



**HAL**  
open science

# **Applications de l'interaction d'ondes élastiques à la mesure des propriétés non-linéaires des matériaux et à la caractérisation de champs de pression.**

Xavier Jacob

## **► To cite this version:**

Xavier Jacob. Applications de l'interaction d'ondes élastiques à la mesure des propriétés non-linéaires des matériaux et à la caractérisation de champs de pression.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. <NNT : >. <pastel-00001301>

**HAL Id: pastel-00001301**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001301v1>**

Submitted on 5 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

**UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT**  
**UFR DE PHYSIQUE**

*Année 2005*

*N° attribué par la bibliothèque*

**THÈSE**

pour l'obtention du Diplôme de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PARIS 7**  
Spécialité **Acoustique Physique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Xavier JACOB**

le 30 mai 2005

---

***Applications de l'interaction d'ondes élastiques à la mesure des  
propriétés non-linéaires des matériaux  
et à la caractérisation de champs de pression***

---

Directeur de Thèse : **Daniel ROYER**

Co-encadrants : **Christophe Barrière** et **Stefan Catheline**

**JURY**

M. :	Vitalyi	GUSEV	Président
MM. :	Olivier	BOU MATAR-LACAZE	Rapporteurs
	François	COULOUVRAT	
MM. :	Dominique	CATHIGNOL	Examineurs
	Christophe	BARRIÈRE	
	Daniel	ROYER	



*Ainsi, comme le travailleur, dans la production moderne, doit se subordonner aux conditions matérielles du travail, de même la pensée, dans l'investigation scientifique, doit de nos jours se subordonner aux résultats acquis de la science ; et la science, qui devait faire clairement comprendre toute chose et dissiper tous les mystères, est devenue le mystère par excellence, au point que l'obscurité, voire même l'absurdité, apparaissent aujourd'hui, dans une théorie scientifique, comme un signe de profondeur.*

Simone Weil,



## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier messieurs Olivier Bou Matar et François Coulouvrat d'avoir accepté la charge de rapporteurs, monsieur Vitalyi Gusev, d'avoir bien voulu présider ce jury et monsieur Dominique Cathignol d'y avoir pris part.

J'exprime toute ma gratitude au professeur Daniel Royer, pour m'avoir proposé ce sujet et pour avoir patiemment dirigé mes travaux, ainsi qu'à ceux qui l'ont secondé Christophe Barrière et Stephan Catheline, dont les corrections ont beaucoup apporté à ce manuscrit. Tous trois m'ont fait bénéficier, chacun à sa manière, mais toujours avec le dévouement d'enseignant et la passion de chercheur qui sont les leurs, de leur expérience, de leurs connaissances, de leurs savoir-faire.

Je remercie chaleureusement toute l'équipe du Laboratoire Ondes et Acoustique, de m'avoir accueilli dans un cadre de travail dynamique et propice à l'apprentissage de la recherche dans la bonne humeur (et réciproquement). Et plus particulièrement tous ceux qui m'ont formé, aidé ou conseillé à un moment ou à un autre : Dominique Clorennec, Julien Anfosso, Jean-Luc Gennisson, Mickaël Tanter, Patricia Daenens, Arnaude Cariou et bien sûr Ryota Takatsu et Mathieu Rénier, dont les résultats contribuent ce manuscrit.

Je n'oublierai pas mes collègues et amis doctorants, avec qui j'ai partagé de l'enthousiasme au découragement (et réciproquement), l'amitié restant.

Enfin, et surtout, ma femme Ljubica, mes parents, ma fratrie, ma famille et mes amis, pour leur soutien et leurs encouragements.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Interaction non-linéaire d'ondes acoustiques et élastiques longitudinales</b>	<b>3</b>
1.1 Equations de conservation . . . . .	4
1.2 Milieu fluide . . . . .	5
1.2.1 Lois de comportement . . . . .	7
1.2.2 Equations d'onde . . . . .	9
1.2.3 Résolution de l'équation d'onde en régime non linéaire . . . . .	15
1.2.3.1 Ondes planes . . . . .	15
1.2.3.2 Ondes planes atténuées . . . . .	20
1.2.3.3 Diffraction et effets non linéaires . . . . .	20
1.3 Milieu solide . . . . .	22
1.3.1 Rappels de mécanique des milieux continus . . . . .	23
1.3.1.1 Tenseurs des déformations . . . . .	23
1.3.1.2 Contraintes, relation fondamentale de l'élastodynamique . . . . .	25
1.3.2 Lois de comportement . . . . .	26
1.3.2.1 Constantes élastiques d'un milieu anisotrope . . . . .	27
1.3.2.2 Modules de Landau et de Murnaghan : milieu isotrope . . . . .	28
1.3.3 Équation de propagation non linéaire . . . . .	30
1.3.3.1 Milieu anisotrope . . . . .	30
1.3.3.2 Milieu isotrope et ondes planes . . . . .	31
1.4 Analogie fluide/solide . . . . .	33
1.4.1 Coefficients de non-linéarité . . . . .	33
1.4.2 Interaction non-linéaire d'ondes acoustiques dans un milieu isotrope . . . . .	36
<b>2 Mesures du coefficient de non-linéarité</b>	<b>41</b>
2.1 Les autres méthodes de mesure . . . . .	42
2.2 Dispositif expérimental . . . . .	44
2.2.1 Les différentes configurations, rôle des interfaces . . . . .	44
2.2.1.1 Méthode absolue . . . . .	47
2.2.1.2 Méthode comparative . . . . .	48

2.2.1.3	Interaction contra-propagative, effet Doppler . . . . .	51
2.2.2	Mesure optique de la vitesse de déplacement, diffraction . . . . .	52
2.2.3	Capteurs . . . . .	57
2.2.4	Électronique et démodulations . . . . .	57
2.2.4.1	Électronique d'émission-réception . . . . .	57
2.2.4.2	Démodulation analogique . . . . .	61
2.2.4.3	Démodulation de trains d'ondes . . . . .	62
2.2.4.4	Démodulation numérique de faibles indices, synchronisation . . . . .	64
2.3	Résultats expérimentaux dans les milieux homogènes . . . . .	70
2.3.1	Fluides purs, gel couplant et gel de gélatine . . . . .	70
2.3.2	Cristal de Germanium . . . . .	72
2.3.3	Solides isotropes ou statistiquement isotropes . . . . .	74
2.4	Mélange binaire eau/éthanol . . . . .	75
2.4.1	Liquides non-miscibles, sans interactions . . . . .	75
2.4.2	Mélanges miscibles . . . . .	76
2.5	Fatigue thermique des verres . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Propagation non linéaire d'ondes transverses dans les gels</b>	<b>83</b>
3.1	Elasticité des solides mous . . . . .	84
3.1.1	Développement de l'énergie au quatrième ordre . . . . .	85
3.1.2	Milieu incompressible . . . . .	86
3.2	Propagation non-linéaire des ondes de cisaillement . . . . .	90
3.2.1	Ondes planes de cisaillement : équation de Burgers modifiée . . . . .	90
3.2.1.1	Dispositif expérimental : imagerie ultra-rapide . . . . .	95
3.2.1.2	Ondes planes : génération d'harmoniques . . . . .	97
3.2.1.3	Interaction d'ondes planes . . . . .	100
3.2.2	Couplage et diffraction . . . . .	103
3.2.2.1	Équations couplées à l'ordre 3 . . . . .	103
3.2.2.2	Diffraction, deuxième harmonique transversale . . . . .	104
3.2.2.3	Ondes "quasi-planes" . . . . .	106
3.2.2.4	Source plane de dimensions finies . . . . .	108
3.2.3	Effets de champ proche : palpeur d'élastographie 1-D . . . . .	110
3.2.3.1	Génération d'harmoniques . . . . .	112
3.2.3.2	Interaction d'ondes . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Mesure de fortes pressions, contrainte de radiation</b>	<b>117</b>
4.1	Interférométrie laser appliquée à la mesure de fortes pressions . . . . .	118
4.1.1	Sondes interférométriques à simple et double hétérodynage . . . . .	119
4.1.2	Limites en déplacement imposées par la bande passante . . . . .	121
4.1.3	Démodulations analogiques et numériques de fort indices de modulation . . . . .	126

4.1.3.1	Démodulations en quadrature à deux voies . . . . .	126
4.1.3.2	Démodulations par détection des passages par zéro . . . . .	130
4.1.3.3	Membrane et modulation d'amplitude. Interaction acousto-optique .	132
4.1.3.4	Artefacts des démodulations de phase . . . . .	138
4.1.3.5	Simulation . . . . .	141
4.1.4	Comparaison avec un hydrophone . . . . .	144
4.1.5	Alternative acoustique : mesures par interaction paramétrique . . . . .	145
4.2	Contrainte de radiation dans les solides . . . . .	147
4.2.1	Définition de la contrainte de radiation . . . . .	147
4.2.2	Expression du déplacement mécanique associé . . . . .	149
4.2.3	Dispositif expérimental, démodulation de faibles indices . . . . .	151
4.2.4	Signe du déplacement : duralumin et silice . . . . .	154
4.2.5	Dépendance en fonction de l'amplitude du fondamental . . . . .	155
4.2.6	Distance de propagation et durée du train d'ondes . . . . .	156
<b>Conclusion</b>		<b>159</b>
<b>A Relations entre les modèles micro et macro de l'élasticité</b>		<b>161</b>
A.1	Lois de comportement des fluides . . . . .	161
A.2	Approche microscopique de l'élasticité des solides . . . . .	165
A.3	Approche statistique de l'élasticité des solides mous . . . . .	169
A.4	Modèle de Mooney-Rivlin . . . . .	171
<b>B Non-linéarité non classique</b>		<b>175</b>
<b>C Électronique</b>		<b>177</b>
C.1	Circuits d'émission-réception . . . . .	177
C.2	Caractéristiques des mélangeurs analogiques . . . . .	181
C.3	Filtres analogiques pour l'interféromètre . . . . .	183
<b>D Diffraction d'une source plane</b>		<b>187</b>
<b>E Modèle unidimensionnel de transducteur piézoélectrique</b>		<b>191</b>
<b>F Diffraction et polarisations transverses</b>		<b>199</b>
<b>Table des figures</b>		<b>207</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>209</b>
<b>Liste des symboles</b>		<b>211</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>213</b>



# Introduction

L'acoustique non-linéaire décrit la propagation d'ondes de forte amplitude, dites d'amplitude finie, par opposition aux déformations infinitésimales de l'approximation linéaire. Il s'agit également de caractériser le comportement des matériaux lorsqu'ils sont soumis à des déformations finies, la propagation d'une onde acoustique n'étant que la réponse d'un milieu matériel à une perturbation mécanique. Comme c'est le cas pour la plupart des phénomènes ondulatoires (interférences, diffraction, réversibilité), les effets observés en acoustique se retrouvent en optique (amplification paramétrique, génération d'harmoniques).

Cette discipline a fait ses premiers pas il y a plus d'un siècle et demi, s'intéressant d'abord à la propagation d'ondes de choc dans les fluides. A la suite de la confirmation expérimentale des effets de génération d'harmoniques et d'interaction d'ondes dans les années 30, la première estimation du coefficient de non-linéarité de l'eau est attribuée, par Blackstock [1], à Langevin. Les effets non-linéaires dans les solides sont bien plus difficilement observables que dans les fluides, mais leurs applications sont appelées à se développer grâce aux progrès de l'instrumentation. Elles portent essentiellement sur la détermination des constantes élastiques et la caractérisation des matériaux (suivi de la fatigue, proportion de différentes phases).

Ce travail réunit l'étude de différents dispositifs expérimentaux dédiés à la caractérisation des propriétés non-linéaires des matériaux et des champs de pression. Nous rappelons, dans la première partie, les lois de comportement qui définissent les coefficients de non-linéarité que nous mesurons, ainsi que les principales caractéristiques de la propagation non-linéaire. La mise en équation est réalisée dans les deux systèmes de coordonnées usuels des fluides et des solides, ce qui permet de distinguer les différentes origines de la non-linéarité. L'analogie des équations d'ondes (longitudinales dans les solides ou de compression dans les fluides) autorise une résolution commune, qui est développée dans le cas de l'interaction d'ondes.

La deuxième partie porte sur des mesures de coefficients de non-linéarité par interaction d'ondes longitudinales. La technique développée pour les fluides, au cours de la thèse de Christophe Barrière, a été adaptée pour être appliquée aux gels et aux solides. Ces expériences nécessitent une instrumentation précise que nous avons mise au point, du transducteur à l'électronique d'acquisition et de démodulation. Nous précisons les conditions expérimentales nécessaires au respect des approximations et nous montrons que cette méthode est une alternative souple aux techniques usuelles. Différentes configurations ont été testées et nous ont permis d'effectuer des mesures du coefficient de non-linéarité de solides isotropes variés, de cristaux de Germanium et de différents fluides.

La question de l'interaction d'ondes transversales s'est naturellement présentée à la suite des mesures dans les solides et les gels, et des travaux de thèse de Jean-Luc Gennisson. Grâce au dispositif d'imagerie ultra-rapide disponible au laboratoire, nous avons pu étudier la propagation non-linéaire d'ondes de cisaillement ( $\approx 100$  Hz), ainsi que leur interaction. L'élasticité des solides mous comme les gels d'agar-gélatine utilisés dans ces expériences est particulière (le module de cisaillement est bien plus faible que celui de compression), c'est ce qui rend possible l'observation d'effets de non-linéarité cubique. Nous nous sommes intéressés aux modèles qui définissent des modules élastiques adaptés à ces matériaux, et en particulier au modèle de milieu incompressible inspiré du développement de Landau. Nous présentons les équations de propagation à l'ordre trois, pour une onde simple de polarisation rectiligne ou quelconque, ainsi que dans le cas d'un faisceau d'ouverture Gaussienne. Du point de vue expérimental nous étudions différentes formes d'excitation (onde simple ou mélange d'ondes) ainsi que différentes formes de source (source plane, barre d'élastographie 1D).

Enfin, la dernière partie porte sur l'application de l'interférométrie optique à la mesure de fortes pressions acoustiques (grâce à la réflexion d'un laser sur une membrane immergée dans l'eau), et également celle des faibles déplacements à la surface d'un solide, associés à la pression de radiation. Le double hétérodynage du faisceau laser augmente d'autant la bande passante et différentes démodulations (analogique et numériques) permettent de mesurer des pressions dépassant 40 MPa. Nous avons également réalisé des expériences visant à mesurer la contrainte de radiation dans les solides, qui induit un déplacement statique de l'interface sur laquelle se réfléchit un train d'ondes. Nous avons étudié la dépendance de ce déplacement en fonction de l'amplitude, de la durée de l'impulsion, de la distance de propagation et du signe du coefficient de non-linéarité.

# Chapitre 1

## Interaction non-linéaire d'ondes acoustiques et élastiques longitudinales

Ce chapitre rappelle les bases théoriques de l'acoustique non-linéaire, nécessaires à la compréhension des travaux réalisés au cours de cette thèse. Nous développerons en particulier l'analyse sur laquelle repose notre méthode de mesure des coefficients de non-linéarité des fluides et des solides. Dans ces milieux, la propagation d'une onde correspond en général à des variations infinitésimales des grandeurs physiques (pression  $p$ , déplacement  $\mathbf{u}^1$ , vitesse  $\mathbf{v}$ , masse volumique  $\rho$ ...). La linéarisation des équations d'équilibre et de la loi de comportement conduit à l'équation d'onde en régime linéaire. La prise en compte de variations d'amplitudes finies nécessite de développer à un ordre adapté les équations du mouvement et les lois de comportement. Pour les ondes longitudinales auxquelles nous nous intéressons dans ce premier chapitre, un développement quadratique est suffisant. La description correcte des phénomènes ondulatoires par des équations aux dérivées partielles nécessite la connaissance de la loi de comportement du milieu de propagation. Dans les fluides l'équation d'état relie les variations de pression et de densité. Dans les solides, la loi de Hooke joue un rôle analogue en reliant les contraintes aux déformations.

Dans la première partie de ce chapitre, nous introduisons les équations qui gouvernent la propagation non-linéaire dans les fluides. Nous rappelons les différentes approximations, les solutions "classiques", ainsi que les principales caractéristiques de la propagation : génération d'harmoniques et interaction d'ondes.

Dans la deuxième section, nous examinons le cas des solides ; nous rappelons les définitions des constantes et des modules élastiques du troisième ordre, ainsi que l'équation de propagation non-linéaire dans l'approximation du deuxième ordre.

Enfin, une analogie avec les fluides nous permet d'interpréter physiquement l'origine des termes non-linéaires de l'équation de propagation d'une onde longitudinale. Elle autorise également une résolution commune, que nous réalisons dans le cas de l'interaction d'ondes, et dans la cadre de l'hypothèse de faible non-linéarité, adaptée aux conditions expérimentales du chapitre 2. L'interaction de deux ondes de fréquences très différentes est alors équivalente à une modulation de phase de l'onde de plus haute fréquence.

---

<sup>1</sup>Les vecteurs sont notés en caractères gras.

## 1.1 Equations de conservation

Le mouvement des "particules de fluide" ou des constituants d'un solide peut être décrit en coordonnées Lagrangiennes  $(\mathbf{a}, t)$  ou Eulériennes  $(\mathbf{x}, t)$ . Les variables d'Euler sont celles d'un référentiel lié à l'observateur : les quantités sont calculées en un point fixe de l'espace. Celles de Lagrange sont définies par les positions des particules à l'instant initial (état de repos). Une particule est donc "suivie" dans son mouvement. L'usage de l'un ou l'autre de ces systèmes dépend de la situation physique. Pour modéliser la propagation d'une onde dans un solide, on préfère suivre le déplacement des particules autour de leurs positions d'équilibre. Dans le cas des fluides, les variables d'Euler sont plus couramment utilisées. L'acoustique les emprunte à l'hydrodynamique, où elles permettent de décrire plus simplement les écoulements.

La relation entre les deux descriptions est donnée par l'évolution de la position du point matériel, repéré par sa position "au repos"  $\mathbf{a}$ , en fonction du temps :  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{a}, t)$ . Une grandeur  $\mathbf{g}$  (scalaire, vectorielle ou tensorielle) est notée  $g(\mathbf{x}, t)$  ou  $G(\mathbf{a}, t) = g(\chi(\mathbf{a}, t), t)$ , suivant que sa dépendance est exprimée en coordonnées spatiale ou matérielle.

Les déplacements  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{u}$  (respectivement dans les coordonnées matérielles et spatiales) sont définis par :

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\chi(\mathbf{a}, t), t). \quad (1.1)$$

La dérivation par rapport au temps dépend de la description choisie. Il s'agit d'une simple dérivée partielle, calculée à  $\mathbf{a}$  fixé, si la grandeur est exprimée en fonction des coordonnées matérielles. Elle fait intervenir une dérivée par rapport aux coordonnées d'espace si  $\mathbf{g}$  est exprimée en fonction des coordonnées spatiales<sup>2</sup> :

$$\frac{dG(\mathbf{a}, t)}{dt} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (1.2)$$

autrement dit :

$$\frac{DG(\mathbf{a}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial G(\mathbf{a}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{a}} = \frac{Dg(\mathbf{x}, t)}{Dt}. \quad (1.3)$$

La vitesse particulière d'un point matériel est définie comme la tangente à la trajectoire au point de coordonnées  $\mathbf{a}$  :  $\mathbf{V}(\mathbf{a}, t) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, t) = \frac{d\mathbf{U}}{dt}$ , où  $\chi(\mathbf{a}, t)$  est la trajectoire de la particule initialement située en  $\mathbf{a}$ . En variable d'Euler, la vitesse est donnée par :  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{x}}{Dt}(\mathbf{x}, t)$  (il s'agit de la vitesse d'une particule qui "passe" au point géométrique  $\mathbf{x}$ ). On a donc  $V(\mathbf{a}, t) = \mathbf{v}(\chi(\mathbf{a}, t), t)$ , puisque l'on confond  $\mathbf{x}$  (coordonnées d'espace dans le référentiel d'Euler) avec la trajectoire de la particule initialement située en  $\mathbf{a}$  :  $\chi(\mathbf{a}, t)$ .  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{v}$  sont donc deux fonctions distinctes, représentant la même grandeur physique.

D'après la relation (1.2), la vitesse particulière :  $\mathbf{V}(\mathbf{a}, t)$  (celle de la particule identifiée par sa position initiale  $\mathbf{a}$ ) et la quantité  $\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}$  au point géométrique  $\mathbf{x}$  (appelée vitesse locale), sont reliées par :

$$\mathbf{V}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{u}), \quad (1.4)$$

---

<sup>2</sup>Nous adoptons ici la convention de sommation des indice répétés, dite convention d'Einstein (sommation sur l'indice  $k$  dans l'équation (1.2)).

où le deuxième terme, à droite de l'égalité, est appelé vitesse de convection. Cette relation est souvent écrite sous la forme suivante :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_p \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (1.5)$$

En hydrodynamique, ou en acoustique linéaire,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_l$  sont identiques, mais en général seules  $\mathbf{V}$  ou  $\mathbf{v}$  ont un sens physique et interviennent directement dans les équations de conservation.

La dérivée particulaire  $D$ , est notée dans la suite comme la dérivée droite  $d$  (des grandeurs Lagrangiennes) : nous les distinguerons par les grandeurs auxquelles elles s'appliquent. Les deux descriptions sont équivalentes en acoustique linéaire (au premier ordre en perturbation) : elles conduisent aux mêmes équations d'ondes<sup>3</sup>.

Les équations de propagation des ondes acoustiques dans un fluide compressible ou dans un solide élastique se déduisent des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les équations de conservation locales s'expriment simplement dans la représentation Eulérienne [2], [3], [4] :

– Conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.6)$$

– Conservation de la quantité de mouvement (deuxième loi de Newton) :

$$\rho \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.7)$$

où  $T_{ij}$  est le tenseur des contraintes.

– Conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) :

$$\rho \frac{de}{dt} - T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.8)$$

où  $e$  est la densité d'énergie interne par unité de masse (spécifique) et  $\mathbf{q}$  le vecteur densité de flux de chaleur.

## 1.2 Milieu fluide

Dans un fluide parfait, les contraintes sont dues à la pression hydrostatique  $p$ . Elles sont toutes normales à l'élément de surface :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (1.9)$$

Cette loi n'est plus valable dans un fluide visqueux, pour lequel il faut introduire des contraintes d'origine dissipative  $\tau_{ij}$  (qui ne sont pas nécessairement normales à l'élément de surface) :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (1.10)$$

<sup>3</sup>Elles conduisent parfois, à partir du deuxième ordre, à des résultats différents, comme dans le cas de la pression de radiation (voir § 4.2).

qui traduisent notamment le transfert d'énergie mécanique en chaleur. D'après le premier principe de la thermodynamique, la quantité de chaleur  $\delta q$  dissipée dans le volume  $V = 1/\rho$  occupé par l'unité de masse est reliée au travail  $-pdV$  des forces de pression et à la variation d'énergie interne spécifique :

$$de = \delta q - pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = \delta q + \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (1.11)$$

Compte-tenu de l'équation de conservation de la masse, il vient :

$$\rho \frac{\delta q}{dt} = \rho \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \frac{\partial v_j}{dx_j}, \quad (1.12)$$

Si les compressions et les dilatations dues à l'onde acoustique sont suffisamment "lentes", d'après le second principe de la thermodynamique, les particules de fluide sont en équilibre thermodynamique (principe de l'état local associé) :

$$\delta q = T ds, \quad (1.13)$$

où  $T$  est la température absolue et  $s(p, \rho)$  la densité spécifique d'entropie. L'énergie interne est alors une fonction des variables  $s$  et  $\rho$  :  $e(s, \rho)$ , dont la différentielle est :

$$de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (1.14)$$

Compte tenu de l'équation de conservation de l'énergie, la création d'entropie est régie par la relation :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = (T_{ij} + p\delta_{ij}) \frac{\partial v_i}{dx_j} - \frac{\partial q_j}{x_j}. \quad (1.15)$$

Le remplacement du flux de chaleur  $\mathbf{q}$  par  $-\kappa \nabla T$  (loi de Fourier, régissant le transport diffusif de la chaleur), où  $\kappa$  est la conductivité thermique du fluide et le report de la contrainte (1.10) conduisent à l'équation de l'entropie :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{dx_j} + \kappa \Delta T. \quad (1.16)$$

La résolution de cette équation est très simple dans le cas du fluide parfait pour lequel les termes dissipatifs du second membre, dus à la viscosité et à la conductivité thermique, sont négligeables. En effet, en l'absence d'échange thermique entre les différentes régions du fluide et de création de chaleur par dissipation, les grandeurs évoluent adiabatiquement. Si, de plus, le milieu est homogène, l'entropie se conserve :  $s = s_0 = cste$ .

Indépendamment de la loi de comportement du milieu, les équations (1.7) et (1.6) qui s'écrivent, pour un fluide parfait dans la représentation eulérienne :

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.17)$$

comportent des termes non-linéaires. La non-linéarité de l'équation de conservation de la masse provient de l'advection (ou convection), c'est à dire de l'entraînement du milieu matériel (fluide ou solide) lors du passage de l'onde. Elle n'a pas d'équivalent en électromagnétisme, car ces ondes ne déplacent pas le milieu au cours de leur propagation. Elle n'apparaît pas explicitement en coordonnées de Lagrange, où la particule est suivie dans son mouvement (voir paragraphe 1.4.1).

L'autre origine de la non-linéarité en acoustique réside dans la réponse du milieu à la sollicitation de l'onde. Cette réponse est décrite par la loi de comportement thermodynamique du milieu ou équation d'état.

### 1.2.1 Lois de comportement

Pour un gaz parfait, l'équation d'état s'écrit :

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma e^{(s-s_0)/c_v}, \quad (1.18)$$

où  $\gamma = c_p/c_v$  est le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants  $c_p$  et  $c_v$ , et l'indice 0 correspond aux grandeurs au repos. La propagation d'une perturbation mécanique est généralement considérée comme adiabatique et réversible, car les échanges de chaleur peuvent être négligés devant ceux de quantité de mouvement qui s'effectuent plus rapidement<sup>4</sup>. Avec cette hypothèse isentropique, le développement de l'équation (1.18) à l'ordre 2 en variation relative de masse volumique s'écrit :

$$p - p_0 = p_0 \gamma \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{p_0 \gamma (\gamma - 1)}{2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2. \quad (1.19)$$

Le rapport des coefficients qui pondèrent les termes d'ordres 1 et 2 vaut  $\gamma - 1$ . Ce coefficient caractérise l'importance du terme non-linéaire de l'équation d'état relativement au terme linéaire. En régime linéaire, la vitesse du son est définie (autour de l'état d'équilibre  $(p_0, \rho_0, s_0)$ ) par :

$$c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \rho = \rho_0}, \quad (1.20)$$

soit pour un gaz parfait :

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho \chi}, \quad (1.21)$$

avec le coefficient de compressibilité  $\chi$  tel que :

$$\frac{1}{\chi} = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \rho = \rho_0}. \quad (1.22)$$

L'énergie interne d'un liquide<sup>5</sup>, contrairement à celle d'un gaz parfait, n'est pas uniquement d'origine cinétique. La prise en compte des interactions moléculaires qui y contribuent est complexe, ce qui ne permet pas d'obtenir une équation d'état "universelle". L'équation d'état d'un liquide est donc prise sous la forme d'un développement de Taylor (dont l'ordre sera discuté plus loin), basé

<sup>4</sup>On considère ici la diffusion thermique pour des échanges de chaleur à l'échelle de la particule fluide. A l'échelle microscopique, il n'en est pas de même puisque les temps de relaxation sont bien plus faibles que la durée caractéristique des déformations (c'est le cas des phonons thermiques qu'on néglige en mécanique des milieux continus, de la vitesse caractéristique des particules dans un gaz ou encore des temps de relaxation moléculaire dans un liquide).

<sup>5</sup>Ou plus généralement celle d'un fluide non-parfait.

sur l'hypothèse de faibles variations des grandeurs  $p$ ,  $\rho$  et  $s$  autour de l'état d'équilibre  $(p_0, \rho_0, s_0)$  :

$$p - p_0 = A_l \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{B_l}{2!} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, s=s_0} (s - s_0), \quad (1.23)$$

avec :

$$A_l = \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \rho=\rho_0} = \rho_0 c_0^2, \quad (1.24)$$

$$\text{et } B_l = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s, \rho=\rho_0}. \quad (1.25)$$

La définition du rapport  $B_l/A_l$  comme paramètre de non-linéarité thermodynamique est attribuée à Beyer [5]. Comme nous le verrons au paragraphe 1.2.2, c'est un coefficient  $\beta = 1 + \frac{B_l}{2A_l}$  qui intervient dans l'équation d'onde. Il réunit les contributions thermodynamique et convective à la non-linéarité. Sous cette forme (1.23), l'équation d'état permet d'établir une équation d'onde décrivant la propagation en tenant compte des effets non-linéaires à l'ordre 2 et de la dissipation à l'ordre 1. En effet, on néglige les termes d'ordre supérieur à 1 en variation d'entropie, ainsi que les termes comportant des dérivées croisées (par rapport à  $s$  et  $\rho$ ) : la dissipation est considérée comme linéaire.

Nous obtenons la correspondance entre les coefficients de non-linéarité du gaz et du fluide en identifiant les équations (1.23) et (1.19) :  $\frac{B_l}{A_l} \Leftrightarrow \gamma - 1$ . Si le lien entre le coefficient de non-linéarité acoustique et le rapport des capacités calorifiques est direct pour un gaz, il n'en est pas de même pour un liquide. La différence des capacités calorifiques d'un liquide s'exprime [6] :

$$c_p - c_v = \frac{T_0 \alpha^2 A_{lT}}{\rho_0}, \quad (1.26)$$

et leur rapport est donné par :

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{A_l}{A_{lT}}, \quad (1.27)$$

où  $A_l$  et  $A_{lT} = \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T, \rho=\rho_0}$  sont respectivement les modules d'élasticité isentropique et isotherme (ou coefficients d'incompressibilité) et  $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, T=T_0} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p, T=T_0}$ , est le coefficient de dilatation thermique<sup>6</sup>. Dans le cas où la propagation des ondes acoustiques est considérée comme une transformation isentropique, le coefficient  $B_l$  s'écrit :

$$B_l = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s, \rho=\rho_0} = \rho_0^2 \left( \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_{s, \rho=\rho_0} = 2\rho_0^2 c_0^3 \left( \frac{\partial c}{\partial p} \right)_{s, \rho=\rho_0}. \quad (1.28)$$

Le coefficient de non-linéarité thermodynamique peut alors être mis sous la forme :

$$\frac{B_l}{A_l} = 2\rho_0 c_0 \left( \frac{\partial c}{\partial p} \right)_{s, \rho=\rho_0}. \quad (1.29)$$

---

<sup>6</sup>Coppens [7] utilise un coefficient de compressibilité adiabatique  $K_s$  dépendant de la masse volumique et défini de la manière suivante :  $\frac{1}{K_s} = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\rho}{\rho_0} \left[ A_l + B_l \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \right]$ . Il regroupe donc les effets linéaire et non-linéaire quadratique et permet une comparaison avec les données des tables thermodynamiques.

Ici,  $c$  est la vitesse du son effective du milieu (tenant compte de la variation induite par les effets non-linéaires), différente de celle définie par l'expression (1.20) en acoustique linéaire. Avec cette expression (1.29), l'interprétation physique du coefficient de non-linéarité thermodynamique est directe : il donne la variation de célérité induite par la pression acoustique.

Le développement de l'équation d'état à l'ordre 3 (en variation relative de masse volumique) définit un coefficient  $C_l$  qui pondère le terme supplémentaire. Il présente un intérêt limité, puisque les contributions qu'il implique dans l'équation d'onde sont généralement négligeables, comme le montre l'expérience. Jusqu'à récemment, aucune mesure directe de  $C_l$  n'avait été réalisée [1]. Seule une relation entre les rapports  $C_l/A_l$  et  $B_l/A_l$ , était donnée par Coppens [7] :

$$\frac{C_l}{A_l} = \frac{3}{2} \left( \frac{B_l}{A_l} \right)^2 + 2\rho_0^2 c_0^3 \left( \frac{\partial^2 c}{\partial p^2} \right)_{s,p=p_0}. \quad (1.30)$$

Le deuxième terme peut y être négligé, sa contribution étant estimée à moins de 1%, à partir des valeurs de  $\left( \frac{\partial^2 c}{\partial p^2} \right)_s$  mesurées dans l'éthanol. Dans un article paru en 2003, le rapport  $C_l/A_l$  a été calculé théoriquement (à partir d'une définition de la vitesse du son établie par Schaaffs [8], reposant sur l'application d'une équation d'état de Van der Waals aux liquides organiques) [9]. Des mesures par génération d'harmonique sont en accord avec les valeurs obtenues par le calcul. Elles confirment la faiblesse des effets d'ordre trois.

### 1.2.2 Equations d'onde

L'équation d'onde est obtenue en combinant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, avec l'équation d'état. Pour estimer l'ordre de grandeur des différents termes, on procède à l'adimensionnement des équations. Les nombres sans dimension qui apparaissent sont fonction des constantes du problème, de l'ordre de grandeur des quantités physiques, et éventuellement de leurs échelles caractéristiques d'évolution. Les grandeurs physiques sont écrites :  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  et  $s = s_0 + s'$ , où  $p'$ ,  $\rho'$  et  $s'$  sont les variations de pression, de masse volumique et d'entropie liées au passage de l'onde<sup>7</sup>. Les quantités sans dimension correspondantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \\ \tilde{p} &= \frac{p'}{\rho_0 c_0 v_0} = \frac{p'}{\rho_0 c_0^2 M}, \\ \tilde{\rho} &= \frac{\rho'}{M \rho_0}, \\ \text{et } \tilde{s} &= \frac{s'}{\sigma}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

<sup>7</sup>Le milieu de propagation est supposé au repos (pas de mouvement d'ensemble) avant le passage de l'onde. La vitesse particulière  $\mathbf{v}$  est seulement due au passage de l'onde.

où  $v_0 = |\mathbf{v}|$  est l'ordre de grandeur de la vitesse particulaire,  $M = \frac{v_0}{c_0}$  est le nombre de Mach acoustique, qui, comme nous le verrons, caractérise l'importance des termes non-linéaires des équations de conservation, et  $\sigma$  est l'ordre de grandeur des variations d'entropie acoustique. Pour simplifier le problème, on suppose que les variations d'entropie sont d'un ordre de grandeur inférieur aux autres grandeurs caractérisant l'onde acoustique :  $\sigma = O(M^2)$ . Dans les équations bilan, on remplace les grandeurs "dimensionnées" par leurs expressions en fonction des quantités adimensionnées. L'adimensionnement des variables  $t$  et  $z$  induit celui des dérivations temporelles et spatiales, qui sont remplacées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{t} = \omega t &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow \omega \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \\ \text{et } \tilde{z} = kz = \frac{\omega}{c_0} z &\Rightarrow \nabla \Leftrightarrow \frac{\omega}{c_0} \tilde{\nabla}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

où  $\omega$  est une fréquence caractéristique de la perturbation et  $k$  est le nombre d'onde correspondant.

D'une manière générale le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime par :  $\tau_{ij} = \eta_{ijkl} D_{kl}$ , où  $\eta_{ijkl}$  est le tenseur des viscosités et  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t}$  celui des taux de déformation. Sa décomposition en contraintes normales et tangentielles, définit pour un milieu isotrope, les viscosités de volume  $\zeta$ <sup>8</sup> et de cisaillement  $\eta$  :

$$\tau_{ij} = \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) D_{kk} \delta_{ij} + 2\eta D_{ij}. \quad (1.33)$$

Cette expression permet d'aboutir à la forme suivante des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1.34)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \kappa \Delta T + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{\eta}{2} \sum_{i,j=1,2,3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)^2. \quad (1.35)$$

L'équation de conservation de la masse (1.6) est adimensionnée à l'aide des relations (1.31) et (1.32) :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -M \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} - M \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho}. \quad (1.36)$$

Elle comporte à gauche, deux termes linéaires, et à droite les contributions non linéaires quadratiques d'ordre  $M$ .

Pour la conservation de la quantité de mouvement (1.34), nous obtenons :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \tilde{p} = -M \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} - M \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\omega \eta}{\rho_0 c_0^2} \left[ \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \left( \frac{\zeta}{\eta} + \frac{1}{3} \right) \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \right] + O(M^2). \quad (1.37)$$

---

<sup>8</sup>La viscosité de volume  $\zeta$  est définie à partir du second coefficient de viscosité :  $\eta' = \zeta - \frac{2\eta}{3}$ , qui apparaît plus directement dans l'expression du tenseur des contraintes visqueuses. Les coefficients  $\eta'$  et  $\eta$  sont formellement analogues aux modules élastiques de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

Les coefficients des différentes termes sont du même ordre :  $M \approx 10^{-5}$  et  $\frac{\omega\eta}{\rho_0 c_0^2} \approx 10^{-5}$ , pour des ultrasons dans l'eau (avec les valeurs données page 13 et dans le tableau 1.1), il est donc justifié de conserver ces termes, et de négliger ceux d'ordre  $M^2$ .

Les relations :  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla_{\wedge} \nabla_{\wedge} \mathbf{v}$  et  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_{\wedge} \nabla_{\wedge} \mathbf{v}$  sont alors introduites dans l'équation (1.37) pour faire apparaître les termes comprenant le rotationnel du champ de vitesse. Ces termes, relatifs à la vorticité, peuvent être négligés ( $\tilde{\nabla}_{\wedge} \tilde{\mathbf{v}} \approx \mathbf{0}$ ), si l'on considère un champ de vitesse irrotationnel, et que l'on se place loin de frontières rigides. Nous aboutissons à la forme suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \tilde{p} = -M \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} - \frac{M}{2} \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}^2 + \xi \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + O(M^2), \quad (1.38)$$

avec  $\xi = \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right)^9$ .

Pour l'équation d'état (1.23), il vient :

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} + \frac{B_l M}{2A_l} \tilde{\rho}^2 + \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}} \right)_{\rho, s=s_0} \tilde{s} + O(M^2). \quad (1.39)$$

Pour établir l'équation de propagation non linéaire quadratique, nous introduisons dans les termes d'ordre 2 les expressions reliant les grandeurs physiques en régime linéaire. Les quantités négligées sont alors d'ordre 3 ( $O(M^2)$ ) dans les équations adimensionnées). En régime linéaire, les équations (1.36), (1.38) et (1.39) s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + O(M), \quad (1.40a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \xi \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + O(M), \quad (1.40b)$$

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} + \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}} \right)_{\rho, s=s_0} \tilde{s} + O(M). \quad (1.40c)$$

Ces expressions se simplifient encore si l'on néglige le couplage entre la viscosité d'une part (pour (1.40b)), l'entropie d'autre part (pour (1.40c)) et les non-linéarités acoustiques. On ne conserve alors que le premier terme de droite dans chacune des équations précédentes.

Le premier terme de droite de l'équation (1.36) s'exprime alors, en utilisant les relations (1.40a) et (1.40c) :  $-\tilde{\rho} \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial \tilde{t}}$ . Le deuxième terme devient, avec la relation (1.40b) :  $-\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho} = \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^2}{\partial \tilde{t}}$ . On trouve alors l'équation (1.36) sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = M \left[ \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{t}} \right], \quad (1.41)$$

où  $\tilde{L}$  est la densité Lagrangienne d'énergie adimensionnée<sup>10</sup> :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{v}}^2 - \tilde{p}^2). \quad (1.42)$$

<sup>9</sup>Ce coefficient peut être exprimé comme le rapport  $\frac{M}{Re}$ , où  $Re = \frac{\rho_0 c_0 v_0}{\omega(\zeta + \frac{4}{3}\eta)}$  est l'équivalent acoustique du nombre de Reynolds (la longueur d'onde joue le rôle de la longueur caractéristique), qui compare les termes inertiels et visqueux dans les équation de l'hydrodynamique.

<sup>10</sup>Sa définition générale est la différence des énergies cinétique et potentielle :  $L = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2 - w$ , qui s'exprime pour une onde acoustique en régime linéaire :  $L = \frac{1}{2} \left( \rho \mathbf{v}^2 - \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} \right)$ .

En procédant de même pour l'équation (1.38), nous obtenons :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \tilde{p} = \xi \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} - M \tilde{\nabla} \tilde{L}. \quad (1.43)$$

Le traitement du bilan d'énergie (1.35) nécessite également des approximations. Loin des frontières, les termes visqueux sont négligeables, leur influence étant confinée dans une couche d'épaisseur très inférieure à la longueur d'onde. On peut le montrer en considérant les modes correspondant à la production d'entropie et à la vorticité, qui sont gouvernés par une équation de diffusion [1], [10]. On néglige donc les deux derniers termes à droite dans l'équation (1.35). La variation d'entropie ne dépend alors que du laplacien de  $T$ , que l'on cherche à exprimer en fonction de la vitesse [6] :

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\kappa}{T_0} \Delta T. \quad (1.44)$$

Avec l'approximation d'ordre 1 :  $T' = \frac{\partial T}{\partial p} p'$ , la relation (1.44) s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{\kappa}{T_0} \frac{\partial T}{\partial p} \Delta p' \approx -\rho_0 \frac{\kappa}{T_0} \frac{\partial T}{\partial p} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (1.45)$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient la variation d'entropie :

$$s' = -\frac{\kappa}{T_0} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (1.46)$$

On utilise alors la relation thermodynamique (1.26) sous la forme :

$$c_p - c_v = T_0 \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

ainsi que l'expression suivante, établie à partir des relations de Maxwell appliquées à l'enthalpie :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = T_0 \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} \frac{1}{\left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_V}.$$

On obtient finalement le troisième terme de l'équation d'état :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, s_0} s' = -\kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (1.47)$$

L'adimensionnement (1.39) de l'équation d'état (1.23) peut alors être mis sous la forme :

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} + \frac{B_l M}{2A_l} \tilde{\rho}^2 - \frac{\kappa \omega}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (1.48)$$

Pour établir une équation d'onde en pression, nous l'inversons en utilisant les relations (1.40a) et (1.40c) :

$$\tilde{\rho} = \tilde{p} - \frac{B_l M}{2A_l} \tilde{p}^2 - \theta \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}}, \quad (1.49)$$

avec  $\theta = \frac{\kappa \omega}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)$ .

Enfin, pour établir l'équation d'onde, on soustrait la dérivée temporelle de l'équation (1.41) au gradient de l'équation (1.38). On y introduit ensuite l'équation (1.49). L'hypothèse d'un champ de vitesse irrotationnel et la substitution des relations à l'ordre 1 sont tour à tour appliquées :  $\tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{v}) = -\tilde{\nabla} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) + O(M)$ .

Nous obtenons alors une équation d'onde non linéaire quadratique en pression, initialement établie par Aanonsen [11] :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{t}^2} - \tilde{\nabla}^2 \tilde{p} - \tilde{b} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial \tilde{t}^3} = M\beta \frac{\partial^2 (\tilde{p}^2)}{\partial \tilde{t}^2} + M \left( \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} + \tilde{\nabla}^2 \right) \tilde{L}. \quad (1.50)$$

$\beta$  est le coefficient de non linéarité du fluide, combinant les effets convectif et thermodynamique. Il est défini par la relation :

$$\beta = 1 + \frac{B_l}{2A_l}. \quad (1.51)$$

Dans le terme de gauche, on reconnaît l'opérateur de propagation linéaire et un terme d'absorption (qui regroupe les effets de la viscosité et de la diffusion thermique), dont le coefficient s'écrit :

$$\tilde{b} = \xi + \theta = \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) + \frac{\kappa \omega}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right). \quad (1.52)$$

Le paramètre  $\xi$  détermine le poids de la viscosité (le rapport  $\zeta/\eta$  est généralement de l'ordre de l'unité pour les liquides). Le paramètre  $\theta$  détermine l'importance de la diffusion thermique. Pour comparer ces deux effets, nous pouvons donner une estimation de  $\xi$  et  $\theta$  pour l'eau, dans les conditions usuelles (température et pression ambiantes), en fonction de la fréquence :  $\xi/f \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ MHz}^{-1}$  et  $\theta/f \approx 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ MHz}^{-1}$  (avec  $\eta = 10^{-2} \text{ Poise} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ ,  $\zeta/\eta = 3$ ,  $\kappa = 0,1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $c_p = 75,3 \text{ J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}$  et  $c_v = 74,4 \text{ J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}$ )<sup>11</sup>. Dans ce cas précis, la diffusion thermique peut donc être négligée devant la viscosité.

A droite de l'équation (1.50), le premier terme, pondéré par le coefficient de non-linéarité  $\beta$  du fluide, regroupe les non-linéarités cumulatives (convective et thermodynamique).

Le deuxième terme non linéaire fait intervenir la densité Lagrangienne d'énergie  $L$ . Pour l'interpréter, écrivons les relations entre les différentes grandeurs acoustiques en régime non linéaire. La vitesse étant irrotationnelle, elle dérive d'un potentiel  $\phi$  :  $\mathbf{v} = -\nabla\phi$ . Ce dernier est adimensionné :  $\phi = \frac{c_0 M}{k} \tilde{\phi}$ . En négligeant le terme thermo-visqueux de l'équation de conservation de la quantité de mouvement 1.43, nous exprimons la pression en fonction du potentiel :

$$\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} - M\tilde{L} + O(M^2). \quad (1.53)$$

$\tilde{L}$  intervient donc dans l'expression localement non linéaire de la pression en fonction du potentiel. Le second terme non linéaire de l'équation d'onde (1.50) traduit donc l'existence de ces "non linéarités locales". Lorsque les ondes sont émises par une source directive, l'effet de ce terme local sur la

<sup>11</sup>Pour les valeurs numériques, se référer à [1] et aux sites web : <http://webbook.nist.gov> et <http://scienceworld.wolfram.com/physics/>.

propagation est négligeable devant celui du terme cumulatif, dès que la distance de propagation atteint environ une longueur d'onde. Pour une onde plane, l'équipartition des énergies cinétique et potentielle se traduit par l'annulation de la densité Lagrangienne d'énergie<sup>12</sup>. L'équation décrivant la propagation non linéaire d'une onde plane ne comporte donc pas de terme local.

En variables dimensionnées, l'équation d'onde (1.50) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p - b \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_0^2 \Delta \right) L, \quad (1.54)$$

avec le coefficient d'absorption, homogène à une durée (caractéristique des phénomènes de relaxation) :

$$b = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left[ \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) + \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (1.55)$$

La pression s'exprime en fonction du potentiel à partir de la relation (1.53) :

$$p = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2. \quad (1.56)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (1.54), nous obtenons l'équation de propagation non linéaire quadratique en potentiel, introduite par Kuznetsov en 1971 [12] (on regroupe dans le terme de droite, deux terme de l'équation en pression (1.54), à l'aide des relation d'ordre 1 en  $M$ ) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 + b \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \phi = \frac{\partial}{\partial t} \left( (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{B_l}{2A_l} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right). \quad (1.57)$$

Cette formulation de l'équation d'onde ne sépare pas les effets non linéaires cumulatif et local. En revanche, elle met clairement en évidence les deux origines physiques de la non linéarité en acoustique (la convection avec le terme  $(\nabla \phi)^2 = \mathbf{v}^2$ , et la non linéarité thermodynamique avec le terme  $\frac{B_l}{2A_l} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 = \frac{B_l}{2A_l} \frac{p^2}{\rho_0^2}$ ).

Examinons maintenant la propagation non linéaire d'une onde quasi-plane en milieu absorbant. Pour une telle onde, l'équation de propagation en pression (1.54) se réduit à l'équation de Westervelt<sup>13</sup> [13] :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p - b \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 (p^2)}{\partial t^2}. \quad (1.58)$$

L'équation de Burgers est la forme unidimensionnelle de l'équation de Westervelt. Pour une onde se propageant dans une direction  $z$  positive, elle s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{b}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^2} p \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.59)$$

<sup>12</sup>D'une façon générale, le principe de moindre action postule que l'intégrale temporelle de  $L$  (i.e. l'action) doit être minimale au cours d'un processus. La densité Lagrangienne d'énergie d'un système libre tend donc à s'annuler, comme c'est le cas pour un corps en chute libre ou pour une onde devenue localement plane, loin de sa source.

<sup>13</sup>L'équation initialement établie par Westervelt ne prend pas en compte les phénomènes thermo-visqueux.

Dans un fluide parfait ( $b = 0$ ), nous retrouvons l'équation de Burgers non dissipative. Elle peut être obtenue directement à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

### 1.2.3 Résolution de l'équation d'onde en régime non linéaire

L'étude des équations non-linéaires constitue un vaste domaine des mathématiques, s'appliquant par exemple aux phénomènes d'instabilités ou à la propagation des ondes. Les méthodes mathématiques de résolution de l'équation de propagation en régime non linéaire sont notamment détaillées dans les livres de Rudenko et Soluyan [14], ou Naugolnykh et Ostrovsky [15]. La principale difficulté réside dans le fait que cette équation ne permet plus l'utilisation du principe de superposition.

#### 1.2.3.1 Ondes planes

Etudions tout d'abord les solutions de l'équation de Burgers (1.59) dans un fluide parfait pour lequel  $b = 0$ . Lors de la propagation d'une onde acoustique, la vitesse particulière  $v_0$  est toujours faible devant la vitesse du son  $c_0$ . Le nombre de Mach acoustique  $M = \frac{v_0}{c_0}$  est donc petit devant l'unité<sup>14</sup>. L'équation de Burgers non dissipative s'écrit alors pour la vitesse particulière  $v$  :

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{c_0 \left(1 + \beta \frac{v}{c_0}\right)} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (1.60)$$

car la relation  $p = \rho_0 c_0 v$  reste valable pour une onde plane en régime non linéaire. La vitesse de propagation du son dépend donc de la vitesse particulière de l'onde acoustique :  $c = c_0 + \beta v$ . Lors de sa propagation, l'onde est supersonique durant ses phases de compression, et subsonique durant ses phases de détente.

**Ondes planes harmoniques :** Les solutions implicites de l'équation (1.60) s'écrivent, pour une excitation harmonique :

$$v = v_0 \sin \omega \left( t - \frac{z}{c_0 + \beta v} \right). \quad (1.61)$$

En introduisant le temps retardé  $\tau = t - \frac{z}{c_0}$ , il vient :

$$v = v_0 \sin \omega \left( \tau + \frac{z}{c_0} \left( \frac{\beta \frac{v}{c_0}}{1 + \beta \frac{v}{c_0}} \right) \right). \quad (1.62)$$

En ne conservant que les termes du premier ordre en nombre de Mach ( $\beta \frac{v}{c_0} \ll 1$ ), qui modélisent les effets non linéaires quadratiques, il vient :

$$v \approx v_0 \sin \omega \left( \tau + \frac{z \beta M}{c_0} \frac{v}{v_0} \right). \quad (1.63)$$

<sup>14</sup>Par exemple, un nombre de Mach de l'ordre de  $10^{-3}$  dans l'eau ou dans l'air correspond à une propagation devenant rapidement très non linéaire en raison de son caractère cumulatif (si l'onde n'est pas atténuée).

Le terme non linéaire de l'équation (1.63) est proportionnel à la distance de propagation  $z$ , ce qui traduit le caractère cumulatif des effets non linéaires. La propagation non linéaire s'accompagne d'un raidissement progressif de la forme d'onde, pouvant aboutir à la création d'un choc (discontinuité dans la forme d'onde), lorsque les surpressions rattrapent les détentes (voir figure 1.1).

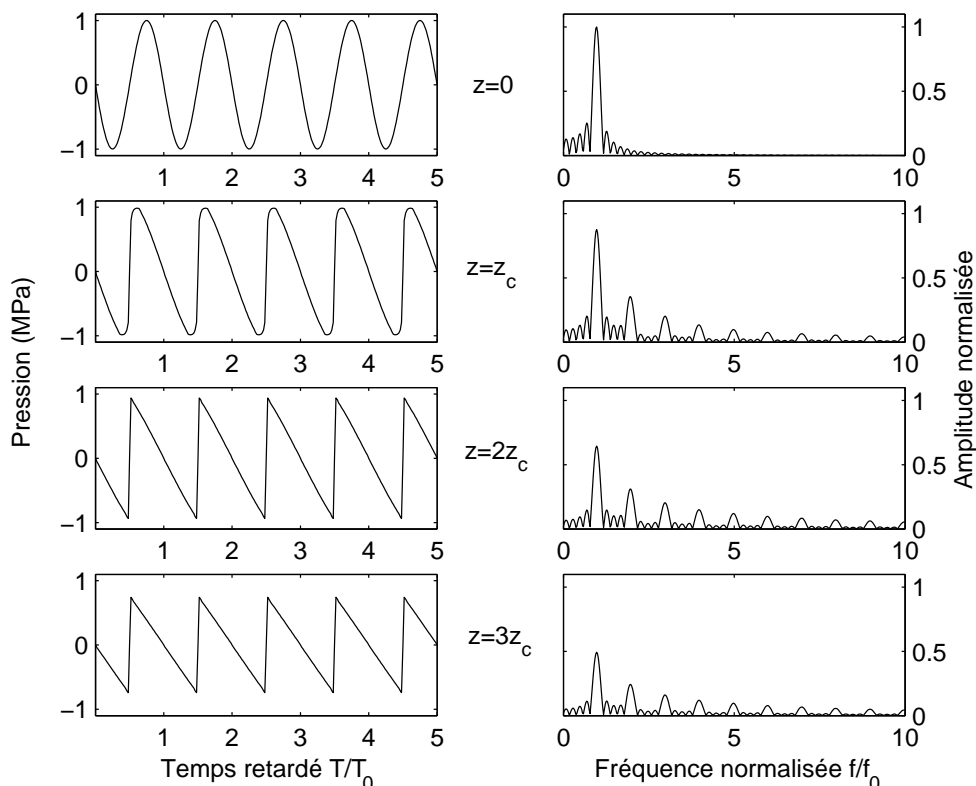


FIG. 1.1 – Solution numérique de l'équation de Burgers illustrant la distortion du front d'onde (à gauche) et la génération d'harmoniques (à droite).

En "inversant" la relation (1.63), nous obtenons :

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{v}{v_0}\right) - zk\beta M \frac{v}{v_0}. \quad (1.64)$$

Une discontinuité survient dans la forme d'onde lorsque la pente  $-zk\beta M$  du second terme de l'expression (1.64) compense la pente de l'arcsinus égale à 1 autour de l'origine. La distance de formation du choc (ou distance de discontinuité) est donc :

$$z_c = \frac{1}{k\beta M}. \quad (1.65)$$

C'est la distance caractéristique des effets non linéaires.

**Onde de choc :** Au delà de la distance de choc  $z_c$ , la forme d'onde (1.63) est multivaluée, ce qui n'est pas possible physiquement. Pour retrouver un profil monovalué, il est nécessaire d'introduire

des discontinuités (les chocs) entre les différentes parties monovaluées du profil. La position de ces chocs est déterminée analytiquement à partir de l'équation de Burgers par la théorie des chocs faibles (voir par exemple [16]), ou par sa formulation géométrique proposée par Landau en 1945 (la loi des aires égales [17]). Le front de l'onde de choc est une surface de discontinuité à travers laquelle les grandeurs thermodynamiques (pression, masse volumique et entropie) et hydrodynamique (vitesse normale à la surface de discontinuité) caractérisant l'onde varient par saut. Le choc est donc en particulier le siège d'un accroissement d'entropie<sup>15</sup>, traduisant une conversion en chaleur de l'énergie mécanique véhiculée par l'onde, même dans un fluide parfait. La diminution de l'amplitude de l'onde de choc représentée sur la figure 1.1 illustre cet effet, appelé extra-atténuation non linéaire. Par ailleurs, on peut montrer à l'aide de l'adiabatique de Rankine et Hugoniot que le saut d'entropie est du troisième ordre de petitesse par rapport au saut de pression à travers le choc [18] [14] :  $\Delta s \propto (\Delta p)^3$ . La constante de proportionnalité étant positive, il ne peut exister que des chocs de compression.

Comme le montre les figures 1.1 et 1.2, le raidissement progressif de la forme d'onde sinusoïdale se traduit dans le domaine spectral par la création, en cascade<sup>16</sup>, d'harmoniques de la fréquence initiale. Le signal restant périodique, il est possible de développer la pression en série de Fourier en deçà de la distance de formation du choc : c'est la solution de Fubini (1935) [1]. Pour une source sinusoïdale la vitesse s'écrit :

$$v(z, \tau) = v_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) \sin n\omega\tau,$$

avec  $\tau = t - z/c_0$ , le temps retardé. Les amplitudes des harmoniques  $A_n(z)$ , s'écrivent, en fonction de la distance normalisée par la distance de choc  $\tilde{\sigma} = z/z_c$  :

$$A_n = \frac{2}{n\tilde{\sigma}} J_n(n\tilde{\sigma}) \text{ pour } \tilde{\sigma} \leq 1, \quad (1.66a)$$

$$A_n = \frac{2}{n(1 + \tilde{\sigma})} \text{ pour } \tilde{\sigma} \geq 3, \quad (1.66b)$$

Dans la solution de Fubini (1.66a), établie pour un gaz non-dissipatif et correcte jusqu'à la distance de choc, ces coefficients sont des fonctions de Bessel. Ils sont de la forme (1.66b) dans la solution donnée par Fay, valable pour une distance de propagation grande devant la distance de choc ( $\tilde{\sigma} \geq 3$ ), on obtient alors le profil en dents de scies caractéristique des ondes de compression choquées. Une solution intermédiaire ( $1 \geq \tilde{\sigma} \geq 3$ ) est donnée par Blackstock [19].

L'extra-atténuation non linéaire du choc peut s'interpréter physiquement comme la création d'harmoniques de fréquences très élevées, incapables d'entraîner dans un mouvement d'ensemble cohérent les particules microscopiques constituant le milieu, et produisant juste une agitation thermique.

<sup>15</sup>En vertu du second principe, celle d'un fluide en mouvement ne peut que croître ou rester constante.

<sup>16</sup>L'interaction non linéaire quadratique d'une onde de fréquence  $f$  avec elle-même crée en premier lieu la seconde harmonique  $2f$ . Cette dernière interagit alors avec la fréquence fondamentale pour produire la troisième harmonique  $3f$ . Les harmoniques successives sont donc produites "en cascade" au cours de la propagation.

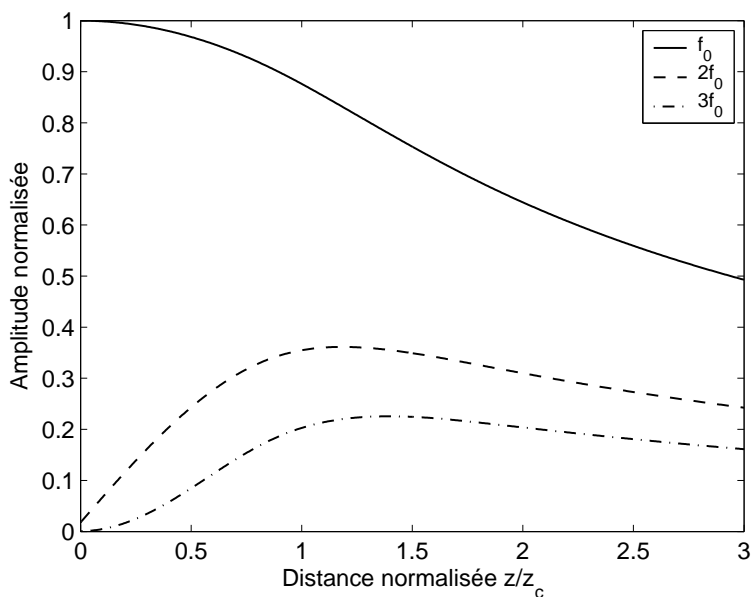


FIG. 1.2 – Evolution de l'amplitude des trois premières harmoniques en fonction de la distance à la source.

**Interaction à deux ondes :** Lorsque deux ondes planes harmoniques de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  se propagent non linéairement dans la même direction  $z$ , l'interaction non linéaire quadratique crée non seulement des ondes aux fréquences harmoniques doubles  $2f_1$  et  $2f_2$ , mais aussi des ondes aux fréquences somme et différence :  $f_1 \pm f_2$ . Au cours de la propagation, ces dernières se recombinent avec les ondes initiales pour créer des ondes aux fréquences  $2f_1 + f_2$ ...

La solution de Fubini, valable pour des ondes planes se propageant suivant une même direction, a été généralisée par Fenlon [20] pour une superposition de plusieurs composantes fréquentielles. Elle complète<sup>17</sup> les solutions obtenues par Westervelt [13] pour l'interaction paramétrique, et avec laquelle l'interaction est limitée au champ proche et seule la fréquence différence est calculée, loin de la source. Cette dernière correspond à une des premières applications pratiques des non-linéarités acoustiques : un sonar émettant deux ondes de fréquences proches, dont l'interaction produit une onde de basse fréquence, possède une meilleure directivité (celle des ondes de haute fréquence).

Considérons l'interaction non linéaire de deux ondes planes harmoniques, de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , dont les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  forment un angle  $\Theta$ . Etudions par exemple la génération de l'onde de fréquence  $f_+ = f_1 + f_2$ . Le carré de la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_+ = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , est :

$$|\mathbf{k}_+|^2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{c_0^2} + 2 \frac{\omega_1 \omega_2}{c_0^2} \cos \Theta. \quad (1.67)$$

Or, la relation de dispersion du milieu de propagation lie la norme du vecteur d'onde à la fréquence

<sup>17</sup> Seulement en terme de contenu fréquentiel, puisque Westervelt ne pose pas l'hypothèse de la propagation unidirectionnelle.

créée :

$$|\mathbf{k}_+|^2 = \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{c_0^2} \right)^2. \quad (1.68)$$

Les équations (1.67) et (1.68) ne sont satisfaites simultanément que lorsque  $\Theta = 0$ , c'est-à-dire lorsque les deux vecteurs d'ondes sont colinéaires. Cette condition est nécessaire à la synchronisation en phase des "sources non linéaires" créées par les deux ondes primaires au cours de leur propagation.

Lorsque les deux ondes primaires se propagent dans une même direction  $z$ , l'onde de fréquence  $f_2$  (de vitesse particulière  $v_2$ ) perturbe la propagation de l'onde de fréquence  $f_1$  (et vice-versa), en modifiant sa vitesse de propagation :  $c(z, t) = c_0 + \beta v_2 \left( t - \frac{z}{c_0} \right)$ . La phase de l'onde "1" est donc modulée par son interaction non linéaire avec l'onde "2" :

$$p_1(z, t) = p_{01} \sin \left[ \omega_1 \left( t - \frac{z}{c_0} \right) + \Phi_p(z, t) \right], \quad (1.69)$$

où :

$$\Phi_p(z, t) = \frac{2\pi f_1}{c_0^2} \beta z v_2 \left( t - \frac{z}{c_0} \right). \quad (1.70)$$

Dans le chapitre 2, nous exploitons la mesure de la modulation de phase (1.70) pour déterminer le paramètre de non linéarité du milieu de propagation.

**Solution générale de l'équation de Burgers :** L'équation de Burgers non dissipative est souvent écrite à l'aide des variables adimensionnées  $\tilde{\tau} = \omega\tau$ ,  $\tilde{\sigma} = \frac{z}{z_c}$  et  $\tilde{p} = \frac{p'}{p'_0}$ , où  $\omega$  est une fréquence caractéristique de l'onde et  $p'_0$  l'amplitude de la pression à la source :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}} = \tilde{p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\tau}}. \quad (1.71)$$

La solution générale de cette équation est donnée sous forme implicite (Poisson (1808)) par :

$$\tilde{p}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = F(\theta), \text{ avec : } \tilde{\tau} = \theta - \tilde{\sigma}F(\theta), \quad (1.72)$$

$F$  étant la forme d'onde imposée à la source. Elle est obtenue par la méthode des caractéristiques, généralisée par Riemann [21].

Pour une onde simple, l'application des conditions initiales permet d'exprimer  $p$  de manière implicite : pour une onde monochromatique, on retrouve la solution 1.61. Pour expliciter la solution, l'équation implicite donnant  $p$  peut être résolue en développant la solution en série de puissances : la pression est prise sous la forme  $p = p^0 + Mp^I + M^2p^{II}$ . Les différentes composantes du champ s'expriment alors en fonction de la condition initiale  $F(t)$  et de ses dérivées [22]. Cette méthode est à rapprocher des méthodes dites en perturbation ou approximation successives : elle n'est valable que près de la source. Si  $F(t)$  est périodique, un développement en série de Fourier nous ramène à la solution de Fubini.

L'équation de Burgers peut également être résolue numériquement, à l'aide, par exemple, d'un schéma aux différences finies. Lorsque la distance de choc est atteinte, un algorithme de "capture de choc" répercute sur l'amplitude du choc l'effet de l'extra-atténuation non linéaire [23]. Une

simulation numérique développée au LOA par Mickaël Tanter, basée sur ce principe, nous a permis de tracer les figures 1.2 et 1.1 (nous utilisons, au troisième chapitre, une adaptation de ce code pour simuler la propagation non-linéaire d'ondes transverses).

### 1.2.3.2 Ondes planes atténuées

Examinons à présent les solutions de l'équation de Burgers dissipative (1.59). En régime linéaire, dans un milieu absorbant, la recherche d'une solution de l'équation d'onde sous forme d'onde plane harmonique (de pulsation  $\omega$ ) conduit à la définition du coefficient d'atténuation  $\alpha$  de l'onde, relié au coefficient d'absorption  $b$  (cf. (1.55)) du fluide :

$$\alpha(\omega) = \frac{b\omega^2}{2c_0}. \quad (1.73)$$

Les solutions de l'équation de propagation linéaire en milieu absorbant s'écrivent alors :

$$p(z, t) = p_0 e^{-\alpha z} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right)}. \quad (1.74)$$

La longueur d'atténuation  $z_a$  est définie comme l'inverse du coefficient d'atténuation :  $z_a = \frac{1}{\alpha}$ .

L'adimensionnement de l'équation de Burgers dissipative (1.59), à l'aide des variables  $\tilde{\tau}$ ,  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{p}$  définies ci-dessus, conduit à l'expression :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}} = \tilde{p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{1}{\Gamma_G} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{\tau}^2}, \quad (1.75)$$

où  $\Gamma_G = \frac{z_a}{z_c}$  est le paramètre de Gol'dberg. Il compare l'importance relative des effets de la non linéarité et de l'atténuation, qui sont en compétition. En effet, plus l'onde est atténuée, plus les effets non linéaires sont faibles, et les harmoniques sont atténués plus rapidement que la fondamentale en raison de leur fréquence plus élevée. Si  $\Gamma_G \ll 1$ , l'atténuation domine les effets non linéaires et aucun choc ne peut se former au cours de la propagation. Si  $\Gamma_G \geq 1$ , la non linéarité domine les effets dissipatifs et la propagation peut être fortement non linéaire loin de la source. Les solutions harmoniques de l'équation (1.75) peuvent également être mises sous la forme de séries.

### 1.2.3.3 Diffraction et effets non linéaires

L'équation de propagation non linéaire quadratique ne peut pas être résolue ou simulée numériquement sans certaines approximations. Nous avons jusqu'à présent étudié le cas des ondes planes ; examinons maintenant d'autres hypothèses simplificatrices permettant de prendre en compte les phénomènes de diffraction.

**Approximation de faible non linéarité ou quasi-linéaire :** Lorsque le niveau des ondes créées par les effets non linéaires reste faible devant celui des composantes fondamentales, il est possible de traiter ces ondes (secondaires) comme une perturbation  $p^{II}$  des ondes (primaires) initialement émises  $p^I$ . La pression acoustique se développe alors en puissances du nombre de mach  $M$  :

$$p = Mp^I + M^2p^{II}. \quad (1.76)$$

Ce développement perturbatif est valable dans un milieu absorbant, si  $\Gamma_G \ll 1$ , ou tant que la distance de propagation est très inférieure à  $z_c$ . En introduisant ce développement dans l'équation de propagation non linéaire (1.54), nous retrouvons à l'ordre 1 l'équation de propagation linéaire en milieu absorbant :

$$\frac{\partial^2 p^I}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p^I - b \frac{\partial^3 p^I}{\partial t^3} = 0. \quad (1.77)$$

Cette approximation quasi-linéaire revient donc à négliger l'énergie extraite des ondes primaires par les phénomènes non linéaires, devant celle dissipée dans le milieu.

À l'ordre 2, les ondes secondaires obéissent à l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 p^{II}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p^{II} - b \frac{\partial^3 p^{II}}{\partial t^3} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p^{I2}}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_0^2 \Delta \right) L^I, \quad (1.78)$$

où  $L^I$  est la densité Lagrangienne d'énergie des ondes primaires. Le second membre de l'équation précédente est un terme source quadratique issu de la propagation des ondes primaires. Le problème est ainsi découplé et il est possible de trouver l'expression analytique du champ de pression  $p^{II}$  créé par la propagation non linéaire des ondes primaires  $p^I$ .

Le formalisme de Fourier (voir par exemple [24]) est bien adapté à la recherche de cette solution analytique prenant en compte les effets de diffraction et d'atténuation en régime harmonique. Après qu'Ingenito et Williams [25] aient utilisé ce formalisme pour étudier les effets de diffraction affectant la seconde harmonique dans un fluide parfait, Alais et Cervenka l'ont employé pour décrire l'interaction non linéaire faible de deux ondes harmoniques [26] [27]. Barrière l'a ensuite adapté à l'étude du dispositif expérimental du chapitre 2, destiné à la mesure des coefficients de non linéarité des fluides [28]. Cette étude montre que lorsque les ondes interagissant ont des fréquences très différentes, les profils de diffraction des ondes secondaires aux fréquences somme et différence sont similaires à celui de l'onde primaire de plus haute fréquence. Dans ce cas, l'interaction non linéaire des deux ondes primaires peut s'exprimer comme une simple modulation de la phase de l'onde de plus haute fréquence, comme lors de l'interaction d'ondes planes (cf. 1.2.3.1).

**Equation KZ :** L'équation de propagation non linéaire quadratique (1.54) peut aussi être simulée numériquement en supposant que les ondes sont émises par une source assez directive et quasi-plane. Considérons une telle source, de dimension transverse caractéristique  $a$ , située dans le plan  $z = 0$ . Nous adimensionnons par  $a$  les variables  $x$  et  $y$ , coordonnées transverses à la direction de propagation  $z$  :

$$\tilde{X} = \frac{x}{a} = \frac{\tilde{x}}{ka} \text{ et } \tilde{Y} = \frac{y}{a} = \frac{\tilde{y}}{ka}, \quad (1.79)$$

Le paramètre  $\delta = \frac{1}{ka}$  est caractéristique de la diffraction de l'onde. Lorsque la source acoustique est directive, sa dimension caractéristique  $a$  est très grande devant la longueur d'onde  $\lambda$  :  $\delta \ll 1$ .

En exprimant l'équation (1.54) à l'aide des variables adimensionnées  $\tilde{\tau} = \omega\tau$ ,  $\tilde{\sigma} = \frac{z}{z_c}$ ,  $\tilde{p} = \frac{p'}{p_0}$ ,  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$ , nous obtenons dans un fluide parfait ( $b = 0$ ) l'équation "KZ" (Khokhlov-Zabolotskaya) [29] :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{\sigma}} = N \Delta_{\perp} \tilde{p} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \left( \tilde{p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\tau}} \right), \quad (1.80)$$

où  $\Delta_{\perp}$  désigne l'opérateur laplacien dans le plan  $(x, y)$ .

Le paramètre  $N = \frac{z_c}{4\pi z_f}$ , où  $z_f$  est la distance de Fresnel<sup>18</sup>, compare l'importance relative des effets de la diffraction et de la non linéarité. Si  $N \ll 1$ , des effets non linéaires ont lieu au cours de la propagation, avant que l'onde ne s'étale spatialement. Dans le cas contraire, la diffraction domine la non linéarité. A l'aide des paramètres  $N$  et  $\Gamma_G$ , il est donc possible de déterminer simplement dans quelle mesure la propagation d'une onde acoustique est non linéaire.

L'équation KZ peut être simulée numériquement à l'aide d'un schéma à "pas fractionnés", qui consiste à simuler séparément la diffraction et la non linéarité, sur des pas  $\Delta z$  de l'ordre de la longueur d'onde caractéristique  $\lambda$  [30]. Le couplage des effets de la diffraction et de la non linéarité est créé par la répétition du procédé.

### 1.3 Milieu solide

De nombreuses années ont été nécessaires à l'élaboration du formalisme de l'élasticité, dont l'histoire commence au XVII<sup>ème</sup> siècle avec Hooke. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, la contribution de Voigt est déterminante (il laisse d'ailleurs son nom à la notation contractée des constantes élastiques), puisqu'il apporte à l'élasticité les bases du formalisme tensoriel, qui rend plus aisée l'application des considérations de symétrie. Plus tard, Brillouin (1938), puis Truesdell (1968) développent l'utilisation du calcul tensoriel en mécanique des solides élastiques.

Les recherches portant sur la propagation non-linéaire des ondes élastiques dans les solides commencent plus tardivement. Même si depuis la loi de Hooke un grand nombre de lois de comportement ont été imaginées, il faut attendre le début du XX<sup>ème</sup> siècle pour qu'un formalisme de l'élasticité non-linéaire soit proposé. Voigt, Birch, Murnaghan, Toupin et Bernstein, Eringen et Subini, ou encore Bland, proposent tour à tour différents jeux de constantes élastiques, avant que Brugger ne définisse des constantes élastiques sur des bases thermodynamiques rigoureuses [31]. Les modules élastiques définis par Landau pour les solides isotropes sont également souvent utilisés [32]. A partir des années 50, les publications traitant de la propagation de fortes déformations dans les solides se multiplient.

Dans cette partie, nous définissons les tenseurs (déformations, contraintes) et les principes nécessaires à l'établissement de l'équation de propagation non linéaire dans les solides élastiques, en variables de Lagrange. Nous mentionnons différents systèmes de constantes élastiques, dont les correspondances sont utiles pour la comparaison de nos expériences du deuxième chapitre à des mesures de référence. Dans le cadre de l'approximation du second ordre, nous établissons une analogie avec les fluides, qui permet d'utiliser des solutions identiques à celle du paragraphe 1.2.3, pour l'équation de propagation non linéaire quadratique des ondes longitudinales. A partir de cette

---

<sup>18</sup>Distance caractéristique des effets de diffraction. En régime harmonique, la distance de Fresnel est la position du dernier maximum de pression acoustique sur l'axe d'un transducteur circulaire plan. C'est la distance de propagation à partir de laquelle le champ acoustique diverge spatialement de façon significative.

analogie, nous comparons aussi les modélisations physiques de la convection et de la non linéarité thermodynamique dans les fluides et dans les solides, c'est-à-dire en variables d'Euler et de Lagrange.

### 1.3.1 Rappels de mécanique des milieux continus

Un milieu peut être considéré comme continu à une échelle très supérieure à la taille de ses constituants élémentaires (atomes, molécules ou grains). A cette condition, pour un système de dimensions bien supérieures à cette échelle caractéristique locale, la masse volumique ne dépend plus du volume de matière considéré. Suivant les fréquences ultrasonores utilisées et les caractéristiques acoustiques des matériaux, cette hypothèse est plus ou moins justifiée. Nous considérons ici un milieu homogène, cristallin ou statistiquement isotrope (comme les solides amorphes ou les métaux à grains). Nous supposons nos fréquences ultrasonores telles que les effets de diffusion soient négligeables. En pratique, nos expériences dans les solides sont effectuées à une fréquence maximale de 30 MHz, dans des matériaux dont les célérités sont toujours supérieures à 2500 m/s, ce qui correspond à des longueurs d'ondes supérieures à 80  $\mu\text{m}$ .

#### 1.3.1.1 Tenseurs des déformations

Tout ouvrage de mécanique des milieux continus débute par la définition des différents tenseurs des déformations [2], [33]. Cette étape de la mise en équation est cruciale, comme nous le constaterons non seulement lors de la comparaison fluide/solide développée à la fin de ce chapitre, mais aussi à propos de la distinction entre compression et cisaillement au chapitre 3. Il s'agit en effet de choisir la variable thermodynamique (autre que l'entropie  $s$ ) en fonction de laquelle s'exprime l'énergie élastique du solide déformé.

Les coordonnées matérielles et spatiales correspondent à des référentiels respectivement liés à l'état déformé et à l'état de référence (ou état au repos) (cf. § 1.1). Une fonction  $\chi$  relie les coordonnées d'un point matériel exprimées dans chacune de ces bases. L'axiome d'impénétrabilité impose à  $\chi$  d'être continue et continûment dérivable. La notation de la mécanique des milieux continus confond la fonction de  $\mathbf{a}$  et  $t$  qui transforme les positions dans l'état de référence en celles de l'état déformé, avec le vecteur position lui-même :

$$x_i = \chi_i(a_i, t) \text{ ou } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t). \quad (1.81)$$

La condition suivante assure l'existence de la fonction réciproque  $\chi^{-1}$  :

$$J = \text{Det} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right) \neq 0. \quad (1.82)$$

$J$  (appelé Jacobien) est le déterminant du tenseur gradient des transformations  $\bar{F}$ <sup>19</sup> défini par :

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial a_j} da_j = F_{ij} da_j. \quad (1.83a)$$

<sup>19</sup>Egalement nommé gradient des déformations.

$\bar{F}$  permet le changement de base entre les coordonnées définies par les positions de référence et celles de l'état déformé, et il s'exprime en fonction du déplacement  $\mathbf{U}(\mathbf{a}, t)$  défini par la relation (1.1) :

$$\bar{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} = \bar{I} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{a}}, \quad (1.84)$$

où  $\bar{I}$  est le tenseur identité de rang deux.

Pour exprimer une déformation, il faut tenir compte à la fois des variations de longueur et d'orientation d'un élément de matière. A cette fin, exprimer la transformation du produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{da}$  et  $\mathbf{da}'$  au cours de la déformation semble le plus approprié. Les tenseurs des dilatations de Green  $\bar{C}$  et de Cauchy  $\bar{c}$  expriment le produit scalaire des deux vecteurs dans l'état déformé à partir de leurs coordonnées dans l'état initial et réciproquement :

$$\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}' = \bar{C}(\mathbf{da}, \mathbf{da}'), \text{ avec } \bar{C} = \bar{F}^T \bar{F} \quad (1.85a)$$

$$\text{et } \mathbf{da} \cdot \mathbf{da}' = \bar{c}(\mathbf{dx}, \mathbf{dx}'), \text{ avec } \bar{c} = (\bar{F}^{-1})^T \bar{F}^{-1}. \quad (1.85b)$$

La variation de volume d'un parallélépipède de dimensions infinitésimales s'exprime alors grâce à cette transformation de coordonnées :

$$\left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 = (\det \bar{F})^2 = \det \bar{C}. \quad (1.86)$$

La différence entre les produits scalaires de ces deux éléments de longueur avant et après déformation, définit deux tenseurs  $\bar{S}$  et  $\bar{s}$  :

$$\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}' - \mathbf{da} \cdot \mathbf{da}' = 2\bar{S}(\mathbf{da}, \mathbf{da}') = 2\bar{s}(\mathbf{dx}, \mathbf{dx}') \quad (1.87a)$$

$$\text{avec } 2s_{ij} = \delta_{ij} - c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (1.87b)$$

$$\text{et } 2S_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial a_j} + \frac{\partial U_j}{\partial a_i} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \frac{\partial U_k}{\partial a_j}. \quad (1.87c)$$

$\bar{s}$  et  $\bar{S}$  caractérisent à la fois les variations des longueurs  $|\mathbf{da}|$  et  $|\mathbf{da}'|$ , et la variation de l'angle formé par les directions des deux vecteurs, au cours de la déformation. Ce sont les tenseurs des déformations Eulérien et Lagrangien, appelés aussi tenseurs de Green-Cauchy et de Green-Lagrange. Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons le tenseur  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_j} + \frac{\partial U_j}{\partial a_i} + \frac{\partial U_k}{\partial a_j} \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right)$ , car il décrit l'état d'un solide déformé en coordonnées de Lagrange.

Le tenseur gradient des déplacements  $\bar{H} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{a}}$  est défini par la relation (1.84) :  $\bar{H} = \bar{F} - \bar{I}_d$ . Il se décompose en somme de deux tenseurs, symétrique et antisymétrique :

$$H_{ij} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_j} + \frac{\partial U_j}{\partial a_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_j} - \frac{\partial U_j}{\partial a_i} \right) \right] = \epsilon_{ij} - \omega_{ij}. \quad (1.88)$$

Sa partie symétrique  $\bar{c}$  est le tenseur des déformations infinitésimales<sup>20</sup> utilisé dans le cadre de l'approximation linéaire, car le terme quadratique  $\frac{\partial U_k}{\partial a_i} \frac{\partial U_k}{\partial a_j}$  du tenseur des déformations Lagrangien peut alors être négligé. Ce terme est appelé non-linéarité "géométrique" ou "cinématique" [34], [35].

<sup>20</sup>Ce tenseur des déformations infinitésimales  $\bar{c}$  est identique dans les représentations spatiale et matérielle.

Étudions maintenant brièvement les relations entre les ordres de grandeurs des différentes quantités que nous venons de définir. Parmi ces dernières, le déplacement  $\mathbf{U}$  est la grandeur physique accessible expérimentalement. L'hypothèse des petits déplacements, pour laquelle l'ordre de grandeur du déplacement par rapport à une dimension caractéristique  $L$  du problème est un infiniment petit ( $\frac{\|\mathbf{U}\|}{L} \ll 1$ ), peut donc être vérifiée expérimentalement. Néanmoins, il faut s'assurer de la petitesse des déformations, afin de développer l'énergie interne du solide déformé en fonction de  $\bar{\mathcal{S}}^{21}$ . L'hypothèse des petites déformations est subordonnée à celle des petites transformations, portant aussi sur  $\bar{H}$ , car le tenseur des transformations  $\bar{F}$  est alors proche de l'identité  $\bar{I}$ . Mais l'amplitude du déplacement peut être faible sans que sa dérivée spatiale le soit. Parmi les implications suivantes, habituellement admises, la première n'est donc en général pas rigoureusement justifiée [2] :

$$\frac{\|\mathbf{U}\|}{L} \ll 1 \implies \|\bar{H}\| \ll 1 \implies \|\bar{\mathcal{S}}\| \ll 1.$$

### 1.3.1.2 Définition des contraintes et relation fondamentale de l'élastodynamique

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{T}$  est défini par le théorème du même nom. L'application du bilan de quantité de mouvement sur une surface fermée (un petit tétraèdre, c'est plus pratique) permet de démontrer que la dépendance du vecteur représentant la contrainte sur un élément de surface est linéaire par rapport à la normale à cette surface :  $\mathbf{T}(M, t, \vec{n}) = \bar{T}(M, t) \mathbf{n}$ . En conséquence, la donnée des contraintes suivant trois directions formant une base suffit à déterminer la force exercée sur n'importe quel élément de surface [36]. Ce tenseur  $\bar{T}$  est défini en variables d'Euler et le bilan de quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla_x \cdot \bar{T}. \quad (1.89)$$

Pour écrire ce même bilan en coordonnées Lagrangiennes, on définit le tenseur des contraintes de Lagrange ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff [1] (Chap. 9) :

$$\bar{P} = \det(\bar{F}) \bar{T} \cdot (\bar{F}^{-1})^T. \quad (1.90)$$

En coordonnées de Lagrange, l'équation (1.89) s'écrit alors :

$$\rho_0 \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \nabla_a \cdot \bar{P}. \quad (1.91)$$

Pour établir l'équation de l'élasto-dynamique et définir le tenseur des contraintes de Piola, une méthode plus directe utilise la formulation de Lagrange [37]. Il est équivalent d'effectuer le changement de coordonnées sur l'une ou l'autre de ces deux formes de bilan de quantité de mouvement, à la nuance près que l'expression des contraintes en fonction de l'énergie potentielle élastique apparaît "naturellement" dans les lignes qui suivent.

<sup>21</sup>Même si les déformations ne sont pas infinitésimales comme dans le cadre de l'approximation linéaire, elles doivent rester petites pour que le développement de Taylor de l'énergie interne nécessaire à l'établissement de l'équation d'onde soit réaliste.

La densité Lagrangienne d'énergie d'un solide est la différence entre ses énergies cinétique et potentielle :

$$L = \frac{1}{2}\rho_0 \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 - W(\bar{S}), \quad (1.92)$$

où la variable thermodynamique choisie pour exprimer l'énergie potentielle du solide déformé est le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\bar{S}$ . L'équation de Lagrange (qui traduit le principe de moindre action) s'écrit [3] :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (1.93)$$

En coordonnées de Lagrange, il vient :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{da_k} \frac{\partial L}{\partial (\partial x_i / \partial a_k)} = 0. \quad (1.94)$$

En introduisant l'expression (1.92) dans l'équation précédente, il vient après quelques manipulations tensorielles [38] :

$$\rho_0 \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{da_k} \left( \frac{\partial W}{\partial S_{km}} F_{im} \right). \quad (1.95)$$

En notations vectorielles, on retrouve le bilan de quantité de mouvement (1.91) :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \nabla_a \cdot \left( \bar{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{S}} \right). \quad (1.96)$$

Le tenseur des contraintes  $\bar{P}$  est alors directement défini en fonction de l'énergie potentielle élastique  $W$  :

$$\bar{P} = \bar{F} \cdot \bar{P}', \quad (1.97)$$

avec  $\bar{P}' = \frac{\partial W}{\partial \bar{S}}$ , le second tenseur de Piola-Kirchhoff.

Le passage en coordonnées de Lagrange fait disparaître le terme non-linéaire à gauche de l'équation (1.89). Les termes non-linéaires de l'équation d'onde en coordonnées de Lagrange proviennent donc tous de la divergence du tenseur de Piola-Kirchhoff. L'interprétation en terme de non-linéarité advective et thermodynamique est donc difficile au premier abord pour les solides.

Lors du passage de l'équation (1.94) à l'équation (1.95), la composition des dérivations par rapport à  $\partial x_i / \partial a_k$  et  $\bar{S}$  fait apparaître le tenseur des transformations  $\bar{F} = \bar{I} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{a}}$ . Ce produit implique des termes d'ordre plus élevé (en gradient des déplacements) dans l'expression de  $\bar{P}$ . La nonlinéarité géométrique de  $\bar{S}$  contribue donc à celle de l'équation d'onde, par l'intermédiaire de ce changement de variable (ou de coordonnées).

### 1.3.2 Lois de comportement

Les déformations sont définies par des considérations géométriques et les contraintes le sont par un principe d'équilibre d'un volume donné de matière. Il reste à présent à préciser la dépendance de l'énergie élastique en fonction des déformations.

Les origines de la non-linéarité dans les solides sont rappelées par Engelbrecht [39] : l'approximation linéaire revient à considérer un potentiel d'interaction parabolique entre les constituants

microscopiques du milieu. Pour de fortes déformations, cette approximation n'est plus valable et il faut tenir compte de la courbure différente du potentiel, plus loin de la position d'équilibre<sup>22</sup>. L'auteur reprend l'historique des modèles de relation contrainte-déformation employés depuis Hooke (1678). Certains modèles sont spécialement dédiés à une catégorie de matériaux (comme le modèle de Mooney-Rivlin, présenté en annexe A), d'autres sont adaptés à des comportements spécifiques comme les cycles d'hystérésis, la plasticité ou le durcissement.

Nous traitons ici de la propagation d'ondes dans un milieu anisotrope élastique. Cette approche "classique" de la non linéarité est pertinente pour des solides cristallins idéaux ou des matériaux parfaitement homogènes. Les lois "non classiques" utilisées pour décrire le comportement des cristaux comportant des défauts (lacunes, dislocations, impuretés) ou des solides présentant des microfissures ou des inhomogénéités de composition, sont présentées dans l'annexe B.

### 1.3.2.1 Constantes élastiques d'un milieu anisotrope

Pour traiter la propagation des ondes élastiques, l'hypothèse des transformations adiabatiques-réversibles est souvent de mise. D'un point de vue thermodynamique, c'est donc l'énergie interne que nous développons en fonction des déformations.

L'énergie potentielle élastique est un scalaire invariant par toute transformation appartenant au groupe de symétrie du milieu considéré. Elle s'exprime donc en fonction des produits contractés du tenseur des déformations. L'énergie interne par unité de masse est alors développée de la façon suivante<sup>23</sup> :

$$W = \frac{1}{2!} C_{ijkl}^s S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklmn}^s S_{ij} S_{kl} S_{mn} + \frac{1}{4!} C_{ijklmnpq}^s S_{ij} S_{kl} S_{mn} S_{pq} + O(\bar{S}^5), \quad (1.98)$$

où les constantes élastiques adiabatiques d'ordres deux, trois et quatre sont définies comme des dérivées partielles de l'énergie interne par rapport aux déformations [31] :

$$C_{ijkl}^s = \rho_0 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)_{s, S_{ij}=S_{kl}=0}, \quad (1.99a)$$

$$C_{ijklmn}^s = \rho_0 \left( \frac{\partial^3 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{s, S_{ij}=S_{kl}=S_{mn}=0}, \quad (1.99b)$$

$$\text{et } C_{ijklmnpq}^s = \rho_0 \left( \frac{\partial^4 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn} \partial S_{pq}} \right)_{s, S_{ij}=S_{kl}=S_{mn}=S_{pq}=0}. \quad (1.99c)$$

L'énergie interne est définie à une constante près<sup>24</sup>, sans importance pour la propagation des ondes élastiques, car le tenseur des contraintes de Piola est une dérivée de l'énergie (voir l'équation (1.97)). Par ailleurs, le terme d'ordre un est nécessairement nul, car il créerait un terme constant dans l'expression de  $\bar{P}$ , correspondant à une contrainte non nulle à déformation nulle.

<sup>22</sup>Les origines microscopiques des lois de comportement font l'objet de l'annexe A.

<sup>23</sup>Si la propagation est isotherme, c'est l'énergie libre de Helmholtz qui est développée d'une manière analogue.

<sup>24</sup>Ce terme d'ordre zéro contient l'énergie de cohésion du solide, ainsi que la contribution d'éventuelles tensions internes (ou contraintes résiduelles).

Dans le développement (1.98), le terme quadratique modélise la propagation linéaire des ondes élastiques. Les ordres de dérivation supérieurs à deux prennent en compte l'amplitude finie des déformations. Les termes cubiques du développement de l'énergie donnent lieu à des termes non linéaires quadratiques dans l'équation d'onde. Nous limiterons donc le développement (1.98) de l'énergie à l'ordre trois dans le présent chapitre<sup>25</sup>.

Le tenseur de rang quatre  $C_{ijkl}$  comporte *a priori*  $3^4 = 81$  composantes indépendantes et celui de rang six,  $C_{ijklmn}$ , possède  $3^6 = 729$  composantes distinctes. La symétrie du tenseur des déformations  $\bar{S}$  autorise la permutation des indices de chaque paire (ij), (kl) ou (mn). Chacune d'elle est alors remplacée par un seul indice variant de 1 à 6. Cette notation, dite de Voigt, réduit respectivement à 36 et 216 le nombre de constantes indépendantes des deux tenseurs, notés alors  $C_{\alpha\beta}$  et  $C_{\alpha\beta\gamma}$ . Les relations thermodynamiques de Maxwell<sup>26</sup> réduisent le nombre de constantes élastiques indépendantes à 21 pour  $C_{\alpha\beta}$  et 56 pour  $C_{\alpha\beta\gamma}$ .

Enfin, pour un cristal de symétrie donnée, ces tenseurs sont invariants par toutes les opérations de symétrie du groupe d'espace auquel appartient le cristal, ce qui permet de réduire encore le nombre de constantes indépendantes. Par exemple, un cristal cubique est caractérisé par trois modules du second ordre et six constantes élastiques du troisième ordre. Un milieu isotrope est caractérisé par deux constantes élastiques du second ordre  $c_{11}$  et  $c_{44}$ , et trois constantes élastiques du troisième ordre  $c_{111}$ ,  $c_{166}$  et  $c_{456}$ .

### 1.3.2.2 Modules de Landau et de Murnaghan : milieu isotrope

L'approche de Landau se limite au cas du solide isotrope. Elle consiste à exprimer l'énergie potentielle élastique en fonction d'invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  du tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$W = \mu I_2 + \frac{1}{2} \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) I_1^2 + \frac{1}{3} A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3} C I_1^3 + O(\bar{S}^4) \quad (1.100)$$

où  $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$  et  $\mu$  sont respectivement les modules de compression et de cisaillement ( $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé).  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont appelés modules de Landau. Les invariants choisis par Landau sont la trace du tenseur des déformations<sup>27</sup> et deux scalaires formés à partir de produits contractés d'ordres deux et trois en  $\bar{S}$  :

$$I_1 = Tr(\bar{S}) = S_{ii}, \quad (1.101a)$$

$$I_2 = Tr(\bar{S}^2) = S_{ij} S_{ji}, \quad (1.101b)$$

$$\text{et } I_3 = Tr(\bar{S}^3) = S_{ij} S_{jk} S_{ki}. \quad (1.101c)$$

Physiquement, l'énergie doit respecter l'isotropie du milieu. Elle se développe donc aux différents ordres en fonction de ces quantités scalaires indépendantes de la base dans laquelle sont exprimées

<sup>25</sup>Le développement de l'énergie à l'ordre quatre est nécessaire à l'étude de la propagation non linéaire des ondes de cisaillement dans les milieux mous, entreprise dans le troisième chapitre.

<sup>26</sup>A l'ordre deux :  $\frac{\partial^2 E}{\partial S_\alpha \partial S_\beta} = \frac{\partial^2 E}{\partial S_\beta \partial S_\alpha}$ , donc les indices  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être permutés [36].

<sup>27</sup>La trace de toute matrice est un invariant.

les déformations. Pour les raisons évoquées plus haut (cf. § 1.3.2.1), l'énergie doit être au moins une forme quadratique des déformations. En régime linéaire,  $K$  modélise les phénomènes de compression et  $\mu$  ceux de cisaillement. Les modules du troisième ordre  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont introduits par Landau dans cet esprit.

