}}_v, \overline{\overline{\varepsilon}}_d) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{E})} \varphi^s \psi^s(\sqrt{\langle \varepsilon_v^2 \rangle_{\Omega^s}}, \sqrt{\langle \varepsilon_d^2 \rangle_{\Omega^s}}) \quad (7.33)$$

Montrons que la formulation forte de ce problème variationnel est équivalent au système d'équations de la méthode sécante modifiée. Pour cela, on se propose de mettre en œuvre un calcul des variations de  $\overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E})$  autour de la solution. Appelons  $\boldsymbol{\xi}^*$  le champ de déplacement solution de (7.33) et  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  son champ de déformation associé. Considérons également un incrément  $\delta\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{0})$  de sorte que  $\boldsymbol{\xi}^* + \delta\boldsymbol{\xi}$  parcourt un voisinage de  $\boldsymbol{\xi}^*$  inclus dans  $\mathcal{CA}'(\mathbf{E})$  et calculons les variations de  $\overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E})$  :

$$\delta\overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E}) = \varphi^s \left( \frac{1}{\overline{\overline{\varepsilon}}_v} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_v}(\overline{\overline{\varepsilon}}_v^*, \overline{\overline{\varepsilon}}_d^*) \langle \varepsilon_v^* \delta\varepsilon_v \rangle_{\Omega^s} + \frac{1}{\overline{\overline{\varepsilon}}_d} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_d}(\overline{\overline{\varepsilon}}_v^*, \overline{\overline{\varepsilon}}_d^*) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d^* : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\Omega^s} \right) \quad (7.34)$$

ou encore :

$$\delta\overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \left( \frac{1}{\overline{\overline{\varepsilon}}_v} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_v}(\overline{\overline{\varepsilon}}_v^*, \overline{\overline{\varepsilon}}_d^*) \varepsilon_v^* \mathbf{1} + \frac{1}{\overline{\overline{\varepsilon}}_d} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_d}(\overline{\overline{\varepsilon}}_v^*, \overline{\overline{\varepsilon}}_d^*) \boldsymbol{\varepsilon}_d^* \right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (7.35)$$

$$= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{c}^s(\overline{\overline{\varepsilon}}_v^*, \overline{\overline{\varepsilon}}_d^*) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (7.36)$$

On introduit la notation :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{c}^s(\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_v^*, \bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_d^*) : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (7.37)$$

À l'aide de (7.37), on transforme (7.36) par intégration par parties :

$$\delta \bar{\bar{\Psi}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{|\Omega|} \left( - \int_{\Omega^s} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \delta \boldsymbol{\xi} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega^s} \delta \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \, dS \right) \quad (7.38)$$

Examinons l'intégrale surfacique du membre de droite de (7.38). Ayant pris soin de faire passer la frontière du v.e.r. dans la phase solide uniquement, il est clair que  $\partial\Omega^s$  est la réunion de  $\partial\Omega$  (sur lequel l'intégrale surfacique est nulle puisque  $\delta \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{CA}'(\mathbf{0})$ ) et des frontières des inclusions  $\partial\Omega^p$ ,  $\partial\Omega^r$  et  $\partial\Omega^l$ . Comme on peut avoir une discontinuité tangentielle de déplacement sur  $\partial\Omega^l$ , il faut distinguer l'incrément de déplacement apparaissant dans l'intégrale c'est-à-dire du côté de  $\Omega^s$  noté  $\delta \boldsymbol{\xi}^s$  et celui du côté de  $\Omega^l$  noté  $\delta \boldsymbol{\xi}^l$ . En écrivant  $[[\delta \boldsymbol{\xi}]] = \delta \boldsymbol{\xi}^l - \delta \boldsymbol{\xi}^s$ , il découle de (7.38) :

$$\begin{aligned} \delta \bar{\bar{\Psi}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{|\Omega|} \left( \underbrace{- \int_{\Omega^s} \delta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^* \, d\Omega}_{I_1} + \underbrace{\int_{\partial\Omega^p} \delta \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \, dS}_{I_2} + \underbrace{\int_{\partial\Omega^r} \delta \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \, dS}_{I_3} \right. \\ \left. + \underbrace{\int_{\partial\Omega^l} \delta \boldsymbol{\xi}^l \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \, dS}_{I_4} - \underbrace{\int_{\partial\Omega^l} [[\delta \boldsymbol{\xi}]] \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \, dS}_{I_5} \right) \quad (7.39) \end{aligned}$$

L'ensemble des choix licites pour le champ  $\delta \boldsymbol{\xi}$  permet de déduire de (7.39) les résultats suivants :

- Dans l'intégrale de volume  $I_1$ ,  $\delta \boldsymbol{\xi}$  est une fonction continue quelconque. Par un raisonnement classique consistant à choisir  $\delta \boldsymbol{\xi}$  de façon à annuler les autres intégrales, on obtient l'équation de champ suivante :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^s \quad (7.40)$$

- On choisit ensuite  $\delta \boldsymbol{\xi}$  nulle partout sauf sur un voisinage de  $\partial\Omega^p$  où elle peut prendre des valeurs quelconques. On déduit de  $I_2$  que l'on a  $\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , ce qui permet de prolonger  $\boldsymbol{\sigma}^*$  dans les pores en respectant la continuité du vecteur-contrainte par :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^p \quad (7.41)$$

- Dans les inclusions rigides  $\Omega^r$  et  $\Omega^l$ , on rappelle que la solution ainsi que le champ  $\delta \boldsymbol{\xi}$  se caractérisent par des déformations nulles. Ainsi, dans  $I_3$  et  $I_4$ ,  $\delta \boldsymbol{\xi}$  ( $\delta \boldsymbol{\xi}^l$  dans  $\Omega^l$ ) est la trace sur  $\partial\Omega^r$  ou  $\partial\Omega^l$  d'un mouvement de corps rigide quelconque par phase connexe (dépendant de trois paramètres de translation et de trois paramètres de rotation). Ceci implique que, pour chaque inclusion, le torseur induit par la distribution de vecteur-contrainte sur la frontière doit être nul. Il suffit pour cela de

considérer n'importe quel prolongement de  $\boldsymbol{\sigma}^*$  dans les inclusions rigides qui respecte la continuité du vecteur-contrainte à l'interface et tel que :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^r \cup \Omega^l \quad (7.42)$$

- Dans l'intégrale  $I_5$ ,  $[[\delta \boldsymbol{\xi}]]$  définit une fonction tangentielle quelconque. La condition imposée sur la grandeur duale est donc :

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} // \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial \Omega^l \quad (7.43)$$

En conclusion, les équations devant être satisfaites par  $(\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$  sont (7.37), (7.40), (7.41), (7.42) et (7.43) auxquelles il faut ajouter les conditions imposées sur  $\boldsymbol{\xi}^*$  pour appartenir à  $\mathcal{CA}'(\mathbf{E})$ . Ce système est précisément celui qu'il s'agit de résoudre dans la méthode sécante modifiée.

Il reste finalement à montrer que la contrainte macroscopique, obtenue dans le cadre de la méthode sécante modifiée (comme la moyenne du champ de contrainte microscopique), dérive bien de  $\overline{\overline{\Psi}}$ . Envisageons une variation de déformation macroscopique  $\delta \mathbf{E}$  autour d'une valeur quelconque  $\mathbf{E}$ . L'incrément de la solution est alors donné par  $\delta \boldsymbol{\xi}^* \in \mathcal{CA}'(\delta \mathbf{E})$ . Il est facile de constater qu'un calcul de la variation de  $\overline{\overline{\Psi}}$  engendrée par  $\delta \boldsymbol{\xi}^*$  fournit l'équation (7.36) appliquée à  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^*$ . En utilisant (7.37), (7.41), (7.43) ainsi que les propriétés de  $\delta \boldsymbol{\xi}^*$  (déformation nulle dans les inclusions rigides et discontinuité normale nulle sur  $\partial \Omega^l$ ) dans cette équation, on obtient :

$$\delta \overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E}) = \langle \boldsymbol{\sigma}^* : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_{\Omega^s} \quad (7.44)$$

En appliquant le lemme de Hill (1.37) au couple  $(\boldsymbol{\sigma}^*, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^*)$ , (7.44) devient :

$$\delta \overline{\overline{\Psi}}(\mathbf{E}) = \langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle_{\Omega^s} : \delta \mathbf{E} = \boldsymbol{\Sigma} : \delta \mathbf{E} \quad (7.45)$$

ce qui établit le résultat recherché :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \overline{\overline{\Psi}}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \quad (7.46)$$

## 7.4 Sphère creuse soumise à une pression externe

Le but de cette section est d'illustrer une amélioration possible de la méthode d'homogénéisation linéaire mise en œuvre aux chapitres 4, 5 et 6 sur un exemple qui permet une résolution analytique complète : une sphère creuse soumise à une pression externe  $P$  (FIG. 7.1). La phase solide est comprise entre la sphère intérieure de rayon  $a$  et celle extérieure de rayon  $b$ . On examinera le cas où le critère de résistance de la phase solide est von Mises et celui où le critère est Drucker-Prager.

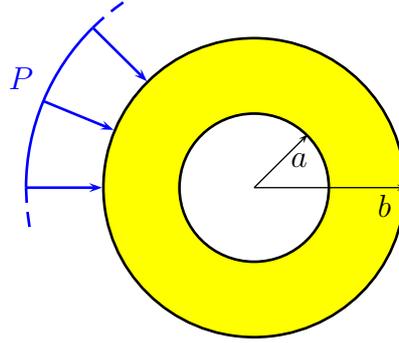


FIG. 7.1 – Sphère creuse soumise à une pression externe

### 7.4.1 Matrice de von Mises

#### Solution du problème de calcul à la rupture

La solution complète de ce problème s'obtient en menant une approche par l'intérieur statique et une approche par l'extérieur cinématique qui fournissent les résultats suivants :

- *Approche statique par l'intérieur*

En postulant la symétrie sphérique du tenseur de contrainte, en exploitant l'équilibre ainsi que la saturation du critère (5.1), on trouve le champ optimal suivant écrit dans le repère sphérique (FIG. 3.3) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = 2\sigma_o \ln \frac{a}{r} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \sigma_o \end{cases} \quad (7.47)$$

- *Approche statique par l'extérieur*

La famille de champs de vitesse optimaux est obtenue en choisissant des champs radiaux respectant la condition de pertinence ( $d_v = 0$ ) pour que la fonction d'appui (5.2) reste finie :

$$\mathbf{u} = -U \left(\frac{b}{r}\right)^2 \mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad U > 0 \quad (7.48)$$

La combinaison des deux approches fournit la pression limite suivante :

$$P^+ = 2\sigma_o \ln \frac{b}{a} = -\frac{2}{3}\sigma_o \ln \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (7.49)$$

#### Homogénéisation non linéaire par partition

L'idée de la partition de la phase solide provient du constat de la faiblesse de la méthode sécante d'homogénéisation non linéaire qui est fondée sur la définition d'un tenseur d'élasticité

effectif uniforme dans la phase solide alors que ce tenseur devrait être sensible à l'hétérogénéité du champ de déformation. Pour mieux tenir compte de l'hétérogénéité de ce champ, on décide d'effectuer une partition de la phase solide en  $N$  sous-domaines sur chacun desquels on définit une déformation effective. Le tenseur d'élasticité sera alors uniforme par morceaux. Dans le cas de la sphère creuse soumise à une pression externe, l'hétérogénéité est radiale; il est donc naturel de décomposer la zone solide en  $N$  coques concentriques  $C_{i(1 \leq i \leq N)}$ , la  $i^{\text{ème}}$  d'entre elles est située entre le rayon  $R_{i-1}$  et  $R_i$  avec  $R_0 = a$  et  $R_N = b$ . On notera  $\varphi_i = (R_{i-1}/R_i)^3$ , ce qui implique :

$$\varphi = \prod_{i=1}^N \varphi_i \quad (7.50)$$

On choisit de traiter le problème par la méthode visqueuse régularisée en utilisant les

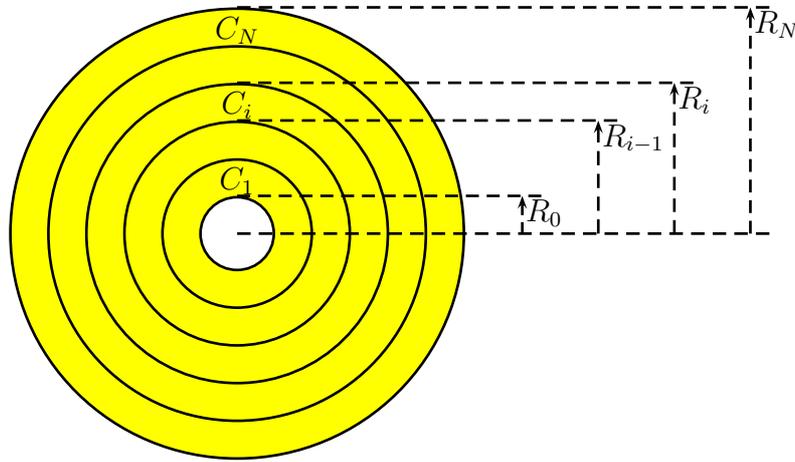


FIG. 7.2 – Partition de la sphère creuse

modules (5.9). Sur chaque domaine  $C_i$ , les taux de déformations effectifs s'écrivent :

$$\bar{d}_v^i = \langle d_v \rangle_{C_i} \quad ; \quad \bar{\bar{d}}_d^i = \sqrt{\langle \mathbf{d}_d : \mathbf{d}_d \rangle_{C_i}} \quad (7.51)$$

On a donc à résoudre un problème d'«élasticité linéaire» sur une sphère creuse à  $N$  couches concentriques. Les modules de la couche  $C_i$  s'écrivent :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{k}_n^i = \frac{a_n^2}{\sqrt{(a_n \bar{d}_v^i)^2 + (b \bar{\bar{d}}_d^i)^2}} \\ 2 \hat{\mu}_n^i = \frac{b^2}{\sqrt{(a_n \bar{d}_v^i)^2 + (b \bar{\bar{d}}_d^i)^2}} \end{array} \right. \quad (7.52)$$

La solution de ce problème classique est donnée par des champs définis par morceaux. On montre que pour respecter l'équation d'équilibre (1.18 a), ceux-ci s'écrivent sur la couche  $C_i$  [54] :

- vitesse

$$\mathbf{u} = \left( A_i r + \frac{B_i}{r^2} \right) \mathbf{e}_r \quad (7.53)$$

- invariants du taux de déformation

$$d_v = 3 A_i \quad ; \quad d_d = \sqrt{6} \frac{|B_i|}{r^3} \quad (7.54)$$

- contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = 3 \hat{k}_n^i A_i - 4 \hat{\mu}_n^i \frac{B_i}{r^3} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 3 \hat{k}_n^i A_i + 2 \hat{\mu}_n^i \frac{B_i}{r^3} \\ \text{autres } \sigma_{ij} \text{ nuls} \end{array} \right. \quad (7.55)$$

On note  $P_i = -\sigma_{rr}(R_i)_{(0 \leq i \leq N)}$ . La solution est alors complétée par les conditions aux interfaces qui entraînent :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad A_i = \frac{P_{i-1} \varphi_i - P_i}{3 \hat{k}_n^i (1 - \varphi_i)} \quad ; \quad B_i = \frac{R_{i-1}^3 (P_{i-1} - P_i)}{4 \hat{\mu}_n^i (1 - \varphi_i)} \quad (7.56)$$

La première remarque que l'on peut formuler est que  $d_v$  est uniforme par couche (7.54) (la méthode mixte est ici équivalente à la méthode modifiée) et il varie comme  $1/k_n^i$  (7.56). On en déduit alors d'après (7.52) que  $\bar{d}_v^i$  ne peut que varier en  $1/a_n^2$  lorsque  $n$  est au voisinage de l'infini. On a donc :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{k}_n^i \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_n^2}{b \bar{d}_d^i} \rightarrow \infty \\ 2 \hat{\mu}_n^i \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{b}{\bar{d}_d^i} \end{array} \right. \quad (7.57)$$

Pour trouver  $\bar{d}_d^i$ , on se réfère à la définition (7.51) en exploitant  $d_d$  (7.54) et (7.56). En utilisant la relation d'ordre 0  $0 \leq P_{i-1} \leq P_i \leq P$  pour lever l'ambiguïté de signe sur  $B_i$ , on montre :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \bar{d}_d^i = \frac{\sqrt{3} (P_i - P_{i-1})}{2 \sqrt{2} \hat{\mu}_n^i} \frac{\sqrt{\varphi_i}}{1 - \varphi_i} \quad (7.58)$$

Comme  $P_0 = 0$  et  $P_N = P$ , on déduit de (7.58) :

$$P = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_n^i \bar{d}_d^i \frac{1 - \varphi_i}{\sqrt{\varphi_i}} \quad (7.59)$$

D'après (7.57), il vient ensuite :

$$P = \frac{2}{3} \sigma_o \sum_{i=1}^N \frac{1 - \varphi_i}{\sqrt{\varphi_i}} \quad (7.60)$$

La valeur de  $P$  dépend du choix de la distribution des  $\varphi_i$  sous la contrainte (7.50). Précisons qu'il est possible de montrer que l'approche envisagée (méthode mixte se ramenant à la méthode modifiée) permet de construire un majorant de la pression limite. La démonstration s'effectue dans le même esprit que celle qui a été employée pour montrer le résultat avec une seule zone à la section 5.1.2. La partition optimale est obtenue pour :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \varphi_i = \varphi^{\frac{1}{N}} \quad (7.61)$$

La pression limite optimale obtenue est alors :

$$P = \frac{2}{3} \sigma_o N \left( \varphi^{-\frac{1}{2N}} - \varphi^{\frac{1}{2N}} \right) \quad (7.62)$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on parvient à restituer l'hétérogénéité du champ de taux de déformation puisque l'on retrouve la pression limite exacte du calcul à la rupture (7.49) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sigma_o N \left( \varphi^{-\frac{1}{2N}} - \varphi^{\frac{1}{2N}} \right) = -\frac{2}{3} \sigma_o \ln \varphi \quad (7.63)$$

On constate sur la FIG. 7.3 que la pression limite estimée par la technique usuelle d'ho-

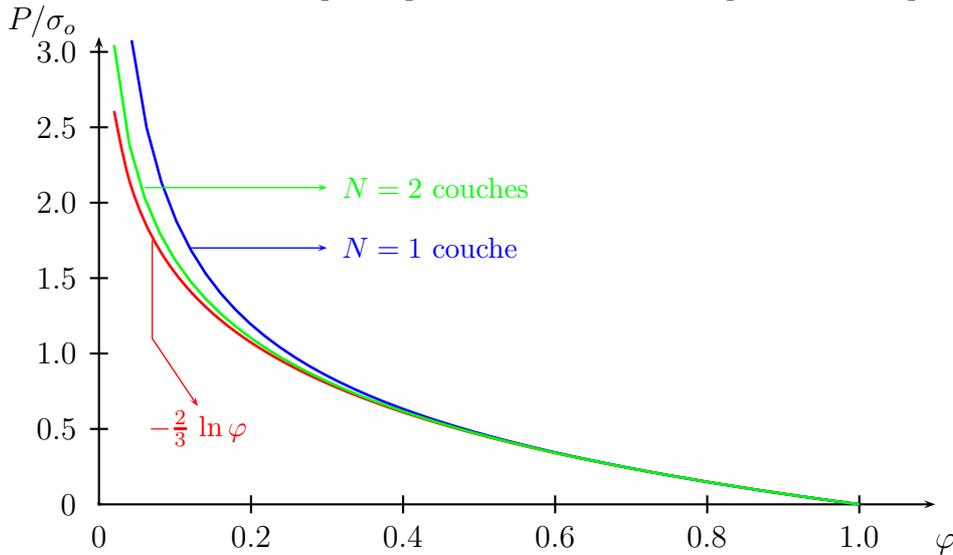


FIG. 7.3 – Effet du nombre de couches sur l'estimation de la pression limite - matrice de von Mises

mogénéisation linéaire ( $N = 1$ ) s'écarte d'autant plus de la solution fournie par le calcul à la rupture que l'on se situe dans le domaine des faibles porosités. Cet écart s'explique par le fait que la solution du calcul à la rupture fournit un champ de vitesse (7.48) en  $1/r^2$  soit un champ de taux de déformation en  $1/r^3$  et donc très hétérogène au voisinage d'un petit pore alors que la méthode sécante d'homogénéisation non linéaire gomme cette hétérogénéité par une moyenne sur la phase solide. On note que cette estimation est déjà considérablement améliorée en prenant 2 couches.

## 7.4.2 Matrice de Drucker-Prager

### Solution du problème de calcul à la rupture

La solution complète du problème de calcul à la rupture est fournie par les deux approches :

- *Approche statique par l'intérieur*

En postulant la symétrie sphérique du tenseur de contrainte, en exploitant l'équilibre ainsi que la saturation du critère (6.1) avec l'hypothèse,  $\sigma_{rr} \geq \sigma_{\theta\theta}$  on trouve le champ optimal suivant écrit dans le repère sphérique (FIG. 3.3) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = h \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{3\alpha} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \frac{3}{2} \alpha (\sigma_{rr} - h) \end{cases} \quad (7.64)$$

où l'on a introduit la notation :

$$\alpha = \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2} - t}} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha}{1 + \alpha} \quad (7.65)$$

- *Approche statique par l'intérieur*

La famille de champs de vitesse optimaux est obtenue en choisissant des champs radiaux respectant la condition de dilatance ( $d_v = t d_d$ ) pour que la fonction d'appui (6.3) reste finie :

$$\mathbf{u} = -U \left( \frac{b}{r} \right)^{3\alpha+2} \mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad U > 0 \quad (7.66)$$

La combinaison des deux approches fournit la pression limite suivante :

$$P^+ = h (\varphi^{-\alpha} - 1) = h \left( \varphi^{-\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}-t}}} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \varphi = \left( \frac{a}{b} \right)^3 \quad (7.67)$$

### Homogénéisation non linéaire par partition

La faiblesse de la méthode basée sur une déformation effective uniforme déjà mentionnée dans le cas de von Mises est ici encore plus évidente puisque le critère général (6.53) présente une asymptote à la porosité  $\varphi = 2t^2/3$  et n'est pas en mesure de fournir une estimation pour des porosités plus faibles. On recourt à nouveau à la décomposition de la couronne matricielle en couronnes concentriques  $C_i$  (cf. FIG. 7.2). Les notations relatives à la géométrie du problème sont les mêmes qu'au paragraphe 7.4.1 consacré à von Mises comme, par exemple, (7.50). Ajoutons que les déformations effectives sont

toujours définies par (7.51). Utilisant la méthode visqueuse, sur chaque couche  $C_i$  les modules et la précontrainte s'écrivent :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \begin{cases} \hat{k}_n^i = \frac{h+a_n}{t \bar{d}_d^i} \\ 2 \hat{\mu}_n^i = \frac{h+a_n}{2t \bar{d}_d^i} \left( t^2 - \left( \frac{\bar{d}_v^i}{\bar{d}_d^i} \right)^2 \right) \\ \sigma_n^{p,i} = -a_n \end{cases} \quad (7.68)$$

On étend également ici les limites (6.17) sur chaque couche :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \begin{cases} X_n^i = t - \frac{\bar{d}_v^i}{\bar{d}_d^i} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^i = 0 \\ Y_n^i = a_n X_n^i \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^i = Y^i \geq 0 \end{cases} \quad (7.69)$$

La solution du problème est classiquement donnée par des champs définis par morceaux dont les expressions sur la couche  $C^i$  sont :

- vitesse

$$\mathbf{u} = \left( A_i r + \frac{B_i}{r^2} \right) \mathbf{e}_r \quad (7.70)$$

- invariants du taux de déformation

$$d_v = 3 A_i \quad ; \quad d_d = \sqrt{6} \frac{|B_i|}{r^3} \quad (7.71)$$

- contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 3 \hat{k}_n^i A_i - 4 \hat{\mu}_n^i \frac{B_i}{r^3} - a_n \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 3 \hat{k}_n^i A_i + 2 \hat{\mu}_n^i \frac{B_i}{r^3} - a_n \\ \text{autres } \sigma_{ij} \text{ nuls} \end{cases} \quad (7.72)$$

Comme dans le cas de von Mises, on note  $P_i = -\sigma_{rr}(R_i)_{(0 \leq i \leq N)}$ . La solution est alors complétée par les conditions aux interfaces qui entraînent :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad A_i = \frac{P_{i-1} \varphi_i - P_i}{3 \hat{k}_n^i (1 - \varphi_i)} + \frac{a_n}{3 \hat{k}_n^i} \quad ; \quad B_i = \frac{R_{i-1}^3 (P_{i-1} - P_i)}{4 \hat{\mu}_n^i (1 - \varphi_i)} \quad (7.73)$$

On remarque encore ici que  $d_v$  est uniforme sur chaque couche, autrement dit les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 sont égaux et les méthodes modifiée et mixte sont équivalentes.

Pour achever la détermination de la charge macroscopique  $P$ , il faut identifier les inconnues

$P_i$ . Un premier ensemble d'équations provient du passage à la limite, lorsque  $n$  tend vers l'infini, de la contrainte moyenne sur chaque couche i.e.  $\hat{k}_n^i \bar{d}_v^i - a_n$ . En s'appuyant d'une part sur l'expression (7.73) de  $A_i$  et, d'autre part, sur les relations (7.68) et les limites (7.69), on montre :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \frac{P_{i-1} \varphi_i - P_i}{1 - \varphi_i} = h - \frac{Y^i}{t} \quad (7.74)$$

Le second ensemble d'équations provient du calcul de  $\bar{d}_d^i$  sur chaque couche à partir de la solution (7.71) et (7.73). Dans les mêmes conditions que pour von Mises, on montre :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \bar{d}_d^i = \frac{\sqrt{3} (P_i - P_{i-1})}{2 \sqrt{2} \hat{\mu}_n^i} \frac{\sqrt{\varphi_i}}{1 - \varphi_i} \quad (7.75)$$

Or l'expression (7.68) de  $\hat{\mu}_n^i$  et les limites (7.69) nous permettent d'en déduire :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad Y^i = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(P_i - P_{i-1}) \sqrt{\varphi_i}}{1 - \varphi_i} \quad (7.76)$$

Éliminant  $Y^i$  entre (7.74) et (7.76), on obtient :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad P_i + h = (P_{i-1} + h) \sqrt{\varphi_i} \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - t \sqrt{\varphi_i}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_i} - t} \right) \quad (7.77)$$

Comme  $P_0 = 0$  et  $P_N = P$ , on déduit de (7.77) :

$$P = h \left( \prod_{i=1}^N \sqrt{\varphi_i} \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - t \sqrt{\varphi_i}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_i} - t} \right) - 1 \right) \quad (7.78)$$

Adoptant à nouveau la répartition (7.61), la pression limite s'écrit :

$$P = h \left( \sqrt{\varphi} \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - t \varphi^{\frac{1}{2N}}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \varphi^{\frac{1}{2N}} - t} \right)^N - 1 \right) \quad (7.79)$$

L'asymptote pour les faibles valeurs de la porosité est maintenant obtenue en  $\varphi = (2t^2/3)^N$ . Ainsi, lorsque le nombre de couches est grand, l'hétérogénéité du champ de déformation est mieux prise en compte et l'asymptote est naturellement repoussée vers 0. Le passage à la limite de (7.79) lorsque  $N$  tend vers l'infini redonne (7.67) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h \left( \sqrt{\varphi} \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - t \varphi^{\frac{1}{2N}}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \varphi^{\frac{1}{2N}} - t} \right)^N - 1 \right) = h (\varphi^{-\alpha} - 1) \quad (7.80)$$

Comme pour le cas de von Mises, on note sur la FIG. 7.4 que la décomposition de la ma-

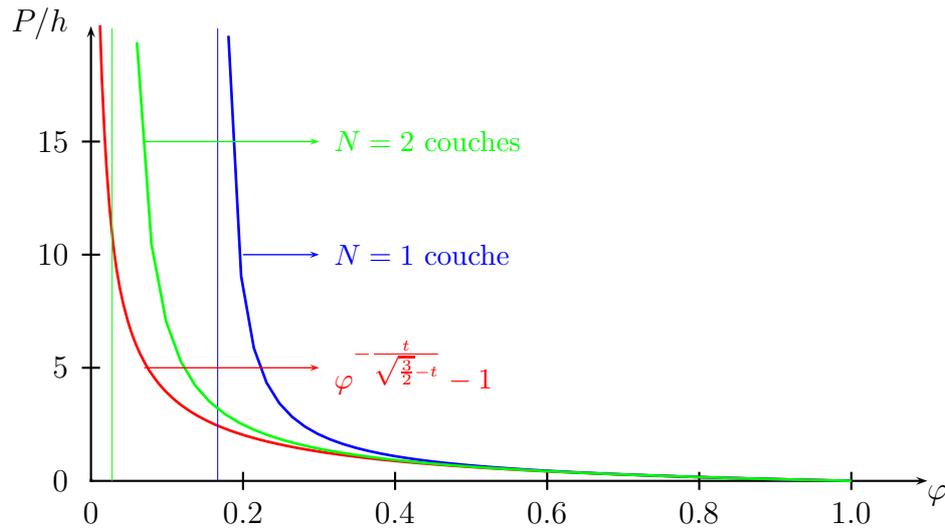


FIG. 7.4 – Effet du nombre de couches sur l'estimation de la pression limite - matrice de Drucker-Prager  $t = 0.5$

trice en zones concentriques améliore considérablement la prédiction de l'homogénéisation linéaire pour les plus faibles porosités. Elle permet surtout ici d'accéder à des valeurs de la porosité rendues inaccessibles par la présence d'une asymptote. Il sera donc sans doute intéressant de procéder à une telle décomposition autour des pores d'un v.E.R. dans le cas général pour améliorer le critère (6.53) au moins d'un point de vue numérique.



**Troisième partie**  
**POROPLASTICITÉ**



# Chapitre 8

## Comportement poroplastique

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Les lois d'état du comportement poroplastique . . . . .</b>	<b>171</b>
<b>8.2</b>	<b>Approche énergétique . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>8.3</b>	<b>Le critère de plasticité macroscopique . . . . .</b>	<b>176</b>
<b>8.4</b>	<b>La règle d'écoulement macroscopique dans le cas associé . . .</b>	<b>178</b>

---



Dans la partie précédente, nous nous sommes concentrés sur la recherche des états limites d'un géomatériau en fonction de la nature des inclusions d'une part et du critère et de la règle d'écoulement de la phase matricielle d'autre part. Nous nous proposons désormais de nous intéresser à l'évolution du v.E.R. dans sa phase élasto-plastique depuis l'initiation de la plasticité jusqu'aux états limites. Ce chapitre sera consacré à la formulation du comportement poro(-élasto-)plastique et le chapitre suivant portera sur la question de l'existence d'une contrainte effective susceptible de régir le comportement à l'échelle macroscopique. Bien que les équations du comportement puissent être obtenues dans le cas général du v.E.R. décrit à la section 1.3, nous nous limitons ici au cas d'un milieu poreux saturé dont la matrice est homogène i.e.  $\Omega^s \cup \Omega^p = \Omega$  et donc  $\varphi^s + \varphi = 1$ .

## 8.1 Les lois d'état du comportement poroplastique

Le comportement de la matrice est élasto-plastique. En HPP, ceci signifie que le tenseur de déformation est la somme d'une contribution élastique liée au tenseur de contrainte et d'une contribution plastique dépendant de l'histoire du chargement :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{el}(\mathbf{x})} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x}) \quad (8.1)$$

À l'échelle macroscopique, on connaît déjà le comportement poroélastique à travers les équations (2.78) et (2.79). On cherche maintenant à prendre en compte l'existence de déformations plastiques microscopiques dans les lois d'état du v.E.R.. Ces lois relient  $\mathbf{E}$  et  $v$  d'une part à  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $p$  ainsi que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  d'autre part. Selon un raisonnement présenté dans [102], on considère le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  à l'instant actuel comme une donnée du problème (comparable à un champ de déformation libre). Il apparaît alors que les contributions de  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $p$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  à  $\mathbf{E}$  et  $v$  s'obtiennent par superposition. On choisit de poser le problème de façon à ce que  $\boldsymbol{\Sigma}$  soit un paramètre de chargement en adoptant par exemple les conditions de contraintes homogènes au contour (1.32), ce qui ne restreint pas la portée des résultats à venir si la séparation d'échelle est respectée (cf. section 2.1.2). Signalons ici que  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $p$  représentent de "vrais" paramètres de chargement dans la mesure où on peut les contrôler lors d'une expérience, ce qui n'est pas le cas du champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  qui est une conséquence de l'histoire du chargement. Par linéarité, le problème à résoudre peut être décomposé de la

façon suivante (FIG. 8.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^s : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (\Omega^s) \\ \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} \quad (\Omega^p) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}) \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}^{EL}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{EL} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^{EL} = \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \quad (\Omega^s) \\ \boldsymbol{\sigma}^{EL} = -p \mathbf{1} \quad (\Omega^p) \\ \boldsymbol{\sigma}^{EL} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}^{EL} + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}^{EL}) \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}^R) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{c}^s : (\boldsymbol{\varepsilon}^R - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (\Omega^s) \\ \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0} \quad (\Omega^p) \\ \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^R = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}^R + {}^t \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}^R) \end{array} \right. \quad (8.2)$$

Les deux équations d'état seront obtenues en calculant :

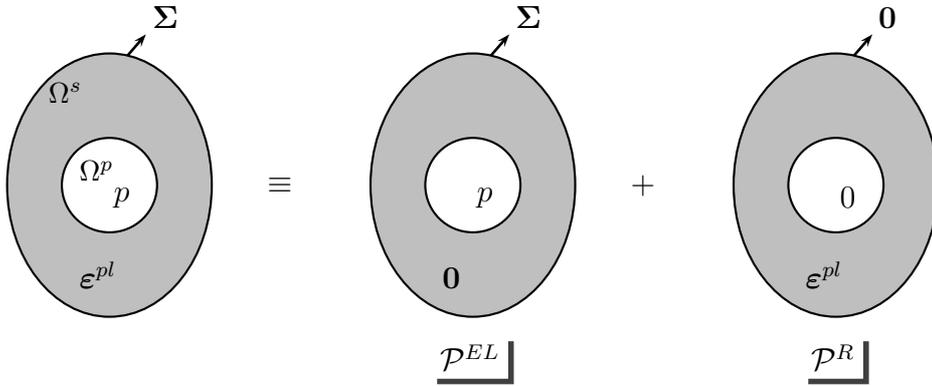


FIG. 8.1 – Décomposition du problème de poroplasticité  $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}^{EL} + \mathcal{P}^R$

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \underbrace{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \rangle}_{\mathbf{E}^{el}} + \underbrace{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^R \rangle}_{\mathbf{E}^{pl}} \quad (8.3)$$

$$v = \varphi \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega^p} = \underbrace{\varphi \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \rangle_{\Omega^p}}_{v^{el}} + \underbrace{\varphi \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^R \rangle_{\Omega^p}}_{v^{pl}} \quad (8.4)$$

Le premier problème  $\mathcal{P}^{EL}$  correspond à la réponse poroélastique du v.e.r. dont la solution est montrée au chapitre 2 :

$$\mathbf{E}^{el} = \mathbb{C}^{hom^{-1}} : (\boldsymbol{\Sigma} + p \mathbf{B}) \quad (8.5)$$

$$v^{el} = \mathbf{B} : \mathbf{E}^{el} + \frac{p}{M} \quad (8.6)$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  est donné par (2.89),  $\mathbf{B}$  par (2.90) et  $M$  par (2.93).