Murnaghan choisit de développer l'énergie potentielle élastique en fonction des invariants principaux  $I_S$ ,  $II_S$  et  $III_S$  du tenseur des déformations de Green-Lagrange [40]. Mathématiquement, ces invariants principaux sont les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\det(\bar{S} - \Lambda \bar{I}) = 0 \Leftrightarrow -\Lambda^3 + I_S \Lambda^2 - II_S \Lambda + III_S = 0, \quad (1.102)$$

où  $\Lambda$  sont les valeurs propres ou déformations principales de  $\bar{S}$ . Le calcul du polynôme caractéristique (1.102) conduit aux expressions des invariants principaux de la matrice symétrique  $\bar{S}$ , qui s'expriment également en fonction de ceux utilisés par Landau :

$$I_S = \text{Tr}(\bar{S}) = I_1, \quad (1.103a)$$

$$II_S = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\bar{S}^2) - \text{Tr}(\bar{S})^2] = \frac{1}{2} [I_2 - (I_1)^2], \quad (1.103b)$$

$$\text{et } III_S = \text{Det}(\bar{S}^3) = \frac{1}{6} I_1^3 - \frac{1}{2} I_1 I_2 + \frac{1}{3} I_3. \quad (1.103c)$$

Les invariants  $I_S$ ,  $II_S$  et  $III_S$  sont d'ordres respectifs un, deux et trois en  $\bar{S}$ .

Le développement de l'énergie élastique en fonction des invariants principaux s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I_S^2 + 2\mu II_S + \frac{l + 2m}{3} I_S^3 + 2m I_S II_S + n III_S + O(\bar{S}^4) \quad (1.104)$$

où les modules du second ordre  $l$  et  $m$  sont introduits de façon analogue aux coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

En régime linéaire, les invariants  $I_S^2$  et  $II_S$  gouvernent respectivement la propagation des deux types d'ondes de volume planes, longitudinales et transversales, existant dans un solide. A l'ordre immédiatement supérieur, le terme proportionnel à  $I_S^3$  intervient dans la propagation non linéaire quadratique des ondes planes longitudinales. Le terme d'ordre trois  $II_S I_S$  correspond au couplage non linéaire quadratique de deux ondes longitudinale et transversale. Le terme d'ordre trois  $III_S$  n'intervient pas dans la propagation non linéaire quadratique d'ondes planes, mais il peut jouer un rôle dans celle de faisceaux bornés. Les termes cubiques du développement de l'énergie sont tous nuls pour une onde plane purement transversale.

Les relations entre les différents jeux de constantes sont données par Norris (Chapitre 9 de la référence [1]) :

$$\lambda + 2\mu = C_{11}, \quad (1.105a)$$

$$\mu = C_{44}, \quad (1.105b)$$

$$m = \frac{A}{2} + B = C_{166}, \quad (1.105c)$$

$$l = B + C \Rightarrow l + 2m = A + 3B + C = \frac{C_{111}}{2}, \quad (1.105d)$$

$$\text{et } n = A = 4C_{456}. \quad (1.105e)$$

L'énergie élastique d'un solide isotrope déformé s'écrit donc, avec le formalisme des constantes élastiques et des invariants principaux :

$$W = \frac{C_{11}}{2} I_S^2 + 2C_{44} II_S + \frac{C_{111}}{6} I_S^3 + 2C_{166} I_S II_S + 4C_{456} III_S + O(\bar{S}^4). \quad (1.106)$$

Jusqu'à l'ordre trois, l'expression précédente de l'énergie sépare les énergies associées aux ondes planes longitudinales et transversales. Le formalisme développé par Landau (équation (1.100)) sépare la compression du cisaillement<sup>28</sup>. Ces interprétations sont approfondies dans le troisième chapitre.

### 1.3.3 Équation de propagation non linéaire

L'équation de propagation non linéaire des ondes élastiques dans les solides est établie à partir de l'équation fondamentale de l'élastodynamique exprimée en variables de Lagrange (1.91) et des différents développements de l'énergie présentés dans la précédente partie. L'expression du tenseur des contraintes  $\bar{P}$  en fonction des déformations  $\bar{S}$  définit une loi de Hooke généralisée.

#### 1.3.3.1 Milieu anisotrope

Pour un cristal de symétrie quelconque, on calcule le second terme de la relation fondamentale de l'élastodynamique (1.91) à partir du développement (1.98) de l'énergie élastique. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\bar{P}$ , défini par (1.97), s'écrit alors, à l'ordre trois en gradient des déplacements<sup>29</sup> [41] :

$$P_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} + \frac{1}{2} M_{ijklmn} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial U_m}{\partial a_n} + \frac{1}{3!} M_{ijklmnpq} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial U_m}{\partial a_n} \frac{\partial U_p}{\partial a_q} + \dots, \quad (1.107)$$

avec :

$$M_{ijklmn} = C_{ijklmn} + C_{ijln} \delta_{km} + C_{jnkl} \delta_{im} + C_{jlmn} \delta_{km}, \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} \text{et } M_{ijklmnpq} = & C_{ijklmnpq} + C_{ijklnq} \delta_{mp} + C_{ijmnlq} \delta_{kp} + C_{jqklmn} \delta_{ip} \\ & + C_{jlmnpq} \delta_{ik} + C_{jlnq} \delta_{ik} \delta_{mp} + C_{jnql} \delta_{im} \delta_{kp}. \end{aligned}$$

Dans le tenseur  $M_{ijklmn}$  (respectivement  $M_{ijklmnpq}$ ) seuls le terme contenant  $C_{ijklmn}$  (resp.  $C_{ijklmnpq}$ ) correspond à la non-linéarité thermodynamique (ou non-linéarité "physique"). Les autres termes, composés de constantes élastiques du deuxième ordre (resp. du deuxième et troisième ordres) proviennent de la non-linéarité géométrique (cf. § 1.3.1.1) et du changement de coordonnées Euler/Lagrange.

<sup>28</sup>La propagation d'une onde plane longitudinale fait intervenir les modules de compression  $K$  et de cisaillement  $\mu$ . Une onde longitudinale dans un solide n'est donc pas une onde de compression analogue à celle présente dans un fluide.

<sup>29</sup>Les termes d'ordre trois en gradient des déplacements correspondent à une non linéarité cubique de l'équation d'onde. Ils sont utiles à l'étude de la propagation non linéaire des ondes transversales lors du chapitre trois.

L'équation de propagation (1.91) devient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_j \partial a_l} \left( C_{ijkl} + M_{ijklmn} \frac{\partial U_m}{\partial a_n} + \frac{1}{2!} M_{ijklmnpq} \frac{\partial U_m}{\partial a_n} \frac{\partial U_p}{\partial a_q} + \dots \right). \quad (1.109)$$

Ces expressions complexes se simplifient dès que les symétries du cristal considéré sont prises en compte et qu'une direction de propagation est fixée.

### 1.3.3.2 Milieu isotrope et ondes planes

A l'aide du formalisme développé par Landau, Gol'dberg donne l'équation de propagation non-linéaire quadratique dans un milieu isotrope [42] :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_l \partial a_i} = & \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k \partial a_k} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} + 2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_l \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_k} \right) \\ & + \left( K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_k} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_l \partial a_k} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} \right) + \left( K - \frac{2\mu}{3} + B \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_l} \\ & + \left( \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_l \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \right) + (B + 2C) \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_l}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Dans le cas d'un déplacement  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$  se propageant dans la direction  $a_1$ , l'équation précédente se décompose en trois équations couplant les composantes longitudinale et transversales du champ :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \left( K + \frac{4\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} = \gamma_L \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial a_1} + \gamma_{LT} \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_3}{\partial a_1} \right), \quad (1.111a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial a_1^2} = \gamma_{LT} \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial a_1} \right), \quad (1.111b)$$

$$\text{et } \rho_0 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 U_3}{\partial a_1^2} = \gamma_{LT} \left( \frac{\partial^2 U_3}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_3}{\partial a_1} \right), \quad (1.111c)$$

où  $\gamma_L = 3K + 4\mu + 2A + 6B + 2C$  et  $\gamma_{LT} = K + \frac{4}{3}\mu + \frac{A}{2} + B$  sont des coefficients intervenant respectivement lors de la propagation non linéaire d'une onde plane longitudinale et lors du couplage de vibrations longitudinale et transversales.

Avec le formalisme des constantes élastiques, les composantes du déplacement  $\mathbf{U}$ , se propageant dans la direction  $a_1$ , obéissent aux équations de propagation<sup>30</sup> :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - C_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} = (3C_{11} + C_{111}) \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} + (C_{11} + C_{166}) \left( \frac{\partial U_2}{\partial a_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial a_1^2} + \frac{\partial U_3}{\partial a_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial a_1^2} \right), \quad (1.112a)$$

$$\text{et } \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - C_{66} \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_1^2} = (C_{11} + C_{166}) \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_1^2} + \frac{\partial U_i}{\partial a_1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} \right), \text{ avec } i = 2, 3. \quad (1.112b)$$

<sup>30</sup>Ce jeu d'équations se déduit de l'équation de propagation non linéaire quadratique (1.109). Les coefficients que nous obtenons avec les constantes élastiques correspondent avec ceux donnés par [42] et [43]. L'expression du coefficient  $\gamma_{LT}$ , donnée par [34] est donc erronée.

Pour une onde plane longitudinale ( $U_2 = U_3 = 0$ ), l'équation de propagation non linéaire quadratique se déduit des équations (1.111a) ou (1.112a) :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2} - \frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = 2\beta_L \frac{\partial U_1}{\partial a_1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_1^2}, \quad (1.113)$$

où  $V_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K+4/3\mu}{\rho_0}}$  est la vitesse du son en régime linéaire. Le coefficient de non linéarité des ondes planes longitudinales est défini par les relations :

$$\beta_L = -\frac{3C_{11} + C_{111}}{2C_{11}}, \text{ ou } \beta_L = -\frac{\gamma_L}{2(K + 4/3\mu)} = -\frac{3K + 4\mu + 2A + 6B + 2C}{2(K + 4/3\mu)}. \quad (1.114)$$

Notons que l'équation de propagation (1.113) peut être obtenue beaucoup plus rapidement en écrivant directement l'énergie potentielle élastique d'une onde plane longitudinale :  $E = \frac{C_{11}}{2} I_S^2 + \frac{C_{111}}{6} I_S^3$ , pour l'introduire dans la relation fondamentale de l'élastodynamique (1.96).

A l'ordre deux, la propagation d'une onde plane purement transversale est gouvernée par l'équation linéaire :

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial a_1^2} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = 0, \quad (1.115)$$

où  $i = 2$  ou  $3$  et  $V_T = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$  est la vitesse de propagation des ondes transversales en régime linéaire. Dans le cadre de l'approximation du second ordre, la propagation des ondes planes transversales reste donc linéaire. Physiquement, une onde dont le déplacement est perpendiculaire à sa direction de propagation n'engendre évidemment pas de phénomène de convection de nature à accélérer ou ralentir sa propagation. Par ailleurs, les constantes élastiques du second et troisième ordres intervenant dans les termes quadratiques possibles de l'équation (1.115) sont nulles en raison de l'isotropie du milieu.

Au chapitre trois, la propagation non linéaire d'une onde plane transversale est modélisée par un terme cubique de l'équation d'onde, obtenu en développant l'énergie interne à l'ordre quatre.

Gold'berg montre cependant qu'une onde transversale (un déplacement  $U_3$  se propageant dans la direction  $a_1$ , par exemple) ne peut se propager dans l'approximation du second ordre, sans la présence d'une onde longitudinale [42]. En imposant  $U_1 = U_2 = 0$  et  $U_3 \neq 0$ , dans le système d'équations couplées (1.111), il obtient non-seulement l'équation linéaire (1.115) gouvernant la propagation de la composante  $U_3$ , mais aussi la condition :  $\frac{\partial^2 U_3}{\partial a_1^2} \frac{\partial U_3}{\partial a_1} = 0$ , donnée par l'équation (1.111a). Cette dernière condition ne pouvant pas être satisfaite dans tout l'espace, la composante  $U_3$  ne peut exister seule. La solution linéaire de l'équation (1.115) ( $U_3(a_1, t) = U_0 \cos(\omega_0 t - k_T a_1)$ ) donne donc naissance à une composante longitudinale  $U_1$ , par l'intermédiaire du terme non linéaire de l'équation (1.111a) :

$$U_1(a_1, t) = \frac{(C_{11} + C_{166}) \omega_0 U_0^2}{4\rho_0 V_T (V_L^2 - V_T^2)} \sin [(k_T - k_L) a_1] \cos [2\omega_0 t - (k_T + k_L) a_1]. \quad (1.116)$$

Cet effet est non-synchrone (non cumulatif) : les conditions d'accord de phase entre les deux composantes ne sont pas respectées. L'amplitude de  $U_1$  ne croit donc pas linéairement avec la distance de propagation, mais elle est modulée spatialement<sup>31</sup>. Zarembo donne le rapport des amplitudes de la seconde harmonique et du fondamental dans un alliage d'aluminium à une fréquence de 4,5 MHz [34]. Lorsque l'onde initiale est longitudinale, la seconde harmonique est engendrée de façon synchrone et cumulative et ce rapport est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Lorsque l'onde initialement émise est transversale, la seconde harmonique longitudinale est créée de façon asynchrone et le rapport des amplitudes est de l'ordre de  $10^{-5}$ . Cet effet est donc difficilement observable expérimentalement dans les solides "durs"<sup>32</sup>.

## 1.4 Analogie fluide/solide

### 1.4.1 Coefficients de non-linéarité

Nous avons établi l'équation de propagation non linéaire quadratique des ondes élastiques dans un solide. A l'aide d'une analogie entre la propagation d'une onde acoustique dans un fluide et celle d'une onde longitudinale dans un solide isotrope, nous allons comparer les définitions (1.114) et (1.51) des coefficients de non linéarité dans les fluides et les solides, et attribuer une origine physique aux différents termes de  $\beta_L$ <sup>33</sup>. A cette fin, nous devons écrire l'équation de propagation à une dimension dans un fluide, en variables de Lagrange [41].

Dans un fluide non visqueux, le tenseur des contraintes de Cauchy est diagonal :  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ . L'équation fondamentale de l'élastodynamique est alors écrite en variables de Lagrange, pour une dimension d'espace  $a$ , à l'aide de la relation (1.86) :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \text{Det}(\bar{F}) = \frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{\partial U}{\partial a} \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial a}, \quad (1.117)$$

où  $U$  est le déplacement dans la direction  $a$ .

Si la transformation est isentropique, la pression  $p$  n'est fonction que de la masse volumique  $\rho$  :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial a} = - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho_0 / \rho}{\partial a} = - \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial a} \right)^{-2} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2}. \quad (1.118)$$

<sup>31</sup>L'expression (1.116) correspond en fait à une polarisation longitudinale, dont les variations temporelles sont deux fois plus rapides que celles du fondamental, mais dont les variations spatiales sont une combinaison des longueurs d'ondes L et T (la relation de dispersion linéaire n'est pas respectée dans un processus d'interaction non-synchrone). Pour un solide "classique" ( $V_L \approx 2V_T$ ), la période spatiale de la modulation d'amplitude est de l'ordre de la longueur d'onde longitudinale (ce qui correspond au double de la longueur d'onde d'une deuxième harmonique longitudinale).

<sup>32</sup>Nous reviendrons sur le cas des solides mous au troisième chapitre (§ 3.2.2.3).

<sup>33</sup>L'analogie entre les coefficients de non linéarité du fluide et du solide n'a de sens que d'un point de vue formel. En effet, dans un fluide et un solide de même coefficient de non-linéarité, l'importance des effets non linéaires n'est pas comparable, car les paramètres linéaires gouvernant la propagation (vitesses du son) sont assez différents. Dans les solides "durs" usuels (métaux...), le nombre de Mach acoustique est toujours bien inférieur à celui obtenu dans un fluide pour une même amplitude d'émission.

Les relations (1.117) et (1.118) conduisent à l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{\partial U}{\partial a}\right)^{-2} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2}. \quad (1.119)$$

Dans l'équation d'état isentropique des fluides (1.23), la variation relative de masse volumique est développée en fonction du déplacement :

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = -\frac{\partial U}{\partial a} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial a}\right)^{-1}. \quad (1.120)$$

En introduisant l'équation d'état dans l'équation (1.119), il vient, à l'ordre deux en gradient des déplacements :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{A_l}{\rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \left[1 - \left(2 + \frac{B_l}{A_l}\right) \frac{\partial U}{\partial a}\right]. \quad (1.121)$$

L'équation de propagation (1.121) est identique à celle gouvernant la propagation non linéaire d'une onde longitudinale plane dans un solide isotrope (équation (1.113)). Le coefficient  $2 + B_l/A_l$ , en facteur du terme non linéaire, est égal au double du coefficient de non-linéarité  $\beta = 1 + B_l/2A_l$ , classiquement défini dans les liquides en posant le problème dans les variables d'Euler. Dans ce coefficient  $\beta$ , "1" est le terme induit par l'advection et  $B_l/A_l$  est celui provenant de la loi de comportement non linéaire. Les deux effets non linéaires sont bien pris en compte par la description Lagrangienne, même si la particule est suivie dans son déplacement.

Nous pouvons aussi établir une analogie entre le coefficient de non-linéarité d'un liquide et celui d'une onde longitudinale dans un solide isotrope :

$$\beta = 1 + \frac{B_l}{A_l} \Leftrightarrow \beta_L = -\frac{3C_{11} + C_{111}}{2C_{11}}.$$

Le signe opposé des deux coefficients vient des définitions mêmes de la pression et des contraintes. Les deux paramètres contiennent un rapport de coefficients du second et premier ordre, traduisant clairement une contribution thermodynamique à la non-linéarité. En revanche, la présence du "3" dans la définition du coefficient de non-linéarité du solide est surprenante, car l'effet convectif correspond à la quantité "2" pour le coefficient du terme de non-linéarité du liquide.

Nous avons donc étudié l'influence qu'a le choix de variables d'état différentes dans les solides et les liquides sur la définition du coefficient de non-linéarité. Dans un liquide, la variable d'état "mécanique" est la variation relative de masse volumique  $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ , égale à la divergence du déplacement  $\mathbf{U}$ . Dans un solide, la variable d'état "mécanique" est le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\bar{S}$ .  $\bar{S}$  est la somme de la partie symétrique du tenseur gradient des déplacements et d'un terme quadratique en déplacement. Ce dernier crée un terme non linéaire dans l'expression (1.98) de l'énergie potentielle élastique  $E$ , même si le développement est arrêté au second ordre. Pour examiner son influence sur la définition du coefficient de non-linéarité des ondes longitudinales, nous avons écrit l'équation d'état isentropique d'un liquide en fonction d'une variable  $S$  construit de façon analogue à  $\bar{S}$  :

$$S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)^2. \quad (1.122)$$

La loi de comportement (1.23) s'écrit alors :

$$p - p_0 = A_l S + \frac{B'_l}{2} S^2, \quad (1.123)$$

où  $B'_l$  est un module adiabatique du second ordre différent de  $B_l$ . Un calcul identique à celui mené ci-dessus donne l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{A_l}{\rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \left[ 1 - \left( 3 + \frac{B'_l}{A_l} \right) \frac{\partial U}{\partial a} \right], \quad (1.124)$$

définissant un coefficient de non-linéarité  $2\beta'_l = 3 + \frac{B'_l}{A_l}$ , qui s'écrit comme celui d'un solide. L'advection contribue donc toujours pour une quantité "2" dans les coefficients de non-linéarité d'un liquide et d'un solide. En revanche, le choix d'une variable d'état comportant un terme quadratique conduit à une expression différente de la contribution thermodynamique dans le coefficient de non-linéarité.

**Modélisation physique de la convection dans les solides :** En variables de Lagrange, l'advection est prise en compte par le tenseur gradient de la transformation  $\bar{F}$  dans la définition (1.97) du tenseur des contraintes  $\bar{P}$  (ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff). Le second tenseur de Piola  $\bar{P}' = \frac{\partial W}{\partial \bar{S}}$ , variable thermodynamique conjuguée de  $\bar{S}$ , contient tous les effets thermodynamiques. En nous reportant au calcul mené pour établir l'équation fondamentale de l'élastodynamique à partir de l'équation de Lagrange (cf. § 1.3.1.2), nous remarquons que l'intervention du gradient de la transformation dans la définition de  $\bar{P}$  est due au terme quadratique du tenseur des déformations. Ce terme de non-linéarité géométrique modélise donc l'advection, tout en modifiant l'écriture de l'équation d'état en raison de son caractère quadratique en déplacement.

**Constantes élastiques d'un liquide :** Il est possible d'exprimer les coefficients de l'équation d'état d'un fluide en fonction des coefficients de Lamé et des modules de Landau, ou en fonction des constantes élastiques du deuxième et troisième ordre [44] [45]. Pour un fluide, les coefficients de Landau s'écrivent :

$$K = \lambda = A_l, \quad (1.125)$$

$$\mu = 0, \quad (1.126)$$

$$A = 0, \quad (1.127)$$

$$B = -A_l, \quad (1.128)$$

$$C = \frac{A_l - B_l}{2}. \quad (1.129)$$

Les constantes élastiques d'un fluide s'écrivent :

$$c_{11} = A_l, \quad (1.130)$$

$$c_{44} = 0, \quad (1.131)$$

$$c_{111} = -(5A_l + B_l), \quad (1.132)$$

$$c_{112} = -(A_l + B_l), \quad (1.133)$$

$$c_{123} = A_l - B_l. \quad (1.134)$$

Ces formalismes ne sont pas bien adaptés à la description de la propagation non linéaire dans les fluides (il faut définir par exemple trois constantes élastiques du troisième ordre non nulles à la place de  $B_l$ ). Cette correspondance est néanmoins utile à l'étude (au chapitre trois) de la propagation non linéaire dans les solides mous, proches des liquides.

### 1.4.2 Interaction non-linéaire d'ondes acoustiques dans un milieu isotrope

Dans un solide isotrope, les différentes possibilités d'interaction non linéaire quadratique de deux ondes élastiques ont été étudiées théoriquement par Jones et Kobett [46], à l'aide du formalisme de Fourier et des fonctions de Green. Les solutions obtenues prennent en compte les couplages non linéaires possibles entre les composantes longitudinales et transversales, sans se restreindre à une propagation colinéaire des deux ondes élastiques initiales. Les auteurs en déduisent, dans le cas d'un volume d'interaction limité correspondant à l'intersection de deux faisceaux plans, les conditions pour qu'une onde diffusée<sup>34</sup> soit présente en un point extérieur à la zone d'interaction.

Néanmoins, en dehors de l'interaction de deux ondes longitudinales colinéaires<sup>35</sup> [32], ces effets ne sont pas cumulatifs : les amplitudes des ondes diffusées sont très faibles et elles ont rarement été mises en évidence expérimentalement. L'interaction non linéaire de deux ondes transversales colinéaires est également cumulative, mais, comme elle est d'ordre trois en déplacement, l'amplitude des ondes créées est faible dans les solides "classiques".

Plusieurs auteurs [34], [46], [47], [48], [49], interprètent les conditions d'interaction de deux ondes élastiques en terme de phonons. Ils établissent alors les interactions possibles grâce aux relations de conservation de l'énergie et du moment<sup>36</sup>. Pour les ondes acoustiques de fréquences modérées ( $< 30$  MHz) que nous utilisons, faire appel à la dualité onde-corpuscule n'est pas nécessaire. Si cette approche est pertinente pour établir une analogie avec des ondes planes, elle est mise en défaut dans un cas plus complexe comme celui des ondes (transverses) diffusées traitées par Jones et Kobett [46].

**Ondes planes dans l'approximation de faible non linéarité :** Dans cette section, nous étudions l'interaction quadratique des ondes longitudinales dans le cadre de l'approximation de faible non linéarité (ou approximation quasi-linéaire). L'analogie entre les fluides et les solides (cf. § 1.4) montre que les solutions de l'équation de propagation non linéaire développées pour un fluide à la section 1.2.3 sont également valables pour des ondes longitudinales dans un solide.

Comme nous l'avons vu à propos des fluides (cf. § 1.2.3), les différents paramètres nécessaires à l'estimation du "degré de non linéarité" de la propagation d'une onde sont : le paramètre de Gol'dberg  $\Gamma_G$ , rapport des distances d'atténuation  $z_a$  et de choc  $z_c$ , et le rapport  $z_c/z_f$  des distances de Fresnel et de choc. Le tableau 1.1 résume les caractéristiques de la propagation des deux ondes

<sup>34</sup>C'est ce qu'on appelle la "diffusion du son par le son".

<sup>35</sup>Généralisation de la condition d'interaction de deux ondes planes démontrée dans la section 1.2.3.

<sup>36</sup>Les conservations de l'énergie et du moment sont respectivement équivalentes aux relations  $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$  et  $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ .

acoustiques, de fréquences 30 MHz (HF) et 2,5 MHz (BF), utilisées au chapitre deux pour la mesure des paramètres de non linéarité.

Milieu	Célérité $c_0$ (m/s)	$\beta$	Atténuation $\alpha$ (Np/m)		Longueur d'onde $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )		Déplacement (nm)		Vitesse : $v_p$ (m/s)		Rayon des capteurs : $a$ (mm)	
			HF	BF	HF	BF	HF	BF	HF	BF	HF	BF
Fluide	1500	3.5	20	0,5	50	600	0,1	3,2	0,02	0,05	3,2	9,7
Solide	6380	11	1	0,1	210	2600	1	9,6	0,2	0,15	3,2	9,7

TAB. 1.1 – Caractéristiques de la propagation dans l'eau et le duralumin, des deux ondes acoustiques utilisées pour la mesure des coefficients de non linéarité au chapitre deux.

Les valeurs des distances de choc, de Fresnel, d'atténuation et de leurs rapports respectifs, calculés dans les conditions expérimentales du chapitre deux, sont données dans le tableau 1.2.

Milieu	Distance de choc (cm)		Distance d'atténuation (cm)		Distance de Fresnel (cm)		Nombre de Mach		Nombre de Goldberg		Atténuation / Diffraction		Diffraction / Non-linéarité	
	$L_c = \frac{\lambda}{2\pi\beta M}$		$L_a = \frac{1}{\alpha}$		$L_d = \frac{a^2}{\lambda}$		$M = \frac{v_p}{c_0}$		$\frac{L_a}{L_c} = \frac{2\pi\beta M}{\lambda\alpha}$		$\frac{L_a}{L_d} = \frac{\lambda}{a^2\alpha}$		$\frac{L_d}{L_c} = \frac{2\pi\beta Ma^2}{\lambda}$	
	HF	BF	HF	BF	HF	BF	HF	BF	HF	BF	HF	BF	HF	BF
Fluide	18	82	5	200	20	16	$10^{-5}$	$10^{-5}$	0,28	2,4	0,3	13	1,1	0,2
Solide	10	160	100	1000	4,7	3,7	$10^{-5}$	$10^{-5}$	9,6	6,4	21	270	0,5	0,02

TAB. 1.2 – Distances caractéristiques et nombres sans dimension, calculés dans les conditions expérimentales du chapitre deux.

Même si les valeurs du paramètre de Gol'dberg calculées pour les deux ondes sont proches de l'unité, la distance de propagation typique des expériences (de 10 à 20 mm) est très inférieure à la distance de choc. L'approximation de faible non linéarité est donc justifiée. Elle autorise l'emploi d'une méthode perturbative déjà mentionnée à propos des fluides (cf. § 1.2.3.3). Le déplacement se développe alors en puissances du nombre de Mach :  $U = MU^I + M^2U^{II}$ , où  $U^I$  et  $U^{II}$  représentent respectivement les ondes primaires initialement émises et les ondes secondaires créées par les effets non linéaires.

Le couple d'équations suivantes, analogues aux équations (1.77) et (1.78) écrites en pression

pour un fluide, décrit la propagation aux ordres un et deux en nombre de Mach :

$$\frac{\partial^2 U^I}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 U^I}{\partial z^2} = 0, \quad (1.135a)$$

$$\frac{\partial^2 U^{II}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 U^{II}}{\partial z^2} = -2c_0^2 \beta \frac{\partial^2 U^I}{\partial z^2} \frac{\partial U^I}{\partial z}. \quad (1.135b)$$

L'équation de propagation des ondes primaires (1.135a) est linéaire. L'équation (1.135b) régit la propagation des ondes secondaires. Le terme quadratique est qualifié de terme source, car il ne dépend que de  $U^I$  et donne naissance aux ondes secondaires au cours de la propagation.

Résolvons ce système d'équations pour deux ondes primaires planes de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . La condition limite en  $z = 0$  (à la source) est :

$$U(z = 0, t) = U_1 \sin(-\omega_1 t + \phi_1) + U_2 \sin(-\omega_2 t + \phi_2). \quad (1.136)$$

La solution au premier ordre est donnée par le principe de superposition :

$$\begin{aligned} U^I &= U_1^I + U_2^I \\ &= U_1 \sin(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1) + U_2 \sin(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2). \end{aligned} \quad (1.137)$$

Elle est introduite dans le second membre de l'équation (1.135b), et la solution trouvée au second ordre est [50], [51], [52] :

$$\begin{aligned} U^{II} &= U_1^{II} + U_2^{II} + U_+^{II} + U_-^{II} \\ &= -\frac{\beta U_1^2 k_1^2 z}{4} \sin(2(k_1 z - \omega_1 t + \phi_{12})) - \frac{\beta U_2^2 k_2^2 z}{4} \sin(2(k_2 z - \omega_2 t + \phi_{22})) \\ &\quad - \frac{\beta U_1 U_2 k_1 k_2 z}{2} [\sin(k_+ z - \omega_+ t + \phi_+) - \sin(k_- z - \omega_- t + \phi_-)]. \end{aligned} \quad (1.138)$$

On retrouve alors les secondes harmoniques et les produits de l'interaction non linéaire des deux ondes primaires, aux fréquences somme et différence des fréquences initiales :  $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$ .

Dans le cas où les fréquences primaires sont très différentes (nous supposons que  $f_1/f_2 > 10$ ), les trois composantes fréquentielles  $f_1$ ,  $f_+$  et  $f_-$  sont dans la bande passante du transducteur de plus haute fréquence, qui peut donc les détecter ensemble. Lorsque  $m = \beta U_2 k_1 k_2 z \ll 1$ , c'est-à-dire pour une propagation faiblement non linéaire, la superposition  $U_1^I + U_+^{II} + U_-^{II}$  peut s'écrire, par identification avec le développement en séries de Bessel<sup>37</sup> d'un signal dont la phase est modulée :

$$U_1^I + U_+^{II} + U_-^{II} = \sin(\omega_1 t + m \sin(\omega_2 t)), \quad (1.139)$$

$$\begin{aligned} &= J_0(m) \sin(\omega_1 t) \\ &\quad + J_1(m) [\sin((\omega_1 + \omega_2)t) - \sin((\omega_1 - \omega_2)t)], \end{aligned} \quad (1.140)$$

car les fonctions de Bessel de première espèce d'ordres zéro et un s'écrivent  $J_0(m) \approx 1$  et  $J_1(m) \approx m/2$ . Les ondes secondaires, créées par l'interaction, apparaissent alors dans le spectre du signal acoustique comme des raies latérales de modulation de l'onde de plus haute fréquence.

<sup>37</sup>Voir l'équation (4.6) page 121

Nous retrouvons ici la description de l'interaction non linéaire des deux ondes de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , comme modulation de la phase de l'onde de plus haute fréquence (cf. § 1.2.3.1) :

$$U(z, t) = U_1 \sin(k_1 z - \omega_1 t - \Phi_p). \quad (1.141)$$

La modulation de phase instantanée  $\Phi_p$  est proportionnelle au coefficient de non-linéarité  $\beta$ , à la distance d'interaction  $z$  et à la vitesse particulière de l'onde de basse fréquence ( $v_2 = \omega_2 U_2 \sin(k_2 z - \omega_2 t)$ , pour une onde harmonique). Elle est donnée par l'équation (1.70) :

$$\Phi_p(z, t) = \frac{k_1 z}{V_L} \beta v_2.$$

Nous la mesurons au second chapitre pour déterminer le coefficient de non linéarité de milieux de propagation variés.

Il est également possible de tenir compte de l'atténuation des ondes, qui introduit un facteur de décroissance exponentielle dans l'expression précédente de la modulation de phase. Dans la plupart des cas, les conditions expérimentales du chapitre deux permettent de s'en affranchir.

## Conclusion

Nous avons rappelé les principales origines et manifestation de la propagation non-linéaire des ondes acoustiques. Les modules du fluide ainsi que les constantes élastiques (ou les modules de Landau et Murnaghan) caractérisent la réponse élastique des matériaux à des déformations finies. Les lois de comportement développées à l'ordre deux (relativement à la variation de masse volumique ou aux déformations de Lagrange) permettent d'établir des équations d'onde non-linéaires décrivant la propagation d'ondes acoustiques ou élastiques longitudinales d'amplitude finie.

Les coefficients de non-linéarité qui pondèrent les termes non-linéaires de ces équations déterminent en partie l'importance du transfert d'énergie du fondamental vers les harmoniques. Ces coefficients regroupent les effets cinématiques (convection) et thermodynamiques (réponse du matériau) qu'on peut identifier dans les coordonnées d'Euler ou de Lagrange (à l'inverse de ces deux sources de non-linéarité, la non-linéarité locale (celle de la relation d'impédance) ne donne pas lieu à des effets cumulatifs). Pour des ondes longitudinales dans les solides ou de compression dans les fluides, une analogie entre les équations de propagation est possible à l'ordre deux. Seule l'interaction colinéaire d'ondes planes longitudinales donne lieu à des effets cumulatifs dans l'approximation quadratique. L'ordre supérieur d'approximation est nécessaire pour les ondes de cisaillement abordées au troisième chapitre.

Les ordres de grandeur des approximations (concernant la non-linéarité, l'atténuation ou encore la diffraction) peuvent être estimés à l'aide de distances caractéristiques (distance de choc...) et comparés à l'aide de nombres sans dimensions (Mach, Gol'dberg). Nos conditions expérimentales justifient l'approximation de faible non-linéarité, qui autorise une modélisation simple de l'interaction d'ondes. Les amplitudes des ondes produites par l'interaction augmentent alors proportionnellement à la distance de propagation, ce qui offre une configuration expérimentale exploitable dans le but d'effectuer des mesures précises. Ce mélange d'ondes, pour des fréquences assez éloignées, est analogue à une modulation de phase de l'onde de plus haute fréquence.



## Chapitre 2

# Mesures du coefficient de non-linéarité

L'intérêt des mesures de coefficient de non-linéarité a été mis en évidence ces trente dernières années, notamment par des études sur les fluides et les milieux biologiques [7], [53]. Dans le domaine médical, une caractérisation plus fine de l'élasticité des tissus fournirait des éléments de diagnostic, par une identification de leur nature, ou la détection de leur dégradation. Ces considérations sont appuyées par l'étude des mélanges puisque, comme nous le verrons, l'association des constituants fait varier les paramètres acoustiques linéaires et non-linéaires. Par ailleurs le fonctionnement de certains modes d'imagerie échographique repose sur la réponse non-linéaire du milieu (celle des tissus ou celle des agents de contraste), et la connaissance du coefficient  $\beta$  s'avère nécessaire.

Notre technique de mesure s'applique aussi à des solides isotropes et anisotropes, dans lesquels elle donne accès à des combinaisons linéaires de constantes élastiques du deuxième et du troisième ordres. Avec des ondes longitudinales, il n'est pas possible de déterminer toutes les composantes des tenseurs  $C_{ij}$  et  $C_{ijk}$ . Pour cela, il est nécessaire d'utiliser des ondes transversales (acousto-élasticité, méthode par résonance). Toutefois, la connaissance de plusieurs combinaisons simples peut déjà renseigner sur la composition [54], [55], [56], [57], la coupe (pour les cristaux) ou encore la présence de défauts. Les mesures sur les milieux isotropes ou statiquement isotropes ouvrent des perspectives plus directes en matière de contrôle non-destructif. De nombreux matériaux voient en effet leurs caractéristiques élastiques non-linéaires évoluer sensiblement sous l'effet de la fatigue (thermique ou mécanique) [58], [59], [60] ou d'un changement de composition [61], [62] (pour la ductilité et les dislocations).

Les conditions dans lesquelles l'interaction colinéaire de deux ondes longitudinales s'identifie à une modulation de phase de l'onde de plus haute fréquence ont été précisées dans le premier chapitre. Cette partie présente la méthode de mesure du coefficient de non-linéarité, basée sur ces approximations, mise au point au cours de la thèse précédente. Nous exposons les améliorations apportées au montage existant, dédié au fluides, ainsi que son adaptation aux mesures dans les solides, réalisées au cours de cette thèse. Nous présentons d'abord les deux variantes du dispositif expérimental qui permettent soit une mesure absolue sur une simple tranche de matériau, soit une mesure comparative par rapport à un milieu étalon. Puis, nous illustrons les effets de diffraction de l'onde de basse fréquence et les conditions dans lesquelles ils pourraient affecter les mesures.

Nous exposons ensuite les aspects plus techniques des montages réalisés : les capteurs, les dispositifs d'émission-réception, les démodulations de phase et les questions de synchronisation. Enfin nous présentons les résultats des mesures de coefficients de non-linéarité, dans les fluides, les gels, le germanium et les solides isotropes pour ce qui est des matériaux homogènes. Nous résumons également les résultats obtenus dans le cadre du stage de DEA de Mathieu Rénier, sur le mélange eau-éthanol et la fatigue thermique du verre.

## 2.1 Les autres méthodes de mesure

### Fluides :

La méthode la plus connue, et la plus simple à mettre en oeuvre, est la génération de la seconde harmonique : le coefficient  $\beta$  est donné par le rapport des amplitudes de la seconde harmonique et du fondamental. Un transducteur, couplé à une des face de l'échantillon émet une onde harmonique (ou un train d'ondes) de forte amplitude. La composante à la fréquence double est mesurée après une distance de propagation telle que son amplitude soit suffisante. Cette mesure, qui nécessite une bonne précision, peut être réalisée à l'aide d'un transducteur centré à la fréquence double, qu'il est nécessaire de calibrer (par une méthode électrique [63] ou à l'aide d'un interféromètre optique [64]).

Les méthodes dites thermodynamiques, de mesure du rapport  $B_l/A_l$ , reposent sur le développement suivant, obtenu à partir des relations (1.24) et (1.20) par Beyer [5] :

$$\frac{B_l}{A_l} = 2\rho_0 c_0 \left( \frac{\partial c}{\partial p} \right)_{T,p=p_0} + \frac{2c_0 T_0 \alpha}{\rho_0 c_p} \left( \frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p,T=T_0} = \left( \frac{B_l}{A_l} \right)' + \left( \frac{B_l}{A_l} \right)'' . \quad (2.1)$$

Le coefficient  $B_l/A_l$  est alors obtenu par une mesure des variations de vitesse du son en fonction de la température et de la pression, la contribution du second terme (à droite de (2.1)) étant petite. Les premières mesures de ce type ont été réalisées par Coppens et Beyer [7], [5].

Leur comparaison avec les premiers résultats obtenus par génération de seconde harmonique présentait des différences de l'ordre de 20%. L'accord entre les deux techniques a été établi dans les années 80 comme le rappelle Makarov [6], mais des résultats récents donnent encore des valeurs plus élevées d'environ 20% (voir [6] pour les références). Ces différences mettent en évidence la difficulté de ce type de mesure. La génération d'harmoniques en particulier nécessite la calibration des capteurs pour connaître l'amplitude du déplacement, ce qui induit de grandes incertitudes. Cependant les valeurs sont systématiquement plus grandes en génération d'harmoniques qu'en mesure thermodynamique, ce qui tend à prouver qu'une erreur systématique, due à la configuration expérimentale, entache les résultats. En génération d'harmoniques, le facteur deux entre les fréquences des ondes utilisées rend nécessaire une correction de diffraction et d'atténuation. Le crédit accordé aux mesures thermodynamiques est meilleur que celui accordé à la génération d'harmoniques et l'erreur due à la calibration du dispositif est *a priori* non systématique.

Différentes techniques ont été imaginées depuis les premières expériences de Beyer : on trouve une présentation de ces dernières chez Barrière [28] et Villa [65]. On se reportera aux références

suivantes pour les mesures dans les fluides et dans les gels [66], [67] et [53]. Des techniques d'imagerie ou de tomographie [68], [69] commencent à se développer [70], [71], dans la suite des travaux de Ichida [72]. La plupart de ces méthodes utilisent des niveaux de puissance modérés correspondant à une propagation faiblement non-linéaire, voire linéaire (méthode thermodynamique). Dans ces conditions, les amplitudes des harmoniques dont l'ordre est supérieur à deux peuvent être négligées ; ces dernières ne permettent que difficilement de mesures des coefficients de non-linéarité [73], [9]. Il est également possible d'utiliser des ondes choquées et de procéder à la mesure du coefficient de non-linéarité par comparaison avec un modèle de propagation [74] décrivant la distortion du front d'onde.

### Solides :

Pour les solides, on retrouve des méthodes "classiques", analogues à celles utilisées pour les fluides, que sont :

- la génération d'harmoniques [75] [37] [76], qui peut être mesurée à l'aide d'un transducteur [77], d'un détecteur capacitif [56] (couche d'air comprise entre une électrode et la surface métallisée de l'échantillon) ou d'un interféromètre optique [78].
- l'acousto-élasticité [79], [55] (mesure des variations de vitesse du son en fonction d'une contrainte uniaxiale) et les méthodes du type thermodynamiques (variation de célérité sous pression hydrostatique avec contrôle de température).

On peut également mentionner la technique de compression par choc [73] (réponse à un échelon de contrainte de forte amplitude).

Des méthodes plus récentes procèdent par identification des modes de résonances. Un échantillon de cristal, taillé avec précision, est mis en résonance par des transducteurs à pointe ("pin transducers"). La répartition spatiale des vibrations est mesurée par interférométrie laser sur une (ou plusieurs) surfaces de l'échantillon. Ces images des modes sont comparées avec celles fournies par une simulation pour identifier les fréquences de résonance et calculer les constantes élastiques et piézoélectriques du deuxième ordre [80].

Sur des barres de roche ou le béton, le décalage des fréquences de résonance avec l'amplitude fournit les coefficients non-linéaires de ces matériaux fortement inhomogènes (qui diffusent et atténuent fortement les ondes au delà du Megahertz). Les valeurs obtenues sont très grandes (jusqu'à  $10^3$ ) et correspondent à une non-linéarité dite "non-classique" [81], [82], [83] (hystérésis, joints de grains, micro-fissures) évoquée dans l'annexe B.

Enfin, des méthodes utilisant l'interaction d'ondes, sont employées pour les différents types de non-linéarité :

- pour la non-linéarité élastique "classique", à l'aide d'ondes propagatives (dans le domaine du Mégahertz), dans les fluides [70], [84] ou les solides [51], [85], [65], mais aussi par résonance [87].
- pour étudier la non-linéarité des matériaux granulaires ou endommagés, à des fréquences inférieures à 500 kHz [88], [89], [90], [91].

- pour caractériser des suspensions de bulles grâce à l’interaction de deux faisceaux croisés de fréquences proches dans un nuage de bulles, qui produit une onde diffusée dont la fréquence correspond au domaine de résonance des bulles (détectée à l’aide d’un hydrophone) [92], [93].

## 2.2 Dispositif expérimental

L’interaction d’ondes offre une configuration exploitable lorsque les fréquences des deux ondes sont suffisamment éloignées ( $f_1/f_2 \geq 10$ ) : les fréquences somme et différence restent alors dans la bande passante du transducteur de plus haute fréquence. Il est alors possible de mesurer l’effet non-linéaire sans recourir à des capteurs d’utilisation délicate tels que les détecteurs capacitifs (comme dans certaines expériences de génération d’harmonique). Une mesure précise de l’amplitude des ondes secondaires est également difficile avec des capteurs ultrasonores courants : elle nécessite une calibration précise. L’originalité de notre montage réside dans l’exploitation de la phase des signaux : les niveaux d’émission étant modérés, l’effet non-linéaire se traduit par une modulation de phase du signal de plus haute fréquence, qui correspond bien à la solution établie dans le cadre de l’approximation de faible non linéarité.

Pour réaliser des mesures fiables, il est nécessaire de se placer dans des conditions favorables du point de vue de l’atténuation, de la diffraction et également de la non-linéarité. La fréquence la plus basse est choisie de façon à provoquer un effet cumulatif sur un grand nombre de longueurs d’onde. La plus élevée doit être au moins dix fois plus grande pour que l’interaction des deux ondes soit assimilable à une modulation de phase et que les effets de diffraction soit identiques sur l’onde primaire et les deux ondes filles. Les résultats évoqués au paragraphe 1.2.3.3 [28] mettent en avant l’avantage d’une méthode exploitant ces conditions d’interaction, comparée à la méthode de génération de seconde harmonique pour laquelle une correction de diffraction s’avère nécessaire. Enfin, l’amplitude des deux ondes doit être suffisante pour donner un effet (modulation de phase) mesurable et leur atténuation peut être corrigée.

### 2.2.1 Les différentes configurations, rôle des interfaces

L’échantillon est placé entre deux transducteurs piézoélectriques (figure 2.1 à gauche) d’un rapport de fréquences centrales ( $f_1/f_2$ ) de l’ordre de 10 (30 et 2,5 MHz ou 10 et 1 MHz). Le transducteur de haute fréquence peut être excitée par un signal harmonique (émission continue) ou un train d’ondes<sup>1</sup>, celui de basse fréquence par un train d’ondes ou une impulsion<sup>2</sup>. Les deux signaux d’excitation sont synchronisés (dans le cas d’un train d’ondes HF) de manière à ce que

<sup>1</sup>Emission transitoire de la porteuse (obtenue par modulation d’amplitude d’une source sinusoïdale harmonique, à l’aide d’un mélangeur analogique (“frequency mixer”). La durée du train doit être supérieure à la durée de l’impulsion BF (quelques microsecondes).

<sup>2</sup>Dans la pratique, les trains d’ondes BF ne sont utilisés que dans les fluides [94], pour lesquels on parvient à obtenir un niveau d’excitation suffisant. Ils améliorent la résolution fréquentielle, ce qui permet d’envisager un balayage en fréquence (intéressant pour les milieux inhomogènes où les suspensions de bulles) dans la bande passante du transducteur BF.

l'interaction ait lieu sur le trajet retour de l'onde de haute fréquence (du transducteur BF vers le transducteur HF).

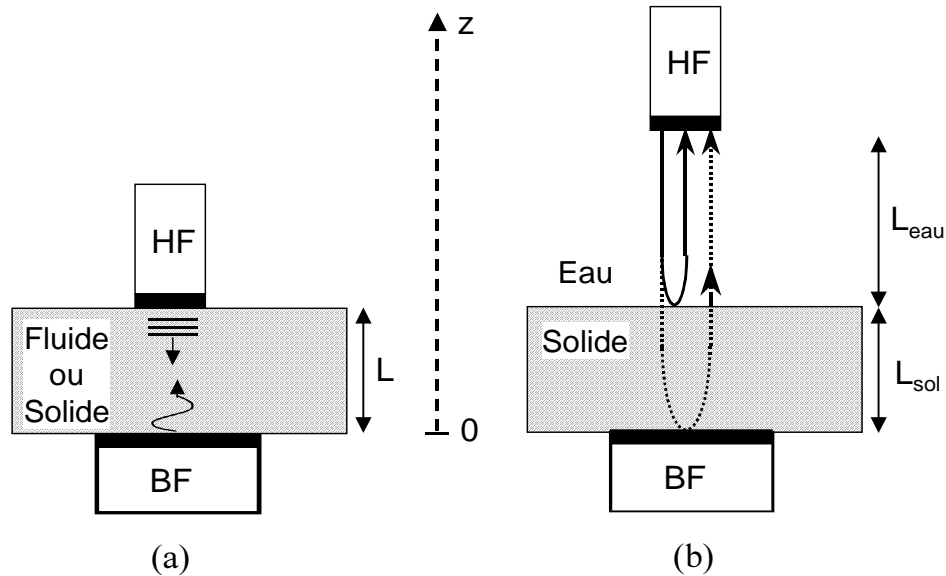


FIG. 2.1 – Principe des mesures. A gauche : mesure absolue sur une simple tranche (de fluide ou de solide) ou mesure comparative sur un fluide (par substitution du fluide étudié au fluide étalon). A droite : mesure relative pour un solide, par comparaison avec l'eau (fluide étalon).

La modulation de phase instantanée s'exprime (cf. § 1.2.3.1 ou 1.4.2) :

$$\Phi_p(L, t) = \frac{k_1 L}{V_L} \beta v_2 (t - L/V_L), \quad (2.2)$$

où  $k_1$  est le vecteur d'onde HF,  $L$  la distance d'interaction,  $V_L$  la vitesse des ondes longitudinales,  $\beta$  le coefficient de non-linéarité et  $v_2$  la vitesse particulière BF. La porteuse modulée en phase est enregistrée à la sortie transducteur HF grâce à un dispositif d'émission-réception. La démodulation est réalisée par un circuit analogique ou un programme numérique<sup>3</sup>. La figure 2.2 donne un exemple de signal de modulation de phase obtenu dans l'eau (pour une distance d'interaction  $L = 20$  mm) avec une démodulation analogique et une démodulation numérique appliquées respectivement à une porteuse harmonique et à un train d'ondes.

Le dispositif expérimental mis au point par C. Barrière s'appliquait essentiellement aux fluides et utilisait une onde de haute fréquence émise en régime harmonique (voir la figure C.1 l'annexe C.1). Dans ces conditions, l'acquisition est déclenchée sur l'émission de l'impulsion BF et aucune synchronisation n'est nécessaire entre les deux ondes. L'émission HF continue, utilisé pour les mesures dans les fluides, ne convient pas dans les solides car l'atténuation étant moindre, des ondes stationnaires

<sup>3</sup>Les programmes de démodulation numérique sont présentés au chapitre 4. (§ 4.1.3). Celui que nous utilisons pour les mesures de coefficients de non-linéarité repose sur un schéma analogue à celui de la démodulation analogique décrite au paragraphe 2.2.4.2.

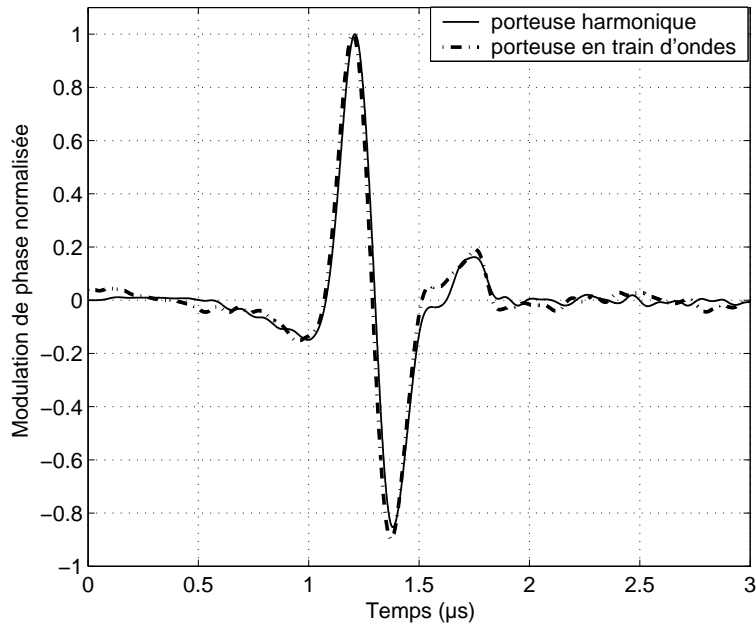


FIG. 2.2 – Comparaison des modulations de phase pour une porteuse en train d’ondes (démodulation numérique) et harmonique (démodulation analogique).

perturbent les mesures. Pour cela, la durée des impulsions HF et BF doit être inférieure au temps de vol  $L/V_L$  dans l’échantillon (respectivement  $3 \mu\text{s}$  et  $13 \mu\text{s}$  pour 20 mm de duralumin et d’eau). C’est également ce qui limite le rapport des fréquences, ainsi que la possibilité d’utiliser des trains d’ondes BF. L’utilisation de trains d’ondes HF autorise par ailleurs des niveaux d’excitation plus élevés, ce qui est indispensable dans les solides, car l’amplitude des ondes secondaires est bien plus faible que dans un fluide (la modulation de phase est proportionnelle à  $1/V_L^2$ ). La tension appliquée aux bornes du transducteur peut être d’autant plus forte que le taux de cycle est faible (la puissance moyenne admise par le capteur est de 125 mW).

Le dispositif, schématisé sur la figure 2.3, comprend la synthèse du train d’ondes HF à l’aide d’un mélangeur (”multiplicateur” symbolisé par :  $\otimes$ ), la synchronisation de l’impulsion BF (délivrée par un générateur d’impulsions), l’émission-réception du train d’ondes porteuse ainsi que sa démodulation de phase. Nous reviendrons sur les différentes parties du montage au paragraphe 2.2.4. Le filtrage passe-bas de la porteuse à l’émission assure l’élimination d’éventuelles harmoniques produites par l’amplification. Le filtrage passe-haut, à la réception, coupe à  $f_c = f_1/2$  et limite donc la bande basse à  $f_1 - f_c$ .

La réflexion du faisceau sonde (si le parallélisme est imparfait), ou la transduction du signal retour (superposition et réponse en fréquence dissymétrique) peuvent causer une modulation d’amplitude de la porteuse. L’ajout d’un filtre passe-bas entre le générateur d’impulsions et le transducteur BF diminue la superposition de ce signal BF à la porteuse (on coupe les fréquences émises dans la partie haute de la bande passante BF). Le filtre passe-haut, placé entre le transducteur

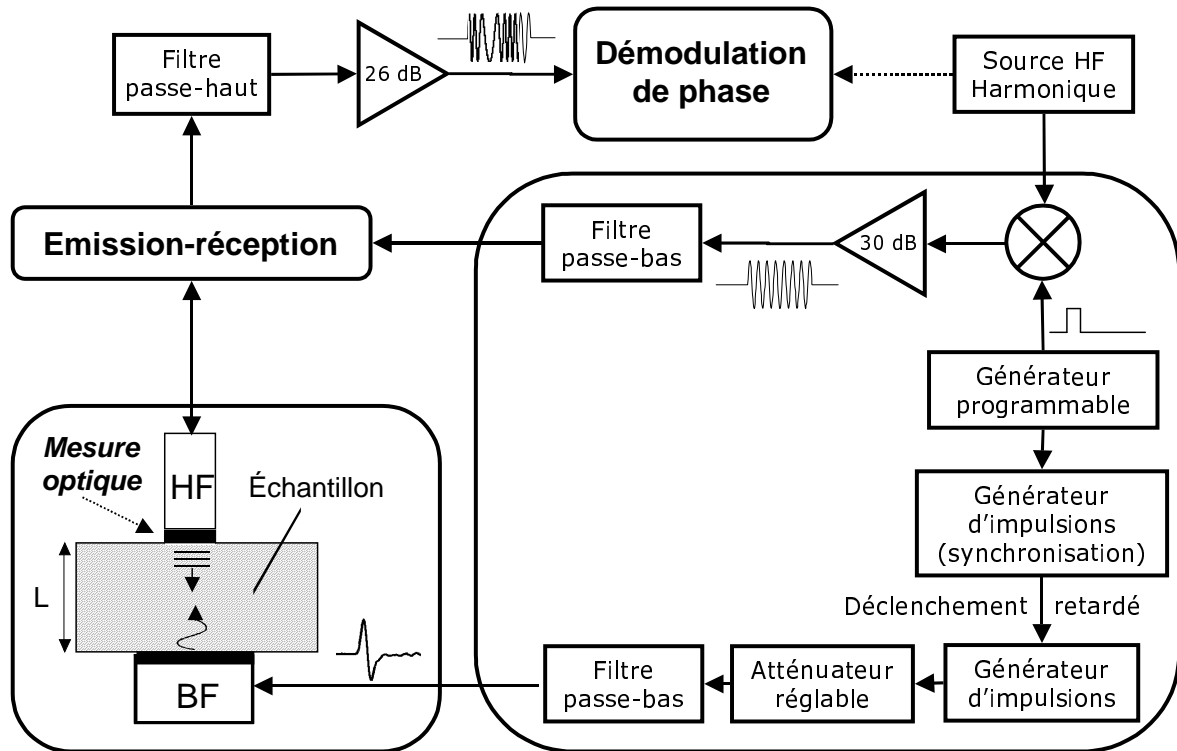


FIG. 2.3 – Dispositif de mesure du coefficient de non-linéarité, avec un train d’ondes HF et une impulsion BF.

HF et la réception contribue également à l’élimination de cet effet : il corrige la bande passante du transducteur HF (correction d’une remontée de la réponse dans les basses fréquences : 5 à 10 MHz, pour le transducteur HF à 30 MHz).

### 2.2.1.1 Méthode absolue

La première variante de la méthode est absolue : elle nécessite une mesure par interférométrie optique du déplacement de l’onde de basse fréquence à la surface du solide (voir au paragraphe suivant). Une dérivation numérique<sup>4</sup> fournit la vitesse de déplacement qui intervient dans l’expression (2.2) de la modulation de phase. La mesure du déphasage acoustique de la porteuse à 30 MHz pour un trajet simple dans l’échantillon solide permet de calculer  $\beta$ . Dans cette configuration, les fluctuations étant faibles dans un milieu solide, il est possible d’utiliser un dispositif analogique pour démoduler le train d’ondes porteur par un signal de référence harmonique. En effet, la démodulation analogique nécessite d’effectuer une moyenne (avec l’oscilloscope) des déphasages acquis. Les fluctuations du trajet acoustique du train d’ondes sonde, induites par les mouvements désordonnés du

<sup>4</sup>L’opération peut également être effectuée par un circuit analogique, c’est le cas des vibromètres utilisés pour les fréquences inférieures à 20 kHz.

fluide, perturbent le zéro de phase en sortie de démodulation, ce qui détériore considérablement le calcul des moyennes. La démodulation numérique permet, dans le cas des mesures relatives décrites ci-après, de remédier à cet inconvénient. En revanche elle reste moins précise dans le cas d'une simple couche de solide en raison des faibles valeurs de l'indice de modulation.

Le transducteur de haute fréquence est placé au contact de l'échantillon. Un gel couplant assure la transmission des ondes. Cette couche de couplant n'excède pas 0,1 mm. La vitesse de propagation étant de l'ordre de 1500 m/s, cette épaisseur est de l'ordre d'une longueur d'onde HF, négligeable devant le trajet dans l'échantillon. Le capteur de basse fréquence est collé au solide<sup>5</sup> pour garantir une stabilité des impulsions générées lors des mesures acoustiques et optiques. Dans les solides envisagés, le coefficient d'atténuation est très faible, on considère donc que la vitesse de déplacement (le maximum du premier front) est constante tout au long de l'interaction. Il est possible de corriger l'effet de l'atténuation de la basse fréquence sur l'amplitude de la modulation de phase. Le biais de la mesure optique (effectuée sur la surface libre, à la place du transducteur HF) peut être corrigé en appliquant un facteur exponentiel (atténuation d'une onde plane).

### 2.2.1.2 Méthode comparative

La deuxième méthode est relative; elle utilise deux déphasages acoustiques démodulés numériquement. Pour les fluides, on effectue une simple substitution dans la cellule : la modulation de phase est mesurée dans le milieu étalon (l'eau distillée), puis on remplace l'eau par le fluide étudié. Le rapport des modulations de phase donne le rapport des coefficients de non-linéarité :

$$\frac{\beta_{fluide}}{\beta_{eau}} = \frac{\Phi_{fluide}}{\Phi_{eau}} \frac{V_{fluide}^2}{V_{eau}^2}. \quad (2.3)$$

La différence d'impédance acoustique des deux matériaux est négligeable si les transducteurs utilisés ont une forte impédance mécanique (celle des céramiques piézoélectriques).

Dans le cas d'un solide, une couche d'eau surmonte l'échantillon, auquel le capteur BF est collé comme précédemment. Les deux premiers échos fournissent respectivement (pour une synchronisation adaptée de l'impulsion BF) un déphasage relatif au trajet dans le fluide uniquement ( $\Phi_{eau}$ ) et un déphasage somme des effets dans le solide et le fluide ( $\Phi_{tot}$ ). La durée du train d'ondes est limitée par le temps de vol dans le solide. Le rapport des coefficients de non-linéarité du solide et de l'eau est donné par :

$$\frac{\beta_{sol}}{\beta_{eau}} = 2T_{s/e} \frac{V_{sol}^2 L_{eau}}{V_{eau}^2 L_{sol}} \left( \frac{\Phi_{tot}}{\Phi_{eau}} - 1 \right), \quad (2.4)$$

où  $T_{s/e} = 2Z_{sol}/(Z_{sol} + Z_{eau})$  est le coefficient de transmission en ondes planes à l'interface solide-eau. Les figures 2.5 et 2.4 illustrent les résultats de la méthode relative dans le cas du duralumin. Sur la figure 2.5, comme dans la suite du chapitre, on trace la modulation de phase (ou une quantité qui lui est proportionnelle) en fonction de l'amplitude de l'impulsion de basse fréquence (que l'on

<sup>5</sup>Nous utilisons de l'acetyl salicilate (aussi appelé "salol") : chauffé à quarante degrés, ce composé organique sous forme de poudre, fond et se solidifie en refroidissant.

fait varier avec un atténuateur). La pente de la régression linéaire<sup>6</sup> est alors proportionnelle au coefficient de non-linéarité.

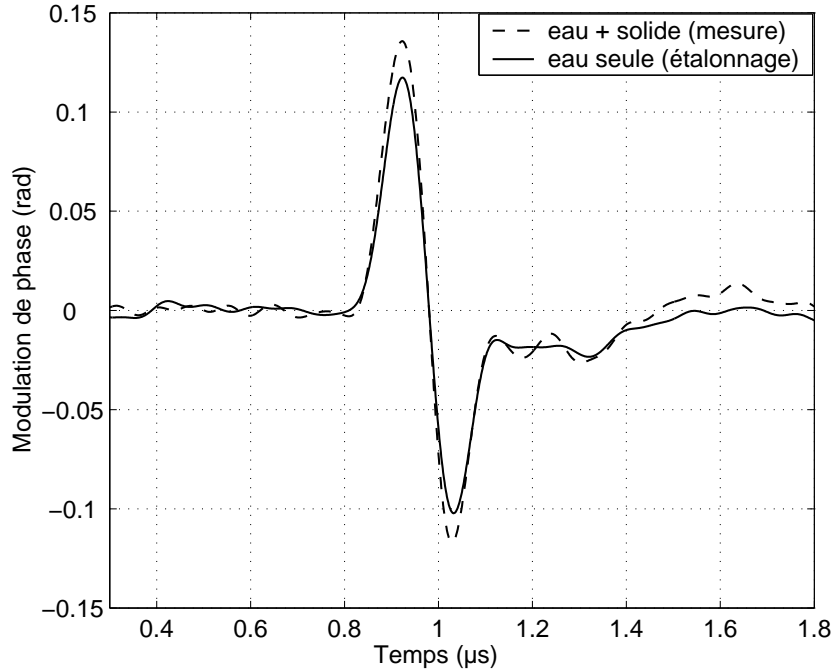


FIG. 2.4 – Modulations de phase pour les mesures relatives dans le duralumin.

La méthode relative permet l'économie (en terme de temps et de précision) de la mesure optique des vitesses de déplacement, mais elle nécessite une bonne connaissance des impédances mécaniques des deux milieux. Cette variante est finalement moins précise, principalement à cause des mesures de phase. Dans cette configuration, il est en effet nécessaire d'utiliser une démodulation numérique, qui est plus sensible au bruit (fluctuations importante dans les fluides) que la version analogique (cf. § 2.2.4). La précision est satisfaisante pour les deux modulations de phase  $\Phi_{eau}$  et  $\Phi_{tot}$  (de l'ordre de 0,1 rad), mais le rapport des déphasages relatifs au trajet dans l'eau et dans le solide est d'environ 20. La différence des modulations de phase est donc plus sensible au bruit. La précision de cette démodulation est également limitée par la qualité de la numérisation du train d'ondes porteur, en particulier, par le nombre de bits de quantification des oscilloscopes numériques (la fréquence d'échantillonnage qui dépasse les 500 MHz est largement suffisante). En numérisant le signal sur 12 bits (4096 niveaux), cette méthode (avec démodulation numérique) pourrait être aussi précise que la version absolue (avec démodulation analogique), à condition que le bruit dû à la traversée de la couche de fluide puisse être éliminé par le filtrage et les moyennes.

La modulation de phase correspondant au trajet dans le solide, obtenue par soustraction des deux droites de la figure 2.5 (méthode relative), est comparée au résultat de la méthode absolue sur la figure 2.6. La comparaison des deux variantes tourne naturellement à l'avantage de la version ab-

<sup>6</sup>Obtenue par la méthode des moindres carrés (Matlab).

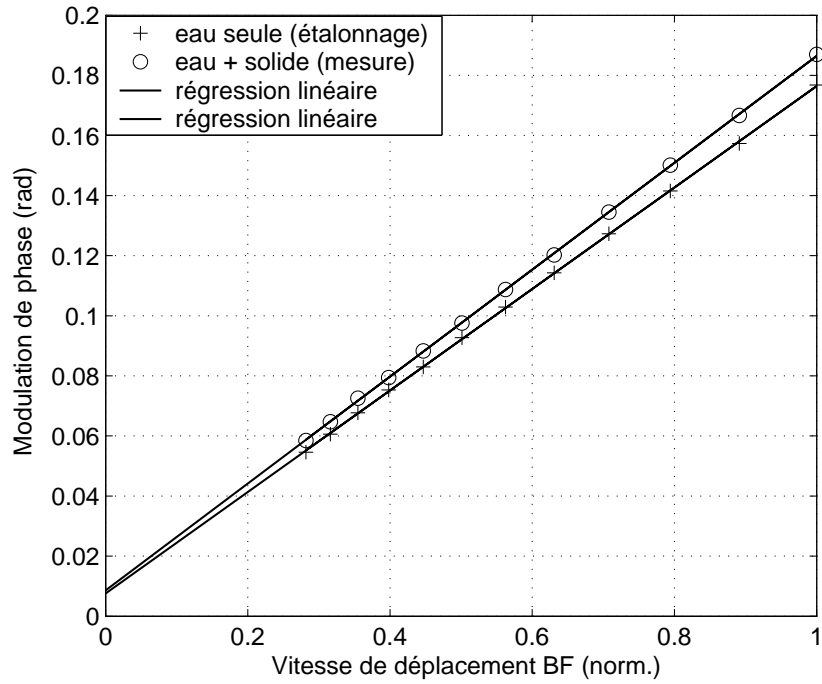


FIG. 2.5 – Méthode relative pour un parcours de 25 mm de duralumin et de 20 mm dans l'eau.

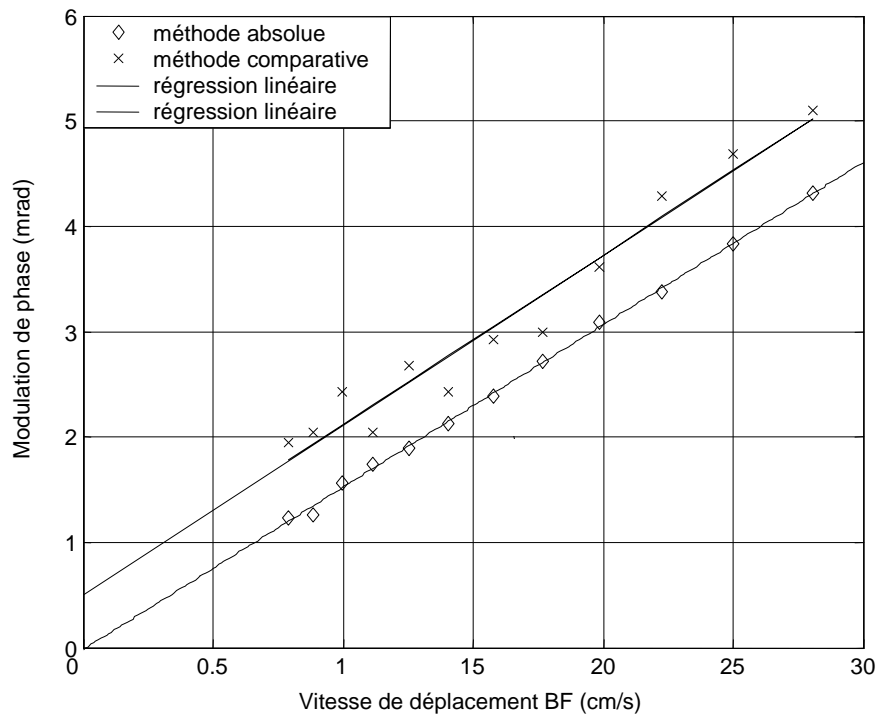


FIG. 2.6 – Comparaison des méthodes absolue et relative sur le duralumin.

solue, moins pratique pour les applications (calibration par interférométrie de la vitesse particulière BF). Cependant les améliorations apportées à l'acquisition de la porteuse (voir § 2.2.4.4 : dispositif de synchronisation pour la détection de phase numérique) n'ont pas été testées et devraient permettre d'améliorer la précision des mesures relatives dans les solides. Le décalage des deux droites de la figure 2.5 est difficile à expliquer : l'ordonnée à l'origine est la même pour les deux modulations de phase (de l'ordre de 10 mrad). La soustraction des deux droites annule presque complètement ce décalage. La réflexion partielle des deux ondes à l'interface solide/fluide, la diffraction, un défaut de l'alignement des transducteurs (l'incidence n'est pas rigoureusement normale) ou du parallélisme des interfaces ou encore l'atténuation ne semblent pas être en cause puisque la modulation de phase est surestimée. L'effet Doppler, que le faisceau HF subit à sa réflexion sur les interfaces, est quant à lui bien trop faible pour être responsable de ce décalage (voir paragraphe suivant). Il serait nécessaire d'effectuer d'autres expériences pour éclaircir ce point. Cette méthode n'a pas été utilisée très longtemps sur les solides (elle a été "mise en veille" au profit de la variante absolue), mais elle reste bien adaptée, et précise, pour les mesures dans les fluides.

### 2.2.1.3 Interaction contra-propagative, effet Doppler

L'interaction contra-propagative a lieu aux deux interfaces : d'abord sur le capteur BF au moment de la réflexion du train d'ondes et de l'émission de l'impulsion, puis à la réception du train d'ondes par le transducteur HF (réflexion de l'impulsion). Cet effet est quasiment nul puisque l'impulsion bipolaire de vitesse induit deux variations de célérité, successives du point de vue de l'onde HF, qui se compensent. Si les deux ondes ne se propagent pas dans le même sens l'interaction colinéaire n'est pas cumulative [95], [67].

L'effet Doppler intervient à la réflexion du train d'ondes sur la surface en mouvement. Il s'agit d'un effet local qui module la fréquence par variation du chemin acoustique (ou optique)<sup>7</sup>. Dans le cas, qui concerne nos expériences, de la réflexion normale, le déphasage, équivalent à la modulation de fréquence Doppler, s'exprime par [28] :

$$\Phi_d = \frac{4\pi u_2}{\lambda_1}. \quad (2.5)$$

Le rapport avec le déphasage induit par interaction non-linéaire est :

$$\frac{\Phi_d}{\Phi_p} = \beta \frac{\omega_2 L}{4V_L}. \quad (2.6)$$

Dans des configurations expérimentales moins favorables, la calibration du transducteur de basse fréquence permettrait de soustraire  $\Phi_d$  à la modulation de phase mesurée. Le rapport (2.6) vaut  $3,7 \cdot 10^2$  pour l'eau et  $2,0 \cdot 10^2$  pour le duralumin (avec les valeurs du tableau 1.1). L'effet Doppler n'excède pas un pour cent de  $\phi_p$ , il est relativement plus important dans les solides que dans les fluides, mais reste néanmoins négligeable.

<sup>7</sup>La compétition entre les effets paramétriques et Doppler fit débat il y a quelques dizaines d'années. L'effet Doppler n'est significatif que si la longueur d'onde émise par la surface vibrante est plus grande que la distance d'interaction (voir Piquette et Van Buren [28]).

Zaremba [50] traite en détail l'effet de déphasages successifs subis par les ondes primaires et secondaires au cours de plusieurs aller-retours dans un échantillon, dans le cas de la fréquence somme. Ces déphasages, dus à la partie imaginaire des coefficients de réflexion, modifient les conditions d'accord de phase au cours des trajets successifs. L'article de Zhou [96] décrit la réflexion d'une onde de volume de forte amplitude en fonction de l'angle d'incidence. L'incidence normale se ramène au cas de la réflexion linéaire d'une onde harmonique.

### 2.2.2 Mesure optique de la vitesse de déplacement, diffraction

L'expression (2.2) de la modulation de phase du train d'ondes sonde fait intervenir la vitesse de déplacement de l'impulsion de basse fréquence à l'interface transducteur BF/échantillon. Dans le cas de la méthode absolue, l'interférométrie laser<sup>8</sup> permet de mesurer avec précision (bande passante de 50 MHz et précision de 0,1 nm) le déplacement BF à la surface de l'échantillon (en  $z = L$ ). Une dérivation numérique du déplacement fournit la vitesse particulière  $v_2(L, t)$  et permet une comparaison des formes d'onde de la modulation de phase et de la vitesse de déplacement. Il faut tenir compte de la réflexion à l'interface solide/air qui "double" la vitesse de déplacement.

Cette mesure optique est réalisée à la surface libre de l'échantillon (interface transducteur HF/échantillon). On considère donc que  $v_2(L, t) = v_2(0, t)$ , c'est à dire que l'atténuation et la diffraction sont négligeables. Cette approximation est correcte à 1% près, tant que  $\alpha L \ll 10^{-2}$  (avec  $\alpha$  le coefficient d'atténuation défini au paragraphe 1.2.3.2 page 20), ce qui est vérifié dans la plupart des matériaux étudiés. Dans le cas de la silice, nous avons pu mesurer la forme du déplacement à l'interface  $z = 0$  séparant le transducteur BF et l'échantillon (voir figure 2.1a). Le déplacement obtenu est exempt de tout effet de diffraction. On peut considérer que la vitesse de déplacement qui en dérive est exactement celle qui interagit avec l'onde porteuse contrairement au cas précédent (mesure à la surface de l'échantillon), pour lequel le relevé optique est celui de l'onde BF après propagation.

Pour effectuer une mesure quantitative, il faut calibrer la sonde optique en tenant compte de la réflexion partielle du faisceau laser à l'interface  $z = L$  qu'il traverse. La procédure de calibration analogique consiste à mesurer, à l'aide d'un analyseur de spectre, les amplitudes de la raie centrale (70 MHz) et des raies latérales (de modulation de phase). Le rapport de ces amplitudes donne la modulation de phase. Le facteur de calibration de l'électronique est donné par le rapport de l'amplitude du signal électrique de sortie sur l'indice de modulation de phase obtenu précédemment. Si une réflexion partielle (en  $z = L$ ) intervient, le niveau de porteuse à partir duquel est obtenu l'indice de modulation n'est pas celui du faisceau qui frappe la surface en mouvement. Autrement dit, le niveau de référence de la porteuse est biaisé ainsi que le faisceau sonde à son retour à travers l'interface. Pour obtenir une valeur cohérente du déplacement à l'interface transducteur BF-Silice, il serait par ailleurs nécessaire de corriger le déphasage induit par l'interaction acousto-optique sur le faisceau lumineux lors de sa propagation dans l'échantillon. La mesure absolue étant délicate

<sup>8</sup>Pour une description détaillée de la technique, voir au Chapitre 4. Elle exploite également une modulation de phase : celle produite par effet Doppler lors de la réflexion du laser sur une surface en mouvement.

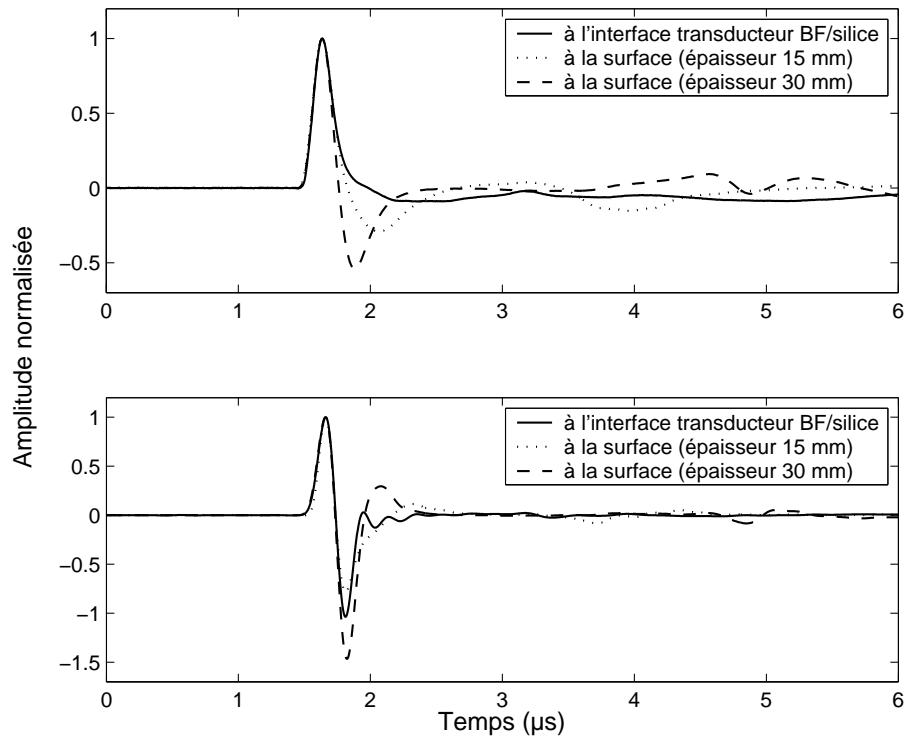


FIG. 2.7 – Déplacement et vitesse particulière engendrés par un transducteur BF collé à un échantillon de silice, pour différentes distances de propagation.

dans cette configuration, nous nous contentons d'une comparaison des formes d'ondes normalisées (figures 2.7). Leur observation met en évidence les limites de la méthode en terme d'épaisseur de l'échantillon : par exemple, pour  $L = 30$  mm, ce qui correspond à la distance de Fresnel ( $a^2/\lambda$ , où  $a$  est le rayon du capteur) à 2,5 MHz dans la silice, l'impulsion de basse fréquence est déformée par la diffraction, ce qui peut perturber la mesure.

Les signaux obtenus dans la silice et le duralumin mettent bien en évidence l'effet de la diffraction de l'onde de basse fréquence. Pour une surface émettrice de dimension limitée et animée d'un mouvement uniforme, la diffraction se traduit par la présence d'ondes de bord : un point sur l'axe reçoit en premier le signal émis par le centre du capteur et plus tard celui qui provient des bords de la surface émettrice. Plus on s'éloigne du capteur, plus la différence entre les distances de propagation (depuis le centre et les bords) est faible : l'onde de bord vient interférer avec le début du front d'onde.

Pour ces géométries simples (émetteur plan carré ou circulaire), le problème peut être résolu, en régime linéaire, grâce au formalisme de la réponse impulsionnelle de diffraction, basé sur les fonctions de Green de l'opérateur de propagation [97], [98]. L'annexe D résume les résultats obtenus pour les ouvertures circulaire et carrée. La différence entre ces deux géométries n'est pas très importante. Il existe des découpes de surface émettrice plus complexes (en forme de rosace) qui permettent de diminuer ces effets et de conserver une forme bien bipolaire sur des distances de propagation plus importantes [99].

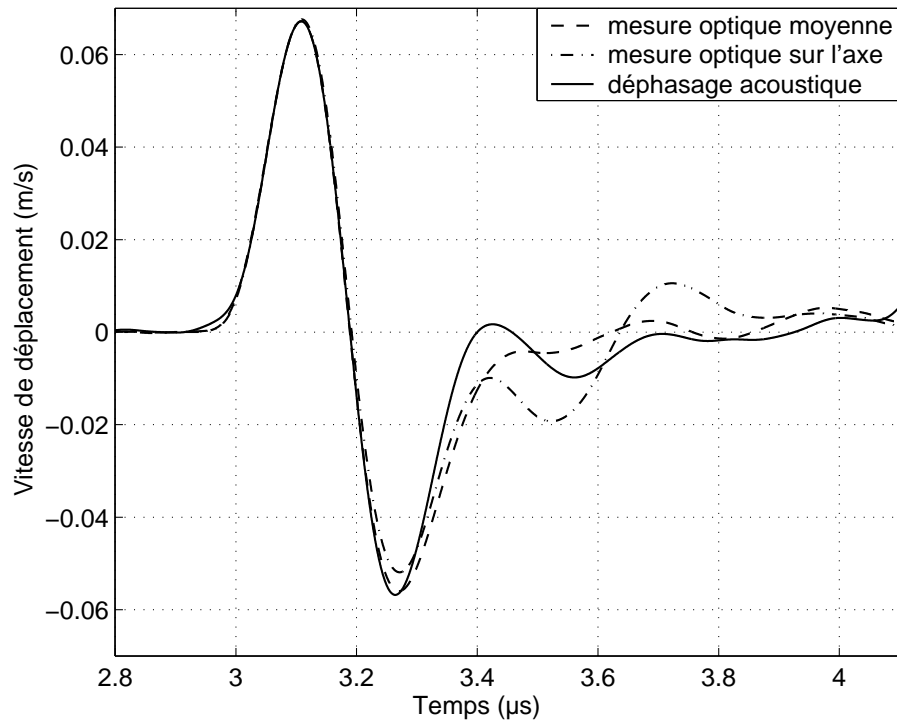


FIG. 2.8 – Modulation de phase acoustique et mesure optique sur l'axe du capteur BF et en moyenne suivant un diamètre du transducteur HF (échantillon de 15 mm de silice).

Pour tracer la figure 2.8, nous avons déplacé le point de détection selon un diamètre du transducteur BF. Nous pouvons ainsi évaluer l'uniformité de l'émission et calculer la moyenne, sur le diamètre du transducteur HF, de la vitesse particulière de basse fréquence. L'interféromètre mesure la vitesse normale de l'interface : il somme donc la contribution des ondes d'incidence normales et des ondes de bord. La modulation de phase acoustique est comparée avec la vitesse particulière sur l'axe commun des deux transducteurs d'une part, et avec la moyenne des signaux enregistrés suivant le diamètre du transducteur HF (6 mm). L'impulsion bipolaire de modulation se superpose bien avec les deux autres formes d'ondes. Par contre, juste après l'arrivée de la partie négative, la modulation de phase semble être un compromis entre la mesure optique sur l'axe et la mesure moyenne. Sur la moyenne, les effets de bords sont plus faibles (c'est en effet sur l'axe que l'interférence est la plus constructive) et c'est avec cette forme que la modulation devrait le mieux s'accorder. On remarque donc que la sommation de l'onde principale et de l'onde de bord modifie la forme du déplacement BF au cours de la propagation. Cette modification se répercute sur la modulation de phase car l'onde de haute fréquence interagit avec la projection du champ sur l'axe de propagation (les ondes de bord correspondent à des fronts d'onde sphériques provenant des bord du capteur. L'interaction de ces composantes avec l'onde de haute fréquence n'est donc pas strictement colinéaire et produit une contribution plus faible sur la modulation de phase). Pour s'affranchir de cet effet, on mesure le coefficient  $\beta$  en utilisant le premier front d'onde (positif).

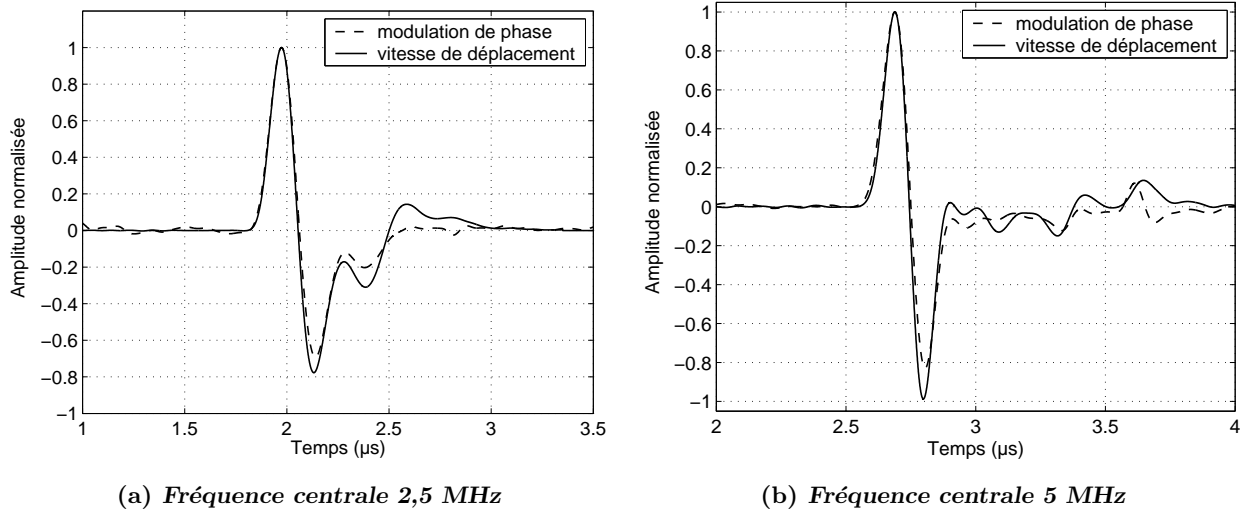


FIG. 2.9 – Comparaison des signaux optique et acoustique pour un parcours de 15 mm dans du duralumin.

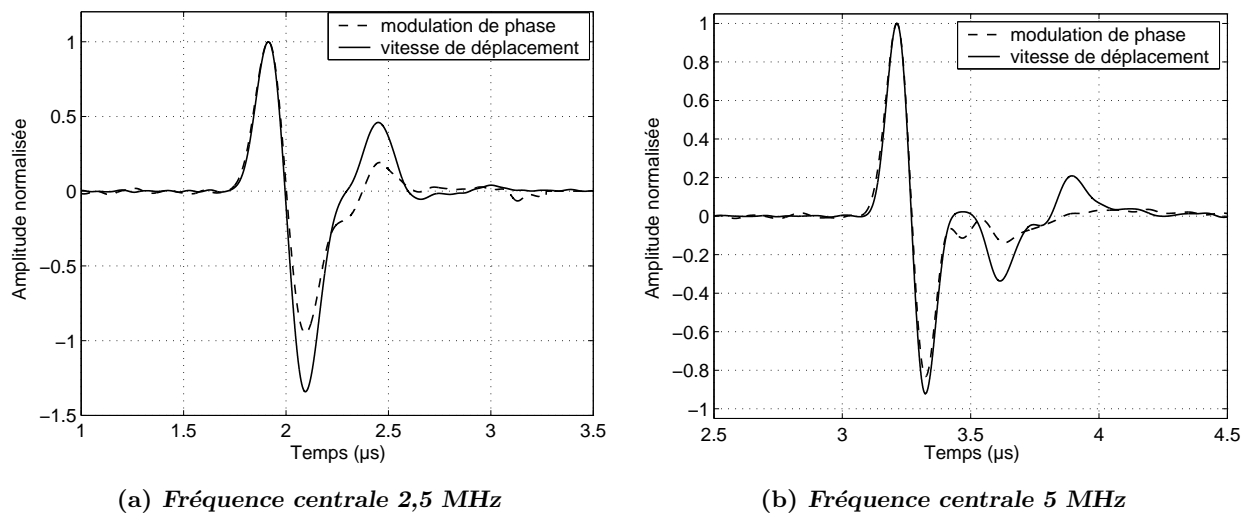


FIG. 2.10 – Mesures optique et acoustique pour un parcours de 25 mm dans du duralumin.

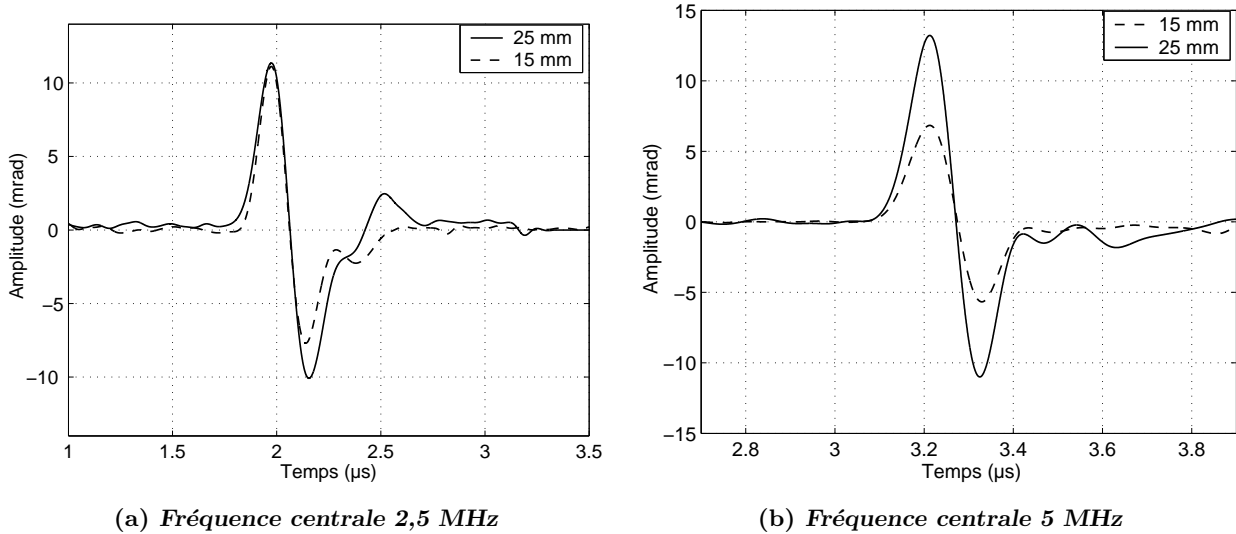


FIG. 2.11 – Comparaison des modulations de phase pour des échantillons de duralumin de 15 et 25 mm d'épaisseur (à 2,5 MHz les amplitudes d'excitation du transducteur n'étaient pas les mêmes (si c'était le cas les modulations de phase n'auraient pas la même amplitude)).

Les mesures sur des échantillons de duralumin de différentes épaisseurs illustrent bien ces effets. On compare, sur les figures 2.9 et 2.10, les mesures optiques de la vitesse de déplacement (sur l'axe du transducteur) avec la modulation de phase du faisceau sonde acoustique. Les effets de bords sont d'autant plus faibles que la distance de propagation est petite et que la fréquence est élevée. Les mesures réalisées sur 25 mm sont donc plus fiables à 5 MHz qu'à 2,5 MHz. Dans ce dernier cas (figure 2.10a), l'onde de bord commence à interférer avec le front utilisé pour la mesure. Les modulations de phase, représentées sur la figure 2.11 ont des formes assez proches. Les différences sont plus marquées à 2,5 MHz, où les effets de diffraction sont les plus importants. Une condition est donnée par une simple considération géométrique : la distance de propagation  $L$  et le rayon du capteur BF  $a_2$  doivent être tels que  $\sqrt{a_2^2 + L^2} - L > \lambda_2$ , pour que la différence de temps de vol entre le premier front et l'onde de bord soit supérieure à la période BF. Elle est vérifiée jusqu'à 40 mm de la source dans le cas le moins favorable ( $f_2 = 2,5$  MHz,  $a_2 = 15$  mm, dans le duralumin), ce qui semble optimiste, mais permet néanmoins de dimensionner le montage.

Dans des configurations moins favorables au respect des approximations (atténuation, diffraction, réflexion et transmission aux interfaces), il serait possible, à partir de l'étalonnage du déplacement BF (optique pour la méthode absolue et acoustique pour la méthode relative), de simuler numériquement l'intégration du déphasage de la porteuse en tenant compte des conditions de propagation des deux ondes<sup>9</sup>. D'autre part, le fait que l'interaction ne se fasse pas entre deux ondes d'amplitudes constantes tout au long de leur trajet commun, peut être pris en compte dans l'intégration du déphasage de la porteuse<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>Une simulation numérique de l'équation KZK, programmée par Thierry Lepoles au cours de son post-doctorat au LOA, est en cours de validation expérimentale et devrait le permettre.

<sup>10</sup>Une solution de l'équation KZK peut être obtenue, avec prise en compte de l'atténuation, en pondérant les deux ondes primaires par un terme exponentiel décroissant. En injectant cette solution du problème linéaire dans le terme source de l'équation non-linéaire, on obtient une solution au deuxième ordre dont l'amplitude décroît exponentiellement.

### 2.2.3 Capteurs

Des transducteurs BF ont été fabriqués au cours de ce travail, grâce à l'aide précieuse de Daniel Royer. Ils ont permis d'augmenter les niveaux d'émission dans les solides. L'application (sous Matlab) du modèle analytique de transducteur mono-élément [100] permet de choisir le milieu arrière en fonction du milieu de propagation et de la forme d'onde souhaitée. Les résultats sont présentés en annexe E.

### 2.2.4 Électronique et démodulations

Cette section présente les améliorations apportées à l'électronique du montage. Un dispositif d'émission-réception plus souple permet d'adapter la fréquence de fonctionnement (mesures avec une porteuse à 10 MHz dans les fluides) et d'augmenter le niveau d'excitation de la porteuse. L'adaptation de la démodulation analogique, pour la démodulation de trains d'ondes, a rendu possibles les mesures de coefficients de non-linéarité des solides. Enfin, l'utilisation d'une démodulation numérique est avantageuse, car elle fonctionne à n'importe quelle fréquence de porteuse (mesures optiques et acoustiques). Cependant, elle nécessite une porteuse peu bruitée. Pour l'obtenir, il faut réaliser des moyennes avec un déclenchement fiable de l'oscilloscope et de l'impulsion BF, à partir de la porteuse. Un circuit de synchronisation, utilise la sortie de la source HF comme horloge pour déclencher le générateur de créneau (pour le train d'ondes), l'oscilloscope et le générateur d'impulsions (par l'intermédiaire d'un générateur d'impulsions retardées).