Dans le cas présent, l'homogénéité de la phase solide fournit une information capitale pour la suite de cette partie : elle permet d'exprimer facilement le champ de contrainte microscopique  $\boldsymbol{\sigma}^{EL}$  solution de  $\mathcal{P}^{EL}$ . On décompose d'abord linéairement  $\mathcal{P}^{EL}$  en deux sous-problèmes (FIG. 8.2) :

- le problème  $\mathcal{P}'$  pour lequel la contrainte homogène au contour est égale à  $-p\mathbf{1}$  et la pression du fluide vaut  $p$ ,
- le problème  $\mathcal{P}''$  pour lequel la contrainte homogène au contour est égale à  $\Sigma + p\mathbf{1}$  et la pression du fluide vaut 0.

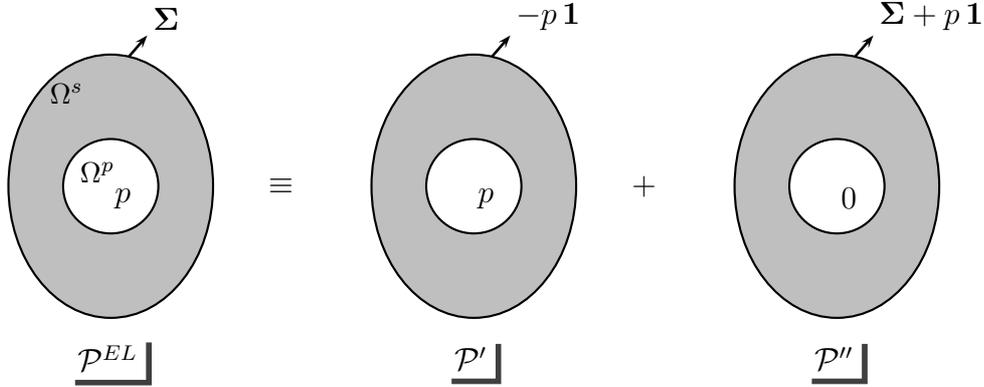


FIG. 8.2 – Décomposition du problème de poroélasticité  $\mathcal{P}^{EL} \equiv \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$

En raison de l'homogénéité de la phase solide, la solution du problème  $\mathcal{P}'$  est homogène et s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) = -p\mathbf{1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{s-1} : (-p\mathbf{1}) \quad (8.7)$$

Adaptant l'équation de localisation écrite en (2.19) au cas où les conditions aux limites sont exprimées avec  $\Sigma + p\mathbf{1}$ , la solution en contrainte de  $\mathcal{P}''$  s'écrit quant à elle :

$$\boldsymbol{\sigma}''(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : (\Sigma + p\mathbf{1}) \quad (8.8)$$

Finalement le champ de contrainte solution de  $\mathcal{P}^{EL}$  est la somme de (8.7) et (8.8) :

$$\boldsymbol{\sigma}^{EL}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'' = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : (\Sigma + p\mathbf{1}) - p\mathbf{1} \quad (8.9)$$

Intéressons-nous maintenant au problème  $\mathcal{P}^R$ . Celui-ci définit l'état relâché du v.e.r. car il s'obtient à partir de la solution totale par décharge élastique. Les notations  $\mathbf{E}^{pl}$  (8.3) et  $v^{pl}$  (8.4) désignent respectivement le tenseur de déformation et la variation de porosité résiduels (i.e. obtenus après décharge élastique). L'état relâché macroscopique ne correspond pas, en général, à un état où tous les points du v.e.r. sont dans leur propre configuration relâchée puisque le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  n'est généralement pas géométriquement compatible en raison du caractère hétérogène du v.e.r. et ne peut correspondre au champ de déformation de cet état. Il en résulte un champ de contraintes résiduel  $\boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x})$ . Le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  peut ici être assimilé à un champ de déformation libre de sorte que le théorème de Levin (2.69) s'applique. On obtient donc :

$$\mathbf{E}^{pl} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^R \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbb{B} \rangle = (1 - \varphi) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega^s} \quad (8.10)$$

La contribution de  $\mathcal{P}^R$  à la variation de porosité s'écrit :

$$v^{pl} = \varphi \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^R \rangle_{\Omega^p} = \mathbf{1} : \mathbf{E}^{pl} - (1 - \varphi) \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^R \rangle_{\Omega^s} \quad (8.11)$$

Rappelant que  $\langle \boldsymbol{\sigma}^R \rangle = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0}$  dans  $\Omega^p$ , on a  $\langle \boldsymbol{\sigma}^R \rangle_{\Omega^s} = \mathbf{0}$ . De plus,  $\mathbf{c}^s$  est uniforme donc, d'après la loi de comportement de la matrice dans le problème  $\mathcal{P}^R$  (8.2), il vient  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^R \rangle_{\Omega^s} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \rangle_{\Omega^s}$ . Ainsi (8.11) devient :

$$v^{pl} = \mathbf{1} : \mathbf{E}^{pl} - (1 - \varphi) \mathbf{1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \rangle_{\Omega^s} = (1 - \varphi) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : (\mathbb{B} - \mathbb{I}) \rangle_{\Omega^s} : \mathbf{1} \quad (8.12)$$

Pour résumer, ce paragraphe nous a permis d'écrire les lois du comportement poroplastique :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) - p \mathbf{B} \quad (8.13)$$

$$v - v^{pl} = \mathbf{B} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) + \frac{p}{M} \quad (8.14)$$

Les lois (8.13) et (8.14) s'établissent sous la même forme dans un contexte purement macroscopique basé sur les concepts de thermodynamique [26]. L'avantage de la micromécanique est qu'elle permet de faire le lien entre les grandeurs macroscopiques et les grandeurs microscopiques, qu'il s'agisse des propriétés élastiques (on a en effet montré au chapitre 2 que l'on pouvait exprimer  $\mathbb{C}^{hom}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $M$  grâce à la notion de localisation) ou des grandeurs physiques introduites par la plasticité ici :  $\mathbf{E}^{pl}$  et  $v^{pl}$  sont en effet reliés à  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  respectivement par (8.10) et (8.12). Par le raisonnement micromécanique, on dispose également de l'expression de la solution en contrainte sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbb{B}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\Sigma} + p \mathbf{1}) - p \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\sigma}^{EL}(\mathbf{x})} + \boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x}) \quad (8.15)$$

## 8.2 Approche énergétique

Ce paragraphe présente une adaptation à la poroplasticité de résultats obtenus dans [21]. On supposera dans la suite que la plasticité microscopique est parfaite (pas d'écrouissage à l'échelle locale). En présence d'un champ de déformation plastique, la densité d'énergie libre de la phase solide s'écrit en condition isotherme :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : \mathbf{c}^s : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (8.16)$$

L'exploitation des premier et second principes de la thermodynamique conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem [92] à l'échelle microscopique indiquant que la dissipation volumique est positive :

$$\mathbb{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (8.17)$$

Lors d'une évolution purement réversible, la dissipation est nulle et le tenseur de déformation plastique ne varie pas; (8.17) implique alors  $\boldsymbol{\sigma} = \partial\psi/\partial\boldsymbol{\varepsilon}$  qui redonne la loi de comportement (8.1). Ce résultat entraîne que, lors d'une évolution quelconque, si  $\psi$  est donné par (8.16) (i.e. cas de la plasticité parfaite), l'expression de la dissipation (8.17) devient :

$$D = -\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \geq 0 \quad (8.18)$$

La dissipation macroscopique est calculée comme la somme de l'énergie dissipée par toutes les particules de squelette rapportée au volume du V.E.R. :

$$D = (1 - \varphi) \langle D \rangle_{\Omega^s} = (1 - \varphi) \langle \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (8.19)$$

avec

$$\Psi = (1 - \varphi) \langle \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \rangle_{\Omega^s} = \frac{1 - \varphi}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : \mathbf{c}^s : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \rangle_{\Omega^s} \quad (8.20)$$

La définition de  $\Psi$  dans (8.20) généralise celle écrite dans le cadre de la poroélasticité linéaire en (2.47).

En rappelant que  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$  dans les pores et en invoquant le lemme de Hill, le premier terme de la dissipation peut être transformé pour donner :

$$D = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} + p \dot{v} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (8.21)$$

Le calcul de  $\Psi$  s'effectue en décomposant  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en la somme de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{EL}$  (solution de  $\mathcal{P}^{EL}$ ) et de  $\boldsymbol{\varepsilon}^R$  (solution de  $\mathcal{P}^R$ ). On écrit à partir de (8.20) :

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \quad (8.22)$$

avec

$$\Psi_1 = \frac{1 - \varphi}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \rangle_{\Omega^s} \quad (8.23)$$

$$\Psi_2 = (1 - \varphi) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} : \mathbf{c}^s : (\boldsymbol{\varepsilon}^R - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \rangle_{\Omega^s} \quad (8.24)$$

$$\Psi_3 = \frac{1 - \varphi}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon}^R - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : \mathbf{c}^s : (\boldsymbol{\varepsilon}^R - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \rangle_{\Omega^s} \quad (8.25)$$

Le premier terme  $\Psi_1$  est issu de la partie élastique  $\mathcal{P}^{EL}$  de la décomposition du problème  $\mathcal{P}$  (8.2). Sa construction micromécanique en fait donc une fonction des paramètres de chargement  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $p$ . En invoquant les lois d'état (8.13) et (8.14), on peut également considérer  $\Psi_1$  comme une fonction des arguments  $\boldsymbol{E}$ ,  $v$ ,  $\boldsymbol{E}^{pl}$  et  $v^{pl}$ . On obtient aisément  $\Psi_1$  en introduisant la fonction  $\Psi^{EL}$  adaptée de (2.82) :

$$\Psi_1 = \Psi^{EL}(\boldsymbol{E}, v, \boldsymbol{E}^{pl}, v^{pl}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{pl}) : \mathbf{C}^{hom} : (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{pl}) + \frac{p^2}{2M} \quad (8.26)$$

$$\text{avec} \quad p = M \left( -\mathbf{B} : (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{pl}) + (v - v^{pl}) \right)$$

En utilisant la loi de comportement de la matrice du problème  $\mathcal{P}^R$  (8.2) et en notant que  $\boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0}$  dans  $\Omega^p$  et que  $\boldsymbol{\sigma}^R$  est statiquement admissible avec  $\mathbf{0}$ , on montre par application du lemme de Hill au couple  $(\boldsymbol{\sigma}^R, \boldsymbol{\varepsilon}^{EL})$  :

$$\Psi_2 = (1 - \varphi) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} : \boldsymbol{\sigma}^R \rangle_{\Omega^s} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} : \boldsymbol{\sigma}^R \rangle = 0 \quad (8.27)$$

Le troisième terme est une grandeur positive puisque  $\mathfrak{c}^s$  est défini positif. Il est même strictement positif dans le cas général où  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  est non géométriquement compatible. Il peut encore s'exprimer à l'aide du champ de contraintes résiduel  $\boldsymbol{\sigma}^R$  :

$$\Psi_3 = \frac{1 - \varphi}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}^R : \mathfrak{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^R \rangle_{\Omega^s} \quad (8.28)$$

Ce dernier terme noté  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\sigma}^R)$  correspond à l'énergie bloquée du système. Elle n'est ni dissipée ni récupérable lors d'une décharge élastique.

Finalement l'énergie libre macroscopique s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{E}, v, \mathbf{E}^{pl}, v^{pl}, \boldsymbol{\sigma}^R) = \Psi^{EL}(\mathbf{E}, v, \mathbf{E}^{pl}, v^{pl}) + \mathcal{R}(\boldsymbol{\sigma}^R) \quad (8.29)$$

En considérant une évolution réversible du v.E.R., on déduit de (8.21) qui devient une égalité et de (8.29) que :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi^{EL}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}, v, \mathbf{E}^{pl}, v^{pl}) \quad ; \quad p = \frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi^{EL}}{\partial v}(\mathbf{E}, v, \mathbf{E}^{pl}, v^{pl}) \quad (8.30)$$

En utilisant (8.26) dans (8.30), on obtient deux équations d'état à partir desquelles on retrouve aisément (8.13) et (8.14).

L'expression de la dissipation macroscopique (8.21) devient :

$$D = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{pl}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} - \frac{\partial \Psi}{\partial v^{pl}} \dot{v}^{pl} - \dot{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + p \dot{v}^{pl} - \dot{\mathcal{R}} \geq 0 \quad (8.31)$$

La structure des équations d'état de la poroplasticité ne suffit pas pour décrire de façon complète le comportement : il faut également s'interroger sur l'expression du critère et de la règle d'écoulement à l'échelle macroscopique pour déterminer l'évolution de  $\mathbf{E}^{pl}$  et  $v^{pl}$  sachant que  $\dot{\mathbf{E}}^{pl}$  et  $\dot{v}^{pl}$  doivent respecter (8.31).

### 8.3 Le critère de plasticité macroscopique

La phase solide est supposée parfaitement plastique. Autrement dit, le critère de résistance  $f^s$  introduit au chapitre 4 et le domaine de résistance  $G^s$  (4.1) sont aussi respectivement le critère de plasticité et le domaine d'élasticité. On cherche maintenant à définir le domaine élastique macroscopique à l'instant actuel ainsi que son éventuelle évolution par écrouissage. Il s'agit donc de construire un critère de plasticité macroscopique  $F$ , étant

entendu qu'un critère n'est jamais défini de manière unique. Il faut également identifier les arguments de  $F$ .

À l'échelle microscopique,  $f^s$  indique si le tenseur des contraintes local  $\boldsymbol{\sigma}$  appartient à l'intérieur ( $f^s(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ ) ou à la frontière de  $G^s$  ( $f^s(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ). Si  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  appartient à l'intérieur de  $G^s$  en tout point de  $\Omega^s$ , un incrément infinitésimal quelconque de chargement se traduira localement par une évolution purement élastique et donc une évolution macroscopique élastique soit  $F < 0$ . Si au contraire il existe une partie de  $\Omega^s$  sur laquelle  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  appartient à la frontière de  $G^s$ , de la plasticité peut apparaître à l'échelle microscopique et donc à l'échelle macroscopique via (8.10) et (8.12) soit donc  $F = 0$ . Un choix possible pour  $F$  est donc [93] :

$$F = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \quad (8.32)$$

Un tel critère possède les propriétés usuelles d'un critère de plasticité :

- $F < 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \Omega^s, f^s(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) < 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{pl} = \mathbf{0}$  et  $\dot{v}^{pl} = 0$

Ceci signifie que pour toute évolution du chargement  $(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}, \dot{p})$ , la réponse du v.E.R. est localement et globalement élastique.

- $F = 0$  et  $\dot{F} < 0 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \Omega^s \left\{ \begin{array}{l} f^s(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0 \text{ et } \dot{f}^s(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) < 0 \\ \text{ou} \\ f^s(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) < 0 \end{array} \right.$

Dans ce cas, la réponse est encore localement et globalement élastique.

- $F = 0$  et  $\dot{F} = 0$

Dans ce dernier cas, de la plasticité peut apparaître dans la matrice ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \neq \mathbf{0}$ ) impliquant une possible évolution plastique du v.E.R. ( $\dot{\mathbf{E}}^{pl} \neq \mathbf{0}, \dot{v}^{pl} \neq 0$ ).

La fonction  $F$  définit donc bien un critère de plasticité macroscopique dont il s'agit maintenant d'identifier les arguments. Le champ  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  figurant dans (8.32) est la solution (8.15) du problème  $\mathcal{P}$  (8.2). D'une part, il paraît naturel d'après (8.15) de désigner  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $p$  comme arguments naturels de  $F$ ; le domaine d'élasticité actuel noté  $\mathcal{D}^{hom}$  correspond à l'ensemble de  $\mathbb{R}^7$  des couples  $(\boldsymbol{\Sigma}, p)$  pour lesquels  $F$  est négatif ou nul. D'autre part, on note que  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  solution de  $\mathcal{P}$  (8.2) dépend du champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$  actuel ou de manière équivalente de  $\boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x})$  donc le domaine  $\mathcal{D}^{hom}$  ainsi que  $F$  doivent dépendre de ce champ :

$$(\boldsymbol{\Sigma}, p) \in \mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{\Sigma}, p, \boldsymbol{\sigma}^R) \leq 0 \quad (8.33)$$

avec

$$F(\boldsymbol{\Sigma}, p, \boldsymbol{\sigma}^R) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s(\mathbb{B}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\Sigma} + p \mathbf{1}) - p \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x})) \quad (8.34)$$

Écrit en (8.34),  $F$  est clairement une fonction convexe de l'argument  $(\Sigma, p)$  car c'est la borne supérieure d'une fonction convexe appliquée à une combinaison linéaire de  $(\Sigma, p)$  en différents points.

Le champ  $\sigma^R(\mathbf{x})$  solution de  $\mathcal{P}^R$  (8.2) n'est modifié que si  $\varepsilon^{pl}(\mathbf{x})$  subit des variations, autrement dit, si la matrice possède des zones en charge plastique. Ainsi  $\sigma^R(\mathbf{x})$  apparaît comme une infinité (puisque c'est un champ) de paramètres d'écoulement contrôlant la forme du domaine d'élasticité actuel  $\mathcal{D}^{hom}(\sigma^R)$ .

## 8.4 La règle d'écoulement macroscopique dans le cas associé

Pour achever la détermination du comportement plastique, déterminons maintenant une règle prescrivant l'évolution de  $\mathbf{E}^{pl}$  et  $v^{pl}$  valable uniquement dans le cas où la plasticité microscopique est associée, c'est-à-dire lorsque le "principe du travail plastique maximum" [91] est satisfait à l'échelle microscopique :

$$\forall \sigma^* \in G^s \quad (\sigma - \sigma^*) : \dot{\varepsilon}^{pl} \geq 0 \quad (8.35)$$

Pour cela, on adapte au cas de la poroplasticité des résultats obtenus dans [21] ou [102]. La propriété (8.35) montre que  $\dot{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{0}$  si  $\sigma$  est dans l'intérieur de  $G^s$  tandis que  $\dot{\varepsilon}^{pl}$  appartient au cône des normales extérieures à  $G^s$  au point  $\sigma$  si celui-ci est sur la frontière de  $G^s$ . On retrouve donc le comportement déjà évoqué en (4.54) et notamment lorsque  $G^s$  est régulier en  $\sigma$  :

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (8.36)$$

Examinons comment se transpose le "principe du travail plastique maximum" à l'échelle macroscopique. Considérons un état quelconque  $(\Sigma^*, p^*)$  appartenant à  $\mathcal{D}^{hom}(\sigma^R)$ . Par définition de  $\mathcal{D}^{hom}(\sigma^R)$ , le champ  $\sigma^*$  défini par :

$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : (\Sigma^* + p^* \mathbf{1}) - p^* \mathbf{1} + \sigma^R(\mathbf{x}) \quad (8.37)$$

est solution du problème  $\mathcal{P}$  (8.2) écrit avec  $\Sigma^*$  et  $p^*$  et appartient en tout point de la phase solide à  $G^s$ . Il existe donc un chemin purement élastique entre l'état actuel  $(\Sigma, p)$  et  $(\Sigma^*, p^*)$ . La différence entre (8.15) et (8.37) donne :

$$\sigma(\mathbf{x}) - \sigma^*(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : \left( \Sigma - \Sigma^* + (p - p^*) \mathbf{1} \right) - (p - p^*) \mathbf{1} \quad (8.38)$$

En effectuant la moyenne de (8.35) sur la phase solide et en exploitant (8.38), il vient :

$$(1 - \varphi) \langle (\sigma - \sigma^*) : \dot{\varepsilon}^{pl} \rangle_{\Omega^s} = (1 - \varphi) \langle \dot{\varepsilon}^{pl} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega^s} : \left( \Sigma - \Sigma^* + (p - p^*) \mathbf{1} \right) - (p - p^*) (1 - \varphi) \mathbf{1} : \langle \dot{\varepsilon}^{pl} \rangle_{\Omega^s} \quad (8.39)$$

Utilisant (8.10) et (8.12), (8.39) devient :

$$(1 - \varphi) \langle (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \rangle_{\Omega^s} = (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{E}}^{pl} + (p - p^*) \dot{v}^{pl} \quad (8.40)$$

D'après (8.35) et (8.40), le “principe du travail plastique maximum” s'écrit à l'échelle macroscopique :

$$\forall (\boldsymbol{\Sigma}^*, p^*) \in \mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R) \quad (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{E}}^{pl} + (p - p^*) \dot{v}^{pl} \geq 0 \quad (8.41)$$

On en déduit immédiatement que  $\dot{\boldsymbol{E}}^{pl} = \mathbf{0}$  et  $\dot{v}^{pl} = 0$  si  $(\boldsymbol{\Sigma}, p)$  appartient à l'intérieur de  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$  tandis que  $(\dot{\boldsymbol{E}}^{pl}, \dot{v}^{pl})$  appartient au cône des normales extérieures à  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$  au point  $(\boldsymbol{\Sigma}, p)$  si ce dernier est situé sur la frontière de  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$ . En particulier, si  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$  est régulier en  $(\boldsymbol{\Sigma}, p)$ , la règle de normalité s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}^{pl} &= \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}, p, \boldsymbol{\sigma}^R) \\ \dot{v}^{pl} &= \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial p}(\boldsymbol{\Sigma}, p, \boldsymbol{\sigma}^R) \end{aligned} \quad \text{avec } \dot{\Lambda} \geq 0 \quad (8.42)$$

Ainsi, dans le cadre de la plasticité associée, la règle d'écoulement macroscopique indique l'évolution du taux de déformation plastique ainsi que de la partie plastique du taux de porosité. Le résultat important ici est que chacune de ces grandeurs physiques s'écrit comme le produit de la dérivée de  $F$  par rapport à sa grandeur duale par le même multiplicateur plastique  $\dot{\Lambda}$ .

La démonstration n'est bien entendu plus valable lorsque la plasticité microscopique est non associée. L'homogénéisation du potentiel plastique reste un problème ouvert.



# Chapitre 9

## Contrainte effective en poroplasticité

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Existence d'une contrainte effective poroplastique . . . . .</b>	<b>183</b>
9.1.1	Une condition nécessaire et suffisante . . . . .	183
9.1.2	Lien avec la règle d'écoulement dans le cas associé . . . . .	184
<b>9.2</b>	<b>Cas des critères classiques . . . . .</b>	<b>185</b>
9.2.1	Critère purement cohérent . . . . .	185
9.2.2	Critère dépendant de la pression de confinement . . . . .	187
9.2.3	Critère conique . . . . .	188
9.2.4	Critère macroscopique d'une sphère creuse de Drucker-Prager pressurisée . . . . .	191

---



Le critère de plasticité macroscopique a été obtenu au chapitre précédent comme une fonction du tenseur des contraintes macroscopiques  $\Sigma$ , de la pression du fluide  $p$  et du champ de contrainte résiduel  $\sigma^R$  (8.34). Comme nous l'avons fait dans le cadre de la poroélasticité et des critères de rupture, nous nous posons naturellement la question de l'existence d'une contrainte effective dont serait fonction le critère  $F$ .

## 9.1 Existence d'une contrainte effective poroplastique

### 9.1.1 Une condition nécessaire et suffisante

Supposons tout d'abord qu'il existe une contrainte effective définie par une fonction :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} : \mathbb{R}^7 &\rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (\Sigma, p) &\mapsto \hat{\Sigma}(\Sigma, p) \end{aligned} \quad (9.1)$$

telle que  $F$  s'écrive :

$$F(\Sigma, p, \sigma^R) = \hat{F}(\hat{\Sigma}(\Sigma, p), \sigma^R) \quad (9.2)$$

On admet en outre que, pour toute pression  $p$ , l'application  $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ ,  $\Sigma \mapsto \hat{\Sigma}(\Sigma, p)$  est inversible et de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Afin d'examiner les conséquences de l'hypothèse (9.2), on se place dans une situation de chargement  $(\Sigma, p)$  et d'état résiduel  $\sigma^R$  à partir de laquelle de la plasticité peut apparaître i.e. le critère macroscopique est saturé  $F = 0$ . Ceci signifie d'après (8.32) que l'ensemble suivant est non vide :

$$\Omega_{pl}^s = \{\mathbf{x} \in \Omega^s \mid f^s(\sigma(\mathbf{x})) = 0\} \quad (9.3)$$

On considère alors une évolution  $(\dot{\Sigma}, \dot{p})$  laissant  $\hat{\Sigma}$  invariant, ce qui implique une relation entre  $\dot{\Sigma}$  et  $\dot{p}$  :

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} : \dot{\Sigma} + \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \dot{p} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\Sigma} = -\dot{p} \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \quad (9.4)$$

Comme  $\hat{\Sigma}$  reste constant, la valeur de  $F$  (9.2) à écrouissage (i.e.  $\sigma^R$ ) fixé n'est pas affectée et donc un trajet purement élastique continue de satisfaire le critère. La réponse locale (8.15) est alors également élastique :

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}) = \dot{\sigma}^{EL}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : \left( \dot{\Sigma} + \dot{p} \mathbf{1} \right) - \dot{p} \mathbf{1} \quad (9.5)$$

En particulier, en tout point de  $\Omega_{pl}^s$ , le critère de plasticité ne doit pas être violé par l'évolution (9.5), ce qui signifie :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \dot{f}^s(\sigma) = \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\sigma) : \dot{\sigma}^{EL} = \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\sigma) : \left( \mathbb{B} : \left( \dot{\Sigma} + \dot{p} \mathbf{1} \right) - \dot{p} \mathbf{1} \right) \leq 0 \quad (9.6)$$

Utilisant le couplage (9.4) entre  $\dot{\hat{\Sigma}}$  et  $\dot{p}$ , la condition (9.6) devient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left[ \mathbb{B} : \left( \mathbf{1} - \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \right) - \mathbf{1} \right] \dot{p} \leq 0 \quad (9.7)$$

Or il n'y a aucune restriction imposée sur le signe de  $\dot{p}$  dans (9.4) donc (9.7) implique l'égalité :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{B} : \left( \mathbf{1} - \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \right) = \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1} \quad (9.8)$$

L'égalité (9.8) apparaît donc comme une condition nécessaire d'existence d'une contrainte effective poroplastique. C'est également une condition suffisante. En effet, supposons qu'il existe une fonction  $\hat{\Sigma}(\Sigma, p)$  telle que (9.8) soit réalisée. Il est alors immédiat de constater, en remontant les calculs, qu'une évolution  $(\dot{\hat{\Sigma}}, \dot{p})$  laissant  $\hat{\Sigma}$  constant est telle que le critère de tous les points de  $\Omega_{pl}^s$  garde une valeur nulle pour le trajet élastique (9.5). Ce trajet représente donc la solution du problème incrémental. Ainsi le trajet incrémental macroscopique est également élastique,  $\boldsymbol{\sigma}^R$  est resté invariant et surtout  $F$  est restée nulle. Comme  $F$  n'est pas modifié pour toute évolution  $(\dot{\hat{\Sigma}}, \dot{p})$  laissant  $\hat{\Sigma}$  constant, on en déduit que  $\hat{\Sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^R$  sont les seuls arguments de  $F$ .

Certains auteurs ont proposé de construire une contrainte effective poroplastique par analogie avec celle prévalant dans le cas élastique (citons par exemple [26], [23] et [73]) i.e.  $\Sigma + p \mathbf{B}^{pl}$  où  $\mathbf{B}^{pl}$  s'interprète comme un tenseur de Biot plastique. Pour une telle contrainte effective, le critère d'existence (9.8) devient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{B} : (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{pl}) = \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1} \quad (9.9)$$

### 9.1.2 Lien avec la règle d'écoulement dans le cas associé

On suppose dans ce paragraphe que la plasticité microscopique est associée au sens (8.36). On a montré à la section 8.4 que la plasticité macroscopique était alors également associée (8.42). En multipliant (9.8) de part et d'autre par  $\dot{\lambda}$  et en rappelant que  $\dot{\lambda} = 0$  dans  $\Omega^s \setminus \Omega_{pl}^s$ , on obtient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} : \mathbb{B} : \left( \mathbf{1} - \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \right) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} : \mathbf{1} \quad (9.10)$$

En exploitant (8.10) et (8.12), la moyenne de (9.10) implique la relation suivante entre  $\dot{\mathbf{E}}^{pl}$  et  $\dot{v}^{pl}$  :

$$\dot{v}^{pl} = \dot{\mathbf{E}}^{pl} : \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \quad (9.11)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction  $\hat{\Sigma}(\Sigma, p)$  telle que (9.11) soit vérifiée. On montre alors à l'aide de (8.42) que dans un cas de charge plastique  $\dot{\Lambda} \neq 0$ , on a :

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial \Sigma} : \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \quad (9.12)$$

Cette relation implique que  $F$  ne dépend de  $\Sigma$  et  $p$  qu'à travers  $\hat{\Sigma}$ . Prouvons ce résultat en formant l'application suivant pour  $\sigma^R$  fixé :

$$\begin{aligned} \Theta : \quad \mathbb{R}^7 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\hat{\Sigma}, p) &\mapsto F(\Sigma(\hat{\Sigma}, p), p, \sigma^R) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Cette application a bien un sens puisque, comme  $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ ,  $\Sigma \mapsto \hat{\Sigma}(\Sigma, p)$  est inversible, on peut former son inverse  $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ ,  $\hat{\Sigma} \mapsto \Sigma(\hat{\Sigma}, p)$ . Pour atteindre notre but, il suffit donc de montrer que  $\Theta$  (9.13) ne dépend pas de  $p$ . Afin de dériver  $\Theta$  par rapport à  $p$ , il faut dériver  $\Sigma$  par rapport à  $p$  tout en gardant  $\hat{\Sigma}$  constant :

$$d\hat{\Sigma} = \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} : d\Sigma + \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} dp \Rightarrow \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial p} \right|_{\hat{\Sigma}} = - \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} \quad (9.14)$$

Le résultat souhaité s'obtient alors en exploitant (9.14) et (9.12) :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial \Sigma} : \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \right)^{-1} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial p} = 0 \quad (9.15)$$

Si la contrainte effective s'écrit  $\Sigma + p \mathbf{B}^p$ , la relation (9.11) devient :

$$\dot{\nu}^{pl} = \dot{\mathbf{E}}^{pl} : \mathbf{B}^{pl} \quad (9.16)$$

## 9.2 Cas des critères classiques

### 9.2.1 Critère purement cohérent

Dans ce paragraphe, on considère que le critère de la phase solide n'est pas affecté par la pression de confinement. On rappelle qu'un tel critère vérifie :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^6 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f^s(\sigma + \alpha \mathbf{1}) = f^s(\sigma) \quad (9.17)$$

Les critères de Tresca et de von Mises entrent dans cette catégorie.

On déduit de la propriété (9.17) que le critère macroscopique (8.34) s'écrit :

$$F(\Sigma, p, \sigma^R) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s(\mathbb{B}(\mathbf{x}) : (\Sigma + p \mathbf{1}) + \sigma^R(\mathbf{x})) = \hat{F}(\Sigma + p \mathbf{1}, \sigma^R) \quad (9.18)$$

Sans aucune hypothèse faite sur la règle d'écoulement microscopique, on prouve ainsi que le critère macroscopique est régi par la contrainte effective de Terzaghi  $\Sigma + p\mathbf{1}$ .