#### 2.2.4.1 Électronique d'émission-réception

Le dispositif expérimental avec porteuse harmonique est décrit dans l'annexe C.1 (figure C.2). Il utilise une jonction hybride (coupleur directionnel), qui est un quadripôle, dont le fonctionnement est basé sur des lignes de transmissions (guides coaxiaux ou plan sur un substrat). Ce dispositif (dont l'utilisation est également décrite dans l'annexe C.1) présente l'avantage d'être un composant passif, mais son fonctionnement n'est adapté qu'à une fréquence (rôle du boîtier de compensation d'impédance). Dans le cas de mesures en régime harmonique un réglage fin de la compensation doit être effectué avant chaque mesure. Il est assez sensible aux variations de l'impédance de la colonne de fluide sous l'effet de la température. En régime transitoire, cet inconvénient est moins prononcé puisque qu'un défaut d'adaptation ne perturbe l'écho acoustique que par l'intermédiaire de réflexions successives<sup>11</sup>.

Le montage d'émission-réception réalisé au cours de ce travail utilise des commutateurs analogiques, basés sur des transistors (pour le détail de son fonctionnement, se reporter à l'annexe C.1). Il s'agit de circuits intégrés actifs réalisant la fonction d'interrupteur actionnée par un signal de commande. Avec ce type de montage, seule l'émission de trains d'ondes est envisageable puisque

---

<sup>11</sup>La largeur de bande peut être un problème plus subtil : si l'adaptation d'impédance est idéale, le port de réception rejette tout le contenu spectral en dehors de la fréquence de porteuse, le composant filtrera donc les raies latérales de modulation de phase. Il s'agit donc d'un compromis entre la largeur de bande et l'isolation.

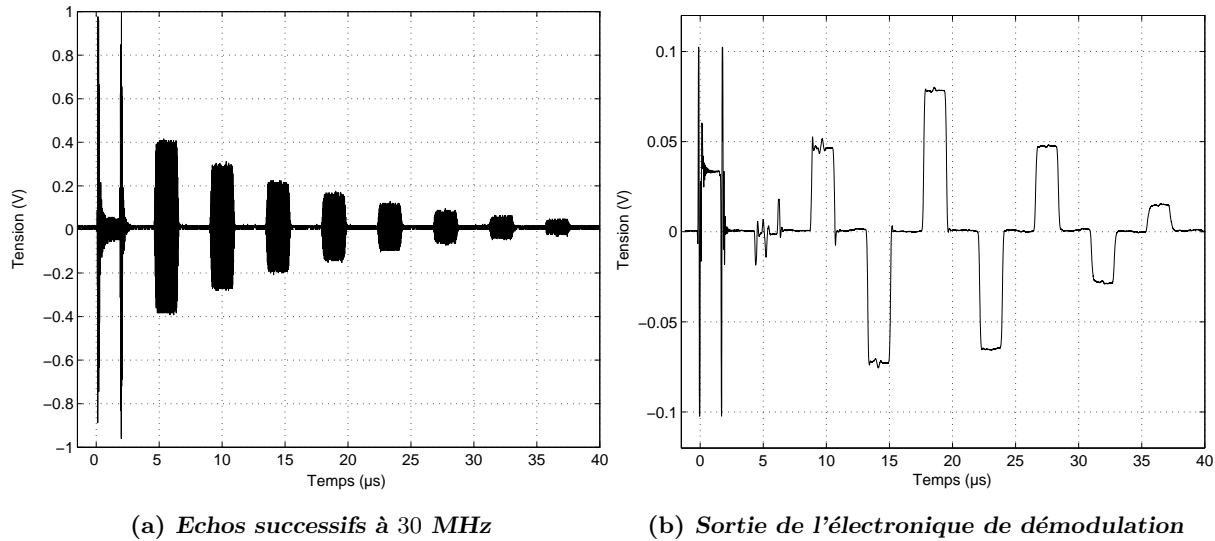


FIG. 2.12 – Signaux d'émission-réception obtenus avec une jonction hybride.

les états ouvert et fermé sont clairement distincts. Le signal carré, destiné à être multiplié avec la porteuse pour obtenir le train d'ondes, est divisé en deux pour être appliqué sur l'entrée de commande du commutateur. Ce dispositif présente l'avantage, de ne pas nécessiter de compensation d'impédance et d'avoir une large bande passante (par ailleurs il est moins coûteux, et guère plus encombrant, si l'on ne tient pas compte de l'alimentation). Un changement de fréquence porteuse nécessite seulement le changement de filtres. Enfin, les commutateurs supportent des tensions allant jusqu'à 20 V d'amplitude sur 50 Ohm, alors que le circulateur ne supporte qu'un Watt, soit 10 Volts. Les signaux d'émission-réception obtenus avec les deux circuits (avant et après démodulation) sont présentés sur les figures 2.12 et 2.13. Quoiqu'il en soit, la bande passante du système est surtout limitée par le transducteur, les commutateurs sont plus souples d'utilisation et fonctionnent avec des tensions plus élevées. Les différentes configurations de montage des commutateurs sont présentées en C.1, le circuit comportant deux montages en T (T-switch) a été utilisé pour les mesures de coefficient de non-linéarité, avec une fréquence de porteuse de 10 ou 30 MHz. Le circuit comportant un seul montage en T, a surtout été utilisé pour d'autres applications (par collègue D. Clorennec (IR CNRS au laboratoire), pour l'émission-réception d'ondes de surface.).

Des mesures précises de célérité peuvent être effectuées avec ces dispositifs d'émission-réception. La figure 2.14 reproduit le signal d'émission-réception dans le cas assez avantageux du Germanium (l'atténuation y est très faible). L'amplitude des premiers échos est saturée, pour permettre l'acquisition des suivants. Le calcul des vitesses de propagation est réalisé par corrélation d'échos : le signal est "découpé en tranches", contenant un écho, grâce à une estimation de la vitesse et de l'épaisseur (ou par application d'un seuil). Puis ces portions de signal sont corrélées entre-elles. Le maximum de la corrélation correspond au décalage temporel pour lequel les deux trains d'ondes se superposent complètement. Les temps de vols successifs peuvent ainsi être obtenus avec une

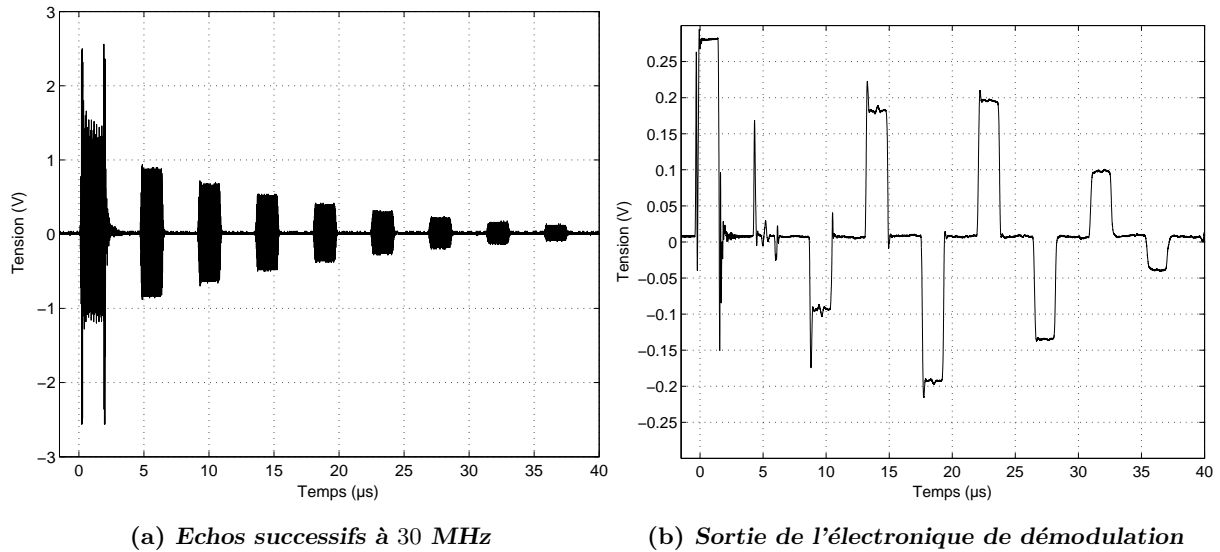


FIG. 2.13 – Signaux d’émission-réception obtenus avec des commutateurs.

précision meilleure qu’une période HF (soit 33 ns), qui dépend de la fréquence d’échantillonnage (supérieure à 100 MHz). Les temps de vols étant au moins de quelques microsecondes ( $4 \mu\text{s}$  pour 20 mm de trajet à 5000 m/s), l’incertitude est inférieure à 1%.

Avec ce dispositif, il est également possible d’envisager une mesure de célérité par interférence d’échos : deux trains d’ondes successifs sont émis de façon à interférer au moment où le premier écho (du premier train d’ondes) revient frapper la surface du transducteur HF et où le deuxième est émis [101]. Les signaux utilisés pour ”fabriquer” le train d’ondes sont obtenus avec un générateur programmable qui synthétise les formes d’ondes quelconques qui lui sont transmises, depuis l’ordinateur via une interface (GPIB). On peut donc utiliser une forme d’onde numérique composée de deux portes successives dont l’espacement peut être réglé à un échantillon près. La fréquence d’échantillonnage du convertisseur numérique/analogique est de 40 MHz au maximum ce qui est plus de 10 fois moins que celle de l’oscilloscope. Dans notre cas, cette méthode ne permet donc pas d’améliorer la précision des mesures de célérité.

Le coefficient d’atténuation, défini par la relation (1.73), peut être mesuré sans biais dans les fluides en faisant varier la distance entre les deux transducteurs (dans l’eau à 1MHz,  $\alpha \approx 25 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}$ )<sup>12</sup>. Dans les solides, lorsqu’un certain nombre d’échos (4 ou 5) est détectable, le rapport des échos successifs donne également le coefficient  $\alpha$  moyennant la connaissance des coefficients de réflexion à la surface des deux transducteurs. Nous n’avons pas cherché à faire des mesures systématiques de l’atténuation dans les différents échantillons. Pour la plupart des solides, cette approximation est correcte : seul le titane (dans lequel seuls deux ou trois échos peuvent être enregistrés) aurait nécessité une correction de l’atténuation. Par ailleurs, les mesures d’atténuation révèlent un maximum d’information lorsqu’elles sont effectuées en fonction de la fréquence. L’atténuation,

<sup>12</sup>On rappelle  $\alpha[\text{dB}/\text{m}] = (10^6/V_L) \alpha[\text{dB}/\mu\text{s}]$ ,  $\alpha[\text{Np}/\text{m}] = (1/8,7) \alpha[\text{dB}/\text{m}]$ .

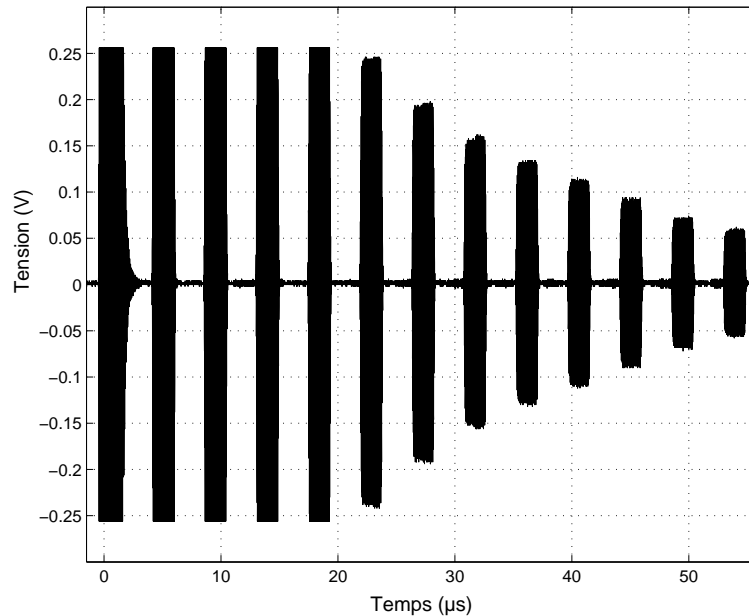


FIG. 2.14 – Signal d'émission-réception pour la mesure de célérité (dans le Germanium).

dans les fluides "simples", évolue comme le carré de la fréquence (dans l'eau  $\alpha = 0,22f^2$ [dB/m], avec  $f$  en MHz). Dans des fluides plus complexes (comme le mélange binaire eau/éthanol) ou dans les gels, la dissipation d'énergie provient également de la relaxation des déformations et nécessite une modélisation plus complète [102]. Dans les solides, la structure de grains diffuse<sup>13</sup> les ondes et contribue à l'atténuation, en plus des pertes par effets thermoélastique et hystérique [103]. Pour l'effet thermovisqueux, on a  $\alpha \propto f^2$ , pour l'hystérésis  $\alpha \propto f$ .

<sup>13</sup>Les différents régimes de diffusion dépendent de la taille des constituants ( $D$ ) et de la longueur d'onde :

- Pour  $\lambda \gg \pi D$  (diffusion Rayleigh, régime d'homogénéisation) :  $\alpha \propto D^3 f^4$ .
- Pour  $\lambda \approx \pi D$  (diffusion stochastique, régime de résonance) :  $\alpha \propto D f^2$ .
- Pour  $\lambda \ll \pi D$  (réflexion spéculaire) :  $\alpha \propto D^{-1}$ .

Les constantes de proportionnalité sont fonction des caractéristiques géométriques, des vitesses des ondes L et T, ainsi que de la densité. Pour les métaux à grains (les roches ou les suspensions de bulles), l'étude de ces propriétés en régime linéaire est appliquée de longue date dans le contrôle non-destructif. Dans nos mesures, même si les longueurs d'onde (à 30 MHz dans les solides) sont parfois de l'ordre de la taille des grains (50 à 100  $\mu\text{m}$  pour le titane) nous négligeons ces effets.

## 2.2.4.2 Démodulation analogique

Qu'il s'agisse des mesures optiques de déplacement par interférométrie ou des mesures acoustique de modulation de phase, nous utilisons une démodulation de phase analogique (figure 2.15). Un mélangeur (composant passif) assure la multiplication des signaux, il s'agit donc d'un composant non-linéaire. Le signal de sortie est le produit des deux entrées, son amplitude est proportionnelle à chacune des deux autres dans la plage de fonctionnement normal.

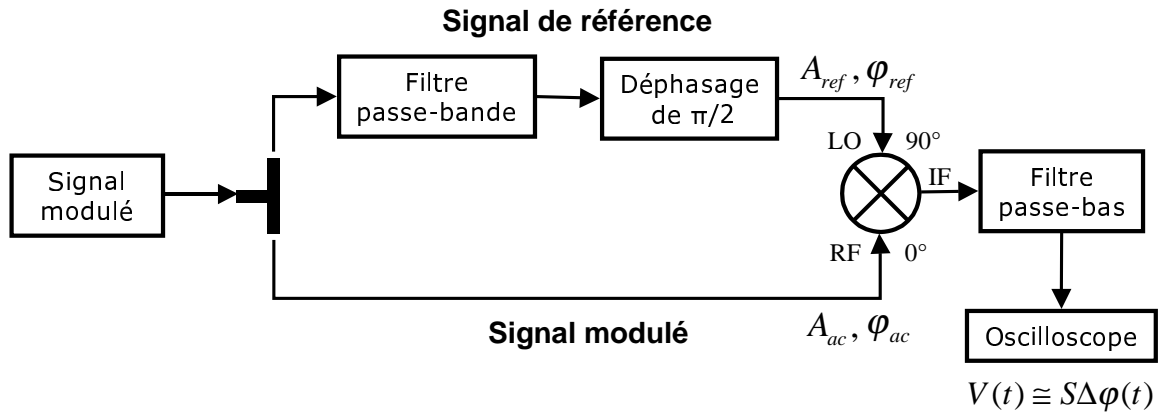


FIG. 2.15 – Principe de la démodulation analogique d'une porteuse harmonique.

Avec un signal d'entrée de la forme  $A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 L + \Phi_p(L, t))$ , où la modulation de phase  $\Phi_p(L, t)$  est donnée par la relation (2.2), le signal à l'entrée RF du mélangeur s'écrit :  $A_{ac} \cos(\omega_1 t - k_1 L - \phi_{ac} + \Phi_p(L, t))$ , où  $\phi_{ac}$  est une phase à l'origine, et le signal de référence s'écrit :  $A_{ref} \cos(\omega_1 t - \pi/2 - \phi_{ref})$ . La sortie du mélangeur est donnée par :

$$s(t) \propto \frac{A_{ac} A_{ref}}{2} [\sin(k_1 L + \phi_{ac} - \phi_{ref} - \Phi_p(t)) + \sin(2\omega_1 t - k_1 L - \phi_{ac} - \phi_{ref} + \Phi_p(t))]. \quad (2.7)$$

Le point de fonctionnement du mélangeur pour la démodulation de phase est tel que  $k_1 L + \phi_{ac} - \phi_{ref} = 0$  [ $\pi$ ]. On obtient alors, après filtrage passe-bas de la composante centrée à  $2\omega_1$ , un signal proportionnel au sinus de la modulation de phase :

$$s(t) = -S \sin(\Phi_p(t)) \approx -S \Phi_p(t), \quad (2.8)$$

avec  $S \propto A_{ac} A_{ref}$ . L'approximation précédente induit une erreur inférieure à 5% , tant que  $\Phi_p < 0,5$  rad. Le niveau du signal est maintenu constant sur les deux entrées du mélangeur. Le niveau sur l'entrée LO est saturé et un contrôle automatique de gain ajuste celui de l'entrée RF. Ainsi, la calibration de l'électronique est indépendante du niveau du signal physique convertit par le capteur  $S = cste \propto A_{ac}$  (voir annexe C.2). Par ailleurs, l'application sur l'entrée LO du mélangeur, du signal de référence obtenu par filtrage passe bande de la porteuse, dispense d'un réglage de la fréquence

de l'oscillateur local. C'est le cas des électroniques de démodulation de la sonde optique, ainsi que de celui du montage d'interaction paramétrique pour une porteuse harmonique (utilisé dans les fluides).

### 2.2.4.3 Démodulation de trains d'ondes

Initialement, le train d'ondes ne pouvait pas être démodulé numériquement en raison du rapport signal sur bruit défavorable, lors de l'acquisition de la porteuse et de son traitement numérique. La possibilité de démoduler numériquement dépend non seulement du rapport signal sur bruit de la porteuse, mais aussi du nombre de bits de quantification<sup>14</sup>. Ce problème a été résolu par la suite (voir paragraphe suivant) grâce au dispositif de synchronisation, réalisé par Ryota Takatsu au cours de son stage au laboratoire [104]. Des simulations de démodulation de signaux modulés (voir § 4.1.3.5) en phase et en amplitude, avec des bruits de phase et d'amplitude, ainsi qu'une quantification numérique du signal harmonique synthétisé, nous ont montré que la démodulation numérique pouvait fonctionner même pour de faibles indices de modulation. Le montage utilisant la démodulation analogique de trains d'onde (et éventuellement le dispositif d'émission-réception basé sur les commutateurs) est présenté sur la figure C.3 de l'annexe C.1. Il correspond à la configuration la plus courante pour les mesures dans les solides.

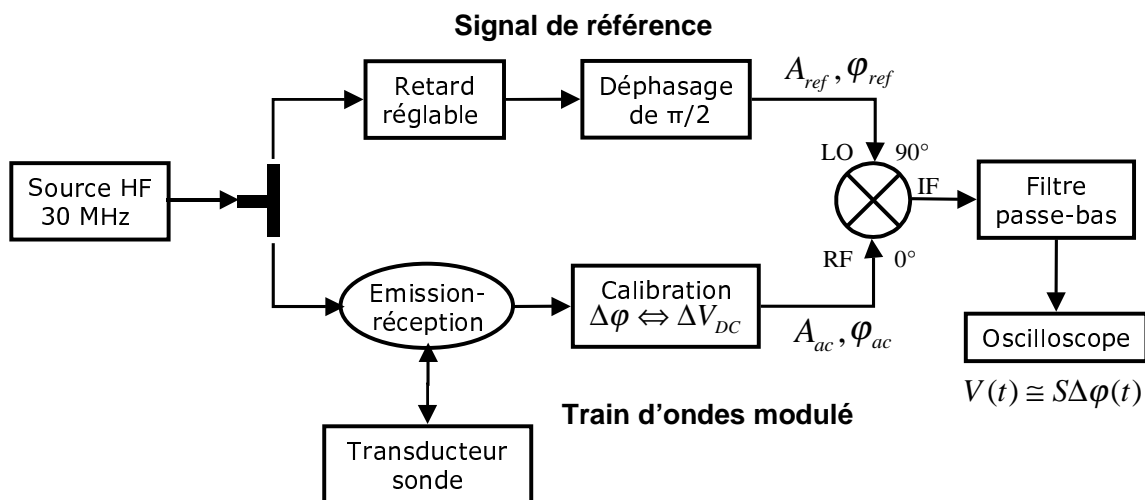


FIG. 2.16 – Principe de la démodulation analogique d'un train d'ondes de porteuse.

<sup>14</sup>L'utilisation des moyennes avec l'oscilloscope permet de réduire de manière importante le bruit aléatoire due à l'électronique et à l'environnement (il décroît comme  $1/\sqrt{n}$ , où  $n$  est le nombre de moyenne), par contre le nombre de niveau de quantification verticale (256 pour nous) est fixé, ce qui est équivalent à un bruit d'amplitude de  $1/256$ .

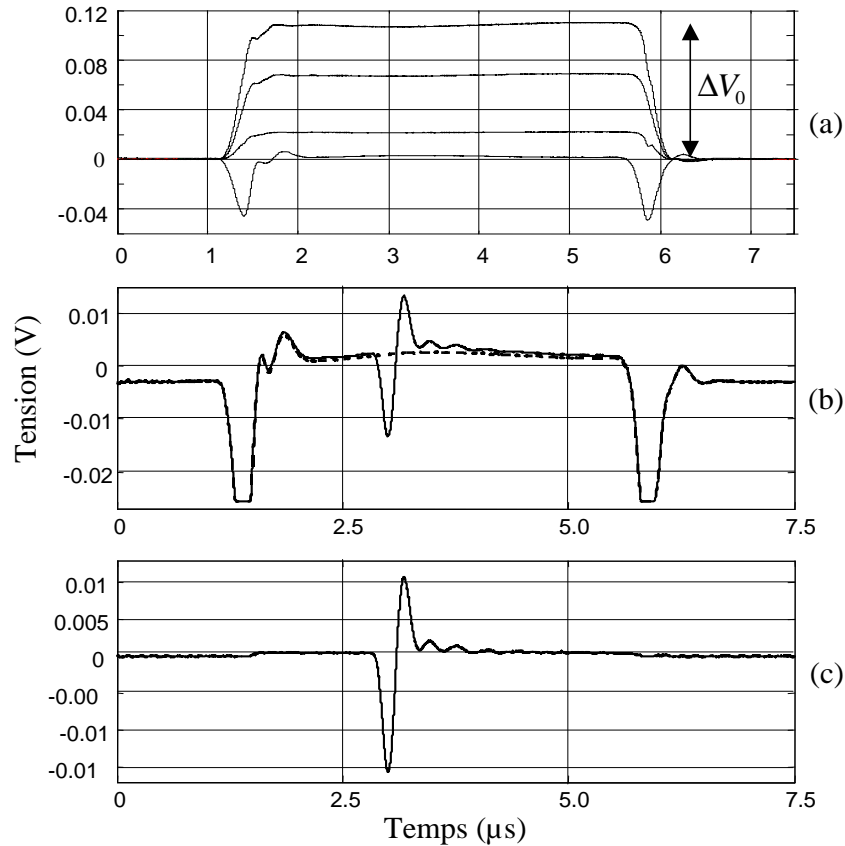


FIG. 2.17 – Résultats de la démodulation analogique de trains d’ondes : (a) niveaux continus nécessaires à la calibration, (b) signal de référence (pointillés) et modulation de phase (trait plein), (c) modulation de phase obtenue par soustraction des deux signaux précédents.

Nous avons commencé par mettre au point une démodulation analogique adaptée aux mesures dans les solides (fonctionnement avec un train d’ondes porteur et de faibles indices de modulation). Dans le cas d’un train d’ondes, il est impossible d’utiliser un contrôle automatique de gain, à moins de concevoir un dispositif capable d’identifier le premier écho et de l’amplifier justement). Le signal appliqué sur l’entrée LO du mélangeur provient directement de la source. Sur l’entrée RF, la phase et l’amplitude dépendent de la propagation de l’onde acoustique dans l’échantillon. Il est donc nécessaire d’adapter la longueur de la ligne à retard pour chaque échantillon et d’étalonner la réponse du mélangeur pour chaque amplitude du retour acoustique. Un fonctionnement linéaire du mélangeur est assuré lorsque le niveau du signal de référence (LO) est saturé ( $> 7$  dBm) et que celui du train d’ondes porteur est maintenu constant. La sensibilité (V/rad) est d’autant plus grande que le niveau sur l’entrée RF est élevé, sans dépasser le seuil de linéarité du composant (1 dBm sur l’entrée RF). Pour cela, une fois assuré le déphasage de  $\pi/2$  entre les deux signaux (RF et LO), on place différentes lignes (câble coaxiaux) de retard entre l’amplificateur de sortie et le

mélangeur. La différence de niveau est proportionnelle au déphasage  $\Delta\phi$  induit par la ligne, donc à sa longueur<sup>15</sup>. La sensibilité du dispositif,  $S = \Delta V_0/\Delta\phi$ , est obtenue en mesurant la variation du niveau continu à la sortie IF du mélangeur, comme le montre la figure 2.17. L'inversion de la relation (2.8) fournit la valeur de la modulation de phase. L'excursion de phase maximale peut être repoussée à  $\pi/2$  en appliquant numériquement l'opération *Arcsin* au signal numérisé (et calibré)  $s(t)/S$  (l'approximation  $\sin(\Phi_p) \approx -S\Phi_p$  n'est alors plus indispensable). Autrement dit, il n'est pas absolument nécessaire de se trouver dans la zone de linéarité de  $s = f(\phi_{ac}, \phi_{ref})$  (c'est à dire  $\phi_{ac} - \phi_{ref} < \pi/4$ ) pour calculer le facteur de calibration ou la modulation de phase. Par contre, la linéarité du mélangeur  $S \propto A_{ref}A_{ac}$  est indispensable.

Il est envisageable de calibrer le mélangeur une fois pour toute (voir l'annexe C.2). La valeur de  $S$  serait alors obtenue par une simple mesure du niveau de la porteuse. Néanmoins, pour s'assurer du signe de  $\beta$  et s'affranchir des fluctuations (de fréquence, de température et des variations d'impédance dues au couplage mécanique), la calibration est effectuée pour chaque mesure. Celle-ci a été automatisée à l'aide d'un dispositif simple à base de commutateurs, en interaction avec les acquisitions numériques (voir l'annexe C.2).

Comme la démodulation numérique (sous réserve de tout déphasage (de  $\pi$ ) induit par l'électronique de réception), l'électronique analogique permet de déterminer le signe du paramètre de non-linéarité. Pour s'assurer du signe du coefficient de non-linéarité, il faut au préalable connaître le signe du déplacement engendré, c'est-à-dire le sens de la polarisation du transducteur et le signe de l'impulsion électrique qui lui est appliquée. En pratique, il faut calibrer chaque nouveau capteur BF par interférométrie. Le signe peut également être obtenu grâce à un matériau étalon, comme dans le cas de la méthode relative.

#### 2.2.4.4 Démodulation numérique de faibles indices, synchronisation

Dans le but d'utiliser une démodulation numérique, nous avons conçu et réalisé un dispositif de synchronisation qui permet d'effectuer des moyennes sur la porteuse modulée. Le signal de la source (de fréquence 10, 30 ou 70 MHz)<sup>16</sup> est utilisé comme horloge à partir de laquelle sont engendrés les signaux de déclenchement. Pour les mesures utilisant un train d'ondes, comme celles réalisées avec la montage de la figure 2.18, le signal de déclenchement appliqué au générateur de signaux assure que la multiplication de la porteuse harmonique et du signal rectangulaire donne, en sortie du mélangeur, un train d'ondes dont la phase à l'origine est bloquée. Pour les mesures avec porteuse harmonique, le déclenchement du générateur d'impulsions de basse fréquence assure, à chaque réalisation que la modulation de phase soit synchronisée avec la porteuse. Le schéma du circuit de synchronisation est représenté sur la figure 2.19. Le montage de deux compteurs en série permet d'obtenir un taux de répétition assez faible (de l'ordre du kHz).

<sup>15</sup>Le retard de phase de chaque ligne, à la fréquence de la porteuse, est mesuré à l'aide d'un analyseur de réseaux.

<sup>16</sup>Ce dispositif est également utilisé (voir la figure 4.1 du § 4.1, et aussi § 4.1.3 et § 4.2.3) pour les mesures par interférométrie optiques.

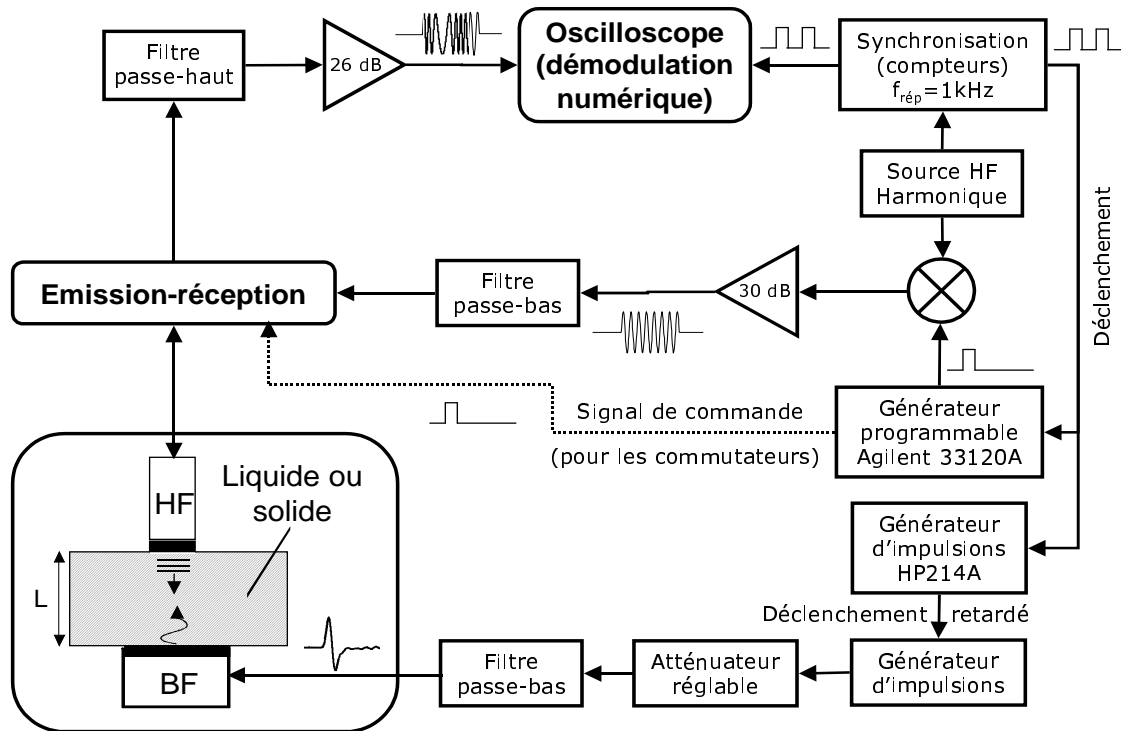


FIG. 2.18 – Dispositif de mesure du coefficient de non-linéarité des solides et des fluides, avec synchronisation pour la démodulation numérique de trains d’ondes. L’émission-réception peut être assurée par le circulateur ou les commutateurs.

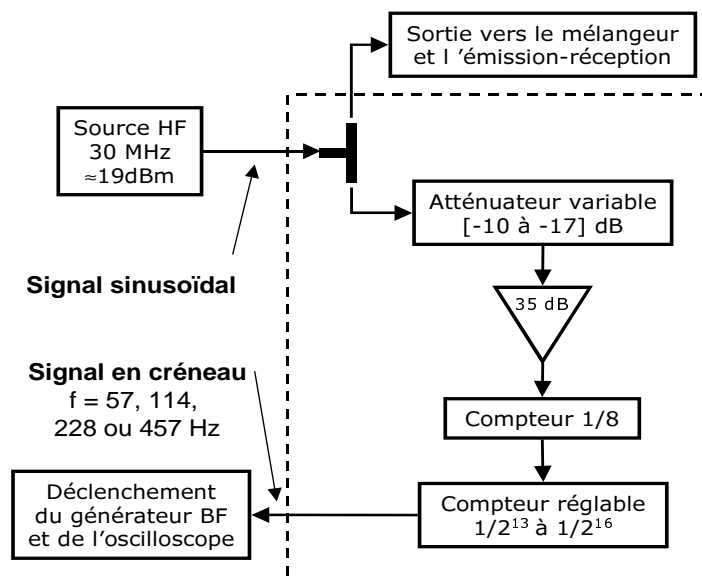


FIG. 2.19 – Dispositif électronique de synchronisation.

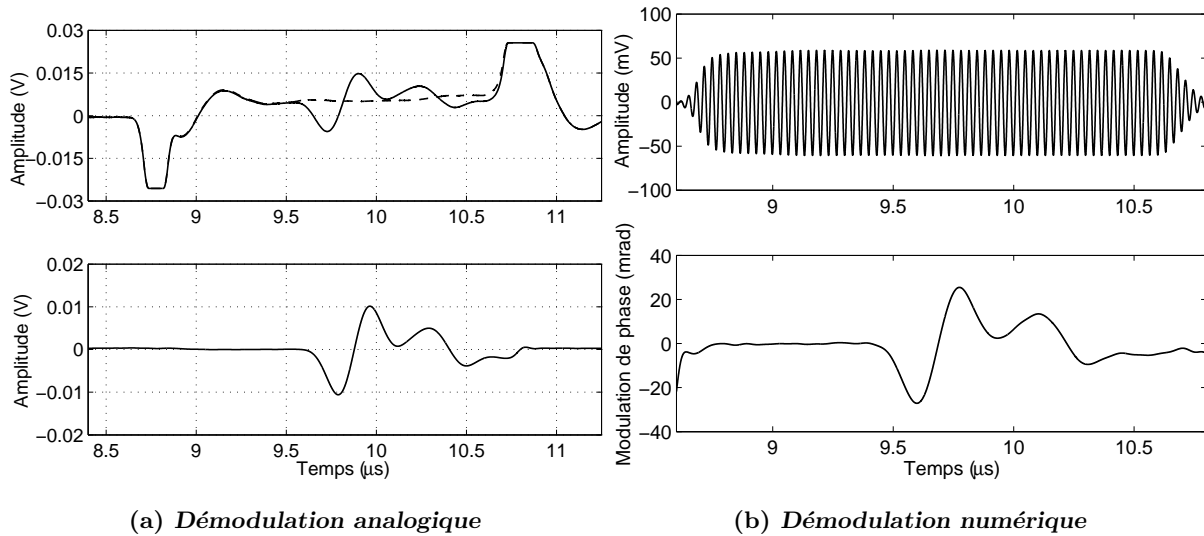


FIG. 2.20 – Exemples de signaux obtenus avec les deux méthodes de démodulation, dans le cas d’un solide.

Grâce à ce dispositif, 50 à 100 moyennes effectuées par l’oscilloscope suffisent à l’obtention d’une porteuse démodulable numériquement. L’utilisation des moyennes permet d’une part de diminuer considérablement l’effet du bruit et d’autre part d’avoir un codage équivalent à 10 bits de quantification plutôt que 8 dans le cas d’une seule réalisation (d’après la notice du constructeur !). Ceci permet donc de compenser l’inconvénient principal de la numérisation qui réside dans la quantification, les fréquences d’échantillonnage étant suffisamment élevées. Les figures 2.20-(a) et 2.20-(b) illustrent respectivement la méthode de démodulation analogique de train d’ondes (acquisition de la modulation de phase et soustraction du signal de référence) et la méthode numérique (porteuse acquise avec des moyennes et phase ”déroulée” numériquement). On compare sur les figures 2.21 les modulations de phase obtenues, qui se superposent bien (5%, au plus, de différence entre les maxima fournis par les deux démodulations). Les bords du train d’ondes produisent de fortes oscillations du signal de phase avec les deux méthodes. Elles sont plus visibles avec la version numérique (figure 2.21), pour laquelle on n’effectue pas la soustraction du niveau de référence. La comparaison de la modulation de phase et de la vitesse normale à la surface de l’échantillon (figure 2.22) est finalement aussi satisfaisante qu’avec la méthode analogique. L’effet des ondes de bord est ici aussi nettement visible sur la fin du signal.

Les mesures réalisées par Ryota Takatsu ont montré les possibilités de la démodulation numérique pour les mesures de coefficients de non-linéarité : la mesure de la modulation de phase acoustique  $\Phi_p$  et la calibration optique de la vitesse de déplacement BF  $v_2$  peuvent toutes deux être effectuées numériquement. Sur les figures 2.23 et 2.24, on trace la quantité  $\frac{2V_L}{k_1 z} \Phi_p$  (en m/s)<sup>17</sup> en fonction de l’amplitude de l’impulsion de basse fréquence (en m/s). La pente donne directement le coefficient de non-linéarité de l’échantillon de silice de 15 mm d’épaisseur sur lequel ont été réalisées

<sup>17</sup>Avec la définition de  $\beta_{solide}$  donnée au paragraphe suivant.

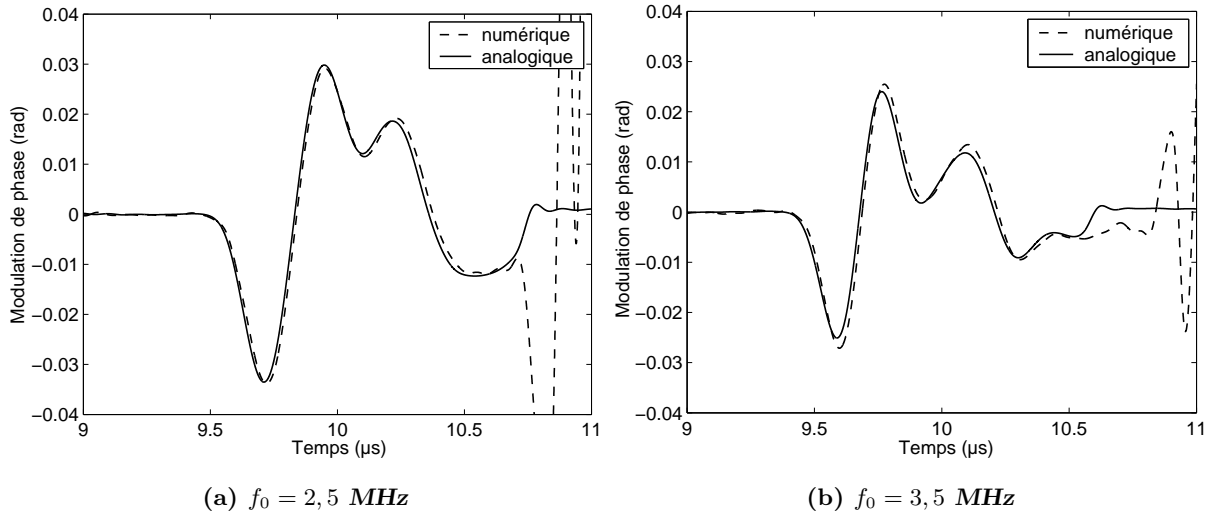


FIG. 2.21 – Comparaison des démodulations analogique et numérique pour deux fréquences centrales  $f_0$  de l'impulsion électrique d'excitation du transducteur BF.

ces mesures. Les démodulations de la porteuse acoustique (centrée à 30 MHz), pour la mesure de  $\Phi_p$  et de la porteuse laser (centrée à 70 MHz), pour la mesure de  $v_2$ , sont réalisées tantôt avec la méthode analogique, tantôt avec la version numérique. Les coefficients de non-linéarité obtenus diffèrent au plus de 7%. La démodulation numérique donne un résultat supérieur pour la modulation de phase acoustique, qui est principalement à l'origine des différences observées (pour les mesures optiques, la différences entre les deux démodulations n'est pas significative).

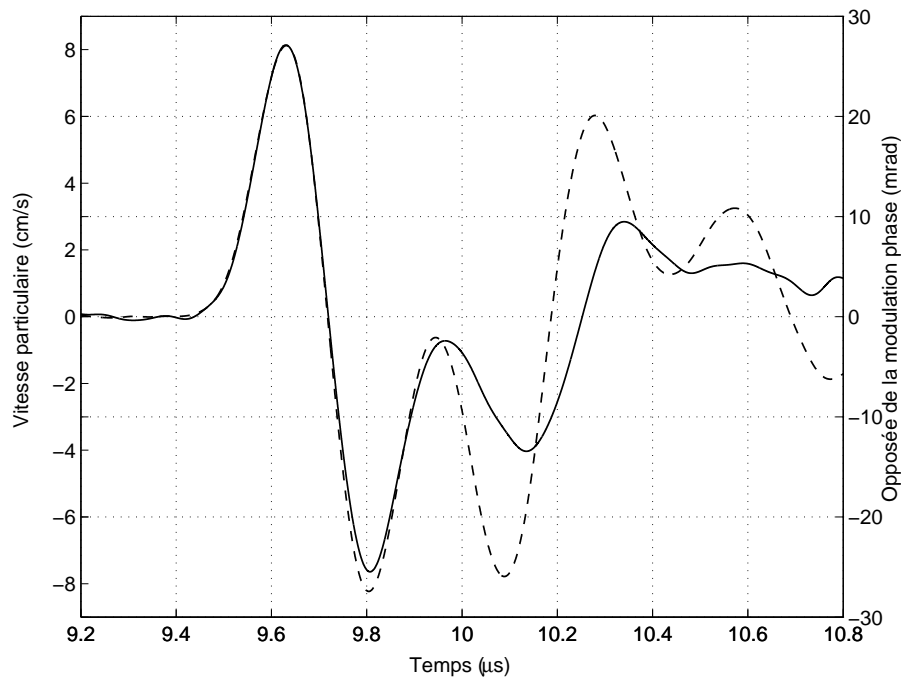


FIG. 2.22 – Modulation de phase (démodulation numérique) en trait plein et vitesse particulaire (mesure optique) en pointillé dans 15 mm de silice.

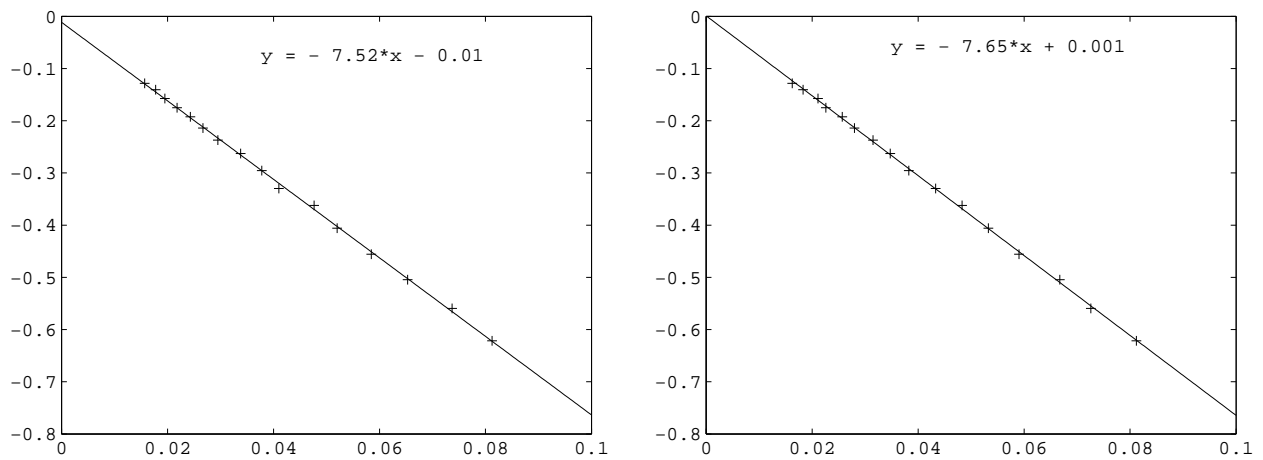


FIG. 2.23 – Quantité  $\frac{2V_L}{k_{1z}}\Phi_p$  (en m/s) en fonction de  $v_2$  (en m/s). Mesure acoustique ( $\Phi_p$ ) : démodulation analogique. Mesure optique ( $v_2$ ) : démodulation analogique (à gauche) et numérique (à droite).

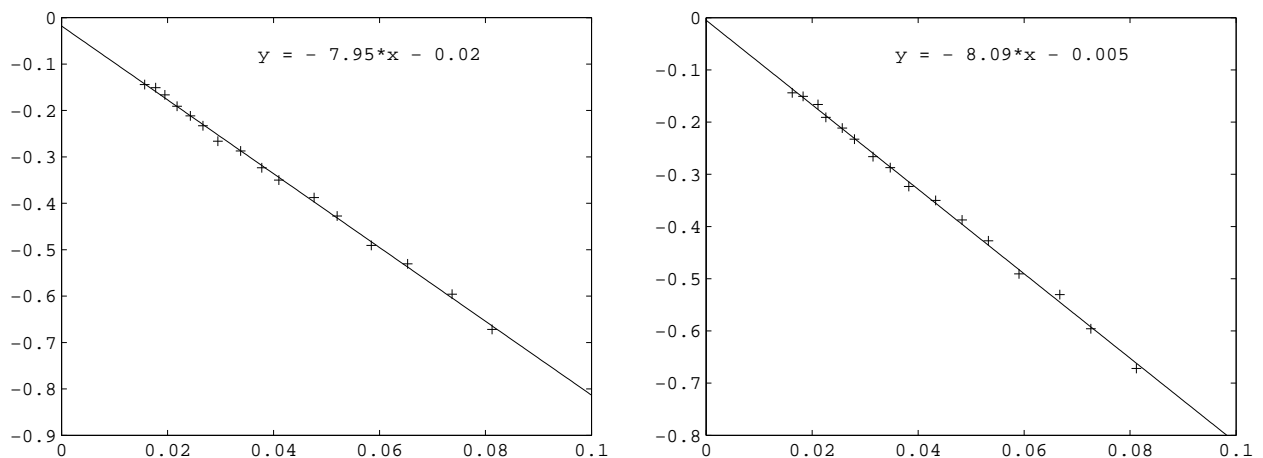


FIG. 2.24 – Quantité  $\frac{2V_L}{k_{1z}}\Phi_p$  (en m/s) en fonction de  $v_2$  (en m/s). Mesure acoustique ( $\Phi_p$ ) : démodulation numérique. Mesure optique ( $v_2$ ) : démodulation analogique (à gauche) et numérique (à droite).

## 2.3 Résultats expérimentaux dans les milieux homogènes

Cette section regroupe les mesures de coefficients de non-linéarité réalisées grâce aux améliorations successives apportées au dispositif, depuis mon stage de DEA [105], jusqu'à celui de mon successeur Mathieu Rénier. La plupart des résultats obtenus dans les fluides le sont avec la méthode comparative (l'eau distillée est utilisée pour étalonner le dispositif à la place de la mesure optique de la vitesse de déplacement BF). Dans les solides [106], la variante absolue de la méthode, plus précise au stade actuel, est préférable.

Pour la comparaison de nos résultats expérimentaux avec les valeurs données dans les références, nous adoptons la définition suivante du coefficient de non-linéarité d'un solide :

$$\beta_{solide} = -\frac{3C_{11} + C_{111}}{C_{11}}. \quad (2.9)$$

Le terme de droite des équations (2.2) et (2.6) doit être multiplié par 1/2 et celui de l'équation (2.4) par 2.

### 2.3.1 Fluides purs, gel couplant et gel de gélatine

Les premières mesures ont été effectuées dans les gels pour tester l'adaptation du montage utilisant un train d'ondes. L'émission transitoire permet d'augmenter le niveau du signal électrique et rend possible des mesures délicates, en raison de la forte atténuation des gels de gélatine<sup>18</sup>. Le gel couplant (eau distillée plus agent gélifiant) n'atténue pas plus que l'eau. Ces mesures ont été réalisées avec des fréquences primaires de 30 et 2,5 MHz. Sur la gélatine (à 5% en masse) les mesures ont été réalisées au cours de la solidification : la solution est introduite à 35°C (encore fluide) dans la cellule de mesure. Le dispositif à 10 MHz, tel qu'il fonctionne à présent, permettrait de suivre la gélification en continu (elle s'accompagne d'un pic d'atténuation, ce qui rend impossible les mesures à 30 MHz pendant la transition).

Milieu	Température (C°)	Célérité (m/s)	$\beta_m$	Erreur	$\beta_r$
Gel couplant	25	1494	3,60	± 2%	--
Gel couplant	25	=	3,69	± 3%	--
Gelatine fluide	30	1515	3,80	± 4%	3,71 ± 0,03 à 30°C
Gelatin solide	25	1533	3,68	=	3,70 ± 0,03 à 25°C
Gelatin solide	20	=	3,65	=	3,64 ± 0,02 à 20°C

TAB. 2.1 – Mesures dans le gel couplant et un gel de gélatine.  $\beta_m$  et  $\beta_r$  sont respectivement les valeurs mesurées et trouvées dans la référence [53]. Les incertitudes ont été évaluées par des tests de reproductibilité.

<sup>18</sup>Le niveau assez faible des échos dans les gels de gélatine peut avoir plusieurs origines (l'atténuation ne semble pas pouvoir être seule responsable) : la diffusion par des agrégats de molécules ou la relaxation (sous la forme de vibrations transverses) pourrait également être en cause.

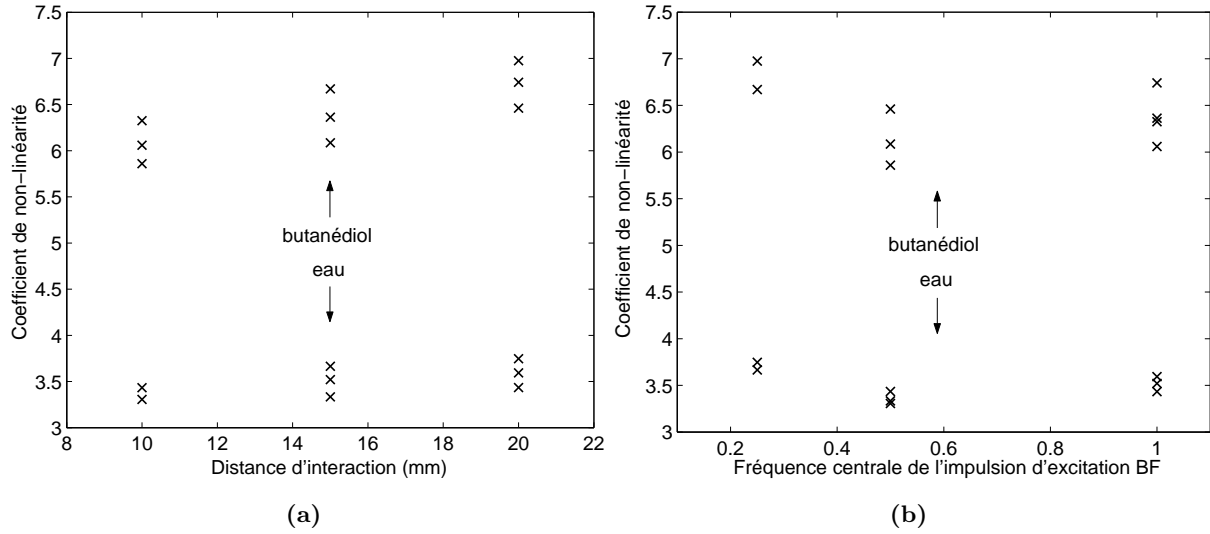


FIG. 2.25 – Coefficients de non-linéarité de l'eau et du butanédiol pour différentes distances d'interaction (a) et différentes fréquences BF (b).

Des mesures dans le 1,3-butanédiol ont été effectuées en collaboration avec un Laboratoire de l'Inserm<sup>19</sup> qui met au point une méthode de caractérisation des tissus utilisant la distorsion d'impulsions de forte amplitude. Le butanédiol est utilisé par cette équipe comme milieu de référence : ce fluide est proposé comme fantôme pour la propagation d'ondes de choc dans les tissus. Les résultats obtenus par cette méthode :  $\beta = 6,1$  [74], confirment la valeur que nous avons obtenue. Le montage a été adapté pour fonctionner avec une fréquence porteuse de 10 MHz et une impulsion BF centrée autour de 1 MHz.

Milieu	Fréquence (MHz)	Température (°C)	Célérité (m/s)	$\beta_m$	Ecart type
Eau	10	25	1498	3,48	0.08
Eau	30	25	=	3,44	0.02
Butanediol	10	25	1540	6,43	0.20

TAB. 2.2 – Calibration dans l'eau et mesures dans le butanédiol.

Différentes fréquences centrales de l'impulsion électrique et différentes distances d'interactions ont été testées. La valeur du coefficient est sensible à ces conditions, mais l'erreur relative pour une dizaine de mesures reste faible ( $< \pm 5\%$ ). Les impulsions BF obtenues pour les différentes conditions d'excitation électrique n'ont pas un contenu spectral très différent. En effet, la largeur de bande du transducteur est telle que pour un créneau de durée  $4 \mu s$  (correspondant à 250 kHz) le transducteur produit deux impulsions (correspondant au front montant et descendant) centrées

<sup>19</sup>Cyril Laffont, Unité 556 à Lyon : Recherches sur les applications des ultrasons à la thérapie.

autour de 500 kHz. Des B-scans, réalisés avec l'interféromètre optique, ont permis de comparer les mesures absolues dans l'eau avec une porteuse centrée à 10 ou 30 MHz. Ils montrent par ailleurs que le déplacement de la surface du transducteur présente un défaut d'uniformité (fluctuations du maximum de vitesse de déplacement de l'ordre de 10%, sur une distance égale au diamètre du transducteur HF), ce qui pourrait expliquer la dispersion des mesures (figures 2.25).

### 2.3.2 Cristal de Germanium

Des mesures sur un cristal anisotrope, suivant différentes directions cristallographiques, constituent une étape de validation de la méthode, car le coefficient de non-linéarité dépend alors de la direction de propagation. Pour un cristal de symétrie cubique les expressions sont données par Zarembo [34]. Seuls les modes purs longitudinaux sont régis par une équation quadratique découplant les composantes du déplacements.

Direction	$V_L^2$	$\beta_L$
[001]	$\frac{C_{11}}{\rho}$	$-\frac{3C_{111}+C_{11}}{C_{11}}$
[110]	$\frac{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}{2\rho}$	$-\frac{6(C_{11}+C_{12}+2C_{44})+C_{111}+3C_{112}+12C_{166}}{6(C_{11}+C_{12}+2C_{44})}$

TAB. 2.3 – Coefficient de non-linéarité d'un cristal cubique suivant les directions (001) et (110).

Trois échantillons de coupes identiques (perpendiculaire aux axes d'ordre quatre) nous ont été prêtés par le Laboratoire de Physique des Milieux Condensés<sup>20</sup>, et nous ont permis de réaliser des mesures suivant les directions [100] et [110]. Les figures 2.26 montrent un exemple des signaux acquis (modulation de phase et vitesse particulière), ainsi que les droites donnant les coefficients de non-linéarité. Le diamètre du transducteur BF utilisé pour ces mesures (10 mm), est presque égal à l'arrête des échantillons de Germanium (12 mm). Ceci explique certainement la forme des impulsions obtenues, analogue à celle d'une onde ayant interféré avec les ondes de bords (cf. §2.2.2).

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.4.  $\beta_c$  est la valeur obtenue avec les coefficients directeurs des régressions linéaires, et  $\beta_m$  est celle résultant de la moyenne des valeurs obtenues pour chaque point ; la colonne suivante donne l'écart type de la série de données (une dizaine de points, en fonction de l'amplitude de la BF, pour chaque mesure). Les deux dernières colonnes indiquent le système d'émission-réception utilisé (JH pour la jonction hybride et Com. pour les commutateurs), et la sensibilité de la démodulation de phase. Les valeurs des coefficients sont en bon accord avec celles obtenues par d'autres auteurs, plus précisément, elles sont comprises dans l'intervalle des valeurs trouvées dans les références. La dispersion des valeurs calculées à partir des références est assez importante et ne semble pas pouvoir être seulement attribuée aux différentes techniques de mesure employées. La précision de la coupe du cristal, d'une part et la pureté des échantillons d'autre part contribuent certainement à ces différences. Les valeurs que nous obtenons sur les différents échantillons varient peu, on peut donc penser qu'une taille suffisamment précise induit peu de variations du coefficient de non-linéarité.

<sup>20</sup>M. Fischer et C. Hubert, Université Pierre et Marie Curie, UMR CNRS 7602.

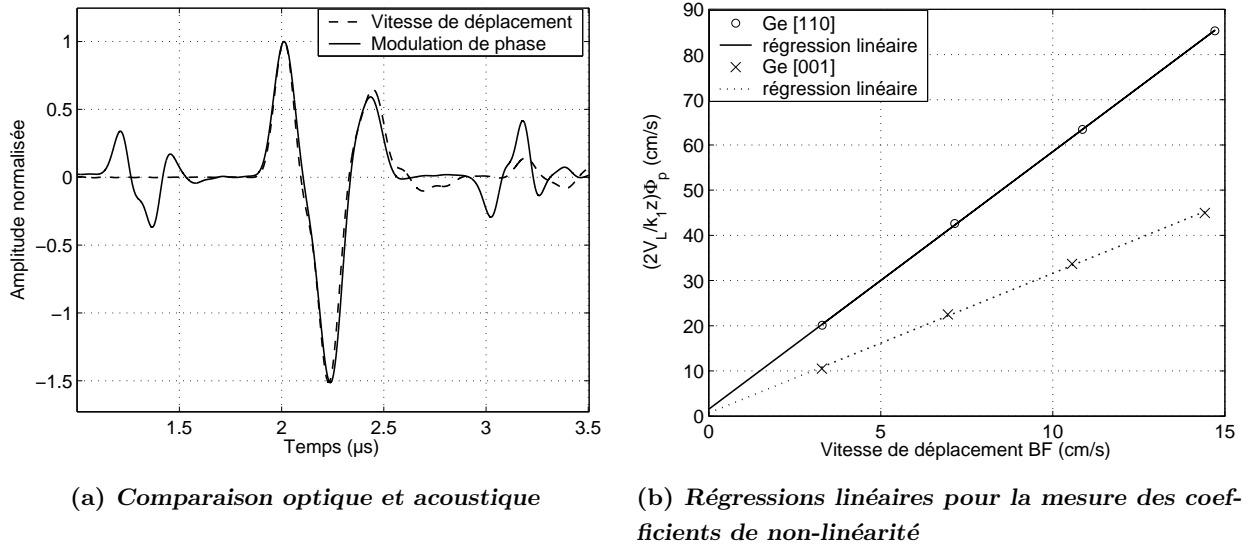


FIG. 2.26 – Mesure des coefficients de non-linéarité du Germanium.

suivant [110]							
n°	Épaisseur (mm)	V <sub>L</sub> (m/s)	β <sub>c</sub>	β <sub>m</sub>	Ecart type	Emission / Reception	Sensibilité (V/rad)
1	11.94	5395	6.04	6.09	2.3E-03	JH	0.223
1	=	5384	5.71	5.93	1.6E-02	Com.	0.421
2	11.97	5391	6.25	6.67	7.3E-03	JH	0.253
2	=	=	6.15	6.38	2.5E-03	JH	0.278
Moyenne			<b>6.04</b>	<b>6.27</b>	β <sub>r</sub> : [5.13-7.77]		
suivant [001]							
3	11.98	4882	3.43	3.25	1.9E-02	Com	0.331
3	=	=	3.31	3.31	8.4E-03	Com	0.277
2	11.99	4877	3.09	3.28	1.4E-03	JH	0.259
2	=	=	3.44	3.59	8.2E-03	JH	0.278
2	=	=	3.08	3.17	8.2E-03	JH	0.278
Moyenne			<b>3.23</b>	<b>3.34</b>	β <sub>r</sub> : [2.52-4.89]		

TAB. 2.4 – Mesures sur les trois échantillons de Germanium suivant les directions (001) et (110). β<sub>c</sub> et β<sub>m</sub> sont les valeurs mesurées. β<sub>r</sub> donne l’encadrement des valeurs calculées à partir des références [37], [34], [107] et [108].

### 2.3.3 Solides isotropes ou statistiquement isotropes

Différents solides isotropes ont fait l'objet de mesures pour mettre au point et valider le dispositif expérimental. Ces matériaux sont soit statistiquement isotropes (duralumin et titane, formés de grains), soit amorphes (silice et verre) ; le polystyrène est composé de chaînes carbonées. Ceux dont les vitesses du son sont les plus élevées nécessitent un échantillon de 15 mm d'épaisseur pour des mesures précises. Les résultats sont résumés sur la figure 2.27 et dans le tableau 2.5.

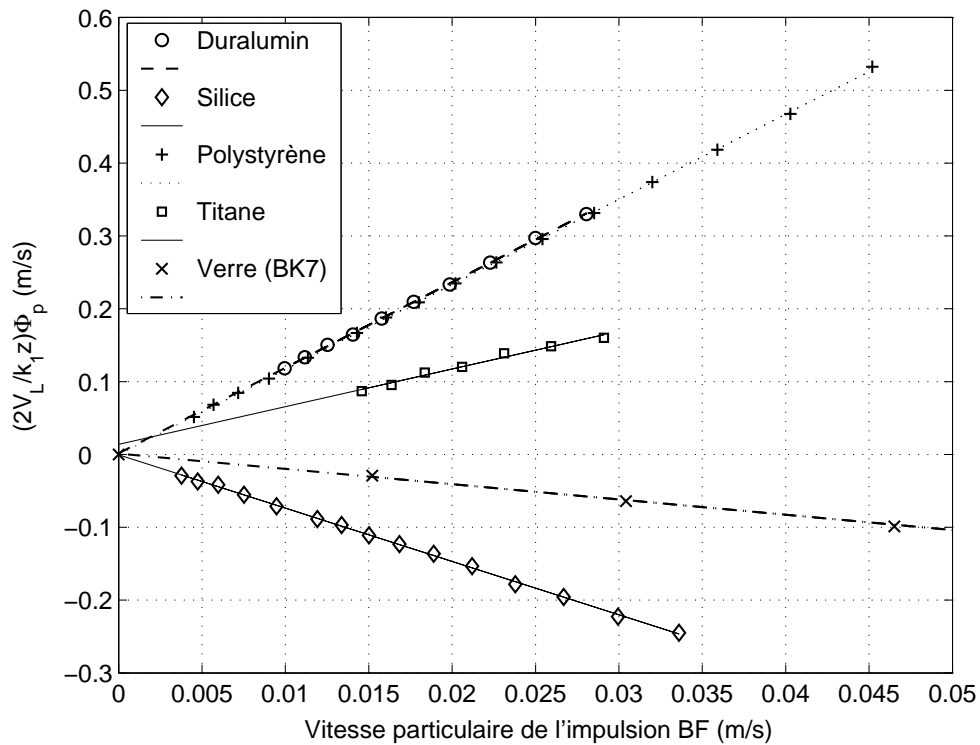


FIG. 2.27 – Régressions linéaires pour la mesure du coefficient de non-linéarité de quelques solides isotropes.

Les sources d'erreur systématique peuvent être : la non prise en compte de l'atténuation des deux ondes, de l'effet Doppler et de l'interaction contra-propagative et l'effet des couches de couplage. Les incertitudes de mesures de type statistique que nous pouvons évaluer sont de l'ordre de  $\pm 0,5\%$  pour la célérité, de  $\pm 1\%$  pour la modulation de phase,  $\pm 4\%$  pour la calibration de l'interféromètre. Pour les mesures absolues la précision relative est donc de l'ordre de  $\pm 5\%$ . Nous pouvons espérer une précision absolue (qui prend en compte les erreurs systématiques) meilleure que  $10\%$ .

Pour les mesures relatives appliquées aux solides, comme nous l'avons vu plus haut (cf. § 2.2.1.2), l'incertitude est plus importante : plutôt de l'ordre de  $\pm 10\%$ . La réflexion/transmission des impulsions HF et BF peut ajouter une erreur systématique et il faut également tenir compte du calcul du coefficient de transmission.

Materiaux	Epaisseur (mm)	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	V <sub>L</sub> (m/s)	β mesuré	β références
Silice	15,32	2170	5980	-7,4	-8,5 <sup>a</sup>
Polystyrène	7,95	1050	2320	11,7	12,8 <sup>b</sup>
Duralumin	14,55	2790	6380	11,8	11,2 <sup>c</sup>
Titane	14,98	4420	6150	5,2	—
Verre (BK7)	10,15	2510	6090	-2,1	—

TAB. 2.5 – Mesures dans différents solides isotropes : les références sont les suivantes : a= [51], b= [15] et c= [55].

## 2.4 Mélange binaire eau/éthanol

### 2.4.1 Liquides non-miscibles, sans interactions

Différents modèles, décrivant les propriétés acoustiques des mélanges de fluides miscibles et non-miscibles ont été publiés. Les résultats expérimentaux concernent essentiellement des mélanges binaires et ternaires d'espèces simples, telles que les alcools (éthanol, propanol et butanol). Apfel [109], [110] donne l'expression de la compressibilité ( $K$  désigne ici le module d'incompressibilité adiabatique, il s'agit de l'inverse de la compressibilité adiabatique  $K_{ls} = A$ ) et du coefficient de non-linéarité dans le cas d'espèces non-miscibles considérées sans interaction.  $K = 1/\rho c^2 = 1/A$  et  $\beta = 1 + B/2A$  s'expriment alors comme des barycentres des valeurs  $K_i$  et  $\beta_i$  de chaque espèce, pondérées par leur fraction volumique respective  $V_i$  (on omet ici les indices  $l$  utilisés précédemment pour les paramètres des liquides) :

$$K = \sum_{i=1}^n V_i K_i \Leftrightarrow \frac{1}{A} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{A_i}. \quad (2.10)$$

L'expression du paramètre de non-linéarité effectif du mélange en fonction des constantes des constituants est obtenue à partir de la conservation de la masse (qu'on exprime en fonction des propriétés effectives du mélange ou de la somme des propriétés individuelles des constituants) :

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^n V_i K_i^2 \left(\frac{B}{A}\right)_i \Leftrightarrow \beta = 1 - A^2 \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{A_i^2} + A^2 \sum_{i=1}^n V_i \frac{\beta_i}{A_i^2}. \quad (2.11)$$

Ces relations ne tiennent pas compte des variations de fraction volumique des différentes espèces sous l'effet d'une pression. Les mêmes auteurs proposent une loi basée sur la conservation du volume (exprimée avec les volumes spécifiques et les fractions massiques). La compressibilité effective du mélange s'écrit comme précédemment (2.10), mais le coefficient de non-linéarité (2.11) devient :

$$\beta = A^2 \sum_{i=1}^n V_i \frac{\beta_i}{A_i^2}. \quad (2.12)$$

### 2.4.2 Mélanges miscibles

Le cas des mélanges miscibles est différent : on ne peut pas négliger les interactions moléculaires qui sont à l'origine de l'homogénéité du mélange. La proportion des deux constituants peut donner lieu à des agrégats, pour un mélange liquide-liquide et à la formation de bulles pour un gaz dissous dans un liquide, ce qui complique sérieusement la tâche. Le mélange gazeux, s'il n'est pas réactif, est le plus simple (modélisé par les expressions (2.10) et (2.11), puisque les interactions sont négligeables).

Emery [111] utilise, dans le cas du mélange binaire, l'équation empirique de Tait, qui permet une interprétation générale pour les fluides avec interaction (proche de celle de Van der Waals) :

$$p - p_0 = p_i \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad (2.13)$$

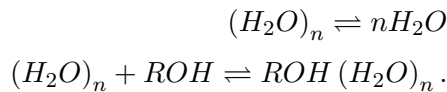
où  $p_i$  est la pression interne du liquide et  $n$  un paramètre d'ajustement. En calculant le module adiabatique  $A$ , on obtient les relations suivantes avec les paramètres de l'équation d'état (développée au deuxième ordre) utilisée jusqu'ici :

$$p_i = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \quad (2.14a)$$

$$\text{et } n = 2\beta - 1. \quad (2.14b)$$

Cette approche définit les paramètres du mélange sans les relier directement à la proportion des deux constituants (contrairement à celle du paragraphe précédent), mais elle établit le lien avec l'ordre de grandeur des distances inter-moléculaires (volumes molaires), par l'intermédiaire de la pression interne (qui traduit les forces d'interaction). L'ordre de grandeur de la distance intermoléculaire, donné par :  $r = \frac{2\sigma}{p_i}$  (ou  $\sigma$  est la tension superficielle), peut également être estimé à partir du volume molaire en considérant des molécules sphériques<sup>21</sup>.

Sehgal [112] mesure et compare les paramètres de non-linéarité définis pour des transformations isotherme et adiabatique  $\frac{B_i}{A_i}$  et  $\left(\frac{B_i}{A_i}\right)'$  (voir l'équation (2.1)), dans trois mélanges d'eau et d'alcools<sup>22</sup>. Les courbes de variation de la vitesse du son et du paramètre de non-linéarité en fonction de la concentration en alcool ont la même allure que la figure 2.28. L'auteur en donne une interprétation physique à partir des deux équilibres impliqués au cours de cette solvataion :



<sup>21</sup>On obtient :  $r = \left(\frac{3CV_m}{4\pi N_a}\right)^{1/3}$ , où  $V_m$  est le volume molaire,  $N_a$  le nombre d'Avogadro et  $C$  la compacité. En prenant  $C = 0,74$  et  $V_m = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$ , on calcule  $r = 1,74 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Pour retrouver la valeur donnée dans [111], il faut poser  $C = 1$  et prendre le double du résultat obtenu...

<sup>22</sup>Cette différence entre les paramètres peut être positive ou négative suivant les proportions du mélange, car les variations de célérité en fonction de la température sont de signes opposés pour l'eau et les alcools  $-(\partial c/\partial T)_{p,\rho=\rho_0}$  est positif pour l'eau et négatif pour l'alcool. La concentration pour laquelle les deux valeurs sont égales est observée autour de 20% pour le t-butanol (2-méthyl-2propanol), l'isopropanol ( $(CH_3)_2CH-OH$ ) et le n-propanol ( $CH_2OH-CH_2-CH_3$ ).

L'introduction de R-OH commence par diminuer la compressibilité ( $c$  augmente) en favorisant des liaisons plus fortes [113]. Pour les faibles concentrations, l'association de l'alcool avec l'eau stabilise l'association des molécules d'eau entre-elles. Cette dernière possède une raideur plus importante qui implique une augmentation de célérité. Les pressions nécessaires à l'apparition d'effets non-linéaires sont donc plus élevées et le coefficient de non-linéarité diminue. Lorsque que la concentration en éthanol augmente, l'équilibre se déplace en faveur des liaisons  $ROH(H_2O)_n$  qui sont moins raides, ce qui s'accompagne d'une diminution de célérité et d'une augmentation de  $\beta$ . Cette interprétation qualitative n'explique pas le décalage entre le maximum de célérité et le minimum du coefficient de non-linéarité; elle néglige également le lien des variations de vitesse du son avec celle de la masse volumique, ou plutôt des volumes molaires des deux espèces. Un article de Yoshizumi [114], reprend l'interprétation de Seghal, en terme d'eau "libre" et d'eau "lié", dont la proportion dépend du mélange effectué (l'exemple d'un gel d'agarose permet le rapprochement avec les tissus vivants). L'hypothèse d'additivité des coefficients de non-linéarité semble être vérifiée, et les variations du coefficient de non-linéarité du mélange s'expliquent par le changement de proportion de formes libre et liée de l'eau.

Par ces raisonnements, Sehgal entend qu'une augmentation de raideur implique nécessairement une diminution de paramètre de non-linéarité. Cette interprétation (qui consiste à relier la vitesse du son linéaire avec le coefficient de non-linéarité) rejoint la loi de Ballou (voir l'annexe A) selon laquelle  $B/A$  est proportionnel à  $1/c$ . Autrement dit, plus le milieu est rigide, plus il est linéaire. Mathématiquement, cela revient à donner une relation entre les dérivées premières et secondes de la pression en fonction de la densité. Physiquement, on considère que les variations de vitesse dépendent de la valeur de la vitesse dans l'état de référence choisit. La linéarité de la relation  $B/A = f(1/c)$  n'est pas vraiment confirmée par les résultats expérimentaux [115], qui montre qu'une forme plus générale, dépendante de la forme du potentiel d'interaction (propre à chaque famille de molécule) aboutit à une relation non-linéaire.

Des mesures du coefficient de non-linéarité d'un mélange binaire eau/éthanol en fonction de la proportion des deux constituants ont été effectuées, dans le cadre du stage de DEA de Mathieu Rénier [116], en collaboration avec le Laboratoire de Modélisation en Mécanique<sup>23</sup>. Les résultats obtenus avec notre méthode s'accordent bien avec ceux obtenus avec la méthode thermodynamique [111].

Ces mesures ont été effectuées avec une onde de haute fréquence à 10 MHz et une impulsion BF centrée autour de 1 MHz. Les deux transducteurs sont insérés dans les parois d'un bâti en plexiglas qui contient environ 60  $cm^3$  de mélange. Ce dernier peut être placé sur un agitateur magnétique pour homogénéiser le mélange. Nous avons finalement opté pour des mesures "point par point", pour lesquelles le mélange est effectué pour chaque fraction volumique, puis placé dans la cellule de mesure<sup>24</sup>. L'agitation magnétique semble nécessaire pour maintenir l'homogénéité du mélange.

---

<sup>23</sup>François Coulouvrat, UMR CNRS 7606, Université Pierre et Marie Curie. Ces données seront utilisées comme paramètres d'entrée d'un code de simulation de la propagation non-linéaire dans un milieu inhomogène (avec gradient d'indice) [117].

<sup>24</sup>Une circulation continue (à partir d'un récipient où sont réalisées les dilutions successives) permettrait de réaliser

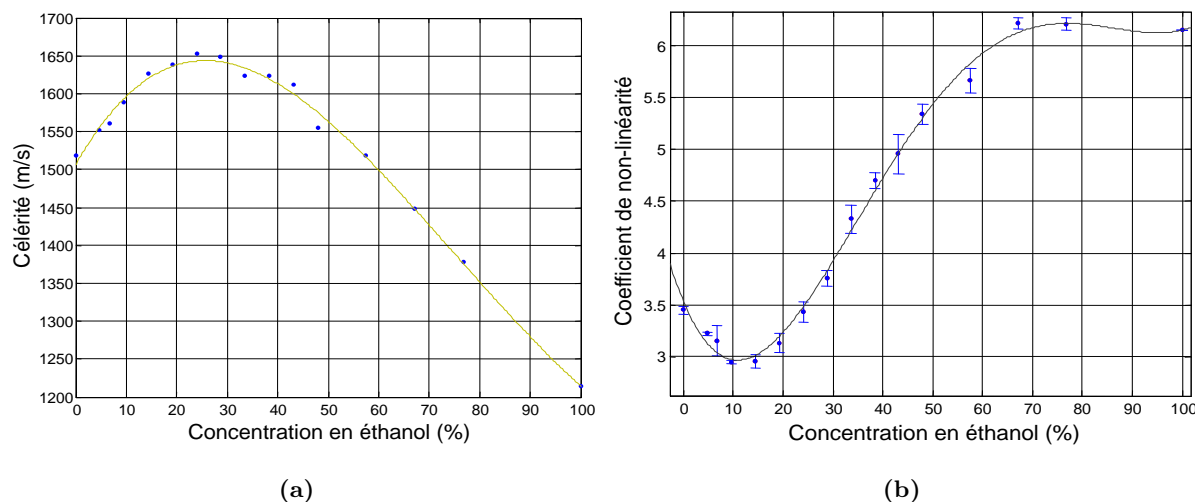


FIG. 2.28 – Evolution de la vitesse du son (a) et du coefficient de non-linéarité (b) en fonction de la concentration d'éthanol dans l'eau. Les courbes lissées sont obtenues par un ajustement polynomial.

Par ailleurs, le changement de capacité calorifique (qui diminue lorsque la concentration en éthanol augmente) a également un effet : pendant les minutes qui suivent l'introduction de la solution, la valeur de la modulation de phase évolue lentement puis se stabilise, le temps que la cellule et les capteurs soient en équilibre thermique avec le mélange (cet effet intervient même pour un mélange dont l'homogénéisation est déjà assurée). Enfin, l'erreur relative de ces mesures est inférieure à 10%. La précision absolue ne semble pas être altérée par les faibles variations de température du mélange.

Aucun modèle connu de nous ne décrit fidèlement l'évolution des paramètres acoustiques linéaires et non-linéaires des mélanges en fonction de leur composition. Les interprétations en terme d'élasticité des liaisons, comme celle reprise plus haut, sont assez délicates. Les mêmes causes sont évoquées pour expliquer les variations des volumes molaires des deux espèces, qui peuvent changer en raison de l'association des molécules. La figure 2.29 [118]<sup>25</sup> montre l'évolution des volumes molaires en fonction de la fraction molaire d'éthanol, leur allure semble indiquer une corrélation avec les paramètres élastiques, sans qu'un lien formel ait pu être clairement établi.

La difficulté semble être d'ordre thermodynamique : la vitesse du son est définie à entropie fixée, or lors du mélange cette grandeur augmente. Autrement dit, pour deux concentrations d'éthanol distinctes, la valeur d'équilibre de l'entropie du liquide, autour de laquelle est calculée  $\partial p / \partial \rho$  n'est plus la même. Il faudrait, pour traiter le problème rigoureusement, introduire les variations de concentration et les potentiels chimiques des différents constituants dans l'équation d'état. L'éner-

un grand nombre de points de mesures, de manière plus aisée que pour des mesures thermodynamiques.

<sup>25</sup>On trouve également cette illustration sur les pages suivantes :

[http://wwwens.uqac.ca/chimie/Thermochemie/Chap\\_htm/CHAP\\_8.html](http://wwwens.uqac.ca/chimie/Thermochemie/Chap_htm/CHAP_8.html) ou

[http://www.public.asu.edu/~dmatyus/teaching/chm341/lecture\\_notes/chapter7/chap7.pdf](http://www.public.asu.edu/~dmatyus/teaching/chm341/lecture_notes/chapter7/chap7.pdf).

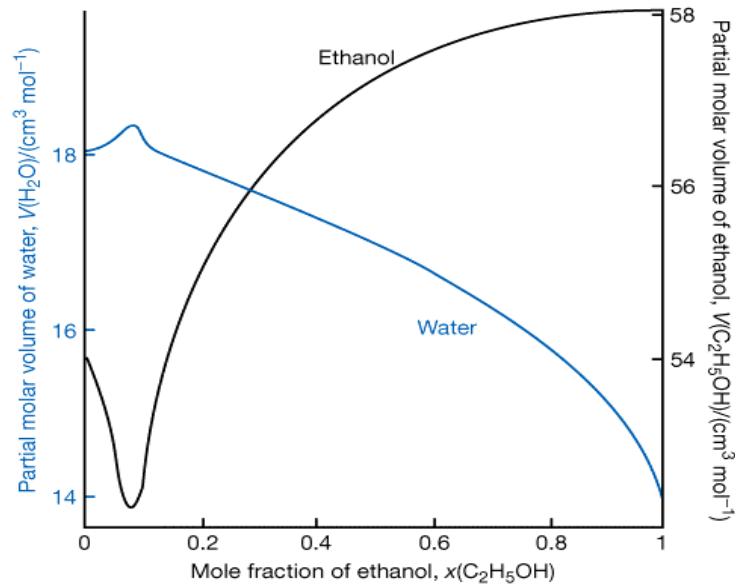


FIG. 2.29 – Evolution des volumes molaires partiels de l'eau et de l'éthanol en fonction de la fraction volumique d'éthanol dans le mélange.

gie interne ou l'enthalpie ( $h = e - p/\rho$ ) ne sont plus les "bonnes" fonctions d'état, il faut considérer l'énergie libre ( $f = e - Ts$ ) ou l'enthalpie libre ( $g = h - Ts$ ) pour prendre en compte les effets d'entropie de mélange et d'activité chimique. Pour un mélange de gaz, on peut négliger les interactions et appliquer l'additivité des grandeurs thermodynamiques extensives. Pour un mélange de liquides, et en particulier pour l'eau (en tant que solvant) ces interactions sont primordiales et ne peuvent être négligées.

## 2.5 Fatigue thermique des verres

Dans le cadre du stage de DEA de Mathieu Rénier, nous avons mesuré le coefficient de non-linéarité de plaques de verres ayant subi un traitement thermique, avec pour objectif de tester les possibilités de la méthode en matière de caractérisation de matériaux. L'étuve dont nous disposons ne permet pas d'atteindre les températures utilisées pour le recuit des verres. Aussi la chauffe avec montée en température progressive, puis un palier de plusieurs heures à environ 250°C et le refroidissement progressif des échantillons n'induisent aucune variation significative du coefficient de non-linéarité. Nous avons donc utilisé la trempe, d'une manière similaire à celle pratiquée dans une autre publication [90]. Après chauffage à 50 ou 100°C, les échantillons sont plongés dans de l'eau à température ambiante. Les échantillons chauffés à 50°C ne présentent aucun défaut visible, par contre, ceux trempés à partir de 100°C sont parcourus par de longues fissures (de quelques millimètres à plusieurs centimètres de long).

Traitement du verre	Sain	Chauffé à 50° C puis trempé.	Chauffé à 100° C puis trempé. Zone non macro-fissurée A	Chauffé à 100° C puis trempé. Zone non macro-fissurée B
$\beta$	2,79 ± 0.24	2,92 ± 0.48	2,70 ± 0.23	2,69 ± 0.15

TAB. 2.6 – Mesures sur le verre pour différentes conditions de trempé.

L'interaction de l'onde de haute fréquence avec ces ruptures d'impédance affecte l'amplitude et la phase du signal reçu (réflexion partielle, "clapping" des fissures, non-linéarité de contact [119]...). Il est alors difficile de distinguer la modulation de phase de ces effets, qui rendent les mesures impossibles (l'hypothèse d'un milieu homogène n'est plus respectée). Notre méthode est d'ailleurs loin d'être indispensable à la détection de ce type de défauts- qu'on repère sans faire appel aux effets non-linéaires. Des mesures peuvent néanmoins être réalisées dans les zones vierges de fissures (surface égale à celle du transducteur de basse fréquence, de 20 mm de diamètre), mais elles ne montrent pas de différence significative par rapport aux échantillons sains. On constate donc que de fortes non-linéarité, comme celles dues aux fissures peuvent être présentes sans affecter les propriétés de volume du matériaux. Cela rejoint les interprétations des mesures effectuées dans les verres ou les roches avec des méthodes de résonance, qui ne donnent pas accès à la non-linéarité "classique", mais à la contribution non-linéaire des défauts de taille méso- ou macroscopique<sup>26</sup>.

Ces expériences seront poursuivies dans le cadre de la thèse de Mathieu Rénier afin de mettre en évidence les possibilités de cette méthode dans le cas de défauts de dimension plus faible ou de modification de la micro-structure, qui se manifestent à travers la non-linéarité dite "classique". Le verre reste une option intéressante (et exotique puisque que son coefficient de non-linéarité prend des valeurs positives et négatives), mais d'autres matériaux comme les alliages d'aluminium ou les aciers sont sûrement de meilleurs candidats pour des expériences de fatigue thermique ou de recuit : les températures de recuit sont plus faibles. Il a déjà été montré [120], sur un alliage d'aluminium subissant un recuit une évolution du paramètre de non-linéarité, que les auteurs mettent en relation avec la dureté du matériau. Une étude réunissant la mesure des paramètres élastiques, celle des indicateurs mécaniques bien connus (dureté, ductilité, plasticité), et une caractérisation microscopique (composition, structure) pourrait fournir des comparaisons intéressantes.

<sup>26</sup>Les mesures par résonance donnent accès à des coefficients qui prennent en compte la méso-structure (fissure, inhomogénéités).

## Conclusion et perspectives

Nous avons développé une technique de mesure du coefficient de non-linéarité par interaction d'ondes élastiques, applicable aux gels, aux cristaux et aux autres solides. La variante absolue de la méthode, avec calibration de l'amplitude BF par interférométrie reste la plus précise. Cependant, la variante relative n'a pas été testée sur les solides avec les améliorations les plus récentes du montage (démodulation numérique et synchronisation). Pour les fluides cette variante (par substitution) reste la plus pratique.

Pour les mesures dans les solides, l'électronique analogique a été adaptée pour détecter la modulation de phase de quelques milliradians d'un train d'ondes (dispositif de calibration) et un dispositif de synchronisation permet à présent d'utiliser une démodulation numérique avec une précision équivalente.

Un nouveau système d'émission-réception a été réalisé : il permet de changer la fréquence de fonctionnement sans avoir à réaliser des adaptations d'impédance précises. Un dispositif adapté aux fluides (gels, butanédiol, suspensions de bulles) avec une fréquence porteuse de 10 MHz a ainsi été mis en place.

Les mesures réalisées dans les mélanges eau/ethanol et sur les verres nous rapprochent des applications potentielles de cette méthode : la caractérisation des matériaux (fatigue, micro-structure) et l'étude de milieux plus complexes (fluides in-homogènes, tissus biologiques).

Les premiers essais ont également eu lieu sur des suspensions de bulles d'air (produites par électrolyse) dans l'eau. Cette expérience présente un intérêt en elle même, pour la compréhension du comportement non-linéaire de ce type de milieu et la comparaison avec les modèles théoriques. Il s'agit ainsi de mettre au point un dispositif pour des mesures sur les produits de contraste utilisés en échographie.



## Chapitre 3

# Propagation non linéaire d'ondes transverses dans les gels

Les mesures des propriétés élastiques des solides mous présentent un intérêt pour la caractérisation des tissus biologiques et pour l'imagerie médicale. Les gels d'agar-gélatine sont utilisés pour tester les appareils et les méthodes d'échographie. On les trouve, depuis fort longtemps<sup>1</sup>, dans nombre d'autres applications, (agro-alimentaire, photographie, industrie pharmaceutique) où leur "inertie" chimique, qui en fait de très bons substrats, intéresse plus que leur propriétés élastiques.

Au cours de sa thèse, J-L Gennisson [121] a effectué des mesures des propriétés élastiques non-linéaires de gels d'agar-gélatine par une méthode d'acousto-élasticité. Cette méthode permet de déterminer les constantes de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  et celles de Landau  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Ces mesures illustrent bien la spécificité de la réponse élastique de ce type de milieu. La particularité des gels est en effet leur similitude avec l'eau pour le comportement en compression<sup>2</sup> ( $V_L \approx 1500$  m/s) et leur très faible élasticité de cisaillement ( $V_T \approx 1$  m/s).

La détermination d'un jeu complet de constantes du troisième ordre est rendue délicate par l'expression des variations de célérité induites par la pré-contrainte [122]. En effet les constantes relatives à l'élasticité transverse font intervenir les paramètres  $\lambda$ ,  $B$ ,  $C$  relatifs aux ondes de compression qui sont  $10^6$  fois plus grands que les modules relatifs aux déformations de cisaillement  $A$  et  $\mu$ . Il faut donc mesurer  $\lambda$ ,  $B$  et  $C$  avec une extrême précision pour pouvoir extraire le coefficient  $A$  avec une incertitude raisonnable.

---

<sup>1</sup>Dès l'antiquité Égyptienne, la gélatine entre dans la composition des plats les plus élaborés. Napoléon a fait usage de ses vertus nutritives pour sauver ses soldats de la faim. Les colles sont également réalisées à base de collagène. Enfin, à la suite des travaux de Nièpce et Daguerre (1850) la gélatine entre dans la composition des matériaux photographiques (Poetevin et Gaudin).

<sup>2</sup>Les résultats obtenus sur des gels de gélatine pure (par interaction d'ondes longitudinales), illustrent la grande similitude des paramètres élastiques des gels et de l'eau (dont ils sont composés à 90%). La différence de comportement, pour des ondes de compression, réside principalement dans l'atténuation. Les expériences réalisées avec des ondes transverses, le sont sur des gels d'agar-gélatine, l'agar permettant de mimer les propriétés de rétro-diffusion des tissus biologiques exploitées par les dispositifs d'imagerie.

D'autres expériences, également mises au point par J-L Gennisson et S. Catheline, et qui ont initié les résultats qui suivent, ont été menées par génération d'harmoniques d'ondes transverses. Cette alternative à l'acousto-élasticité permet de déterminer d'autres combinaisons de constantes : un coefficient de non-linéarité pour les ondes transverses. Il est alors nécessaire de pousser le développement de l'énergie à l'ordre supérieur : la non-linéarité des ondes de cisaillement est cubique. Dans le cas isotrope, trois nouvelles constantes apparaissent. Nous avons donc été amené à rechercher une description de ces matériaux, c'est à dire un jeu de constantes élastiques, qui tiennent compte de la quasi-incompressibilité. Il est alors possible de caractériser la réponse de ces matériaux à des déformations de cisaillement avec un nombre réduit de constantes.

Nous exposons dans une première section le développement, au quatrième ordre, de l'énergie élastique d'un solide isotrope, avec les invariants de Landau ou les invariants principaux. Nous verrons dans quelle mesure le nombre de constantes peut être réduit pour un milieu quasi-incompressible. Pour obtenir ce développement, nous proposons une méthode différente de celle initialement utilisée par Hamilton, Ilinskii et Zabolotskaya [44], ainsi qu'une interprétation de l'inter-dépendance des modules élastiques des différents ordres. Ce développement permet d'aboutir à une équation d'onde non-linéaire, analogue à celle de Burgers pour les ondes longitudinales, décrivant la distortion d'une onde plane de cisaillement d'amplitude finie. Les modèles basés sur un développement en perturbation permettent de prendre en compte les composantes transverses du champ. Les expériences que nous avons menées visaient dans un premier temps à mettre en évidence les caractéristiques de la propagation non-linéaire et de l'interaction des ondes de cisaillement [123]<sup>3</sup>. Les résultats obtenus semblent confirmer les prévisions théoriques, en particulier pour la diffraction et l'interaction de deux ondes. Les expériences réalisées avec une source plus complexe (palpeur d'élastographie 1D) nous rapprochent d'une configuration plus facilement applicable et nous ont permis d'étudier les effets de champ proche.

### 3.1 Elasticité des solides mous

Le qualificatif de "solide mou" s'applique principalement aux gels et par extension à certains tissus vivants. Il fait référence aux propriétés élastiques voisines de ces matériaux, qu'un formalisme commun permet de décrire. L'élasticité de ces matériaux est proche de celle du caoutchouc et des élastomères thermoplastiques. Ces derniers sont composés de polymères, alors que les gels sont constitués de longues protéines entremêlées. La différence entre ces deux catégories tient à la présence d'eau dans les gels qui, piégée dans l'entremêlement des chaînes, participe à sa cohésion. Pour les tissus mous comme pour les élastomères, la complexité de la structure microscopique rend délicate une analogie avec les solides "durs" comme les métaux (ou encore avec les fluides lorsque l'hypothèse d'incompressibilité est acceptable). Ces différences se retrouvent à l'échelle macroscopique.

---

<sup>3</sup>Les expériences de génération d'harmonique et d'interaction d'onde planes ont été réalisées avec l'aide des collègues cités plus haut, qui m'ont initié à cette technique. L'apport de ce travail réside dans l'étude des développements adaptés aux milieux incompressibles, dans la synthèse bibliographique des modèles de propagation existant, ainsi que l'étude expérimentale des effets de diffraction non-linéaires des ondes de cisaillement.

puisque ces milieux se distinguent par une grande résilience (capacité à retrouver leur forme initiale après de grandes déformations).

La différence entre les élastomères et les gels réside dans la nature des liaisons. Dans les gels le réseau de molécules, moins fortement liées<sup>4</sup>, peut expliquer la résistance limitée des gels à de fortes elongations. D'autre part, la similitude entre les gels et les tissus biologiques se limite aux caractéristiques élastiques : une faible élasticité de cisaillement et une quasi-incompressibilité, alors que la structure des milieux vivants, composés de cellules, de fibres est très variée et extrêmement différente d'un entremêlement de collagène. L'anisotropie des fibres musculaires, par exemple [124], rend impossible l'application des modèles isotropes que nous décrivons dans la suite. Il est possible d'exprimer le module de cisaillement de ce type de milieux en fonction des caractéristiques de la distribution des chaînes (voir l'annexe A.3). Cependant, l'interprétation des expériences reste plus facile avec des modèles de loi de comportement contrainte-déformation plus classiques. Un milieu élastique est alors décrit par des considérations purement mécaniques et géométriques sans qu'intervienne de calcul statistique sur le comportement de ses constituants. Une comparaison d'un modèle statistique et du modèle de Mooney-Rivlin des propriétés élastiques est donnée par Mase [125] ; qui traite le cas d'une déformation triaxiale ou uniaxiale d'un milieu incompressible. Nous rappelons, en annexe A.4, cette approche différente de l'élasticité de ce type de milieu (qualifiés "d'hyperélastiques").

Deux approches sont possibles pour rendre compte du comportement spécifique d'un matériau comme la quasi-incompressibilité des gels. L'une considère que seules certaines déformations sont possibles, ce qui impose des relations entre les composantes du tenseur des déformations (les déformations qui se traduisent par un changement de volume sont interdites), l'autre consiste à choisir un jeu de constantes qui ne puisse rendre compte que des déformations mises en jeu et l'incompressibilité est assurée (dans l'approximation linéaire, on pose par exemple  $\lambda = 0$ ). Autrement dit l'hypothèse de départ peut être formulée sur le type d'onde ou de déformation que l'on souhaite décrire (seuls certains déplacements sont possibles ou envisagés) ou bien sur le type de matériaux étudié : un milieu quasi-incompressible peut être décrit par un nombre réduit de constantes.