*Remarques :*

- On a montré au paragraphe 4.2.2 que cette contrainte effective contrôle également la résistance macroscopique.
- Dans un cadre purement macroscopique, supposant que la règle d'écoulement s'écrive à l'aide d'un potentiel plastique (comme dans les équations (8.42) dans le cas associé ou en remplaçant  $F$  par le potentiel plastique dans le cas non associé), l'hypothèse d'incompressibilité plastique de la phase solide permet de conclure que c'est encore la contrainte effective de Terzaghi qui régit le potentiel (la démonstration figure dans [18] et [40]).

L'approche micromécanique apporte ici une information capitale car elle permet de démontrer la réciproque : si la contrainte effective de Terzaghi contrôle le critère de plasticité macroscopique alors le critère local de la phase solide est purement cohérent (9.17). Signalons que pour montrer qu'un matériau est purement cohérent, il suffit de montrer la validité de la propriété (9.17) seulement pour les états  $\sigma$  saturant le critère (i.e. tels que  $f^s(\sigma) = 0$ ) puisque les valeurs non nulles de  $f^s$  n'ont une influence sur le comportement que par leur signe (indiquant que l'état de contrainte se situe à l'intérieur ou à l'extérieur de  $G^s$ ) et non par leur valeur elle-même.

En prenant  $\mathbf{B}^{pl} = \mathbf{1}$  dans (9.9), il vient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \sigma} : \mathbf{1} = 0 \quad (9.19)$$

Ainsi quel que soit l'état de contrainte atteignant la frontière du critère local, cet état vérifie (9.19). Une telle propriété ne peut être satisfaite que par un critère vérifiant (9.17) pour tout  $\sigma$  saturant le critère.

On peut aussi montrer ce résultat en considérant une variation de la pression  $p$  tout en gardant  $\Sigma + p\mathbf{1}$  constant. Comme la contrainte effective reste constante, la réponse est élastique aux deux échelles. Or  $\sigma$  s'écrit (8.15) donc faire varier la pression revient à ajouter un terme sphérique à l'état de contrainte. On montre donc, selon le raisonnement figurant dans le paragraphe suivant la condition (9.8), qu'en tout point où le critère est saturé, la valeur du critère n'est pas modifiée si l'on ajoute un terme sphérique à la contrainte. La propriété (9.17) est donc satisfaite pour tout  $\sigma$  saturant le critère.

Si la plasticité microscopique est associée, d'après (8.36) la relation (9.19) implique que le matériau est plastiquement incompressible i.e. la partie plastique de la déformation n'engendre aucune variation de volume. Du point de vue macroscopique, on déduit alors de (9.16) :

$$\dot{v}^{pl} = \dot{\mathbf{E}}^{pl} : \mathbf{1} \quad (9.20)$$

La relation (9.20) indique que la variation de volume engendrée par la déformation plastique macroscopique se traduit intégralement par une variation de la partie plastique de la porosité. Ceci prouve encore l'incompressibilité plastique de la phase solide mais cette fois-ci d'une manière globale.

### 9.2.2 Critère dépendant de la pression de confinement

Nous avons donc montré au paragraphe précédent qu'un critère local purement cohérent conduisait à la contrainte effective de Terzaghi mais aussi que cette dernière n'était compatible qu'avec un tel critère local. Considérons maintenant un critère dépendant de la pression de confinement :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d - g(\sigma_m) \leq 0 \quad (9.21)$$

avec  $g$  fonction strictement décroissante ( $g'(\sigma_m) < 0$ ), concave (pour assurer la convexité de  $f^s$ ) et telle que  $g(0) > 0$  (l'origine est dans l'intérieur de  $G^s$ ). Le critère de Drucker-Prager (6.1) avec une cohésion non nulle ( $h > 0$ ) satisfait ces propriétés. En revanche, comme  $g'(\sigma_m) \neq 0$ , les critères purement cohérents ne sont pas concernés.

Examinons si on peut trouver une contrainte effective de type  $\boldsymbol{\Sigma} + p\mathbf{B}^{pl}$  compatible avec un critère de type (9.21). On sait déjà que  $\mathbf{B}^{pl}$  ne peut être égal à  $\mathbf{1}$  puisque le critère local n'est pas purement cohérent, ce qui est encore montré par le fait que le membre de droite de (9.9) ne peut être nul :

$$\frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1} = -g'(\sigma_m) > 0 \quad (9.22)$$

Imaginons alors le trajet de chargement suivant :

$$p = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \Sigma(t) (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{pl}) \quad \text{avec } \Sigma(0) = 0 \text{ et } \Sigma'(t) < 0 \quad (9.23)$$

La réponse locale en contrainte se déduit de (8.15) par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma(t) \mathbb{B} : (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{pl}) + \boldsymbol{\sigma}^R \quad (9.24)$$

On suppose que le chargement macroscopique (initial) nul est dans l'intérieur de  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$ . Ceci signifie donc que l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^R$ , qui joue ici le rôle d'une contrainte initiale locale, se situe en tout point dans l'intérieur de  $G^s$  :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^s \quad f^s(\boldsymbol{\sigma}^R) < 0 \quad (9.25)$$

Pour simplifier la démonstration, on suppose que le domaine  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$  du v.e.r. considéré ici avec  $\varphi \neq 0$  est borné. Selon un résultat de [28], cette propriété est assurée si le critère local (9.21) définit un domaine inclus dans un cône de Drucker-Prager (9.48) d'angle de frottement suffisamment petit ( $t \leq \sqrt{3/5}$ ). Par conséquent, quand  $\Sigma(t)$  décroît, l'évolution

de  $\boldsymbol{\sigma}$  (9.24) passe d'abord par une phase élastique (au cours de laquelle  $\boldsymbol{\sigma}^R$  reste constant) jusqu'à ce que  $\Sigma$  atteigne la frontière du domaine  $\mathcal{D}^{hom}(\boldsymbol{\sigma}^R)$  pour une certaine valeur  $\Sigma^- < 0$  de  $\Sigma(t)$ . En multipliant (9.9) par  $\Sigma^-$  et en utilisant (9.24), on obtient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \Sigma^- \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{1} = \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^R) \quad (9.26)$$

Exploitant (9.22) et  $\Sigma^- < 0$ , on déduit aisément que le membre de gauche de (9.26) est strictement négatif tandis que le membre de droite est lui strictement positif en raison de la convexité de  $f^s$ . En effet, à l'aide de (9.25) et du fait que  $f^s(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  sur  $\Omega_{pl}^s$ , on a :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^R) \geq f^s(\boldsymbol{\sigma}) - f^s(\boldsymbol{\sigma}^R) = -f^s(\boldsymbol{\sigma}^R) > 0 \quad (9.27)$$

On en conclut donc qu'une contrainte effective de la forme  $\Sigma + p\mathbf{B}^{pl}$  ne peut être cohérente avec la classe de matériaux vérifiant la propriété (9.21).

### 9.2.3 Critère conique

Ce type de critère a déjà été introduit dans le cadre de l'homogénéisation du critère de résistance. Un tel critère satisfait la propriété (4.29) rappelée ici :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6 \quad \forall \alpha \geq 0 \quad f^s(\alpha \boldsymbol{\sigma} + (1 - \alpha)h\mathbf{1}) = \alpha f^s(\boldsymbol{\sigma}) \quad (9.28)$$

qui implique, en prenant  $\alpha = 1/(1 + p/h)$  avec  $p > -h$  :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \left(1 + \frac{p}{h}\right) f^s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{1}}{1 + p/h} \quad (9.29)$$

Rappelons que les critères de Mohr-Coulomb et de Drucker-Prager entrent dans cette catégorie de critères puisque, dans l'espace des contraintes, ils sont représentés par un domaine conique de sommet  $h\mathbf{1}$  où  $h$  désigne la limite en traction isotrope.

En ce qui concerne le critère de résistance macroscopique (ou l'ensemble des états limites dans le cas associé), on a montré au paragraphe 4.2.2 que celui-ci s'écrivait à l'aide de la contrainte effective :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma + p\mathbf{1}}{1 + p/h} \quad (9.30)$$

Examinons maintenant le critère de plasticité. Avec la notation (9.29), on déduit de (8.15) que :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : \tilde{\Sigma} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x})}{1 + p/h} \quad (9.31)$$

En exploitant (9.29), (8.32) peut encore s'écrire :

$$F(\Sigma, p, \boldsymbol{\sigma}^R) = \left(1 + \frac{p}{h}\right) \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \left(1 + \frac{p}{h}\right) \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s\left(\mathbb{B}(\mathbf{x}) : \tilde{\Sigma} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^R(\mathbf{x})}{1 + p/h}\right) \quad (9.32)$$

Or le produit de  $F$  par n'importe quelle fonction strictement positive de  $(\Sigma, p)$  ne modifie en rien la forme du domaine actuel d'élasticité  $\mathcal{D}^{hom}(\sigma^R)$  ni le critère d'activation de la plasticité. On peut donc remplacer l'expression (9.32) par la suivante :

$$F(\Sigma, p, \sigma^R) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s(\tilde{\sigma}) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^s} f^s\left(\mathbb{B}(\mathbf{x}) : \tilde{\Sigma} + \frac{\sigma^R(\mathbf{x})}{1 + p/h}\right) \quad (9.33)$$

On déduit de (9.33) que, partant de  $\sigma^R = \mathbf{0}$  (état initial naturel), le critère de première plastification est contrôlé par  $\tilde{\Sigma}$  (9.30) :

$$F(\Sigma, p, \mathbf{0}) = \hat{F}(\tilde{\Sigma}) = \hat{F}\left(\frac{\Sigma + p\mathbf{1}}{1 + p/h}\right) \quad (9.34)$$

Quand l'état initial est précontraint ( $\sigma^R \neq \mathbf{0}$ ), l'expression du critère (9.33) écrit comme une fonction de  $(\tilde{\Sigma}, p, \sigma^R)$  dépend explicitement de  $p$ , ce qui laisse penser que  $\tilde{\Sigma}$  n'est pas une contrainte effective. Supposons que  $\tilde{\Sigma}$  est une contrainte effective plastique et montrons que cette hypothèse conduit à une absurdité.

Partons d'un état où  $F = 0$  et considérons une évolution  $(\dot{\Sigma}, \dot{p})$  laissant  $\tilde{\Sigma}$  constant. D'après (9.2) avec  $\hat{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$ , aucune plasticité ne peut donc apparaître. En reproduisant le raisonnement ayant mené à (9.6) et en l'adaptant au cas où le critère macroscopique s'écrit (9.33), le critère local n'est pas violé dans cette évolution élastique si et seulement si :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad - \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\tilde{\sigma}) : \sigma^R \dot{p} \leq 0 \quad (9.35)$$

Comme (9.35) est vérifié quel que soit le signe de  $\dot{p}$ , on en déduit :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\tilde{\sigma}) : \sigma^R = 0 \quad (9.36)$$

En outre, par dérivation de (9.28) par rapport à  $\sigma$ , on a :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^6, \forall \alpha \geq 0 \quad \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\alpha \sigma + (1 - \alpha) h \mathbf{1}) = \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\sigma) \quad (9.37)$$

Prenant  $\alpha = 1/(1 + p/h)$  dans (9.37) et rappelant (8.15), on obtient :

$$\frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\sigma) \quad (9.38)$$

Utilisant (9.38), (9.36) devient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \sigma}(\sigma) : \sigma^R = 0 \quad (9.39)$$

Une nouvelle dérivation de (9.36) par rapport au temps, alors que  $\tilde{\Sigma}$  et  $\sigma^R$  demeurent constants, donne :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \sigma^R : \frac{\partial^2 f^s}{\partial \sigma^2}(\tilde{\sigma}) : \sigma^R = 0 \quad (9.40)$$

où  $\partial^2 f^s / \partial \boldsymbol{\sigma}^2$  désigne la Hessienne réputée positive de  $f^s$ . Dérivant à nouveau (9.37) par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}$  et prenant encore  $\alpha = 1/(1 + p/h)$ , on déduit de (9.40) que :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \boldsymbol{\sigma}^R : \frac{\partial^2 f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}^R = 0 \quad (9.41)$$

D'après un résultat classique d'algèbre quadratique, le noyau d'une forme quadratique gardant un signe constant (par exemple positif) coïncide avec son cône isotrope i.e. si  $q$  désigne une forme bilinéaire symétrique positive sur  $\mathbb{R}^N$ , on a :

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\} \quad (9.42)$$

Utilisant ce résultat, on déduit de la positivité de la Hessienne  $\partial^2 f^s / \partial \boldsymbol{\sigma}^2$  due à la convexité de  $f^s$  que (9.41) implique :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial^2 f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0} \quad (9.43)$$

On a envisagé un certain trajet de chargement pour démontrer la relation (9.43) mais celle-ci ne fait intervenir que des champs dans leur état actuel. Il est donc tout-à-fait possible de considérer un autre trajet de chargement à partir de l'état actuel, (9.43) restant alors valable à chaque instant. On imagine maintenant une évolution du chargement  $\dot{\tilde{\Sigma}}$  induisant de la plasticité; ceci est possible puisque  $F = 0$ . La dérivation de (9.39) par rapport au temps fournit :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial^2 f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}^R + \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^R = 0 \quad (9.44)$$

À l'aide de (9.43), (9.44) devient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^R = 0 \quad (9.45)$$

Introduisant la décomposition (8.15) dans (9.45), on obtient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{EL} = \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (9.46)$$

Comme la phase solide est parfaitement plastique, le membre de droite de (9.46) ne peut être que négatif ou nul. Ceci implique par conséquent que le critère local n'est pas violé en ne considérant que la partie élastique de l'évolution du champ de contrainte microscopique :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{pl}^s \quad \frac{\partial f^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{EL} \leq 0 \quad (9.47)$$

En d'autres termes, une évolution purement élastique du v.e.r. ( $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{EL}$ ) est parfaitement cohérente avec toutes les équations du problème. Or la solution en contrainte est unique [91], ce qui contredit la possibilité de suivre le moindre trajet comportant de la plasticité. La contrainte  $\tilde{\Sigma}$  ne peut donc être pertinente pour contrôler le critère de plasticité macroscopique.

### 9.2.4 Critère macroscopique d'une sphère creuse de Drucker-Prager pressurisée

De manière à illustrer l'absence de contrainte effective dans le cas d'une phase solide de Drucker-Prager, on se propose d'examiner l'évolution du domaine d'élasticité d'une sphère creuse dont le pore est saturé par un fluide sous pression et dont la paroi externe est soumise à une traction isotrope. Comme nous l'avions constaté dans la partie consacrée au critère de résistance, cette structure s'avère riche en enseignement car, même si elle ne respecte pas toujours la condition de séparation d'échelle (la porosité n'est pas forcément infinitésimale), elle constitue un modèle conceptuel de milieu poreux qui permet des développements analytiques complets dans des cas de chargement respectant la symétrie sphérique. De plus, la symétrie sphérique de la structure et du chargement conduisent à une équivalence rigoureuse entre des conditions aux limites en déformations homogènes et des conditions aux limites en contraintes homogènes au contour.

Le domaine  $a \leq r \leq b$  est occupé par un matériau homogène élasto-plastique avec une élasticité linéaire et une plasticité parfaite de critère de Drucker-Prager

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d + t(\sigma_m - h) \quad (9.48)$$

et le domaine  $r < a$  est occupé par un fluide sous pression. La porosité vaut donc ici  $\varphi = (a/b)^3$ . Le domaine solide est soumis sur la paroi interne ( $r = a$ ) à la pression  $p$  du fluide et sur la paroi externe ( $r = b$ ) à une traction  $\Sigma$  (cf. FIG. 9.1). On considère un trajet de chargement  $(p(t), \Sigma(t))$  radial i.e. tel que  $p(t) = \eta \Sigma(t)$  où  $\eta$  est un réel positif et  $\Sigma(t)$  est une fonction croissante avec  $\Sigma(0) = 0$ . On introduit la notation suivante cohérente avec (9.30) :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma + p}{1 + p/h} \quad (9.49)$$

La symétrie de la géométrie et du chargement ainsi que l'isotropie du matériau nous incitent à résoudre le problème en considérant un champ de contrainte de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{rr}(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \quad (9.50)$$

Avant d'atteindre la charge limite, l'évolution de la sphère creuse présente deux phases : une phase élastique et phase de plasticité contenue :

- *Phase élastique*

La solution complète du problème élastique est donnée dans [92]. Le champ de contrainte s'écrit :

$$\forall a \leq r \leq b \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = A - 2\frac{B}{r^3} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = -p + \frac{\Sigma + p}{1 - \varphi} \\ B = \frac{a^3}{2} \frac{\Sigma + p}{1 - \varphi} \end{cases} \quad (9.51)$$

La solution (9.51) demeure valide tant que le critère (9.48) garde une valeur négative. En rappelant que l'on considère un chargement tel que  $p \geq 0$  et  $\Sigma \geq 0$ , on a par conséquent  $\Sigma + p \geq 0$  et le critère s'écrit ici :

$$\forall a \leq r \leq b \quad f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Sigma + p}{1 - \varphi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 + t \left(-p - h + \frac{\Sigma + p}{1 - \varphi}\right) \quad (9.52)$$

Il découle de (9.52) que la première plastification apparaît sur la paroi interne du solide ( $r = a$ ) quand  $\tilde{\Sigma}$  atteint la valeur  $\tilde{\Sigma}^e$  :

$$\tilde{\Sigma}^e = h\beta(1 - \varphi) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \beta = \frac{t}{t + \sqrt{3}/2} \leq \frac{1}{2} \quad (9.53)$$

On s'attendait évidemment à ce que  $\tilde{\Sigma}$  contrôle la première plastification puisque ce résultat a été démontré dans le cas général à la section 9.2.3.

- *Phase de plasticité contenue*

Au cours de cette phase, le solide est divisé en deux zones (cf. FIG. 9.1) : une couronne élastique ( $c \leq r \leq b$ ) où la plasticité n'a pas encore été activée et une zone plastique ( $a \leq r \leq c$ ) se propageant à partir du rayon intérieur. Introduisant

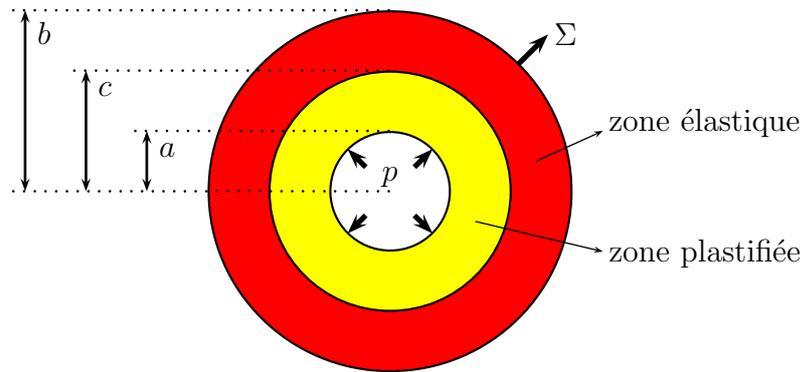


FIG. 9.1 – Sphère creuse de Drucker-Prager saturée

la notation  $p_c = -\sigma_{rr}(c)$ , l'expression de  $\boldsymbol{\sigma}$  dans la couronne élastique ( $c \leq r \leq b$ ) s'obtient aisément à partir de celle de la phase élastique en remplaçant  $a$  par  $c$  et  $p$  par  $p_c$  :

$$\forall c \leq r \leq b \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = A' - 2\frac{B'}{r^3} \\ \sigma_{\theta\theta} = A' + \frac{B'}{r^3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A' = -p + \frac{\Sigma + p_c}{1 - (c/b)^3} \\ B' = \frac{c^3}{2} \frac{\Sigma + p_c}{1 - (c/b)^3} \end{cases} \quad (9.54)$$

et (9.53) devient maintenant :

$$\frac{\Sigma + p_c}{1 + p_c/h} = h\beta(1 - (c/b)^3) \quad (9.55)$$

Nous devons maintenant déterminer l'expression de  $\boldsymbol{\sigma}$  dans la couronne plastique. Commençons par remarquer sur (9.51) que, durant la phase élastique,  $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{rr}$  car on a considéré  $\Sigma + p \geq 0$ . On suppose que cette relation entre les composantes de  $\boldsymbol{\sigma}$  persiste dans la zone plastifiée où la saturation du critère ( $f^s(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ) s'écrit alors :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} t \right) \left[ (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + \frac{3}{2} \beta (\sigma_{rr} - h) \right] = 0 \quad (9.56)$$

L'équation d'équilibre d'un champ du type (9.50) est donnée par :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (9.57)$$

En tenant compte de (9.56), l'intégration de (9.57) entre  $a$  et  $c$  conduit à la relation suivante entre  $p$  et  $p_c$  :

$$p_c + h = (p + h) \left( \frac{a}{c} \right)^{3\beta} \quad (9.58)$$

L'élimination de  $p_c$  entre (9.55) et (9.58) fournit une relation entre  $\tilde{\Sigma}$  et le rayon  $c$  :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma + p}{1 + p/h} = h \left\{ \left( \frac{a}{c} \right)^{3\beta} \left[ \beta \left( 1 - \left( \frac{c}{b} \right)^3 \right) - 1 \right] + 1 \right\} \quad (9.59)$$

Deux cas extrêmes peuvent être considérés dans l'équation (9.59) :

→  $c = a$  correspond au critère de première plastification (9.53),

→  $c = b$  correspond à l'état limite  $\tilde{\Sigma}^+$  relatif à un chargement  $(p, \Sigma)$  réputé appartenir à la frontière du domaine de résistance macroscopique :

$$\tilde{\Sigma}^+ = h (1 - \varphi^\beta) \quad (9.60)$$

Remarquons que nous avons pu construire la solution en contrainte en ne considérant que les équations statiques et le critère sans aucune référence à la cinématique. Les résultats sont donc valables quelle que soit la règle d'écoulement (plasticité associée ou non). Nous avons déjà noté au chapitre 6 que l'estimation des états limites d'un milieu poreux de Drucker-Prager ne dépendait pas de la règle d'écoulement.

Étant donné que l'objectif du problème est de décrire l'évolution du domaine actuel d'élasticité au cours du processus de chargement au moins au voisinage de l'état  $(p, \Sigma)$  actuel, il faut procéder à une décharge élastique à partir de cet état actuel et rechercher les points de nouvelle plastification dans son voisinage. Dans la suite de ce problème, la notation  $\delta \mathcal{X}$  est utilisée pour désigner la variation de la grandeur physique  $\mathcal{X}$  entre sa valeur atteinte dans le processus de charge plastique et la valeur obtenue après une décharge élastique conduisant à la détermination du domaine d'élasticité actuel. Ainsi la variation du champ de contrainte  $\delta \boldsymbol{\sigma}$  est donnée par :

$$\forall a \leq r \leq b \quad \begin{cases} \delta \sigma_{rr} = \delta A - 2 \frac{\delta B}{r^3} \\ \delta \sigma_{\theta\theta} = \delta A + \frac{\delta B}{r^3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta A = -\delta p + \frac{\delta(\Sigma + p)}{1 - \varphi} \\ \delta B = \frac{a^3}{2} \frac{\delta(\Sigma + p)}{1 - \varphi} \end{cases} \quad (9.61)$$

Le domaine d'élasticité au voisinage de l'état actuel  $(p, \Sigma)$  est décrit à l'aide de trajets élastiques  $(\delta p, \delta \Sigma)$  tels que :

$$\sup_{a \leq r \leq c} f^s(\boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (9.62)$$

Exploitant la forme (9.50) de  $\boldsymbol{\sigma}$  et la solution (9.61), (9.62) devient :

$$\sup_{a \leq r \leq c} \left\{ \sqrt{6} \frac{\delta B}{r^3} + t \delta A \right\} = \sup_{a \leq r \leq c} \left\{ \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{a}{r} \right)^3 + t \right) \frac{\delta(\Sigma + p)}{1 - \varphi} - t \delta p \right\} = 0 \quad (9.63)$$

Deux cas de chargement peuvent alors être envisagés :

- $\delta(\Sigma + p) > 0$

On déduit de (9.63) que la nouvelle plastification apparaît en  $r = a$  et :

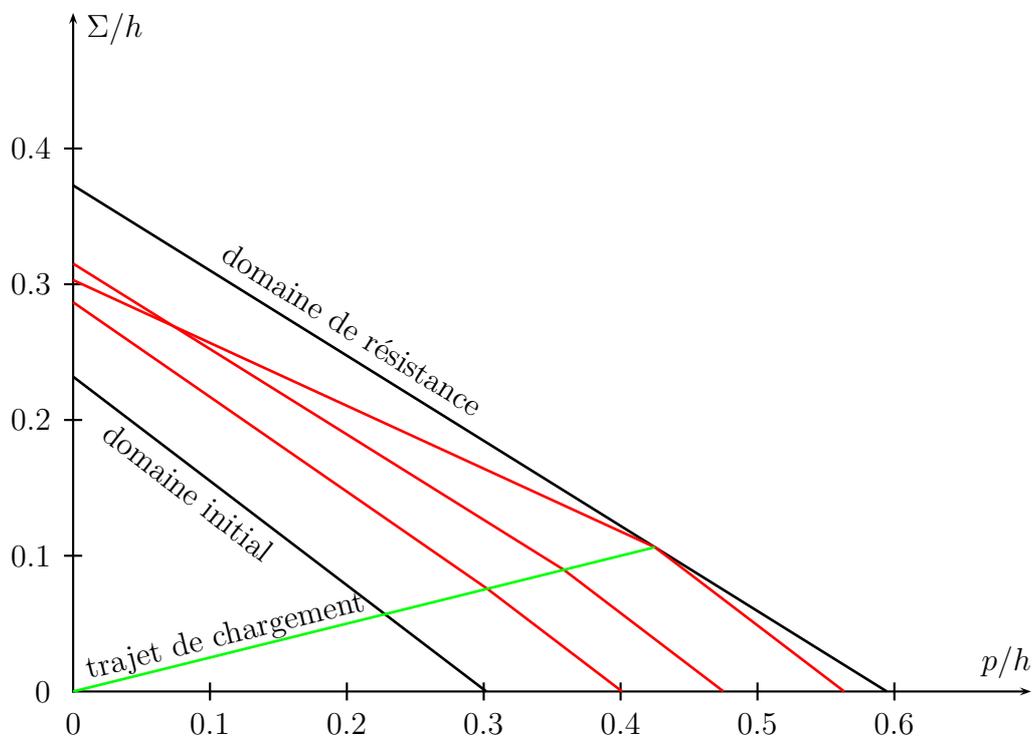
$$\delta \Sigma = (\beta (1 - \varphi) - 1) \delta p \quad (\Rightarrow \delta p > 0) \quad (9.64)$$

- $\delta(\Sigma + p) < 0$

D'après (9.63), on conclut que la nouvelle plastification apparaît en  $r = c$  et :

$$\delta \Sigma = \left( \frac{\beta (1 - \varphi)}{\beta (1 - (a/c)^3) + (a/c)^3} - 1 \right) \delta p \quad (\Rightarrow \delta p < 0) \quad (9.65)$$

Dans les deux directions, la variation de  $\Sigma$  est linéaire par rapport à celle de  $p$  mais, pour  $c \neq a$ , les pentes (9.64) et (9.65) sont différentes selon la variation (croissante ou décroissante) de  $p$ . Si  $\delta p > 0$ , la pente (9.64) ne dépend pas de la valeur de  $c$  et correspond à la pente du critère de première plastification définissant le domaine initial d'élasticité d'équation  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^e$  (9.53). Si au contraire  $\delta p < 0$ , la pente (9.65) est affectée par l'extension de la zone déjà plastifiée. La frontière du domaine d'élasticité actuel est donc localement bilinéaire et présente un point anguleux au niveau de l'état actuel du chargement  $(p, \Sigma)$  (cf FIG. 9.2). Par conséquent  $\tilde{\Sigma}$  (9.49) ne peut être une contrainte effective puisque si tel était le cas, la frontière du domaine serait linéaire. Si  $c = a$ , les pentes (9.64) et (9.65) coïncident puisque le critère est celui de la première plastification.

FIG. 9.2 – Évolution du domaine d'élasticité actuel -  $\varphi = 20\%$ ,  $t = 0.5$



Quatrième partie

**IRRÉVERSIBILITÉS DANS LES  
MILIEUX FISSURÉS**



# Chapitre 10

## Modélisation des fissures et comportement réversible

### Sommaire

---

<b>10.1 Lien entre le modèle 2-D et le modèle 3-D de fissure</b>	<b>201</b>
10.1.1 Cohérence géométrique	201
10.1.2 Cohérence cinématique	202
<b>10.2 Comportement réversible des fissures</b>	<b>204</b>
10.2.1 Cas des fissures ouvertes	206
10.2.2 Cas des fissures fermées lisses	209
10.2.3 Cas des fissures fermées adhérentes	211

---



L'objectif poursuivi dans cette partie est de construire le comportement macroscopique d'un milieu fissuré. De nombreux résultats concernant l'homogénéisation des milieux fissurés se sont fondés sur la théorie de la Mécanique de la Rupture (citons entre autres [20], [1], [59], [63], [64], [83]). Une alternative à cette théorie consiste à modéliser les fissures comme des objets tridimensionnels représentés par des ellipsoïdes aplatis auxquels il est possible d'appliquer les schémas de l'homogénéisation des milieux aléatoires ([79], [32]). Dans le cadre d'un comportement réversible, quelques études ont montré que cette approche permettait de retrouver les résultats issus de la Mécanique de la Rupture ([32], [81], [31], [84]) mais qu'elle pouvait en outre rendre compte de situations plus complexes incluant des interactions entre fissures ainsi que des hétérogénéités dans la matrice. Ce chapitre rappelle le lien existant entre le modèle 2-D et le modèle 3-D de fissure puis différents comportements réversibles obtenus à partir des résultats du chapitre 2 basés sur le problème d'Eshelby.

## 10.1 Lien entre le modèle 2-D et le modèle 3-D de fissure

### 10.1.1 Cohérence géométrique

Le point de vue bidimensionnel consiste à modéliser une fissure au sein d'une matrice  $\Omega^s$  comme deux surfaces semblables séparées par une distance infinitésimale par rapport à l'extension de la fissure de sorte qu'il soit possible de considérer que ces surfaces sont superposées et correspondent à une interface  $\mathcal{F}$  à une échelle (macroscopique) où la fissure représente une hétérogénéité. On se limite ici aux fissures planes et on désigne par  $\mathbf{n}$  la normale au plan de la fissure. On désigne par  $\mathcal{F}^+$  la face supérieure et par  $\mathcal{F}^-$  la face inférieure telles que  $\mathbf{n}$  est dirigé de  $\mathcal{F}^-$  vers  $\mathcal{F}^+$ . Pour pouvoir faire le lien avec le modèle tridimensionnel, il faut en outre modéliser  $\mathcal{F}$  comme un disque de rayon  $R$  (ou éventuellement comme une bande de largeur  $2R$  si on se place dans le cadre des déformations planes).

Le modèle tridimensionnel consiste à considérer la fissure comme un ellipsoïde aplati  $\mathcal{I}$  (cf. FIG. 10.1) de rayon  $R$  et de rapport d'aspect infinitésimal  $\omega \ll 1$  (ou un cylindre à base elliptique de grand axe de longueur  $2R$  et de rapport d'aspect infinitésimal dans le cadre des déformations planes). Maintenant que le lien géométrique est effectué, il faut assurer la cohérence entre les cinématiques propres à ces deux modèles du point de vue de leur impact macroscopique.

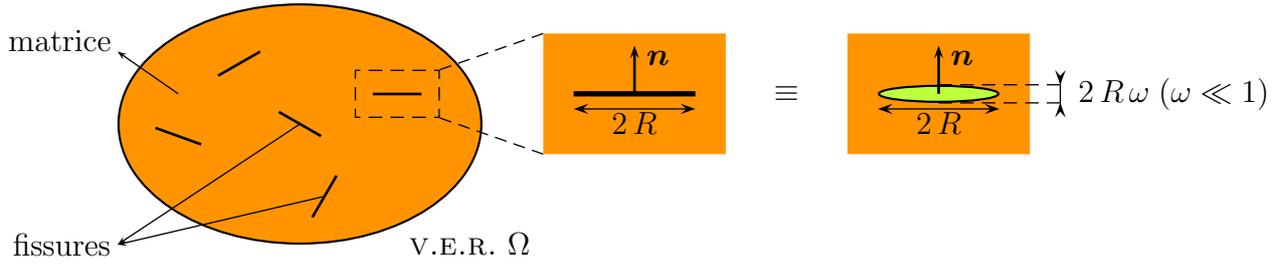


FIG. 10.1 – Modélisation géométrique des fissures

### 10.1.2 Cohérence cinématique

Au cours de l'évolution du domaine, les points en vis-à-vis des faces de la fissure peuvent avoir des cinématiques différentes engendrant une discontinuité de déplacement  $[[\boldsymbol{\xi}]] = \boldsymbol{\xi}^+ - \boldsymbol{\xi}^-$  où  $\boldsymbol{\xi}^+$  (resp.  $\boldsymbol{\xi}^-$ ) désigne le champ de déplacement sur la face supérieure (resp. inférieure). Les variables cinématiques pertinentes à l'échelle macroscopique sont la moyenne de la discontinuité normale de déplacement  $\beta$  et la moyenne de la discontinuité tangentielle de déplacement  $\boldsymbol{\gamma}$  :

$$\frac{1}{S_{\mathcal{F}}} \int_{\mathcal{F}} [[\boldsymbol{\xi}]] dS = \beta \mathbf{n} + \boldsymbol{\gamma} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad S_{\mathcal{F}} = \pi R^2 \quad (10.1)$$

Dans un raisonnement de changement d'échelle, il est utile de rappeler que la déformation macroscopique est obtenue par moyenne du champ microscopique (1.28). Il s'agit donc de calculer l'intégrale de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sur le V.E.R. à laquelle la contribution de la fissure vue comme une interface où existe une discontinuité de déplacement est, d'après (1.23) :

$$\int_{\mathcal{F}} [[\boldsymbol{\xi}]] \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} dS = S_{\mathcal{F}} \left( \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\gamma} \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} \right) \quad (10.2)$$

Considérons maintenant la fissure en tant qu'objet tridimensionnel. Dans le contexte de la présente étude où les différents composants du V.E.R. sont dotés d'un comportement élasto-plastique, le champ de déplacement est continu. La contribution de la fissure à l'intégrale de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est alors simplement :

$$\int_{\mathcal{I}} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = V_{\mathcal{I}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{I}} \quad \text{avec} \quad V_{\mathcal{I}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \omega \quad (10.3)$$

La cohérence cinématique entre les deux modèles se traduit alors par l'égalité entre les deux expressions (10.2) et (10.3) :

$$\beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \boldsymbol{\gamma} \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} = \frac{V_{\mathcal{I}}}{S_{\mathcal{F}}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{4R}{3} \omega \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{I}} \quad (10.4)$$

Comme  $\beta$  et  $\gamma$  sont des grandeurs finies, il découle de (10.4) que  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{I}} = \mathcal{O}(1/\omega)$  et on note :

$$\boldsymbol{\eta} = \omega \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{3}{4R} \left( \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \gamma \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} \right) \quad (10.5)$$

La décomposition de (10.4) sur les parties sphérique et déviatorique donne, compte tenu de (10.5) :

$$\beta = \frac{4R}{3} \omega \langle \varepsilon_v \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{4R}{3} \eta_v \quad (10.6)$$

$$\beta \left( \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) + \gamma \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} = \frac{4R}{3} \omega \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{4R}{3} \boldsymbol{\eta}_d \quad (10.7)$$

Il reste encore à vérifier la cohérence entre le comportement de la fissure bidimensionnelle et celui de l'ellipsoïde. Cette cohérence sera assurée dans la suite par un choix judicieux du comportement du matériau fictif occupant l'ellipsoïde c'est-à-dire un choix adapté au type de fissure bidimensionnelle que l'on cherche à modéliser.