### 3.1.1 Développement de l'énergie au quatrième ordre

Zabolotskaya [43], [44], [126] poursuit à l'ordre quatre (relativement aux dérivées de l'énergie par rapport aux déformations), le développement de l'énergie interne (1.100) donné par Landau [32] :

$$W = \mu I_2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) I_1^2 + \frac{A}{3} I_3 + BI_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 + EI_1 I_3 + FI_1^2 I_2 + GI_2^2 + HI_1^4. \quad (3.1)$$

Cette démarche conduit à une relation contrainte-déformation à l'ordre trois en gradient des déplacements et à une équation de propagation comprenant des termes cubiques.

---

<sup>4</sup>L'eau chaude dissout le collagène et permet ainsi l'entremêlement des chaînes de peptides qui le composent, mais les liaisons que l'eau peut former sont faibles. La cohésion de la gélatine est plus facilement réversible que celle des caoutchoucs, assurée par des liaisons covalentes.

Les invariants utilisés sont ceux du tenseur des déformations de Green-Lagrange, définis par Landau et donnés au premier chapitre (équation (1.101)). L'invariant d'ordre quatre :

$$I_4 = Tr(\bar{S}^4) = S_{ij}S_{jk}S_{kl}S_{li}, \quad (3.2)$$

n'apparaît pas dans l'expression (3.1) car il s'exprime en fonction des trois autres puisque qu'il n'existe, pour un tenseur d'ordre deux que trois invariants indépendants. Pour trouver la relation exprimant  $I_4$  en fonction des trois autres, on utilise le théorème de Cayley-Hamilton, qui dit que toute matrice (ou tenseur de rang deux) est solution de son équation caractéristique :

$$-\bar{S}^3 + I_S \bar{S}^2 - II_S \bar{S} + III_S \bar{I}_d = 0. \quad (3.3)$$

En multipliant l'équation caractéristique (3.3) par  $\bar{S}$  et en prenant sa trace, on exprime  $I_4$  comme suit :

$$I_4 = \frac{1}{6}I_1^4 - I_1^2 I_2 + \frac{4}{3}I_1 I_3 + \frac{1}{2}I_2^2. \quad (3.4)$$

Les relations (1.103) permettent d'exprimer l'énergie (3.1) en fonction des invariants principaux :

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_s^2 + 2\mu II_s \\ &+ \frac{1}{3}(A + 3B + C)I_s^3 + (A + 2B)I_s II_s + AIII_s \\ &+ (E + F + G + H)I_s^4 + 3EI_s III_s + (3E + 2F + 4G)I_s^2 II_s + 4GII_s^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dans le paragraphe suivant, à partir de cette expression, nous reprenons la correspondance entre les solides et les fluides proposée dans la référence [44] (il est plus aisé de faire apparaître les invariants principaux que ceux de Landau à partir de la variation relative de volume). Puis, toujours à partir de ce développement, nous établissons le développement de l'énergie d'un milieu incompressible.

### 3.1.2 Milieu incompressible

Pour écrire un développement de ce type, adapté au milieu incompressible, on peut, par identification du cas général d'un solide isotrope et de celui d'un fluide (purement compressible), déterminer quelles constantes ou modules sont caractéristiques de la compression, afin de les choisir nulles pour un milieu incompressible. Pour cela, il est possible d'exprimer le développement de l'énergie d'un fluide en fonction des invariants du tenseur des déformations, ce que font Hamilton, Ilinskii et Zabolotskaya [44]. Ce calcul permet d'identifier les constantes du solide correspondant à de la compression et à du cisaillement, et ce, jusqu'à l'ordre trois (en constantes). Pour comparer des développements du même ordre, l'équation d'état du fluide est écrite sous la forme :

$$p = -p_0 + A_l \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{B_l}{2!} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \frac{C_l}{3!} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^3, \quad (3.6)$$

avec

$$C_l = \rho_0^3 \left( \frac{\partial^3 p}{\partial \rho^3} \right)_{\rho=\rho_0}. \quad (3.7)$$

L'équation d'état, et par suite l'énergie, peuvent être exprimées en fonction du volume spécifique  $w = \rho_0/\rho$ , qui s'exprime en fonction des invariants principaux de  $\bar{S}$  :

$$w = \rho_0/\rho = (1 + 2I_s - 4II_s + 8III_s)^{1/2} \quad (3.8)$$

donc

$$W_l = - \int_1^w p dw = -p_0(w-1) + \frac{A_l}{2}(w-1)^2 - \frac{1}{6}(B_l + 2A_l)(w-1)^3 + \frac{1}{24}(C_l + 6B_l + 6A_l)(w-1)^4. \quad (3.9)$$

Après calcul (développement de la racine carrée), il vient :

$$\begin{aligned} W_l = & \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3}C_l + 5p_0 + 4B_l + 11A_l \right) I_s^4 + \frac{1}{6} (-5A_l - B_l - 3p_0) I_s^3 + (B_l + 5A_l + 3p_0) I_s^2 II_s \\ & + \frac{1}{2} (A_l + p_0) I_s^2 - 2(p_0 + A_l) I_s II_s + 4(A_l + p_0) I_s III_s - p_0 I_s + 2(A_l + p_0) II_s^2 \\ & + 2p_0 II_s - 4p_0 III_s. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Par identification des coefficients de cette équation avec ceux de l'équation (3.5), on obtient la correspondance entre les modules de Landau d'un solide purement compressible et les constantes d'un fluide :

$$\mu = 0, \quad K = \lambda = A_l, \quad (3.11a)$$

$$A = 0, \quad B = -A_l, \quad C = \frac{1}{2}(A_l - B_l) \quad (3.11b)$$

$$E = \frac{3}{4}A_l, \quad F = \frac{1}{2}(B_l - A_l), \quad G = \frac{1}{2}A_l, \quad H = \frac{1}{24}(A_l + C_l). \quad (3.11c)$$

A l'ordre deux [45], cette analogie montre que les modules  $\mu$  et  $A$  n'interviennent pas dans l'énergie de compression d'un fluide. Les termes pondérés par  $\mu$  et  $A$  dans l'énergie d'un solide peuvent donc être identifiés à de l'énergie de cisaillement. On remarque qu'à l'ordre 3 les termes faisant intervenir les combinaisons d'invariants dont l'ordre est supérieur à 3 (en gradient des déformations) sont pondérés par des constantes d'ordre 1 et 2 :  $A_l$  et  $B_l$  (alors que dans les expressions de l'énergie (3.2) et (3.6) chaque module est lié à un invariant d'ordre donné). Ceci illustre qu'un module élastique n'est relié à un ordre de grandeur de l'énergie que pour une variable (déformation) donnée. Lorsqu'on exprime l'énergie du fluide en fonction de la variation de densité (volume spécifique), le module  $A_l$  est lié à l'ordre 1 :  $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$  de cette variable. Par contre, lorsqu'on exprime cette même énergie en fonction des invariants de  $\bar{S}$ ,  $A_l$  pondère les combinaisons des invariants de  $\bar{S}$  à tous les ordres. Il en est de même, pour les modules  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$ , liés aux seuls invariants d'ordre quatre pour un solide, mais qui s'expriment en fonction des modules d'ordre un, deux et trois du fluide. A l'inverse l'expression des constantes élastiques en fonction des modules de Murnaghan ou de Landau respecte les ordres de grandeur, car ces trois systèmes sont définis à partir de la même variable thermodynamique : la déformation Lagrangienne.

Pour séparer la compression du cisaillement dans un solide mou, les auteurs de la référence [44] séparent l'énergie élastique en deux termes : le premier ne dépend que de la densité, il correspond aux variations dues à la compression, le second est relatif au cisaillement et s'exprime en fonction des

invariants de  $\bar{S}$ . En se basant sur la comparaison avec le cas du fluide (équation (3.11)), Hamilton propose un développement en fonction des invariants  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_2^2$ . Dans le développement (3.1) les termes faisant intervenir  $I_1$ , pondérés par  $K$ ,  $\lambda$ ,  $B$  et  $C$ , correspondent à de l'énergie de compression (pour les modules du quatrième ordre la distinction n'est plus possible). Pour isoler le cisaillement, l'énergie est donc écrite sous la forme suivante :

$$W = W_0(\rho) + \mu(\rho)I_2 + \frac{A(\rho)}{3}I_3 + DI_2^2. \quad (3.12)$$

Le module  $D$  est ici différent de celui de l'équation définit (avec  $I_4$ ) dans la référence [43], nous verrons comment l'exprimer en fonction des modules de Landau.

On peut obtenir l'expression de l'énergie (3.12) à partir du développement en fonction des invariants principaux (3.5), ou du développement en fonction des invariants de Landau (3.1). Pour cela, il faut faire apparaître  $III_C = (\rho/\rho_0)^2$  dans l'expression de l'énergie. Nous procédons ici par approximations successives, pour retrouver le développement de la référence [44].

Il s'agit de substituer à  $I_1$ , dans l'équation (3.1), son expression en fonction de  $I_2$  et  $I_3$ . Le troisième invariant du tenseur des dilatations s'écrit :

$$III_C = 1 + 2I_s - 4II_s + 8III_s. \quad (3.13)$$

En substituant les expressions des invariants principaux en fonction de ceux de Landau (1.103), on obtient :

$$III_C = 1 + 2I_1 - 2I_2 + 2I_1^2 + \frac{4}{3}I_1^3 - 4I_1I_2 + \frac{8}{3}I_3. \quad (3.14)$$

Pour un milieu incompressible,  $III_C = 1$  et cette expression donne  $I_1$  en fonction de  $I_2$  et  $I_3$ , mais  $I_1^2$  et  $I_1^3$  interviennent également :

$$I_1 = I_2 - I_1^2 - \frac{2}{3}I_1^3 + 2I_1I_2 - \frac{4}{3}I_3. \quad (3.15)$$

Tous les termes de droite sont, au plus, de l'ordre de  $O(u^2)$ ,  $I_1$  est donc, au plus, de cet ordre. Par récursion<sup>5</sup>, (3.15) devient :

$$I_1 = I_2 - \frac{4}{3}I_3 + I_2^2. \quad (3.16)$$

D'une manière équivalente à ce raisonnement, nous utilisons un développement limité qui fournit cette même expression. La résolution de l'équation (3.14) pour  $I_1$  n'admet qu'une solution réelle qui donne une expression de  $I_1$  en fonction de  $I_2$ ,  $I_3$  et  $III_C$  :

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( -1 + \zeta_1 + \sqrt{2 + \zeta_2} \right)^{1/3} - \frac{2(1/4 - I_2)}{(-1 + \zeta_1 + \sqrt{2 + \zeta_2})^{1/3}} - \frac{1}{2}, \quad (3.17)$$

avec

$$\text{et } \zeta_1 = 3III_C - 8I_3 \quad (3.18)$$

$$\zeta_2 = -12I_2 + 48I_2^2 - 64I_2^3 - 6III_C + 16I_3 + 9III_C^2 - 48III_C I_3 + 64I_3^2. \quad (3.19)$$

<sup>5</sup>Dans le terme de droite de (3.15), en remplaçant  $I_1$  par son expression (3.15), puis en éliminant les termes dont l'ordre est supérieur à  $O(u^4)$ , on obtient une expression explicite de  $I_1$  en fonction des autres invariants.

En posant  $III_C = 1$  et en effectuant deux développements limités successifs, on retrouve l'expression (3.16). Le premier est effectué sur la racine carrée, avec comme quantité infinitésimale la somme des invariants présente sous le radical, le deuxième est réalisé sur la puissance  $1/3$  avec comme nouvelle quantité infinitésimale la combinaison d'invariants résultant du premier développement limité.

Avec pour objectif d'obtenir un développement de l'énergie pour un milieu quasi-incompressible,  $III_C$  est supposé de l'ordre de 1, et les invariants de Landau  $I_2$  et  $I_3$  sont des infiniments petits d'ordre 2 et 3 en déplacement. Avec les variables :

$$\xi_1 = 2 - 6III_C + 9III_C^2 \quad (3.20)$$

$$\text{et } \xi_2 = \frac{-48III_C I_3 + 16I_3 + 64I_3^2 - 12I_2 + 48I_2^2 - 64I_2^3}{2 - 6III_C + 9III_C^2}, \quad (3.21)$$

l'expression de  $I_1$  (3.17) devient :

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( -1 + \zeta_1 + \sqrt{\xi_1} \sqrt{1 + \xi_2} \right)^{1/3} - \frac{2(1/4 - I_2)}{\left( -1 + \zeta_1 + \sqrt{\xi_1} \sqrt{1 + \xi_2} \right)^{1/3}} - \frac{1}{2}, \quad (3.22)$$

Le premier développement est effectué avec  $\xi_2$ . Les termes entre parenthèses sont regroupés comme précédemment pour obtenir une expression de la forme :

$$I_1 = \frac{1}{2} \tau_1^{(1/3)} (1 + \tau_2)^{1/3} - \frac{2(1/4 - I_2)}{\tau_1^{(1/3)} (1 + \tau_2)^{1/3}} - \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

Le développement en série, comme les expressions de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont donnés par un logiciel de calcul formel (Maple) et trop imposant pour être reproduit ici. Les puissances de  $I_2$  supérieures à 2 et celles de  $I_3$  supérieures à 1 sont éliminées. L'évaluation numérique de l'expression donne le même résultat que la récursion, dans le cas où  $III_C = 1$ .

Dans l'expression (3.5), les invariants  $II_S$  et  $III_S$  sont remplacés par leurs expressions (1.103b) et (1.103c) et l'on substitue à  $I_S = I_1$  le résultat du développement en série. Il reste alors une expression de l'énergie en fonction de  $I_2$ ,  $I_2^2$  et  $I_3$  dont les coefficients font encore intervenir  $III_C$  et les autres modules élastiques. De cette manière, on exprime la dépendance, sous l'effet d'une compression, des modules  $\mu(\rho)$ ,  $A(\rho)$  et  $D(\rho)$  définis dans (3.12). L'évaluation numérique de cette expression, toujours pour  $III_C = 1$  permet la comparaison de ce développement de l'énergie avec celui milieu incompressible proposé par [44]. On obtient ainsi l'expression de la constante  $D$  définie dans cet article. L'énergie est finalement trouvée sous la forme :

$$W = K_1 + K_2 I_2 + K_3 I_3 + K_4 I_2^2, \quad (3.24)$$

avec :

$$K_1 = 0, \quad (3.25)$$

$$K_2 = \mu, \quad (3.26)$$

$$K_3 = \frac{A}{3}, \quad (3.27)$$

$$K_4 = D = \frac{\lambda}{2} + B + G. \quad (3.28)$$

$K_4$  correspond au coefficient  $D$ , qu'on retrouvera dans le coefficient de non-linéarité des ondes de cisaillement, défini par l'équation de propagation des ondes transversales. On note qu'il fait intervenir deux modules  $\lambda$  et  $B$ , qu'on trouve également dans le coefficient de non-linéarité des ondes longitudinales. On peut difficilement attribuer une signification physique unique (compression ou cisaillement) à ces modules élastiques. Comme pour les ondes L, l'utilisation des invariants de  $\bar{S}$  mène à des combinaisons de constantes qui sont directement celles qui apparaissent dans l'équation d'onde, car ces invariants sont liés aux modes purs (c'est-à-dire aux déformations suivant les axes principaux). Le module  $D$ , n'est donc pas un "nouveau" module d'élasticité, mais il s'agit en fait d'une combinaison de  $\lambda$ ,  $B$  et  $G$ . En imposant  $D = 0$ , on retrouve d'ailleurs le cas du fluide (compressible) avec  $G = -\frac{\lambda}{2} - B = \frac{A_l}{2}$ , comme nous l'avons établi plus haut (équation (3.11c)). L'expression de  $D$  ( $K_4$ ) donnée par [44] est établie par analogie entre l'équation d'onde obtenue avec le développement de Landau et celle dérivée de l'expression (3.24) (développement de l'énergie d'un milieu incompressible). Nous montrons ici que ces relations entre les modules élastiques peuvent être obtenues "plus directement", en introduisant les "bonnes combinaisons" d'invariants dans l'énergie élastique.

## 3.2 Propagation non-linéaire des ondes de cisaillement

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit comme précédemment :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad (3.29)$$

avec le tenseur des contraintes :

$$T_{ik} = \frac{\partial W}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}, \quad (3.30)$$

et le tenseur des efforts visqueux :

$$\tau_{ik} = 2\eta \left[ \frac{dS_{ik}}{dt} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \frac{dS_{ll}}{dt} \right] + \zeta \delta_{ik} \frac{dS_{ll}}{dt}, \quad (3.31)$$

où  $\eta$  et  $\zeta$  sont les coefficients de viscosité de cisaillement et de volume.

L'énergie est dans un premier temps prise sous la forme incompressible donnée précédemment. On peut dans ce cas écrire un modèle unidimensionnel de propagation des ondes de cisaillement en conservant la viscosité. Dans la deuxième section, nous reprendront le développement élastique plus général, avec lequel il est possible de traiter aussi bien des couplages entre les polarisations d'un champ de déplacement quelconque, que des effets de diffraction, toujours dans le cas isotrope.

### 3.2.1 Ondes planes de cisaillement : équation de Burgers modifiée

Le développement qui suit est adapté à la comparaison avec les expériences que nous avons réalisées dans les gels, dans le cas des ondes planes. Comme nous l'avons déjà mentionné, les vitesses de propagation des ondes longitudinales ( $V_L \approx 1500\text{m/s}$ ) et transverses ( $V_T \approx 2\text{m/s}$ ) sont

suffisamment différentes pour pouvoir séparer compression et cisaillement. On reprendra donc les résultats obtenus par Zabolotskaya [127] avec le développement de l'énergie élastique du milieu quasi-incompressible présenté précédemment.

Par ailleurs, le nombre de Mach,  $M = v_0/V_T$ , est de l'ordre de 0,3, toujours dans le cas de nos expériences. Il est donc bien plus grand que dans le cas d'ondes longitudinales dans les solides ou les fluides (inférieur à  $10^{-2}$ ), mais il est suffisamment faible pour autoriser l'écriture d'une équation de type Burgers.

On considère donc que la seule composante non nulle du champ des déplacements est  $u_x(z, t)$ <sup>6</sup>, on n'étudie donc que ses variations suivant l'axe de propagation  $z$ . Les contraintes se réduisent à la composante :

$$T_{xz} + \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \left( \mu + \frac{A}{2} + D \right) \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^3 + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (3.32)$$

On obtient ainsi l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\beta_T \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 - \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^2 \partial t}, \quad (3.33)$$

avec  $V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho_0}}$  et  $\beta_T = \frac{3(2\mu+A+2D)}{2\mu} = \frac{C_{4444}+6C_{166}+3C_{11}}{2C_{44}}$ . On remarque que si il est exprimé en fonction des constantes élastiques, ce coefficient de non-linéarité transverse fait intervenir le module  $C_{11}$  (équation linéaire du mode L), ainsi que  $C_{166}$  (qui pondère les termes de couplage L-T). Les relations entre ces modules sont donc telles qu'il ne permettent pas de distinguer à coup sûr le cisaillement de la compression.

D'une manière analogue à celle employée pour obtenir l'équation de propagation des ondes longitudinales, l'adimensionnement permet d'estimer les ordres de grandeur relatifs des différents termes. Les quantités sans dimension sont définies comme précédemment (équation (1.31) et (1.32) de la section 1.2.2).

L'introduction d'une coordonnée lente simplifie cette équation, en éliminant un terme et en "abaissant" l'ordre des dérivées. Le terme non-linéaire est cette fois d'un ordre de grandeur plus faible (cubique) que pour les ondes L, on prend donc  $z_r = M^2 z$ , pour coordonnée "lente" et toujours le temps retardé  $\tau = t - z/V_T$ . Les variables adimensionnées correspondantes sont :  $\tilde{\tau} = \omega \tau = \tilde{t} - \tilde{z}$  et  $\tilde{z}_r = M^2 \tilde{z}$ . L'équation (3.33) (on omettra dans la suite l'indice  $x$  du déplacement  $u$ ) devient, sans dimension :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} = -\beta_T M^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 - \frac{\eta \omega}{\mu} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2 \partial \tilde{t}}. \quad (3.34)$$

En introduisant dans un premier temps le temps retardé, on obtient les relations suivantes entre

<sup>6</sup>On adopte ici la correspondance suivante avec les notations de la première partie (système d'équations 1.112a) : l'axe de propagation  $z$  correspond à la direction d'indice 1 ( $a_1$ ) et à la polarisation longitudinale ( $U_1 = U_z$ ). Les axes  $y$  et  $x$  correspondent aux directions 2 et 3 et donc aux polarisations transverses.

les opérateurs (données par  $df(\tau, z) = df(t, z)$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\tilde{t}, \tilde{z})}{\partial \tilde{t}} &\Leftrightarrow \frac{\partial f(\tilde{\tau}, \tilde{z})}{\partial \tilde{\tau}}, \\ \text{et } \frac{\partial f(\tilde{t}, \tilde{z})}{\partial \tilde{z}} &\Leftrightarrow \frac{\partial f(\tilde{\tau}, \tilde{z})}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial f(\tilde{\tau}, \tilde{z})}{\partial \tilde{\tau}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

qui permettent d'aboutir à :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{z}} = \\ -\beta_T M^2 &\left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{z}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^2} \right] \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 - 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}} + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}} \right)^2 \right] \\ &- \frac{\eta \omega}{\mu} \left[ \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2 \partial \tilde{\tau}} - 2 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^2 \partial \tilde{z}} + \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'introduction de la coordonnée lente<sup>7</sup> fait apparaître les puissances du nombre de Mach :

$$\begin{aligned} &M^4 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}_r^2} - 2M^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{z}_r} = \\ -\beta_T M^2 &\left[ M^4 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}_r^2} - 2M^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{z}_r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^2} \right] \left[ M^4 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}_r} \right)^2 - 2M^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}_r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}} + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}} \right)^2 \right] \\ &- \frac{\eta \omega}{\mu} \left[ M^4 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}_r^2 \partial \tilde{\tau}} - 2M^2 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^2 \partial \tilde{z}_r} + \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

En négligeant les termes plus petits que  $M^3$  et en substituant  $z$  à  $z_r$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau} \partial \tilde{z}} = \frac{\beta_T M^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^2} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}} \right)^2 + \frac{\eta \omega}{2\mu} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\tau}^3}. \quad (3.38)$$

Pour négliger les termes en  $\beta_T M^4$ , à droite de (3.37) devant le deuxième terme de gauche, en  $M^2$ , il faut donc vérifier :  $\beta_T M^2 \ll 1$ . Avec  $\beta_T = 5$  et  $M \approx 0.3$ , dans le cas des expériences présentées dans la suite, nous obtenons  $\beta_T M^2 \approx 0,5$ . La condition précédente n'est donc pas vérifiée au mieux, mais reste envisageable.

Enfin, en faisant apparaître la vitesse particulière  $v = \frac{\partial u}{\partial \tau}$  et en revenant aux variable dimensionnées, on retrouve l'équation dite de "Burgers modifiée" [127] :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\beta_T}{2V_T^3} v^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\eta}{2\rho_0 V_T^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \quad (3.39)$$

Dans le cas non-dissipatif (sans le dernier terme), les auteurs donnent la solution exacte (implicite), pour une vitesse de la source de la forme  $v(0, t) = v_0 \cos(\omega_0 t) = f(t)$  :

$$v = f \left( \tau + \frac{\beta_T z v^2}{2V_T^3} \right), \quad (3.40)$$

<sup>7</sup>On notera que l'inversion des deux étapes (introduction de la coordonnée lente puis du temps retardé) rend difficiles les simplifications.

ainsi que l'expression de la distance de choc :

$$z_c = \frac{2V_T^3}{\beta_T \omega_0 v_0^2}. \quad (3.41)$$

Dans le cas dissipatif, la solution est obtenue par approximations successives : la contribution non-linéaire  $v^{III}$  étant traitée comme une perturbation du champ primaire  $v^I$  :  $v = v^I + v^{III}$ , avec  $v^I$  de l'ordre de  $M$  et  $v^{III}$  de l'ordre de  $M^3$ . On se ramène, comme dans le cas des ondes longitudinales, à l'étude de deux équations, l'une linéaire portant sur  $v^I$ , qui donne (avec  $v^I(0, \tau) = f(\tau)$ ) la solution (3.42a), l'autre, non-linéaire, portant sur  $v^{III}$  et avec  $v^I$  dans le terme source, qui donne (avec  $v^{III}(0, \tau) = 0$ ) la solution (3.42b) :

$$v^I = v_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega_0 \tau) \quad (3.42a)$$

$$\text{et } v^{III} = -\frac{\beta_T \omega_0 v_0^3}{48 V_T^3 \alpha} e^{-3\alpha z} (1 - e^{-6\alpha z}) \sin(3\omega_0 \tau), \quad (3.42b)$$

avec  $\alpha = \frac{\eta \omega_0^2}{2\rho_0 V_T^3}$ .

On retrouve des solutions analogues à celles du cas quadratique (ondes longitudinales) en prenant  $\alpha \ll 1$  dans les expressions précédentes. On obtient alors (avec  $(e^x - 1)/x \approx 1$ ) une troisième harmonique dont l'amplitude croît linéairement avec la distance de propagation. On considère donc un régime de propagation non-linéaire faible sur lequel l'atténuation n'a pas d'effet. Ces deux hypothèses seraient excessives pour des ondes de cisaillement dans les gels. Aussi nous n'observerons pas de croissance linéaire des harmoniques. Pour la même raison, il semble difficile de mesurer  $\beta_T$  avec une méthode d'interaction d'ondes similaire à celle du deuxième chapitre.

Une résolution numérique de l'équation (3.39) par différences finies a été programmée par M. Tanter sur la base du code utilisé pour l'équation de Burgers (1.59) des ondes longitudinales (cf. § 1.2.2). Ce code, qui décrit la distorsion d'une onde de cisaillement, donne des résultats comparables à ceux présentés par Zabolotskaya [127] ou Lardner [128] avec la solution implicite ou la résolution en perturbation. Cette simulation prend en compte deux mécanismes à l'origine de l'atténuation :

- les pertes par effet thermovisqueux, qui proviennent de l'expression de la contrainte (choix d'un modèle rhéologique de type Voigt, pour lequel les contraintes visqueuses sont proportionnelles au taux de déformation), apparaissent sous la forme d'un terme supplémentaire (par rapport au cas non-dissipatif) dans l'équation différentielle,
- la "sur-atténuation" (ou extra-atténuation non-linéaire), qui intervient au delà de la distance de choc, et qui rend compte du transfert d'énergie sous forme d'entropie.

Les figures 3.1 et 3.2 présentent les résultats obtenus avec des paramètres proches des conditions expérimentales :  $v_0 = 0,4$  m/s,  $V_T = 1,6$  m/s ( $\mu = 2,8$  kPa et  $\rho_0 = 1100$  kg/m<sup>3</sup>) d'où  $M = 0,25$  ;  $\beta_T = 5,5$ , d'où  $z_c = 15$  mm et  $f_0 = 100$  Hz ;  $\eta = 0,1$  Pa.s. Sur la figure 3.1, l'évolution du profil ainsi que sa composition fréquentielle sont représentées à différentes distances de la source. On observe, contrairement au cas des ondes longitudinales (voir figure 1.1), une distorsion qui n'est pas symétrique par rapport au passage par zéro et qui diffère du profil en "N", caractéristique du choc des ondes de compression. En effet, pour les ondes transversales la distorsion est identique pour

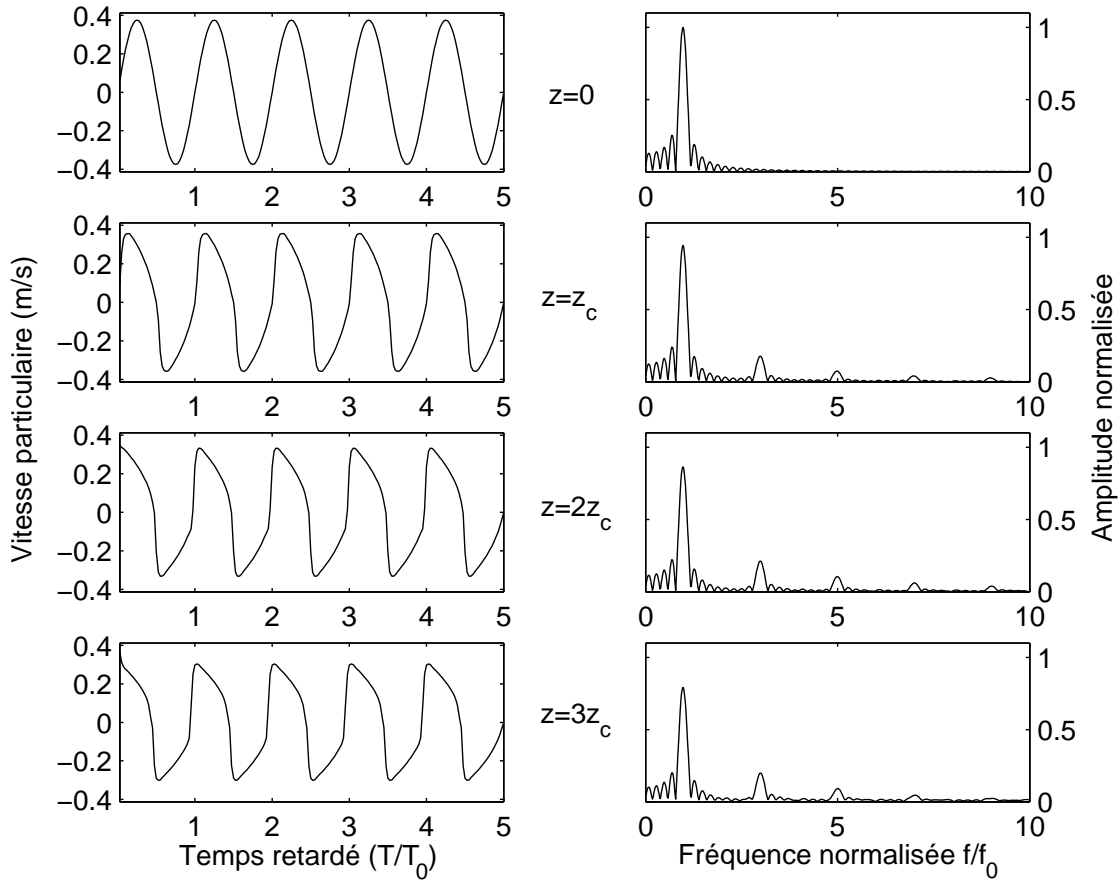


FIG. 3.1 – Solution numérique de l'équation de Burgers modifiée illustrant la distortion du front d'onde (à gauche) et la génération d'harmoniques (à droite).

les parties positives et négatives du profil (variation de célérité en  $\beta_T v^2$ , voir équation (3.38) ou (3.40)), alors que, pour les ondes de longitudinales, les compressions sont accélérées et les détentes ralenties (variation de célérité en  $\beta_L v$ ). La non-linéarité cubique se traduit également par l'apparition d'harmoniques impaires seulement. L'évolution des trois premières composantes spectrales est tracée en fonction de la distance de propagation sur la figure 3.2, qu'on pourra comparer à la figure 1.2, obtenue dans le cas de l'équation quadratique. Les maxima des harmoniques correspondent à la distance de choc (entre 1 et 1,5  $z_c$ , comme pour les ondes longitudinales). Leur position est déterminée par la compétition entre la non-linéarité et l'atténuation. La décroissance du fondamental s'explique par le transfert d'énergie aux harmoniques ainsi que par les deux mécanismes de dissipation mentionnés plus haut.

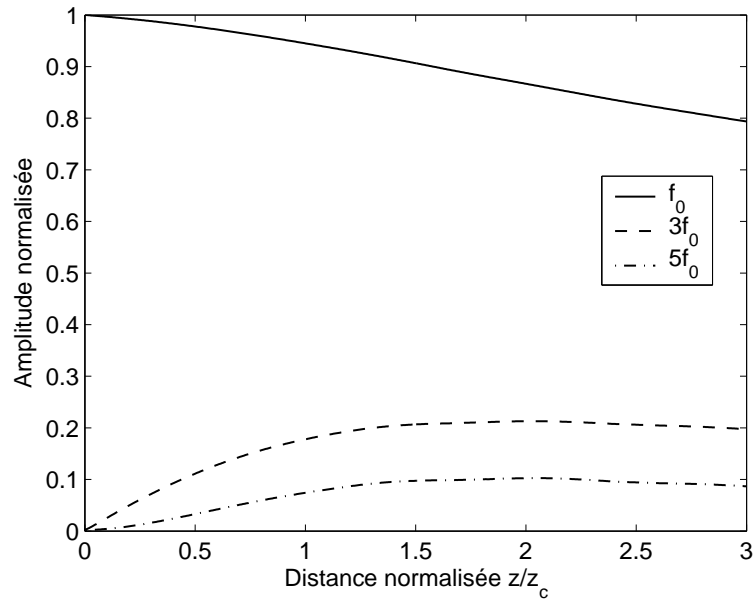


FIG. 3.2 – Solution numérique de l'équation de Burgers : évolution des harmoniques en fonction de la distance à la source.

### 3.2.1.1 Dispositif expérimental : imagerie ultra-rapide

L'échographie classique (figure 3.3a) fournit en temps réel (de 25 à 50 images par seconde) des images du contraste d'impédance acoustique qui caractérise la nature des tissus et donne leurs positions relatives. Pour former les images, un échographe procède par focalisation à l'émission et à la réception : la zone active balaye la surface émettrice pour former chaque image (multiplexage de l'électronique).

L'imagerie ultra-rapide (figure 3.3b), mise au point au laboratoire [129], [130], utilise des barrettes commerciales, mais fournit, grâce à une adaptation de l'électronique et du traitement des données, le champ de vitesse dans le milieu étudié. Cette technique permet d'observer, en léger différé (le traitement des données n'est pas entièrement implémenté en "hardware" sur les cartes électroniques), la propagation d'une onde de basse fréquence dans un plan perpendiculaire à la surface émettrice de la barrette. Chaque image est acquise sur l'ensemble des voies de la barrette simultanément à une cadence allant jusqu'à 8000 images par secondes, ce qui nécessite une électronique d'émission-réception et de stockage des données plus performante (128 voies complètes) que celle des échographes classiques. Comme l'échographie, cette technique exploite la rétro-diffusion des ondes émises par la barrette (fréquence de l'ordre du Mégahertz) et fournit des images de "speckle" (qu'on enregistre à une cadence de 3kHz pour nos expériences). Contrairement à l'échographie, aucune formation de voie n'est utilisée à l'émission : une onde plane est émise par la barrette et la focalisation est réalisée à la réception, c'est-à-dire grâce au traitement des signaux par des algorithmes classiques de formation de voie ; c'est ce qui permet d'atteindre une telle cadence d'images

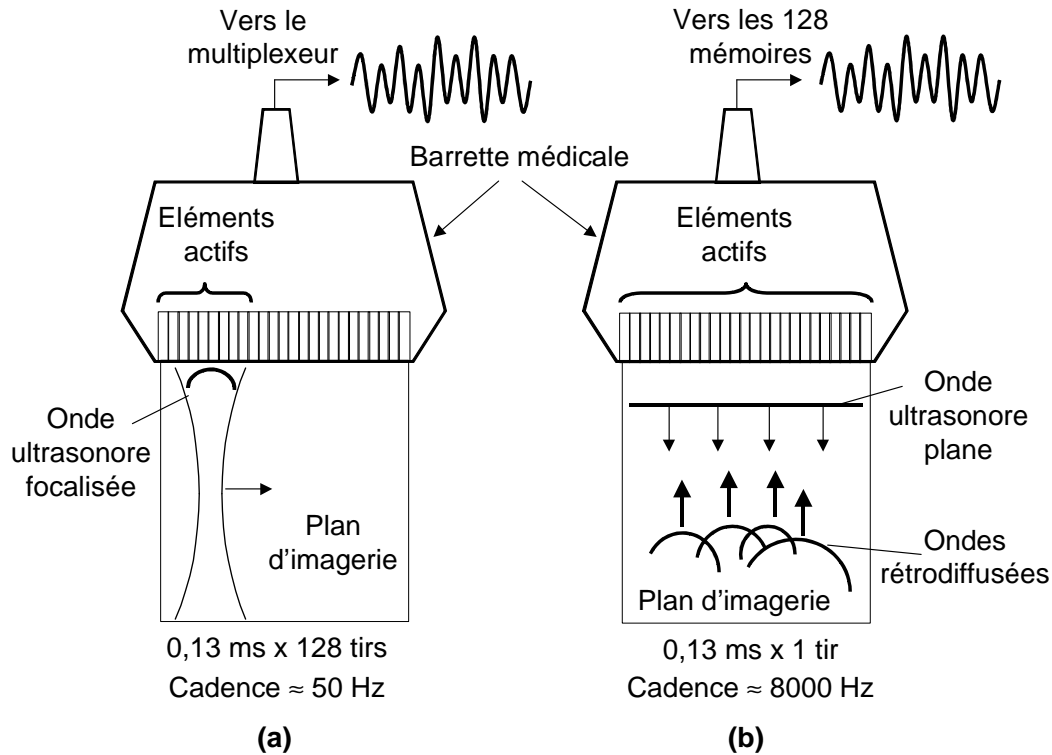


FIG. 3.3 – Imagerie classique (a) et imagerie ultrarapide (b).

(la fréquence d'échantillonnage, de 50 MHz pour chaque voie de l'électronique d'acquisition, est la même qu'en imagerie classique). La fréquence de répétition maximale ( $\approx 10$  kHz) est imposée par la vitesse du son et la profondeur de l'échantillon (ou la taille de l'image désirée), c'est-à-dire par le temps de vol des ultrasons. Le mouvement des diffuseurs en un point donné (entre deux tirs de la barrette) peut alors être obtenu par corrélation de ces signaux. Nous expliquons le calcul des déplacements par corrélation au paragraphe 3.2.3.

Grâce à cet outil, des méthodes d'élastographie des solides mous ont pu voir le jour. Elle fournissent l'élasticité du milieu (plutôt qu'une image de contraste échographique). Le milieu étudié peut être sollicité de différentes manières (statique ou dynamique). L'élastographie dynamique fournit les données nécessaires à la résolution du problème inverse qui donne une carte de l'élasticité et de la viscosité du milieu [131]. Le dispositif 1D utilisé pour les mesures d'acousto-élasticité par J-L. Gennisson (l'application d'une contrainte statique couplée à l'élastographie 1D pour mesurer les modules élastiques du deuxième et du troisième ordre) et pour la caractérisation du muscle offre une configuration plus proche des applications.

Le paragraphe suivant expose les résultats obtenus avec une source plane. Cette expérience "de laboratoire" correspond à la description uni-dimensionnelle de l'équation de Burgers modifiée et permet une comparaison avec sa résolution numérique.

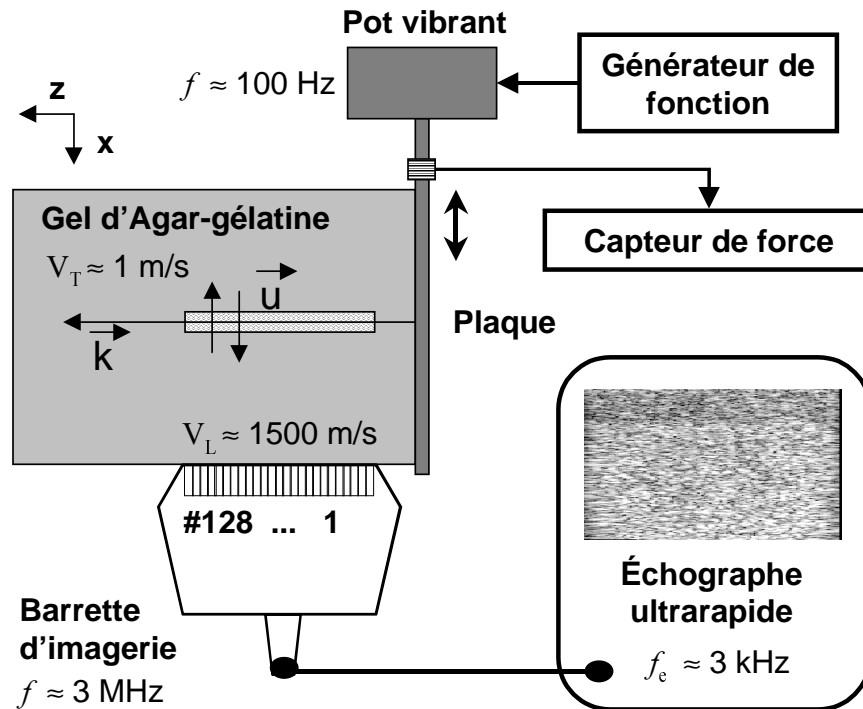


FIG. 3.4 – Dispositif expérimental pour l’observation de l’interaction d’ondes planes de cisaillement.

### 3.2.1.2 Ondes planes : génération d’harmoniques

Pour générer des ondes planes de cisaillement, on utilise une plaque ( $20 \times 20 \text{ cm}^2$ ), prise dans un gel, et liée à un vibreur (Brüel&Kjaer modèle 4809). La plaque émet une onde plane de cisaillement polarisée suivant  $x$  ; on se place ainsi dans des conditions proches des hypothèses du modèle précédent. La barrette d’imagerie peut être positionnée pour mesurer cette composante prépondérante du champ de vitesse le long de l’axe de propagation  $z$ . La composante transverse polarisée suivant  $y$  est également accessible si la surface de la barrette lui est perpendiculaire. Enfin, on peut placer la barrette face à la plaque, soit perpendiculairement à  $z$ , pour obtenir la composante  $v_z$  en fonction de la profondeur  $x$  : il s’agit alors de déterminer si des déplacements longitudinaux sont émis par la source ou produits par la propagation.

Le vibreur est excité par quelques arches de sinusoïde à 100Hz (on la choisit la plus élevée possible, pour augmenter les effets non-linéaires, mais elle est limitée par l’atténuation). Un capteur de force, couplé au pot vibrant, permet de vérifier la "linéarité" de l’émission, c’est-à-dire l’absence d’harmonique à la source (en  $z = 0$ ). Sa bande passante est suffisante pour détecter d’éventuelles composantes aux fréquences double et triple du fondamental. La figure 3.5 reproduit le signal enregistré par le capteur de force (en  $z = 0$ ), ainsi que les signaux obtenus par imagerie à différentes distances de la source<sup>8</sup>. Les signaux présentent une distorsion similaire à celle observée en simula-

<sup>8</sup>On remarque qu’il est parfois difficile d’enregistrer avec l’échographe le train d’ondes sur la totalité de la distance

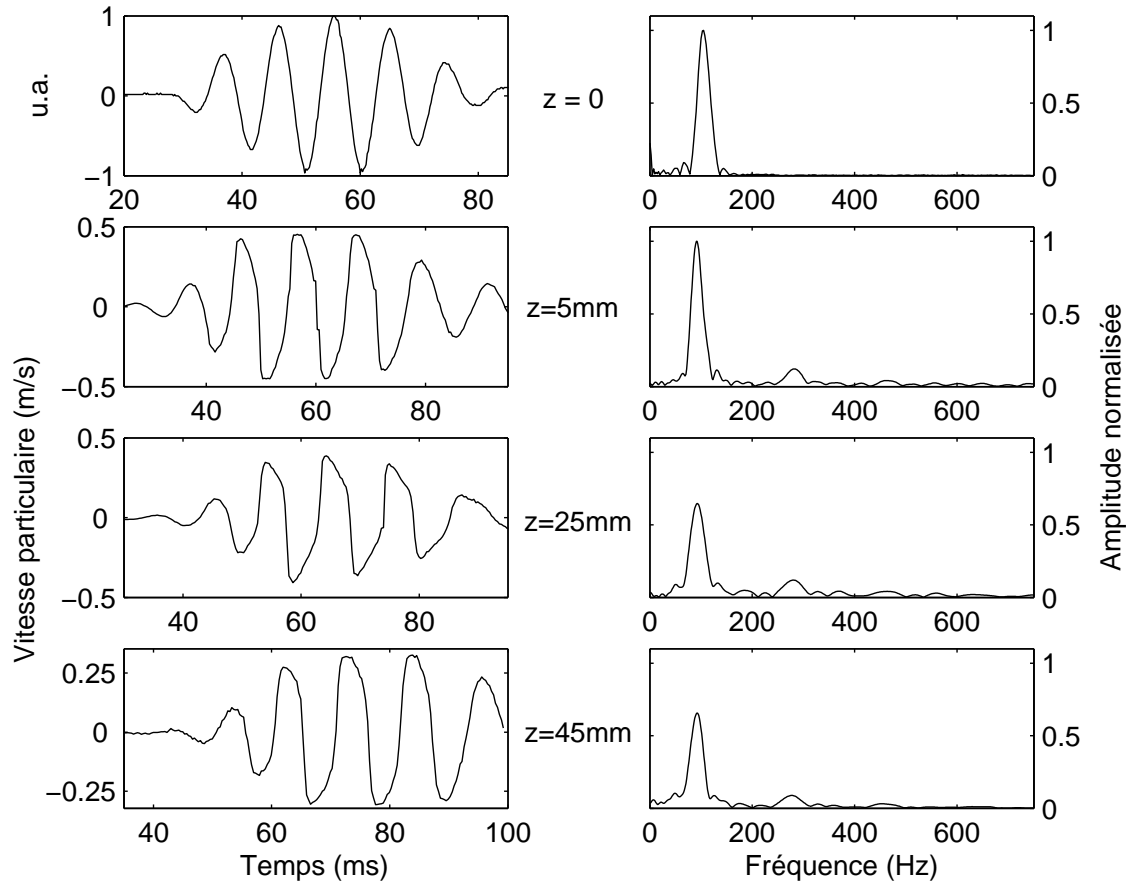


FIG. 3.5 – Profil d'une onde plane de cisaillement choquée et son spectre, en fonction de la distance de propagation, fréquence du fondamental : 100Hz. Le signal fourni par le capteur de force et son spectre sont représentés sur la première ligne ( $z = 0$  mm).

tion (figure 3.1), caractéristique des ondes de cisaillement choquées, c'est-à-dire de la non-linéarité cubique (voir au paragraphe 3.2.1 pour la comparaison avec le cas quadratique, lui-même présenté au paragraphe 1.2.3).

L'évolution des harmoniques suivant l'axe de propagation  $z$  est tracée sur la figure 3.6 en fonction de la distance sur cette axe (parallèlement à la barrette d'imagerie). La surface de la plaque est égale à la section du gel et la surface émettrice de la barrette est placée à quelque millimètre du bord de celle-ci. Pour ces raisons, il n'est pas possible de placer la barrette de manière à enregistrer les premiers millimètres de propagation. La distance entre la plaque et le premier élément est de 5 millimètres, ce qui est de l'ordre de  $z_c/3$ . On observe donc les harmoniques au cours de leur croissance, mais juste avant qu'elles atteignent leur maximum, situé à environ 15 mm de la source.

---

de propagation : la fenêtre d'acquisition est limitée par la largeur de la barrette, la "profondeur" de mémoire et par la réflexion de l'onde à l'extrémité (libre) de l'échantillon (qui vient se superposer avec l'onde incidente si le signal émis est trop long).

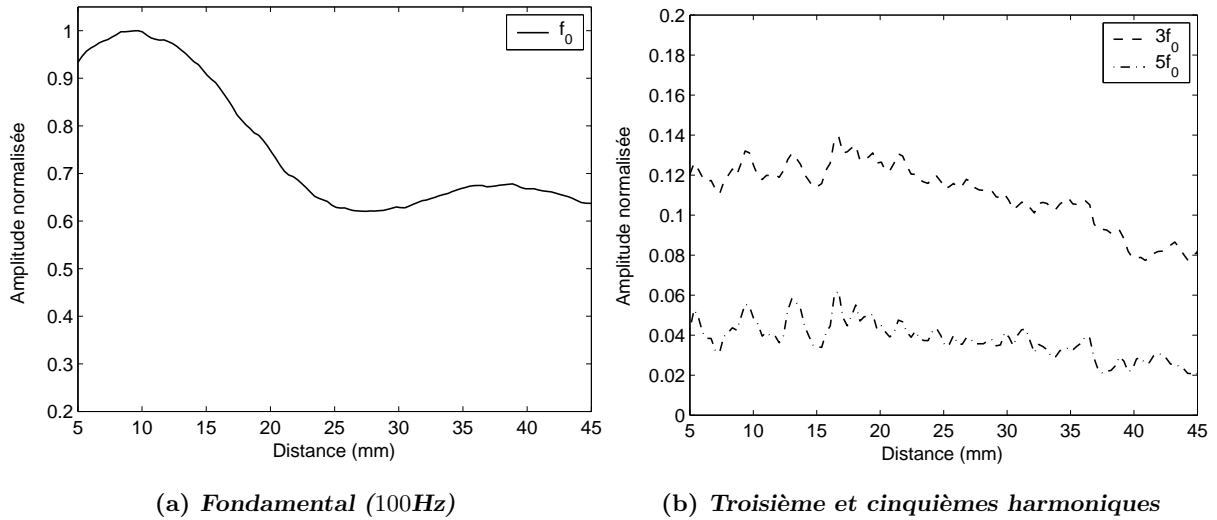


FIG. 3.6 – Evolution des harmoniques en fonction de la distance de propagation, amplitudes normalisées par rapport au maximum du fondamental

La décroissance du fondamental n'est pas simplement exponentielle, les conditions aux limites et la diffraction pourraient être en cause (voir § 3.2.2.3). D'autres expériences sont plus satisfaisantes sur ce point, mais le profil mesuré n'est jamais aussi régulier que lors de la propagation d'ondes de faible amplitude.

Par ailleurs, le capteur de force ne permet pas de remonter à la vitesse de la source<sup>9</sup>. Nous comparons donc les formes d'ondes et les spectre des signaux fournis par l'échographe et par la simulation. La vitesse de déplacement de la source imposée pour les simulations est déterminée à partir des signaux enregistrés par les premiers éléments de la barrette (et  $z \approx 5$  mm) et corrigée par l'atténuation. L'évolution des harmoniques s'accorde qualitativement avec la simulation de l'équation de Burgers modifiée (figure 3.2) : la forme, la position du maximum et le rapport des amplitudes du fondamental et des harmoniques sont comparables.

Les premières expériences de ce type ont été mise au point et réalisées par J-L. Gennisson et S. Catheline [132]. A la suite des mesures de modules élastiques du troisième ordre par acousto-élasticité [133], l'étude de la propagation non-linéaire est devenue envisageable. Les mesures à faible niveau de puissance permettent d'accéder aux paramètres linéaires du milieu (célérité à  $\pm 2\%$  et atténuation à  $\pm 15\%$  des ondes transversales). La décroissance de la composante fondamentale est bien exponentielle (ce qui n'est pas toujours le cas pour des niveaux plus élevés). L'évolution des harmoniques en fonction de la distance de propagation a été comparée avec le modèle numérique de l'équation de Burgers modifiée, en faisant varier l'amplitude du fondamental. L'ajustement des résultats numériques et expérimentaux permet d'estimer le coefficient de non-linéarité relatif aux ondes transverses :  $\beta_T \approx 5,5$ .

<sup>9</sup>Avec ce capteur piézoélectrique, dont l'interface électronique est calibrée pour une impédance de charge faible, on ne peut remonter à l'accélération ou encore à la vitesse de déplacement que si l'impédance mécanique de charge (ensemble plaque plus gel) est connue, mais il est difficile d'estimer cette grandeur.

## 3.2.1.3 Interaction d'ondes planes

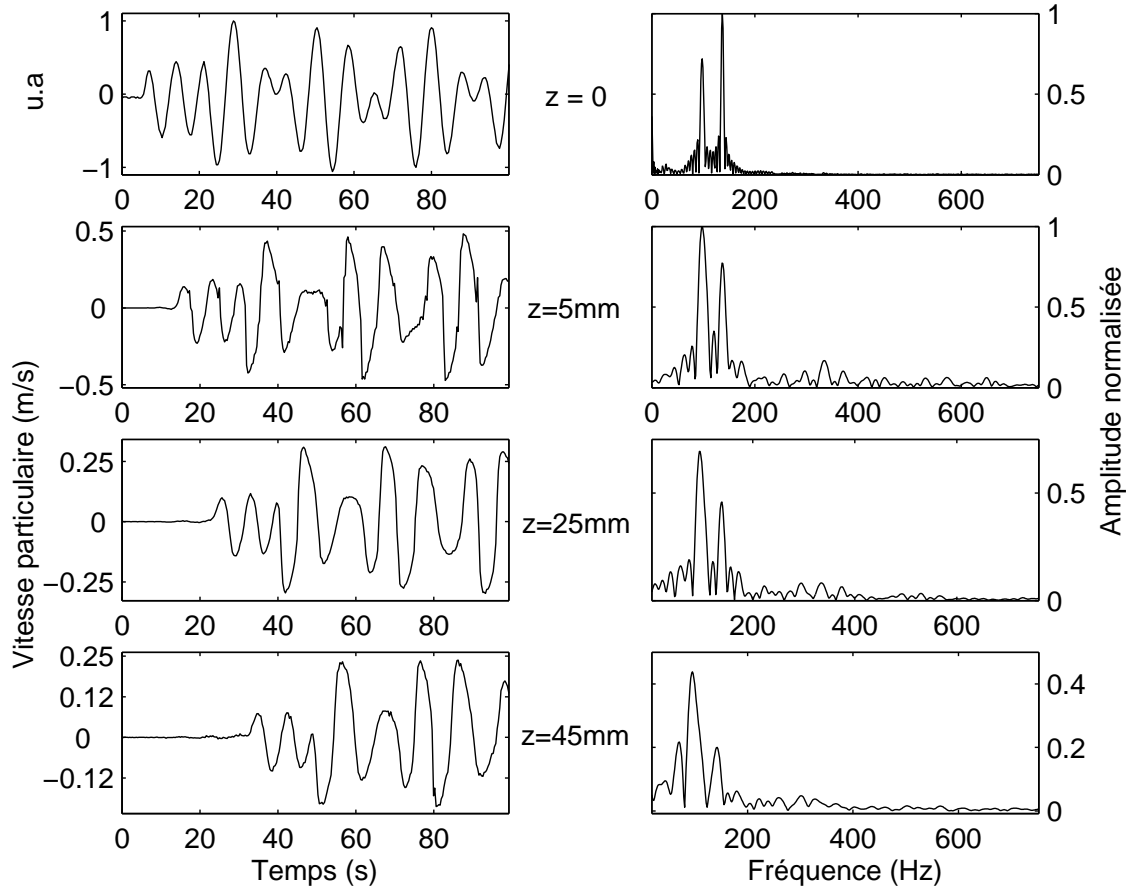


FIG. 3.7 – Interaction d'ondes transverses : composante  $v_x$  et son spectre en fonction de la distance de propagation  $z$ . Le signal fourni par le capteur de force et son spectre sont représentés sur la première ligne ( $z = 0$  mm).

Avec le même dispositif expérimental (figure 3.4), nous avons étudié l'interaction à deux ondes, toujours pour mettre en évidence la spécificité des ondes de cisaillement et pour la comparer avec l'interaction d'ondes longitudinales exploitée pour le dispositif de mesure du chapitre 2. Le vibreur est excité par un signal composé d'une superposition de deux trains d'ondes dont les fréquences sont comprises entre 0 et 500 Hz. Le signal d'émission est synthétisé (avec Matlab ou le logiciel d'élastographie) sous la forme d'une superposition de deux sinusoides, pondérée par une fenêtre de Hanning (première ligne de la figure 3.7). L'interaction colinéaire de ces deux ondes produit, dans le cas de la non-linéarité cubique, les harmoniques impaires  $3f_{1,2}$  du fondamental ainsi que les combinaisons de fréquences  $2f_{1,2} \pm f_{2,1}$ . Pour que les deux composantes soient affectées au même degré par la propagation non-linéaire, il convient de choisir des nombre de Mach :  $M = v_{1,2}/V_T$  du même ordre de grandeur pour les deux composantes. Cependant, on remarque sur la figure 3.7, que seules certaines harmoniques sont visibles : la hiérarchie des amplitudes des

harmoniques est déterminée par les produits des amplitudes, des vecteurs d'ondes et l'atténuation, il est donc difficile de faire en sorte que toutes les composantes fréquentielles soient d'importance égale et toutes identifiables. Pour obtenir des pics mieux marqués dans le spectre il faut émettre le signal le plus long possible. Le facteur limitant la durée d'émission est la taille du gel : l'onde retour interfère d'autant plus tôt que la profondeur est faible.

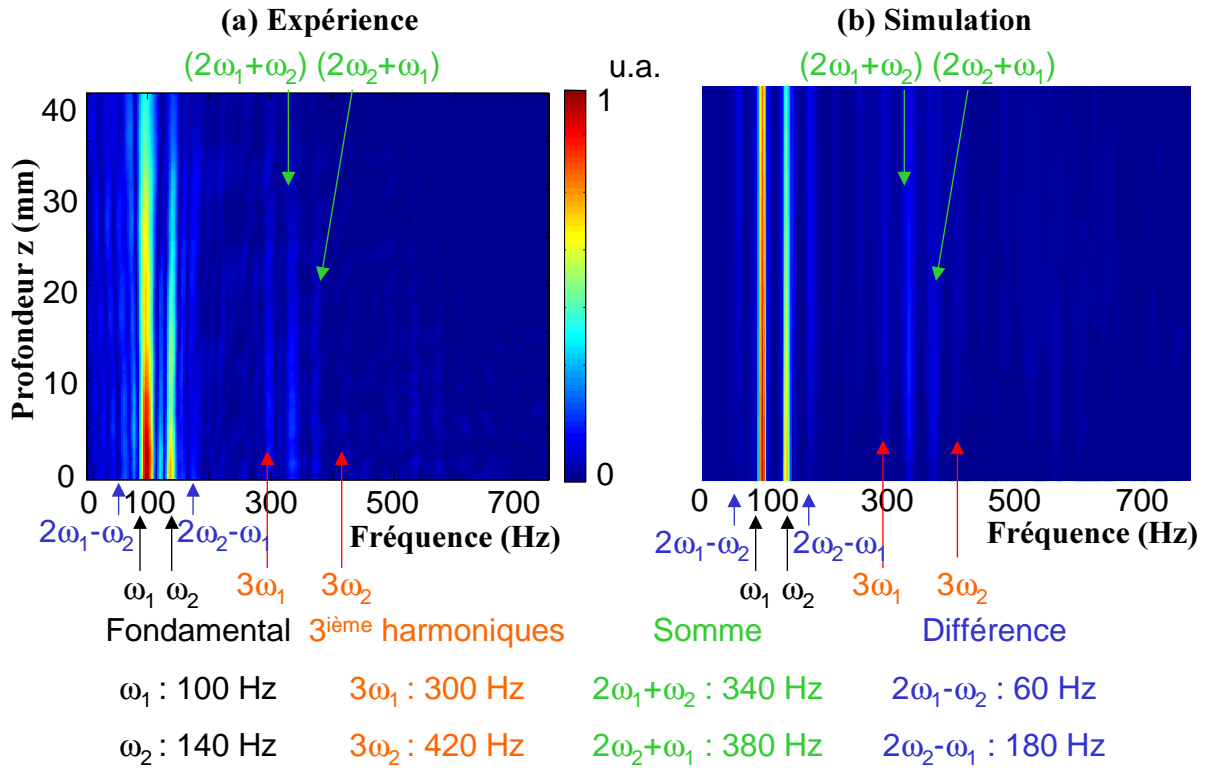


FIG. 3.8 – Interaction d'onde planes transverses : spectre de la composante  $v_x$  en fonction de la distance de propagation  $z$ , comparaison avec le modèle numérique.

Pour que les différentes combinaisons de fréquences puisse être observées, nous pouvons donc faire varier les amplitude et les fréquences relatives des deux ondes. La limite en fréquence est imposée par l'atténuation plus que par l'échantillonnage ( $f_e = 3$  kHz). Lorsque les fréquences produites par l'interaction sont élevées, elles sont d'autant plus atténuées. Différentes combinaisons de fréquences ont été essayées. L'émission de fréquences plutôt basses permet d'observer l'évolution des harmoniques de fréquences assez élevées. A l'inverse, d'une manière analogue aux antennes paramétriques de l'acoustique sous-marine, l'utilisation de deux fréquences élevées et proches permet d'observer les composantes de plus basses fréquences.

La comparaison avec la simulation (figure 3.8) permet d'identifier les différentes composantes spectrales. Les résultats numériques sont obtenus en introduisant comme signal d'excitation en  $z = 0$ , le signal acquis avec le capteur de force. Les paramètres suivants ont été utilisés :  $v_0 = 0,6$  m/s,  $V_T = 1,6$  m/s ( $\mu = 2,8$  kPa et  $\rho_0 = 1100$  kg/m<sup>3</sup>) d'où  $M = 0,37$ ;  $\beta_T = 5,5$  d'où  $z_c = 6.6$  mm;  $f_0 =$

100 Hz et  $\eta = 0,4$  Pa.s. La distorsion des fronts d'ondes présente des caractéristiques similaires, mais l'évolution des amplitudes des harmoniques n'est pas décrite avec une bonne précision. L'estimation délicate des nombreux paramètres : célérité et atténuation des ondes de cisaillement, distance entre la plaque et la barrette, amplitude de l'excitation est certainement en cause. Les essais effectués dans ces différents cas (variation des fréquences et des amplitudes respectives des deux composantes) ne permettent pas d'améliorer l'accord avec le modèle et d'envisager une quantification plus précise de  $\beta_T$ .

On pourra également évoquer les limites du modèle : notamment le respect de l'approximation ( $\beta_T M^2 \ll 1$ ) nécessaire à l'établissement de l'équation de Burgers (3.38), ainsi que le modèle linéaire d'atténuation thermo-visqueuse<sup>10</sup>. Dans le cas des gels, les distances de choc sont faibles et le classement des harmoniques, qu'on pourrait établir grâce à une résolution en perturbation, serait peu réaliste après quelques millimètres de propagation (les solutions fournies par la méthode de perturbation évoquée plus haut ne sont plus valables au delà de la distance de choc). Pour la même raison il est difficile d'envisager une méthode analogue à celle du deuxième chapitre : il est toujours possible d'interpréter l'interaction d'ondes de rapport de fréquence élevé comme une modulation de phase, mais son expression devrait tenir compte de l'atténuation et du régime fortement non-linéaire (elle ne serait plus simplement proportionnelle à la distance d'interaction).

On retrouve cependant les mêmes composantes spectrales dominantes dans la simulation et dans l'expérience :  $3\omega_1$ ,  $2\omega_1 + \omega_2$ ,  $2\omega_2 + \omega_1$  et  $2\omega_2 - \omega_1$ . On retrouve là une des caractéristiques des solutions quasi-linéaires (obtenues par une méthode de perturbation) : l'amplitude d'une harmonique s'exprime comme le produit des fréquences et des amplitudes des ondes primaires. Par exemple, l'harmonique trois  $3\omega_1$  étant proportionnelle à  $U_1^3$ , est plus clairement visible que  $3\omega_2$ . En effet, le rapport  $\frac{U_1\omega_1}{U_2\omega_2} \approx 1,5$ , élevé au cube, est favorable à  $3\omega_1$  ; l'atténuation supérieure à la pulsation  $\omega_2$  ne fait qu'accentuer cette tendance. De même, la composante centrée à  $2\omega_1 + \omega_2$  est plus marquée que celle centrée à  $2\omega_2 + \omega_1$ .

Les conditions expérimentales étant telles (distance plaque-barrette et amplitude à la source peu précises) qu'une étude quantitative s'avère délicate, nous n'avons pas insisté dans cette voie, d'autant plus que cette configuration expérimentale permet difficilement d'envisager des applications. Nous avons choisi de nous intéresser aux caractéristiques de la propagation non-linéaire des ondes de cisaillement, en tentant de vérifier les prévisions des modèles existant.

---

<sup>10</sup>Le coefficient qui pondère le terme dissipatif de l'équation (3.38),  $\frac{\eta\omega}{2\mu}$ , est de l'ordre de  $5.10^{-2}$ . Il serait donc justifié de négliger ce terme dissipatif (alors que les expériences montrent que l'atténuation est importante), devant les autres termes non-linéaires (pondérés par  $\beta_T M^2$ ).

### 3.2.2 Couplage et diffraction

#### 3.2.2.1 Équations couplées à l'ordre 3

Le système d'équations de propagation non-linéaire (1.112a) et (1.112b) est obtenu en se limitant à l'ordre trois en constantes élastiques, c'est-à-dire à l'ordre deux en gradient des déplacements. Il s'obtient à partir de (1.110) (ou (1.109)) en décomposant le déplacement en ondes planes :  $\mathbf{U}(z, t) = \mathbf{U}_x + \mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z$ .

Un système d'équations analogue peut être obtenu en conservant le dernier terme de (1.109) (terme de non-linéarité cubique). Les symétries du milieu permettent là encore de diminuer le nombre de constantes élastiques indépendantes du quatrième ordre. Cependant, pour étudier les effets de couplage entre les polarisations, les équations aux deuxième ordre pour la composante longitudinale sont suffisantes (les termes de couplage sont déjà présents et ceux d'ordre supérieur sont négligés).

Dans le cas particulier des solides mous, Zabolotskaya [134] reprend les résultats du système d'équations couplées quadratique (voir § 1.3.3.2) et les étend à l'ordre supérieur en construisant un système d'équations qui tient compte des termes de couplage L/T et de la non-linéarité cubique des ondes transverses. Elle montre que la composante longitudinale peut être également négligée (à un moindre degré d'approximation) dans ces matériaux, du fait des valeurs relatives des modules de compression et de cisaillement. On peut alors écrire deux équations d'ordre trois portant sur les polarisations transverses, en ayant justifié l'omission de l'autre composante :

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -\frac{\beta_T}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial z} \right)^3 + \frac{\partial U_i}{\partial z} \left( \frac{\partial U_j}{\partial z} \right)^2 \right], \quad \text{avec } i, j = x \text{ et } y. \quad (3.43)$$

Ce système de deux équations permet d'étudier l'influence de la polarisation du déplacement transversal [134], [127]. Le cas général d'une polarisation elliptique se réduit ensuite aux polarisations circulaires et rectilignes. La polarisation rectiligne nous ramène au cas du paragraphe précédent (distorsion d'une onde plane transverse pure). Pour une polarisation circulaire, la symétrie du système est telle qu'aucune distorsion ne survient sur les deux composantes du déplacement. Le système d'équation se simplifie pour être à nouveau linéaire : chaque équation (sur  $U_x$  ou  $U_y$ ) est de la forme de (3.40) (sans viscosité), avec  $v_0^2$  à la place de  $v^2$ . Par contre un décalage de phase apparaît (par rapport à la propagation linéaire) : la vitesse de l'onde varie proportionnellement à  $\beta_T$  et  $v_0^2$ . Ce phénomène est intéressant puisqu'il constitue un exemple d'onde d'amplitude finie se propageant sans distorsion et que d'autre part, la mesure d'un décalage de phase (en fonction de l'amplitude d'émission de l'onde) est relativement aisé à réaliser. Par contre, la source de polarisation circulaire est plus délicate à mettre au point. Enfin pour une polarisation elliptique, la forme des deux composante est très différente, elle dépend du rapport des amplitudes à la source.

### 3.2.2.2 Diffraction, deuxième harmonique transversale

Pour prendre en compte simultanément les différentes composantes du champ en conservant leurs variations spatiales  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ , il faut recourir à des approximations sur les ordres de grandeur respectifs des différentes composantes du déplacement  $U$ , ainsi que sur leurs variations en fonction des différentes coordonnées.

A l'ordre deux, il est ainsi possible de découpler les équations de propagation des ondes longitudinales et transversales. Si seule une onde longitudinale est émise, les composantes L et T du champ en perturbation<sup>11</sup> peuvent être prises sous la forme (on omet les vecteurs unitaires) :

$$\mathbf{U} = MU_z + M\sqrt{M}(U_x + U_y), \quad (3.44)$$

où  $U_z$ ,  $U_x$  et  $U_y$  sont des fonctions, d'une part, du temps retardé  $\tau = t - z/V_L$ , on exprime alors le déplacement dans le référentiel lié à l'onde, et d'autre part, des coordonnées lentes  $z' = Mz$ ,  $x' = \sqrt{M}x$  et  $y' = \sqrt{M}y$ , on formule ainsi l'hypothèse selon laquelle le déplacement est une fonction lentement variable des coordonnées d'espace (le changement de variable entraîne que les dérivées par rapport à  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$  sont pondérées respectivement par  $M\sqrt{M}$  et  $M$ ). Ce choix assure que les composantes transverses  $U_x$  et  $U_y$ , éventuellement générées par les termes non-linéaires (croisés) de l'équation, sont des perturbations du champ d'amplitude finie plus faibles que  $U_z$ . Dans les directions transverses à la direction de propagation, on s'attend à ce que les variations spatiales de  $U$  soient plus importantes, d'où l'emploi des coordonnées  $x'$ ,  $y'$  (en  $\sqrt{M}$ , donc correspondant à des variations plus rapides suivant  $x$  et  $y$  que suivant  $z$ ). Cette méthode aboutit à une équation du type KZK (diffraction, dissipation et non-linéarité quadratique, voir équation (1.80) au paragraphe 1.2.3.3) pour une onde longitudinale dans un solide isotrope<sup>12</sup>.

Si l'onde émise est purement transverse, l'approximation suivante peut être adoptée<sup>13</sup> :

$$U = \sqrt{M}(U_x + U_y) + MU_z, \quad (3.45)$$

avec  $U$  toujours fonction de  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$ , mais cette fois de  $\tau = t - z/V_T$ . Les termes de l'équation d'onde, qui font intervenir la composante  $U_z$  sont négligés devant ceux portant sur  $U_x$  et  $U_y$  (car leur ordre de grandeur est une puissance plus élevée de  $M$ ). L'équation obtenue, prend donc en compte la non-linéarité cubique, la diffraction, la viscosité et le couplage entre les deux composantes transverses, mais néglige le couplage avec la composante  $U_z$  (donc son apparition) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau \partial z} - \frac{V_T}{2} \Delta_{\perp} U_i - \frac{F}{2\rho_0 V_T^5} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U_i}{\partial \tau} \frac{\partial U_j}{\partial \tau} \frac{\partial U_j}{\partial \tau} \right) - \frac{\eta}{2\rho_0 V_T^3} \frac{\partial^3 U_i}{\partial \tau^3} \\ = & \frac{\mu + A/4}{2\rho_0 V_T^3} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U_j}{\partial a_i} \frac{\partial U_j}{\partial \tau} + \frac{\partial U_i}{\partial a_j} \frac{\partial U_j}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial U_i}{\partial \tau} \frac{\partial U_j}{\partial a_j} \right) + \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial \tau} \frac{\partial U_j}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial U_i}{\partial \tau} \frac{\partial U_j}{\partial \tau} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

<sup>11</sup> $U$  est ici la perturbation de la solution linéaire (il correspond donc au terme noté  $U^{II}$  dans la résolution en perturbation du paragraphe 1.4.2).

<sup>12</sup>Pour une onde plane, ce résultat est plus direct : voir § 1.3.3.2.

<sup>13</sup>La solution proposée par Lardner [128] est celle du système d'équations couplées, obtenu grâce à l'approximation suivante :  $U = MU_x + M^2 U_z$ , doublée pour la résolution, d'une méthode en perturbation.

avec  $i$  et  $j$  à remplacer  $x$  et  $y$ , correspondant aux directions 1 et 2 (avec sommation d'indice) ;  $a_x$  et  $a_y$  correspondant aux coordonnées  $x$  et  $y$ , et  $F = \frac{\lambda}{2} + B + G + \frac{A}{2} + \mu = \frac{\mu\beta_T}{3}$ <sup>14</sup>.

Cette équation est résolue (sans viscosité!) pour une onde incidente polarisée suivant  $x$ , dont la distribution spatiale dans le plan  $(x, y)$  est Gaussienne. La solution est mise sous la forme d'une série d'harmoniques (paires et impaires). La résolution du problème linéaire donne l'évolution de l'amplitude du fondamental (décroissance et élargissement du profil). La troisième harmonique, également polarisée suivant  $x$ , présente des caractéristiques similaires. La résolution fait également apparaître une seconde harmonique polarisée suivant  $y$ , c'est-à-dire perpendiculairement à la polarisation de la composante fondamentale. Nous présentons en annexe F une évaluation numérique des solutions établies dans cet article.

Cette solution ne fait pas partie des cas d'interaction possible donnés par Jones [46] (dans le cadre de l'approximation du second ordre, l'interaction de deux ondes transversales ne peut donner naissance qu'à une onde longitudinale) ou Zarembo [34] (les seules conditions d'accord de phase rendent possible l'interaction de deux ondes planes transversales colinéaires, mais sans changement de polarisation). Zarembo rapporte des observations de ce phénomène (apparition de deuxième harmonique transverse, sans préciser la polarisation) sur un cristal d'aluminium en fonction de la charge statique de l'échantillon. Il attribue l'origine de la génération de seconde harmonique transverse à la présence de défauts ou de dislocations, que l'application d'une contrainte est connue pour accentuer. Il s'agirait donc de savoir, comme on peut tenter de le faire pour les phénomènes induits par la non-linéarité quadratique, si ces effets sont inhérents à la propagation ou s'ils sont spécifiquement causés par les défauts.

Zabolotskaya envisage trois possibilités pour la génération de seconde harmonique transverse :

- Elle précise que l'interaction des différentes composantes (impaires) du champ, par l'intermédiaire d'un terme quadratique peut donner lieu, même pour des ondes planes, à une fréquence double (comme par itération de la résolution en perturbation).
- La solution développée dans cet article, et évoquée plus haut, fait intervenir la diffraction du faisceau et le couplage des polarisations : pour une onde incidente polarisée rectiligne, mais non-plane, l'apparition de deuxième harmonique est possible. Par le même mécanisme, deux polarisations transverses dont les variations en fonction des coordonnées  $(x, y)$  (dans le plan de polarisation) sont quelconques pourrait également donner lieu à l'apparition d'une fréquence double.
- Elle rappelle également les résultats de Charnaya, qui montre, en introduisant des inhomogénéités des constantes élastiques ou de contraintes (de dimensions très inférieures à la longueur d'onde), que la génération de deuxième harmonique est possible pour une onde transversale incidente, dans le cadre de l'approximation quadratique [135].

Les termes quadratiques proviennent du couplage entre les polarisations, mais pas du Laplacien de  $U_x$ . La génération d'une seconde harmonique transverse (telle qu'elle apparaît théoriquement)

---

<sup>14</sup>A partir des modules définis dans la référence [43], on prend  $D = 0$ , car ce n'est pas le même coefficient dans les deux développements, et  $G$  reste inchangé.

est donc un effet (combiné) de diffraction en régime non-linéaire. La diffraction rend compte des variations de la distribution spatiale des champs (dans les plans perpendiculaires à l'axe de propagation), qui peuvent exister pour une onde transversale polarisée rectiligne, mais les seuls effets de diffraction ne peuvent donner lieu à génération de seconde harmonique transversale. Le couplage non-linéaire est quant à lui lié à la présence de plusieurs composantes  $T$  dont ces mêmes variations, mais à l'ordre supérieur, sont à prendre en compte (deuxième ligne de l'équation (3.46)). Ces termes ne sont non nuls que si les deux polarisations possèdent des dérivées non nulles par rapport aux variables  $x$  et  $y$  (tous les termes de la deuxième ligne comprennent au moins une dérivée par rapport à  $x$  ou  $y$ ), c'est-à-dire si l'onde n'est pas plane.

### 3.2.2.3 Ondes "quasi-planes"

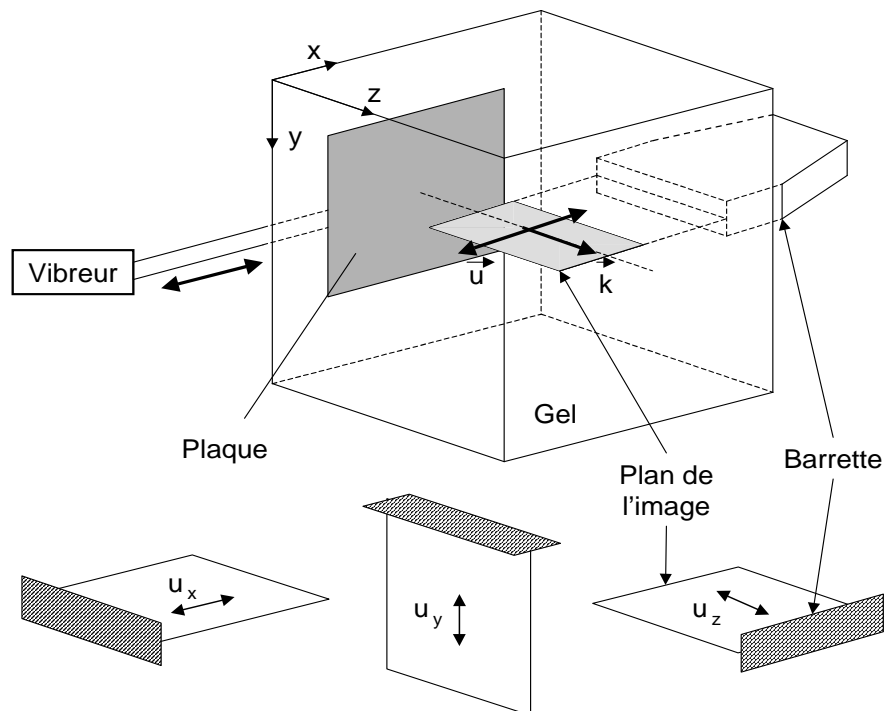


FIG. 3.9 – Positions de la barrette d'imagerie pour accéder aux différentes polarisations.

Nous avons vu qu'une onde plane transverse ne peut, théoriquement, se propager seule. Elle est accompagnée d'une composante longitudinale à la fréquence double, modulée spatialement, dont l'amplitude est très faible dans un solide classique (voir § 1.3.3.2, équation (1.116))<sup>15</sup>.

En plaçant la barrette face à la plaque, nous pensons pouvoir observer cette vibration. Il n'en

<sup>15</sup>Dans le cas d'un gel, la période spatiale de la modulation d'amplitude est cette fois de l'ordre de la longueur d'onde transversale, c'est-à-dire la moitié de la longueur d'onde d'une deuxième harmonique transversale, mais toujours bien inférieure à la longueur d'onde longitudinale

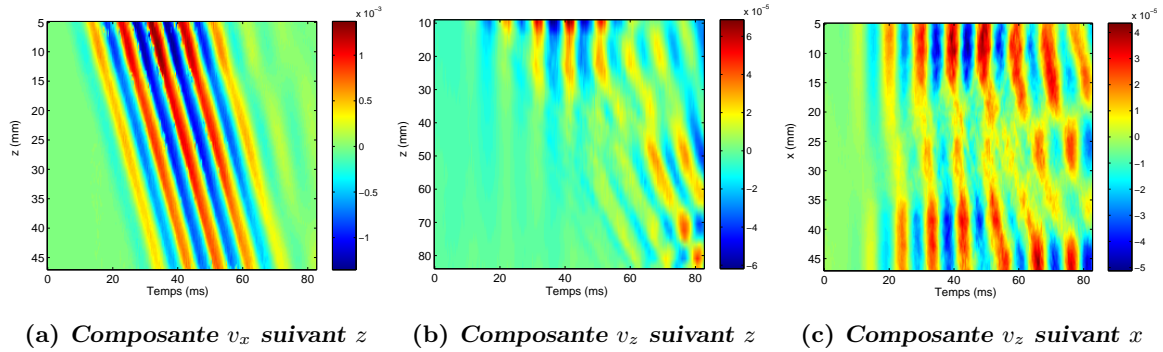


FIG. 3.10 – Scan des composantes de la vitesse de déplacement  $v_x(z)$  ( $\approx 0,5\text{m/s}$ ),  $v_z(x)$  et  $v_z(z)$  ( $\approx 10^{-2}\text{m/s}$ ) (échelle :  $\times 4.10^{-3}\text{m/s}$ ).

est rien car, d'une part le rapport  $\mu/\lambda$  est tel que l'amplitude de ces ondes est très faible et d'autre part la longueur d'onde longitudinale est de l'ordre de 15 mètres à cette fréquence, dans ce type de milieu (équivalent à l'eau pour des ondes longitudinales). La zone dans laquelle les déplacements sont enregistrés est donc de dimension bien inférieure à la longueur d'onde longitudinale (et quoi qu'il en soit cet effet n'est pas cumulatif). Les ordres de grandeurs établis par Zabolotskaya [134] (à partir des coefficients de l'équation différentielle) confirment que cet effet doit être négligeable<sup>16</sup>.

Les différentes positions de la barrette sont représentées sur la figure 3.9. Les figures 3.10 reproduisent les B-scan des vitesses particulières obtenues :  $v_x(z)$  (dans le plan  $(x, z)$ ) lorsque la surface de la barrette est perpendiculaire à  $x$  et  $v_z(z)$  ou  $v_z(x)$  (toujours dans le plan  $(x, z)$ ) lorsque la surface de la barrette est perpendiculaire à  $z$ . La figure 3.10a reproduit bien l'évolution de la composante principale le long de l'axe de propagation. Sur la figure 3.10b, on trace  $v_z$  en fonction de la profondeur  $z$ , en se plaçant sur le "bord" de la barrette, c'est-à-dire pour  $x = 5$  à  $10$  mm (au centre de cette dernière, les déplacements sont très faibles). Une composante longitudinale (dont le temps de vol est quasi constant par rapport à la durée de la fenêtre d'acquisition) semble être présente, mais pour cette dernière les effets non-linéaires sont extrêmement faibles. Enfin sur la figure 3.10c, la composante  $v_z$  est tracée cette fois en suivant une ligne parallèle à la barrette (et à la source) à environ 15 mm de la source. La présence d'une symétrie par rapport au centre de la source peut être attribuée à la diffraction de  $v_x$  ou aux réflexions sur les limites du milieu. Cette composante se propage à la vitesse des ondes de cisaillement et ne semble pas pouvoir être due à un mouvement longitudinal de la source.

Quoi qu'il en soit, la composante  $v_z$  ne contient pas de composante centrée à  $2f_0$ , ce qui confirme que l'effet de couplage L/T mentionné par Gol'dberg ne peut être observé dans nos conditions.

<sup>16</sup>Cependant, l'évaluation numérique de l'amplitude du déplacement longitudinal  $U_1(z)$ , pour une profondeur  $z = (2n+1) \times \lambda_T/4$  ( $n$  entier), telle qu'elle soit maximale, donne  $U_1/U_0 = 0,5$ , où  $U_0$  est l'amplitude de l'onde transversale fondamentale. Les arguments relatifs aux termes de couplage des équations différentielles semblent plus pertinents pour notre configuration expérimentale (onde progressive choquée), la résolution présentée par Gold'berg étant établie en régime harmonique, dans l'approximation de faible non-linéarité.

En revanche, la polarisation imparfaite de l'onde de cisaillement peut expliquer l'évolution non exponentielle de l'amplitude du fondamental observée précédemment (cf. figure 3.6) par interférence des composantes  $v_x$  et  $v_z$ .

Pour observer la dernière composante du champ ( $v_y$ ), il faut placer la barrette perpendiculairement à l'axe  $y$  (figure 3.9). D'autres expériences ont été réalisées (voir en annexe F), toujours avec la même grande plaque pour comparer  $v_x$  et  $v_y$ . L'amplitude de cette dernière est dix fois plus faible que celle de l'onde émise. Les spectres des deux polarisations contiennent des harmoniques paires et impaires. Si le couplage L/T ne peut être évoqué pour les gels, seuls la diffraction et le couplage des polarisations expliqueraient cet effet. Or, pour une onde plane (distribution uniforme de  $v_x$  dans le plan source), aucun effet de ce type n'est à attendre : les dérivées de  $v_x$  (ou  $v_y$ ) par rapport à  $x$  et  $y$  sont nulles et on retrouve l'équation (3.43), qui ne contient que des termes de non-linéarité cubique. On conclut donc que l'uniformité de  $v_x$  dans le plan  $(x, y)$  n'est pas assurée (la présence d'une composante  $v_z$  non nulle va également dans ce sens), auquel cas des termes quadratiques sont à prendre en compte et expliqueraient la présence de fréquence double et d'une polarisation  $v_y$  non nulle.

Ces résultats sont donc délicats à interpréter. Il semble nécessaire de mettre au point un système d'excitation plus robuste qui assure une polarisation linéaire au niveau de la source, ou permette de contrôler une polarisation plus complexe<sup>17</sup>. Théoriquement, autant qu'expérimentalement les effets de couplage et de diffraction sont difficiles à séparer. Les expériences du paragraphe suivant ont été réalisées pour tenter d'isoler les effets de diffraction.

#### 3.2.2.4 Source plane de dimensions finies

Les dimensions de la plaque excitatrice ont été réduites pour tenter d'amplifier les effets de diffraction : une plaque de  $8 \times 8$  cm est prise dans le gel puis fixée au pot vibrant. Cette configuration permet par ailleurs de s'affranchir des conditions aux limites (dimensions du gels), qui ne satisfont pas à l'hypothèse d'un milieu semi-infini. Sans que le profil de la source soit réellement Gaussien, comme dans le modèle de la référence [43], on peut s'attendre à observer des effets quadratiques, puisque les termes de couplage et de diffraction ne sont pas nuls. Pour des longueurs d'ondes de cisaillement comprises entre 10 et 20 mm, le produit  $ka$  de la source est de l'ordre de 10 (il est de l'ordre de 30 pour la grande plaque). La distance de propagation sur laquelle les déplacements sont enregistrés est de l'ordre de quelques longueurs d'ondes.

On observe nettement, sur les figures 3.11 et 3.12, la deuxième harmonique sur la composante  $v_y$  (polarisation perpendiculaire au fondamental). Le fondamental et la troisième harmonique sont également présents sur cette projection (alors que la résolution citée ne le prévoit pas) certainement en raison de leurs amplitudes bien supérieures à celle de  $v_y$ . On pourrait ici également, évoquer une polarisation imparfaite de l'onde de cisaillement : un déplacement non rectiligne de la source.

La forme temporelle de la composante  $v_y$  (figure 3.12b) ne correspond pas à la solution de la référence [43], qui est une onde harmonique à la fréquence double. La superposition du fondamental et de la troisième harmonique ne permet pas d'extraire la deuxième harmonique seule.

<sup>17</sup>Les résultats théoriques, obtenus dans le cas d'une polarisation circulaire, ouvrent une piste intéressante [127].

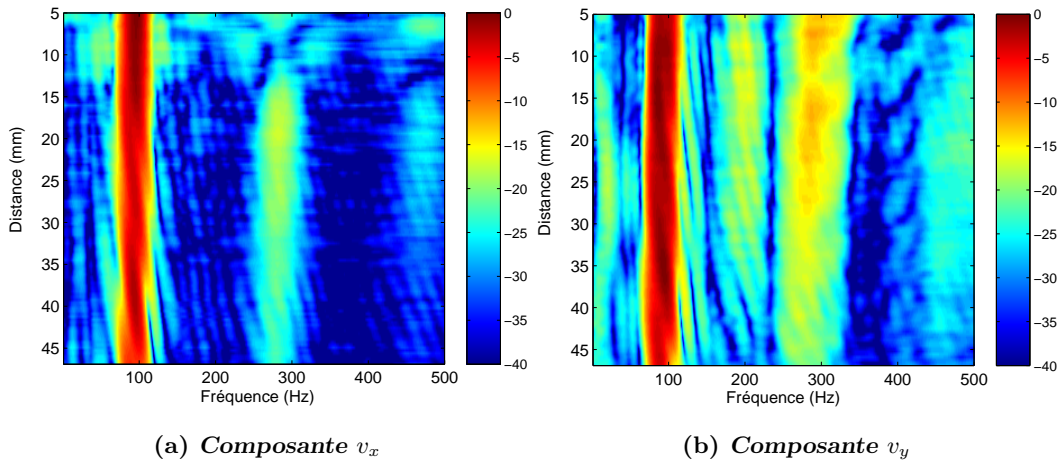


FIG. 3.11 – Source de dimension finie : évolution des harmoniques en fonction de la distance de propagation (amplitudes en décibels par rapport au maximum du fondamental  $v_x$  ou  $v_y$ ).

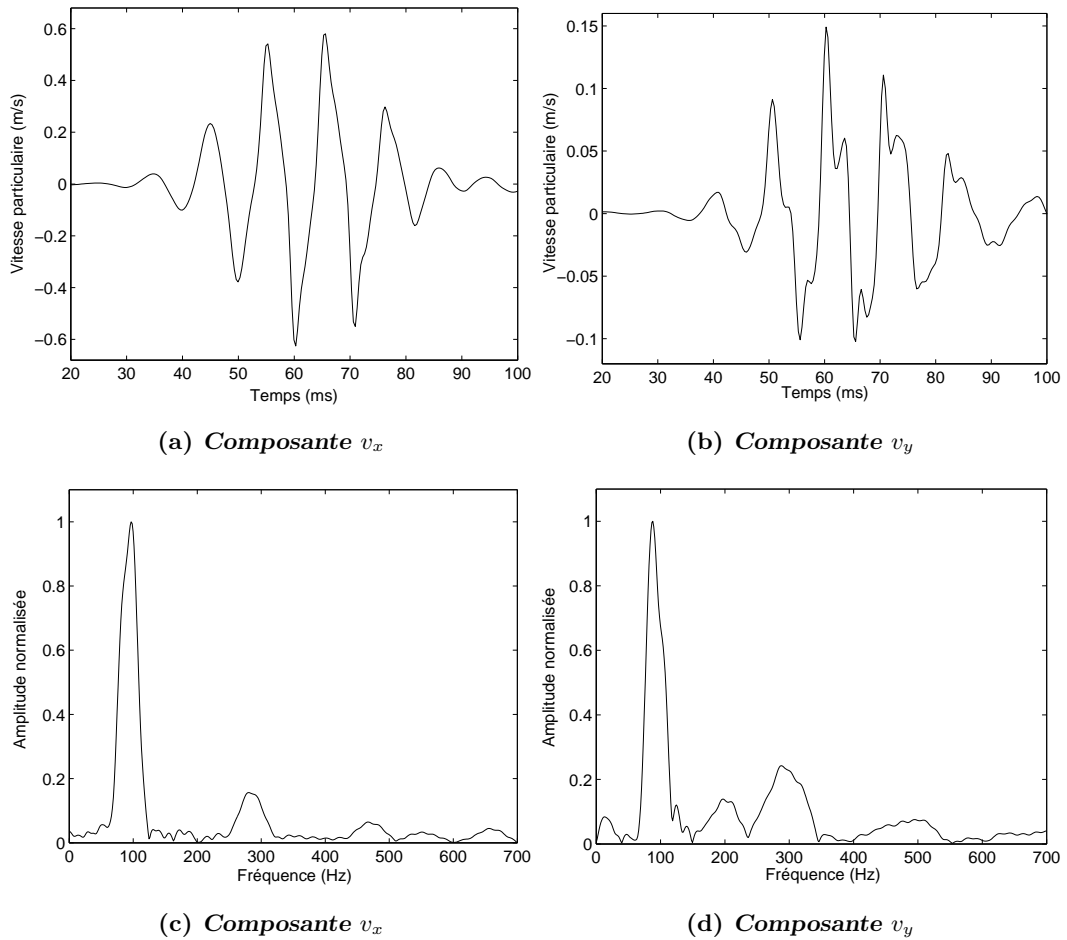


FIG. 3.12 – Source de dimension finie : vitesse et spectre en  $z = 16.5$  mm.

### 3.2.3 Effets de champ proche : palpeur d'élastographie 1-D

L'élastographie 1-D, mise au point au laboratoire [129], [130], exploite également la rétro-diffusion des ultrasons par les diffuseurs présents dans le milieu, qui sont mis en mouvement par un "coup" de basse fréquence. Cette technique bien moins coûteuse que la précédente, puisqu'elle n'utilise qu'un seul capteur, a été appliquée *in vivo* pour mesurer l'élasticité, la viscosité et l'anisotropie des muscles. Son application à l'acousto-élasticité des gels a également permis de mesurer les modules élastiques d'ordre trois. Nous nous sommes intéressés aux possibilités que ce dispositif offre dans le cas dynamique : un coup de forte amplitude permettrait-il d'évaluer les propriétés non-linéaires d'un solide mou (sans appliquer, comme en acousto-élasticité, une contrainte statique) ?