L'intérêt de l'approche tridimensionnelle de la fissure est qu'elle permet de traiter un problème sur un milieu fissuré à l'aide des outils d'homogénéisation basés sur le problème d'Eshelby (cf. 2). Elle présente également l'avantage par rapport à la Mécanique de la Rupture de pouvoir s'affranchir de l'hypothèse de dilution ainsi que de l'homogénéité de la matrice.

Le problème d'homogénéisation se pose sur un v.e.r.  $\Omega$  que l'on suppose dans un premier temps composé d'une phase matricielle  $\Omega^s$  dans laquelle sont plongées plusieurs fissures de même orientation  $\mathbf{n}$ , même rayon  $R$ , même rapport d'aspect  $\omega$  et même comportement. Soit  $\mathcal{N}$  le nombre de fissures par unité de volume, on appelle  $\epsilon$  le paramètre de densité de fissure introduit dans [20] :

$$\epsilon = \mathcal{N} R^3 \quad (10.8)$$

La famille de fissures occupe le domaine noté  $\Omega^f$  dont la fraction volumique vaut :

$$\varphi^f = \frac{|\Omega^f|}{|\Omega|} = \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega \quad (10.9)$$

On note que, comme  $\omega$  est fondé à tendre vers 0, la fraction volumique  $\varphi^f$  est infinitésimale. Il faut toutefois noter que cela n'est pas une condition suffisante pour négliger les interactions entre les hétérogénéités (ici les fissures) car  $\varphi^f$ , qui tend vers 0, n'est pas le bon paramètre pour mesurer celles-ci. En raison de la forme en ellipsoïde aplati des fissures, le bon paramètre pour déterminer l'impact des interactions est  $\epsilon$  (10.8). En particulier, ce n'est que si  $\epsilon$  est infinitésimal que le schéma dilué est pertinent.

Dans la suite, nous allons utiliser les résultats du problème d'Eshelby (cf. annexe 3.1) pour estimer la localisation de la déformation dans les fissures intervenant dans (10.4). Toutes les fissures, ayant la même forme et la même orientation, présenteront donc le même état

de déformation, ce qui sous-entend que la moyenne de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  calculée sur une fissure dans (10.4) est égale à la moyenne sur le domaine  $\Omega^f$ .

On peut également étendre le raisonnement à plusieurs familles de fissures indexées par  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Une famille regroupe toutes les fissures ayant même orientation  $\boldsymbol{n}_j$ , même rayon  $R_j$ , même rapport d'aspect  $\omega_j$  et même comportement. Si  $\mathcal{N}_j$  désigne le nombre de fissures par unité de volume de la  $j^{\text{ème}}$  famille, le paramètre de densité de fissure  $\epsilon_j$  de cette famille s'écrit :

$$\epsilon_j = \mathcal{N}_j R_j^3 \quad (10.10)$$

La  $j^{\text{ème}}$  famille occupe le domaine noté  $\Omega^j$  dont la fraction volumique vaut :

$$\varphi^j = \frac{|\Omega^j|}{|\Omega|} = \frac{4}{3} \pi \epsilon_j \omega_j \quad (10.11)$$

## 10.2 Comportement réversible des fissures

Cette section traite de différents types de fissures ne mettant pas en jeu de phénomènes dissipatifs (fissures ouvertes, fissures fermées adhérentes et fissures fermées lisses). Elle rappelle les résultats obtenus dans [31] et [33]. La phase solide est élastique linéaire de tenseur d'élasticité  $\mathfrak{c}^s$ . Pour chaque type de fissure, on construit un matériau fictif élastique linéaire de tenseur d'élasticité  $\mathfrak{c}^j$  occupant l'espace tridimensionnel de la fissure. Le comportement macroscopique du milieu fissuré est élastique linéaire et s'obtient par la méthode basée sur les résultats du problème d'Eshelby (cf. annexe 3.1) et exposée à la section 2.1.4. En tenant compte de la relation de cohérence (2.11), le tenseur d'élasticité macroscopique (2.17) peut s'écrire ici :

$$\mathfrak{C}^{hom} = \mathfrak{c}^s + \sum_{j=1}^N \varphi^j (\mathfrak{c}^j - \mathfrak{c}^s) : \mathbb{A}^j \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}^j = \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega^j} \quad (10.12)$$

$$= \mathfrak{c}^s + \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j (\mathfrak{c}^j - \mathfrak{c}^s) : (\omega_j \mathbb{A}^j) \quad (10.13)$$

$$= \mathfrak{c}^s : \left( \mathbb{1} - \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j (\mathbb{1} - \mathfrak{c}^{s-1} : \mathfrak{c}^j) : (\omega_j \mathbb{A}^j) \right) \quad (10.14)$$

où les  $\mathbb{A}^j$  peuvent être estimés par le problème auxiliaire d'Eshelby. Il est impératif à ce stade de noter que  $\mathbb{A}^j$  dépend de  $\omega_j$ . Or d'après la relation (10.5), on s'attend à des déformations singulières dans les fissures donc à d'éventuelles grandes variations de  $\omega_j$  rendant alors le problème de localisation non linéaire. Il est bien mis en évidence dans [33] que ces non linéarités géométriques imposent d'écrire la localisation en vitesse ;  $\omega_j$  étant alors fixé à sa valeur instantanée, la localisation en vitesse est de nature linéaire et s'écrit formellement à l'aide du même tenseur  $\mathbb{A}^j$ . On note sur (10.13) que c'est en réalité

la limite de  $\omega_j \mathbb{A}^j$  lorsque  $\omega_j$  tend vers 0 qu'il va falloir estimer. D'après (10.5) transposé en vitesse, la cohérence entre les modélisations impose à cette limite d'être finie. En remplaçant  $\omega_j \mathbb{A}^j$  par celle-ci, il apparaît que le tenseur d'élasticité tangent identique à (10.14) ne dépend plus des non linéarités géométriques. Si, au cours du processus de chargement, les fissures ne changent pas de statut i.e. gardent un tenseur  $\mathfrak{c}^j$  constant, en intégrant la loi de comportement en vitesse, il découle que le comportement macroscopique est élastique linéaire de tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^{hom}$  indépendant du chargement. Dans le cas contraire où les fissures changent de statut, il faut prendre en compte les modifications du tenseur tangent au cours du temps. Par exemple, le cas de la fermeture de fissures initialement ouvertes est traité dans [33]; on montre que l'état des fissures (ouvert ou fermé) est gouverné par la contrainte macroscopique  $\Sigma$ , ce qui engendre une dépendance du tenseur tangent en  $\Sigma$  et rend le comportement macroscopique non linéaire. Pour la suite, on fait l'hypothèse que les fissures gardent leur statut au cours du processus de chargement. Dans ce cas, il est manifeste que le raisonnement basé sur une localisation en déformation, aussi contestable soit-il, conduit au bon résultat. Comme on le prévoyait en introduisant  $\boldsymbol{\eta}$  (10.5), c'est la localisation de ce dernier tenseur qui joue un rôle dans le comportement macroscopique.

En choisissant  $\mathfrak{c}^j \leq \mathfrak{c}^s$  (au sens des formes quadratiques) puisque les fissures affaiblissent le matériau sain, l'expression (10.13) met en évidence les termes directement responsables de la mesure de l'endommagement de la phase solide.

Dans le cas général d'un schéma d'estimation basé sur le problème d'Eshelby de milieu de référence  $\mathfrak{c}^o$  et en tenant compte de l'interaction (2.35), le tenseur  $\mathbb{A}^j$  est estimé par :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^j &= (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^j : (\mathfrak{c}^j - \mathfrak{c}^o))^{-1} : \\ &\quad \left( \varphi^s (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^s : (\mathfrak{c}^s - \mathfrak{c}^o))^{-1} + \sum_{k=1}^N \varphi^k (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^k : (\mathfrak{c}^k - \mathfrak{c}^o))^{-1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (10.15)$$

où  $\mathbb{P}_o^j$  dépend de l'orientation et du rapport d'aspect  $\omega_j$  de la  $j^{\text{ème}}$  famille de fissures ainsi que de  $\mathfrak{c}^o$  tandis que  $\mathbb{P}_o^s$ , dépendant aussi de  $\mathfrak{c}^o$ , fait référence à la distribution spatiale de la phase solide.

Le volume occupé par les fissures est infinitésimal donc  $\varphi^s \approx 1$  et, en multipliant (10.15) par  $\omega_j$ , on obtient, en tenant compte de (10.11) :

$$\begin{aligned} \omega_j \mathbb{A}^j &= \omega_j (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^j : (\mathfrak{c}^j - \mathfrak{c}^o))^{-1} : \\ &\quad \left( (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^s : (\mathfrak{c}^s - \mathfrak{c}^o))^{-1} + \frac{4}{3} \pi \sum_{k=1}^N \epsilon_k \omega_k (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^k : (\mathfrak{c}^k - \mathfrak{c}^o))^{-1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (10.16)$$

Il découle de (10.16) que le point crucial de la localisation consiste en la détermination de la limite :

$$\mathbb{T}_o^j(\mathfrak{c}^j, \mathbf{n}_j) = \lim_{\omega_j \rightarrow 0} \omega_j (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^j(\omega_j, \mathbf{n}_j) : (\mathfrak{c}^j - \mathfrak{c}^o))^{-1} \quad (10.17)$$

où on a rappelé que  $\mathbb{P}_o^j$  dépendait de  $\omega_j$  et  $\mathbf{n}_j$ .

On obtient donc la relation linéaire reliant  $\boldsymbol{\eta}$  à la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^j \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbb{H}_o^j : \mathbf{E}$$

$$\text{avec } \mathbb{H}_o^j = \mathbb{T}_o^j(\mathbf{c}^j, \mathbf{n}_j) : \left( (\mathbb{I} + \mathbb{P}_o^s : (\mathbf{c}^s - \mathbf{c}^o))^{-1} + \frac{4}{3} \pi \sum_{k=1}^N \epsilon_k \mathbb{T}_o^k(\mathbf{c}^k, \mathbf{n}_j) \right)^{-1} \quad (10.18)$$

Avec cette notation, l'expression de  $\mathbb{C}^{hom}$  (10.14) devient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j (\mathbb{I} - \mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{c}^j) : \mathbb{H}_o^j \right) \quad (10.19)$$

Examinons maintenant les différents modèles de fissure  $\mathbf{c}^j$  et leur impact sur  $\mathbb{C}^{hom}$  (10.19) via l'estimation de la localisation (10.16). Comme nous considérerons les effets des différentes familles de manière indépendante, nous omettrons la référence à  $j$ .

### 10.2.1 Cas des fissures ouvertes

Dans une modélisation bidimensionnelle, une fissure ouverte se caractérise par l'existence d'un écart entre les deux faces de la fissure. Dans le cas sec, une telle fissure représente donc un espace vide, ce qui entraîne la nullité du vecteur-contrainte sur l'interface :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (10.20)$$

Cette condition à l'interface suggère naturellement de choisir le vide comme "matériau" fictif occupant l'espace du modèle tridimensionnel de fissure, c'est-à-dire un matériau élastique linéaire de tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}^f = \mathbf{0}$ . Signalons que le modèle tridimensionnel est capable de rendre compte d'un espace géométrique entre les faces de la fissure en considérant un rapport d'aspect  $\omega$  non nul. Toutefois le modèle de fissure impose que  $\omega$  demeure infinitésimal, ce qui implique que la limite (10.17) a bien un sens. Celle-ci est désignée par le tenseur noté simplement  $\mathbb{T}_o = \mathbb{T}_o(\mathbf{c}^f = \mathbf{0})$  introduit dans [79] :

$$\mathbb{T}_o(\mathbf{n}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{P}_o(\omega, \mathbf{n}) : \mathbf{c}^o)^{-1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}))^{-1} \quad \text{avec } \mathbb{S}_o = \mathbb{P}_o : \mathbf{c}^o \quad (10.21)$$

Le tenseur  $\mathbb{T}_o$  dépend du milieu de référence ( $\mathbf{c}^o$ ) et de l'orientation  $\mathbf{n}$  de la fissure mais ne dépend évidemment plus de  $\omega$ . Dans le cas où le milieu de référence est isotrope, en orientant la normale à la fissure dans la direction  $\mathbf{e}_3$ , les composantes du tenseur  $\mathbb{S}_o$  sont données, au voisinage de  $\omega = 0$ , par les expressions (3.45) à (3.50) et le tenseur  $\mathbb{T}_o$  par (12.4).

On examine maintenant deux exemples de v.E.R. présentant des fissures ouvertes. On envisage notamment deux types de microstructures entraînant l'utilisation de schémas

d'homogénéisation différents. Rappelant que l'indice "o" apparaissant dans plusieurs tenseurs ci-avant est relatif au milieu de référence du schéma choisi, cet indice sera modifié en fonction du schéma.

### Application à une seule famille de fissures alignées

Prenons une seule famille de fissures alignées de normale  $\mathbf{n}$  et supposons que la phase solide joue le rôle d'une matrice dans laquelle sont incluses les fissures de sorte que l'on puisse justifier l'utilisation du schéma de Mori-Tanaka i.e.  $\mathbf{c}^o = \mathbf{c}^s$  (les indices "o" sont alors remplacés par "s"). Dans ce cas, la limite de l'équation (10.16) devient :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \mathbb{A}^f = \mathbb{T}_s(\mathbf{n}) : \left( \mathbb{1} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}_s(\mathbf{n}) \right)^{-1} = \mathbb{T}_s^\epsilon(\mathbf{n}) \quad (10.22)$$

où  $\mathbb{T}_s^\epsilon(\mathbf{n})$  peut encore s'écrire (en simplifiant (10.15) dans le cas  $N = 1$  et  $\mathbf{c}^f = \mathbf{0}$ ) :

$$\mathbb{T}_s^\epsilon(\mathbf{n}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{1} - \left( 1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega \right) \mathbb{S}_s(\omega, \mathbf{n}) \right)^{-1} \quad (10.23)$$

Le tenseur d'élasticité homogénéisé (10.19) s'écrit alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : \left( \mathbb{1} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}_s^\epsilon(\mathbf{n}) \right) = \mathbf{c}^s : \left( \mathbb{1} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}_s(\mathbf{n}) \right)^{-1} \quad (10.24)$$

En vertu du résultat démontré à la section 3.3, la symétrie de  $\mathbb{C}^{hom}$  est assurée. Toutefois, en utilisant le schéma de Mori-Tanaka, on effectue une hypothèse implicite sur la distribution spatiale des phases (solide et fissures) couplée avec la forme des inclusions ; ici la distribution est ellipsoïdale avec un rapport d'aspect tendant vers 0. Dans [88], une nouvelle méthode d'estimation (fondée sur la recherche de bornes) est proposée. Celle-ci permet de découpler la distribution spatiale des phases et la forme des inclusions.

### Application à une distribution isotrope de fissures

Examinons maintenant le cas d'une répartition isotrope de fissures : on suppose que la distribution des orientations des fissures est isotrope et que les rayons sont tous identiques  $R$ . On passe ainsi de  $N$  familles dans (10.19) et (10.16) à une distribution continue. On appelle ici  $\mathcal{N}$  le nombre total de fissures par unité de volume et  $\epsilon = \mathcal{N}R^3$  le paramètre de densité de fissure. La distribution étant isotrope, l'angle solide  $\sin \theta d\theta d\phi$  comporte un nombre de fissure par unité de volume valant

$$d\mathcal{N} = \frac{\mathcal{N}}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi \quad (10.25)$$

Le passage à cette distribution continue fait intervenir dans (10.16) le groupement :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j \omega_j (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o^j)^{-1} &\equiv \frac{\epsilon}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o)^{-1} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathbb{T}_o \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{Q}_o \end{aligned} \quad (10.26)$$

où  $\mathbb{Q}_o$  est défini comme la moyenne de  $\mathbb{T}_o$  lorsque  $\mathbf{n}$  parcourt la sphère unité. Ce tenseur est exprimé en (12.5) dans l'hypothèse où  $\mathfrak{c}^o$  est isotrope.

Si les fissures peuvent être considérées comme une phase inclusionnaire dans la phase solide matricielle, on utilise le schéma de Mori-Tanaka ( $\mathfrak{c}^o = \mathfrak{c}^s$ ). À l'aide de (10.19), (10.15) et du passage au continu (10.26) avec l'indice "o" devenu "s", on obtient un tenseur d'élasticité macroscopique :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathfrak{c}^s : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{Q}_s \right)^{-1} \quad (10.27)$$

On s'intéresse ensuite à un v.e.r. composé d'une phase solide et de fissures avec une distribution des phases totalement désordonnée de sorte que la phase solide ne puisse plus être considérée comme une phase matricielle. On suppose en outre que le désordre est tel que le comportement macroscopique puisse être considéré comme isotrope :

$$\mathbb{C}^{ac} = 3 k^{ac} \mathbb{J} + 2 \mu^{ac} \mathbb{K} = \frac{E^{ac}}{1 - 2\nu^{ac}} \mathbb{J} + \frac{E^{ac}}{1 + \nu^{ac}} \mathbb{K} \quad (10.28)$$

L'objectif est de trouver le seuil de percolation d'un tel v.e.r. en appliquant le schéma auto-cohérent i.e.  $\mathfrak{c}^o = \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^{ac}$  donc les indices "o" sont remplacés par "ac".

La distribution de la phase solide étant isotrope, on remplace  $\mathbb{P}_o^s$  dans l'expression (10.16) par le tenseur  $\mathbb{P}_{ac}$  relatif à une sphère plongée dans le milieu homogénéisé. De plus, comme  $\mathbb{C}^{ac}$  est isotrope, l'expression de  $\mathbb{P}_{ac}$  découle de (3.28). Puis, en tenant compte de (10.26), on exploite (10.19) et (10.16) pour finalement obtenir :

$$\mathbb{C}^{ac} : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{Q}_{ac} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_{ac} : (\mathfrak{c}^s - \mathbb{C}^{ac})) \right) - \mathfrak{c}^s = 0 \quad (10.29)$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique  $\mathbb{C}^{ac}$  est solution de l'équation non-linéaire (10.29), la non-linéarité provenant de la dépendance de  $\mathbb{Q}_{ac}$  et  $\mathbb{P}_{ac}$  en  $\mathbb{C}^{ac}$ . En prenant les parties sphérique et déviatorique de (10.29), on obtient deux équations dont les inconnues sont  $\{k^{ac}, \mu^{ac}\}$  ou  $\{E^{ac}, \nu^{ac}\}$  (10.28). Ces équations admettent une solution telle que  $E^{ac} > 0$  tant que  $\epsilon$  reste inférieur à  $\epsilon^*$  (seuil de percolation pour lequel  $E^{ac} = 0$ ). Ce seuil  $\epsilon^*$  et la valeur de  $\nu^{ac}$  correspondante sont solutions des équations :

$$\begin{cases} 5\nu^{ac3} - 84\nu^{ac2} + 117\nu^{ac} - 10 = 0 \\ \epsilon^* = \frac{27}{16} \frac{1 - 2\nu^{ac}}{(1 + \nu^{ac})^2} \end{cases} \quad (10.30)$$

La résolution de (10.30) donne  $\epsilon^* \approx 1.158$  et  $\nu^{ac} \approx 0.091$ . Il est à noter que le seuil de percolation mécanique que l'on vient de mettre en évidence est supérieur au seuil de percolation de la perméabilité du même V.E.R. (la phase solide étant supposée imperméable) qui vaut  $\epsilon_{perm}^* = 9/16$  [36]. Ceci signifie que pour cette valeur de  $\epsilon$ , les fissures forment un espace connecté qui permet un écoulement de fluide tout en laissant une certaine raideur au V.E.R..

### 10.2.2 Cas des fissures fermées lisses

Ces fissures se caractérisent par un vecteur-contrainte purement normal, autrement dit des contraintes de cisaillement nulles, et une discontinuité normale de déplacement nulle :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{nn} \mathbf{n}, \quad \sigma_{nn} \leq 0 \quad ; \quad \beta = 0 \quad (10.31)$$

Si  $\sigma_{nn}$  vient à s'annuler, la fissure s'ouvre et on est ramené au cas précédent. On suppose donc ici que la fissure reste fermée i.e. que la contrainte normale au niveau de cette fissure est maintenue dans un état de compression.

Une modélisation tridimensionnelle consiste donc à introduire un matériau offrant une certaine raideur en compression isotrope ( $k^f > 0$ ) et un module de cisaillement nul ( $\mu^f = 0$ ) soit un tenseur d'élasticité  $\mathbf{c}^f = 3k^f \mathbb{J}$ .

Supposons que le milieu de référence soit isotrope i.e.  $\mathbf{c}^o = 3k^o \mathbb{J} + 2\mu^o \mathbb{K}$ . La limite (10.17) s'écrit ici  $\mathbb{T}'_o = \mathbb{T}_o(\mathbf{c}^f = 3k^f \mathbb{J})$  :

$$\mathbb{T}'_o(\mathbf{n}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left\{ \mathbb{I} - \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) : \left[ \left( 1 - \frac{k^f}{k^o} \right) \mathbb{J} + \mathbb{K} \right] \right\}^{-1} \quad (10.32)$$

À l'aide des composantes (3.45) à (3.50) de  $\mathbb{S}_o$ , on montre que le tenseur  $\mathbb{T}'_o$  ne dépend pas de  $k^f$  tant que ce module reste non nul. Il s'écrit donc :

$$\mathbb{T}'_o(\mathbf{n}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) : \mathbb{K})^{-1} \quad (10.33)$$

$\mathbb{T}'_o$  est écrit sous forme matricielle en (12.7). On note que :

$$\mathbb{J} : \mathbb{T}'_o = \mathbb{T}'_o : \mathbb{J} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{K} : \mathbb{T}'_o = \mathbb{T}'_o : \mathbb{K} = \mathbb{T}'_o \quad (10.34)$$

Comme le tenseur  $\mathbb{T}'_o$  est responsable de la localisation de  $\boldsymbol{\eta}$  (10.18), le résultat (10.34) est bien cohérent avec la nullité du déplacement normal (10.31) en raison de la relation (10.6).

Revisitons maintenant les exemples étudiés dans le cas des fissures ouvertes.

### Application à une seule famille de fissures alignées

En suivant scrupuleusement la même démarche que dans le cas ouvert, on a :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \mathbb{A}^f = \mathbb{T}'_s(\mathbf{n}) : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}'_s(\mathbf{n}) \right)^{-1} = \mathbb{T}_s^{\epsilon'}(\mathbf{n}) \quad (10.35)$$

où  $\mathbb{T}_s^{\epsilon'}(\mathbf{n})$  peut encore s'écrire :

$$\mathbb{T}_s^{\epsilon'}(\mathbf{n}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{I} - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathbb{S}_s(\omega, \mathbf{n}) : \mathbb{K} \right)^{-1} \quad (10.36)$$

Le tenseur d'élasticité homogénéisé (10.19) s'écrit alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{c}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}_s^{\epsilon'}(\mathbf{n}) \right) = \mathbb{c}^s : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}'_s(\mathbf{n}) \right)^{-1} \quad (10.37)$$

### Application à une distribution isotrope de fissures

Pour cet exemple aussi, on adapte facilement les résultats concernant les fissures ouvertes.

Le groupement (10.26) se transpose ici en :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j \omega_j (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o^j : \mathbb{K})^{-1} &\equiv \frac{\epsilon}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o : \mathbb{K})^{-1} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathbb{T}'_o \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{Q}'_o \end{aligned} \quad (10.38)$$

où  $\mathbb{Q}'_o$  est défini comme la moyenne de  $\mathbb{T}'_o$  lorsque  $\mathbf{n}$  parcourt la sphère unité. Ce tenseur est exprimé en (12.8) dans l'hypothèse où  $\mathbb{c}^o$  est isotrope.

Dans le cas de l'application du schéma de Mori-Tanaka, l'homologue de (10.27) est ici :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{c}^s : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{Q}'_s \right)^{-1} \quad (10.39)$$

Dans le cas de l'application du schéma auto-cohérent, l'équation dont  $\mathbb{C}^{ac}$  est solution est l'homologue de (10.29) :

$$\mathbb{C}^{ac} : \left( \mathbb{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{Q}'_{ac} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_{ac} : (\mathbb{c}^s - \mathbb{C}^{ac})) \right) - \mathbb{c}^s = \mathbb{0} \quad (10.40)$$

On note que, comme  $\mathbb{Q}'_{ac}$  (12.8) ne présente pas de composante sur  $\mathbb{J}$ , il découle de (10.40) que  $k^{ac} = k^s$ . Ceci n'est pas étonnant, étant donné que les fissures lisses transmettent intégralement les contraintes normales (de compression). En revanche le module de cisaillement  $\mu^{ac}$  est affecté par la présence de fissures. Il est obtenu en résolvant l'équation scalaire créée par la projection de (10.40) sur  $\mathbb{K}$ . Cette équation présente une solution strictement positive pour  $\mu^{ac}$  tant que  $\epsilon$  ne dépasse pas le seuil de percolation  $\epsilon^* = 225/64$ . À la percolation,  $\mu^{ac}$  s'annule mais pas  $k^{ac}$  qui vaut  $k^s$  donc  $E^{ac}$  est nul et  $\nu^{ac} = 1/2$ .

### 10.2.3 Cas des fissures fermées adhérentes

Les fissures fermées adhérentes n'admettent pas de discontinuité de déplacement. La modélisation tridimensionnelle correspond à un matériau offrant une raideur en compression mais également en cisaillement, autrement dit un tenseur  $\mathfrak{c}^f$  défini positif. Pour cette famille de fissures, la limite (10.17) est nulle :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left\{ \mathbb{I} - \mathbb{S}_o : \left[ \left( 1 - \frac{k^f}{k^o} \right) \mathbb{J} + \left( 1 - \frac{\mu^f}{\mu^o} \right) \mathbb{K} \right] \right\}^{-1} = \mathbb{0} \quad \text{si } k^f, \mu^f \neq 0 \quad (10.41)$$

D'après la règle de localisation (10.18) et les relations (10.6) et (10.7), ce résultat est bien cohérent avec un modèle de fissure adhérente. On en déduit immédiatement que de telles fissures n'endommagent pas le matériau puisqu'elles transmettent tous les efforts. Si le matériau ne présente que des fissures de ce type, d'après (10.19), on a ici  $\mathbb{C}^{hom} = \mathfrak{c}^s$ .



# Chapitre 11

## Comportement irréversible des fissures

### Sommaire

---

<b>11.1 Comportement plastique des fissures</b> . . . . .	<b>215</b>
11.1.1 Critère de plasticité d'une fissure et règle d'écoulement . . . . .	216
11.1.2 Règle de localisation et comportement macroscopique . . . . .	217
11.1.3 Calcul de l'énergie libre macroscopique . . . . .	219
11.1.4 Critère de charge plastique . . . . .	221
<b>11.2 Exemples de fissures plastiques</b> . . . . .	<b>222</b>
11.2.1 Fissures purement cohérentes . . . . .	222
11.2.2 Fissures frottantes non dilatantes . . . . .	227
11.2.3 Fissures frottantes dilatantes . . . . .	229
<b>11.3 Propagation de fissures plastiques</b> . . . . .	<b>234</b>
11.3.1 Critère de propagation . . . . .	235
11.3.2 Fissures purement cohérentes . . . . .	237
11.3.3 Fissures frottantes non dilatantes . . . . .	239
11.3.4 Fissures frottantes dilatantes . . . . .	241

---



On aborde dans le présent chapitre les effets irréversibles susceptibles d'être induits par les fissures. Ces effets peuvent s'avérer primordiaux dans le calcul de structures géologiques comme en témoignent par exemple les travaux sur le plissement de roches fracturées dans [48] et [49]. Ceux-ci s'appuient sur un comportement élasto-plastique rendant compte de la présence de fissures plastiques sans interactions.

On suppose ici que les fissures sont fermées et ont un comportement plastique i.e. les faces peuvent être à l'origine d'une dissipation d'énergie tandis que le comportement de la phase solide reste élastique. On envisage trois types de comportement plastique : d'abord des fissures purement cohérentes avec une règle d'écoulement associée, puis des fissures frottantes non dilatantes (non associées) et enfin des fissures frottantes avec une règle d'écoulement associée. D'une part, en restreignant notre approche à l'hypothèse de dilution des fissures, on retrouve dans le cas des fissures frottantes non dilatantes des résultats obtenus dans le cadre de la Mécanique de la Rupture dans [1] et plus récemment dans [81]. D'autre part, notre approche permet, dans le dernier type de fissure mentionné, de mettre en évidence un effet de dilatance.

On fait l'hypothèse dans la suite que le chargement est tel que les fissures restent fermées (i.e.  $T_n \leq 0$ ). Dans le cas contraire, il faut séparer les fissures en une population de fissures fermées et une population de fissures ouvertes (ayant atteint le critère d'ouverture  $T_n = 0$ ) comme cela est fait dans [33] pour mettre en évidence un comportement non-linéaire réversible.

On envisage également dans ce chapitre de modéliser la propagation de fissures plastiques. Le modèle de propagation s'appuie, comme dans [84], [39] et [37], sur un raisonnement thermodynamique macroscopique exploitant l'expression de l'énergie libre du v.e.r. calculée par changement d'échelle.

Lorsqu'il s'agit de recourir à un schéma d'homogénéisation linéaire, on fait l'hypothèse dans tout le chapitre que la microstructure du v.e.r. incite à utiliser le schéma de Mori-Tanaka. Cette hypothèse conduit à une simplification notable des relations (10.18) mais il est bien évident qu'en revenant à ces relations générales, les résultats du présent chapitre peuvent être transposés à un autre schéma. De plus, on se place dans le cas où  $\mathbf{c}^s$  est isotrope. Ceci signifie que l'on pourra se reporter à la section 12.2 pour obtenir les expressions des tenseurs  $\mathbb{T}_s$ ,  $\mathbb{T}_s^\epsilon$  etc..

## 11.1 Comportement plastique des fissures

### 11.1.1 Critère de plasticité d'une fissure et règle d'écoulement

Dans le régime élastique, on peut montrer par la théorie de la Mécanique de la Rupture que l'état de contrainte est uniforme sur les faces de la fissure (voir par exemple [81]). Ce résultat est bien compatible avec l'approche tridimensionnelle pour laquelle les estimations des états de déformation et de contrainte sont uniformes dans la fissure en vertu de la technique d'estimation basée sur les résultats d'Eshelby. On effectue l'hypothèse (vérifiée a posteriori) qu'il en est de même dans le régime plastique atteint lorsque le critère de plasticité est saturé. Dans la modélisation bidimensionnelle, le critère est argumenté par le vecteur-contrainte au niveau de la fissure,  $\mathbf{n}$  désignant toujours la normale à la fissure :

$$f_{2d}(\mathbf{T}) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = T_n \mathbf{n} + \mathbf{T}_t \quad (11.1)$$

Comme dans le cas de l'élasticité à la section 10.2, l'idée de la modélisation tridimensionnelle passe ici par la construction d'un milieu fictif plastique (sur lequel on définit un état de contrainte) de critère de plasticité anisotrope écrit à partir du critère bidimensionnel :

$$f_{3d}(\boldsymbol{\sigma}) = f_{2d}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \quad (11.2)$$

Par construction, l'activation du critère 2D et celle du critère 3D sont simultanées.

Supposons maintenant que la règle d'écoulement du modèle 2D s'écrive à l'aide du potentiel  $g_{2d}(\mathbf{T})$  et montrons que le potentiel du modèle 3D est :

$$g_{3d}(\boldsymbol{\sigma}) = g_{2d}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \quad (11.3)$$

La règle d'écoulement bidimensionnelle est donnée par :

$$\dot{\beta} \mathbf{n} + \dot{\gamma} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_{2d}}{\partial \mathbf{T}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (11.4)$$

Puis en différentiant (11.3), on obtient :

$$dg_{3d}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial g_{2d}}{\partial \mathbf{T}} \cdot d(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \left( \frac{\partial g_{2d}}{\partial \mathbf{T}} \otimes \mathbf{n} \right) : d\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{\partial g_{2d}}{\partial \mathbf{T}} \otimes^s \mathbf{n} \right) : d\boldsymbol{\sigma} \quad (11.5)$$

soit donc :

$$\frac{\partial g_{3d}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g_{2d}}{\partial \mathbf{T}} \otimes^s \mathbf{n} \quad (11.6)$$

On introduit alors (10.5) et (11.4) dans (11.6) multipliée par  $\dot{\lambda}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\mu} \frac{\partial g_{3d}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \dot{\mu} = \frac{3}{4R} \dot{\lambda} \geq 0 \quad (11.7)$$

La relation (11.7) montre que  $g_{3d}$  est bien le potentiel plastique du modèle 3D. Ceci montre en particulier que si la plasticité est associée dans le modèle 2D, elle l'est également dans le modèle 3D.

### 11.1.2 Règle de localisation et comportement macroscopique

On suppose à partir de maintenant que le v.e.r. n'est composé que d'une seule famille de fissures : elles sont toutes alignées, ont le même rayon et les mêmes caractéristiques mécaniques. On choisit de définir le vecteur  $\mathbf{e}_3$  comme la normale aux fissures. Le point de vue adopté est celui d'une modélisation tridimensionnelle des fissures. Au cours de la phase élastique, on montre par les schémas classiques d'homogénéisation basés sur le problème d'Eshelby que l'on peut estimer l'état de déformation et de contrainte dans les fissures par des tenseurs uniformes qui sont d'ailleurs les mêmes dans toutes les fissures puisque ce sont des inclusions identiques. Une fois le critère de plasticité atteint simultanément sur toute la famille des fissures, on suppose que cet état demeure uniforme.

À partir de la connaissance de l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^f$  des fissures, on souhaite déterminer l'état de déformation ou plutôt le tenseur  $\boldsymbol{\eta}$  (10.5) qui s'établit dans celles-ci. Le raisonnement qui va suivre n'est pas spécifique à un comportement particulier des fissures (en l'occurrence plastique) mais il revêt une importance particulière ici du fait que la forme de  $\boldsymbol{\sigma}^f$  va pouvoir être précisée en fonction du critère choisi.

Comme l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^f$  des fissures est considéré comme donné, celles-ci se comportent comme si elles étaient dotées d'une élasticité nulle ( $\mathbf{c}^f = \mathbf{0}$ ) et d'une précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^f$ . Ainsi le problème à résoudre est celui que l'on a posé dans la section 2.2.2 consacrée au théorème de Levin avec la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^s & ; \quad \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \Omega^s) \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & ; \quad \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^f & (\mathbf{x} \in \Omega^f) \end{cases} \quad (11.8)$$

Les deux paramètres de chargement du v.e.r. sont la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  au contour et l'état de contrainte des fissures  $\boldsymbol{\sigma}^f$ . Décomposons linéairement le problème en deux sous-problèmes (cf. FIG. 11.1) :

- le problème  $\mathcal{P}^I$  est tel que le v.e.r. est soumis à  $\mathbf{E} - \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^f$  au contour et à la contrainte nulle dans les fissures,
- le problème  $\mathcal{P}^{II}$  est tel que le v.e.r. est soumis à  $\mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^f$  au contour et à  $\boldsymbol{\sigma}^f$  dans les fissures.

Le problème  $\mathcal{P}^I$  correspond manifestement au cas d'un v.e.r. à fissures ouvertes étudié au chapitre précédent. On montre en particulier que  $\boldsymbol{\eta}^I$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\eta}^I = \mathbb{T}_s^\epsilon : (\mathbf{E} - \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^f) \quad (11.9)$$

avec  $\mathbb{T}_s^\epsilon$  écrit en (10.22) ou (10.23). On dispose également de la moyenne de  $\boldsymbol{\sigma}^I$  déterminé à l'aide du tenseur d'élasticité homogénéisé du problème d'un v.e.r. à fissures ouvertes

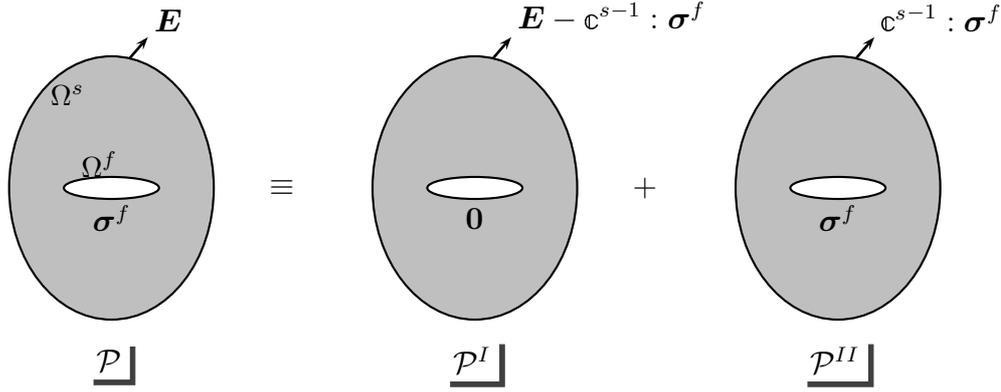


FIG. 11.1 – Première décomposition du problème posé sur un v.e.r. fissuré

déduit de (10.19) :

$$\langle \sigma^I \rangle = \mathbf{c}^s : \left( \mathbb{1} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}_s^\epsilon \right) : (\mathbf{E} - \mathbf{c}^{s-1} : \sigma^f) \quad (11.10)$$

La solution du problème  $\mathcal{P}^{II}$  est uniforme :

$$\sigma^{II} = \sigma^f \quad ; \quad \epsilon^{II} = \mathbf{c}^{s-1} : \sigma^f \quad (11.11)$$

Comme  $\epsilon^{II}$  est uniforme et non singulier notamment au voisinage des fissures, il découle que  $\eta^{II} = \mathbf{0}$ .

Par superposition, on montre donc que la relation entre  $\eta$  d'une part et  $\mathbf{E}$  et  $\sigma^f$  d'autre part est intégralement contenue dans la solution de  $\mathcal{P}^I$  :

$$\eta = \mathbb{T}_s^\epsilon : (\mathbf{E} - \mathbf{c}^{s-1} : \sigma^f) = \mathbb{T}_s^\epsilon : \mathbf{c}^{s-1} : (\mathbf{c}^s : \mathbf{E} - \sigma^f) = \mathbb{T}_s^\epsilon : (\mathbf{E} - \mathbb{P}_s : \sigma^f) \quad (11.12)$$

La dernière égalité provient d'une propriété prouvée à l'annexe 12.3. On y montre notamment que le tenseur  $\mathbb{P}_s$  est considéré au sens de sa limite lorsque  $\omega$  tend vers 0. Il se déduit de (12.10) lorsque  $\mathbf{c}^s$  est isotrope.

En invoquant à nouveau la superposition  $\Sigma = \langle \sigma^I \rangle + \langle \sigma^{II} \rangle$  et en utilisant (11.12), on montre que la loi de comportement macroscopique s'écrit :

$$\Sigma = \mathbf{c}^s : \left( \mathbf{E} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \eta \right) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \mathbf{c}^{s-1} : \Sigma + \frac{4}{3} \pi \epsilon \eta \quad (11.13)$$

Dans le régime purement élastique, les fissures se comportent comme des fissures parfaitement adhérentes, le tenseur d'élasticité macroscopique est donc  $\mathbf{c}^s$ . Ainsi le terme dépendant de  $\eta$  dans (11.13) correspond à la déformation plastique macroscopique :

$$\mathbf{E}^{pl} = \frac{4}{3} \pi \epsilon \eta \quad (11.14)$$

Alternativement, on peut écrire  $\eta$  en fonction de  $\Sigma$  et  $\sigma^f$ . En exploitant (11.12), (11.13) et la relation (10.22) entre  $\mathbb{T}_s^\epsilon$  et  $\mathbb{T}_s$ , on obtient :

$$\eta = \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : (\Sigma - \sigma^f) \quad (11.15)$$

On note que la localisation en contrainte (11.15) ne dépend pas de la densité de fissure.

### 11.1.3 Calcul de l'énergie libre macroscopique

La phase solide est purement élastique et les fissures sont fermées donc elles ne présentent pas de discontinuités de déplacement d'origine élastique. L'énergie libre macroscopique s'écrit par conséquent :

$$\Psi = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (11.16)$$

Pour déterminer  $\Psi$ , l'idée est de procéder à une nouvelle décomposition linéaire du problème  $\mathcal{P}$  posé sur le v.E.R. soumis à  $\mathbf{E}$  au contour et à l'état  $\boldsymbol{\sigma}^f$  dans les fissures en deux sous-problèmes (cf. FIG. 11.2) :

- le problème  $\mathcal{P}^{EL}$  est tel que le v.E.R. est soumis à  $\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}$  au contour et à la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  dans les fissures,
- le problème  $\mathcal{P}^R$  est tel que le v.E.R. est soumis à  $\mathbf{E}^{pl}$  au contour et à  $\boldsymbol{\sigma}^f - \boldsymbol{\Sigma}$  dans les fissures.

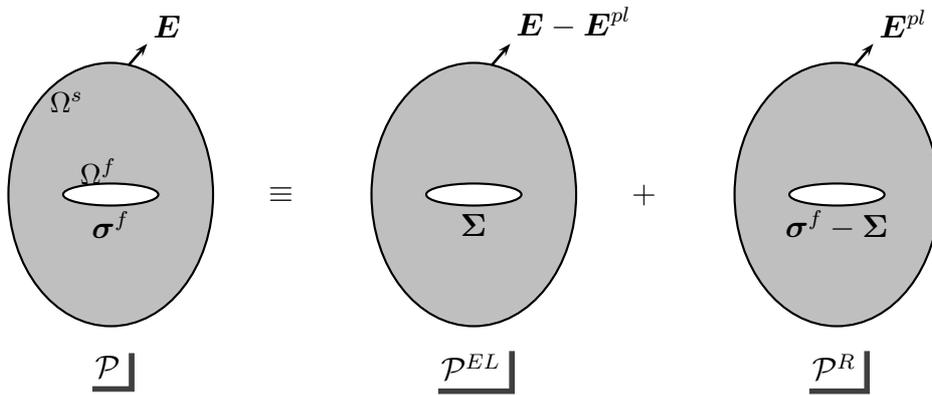


FIG. 11.2 – Seconde décomposition du problème posé sur un v.E.R. fissuré

Les champs homogènes suivants vérifient toutes les équations de  $\mathcal{P}^{EL}$ , ils en forment donc la solution :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{EL} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl} \quad ; \quad \boldsymbol{\eta}^{EL} = \mathbf{0} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^{EL} = \mathbf{c}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) = \boldsymbol{\Sigma} \quad (11.17)$$

Par linéarité, on déduit de (11.17) que :

$$\boldsymbol{\eta}^R = \boldsymbol{\eta} \quad ; \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^R \rangle = \mathbf{0} \quad (11.18)$$

La décomposition permet d'écrire :

$$|\Omega| \Psi = I_1 + I_2 + I_3 \quad (11.19)$$

avec

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \, d\Omega = |\Omega| \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \mathbf{c}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) \quad (11.20)$$

$$I_2 = \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}^R : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \, d\Omega \quad (11.21)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}^R : \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^R \, d\Omega \quad (11.22)$$

En exploitant l'uniformité de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{EL}$  (11.17), la moyenne nulle de  $\boldsymbol{\sigma}^R$  (11.18) et la limite  $|\Omega^f| \rightarrow 0$ , on montre :

$$I_2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^R : \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \, d\Omega - \int_{\Omega^f} \boldsymbol{\sigma}^R : \boldsymbol{\varepsilon}^{EL} \, d\Omega = 0 \quad (11.23)$$

Appliquant maintenant le lemme de Hill au couple  $(\boldsymbol{\sigma}^R, \boldsymbol{\varepsilon}^R)$  avec (11.18) et en rappelant l'uniformité de  $\boldsymbol{\sigma}^{fR} = \boldsymbol{\sigma}^f - \boldsymbol{\Sigma}$  au niveau des fissures, on a :

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^R : \boldsymbol{\varepsilon}^R \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega^f} \boldsymbol{\sigma}^R : \boldsymbol{\varepsilon}^R \, d\Omega = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{fR} : \int_{\Omega^f} \boldsymbol{\varepsilon}^R \, d\Omega \quad (11.24)$$

avec d'après (11.18) et (11.14) :

$$\int_{\Omega^f} \boldsymbol{\varepsilon}^R \, d\Omega = |\Omega| \frac{4}{3} \pi \epsilon \boldsymbol{\eta}^R = |\Omega| \frac{4}{3} \pi \epsilon \boldsymbol{\eta} = |\Omega| \mathbf{E}^{pl} \quad (11.25)$$

On en déduit donc l'expression de  $\Psi$  :

$$\Psi = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \mathbf{c}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{fR} : \mathbf{E}^{pl} \quad (11.26)$$

Le problème  $\mathcal{P}^R$  se présente formellement comme le problème  $\mathcal{P}$  en remplaçant dans ce dernier  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{E}^{pl}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^f$  par  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}$ . En adaptant (11.12), on peut donc écrire :

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^R = \mathbb{T}_s^\epsilon : (\mathbf{E}^{pl} - \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^{fR}) \quad (11.27)$$

En exploitant (11.14) et la relation (10.22) entre  $\mathbb{T}_s^\epsilon$  et  $\mathbb{T}_s$ , il vient :

$$\mathbf{E}^{pl} = -\frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^{fR} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\eta} = -\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^{fR} \quad (11.28)$$

On introduit les tenseurs suivants :

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \quad ; \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (11.29)$$

Le tenseur  $\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1}$  n'est pas inversible mais sa restriction au sous-espace engendré par  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  l'est (12.24). En notant  $(\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger$ , l'inverse de ce tenseur restreint et  $\mathbb{L}$  le projecteur sur le sous-espace que l'on vient de mentionner (12.25), on déduit de (11.28) :

$$\mathbb{L} : \boldsymbol{\sigma}^{fR} = -\frac{3}{4 \pi \epsilon} (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}^{pl} \quad (11.30)$$

Or  $\mathbf{E}^{pl}$  (ou  $\boldsymbol{\eta}$ ) appartient à l'image du projecteur  $\mathbb{L}$  donc (11.26) peut encore s'écrire comme la somme d'une énergie élastique restituable  $\Psi^{EL}$  et d'une énergie bloquée  $\mathcal{R}$  :

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl}, \epsilon) = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl}) : \mathbb{C}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pl})}_{\Psi^{EL}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{pl})} + \underbrace{\frac{3}{8\pi\epsilon} \mathbf{E}^{pl} : (\mathbb{T}_s : \mathbb{C}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}^{pl}}_{\mathcal{R}(\mathbf{E}^{pl}, \epsilon)} \quad (11.31)$$

En examinant l'expression de la dissipation macroscopique en l'absence de propagation ( $\dot{\epsilon} = 0$ ), il apparaît que la force thermodynamique associée à la variable thermodynamique interne  $\mathbf{E}^{pl}$  est  $\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{fR} = \boldsymbol{\sigma}^f$  :

$$\mathbf{D} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{pl}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} = \left( \boldsymbol{\Sigma} - \frac{3}{4\pi\epsilon} (\mathbb{T}_s : \mathbb{C}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}^{pl} \right) : \dot{\mathbf{E}}^{pl} = (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{fR}) : \dot{\mathbf{E}}^{pl} = \boldsymbol{\sigma}^f : \dot{\mathbf{E}}^{pl} \quad (11.32)$$

On retrouve bien que le critère de plasticité macroscopique est relié au critère microscopique par le fait que c'est l'état de contrainte dans la fissure qui gouverne la plasticité :

$$F(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma}^{fR}) = f_{3d}(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{fR}) = f_{3d}(\boldsymbol{\sigma}^f) \quad (11.33)$$

La variable de contrainte résiduelle sur la fissure  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}$  constitue le paramètre d'écroissage cinématique : le domaine actuel d'élasticité s'obtient à partir du domaine initial par translation de  $-\boldsymbol{\sigma}^{fR}$  (cf. FIG. 11.3).

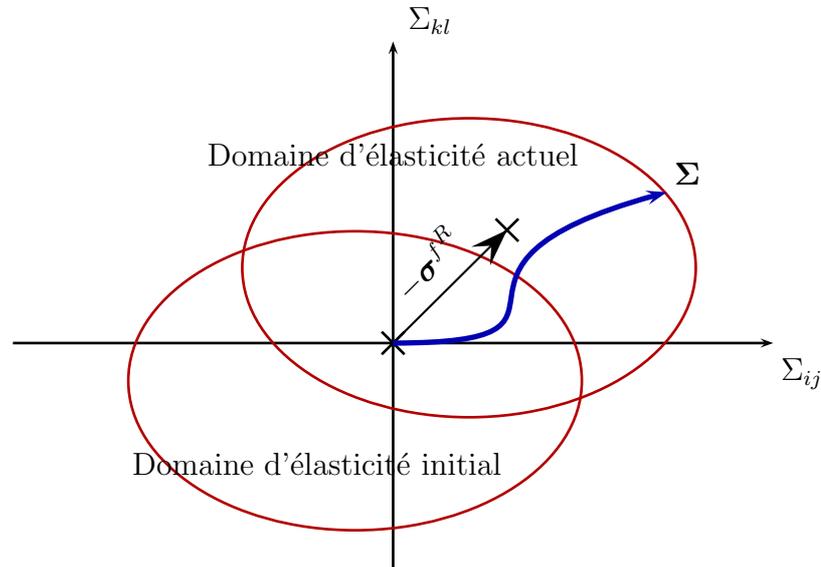


FIG. 11.3 – Écroissage cinématique

#### 11.1.4 Critère de charge plastique

Supposons que le critère soit activé à un certain instant. On se pose alors la question de l'évolution ultérieure, à savoir si les fissures sont en charge plastique ou non. Comme

nous avons fait l'hypothèse que toutes les fissures étaient semblables (alignées et de même taille), celles-ci sont toutes simultanément soit en charge soit élastiques. Pour déterminer si le système est en charge, il suffit d'envisager une évolution purement élastique du v.e.r. (i.e. de chacune des fissures) et d'examiner si une telle évolution conduit à la violation du critère. Dans le régime élastique, l'évolution du champ de contrainte est homogène donc, au niveau de la fissure, on a  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^f = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ . Ainsi le critère est localement violé si :

$$\frac{\partial f_{3d}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^f} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} > 0 \quad (11.34)$$

Autrement dit, d'après (11.33), le v.e.r. est en charge plastique si et seulement si :

$$f_{2d}(\mathbf{T}) = f_{3d}(\boldsymbol{\sigma}^f) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\partial f_{3d}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^f} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \left( \frac{\partial f_{2d}}{\partial \mathbf{T}} \otimes \mathbf{e}_3 \right) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} > 0 \quad (11.35)$$

Durant un processus de charge, c'est l'évolution de l'état de contrainte résiduel  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}$ , considérée fixe dans le test (11.35), qui assure le respect du critère. Si l'expérience est pilotée en déformation, la condition de charge (11.35) devient :

$$f_{2d}(\mathbf{T}) = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial f_{2d}}{\partial \mathbf{T}} \otimes \mathbf{e}_3 \right) : \mathbf{c}^s : \mathbf{D} > 0 \quad (11.36)$$

## 11.2 Exemples de fissures plastiques

### 11.2.1 Fissures purement cohérentes

Le comportement plastique purement cohérent d'une fissure fermée (vérifiant donc  $T_n \leq 0$ ) correspond au critère suivant (critère de von Mises) :

$$f_{2d}(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_t\| - T_o \quad (11.37)$$

La plasticité est supposée parfaite, ce qui donne la règle d'écoulement :

$$\dot{\beta} = 0 \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\lambda} \mathbf{T}_t, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (11.38)$$

Comme  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  et  $\mathbf{T}_t$  appartiennent au plan dirigé par  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  (cf. FIG. 11.4), on introduit le repère cylindrique d'axe  $\mathbf{e}_3$  tel que  $\mathbf{e}_r = \mathbf{T}_t / \|\mathbf{T}_t\|$ . L'angle formé par  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_r)$  est appelé  $\theta$  et  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_r$  (cf. FIG. 11.4). On note alors :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\gamma} \mathbf{e}_r, \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad (11.39)$$

On élargit la définition des tenseurs  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  (11.29) en introduisant la notation générale :

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_i \quad ; \quad i \in \{1, 2, r, \theta\} \quad (11.40)$$

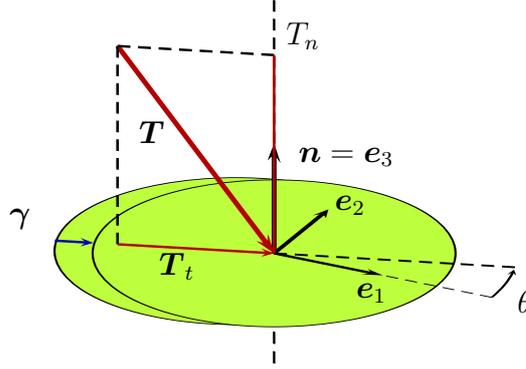


FIG. 11.4 – Fissure purement cohérente

D'après (10.5) et (11.39), il vient :

$$\frac{4R}{3} \dot{\eta} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \tau_r \quad (11.41)$$

D'après la condition (11.35), le v.e.r. est ici en charge si et seulement si :

$$\tau_r : \dot{\Sigma} > 0 \quad (11.42)$$

En phase de charge,  $\sigma^f$  sature le critère (11.37), il s'écrit donc, par définition de la direction  $e_r$  :

$$\begin{aligned} \sigma^f &= T_n e_3 \otimes e_3 + T_o \tau_r \\ &+ \sigma_{11} e_1 \otimes e_1 + \sigma_{22} e_2 \otimes e_2 + \sigma_{12} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \end{aligned} \quad (11.43)$$

L'écriture en vitesse de la règle de localisation (11.15) donne ici :

$$\dot{\eta} = \mathbb{T}_s : \mathfrak{c}^{s-1} : \left( \dot{\Sigma} - \dot{\sigma}^f \right) \quad (11.44)$$

On a choisi ici la règle de localisation en fonction de  $\dot{\Sigma}$  plutôt que de  $\mathbf{D}$  mais le reste de l'étude peut aisément être adapté en choisissant la règle de localisation (11.12). Le tenseur  $\mathbb{T}_s : \mathfrak{c}^{s-1}$  se déduit de (12.23) avec  $\epsilon = 0$  et s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_s : \mathfrak{c}^{s-1} &= \frac{2}{\pi} \frac{1 - \nu^s}{\mu^s} \left\{ e_3 \otimes e_3 \otimes e_3 \otimes e_3 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2 - \nu^s} \left( \frac{1}{2} (\tau_1 \otimes \tau_1 + \tau_2 \otimes \tau_2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (11.45)$$

En introduisant (11.41) et (11.43) dans (11.44) et en notant que la partie de  $\sigma^f$  écrite sur la seconde ligne de (11.43) appartient au noyau de  $\mathbb{T}_s : \mathfrak{c}^{s-1}$  (11.45) et ne joue donc pas de rôle dans l'équation de localisation, on déduit :

$$\frac{3}{8R} \dot{\gamma} \tau_r = \mathbb{T}_s : \mathfrak{c}^{s-1} : \left( \dot{\Sigma} - \left( \dot{T}_n e_3 \otimes e_3 + T_o \dot{\theta} \tau_\theta \right) \right) \quad (11.46)$$

En projetant (11.46) successivement sur  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\boldsymbol{\tau}_\theta$  qui sont des directions propres de  $\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1}$  (11.45), on obtient les équations :

$$0 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \dot{T}_n \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) \quad (11.47)$$

$$\frac{3}{4R} \dot{\gamma} = \boldsymbol{\tau}_r : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (11.48)$$

$$0 = \boldsymbol{\tau}_\theta : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - T_o \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}_\theta \right) \quad (11.49)$$

dont les inconnues sont  $T_n$ ,  $\gamma$  et  $\theta$ .

L'équation (11.47) permet de déterminer la valeur de la contrainte normale  $T_n$ . Sachant que  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$  est une direction propre de l'opérateur  $\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1}$  (11.45), on déduit que l'évolution de  $T_n$  (tant que cette grandeur reste négative) est la même que dans le domaine élastique :

$$\dot{T}_n = (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) : \mathbf{c}^s : \mathbf{D} \quad (11.50)$$

La dernière égalité provient du fait que  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  (11.41) n'a pas de composante suivant  $(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$  dans la loi incrémentale obtenue par dérivation de (11.13). Comme (11.50) est valable en phase élastique aussi bien qu'en phase de charge plastique, cette équation peut être intégrée en supposant que l'état initial est naturel. On en déduit alors la condition assurant le caractère fermé des fissures :

$$T_n = (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) : \boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{33} \leq 0 \quad (11.51)$$

L'équation (11.48) permet, à l'aide de (11.41), de relier directement  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  au taux de contrainte macroscopique  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \boldsymbol{\tau}_r) : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \boldsymbol{\tau}_r) : \mathbb{T}'_s : \mathbf{c}^{s-1} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (11.52)$$

La dernière égalité provient des formes particulières que prennent  $\mathbb{T}_s$  (12.4) et  $\mathbb{T}'_s$  (12.7). On déduit ensuite de (11.13) et (11.52) le comportement macroscopique en vitesse valable en phase de charge plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{c}^s : \left\{ \mathbb{1} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \left( \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \boldsymbol{\tau}_r) : \mathbb{T}'_s \right) \right\}^{-1} : \mathbf{D} \quad (11.53)$$

Dans les équations (11.48) et (11.49), la partie de  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$  qui intervient est sa projection sur l'espace vectoriel engendré par  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  (ou de manière équivalente par  $\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\boldsymbol{\tau}_\theta$ ) car cet espace est un espace propre pour l'opérateur  $\mathbb{T}_s$  (12.4). Soit donc  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{P}}$ , la projection de  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$  sur cet espace :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \otimes \boldsymbol{\tau}_2) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_\theta \otimes \boldsymbol{\tau}_\theta) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \dot{\Sigma}_{13} \boldsymbol{\tau}_1 + \dot{\Sigma}_{23} \boldsymbol{\tau}_2 \quad (11.54)$$

Notant  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}} = \sqrt{\dot{\Sigma}_{13}^2 + \dot{\Sigma}_{23}^2}$  et  $\theta_{\Sigma} = \arctan(\dot{\Sigma}_{23}/\dot{\Sigma}_{13})$ , on a :

$$\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}} = \dot{\Sigma}^{\mathcal{P}} \left( \cos(\theta_{\Sigma} - \theta) \boldsymbol{\tau}_r + \sin(\theta_{\Sigma} - \theta) \boldsymbol{\tau}_{\theta} \right) \quad (11.55)$$

D'après (11.55), on déduit aisément que le critère de charge plastique (11.42) s'écrit :

$$\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}} \cos(\theta_{\Sigma} - \theta) > 0 \quad (11.56)$$

L'équation (11.49) permet de déterminer l'angle  $\theta$  en fonction de la "rotation" de  $\dot{\Sigma}$  au cours du temps :

$$\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}} \sin(\theta_{\Sigma} - \theta) = T_o \dot{\theta} \quad (11.57)$$

Dans (11.57),  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}$  et  $\theta_{\Sigma}$  sont des fonctions du temps données (si l'expérience est pilotée en contrainte) tandis que  $\theta$  est l'inconnue. Cette équation n'est évidemment valable que lorsque (11.56) est satisfaite, notamment à l'initiation de la phase plastique ( $t = t_o$ ) où  $\theta(t_o) = \theta_o$  en rappelant que l'angle  $\theta_o$  est défini par la direction de  $\mathbf{T}_t$  à l'instant où le critère est atteint. Dans le cas particulier où  $\theta_{\Sigma}$  est une constante (le tenseur  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}$  a une direction fixe) telle que  $\cos(\theta_{\Sigma} - \theta_o) > 0$  et  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}(t)$  est une fonction positive, l'équation (11.57) s'intègre en :

$$\theta(t) = \theta_{\Sigma} - 2 \arctan \left\{ \tan \left( \frac{\theta_{\Sigma} - \theta_o}{2} \right) \exp \left( -\frac{1}{T_o} \int_{u=t_o}^t \dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}(u) \, du \right) \right\} \quad (11.58)$$

On note sur (11.58) que si la condition (11.56) est vérifiée initialement, elle le reste (tant que  $\theta_{\Sigma}$  est constant i.e.  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}$  ne tourne pas). De plus,  $\theta$  tend asymptotiquement vers  $\theta_{\Sigma}$ , ce qui signifie que  $\mathbf{T}_t$  et  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  (et même  $\boldsymbol{\gamma}$ ) ont tendance à venir s'aligner sur la direction du glissement  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}$  (11.55) :

$$\mathbf{e}_{r_{\Sigma}} = \mathbf{e}_r(\theta_{\Sigma}) = \cos \theta_{\Sigma} \mathbf{e}_1 + \sin \theta_{\Sigma} \mathbf{e}_2 \quad (11.59)$$

Examinons le cas particulier où  $\theta_{\Sigma} = \theta_o$ , ce qui se produit par exemple lorsque  $\theta_{\Sigma}$  est constant depuis l'état initial naturel du v.E.R.. Dans ce cas, d'une part  $\theta$  est constant et vaut  $\theta_{\Sigma}$  et d'autre part  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}$  (11.55) est colinéaire à  $\boldsymbol{\tau}_r$ . En phase de charge plastique, le comportement macroscopique en vitesse (11.53) devient

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{c}^s : \left( \mathbb{1} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbb{T}'_s \right)^{-1} : \mathbf{D} \quad (11.60)$$

Autrement dit, dans une telle situation (où  $\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}}$  garde une direction fixe), le tenseur d'élasticité tangent du comportement incrémental en plasticité est identique à celui qui sort de l'étude des fissures élastiques fermées lisses (10.37). Ceci se comprend aisément en remarquant qu'en phase de charge plastique,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^f$  (11.43) ne présente pas de composante de cisaillement dans le plan de la fissure.

Dans le cas général, on se donne une séquence de chargement  $\Sigma(t)$  telle que les fissures restent fermées i.e. vérifiant (11.51) à chaque instant. La réponse du v.e.r. commence par une phase élastique jusqu'à ce que le critère des fissures soit atteint, ce qui fixe l'angle  $\theta_o$ . Si  $\theta_o$  et l'angle du chargement  $\theta_\Sigma$  sont tels que le v.e.r. se trouve en charge plastique (11.56), alors il faut résoudre l'équation différentielle (11.57) dont  $\theta$  est solution. Le comportement macroscopique incrémental est alors donné par (11.53) tant que la solution  $\theta$  et  $\theta_\Sigma$  satisfont (11.56). Dans le cas contraire, le comportement incrémental du v.e.r. est celui de la matrice élastique. En suivant à chaque instant l'état de contrainte des fissures, il est possible de déterminer si le v.e.r. rebascule dans une phase élasto-plastique, auquel cas on recommence le raisonnement suivant l'initiation de la plasticité.