Dans le cas de l'élastographie impulsionnelle 1-D, la source peut être une barre (voir figure 3.13), perpendiculaire à l'axe du pot vibrant<sup>18</sup>. L'impulsion délivrée par ce dernier correspond donc à une poussée axiale et non à un cisaillement direct, comme dans le cas de la plaque. La déformation qui en résulte se compose d'une composante de compression et d'une composante de cisaillement polarisée perpendiculairement à la barre (et à l'axe de propagation). Ces deux composantes du champ de déformation sont couplées. Les dimensions de cette source et les vitesses de propagation sont telles

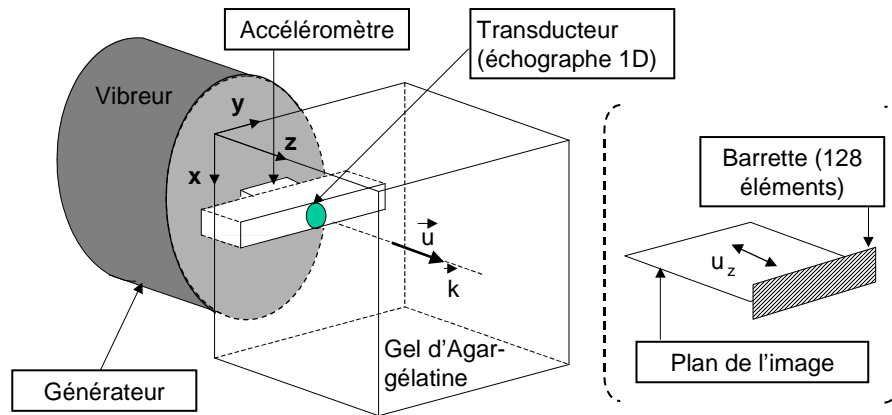


FIG. 3.13 – Dispositif expérimental dans le cas de la source 1D.

que la zone de mesure se trouve dans le champ proche (à quelques longueurs d'onde de la source). Les caractéristiques (polarisation, directivité) sont bien décrites (dans le cas linéaire) par les fonctions de Green [121]. Dans le cas d'un milieu élastique isotrope, l'opérateur de propagation est composé de trois termes. Deux d'entre-eux correspondent aux ondes de compression et de cisaillement : on ne conserve que ces derniers dans le cas du champ lointain. Le troisième traduit le couplage qui intervient entre ces deux composantes dans le champ proche de la source. Lorsque la distance de propagation est de l'ordre de la longueur d'onde, les deux polarisations ne sont pas séparées. La barre d'élastographie 1D est donc une source d'onde de cisaillement plus complexe. Dans son champ proche le couplage des déplacements donne naissance à une onde de polarisation "longitudinale" ( $u_z$ ), dans le sens où les déplacements sont colinéaires à la direction de propagation, mais qui se propage

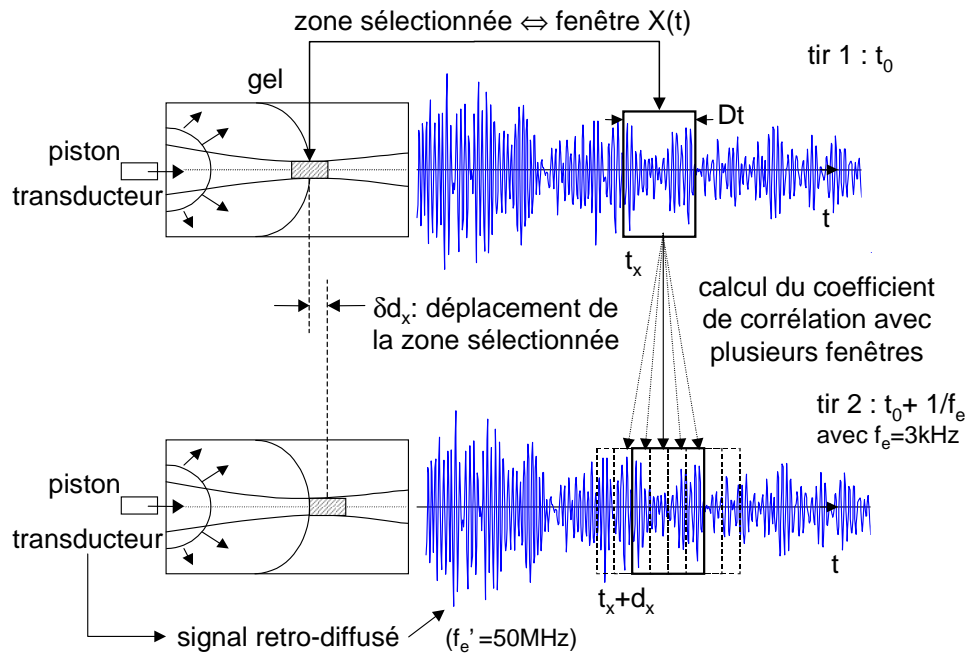


FIG. 3.14 – Mesure des vitesses de déplacement par corrélation des signaux rétro-diffrusé.

à la vitesse des ondes transversales. C'est cette composante qu'enregistre l'élastographe 1D.

La figure 3.14 [121] illustre le traitement des signaux effectué pour calculer les déplacements sur l'axe d'un seul transducteur (en fonction de la profondeur). Cette situation correspond à l'élastographie 1D, mais la procédure est similaire à deux dimensions (pour l'imagerie ultra-rapide). Prenons les signaux reçus par le transducteur<sup>19</sup> pour deux tirs successifs (dont la récurrence est de 3 kHz). Une fenêtre d'environ 100 points permet de sélectionner la profondeur ( $z$ , sur la figure 3.13) à laquelle les déplacements seront calculés. On effectue alors la corrélation des deux fenêtres acquises successivement (à la fréquence de répétition des tirs ultrasonores du transducteur). Le décalage pour lequel cette corrélation est maximale correspond à la distance parcourue suivant  $z$  par les diffuseurs entre les deux tirs ultrasonores (ou, plus précisément, au temps mis pour parcourir cette distance, que l'on convertit grâce à la vitesse des ondes reçues par la barrette : 1500 m/s et la fréquence d'échantillonnage des voies : 50 MHz). La grandeur physique mesurée est donc un déplacement relatif des diffuseurs effectué pendant le laps de temps compris entre deux tir ultrasonores, soit une vitesse de déplacement (ce n'est donc pas un déplacement au sens des coordonnées d'Euler)<sup>20</sup>.

En décalant la fenêtre de quelques points, on sélectionne une autre profondeur  $z$ . Dans le cas 2D, une itération de cet algorithme sur toutes les lignes des images échographiques donne le champ des vitesses particulières dans un plan. La version mono-dimensionnelle fournit donc la vitesse de déplacement le long d'une ligne suivant la profondeur (l'axe du capteur, voir figure 3.13).

<sup>18</sup>Le coup d'excitation de basse fréquence peut plus simplement être donné par la surface émettrice du transducteur ; la barre permet de polariser préférentiellement les déplacements.

<sup>19</sup>Dans le cas 2D, on considère une zone de la barrette, voir figure 3.3.

<sup>20</sup>L'élastographie statique mesure réellement un déplacement (entre deux états de contrainte de l'échantillon). Dans le cas de l'élastographie dynamique, il faut tenir compte de la fréquence de l'imager pour calculer une vitesse (il faudrait sinon cumuler les déplacements).

### 3.2.3.1 Génération d'harmoniques

Des expériences de génération d'harmoniques nous ont permis de caractériser le champ émis par cette source. Pour la composante  $v_z$  (composante principale du champ de vitesse), nous présentons les résultats obtenus avec l'élastographe 1D. Pour cette même composante, et dans le cas de l'interaction d'onde, des expériences ont été réalisées avec le dispositif d'imagerie, (la barrette est placée en face de la barre). Sur la figure 3.15, on observe que le profil est différent de celui des ondes de cisaillement des paragraphes précédents. Le spectre comporte des harmoniques paires et impaires. La profondeur de pénétration des ondes émises par cette source est plus faible que dans le cas des ondes planes, du fait de la divergence du faisceau autant que de l'atténuation (la tension d'excitation du pot vibrant est du même ordre pour la plaque et la barre). La présence d'harmoniques paires n'est pas surprenante, du fait de la taille réduite de la source qui implique de forts effets de diffraction.

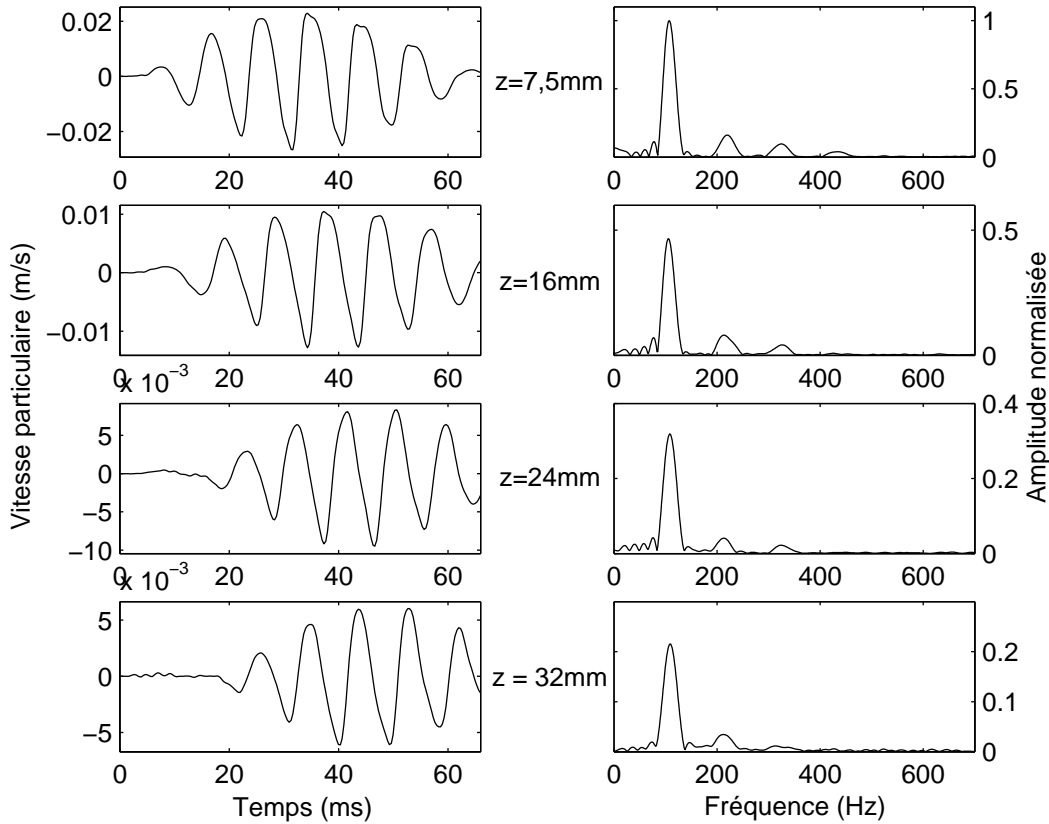


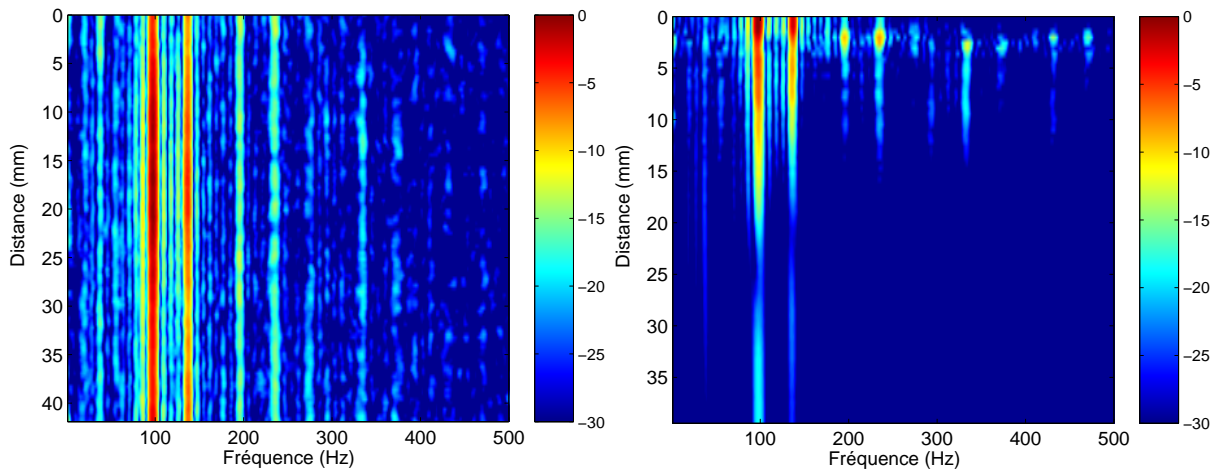
FIG. 3.15 – Source 1D génération d'harmonique : composante axiale  $v_z$ , et son spectre, en fonction de la distance de propagation  $z$ . Le signal fourni par le capteur de force et son spectre sont représentés sur la première ligne ( $z = 0\text{mm}$ ).

Pour les polarisations ( $v_x$  et  $v_y$ ), perpendiculaires à l'axe de propagation (voir l'annexe F pour les figures), nous avons utilisé l'échographe 2D dans les deux premières positions schématisées sur la figure 3.9. Sur l'axe du transducteur, les déplacements sont très faibles et augmentent lorsqu'on s'en écarte (suivant  $x$  ou  $y$ ). La composante la plus grande est  $v_x$ , c'est-à-dire la polarisation

perpendiculaire à la barre ; elle est au plus de l'ordre de  $v_z$ . On retrouve là des caractéristiques de la propagation linéaire : du fait de sa symétrie, la poussée de cette barre se traduit par une déformation du gel dans une direction privilégiée. Pour observer des composantes transversales non nulles, il faut se placer en dehors de l'axe  $z$  : sur cet axe on ne peut observer que la composante axiale. Les trois polarisations présentent une certaine similitude, elles comprennent toutes les trois des harmoniques paires et impaires.

### 3.2.3.2 Interaction d'ondes

L'interaction d'ondes a également été étudiée. La composante axiale  $v_z(x, z)$  est enregistrée avec la barrette d'imagerie en face de la barre (voir figure 3.13). Avec l'imageur, la précision est meilleure au voisinage immédiat de la source, alors qu'avec l'élastographe 1D le bruit est important pour  $z < 5$  mm (Le fait que le transducteur suive le mouvement de la barre de pendant la durée de l'excitation pourrait être en cause). barre interaction, barrette en face,



(a) *Suivant la direction  $x$ , parallèle à la barre.* (b) *Suivant la direction de propagation (et de polarisation)  $z$ , perpendiculaire à la barre.*

FIG. 3.16 – Source 1D : évolution des harmoniques et des produits de l'interaction dans les directions parallèle et perpendiculaire au déplacement (amplitudes en décibels par rapport au maximum du fondamental  $v_x$ ).

Comme pour la génération d'harmoniques, on voit apparaître des composantes dont les fréquences correspondent à celles produites par une non-linéarité quadratique. La distorsion du profil présente des caractéristiques comparables. Sur la figure 3.16, sont présentés les spectres de la vitesse de déplacement. On vérifie, grâce au tracé en fonction de  $x$  (3.16a) effectué à  $z = 5$  mm de la barre, que les déplacements engendrés sont uniformes suivant la largeur de la barrette. En fonction de  $z$  (3.16b), et en moyenne sur une zone centrale de la barrette d'imagerie, on observe une décroissance rapide des différentes composantes, du fait de la divergence du faisceau et de l'atténuation.

On trace sur la figure 3.17 l'évolution des harmoniques en fonction de la distance de propagation : elles sont importantes dans une zone proche de la source (à moins de 15 mm). Les combinaisons de fréquences "quadratiques" (deuxième harmonique et fréquences somme et différence) sont du même ordre que les combinaisons cubiques. Dans cette configuration, la surface de la source est beaucoup plus faible que celle de la plaque, on répartit donc une énergie comparable (la tension d'excitation du vibreur est du même ordre) sur une surface plus faible, ce qui explique que l'amplitude des harmoniques soit plus élevée dans cette configuration (par rapport aux ondes planes). Par contre, la divergence du faisceau diminue d'autant la profondeur de pénétration.

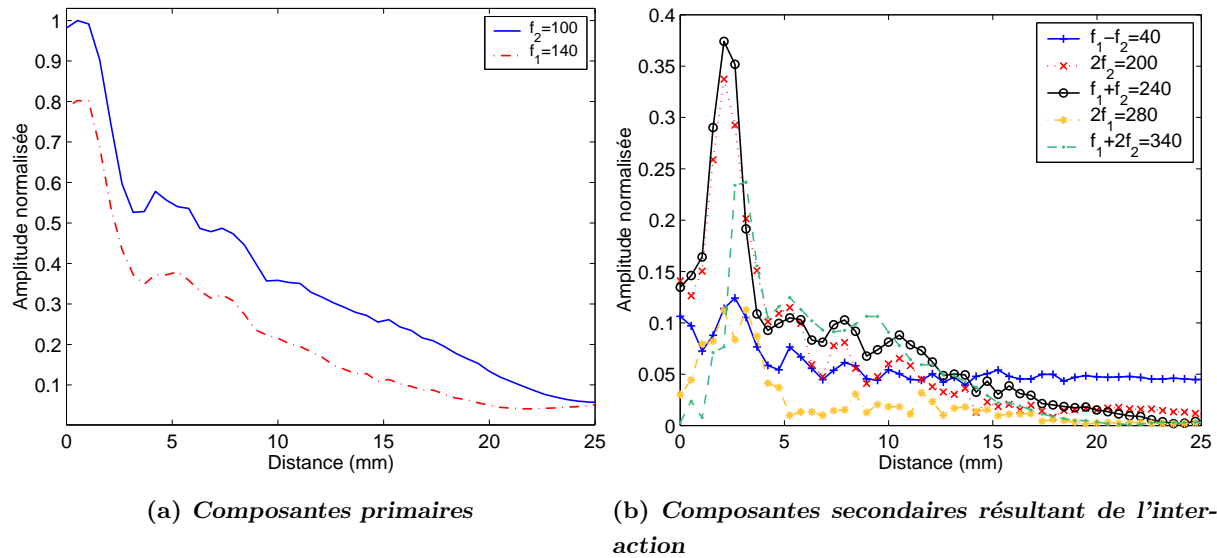


FIG. 3.17 – Source 1D : évolution des harmoniques et des produits de l'interaction en fonction de la distance de propagation (amplitudes normalisées par rapport au maximum du fondamental  $v_x$ ).

On relie ces observations aux conclusions théoriques données plus haut : diffraction et couplage des polarisations sont liés. La déformation induite par la source 1-D ne peut pas être qualifiée de compression ou de cisaillement, il s'agit d'une caractéristique du champ proche. On retrouve donc les effets non-linéaires relatifs aux deux types de polarisation. Par ailleurs, nous avons vu qu'en prenant en compte les déformations à l'ordre trois et plus, il est difficile de distinguer formellement compression et cisaillement (ni les combinaisons d'invariants ni les modules élastiques ne peuvent être rattachés à un type de déformation).

Au stade actuel, les expériences d'acousto-élasticité permettent d'obtenir les modules de Landau à l'aide de l'élastographe 1D. Il semble difficile d'extraire des valeurs de ces paramètres à partir des expériences présentées ci-dessus. Si la modélisation des effets de diffraction et d'atténuation semble accessible pour des ondes planes, dans le cas des mesures 1D, la situation est plus complexe puisqu'il faut conserver les termes de champ proche. La résolution à l'aide des fonctions de Green donne de bons résultats dans le cas linéaire, une adaptation au cas non-linéaire pourrait être développée en suivant Jones et Kobett [46]. Un modèle donnant par exemple la position (suivant la profondeur  $z$ ) du maximum d'amplitude pour chaque composante fréquentielle pourrait être facilement comparé à nos mesures.

## Conclusion et perspectives

Le modèle de solide mou incompressible décrit fidèlement la réponse élastique des gels (il présente également l'intérêt de réduire le nombre de constantes nécessaires à la caractérisation du matériau). Il permet d'établir plus simplement les équations de propagation relatives aux ondes transversales. On peut alors exploiter les résultats expérimentaux à l'aide de ces modules élastiques spécifiques au cisaillement ( $\beta_T$  est fonction de  $\mu$ ,  $A$  et  $D$ ) et se dispenser ainsi d'une mesure précise des modules de compression. On notera cependant qu'il est toujours possible d'exprimer le module  $D$  en fonction des constantes élastiques, ou des modules de Landau du solide compressible. Les modules élastiques ne sont pas des coefficients indépendants, ils sont introduits mathématiquement (comme des paramètres d'ajustement) dans le développement de Taylor de l'énergie élastique, dans lequel ils pondèrent les différents ordres de grandeur des déformations. Jusqu'à l'ordre deux, et dans un système de constantes donné (par le choix de la variable déformation), il est possible d'attribuer à chaque terme de l'énergie (et du coup à chaque constante) un sens physique : compression ou cisaillement, déformation longitudinale ou transverse. A partir de l'ordre trois, les relations entre les modules relatifs au cisaillement et à la compression mettent en évidence que les dérivées de l'énergie par rapport aux différentes combinaisons d'invariants (du tenseur des déformations de Lagrange) ne sont pas indépendantes.

Nous avons pu illustrer, grâce au dispositif d'imagerie ultra-rapide, certaines prévisions théoriques concernant la propagation non-linéaire des ondes de cisaillement. Les ondes planes transverses sont régies par une équation non-linéaire dont le terme source est cubique. Les expériences en ondes planes permettent d'observer l'apparition d'harmoniques impaires seulement. Pour l'interaction d'onde, il apparaît des combinaisons de fréquences du type  $2\omega_{1,2} \pm \omega_{2,1}$ . L'accord avec le modèle de l'équation de Burgers modifié peut être obtenu si les conditions expérimentales sont bien maîtrisées (polarisation rectiligne, alignement de la barrette, vitesse particulière de la source). Il est satisfaisant qualitativement et a déjà permis d'estimer le coefficient de non-linéarité relatif aux ondes transverses.

La prise en compte des dimensions finies de la source, ajoute des termes non-linéaires quadratiques dans l'équation d'onde. Ces termes couplent les différentes polarisations du champ et induisent la génération d'une deuxième harmonique transversale, polarisée perpendiculairement au fondamental. Les expériences réalisées, avec une source plane de dimension réduite et avec le palpeur d'élastographie 1D (barre), mettent en évidence ces effets. Si, pour les deux configurations expérimentales, l'apparition de la deuxième harmonique peut être attribuée au couplage des polarisations, ces deux cas doivent néanmoins être distingués. Pour la source plane, la fréquence double n'est présente que sur la polarisation perpendiculaire (comme le prévoit le modèle de Zabolotskaya) alors que, pour la source en forme de barre, cette deuxième harmonique est présente sur toutes les composantes du champ. Cette observation illustre les effets de champ proche dus à la source 1D, qui couplent les déformations de cisaillement et de compression. Enfin, les expériences réalisées avec le palpeur 1D montrent des effets non-linéaires importants et permettent d'envisager des études qualitatives.



## Chapitre 4

# Mesure de fortes pressions, contrainte de radiation

Les possibilités de l'interférométrie optique, appliquée à la détection de déplacement mécaniques (sans parler des applications de génération d'ultrasons par excitation laser), sont bien connues, [136], [137], [138]. Leur utilisation principale est la mesure absolue des déplacements induits par des ondes ultrasonores dans l'eau comme à la surface des solides. La propagation des ondes de surface peut également être suivie avec précision [139].

Cette technique exploite l'effet Doppler subit par le faisceau lumineux à sa réflexion sur une surface vibrante sous incidence normale. La variation de chemin optique induite par le mouvement d'un réflecteur plan produit une modulation de phase<sup>1</sup> proportionnelle à ce déplacement :

$$\phi(t) = 2Kn_0u(t), \quad (4.1)$$

où  $n_0$  est l'indice de réfraction du milieu,  $K = 2\pi/\Lambda$  le nombre d'onde du laser, avec  $\Lambda = 633$  nm pour un laser He-Ne. L'incidence normale et l'hétérodynage du faisceau sonde permettent l'utilisation d'un montage optique peu encombrant mis au point par D. Royer.

La mesure des coefficients de non-linéarité nous a donné l'occasion d'utiliser cette technique pour calibrer des transducteurs de contact dans le domaine du mégahertz. Dans le cas de fortes pressions acoustiques, les modulations de phase atteignent plusieurs dizaines de radians ; il faut donc adapter le traitement (analogique ou numérique) des signaux. Nous présentons d'abord les deux montages optiques (à simple et double hétérodynage) utilisés pour la mesure de fortes pressions acoustiques. Nous exposons ensuite une évaluation des limites (en terme d'indice de modulation maximal accessible) de cette méthode de mesure, reposant sur l'extraction d'une modulation de phase. Nous avons montré, comme pour les mesures de coefficients de non-linéarité dans les solides<sup>2</sup>, qu'il est possible d'utiliser une démodulation numérique pour traiter les signaux de l'interféromètre. Pour cela, différents programmes de démodulation ont été étudiés et améliorés. Nous comparons leurs résultats et ceux obtenus avec le circuit analogique existant. Enfin, nous analysons l'effet de la membrane et rappelons le rôle de l'interaction acousto-optique dans la mesure.

---

<sup>1</sup>On présente le plus souvent cet effet comme la variation de fréquence perçue, induite par le mouvement relatif d'une source et d'un observateur.

<sup>2</sup>Il s'agit alors de modulations de phase de très faible amplitude.

La possibilité de mesurer de très faibles déplacements nous a permis de mener quelques expériences sur la contrainte de radiation dans les solides. Ce phénomène est bien compris et d'ors et déjà appliqué dans les fluides. On distingue notamment le vent acoustique (streaming), qui résulte principalement de l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation et qui se traduit par un écoulement continu, de la pression de radiation, qui se traduit par une force de poussée s'exerçant sur un objet immergé ou une interface. Cette dernière a également pour origine l'atténuation (dans les fluides et les solides mous), mais aussi les non-linéarités qu'on retrouve dans l'équation d'onde (locale, thermodynamique). Les descriptions théoriques de la contrainte de radiation dans les solides restent un sujet de discussion. Peu de résultats expérimentaux permettent de départager les nombreux effets : champ proche ou lointain, milieu confiné ou ouvert, choix des coordonnées (spatiales ou locales) et des conditions aux limites, ainsi que la prise en compte ou non de l'atténuation ou encore de la non-linéarité.

#### 4.1 Interférométrie laser appliquée à la mesure de fortes pressions

Pour mettre au point, essayer ou calibrer les appareils de thérapie ultrasonore (lithotritie, hyperthermie), il est nécessaire de caractériser des champs acoustiques de forte intensité. Différentes méthodes ont été développées au cours des trente dernières années : hydrophones piézoélectriques, hydrophones à fibre optique (effet piezo-optique), interféromètres laser-Doppler.

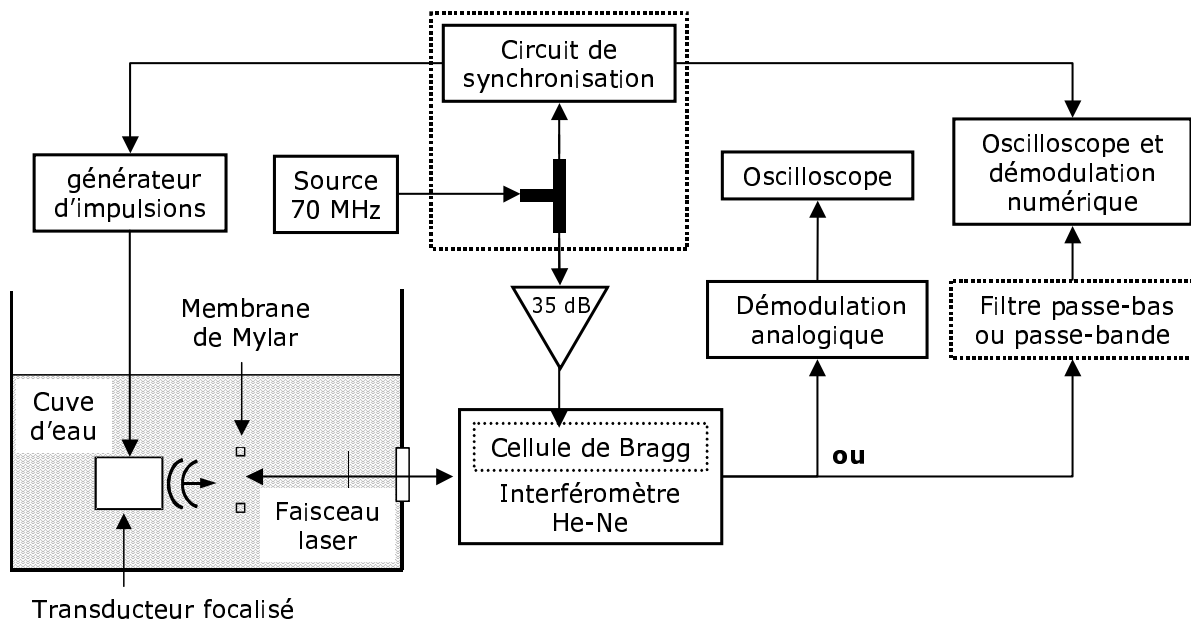


FIG. 4.1 – Dispositif expérimental de mesure de champs acoustiques de forte intensité. Le dispositif de synchronisation ainsi que le filtrage, encadrés en pointillés, ne sont pas utilisés systématiquement.

Le schéma de la figure 4.1 reproduit la configuration expérimentale typique. Une fine membrane réfléchissante (en Aluminium, d'épaisseur  $12\ \mu\text{m}$  ou en Mylar, d'épaisseur  $5$  ou  $15\ \mu\text{m}$ ) est placée dans la cuve, face au transducteur étudié. Les déplacements sont motorisés et les acquisitions automatisées pour amener le centre de la tâche focale sur la membrane et effectuer un scan. Le dispositif de synchronisation (encadré en pointillé) peut être utilisé avec une démodulation numérique, pour acquérir et réaliser des moyennes sur la porteuse<sup>3</sup>. Le transducteur utilisé lors de toutes les expériences présentées dans cette section est un capteur focalisé de fréquence centrale  $2,5\ \text{MHz}$ , de diamètre  $50\ \text{mm}$  et de focale  $40\ \text{mm}$ . Il est excité par un générateur d'impulsions (Sofranel 5077PR), qui délivre un créneau de tension de  $100$  à  $400\ \text{V}$  d'amplitude (et de durée adaptable à la fréquence du transducteur).

#### 4.1.1 Sondes interférométriques à simple et double hétérodynage

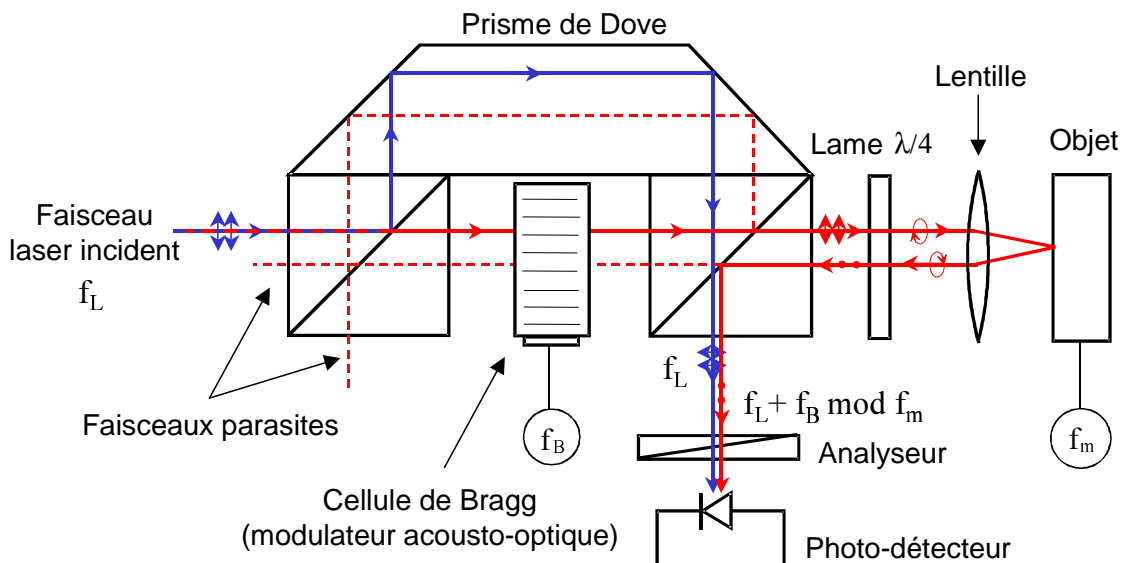


FIG. 4.2 – Schéma du montage optique de l'interféromètre hétérodyne à simple hétérodynage [100].  $f_L$ ,  $f_B$  et  $f_m$  sont respectivement les fréquences du laser ( $\approx 10^6\ \text{MHz}$ ), du modulateur acousto-optique ( $70\ \text{MHz}$ ) et de l'onde acoustique ( $1$  à  $50\ \text{MHz}$ ). Les flèches et les points indiquent des polarisations perpendiculaires (le cube de droite est un séparateur de puissance, celui de gauche, un séparateur de polarisations).

Dans le premier schéma à simple hétérodynage 4.2, le signal de référence est celui délivré par le laser. A la sortie du premier cube séparateur (de puissance), les deux faisceaux conservent la même polarisation et ne sont donc pas déviés par le deuxième cube séparateur (de polarisation).

<sup>3</sup>Il est également possible d'effectuer des moyennes après acquisition et démodulation de plusieurs réalisations, mais cela allonge les durées d'acquisition et il est préférable de démoduler une porteuse peu bruitée.

Le faisceau sonde est décalé en fréquence par effet acousto-optique<sup>4</sup>, avant de venir se réfléchir sur la surface vibrante, où il subit une modulation de phase (variations du chemin optique). Lors du trajet aller, la lame quart d'onde transforme la polarisation rectiligne en polarisation circulaire; au retour (après inversion par la réflexion) elle projette la polarisation circulaire sur l'axe de polarisation perpendiculaire. Ainsi, le faisceau sonde est dévié vers le détecteur par le cube séparateur. Le battement des deux faisceaux (après "mélange" des polarisations par l'analyseur) produit un photocourant  $i(t)$  à la fréquence de la cellule de Bragg ( $f_B = \omega_B/2\pi = 70$  MHz) et dont les bandes latérales reproduisent la modulation de phase du faisceau sonde [140] :

$$i(t) = I \sin(\omega_B t + \phi(t)). \quad (4.2)$$

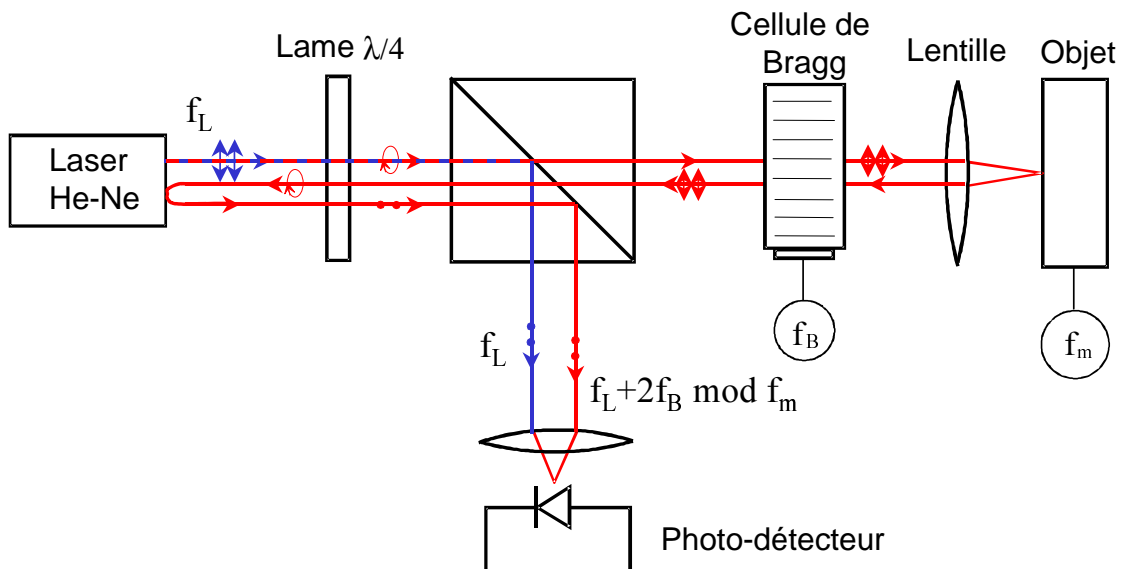


FIG. 4.3 – Schéma du montage optique de l'interféromètre hétérodyne à double hétérodynage [141]. Le cube est un séparateur de polarisations.

Pour la mesure de fortes pressions dynamiques (comprenant des harmoniques), il est nécessaire, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, d'augmenter la bande passante. La sonde à double hétérodynage mise au point par Cretin et al. [141] le permet, en conservant la même cellule de Bragg (à 70 MHz)<sup>5</sup>. Avec ce dispositif (figure 4.3), le faisceau optique passe deux fois dans la cellule de Bragg (grâce à une réflexion sur le miroir de sortie de la cavité). La fréquence porteuse, et donc la bande passante, sont ainsi doublées (à condition que le photo-détecteur ne la limite pas). Avec ce montage, le faisceau émerge polarisé circulairement de la lame quart d'onde. C'est donc la séparation

<sup>4</sup>Le faisceau sonde est le premier ordre de diffraction émergent de la cellule de Bragg. Suivant l'orientation de cette dernière, on sélectionne les ordres de diffraction  $+1$  ou  $-1$ , ce qui se répercute sur le signe de la détection (déphasage de  $\pi$  de la porteuse modulée).

<sup>5</sup>Le montage de la sonde a été réalisé par D. Royer et C. Barriere, j'ai effectué les réglages de l'optique, et R. Takatsu s'est chargé du filtre passe-bas ( $f_c = 230$  MHz) présenté en annexe C.3.

des polarisations par le cube (contrairement au montage précédent avec un séparateur de puissance agissant sur une polarisation rectiligne), qui produit les faisceaux sonde et de référence. Le faisceau sonde émerge polarisé rectilignement, il est décalé en fréquence deux fois (avant et après réflexion) et traverse à nouveau le cube (toujours avec la même polarisation). Les passages par la lame quart d'onde et la réflexion sur la sortie du laser produisent le même changement de polarisation que précédemment (entre le cube de sortie et la surface vibrante), pour permettre la déviation vers la photo-diode lors du troisième et dernier passage. Enfin, aucun analyseur n'est nécessaire puisque les deux faisceaux possèdent la même polarisation lorsqu'ils atteignent le détecteur.

#### 4.1.2 Limites en déplacement imposées par la bande passante

La bande passante de la détection détermine la sensibilité de l'interféromètre ainsi que la modulation de phase maximale. La sensibilité (déplacement minimum mesurable) théorique (limitée par le bruit de "grenaille") est donnée par [95] :

$$u_{min} = \frac{\Lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{eB}{I_0}}, \quad (4.3)$$

où  $e$  est la charge de l'électron,  $B$  la bande passante de la photodiode (et de l'électronique de réception) et  $I_0$  la composante continue du courant de la photodiode (0,35 mA). Pour  $B = 20$  MHz, on obtient  $u_{min} = 0,01$  nm.

Les deux facteurs qui interviennent dans l'estimation de la limite supérieure de la valeur des déplacements sont l'indice et la fréquence de modulation (plus précisément de la fréquence la plus haute contenue dans le spectre de la modulation). Autrement dit, c'est la vitesse de déplacement qui détermine la rapidité avec laquelle la phase de la porteuse varie, et qui impose la bande passante nécessaire. L'écriture réelle correspond à une démodulation à une "voie" qui ne donne que les harmoniques paires ou impaires. Nous adoptons la notation complexe, également adaptée à la démodulation des grands déplacements (qui exploite le sinus et le cosinus de la modulation de phase). La porteuse s'écrit :

$$s(t) = e^{[i(\omega_B t + \phi(t))]} = e^{i\omega_B t} z(t). \quad (4.4)$$

Pour une modulation de phase harmonique de la forme :

$$\phi(t) = m \sin \omega_m t, \quad (4.5)$$

la modulation de phase complexe  $z(t)$  se développe comme suit :

$$e^{i(m \sin(\omega_m t))} = J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) e^{in\omega_m t}, \quad (4.6)$$

où les  $J_n$  sont les fonctions de Bessel (coefficients du développement en série de Fourier de l'exponentielle de la modulation de phase). Plus l'indice de modulation est grand, plus l'énergie s'étale dans le spectre (la multiplication de (4.6) par  $\sin(\omega_B t)$  fait apparaître des bandes latérales de part et d'autre de la porteuse).

La limite de déplacement maximum est déterminée à partir de ce développement : pour une bande passante  $B$  et un fondamental de fréquence  $f$ , le rapport  $B/f$  donne l'ordre  $N$  de la plus haute harmonique détectable. Elle correspond au terme  $J_N(m)e^{iN\omega_m t}$  dans (4.6). Pour que les termes suivants puissent être négligés, il faut que :  $J_{N+1}(m) \approx \epsilon J_N(m)$ . Avec, par exemple,  $\epsilon \approx 0,1$ , pour signifier qu'on néglige les composantes représentant moins de 10% de la raie spectrale d'ordre  $N$ . L'indice de modulation maximal  $M$  serait alors donné par la condition :

$$\forall m \leq M, \frac{J_{N+1}(m)}{J_N(m)} \ll 0,1. \quad (4.7)$$

L'approximation des fonctions de Bessel :  $J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}$  n'est valable que pour  $x \ll 1$ , on peut par contre utiliser le développement suivant :

$$J_N(m) = \left(\frac{m}{2}\right)^N \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m^{2p}}{2^{2p} p! (N+p)!}, \quad (4.8)$$

et calculer les rapports  $J_{N+1}(m)/J_N(m)$  numériquement (par exemple sous Maple). On observe, sur les figures 4.4 que les rapports des fonctions de Bessel comportent des asymptotes qui correspondent aux passages par zéros des  $J_N$ . Il est donc difficile d'obtenir l'indice de modulation maximal à partir de ces considérations.

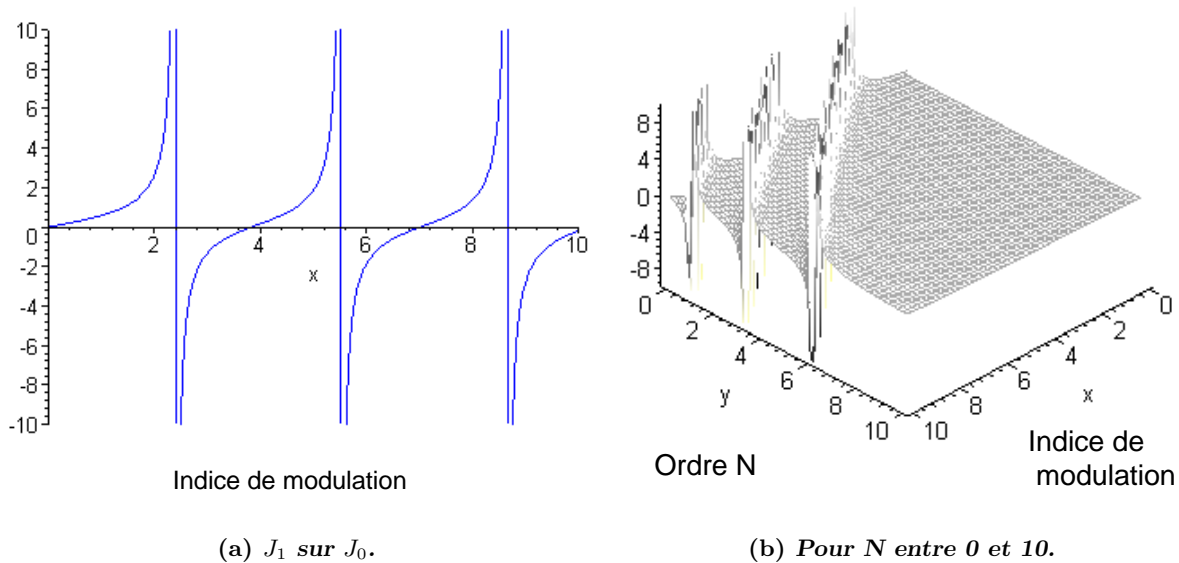


FIG. 4.4 – Rapport  $J_{N+1}/J_N$  en fonction de l'ordre et de l'indice de modulation.

La règle de Carson [142] donne l'occupation spectrale monolatère qui comprend 98% de l'énergie du signal. C'est une règle empirique et approximative<sup>6</sup> :

$$B = \Delta f_{max} + W = (m+1)f_m, \quad (4.9)$$

<sup>6</sup>On remarquera que cette approximation n'est pas valable pour  $m < 1$  (elle n'a d'ailleurs pas de raison d'être dans ce cas).

où  $m$  est l'indice de modulation (déviatiion maximale de phase ou indice de modulation de fréquence  $\Delta f_{max}/W$ ),  $W$  la largeur de bande du "message" (de la modulation de phase  $f_m$  dans notre cas) et  $\Delta f_{max}$  est la déviatiion maximale de fréquence. La déviatiion de fréquence est  $f(t) - f_B$  (où  $f(t)$  est la fréquence instantanée). Son maximum est  $f_m m_p$  pour une modulation de phase harmonique et  $m_f$  pour une modulation de fréquence. Avec un dispositif dont la bande passante  $B$  est imposée, l'ordre de la dernière harmonique accessible est  $N = B/f_m$  et on déduit de (4.9) l'indice de modulation maximal :

$$M = \frac{B}{f_m} - 1, \quad (4.10)$$

soit un déplacement maximal :

$$u_{max} = \frac{\Lambda}{4\pi} \left( \frac{B}{f_m} - 1 \right) \approx \frac{\Lambda}{4\pi} \frac{B}{f_m} \approx 50.10^{-9} \frac{B}{f_m}. \quad (4.11)$$

Pour une onde plane, la vitesse particulière telle que  $v = \omega_m u$ , d'où :

$$v_{max} = \frac{\Lambda}{2} (B - f_m) \approx \frac{\Lambda B}{2}. \quad (4.12)$$

Pour une onde acoustique de fréquence  $f_m = 2,5$  MHz et une bande passante  $B = 50$  MHz, les deux approximations données ci-dessus s'appliquent et donnent :  $M = 20$  rad.,  $u_{max} = 1\mu\text{m}$  et  $v_{max} = 16$  m/s.

Le cas d'une onde acoustique se propageant non-linéairement et contenant donc un certain nombre d'harmoniques complique l'estimation rigoureuse de cette limite. Pour une modulation composée d'une superposition de plusieurs harmoniques (d'ordre  $n > 1$ ), la largeur de bande nécessaire est le maximum de l'ensemble des  $B_n = (m_n + 1)n f_m$ . En combinant deux conditions : l'évolution des harmoniques donnée par la résolution de l'équation non-linéaire et la largeur de bande de la porteuse modulée par les harmoniques de l'onde acoustique, nous pouvons estimer l'indice de modulation maximum du fondamental et l'ordre de la dernière harmonique accessible.

La solution de Fay (équation (1.66) du § 1.2.3.1) [1], valable loin du choc<sup>7</sup>, donne une expression simple de l'amplitude des harmoniques  $A_k(\tilde{\sigma})$  :

$$A_n = \frac{2}{n(1 + \tilde{\sigma})}, \quad (\text{pour } \tilde{\sigma} \geq 3), \quad (4.13)$$

d'où les relations :  $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-1} = \frac{A_1}{n}$  (on compare les amplitudes du fondamental et des harmoniques à  $\tilde{\sigma}$  fixé). La modulation de phase du laser,  $\Delta\Phi(t) = \frac{4\pi u(t)}{\Lambda}$ , est alors de la forme<sup>8</sup> :

$$\Delta\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin(n\omega_m \tau), \quad (4.14)$$

avec  $m_n = 2K u_0 A_n$ , d'où  $m_n = \frac{m_1}{n}$ .

<sup>7</sup>Il s'agit des solutions en série de l'équation de Burgers, valable pour  $\tilde{\sigma} z \geq 3$ , où  $\tilde{\sigma}$  est la distance normalisée par rapport à la distance de choc.

<sup>8</sup>Il est possible d'exprimer le photocourant sous la forme d'une double somme, en introduisant directement la solution de l'équation de propagation non-linéaire en série de Bessel [143]. Cependant, il est impossible d'évaluer la limite en déplacement à partir de ce développement.

Pour une fréquence de modulation donnée, l'ordre  $N$  tel que  $B \approx Nf_m$ , est *a priori* celui de la dernière harmonique accessible. Pour que cette composante ne soit pas tronquée, on obtient la condition suivante (analogue à (4.10)) sur l'indice de modulation du fondamental  $m_1$  :

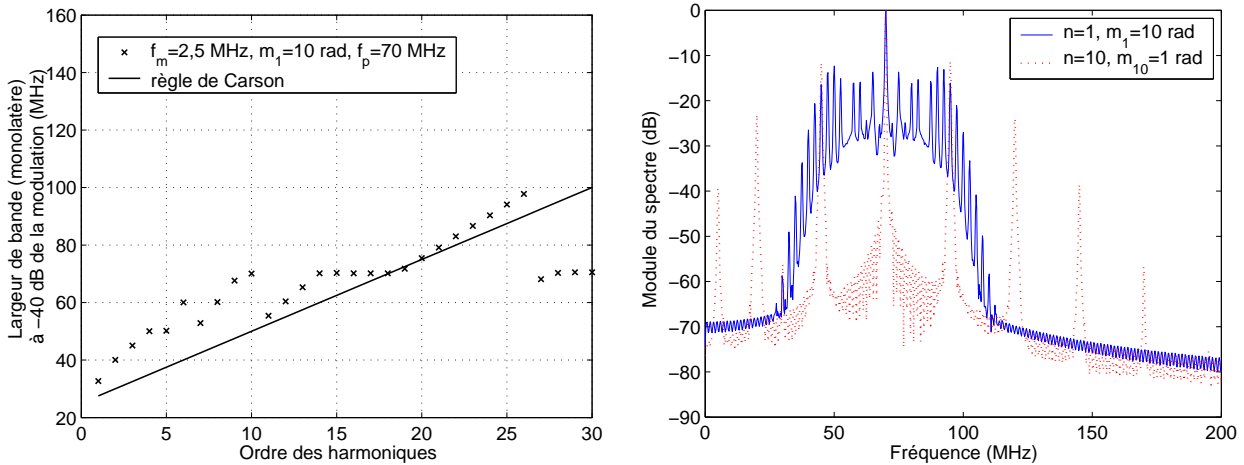
$$m_1 \leq N - 1, \quad (4.15)$$

Si cette condition est vérifiée, le spectre du fondamental est inclus dans la bande passante (on ne sait pas pour autant si l'ensemble des harmoniques d'ordre 1 à  $N$  est accessible : une composante du champ acoustique de fréquence  $nf_m$ , pondérée par un fort indice de modulation, peut s'étaler, dans le spectre de la porteuse, au delà des limites de la bande passante).

On examine ensuite le cas d'une harmonique d'ordre  $n$ , grâce à l'expression de  $m_n$  en fonction de  $m_1$ , son étendue spectrale devient :  $B_n = (m_1 + n)f_m$ . On obtient la condition suivante, pour que le spectre ne soit pas tronqué :

$$\forall n, B_n \leq B \iff n \leq \frac{B}{f_m} - m_1. \quad (4.16)$$

Logiquement, l'indice de la plus haute harmonique détectable augmente quand l'indice de modulation du fondamental diminue.



(a) Occupation spectrale de la porteuse modulée en fonction de l'ordre des harmoniques.

(b) Densité spectrale de puissance de la porteuse modulée par le fondamental et l'harmonique  $n = 10$ .

FIG. 4.5 – Estimation de la largeur de bande : règle de Carson et densité spectrale de puissance de la porteuse modulée en phase.

Sur la figure 4.5a, nous comparons deux estimations de la largeur de bande de la porteuse, relative à chaque harmonique (l'indice de modulation correspondant à l'harmonique d'ordre  $n$  est donné par  $m_n = m_1/n$ ) : la première est donnée par la règle de Carson, la deuxième est obtenue numériquement (l'utilisation d'une densité spectrale de puissance, plutôt que d'une transformée de Fourier rapide donne un résultat plus lisible). Il s'agit dans ce cas de la largeur de bande de

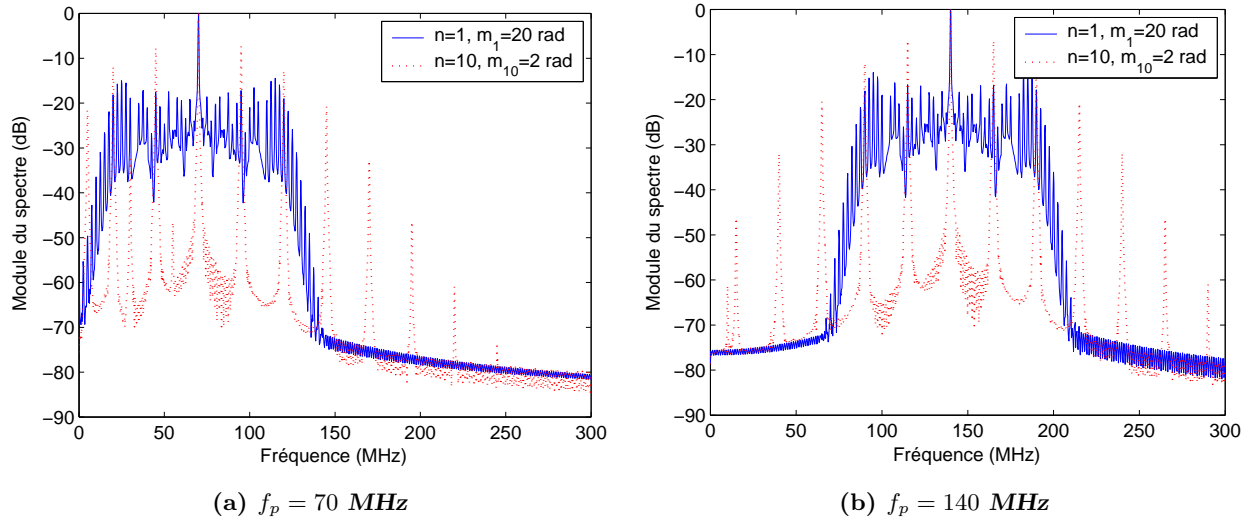


FIG. 4.6 – Densité spectrale de puissance de la porteuse modulée par le fondamental et l’harmonique  $n = 10$ , pour deux fréquences de la porteuse ( $f_p = 70$  et  $140$  MHz).

la porteuse modulée en phase (à  $-40$  dB, c’est-à-dire qu’on néglige les harmoniques représentant moins de 1 % du pic de la porteuse). Les valeurs d’entrée sont les suivantes :  $f_m = 2,5$  MHz,  $m_1 = 10$  rad et  $B = 50$  MHz (d’où  $N = 50$ ), pour  $f_p = 70$ . Nous vérifions, sur le tracé des spectres de la porteuse modulée (figure 4.5b), que les harmoniques jusqu’à l’ordre 10 sont accessibles, comme l’indique la condition (4.16). Les raies latérales de la dixième harmonique qui dépassent la largeur de bande imposée représentent moins de 1 % de la raie centrale.

Avec les valeurs suivantes :  $f_m = 2,5$  MHz,  $m_1 = 20$  rad et  $B = 50$  MHz (d’où  $N = 50$ ), pour  $f_p = 70$  MHz, nous nous plaçons dans un cas moins favorable (mais également pertinent au regard des conditions expérimentales). La relation (4.15) impose  $m_1 < 19$  rad, on vérifie, sur la figure 4.6a, que le spectre d’une telle porteuse modulée par la composante fondamentale est compris dans la bande imposée ( $\pm 50$  MHz de part et d’autre de la porteuse). Dans ces conditions (cas limite  $m_1 = 20$  rad), on obtient, avec (4.16),  $n = 1$ ; donc seul le fondamental de la modulation de phase est accessible sans biais. On compare également les estimations de la largeur de bande obtenues pour des porteuses centrées à 70 et 140 MHz, qui montrent l’intérêt d’une augmentation de la bande passante.

Une comparaison des résultats obtenus avec deux montages optiques est présentée dans la section suivante, où nous exposons les différentes méthodes de détection de phase. En effet, augmenter la bande passante de l’optique (grâce au double hétérodynage) ne fait pas tout, il faut également être en mesure de détecter les fortes modulations de phase avec une bonne précision.

### 4.1.3 Démodulations analogiques et numériques de fort indices de modulation

#### 4.1.3.1 Démodulations en quadrature à deux voies

La démodulation à une "voie" (figure 2.15 du paragraphe 2.2.4.2), utilisée pour les mesures de coefficients de non-linéarité ou de pression de radiation, est limitée à des indices de modulation inférieurs à  $\pi/2$ . En effet, dès que l'indice de modulation dépasse  $\pi/2$  le sinus "sature" et il faut nécessairement connaître le cosinus pour reconstituer la phase (utiliser le sinus seul revient à ne conserver que les combinaisons impaires de la fréquence de porteuse et de la fréquence de modulation).

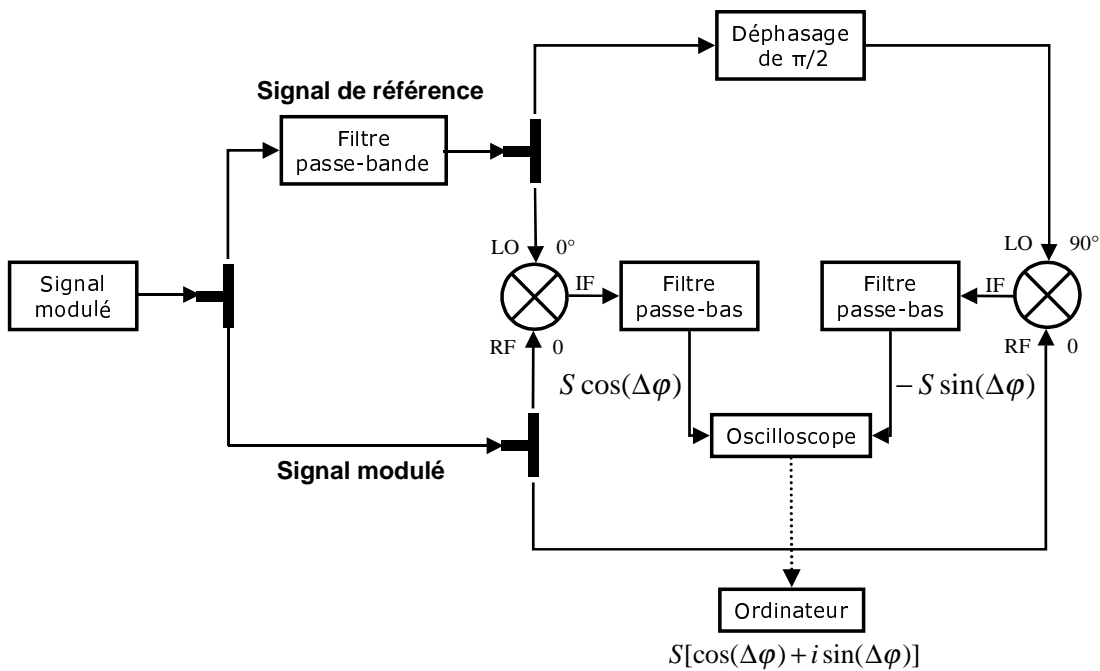


FIG. 4.7 – Principe de la démodulation analogique à 2 voies pour les fortes modulations de la porteuse.

Si la bande passante n'est pas suffisante, l'élargissement du spectre de la porteuse modulée (à mesure que l'indice de modulation augmente) peut se répercuter sur l'amplitude de la porteuse : la troncature des fréquences les plus élevées se traduit par une modulation d'amplitude de la porteuse (le bruit nuit également à l'acquisition des composantes spectrales les plus élevées et limite aussi les possibilités de l'électronique). Une modulation d'amplitude est gênante pour une démodulation analogique (à une seule voie) : le contrôle automatique de gain a un temps de réponse trop long pour corriger l'amplitude du signal de référence (même si le filtre passe bande (bande étroite) peut la corriger partiellement sur le signal de référence). Dans ces conditions, le mélangeur n'a plus un point de fonctionnement constant (la sensibilité dépend du temps :  $S(t) = A_{ref} A_{ac}(t)$ ) et la sortie n'est plus simplement proportionnelle au sinus de la modulation de phase. Les méthodes

que nous présentons pallient cet inconvénient en tenant compte (démodulation en quadrature) ou en s'affranchissant (détection des passages par zéro) des variations d'amplitude de la porteuse. Ces techniques ne corrigent pas les effets de la bande passante (si les harmoniques sont tronquées, la phase est altérée), mais elles donnent accès à des modulations de phase bien plus grandes et corrigent, dans une certaine mesure, les modulations d'amplitude dues au dispositif.

Le schéma du circuit analogique [144] est présenté sur la figure 4.7. La porteuse est divisée pour donner d'une part deux porteuses identiques modulées en phase et d'autre part deux signaux de référence (filtrage passe-bande). La multiplication, en phase et en quadrature, donne, après un filtrage passe-bas identique (sur les deux lignes), respectivement le cosinus et le sinus de la modulation de phase<sup>9</sup>. On peut d'ailleurs utiliser la relation trigonométrique  $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ , pour assurer un réglage correct de la quadrature entre les deux voies.

L'acquisition de ces deux formes d'ondes  $x(t) = S \sin \phi(t)$  et  $y(t) = S \cos \phi(t)$  (simultanément sur deux voies de l'oscilloscope) permet de construire le signal analytique (sous Matlab) :

$$z(t) = x(t) + iy(t) = S \exp [i\phi(t)]. \quad (4.17)$$

La variation éventuelle de sensibilité en fonction du temps  $S(t)$  se factorise et la phase de la porteuse reste intacte. On extrait ensuite la phase modulo  $\pi$  ( $\text{Arctan}(Im/Re)$ ). Un programme ("unwrapping" ou déroulement de phase), basé sur la comparaison des échantillons successifs, permet d'éliminer ces sauts de  $\pi$  ou  $2\pi$ .

La vitesse des particules est obtenue par dérivation numérique du signal de déplacement. Le plus simple consiste à effectuer une différence à deux points :  $v[n] = (u[n+1] - u[n]) \times f_e$ , mais d'autres schémas de dérivation sont possibles. Cette opération induit un bruit important qu'un filtre passe-bas (numérique : filtre de Butterworth d'ordre 6) élimine très bien. Dans la plupart des cas présentés ici, la fréquence centrale est de 2,25 MHz et une fréquence de coupure de 20 MHz a été retenue. On retient alors les huit premières harmoniques, le spectre complet n'en contient pas plus (dans le sens où les composantes de plus haute fréquence sont noyées dans le bruit). Les filtres passe-bas analogiques présents à la sortie de chaque voie, sont identiques, et coupent les fréquences supérieures à 50 MHz, il ne limitent donc pas le contenu spectral avant la dérivation numérique.

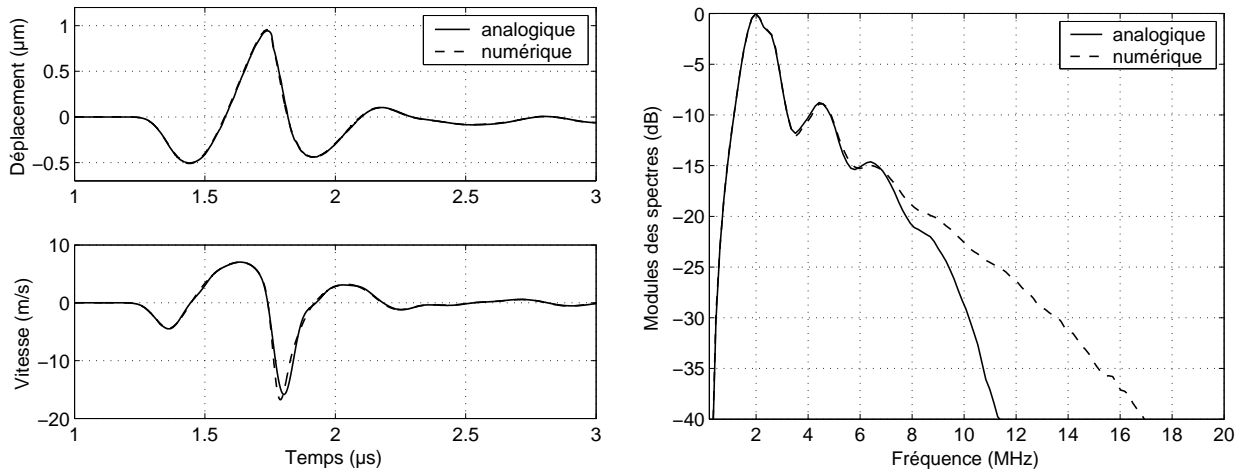
Une version complètement numérique de cette détection de phase en quadrature est également possible. Une acquisition directe de la porteuse permet de calculer le signal analytique (transformée de Hilbert) :

$$s(t) = \exp [i(\omega_B t + \phi(t))], \quad (4.18)$$

Celui-ci est ensuite multiplié par un signal de référence "synthétique" (on peut également extraire la phase et soustraire la pente  $\omega_B t$ ) :

$$z(t) = s(t) \times \exp [-i\omega_B t] = \exp [i\phi(t)]. \quad (4.19)$$

<sup>9</sup>L'ajout d'une capacité variable en parallèle sur l'entrée LO ajoute un déphasage de  $1/R_0 C \omega$  ( $R_0 = 50 \Omega$ ), qui permet d'ajuster à zéro le niveau continu de la voie "sinus" (tant que l'entrée du mélangeur reste saturée). Ce réglage assure une quadrature exacte sur les entrées des mélangeurs. Le gain de précision dépend de la qualité des composants, c'est-à-dire de la tension de décalage à la sortie des mélangeurs analogiques (de 20 à 50  $\mu V$  pour des fréquences comprises entre 5 et 100 MHz, avec un mélangeur Minicircuit SRA-1-1).



(a) Déplacement (ou modulation de phase) (en haut) et vitesse particulaire (en bas)

(b) Spectre du signal de vitesse

FIG. 4.8 – Comparaison de la démodulation analogique à 2 voies et de sa transposition numérique (pour une fréquence d'hétérodynage de 70 MHz).

Le signal de modulation de phase complexe  $z(t)$  est traité de la même manière que la phase complexe obtenue avec la démodulation analogique.

D'après les estimations présentées au paragraphe précédent, la limitation de la largeur de bande à  $\pm 50$  MHz est suffisante pour les indices de modulation modérés (jusqu'à 10 rad), mais peut devenir critique à partir de 20 rad (à 2,5 MHz). Avec les démodulations numériques, la bande passante est limitée par un filtrage numérique<sup>10</sup> appliqué à la porteuse après numérisation pour éliminer le bruit (la bande passante de la photodiode est suffisamment large). La fréquence de coupure de ce filtre (fenêtre "adoucie" appliquée sur le spectre) est la plupart du temps fixée à 70 % de la fréquence de la porteuse ( $\approx 50$  MHz)<sup>11</sup>.

Cette méthode est moins sensible à la modulation d'amplitude de la porteuse et produit moins de sauts de phase (une seule acquisition, donc pas de décalage des deux voies), nous y reviendrons par la suite. Par contre, elle est moins précise que la version analogique pour les faibles indices de modulation, car la quantification de la porteuse dégrade sa qualité. Pour limiter cet inconvénient, nous effectuons des moyennes à l'aide du dispositif de synchronisation décrit au paragraphe 2.2.4.4.

<sup>10</sup>On utilise également un filtrage analogique (voir l'annexe C.3), pour éliminer la fréquence double de la fréquence de porteuse, notamment pour la sonde à 140 MHz. Ce filtrage permet d'éviter le repliement de spectre qui intervient lors de la numérisation des composantes de très haute fréquence (280 MHz) par l'oscilloscope.

<sup>11</sup>Pour une vitesse particulaire de l'ordre de 15 m/s, le nombre de Mach est de 0,01 et la distance de choc est  $z_c \approx 3$  mm, c'est-à-dire comparable à la longueur de la tache focale. Aussi les rapports d'amplitude des harmoniques correspondent presque à ceux de la solution de Fay (décroissance en  $1/n$ , avec  $n$  l'ordre de l'harmonique, soit 0, -6, -9,5 et -12 dB pour  $n=1$  à 4). Nous ne pouvons donc pas accéder à l'ensemble des harmoniques. Cependant, l'amplitude des composantes spectrales éventuellement coupées est très faible. Les fortes modulations d'amplitude de la porteuse ne peuvent donc pas être attribuées à la seule limitation de la bande passante.

Le signal d'horloge est cette fois la tension d'excitation de la cellule de Bragg ; une partie est entrée dans la série de compteurs pour engendrer le signal de déclenchement, l'autre est amplifiée puis appliquée aux bornes du modulateur acousto-optique (la synchronisation peut également être placée à la réception de la porteuse, c'est-à-dire à la sortie de la photodiode, ce qui permet de ne pas bruyter l'excitation de la cellule de Bragg). Le déclenchement est connecté au générateur d'excitation du capteur ainsi qu'à l'oscilloscope. Le photocourant et la modulation de phase sont alors asservis en phase et des moyennes effectuées sur la porteuse ne détériorent pas la phase.

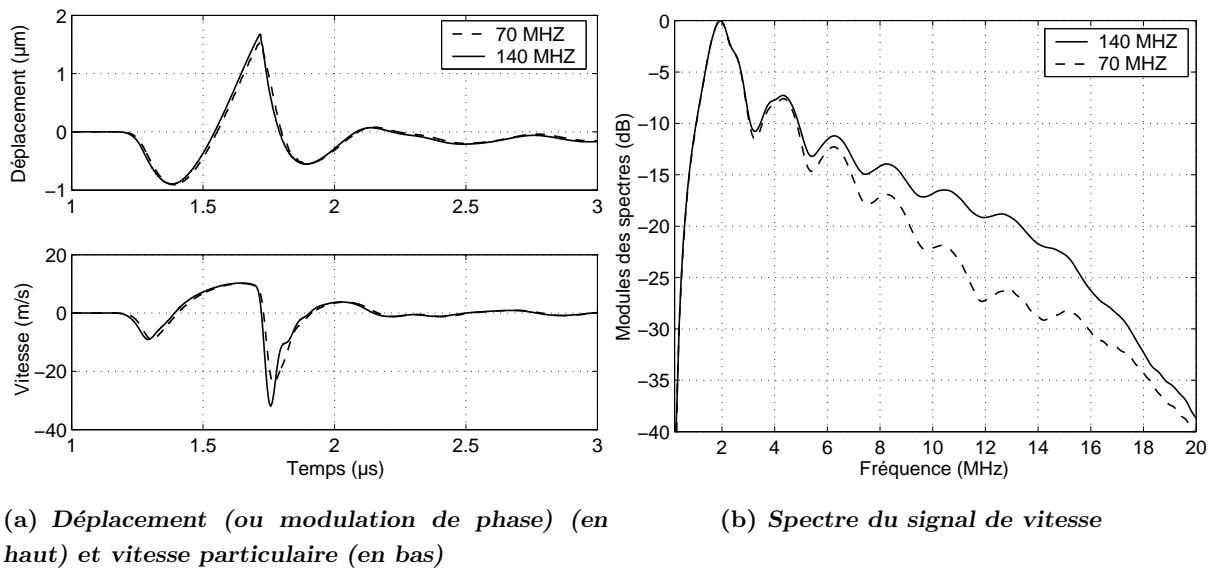


FIG. 4.9 – Comparaison des signaux de la démodulation numérique en quadrature, pour des fréquences d'hétérodynage de 70 MHz (simple hétérodynage) et 140 MHz (double).

La figure 4.8 présente une comparaison entre les deux versions de la démodulation en quadrature (analogique et numérique). Pour de fort indices de modulation nous accordons un plus grand crédit à la version numérique qui semble avoir une bande passante plus plate et donne la plupart du temps des valeurs légèrement plus élevées (elle couperait moins les plus hautes fréquences). Pour les faibles indices, la version analogique est plus sensible. Les maxima de vitesse donnés par les deux variantes diffèrent de moins de 5% pour  $\phi \approx 1$  rad. et de moins de 10% pour  $\phi$  de l'ordre de quelques dizaines de radians.

La figure 4.9 propose une comparaison des mesures effectuées avec les deux types d'interféromètres présentés au paragraphe 4.1.1 (simple et double hétérodynage). Les modulations de phase (c'est-à-dire les signaux correspondants aux déplacements) se superposent bien, mais la dérivation numérique fait apparaître de plus grandes différences entre les signaux de vitesse de déplacement (voir également au paragraphe suivant). En dehors du fait que les mesures sont effectuées successivement (changement de sonde, réglage de position par rapport au transducteur), ces différences pourraient être attribuées au changement de bande passante, c'est-à-dire à la réponse en fréquence de la photodiode et des filtres.

### 4.1.3.2 Démodulations par détection des passages par zéro

Une solution plus directe et plus rapide consiste à repérer les passages par zéro de la porteuse [145] [146], [147]. La présence de la modulation de phase modifie leur espacement (d'une fraction de la période porteuse, soit de quelques échantillons). A partir de la porteuse (figure 4.10a), acquise avec l'oscilloscope, une simple différence permet de repérer les paires d'échantillons successifs placés de part et d'autre de l'axe des abscisses. Ces passages par zéro se produisent aux instants  $t_n$  ( $n$  entier) définis par :

$$\omega_B t_n + \phi(t_n) = n\pi. \quad (4.20)$$

On obtient deux vecteurs (dont le nombre de points dépend du rapport  $f_p/f_e$ ), l'un donne la valeur de la phase ( $n\pi$ ) et l'autre l'instant correspondant à chaque passage à zéro. Sur la figure 4.10b, on trace ces couples de points  $(t_n, n\pi)$  c'est-à-dire l'évolution de la phase de la porteuse en fonction du temps. Il ne reste plus qu'à soustraire l'évolution "normale" (sans modulation) de cette phase ( $\omega t_n$ ) pour obtenir la modulation de phase (figure 4.10c).

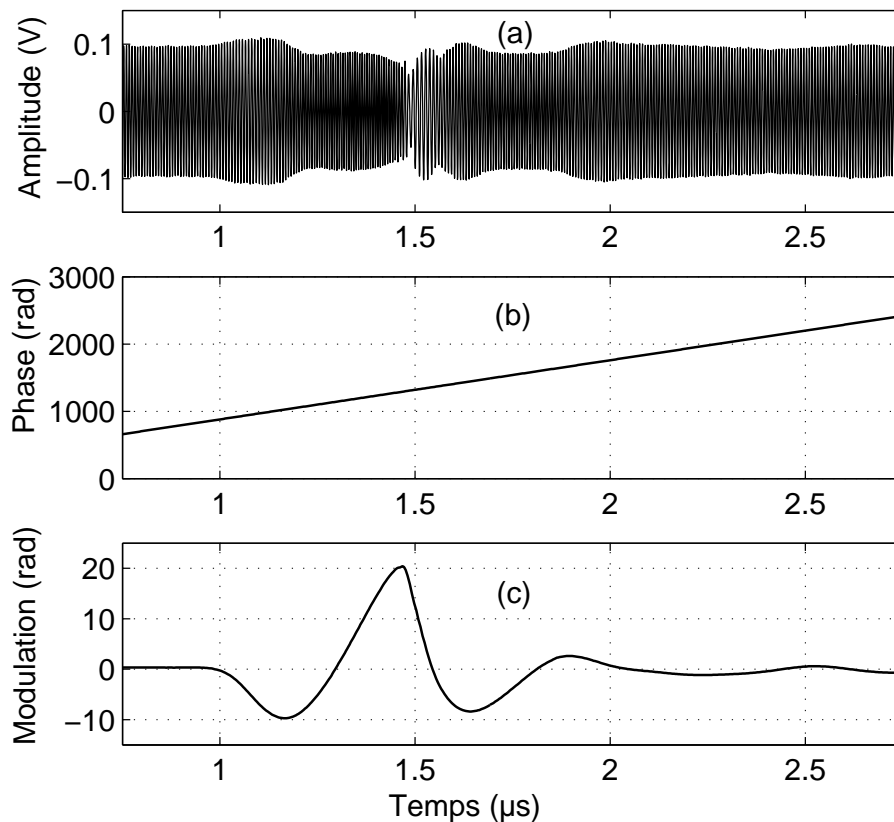
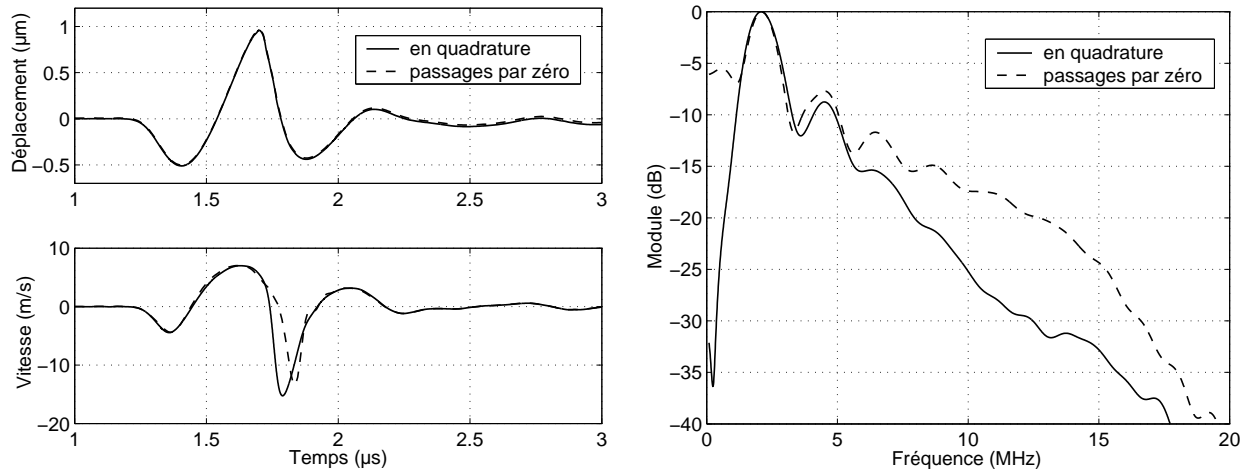


FIG. 4.10 – Démultiplexage par détection des passages par zéro.

Les résultats des deux méthodes numériques sont comparés sur la figure 4.11. Comme précédemment l'accord est meilleur sur la modulation de phase que sur sa dérivée numérique. Cette dernière méthode (passages par zéro) induit un sous-échantillonnage de la modulation par un fac-



(a) Déplacement (ou modulation de phase) (en haut) et vitesse particulière (en bas)

(b) Spectre du signal de vitesse

FIG. 4.11 – Comparaison des démodulations numériques : en quadrature et par détection des passages par zéro (pour une fréquence d'hétérodynage de 70 MHz).

teur  $f_p/f_e \approx 1/10$  et les intervalles de temps entre deux passages par zéro ne sont pas égaux (c'est d'ailleurs ce qui est mesuré). Pour ces deux raisons, le calcul de la vitesse particulière par dérivation "point par point" de la phase est moins fiable que celui de la démodulation en quadrature (qui ne sous-échantillonne pas).

Cette variante présente par contre l'avantage d'être peu sensible à la modulation d'amplitude de la porteuse<sup>12</sup>. Pour de faibles indices, cette technique est moins performante que les deux précédentes ; mais pour les forts indices, elle constitue une alternative robuste.

Les schémas de dérivation utilisant un plus grand nombre de points (des schémas d'ordres 3 et 5 ont été testés) induisent un filtrage (moyenne glissante) du signal [104]. Le bruit est moins important en sortie de dérivation, mais la bande passante est réduite. L'avantage d'un schéma plus élaboré est donc relatif. Enfin, pour s'affranchir de cet inconvénient, une interpolation (sur-échantillonnage) du signal démodulé peut être effectuée. Cette "astuce" est très utile dans le cas de la démodulation par détection des passages par zéro. On obtient finalement un meilleur accord entre les signaux démodulés avec les différentes techniques, comme l'illustre la figure 4.12 (écart relatif de l'ordre de 5%). En effet, le maximum de vitesse n'est défini que par quelques échantillons et la combinaison du sur-échantillonnage et de la dérivation sur 3 ou 5 points corrige les imprécisions dues au bruit ("naturel" ou de quantification). Quoiqu'il en soit, pour une mesure plus précise de la vitesse de déplacement, il faudrait numériser la porteuse avec une fréquence d'échantillonnage plus élevée (pour la dernière méthode) et surtout la convertir sur 10 ou 12 bits (le rapport signal sur bruit de la porteuse pouvant difficilement être amélioré, autrement qu'en augmentant le nombre de moyennes, le nombre de niveaux de quantification est le seul paramètre ajustable).

<sup>12</sup>Si seule l'amplitude de la porteuse est affectée, le programme donne un résultat correct, tant qu'elle ne s'annule pas (100% de modulation).

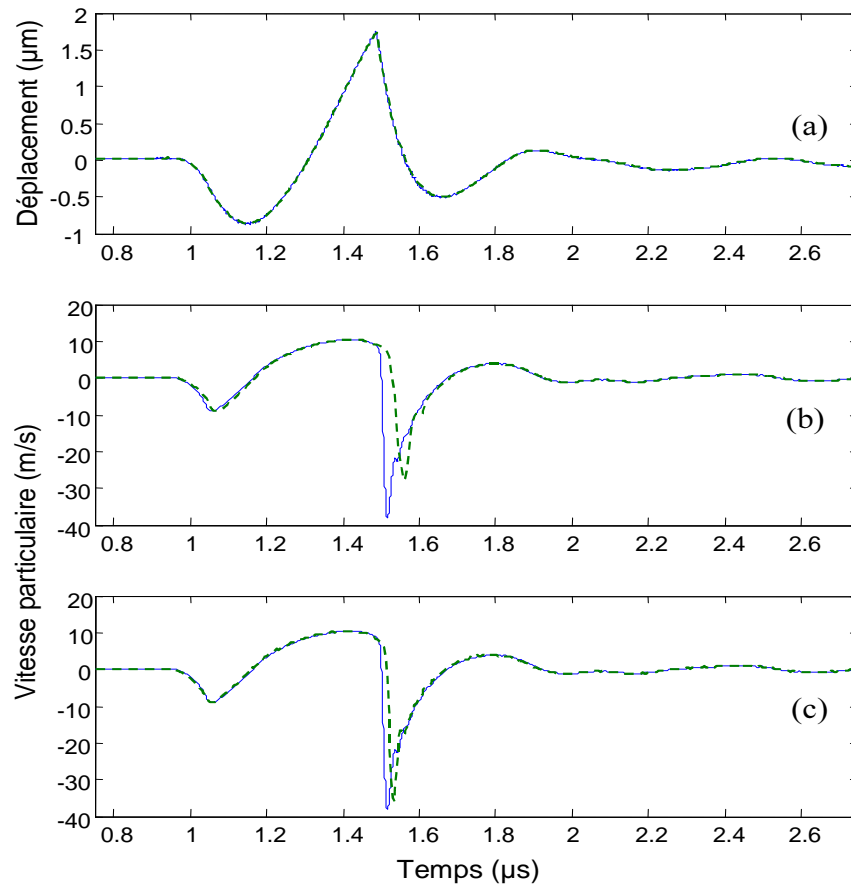


FIG. 4.12 – Démodulations numériques en quadrature (trait plein) et par détection des passages par zéro (pointillées) d’une porteuse centrée à 140 MHz. (a) Déplacements, (b) vitesse obtenue par dérivation à deux points, (c) vitesse obtenue avec interpolation et dérivation à 5 points.

#### 4.1.3.3 Membrane et modulation d’amplitude. Interaction acousto-optique

##### Membrane et modulation d’amplitude :

Un des principaux éléments de cette technique de mesure est la membrane sur laquelle se réfléchit le faisceau sonde. Pour qu’elle ne perturbe pas le champ mesuré, elle doit être ”transparente” aux vibrations dans le domaine de fréquence considéré. La bande passante d’une membrane est déterminée par son épaisseur, son élasticité, sa tension mécanique. Les dimensions latérales sont à prendre en compte pour décrire les modes propres de vibration. Ces fréquences (audibles, pour les plus basses) sont bien en deçà de la bande de fréquence des champs acoustiques mesurés ( $> 500\text{kHz}$ ).

Casula [95] propose deux modèles pour calculer leur réponse en fréquence. Le premier, qualifié d’acoustique, permet de calculer, pour des ondes planes HF, le coefficient de transmission d’une plaque infinie (membrane de mylar ou d’aluminium) immergée dans l’eau. Ce modèle ne tient compte que des constantes des matériaux : la masse volumique, les vitesses des ondes longitudinales

et transversales (ou modules d'Young et de Poisson) et l'épaisseur de la membrane. La réponse en fréquence est donnée par le coefficient de transmission, qui a l'allure d'un filtre passe-bas. La fréquence de coupure est d'autant plus élevée que l'épaisseur et le contraste d'impédance sont faibles. Pour la perte en insertion, c'est l'inverse : elle est d'autant plus élevée que le contraste d'impédance est important entre l'eau et la membrane et que l'épaisseur est grande.

Pour tenir compte des dimensions finies et de la tension de la membrane, il est possible de calculer sa réponse mécanique BF en tenant compte des conditions aux limites. Cela revient à mettre en équation les vibrations transverses  $z(r, t)$  d'un disque d'épaisseur négligeable devant son diamètre (l'épaisseur n'intervient que par l'intermédiaire de la densité surfacique). La résolution de cette équation pour une onde incidente progressive  $p_0(r, t) = p_0^r(r) \times p_0^t(t)$ , donne la distribution de vitesse sur le disque  $v(r, t)$  en coordonnées cylindriques, sous la forme d'un produit de convolution :

$$v(r, t) = \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t} \otimes p_0^t(t), \quad (4.21)$$

où  $h(r, t)$  est la réponse impulsionnelle de la membrane (dépendante de  $p_0^r(r)$  : la répartition spatiale des sources). Pour une onde incidente dont la répartition spatiale est Gaussienne, le passage à travers la membrane décale la fréquence centrale vers les basses fréquences et diminue l'amplitude transmise. Comme précédemment, la réponse en fréquence a l'allure d'un filtre passe bas, dont le comportement est qualitativement le même. En revanche, l'application de conditions aux limites réalistes rends bien compte du filtrage des fréquences les plus basses. Pour des tensions faibles (inférieures à 10 kN/m), l'épaisseur n'a pas d'influence sur la répartition spatiale de l'onde transmise.

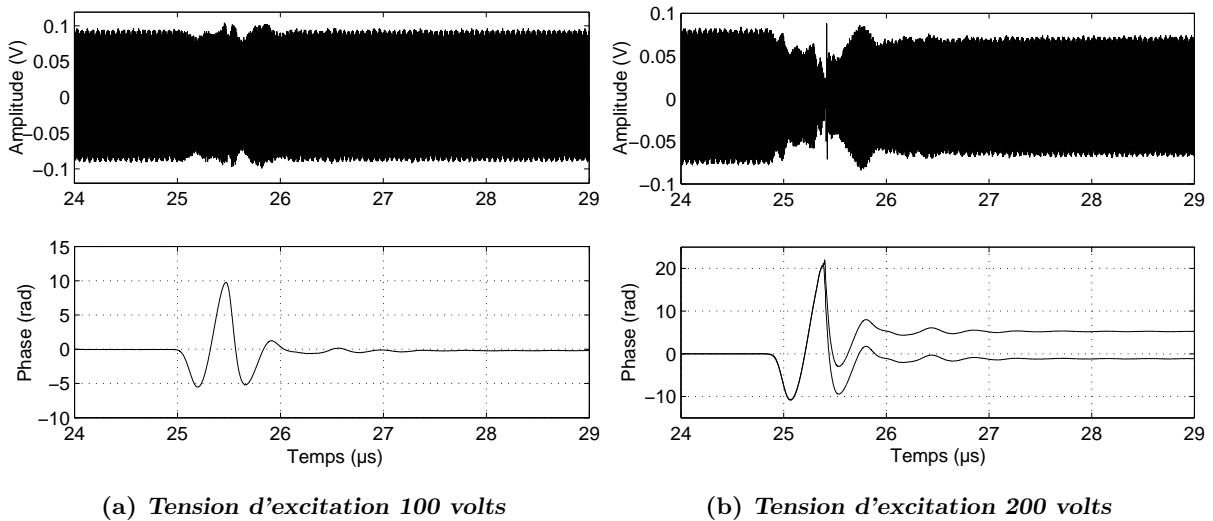


FIG. 4.13 – Membrane de mylar, sans lentille.

On observe différents artefacts lors de la démodulation des signaux qui semblent corrélés avec la modulation d'amplitude. Ils sont d'autant plus nombreux que le déplacement est grand, ce qui s'accompagne également d'une modulation d'amplitude de la porteuse. On fera la distinction entre

la diminution d'amplitude de la porteuse due à la forte modulation de phase (où à la bande passante limitée) et celle due à l'altération du faisceau lumineux par la courbure de la membrane au passage de l'onde.

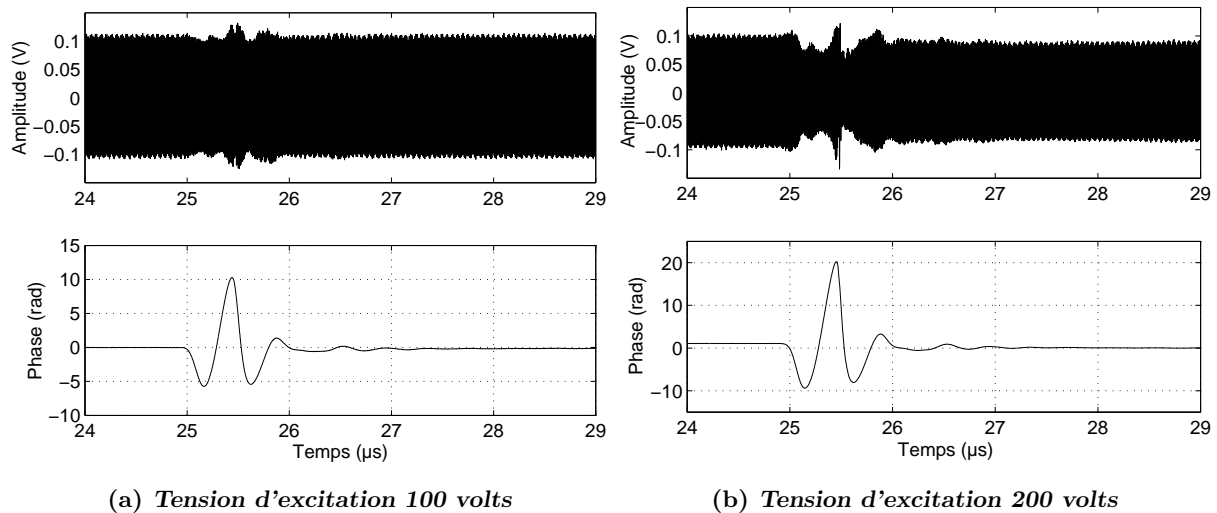


FIG. 4.14 – Membrane de mylar, avec lentille de focale 10 cm.

Sur les figures 4.13 et 4.14, la partie supérieure reproduit la porteuse à 70 MHz issue de la photodiode. Sur la partie inférieure, le signal démodulé, est représenté une seule fois lorsque la démodulation est reproductible (figure 4.13a) et deux fois lorsque qu'il est nécessaire d'effectuer plusieurs acquisitions pour obtenir un signal subissant une dérive de phase modérée (figure 4.13b). Un changement de position de la membrane est parfois nécessaire pour diminuer l'effet de la modulation d'amplitude du faisceau lumineux (c'est lorsque le faisceau acoustique est focalisée au centre de la membrane que les artefacts sont les plus fréquents). Le comportement de la démodulation dépend donc de la forme de la modulation d'amplitude. Les figures 4.13, à 4.16 (voir également 4.17) illustrent l'influence de la nature de la membrane sur la modulation d'amplitude et l'utilité d'une lentille pour diminuer cet effet (ce qui met en évidence que cette modulation est en partie due à la divergence du faisceau induite par la courbure de la surface réfléchissante).

Nous avons pu observer que :

- Le changement de matériau, aluminium au lieu de mylar, rend possible des mesures en réduisant la modulation d'amplitude. La feuille d'aluminium utilisée étant plus épaisse et le contraste d'impédance avec l'eau étant plus grand, la bande passante du dispositif est réduite.
- L'utilisation d'une lentille de focale plus courte permet de limiter l'effet de divergence du faisceau (due à la courbure de la membrane ou à l'interaction acousto-optique). La vibration de la membrane détériore la planéité de l'onde et modifie également la phase du faisceau reçu par le photo-détecteur.
- Une membrane de dimension plus faible (passage de 10 à 5 cm de diamètre) améliore la situation : l'uniformité de la tension est plus facile à assurer et une tension plus importante réduit la courbure de la membrane (et donc la déviation du faisceau).

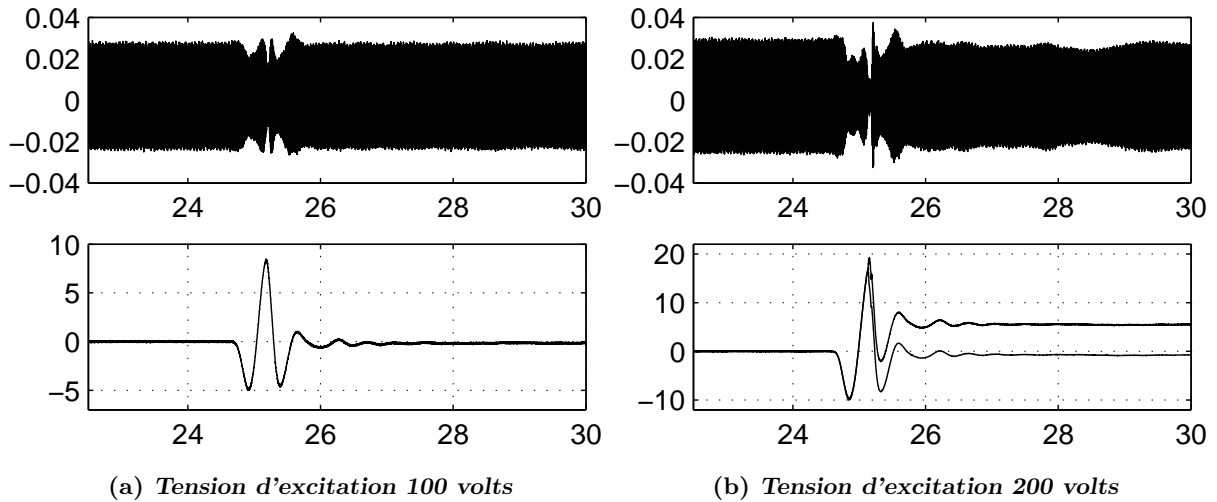


FIG. 4.15 – Membrane d'aluminium, sans lentille.

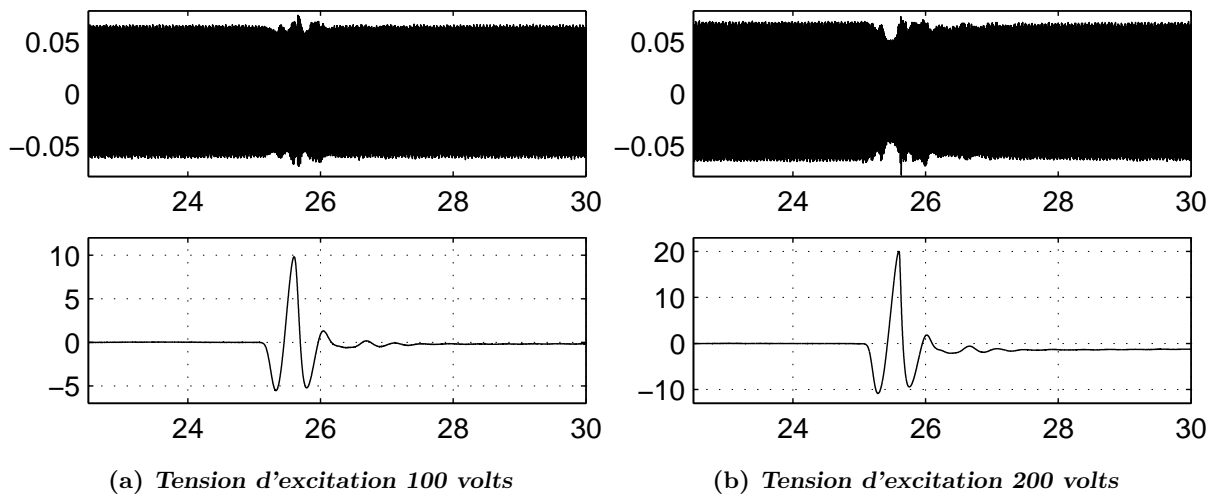


FIG. 4.16 – Membrane d'aluminium avec lentille de focale 10 cm

Les erreurs de démodulation induites par des modulations d'amplitude peuvent être masquées en écrêtant la porteuse (opération analogique) [64] ou par une correction numérique de son amplitude. Pour effectuer des mesures précises ces deux options sont à exclure. Pour effectuer une démodulation d'amplitude, les signaux sonde et de référence sont en phase (comme sur la voie "cosinus" de la démodulation de phase à deux voies). Avec le dispositif analogique de la figure 4.7, il est donc a priori difficile de séparer une modulation de phase d'une modulation d'amplitude si les deux sont présentes simultanément. Cependant la modulation d'amplitude est équivalente à une variation de sensibilité des mélangeurs de démodulation. On peut donc, grâce à la reconstitution du signal analytique  $z(t)$ , séparer l'enveloppe (modulation d'amplitude) de la modulation de phase en ne conservant que la phase de  $z(t)$ . Enfin, pour cette démodulation analogique, le problème persiste

si la modulation d'amplitude du signal de référence n'est pas éliminée<sup>13</sup>. Le filtre passe-bande (bande étroite  $f_p \pm 20$  kHz), appliqué à la porteuse pour obtenir le signal de référence, possède une constante de temps grande. Il moyenne donc l'amplitude sur cette durée, et supprime ainsi la modulation d'amplitude du signal de référence.

Dans le cas d'une démodulation numérique par transformée de Hilbert, appliquée cette fois directement sur la porteuse, on sépare l'enveloppe de la phase (complexe) du signal à 70 MHz. On s'affranchit alors plus directement de la modulation d'amplitude. Cette technique numérique permet donc d'éviter le biais induit par un mélange de modulations. Cependant, si la phase du faisceau est altérée (déviations du laser, interaction acousto-optique avec les ondes de bord), ce traitement numérique n'est d'aucun secours.

### Interaction acousto-optique :

Un troisième effet intervient : il s'agit de la variation de l'indice de réfraction de l'eau due à la surpression acoustique. Il peut, si son amplitude est suffisante induire une modulation de phase du faisceau et également le dévier. Cette propriété est exploitée pour visualiser les ondes, ainsi que dans les hydrophones à fibre optique [148]. Le réglage du faisceau laser parallèlement à l'axe de propagation de l'onde acoustique est, de ce point de vue, un paramètre important (la diffraction joue un rôle analogue). La déviation du faisceau laser par le gradient d'indice contribue à la modulation d'amplitude.

La variation d'indice de réfraction est donnée par le coefficient piézo-optique de l'eau [149] :  $\mu = 1,35 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$ . Pour les niveaux de pression envisagés ( $p = 50$  MPa), on obtient :  $\Delta n = \mu p \approx 10^{-3}$ . L'expression de la modulation de phase est donnée par l'intégration, le long du trajet du faisceau sonde, de la variation d'indice produite par le champ de pression [95]. Pour une onde plane, on retrouve l'expression (4.1) :

$$\phi(t) = 2Kn_e u(t), \quad (4.22)$$

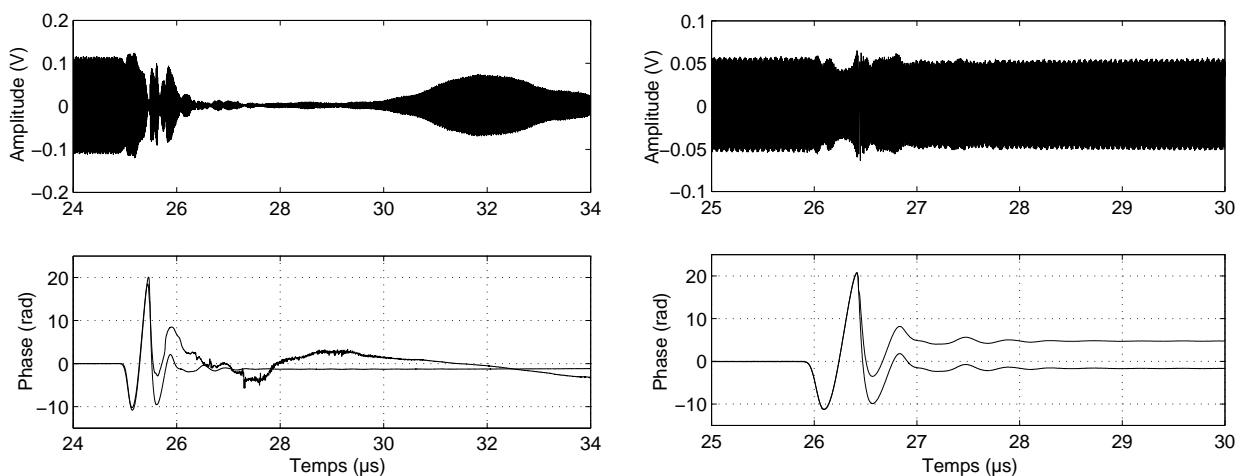
en remplaçant  $n_0$  par l'indice effectif :  $n_e = n_0 - \mu \rho_0 c_0^2$ . On obtient une valeur  $n_e = 1,03$ , proche de l'indice de l'air, dans lequel le faisceau finit son trajet.

La contribution des ondes de bords peut être calculée à partir du champ de vitesse, donné par la réponse impulsionnelle de diffraction (dans le cas d'une source plane) [95]. La modulation de phase du front plan reste inchangée mais deux termes s'y ajoutent, l'un fonction du déplacement, l'autre de la vitesse particulière. Leurs amplitudes sont supérieures à celle de l'onde plane. Tant que les temps d'arrivée sont distincts, une mesure non-biaisée, sur le front plan, est possible. Enfin dans le cas d'un transducteur focalisé, les fronts d'onde sont quasi-plans dans la zone focale. Une mesure effectuée dans la tache focale est donc peu perturbée par l'effet acousto-optique. Cependant la divergence du faisceau acoustique sur le trajet du faisceau laser pourrait être responsable de la

<sup>13</sup>On pourrait utiliser un oscillateur local, asservi en phase avec la porteuse modulée, mais on perd alors l'avantage de cette électronique analogique : les fluctuations de basse fréquence de phase de la porteuse sont soustraites grâce à l'utilisation de la porteuse filtrée comme signal de référence.

modulation d'amplitude observée (comme celle de la figure 4.17b). Enfin, la fréquence du premier mode d'un disque plan, de l'ordre de quelques dizaines de kilohertz, se situe dans la plage des fréquences de répétition couramment utilisées. La résonance des premiers modes est audible et intervient dans les très fortes modulations d'amplitude comme celle de la figure 4.17a. Il faut donc réduire au maximum le taux de répétition.

La comparaison de la technique laser-Doppler que nous utilisons avec les méthodes reposant sur la diffraction en régime de Raman-Nath est intéressante. Dans ce dernier cas (comme pour la méthode de visualisation de champs acoustique dite "méthode Schlieren"), le faisceau optique est perpendiculaire à l'axe de propagation de l'onde acoustique. L'onde acoustique module la densité et l'indice de réfraction du milieu (l'eau), traversé par le faisceau optique. La diffraction (ou déviation pour la méthode Schlieren), ou la modulation de phase (Raman-Nath) du faisceau donnent ainsi accès à la pression acoustique. Un article de Jia [143] formule clairement la modulation de phase pour un champ non-linéaire dans la configuration de Raman-Nath<sup>14</sup>, où la largeur du faisceau doit être petite devant la longueur d'onde acoustique pour que l'interaction puisse s'interpréter comme une modulation de phase. Il montre que l'augmentation d'amplitude des harmoniques du champ acoustique, entraîne une dissymétrie du spectre de la porteuse. Ces calculs sont adaptés à la configuration où les faisceaux acoustiques et optiques sont perpendiculaires. Nous n'avons pas observé ce genre d'effet sur les signaux de l'interféromètre laser-Doppler. Aussi les spectres que nous traçons pour une modulation de phase (transitoire) contenant des harmoniques ne présentent pas cette dissymétrie (voir les figures 4.5 et 4.6 du paragraphe 4.1.2).



(a) Membrane de mylar, diamètre 8cm, focale 10cm, tension d'excitation 200V

(b) Membrane de mylar, diamètre 15cm, focale 10cm, tension d'excitation 200V

FIG. 4.17 – Effet de la membrane (a) (résonance du disque ou défaut) et décrochement dû à la démodulation numérique (b).

<sup>14</sup>L'expression du photocourant pourrait être adaptée à notre configuration car seule l'expression de l'indice de modulation diffère.

La limitation imposée par l'approximation de Raman-Nath est pertinente dans le cas où les faisceaux sont perpendiculaires (les fréquence ultrasonores très élevée peuvent correspondre à des longueurs d'ondes comparables à la largeur du faisceau optique). Pour des faisceaux acoustiques et optiques parallèles elle n'a pas lieu d'être, sauf si la diffraction est à prendre en compte (la composante du champ acoustique, perpendiculaire au faisceau optique, peut moduler l'amplitude et/ou la phase du laser). C'est effectivement le cas pour des mesures de champs focalisés et cela rejoint l'interaction faisceau optique/ondes de bords envisagée par Casula (intégration le long du trajet du faisceau lumineux de la variation d'indice provoquée par les ondes de bords). Pour une émission transitoire les deux effets (front plan et onde de bord) sont séparés dans le temps, cependant l'effet des composante transverse reste difficile à estimer. Un modèle numérique permettrait d'estimer cet effet.

#### 4.1.3.4 Artefacts des démodulations de phase

Qu'il s'agisse d'une démodulation analogique à deux voies ou numérique avec filtrage, des sauts de phase sont présents. Il faut distinguer les causes et les symptômes suivant la démodulation. Avec la démodulation analogique à deux voies, un léger défaut de synchronisation des deux signaux de sortie ( $\sin \phi$  et  $\cos \phi$ ) se répercute sur le traitement. L'étape responsable des sauts de phase est le "déroulement" de  $\phi(t)$  (élimination des sauts de  $\pi$  et  $2\pi$ ). La légère différence temporelle des deux voies d'acquisition (du sinus et du cosinus) peut expliquer les sauts de phases observés avec la version analogique de la démodulation.

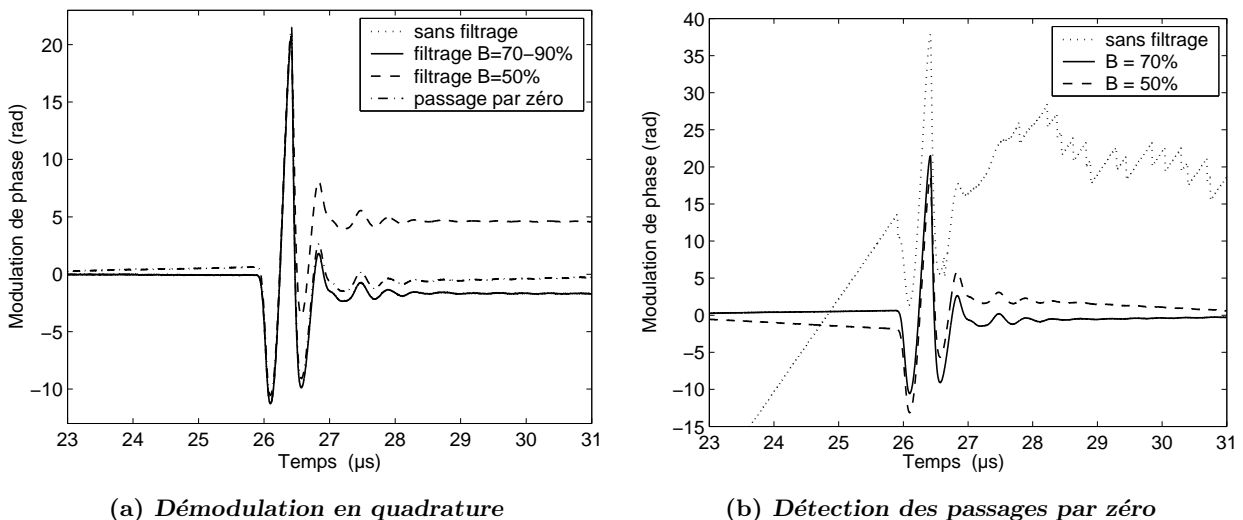
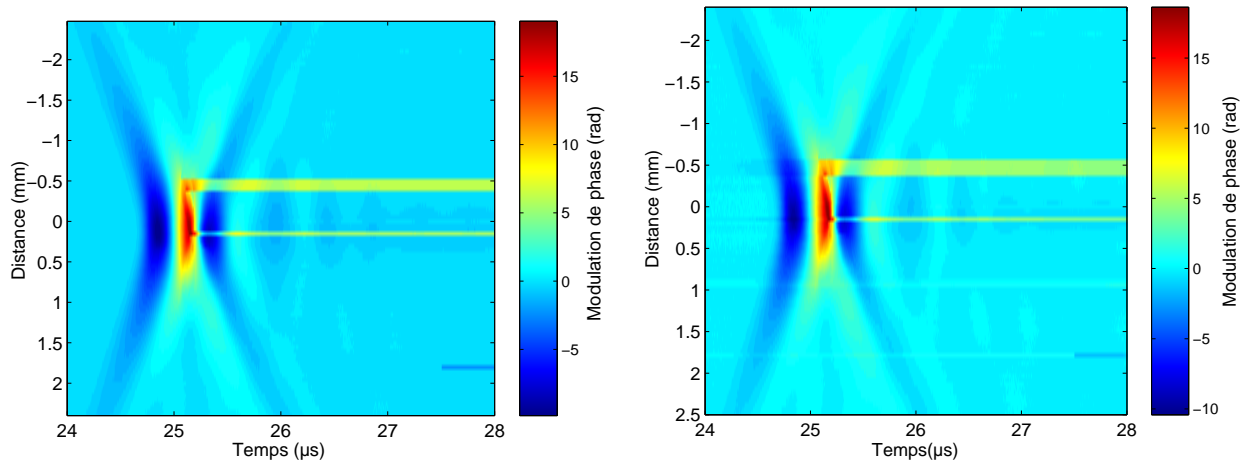


FIG. 4.18 – Démodulations numériques : effets du filtrage. La bande passante du filtrage de la porteuse est donnée en pourcentage de la fréquence de porteuse (70% ↔ 50 MHz de part et d'autre de la raie centrale).

Dans le cas des démodulations numériques, on ne peut pas mettre en cause la synchronisation : les sauts de phase sont donc dus au traitement numérique. Entre deux échantillons, la modulation de phase augmente au maximum de  $2\pi m f_m T_e$ , où  $m$  est l'indice de modulation,  $f_m$  la fréquence de modulation et  $T_e = 1/f_e$  la période d'échantillonnage. Le rapport des fréquences et l'indice de modulation doivent être tels  $2m f_m / f_e < 1$  pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté lors du déroulement de la phase. Par exemple pour  $m = 20$  rad, avec  $f_m = 2$  MHz, la fréquence d'échantillonnage doit être de 80 MHz. Cette condition n'est pas restrictive avec les oscilloscopes numériques actuels.



(a) *Démodulation en quadrature, déroulage de phase Matlab (unwrapping)*

(b) *Demodulation par détection des passages par zéro (pas d'unwrapping)*

FIG. 4.19 – Artefacts sur un B-scan. Transducteur centré à 2,25 MHz, excitation 200 V, membrane d'aluminium de diamètre 5 cm, pas de lentille.

Dans certains cas, lorsqu'on supprime ou qu'on modifie le filtrage des démodulations numériques (figure 4.18), les sauts sont moins nombreux, mais le bruit rend la dérivation difficile (voire impossible, dans le cas de la détection des zéros). On trouve pourtant des contre-exemples à ce comportement : dans le cas des B-scans représentés sur la figure 4.19a, un test similaire à celui présenté sur la figure 4.18 met en évidence que l'augmentation de largeur de bande du filtre passe-bande ne permet pas d'éliminer les sauts. D'un point à l'autre, sans que la modulation de phase ou d'amplitude soit plus forte, les artefacts surviennent quel que soit le programme utilisé. Les figures 4.20 et 4.21 reproduisent les porteuses et les signaux de sortie de la démodulation pour deux points d'acquisition voisins. Le filtrage n'est donc pas en cause pour ces signaux, il s'agit cette fois du déroulement de phase dont la sensibilité au bruit (aléatoire et de quantification) produit ces décrochements.

Pour les corriger nous avons utilisé un programme de L'E.S.A.<sup>15</sup>. A l'origine, cet algorithme a été développé pour traiter des images satellites obtenues par interférences radar (SAR : synthetic aperture interferometry). L'exemple donné dans l'article [150] est une tomographie de l'Etna (Sicile).

<sup>15</sup> Agence Spatiale Européenne, article en ligne sur le site : [http://earth.esa.int/workshops/fringe\\_1996/costanti/](http://earth.esa.int/workshops/fringe_1996/costanti/)

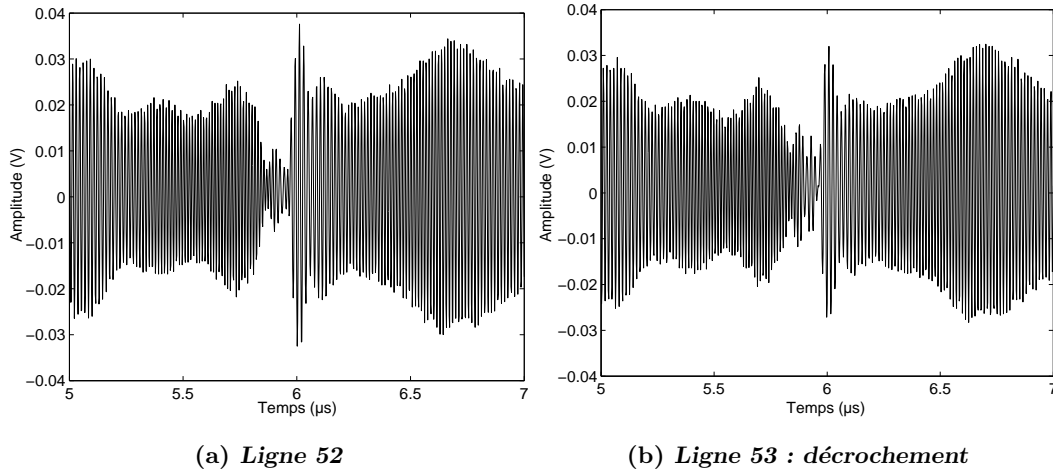


FIG. 4.20 – Signal modulé en phase démodulable sans (ligne 52) et avec (ligne 53) artefact.

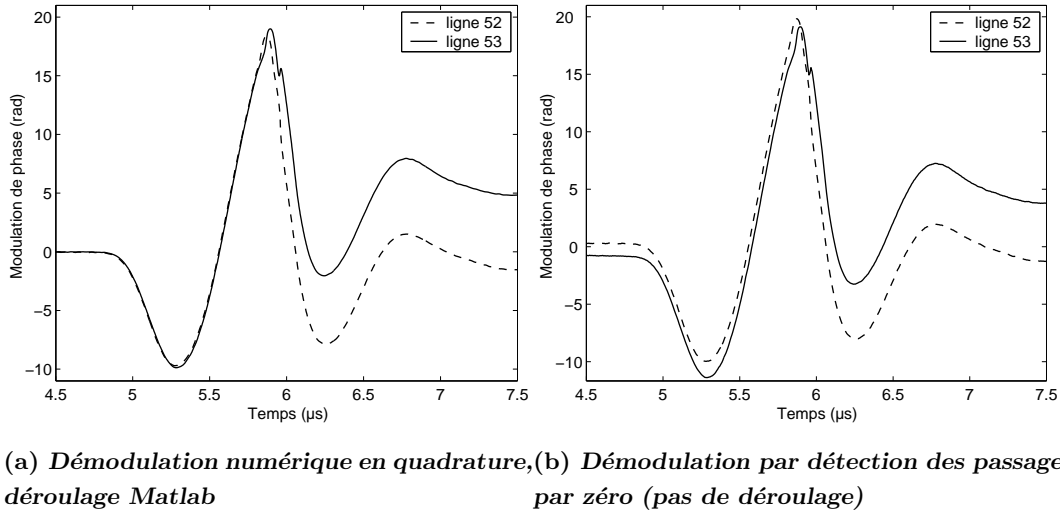


FIG. 4.21 – Exemple de signaux de phase déroulés, ligne 52 : signal indemne, ligne 53 : défaut de déroulement quel que soit le programme. Dans cet exemple, la pression est d'environ 25 MPa.

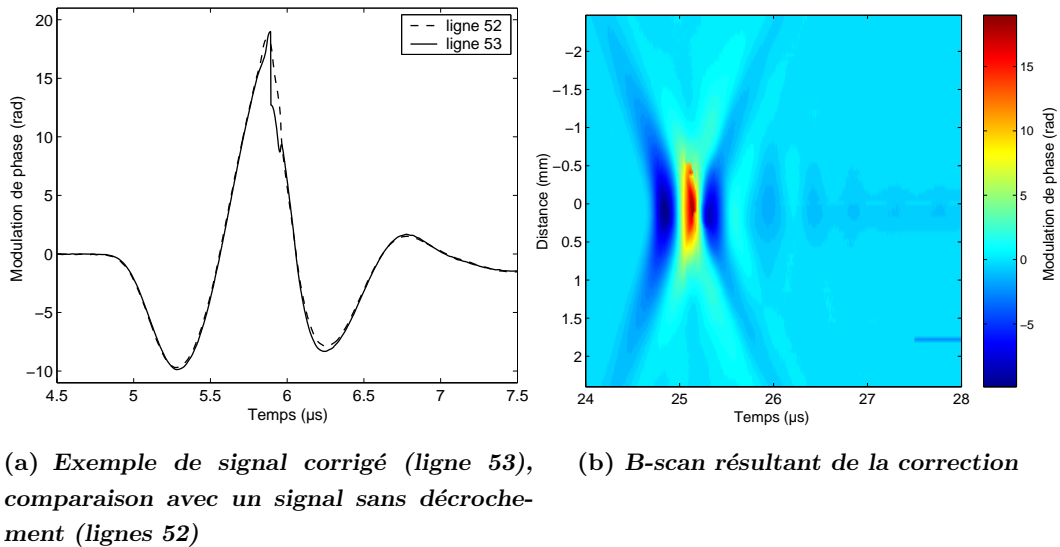


FIG. 4.22 – Correction des décrochement par l'algorithme de l'ESA. Transducteur centré à 2,25 MHz, excitation 200 V, membrane d'aluminium, diamètre 5 cm, pas de lentille.

Cette technique utilise une programmation de type réseau de neurones, pour minimiser l'erreur commise d'un point à l'autre d'une matrice à deux dimensions. Sur des signaux pris individuellement (une ligne horizontale des figures 4.19), ses performances ne sont guère meilleures que celle du déroulement de Matlab. Cependant l'avantage de cette algorithm est de travailler sur les deux dimensions de la matrice simultanément (la phase d'un point est corrigée en fonction des valeurs de tous ses voisins). Ainsi, si certains échantillons d'une ligne présentent des sauts "irré récupérables" avec la méthode usuelle, ce programme les corrigera grâce aux signaux voisins. La correction se fait alors de proche en proche (de haut en bas sur nos figures), et il "suffit" d'avoir un signal redressé correctement pour rattraper la "dérive" de phase des autres. On observe que la correction de l'image est satisfaisante alors que les signaux ainsi corrigés (ligne 53) présentent toujours des irrégularités (autour de  $t = 6 \mu\text{s}$ ).

#### 4.1.3.5 Simulation

Les résultats obtenus avec les deux techniques de démodulation numérique ont été confirmés par simulation numérique de leur réponse : la sensibilité au bruit, à la quantification et à la modulation d'amplitude a été étudiée. Elle permet d'estimer la précision absolue de ces techniques (le signal d'entrée est parfaitement connu), aussi bien pour les mesures optiques que pour les mesures acoustiques.

Les programmes en question permettent de faire varier les différents paramètres :

- les fréquences : de la porteuse  $f_p$ , de la modulation de phase  $f_{mp}$ , de la modulation d'amplitude  $f_{ma}$ , d'échantillonnage  $f_e$ , de coupure du filtre passe-bande d'entrée  $f_{bp}$ ,
- les indices de modulation de phase  $A_{mp}$  (en radian) et d'amplitude  $TX_{ma}$  (en pourcentage de l'amplitude de la porteuse),
- les rapports signal sur bruit de la modulation de phase  $RSB$  et de la porteuse  $RSB_A$ ,
- le nombre de bits de quantification  $n_{bits}$  de la porteuse numérisée,
- la durée des modulations de phase et d'amplitude dans la fenêtre de porteuse acquise.

On fait varier ces paramètres deux par deux pour évaluer leur couplage éventuel et interpréter les résultats<sup>16</sup>. Les couples choisis l'ont été principalement pour étudier l'effet de la modulation d'amplitude :  $(TX_{ma}, A_{mp})$ ,  $(f_{mp}, f_{ma})$ ,  $(f_{ma}, TX_{ma})$  et  $(f_{mp}, TX_{ma})$ <sup>17</sup>. Dans chaque cas les calculs sont réalisés sur des signaux "idéaux" puis "réels", pour déterminer l'influence du bruit : les signaux "réels" sont synthétisés avec 1% de bruit sur la phase et une quantification sur 8 bits.

Les paramètres suivants ne sont pas les plus importants dans la pratique et sont donc fixés :

- La fréquence d'échantillonnage, par exemple, n'est une limitation que pour la mesure de signaux long, mais il est toujours possible d'effectuer des acquisitions par morceaux. Elle est de l'ordre de  $10f_p$ , même pour les mesures optiques : on prend, comme dans la plupart des expériences,  $f_e = 1 \text{ GHz}$ , soit 15000 points sur  $15 \mu\text{s}$ .

<sup>16</sup>On visualise l'erreur de démodulation en pourcentage (comparaison des maxima des modulations de phase en entrée et en sortie) ainsi que le rapport signal sur bruit (évalué en dehors de la fenêtre de modulation, c'est-à-dire sur le niveau de référence de la phase).

<sup>17</sup>Le jeu de paramètres (fmp, amp) peut également être traité. Qualitativement : l'erreur augmente avec l'indice et la fréquence de modulation, avec une plus grande sensibilité à la fréquence. La détection des zéros pose problème pour les très faibles indices, mais elle est plus robuste pour les grands.

- La durée des modulations (de phase ou d'amplitude) n'est pas d'une grande importance tant qu'elle reste inférieure à la durée de la fenêtre d'acquisition de la porteuse. Lorsque la porteuse est modulée sur toute sa durée, les bords du signal sont déformés, mais cela ne change rien au centre de la fenêtre.
- Le nombre de bits de quantification est fixé à 8 (le même que celui de l'oscilloscope), le passage à 10 ou 12 améliore notablement la précision, mais nous ne disposons pas de cette possibilité dans la pratique et l'ajout d'une quantification est le paramètre le plus "coûteux" en terme de temps de calcul. C'est un paramètre critique, notamment pour la détection des passages par zéro.

Dans les calculs  $(TX_{ma}, A_{mp})$  et  $(f_{mp}, TX_{ma})$ , la fréquence de la modulation d'amplitude est choisie égale à celle de la modulation de phase, où du même ordre, sauf pour les couples  $(f_{mp}, f_{ma})$  et  $(f_{ma}, TX_{ma})$  où l'objectif est justement de faire varier  $f_{ma}$ . D'une manière générale, les paramètres fixés prennent les valeurs par défaut suivantes :  $TX_{ma} = 0.5$ ,  $A_{mp} = 0.5$  à 50 radians suivant qu'on étudie les faibles ou les fortes modulations,  $f_{mp} \approx f_p/10$  (on évite le cas particulier d'un rapport entier),  $f_{ma} \approx f_p/10$ ,  $n_{bits} = 8$ ,  $RSB = 100$ ,  $RSB_A = 100$  (ce qui correspond à 1% de bruit. C'est optimiste du point de vue expérimental, mais envisageable avec un grand nombre de moyennes et un filtrage de la porteuse.).

**Effet de la modulation d'amplitude :** Le rapport des fréquences de modulation  $f_{mp}/f_{ma}$  a peu d'influence, ce sont les rapports  $f_{mp}/f_p$  et  $f_{ma}/f_p$  qui sont déterminants.

- Pour les signaux idéaux (c'est à dire en l'absence de bruit ou de quantification), la précision diminue lorsque  $f_{ma}$  et  $TX_{ma}$  augmente pour la démodulation en quadrature. La détection des passages par zéros est presque insensible à  $TX_{ma}$  et elle est très peu altérée par l'augmentation de  $f_{ma}$  (erreur inférieure à 0,5%).
- Pour les signaux réels, l'effet du rapport des fréquences est bien plus sensible. Pour les deux démodulations, seul le domaine défini par  $f_{mp} < f_p/4$  et  $f_{ma} < f_p/4$  assure une erreur inférieure à 5% sur l'indice de modulation même si le RSB est satisfaisant ( $> 10^5$  pour la quadrature et  $> 150$  pour la détection de zéros).
- Pour  $TX_{ma} \geq 100\%$  les différents programmes donnent systématiquement un signal erroné. En effet, l'amplitude de la porteuse s'annule ce qui induit une indétermination sur sa phase, que le déroulement ne permet pas de corriger.

**Effet du filtrage et des rapports de fréquences :** Dans la plupart des expériences, on conserve une bande passante comprise entre  $f_p$  et  $1,4f_p$ , soit de  $f_p/2$  à  $0,7f_p$  de part et d'autre de la porteuse. On conserve ce réglage pour les calculs, il permet d'éliminer le bruit de haute fréquence. Pour des fréquences telles que  $f_m/f_p < 1/10$  le biais introduit par le filtrage est quasi-nul (en tout cas indiscernable des autres effets). On peut élargir la bande passante pour diminuer la distortion induite par le filtre sur les plus hautes fréquences, mais on s'expose à une augmentation du bruit.

**Effets du bruit et de la quantification verticale :** Du point de vue numérique on pourrait confondre les effets de ces deux paramètres :

- sans filtrage, la démodulation en quadrature fonctionne toujours, le niveau de bruit est indépendant des autres paramètres. Pour les signaux idéaux, dans la bande  $[0, f_p/2]$ , et pour  $TX_{ma} \leq 50\%$ , l'erreur sur l'indice de modulation n'excède pas 1% (pour  $A_{mp} = 0,5$  rad) et le rapport signal sur bruit en sortie est supérieur à 1000. Pour des signaux "réels" (bruités et quantifiés), l'erreur sur l'indice de modulation de phase reste raisonnable ( $\leq 2\%$ ) mais le RSB est de l'ordre de 30...le filtrage s'impose.
- Avec filtrage, la démodulation en quadrature est plus robuste vis-à-vis du bruit et de la quantification. Elle reproduit en sortie le niveau de bruit introduit à l'entrée (auquel s'ajoute celui correspondant à la quantification, bien plus faible  $\approx 1/2^{n_{bits}}$ ).
- La détection des passages par zéros est bien plus sensible : en présence de bruit naturel ou de quantification elle ne fonctionne plus sans filtrage. Pour des signaux idéaux, avec ou sans filtrage, l'erreur est inférieure à 1% et le RSB supérieur à 1000. Pour les signaux réels, l'erreur est inférieure à 2% pour  $A_{mp} > 10$  rad, inférieure à 5% ailleurs, sauf pour  $A_{mp} < 0,5$  rad, où les résultats sont complètement erronés. Le RSB est supérieur à 500 pour  $A_{mp}$  dans l'intervalle  $[1, 10 \text{ rad}]$ .

Dans le meilleur des cas on retrouve en sortie le bruit imposé en entrée ; qu'il soit imposé sur la phase ou sur l'amplitude n'a pas d'influence. Les imperfections du signal sont critiques en présence de modulation d'amplitude, pour des fréquences élevées ou encore pour de forts indices de modulation. Elles sont certainement responsables des sauts de phase et du coup, de la limitation qui en découle en terme de fréquence de modulation (phase ou amplitude) ou de taux de modulation d'amplitude (dont on parvient à s'affranchir pour les signaux idéaux).

**Indice de modulation de phase :** L'influence de l'indice de modulation de phase est indépendante de la modulation d'amplitude.

- pour la démodulation en quadrature (sans filtrage et pour des signaux idéaux), l'erreur augmente avec  $A_{mp}$  : elle est inférieure à 0,1% sur le domaine  $A_{mp} < 7$  rad. et va jusqu'à 10% pour  $A_{mp} < 15$  rad. Le RSB est alors toujours supérieur à 1000. Pour des signaux réels, l'erreur est  $< 1\%$  sur  $[1, 10]$  rad, mais elle augmente sensiblement pour les faibles et fort indices de modulation ( $A_{mp} < 1$  rad et  $A_{mp} > 10$  rad). Le RSB est catastrophique pour les faibles indices de modulation et passe au dessus de 100 dès que  $A_{mp} > 1$  rad. (ces estimations sont effectuées avec un rapport  $f_m/f_p$  constant de l'ordre de 10).
- pour la détection des passages par zéro, l'erreur est plus faible pour les grands indices de modulation : elle est  $< 2\%$  pour  $A_{mp} > 10$  rad (quelle que soit la valeur de  $TX_{ma}$ ) ; pour  $A_{mp} < 0,5$  rad. Le RSB est  $> 500$  pour  $A_{mp}$  compris dans l'intervalle  $[1 : 10]$  rad.

**Pour conclure :**

- Sans modulation d’amplitude la précision est très bonne pour les deux programmes.
- Avec des signaux idéaux, la précision des deux méthodes est équivalente (erreur  $< 0,5\%$  et de l’ordre de  $1\%$  respectivement sans et avec modulation d’amplitude).
- Pour les signaux réels : sans filtrage la détection des zéros est impossible, la précision de la démodulation en quadrature est sérieusement détériorée .
- La détection en quadrature est plus précise pour les faibles indices de modulation. En présence de modulation d’amplitude, la détection des zéros est meilleure pour les grands indices de modulation de phase.

**4.1.4 Comparaison avec un hydrophone**

Les hydrophones, d’utilisation facile, sont relativement fragiles et nécessitent une calibration. Ils sont généralement constitués d’une ou plusieurs couches piézoélectriques de PVDF de quelques micromètres d’épaisseur, formant une membrane dont les deux faces sont recouvertes d’une fine électrode d’or de sorte que la surface active ait un diamètre compris entre 0,1 et 0,5 mm. Différents montages (piston, aiguille, membrane) existent selon la bande passante ( $[0,1-1]$ ,  $[0,2-15]$ ,  $[0,2-40]$  MHz) et la résolution spatiale désirée. Il permettent de mesurer des pressions allant jusqu’à 80 MPa [151].

J’ai utilisé la sonde optique hétérodyne pour calibrer un hydrophone aiguille<sup>18</sup> pour des niveaux de pression modérés. L’acquisition du déplacement de la surface d’une membrane fournit la vitesse particulière et par calcul, la pression acoustique au foyer du transducteur. La forme du signal est comparée à celle obtenue avec l’hydrophone. Les amplitudes obtenues avec la mesure optique et la calibration du constructeur correspondent :  $3,2 \pm 0,15$  m/s. L’idéal serait d’utiliser différents transducteurs plan pour balayer pas à pas le domaine de fréquence. Dans le cas du transducteur focalisé, l’impulsion centrée autour de 2,5 MHz fournit une calibration précise entre 0,5 et 10 MHz puisque les harmoniques du spectre de l’impulsion sont accessibles et concordent bien entre les deux appareils.

Certains hydrophones permettent de mesurer des pressions plus élevées que l’interféromètre. Ils rendent par contre nécessaire une calibration. L’interpolation d’une calibration à faible niveau de puissance pour de plus fortes intensités peu présenter des risques. Par ailleurs, ces capteurs sont sensibles à la cavitation acoustique qui risque de détériorer l’électrode extérieure. L’interférométrie est donc une méthode complémentaire, qui offre une bande passante plus large, une mesure absolue et une meilleure résolution latérale. Enfin, une comparaison du même type, entre l’interféromètre et un hydrophone supportant des niveaux de pression plus élevés, permettrait de mettre en évidence les effets d’interaction acousto-optique (auxquels l’hydrophone n’est pas sensible), au moins sur la forme du signal.

---

<sup>18</sup>Hydrophone "Golden Lipstick" de chez Onda Inc, modèle *HGL* – 0200, bande passante 0,2 – 40 MHz à  $-3$  dB (assurée plate jusqu’à 20 MHz), sensibilité 28 nV/Pa, avec pré-amplificateur modèle *A17dB* du même constructeur.

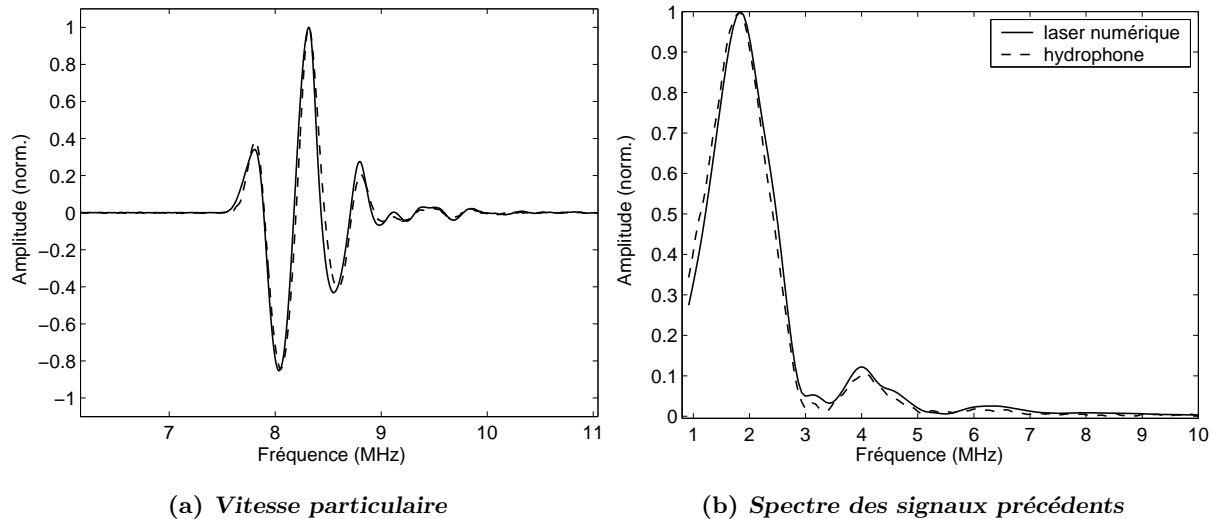


FIG. 4.23 – Comparaison des mesures effectuées à l’aide d’un hydrophone et de l’interféromètre (hétérodynage à 70 MHz, démodulation numérique).

#### 4.1.5 Alternative acoustique : mesures par interaction paramétrique

Une des applications de l’interaction paramétrique est également dédiée à la caractérisation de champs de pression. Les possibilités de cette technique dans le cas de mesures en immersion ont été démontrées [152], [153]. Le montage est une combinaison de ceux des figures 4.1 (mesures optiques) et 2.3 (interaction paramétrique). Un transducteur focalisé joue le rôle du faisceau optique : un train d’ondes de fréquence 30 MHz vient frapper la surface de la membrane, placée en face du transducteur de basse fréquence (ou face à la pièce à inspecter). L’onde de haute fréquence se réfléchit totalement sur la membrane, transparente à l’onde de basse fréquence. On se retrouve donc dans une situation similaire à celle des mesures de coefficient de non-linéarité, à la différence près que les deux ondes sont focalisées. La modulation du faisceau de haute fréquence résulte de l’interaction non-linéaire des deux ondes dans la tâche focale du transducteur de haute fréquence. L’hypothèse d’ondes planes pouvant être conservée au foyer, la modulation de phase est analogue à celle des mesures par de coefficients de non-linéarité : elle est proportionnelle à la distance d’interaction (longueur de la tâche focale), au coefficient de non-linéarité (de l’eau, pour les mesures en cuve). L’effet n’est alors cumulatif que dans la zone d’interaction.

L’application de la méthode aux solides permet d’envisager l’adaptation de ce procédé à la caractérisation des capteurs de contact sur une plaque étalon de coefficient non-linéaire connu. Cette application s’apparente à la mesure de champs de pression dans l’eau. Il s’agit ici de mesurer les vitesses de déplacements dans les conditions réelles de couplage du capteur et de l’échantillon. Une fois encore, il faut trouver le bon compromis entre l’épaisseur, la fréquence sonde, la durée du train d’ondes pour enregistrer une réponse suffisamment longue.

L'utilisation d'un transducteur présente l'avantage d'être moins exigeante quant à l'état de surface des échantillons, comparée à la méthode optique. L'exploitation de la phase des signaux permet de s'affranchir d'une calibration du transducteur sonde.

## Conclusion et perspectives

La comparaison des différents interféromètres optiques a confirmé les possibilités du montage à double passage réalisé au laboratoire. Ne disposant pas de transducteur pouvant générer des ondes de chocs dont le spectre est plus large que la bande passante de la version précédente (50 MHz avec le simple hétérodynage), nous ne mettons pas en évidence directement le gain de bande passante de cette version.

L'analyse des méthodes de démodulation nous a permis d'en évaluer les limites et d'améliorer leurs performances. Les démodulations numériques (par transformée de Hilbert ou par détection des passages par zéro) permettent de s'affranchir des modulations d'amplitude du faisceau laser. Cependant, si l'amplitude et la phase sont affectées par la déviation du faisceau (membrane ou interaction acousto-optique) le problème reste entier. Il serait alors nécessaire de modéliser la réflexion du faisceau sur la membrane, en tenant compte de sa déformation au passage de l'onde.

Un bon accord entre les vitesses de déplacement mesurées avec les différentes méthodes a été obtenu grâce à l'adaptation de la dérivation numérique. On mesure ainsi des vitesses de 30 m/s, supérieures à la limite estimée.

## 4.2 Contrainte de radiation dans les solides

La première utilisation de la pression de radiation dans les fluides a été la mesure de la force exercée par une onde sur un objet immergé. Il s'agit de la pression de radiation dite de Langevin. Parmi ses applications citons le calcul de la puissance émise par un transducteur, le déplacement ou la séparation d'objets immergés, la "lévitation" acoustique.

Les développements récents concernent surtout l'imagerie médicale. Il s'agit d'exploiter la force de radiation induite par des ultrasons focalisés. La possibilité de créer localement une force de poussée dans le milieu permet de remonter à ses propriétés élastiques en imageant les déplacements. Les techniques de palpation à distance et d'imagerie supersonique développées au laboratoire au cours de la thèse de Jeremy Bercoff [131] en sont une bonne illustration. La force et le mouvement (éventuellement le courant) qui en résultent, sont la conséquence de l'atténuation de l'onde le long de son trajet. D'un point de vue mathématique, la moyenne du champ sur une période n'est plus nulle et le transfert de quantité de mouvement au milieu se traduit par une composante continue du déplacement (pour les fluides) ou une force de poussée (pour les gels et les tissus biologiques).

Dans le cas d'ultrasons focalisés, la non-linéarité intervient d'autant plus, par l'intermédiaire de la dissipation plus élevée des fréquences produites par la propagation non-linéaire [14], [154]. La description de ces phénomènes est basée sur l'équation KZ (cf. § 1.2.3.3) et sur l'hypothèse de faible non-linéarité. Les contributions de la dissipation des composantes linéaires et non-linéaires y sont décrites dans la perspective des applications médicales.

Les effets mentionnés jusqu'ici (dans les fluides et les solides mous) s'apparentent donc au courant acoustique résultant de l'atténuation. Dans les solides ("normaux" : cristaux, métaux, verres) il n'en va pas de même, l'atténuation est beaucoup plus faible et une contrainte de radiation ne peut pas lui être attribuée.

### 4.2.1 Définition de la contrainte de radiation

Dans un article de synthèse, Beissner [155] compare les expressions obtenues pour les tenseurs des contraintes de radiation définis dans les deux systèmes de coordonnées. Il s'intéresse au problème de la force de radiation sur un objet entièrement immergé dans un fluide non confiné et sans pertes (pression de radiation au sens de Langevin). Cette situation est à distinguer de celle qui définit la pression de radiation au sens de Rayleigh (voir également [156] et [157]), qui s'exerce sur la paroi d'une enceinte fermée. La contrainte dite de Brillouin (établie à partir du tenseur des contraintes de Cauchy) est la version Eulérienne, celle de Piola-Kirchhoff-Boussinesq est la version Lagrangienne. L'accord entre les deux systèmes de coordonnées fut établi par Brillouin pour des ondes planes. Beissner compare les expressions obtenues pour un champ quelconque. Dans le cadre de l'acoustique linéaire, les résultats sont identiques pour une propagation uni-dimensionnelle, mais ils diffèrent dans le cas général (la différence entre les deux expressions est un rotationnel).

Potapov [158] rappelle que les contraintes de radiation ont leur origine dans les variations de quantité de mouvement du milieu (plus exactement les variations de la moyenne temporelle) au

passage d'une onde. Ces variations peuvent avoir diverses causes telles que l'absorption, la diffusion ou la réflexion des ondes [159] ou encore la non-linéarité des équations de conservation. Il s'agit donc d'évaluer le flux de quantité de mouvement dans le milieu à travers une surface. L'auteur choisit les coordonnées d'Euler qui seules fournissent des grandeurs observables pour l'expérimentateur (on rappelle que les différences entre les coordonnées de Lagrange et d'Euler n'apparaissent qu'au second ordre dans les méthodes en perturbation). Il semble en effet peu commode d'avoir des éléments de volume variables pour calculer ces flux. Il détaille les expressions de la pression de radiation dans les approximations du premier et second ordre (on peut faire le rapprochement avec les remarques de Cantrell [160] sur la prise en compte ou non de la non-linéarité de la relation déformation-gradient des déplacements, que négligeait Brillouin). Les équations de conservation (en coordonnées d'Euler) donnent l'équation suivante pour le transfert de quantité de mouvement par unité de volume  $P_i = \rho v_i$  :

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (P_i v_j - T_{ij}) = 0, \quad (4.23)$$

où le deuxième terme est le gradient de la densité de flux de quantité de mouvement ( $P_i v_j - T_{ij}$ , qui a la dimension d'une contrainte). L'intégration de l'équation précédente sur un volume fermé donne la variation (temporelle) de cette quantité en fonction de son flux à travers la surface qui entoure ce volume<sup>19</sup>. A une dimension, cette expression (analogue à la deuxième loi de Newton) donne la force par unité de surface agissant sur un élément de volume compris entre les positions  $x_1$  et  $x_2$  :

$$F = [T - \rho v^2]_{x_1}^{x_2}. \quad (4.24)$$

La moyenne temporelle (sur une durée  $\tau$ ) de cette quantité est appelée la pression de radiation :

$$P_r = \langle F \rangle = \lim_{(\tau \rightarrow \infty)} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F dt = [\langle T - \rho v^2 \rangle]_{x_1}^{x_2}. \quad (4.25)$$

Toutes les grandeurs sont alors développées à l'ordre deux en perturbation. La densité de quantité de mouvement s'exprime par exemple :

$$\rho v = \rho_0 v^I + \rho^I v^I + \rho_0 v^{II} + O(\rho^I v^{II}), \quad (4.26)$$

et sur un obstacle parfaitement absorbant (flux nul à travers la section d'abscisse  $x_2$ ) :

$$P_r = -\rho_0 \langle (v^I)^2 \rangle + \langle T^I \rangle + \langle T^{II} \rangle + O(\rho^I (v^I)^2). \quad (4.27)$$

Aux ordres un et deux, les expressions de la densité de quantité de mouvement diffèrent :  $P = \rho_0 \frac{\partial u^I}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u^I}{\partial t} \frac{\partial u^I}{\partial x}$  à l'ordre un et :  $P = \rho_0 \frac{\partial u^I}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u^{II}}{\partial t}$  à l'ordre deux. Dans les deux cas, le premier terme, relatif au transfert de masse, est non nul, même pour un mouvement d'ensemble (rigidifiant). Le deuxième terme correspond au flux de quantité de mouvement induit par l'onde. Potapov en déduit que, rigoureusement, la quantité de mouvement d'une onde ne peut être définie qu'au premier ordre : au deuxième ordre (en coordonnées d'Euler), il faut prendre en compte le déplacement des frontières<sup>20</sup>.

<sup>19</sup>  $\frac{dQ_i}{dt}$  avec  $Q_i = \int_V P_i dV$ .

<sup>20</sup> Ce problème est lié à l'écriture des conditions aux limites pour la résolution de l'équation de Burgers, soit à la prise en compte du déplacement fini de la source [21].

### 4.2.2 Expression du déplacement mécanique associé

A partir d'une équation d'onde de la forme suivante, Cantrell [161] rappelle les résultats de Thompson [52] et de Thurston [41] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_L^2 \left[ 1 - 2\beta_L \frac{\partial u}{\partial a} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}, \quad (4.28)$$

où  $a$  est la coordonnée Lagrangienne le long de l'axe de propagation, et avec la définition suivante du coefficient de non-linéarité :  $\beta_L = -\frac{3C_{11}+C_{111}}{2C_{11}}$  donnée au premier chapitre<sup>21</sup>.

Pour une source harmonique en  $a = 0$ , la densité d'énergie de l'onde (énergie cinétique de l'onde) est :  $\langle E \rangle = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2$  (où  $A$  est l'amplitude du fondamental en  $a = 0$ ).

Avec la condition aux limites :  $u(a = 0, t) = A \cos \omega t$ , Thompson et Tiersen [52] obtiennent (par une méthode itérative) une amplitude de la composante statique du champ de la forme :

$$u_0 = \frac{1}{2}\beta_L k_L^2 A^2 a. \quad (4.29)$$

En utilisant une valeur moyenne, appliquée à l'équation (4.28), Cantrell propose le résultat de ces auteurs sous la forme d'une déformation statique (gradient des déplacements) :

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial a} \right\rangle = \frac{\beta_L}{\rho_0 V_L^2} \langle E \rangle. \quad (4.30)$$

Avec les conditions initiales et aux limites :  $u(a, t) = A \cos \omega t_0 = cste$  pour  $t \leq t_0$  et  $u(a = 0, t) = A \cos \omega t$  pour  $t \geq t_0$ , Thurston et Shapiro [41] obtiennent, avec la méthode de résolution des caractéristiques (et un développement en série), une expression qui diffère d'un facteur 1/2 :

$$u_0 = \frac{1}{4}\beta k_L^2 A^2 a, \quad (4.31)$$

que Cantrell donne sous la forme :

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial a} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\beta_L}{\rho_0 V_L^2} \langle E \rangle. \quad (4.32)$$

La solution (4.29) correspond au régime permanent : elle ne tient pas compte des conditions initiales et néglige donc le régime transitoire, ce qui revient à considérer, d'après ces auteurs, un milieu avec pertes (faibles, mais finies). Alors que la solution (4.31) est celle du problème avec conditions initiales, qui inclue une contribution du transitoire mais ne tient pas compte des pertes. Quoi qu'il en soit, l'équation de propagation utilisée par tous les auteurs cités ci-dessus est non-dissipative. On comprend donc difficilement comment des arguments relatifs aux pertes peuvent être avancés. La composante statique, qui est obtenue par les deux résolutions de l'équation d'onde mentionnées plus haut [52], [41]), donne donc une contrainte de radiation dont l'origine est purement non-linéaire et propagative (ni atténuation, ni confinement du faisceau). Dans les fluides, l'atténuation est une

<sup>21</sup>1/2 fois celle de Cantrell  $\beta_L = -\frac{3C_{11}+C_{111}}{C_{11}}$  avec une équation identique (voir également Zarembo) et  $-1/2$  fois celle de Tiersen.

contribution prédominante (au transfert de quantité de mouvement de l'onde au milieu de propagation), qui justifie pleinement l'utilisation d'une valeur moyenne, ce qui n'est pas évident pour les solides. Yost considère donc que les effets non-linéaires se traduisent (comme l'atténuation), par un gradient des déplacements à valeur moyenne non nulle, ce qui distingue sa solution de celle de Brillouin [162].

La description finalement adoptée par Yost et Cantrell [160], correspond à la solution de Thurston et Shapiro (équation (4.31)). Elle prévoit que l'arrivée d'un train d'ondes à la surface libre d'un solide produit un déplacement en forme de rampe. Elle est appuyée par des résultats expérimentaux obtenus avec un détecteur capacitif [162] (couche d'air comprise entre la surface métallisée de l'échantillon et une électrode). Le gradient du déplacement  $u_0$  est donné par :

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial a} \right\rangle = \frac{1}{4} \beta_L k_L^2 A^2, \quad (4.33)$$

où  $k_L = \omega/V_L$  le nombre d'onde. L'intégration suivant  $a$  mène à un déplacement de la surface dont l'amplitude varie linéairement avec la distance :

$$u_0(a) = \frac{1}{4} \beta_L k_L^2 A^2 a, \quad (4.34)$$

comme pour la seconde harmonique d'une onde plane, en régime monochromatique, dont l'amplitude est donnée par :

$$A^{II}(a) = \frac{1}{4} \beta_L k_L^2 A^2 a, \quad (4.35)$$

$u_0$  et  $A^{II}$  étant respectivement les parties statiques et dynamiques du terme non-linéaire  $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$ .

Le cas d'une impulsion HF pourrait correspondre à un régime transitoire, au cours duquel le déplacement de l'interface augmente au fur et à mesure que le train d'ondes la traverse. Pour obtenir une expression du déplacement dépendante du temps, Cantrell utilise l'équivalence entre la coordonnée d'espace et le temps, pour une impulsion de durée  $\Theta = L/V_p$ . Le déplacement qui accompagne la contrainte de radiation aurait alors l'allure d'une rampe, dont la pente (en fonction du temps) serait donnée par :  $-\frac{1}{4} \beta_L k_L^2 A^2 V_L$ . Pour une impulsion de durée  $\Theta$  le maximum du déplacement prendrait la valeur :

$$u_0 = \frac{1}{4} \beta_L k_L^2 A^2 V_L \Theta = \frac{1}{4} \beta_L k_L^2 A^2 L, \quad (4.36)$$

où  $L$  est alors la longueur correspondant à la durée de l'impulsion, mais pas la longueur de l'échantillon. Cette conclusion est quelque peu surprenante puisque que le déplacement statique ne dépendrait plus que de la durée de l'impulsion et non de la distance parcourue.

Dans un premier article [162], les auteurs présentent des formes d'ondes assez bruitées et une estimation du coefficient de non-linéarité de l'échantillon de silice sur lequel est monté le détecteur capacitif. Dans le second article [161] des mesures suivant différentes directions cristallographiques confirment la dépendance en fonction du coefficient de non-linéarité et donne des valeurs qui concordent bien avec les publications citées. La forme des signaux obtenus n'est pas clairement une rampe, et comporte parfois des irrégularités dont l'origine est peu claire.

### 4.2.3 Dispositif expérimental, démodulation de faibles indices

Nous avons tenté de mesurer cette composante de basse fréquence sur des échantillons de duralumin et de silice, à l'aide du dispositif schématisé sur la figure 4.24. Un train d'ondes est émis à 20 MHz par un transducteur au contact de l'échantillon. Le déplacement est mesuré sur l'autre face, après un trajet de 5 à 20 mm. L'amplitude de la composante fondamentale, et éventuellement celle la deuxième harmonique, sont mesurées grâce à la large bande du dispositif optique (figure 4.25). Puisqu'on utilise une démodulation analogique, il n'est pas nécessaire d'asservir en phase les déclenchements par rapport à la porteuse. Le dispositif de synchronisation est placé à la sortie de la source, qui fait office de signal d'horloge pour le déclenchement du créneau. On obtient donc un train d'ondes dont la phase à l'origine est fixée. Cette variante de l'utilisation du boîtier de synchronisation permet de réaliser des moyennes sur le train d'ondes de haute fréquence en sortie de démodulation. Pour obtenir la composante statique du déplacement, la modulation correspondant

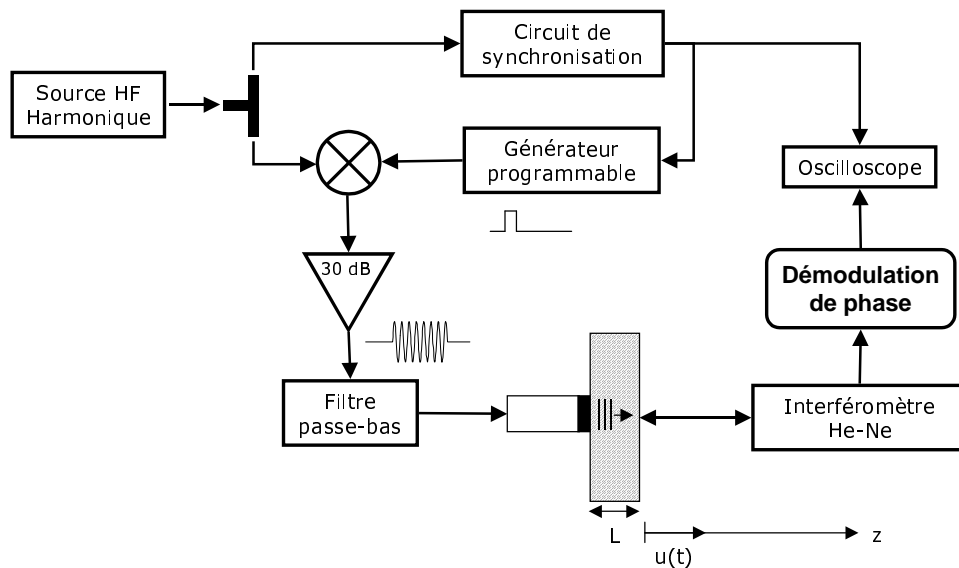


FIG. 4.24 – Dispositif expérimental pour la mesure de la contrainte de radiation.

au fondamental ( $f_{Bragg} \pm f_0$ ) est filtrée en insérant un filtre passe-bande ( $70 \pm 5$  MHz) à l'entrée de la démodulation. L'élimination des raies latérales ( $\pm 20$  MHz) à l'entrée permet d'éviter d'éventuelles non-linéarités de l'électronique de détection. À la sortie de la démodulation, un filtre passe-bas ( $f_c = 5$  MHz) élimine le bruit de haute fréquence et améliore ainsi la sensibilité de la détection. La synchronisation assure alors que la moyenne d'un signal de haute fréquence résiduel (train d'ondes du fondamental) ne vienne pas contribuer au déplacement de basse fréquence mesuré. La fréquence de coupure résulte d'un compromis : ce filtre doit couper les hautes fréquences sans altérer le contenu spectral du déplacement statique.

Nous avons comparé l'effet de différents filtres analogiques sur la forme et l'amplitude du signal obtenu (figure 4.26), pour une amplitude du fondamental fixée. La forme qui se rapproche le plus

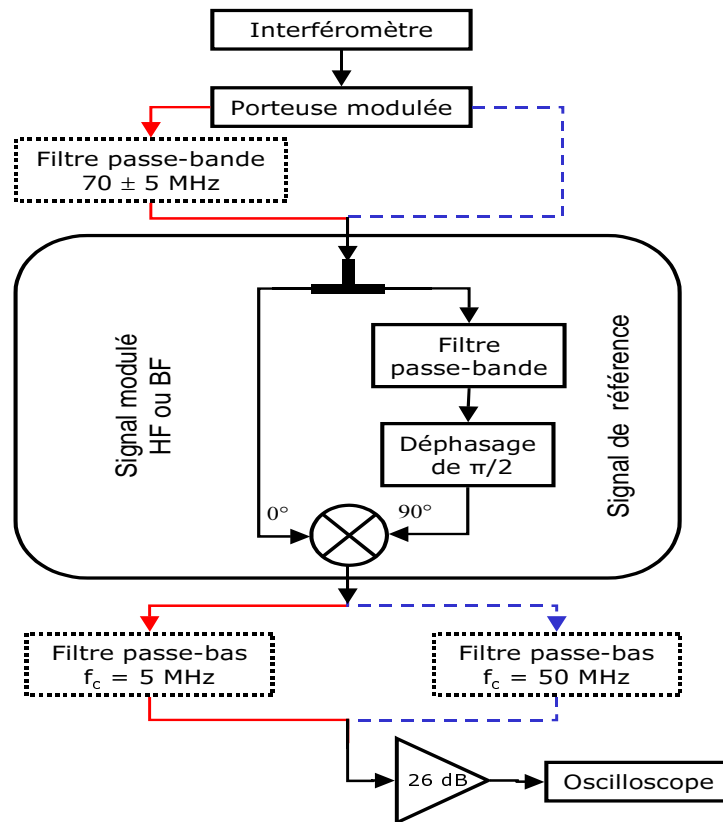


FIG. 4.25 – Démodulation adaptée à la mesure des composantes transitoires (à droite en pointillés) et statiques (à gauche).

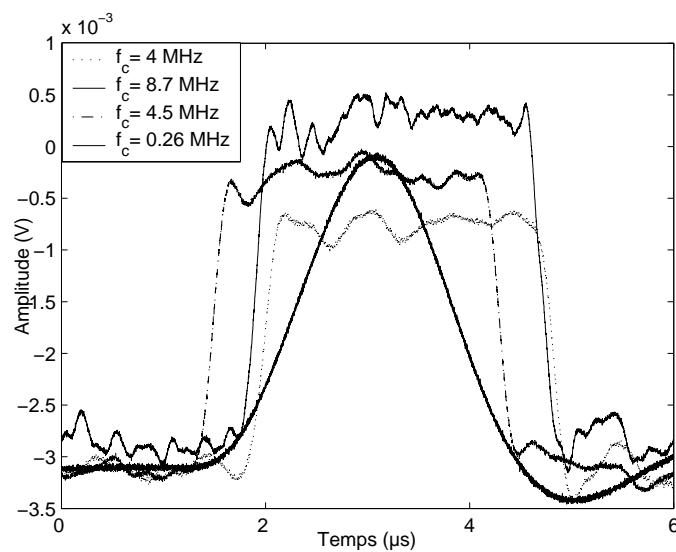


FIG. 4.26 – Forme du signal détecté pour différents filtres analogiques, passe-bas, placés à la sortie de la démodulation.

des signaux de Yost et Cantrell est donnée par un filtrage à 260 kHz comme dans la référence [162]. Pour une bande passante supérieure à 2 ou 3 MHz, la forme ne change plus, mais l'amplitude varie naturellement en fonction de l'ordre et de la fréquence de coupure du filtre. Les temps de retard diffèrent pour les mêmes raisons. Il semble donc que le filtrage passe-bas à bande trop étroite puisse expliquer la forme obtenue par les auteurs précédemment cités.

Démodulation numérique : déplacement (en nm)			Filtres passe- bas $f_c$ (MHz)	Démodulation analogique : tension (en volts)	Facteur de calibration (mV/nm)
$f_e$ (GHz)	5	1			
Avec passe- bande de 65 à 75 MHz	10.13	9.99	5	0.7675	75.79
			10	0.8348	82.43
			30	0.9072	89.58
Sans passe- bande	10.14	10.25	30	1.0071	99.44
			50	1.0428	102.96
Moyenne :	10.1+/- 0,1 nm				

TAB. 4.1 – Calibration de la démodulation sur la surface d'un transducteur centré à 2,5 MHz : démodulations numérique et analogique en fonction des différents filtrages.

La calibration de la démodulation doit être effectuée pour chaque configuration. Le tableau 4.1 présente les facteurs de calibration de la démodulation obtenus en mesurant le déplacement de la surface métallisée d'un transducteur. La démodulation numérique sert de référence, on vérifie qu'elle n'est pas affectée par le filtrage passe-bande de la porteuse. La démodulation analogique est testée dans les différentes configurations : pour chaque filtre de sortie, la diminution du signal à l'entrée de l'amplificateur (de sortie) est différente, ce qui explique les variations observées. Dans la suite les facteurs de calibration appropriés sont appliqués aux signaux HF et BF.

Cette calibration permet en outre de vérifier le "signe" de la démodulation analogique, c'est-à-dire de s'assurer que l'électronique (l'amplificateur de sortie, le mélangeur ou encore les filtres) n'inverse pas le signe de la modulation de phase détectée. La détection numérique conserve le signe de la modulation de phase (numériquement vérifiable), elle peut donc servir de référence. Cependant, ceci n'est valable que pour une sonde donnée, car suivant le montage optique (cf. note page 119), la phase de la porteuse peut être inversée<sup>22</sup>. Pour un montage optique sans inversion de signe, on s'assure ainsi qu'une modulation de phase positive de la porteuse correspond à un déplacement positif. Pour le duralumin, de  $\beta_L$  positif, le déplacement est positif : le train d'ondes "pousse" la surface vers l'extérieur (dans le même sens que la propagation, ou autrement dit, l'échantillon se "dilate"). Le faisceau sonde subit alors une avance de phase qui correspond à  $\delta\phi = 2Ku > 0$  dans l'expression de la porteuse :  $I_0 \sin(\omega_B t + \delta\phi)$ .

<sup>22</sup>Le test infallible, permettant de déterminer le "signe" de l'ensemble de la chaîne d'acquisition (mais surtout celui du montage optique), consiste à mesurer le déplacement mécanique obtenu par génération thermo-élastique (la surface de l'échantillon se déplace vers l'intérieur du matériau). Cette vérification a été effectuée, avec l'aide de D. Clorennec, sur l'ensemble des interféromètres du laboratoire.

#### 4.2.4 Signe du déplacement : duralumin et silice

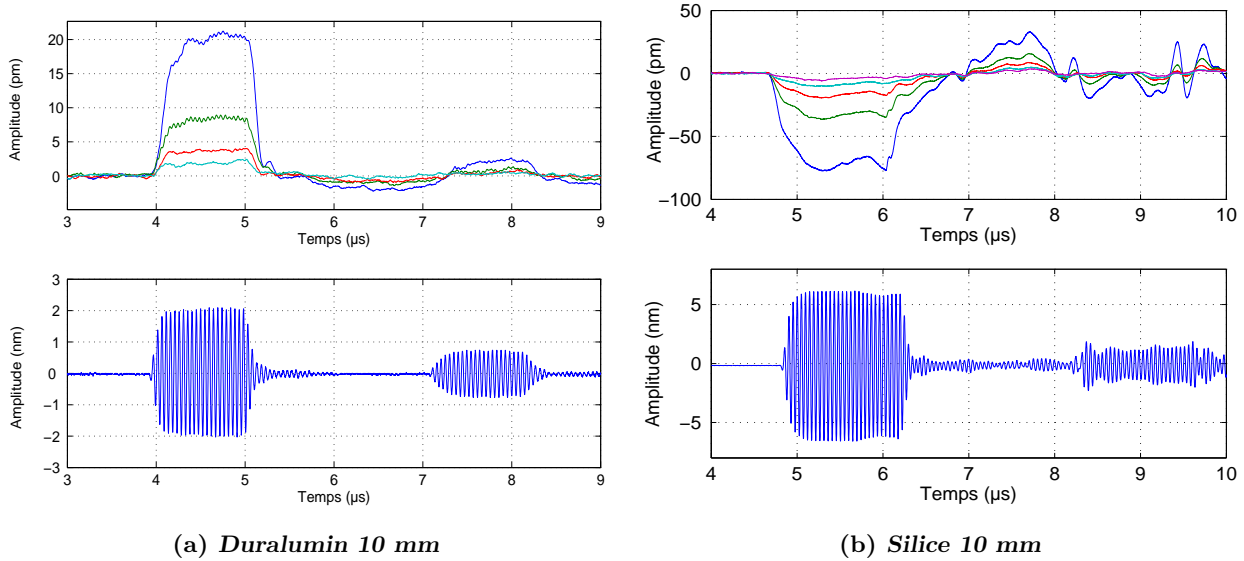


FIG. 4.27 – Déplacement de basse fréquence mesuré à la surface libre des échantillons de duralumin et de silice pour différentes amplitudes du train d'ondes HF.

Nous présentons, sur la figure 4.27, les signaux obtenus sur la silice et le duralumin. Le train d'ondes (en bas) est représenté pour la valeur maximale de son amplitude, la composante de basse fréquence est tracée pour différentes amplitudes du fondamental (de 0 à  $-3$  dB). Les amplitudes sont celles mesurées directement à la surface libre (à diviser par deux pour avoir le déplacement de l'onde dans le matériau). L'inversion du signal (figure 4.27) de basse fréquence est en accord avec le fait que les coefficients de non-linéarité du duralumin et de la silice sont de signes opposés. Elle confirme l'intervention de ce paramètre dans l'expression du déplacement statique. Le signal a la forme d'un rectangle, et reproduit l'enveloppe du train d'ondes émis. Les variations d'amplitude son plus marquées sur la BF que sur la HF, ce qui semble indiquer une dépendance quadratique.

Pour la silice, nous utilisons deux transducteurs (fréquences 19 et 21 MHz, diamètres 4,9 et 2,5 mm), munis de lignes à retard en silice (respectivement 10 et 20 mm) qui nous ont été prêtés par le Professeur M. Ourak de l'université de Valenciennes. Pour le duralumin, un transducteur piézo-composite (20 MHz, diamètre 4,5 mm, Panametrics, modèle C208) est collé au salol sur une pièce de duralumin. Avec la silice, la surface étant transparente, il est indispensable de "coller" une feuille Mylar (à l'eau ou au gel couplant) sur la surface libre de l'échantillon pour que le faisceau laser soit réfléchi. Pour s'assurer que la présence de cette feuille n'influe pas sur les mesures, nous avons comparé, sur du duralumin, les déplacements obtenus directement sur la surface (polie) réfléchissante du métal et ceux obtenus lorsque l'on place le mylar : aucune différence n'apparaît sur la forme des signaux, mais les amplitudes de la composante BF peuvent différer de plus de 10%, car le niveau de détection change, ce qui ajoute une incertitude importante à la mesure de la

composante de basse fréquence.

#### 4.2.5 Dépendance en fonction de l'amplitude du fondamental

Nous avons vérifié la dépendance de l'amplitude du déplacement statique comme le carré de l'amplitude du fondamental. La figure 4.28 illustre ces résultats et le tableau 4.2 récapitule les pentes des droites obtenues pour différents transducteurs et différentes épaisseurs de silice. Des résultats similaires sont obtenus dans les deux matériaux. Pour  $L = 25$  mm, les mesures sont réalisées sur le

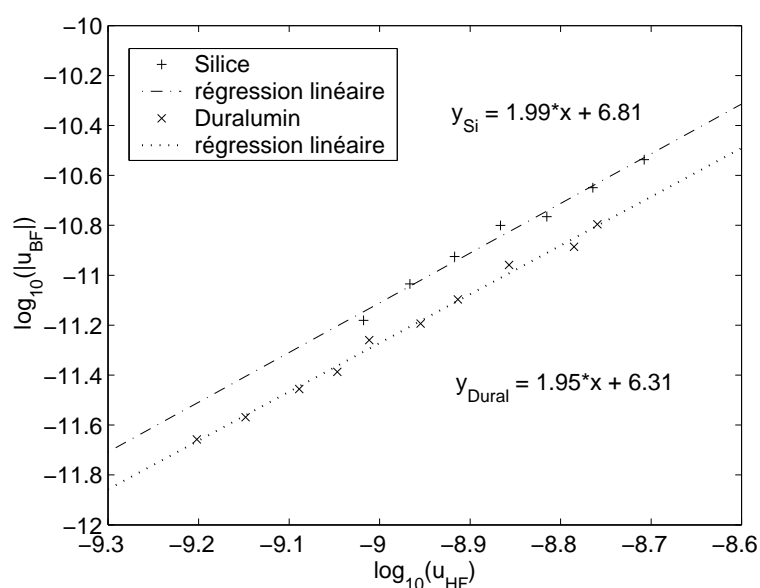


FIG. 4.28 – Dépendance quadratique du déplacement statique en fonction de l'amplitude du fondamental pour 15 mm de duralumin et 20 mm de silice (durée d'impulsion de  $1 \mu s$ ).

transducteur de sabot  $L = 10$  mm, sur lequel est collé un autre échantillon de 15 mm d'épaisseur. La présence d'une interface rend donc ces mesures moins fiables.

Distance de propagation et fréquence du fondamental	$L = 10$ mm, $f_0 = 18,4$ MHz	$L = 20$ mm, $f_0 = 20,4$ MHz	$L = 25$ mm, $f_0 = 18,4$ MHz
Pente de la droite	1,8	2,0	2,0

TAB. 4.2 – Dépendance quadratique du déplacement statique en fonction de l'amplitude du fondamental, pour différentes distances de propagation dans la silice.

### 4.2.6 Dépendance en fonction de distance de propagation et de la durée du train d'ondes

Enfin pour tenter de vérifier l'expression (4.34) donnée par Cantrell, on compare les valeurs expérimentales et théoriques du rapport  $u_{BF}/u_{HF}^2 = \beta_L k_L^2 L/4$ . L'amplitude du créneau que nous obtenons est comparée au maximum de la rampe prévue par l'auteur (équation 4.36). Cantrell donne l'expression du déplacement dans le solide. L'amplitude mesurée avec l'interféromètre est celle du déplacement de la surface libre, il faut donc la diviser par deux (coefficient de transmission solide/vide) pour avoir les valeurs expérimentales correspondantes.

Distance de propagation et fréquence du fondamental	Durée du train d'ondes			Moyenne	Valeur théorique
	0,5 $\mu$ s	1 $\mu$ s	1,5 $\mu$ s		
L = 10 mm, $f_0 = 18,4$ MHz	$-4,1 \cdot 10^6$	$-4,0 \cdot 10^6$	$-3,6 \cdot 10^6$	$-3,9 \cdot 10^6$	$-4,0 \cdot 10^6$
L = 20 mm, $f_0 = 20,4$ MHz	$-7,9 \cdot 10^6$	$-6,6 \cdot 10^6$	$-6,5 \cdot 10^6$	$-7,0 \cdot 10^7$	$-9,8 \cdot 10^6$
L = 25 mm, $f_0 = 18,4$ MHz	$-3,8 \cdot 10^6$	$-3,1 \cdot 10^6$	$-4,4 \cdot 10^6$	$-3,8 \cdot 10^6$	$-9,9 \cdot 10^6$

TAB. 4.3 – Valeurs expérimentales et théoriques du rapport  $u_{BF}/u_{HF}^2$  (en  $m^{-1}$ ) pour différentes distances de propagation, fréquences, durées du train d'ondes.

Les tableaux 4.3 et 4.4 récapitulent les mesures effectuées en fonction de la durée du train d'ondes et de l'épaisseur des échantillons. Pour la silice nous utilisons, comme précédemment les transducteurs munis d'une ligne à retard. Pour le duralumin, le transducteur Panametrics a été collé au salol sur quatre "marches" taillées dans une même plaque. On rappelle que les deux premières lignes du tableau 4.3 sont les plus fiables. Les valeurs théoriques et expérimentales sont du même ordre. Aucune dépendance en fonction de la durée du train d'ondes ne peut être clairement dégagée.

Pour la silice, entre 10 et 20 mm le rapport semble bien doubler, ce qui confirmerait le caractère cumulatif du phénomène. Cependant, la dépendance en fonction de la distance de propagation n'est pas confirmée par les résultats dans le duralumin. Dans ce dernier, l'atténuation vient diminuer les effets non-linéaires cumulatifs. On pourrait penser que, d'une manière analogue à la formation de la pression de radiation dans les fluides, l'atténuation peut, au contraire contribuer à la composante statique du champ (effet de valeur moyenne non nulle sur une période). D'après nos observations, l'atténuation tend plutôt à diminuer l'amplitude du déplacement continu. Cela pourrait expliquer le fait que le rapport des amplitudes (tableau 4.4) varie très peu en fonction de l'épaisseur de l'échantillon. Par ailleurs, pour les distances de propagation les plus grandes (10 et 20 mm) la diffraction pourrait être en cause, puisque la distance de Fresnel est de l'ordre de 10 mm. La

répartition spatiale du déplacement est difficile à mesurer et la composante BF du champ ne peut être mesurée que sur une surface de quelques millimètre carrés.

Distance de propagation ( $f_0 = 22,5$ MHz)	Amplitudes			Rapport $u_{BF}/u_{HF}^2$	
	expérimental		théorique	expérimental	théorique
	$u_{HF}$ (nm)	$u_{BF}$ (nm)	$u_{BF}$ (nm)		
L = 5 mm	2,15	0,018	0,004	$3,8 \cdot 10^6$	$3,5 \cdot 10^6$
L = 10 mm	2,72	0,028	0,013	$3,9 \cdot 10^6$	$6,9 \cdot 10^6$
L = 15 mm	2,18	0,016	0,012	$3,4 \cdot 10^6$	$1,0 \cdot 10^7$
L = 20 mm	1,85	0,012	0,012	$3,5 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^7$

TAB. 4.4 – Valeurs expérimentales et théoriques (équation 4.34) des déplacements et du rapport  $u_{BF}/u_{HF}^2$  (en  $m^{-1}$ ) pour différentes distances de propagations dans le duralumin.

## Conclusion

Les différences de comportement observées, par rapport aux résultats des autres auteurs, tiennent peut-être à la configuration du montage : nos mesures sont effectuées localement et le transducteur peut rayonner en milieu ouvert, alors qu'à l'inverse chez Yost et Cantrell, le détecteur capacitif et le transducteur qui lui fait face couvrent toute la surface de l'échantillon. Quoiqu'il en soit le détecteur capacitif et l'interféromètre sont aux limites de leur sensibilité et il serait aventureux de prétendre présenter une réponse définitive quant à la dépendance en fonction de la distance. Les valeurs du déplacement et du coefficient de non-linéarité présentées par Cantrell semblent assez crédibles. Nos mesure du déplacement BF sont entachée d'une forte incertitude et ne permettent pas de calculer une valeur de  $\beta_L$ , d'autant plus qu'elle dépendrait du modèle adopté.

Par contre, il nous semble que la forme de l'impulsion que nous obtenons est plus fiable. La dépendance du déplacement en fonction du paramètre de non-linéarité et de l'amplitude du fondamental ont été confirmées. Pour espérer clore les débats sur l'expression du déplacement, il serait probant de comparer les deux techniques sur les mêmes échantillons et dans des conditions d'excitation identiques. Par ailleurs, il semble nécessaire d'introduire l'atténuation dans le modèle.



# Conclusion

La comparaison des descriptions formelles de l'acoustique non-linéaire des fluides et des solides a été menée de manière à permettre une résolution commune pour les ondes de compression, dans le cadre de l'approximation quadratique. Il est ainsi possible de distinguer les différentes origines de la non-linéarité et leurs contributions respectives dans les coefficients des équations différentielles. La non-linéarité du tenseur des déformations Lagrangien, conjuguée au changement de coordonnée joue un rôle analogue à la convection dans les fluides. La contribution dite thermodynamique des fluides (paramètre  $B/A$ ) est analogue à celle dite physique des solides (constantes élastiques du troisième ordre). La résolution de l'équation d'onde quadratique par une méthode en perturbation dans le cas de l'interaction d'ondes pose les bases de la méthode de mesure : l'interaction colinéaire d'ondes longitudinales de fréquences très différentes est analogue à une modulation de phase de l'onde de plus basse fréquence.

La méthode de mesure de coefficients de non-linéarité mise en oeuvre au cours de ce travail constitue une alternative intéressante dans différents milieux. Pour les mesures dans les solides, une démodulation analogique de train d'ondes a été mise au point, une version numérique peut lui être substituée grâce à un dispositif de synchronisation. Il est possible de s'affranchir partiellement des difficultés d'adaptation d'impédance grâce à un circuit d'émission-réception fonctionnant par commutation. Le dispositif expérimental dédié aux fluides a permis de réaliser des mesures dans un mélange qui ouvrent la voie à l'étude de solutions plus complexes.

Enfin, l'étude des variations du coefficient de non-linéarité des solides (en fonction des sollicitations thermiques ou mécaniques, de la composition, de la densité de dislocations) présentera un plus grand intérêt si elle est corrélée avec d'autres indicateurs (mécaniques en particulier ou de nature microscopique). Les mesures effectuées sur le verre recuit ou trempé n'ont pas montré de variations significatives du coefficient de non-linéarité, les températures utilisées étant trop faibles pour modifier la micro-structure. Elles seraient suffisantes pour d'autres matériaux, comme les alliages métalliques, qui ont déjà fait l'objet de nombreuses études.

Enfin, l'étude la propagation non-linéaire des ondes de cisaillement dans les gels nous a poussé à nous intéresser aux définitions des modules élastiques d'un solide mou. Leur utilisation simplifie l'écriture des équations différentielles propres aux ondes de cisaillement. Les principales caractéristiques (composantes fréquentielles impaires) de la non-linéarité cubique sont illustrées par ces expériences et concordent bien avec le modèle numérique de l'équation de Burgers modifiée. L'estimation du paramètre de non-linéarité par comparaison avec le modèle réalisée précédemment [121]

avec une onde simple choquée n'a pas pu être améliorée en utilisant l'interaction de deux composantes fréquentielles. Cette configuration met en jeu les variations de l'atténuation en fonction de la fréquence autant que les effets non-linéaires. Pour cette raison l'accord avec le modèle est moins satisfaisant. En ondes planes, l'amélioration des conditions d'excitation assurerait d'obtenir une mesure plus précise du coefficient de non-linéarité. A l'aide d'une source de dimension réduite, nous avons observé une composante à la fréquence double, polarisée perpendiculairement au fondamental, qui confirme qualitativement les prévisions d'un modèle de faisceau gaussien (qui prend en compte le couplage des polarisations et la diffraction). Le palpeur d'élastographie 1D offre quant à lui une configuration applicable. Dans le champ proche de cette source, on observe des effets non-linéaires marqués, et là encore des combinaisons de fréquences paires et impaires, car la déformation n'est pas un cisaillement pur. La modélisation du rayonnement non-linéaire de cette source semble difficile, et la mesure des paramètres non-linéaires d'autant plus, mais des études comparatives sont envisageables.

L'étude des différentes démodulations apporte également une amélioration aux mesures optiques de fortes pressions. Pour les niveaux faibles (une voie) et modérés (deux voies), la version analogique reste la plus précise. Les techniques numériques présentent l'avantage de leur souplesse d'utilisation (changement de fréquence de porteuse, de bande passante) et sont plus robustes pour de grands indices de modulation de phase (fortes pressions). Une meilleure quantification des signaux permettrait d'étendre l'utilisation des détections numériques aux faibles déplacements et d'éviter les artefacts qui interviennent lors du déroulement de la phase. Le rôle des membranes et de la modulation d'amplitude du faisceau a été étudié. Une membrane plus fine, plus rigide et dont la tension soit bien contrôlée réduirait ces effets, rendant possible la mesure de pressions plus élevées.

La réduction de la bande passante de l'interféromètre améliore la sensibilité aux très faibles déplacements. Nous avons ainsi mesuré la composante de basse fréquence qui accompagne un train d'ondes, lorsqu'il traverse une interface. Ce déplacement induit par la contrainte de radiation reproduit l'enveloppe du train d'ondes de haute fréquence. Le sens du déplacement dépend du signe du paramètre de non-linéarité du milieu, son amplitude croît comme le carré de l'amplitude de l'onde incidente. L'imprécision des mesures ne permet pas de statuer sur l'expression du déplacement statique (dépendance en fonction de la distance de propagation) et l'influence de la durée de l'impulsion n'est pas confirmée. Du fait du nombre réduit de modèles disponibles et exploitables, il ne nous a pas été possible d'établir une comparaison satisfaisante avec la théorie. Néanmoins ces mesures confirment partiellement les rares résultats expérimentaux publiés (dépendance en fonction du signe du paramètre de non-linéarité).

## Annexe A

# Relations entre les modèles micro- et macroscopique de l'élasticité

### A.1 Lois de comportement des fluides

Pour établir une équation de propagation non-linéaires, le choix d'une loi de comportement est important<sup>1</sup>. Il existe de nombreuses formes d'équation d'état des fluides; en les développant à l'ordre deux, on trouve par exemple la correspondance entre les gaz et les liquides (parfaits). L'expression du coefficient de non-linéarité à partir des données thermodynamiques passe par la correspondance entre les différentes équations d'état. Ces développements visent également à modéliser le comportement des mélanges. Dans le but de calculer le coefficient de non-linéarité, nous rappelons dans la section suivante, deux modèles utilisés pour les liquides.

Coppens [7] utilise un coefficient de compressibilité adiabatique  $K_s$  dépendant de la masse volumique et défini de la manière suivante :

$$\frac{1}{K_s} = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\rho}{\rho_0} \left[ A_l + B_l \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Il regroupe donc les effets linéaires et non-linéaires quadratique et permet une comparaison avec les données des tables thermodynamiques, qui donnent le plus souvent le coefficient de dilatation thermique et les compressibilités isotherme et adiabatique :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, T=T_0} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p, T=T_0}, \quad (\text{A.2})$$

$$K_{lT} = \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T, \rho=\rho_0}, \quad (\text{A.3})$$

$$K_{ls} = \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \rho=\rho_0} = A_l = \rho_0 c_0^2, \quad (\text{A.4})$$

---

<sup>1</sup>Historiquement, la définition de la vitesse du son à partir de la loi isotherme dite de Boyle fut abandonnée au profit d'une définition, basée sur une équation d'état adiabatique (Laplace 1816) [1], qui prédit une célérité en accord avec l'expérience.

## Loi de Ballou

Pour les fluides, Ballou [163] a proposé une relation empirique selon laquelle :

$$\frac{B_l}{A_l} \propto \frac{1}{c}, \quad (\text{A.5})$$

soit

$$\frac{B_l}{A_l} = \left( \frac{B_l}{A_l} \right)_0 + \frac{d(B_l/A_l)}{d(1/c)_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} \right), \quad (\text{A.6})$$

ou l'indice 0 indique les valeurs des constantes à température nulle [164]. Si le coefficient  $\frac{d(B_l/A_l)}{d(1/c)_0}$  est positif, cette relation peut s'interpréter de la manière suivante : pour obtenir des effets non-linéaires d'amplitude comparable (variation de vitesse du son  $\beta v$ ), plus la raideur d'un matériau est importante plus les niveaux de pression devront être importants (car le coefficient est plus faible). Si l'établissement de cette loi repose sur la compilation de résultats expérimentaux dans les fluides (eau, alcools, et à l'origine les métaux liquides) elle ne semble pas être vérifiée pour les solides.

Cette relation est évoquée par différents auteurs, soit pour exprimer le coefficient de non-linéarité à partir d'un modèle microscopique, soit pour confronter le modèle avec des résultats expérimentaux.

## Équation de Tait

Pour les liquides l'équation de Tait est fréquemment utilisée [6]. Elle s'écrit :

$$p = P_1 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\mu - P_2,$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont des paramètres d'ajustement homogènes à des pressions et  $\mu$  un exposant. Cette loi empirique est utilisée par Wang [1] pour la pression de radiation dans les fluides, par Emery [111] dans le cas des mélanges et Hartmann établi clairement le lien avec le coefficient  $B/A$  qu'il calcule à partir des données thermodynamiques.

Hartmann [165] calcule, à partir de l'équation de Tait, donnée sous la forme (A.7), la célérité et le coefficient de non-linéarité définis par l'équation adiabatique classique.

$$\frac{dV}{dp} = - \frac{K_1}{K_2(T) + P} \quad (\text{A.7})$$

où  $p$  et  $V$  sont respectivement la pression et le volume spécifique.

Les deux termes  $\left(\frac{B}{A}\right)'$  et  $\left(\frac{B}{A}\right)''$  de l'équation (2.1) sont obtenus à partir des paramètres de l'équation de Tait, eux même obtenus grâce à un ajustement sur les données expérimentales pour différents alcanes (chaînes de 5 à 16 carbonées) en fonction de  $p, V$  et  $T$ . Ces calculs permettent d'estimer  $B/A$  avec une incertitude de 10%. L'accord est meilleur pour les longues chaînes et les fortes pressions. Les auteurs comparent ces résultats avec ceux obtenus d'une manière similaire mais avec une équation d'état de la forme  $pV^5 = T^{3/2} - \ln V$ . L'équation de Tait conduit à un meilleur accord avec les mesures, sauf pour les chaînes les plus courtes. L'erreur plus importante sur la composante  $\left(\frac{B}{A}\right)''$ , quelle que soit l'équation d'état utilisée, indique que le principal problème réside dans le calcul des variations de célérité avec la température.

Par ailleurs, les alcanes considérés dans cette publication ne semblent pas se plier à la règle de Ballou. Ces résultats confirment la nécessité d'un traitement plus fondamental des interactions qui déterminent le comportement macroscopique des liquides. L'établissement d'une loi générale comme celle de Tait ou de Ballou ignore, comme l'a montré Frank [115], la complexité des interactions moléculaires.

### Approche microscopique, constituants en interaction

Les difficultés surviennent donc lorsqu'il s'agit de tenir compte d'éventuelles interactions entre les constituants (aussi bien pour un fluide pur que pour un mélange), elles peuvent modifier les volumes molaires, les pressions partielles sans forcément modifier la composition par réaction chimique.

### Potentiel d'interaction, distribution de paire

L'approche statistique donnant l'expression de l'énergie interne d'un matériau, utilise une distribution de paires  $g(r)$  qui caractérise la distance moyenne entre les centres de deux molécules. Nous reprenons ici une présentation simplifiée de ce type de développement<sup>2</sup>. Le nombre de molécules dont le centre se trouve dans une coque sphérique comprise entre  $r$  et  $r + dr$ , par rapport au centre d'une molécule donnée est :

$$\frac{N}{V}g(r)4\pi r^2 dr, \quad (\text{A.8})$$

où  $N$  est le nombre moyen de molécules contenues dans un volume  $V$ . La compressibilité isotherme s'exprime :

$$kT \frac{N}{V} K_{IT} = 1 + 4\pi \frac{N}{V} \int_0^\infty [g(r) - 1] r^2 dr. \quad (\text{A.9})$$

L'énergie d'interaction entre deux molécules  $u(r)$  peut prendre différentes formes, la plus courante étant le potentiel de Lennard-Jones. Cette approximation permet notamment d'expliquer l'existence même des états liquide et solides (en présence d'agitation thermique, c'est-à-dire pour  $T > 0^\circ\text{K}$ ) mais également la tension superficielle (tendance des molécules à s'entourer d'un maximum de voisines, minimisant ainsi la surface exposée). L'énergie d'interaction de  $n$  molécules est, dans le cas le plus simple décomposée en somme des énergies d'interaction de paires, elle s'exprime dans ce cas par :

$$U = \frac{3}{2}NkT + \frac{N^2}{2V} \int_0^\infty u(r)g(r)4\pi r^2 dr. \quad (\text{A.10})$$

La distribution  $g(r)$  peut être obtenue expérimentalement par diffusion de rayons X, théoriquement à partir de  $u(r)$  ou analytiquement (chimie quantique) dans des cas simples (monoatomique) ou encore numériquement lorsque la taille et la forme des motifs sont complexes (méthodes Monte-Carlo). L'énergie d'interaction peut ne pas être isotrope, comme dans le cas de liaisons polaires (hydrogène ou Van der Waals), c'est la cas pour l'eau, ce qui complique l'expression de l'énergie. Le passage à l'échelle macroscopique doit rendre compte de l'isotropie observée à cette échelle et

<sup>2</sup>Encyclopédie Universalis, version électronique

des propriétés spécifique (structure lacunaire de la glace, masse spécifique, anomalie du coefficient de dilatation de l'eau).

### Expression des paramètres macroscopiques $c_0$ et $\beta$

Hartmann [164] utilise un potentiel de Mie (A.11) pour exprimer l'énergie interne qu'il assimile à l'énergie d'interaction d'une paire (Il considère alors que toutes les paires possèdent la même énergie d'interaction, ou qu'il existe un potentiel moyen pour une concentration donnée). Il exprime le coefficient de non-linéarité en fonction des paramètres de ce potentiel<sup>3</sup> :

$$U = \frac{U_0}{n-m} \left[ m \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-n} - n \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m} \right] \quad (\text{A.11})$$

$U_0$  est alors la chaleur latente de vaporisation du liquide à  $T = 0^\circ\text{K}$  (plus le potentiel est "profond" ( $U_0$  grand), plus l'énergie nécessaire au passage à l'état gazeux est importante). Les puissances  $m$  et  $n$  sont choisies de sorte que la partie répulsive soit plus raide (ce qui correspond à une force répulsive plus forte) et la partie attractive tende vers zéro (force nulle à l'infini). La vitesse du son s'exprime à partir de la définition (1.20) :  $c^2 = K_{ls}V$ , les relations (1.27) et (A.3) permettent de l'exprimer en fonction de la pression. Cette dernière établit le lien avec l'énergie interne :  $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$  (l'introduction de la compressibilité isotherme permet le passage à l'énergie interne). Il obtient finalement :

$$c^2 = \frac{c_p}{c_v} V^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_T. \quad (\text{A.12})$$

Il s'agit ici de la célérité effective, qui comprend les variations induites par la non-linéarité (la célérité  $c_0$  en est une valeur particulière, à la température et à la pression de l'état de référence). Le choix de l'état de référence est primordial, notamment pour la comparaison avec la loi de Ballou.