Achevons l'étude des fissures purement cohérentes en déterminant la réponse du v.e.r. soumis à un cisaillement simple du type :

$$\Sigma(t) = \Sigma_{13}(t) \boldsymbol{\tau}_1 = \Sigma_{13}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (11.61)$$

Dans un premier temps, la fonction  $\Sigma_{13}(t)$ , initialement nulle, est croissante. La solution

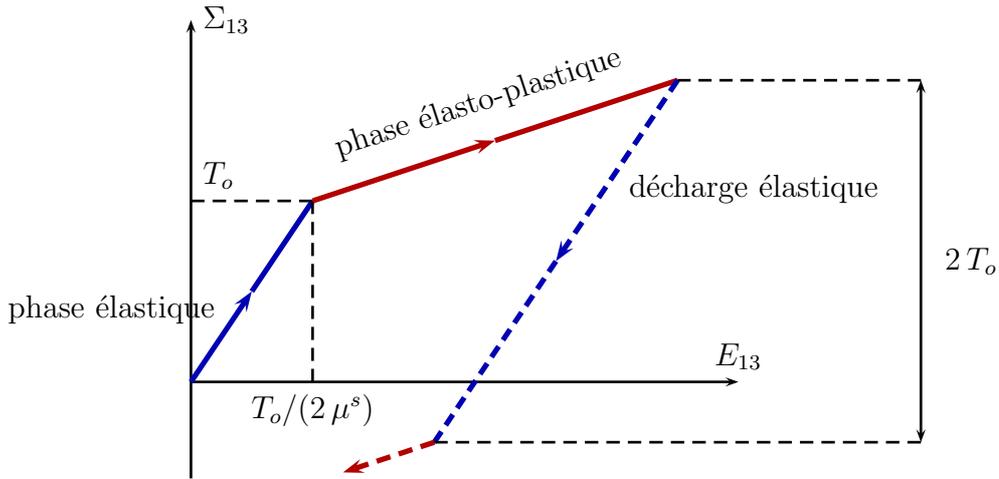


FIG. 11.5 – Cisaillement simple d'un v.e.r. à fissures purement cohérentes

purement élastique est alors admissible

$$2 \mu^s \mathbf{E} = \boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{13}(t) \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\sigma}^f \quad (11.62)$$

tant que le critère n'est pas atteint i.e. tant que

$$\Sigma_{13} \leq T_o \quad (11.63)$$

À la saturation du critère, le vecteur-contrainte au niveau de la fissure vaut  $\mathbf{T} = T_o \mathbf{e}_1$  soit  $\theta = 0$ . Si  $\Sigma_{13}$  continue de croître après cette valeur, le critère de charge plastique (11.56)

est satisfait et, comme  $\dot{\Sigma}$  suit un trajet purement radial, on déduit de la loi incrémentale (11.60) :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu^s} \left\{ T_o + \left( 1 + \epsilon \frac{16}{3} \frac{1-\nu^s}{2-\nu^s} \right) (\Sigma_{13} - T_o) \right\} \boldsymbol{\tau}_1 \quad (11.64)$$

Au cours de la phase élasto-plastique, l'état de la fissure est le suivant :

$$\boldsymbol{\sigma}^f = T_o \boldsymbol{\tau}_1 \quad (11.65)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu^s} \frac{1-\nu^s}{2-\nu^s} (\Sigma_{13} - T_o) \boldsymbol{\tau}_1 \quad \left( = \frac{3}{4\pi\epsilon} \mathbf{E}^{pl} \right) \quad (11.66)$$

Après une certaine période de charge plastique jusqu'à la valeur  $\Sigma_{13} = \bar{\Sigma}_{13}$ , l'état de déformation associé  $\bar{\mathbf{E}}$  étant donné par (11.64), on décide de faire décroître  $\Sigma_{13}(t)$ . En d'autres termes,  $\theta_\Sigma$  passe de 0 à  $\pi$  donc le critère (11.56) n'est plus satisfait et le comportement redevient élastique :

$$2\mu^s (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}) = \Sigma - \bar{\Sigma} = (\Sigma_{13} - \bar{\Sigma}_{13}) \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\sigma}^f - T_o \boldsymbol{\tau}_1 \quad (11.67)$$

La loi de décharge élastique (11.67) est valable jusqu'à ce que  $\boldsymbol{\sigma}^f$  atteigne l'état de contrainte  $-T_o \boldsymbol{\tau}_1$  soit

$$\Sigma_{13} = \bar{\Sigma}_{13} - 2T_o \quad (11.68)$$

Les phases successives (phase élastique, charge plastique et décharge) sont représentées à la FIG. 11.5.

On remarque sans peine que l'expérience que l'on vient d'étudier peut être, de manière équivalente, pilotée en déformation selon le glissement simple :

$$\mathbf{E}(t) = E_{13}(t) \boldsymbol{\tau}_1 = E_{13}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (11.69)$$

### 11.2.2 Fissures frottantes non dilatantes

De telles fissures obéissent à un critère d'interface de Coulomb [57]. Comme celui de von Mises, ce critère se présente comme une limitation de la norme de  $\mathbf{T}_t$  mais la valeur limite dépend ici du niveau de confinement de la fissure i.e. :

$$f_{2d}(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_t\| + Q T_n \quad (11.70)$$

où  $Q$  est le coefficient de frottement de la fissure.

La règle d'écoulement est la même que dans le cas des fissures purement cohérentes :

$$\dot{\beta} = 0 \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\lambda} \mathbf{T}_t, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (11.71)$$

On note qu'un tel modèle de fissure n'est pas en mesure d'induire d'effets dilatants puisque  $\dot{\beta} = 0$  et que l'écoulement (11.71) ne respecte pas la règle de normalité au critère (11.70)

(ce modèle de plasticité n'est donc pas associé).

On introduit le même repère cylindrique que dans le cas des fissures purement cohérentes i.e.  $\mathbf{e}_r$  désigne le vecteur unitaire dirigé selon  $\mathbf{T}_t$ . La loi de comportement (11.71) implique que  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  peuvent encore s'écrire ici respectivement (11.39) et (11.41).

Lorsque le critère est saturé, la condition de charge plastique (11.35) devient ici :

$$\left( Q \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_r \right) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} > 0 \quad (11.72)$$

En adoptant à nouveau les notations (11.54) et (11.55), (11.72) devient :

$$Q \dot{\Sigma}_{33} + \dot{\Sigma}^P \cos(\theta_\Sigma - \theta) > 0 \quad (11.73)$$

La saturation du critère (11.70) et la définition de  $\mathbf{e}_r$  et de  $\boldsymbol{\tau}_r$  (11.40) conduisent à un tenseur des contraintes au niveau des fissures de la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^f &= T_n (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - Q \boldsymbol{\tau}_r) \\ &\quad + \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sigma_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \end{aligned} \quad (11.74)$$

La règle de localisation (11.44) donne ici :

$$\frac{3}{8R} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\tau}_r = \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \dot{T}_n (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - Q \boldsymbol{\tau}_r) + Q T_n \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}_\theta \right) \quad (11.75)$$

En projetant (11.75) successivement sur  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\boldsymbol{\tau}_\theta$ , on obtient les équations :

$$0 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \dot{T}_n \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) \quad (11.76)$$

$$\frac{3}{4R} \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\tau}_r : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + Q \dot{T}_n \boldsymbol{\tau}_r \right) \quad (11.77)$$

$$0 = \boldsymbol{\tau}_\theta : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + Q T_n \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}_\theta \right) \quad (11.78)$$

Comme pour les fissures purement cohérentes, on déduit de (11.76) que :

$$\dot{T}_n = (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (11.79)$$

puis par intégration :

$$T_n = (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) : \boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{33} \leq 0 \quad (11.80)$$

En introduisant (11.79) dans (11.77) et en exploitant (11.41) et  $\boldsymbol{\tau}_r : \mathbb{T}_s = \boldsymbol{\tau}_r : \mathbb{T}'_s$ , on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \boldsymbol{\tau}_r) : \mathbb{T}'_s : \mathbf{c}^{s-1} : (\mathbb{1} + Q (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)) : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (11.81)$$

Le comportement macroscopique en phase de charge plastique s'écrit donc :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{c}^s : \left\{ \mathbb{1} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \left( \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \boldsymbol{\tau}_r) : \mathbb{T}'_s : \mathbf{c}^{s-1} : (\mathbb{1} + Q (\boldsymbol{\tau}_r \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)) : \mathbf{c}^s \right) \right\}^{-1} : \mathbf{D} \quad (11.82)$$

L'équation (11.78) régissant la rotation  $\theta$  de  $\mathbf{T}_t$  donne ici avec les notations (11.54) et (11.55) :

$$\dot{\Sigma}^{\mathcal{P}} \sin(\theta_{\Sigma} - \theta) = -Q T_n \dot{\theta} \quad (11.83)$$

L'équation (11.83) se déduit de (11.57) en remplaçant la constante  $T_o$  par  $-QT_n$ . Or ce dernier groupement est une fonction du temps directement reliée au chargement macroscopique  $\Sigma$  par (11.80).

Si l'on se donne maintenant un certain trajet de chargement  $\Sigma(t)$  tel que les fissures restent fermées i.e. vérifiant (11.80) à chaque instant, la réponse du v.e.r. est obtenue en plusieurs étapes. Le comportement macroscopique est tout d'abord élastique jusqu'au moment (éventuellement initial) où le critère (11.70) est localement atteint. Comme dans le cas des fissures purement cohérentes, l'étape suivante consiste à envisager une séquence plastique en résolvant l'équation différentielle (11.83) en considérant que la solution  $\theta(t)$  n'est valable que tant qu'elle satisfait (11.73) sinon la réponse (en vitesse) redevient élastique. Durant la phase élasto-plastique, le comportement en vitesse est donné par (11.82).

Envisageons un trajet de chargement formé de deux séquences successives : la première consiste à confiner le v.e.r. en appliquant une compression simple :

$$\Sigma = -\mathcal{S} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad \text{avec} \quad \mathcal{S} > 0 \quad (11.84)$$

de sorte que  $T_n$  (11.80) prenne une valeur négative en l'occurrence  $-\mathcal{S}$  et que le v.e.r. n'entre pas en charge plastique, puis la seconde est telle que  $T_n$  ne varie plus, autrement dit d'après (11.79) :

$$(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) : \dot{\Sigma} = \dot{\Sigma}_{33} = 0 \quad (11.85)$$

Il apparaît alors clairement que les équations à résoudre au cours de la seconde phase de chargement sont rigoureusement les mêmes que pour un milieu à fissures purement cohérentes pour lequel on a fixé le seuil  $T_o$  à la valeur :

$$T_o = -Q T_n = Q \mathcal{S} \quad (11.86)$$

On peut par exemple envisager une séquence de cisaillement simple du type (11.61) ou, de manière équivalente, une séquence de glissement simple (11.69) en transposant les résultats de la section précédente.

### 11.2.3 Fissures frottantes dilatantes

Dans cette section, les fissures obéissent toujours au critère de Coulomb :

$$f_{2d}(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_t\| + Q T_n \quad (11.87)$$

La différence avec la section précédente est que la règle d'écoulement est cette fois associée, autrement dit :

$$\dot{\beta} = -\dot{\lambda} Q^2 T_n \quad ; \quad \dot{\gamma} = \dot{\lambda} \mathbf{T}_t, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (11.88)$$

En exploitant le fait que  $\dot{\lambda}$  n'est non nul que si le critère est saturé et en introduisant le repère cylindrique comme dans les sections précédentes, la règle d'écoulement (11.88) peut encore s'écrire :

$$\dot{\beta} = Q \dot{\gamma} \quad ; \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma} \mathbf{e}_r \quad (11.89)$$

Cette règle d'écoulement peut donc induire localement de la dilatance (cf. FIG. 11.6) i.e.

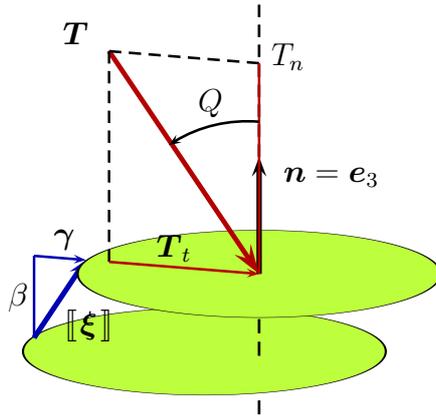


FIG. 11.6 – Fissure frottante dilatante

$\beta > 0$  sans toutefois remettre en cause l'hypothèse de fermeture des fissures dont le critère porte sur la contrainte normale ( $T_n \leq 0$ ). Physiquement, la dilatance est due à la présence d'aspérités sur les faces des fissures. Ainsi les plans moyens des faces peuvent s'éloigner sans que le contact ne soit perdu (cf. FIG. 11.7), c'est-à-dire tout en transmettant des contraintes normales de compression.

Introduisons les tenseurs suivants (à noter qu'ils dépendent de  $\theta$ ) :

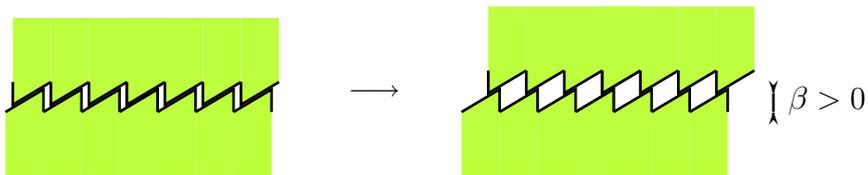


FIG. 11.7 – Représentation schématique de la dilatance d'une fissure fermée

$$\mathbf{U} = Q \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_r \quad ; \quad \mathbf{V} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - Q \boldsymbol{\tau}_r \quad (11.90)$$

D'après (10.5) et (11.89), l'écoulement du point de vue tridimensionnel s'écrit :

$$\frac{4R}{3} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\gamma} \mathbf{U} \quad (11.91)$$

Comme le critère est celui de Coulomb, la condition de charge plastique s'écrit encore (11.72) :

$$\mathbf{U} : \dot{\Sigma} > 0 \quad (11.92)$$

ou encore (11.73) avec les notations (11.54) et (11.55) :

$$Q \dot{\Sigma}_{33} + \dot{\Sigma}^P \cos(\theta_\Sigma - \theta) > 0 \quad (11.93)$$

Le critère de Coulomb implique également que l'état de contrainte de la fissure saturant le critère s'écrit comme en (11.74) :

$$\boldsymbol{\sigma}^f = T_n \mathbf{V} + \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sigma_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (11.94)$$

En introduisant (11.91) et (11.94) dans la règle de localisation en vitesse (11.44), on obtient :

$$\frac{3}{4R} \dot{\gamma} \mathbf{U} = \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \left( \dot{\Sigma} - \dot{T}_n \mathbf{V} + Q T_n \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}_\theta \right) \quad (11.95)$$

Pour obtenir  $\dot{T}_n$ , il suffit de projeter (11.95) sur  $\mathbf{V}$ . En notant que les tenseurs  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  (11.90) et  $\boldsymbol{\tau}_\theta$  sont orthogonaux deux à deux et que  $\mathbf{V}$  et  $\boldsymbol{\tau}_\theta$  sont également orthogonaux au sens du produit scalaire défini par le tenseur  $\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1}$  (11.45), il vient en projetant (11.75) sur  $\mathbf{V}$  :

$$\dot{T}_n = \frac{\mathbf{V} : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \dot{\Sigma}}{\mathbf{V} : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{V}} = \left( \frac{(2 - \nu^s) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - Q \boldsymbol{\tau}_r}{2 - \nu^s + 2Q^2} \right) : \dot{\Sigma} \quad (11.96)$$

S'agissant de  $\theta$ , il est manifeste qu'en projetant (11.95) sur  $\boldsymbol{\tau}_\theta$ , on obtient l'équation différentielle régissant cet angle. Celle-ci est identique à celle obtenue dans le cas des fissures frottantes non dilatantes (11.83) :

$$\dot{\Sigma}^P \sin(\theta_\Sigma - \theta) = -Q T_n \dot{\theta} \quad (11.97)$$

On observe donc qu'il existe un couplage entre les fonctions  $T_n$  et  $\theta$  solutions du système différentiel formé par (11.96) et (11.97).

Pour trouver  $\dot{\gamma}$ , il suffit d'appliquer à (11.75) la "pseudo-inverse"  $(\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger$  de  $\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1}$  (cf. (12.24) en annexe 12.3) puis de projeter le résultat sur  $\mathbf{U}$  (11.90). Le tenseur  $(\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger$  se déduit de (12.24) avec  $\epsilon = 0$  et s'écrit :

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger = \frac{\pi}{2} \frac{\mu^s}{1 - \nu^s} & \left\{ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right. \\ & \left. + (2 - \nu^s) \left( \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \otimes \boldsymbol{\tau}_2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (11.98)$$

On montre alors :

$$\frac{3}{4R} \dot{\gamma} = \frac{\mathbf{U} : \dot{\Sigma}}{\mathbf{U} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{U}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\mu^s} \frac{1 - \nu^s}{2 - \nu^s + 2Q^2} \mathbf{U} : \dot{\Sigma} \quad (11.99)$$

On note que le signe positif de cette expression est bien cohérent avec la condition de charge plastique (11.92). L'introduction de (11.99) dans (11.91) fournit :

$$\dot{\eta} = \frac{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} : \dot{\Sigma}}{\mathbf{U} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{U}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\mu^s} \frac{1 - \nu^s}{2 - \nu^s + 2Q^2} \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} : \dot{\Sigma} \quad (11.100)$$

Ainsi le comportement macroscopique incrémental en phase de charge plastique est obtenu en injectant (11.100) dans la dérivée temporelle de (11.13) :

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{c}^s : \left( \mathbb{1} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \frac{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} : \mathbf{c}^s}{\mathbf{U} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{U}} \right)^{-1} : \mathbf{D} \quad (11.101)$$

Intéressons-nous à une expérience de cisaillement simple du v.e.r. :

$$\Sigma(t) = \Sigma_{13}(t) \boldsymbol{\tau}_1 = \Sigma_{13}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (11.102)$$

Lors d'une phase élastique, on a :

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\Sigma}}{2\mu^s} = \frac{\dot{\Sigma}_{13}}{2\mu^s} \boldsymbol{\tau}_1 \quad (11.103)$$

Envisageons un trajet monotone croissant à partir de  $\Sigma_{13}(0) = 0$ . Le critère (11.87) est saturé dès le départ et il est manifeste d'après (11.103) qu'une évolution élastique viole le critère. Le v.e.r. est donc immédiatement soumis à une charge plastique. On note alors que tant que  $\Sigma_{13}$  reste croissant, la symétrie du problème suggère  $\theta = \theta_\Sigma = 0$ . Lors de la phase de charge plastique initiale, (11.101) fournit les composantes non nulles de  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{cases} E_{13} = \frac{1}{2\mu^s} \left( 1 + \epsilon \frac{16}{3} \frac{1 - \nu^s}{2 - \nu^s + 2Q^2} \right) \Sigma_{13} & (a) \\ E_{33} = \epsilon \frac{16}{3\mu^s} Q \frac{1 - \nu^s}{2 - \nu^s + 2Q^2} \Sigma_{13} & (b) \end{cases} \quad (11.104)$$

Il apparaît en examinant (11.104 a) que, dans la phase plastique d'une expérience de cisaillement simple, le milieu à fissures dilatantes présente une raideur apparente croissante avec  $Q$  et valant la raideur du milieu à fissures cohérentes ou frottantes non dilatantes lorsque  $Q = 0$ . On constate sur (11.104 b) l'effet de la dilatance des fissures sur le comportement macroscopique en régime plastique, qui se traduit par une dilatation dans la direction de la normale aux fissures.

On suit à chaque instant l'état du vecteur-contrainte sur les fissures par intégration de (11.96) :

$$T_n = -\frac{2Q}{2 - \nu^s + 2Q^2} \Sigma_{13} \quad (11.105)$$

Durant cette phase de charge plastique, le vecteur-contrainte sur les fissures s'écrit :

$$\mathbf{T} = T_n (-Q \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \quad (11.106)$$

Après avoir atteint une certaine valeur de  $\Sigma_{13}$  notée  $\bar{\Sigma}_{13}$  correspondant à la valeur  $\bar{T}_n$  de  $T_n$  par (11.105) et donc à la valeur  $-Q\bar{T}_n$  de  $T_1$  d'après (11.106), on fait décroître  $\Sigma_{13}$ . On entame alors une phase de décharge élastique pendant laquelle la loi incrémentale (11.103) est satisfaite. La variation des états de contrainte et de déformation étant homogène dans le V.E.R., on en déduit facilement que  $T_n$  est constant et que :

$$\mathbf{T} = (-Q\bar{T}_n + \Sigma_{13} - \bar{\Sigma}_{13}) \mathbf{e}_1 + \bar{T}_n \mathbf{e}_3 \quad (11.107)$$

Le critère de plasticité est donc à nouveau atteint lorsque :

$$\Sigma_{13} - \bar{\Sigma}_{13} = 2Q\bar{T}_n = -\frac{4Q^2}{2 - \nu^s + 2Q^2} \bar{\Sigma}_{13} \quad \text{soit} \quad \Sigma_{13} = \frac{2 - \nu^s - 2Q^2}{2 - \nu^s + 2Q^2} \bar{\Sigma}_{13} \quad (11.108)$$

On peut ainsi simuler un trajet cyclique de charges et décharges. Sur la FIG. 11.8, on observe parallèlement la loi de comportement et l'état de contrainte de la fissure à travers une succession de phases élasto-plastiques et de phases élastiques. Chaque phase élasto-plastique contribue à augmenter la valeur absolue de la contrainte normale de compression s'appliquant sur la fissure ( $\sigma_{33}^f$  sur la FIG. 11.8(b)) et par conséquent à repousser le seuil de replastification.

Contrairement aux cas des fissures cohérentes ou frottantes non dilatantes, l'expérience

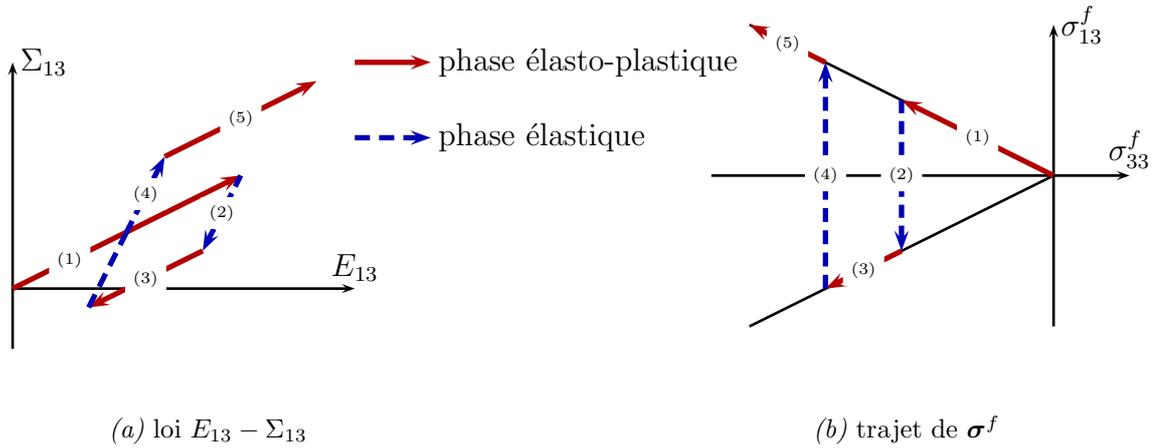


FIG. 11.8 – Cycle de cisaillement simple d'un V.E.R. à fissures frottantes dilatantes

de cisaillement simple n'est pas équivalente à celle de glissement simple i.e. pilotée par la déformation :

$$\mathbf{E}(t) = E_{13}(t) \boldsymbol{\tau}_1 = E_{13}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (11.109)$$

Dans ce cas, la saturation du critère étant également obtenue dès le début de l'expérience, le comportement (11.101) s'intègre en :

$$\begin{cases} \Sigma_{13} = 2\mu^s \left( 1 - \frac{\epsilon 16 (1 - 2\nu^s) (1 - \nu^s)}{\Gamma + \epsilon \Delta} \right) E_{13} & (a) \\ \Sigma_{33} = -2\mu^s \frac{\epsilon 32 Q (1 - \nu^s)^2}{\Gamma + \epsilon \Delta} E_{13} & (b) \end{cases} \quad (11.110)$$

$$\text{avec } \Gamma = 3 (1 - 2\nu^s) (2 - \nu^s + 2Q^2) \text{ et } \Delta = 16 (1 - \nu^s) (1 - 2\nu^s + 2Q^2 (1 - \nu^s))$$

Dans le cas de l'expérience de glissement simple, la dilatance se manifeste par une contrainte macroscopique  $\Sigma_{33}$  de compression (11.110 b) [8]. Signalons également que la raideur déduite de (11.110 a) est croissante avec  $Q$ . Celle-ci est donc supérieure à sa valeur en  $Q = 0$  qui coïncide avec la raideur obtenue dans le cas d'un milieu à fissures purement cohérentes ou frottantes non dilatantes sollicité par un glissement simple (11.64).

La technique d'homogénéisation basée sur le problème d'Eshelby que nous venons de mettre en œuvre nous a permis de traiter des milieux présentant des fissures frottantes non dilatantes ou à plasticité associée. L'extension de la méthode au cas intermédiaire où la cinématique des fissures se caractérise par un angle de dilatance quelconque est immédiate.

### 11.3 Propagation de fissures plastiques

On envisage dans la présente section de prendre en compte une éventuelle propagation des fissures plastiques. Le phénomène de propagation de fissures dissipatives ou non a déjà été étudié dans le cadre de la Mécanique de la Rupture ([22], [58], [1], [64]). Le recours à un schéma d'homogénéisation offre la possibilité de calculer, dans un cadre plus large en prenant notamment en compte les interactions, l'énergie macroscopique (dont dérive la force thermodynamique gouvernant la propagation) en fonction des caractéristiques microscopiques. Divers résultats ont déjà été obtenus dans le cas de fissures non dissipatives ([84], [39] et [37]). Nous nous proposons de traiter le cas de fissures dissipatives. La méthode de détermination du critère de propagation est ici fondée sur l'hypothèse que les fissures se propagent dans leur plan de manière isotrope i.e. elles restent modélisées par des interfaces circulaires et leur propagation est quantifiée par une augmentation de leur rayon ou du paramètre de densité de fissure correspondant. Cette approche présente des inconvénients :

- elle ne permet pas de définir un critère d'initiation de fissures; selles celles qui existent déjà peuvent se propager,
- elle n'offre pas la possibilité de rendre compte du phénomène de branchement.

Toutefois, s'il existe une distribution d'orientations de fissures assez riche, la direction privilégiée de branchement correspondra au plan de l'une des familles dont nous saurons prédire la propagation le long de ce plan. Ceci rend la modélisation plus réaliste mais la simplicité de sa mise en œuvre incite dans un premier temps à la confronter au cas d'une seule famille de fissures alignées qui demeurent fermées et adhérentes dans le régime élastique.

### 11.3.1 Critère de propagation

La propagation de fissures est un phénomène irréversible. Or une évolution irréversible du v.e.r. doit satisfaire l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$D = \Sigma : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (11.111)$$

L'expression et les arguments de l'énergie libre macroscopique ont été obtenus en (11.31). Le paramètre de densité de fissure  $\epsilon$  est ici une variable interne susceptible d'évoluer. En rappelant la loi de comportement (11.13)-(11.14), la dissipation s'écrit :

$$D = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{pl}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (11.112)$$

Étant donné que le terme plastique de la dissipation correspond à du frottement au niveau des lèvres des fissures tandis que la propagation s'explique plutôt par des concentrations de contrainte en pointe de fissure, on suppose classiquement que les contributions de  $\dot{\mathbf{E}}^{pl}$  et de  $\dot{\epsilon}$  sont découplées, ce qui implique :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{pl}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} \geq 0 \quad ; \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (11.113)$$

La force thermodynamique associée à la variable  $\mathbf{E}^{pl}$  a déjà été évoquée au paragraphe 11.1.3 dans la relation (11.32) : c'est l'état de contrainte au niveau de la fissure.

La force thermodynamique associée à la variable  $\epsilon$  s'écrit en exploitant (11.31) :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = \frac{3}{8\pi\epsilon^2} \mathbf{E}^{pl} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}^{pl} \quad (11.114)$$

Cette force s'interprète comme un taux de restitution de l'énergie associé à la propagation de fissure. Conformément à un résultat montré dans le cadre de la Mécanique de la Rupture dans [1], on note également ici que  $\epsilon$  n'intervient que dans le terme d'énergie bloquée dans (11.31), ce qui implique que  $\mathcal{F}$  correspond à un taux de restitution de l'énergie bloquée i.e. stockée dans l'état relâché.

Il apparaît sur (11.114) un couplage entre la plasticité et l'endommagement puisque la force thermodynamique associée à l'endommagement dépend de la déformation plastique. On observe sur (11.98) que  $(\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger$  représente une forme quadratique positive et

même définie si on la restreint au sous-espace engendré par  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  auquel  $\mathbf{E}^{pl}$  appartient. On a donc :

$$\forall \mathbf{E}^{pl} \neq \mathbf{0} \quad \mathcal{F}(\mathbf{E}^{pl}, \epsilon) > 0 \quad (11.115)$$

La positivité de  $\mathcal{F}$  et celle de la dissipation (11.113) impliquent que la modification des fissures ne peut aller que dans le sens d'une augmentation du rayon de celles-ci i.e.  $\dot{\epsilon} \geq 0$ . En rappelant (11.28),  $\mathcal{F}$  peut également s'exprimer en fonction de l'état de déformation ou de contrainte résiduel au niveau de la fissure :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{3} \boldsymbol{\eta} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \boldsymbol{\eta} \quad (11.116)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}^{fR} : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^{fR} \quad (11.117)$$

$$= \frac{2\pi}{3} (\boldsymbol{\sigma}^f - \boldsymbol{\Sigma}) : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : (\boldsymbol{\sigma}^f - \boldsymbol{\Sigma}) \quad (11.118)$$

L'expression (11.117) montre que la force thermodynamique associée au phénomène de propagation n'est contrôlée que par l'état de contrainte résiduel au niveau de la fissure. En s'inspirant d'une méthode classique de Mécanique de la Rupture, on introduit le critère de propagation suivant :

$$h(\mathcal{F}) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_o \quad (11.119)$$

Un tel critère est comparable à un critère de plasticité parfaite puisqu'il ne dépend que de la force thermodynamique  $\mathcal{F}$ . La propagation est donc régie par le critère suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{F} < \mathcal{F}_o \text{ ou } (\mathcal{F} = \mathcal{F}_o \text{ et } \dot{\mathcal{F}} < 0) \Rightarrow \dot{\epsilon} = 0 \\ \mathcal{F} = \mathcal{F}_o \text{ et } \dot{\mathcal{F}} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0 \end{cases} \quad (11.120)$$

Il est important de souligner que d'après (11.114), la propagation de fissures ne peut être initiée que lorsque le v.e.r. a déjà subi une phase plastique i.e.  $\mathbf{E}^{pl} \neq \mathbf{0}$ . De plus cette propagation s'accompagne nécessairement d'une charge plastique. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait  $\dot{\mathbf{E}}^{pl} = \mathbf{0}$  et  $\dot{\epsilon} > 0$ , autrement dit, d'après (11.114),  $\dot{\mathcal{F}} < 0$ , contredisant ainsi l'hypothèse de propagation.

Partant d'un paramètre initial  $\epsilon = \epsilon_o$ , le critère de propagation est atteint pour une valeur  $\mathbf{E}_o^{pl}$  de  $\mathbf{E}^{pl}$  telle que :

$$\mathcal{F}_o = \frac{3}{8\pi\epsilon_o^2} \mathbf{E}_o^{pl} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}_o^{pl} \quad (11.121)$$

Puis à tout instant où la propagation est active, la saturation du critère  $h$  (11.119) impose la liaison suivante entre  $\epsilon$  et  $\mathbf{E}^{pl}$  :

$$\mathcal{F}_o = \frac{3}{8\pi\epsilon^2} \mathbf{E}^{pl} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}^{pl} \quad (11.122)$$

On note, en rapprochant (11.31) et (11.122), qu'au cours de la propagation le terme d'énergie bloquée croît linéairement avec  $\epsilon$  :

$$\mathcal{R}(\mathbf{E}^{pl}, \epsilon) = \frac{3}{8\pi\epsilon} \mathbf{E}^{pl} : (\mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1})^\dagger : \mathbf{E}^{pl} = \mathcal{F}_o \epsilon \quad (11.123)$$

D'après (11.117), on déduit aussi que le critère de propagation correspond, dans l'ensemble des champs de contrainte résiduels  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}$ , au domaine d'équation :

$$\mathcal{F}_o = \frac{2\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}^{fR} : \mathbb{T}_s : \mathbf{c}^{s-1} : \boldsymbol{\sigma}^{fR} \quad (11.124)$$

En utilisant (11.45), il apparaît que ce domaine restreint au sous-espace engendré par  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  (les autres composantes de  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}$  ou de  $\boldsymbol{\sigma}^f$  ne jouant aucun rôle) correspond à un ellipsoïde de révolution d'axe  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ .

Examinons maintenant l'impact de la propagation sur le comportement du V.E.R. dans le cas des différents types de fissures déjà étudiés.

### 11.3.2 Fissures purement cohérentes

On a démontré en (11.51) que la composante suivant  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$  de  $\boldsymbol{\sigma}^f$  valait en permanence  $\Sigma_{33}$  (en phase élastique aussi bien qu'élasto-plastique). Ainsi les seules composantes de  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}$  qui vont jouer un rôle à la fois comme variables d'écoulement cinématique dans (11.33) et comme variables responsables de la propagation dans (11.124) sont les composantes selon  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  i.e.  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}_{13}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{fR}_{23}$ .

Dans le plan engendré par  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$ , d'une part le critère d'élasto-plasticité tridimensionnel relatif à (11.37) correspond à un domaine circulaire de rayon  $T_o$  et d'autre part le critère de propagation (11.124) correspond à un cercle centré à l'origine de rayon :

$$R_o = \sqrt{\frac{3}{8} \mu^s \frac{2 - \nu^s}{1 - \nu^s} \mathcal{F}_o} \quad (11.125)$$

Partant d'un domaine d'élasticité initial centré à l'origine, le régime élasto-plastique du V.E.R. va provoquer une translation du domaine centré à l'instant actuel en  $-\boldsymbol{\sigma}^{fR}$  (écrouissage cinématique mis en évidence en (11.33)) jusqu'à ce que ce centre rencontre éventuellement le cercle de rayon  $R_o$  (11.125). Si cela se produit, les fissures peuvent se propager selon la règle (11.120). On en conclut aisément l'existence d'une charge limite dans ce plan ; en effet,  $(\Sigma_{13}, \Sigma_{23})$  appartient nécessairement au disque de rayon  $T_o + R_o$  (cf. FIG. 11.9).