Pour une symétrie sphérique le volume spécifique  $V$  et  $r$  sont reliés part :

$$\frac{r}{r_0} = \left( \frac{V}{V_0} \right)^{1/3},$$

et (A.12) devient :

$$\frac{c^2}{U_0} = \frac{mnc_p}{9(n-m)c_v} \left[ m \left( \frac{V}{V_0} \right)^{n/3} - n \left( \frac{V}{V_0} \right)^{m/3} \right]. \quad (\text{A.13})$$

En développant (A.13) autour de  $V = V_0$  ( $V_0$  est le volume spécifique à  $T = 0^\circ\text{K}$ ), il vient :

$$\frac{c^2}{U_0} = \frac{RTc_p}{MU_0c_v} \frac{m+n+1}{2} + \frac{mnc_p}{9c_v}, \quad (\text{A.14})$$

où  $M$  est la masse molaire. En négligeant le premier terme de la partie droite de l'équation précédente ( $T = 0^\circ\text{K}$ ) :

$$\frac{c_0^2}{U_0} = \frac{mnc_p}{9c_v}. \quad (\text{A.15})$$

<sup>3</sup>Il donne aussi l'expression de l'exposant de Rao  $K$ , tel que  $c^{1/K}/\rho = cste$  (forme alternative de l'équation d'état).

Les variations de célérité sous l'effet d'un changement de volume permettent d'exprimer  $B_l/A_l$  en fonction des paramètres du potentiel d'interaction. A partir des équations (1.24), (1.20), le rapport  $B_l/A_l$  s'écrit

$$\frac{B_l}{A_l} = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial (c^2)}{\partial \rho} = 2\rho_0 \frac{\partial \ln c}{\partial \rho}. \quad (\text{A.16})$$

Le changement de variable  $d\rho = -\rho d \ln V$  (obtenu à partir de  $\rho = 1/V$ ) donne (A.17), en se basant sur les définitions données au paragraphe 1.2.1.

$$\frac{B_l}{A_l} = -2 \frac{\rho_0}{\rho} \frac{d \ln(c)}{d \ln(V)}. \quad (\text{A.17})$$

Hartmann utilise une relation donnée par Moelwyn-Hughes (voir [164] pour les références) :

$(\frac{B}{A})'' / (\frac{B}{A})' = \frac{1}{\gamma} - 1$  et en déduit (A.18a). Cette expression repose sur une relation entre les variations de célérité avec la température d'une part et la pression d'autre part. Avec (A.13), il obtient finalement (A.18b).

$$\frac{B_l}{A_l} = -2 \frac{d \ln(c)}{d \ln(V)} \quad (\text{A.18a})$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m(m+3) - n(n+3) (V/V_0)^{(m-n)/3}}{(m+3) - (n+3) (V/V_0)^{(m-n)/3}} \quad (\text{A.18b})$$

A ce stade, Hartmann [164] postule que  $B/A$  est proportionnel à  $1/c$  et calcule la pente de cette relation. Frank [115], résout le couple d'équations (A.13) et (A.18) par une méthode numérique (algorithme de Newton-Raphson<sup>4</sup>) et compare la courbe  $B_l/A_l = f(10\sqrt{U_0 c_p/c_v}(1/c))$  obtenue avec la loi linéaire de Ballou. L'accord est satisfaisant pour  $B_l/A_l$  compris dans l'intervalle [5, 7].

Pour une forme de potentiel donnée ( $n=6$  et  $m=9$  dans les deux articles cités plus haut), on peut exprimer la variation de volume  $V/V_0$  en fonction de  $c^2$ ,  $U_0$  et  $c_p/c_v$  en résolvant l'équation (A.13). Le nombre des solutions varie en fonction des exposants choisis. Certaines d'entre-elles sont complexes (au regard des valeurs de  $U_0$  et  $c$  envisagées), donc irréalistes.

On notera que dans ce modèle les variations de pression et de température sont toutes deux prises en compte par l'intermédiaire des variations de volume qu'elles induisent ( $c = c(V)$ ). Cette hypothèse qui implique que les variations de célérité avec la température et la pression sont reliées est mise en défaut par les résultats expérimentaux. Les hypothèses nécessaires à l'expression du coefficient de non-linéarité en fonction des exposants du potentiel d'interaction sont donc assez fortes (température nulle, expression de toutes les variations de célérité en fonction du volume). Il nous semble optimiste d'espérer aboutir à une description fidèle du passage micro-macro sans faire intervenir le caractère statistique des propriétés macroscopiques.

## A.2 Approche microscopique de l'élasticité des solides

Dans le développement de la mécanique, la modification de la loi de Hooke s'est imposée pour rendre compte du comportement réel (observé) des matériaux. Des explications plus fondamen-

<sup>4</sup>voir <http://rfv.insa-lyon.fr/~joliion/ANUM/node11.html>,  
ou <http://lumimath.univ-mrs.fr/~jlm/cours/analnum/node19.html>

tales de cette réponse macroscopique se développent pourtant parallèlement, dès le XIX<sup>ème</sup> siècle, avec les travaux de Cauchy, basés sur un modèle discret bien adapté aux cristaux. La comparaison des ces modèles avec la description en constantes élastiques de la mécanique des milieux continus (identification des développement de l'énergie élastique) suscite de nombreux travaux. Ces résultats théoriques établissent l'équivalence de ces deux approches et précisent l'application des considérations de symétrie [166], [167]. Depuis, des modélisations (rendues possibles par les progrès de l'informatique) ont permis d'obtenir les valeurs des constantes élastiques à partir des potentiels inter-atomiques<sup>5</sup>.

C'est au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle que les concepts de contraintes et de déformations du modèle continu sont repris à l'aide de modèles microscopiques [169] (Navier (1827), Cauchy (1827,1828), Born et von Karman (1912-1913)). La principale différence entre ces manières de calculer l'énergie élastique, réside dans le choix de la variable qui décrit les déformations : les dimensions inter-atomiques (la distance entre deux points du réseau cristallin) permettent de calculer la variation d'énergie de la liaison (ou celle d'un volume de matière) grâce au potentiel d'interaction. Dans l'approximation linéaire, les noeuds du réseau s'écartent peu de leur position d'équilibre et ce potentiel peut être assimilé à une parabole (la relation contrainte-déformation est alors linéaire). Pour des déformations d'amplitude finie cette hypothèse ne tient plus et, suivant la nature du solide (solide ionique, métaux), les valeurs différentes des exposants du potentiel interviendront dans l'expression de l'énergie de déformation.

L'énergie du solide résulte de la somme sur l'ensemble des couples de particules, de l'énergie d'interactions (à deux corps) d'une force centrale. Born et Huang (1954) généralisent ces résultats et calculent l'énergie d'un réseau toujours à partir d'interaction de type force centrale mais prennent en compte des interactions avec les seconds et troisièmes voisins. Pour comparer les paramètres du modèle microscopique avec les constantes élastiques on utilise la méthode des grandes longueurs d'onde (la distance entre les particules est remplacée par un champ continu de déplacement)<sup>6</sup>.

Ces développements sont reliés avec les différents systèmes de constantes (Wallace [170], Birch [171]) et doivent également vérifier des conditions d'invariance par rotation et translation. Keating [172] revient sur les travaux de Born et expose l'application des conditions d'invariance à l'énergie et le calcul des constantes élastiques. Il calcule des valeurs des constantes du deuxième ordre très proches des valeurs expérimentales. Il semble nécessaire de prendre en compte les deuxième voisins (au moins) pour obtenir des résultats corrects. Pour ne plus se restreindre au premiers voisins il faut introduire de nouvelles constantes de force dont il discute le lien avec les constantes élastiques. Les conditions de stabilité donnent des relations entre les constantes élastiques (relations de Cauchy),

---

<sup>5</sup>La définition des constantes élastiques repose sur l'hypothèse de continuum, qui fut opposée à la vision atomiste de la matière. Il s'agit d'une question d'échelle, le traitement microscopique s'impose pour des systèmes de petite taille et la mécanique des milieux continus est un outil efficace pour décrire le comportement élastique à l'échelle macroscopique. On retrouve cette problématique dans des travaux portant sur les verres et les amorphes, qui soulèvent la question de la validité de l'hypothèse de continuum. Tanguy [168] s'y intéresse dans le cas des verres ; des simulations numériques lui permettent de calculer l'échelle à partir de laquelle il est possible de définir des paramètres macroscopiques (les constantes élastiques ne doivent pas dépendre de la taille du domaine de calcul).

<sup>6</sup>Cette méthode est à rapprocher de l'exemple pédagogique d'une chaîne de masses et de ressorts.

qui ont parfois été mises en défaut par les résultats expérimentaux (notamment parce qu'elles s'appuient sur l'hypothèse d'un potentiel harmonique).

L'anharmonicité des cristaux explique certaines propriétés thermodynamiques et partiellement les propriétés élastiques (travaux de Born et Von Karman au début du siècle). Un potentiel d'interaction non quadratique correspondrait à la non-linéarité élastique.

L'exemple suivant [171], de calcul de l'énergie libre en fonction des exposants du potentiel d'interaction, illustre la méthode par laquelle les développements de l'énergie élastique peuvent être identifiés. Birch trouve une relation analogue à celle obtenue par Hartman dans un fluide puisqu'il se place dans le cas d'une pression hydrostatique. Le module d'incompressibilité s'exprime :

$$K = -V_0 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \quad (\text{A.19})$$

et ses variations en fonction de la pression :

$$\left( \frac{\partial K}{\partial P} \right)_{P=0} = 1 - \frac{2(3C_{111} + C_{123} + 6C_{112})}{(C_{11} + 2C_{12})} = V_0 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right) \quad (\text{A.20})$$

ou  $F$  est l'énergie libre de Helmholtz qui s'exprime en fonction du potentiel d'interaction. Pour deux particules isolées un potentiel de Mie donne :

$$\left( \frac{\partial K}{\partial P} \right)_{P=0} = \frac{m+n+9}{3} \implies \frac{2(3C_{111} + C_{123} + 6C_{112})}{(C_{11} + 2C_{12})} = -3 - \frac{m+n}{2} \quad (\text{A.21})$$

Toujours pour une pression hydrostatique, comme précédemment, la distance relative peut être exprimée en fonction de la déformation :  $r_0/r = (V_0/V)^{1/3} = \sqrt{1-2\epsilon} = (1-2S)^{-1/2}$  ( $\epsilon$  la déformation d'Euler et  $S$  celle de Lagrange). L'énergie libre devient :

$$\rho_0 F = A \left[ \frac{1}{m} \left( \frac{r_0}{r} \right)^m - \frac{1}{n} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n \right] \quad (\text{A.22})$$

$$= cste + A \left( (n-m) \frac{\epsilon^2}{2!} - [(n-2)(n-4) - (m-2)(m-4)] \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots \right) \quad (\text{A.23})$$

Une combinaison de constantes élastique permet donc d'accéder à la somme des exposants ( $n+m$ ), l'auteur montre que leurs valeurs sont en général plus faibles que celles communément admises (6 et 9 ou 6 et 12 pour Lennard-Jones). Pour  $m=2$  et  $n=4$ , on retrouve un potentiel parabolique (A.24a), et pour  $m=2$  et  $n=6$  une relation cubique en  $\epsilon$  (A.24b).

$$\rho_0 F = cste + A\epsilon^2 \quad (\text{A.24a})$$

$$\rho_0 F = cste + A'\epsilon^2 \left( 1 - \frac{2}{3}\epsilon \right) \quad (\text{A.24b})$$

Ces résultats ne sont rigoureusement valable qu'à  $T = 0^\circ\text{K}$ .

Ces modèles permettent de calculer les modules élastiques à partir du potentiel d'interaction. Réciproquement, les mesures de constantes élastiques sont utilisées comme paramètres d'entrée de simulation numériques (modélisation à l'échelle mésoscopique) ou pour vérifier la validité des

résultats qu'elles fournissent<sup>7</sup>. Hiki et Granato [173] comparent les mesures de constantes élastiques du deuxième et troisième ordre avec un potentiel de Born-Mayer ( $V(r) = Ae^{-B\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}$ ) dans le cas des métaux Ag, Cu et Au. Seuls les plus proches voisins sont pris en compte, le cas des métaux est en effet bien plus complexe (d'autant plus pour  $T \neq 0$ ) car les potentiels d'interaction doivent prendre en compte les électrons des couches externes (le cas des métaux alcalins est distinct de celui des métaux nobles). Ils estiment ainsi l'ordre de grandeur des constantes élastiques du quatrième ordre. Blackman [174] établit cette correspondance, toujours pour un cristal cubique (centré ou faces centrées), avec un potentiel Coulombien.

Mentionnons également la relation entre les coefficients de Grüneisen et les constantes élastiques, donnée par différents auteurs [175], [176], (ces coefficients sont introduits lorsqu'on considère un potentiel anharmonique). Ces coefficients traduisent la dépendance des fréquences de vibration du réseau cristallin en fonction des déformations. Ils sont définis [175], (et de manière analogue pour les ondes de surface [177]) comme suit pour une onde de vecteur  $k$  :

$$\gamma_{ij}(\mathbf{k}) = -\omega_k^{-1} \left. \frac{\partial \omega_k}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_{\epsilon_{ij}=0}, \quad (\text{A.25})$$

ou  $\epsilon_{ij}$  est la déformation homogène. L'identification avec les constantes élastiques fait appel au lien entre les vitesses naturelles (définies pour les expériences d'acousto-élasticité) et les fréquences des modes [176], [178].

La relation entre les fonctions thermodynamiques  $U$  et  $F$  donnent alors les relations suivantes entre les constantes élastiques isotherme et adiabatiques d'un cristal cubique [178] (en notation de Voigt) :

$$C_{11}^s - C_{11}^T = C_{12}^s - C_{12}^T = \frac{\gamma^2 T C_v}{V_0}, \quad (\text{A.26a})$$

$$C_{44}^s = C_{44}^T, \quad (\text{A.26b})$$

où  $\gamma$  est le paramètre de Grüneisen donné par (A.27).

$$\gamma = \frac{V_0 \alpha K_T}{C_v} = \frac{V_0}{T} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \right) / \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right), \quad (\text{A.27})$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'expansion thermique,  $K_T$  le module d'élasticité volumique, et  $V_0$  le volume molaire.

La différence entre les constantes adiabatiques et isothermes caractérise la dissipation de l'énergie mécanique. Elle est donc liée à l'évolution des fréquences du réseau (phonons thermiques). L'approximation harmonique ne rend pas compte des variations de fréquence de ces modes avec la température, l'approximation quasi-harmonique ne donne pas une dépendance explicite mais elle intervient à travers les variations des dimensions du réseau (cette hypothèse est proche de celle formulée par Hartman dans les fluides). Cain [67] calcule ce coefficient dans des alliages Cu-Al, pour

<sup>7</sup>Ce type de calcul s'intéresse le plus souvent aux propriétés électriques des matériaux (substrats destinés à la microélectronique) qu'aux propriétés mécaniques.

différentes proportions des constituants, à partir de mesures de constantes élastiques du troisième ordre, il en déduit leur évolution en fonction de la température.

Les calculs de constantes élastiques (du second ordre) évoqués dans ce qui précède reposent sur l'effet moyen, à l'échelle méso- ou macroscopique d'un potentiel d'interaction non-harmonique. La non-linéarité de la relation contrainte-déformation est donc attribuée à la nature des constituants et de leurs interactions (choix d'un potentiel). En aucun cas il n'est fait état des inhomogénéités de la structure microscopique : de la présence de défauts (du réseau) ou d'impuretés, des conditions d'élaboration particulières (contraintes résiduelles) ou encore du caractère amorphe. Aussi, existe-t-il une littérature abondante concernant l'effet des dislocations sur le comportement mécanique. Comme dans le cas des joints de grains ou des micro-fissures ces effets peuvent également déterminer la réponse non-linéaire du milieu (voir les modèle de non-linéarité "non-classique" rappelés dans l'annexe B).

Les développements plus récents du formalisme discret [169] permettent de décrire l'état de référence du matériau, qu'on ignore la plupart du temps en mécanique des milieux continus. Les effets du mouvement des dislocations, ou des réarrangements internes sont contenus dans l'énergie de l'état de référence (ordre zéro du développement de l'énergie interne). Cet aspect est important pour tous les matériaux, mais plus particulièrement pour les amorphes dont l'état de référence (obtenu par trempe le plus souvent) détermine les propriétés mécaniques telles que la dureté ou la fragilité. Nous aurons l'occasion de l'évoquer au sujet des gels, dont la réponse à des déformations de cisaillement est déterminée par les tensions internes entre les chaînes qui apparaissent au cours de la prise [169](p.72 et parties II et III).

### A.3 Approche statistique de l'élasticité des solides mous

Le développement depuis le début du XXème de modèles, inspirés de la dynamique des réseaux cristallins, décrivant la micro-structure de milieux complexes (gels, amorphes, polymères) a donné lieu à nombre de travaux prestigieux (Flory, De Gennes). Nous reprenons la présentation donnée par Mase [125], qui se réfère aux travaux de Mooney et Rivlin.

L'approche exposée dans l'article de Mooney [102] (et reprise par [125]) repose sur des considérations thermodynamiques et statistiques. A partir de l'énergie libre (A.28), on cherche à exprimer l'effet des changements de configuration sur les forces d'interaction. On pourra ainsi exprimer le module de cisaillement en fonction des paramètres de la distribution des chaînes (dans d'autres modèles, plus adaptés aux polymères liés de manière covalente, les modules élastiques sont proportionnels au nombre de liaisons par unité de volume).

$$F = E + ST, \quad (\text{A.28})$$

avec  $E$  l'énergie interne,  $T$  la température et  $S$  l'entropie. La force créée par l'étirement d'une chaîne de longueur  $L$  s'exprime par :

$$f = \left. \frac{\partial F}{\partial L} \right|_{T,V} = \frac{\partial E}{\partial L} - T \frac{\partial S}{\partial L}, \quad (\text{A.29})$$

Dans un solide cristallin le deuxième terme de l'expression (A.29) est nul car les positions relatives des différents constituants restent inchangées. Pour un caoutchouc, c'est le premier terme qu'on néglige, on considère alors que la déformation ne modifie pas l'énergie interne (ou plutôt que les variations d'entropie sont prépondérantes). L'allongement des chaînes, en réduisant le nombre de configurations possibles se traduit par une diminution de l'entropie. L'entropie  $S_m$  s'exprime à partir de la probabilité d'une fin de chaîne de se trouver dans un élément de volume donné, autrement dit elle dépend de la distance moyenne entre les deux extrémités, caractéristique de la conformation :

$$S_m = S_0 + k \ln(P(r)). \quad (\text{A.30})$$

La probabilité pour que la fin d'une chaîne se trouve dans un volume  $dV$  repéré par sa position  $r$  est donnée par :

$$P(r)dr = \frac{e^{-(d/r)^2}}{(\sqrt{\pi}d)^3} dr, \quad (\text{A.31})$$

ou  $d$  est un paramètre de la distribution qui s'exprime en fonction de la longueur (individuelle)  $l$  des  $n$  segments de la chaîne :

$$d = \sqrt{\frac{2n}{3}} l. \quad (\text{A.32})$$

Finalement, la force de traction d'une chaîne simple est donnée par

$$f = \frac{2kT}{d^2} r^2. \quad (\text{A.33})$$

La travail résultant de la force de réaction des chaînes lors d'une élongation triaxiale ( $\lambda_{1,2,3}$ ) s'obtient par sommation des travaux de (A.33) sur les trois directions d'une part, puis sur l'ensemble des  $N$  chaînes d'autre part.

$$W = \frac{V\mu}{2} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3], \quad (\text{A.34})$$

cette relation travail-élongation définit le module de cisaillement  $\mu$  qui s'exprime à partir des caractéristiques de la distribution des chaînes :

$$\mu = NkT \frac{\langle r^2 \rangle_i}{\langle r^2 \rangle_0} \text{ avec } N = \frac{n}{V}, \quad (\text{A.35})$$

où  $\langle r^2 \rangle_i = nl^2$  est la distance moyenne séparant les extrémités d'une chaîne placée dans un ensemble de  $N$  chaînes; l'indice zéro indiquant la distance moyenne pour une chaîne seule (le milieu est supposé isotrope).

Pour une élongation uni-axiale  $\lambda_1 = \lambda$  (qu'on ne confondra pas avec la constante de Lamé), on aura  $\lambda_1 = \lambda$  et  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda}$ . L'incompressibilité du milieu se traduit par la relation :  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$  et le travail des chaînes s'écrit alors :

$$W = \frac{V\mu}{2} \left[ \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right]. \quad (\text{A.36})$$

Cette forme de la relation énergie-déformation définit les matériaux néo-hookeen. On retrouvera un résultat identique par l'approche "classique" du paragraphe suivant, où  $\mu$  est défini comme

un module *a priori*, sans prendre en compte l'origine microscopique de l'élasticité de cisaillement. L'énergie de déformation est alors donnée par un développement en fonction d'un tenseur des déformations. :

$$W = -p\delta_{ij} + \mu B_{ij}. \quad (\text{A.37})$$

L'approche microscopique et statistique rend possible un rapprochement entre les différents types de matériaux amorphes, principalement les gels et les verres. Alexander [169] développe cette hypothèse et attribue aux tensions internes de l'état de repos (référence) les propriétés spécifiques de ces matériaux. L'élasticité transverse de ces milieux serait notamment due à la présence de ces contraintes<sup>8</sup>. Cependant les nature des constituants et de leurs liaisons sont très différentes, et la comparaison des rapports des modules d'élasticité transverse et longitudinal des gels et des verres ne va pas dans le sens de cette analogie. La prise en compte formelle de ces spécificités dans les modèles microscopiques est donc délicate (seules les expériences numériques semblent pouvoir éclairer ces questions).

Pour conclure, l'adoption d'un modèle macroscopique, comme celui des constantes élastiques, qui rende compte de la non-linéarité (on pourrait aussi évoquer les phénomènes de relaxation dans les gels), sans faire intervenir son origine microscopique est la seule solution envisageable pour établir une équation de propagation (pour les ondes élastiques). Cependant, avec ce type de modèle, certains comportements comme le coefficient de non-linéarité négatif de la silice, sont difficiles à interpréter physiquement (dans le sens où ils vont à l'encontre de "l'intuition macroscopique" : une compression uniaxiale s'accompagne d'une diminution de la rigidité).

## A.4 Modèle de Mooney-Rivlin

Nous avons établi au premier chapitre le développement de l'énergie interne d'un solide, soumis à des déformations, en fonction des invariants du tenseur des déformations Lagrangien. Le tenseur choisi pour représenter les déformations est le tenseur des déformations de Cauchy-Green (à gauche), noté  $\bar{B}$ , qui s'exprime en fonction du gradient des transformations  $\bar{F}$  et de son inverse. On le désigne également comme le tenseur des déformations à gauche. Il s'agit de l'inverse du tenseurs des dilatations de Cauchy  $\bar{c}$ . L'équation (A.39) rappelle les définitions des tenseurs des déformations de Cauchy-Green (à gauche)  $\bar{B}$ , des dilatations de Green (ou déformation Cauchy-Green (à droite))  $\bar{C}$ , et des dilatations de Cauchy  $\bar{c}$  (voir également au paragraphe 1.3.1.1).  $\bar{B}$  s'applique donc à des vecteurs de l'état actuel et permet d'exprimer le passage d'Euler vers Lagrange du produit scalaire de deux de ces éléments de longueur. A l'inverse du tenseur  $\bar{c}$ ,  $\bar{B}$  résulte d'une contraction qui n'est pas analogue à un produit de matrice usuel (ligne de  $F$  par les colonnes de  $F^T$ ). Ces différences ont

<sup>8</sup>Bien d'autres comportements sont encore mal expliqués : dans le cas de la silice ou des verres, on attribue aux phonons transverses l'origine des comportement "exotiques" tels que les coefficients de dilatation thermique négatif ou la pente négative du coefficient de compressibilité avec la pression [179], [180], [181]. D'autres auteurs [182] évoquent le caractère méta-stable des groupes  $Si - O_4$  dans l'état vitreux. Le caractère amorphe et l'ordre à moyenne distance des matériaux vitreux semble pouvoir expliquer certaines de ces propriétés. On notera cependant que certaines anomalies de comportements (coefficient de poisson négatif) sont également observées dans certaines silices cristallines.

pour origine la décomposition du tenseur des transformations  $\bar{F}$ , de deux manières équivalentes, en un tenseur de rotation pure  $\bar{R}$  et un tenseur des élongations à droite  $\bar{U}$  ou à gauche  $\bar{V}$  :

$$\bar{F} = \bar{R} \cdot \bar{U} = \bar{V} \cdot \bar{R}. \quad (\text{A.38})$$

$\bar{U}$  et  $\bar{V}$  ont les même valeurs propres : les allongements principaux  $\lambda_i$ , mais pas les mêmes vecteurs propres (reliés par la rotation  $\bar{R}$ ).

$$B_{ij} = F_{ik} F_{jk} = \bar{F} \bar{F}^T = \bar{V}^2 \text{ tel que } : \bar{B} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' \quad (\text{A.39a})$$

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} = \bar{F}^T \bar{F} = \bar{U}^2 \text{ tel que } : d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' = d\mathbf{X} \cdot \bar{C} d\mathbf{X}' \quad (\text{A.39b})$$

$$c_{ij} = f_{ki} f_{kj} = (\bar{F}^{-1})^T \bar{F}^{-1} \text{ tel que } : d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' = d\mathbf{x} \cdot \bar{c} d\mathbf{x}'. \quad (\text{A.39c})$$

Mooney postule que l'énergie de déformation  $W$  peut être développée en fonctions des invariants de ce tenseur :

$$I_B = B_{ii}, \quad (\text{A.40a})$$

$$II_B = \frac{1}{2} (B_{ii} B_{jj} - B_{ij} B_{ij}), \quad (\text{A.40b})$$

$$III_B = \text{Det}(B_{ij}), \quad (\text{A.40c})$$

soit :

$$W = W(I_B, II_B, III_B). \quad (\text{A.41})$$

On se limite à partir de cette forme à un milieu initialement isotrope. L'incompressibilité, ou d'une manière plus générale, tout comportement spécifique d'un matériau, se traduit par des relations imposées aux composantes du tenseur des déformations : certaines combinaisons de déformations sont "interdites". Le cas incompressible se traduit par la relation  $\text{Det}(F_{ij}) = 1$ , ou par  $III_C = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = 1$ , ou encore par la même condition portant sur  $\bar{B}$ . Comme le montre Mase, le cas d'un comportement spécifique ou de la présence de contraintes internes, peut être traité de manière plus générale<sup>9</sup>.

Le tenseur des contraintes de Cauchy s'exprime alors comme la somme de ces tensions internes et des contraintes extérieures :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij}, \quad (\text{A.42})$$

ou  $p$  résulte des contraintes internes (qui n'effectuent aucun travail) et  $T'_{ij}$  représente les forces extérieures appliquées :

$$T'_{ij} = F_{ik} \frac{\partial W}{\partial F_{jk}}. \quad (\text{A.43})$$

Pour un milieu incompressible, tel que  $W(I_B, II_B)$ , on obtient, en exprimant les invariants en fonction des gradients des déformations :

$$T'_{ij} = -II_B \frac{\partial W}{\partial II_B} + \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_B} B_{ij}^{-1}, \quad (\text{A.44})$$

<sup>9</sup>Cela revient à trouver une fonction  $\Phi(F_{ij})$  qui exprime l'interdépendance des composantes du tenseur  $F_{ij}$ .

$$\text{et } T_{ij} = -p' \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial II_B} c_{ij}, \quad (\text{A.45})$$

ou  $p'$  réunit les contraintes internes de l'état initial et la part des contraintes externes qui sont assimilables à une pression hydrostatique.

A ce stade, les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants du tenseur  $\bar{B}$  peuvent être identifiées à des résultats expérimentaux donnant la relation contrainte-déformation. Cependant aucune forme explicite de l'énergie n'a été choisie ou ne découle de ces calculs. Rivlin postule une forme générale qui définit des constantes  $G_{\alpha\beta}$  de la manière suivante :

$$W = \sum_{\alpha, \beta} G_{\alpha\beta} (I_B - 3)^\alpha (II_B - 3)^\beta \quad (\text{A.46})$$

Ce polynôme sera développé à l'ordre approprié, dépendant du matériau étudié. Les constantes qu'il définit n'ont pas le sens physique des modules élastiques définis par le développement classique. Dans les cas simples on peut néanmoins établir une correspondance. Un matériau néo-Hookeen, par exemple, correspond au cas  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , la seule constante  $G_{10}$ , définie par  $W = G_{10}(I_B - 3)$ , est identique au module de cisaillement  $\mu$ . Le modèle de Mooney-Rivlin comporte alors deux termes ( $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ,  $\alpha \neq \beta$ ) et décrit les milieux incompressibles et isotropes. L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = G_{10}(I_B - 3) + G_{01}(II_B - 3) \quad (\text{A.47})$$

Pour une déformation uniaxiale on retrouve (à condition de se placer dans l'hypothèse de petites déformations) le module d'Young :  $E = 6(G_{10} + G_{01})$  et le module de cisaillement d'un milieu incompressible (de coefficient de Poisson  $\nu = 0,5$ ) :  $\mu = E/3 = 2(G_{10} + G_{01})$ . La prise en compte de l'amplitude finie des déformations nécessite un développement à un ordre plus élevé ; à partir de là il devient impossible d'identifier les  $G_{\alpha\beta}$  aux constantes élastiques ou aux modules de Landau et de Murnaghan.

Le modèle de Mooney-Rivlin fournit une solution exacte au problème de la déformation d'un objet soumis à une contrainte uniaxiale et permet de remonter au module de cisaillement. La modélisation de la propagation d'onde n'est pas envisagée avec ce type développement.



## Annexe B

# Non-linéarité non classique

La non-linéarité classique est pertinente pour des solides cristallins idéaux ou des matériaux parfaitement homogènes. Qu'en est-il lorsque le cristal comporte des défauts (lacunes, dislocations [32], [183], [184], impuretés) ou que le solide comporte des micro-fissures, des inhomogénéités de composition, des contraintes résiduelles. Les méthodes acoustiques, même si elles reposent sur un formalisme qui ne tient pas forcément compte de toutes ces subtilités, sont capables de détecter certaines de ces dégradations. Il est délicat d'obtenir, à partir d'une approche microscopique, une description simple de la propagation des ondes. Il sera donc difficile, avec des mesures ultrasonores de remonter aux caractéristiques microscopiques. C'est pourquoi les analyses les plus récentes modélisent un matériau complexe à l'aide de petites unités dont la réponse est caractérisée par une loi phénoménologique plus complexe.

Dans le cas des solides polycristallins, pour des longueurs d'onde très grandes devant la taille des constituants l'hypothèse du continuum reste satisfaite, mais les mesures acoustiques sont influencées par l'effet moyen des grains, de leur jonction et de leur composition. La valeur moyenne des paramètres élastiques est déterminée par la composition du milieu mais aussi par les paramètres correspondant à des échelles intermédiaires.

Des mesures de non-linéarité effectuées sur les roches [35], [185], [81], [186], [82] montrent l'effet des fractures ou de la composition (saturation en eau), ou de la structure de grains (ces modèle plutôt phénoménologique ne permettent pas de distinguer les différentes origines). Les effets non-linéaires sont bien plus important que ce que le modèle classique pourrait prévoir (il faudrait considérer des coefficients de non-linéarité de l'ordre de  $10^3$ ). Les lois de comportements choisies par Gusev [89], Ostrovsky [83], Ulrich [81] permettent d'interpréter les résultats expérimentaux. La contrainte peut par exemple être écrite sous la forme [187] :

$$T = \int K(\epsilon, \dot{\epsilon}) d\epsilon, \quad (\text{B.1})$$

où  $\epsilon$  est le tenseur des déformations, dans l'approximation du second ordre :  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  (premier ordre des tenseurs notés  $\bar{s}$  et  $\bar{S}$  au premier chapitre). Le module non-linéaire et hystérétique

$K$  est pris sous la forme :

$$K(\epsilon, \dot{\epsilon}) = K_0 (1 - \beta\epsilon - \delta\epsilon^2 - \alpha [\Delta\epsilon + \epsilon(t)\text{sign}(\dot{\epsilon})] + \dots) \quad (\text{B.2})$$

$K_0$  est le module linéaire,

$\Delta\epsilon = (\epsilon_{max} - \epsilon_{min})/2$ , l'amplitude de la déformation sur la période précédente (pour une sinusoïde)

$\beta$  et  $\delta$  les paramètres non-linéaires du développement de la relation classique.

$\alpha$  détermine l'importance de l'hystérésis.

L'hystérésis seule ne donne pas lieu à génération de seconde harmonique mais la troisième harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'excitation, ce qui ne s'accorde pas avec les solutions du modèle classique (dans lequel  $u_{2\omega} \propto u_{\omega}^2$  et  $u_{3\omega} \propto u_{\omega}^3$ ). Il en est de même pour les amplitudes des composantes aux fréquences combinaisons linéaires des fréquences des ondes primaires : les ondes aux fréquences somme et différence se ne sont pas modifiées  $u_{\omega_1 \pm \omega_2} \propto \beta u_{\omega_1} u_{\omega_2}$  mais les combinaison provenant de la non-linéarité cubique le sont :  $u_{\omega_1 \pm 2\omega_2} \propto \alpha u_{\omega_1} u_{\omega_2}^2$  (au lieu de  $u_{\omega_1 \pm 2\omega_2} \propto f(\beta, \delta) u_{\omega_1} u_{\omega_2}^2$ ).

Les expériences menées sur les roches ou des composites consistent principalement en l'étude des résonances basse fréquence de barres ou de plaques. Les non-linéarités induisent une dépendance de la position du pic de résonance en fonction de l'amplitude de l'excitation (schématiquement pour un mode d'épaisseur d'une plaque,  $f_r = V_L/2d$  varie si  $V_L$  dépend de l'amplitude) et mettent en évidence des effets d'atténuation non-linéaire (atténuation proportionnelle à l'amplitude de l'excitation). Seules les non-linéarités dites non-classiques peuvent donner des décalage en fréquence significatifs. Aussi ces méthodes ne permettent-elles pas de mesurer les paramètres  $\beta$  et  $\delta$ . Par contre, elles mettent en évidence l'effet de mémoire du matériau vis-à-vis des sollicitations. La technique NWMS (Nonlinear Wave Modulation Spectroscopy) permet notamment de montrer une augmentation des paramètres non-linéaires dans les zones ou les fissures sont les plus nombreuses.

Le modèle de l'espace Preisach-Mayergoitz (PM) a permis l'implémentation de codes de calculs sur la base de ces lois de comportement à seuil qui tiennent compte du comportement des joints de grains ([83], [188], [189]). Les grains sont assimilés à un réseau de ressorts élastiques et leurs jonctions constituent des unités mésoscopique hystérétiques (HMU) qui se comportent rigidement ou élastiquement suivant la force à laquelle elles sont soumises (pressions d'ouverture et de fermeture). Ce modèle permet de décrire les effets de dynamique lente (recouvrement de l'état initial en  $\log(t)$ ) observés dans les expériences dynamiques ou quasi-statiques. Ce type de comportement est observé dans de nombreux matériaux (roche, bétons, verres fissurés). Les auteurs précisent bien que cette approche ne repose pas sur des arguments physiques (ou des propriétés réelles de matériaux) mais qu'elle offre la possibilité de caractériser différents matériaux.

Enfin on mentionnera un dernier effet récemment mis en évidence par Zaitsev, Gusev et Castagnède [91]. Des modulations non-linéaires sont observées pour un mélange de deux ondes porteuse de fréquences proches dont l'une est modulée en amplitude. Leurs observations ne semblent pas pouvoir être expliquée par les modèles mentionné ci-dessus puisque les bandes latérales ne croissent pas linéairement avec les amplitudes des deux faisceaux.

# Annexe C

## Électronique

### C.1 Circuits d'émission-réception

#### Circulateur bi-directionnel

Le montage schématisé sur la figure C.1 est bien adapté aux mesures en régime harmonique, dans les fluides. Avec une émission-réception continue, seul un circulateur permet de d'adapter correctement les impédances. Le circulateur permet également d'utiliser des trains d'ondes (tant que les niveau d'excitation sont inférieurs à 10 Volts).

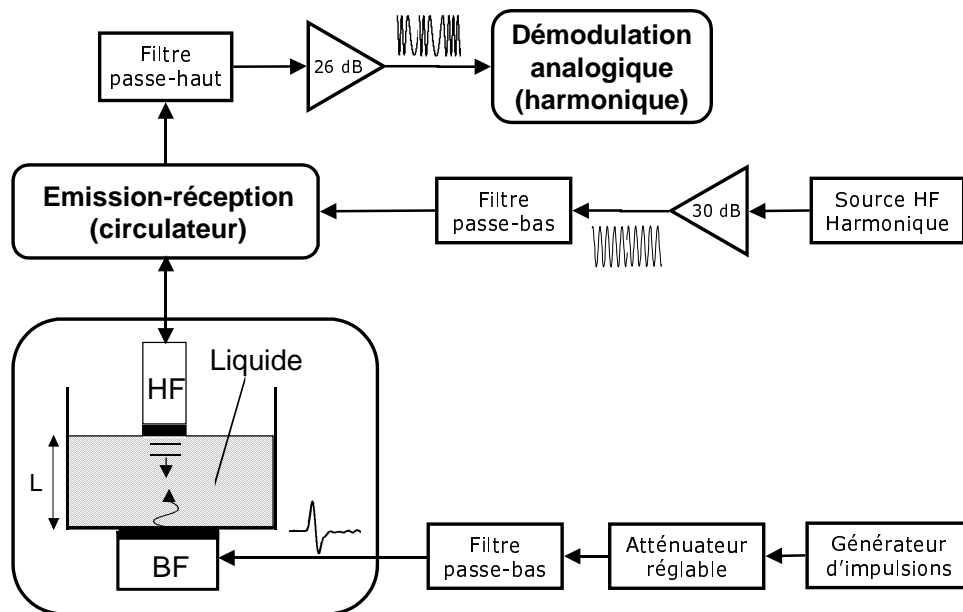


FIG. C.1 – Dispositif de mesure du coefficient de non-linéarité des fluides, avec une porteuse harmonique. L'émission-réception est assurée par un circulateur.

Le schéma d'utilisation de la jonction hybride à quatre accès (parfois nommée T-magique!) est présenté ci-dessous. Son fonctionnement utilise les interférences entre les signaux réfléchis par les terminaisons. Lorsque les accès sont adaptés la jonction est équivalente à un circulateur, dont les entrées/sorties sont isolées deux à deux (dispositif d'émission-réception)<sup>1</sup>. En adaptant l'impédance de l'accès C, l'onde provenant de A est intégralement transmise en C et celle provenant de C est intégralement transmise en B. Les impédances de charge (en C) et de compensation (en D) sont ajustées pour une fréquence donnée, et les régimes transitoires (comme les bords d'un train d'onde) sont fortement réfléchis.

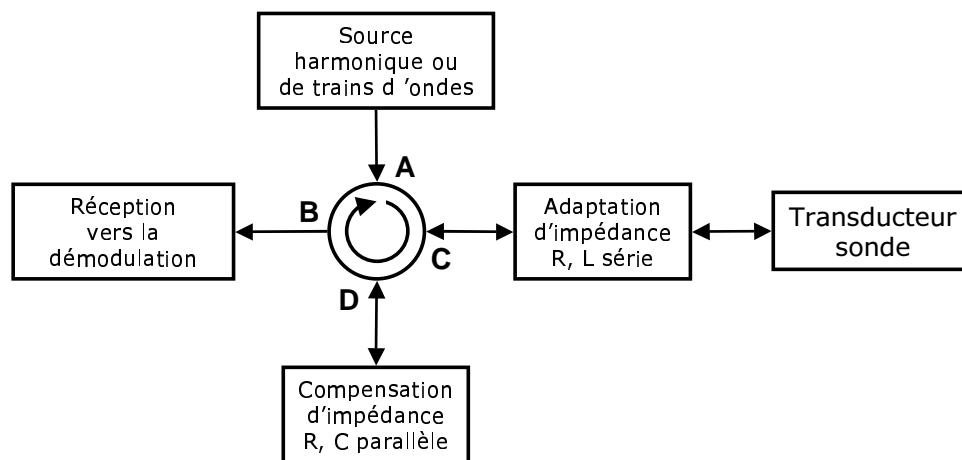


FIG. C.2 – Fonctionnement en émission-réception de la jonction hybride.

## Commutateurs

Un montage expérimental utilisant des des trains d'onde de porteuse, adapté aux mesures dans les solides est schématisé sur la figure C.3. L'émission-réception est assurée par un circulateur ou par des commutateurs. La commutation des lignes à retard de calibration peut être commandée pas le port parallèle d'un ordinateur.

Les différents montages utilisant des commutateurs nécessitent un ou deux composants. Chaque boîtier (DIP16) contient quatre interrupteurs de type NC (normally closed) ou NO (normally open) suivant qu'il sont "passant" ou non, pour un signal de commande à l'état zéro. Les durées de commutation sont de l'ordre de 10 ns. Le signal de commande est une "porte" (créneau de 0 à 2,4 V), obtenue par division du signal utilisé pour faire le train d'ondes HF (voir figure C.3). Ce signal (de quelques microsecondes de durée) subit un retard moins important que le signal de haute fréquence avant d'atteindre l'entrée de l'interrupteur. La fin du train d'onde est donc légèrement tronquée par l'ouverture de la ligne d'émission ce qui explique le régime transitoire observé à la fin de l'émission. Ces signaux, qui imposent une limite supérieure au temps de vol, ne durent qu'environ  $0,5\mu s$ .

<sup>1</sup>Les isolateurs reposent sur le même principe et permettent d'éviter que les retours provenant de la charge viennent perturber la source.

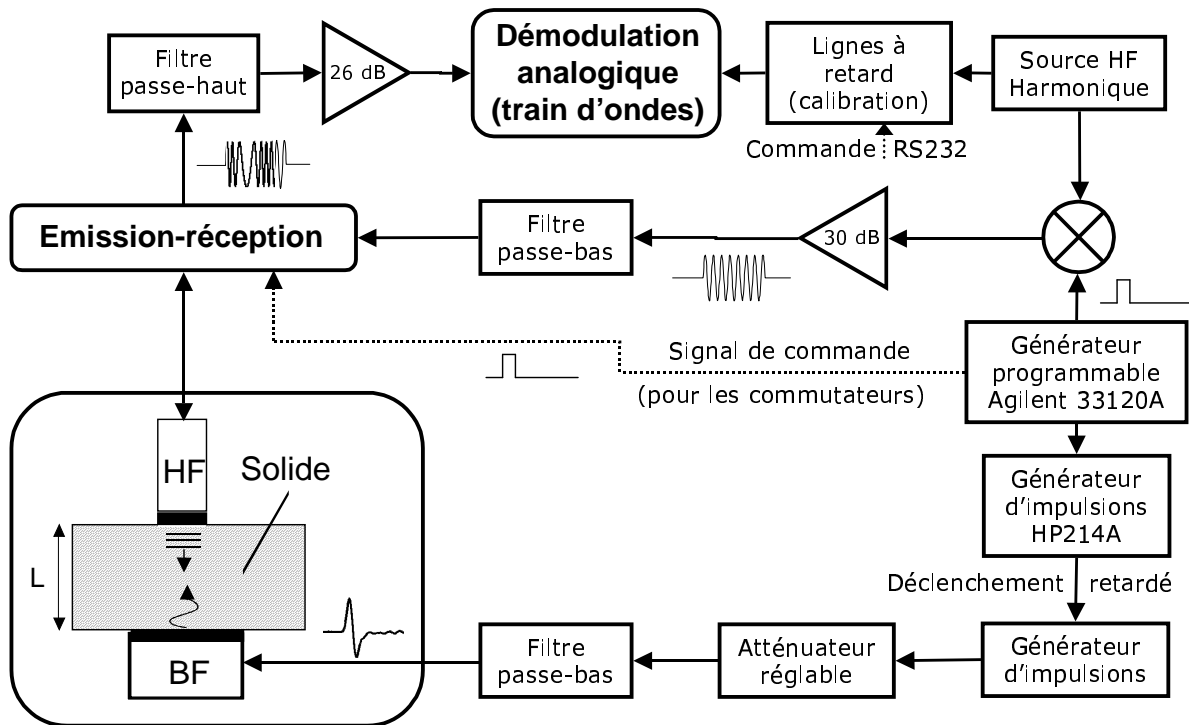


FIG. C.3 – Dispositif de mesure du coefficient de non-linéarité des solides, avec démodulation analogique des trains d'ondes porteurs.

Le montage en T présente l'avantage d'améliorer l'isolation entre les différents accès. Sur la ligne d'émission (figure C.4), par exemple, l'interrupteur branché à la masse doit s'ouvrir avant que les deux autres ne se ferment. La différence entre les commutateurs NC et NO (temps de montée et de descente différents) réalise cette association sans avoir à retarder les signaux de commande.

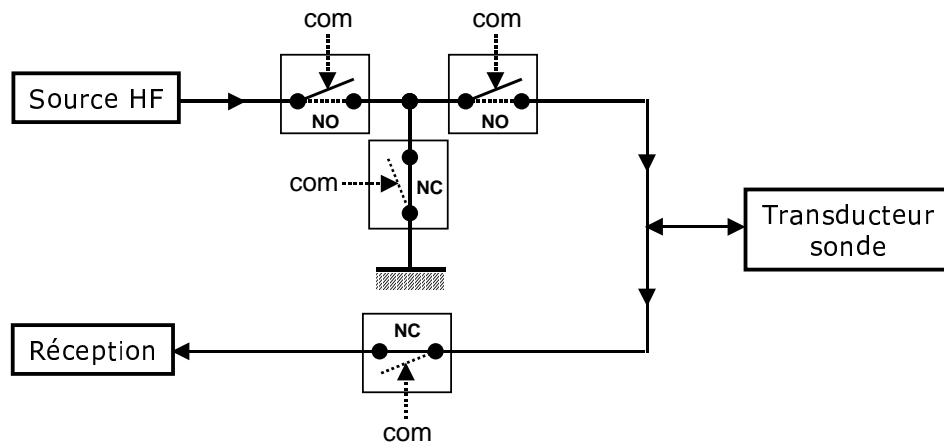


FIG. C.4 – Montage des commutateurs avec un composant : montage en T pour l'émission.

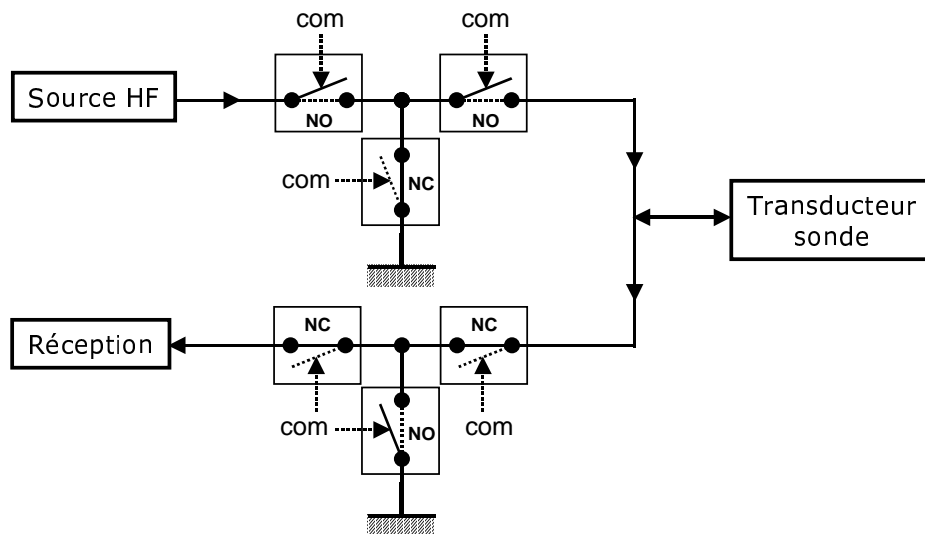


FIG. C.5 – Commutateurs avec deux composants : montage en T sur les deux lignes.

## C.2 Caractéristiques des mélangeurs analogiques

Une démodulation analogique (que la porteuse soit harmonique ou en train d'ondes), nécessite une calibration du mélangeur, comme celle de la figure C.6 (tant que les modulations de phase sont petites ( $< 1$  rad) on n'utilise qu'une voie). En régime harmonique il est possible de calibrer la détection "une fois pour toute", si les niveaux des deux signaux (RF et LO) sont maintenus constants. On utilise pour cela un contrôle automatique de gain.

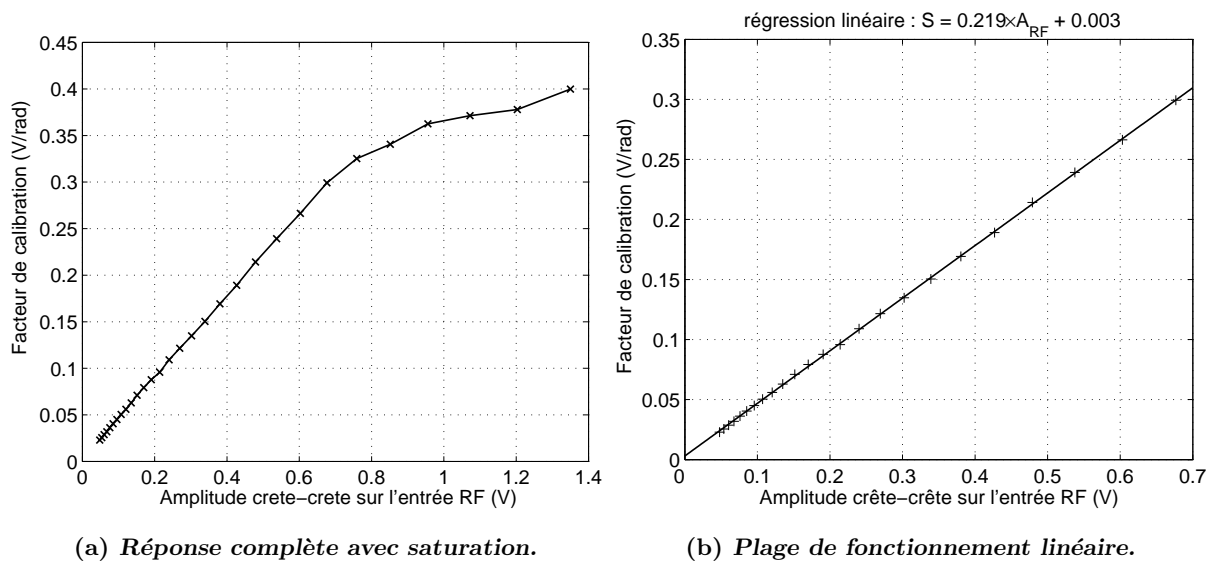


FIG. C.6 – Calibration du mélangeur analogique en fonction du niveau sur l'entrée RF (le niveau constant sur l'entrée LO est égal à  $2,8 V_{cc}$ ).

Pour des trains d'ondes ce n'est plus possible, il est alors nécessaire de calibrer le dispositif pour chaque mesure, c'est-à-dire pour chaque niveau de l'écho acoustique qui dépend de la distance de propagation (atténuation, diffraction), de l'adaptation d'impédance... On pourrait envisager de saturer et d'écrêter le signal de porteuse (amplificateur + limiteur) mais pour une mesure précise, cette solution n'est pas adaptée.

Les composants proviennent de chez "Minicircuits" : diviseur ZFSC-2-4, mélangeur ZFM-3. Le niveau sur l'entrée LO est maintenu constant (1.44 Volts). Des mélangeurs supportant de plus fort niveau (13 et 6 dBm) ont aussi été utilisés. Le gain d'amplitude est appréciable (le facteur de calibration est presque doublé), mais le bruit augmente également en raison de l'amplification plus importante.

Le dispositif de calibration automatique est représenté sur la figure C.7, les différentes lignes à retard sont commutées par des paires d'interrupteurs et sont intercalées successivement dans la ligne LO. Le niveau étant saturé sur cette entrée, on peut ainsi s'affranchir des petites variations de niveau produites par le passage d'une ligne à l'autre. Cette option présente l'inconvénient de ne plus permettre une vérification rapide du signe de la détection (pour la détermination du signe de  $\beta$ ), il faut pour cela ajouter un déphasage (un retard) sur la ligne RF.

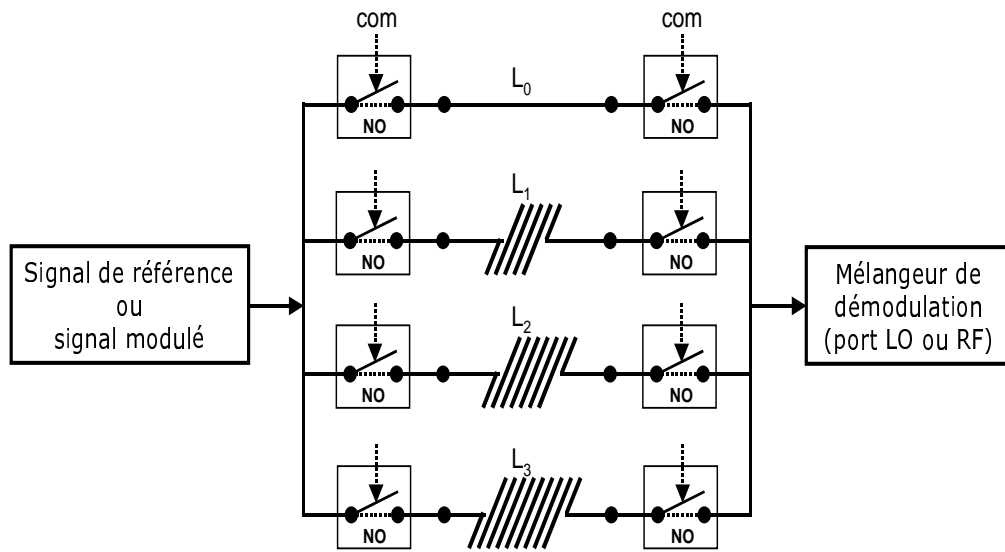


FIG. C.7 – Dispositif de calibration automatisé de la démodulation analogique des trains d’ondes modulés en phase.

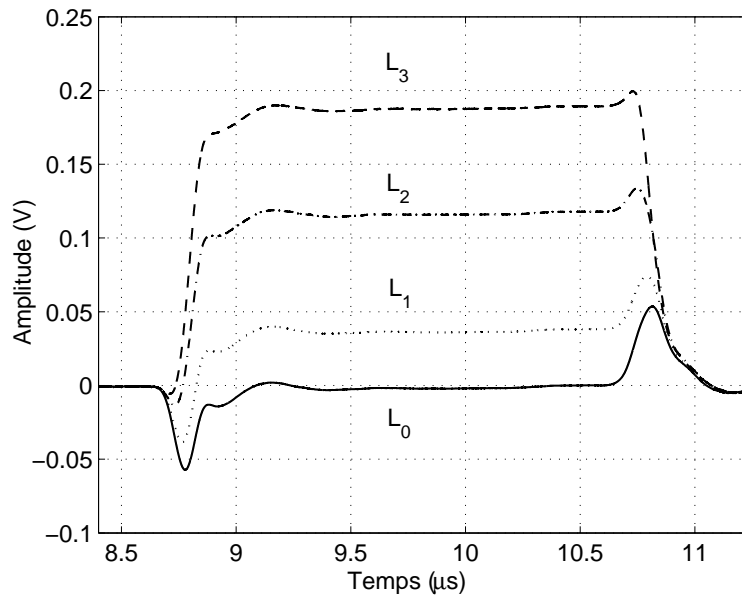


FIG. C.8 – Détermination de la sensibilité à l’aide de trois lignes à retard  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ .

La tension de commande est constante au cours de chaque étape de calibration (contrairement au cas de l'émission-réception). Pour mesurer la modulation de phase, seul le trajet direct  $L_0$  est à l'état fermé. Le temps de montée de la commutation est ici sans incidence (contrairement au cas de l'émission-réception) puisque la calibration est effectuée par étapes (pour chaque ligne à retard), avant chaque mesure. Les interrupteurs peuvent donc être actionnés par le port parallèle d'un ordinateur qui comporte 8 lignes à 0 ou 5V. Le temps de réponse de cette commande est assez rapide. L'ensemble de l'acquisition (calibration, acquisition et démodulation) peut alors être synchronisée sous Matlab.

Il faut au préalable, comme pour la version "manuelle", déterminer les différents retards. L'analyseur de réseau permet de caractériser l'ensemble du circuit, c'est-à-dire de mesurer les retards de phase induit par les 4 voies. Cette calibration est effectuée une fois pour toute, sur une large bande de fréquence (quelle que soit la fréquence de fonctionnement).

### C.3 Filtres analogiques pour l'interféromètre

Le montage optique à double hétérodynage permet d'augmenter la bande passante mais il présente l'inconvénient de donner naissance à des faisceaux parasites plus importants (avec le simple hétérodynage, les chemins des faisceaux sonde et référence sont mieux séparés). Les raies à 70 MHz et à 210 MHz sont négligeables ( $< -60$  dB) mais une composante à 280 MHz doit être supprimée. Il a donc été nécessaire de réaliser un filtre passe-bas [104] qu'on intercale entre la sortie de la photodiode et l'oscilloscope. Le choix du type de filtre, de l'ordre de sa fonction de transfert, de la fréquence de coupure est réalisé grâce à un petit logiciel DOS "filter" (on trouve de nombreuses applications de ce genre sur la toile). Nous avons opté pour le schéma représenté sur la figure C.9, les valeurs des composants sont petites et il a été nécessaire de fabriquer les inductances. Les valeurs réelles des composants sont indiquées entre parenthèses sous celles recommandées par le programme. La réponse en fréquence calculée par le programme est tracée sur la figure C.10. On reporte également sur cette figure la réponse réelle obtenue avec l'analyseur de réseaux (celle qui comporte un rebond).

Pour les mesures de la contrainte de radiation, il a été nécessaire de réduire la bande passante lors de l'acquisition de la porteuse à l'aide d'un filtre passe-bande (figures C.11 et C.12). Pour extraire seulement les composantes de basse fréquence de la modulation de phase, on limite la bande passante à 10 MHz, soit 5 MHz de part et d'autre de la porteuse (70 MHz). On rejette ainsi les raies latérales produites par la porteuse du train d'onde acoustique ( $70 \pm 20$  MHz). Le filtre est placé entre la sortie de la photodiode et l'entrée de la démodulation analogique.

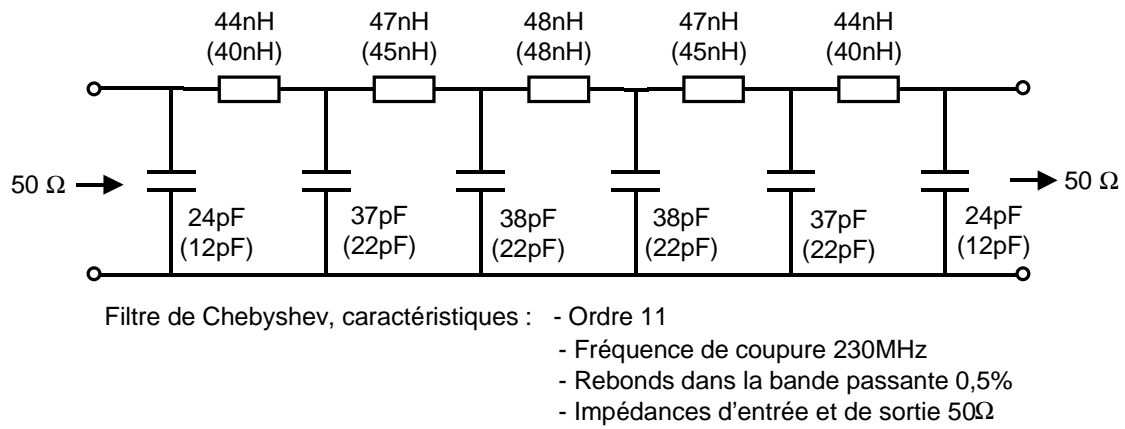


FIG. C.9 – Filtre passe-bas à 230 MHz pour la sonde interférométrique à double hétérodynage

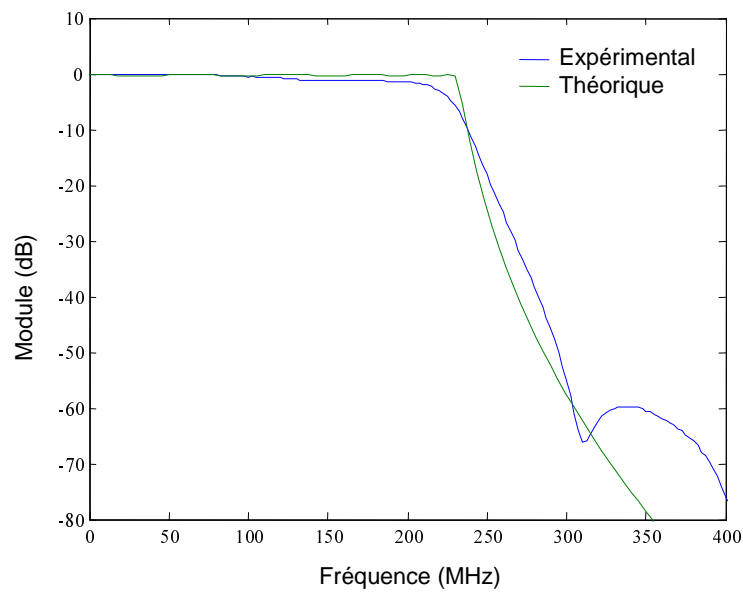


FIG. C.10 – Réponse en fréquence du filtre passe-bas à 230 MHz

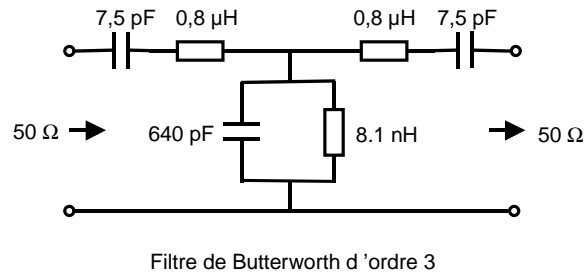
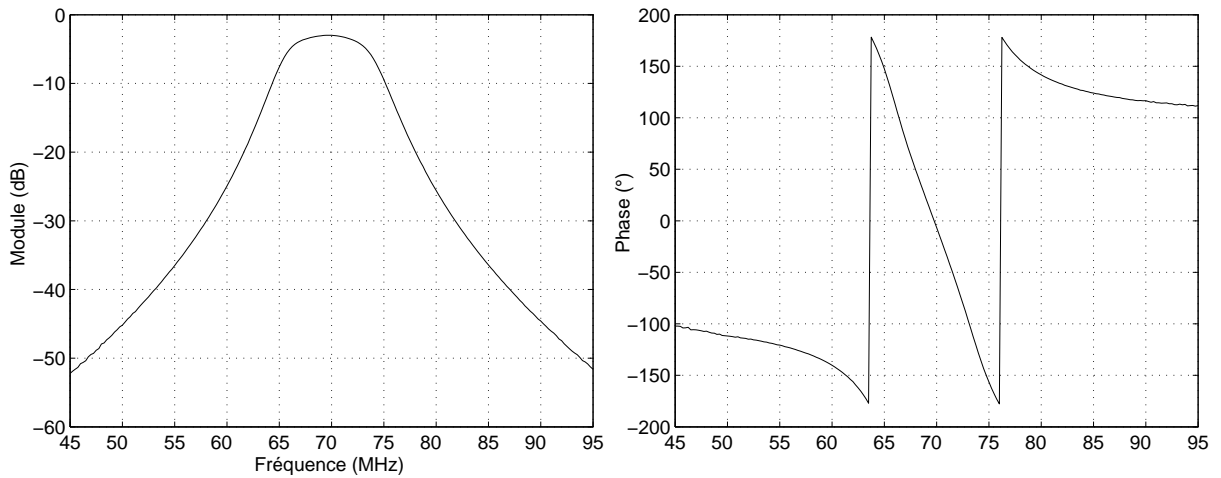


FIG. C.11 – Filtre passe-bande (65-75 MHz) pour la mesure de la pression de radiation à l'aide de la sonde interférométrique.



(a) *Module de la réponse en fréquence*

(b) *Phase de la réponse en fréquence*

FIG. C.12 – Réponse fréquentielle du filtre passe-bande (65-75MHz).



## Annexe D

# Diffraction d'une source plane

En un point repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ , où la direction  $z$  est l'axe de symétrie de la source, la vitesse de déplacement est donnée, par la convolution de la réponse impulsionnelle de diffraction et de la vitesse de déplacement de la source [97], [36] :

$$\phi(r, \theta, z, t) = v(z = 0, t) \otimes h(r, \theta, z), \quad (\text{D.1})$$

avec  $\mathbf{v} = -\vec{\nabla}\phi$ . Dans le cas d'ouvertures circulaires ou carrées, les réponses impulsionnelles  $h(r, \theta, z)$ , sont obtenues par une méthode géométrique.

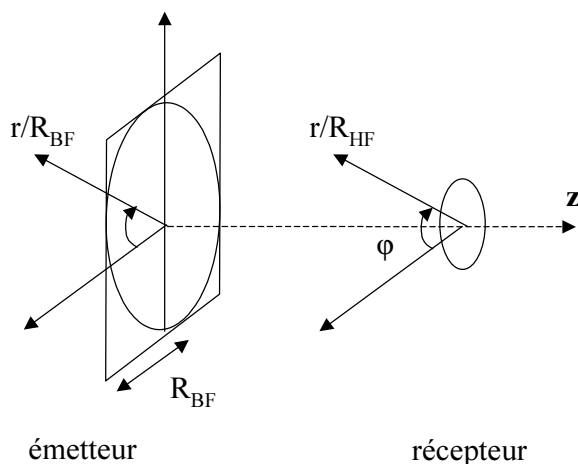


FIG. D.1 – Calcul de la réponse impulsionnelle de diffraction

L'évaluation numérique de la fonction  $h$  et du produit de convolution se fait par exemple sous Matlab. On peut calculer la forme d'onde reçue sur un disque plan parallèle à la source (plus exactement suivant un rayon  $(\phi(r, t))$ ). En sommant ces contributions on obtient une approximation de la forme du signal reçue sur le transducteur HF (la zone d'interaction est limitée par le faisceau HF). La sommation n'est pas effectuée sur le disque entier. On peut aussi calculer le champ de vitesse de basse fréquence (par dérivation numérique).

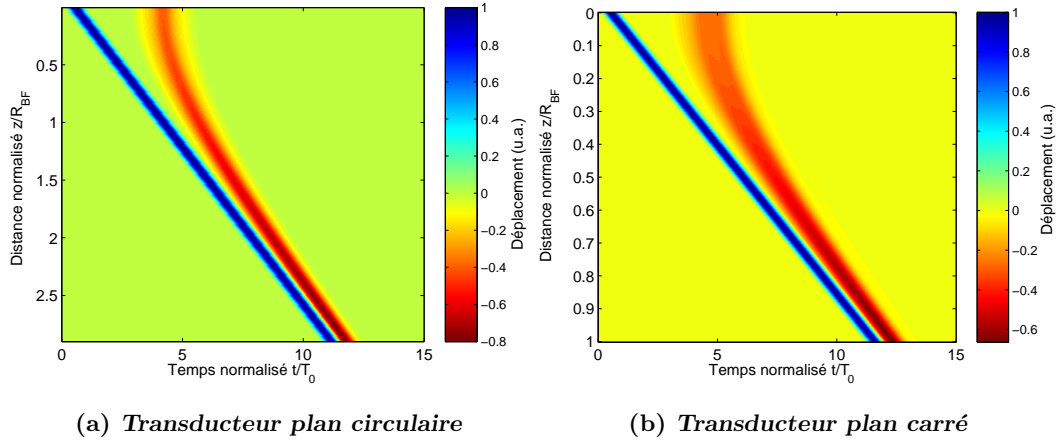


FIG. D.2 – Potentiel (ou déplacement) le long de l'axe de propagation  $z$ , en moyenne sur le rayon du récepteur

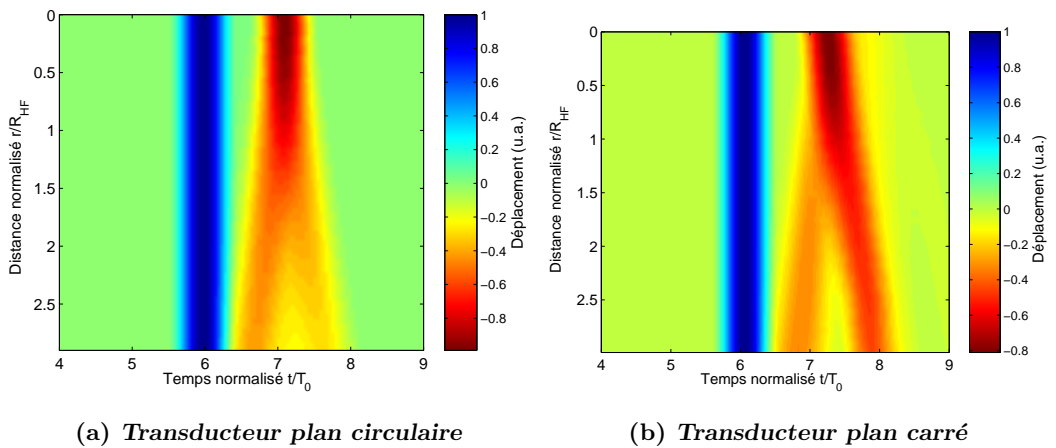


FIG. D.3 – Potentiel (ou déplacement) suivant le rayon  $r$  en  $z = 15\text{mm}$

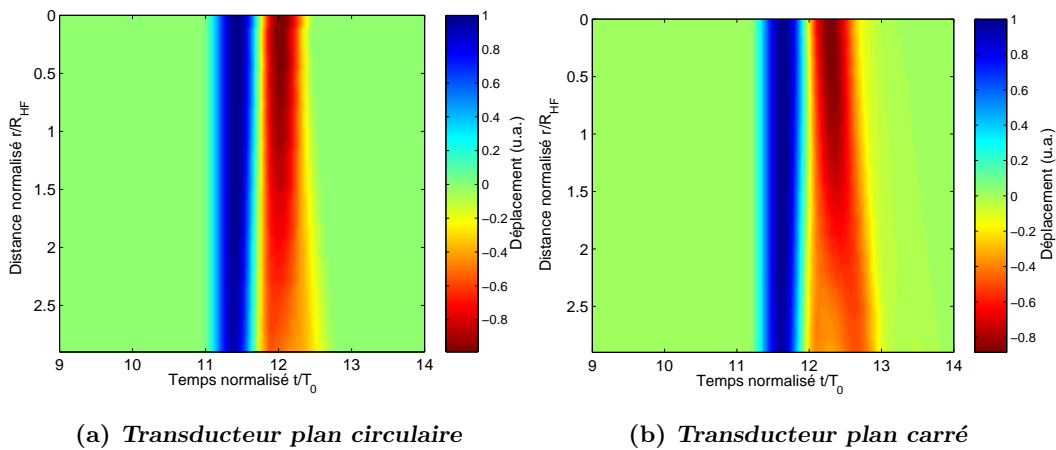


FIG. D.4 – Potentiel (ou déplacement) suivant le rayon  $r$  en  $z = 30\text{mm}$

Nous avons comparé les ouvertures circulaires et carrées pour évaluer l'influence de la géométrie de la source sur les ondes de bord. En effet, des trains d'ondes HF de courte durée sont nécessaires lorsque l'épaisseur des échantillons est petite. Dans ce cas, la longueur de la queue du signal empêche le repérage du zéro de phase. On remarque que pour l'ouverture carrée la "réplique" inversée du signal est plus étalée dans le temps et son amplitude plus faible. Rien de surprenant à cela car la symétrie de la source étant moindre, la sommation des contributions est plus faible. La source circulaire présente la réponse la plus courte, mais les ondes de bord les plus intenses.

Les paramètres d'entrée sont :  $f_{BF} = 2,25$  MHz,  $V_L = 5980$  m/s,  $R_{HF} = 3,15$  mm et  $R_{BF} = 9,8$  mm pour le rayon de l'ouverture circulaire ou le côté de l'ouverture carrée. Les signaux pourront être ainsi comparés avec ceux obtenus dans le cas de la silice<sup>1</sup> (chapitre 2, § 2.2.2).

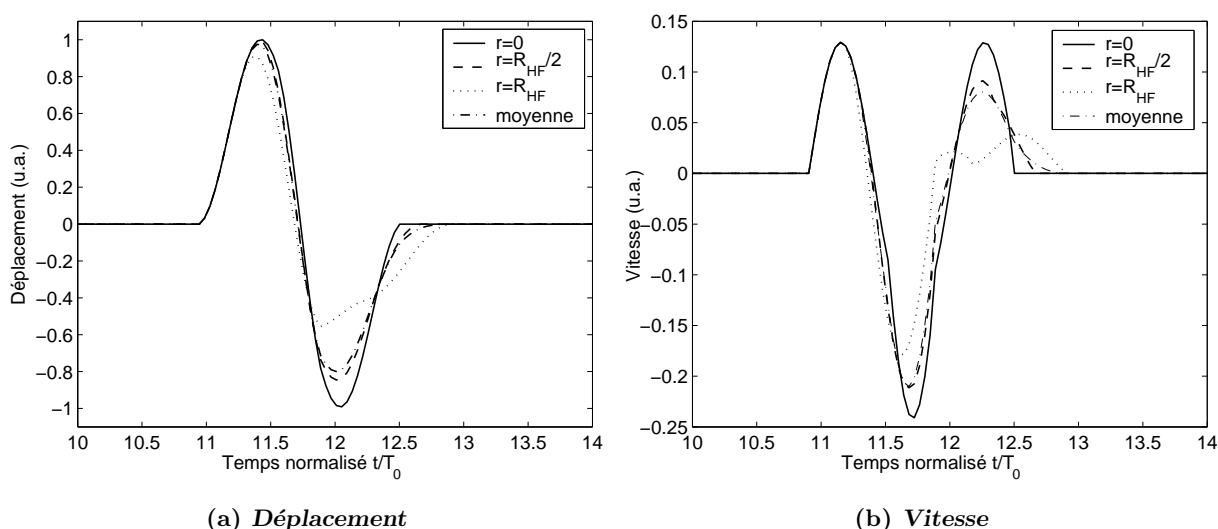


FIG. D.5 – Transducteur carré, signaux en fonction du rayon du récepteur  $r$  et signal moyen, en  $z = 30$ mm

On trace les réponses en déplacement et en vitesse en fonction des variables sans dimension suivantes :

- la distance le long de l'axe de propagation, normalisée par rapport au rayon de la surface émettrice du capteur BF. Les valeurs  $z/R_{BF} = 1,5$  et  $3$  correspondent respectivement à  $z = 15$  et  $30$  mm.
- le temps est normalisée par rapport à la période de l'impulsion émise,
- la distance suivant le rayon de la surface réceptrice est normalisé par rapport au rayon du capteur HF. En prenant la moyenne des signaux entre  $0$  et  $r/R_{HF} = 1$ , on obtient un signal comparable à celui enregistré par le transducteur HF lors des expériences (§ 2.2.2).

<sup>1</sup>La comparaison avec le duralumin donne des résultats équivalents.

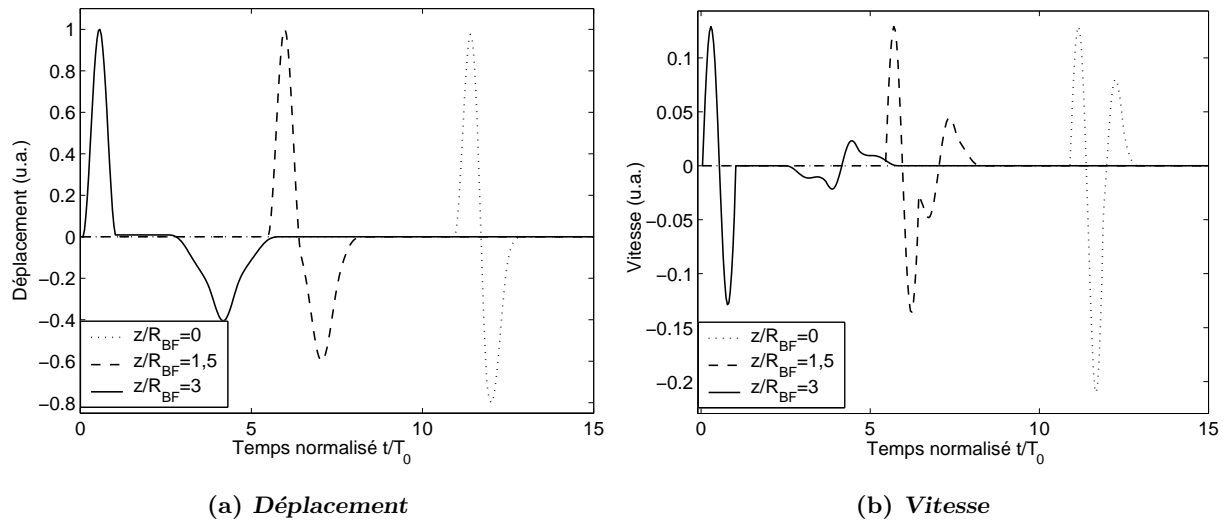


FIG. D.6 – Transducteur circulaire, signaux moyennés sur le rayon du transducteur, en fonction de  $z$

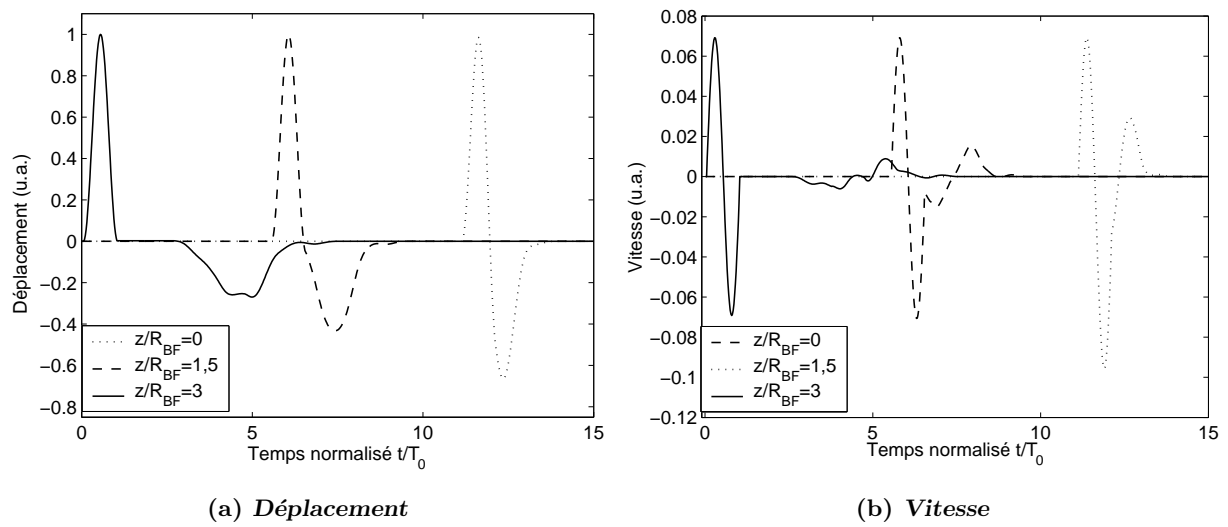


FIG. D.7 – Transducteur carré, signaux moyennés sur le rayon du transducteur, en fonction de  $z$ .

## Annexe E

# Modèle unidimensionnel de transducteur piézoélectrique

Nous avons exploité un modèle unidimensionnel de transducteur mono-élément [100] (voir l'exercice 6.1 p. 40) pour optimiser les performances de transducteurs plans à deux couches : milieu arrière d'impédance  $Z_1$  et pastille piézoélectrique d'impédance  $Z_p$ , rigidement liée au milieu de propagation d'impédance  $Z_2$ . Dans chaque couche, les équations sont résolues en régime monochromatique. La réponse électro-mécanique du capteur peut alors être mise sous la forme d'un système matriciel de dimension 3 (modèle de circuit équivalent à trois accès : deux accès acoustiques, les deux faces de la lame piézoélectrique, et un accès électrique : tension  $U$  et courant  $I$  aux bornes du matériau piézoélectrique). L'inversion du système matriciel conduit à l'expression de la vitesse de déplacement  $v$  à l'interface lame piézoélectrique/milieu de propagation :

$$v(f) = \frac{hC_0/A(iZ_1 - Z_p \tan \theta)}{(Z_1 + Z_2)Z_p \left( \cotan 2\theta - \frac{K^2}{2\theta} \right) + i \left( Z_1 Z_2 + Z_p^2 - \frac{K^2}{\theta} Z_p^2 \tan \theta \right)} U(f), \quad (\text{E.1})$$

$A$  est la surface du capteur,  $h = e/\epsilon_s$  le rapport du coefficient piézoélectrique et de la permittivité,  $C_0 = \epsilon_s A/d$  la capacité statique de la lame piézoélectrique.  $d$  est l'épaisseur de la lame,  $K^2 = e^2/\epsilon_s \rho_p V_p^2$  est le coefficient de couplage électromécanique.

La réponse en fréquence du transducteur s'exprime en fonction de trois variables sans dimensions :

- les rapports des impédances mécaniques  $r_1 = Z_1/Z_p$  et  $r_2 = Z_2/Z_p$ ,
- la fréquence normalisée  $\theta = \frac{kd}{2} = \frac{\pi f}{2f_p}$  par la fréquence de résonance de la pastille piézoélectrique libre  $f_p = V_p/2d$ .

Les spectres de la vitesse et du déplacement s'écrivent alors respectivement :

$$v(f) = H_v U(f) \text{ et } u(f) = H_u U(f). \quad (\text{E.2})$$

La réponse fréquentielle en vitesse est de la forme :

$$H_v(\theta) = \frac{e}{Z_p d} H(r_1, r_2, f/f_p), \quad (\text{E.3})$$

avec

$$H(\theta) = \frac{r_1 + i \tan \theta}{1 + r_1 r_2 - \frac{K^2 \tan \theta}{\theta} + i (r_1 + r_2) \left( \frac{K^2}{2\theta} - \frac{1}{\tan 2\theta} \right)}, \quad (\text{E.4})$$

Le cas d'école tel que  $r_1 = r_2 = 1$  (adaptation idéale de toutes les impédances) et  $f = f_p$  (fréquence de résonance), conduit à :

$$H(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{2iK^2}{\pi}}. \quad (\text{E.5})$$

Lorsque  $K^2$  est petit devant 1,  $H_v \approx 1$ . La vitesse des particules est alors donnée par le coefficient  $v_0 = e/Z_p d$  en  $m/s.V$ . Pour une céramique PZT-5A (avec  $d = 0,67$  mm, soit  $f_p = 3$  MHz), il vient  $v_0 = 10^{-3} m/s.V$  soit une vitesse particulière de 10cm/s pour une tension de 100V. La vitesse de déplacement est donc d'autant plus grande que l'impédance du matériau piézoélectrique est faible (intérêt des piézo-composites) et que l'épaisseur de la pastille est faible (haute fréquence).

Pour obtenir la réponse fréquentielle en déplacement, il suffit de diviser E.3 par  $i\omega$  (régime harmonique) :

$$H_u(\theta) = \frac{e}{Z_p V_p} \frac{H(\theta)}{2i\theta}. \quad (\text{E.6})$$

Dans les mêmes conditions que précédemment ( $r_1 = r_2 = 1$  et  $f = f_p$ ), l'amplitude du déplacement mécanique est de l'ordre de  $u_0 = e/Z_p V_p = 0,053$  nm/V, soit 5,3 nm pour une tension harmonique d'amplitude 100V.

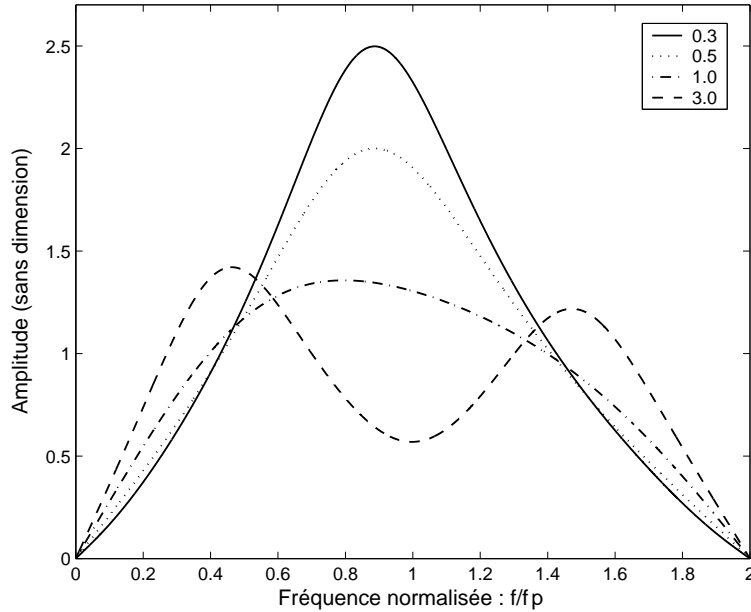


FIG. E.1 – Réponse en fréquence d'un transducteur en fonction du rapport des impédance  $r_1 = Z_1/Z_p$  (milieu arrière/lame piézoélectrique), pour  $r_2 = 1$ .

Toujours en régime harmonique, cette réponse fréquentielle fournit la puissance moyenne émise par le transducteur :

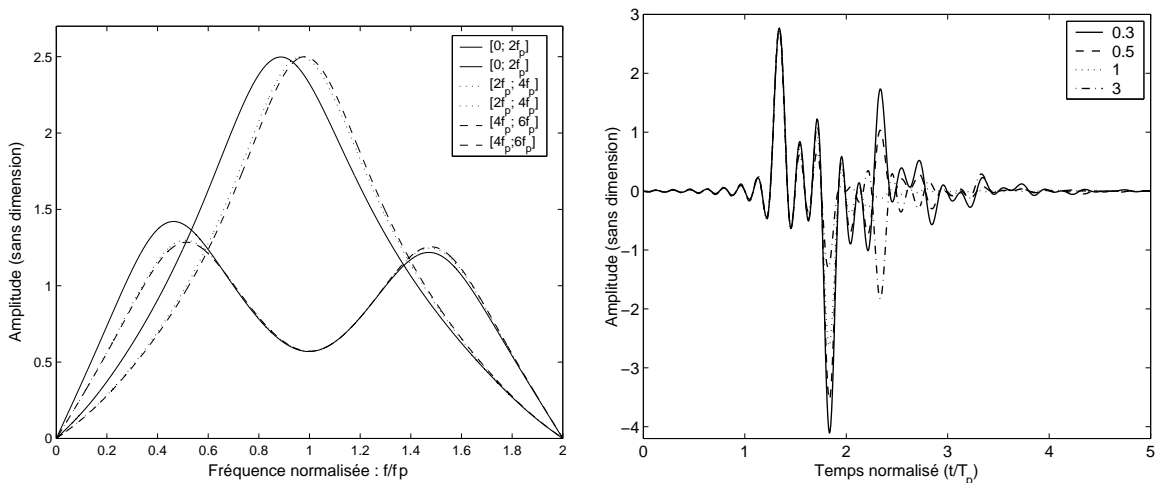
$$\langle P \rangle = K^2 C_0 f_p r_2 |H(f)|^2 |U|^2. \quad (\text{E.7})$$

Elle est proportionnelle au carré du coefficient de couplage électromécanique et à la capacité statique de la pastille. On peut augmenter sa valeur en augmentant la surface du capteur mais la diminution de son impédance électrique rend difficile l'adaptation.

En régime harmonique, l'amplitude de la vitesse de déplacement est donnée par l'expression E.1. En régime impulsionnel :

$$v(t) = \frac{e}{Z_p d} h(t) \otimes U(t). \quad (\text{E.8})$$

où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle en vitesse, c'est-à-dire la transformée de fourrier de  $H(\theta)$ . On aura par ailleurs  $h(t) = f_p h_n(f_p t)$  où  $h_n$  est la réponse impulsionnelle normalisée (sans dimension) de la variable sans dimension  $f_p t$ .



(a) Réponse fréquentielle sur les intervalles  $(0; 2f_p)$ ,  $(2f_p; 4f_p)$  et  $(4f_p; 6f_p)$  superposées; pour  $r_1 = 3$  et  $r_1 = 0,3$  (avec  $r_2 = 1$ ).

(b) Réponse impulsionnelle, pour différentes valeurs de  $r_1$  (en  $\text{mm}/(\text{s.V})$ ) l'amplitude est la même.

FIG. E.2 – Réponses fréquentielle et impulsionnelle pour différentes valeurs de  $r_1$

Le calcul de la fonction  $H(\theta)$  est effectué sous Matlab pour traiter le cas du régime impulsionnel. Dans notre exemple, les paramètres de la pastille piézoélectrique sont fixés et l'on fait varier les rapports d'impédance pour choisir le milieu arrière en fonction du matériau étudié.

La réponse en fréquence peut-être calculée sur un domaine de fréquence plus large que  $[0; 2f_p]$ , cela permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage des réponses impulsionnelles. On vérifie sur la figures E.2a la quasi-périodicité de ce spectre (période  $2f_p$ ). L'amplitude de  $H$  n'est pas de l'ordre de l'unité comme dans l'application numérique présentée plus haut, en effet les caractéristiques choisies pour cette exemples sont  $r_2 = 0,5$ ,  $e = 23 \text{ C}/\text{m}^2$ ,  $V_p = 4350 \text{ m}/\text{s}$ ,  $\rho_p = 7750 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $d = 0,6710^{-3} \text{ m}$ , et  $K^2 = 0,25$ .

La réponse impulsionnelle calculée à partir de ces spectres a une forme assez différente de la réponse attendue du transducteur. Elle comporte en effet des composantes de plus haute fréquence (figure E.2b).

Le générateur (Sofranel-Panametrics 5077PR) délivre des impulsions (créneaux) de durée réglable. Le signal d'excitation du transducteur est mesuré en situation de fonctionnement grâce à un "T" et sur une entrée de haute impédance. On mesure ainsi le signal réellement appliqué aux bornes de la pastille piézoélectrique. Pour calculer le déplacement ou la vitesse créée par le capteur, on utilisera ces signaux réels plutôt qu'un signal synthétisé numériquement.

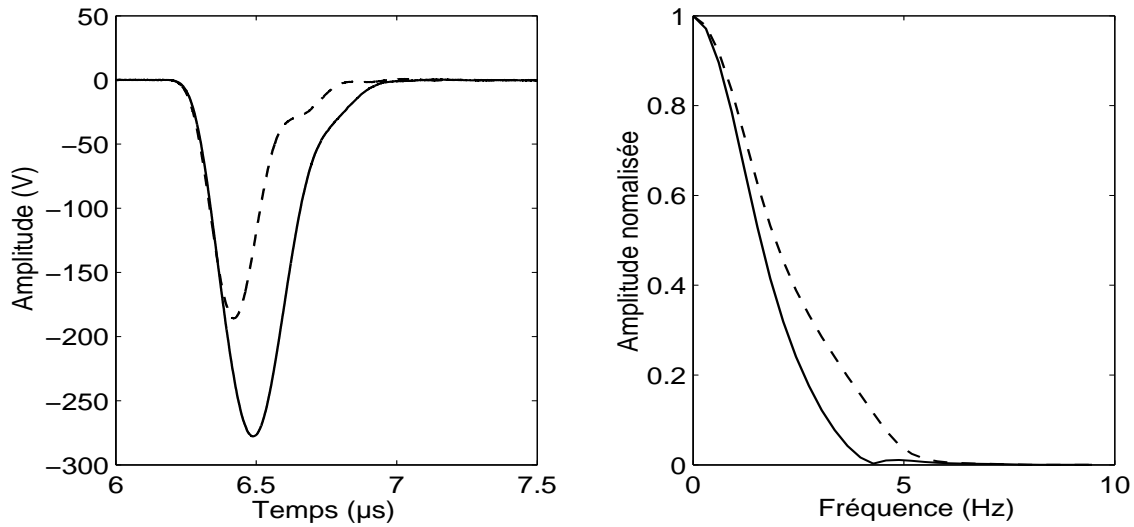


FIG. E.3 – Impulsion électrique délivrée au transducteur et spectre de ces signaux pour deux réglages de la durée de l'impulsion.

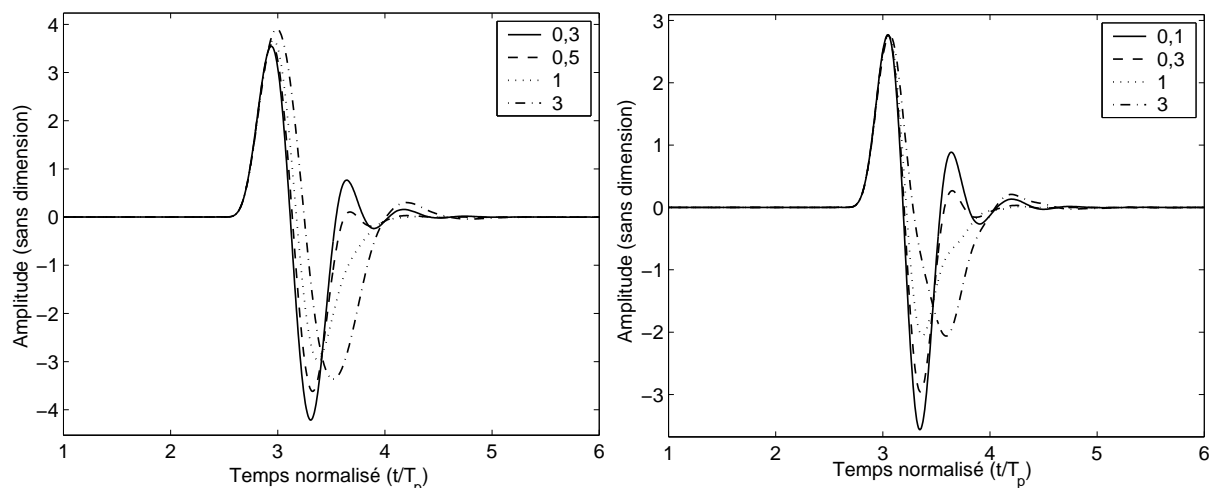
Un exemple d'impulsion électrique est représentée sur la figure E.3. La convolution de ce signal (après normalisation) avec la fonction de transfert électro-mécanique donne la forme du déplacement généré dans le duralumin (figure E.4).

Pour un transducteur donné, nous avons évalué l'effet de la durée de l'impulsion sur amplitude, la fréquence centrale et la largeur à mi-hauteur (du spectre) de la vitesse de déplacement. La figure E.5 résume ces résultats et illustre le compromis qu'il est nécessaire de trouver.

Différents transducteurs ont été réalisés au laboratoire. Les pastilles circulaires sont collées sur le milieu arrière avec une résine époxy conductrice à l'argent. Le connecteur est fixé sur le milieu arrière qui constitue alors l'électrode interne. Le cylindre ainsi réalisé est inséré dans une couronne cylindrique isolante. Une lame adaptatrice en duralumin vient recouvrir l'ensemble et réalise l'électrode externe, reliée à la masse. Pour réduire les échos sur le fond du milieu arrière, celui-ci est rendu diffusant.

L'étain, le fer (fonte) et le laiton ont été envisagés pour réaliser le milieu arrière. Pour une céramique de type PZT-5A ils correspondent respectivement à  $r_1 = 0,81, 1,11$  et  $1,35$ .

La figure E.6 représente ces différents cas, l'étain donne la forme d'onde la plus courte et



(a) Pour une impulsion centrée à 2,25MHz

(b) Pour une impulsion centrée à 3,5MHz

FIG. E.4 – Vitesse de déplacement obtenue par convolution de la réponse impulsionnelle par le signal d'excitation électrique pour différentes valeurs de  $r_1$

l'amplitude et légèrement plus élevée. Ces trois matériaux en dehors de leur impédance mécanique, présentent une forte atténuation qui contribue à réduire les échos de fond. Avec un "backing" en étain et le duralumin comme milieu de propagation, les valeurs d'entrée sont :  $r_2 = 0,56$ ,  $r_1 = 0,78$ ,  $e = 20 \text{ C/m}^2$ ,  $\epsilon = 7,2 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$ ,  $V_p = 4000 \text{ m/s}$ ,  $\rho_p = 7500 \text{ kg/m}^3$ ,  $d = 0,80 \text{ mm}$ ,  $a = 8,28 \text{ mm}$ , et  $K^2 = 0,5$ . Dans ce cas, avec un milieu arrière en étain, et pour une impulsion électrique de 400V, le modèle prévoit une vitesse de déplacement de 0,48 m/s ( $\max(|H|) \times e / (Z_p d) \times U(\text{Volt})$ ).

Les relevés optiques (figures E.7) de vitesse de déplacement sont réalisés à la surface d'une plaque de duralumin de 7 mm d'épaisseur à laquelle un transducteur est collé au "salol". La forme d'onde et l'amplitude données par le modèle concordent bien (figures E.4 et E.7d). La donnée approximative de l'amplitude est certainement due à l'évaluation des paramètres piézoélectriques et au fait qu'on néglige l'atténuation et les couches de colles. Nous comparons un des transducteurs réalisés au laboratoire avec des capteurs du commerce.

L'impédance électrique en réflexion peut être mesurée grâce à un analyseur de réseaux. Ce dernier permet de visualiser et d'acquérir les parties réelles et imaginaires des impédances électriques, mais aussi le module, la phase et le retard de groupe du coefficient de réflexion électrique (impédance vue par le générateur). Les mesures peuvent être réalisées entre chaque étape du processus de fabrication et de vérifier la qualité des collages ou de l'isolation.

Enfin, le rendement de la transmission peut être amélioré en ajoutant un boîtier d'adaptation électrique qui ramène à 50 Ohm l'impédance vue de la source (l'adaptation peut aussi être directement fixée sur le milieu arrière, ceci présente l'avantage de réduire les longueurs de câbles mais est difficile pour des transducteurs de haute fréquence. La capacité statique de la lame piézoélectrique est compensée par une inductance et une résistance permet d'ajuster l'impédance à 50 Ohms.

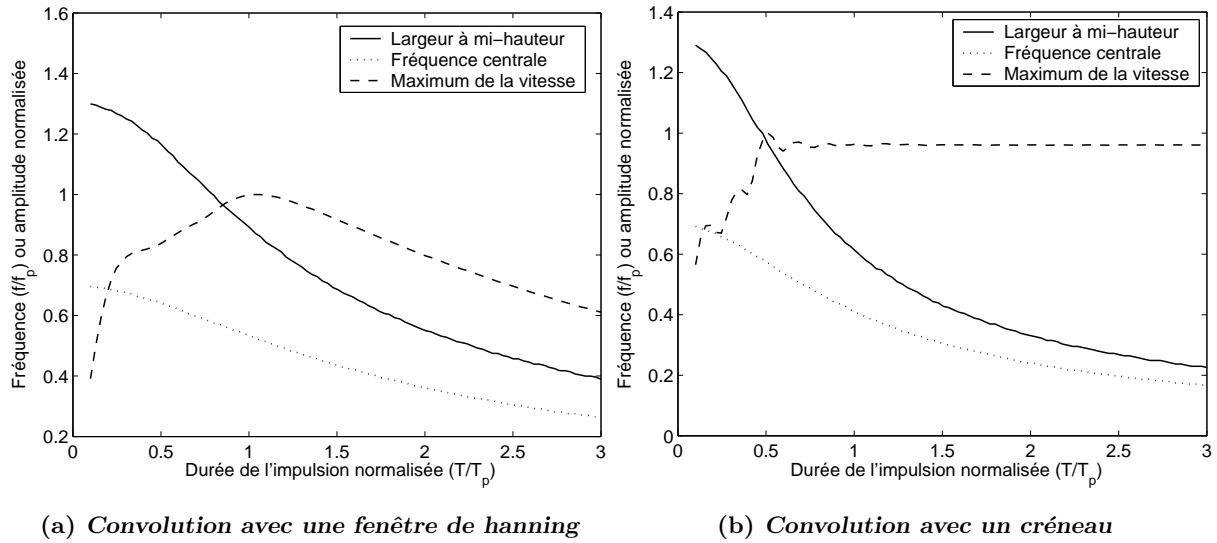


FIG. E.5 – Fréquence centrale, largeur à mi-hauteur, et maximum de la vitesse de déplacement obtenue par convolution de la réponse impulsionnelle, pour  $r_1 = 0,8$

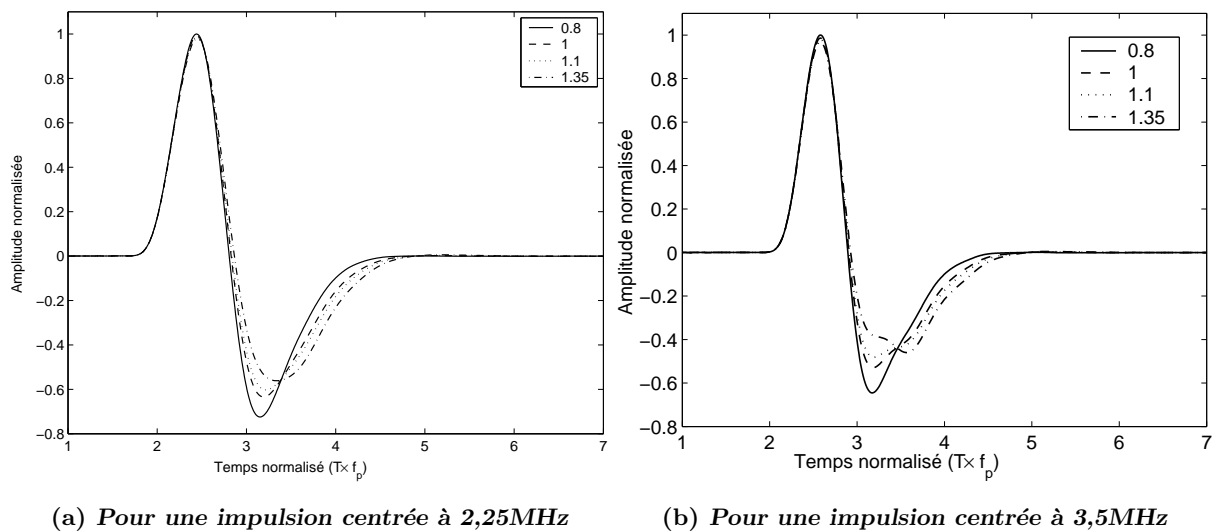


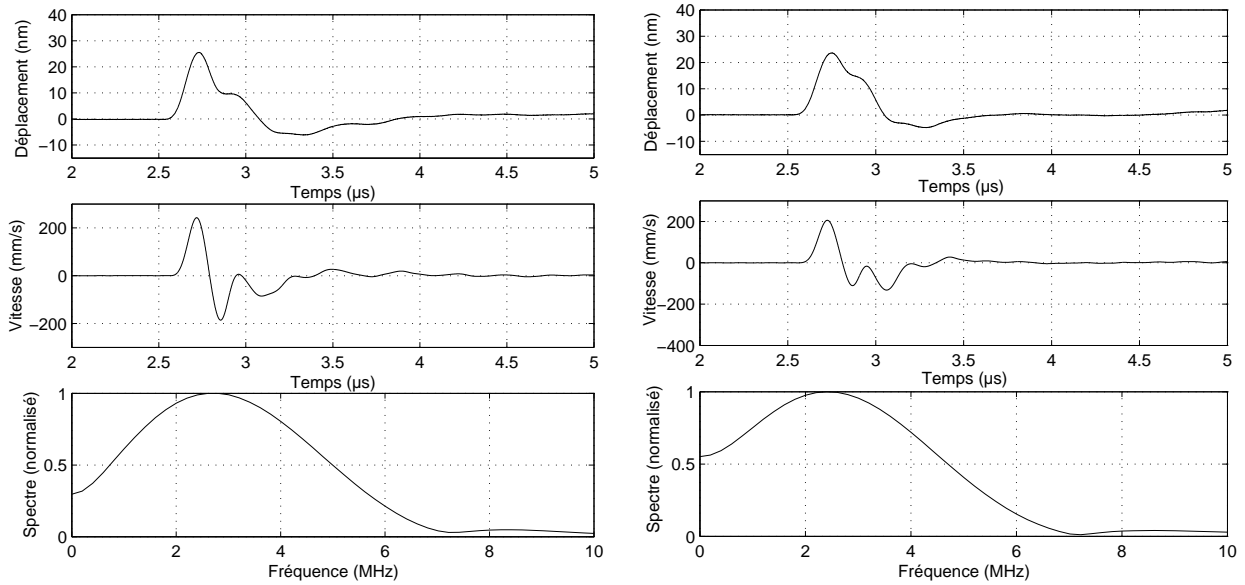
FIG. E.6 – Vitesse de déplacement obtenue par convolution de la réponse impulsionnelle par le signal d'excitation électrique pour différentes valeurs de  $r_1$

Céramique	Célérité (longi.) longitudinale $V_L$ (m/s)	Densité $\rho$ ( $kg/m^3$ )	Impédance mécanique $Z$ (MRa)	Permittivité $\epsilon_S$ ( $F/m$ )	Coefficient piézoélectrique $e_{33}$ ( $C/m^2$ )	Coefficient de Couplage $K^2$
P160	4165	7500	31,2	7,7	21	0,49
P189	4646	7650	35,5	5,91	20,3	0,46
PZT-5A	4000	7500	30	7,2	20	0,46

TAB. E.1 – Caractéristiques de quelques matériaux piézoélectriques (mode d'épaisseur).

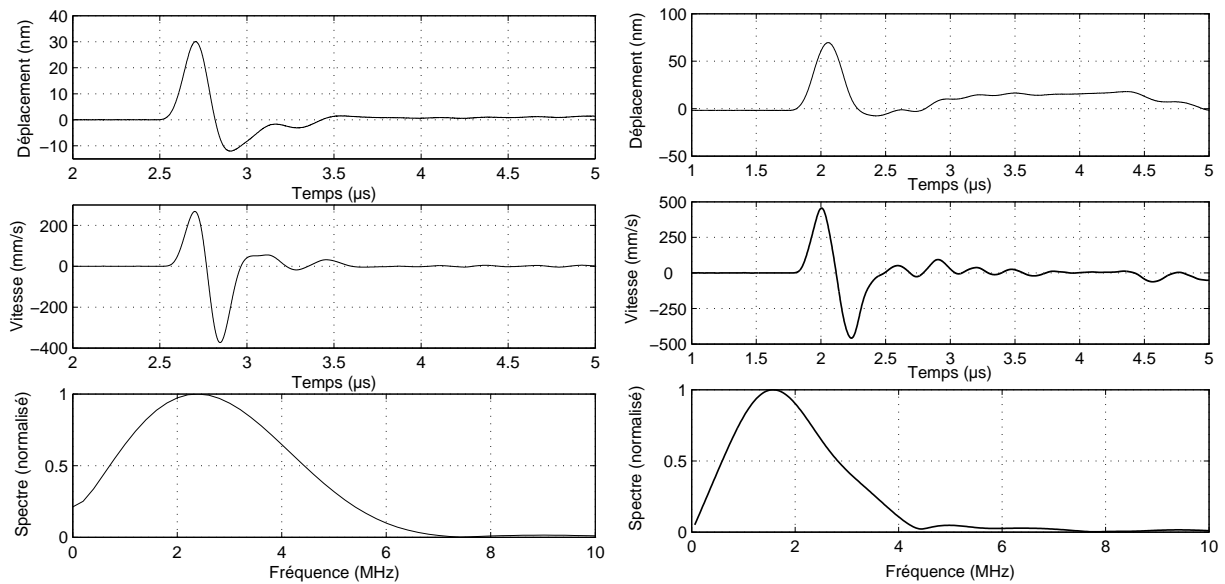
Matériau	Célérité (longi.) $V_L$ (m/s)	Densité $\rho$ ( $kg/m^3$ )	Impédance $Z$ (MRa)
Duralumin	6380	2300	14,8
Cuivre	5010	8930	44,6
Plomb	2200	11200	24,6
Laiton	4700	8640	40,6
Indium	2560	7300	18,7
Zinc	4200	7000	29,6
Titane	6100	4480	27,3
Etain	3300	7300	24,2
Fer (fonte)	4600	7220	33,2
Acier	5900	7800	46

TAB. E.2 – Caractéristiques mécaniques de quelques matériaux (milieu arrière des transducteurs).



(a) *Transducteur X, fréquence centrale 2.5 MHz, diamètre 25 mm*

(b) *Transducteur X, fréquence centrale 2.5 MHz, diamètre 30 mm*



(c) *Transducteur Y, fréquence centrale 2.25 MHz, diamètre 25 mm*

(d) *Transducteur LOA, fréquence centrale 1.8 MHz, diamètre 25 mm*

FIG. E.7 – Comparaison de différents transducteurs (fabricant X, Y et LOA) pour les mêmes conditions d'excitation.

## Annexe F

# Diffraction et polarisations transverses

### Résultats du modèle de faisceau Gaussien

La diffraction d'une onde transverse en régime non-linéaire pourrait produire [43], une deuxième harmonique transverse de polarisation perpendiculaire à celle du fondamental. Ce résultat est obtenu pour des faisceaux d'ouverture Gaussienne. L'apparition de cette composante résulte de la prise en compte de la diffraction du fondamental (non-uniformité de  $v_x$  dans le plan de la source), qui implique la présence des termes non-linéaires "croisés" qui couplent les deux polarisations (dans cette analyse l'éventuelle composante longitudinale est négligée dès le départ).

La solution de l'équation 3.46 (reprise de la référence [43]) est mise sous la forme suivante :

$$u = u_1 \exp i\omega t + u_2 \exp i2\omega t + u_3 \exp i3\omega t \quad (\text{F.1})$$

Les amplitudes complexes du fondamental et de la troisième harmonique, toutes deux polarisées suivant  $x$  et se propageant dans la direction  $z$ , sont trouvées sous la forme :

$$u_1 = \frac{ika_0^2 u_0}{2z + ika_0^2} \exp\left(-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z + ika_0^2}\right) \quad (\text{F.2a})$$

$$u_3 = \frac{iF\omega^4 ka_0^4 u_0^3 z}{2V_T^6 \rho_0 (2z + ika_0^2)^2} \exp\left(-\frac{3ik(x^2 + y^2)}{2z + ika_0^2}\right) \quad (\text{F.2b})$$

Pour la deuxième harmonique polarisée transversalement la solution  $v$ , telle que  $u_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$  est donnée sous la forme d'une intégrale :

$$v = \int_0^z w(z, z') dz', \quad (\text{F.3})$$

avec :

$$w(z, z') = \frac{\Lambda k^2 a_0^6 (z' + ika_0^2) z'}{(2z' + ika_0^2)(4z(z'^2 + k^2 a_0^4) - 3k^2 a_0^4 z' + ika_0^2(4z' + k^2 a_0^4))} \exp\left(-\frac{4ik(x^2 + y^2)(z'^2 + k^2 a_0^4)}{4z(z'^2 + k^2 a_0^4) - 3k^2 a_0^4 z' + ika_0^2(4z' + k^2 a_0^4)}\right), \quad (\text{F.4})$$

$$\text{où } \Lambda = \frac{i(\mu+A/4)F\omega^5 u_0^4}{2\rho_0^2 V_T^9}$$

La résolution s'appuie sur une approximation de faible non-linéarité, ces résultats ne sont donc plus valables au delà de la distance de choc.

Matériau	$f_0$ (Hz)	$u_0$ (m)	$\lambda$ (m)	$a_0$ (m)	$\rho_0$ ( $kg/m^3$ )	$\mu$ (Pa)	A (Pa)	$\beta_T$
Cuivre	$500 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^{-9}$	0,3	$6 \cdot 10^{-3}$	8590	$80 \cdot 9 \cdot 10^9$	$1588 \cdot 10^9$	18,5
Gel	100	0.001	0,016	$4 \cdot 10^{-2}$	1100	2800	101000	5,5

TAB. F.1 – Paramètres de calcul : [121] pour le gel, [178] pour le cuivre (également [73] et [173] pour d'autres solides).

Ces expressions peuvent être évalué numériquement en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour estimer l'amplitude des différentes composantes fréquentielles et leur distribution spatiale. Pour l'intégration de  $w$  une simple sommation numérique est réalisée. Les paramètres d'entrée du calcul sont données dans le tableau F.1 :

- Paramètres du milieu : masse volumique  $\rho_0$ , modules élastiques :  $\mu$ ,  $A$ ,  $\beta_T$
- Caractéristiques de la source : fréquence  $f_0$ , amplitude  $u_0$  et le rayon  $a_0$  de la source, qui est de l'ordre de  $2\lambda$  dans un gel (comme dans l'expérience) et de l'ordre de  $100\lambda$  pour le cuivre (pour comparer avec la référence).

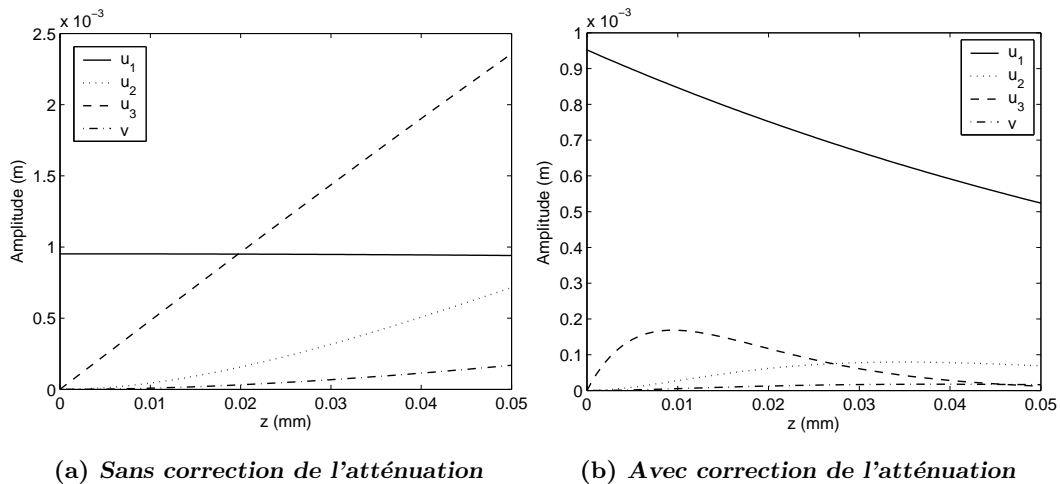


FIG. F.1 – Amplitudes des harmoniques en fonction de la distance près de l'axe de la source ( $x = 0$  et  $y = 2,2$  mm).

Le calcul des amplitudes dans le cas d'un solide "dur" peut être comparé à l'ordre de grandeur donné dans la référence (dans le cas de l'aluminium). Avec les données numériques du tableau F.1, en  $z = 50$  mm, on obtient les valeurs suivantes des rapports d'amplitude :  $u_1/u_0 = 0.99$ ,  $u_3/u_0 = 0.16$  et  $u_2/u_0 = 0.009$  (et  $v/u_0 = 1,6 \cdot 10^{-5}$ ). Cette estimation est bien supérieure à celle de la références :  $u_2/u_0 \approx 10^{-5}$  (sans qu'aucun détail ne soit donné quant à la valeur des constante

ou la méthode de calcul). Par contre, dans le cas des gels les effets non-linéaires sur les ondes de cisaillement sont plus importants.

La figure F.2 montre le profil des différentes composantes dans un plan parallèle à la source à 10mm de cette dernière. Pour obtenir  $u_2$  plutôt que le "potentiel"  $v$  dont il dérive, on différencie, suivant  $y$ , le résultat de l'intégration numérique ( $v(x, y, z)$ ).

La figure F.1 montre l'évolution des composantes, sur l'axe de la source, en fonction de la distance de propagation (on se place légèrement hors d'axe pour  $y$ , de manière à ce que  $u_2$  ne soit pas nul). La distance de choc est d'environ 7 mm : au delà, la solution n'est plus valable (la troisième harmonique croît linéairement avec  $z$ ). La simple multiplication par un facteur d'atténuation exponentiel (F.1b) donne une allure plus réaliste au résultat, mais n'est pas fondée sur une résolution rigoureuse de l'équation d'onde (avec prise en compte de l'atténuation).

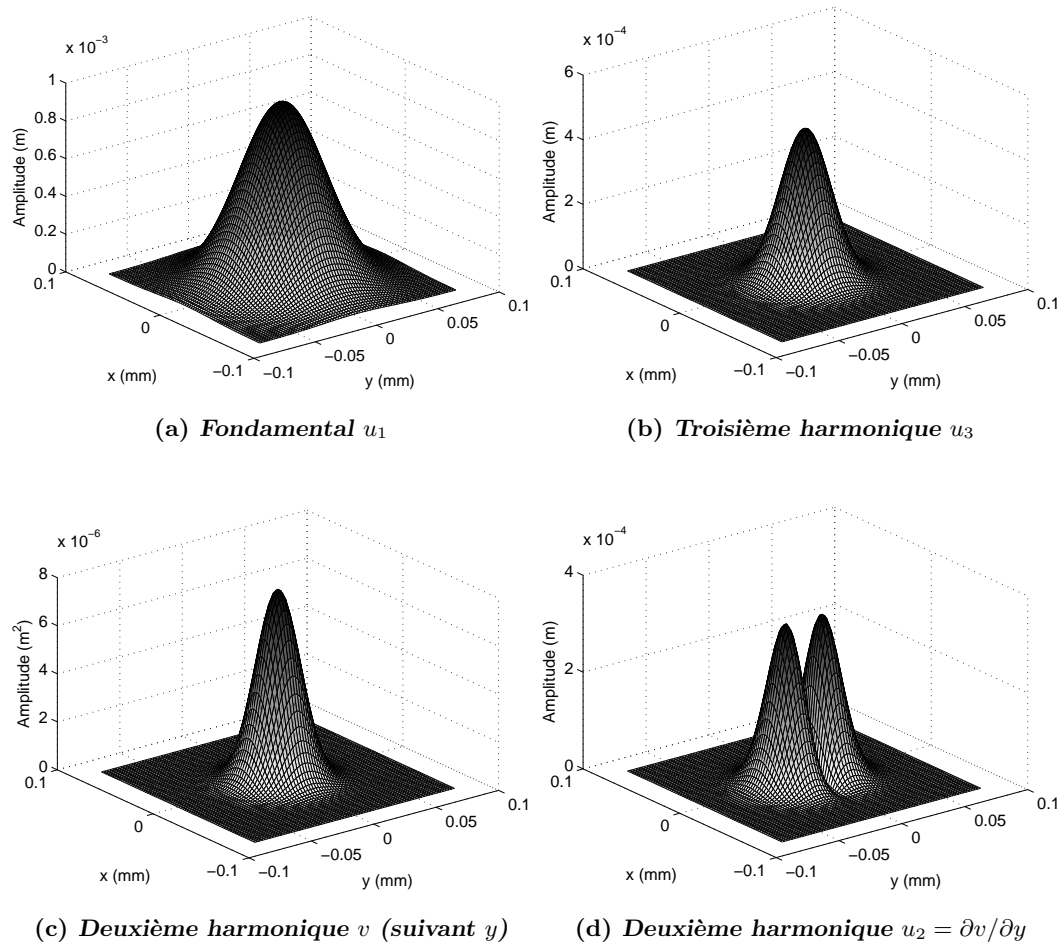


FIG. F.2 – Profils d'amplitude des harmoniques dans un plan  $(x, y)$ , parallèle à la source en  $z = 10$  mm.

## Composantes transverses avec la grande plaque

Pour observer la composante du champ  $v_y$ , il faut placer la barrette perpendiculairement à l'axe  $y$  (figure 3.9). L'expérience résumée par les figures F.4 et F.5 est réalisée avec les deux positions donnant les composantes du déplacement polarisées dans le plan  $(x, y)$  (perpendiculaire à l'axe de propagation  $z$ ). Une deuxième harmonique est présente sur les deux polarisations.

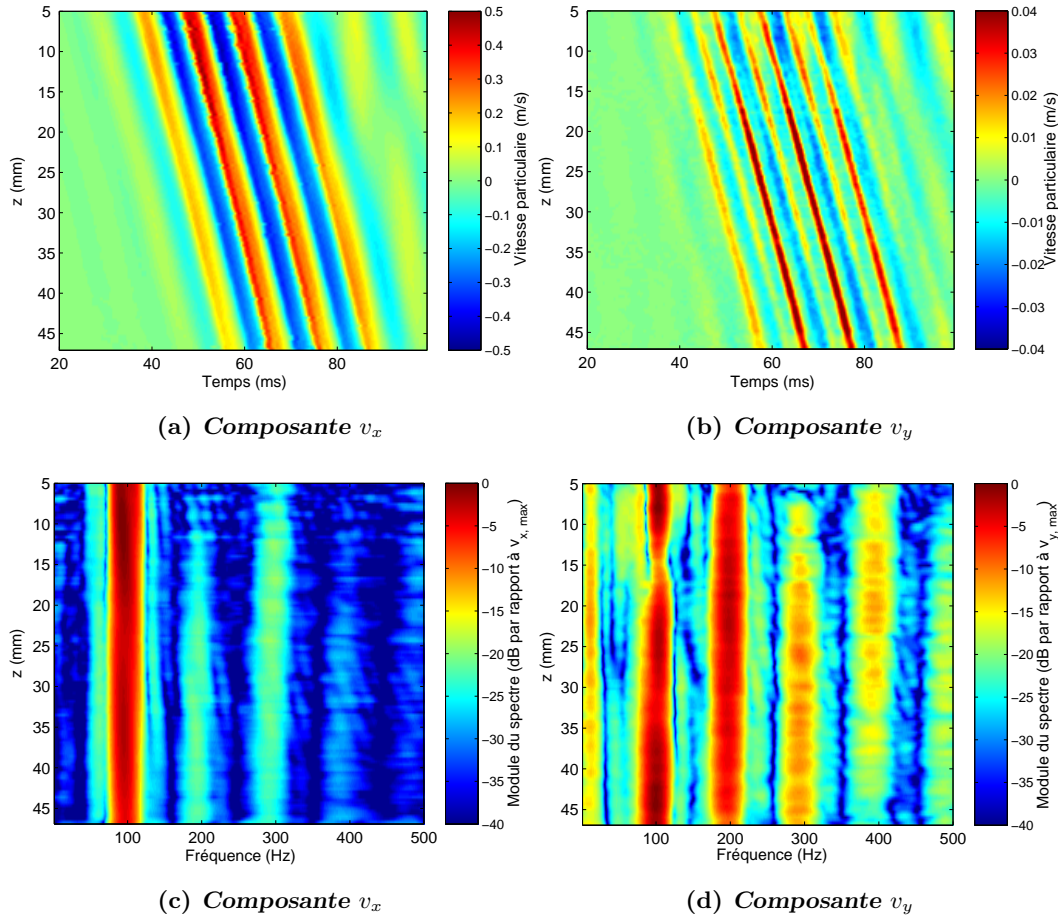


FIG. F.3 – Vitesse et spectre en fonction de la distance de propagation.

On s'attendrait à ce que la composante  $v_x$  ne soit composée que d'harmoniques impaires (comme sur la figure 3.5). Dans la direction perpendiculaire,  $v_y$  devrait théoriquement être nulle si l'onde était parfaitement plane, et composée de la deuxième harmonique seulement si la diffraction intervient (lorsque l'approximation d'ordre trois est adoptée). Pour les composantes d'ordre supérieur il faudrait examiner les interactions successives. La deuxième harmonique polarisée transversalement  $v_y$  est du même ordre de grandeur que la troisième harmonique de  $v_x$ .

La forme de la composante  $v_y$  est quelque peu surprenante, car on s'attend à ce que la deuxième harmonique transverse soit une vibration harmonique. On constate sur les spectres qu'elle correspond à une superposition de composantes fréquentielles paires et impaires (sans que le profil soit

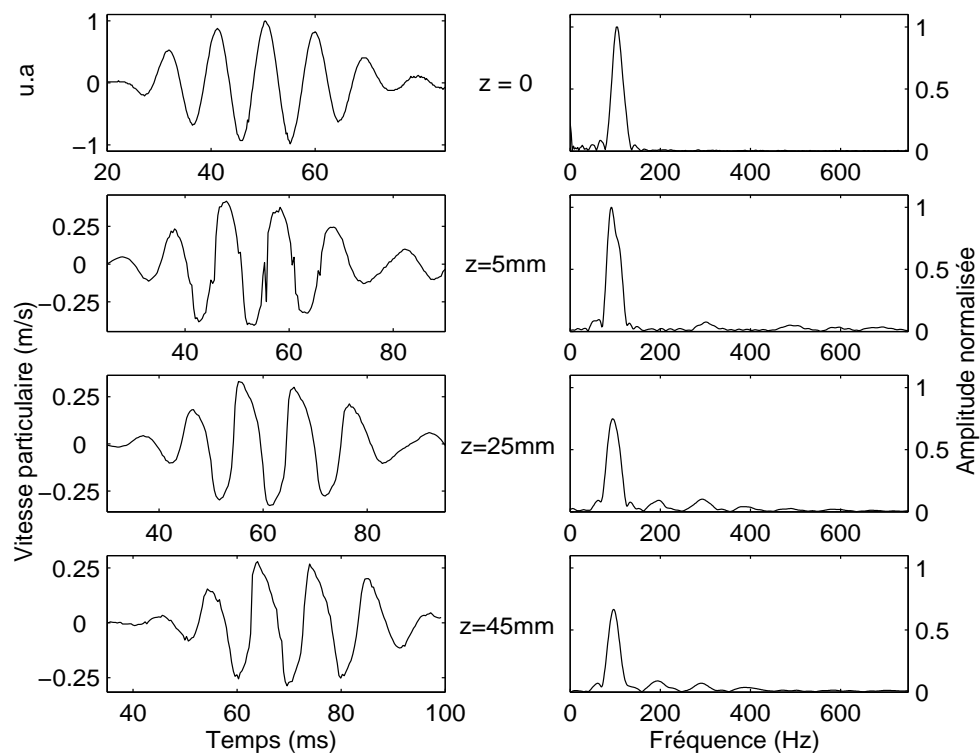


FIG. F.4 – Composante  $v_x$  et son spectre en fonction de la distance de propagation  $z$ . Sur la première ligne ( $z = 0\text{mm}$ ) sont représentés le signal fourni par le capteur de force et son spectre

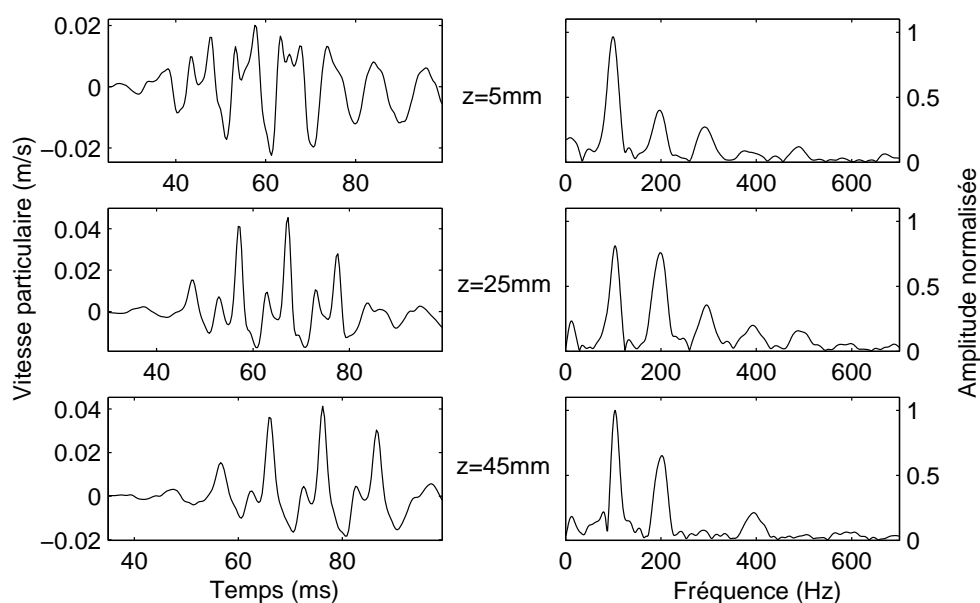


FIG. F.5 – Composante  $v_y$  et son spectre en fonction de la distance de propagation  $z$ .

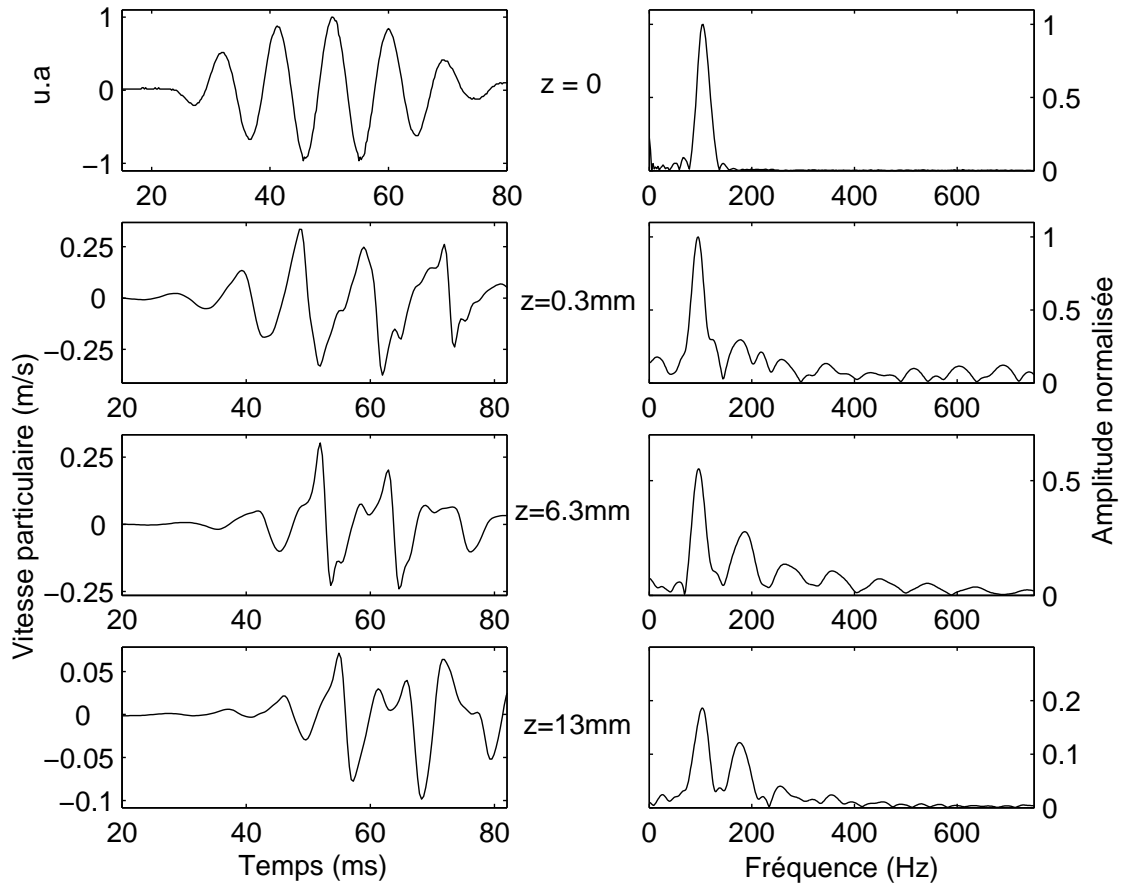


FIG. F.6 – Source 1D génération d’harmonique : composante perpendiculaire à la barre  $v_x$ , et son spectre, en fonction de la distance de propagation  $z$ . Le signal fourni par le capteur de force et son spectre sont représentés sur la première ligne ( $z = 0$  mm).

analogue à celui d’une onde de compression choquée). Nous avons pu vérifier numériquement que la superposition de composantes centrées à  $f_0$  et  $3f_0$  peut fournir des formes assez proches, en ajustant les phases à l’origine.

Si l’excitation de la plaque n’est pas un cisaillement pur (ce qui est difficile à contrôler, mais probable), la composante  $v_y$  sera naturellement non-nulle (on retrouve alors le fondamental et la troisième harmonique suivant  $y$ ) et l’interaction des polarisations peut donner naissance à la fréquence double (si leur distribution dans le plan  $xy$  n’est pas uniforme). La deuxième harmonique sur  $v_x$  n’est d’ailleurs pas visible sur toutes les expériences en ondes planes (voir 3.5), ce qui va dans le sens de cette explication. Le cas de la source de dimension plus faible semble confirmer cette interprétation.

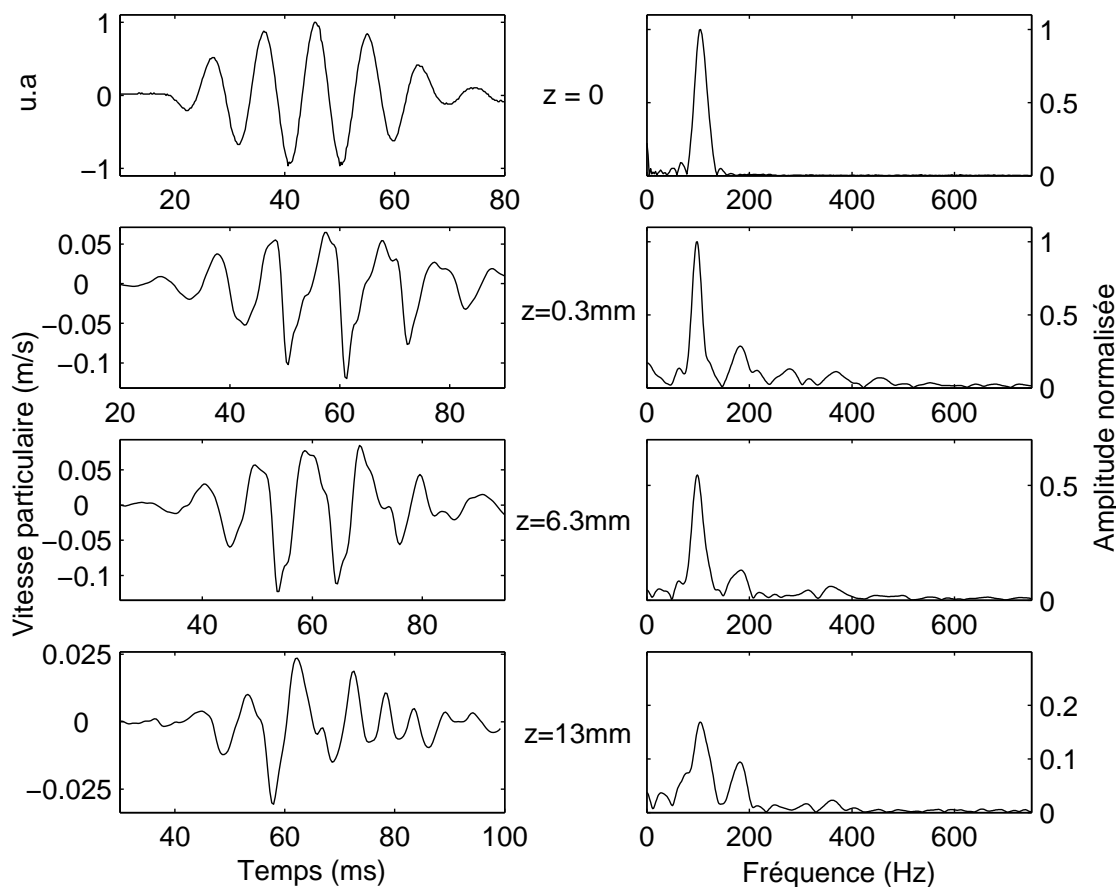


FIG. F.7 – Source 1D génération d’harmonique : composante parallèle à la barre  $v_y$ , et son spectre, en fonction de la distance de propagation  $z$ . Le signal fourni par le capteur de force et son spectre sont représentés sur la première ligne ( $z = 0$  mm).

## Composantes transverses avec la barre

Les figures F.6 et F.7 montrent les deux composantes du champ (polarisées dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation) en fonction de la distance  $z$ . Ces signaux sont obtenus comme précédemment avec l’échographe 2D. Dans les plans de symétrie de la barre (plans  $yz$  et  $xz$  passant par le centre, sur la figure 3.13), les déplacements sont théoriquement nuls. Lorsque la barre est parallèle au plan de l’image (observation de  $v_y$ ), ce dernier ne doit pas être confondu avec le plan de symétrie de la barre  $xz$ . Il faut se placer en dehors de ce plan pour que l’amplitude des signaux ne soit pas nulle. De même, lorsque la barre est perpendiculaire au plan de l’image (observation de  $v_x$ ) il faut que ce dernier ne soit pas confondu avec le plan de symétrie de la barre  $yz$ . Les trois polarisations présentent une certaine similitude et bien que les résultats soient assez bruités, il est possible d’identifier des harmoniques paires et impaires sur  $v_x$  et  $v_y$ .



# Table des figures

1.1	Solution numérique de l'équation de Burgers : génération d'harmoniques . . . . .	16
1.2	Solution numérique de l'équation de Burgers : évolution de l'amplitude des harmoniques en fonction de la distance . . . . .	18
2.1	Principe des mesures absolue et relatives du coefficient de non-linéarité. . . . .	45
2.2	Comparaison des modulations de phase pour une porteuse en train d'ondes et harmonique. . . . .	46
2.3	Dispositif de mesure du coefficient de non-linéarité. . . . .	47
2.4	Modulations de phase pour les mesures relatives dans le duralumin. . . . .	49
2.5	Méthode relative pour un parcours de 25 mm de duralumin et de 20 mm dans l'eau. . . . .	50
2.6	Comparaison des méthodes absolue et relative sur le duralumin. . . . .	50
2.7	Déplacement (en haut) et vitesse particulière (en bas) engendrés par un transducteur BF collé à un échantillon de silice. . . . .	53
2.8	Modulation de phase acoustique et mesure optique sur l'axe et en moyenne suivant un diamètre. . . . .	54
2.9	Mesures optique et acoustique pour un parcours de 15 mm dans du duralumin. . . . .	55
2.10	Mesures optique et acoustique pour un parcours de 25 mm dans du duralumin. . . . .	55
2.11	Comparaison des modulations de phase pour des échantillons de duralumin de 15 et 25 mm d'épaisseur. . . . .	56
2.12	Signaux d'émission-réception obtenus avec une jonction hybride. . . . .	58
2.13	Signaux d'émission-réception obtenus avec des commutateurs. . . . .	59
2.14	Signal d'émission-réception pour la mesure de célérité. . . . .	60
2.15	Principe de la démodulation analogique pour une porteuse harmonique. . . . .	61
2.16	Principe de la démodulation analogique pour un train d'ondes de porteuse. . . . .	62
2.17	Résultats de la démodulation analogique de trains d'ondes. . . . .	63
2.18	Montage pour les mesures du coefficient de non-linéarité des solides et des fluides, avec synchronisation. . . . .	65
2.19	Dispositif électronique de synchronisation. . . . .	65
2.20	Exemples des deux méthodes de démodulation dans le cas d'un solide. . . . .	66
2.21	Comparaison des démodulations analogique et numérique. . . . .	67

2.22	Modulation de phase (démodulation numérique) et vitesse particulière (mesure optique) dans 15 mm de silice. . . . .	68
2.23	Mesures du coefficient de non-linéarité de la silice, démodulation analogique. . . . .	69
2.24	Mesures du coefficient de non-linéarité de la silice, démodulation numérique. . . . .	69
2.25	Coefficients de non-linéarité de l'eau et du butanédiol pour différentes distances d'interaction et fréquences BF. . . . .	71
2.26	Mesure des coefficients de non-linéarité du Germanium. . . . .	73
2.27	Régressions linéaires pour la mesure du coefficient de non-linéarité de quelques solides isotropes. . . . .	74
2.28	Evolution de la vitesse du son et du coefficient de non-linéarité dans le mélange eau/éthanol. . . . .	78
2.29	Evolution des volumes molaires partiels de l'eau et de l'éthanol en fonction de la fraction volumique d'éthanol dans le mélange. . . . .	79
3.1	Solution numérique de l'équation de Burgers modifiée (ondes transversales). . . . .	94
3.2	Solution numérique de l'équation de Burgers : évolution des harmoniques en fonction de la distance à la source. . . . .	95
3.3	Imagerie classique (a) et imagerie ultrarapide (b). . . . .	96
3.4	Dispositif expérimental pour l'observation de l'interaction d'ondes planes de cisaillement. . . . .	97
3.5	Onde plane de cisaillement choquée : profil et spectre en fonction de la distance de propagation. . . . .	98
3.6	Onde planes de cisaillement : évolution de l'amplitude des harmoniques en fonction de la distance. . . . .	99
3.7	Interaction d'ondes planes transverses : profil et spectre en fonction de la distance de propagation . . . . .	100
3.8	Interaction d'ondes planes transverses : comparaison avec le modèle numérique de l'équation de Burgers modifiée. . . . .	101
3.9	Positions de la barrette d'imagerie pour accéder aux différentes polarisations. . . . .	106
3.10	Source plane : Scan des composantes $v_x$ et $v_z$ de la vitesse de déplacement. . . . .	107
3.11	Source de dimension finie : évolution des harmoniques en fonction de la distance de propagation. . . . .	109
3.12	Source de dimension finie : vitesse et spectre en $z = 16.5$ mm. . . . .	109
3.13	Dispositif expérimental pour la source 1D. . . . .	110
3.14	Mesure des vitesses de déplacement par corrélation des signaux rétro-diffusés. . . . .	111
3.15	Source 1D génération d'harmoniques : composante axiale et son spectre, en fonction de la distance de propagation. . . . .	112
3.16	Interaction d'ondes avec la source 1D : évolution des harmoniques dans les directions parallèle et perpendiculaire au déplacement. . . . .	113

3.17	Interaction d'ondes avec la source 1D : évolution des harmoniques en fonction de la distance de propagation. . . . .	114
4.1	Dispositif expérimental de mesure de champs acoustiques de forte intensité. . . . .	118
4.2	Montage optique de l'interféromètre à simple hétérodynage. . . . .	119
4.3	Montage optique de l'interféromètre à double hétérodynage. . . . .	120
4.4	Rapport $J_{N+1}/J_N$ en fonction de l'ordre et de l'indice de modulation. . . . .	122
4.5	Règle de Carson et densité spectrale de puissance de la porteuse modulée en phase ( $f_p = 70$ MHz). . . . .	124
4.6	Densité spectrale de puissance de la porteuse modulée par le fondamental et l'harmonique $n = 10$ . . . . .	125
4.7	Principe de la démodulation analogique à 2 voies pour les fortes modulations. . . . .	126
4.8	Comparaison de la démodulation analogique à 2 voies et de sa transposition numérique. . . . .	128
4.9	Comparaison des interféromètres à simple et double hétérodynage. . . . .	129
4.10	Démodulation par détection des passages par zéro. . . . .	130
4.11	Comparaison des démodulations numériques en quadrature et par détection des passages par zéro. . . . .	131
4.12	Vitesses de déplacement avec différents schémas de dérivation. . . . .	132
4.13	Membrane de mylar, sans lentille. . . . .	133
4.14	Membrane de mylar, avec lentille de focale 10 cm. . . . .	134
4.15	Membrane d'aluminium, sans lentille. . . . .	135
4.16	Membrane d'aluminium avec lentille de focale 10 cm. . . . .	135
4.17	Effet des membranes et artefacts de la démodulation numérique. . . . .	137
4.18	Démodulations numériques : effets du filtrage. . . . .	138
4.19	Artefacts sur un B-scan. . . . .	139
4.20	Exemples de porteuse avec et sans artefact. . . . .	140
4.21	Exemple de signaux de phase déroulés après correction. . . . .	140
4.22	Correction des décrochements par l'algorithme de l'ESA. . . . .	140
4.23	Comparaison d'un hydrophone et d'un interféromètre. . . . .	145
4.24	Dispositif expérimental pour la mesure de la contrainte de radiation. . . . .	151
4.25	Démodulation adaptée à la mesure des composantes transitoires et statiques. . . . .	152
4.26	Forme du signal détecté pour différents filtres analogiques passe-bas. . . . .	152
4.27	Déplacements HF et BF mesuré à la surface du duralumin et de la silice. . . . .	154
4.28	Dépendance quadratique du déplacement statique en fonction de l'amplitude du fondamental. . . . .	155
C.1	Montage pour les mesures du coefficient de non-linéarité des fluides en régime harmonique. . . . .	177
C.2	Fonctionnement en émission-réception de la jonction hybride. . . . .	178

C.3	Montage pour les mesures du coefficient de non-linéarité des solides, avec un train d'onde de porteuse. . . . .	179
C.4	Montage des commutateurs avec un composant : montage en T pour l'émission. . . . .	180
C.5	Commutateurs avec deux composants : montage en T sur les deux lignes. . . . .	180
C.6	Calibration du mélangeur analogique en fonction du niveau sur l'entrée RF. . . . .	181
C.7	Dispositif de calibration automatisé de la démodulation analogique des trains d'ondes. . . . .	182
C.8	Détermination de la sensibilité à l'aide de trois lignes à retard. . . . .	182
C.9	Filtre passe-bas à 230 MHz pour la sonde interférométrique à double hétérodynage . . . . .	184
C.10	Réponse en fréquence du filtre passe-bas à 230 MHz . . . . .	184
C.11	Filtre passe-bande (65 – 75 MHz) pour la mesure de la pression de radiation. . . . .	185
C.12	Réponse fréquentielle du filtre passe-bande (65-75MHz). . . . .	185
D.1	Calcul de la réponse impulsionnelle de diffraction . . . . .	187
D.2	Potentiel (ou déplacement) le long de l'axe de propagation $z$ , en moyenne sur le rayon du récepteur . . . . .	188
D.3	Potentiel (ou déplacement) suivant le rayon $r$ en $z = 15\text{mm}$ . . . . .	188
D.4	Potentiel (ou déplacement) suivant le rayon $r$ en $z = 30\text{mm}$ . . . . .	188
D.5	Transducteur carré, signaux en fonction du rayon du récepteur $r$ . . . . .	189
D.6	Transducteur circulaire, signaux moyennés sur le rayon du transducteur. . . . .	190
D.7	Transducteur carré, signaux moyennés sur le rayon du transducteur. . . . .	190
E.1	Réponse en fréquence d'un transducteur en fonction du rapport des impédance. . . . .	192
E.2	Réponses fréquentielle et impulsionnelle pour différentes valeurs du rapport des impédances. . . . .	193
E.3	Impulsion électrique appliquée au transducteur. . . . .	194
E.4	Vitesse de déplacement obtenue par convolution de la réponse impulsionnelle. . . . .	195
E.5	Fréquence centrale, largeur à mi-hauteur, et maximum de la vitesse de déplacement. . . . .	196
E.6	Vitesse de déplacement obtenue par convolution de la réponse impulsionnelle. . . . .	196
E.7	Comparaison de différents transducteurs. . . . .	198
F.1	Modèle de faisceau Gaussien : amplitudes des harmoniques en fonction de la distance. . . . .	200
F.2	Modèle de faisceau Gaussien : profils d'amplitude des harmoniques dans un plan parallèle à la source. . . . .	201
F.3	Onde plane, composantes transverses $v_x$ et $v_y$ . . . . .	202
F.4	Onde plane, composante $v_x$ . . . . .	203
F.5	Onde plane, composante $v_y$ . . . . .	203
F.6	Source 1D, génération d'harmonique : composante perpendiculaire à la barre. . . . .	204
F.7	Source 1D, génération d'harmonique : composante parallèle à la barre. . . . .	205



# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques de la propagation dans l'eau et le duralumin. . . . .	37
1.2	Distances caractéristiques et nombres sans dimension. . . . .	37
2.1	Mesures dans le gel couplant et un gel de gélatine. . . . .	70
2.2	Calibration dans l'eau et mesures dans le butanédiol. . . . .	71
2.3	Coefficients de non-linéarité d'un cristal cubique suivant les directions (001) et (110). . . . .	72
2.4	Coefficients de non-linéarité du Germanium suivant les directions (001) et (110). . . . .	73
2.5	Mesures dans différents solides isotropes. . . . .	75
2.6	Mesures sur le verre pour différentes conditions de trempe. . . . .	80
4.1	Calibration de la démodulation analogique avec la démodulation numérique. . . . .	153
4.2	Dépendance quadratique du déplacement statique en fonction de l'amplitude du fondamental. . . . .	155
4.3	Valeurs expérimentales et théoriques (équation 4.34) du rapport $u_{BF}/u_{HF}^2$ dans la silice. . . . .	156
4.4	Valeurs expérimentales et théoriques des déplacements et du rapport $u_{BF}/u_{HF}^2$ dans le duralumin. . . . .	157
E.1	Caractéristiques de quelques matériaux piézoélectriques (mode d'épaisseur). . . . .	197
E.2	Caractéristiques mécaniques de quelques matériaux (milieu arrière des transducteurs). . . . .	197
F.1	Paramètre de calcul pour le modèle de faisceau Gaussien d'onde transverse. . . . .	200



# Liste des symboles

$\alpha_0, a, A, a', \tilde{a}$  Les indices zéro indiquent les quantités à l'équilibre ou les conditions initiales. Les minuscules se réfèrent aux grandeurs dont la dépendance spatiale est exprimée en Euler, et les majuscules en Lagrange, l'apostrophe désigne des variations (suppression...), le tilde est utilisé pour les variables sans dimension.

$\eta$  Viscosité de cisaillement

$\Gamma$  Nombre de Gol'dberg

$\hat{e}_i$  Vecteurs unitaires Eulériens

$\kappa$  Conductivité thermique

$\lambda$  Première constante de Lamé (compression)

$\mu$  Deuxième constante de Lamé (cisaillement)

$\bar{\epsilon}$  et  $\bar{\omega}$  Parties symétrique et antisymétriques du tenseur des déformations de Green-Lagrange

$\bar{\tau}$  Tenseur des contraintes visqueuses

$\bar{B}$  Tenseur des dilatations de Green-Cauchy à gauche

$\bar{C}$  Tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite

$\bar{D}$  et  $\bar{W}$  Les parties symétriques et antisymétriques du tenseur des taux de déformations

$\bar{F}$  Tenseur des transformations ou gradient des déformations

$\bar{H}$  Tenseur gradient des déplacements

$\bar{P}, \bar{P}'$  Premier (pseudo-tenseur) et second tenseur de Piola-Kirchhoff

$\bar{S}$  Tenseur des déformations de Green-Lagrange

$\bar{T}$  Tenseur des contraintes de Cauchy

$\bar{V}$  Tenseur des taux de déformations

$\Phi, \phi$  Potentiel des vitesses, phase d'un signal ou modulation de phase

$\rho$  Densité

$\mathbf{v}, v$  Vitesse particulaire, variation relative de vitesse

---

$\zeta$	Viscosité de volume
$a_i$	Coordonnées Lagrangiennes
$A_l, B_l$	Coefficients du développement de l'équation d'état d'un fluide
$b$	Coefficient d'absorption
$C_{ijk}$ ou $C_{ijklmn}$	Constante élastiques du troisième ordre
$C_{ij}$ ou $C_{ijkl}$	Constante élastiques du deuxième ordre
$F$	Energie libre
$K$	Module d'incompressibilité adiabatique
$k$	Constante de Boltzmann ou vecteur d'onde
$K_{ls}$ ou $\chi$	Module de compressibilité adiabatique d'un liquide
$K_{IT}$	Module de compressibilité isotherme d'un liquide
$M$	Nombre de Mach
$p$	Pression ou surpression (variation relative de pression)
$S, s$	Entropie
$U_i$	Déplacement
$W, E, e$	Energie interne
$x_i$	Coordonnées Eulériennes
$z_c$	Distance de choc



# Bibliographie

- [1] M. F Hamilton and D. T. Blackstock. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [2] Jean Coirier. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, Paris, 2001, 2ème édition.
- [3] L. Landau and E. Lifschitz. *Physique théorique Tome 1 : Mécanique, quatrième édition (1982)*. Edition MIR, Moscou, 1964.
- [4] Daniel Royer. Acoustique, propagation dans un fluide. *Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences Fondamentales*, AF 3812, pp. 1–16, 2000.
- [5] R. T. Beyer. Parameter of nonlinearity in fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 32(6), pp. 719–721, 1960.
- [6] S. Makarov and M. Ochmann. Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part I. *Acustica - Acta Acustica*, 82, pp. 579–606, 1996.
- [7] A. B. Coppens, R. T. Beyer, M. B. Seiden, J. Donohue, F. Guepin, R. H. Hodon, and C. Townsend. Parameter of nonlinearity in fluids. II. *J. Acoust. Soc. Am.*, 38, pp. 797–804, 1965.
- [8] M. J. W. Povey, S. A. Hindle, J. D. Kennedy, Z. Stec, and R. G. Taylor. The molecular basis for sound velocity in n-alkanes, 1-alcohols and dimethylsiloxanes. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 5, pp. 73–78, 2003.
- [9] X-C. Xu, F. Mao, X-F. Gong, and D. Zhang. Theoretical calculation and experimental study on the third-order nonlinearity parameter C/A for organic liquids and biological fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(3), pp. 1743–1748, 2003.
- [10] A. D. Pierce. *Acoustics, An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1981.
- [11] S. I. Aanonsen, T. Barkve, J. Naze Tjøtta, and S. Tjøtta. Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(3), pp. 749–768, 1984.
- [12] V. P. Kuznetsov. Equation of nonlinear acoustics. *Sov. Phys. Ac.*, 16, pp. 467–470, 1971.
- [13] P. J. Westervelt. Parametric acoustic array. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35, pp. 535–537, 1963.
- [14] O. V. Rudenko and S. I. Soluyan. *Theoretical foundations in nonlinear acoustics*. Studies in soviet science, 1977.
- [15] K. Naugolnykh and L. Ostrovsky. *Nonlinear Waves Processes in Acoustics*. Cambridge texts in applied mathematics, 1998.

- [16] Whitham G. B. *Linear and nonlinear waves*. Wiley, New York, 1974.
- [17] L. Landau. On shock waves at large distances from the place of their origin. *J. Phys. USSR*, 9, pp. 496–500, 1945.
- [18] L. Landau and E. Lifschitz. *Physique théorique Tome 6 : Mécanique des fluides, deuxième édition (1989)*. Edition MIR, Moscou, 1971.
- [19] Blackstock. Connection between the fay and fubini solution for plane sound waves of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 39(6), pp. 1019–1029, 1966.
- [20] F. H. Fenlon. An extension of bessel-fubini series for a multiple frequency CW acoustic source of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(1), pp. 284–289, 1972.
- [21] D. T. Blackstock. Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34(1), pp. 9–30, 1961.
- [22] Michel Planat. *Propagation non linéaire des ondes acoustiques dans les solides*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 1984.
- [23] B. McDonald and J. Ambrosiano. High-order upwind flux correction methods for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Physics*, 56, pp. 449–460, 1984.
- [24] A. S. Birks, R. E. Green, and P. McIntire. *Introduction to Fourier optics*, volume second edition 1996. Mc Graw-Hill, New-York, 1968.
- [25] F. Ingenito and A. O. Williams. Calculation of second-harmonic generation in a piston beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49(1), pp. 319–328, 1970.
- [26] P. Alais et P. Y. Hennion. Etude par une méthode de fourier de l'interaction non-linéaire de deux rayonnements acoustiques dans un fluide absorbant. cas particulier de l'émission paramétrique. *Acustica*, 43, pp. 1–11, 1979.
- [27] Pierre Cervenka and Pierre Alais. Fourier formalism for describing nonlinear self-demodulation of a primary narrow ultrasonic beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(1), pp. 473–481, 1990.
- [28] Christophe Barrière. *Effet de la diffraction sur l'interaction paramétrique d'ondes acoustiques. Application à la mesure de paramètres de non linéarité et de champs acoustiques*. Thèse de doctorat, Université Paris VII-Denis Diderot, Paris, 2001.
- [29] E. A. Zabolotskaya and R. V. Khokhlov. Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams. *Sov. Phys. Ac.*, 15(1), pp. 35–40, 1969.
- [30] Lee Y. S. and Hamilton M. F. Time domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(2), pp. 906–917, 1995.
- [31] K. Brugger. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients. *Physical Review*, 133(6A), pp. 1611–1612, March 1964.
- [32] L. Landau and E. Lifschitz. *Physique théorique Tome 7 : Théorie de l'élasticité, deuxième édition (1990)*. Edition MIR, Moscou, 1967.

- [33] Vlado A. Lubarda. *Elastoplasticity theory*. CRC Press LLC, Washington D.C., 2002.
- [34] L. K. Zarembo and V. A. Krasil'nikov. Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids. *Sov. Phys. Usp.*, 13, pp. 778, 1971.
- [35] P. A. Johnson and P. N. J. Rasolosofaon. Nonlinear elasticity and stress induced anisotropy in rock. *Journal of Geophysical research.*, 101(B2), pp. 3113–3124, Fev. 1996.
- [36] Daniel Royer et Eugène Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides, tome 1*. Masson, Paris, 1996.
- [37] M. A. Breazeale and J. Philip. Determination of third order elastic constants from ultrasonic harmonic generation measurement. *Physical Acoustics*, XVII, pp. 1–60, 1984.
- [38] Christophe Barrière. Cours du DEA d'Acoustique Physique. *Université Paris VII*, 2003.
- [39] A. Jeffrey and J. Engenbrecht. *Nonlinear Waves in Solids*. Springer-Verlag, Wien - New York, 1994.
- [40] F. D. Murnaghan. *Finite Deformations of Elastic Solids*. Chapman and Hall, New York, 1951.
- [41] R. N. Thurston and M. J. Shapiro. Interpretation on ultrasonic experiments on finite-amplitude waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 41(4, part. 2), pp. 1112–1124, 1967.
- [42] Z. A. Gol'dberg. Interaction of plane longitudinal and transverse elastic waves. *Sov. Phys. Acoust.*, 6, pp. 306–310, 1971.
- [43] E. A. Zabolotskaya. Sound beam in a nonlinear isotropic solid. *Sov. Phys. Acoust.*, 32, pp. 296–299, 1986.
- [44] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. Separation of compressibility and shear deformation in the elastic energy density. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(1), pp. 41–44, 2004.
- [45] S. Kostek, B. K. Sinha, and A. N. Norris. Third order elastic constants for an inviscid fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(5), 1993.
- [46] G. L. Jones and D. R. Kobett. Interaction of elastic waves in an isotropic solid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35, January 1962.
- [47] P. Waldow and F. R. Rollins. Remark on a paper by Jones and Kobett (letter). *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(7), pp. 1060, 1963.
- [48] F. Rollins, L. H. Taylor, and P. H. Todd. Ultrasonic study of three phonon interaction. II. experimental results. *Phys. Rev.*, 135A, pp. 597–601, 1964.
- [49] A. C. Holt and J. Ford. Theory of the ultrasonic three phonon interaction in single crystals solids. *J. Appl. Phys.*, 40(1), pp. 142–153, 1969.
- [50] L. K. Zarembo, O. Yu. Serdobol'skaya, and I. P. Chernobai. Effect of boundary reflection phase shift on the nonlinear interaction of longitudinal waves in solids. *Sov. Phys. Acoust.*, 18(3), pp. 333–338, 1973.

- [51] P. Li, W.P. Winfree, W.T. Yost, and J.H. Cantrell. Observation of collinear beam mixing by an amplitude modulated wave in a solid. *IEEE Ultrasonic Symp*, page 1152, 1983.
- [52] R. B. Thompson and H. F. Tiersen. Harmonic generation of longitudinal elastic waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 62(1), pp. 33–37, 1977.
- [53] E. C. Everbach and R. E. Apfel. An interferometric technique B/A measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(6), pp. 3428–3438, Dec. 1995.
- [54] D.C. Hurley, P.T. Purtscher, D. Balzar, K.W. Hollman, and C.M. Fortunko. Non linear ultrasonic properties of as-quenched steels. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (RPQNDE)*, 17, pp. 4584–4588, 1998.
- [55] R. T. Smith, R. Stern, and R. W. Stephens. Third order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurement. *J. Acoust. Soc. Am.*, 40(5), pp. 1002–1008, 1966.
- [56] J. H. Cantrell and M. A. Breazeale. Ultrasonic investigation of the nonlinearity of fused silica for different hydroxyl-ion contents and homogeneities between 300 and 3°K. *Phys. Rev. B.*, 17(12), pp. 4864–4870, 1978.
- [57] P. Andreatch Jr. and H. J. McSkimin. Pressure dependance of ultrasonic wave velocities and elastic stiffness moduli for  $tio_2 - sio_2$  glass (Corning 7971). *J. Appl. Phys.*, 47(4), pp. 1299–1301, April 1976.
- [58] P.B. Nagy. Fatigue damage assesment by nonlinear ultrasonic materials characterisation. *Ultrasonics*, 36, pp. 375, 1998.
- [59] J.K. Na, J.H. Cantrell, and W.T. Yost. Linear and nonlinear ultrasonic properties of fatigued 410CB stainless steel. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (RPQNDE)*, 15, 1996.
- [60] K-Y. Jhang. Application of nonlinear ultrasonics to the NDE of material degradation. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, 47(3), 2000.
- [61] O. Buck. Nonlinear acoustic properties of structural materials - a review. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, 9, December 1990.
- [62] R. B. Thompson, O. Buck, and D. O. Thompson. Higher harmonics of finite amplitude ultrasonic waves in solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(5), pp. 1087–1094, May 1976.
- [63] Olivier Bou Matar-Lacaze. *Application de l'acoustique non-linéaire à l'imagerie médicale et au au contrôle non destructif de matériaux*. Habilitation à diriger les recherches, Université François Rabelais, Tours, 2003.
- [64] A. Moreau. Detection of acoustic second harmonics in solids using a heterodyne laser interferometer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(5), pp. 2745–2752, 1995.
- [65] Michel Villa. *Caractérisation ultrasonore de matériaux par des méthodes d'acoustique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université François Rabelais, Tours, 2003.

- [66] H. Fukukita, S-I. Ueno, and T. Yano. Ultrasound pulse reflection mode measurement of non-linearity parameter B/A and attenuation coefficient. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(5), pp. 2775–2782, 1996.
- [67] C. A. Cain. Ultrasonic reflection mode imaging of the nonlinear parameter B/A : I. a theoretical basis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 80(1), pp. 28–32, 1986.
- [68] D. Kourtiche, L. Allières, A. Chitnalah, and M. Nadi. Harmonic propagation of finite amplitude sound beams : comparative method in pulse echo measurement of nonlinear B/A parameter. *Meas. Sci. Technol.*, 12(11), pp. 1990–1995, 2001.
- [69] D. Kourtiche, L. Allières, A. Chitnalah, and M. Nadi. Harmonic propagation of finite amplitude sound beams : second harmonic imaging in ultrasonic reflection tomography. *Meas. Sci. Technol.*, 15, pp. 21–28, 2004.
- [70] D. Zhang, X-F. Gong, and X. Chen. Experimental imaging of the acoustic nonlinearity parameter B/A for biological tissue via parametric array. *Ultrasound in Med. and Biol.*, 27(10), pp. 1359–1365, 2001.
- [71] X. Gong, D. Zhang, J. Liu, H. Wang, Y. Yan, and X. Xu. Study of acoustic nonlinearity parameter imaging methods in reflection mode for biological tissues. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(3), pp. 1819–1825, 2004.
- [72] N. Ichida, T. Sato, H. Miwa, and K. Murakami. Real-time nonlinear parameter tomography using impulsive pumping waves. *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, SU-31(6), pp. 635–641, Nov. 1984.
- [73] R. A. Graham. Determination of third- and fourth-order longitudinal elastic constants by shock compression techniques-application to sapphire and fused quartz. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(5, part 2), 1972.
- [74] Chavrier, Lafon, Birer, Cathignol, Jacob, and Barrière. An original method for determining the nonlinearity parameter B/A. *non soumis*, 2005.
- [75] M. A. Breazeale. Nonlinear acoustics and how she grew. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (RPQNDE)*, 11, pp. 2015–2023, 1992.
- [76] B. D. Blackburn and M. A. Breazeale. Nonlinear distortion of ultrasonic waves in small crystalline samples. *J. Acoust. Soc. Am.*, 76(6), 1984.
- [77] G.E. Dace, R.B. Thompson, , and O. Buck. Measurement of the acoustic harmonic generation for characterization using contact transducer. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (RPQNDE)*, 11, pp. 2069–2076, 1992.
- [78] Alain Le Brun. *Méthodes ultrasonores de caractérisation des matériaux endommagés*. Thèse de doctorat, Université Paris VI-Pierre et Marie Curie, Paris, 1997.
- [79] R. N. Thurston and K. Brugger. Third order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. *Phys. Rev.*, 133(6A), pp. 1604–1610, 1964.

- [80] H. Ogi, N. Nakamura, M. Hirao, and H. Ledbetter. Determination of elastic, anelastic and piezoelectric coefficients of piezoelectric materials from a single specimen by acoustic resonance spectroscopy. *Ultrasonics*, 42(1-9), pp. 182–183, 2004.
- [81] T. J. Ulrich, K. R. McCall, and R. A. Guyer. Determination of elastic moduli of rock samples using resonant ultrasound spectroscopy. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(4), pp. 1667–1674, April 2003.
- [82] K.E-A. Van Den Abeele, A. Sutin, J. Carmeliet, and P. A. Johnson. Micro-damage diagnostic using nonlinear elastic waves spectroscopy (NEWS). *NDT&E Interanational*, 34, pp. 239–248, 2001.
- [83] L. A. Ostrovsky and P. A. Johnson. Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials. *La rivista del nuovo cemento*, 2001.
- [84] H. Kwun, A. Hikata, and C. Elbaum. Nonlinear interactions of two ultrasonic waves in a dispersionless liquid medium. *Journal of Applied Physics*, 51(9), pp. 4645–4650, 1980.
- [85] J-Y. Dusquesne. Measurement of third-order elastic constant in silicon by a comparaison method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(3), 2000.
- [86] J-Y. Dusquesne and D.A. Parshin. Interaction of coherent collinear acoustic waves in a liquid/solid system. *J. Appl. Phys.*, 82, pp. 3275, 1997.
- [87] J. R. Davies, J. Tapson, and B.J.P. Mortimer. A novel phase locked cavity resonator for B/A measurements in fluids. *Ultrasonics*, 38, pp. 283–291, 2000.
- [88] Vincent Tournat. *Effet non linéaire d'auto-démodulation d'amplitude dans les milieux granulaires : théorie et expériences*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, 2003.
- [89] Vitalyi Gusev. Parametric attenuation and amplification of acoustic signals in the media with hysteretic quadratic nonlinearity. *Physics Letter A*, 271, pp. 100–109, 2000.
- [90] A. Moussatov, B. Castagnède, and V. Gusev. Frequency up-conversion and frequency down-conversion of acoustic waves in damaged materials. *Physics Letter A*, 301, pp. 281–290, 2002.
- [91] V. Y. Zaitsev, V. Gusev, and B. Castagnède. Observation of "Luxemburg-Gorky effect" for elastic waves. *Ultrasonics*, 40, pp. 627–631, 2002.
- [92] A. M. Sutin, S. W. Yoon, E. J. Kim, and I. N. Didenkulov. Nonlinear acoustic method for bubble density measurements in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5), pp. 2377–2384, 1998.
- [93] A. D. Phelps, D. G. Ramble, and T. G. Leighton. The use of a combination frequency technique to measure the surf zone bubble population. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(4), pp. 1981–1989, 1997.
- [94] Xavier Jacob. Mesure de paramètres de non-linéarité de gels et de solides à l'aide de l'interaction paramétrique de deux ondes. Rapport de DEA, Université Paris VII, Paris, 2001.
- [95] Olivier Casula. *Caractérisation des champs acoustiques par sonde optique hétérodyne et par sonde acoustique active*. Thèse de doctorat, Université Paris VII-Denis Diderot, Paris, 1997.

- [96] S. Zhou and Y. Shui. Nonlinear reflection of bulk acoustic waves an interface. *J. Appl. Phys.*, 72(11), pp. 5070–5080, 1992.
- [97] P. R. Stepanishen. Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69, pp. 1610–1617, 1971.
- [98] Didier Cassereau. *Nouvelles méthodes et application de la propagation transitoire dans les milieux fluides et solides*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, Paris, 1988.
- [99] Alain Lhémy. Cours du DEA d'Acoustique Physique. *Université Paris VII*, 2001.
- [100] Daniel Royer et Eugène Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides, tome 2*. Masson, Paris, 1999.
- [101] R. Truell, C. Elbaum, and Brown Univ. B. Chick. *Ultrasonic Methods in Solid State Physics*, volume 7. Academic Press, London, 1969.
- [102] M. Mooney. Diffusion theory of the visco-elasticity of rubbery polymers in finite strain. *Journal of Polymer Science, Nottingham Symposium*, 34, pp. 599–626, 1959.
- [103] A. S. Birks, R. E. Green, and P. McIntire. *Nondestructive Testing Handbook, 2nd edition*, volume 7, Ultrasonic Testing. American Society for Nondestructive Testing, USA, 1991.
- [104] Ryota Takatsu. Quantitative measurement methods of nonlinear coefficient and shock waves. Mémoire de maîtrise, ESPCI-Université Paris VII-Université Doshisha, Paris-Kyoto, 2004.
- [105] C. Barrière, X. Jacob, and D. Royer. Nonlinearity parameter measurements in liquids and gels using the parametric interaction. 17th International Congress on Acoustics, 2001.
- [106] X. Jacob, C. Barrière, and D. Royer. Acoustic nonlinearity parameter measurements in solids using the collinear mixing of elastic waves. *Appl. Phys. Lett.*, 82(6), pp. 886–888, 2003.
- [107] T. Bateman, W. P. Mason, , and H. J. McSkimin. Third order elastic moduli of germanium. *J. Appl. Phys.*, 32(5), pp. 928–936, May 1961.
- [108] D. Lheureux, F. Decremps, M. Fischer, J-P. Itie, G. Syfosse, and M. Gauthier A. Polian. High-pressure ultrasonic measurements on single crystal. *High Pressure Reseach*, 22(3-4), pp. 763–767, Jun 2002.
- [109] E. C. Everbach, Z. Zhu, P. Jiang, B. T. Chu, and R. E. Apfel. A corrected mixture law for B/A. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(1), pp. 446–447, 1991.
- [110] R. E. Apfel. The effective nonlinearity parameter for immiscible liquid mixture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(6), pp. 1866–1868, 1983.
- [111] J. Emery, S. Gasse, and C. Dugué. Coefficient de non linéarité dans les mélanges eau-éthanol et eau-méthanol. *Journal de Physique-Colloque C8*, 40(11), pp. 231–234, 1979.
- [112] M. C. Sehgal, B. R. Porter, and J. F. Greenleaf. Ultrasonic nonlienar parameters and sound speed of alcohol-water mixture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(2), pp. 566–570, 1986.
- [113] P. W. Bridgman. Theoretically interesting aspects of high pressure phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 7(1), pp. 1–33, 1935.

- [114] K. Yoshizumi, T. Sato, and N. Ichida. A physicochemical evaluation of the nonlinear parameter  $B/A$  for media predominantly composed of water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(1), pp. 302–305, 1987.
- [115] B. Frank and J. D. N. Cheeke. On the mie potential and the acoustic nonlinear parameter  $B/A$ . *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(2), pp. 1184–1186, 1997.
- [116] Mathieu Rénier. Mesure du coefficient de non linéarité de milieux complexes par interaction d’ondes. Rapport de DEA, Université Paris VII, Paris, 2004.
- [117] Lili Ganjehi. Propagation nonlinéaire des ondes acoustiques en milieu hétérogène. application au bang sonique. Rapport de DEA, Université Paris VI et VII, Paris, 2004.
- [118] Guy Emschwiller. *Chimie Physique, Tome II*. Presse Universitaire de France, Paris, 1961.
- [119] I. Y. Solodov. Ultrasonics of non-linear contacts : propagation, reflection and NDE-applications. *Ultrasonics*, 36, pp. 383–390, 1998.
- [120] J.H. Cantrell and W.T. Yost. Determination of precipitate nucleation and growth rates from ultrasonic harmonic generation. *Applied Physics Letters*, 77(13), pp. 1952–1954, 2000.
- [121] J-L. Gennisson. *Le palpeur acoustique : un nouvel outil d’investigations des tissus biologiques*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, Paris, 2003.
- [122] X. Jacob, J.-L. Gennisson, S. Catheline, M. Tanter, C. Barrière, D. Royer, and M. Fink. Study of elastic nonlinearity of soft solids with transient elastography. IEEE Ultrasonic Symposium, 2003.
- [123] S. Catheline, J.-L. Gennisson, X. Jacob, C. Barrière, D. Royer, and M. Fink. Elastic nonlinearity of soft solids using transient elastography. Congrès Français d’Acoustique, DAGA’04, 2004.
- [124] J-L. Gennisson, S. Catheline, S. Chaffaï, and M. Fink. Transient elastography in anisotropic medium : Application to the measurement of slow and fast shear waves velocities in muscles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(1), pp. 536–541, 2003.
- [125] G. T. Mase and G. E. Mase. *Continuum mechanics for ingeneers, 2nd ed*. CRC Press LLC, Washington, D.C., 1999.
- [126] M. F. Hamilton, Yurii A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. New formulation of the elastic energy density for soft tissue. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(4), pp. 2436–2436, 2003.
- [127] E. A. Zabolotskaya, M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and G. D. Meegan. Modeling of nonlinear shear waves in soft solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(5), pp. 2807–2813, 2004.
- [128] R. W. Lardner. Nonlinear effects on transverse shear waves in an elastic medium. *Journal of Elasticity*, 15, pp. 53–57, 1985.
- [129] Stephan Catheline. *Interférométrie speckle ultrasonore : application à la mesure d’élasticité*. Thèse de doctorat, Université Paris VII-Denis Diderot, Paris, 1998.

- [130] Laurent Sandrin. *Elastographie impulsionnelle par ultrasons : du palpeur acoustique à l'imagerie ultrarapide*. Thèse de doctorat, Université Paris VI-Pierre et Marie Curie, Paris, 2000.
- [131] Jeremy Bercoff. *L'imagerie échographique ultrarapide et ses applications*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, Paris, 2004.
- [132] S. Catheline, J-L. Gennisson, M. Tanter, and M. Fink. Observation of shock transverse waves in elastic media. *Physical Review Letters*, 91(16), pp. 43011–43014, 2003.
- [133] J-L. Gennisson, S. Catheline, and M. Fink. Third order elastic moduli measurements in soft solids using transient elastography. European Congress of Acoustics, 2002.
- [134] Y. A. Il'inskii and E. A. Zabolotskaya. About interaction of plane longitudinal and shear waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, to be published.
- [135] E.V. Charnaya and V. A. Shutilov. Propagation of finite-amplitude acoustic waves in a solid medium with small-scale inhomogeneities. *Sov. Phys. Acoust.*, 31(1), pp. 65–67, 1985.
- [136] D. Royer, N. Dubois, , and M. Fink. Optical probing of pulsed, focused ultrasonic fields using a heterodyne interferometer. *Applied Physics Letters*, 61(2), pp. 153–155, 1992.
- [137] B. F. Pouet, R. K. Ing, S. Krishnaswamy, and D. Royer. Heterodyne interferometer with two-wave mixing in photorefractive crystals for ultrasound detection on rough surfaces. *Appl. Phys. Lett.*, 69(25), pp. 3782–3784, 1996.
- [138] D. Certon, O. Casula, F. Patat, and D. Royer. Theoretical and experimental investigation of lateral modes in 1-3 piezocomposites. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, 44, pp. 643–651, 1998.
- [139] D. Clorennec and D. Royer. Analysis of surface acoustic wave propagation on a cylinder using laser ultrasonics. *Appl. Phys. Lett.*, 82(25), pp. 4608–4610, 2003.
- [140] Daniel Royer. Génération et détection optiques d'ondes élastiques. *Techniques de l'Ingénieur, traité Electronique*, E 4415, 1996.
- [141] P. Vairac and B. Cretin. New heterodyne interferometers using double passing. Proc SPIE, Optical Inspection and Micromasurements, pages 486–492, Sep 1996.
- [142] J. Auvray. *Systèmes électroniques*. Université Paris VI-Pierre et Marie Curie-IST-SETI, Paris, 2000-2001.
- [143] X. Jia, L. Adler, and G. Quentin. Nonlinear distortion of finite-amplitude ultrasonic waves investigated by optical heterodyne interferometry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(6), pp. 3456–3461, 1995.
- [144] C. Barrière and D. Royer. Optical measurement of large transient mechanical displacement. *Appl. Phys. Lett.*, 79(6), pp. 878–880, 2001.
- [145] Xavier Jacob, Christophe Barrière, Ryota Takatsu, Gabriel Montaldo, and Daniel Royer. Optical measurements of transient ultrasonic shock waves. IEEE Ultrasonic Symposium, 2004.

- [146] G. Montaldo, C. Barrière, D. Royer, and M. Fink. Absolute measurements of ultrasonic shock waves with an optical interferometer. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec. and Freq. Contr.*, soumis en 2002.
- [147] C. Barrière, G. Montaldo, X. Jacob, D. Royer, and M. Fink. Quantitative measurements of ultrasonic shock waves using a standard optical interferometer. Congrès Français d'Acoustique/DAGA'04, 2004.
- [148] J. F. Krucker, A. Eisenberg, M. Krix, R. Lotsch, M. Pessel, and H.-G. Trier. Rigid piston approximation for computing the transfer function and angular response of a fiber-optic hydrophone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4), pp. 1994–2003, 2000.
- [149] H. S. Yadav, D. S. Murty, S. N. Verma, K. H. C. Sinha, B. M. Gupta, and Dal Chand. Measurement of refractive index of water under high dynamic pressures. *Journal of Applied Physics*, 44(5), pp. 2197–2200, 1973.
- [150] M. Costantini. A novel phase unwrapping method based on network programming. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 36(3), pp. 813, 1998.
- [151] D. Cathignol. PVDF hydrophone with liquid electrodes for shock waves measurements. Proc. of the 1990 IEEE Ultrasonics Symposium, pages 341–344, 1990.
- [152] C. Barrière, O. Casula, and D. Royer. Acoustic field imaging using the nonlinear mixing of ultrasonic waves. World Congress on Ultrasonics, 2003.
- [153] O. Casula and D. Royer. Transient surface velocity measurements in a liquid by an active ultrasonic probe. *IEEE Ultrason. Ferro. and Freq. Control*, 45, pp. 760, 1998.
- [154] O. V. Rudenko, A. P. Sarvazyan, and S. Y. Emelianov. Acoustic radiation force and streaming induced by nonlinear focused ultrasound in a dissipative medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(5), pp. 2791–2798, 1996.
- [155] K. Beissner. The acoustic radiation force in lossless fluids in Eulerian and Lagrangian coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5), pp. 2221–2332, 1998.
- [156] B. T. Chu. Relation between Boussinesq and Cauchy radiation stresses in solids. *Phys. Rev. B.*, 35(2), pp. 870–872, 1987.
- [157] W. L. Nyborg and J. A. Rooney. Comment on : Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1), pp. 263–264, 1984.
- [158] A. I. Potapov, G. A. Maugin, and C. Trimarco. Radiative stresses of acoustic waves in solids. World Congress on Ultrasonics, Paris, sept. 2003.
- [159] P. J. Westervelt. Acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29(1), pp. 26–29, 1957.
- [160] J. H. Cantrell Jr. Acoustic-radiation stress in solids. I. theory. *Phys. Rev. B.*, 30(6), pp. 3214–3220, 1984.
- [161] J. H. Cantrell, W. T. Yost, and P. Li. Acoustic radiation-induced static strains in solids. *Phys. Rev. B.*, 35(18), pp. 9780–9782, 1987.

- [162] W. T. Yost and J. H. Cantrell Jr. Acoustic-radiation stress in solids. II. experiment. *Phys. Rev. B.*, 30(6), pp. 3221–3227, 1984.
- [163] A. B. Coppens, R. T. Beyer, and J. Ballou. Parameter of nonlinearity in fluids. III. values of sound velocity in liquid metals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 41(6), pp. 1443–1448, 1966.
- [164] B. Hartmann. Potentiel-energy effects on the sound speed in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(6), pp. 1392–1396, 1979.
- [165] B. Hartmann, G.F. Lee, and E. Balizer. Calculation of B/A for n-alkane liquids using the tait equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(1), pp. 65–70, 2000.
- [166] Ch. Kittel. *Physique de l'état solide*. Dunod, 5<sup>ème</sup> éd., Paris, 1983.
- [167] N. W. Ashcroft and Cornell University N. D. Mermin. *Solid state physics*. Thomson Learning, London, 1976.
- [168] A. Tanguy, J. P. Wittmer, and F. Leonforteand J.L. Barrat. Continuum limit of amorphous elastic bodies : a finite-size study of low-frequency harmonic vibrations. *Phys. Rev. B*, 66(174205), pp. 1–17, Nov. 2002.
- [169] S. Alexander. Amorphous solids : their structure, lattice dynamics and elasticity. *Physics Reports*, 296, pp. 65–236, 1998.
- [170] D. C. Wallace. Thermoelasticity of stressed materials and comparison of various elastic constants. *Phys. Rev.*, 162(3), pp. 776–789, 1967.
- [171] F. Birch. Finite elastic strain of cubic crystal. *Physical Review*, 71(11), pp. 809–824, 1947.
- [172] P. N. Keating. Effect of invariance requirement on the elastic strain energy of crystals with application to the diamond structure. *Phys. Rev.*, 145(2), pp. 637–645, 1966.
- [173] Y. Hiki and A. V. Granato. Anharmonicity in noble metals ; higher order elastic constants. *Phys. Rev.*, 144(2), pp. 411–419, 1966.
- [174] M. Blackman. On the relation between the finite strain approach and the lattice theory of thermal expansion. *Proc. Phys. Soc.*, 84, pp. 371–378, 1964.
- [175] K. Brugger. Generalized grüneisen parameter in the anisotropic Debye model. *Physical Review*, 137(6A), pp. 1826–1827, 1965.
- [176] J. H. Cantrell. Generalized grüneisen tensor from solid nonlinearity parameter. *Phys. Rev. B.*, 21(10), pp. 4191–4195, 1980.
- [177] A. P. Mayer. Surface acoustic wave in nonlinear elastic media. *Physics Reports*, 256, pp. 237–366, 1995.
- [178] J. A. Garber and A. V. Granato. Theory of the temperature dependance of second order elastic constants in cubic materials. *Phys. Rev. B.*, 11(10), pp. 3998–4007, 1975.
- [179] C. Z. Tan, J. Arndt, , and H. S. Xie. Optical properties of densified silica glasses. *Physica B.*, 252, pp. 28–33, 1998.

- [180] K. Trachenko and M. T. Dove. Compressibility, kinetics, and phase transition in pressurized amorphous silica. *Phys. Rev. B*, 67(064107), pp. 1–11, 2003.
- [181] A. Polian and M. Grimsditch. Room temperature densification of a-SiO<sub>2</sub> versus pressure. *Phys. Rev. B*, 41(9), pp. 6086–6087, 1989.
- [182] M. R. Vukcevic. A new interpretation of anomalous properties of vitreous silica. *Journ. Non-crystalline Solid*, 11, pp. 25–63, 1972.
- [183] A. Hikata and C. Elbaum. Generation of ultrasonic second and third harmonics due to dislocations. I. *Phys. Rev*, 144(2), pp. 469–477, 1966.
- [184] A. Hikata, F. A. Sewell, and C. Elbaum. Generation of ultrasonic second and third harmonics due to dislocations. II. *Phys. Rev*, 151(2), pp. 442–449, 1966.
- [185] Paul Johnson. *Dynamic Elastic Nonlinearity in Earth Materials*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, 1997.
- [186] K. E-A. Van Den Abeele. Elastic pulsed wave propagation in media with second-or higher-order nonlinearity part 1. theoretical framework. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(6), pp. 3334–3345, 1996.
- [187] K.E-A. Van Den Abeele, P. A. Johnson, and A. Sutin. Nonlinear elastic waves spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage. part I : Nonlinear wave modulation spectroscopy (NWMS). *Res. Nondestr. Eval*, 12(1), pp. 17–30, 2000.
- [188] M. Scalerandi, P. P. Delsanto, and P. A. Johnson. Stress induced conditioning and thermal relaxation in the simulation of quasi-static compression experiments. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 36, pp. 288–293, 2003.
- [189] V. Gusev. Propagation of acoustic pulses in material with hysteretic nonlinearity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6), pp. 100–109, 2000.





# **Applications de l'interaction d'ondes élastiques à la mesure des propriétés non-linéaires des matériaux et à la caractérisation de champs de pression**

**Résumé :** Ce manuscrit présente une étude de l'interaction non-linéaire d'ondes élastiques et de différentes techniques dédiées à la mesure des propriétés non-linéaires des matériaux et des champs de pression.

Nous développons l'analogie entre fluides et solides pour les ondes longitudinales dans l'approximation quadratique. L'interaction de deux ondes (30 et 2,5 MHz), analogue à une modulation de phase, permet de mesurer les coefficients de non-linéarité de différents matériaux, sur des échantillons d'environ 10 mm d'épaisseur. Les résultats obtenus dans les fluides, les gels et les solides, notamment grâce aux améliorations de l'électronique, montrent la souplesse de cette technique.

L'élasticité spécifique des solides mous rend possible des expériences de génération d'harmonique et d'interaction d'onde de cisaillement, qui illustrent les caractéristiques de la non-linéarité cubique et confirment l'influence des effets de diffraction. Ces derniers sont responsables de l'apparition d'harmoniques paires. Le palpeur d'élastographie 1D constitue une configuration expérimentale qui nous rapproche des applications.

L'interférométrie optique a été appliquée à la mesure de fortes pressions dans l'eau (à la focale de transducteurs de forte puissance) et de très faibles déplacements (induit par la contrainte de radiation à la surface des solides). Les améliorations de l'optique, de l'électronique et du traitement du signal rendent possible l'étude des phénomènes d'acoustique non-linéaire.

**Mots clés :** Ultrasons, acoustique non-linéaire, interaction d'ondes, coefficients de non-linéarité, élastographie impulsienne, ondes de choc de cisaillement, interférométrie laser, modulation de phase, fortes pressions acoustiques, contrainte de radiation.

## **Application of elastic waves interaction to the measurement of nonlinear properties of materials and to high-pressure wave fields characterization**

**Abstract :** This work presents a study of nonlinear elastic waves interaction, and different experimental techniques devoted to nonlinear properties measurement and high-pressure wave fields characterization.

The study develops an analogy between fluids and solids within quadratic approximation, i.e. valid for longitudinal waves. The interaction of two longitudinal waves (30 and 2.5 MHz), equivalent to a phase modulation, allows to measure the nonlinearity coefficient of different kinds of materials, with samples thickness of order 10 mm. The results obtained in fluids, gels and solids, thanks to electronic improvement, shows the flexibility of this method.

The specific elasticity of soft solids makes it possible to observe harmonic generation and interaction of shear waves, which are characteristic of the cubic nonlinearity and also confirms diffraction and near field effects. This latter are responsible for odd harmonics apparition. The 1D. transient elastography represents an experimental configuration which can be applied.

An optical interferometer was used to measure high-pressure wave fields (at the focus of high-power transducers), and very small displacements (resulting from the radiation stress at the surface of a solid sample). The bandwidth broadening of optical setup and the improvement of phase detection methods make it possible to perform quantitative studies of nonlinear propagation phenomenon.

**Keywords :** Ultrasound, nonlinear acoustics, wave interaction, nonlinearity parameter, transient elastography, shocked shear waves, optical interferometry, phase modulation, high-pressure wavefields, radiation stress.