Imaginons devoir interpréter les résultats d'une expérience de cisaillement simple (11.61) d'un milieu présentant des fissures cohérentes sans connaître a priori l'existence de cette fissuration. Après la phase élastique, la phase de charge plastique (cf. FIG. 11.5) s'interrompt lorsque le critère de propagation est atteint. Ceci se produit donc lorsque  $\Sigma_{13}$

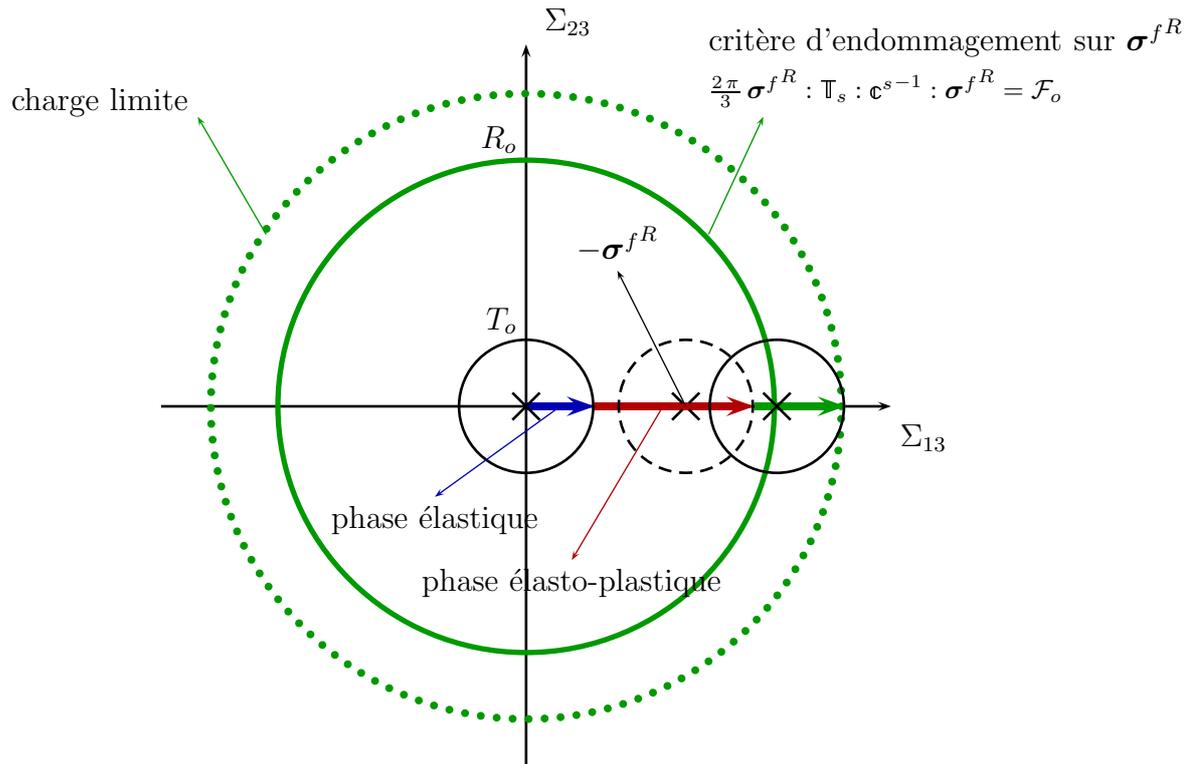


FIG. 11.9 – Critères de plasticité et d'endommagement d'un matériau à fissures purement cohérentes

atteint la valeur de  $T_o + R_o$  (cf. FIG. 11.9). Il est alors possible de continuer à déformer le système  $\dot{E}_{13} > 0$  à charge constante, ce qui peut s'interpréter macroscopiquement comme un mécanisme d'écoulement plastique libre (cf. FIG. 11.10) alors que la nature réelle du mécanisme mis en jeu implique de façon essentielle la propagation des fissures. Cette phase pendant laquelle la charge reste constante s'accompagne d'une propagation des fissures  $\dot{\epsilon} > 0$  mais l'endommagement n'est pas perceptible par une simple décharge élastique car, les fissures étant fermées adhérentes, la décharge correspond au comportement du matériau sain. Pour ne pas commettre l'erreur d'interpréter l'expérience en invoquant seulement un comportement élasto-plastique, il faut pouvoir mettre en évidence un effet macroscopique propre de l'endommagement afin de le distinguer du comportement élasto-plastique. Par exemple, on peut soit continuer la décharge jusqu'à atteindre à nouveau une phase élasto-plastique avec écrouissage, soit procéder à une ouverture des fissures (en appliquant  $\Sigma_{33} > 0$ ) avant la décharge. En effet, dans les deux cas, la raideur tangente (11.60) ou (10.24) dépend de  $\epsilon$  et sera donc sensible à une augmentation de ce paramètre par rapport à sa valeur initiale c'est-à-dire à l'endommagement du matériau.

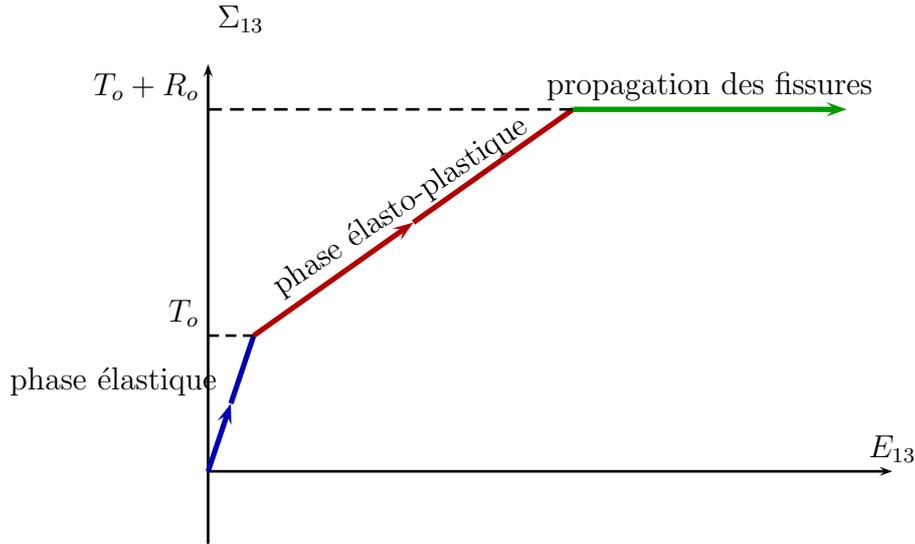


FIG. 11.10 – Cisaillement simple et endommagement d'un v.e.r. à fissures purement cohérentes

### 11.3.3 Fissures frottantes non dilatantes

Dans le cas où l'on s'intéresse à un processus de chargement en deux phases identique à celui évoqué à la fin du paragraphe 11.2.2 (compression simple (11.84) puis cisaillement), il est facile de voir que le traitement d'un v.e.r. à fissures frottantes non dilatantes est parfaitement similaire à celui exposé précédemment (cf. § 11.3.2) en posant toujours la relation (11.86).

Considérons maintenant un trajet de chargement quelconque assurant le caractère fermé des fissures ( $\Sigma_{33} \leq 0$ ) et n'entraînant aucune rotation du vecteur-contrainte sur la fissure (par exemple tel que  $\Sigma_{23} = 0$ ). Le domaine d'élasticité initial ainsi que le critère d'endommagement sont représentés dans le plan  $(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \boldsymbol{\tau}_1)$  sur la FIG. 11.11. La contrainte normale  $T_n$  sur la fissure vaut constamment  $\Sigma_{33}$  d'après (11.80). Au cours d'une phase de charge plastique, les composantes de l'état de contrainte des fissures sont alors données par (11.74). Fixons par exemple  $\dot{\Sigma}_{13} > 0$  de sorte que l'on ait  $\boldsymbol{\tau}_r = \boldsymbol{\tau}_1$ . On en déduit donc les composantes efficaces (i.e. régissant l'écroûissage ou l'endommagement) de l'état de contrainte résiduel :

$$\sigma_{33}^{fR} = 0 \quad ; \quad \sigma_{13}^{fR} = -(Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13}) \quad (11.126)$$

Comme on a supposé  $\dot{\Sigma}_{13} > 0$ , il est clair sur la FIG. 11.11 que pour que le système reste en charge plastique après la première plastification (atteinte pour  $\Sigma_{13} = -Q \Sigma_{33}$ ), il faut que  $Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13}$  soit croissant et donc positif. Il apparaît sur (11.126) que  $-\boldsymbol{\sigma}^{fR}$  qui désigne, en tant que paramètre d'écroûissage cinématique, le sommet du cône d'élasticité actuel est dirigé suivant  $\boldsymbol{\tau}_1$  (axe vertical de la FIG. 11.11). Le cône actuel a donc subi une

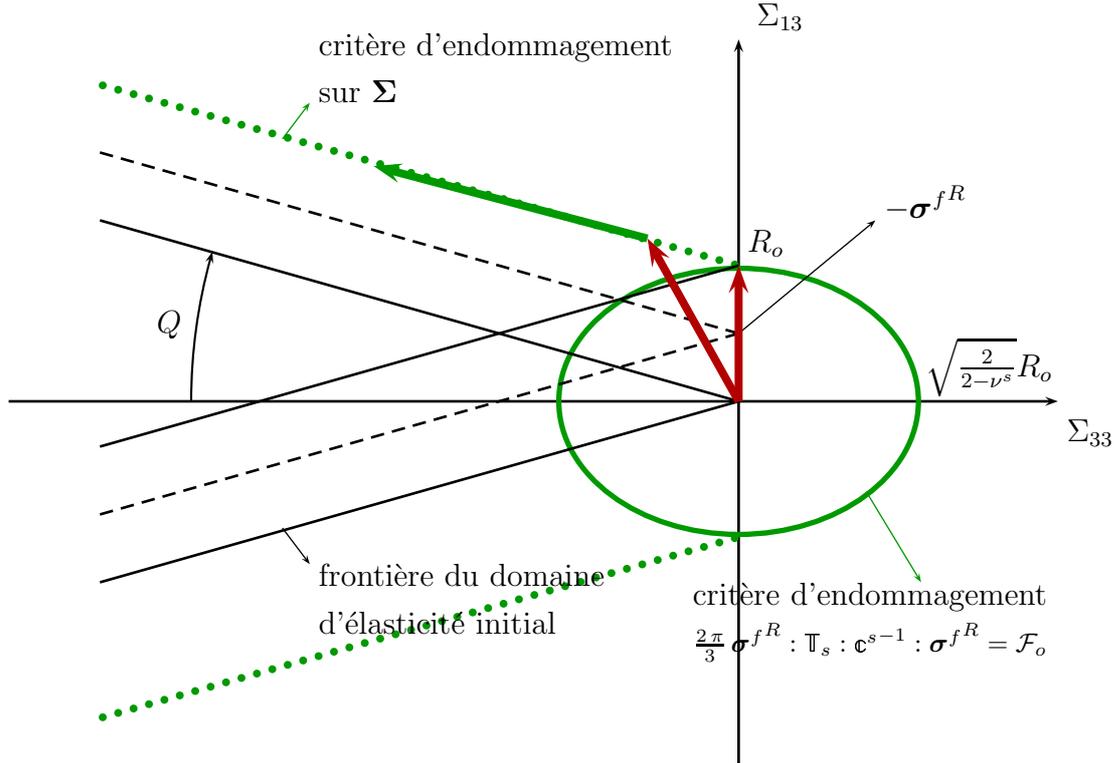


FIG. 11.11 – Critères de plasticité et d'endommagement d'un matériau à fissures frottantes non dilatantes

translation parallèle à  $\tau_1$ . De plus, le critère de propagation des fissures est contrôlé par  $\sigma^{fR}$  via (11.124), ce qui revient à écrire le critère suivant sur  $\Sigma$  (cf. FIG. 11.11) :

$$Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13} = R_o \quad (11.127)$$

où  $R_o$  est donné par (11.125). Si le chargement du v.e.r. est piloté en contraintes selon un trajet radial ( $\Sigma_{13}/\Sigma_{33} = cste$ ), il est clair que, lorsque le critère de propagation (11.127) est atteint,  $\Sigma$  ne peut plus évoluer et le comportement s'apparente à nouveau abusivement, comme sur la FIG. 11.10, à un écoulement plastique libre. En revanche, si le chargement  $\Sigma$  se situe à tout instant sur la branche d'équation (11.127),  $\Sigma$  peut continuer à évoluer avec  $\dot{\Sigma}_{13} = -Q\dot{\Sigma}_{33}$  ; c'est ce qui peut se produire si l'expérience est pilotée en déformation. En effet, on déduit d'abord de (11.28) et (11.126) les composantes de  $\mathbf{E}^{pl}$  :

$$E_{33}^{pl} = 0 \quad ; \quad E_{13}^{pl} = \epsilon \frac{8}{3\mu^s} \frac{1-\nu^s}{2-\nu^s} (Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13}) \quad (11.128)$$

La déformation élastique s'écrit quant à elle  $\mathbf{E}^{el} = \mathbf{c}^{s-1} : \Sigma$  dont on déduit les composantes suivantes dans le cas de déformations longitudinales nulles dans les directions 1 et 2 :

$$E_{33}^{el} = \frac{1}{2\mu^s} \frac{1-2\nu^s}{1-\nu^s} \Sigma_{33} \quad ; \quad E_{13}^{el} = \frac{1}{2\mu^s} \Sigma_{13} \quad (11.129)$$

La déformation totale obtenue en sommant les contributions de (11.128) et (11.129) s'écrit dans la situation où le critère de propagation (11.127) est atteint :

$$E_{33} = \frac{1}{2\mu^s} \frac{1-2\nu^s}{1-\nu^s} \Sigma_{33} \quad ; \quad E_{13} = \frac{1}{2\mu^s} \left( \Sigma_{13} + \epsilon \frac{16}{3} \frac{1-\nu^s}{2-\nu^s} R_o \right) \quad (11.130)$$

En supposant que la propagation soit active, on exploite (11.130) ainsi que la liaison  $\dot{\Sigma}_{13} = -Q\dot{\Sigma}_{33}$  pour déduire :

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{3}{8} \mu^s \frac{2-\nu^s}{1-\nu^s} \frac{1}{\mathcal{F}_o}} \left( Q \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s} \dot{E}_{33} + \dot{E}_{13} \right) \quad (11.131)$$

L'hypothèse de propagation n'est vérifiée que si l'on envisage un trajet  $(\dot{E}_{33}, \dot{E}_{13})$  tel que  $\dot{\epsilon}$  (11.131) soit positif c'est-à-dire si :

$$Q \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s} \dot{E}_{33} + \dot{E}_{13} \geq 0 \quad (11.132)$$

La relation (11.131) régit alors l'endommagement tandis que la contrainte macroscopique  $\Sigma$  évolue en fonction de  $\dot{E}_{33}$  :

$$\dot{\Sigma}_{13} = -Q\dot{\Sigma}_{33} = -2\mu^s Q \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s} \dot{E}_{33} \quad (\geq 0) \quad (11.133)$$

### 11.3.4 Fissures frottantes dilatantes

Étudions maintenant l'impact de la propagation sur le comportement de matériaux à fissures frottantes dilatantes. Considérons, comme dans le paragraphe précédent, un trajet de chargement en contrainte  $\Sigma$  tel que les fissures restent fermées ( $T_n \leq 0$ ) et tel que  $\Sigma_{23} = 0$ . On suppose également que l'on impose  $\dot{\Sigma}_{13} > 0$  et que la plasticité se produit dès le début du processus soit  $\Sigma_{13} > -Q\Sigma_{33} \geq 0$ . En vertu de l'équation (11.96), la projection de l'état de contrainte au niveau de la fissure  $\sigma^f$  (11.94) sur le sous-espace engendré par  $e_3 \otimes e_3$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  s'écrit :

$$\mathbb{L} : \sigma^f = \frac{(e_3 \otimes e_3 - Q\tau_1) \otimes ((2-\nu^s)e_3 \otimes e_3 - Q\tau_1)}{2-\nu^s + 2Q^2} : \Sigma \quad (11.134)$$

On en déduit donc les composantes utiles de l'état de contrainte résiduel  $\sigma^{fR}$  :

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{fR} = -\frac{2Q}{2-\nu^s + 2Q^2} (Q\Sigma_{33} + \Sigma_{13}) \\ \sigma_{13}^{fR} = -\frac{2-\nu^s}{2-\nu^s + 2Q^2} (Q\Sigma_{33} + \Sigma_{13}) \end{cases} \quad (11.135)$$

En plus de son appartenance à l'intérieur de l'ellipse d'endommagement d'équation (11.124), le sommet du critère actuel se trouve donc sur la demi-droite d'équation (cf. FIG. 11.12) :

$$-\sigma_{13}^{fR} = \frac{2-\nu^s}{2Q} \left( -\sigma_{33}^{fR} \right) \quad , \quad -\sigma_{13}^{fR} \geq 0 \quad (11.136)$$

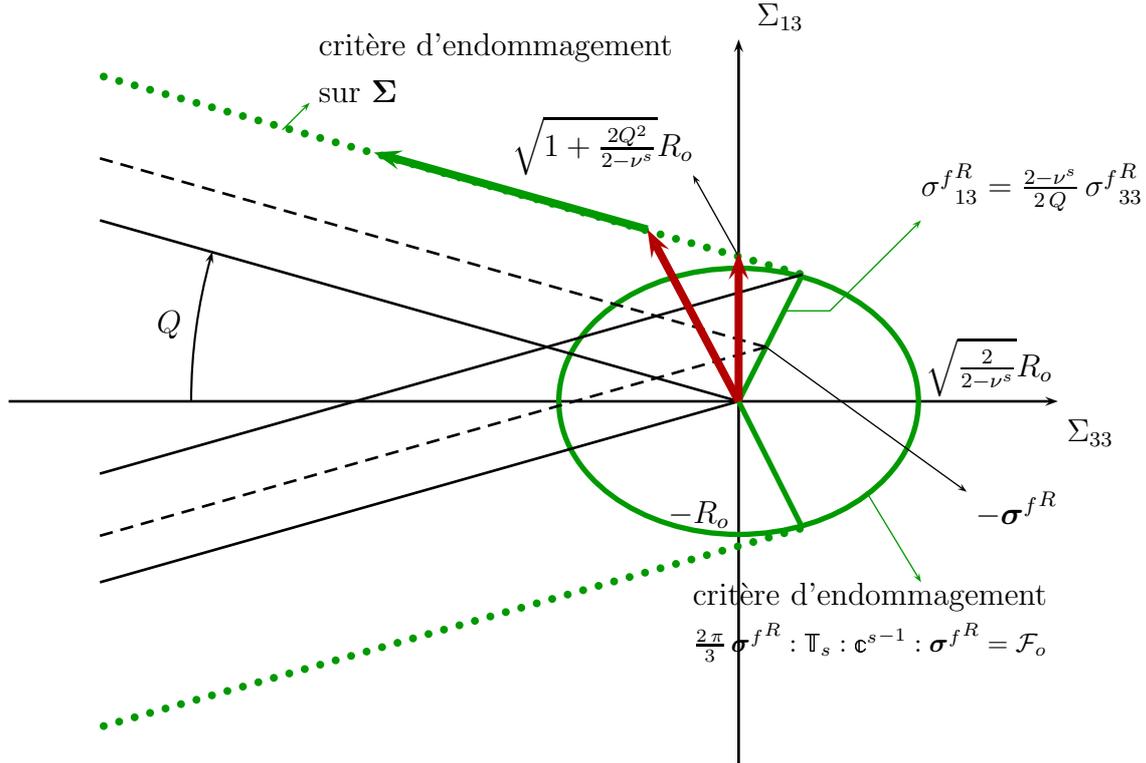


FIG. 11.12 – Critères de plasticité et d'endommagement d'un matériau à fissures frottantes dilatantes

L'exploitation des relations (11.136) dans le critère d'endommagement (11.124) fournit un critère portant sur  $\Sigma$  :

$$Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13} = \sqrt{1 + \frac{2Q^2}{2 - \nu^s}} R_o \quad (11.137)$$

où  $R_o$  est donné par (11.125). On déduit donc de ce critère les mêmes conclusions que dans le cas non dilatant. D'une part, un trajet radial en contraintes ( $\Sigma_{13}/\Sigma_{33} = cste$ ) conduit nécessairement à une limitation de  $\Sigma$  qui ne peut plus évoluer dès lors que le critère d'endommagement est atteint et le comportement s'apparente à nouveau abusivement, comme sur la FIG. 11.10, à un écoulement plastique libre (c'est par exemple le cas lors d'une expérience de cisaillement simple). D'autre part, si le chargement  $\Sigma$  se situe à tout instant sur la branche d'équation (11.127),  $\Sigma$  peut continuer à évoluer avec  $\dot{\Sigma}_{13} = -Q\dot{\Sigma}_{33}$  ; c'est ce qui peut se produire si l'expérience est pilotée en déformation. En effet, on déduit d'abord de (11.28) et (11.135) les composantes de  $\mathbf{E}^{pl}$  :

$$\begin{cases} E_{33}^{pl} = \epsilon \frac{16}{3\mu^s} Q \frac{1 - \nu^s}{2 - \nu^s + 2Q^2} (Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13}) \\ E_{13}^{pl} = \epsilon \frac{8}{3\mu^s} \frac{1 - \nu^s}{2 - \nu^s + 2Q^2} (Q \Sigma_{33} + \Sigma_{13}) \end{cases} \quad (11.138)$$

En supposant les déformations longitudinales nulles dans les directions 1 et 2, la déformation élastique s'écrit comme en (11.129), ce qui, avec (11.138), fournit les composantes de la déformation totale dans la situation où le critère de propagation (11.137) est atteint :

$$\begin{cases} E_{33} &= \frac{1}{2\mu^s} \left( \frac{1-2\nu^s}{1-\nu^s} \Sigma_{33} + \epsilon \frac{32}{3} Q \frac{1-\nu^s}{\sqrt{(2-\nu^s+2Q^2)(2-\nu^s)}} R_o \right) \\ E_{13} &= \frac{1}{2\mu^s} \left( \Sigma_{13} + \epsilon \frac{16}{3} \frac{1-\nu^s}{\sqrt{(2-\nu^s+2Q^2)(2-\nu^s)}} R_o \right) \end{cases} \quad (11.139)$$

À l'aide du système (11.139) et du critère (11.137), il est possible de déterminer le comportement macroscopique à tout instant i.e.  $(\Sigma_{33}, \Sigma_{13})$  ainsi que  $\epsilon$  en fonction de  $(E_{33}, E_{13})$ . Pourvu que le résultat demeure cohérent avec le critère de propagation (11.120) et notamment la positivité de  $\dot{\epsilon}$ , on montre :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1-2\nu^s}{1-2\nu^s+2Q^2(1-\nu^s)} \sqrt{\frac{3}{8} \mu^s \frac{2-\nu^s+2Q^2}{1-\nu^s} \frac{1}{\mathcal{F}_o}} \left( Q \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s} \dot{E}_{33} + \dot{E}_{13} \right) \quad (11.140)$$

et

$$\dot{\Sigma}_{13} = -Q \dot{\Sigma}_{33} = -2\mu^s Q \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s+2Q^2(1-\nu^s)} \left( \dot{E}_{33} - 2Q \dot{E}_{13} \right) \quad (11.141)$$

On note que la positivité de  $\dot{\epsilon}$  est soumise à la même condition que dans le cas non dilatant i.e. (11.132). En revanche, contrairement à (11.133) l'évolution de  $\Sigma$  dépend ici de  $\dot{E}_{13}$ . Considérons une expérience de glissement simple :

$$\mathbf{E}(t) = E_{13}(t) \boldsymbol{\tau}_1 = E_{13}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \quad \text{avec} \quad E_{13}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{E}_{13}(t) > 0 \quad (11.142)$$

Le résultat (11.141) indique que, lors d'une telle expérience,  $\Sigma_{13}$  peut continuer de croître même pendant la phase d'endommagement. Ceci dévoile un effet de la dilatance puisque ce résultat est mis en défaut dans le cas des fissures non dilatantes pour lesquels l'évolution de  $\Sigma$  n'est régie que par  $\dot{E}_{33}$  (11.133). La FIG. 11.13 représente à titre comparatif les lois  $\Sigma_{13}(E_{13})$  pour le chargement de glissement simple (11.142) dans les cas de fissures frottantes dilatantes et non dilatantes. Seul le cas dilatant fait apparaître une augmentation de  $\Sigma_{13}$  dans la phase de propagation alors que pour l'expérience de cisaillement simple (11.61), la contrainte est stationnaire pour les deux types de fissures.

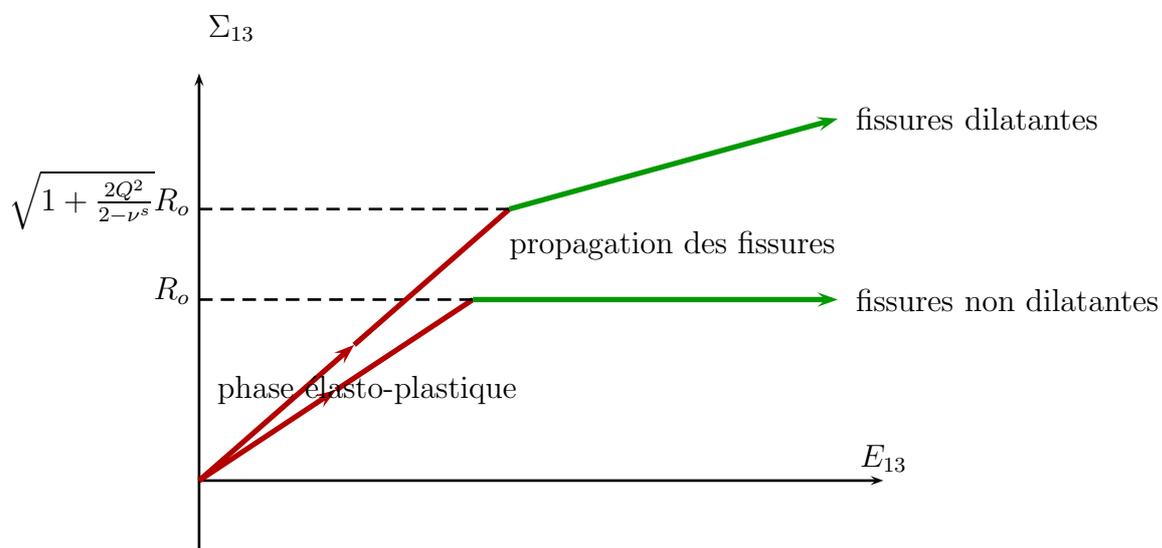


FIG. 11.13 – Glissement simple d'un v.e.r. à fissures frottantes dilatantes ou non

# Chapitre 12

## Annexes

### Sommaire

---

<b>12.1 Convention de Voigt . . . . .</b>	<b>247</b>
<b>12.2 Quelques tenseurs utiles pour l'étude des fissures . . . . .</b>	<b>247</b>
<b>12.3 Propriétés du tenseur de localisation des fissures ouvertes . .</b>	<b>250</b>

---



## 12.1 Convention de Voigt

Soit  $\mathbb{A}$  un tenseur d'ordre 4 décomposé sur la base canonique :

$$\mathbb{A} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (12.1)$$

Si  $\mathbb{A}$  est un opérateur agissant sur les tenseurs d'ordre 2, ses composantes satisfont les symétries :

$$A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{ijkl} \quad (12.2)$$

Seules 36 composantes sont alors indépendantes et l'espace vectoriel constitué de tels tenseurs est isomorphe à l'espace des matrices de  $\mathbb{R}^6$ . On adopte la convention suivante pour représenter matriciellement  $\mathbb{A}$  :

$$\mathbb{A} \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} A_{1,1,1,1} & A_{1,1,2,2} & A_{1,1,3,3} & \sqrt{2}A_{1,1,2,3} & \sqrt{2}A_{1,1,3,1} & \sqrt{2}A_{1,1,1,2} \\ A_{2,2,1,1} & A_{2,2,2,2} & A_{2,2,3,3} & \sqrt{2}A_{2,2,2,3} & \sqrt{2}A_{2,2,3,1} & \sqrt{2}A_{2,2,1,2} \\ A_{3,3,1,1} & A_{3,3,2,2} & A_{3,3,3,3} & \sqrt{2}A_{3,3,2,3} & \sqrt{2}A_{3,3,3,1} & \sqrt{2}A_{3,3,1,2} \\ \hline \sqrt{2}A_{2,3,1,1} & \sqrt{2}A_{2,3,2,2} & \sqrt{2}A_{2,3,3,3} & 2A_{2,3,2,3} & 2A_{2,3,3,1} & 2A_{2,3,1,2} \\ \sqrt{2}A_{3,1,1,1} & \sqrt{2}A_{3,1,2,2} & \sqrt{2}A_{3,1,3,3} & 2A_{3,1,2,3} & 2A_{3,1,3,1} & 2A_{3,1,1,2} \\ \sqrt{2}A_{1,2,1,1} & \sqrt{2}A_{1,2,2,2} & \sqrt{2}A_{1,2,3,3} & 2A_{1,2,2,3} & 2A_{1,2,3,1} & 2A_{1,2,1,2} \end{array} \right] \quad (12.3)$$

## 12.2 Quelques tenseurs utiles pour l'étude des fissures

Dans ce paragraphe, on représente sous la convention de Voigt des tenseurs définis dans la partie **IV** caractérisés ici au cas où le milieu de référence dans lequel est plongée la fissure est isotrope ( $\mathbf{c}^o = 3k^o \mathbb{J} + 2\mu^o \mathbb{K}$ ).

- Tenseur  $\mathbb{T}_o(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{e}_3))^{-1}$

$$\mathbb{T}_o(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.4)$$

avec  $\alpha = \frac{4}{\pi} \frac{\nu^o (1 - \nu^o)}{1 - 2\nu^o}$   $\beta = \frac{4}{\pi} \frac{(1 - \nu^o)^2}{1 - 2\nu^o}$   $\gamma = \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o}$

La moyenne de  $\mathbb{T}_o$  lorsque  $\mathbf{n}$  parcourt la sphère unité vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_o &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathbb{T}_o(\mathbf{n}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{4}{3\pi} \frac{1 - \nu^{o2}}{1 - 2\nu^o} \mathbb{J} + \frac{8}{15\pi} \frac{(1 - \nu^o)(5 - \nu^o)}{2 - \nu^o} \mathbb{K} \end{aligned} \quad (12.5)$$

- Tenseur  $\mathbb{T}_o^\epsilon(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - (1 - \frac{4}{3}\pi\epsilon\omega) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{e}_3))^{-1}$

$$\mathbb{T}_o^\epsilon(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.6)$$

$$\alpha = \frac{4}{\pi} \frac{\nu^o (1 - \nu^o)}{1 - 2\nu^o + \frac{16}{3}\epsilon (1 - \nu^o)^2} \quad \beta = \frac{4}{\pi} \frac{(1 - \nu^o)^2}{1 - 2\nu^o + \frac{16}{3}\epsilon (1 - \nu^o)^2}$$

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o + \frac{16}{3}\epsilon (1 - \nu^o)}$$

- Tenseur  $\mathbb{T}'_o(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{e}_3) : \mathbb{K})^{-1}$

$$\mathbb{T}'_o(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.7)$$

La moyenne de  $\mathbb{T}'_o$  lorsque  $\mathbf{n}$  parcourt la sphère unité vaut :

$$\mathbb{Q}'_o = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathbb{T}'_o(\mathbf{n}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{8}{5\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o} \mathbb{K} \quad (12.8)$$

- Tenseur  $\mathbb{T}_o^{\epsilon'}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - (1 - \frac{4}{3}\pi\epsilon\omega) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{e}_3) : \mathbb{K})^{-1}$

$$\mathbb{T}_o^{\epsilon'}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o + \frac{16}{3}\epsilon(1 - \nu^o)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o + \frac{16}{3}\epsilon(1 - \nu^o)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.9)$$

- Tenseur  $\mathbb{P}_o(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbb{P}_o(\omega, \mathbf{e}_3)$

$$\mathbb{P}_o(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\mu^o} \frac{1 - 2\nu^o}{1 - \nu^o} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu^o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu^o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.10)$$

## 12.3 Propriétés du tenseur de localisation des fissures ouvertes

Montrons les propriétés suivantes :

$$\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbb{P}_o = \mathbb{T}_o^\epsilon : \mathfrak{c}^{o-1} \quad (12.11)$$

$$\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbb{P}_o \text{ est symétrique} \quad (12.12)$$

et en particulier, en prenant  $\epsilon = 0$  :

$$\mathbb{T}_o : \mathbb{P}_o = \mathbb{T}_o : \mathfrak{c}^{o-1} \quad (12.13)$$

$$\mathbb{T}_o : \mathbb{P}_o \text{ est symétrique} \quad (12.14)$$

• *Preuve de (12.11)*

En utilisant

$$\mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) = \mathbb{P}_o(\omega, \mathbf{n}) : \mathfrak{c}^o \quad (12.15)$$

il vient successivement :

$$\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbb{P}_o = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{1} - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) \right)^{-1} : \mathbb{P}_o(\omega, \mathbf{n}) \quad (12.16)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{1} - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) \right)^{-1} : \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) : \mathfrak{c}^{o-1} \quad (12.17)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{1 - \frac{4}{3} \pi \omega} \left( -\mathbb{1} + \left( \mathbb{1} - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) \right)^{-1} \right) : \mathfrak{c}^{o-1} \quad (12.18)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{1} - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) \right)^{-1} : \mathfrak{c}^{o-1} \quad (12.19)$$

$$= \mathbb{T}_o^\epsilon : \mathfrak{c}^{o-1} \quad (12.20)$$

• *Preuve de (12.12)*

On écrit successivement :

$$\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbb{P}_o = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{1} - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathbb{S}_o(\omega, \mathbf{n}) \right)^{-1} : \mathbb{P}_o(\omega, \mathbf{n}) \quad (12.21)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \left( \mathbb{P}_o^{-1}(\omega, \mathbf{n}) - \left(1 - \frac{4}{3} \pi \epsilon \omega\right) \mathfrak{c}^o \right)^{-1} \quad (12.22)$$

Le tenseur dont on calcule la limite dans (12.22) est symétrique car  $\mathbb{P}_o$  et  $\mathfrak{c}^o$  le sont. Or l'ensemble des tenseurs symétriques est un fermé donc  $\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbb{P}_o$  est symétrique.

Dans le cas où  $\mathbf{c}^o$  est isotrope, on déduit de (12.6) et (12.10) l'expression suivante pour  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  :

$$\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbb{P}_o = \mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1} \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.23)$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu^o} \frac{(1 - \nu^o)(1 - 2\nu^o)}{1 - 2\nu^o + \frac{16}{3}\epsilon(1 - \nu^o)^2} \quad \beta = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu^o} \frac{1 - \nu^o}{2 - \nu^o + \frac{16}{3}\epsilon(1 - \nu^o)}$$

On introduit également une “pseudo-inverse” de  $\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1}$  notée  $(\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1})^\dagger$  et s'écrivant avec les mêmes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$(\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1})^\dagger \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.24)$$

Le tenseur  $\mathbb{L} = (\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1})^\dagger : \mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1} = \mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1} : (\mathbb{T}_o^\epsilon : \mathbf{c}^{o-1})^\dagger$  désigne donc le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 symétriques engendré par  $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1$  et  $\boldsymbol{\tau}_2$  (définis en (11.29)) :

$$\mathbb{L} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \otimes \boldsymbol{\tau}_2) \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.25)$$



# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES



L'objectif du travail présenté dans ce mémoire consistait essentiellement à déterminer certaines propriétés macroscopiques non linéaires des géomatériaux à partir d'informations disponibles à l'échelle inférieure en exploitant et adaptant les outils de la micromécanique. Les non linéarités que nous avons traitées sont d'origine physique, c'est-à-dire qu'elles sont dues aux propriétés non linéaires des constituants eux-mêmes, et concernent des phénomènes irréversibles (en l'occurrence la plasticité). Les géomatériaux font l'objet d'autres types de non linéarités. Citons par exemple les non linéarités géométriques liées au phénomène d'ouverture ou de refermeture de fissures [33] ou encore les non linéarités à la fois géométriques et physiques dues aux transformations finies [32].

Dans ce travail, nous nous sommes basés sur des idées et des outils d'homogénéisation linéaire et non linéaire disponibles dans la littérature et nous les avons adaptés afin de rendre compte des effets de frottement et de dilatance qui sont souvent primordiaux dans les géomatériaux.

Dans la **partie I**, nous avons rappelé quelques outils fondamentaux du changement d'échelle en milieu aléatoire et quelques résultats d'homogénéisation linéaire en les adaptant éventuellement en vue d'une utilisation dans les parties suivantes. Nous avons notamment revisité les schémas classiques d'homogénéisation basés sur le problème d'Eshelby [44] en incorporant un type d'inclusion présentant une interface lisse dans le but de modéliser les défauts d'adhérence d'inclusions dans les géomatériaux et de quantifier leur impact sur les propriétés macroscopiques.

Nous nous sommes ensuite attachés dans la **partie II** à fournir une méthode de détermination du critère de résistance macroscopique d'un géomatériau. En nous ramenant à un problème visqueux, il est apparu que ce critère pouvait être estimé par des techniques d'homogénéisation non linéaire. Nous avons également montré qu'une technique basée sur un comportement microscopique non linéaire fictif judicieusement choisi était en mesure de conduire à une estimation des états limites dans le cas où la matrice du géomatériau avait un comportement plastique non associé. Ces méthodes ont été appliquées au cas d'une matrice de von Mises pour laquelle on retrouve des résultats classiques mais elles ont surtout été mises en œuvre dans le cadre nouveau d'une matrice frottante de Drucker-Prager. Nous avons notamment construit le critère macroscopique correspondant à un v.E.R. poreux sur lequel nous avons constaté que la règle d'écoulement de la matrice (plasticité associée ou non) avait peu d'impact. En revanche, s'agissant d'un v.E.R. renforcé, la règle d'écoulement de la matrice jouait un rôle capital. De plus, nous avons mis en évidence l'influence de la nature de l'interface entre les renforts et la matrice d'un tel v.E.R..

Bien que très efficace car aboutissant à des résultats analytiques, la méthode d'homogénéisation

non linéaire de type sécante basée sur la notion de déformation de référence présente des inconvénients liés au fait qu'elle traite la non linéarité selon une technique de moyenne. Une telle démarche s'avère préjudiciable lorsque la grandeur moyennée est fortement hétérogène. Nous avons montré sur des exemples analytiques simples de sphères creuses que cet inconvénient pouvait être contourné en procédant à une partition du domaine concerné par la moyenne. Une étude numérique dans [12] a prouvé l'intérêt de ce procédé sur le cas d'un V.E.R. à matrice de von Mises. Une perspective intéressante serait de traiter le cas d'une matrice de Drucker-Prager. S'agissant du milieu renforcé, il serait également intéressant de traiter des cas où les inclusions ne sont plus rigides mais présentent un critère de résistance fini. De même, on pourrait chercher à tenir compte d'un critère d'interface plutôt que des cas extrêmes d'adhérence parfaite ou d'absence de frottement. Les matériaux cimentaires sont un exemple de matériaux en vue dans cette étude : les pâtes de ciment à une échelle qui révèle simultanément des renforts et des pores (dûs par exemple à la dissolution des cristaux de Portlandite et à la décalcification de la matrice de C-S-H) ([11], [25]) mais aussi les mortiers et les bétons. Même si la modélisation que nous avons adoptée permet de traiter plusieurs types de morphologies et d'interfaces entre la matrice et les inclusions, une description fine des géomatériaux ne saurait être systématiquement réduite aux inclusions considérées dans cette étude (vides ou renforts rigides adhérents ou sans frottement). En effet, la complexité des géomatériaux peut nécessiter une modélisation faisant intervenir des inclusions elles-mêmes hétérogènes. La présence de telles inclusions justifierait alors un recours à des méthodes d'homogénéisation basées sur des motifs morphologiques représentatifs [103]. Cette approche pourrait notamment être mise à profit dans l'analyse du comportement du béton pour lequel il existe une zone de faiblesse entre les granulats et le mortier, appelée interface de transition (ITZ) [55].

Une autre perspective envisageable à la suite de cette partie concerne l'exploitation de résultats de calcul à la rupture pour estimer les mécanismes responsables des changements de géométrie dans le cadre des transformations finies ([29], [10]). Nous avons montré sur un exemple simple dans [10] qu'il était raisonnable d'estimer l'état de contrainte actuel et le champ de vitesse d'un géomatériau soumis à des transformations finies respectivement par la charge limite et un mécanisme d'écoulement plastique libre relatifs à la géométrie actuelle. Considérant que ces deux informations peuvent être estimées par notre approche, il est possible de construire une loi de compaction tenant compte à chaque instant de l'évolution de la microstructure mise à jour selon le mécanisme d'écoulement.

Dans la **partie III**, après avoir mis en place les lois d'état de la poroplasticité, nous avons construit, selon une approche micromécanique, le critère de plasticité macroscopique d'un milieu poreux dépendant non seulement de l'état de contrainte macroscopique

mais aussi de la pression. Il s'agissait donc de passer à  $\mathbb{R}^7$  du point de vue de la dimension de l'espace des variables d'état (contraintes et pression). Nous avons ensuite déduit de ce critère une condition d'existence d'une contrainte effective susceptible de régir la poroplasticité. L'existence d'une telle contrainte effective permet de formuler le critère du milieu saturé à partir de celui du milieu sec dont le seul argument est le tenseur des contraintes macroscopiques i.e. un élément de  $\mathbb{R}^6$ . La condition d'existence obtenue nous a notamment permis de démontrer que si la contrainte effective de Terzaghi gouvernait le comportement poroplastique, le critère local était nécessairement insensible à la partie sphérique (Tresca ou von Mises par exemple), la réciproque étant un résultat classique. Nous avons ensuite examiné le cas de critères locaux sensibles au confinement (Mohr-Coulomb ou Drucker-Prager en sont des exemples) pour aboutir à la conclusion attendue, étant donné le caractère très contraignant de la condition d'existence, que les candidats les plus probables pour être contrainte effective ne convenaient pas. Ce point a notamment été illustré sur un exemple de construction analytique de l'évolution du domaine d'élasticité actuel d'une sphère sous pression.

Même si nous avons montré que le comportement élasto-plastique macroscopique d'un milieu poreux saturé à matrice frottante ne pouvait être formulé à l'aide d'une contrainte effective et donc découler du cas sec, il pourrait s'avérer intéressant d'examiner l'influence, en terme d'erreur commise, d'un choix de contrainte effective sur un certain trajet de chargement ou même sur un calcul de structure à l'échelle macroscopique.

Dans la **partie IV**, après un rappel montrant que les schémas d'homogénéisation basés sur le problème d'Eshelby pouvaient être mis à profit pour modéliser des milieux à fissures ouvertes ou fermées sans dissipation, nous sommes parvenus à exploiter ces mêmes schémas dans le cadre de l'homogénéisation de milieux à fissures plastiques. Plusieurs types de comportements plastiques des fissures ont pu être traités. La méthode a prouvé son efficacité dans la prise en compte du critère de plasticité mais également la cinématique de la fissure, ce qui a notamment permis de tenir compte du phénomène de dilatance dû aux frottements et d'en déduire son impact sur le comportement macroscopique. En nous penchant sur le problème de la propagation de fissures plastiques, nous avons retrouvé le résultat selon lequel celle-ci était couplée à la plasticité et était gouvernée par l'état de contrainte résiduel des fissures. Cette étude nous a permis d'aboutir au comportement macroscopique d'un milieu à fissures plastiques se propageant pour les différents types de fissures envisagés.

Les développements présentés dans cette partie partent d'hypothèses quelquefois un peu trop restrictives, comme par exemple l'existence d'une seule famille de fissures. L'avantage de la technique d'homogénéisation utilisée est qu'elle laisse entrevoir la perspective de prendre en compte des situations plus complexes où coexistent plusieurs familles de

fissures. La suite logique de ce travail consistera aussi à utiliser les comportements de milieux fissurés que nous pouvons identifier dans le calcul d'une structure.

Dans ce mémoire, nous nous sommes attachés à développer des méthodes aboutissant à la détermination de comportements macroscopiques en tenant compte de non linéarités à l'échelle microscopique et nous les avons mises en œuvre dans des situations précises. Ces méthodes présentent l'avantage d'être adaptables à d'autres cas de microstructures ou de comportements que ceux traités. Elles offrent des perspectives de recherche qui nous semblent intéressantes.

# Bibliographie

- [1] S. Andrieux, Y. Bamberger, and J.-J. Marigo. Un modèle de matériau microfissuré pour les roches et les bétons. *J. Méca. Théor. Appl.*, 5(3) :471–513, 1986.
- [2] J.-L. Auriault and E. Sanchez-Palencia. Étude du comportement macroscopique d’un milieu poreux saturé déformable. *J. Méc.*, 16(4) :575–603, 1977.
- [3] C. Barret and S. Baste. Induced damage by ellipsoidal cracks in an anisotropic medium. *Int. J. Solids and Struct.*, 36 :3709–3729, 1999.
- [4] J.-F. Barthélémy and L. Dormieux. Micromechanical approach to the modelling of compaction at large strains. In J.-L. Auriault, C. Geindreau, P. Royer, and J.-F. Block, editors, *2nd Biot Conference on Poromechanics*, Grenoble, France, 2002. Balkema.
- [5] J.-F. Barthélémy and L. Dormieux. Détermination du comportement macroscopique d’un milieu à fissures frottantes. In *XVIème Congrès Français de Mécanique*, Nice, 2003.
- [6] J.-F. Barthélémy and L. Dormieux. Détermination du critère de rupture macroscopique d’un milieu poreux par homogénéisation non linéaire. *C. R. Mécanique*, 331 :271–276, 2003.
- [7] J.-F. Barthélémy and L. Dormieux. A micromechanical approach to the strength criterion of Drucker-Prager materials reinforced by rigid inclusions. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 28(7-8) :565–582, 2004.
- [8] J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, and D. Kondo. Détermination du comportement macroscopique d’un milieu à fissures frottantes. *C. R. Mécanique*, 331 :77–84, 2003.
- [9] J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, and E. Lemarchand. A micromechanical approach to the strength criterion of composite materials. In N. Bicanic, R. de Borst, H. Mang, and G. Meschke, editors, *Computational Modelling of Concrete Structures*, St Johann Im Pongau, Austria, 2003. Euro-C, Balkema.
- [10] J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, and S. Maghous. Micromechanical approach to the modelling of compaction at large strains. *Computers and Geotechnics*, 30 :321–338, 2003.

- [11] O Bernard, F.J. Ulm, and E. Lemarchand. A multiscale micromechanics-hydration model for the early-age elastic properties of cement-based materials. *Cement and Concrete Research*, 33 :1293–1309, 2003.
- [12] N. Bilger, M. Bornert, F. Auslender, A. Zaoui, and R. Masson. Surface d'écoulement macroscopique des milieux poreux : modification du critère de Gurson par une approche micromécanique. In *XVème Congrès Français de Mécanique*, Nancy, 2001.
- [13] M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. of Appl. Phys.*, 12 :155–164, 1941.
- [14] M. A. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. of Appl. Phys.*, 26 :182–185, 1955.
- [15] M. A. Biot. Variational Lagrangian-thermodynamics of non isothermal finite strain. Mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion. *Int. J. Solids and Struct.*, 13 :579–597, 1977.
- [16] J.-M. Bony. *Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Cours de l'École Polytechnique, 1997.
- [17] M. Bornert. *Morphologie microstructurale et comportement mécanique; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [18] E. Bourgeois. *Mécanique des milieux poreux : formulation des problèmes et méthodes de résolution*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [19] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Mathematic studies, North Holland, 1973.
- [20] B. Budiansky and R.J. O'Connell. Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12 :81–97, 1976.
- [21] H.D. Bui. *Étude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écrouissage et relations de comportement élasto-plastique des métaux cubiques*. Thèse de doctorat ès-sciences, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1969.
- [22] H.D. Bui. *La mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris, 1978.
- [23] N. Burlion, F. Bourgeois, and J.F. Shao. Coupling damage-drying shrinkage : Experimental study and modeling. In V. Baroghel-Bouny and P.C. Aïtcin, editors, *International RILEM workshop on shrinkage of concrete*, 17. RILEM, 2000.
- [24] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 :315–330, 1979.
- [25] G Constantinides and F.J. Ulm. The effect of two types of C-S-H on the elasticity of cement-based materials : results from nanoindentation and micromechanical modeling. *Cement and Concrete Research*, 34 :67–80, 2004.

- [26] O. Coussy. *Poromechanics*. Wiley, New-York, 2004.
- [27] P. de Buhan. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse de doctorat ès-sciences, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1986.
- [28] P. de Buhan and L. Dormieux. On the validity of the effective stress concept for assessing the strength of saturated porous materials : a homogenization approach. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(10) :1649–1667, 1996.
- [29] P. de Buhan, L. Dormieux, and S. Maghous. Analyse mécanique de l'effet de la compaction d'une couche géologique sur la réduction de porosité du matériau sédimentaire. In *Congrès Français de Mécanique*, Poitiers, France, 1997.
- [30] J. Desrues. Limitations du choix de l'angle de frottement pour le critère de plasticité de Drucker-Prager. *RFGC*, pages 853–862, 2002.
- [31] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, and V. Pensée. Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré. *C. R. Mécanique*, 330(8) :587–592, 2002.
- [32] V. Deudé. *Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : Apport des méthodes de changement d'échelle*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [33] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, and S. Maghous. Micromechanical approach to nonlinear poroelasticity : Application to cracked rocks. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8) :848–855, 2002.
- [34] L. Dormieux. Poroelasticity and strength of fully or partially saturated porous materials. In L. Dormieux and F.J. Ulm, editors, *Applied micromechanics of porous materials*, Udine, Italy, 2004. CISM, SpringerWienNewYork.
- [35] L. Dormieux and E. Bourgeois. *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Presses de l'ENPC, 2002.
- [36] L. Dormieux and D. Kondo. Approche micromécanique du couplage perméabilité-endommagement. *C. R. Mécanique*, 332 :135–140, 2004.
- [37] L. Dormieux and D. Kondo. Poroelasticity and damage theory for saturated cracked media. In L. Dormieux and F.J. Ulm, editors, *Applied micromechanics of porous materials*, Udine, Italy, 2004. CISM, SpringerWienNewYork.
- [38] L. Dormieux, D. Kondo, and F.J. Ulm. *Microporomechanics*. À paraître, 2004.
- [39] L. Dormieux, E. Lemarchand, D. Kondo, and E. Fairbairn. Elements of poro-micromechanics applied to concrete. *Mater. Struct./Conc. Sc. Eng.*, 37(265) :31–42, 2004.
- [40] L. Dormieux and S. Maghous. Poroelasticity and Poroplasticity at Large Strains. *Oil and Gas Science and Technology, Rev. IFP*, 54 :773–784, 1999.

- [41] L. Dormieux, A. Molinari, and D. Kondo. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 50(10) :2203–2231, 2002.
- [42] L. Dormieux and F.J. Ulm, editors. *Applied micromechanics of porous materials*. SpringerWienNewYork, Udine, Italy, 2004.
- [43] H.I. Ene and E. Sanchez-Palencia. Équations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique*, 14(1) :73–108, 1975.
- [44] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London*, pages 376–396, 1957.
- [45] G. Faivre. Hétérogénéités ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope. *J. de Phys.*, 32 :325–331, 1971.
- [46] M. Frémond and A. Friaà. Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique. *Cr. R. Acad. Sci. Paris, Série A(286)* :107–110, 1978.
- [47] M. Gologanu, J.-B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. In P. Suquet, editor, *Continuum micromechanics*, pages 61–130, Udine, Italy, 1997. CISM, SpringerWienNewYork.
- [48] M.L.E. Guiton. *Contribution de la fracturation diffuse à la déformation d'ensemble durant le plissement de roches sédimentaires*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Palaiseau, France, 2001.
- [49] M.L.E. Guiton, Y.M. Leroy, and W. Sassi. Activation of diffuse discontinuities and folding of sedimentary layers. *J. Geophys. Res.*, 108(B4), 2003.
- [50] A.-L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. part 1 : Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol.*, 99 :2–15, 1977.
- [51] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29 :143–150, 1962.
- [52] Z. Hashin. The spherical inclusion with imperfect interface. *J. Applied Mechanics*, 58 :444–449, 1991.
- [53] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–140, 1963.
- [54] E. Hervé and A. Zaoui. n-layered inclusion-based micromechanical modelling. *Int. J. Engng. Sci.*, 31 :1–10, 1993.
- [55] F.H. Heukamp, E. Lemarchand, and F.J. Ulm. The effect of interfacial properties on the cohesion of highly filled composite materials. *Int. J. Solids and Struct.*, 42 :287–305, 2005.

- [56] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15 :79–95, 1967.
- [57] M.L. Kachanov. A microcrack model of rock inelasticity, part I, frictional sliding on microcracks. *Mech. Mater.*, 1 :19–27, 1982.
- [58] M.L. Kachanov. A microcrack model of rock inelasticity, part II, propagation of microcracks. *Mech. Mater.*, 1 :29–41, 1982.
- [59] M.L. Kachanov. Effective elastic properties of cracked solids : Critical review of some basic concepts. *Appl. Mech. Rev.*, 45(8) :304–335, 1992.
- [60] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38 :115–128, 1990.
- [61] W. Kreher and A. Molinari. Residual stresses in polycrystals as influenced by grain shape and texture. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :1955–1977, 1993.
- [62] N. Laws. A short note on penny-shaped cracks in transversely isotropic materials. *Mech. Mater.*, 4 :209–212, 1985.
- [63] J.-B. Leblond. Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19(4) :633–647, 2000.
- [64] J.-B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès Lavoisier, 2003.
- [65] J.-B. Leblond, G. Perrin, and P. Suquet. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *Int. Jour. of Plasticity*, 10(3) :213–235, 1994.
- [66] D. Leguillon and E. Sanchez-Palencia. On the behavior of a cracked elastic body with (or without) friction. *J. Méca. Théor. Appl.*, 1(2) :195–209, 1982.
- [67] E. Lemarchand. *Contribution de la micromécanique à l'étude des phénomènes de transport et de couplage poromécanique dans les milieux poreux : Application aux phénomènes de gonflement des géomatériaux*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [68] E. Lemarchand, F.J. Ulm, and L. Dormieux. The effects of inclusions on the friction coefficient of highly filled composite materials. *JEM*, 128(8) :876–884, August 2002.
- [69] V. Levin. On the thermal expansion coefficients of heterogeneous materials. *Mekh. Tverd. Tela*, 2 :83–94, 1967.
- [70] D. Lydzba and J.-F. Shao. Stress equivalence principle for saturated porous media. *C. R. Mécanique*, 330 :297–303, 2002.
- [71] S. Maghous. *Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique : approche numérique*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1991.

- [72] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 39(1) :1203–1227, 2000.
- [73] G. Meschke and S. Grasberger. Numerical modeling of coupled hygro-mechanical degradation of cementitious materials. *J. Eng. Mech.*, 2003.
- [74] J.-C. Michel and P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :783–812, 1992.
- [75] A. Molinari. Extension to the self-consistent tangent model. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 7 :683–697, 1999.
- [76] A. Molinari, G.R. Canova, and S. Ahzi. A self-consistent approach to the large deformation polycrystal plasticity. *Acta Metall.*, 35(12) :2983–2994, 1987.
- [77] A. Molinari, F. El Houdaigui, and L.S. Tóth. Validation of the tangent formulation for the solution of the non-linear eshelby inclusion problem. *Int. Jour. of Plasticity*, 20(2) :291–307, 2004.
- [78] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 21 :571–574, 1973.
- [79] S. Nemat-Nasser and M. Hori. Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials (2<sup>nd</sup> revised edition). *North-Holland, Amsterdam, The Netherlands*, 1999.
- [80] L. Pédro. Étude expérimentale du comportement des sols grossiers. *Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, 2004.
- [81] V. Pensée. *Approche multiéchelle de l'endommagement des milieux poreux fissurés*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
- [82] V. Pensée, L. Dormieux, D. Kondo, and V. Deudé. Poroélasticité d'un milieu mésolfissuré : analyse micromécanique. *C. R. Mécanique*, 330(2) :147–152, 2002.
- [83] V. Pensée and D. Kondo. Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésolfissuration. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib 329*, pages 271–276, 2001.
- [84] V. Pensée, D. Kondo, and L. Dormieux. Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8) :889–897, 2002.
- [85] G. Perrin. *Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1992.
- [86] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39(1) :45–71, 1991.
- [87] P. Ponte Castañeda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(8) :1757–1788, 1992.

- [88] P. Ponte Castañeda and J.-R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(12) :1919–1951, 1995.
- [89] Y. Qiu and G. Weng. A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites. *J. Appl. Mech.*, 59 :261–268, 1992.
- [90] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 366p, 1983.
- [91] J. Salençon. *Introduction à l'élastoplasticité et au calcul à la rupture*. Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1997.
- [92] J. Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics*. Springer, 2001.
- [93] P. Suquet. *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de doctorat ès-sciences, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1982.
- [94] P. Suquet. Elastic perfectly plastic constituents. In E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui, editors, *Homogenization Techniques for Composite Media*, pages 245–278, Udine, Italy, 1985. CISM, Springer-Verlag.
- [95] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure. *Cr. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*(320) :563–571, 1995.
- [96] P. Suquet, editor. *Continuum micromechanics*. SpringerWienNewYork, Udine, Italy, 1997.
- [97] P. Suquet. Effective behavior of nonlinear composites. In P. Suquet, editor, *Continuum micromechanics*, pages 197–264, Udine, Italy, 1997. CISM, SpringerWienNewYork.
- [98] A. P. Suvorov and G. J. Dvorak. Rate form of the Eshelby and Hill tensors. *Int. J. Solids and Struct.*, 39 :5659–5678, 2002.
- [99] D.R.S. Talbot and J.R. Willis. Some simple explicit bounds for the overall behavior of nonlinear composites. *Int. J. Solids and Struct.*, 29 :1981–1987, 1992.
- [100] J. R. Willis. Anisotropic elastic inclusion problems. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, 17 :157–174, 1964.
- [101] J. R. Willis. *Mechanics of composites*. Cours de l'École Polytechnique, 2001.
- [102] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'École Polytechnique, 1997.
- [103] A. Zaoui. Structural morphology and constitutive behaviour of microheterogeneous materials. In P. Suquet, editor, *Continuum micromechanics*, pages 291–347, Udine, Italy, 1997. CISM, SpringerWienNewYork.
- [104] A. Zaoui. Continuum micromechanics : Survey. *JEM*, 128(8) :808–816, August 2002.



# Principales notations

V.E.R. volume élémentaire représentatif  
 HPP hypothèse des petites perturbations  
 PPV principe des puissances virtuelles

$\delta_{ij}$  symbole de Kronecker  
 $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon

$\mathbf{T}$  tenseur d'ordre 1  
 $\mathbf{T}$  tenseur d'ordre 2  
 $\mathbb{T}$  tenseur d'ordre 4

$\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$  produit simplement contracté de deux tenseurs  
 $\mathcal{T}_1 : \mathcal{T}_2$  produit doublement contracté de deux tenseurs  
 $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$  produit tensoriel de deux tenseurs  
 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  produit tensoriel symétrisé de deux vecteurs  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})/2$

$\mathbf{1}$  tenseur identité d'ordre 2  
 $\text{tr } \mathbf{T}$  trace d'un tenseur d'ordre 2 ( $\text{tr } \mathbf{T} = \mathbf{1} : \mathbf{T}$ )  
 $\mathbf{T}_d$  partie déviatorique d'un tenseur d'ordre 2 ( $\mathbf{T}_d = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T} \mathbf{1}$ )  
 $T_d$  norme de la partie déviatorique d'un tenseur d'ordre 2 ( $T_d = \sqrt{\mathbf{T}_d : \mathbf{T}_d}$ )

$\mathbb{I}$  tenseur identité d'ordre 4 sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques  
 $\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  ;  $\forall \mathbf{T}$  sym.  $\mathbb{I} : \mathbf{T} = \mathbf{T}$   
 $\mathbb{J}$  tenseur d'ordre 4 extrayant la partie sphérique d'un tenseur d'ordre 2 symétrique  
 $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  ;  $\forall \mathbf{T}$  sym.  $\mathbb{J} : \mathbf{T} = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T} \mathbf{1}$   
 $\mathbb{K}$  tenseur d'ordre 4 extrayant la partie déviatorique d'un tenseur d'ordre 2 symétrique  
 $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$  ;  $\forall \mathbf{T}$  sym.  $\mathbb{K} : \mathbf{T} = \mathbf{T}_d$

${}^t\mathbf{T}$  transposé d'un tenseur d'ordre 2 ou 4  
 ${}^t\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji}$   
 ${}^t\mathbb{T}_{ijkl} = \mathbb{T}_{klij}$   
 $T^{-1}$  inverse d'un tenseur d'ordre 2 ou 4

---

$\mathbf{grad} f$	gradient d'un champ scalaire
$\mathbf{grad} \mathbf{T}$	gradient d'un champ de vecteur
$\operatorname{div} \mathbf{T}$	divergence d'un champ de vecteur
$\mathbf{div} \mathbf{T}$	divergence d'un champ de tenseur d'ordre 2
$\langle e \rangle_{\mathcal{D}}$	moyenne spatiale de la grandeur $e$ sur le domaine $\mathcal{D}$
$\overline{\mathcal{D}}$	adhérence du domaine $\mathcal{D}$
$\overset{\circ}{\mathcal{D}}$	intérieur du domaine $\mathcal{D}$
$\partial \mathcal{D}$	frontière du domaine $\mathcal{D}$ ( $\partial \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ )
$ \mathcal{D} $	volume du domaine $\mathcal{D}$
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes microscopiques
$\sigma_m$	contrainte moyenne microscopique ( $\sigma_m = \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3$ )
$\boldsymbol{\xi}$	vecteur déplacement microscopique
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur des déformations microscopiques
$\varepsilon_v$	déformation volumique microscopique ( $\varepsilon_v = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$ )
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse microscopique
$\mathbf{d}$	tenseur des taux de déformation microscopiques
$d_v$	taux de déformation volumique microscopique ( $d_v = \operatorname{tr} \mathbf{d}$ )
$\boldsymbol{\Sigma}$	tenseur des contraintes macroscopiques
$\Sigma_m$	contrainte moyenne macroscopique ( $\Sigma_m = \operatorname{tr} \boldsymbol{\Sigma} / 3$ )
$\mathbf{E}$	tenseur des déformations macroscopiques
$E_v$	déformation volumique macroscopique ( $E_v = \operatorname{tr} \mathbf{E}$ )
$\mathbf{D}$	tenseur des taux de déformation macroscopiques
$D_v$	taux de déformation volumique macroscopique ( $D_v = \operatorname{tr} \mathbf{D}$ )

# Table des figures

1	Différentes échelles . . . . .	4
1.1	Microstructure du v.E.R. $\Omega$ . . . . .	21
2.1	Effet de la nature de l'interface sur le module de cisaillement . . . . .	37
2.2	Endommagement du matériau par réduction de l'adhérence des renforts . . . . .	38
2.3	Effet des renforts sur le module de compression . . . . .	39
2.4	Assemblage de sphères creuses et de sphères rigides . . . . .	40
2.5	Décomposition du problème élastique $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$ . . . . .	44
3.1	Problème de l'inclusion d'Eshelby . . . . .	61
3.2	Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby . . . . .	63
3.3	Coordonnées sphériques . . . . .	65
3.4	Ellipsoïdes de révolution . . . . .	68
3.5	Inclusion cylindrique . . . . .	70
4.1	Interprétation géométrique de la fonction d'appui . . . . .	82
4.2	Approches statique et cinématique du calcul à la rupture . . . . .	86
4.3	Formulations sécante, affine et tangente du comportement . . . . .	101
5.1	Approximation du critère de von Mises par une suite d'ellipses . . . . .	110
5.2	Saturation du critère de von Mises . . . . .	113
5.3	Critère d'un milieu poreux à pores sphériques et à matrice de von Mises . . . . .	116
5.4	Cellule de base . . . . .	118
5.5	Critère de rupture d'un milieu poreux en déformations planes - $\varphi = 0.3$ . . . . .	118
5.6	Résistance en traction simple macroscopique . . . . .	122
5.7	Endommagement de la résistance du matériau par réduction de l'adhérence des renforts . . . . .	123
5.8	Effet de l'ajout de renforts rigides en présence de renforts lisses sur la résistance macroscopique . . . . .	124
6.1	Approximation du critère de Drucker-Prager par une suite de paraboles . . . . .	128

6.2	Fonctions $f_n$ . . . . .	132
6.3	Critère d'un milieu poreux isotrope à matrice de Drucker-Prager - $t = 0.3$ .	139
6.4	Critère de résistance d'un milieu poreux en déformations planes - $\varphi = 0.3$ , $t = 0.3$ . . . . .	141
6.5	Influence du coefficient $t$ et de la fraction volumique $\varphi^l$ sur $T^{hom}$ (plasticité associée) . . . . .	145
6.6	Coefficient de frottement macroscopique (plasticité associée) . . . . .	146
6.7	Effet de la fraction volumique d'inclusions sur le coefficient de frottement macroscopique - comparaison avec des essais . . . . .	148
7.1	Sphère creuse soumise à une pression externe . . . . .	158
7.2	Partition de la sphère creuse . . . . .	159
7.3	Effet du nombre de couches sur l'estimation de la pression limite - matrice de von Mises . . . . .	161
7.4	Effet du nombre de couches sur l'estimation de la pression limite - matrice de Drucker-Prager $t = 0.5$ . . . . .	165
8.1	Décomposition du problème de poroplasticité $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}^{EL} + \mathcal{P}^R$ . . . . .	172
8.2	Décomposition du problème de poroélasticité $\mathcal{P}^{EL} \equiv \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$ . . . . .	173
9.1	Sphère creuse de Drucker-Prager saturée . . . . .	192
9.2	Évolution du domaine d'élasticité actuel - $\varphi = 20\%$ , $t = 0.5$ . . . . .	195
10.1	Modélisation géométrique des fissures . . . . .	202
11.1	Première décomposition du problème posé sur un v.e.r. fissuré . . . . .	218
11.2	Seconde décomposition du problème posé sur un v.e.r. fissuré . . . . .	219
11.3	Écrouissage cinématique . . . . .	221
11.4	Fissure purement cohérente . . . . .	223
11.5	Cisaillement simple d'un v.e.r. à fissures purement cohérentes . . . . .	226
11.6	Fissure frottante dilatante . . . . .	230
11.7	Représentation schématique de la dilatance d'une fissure fermée . . . . .	230
11.8	Cycle de cisaillement simple d'un v.e.r. à fissures frottantes dilatantes . .	233
11.9	Critères de plasticité et d'endommagement d'un matériau à fissures pure- ment cohérentes . . . . .	238
11.10	Cisaillement simple et endommagement d'un v.e.r. à fissures purement cohérentes . . . . .	239
11.11	Critères de plasticité et d'endommagement d'un matériau à fissures frot- tantes non dilatantes . . . . .	240

---

11.12 Critères de plasticité et d'endommagement d'un matériau à fissures frottantes dilatantes . . . . .	242
11.13 Glissement simple d'un V.E.R. à fissures frottantes dilatantes ou non . . . .	244

