



HAL
open science

Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers

Frédéric Costes

► **To cite this version:**

Frédéric Costes. Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004. Français. NNT : 2004ENMP1267 . pastel-00001334

HAL Id: pastel-00001334

<https://pastel.hal.science/pastel-00001334>

Submitted on 26 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Nationale Supérieure des Mines de Paris — ENSMP

Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 Mai 2004

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'École des Mines de Paris

spécialité "Mécanique Numérique"

par

Frédéric COSTES

Composition du jury

Rapporteurs : Alfredo HUESPE
Gérard RIO

Examineurs : Manuel BOBADILLA
Victor FACHINOTTI
Patrick LABORDE

Directeur de thèse : Michel BELLET

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je remercie la direction de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris de m'avoir donné la possibilité d'effectuer ce travail de recherche au sein de du Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF) à Sophia Antipolis.

Je remercie Michel Bellet qui a dirigé ce travail de recherche pendant plus de trois ans. Son aide et sa confiance ont été précieuses dans les moments de doutes. Je le remercie également pour sa relecture minutieuse de ce document.

Je remercie M. Laborde de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, ainsi que MM. Rio et Huespe d'avoir effectué la fonction de rapporteur. Je remercie M. Bobadilla pour son soutien tout au long de cette thèse et d'avoir représenté L'IRSID (groupe Arcelor) dans ce jury. Enfin, un grand merci à Victor Fachinotti pour ses remarques et son analyse critique.

Cette étude a pu être menée grâce au soutien financier des partenaires du projet Optimisation des Systèmes de Coulées, je les en remercie et plus particulièrement Mr Triolet (IRSID - ARCELOR) et Mme Demurger (CREAS - ASCOMETAL) pour leur disponibilité.

Merci à Olivier Jaouen de Transvalor S.A. qui n'a pas ménagé son temps pour m'éclairer sur les subtilités du logiciel Theracast[®], ainsi qu'à Alban Heinrich avec qui je partage ce travail et à Hugues Digonnet pour son aide précieuse. Merci à tous mes collègues qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail : Romain, Karim, Ramzy, Delphine, Olga, Mehdi, Julien, Norbert, Gaby, Manu, François, Nathalie, Nicolas et tous les autres.

Enfin, je remercie mes parents, ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs encouragements; qu'ils ne doutent pas de ma reconnaissance et de mon affection.

*À Marie Claire,
À Gaspard,
Et à ceux à venir...*

Table des matières

Introduction : présentation du procédé de coulée continue d’aciers et objectifs de la thèse

Chapitre 1

Modélisation du procédé de coulée continue d’aciers

1.1	Approche du procédé ou choix d’une stratégie de résolution	9
1.1.1	Les <i>stratégies stationnaires</i>	9
1.1.2	Les <i>stratégies instationnaires</i>	12
1.2	Choix du formalisme : eulérien ou lagrangien ?	14
1.3	Notions de maillage/remailage	17
1.3.1	Rappel sur la définition d’un maillage	17
1.3.2	Opérations sur les topologies de maillage : le mailleur	20
1.3.3	Transport des variables de l’ancien vers le nouveau maillage	27
1.4	Adaptation du mailleur à la stratégie globale instationnaire	28
1.4.1	Extraction de topologie	28
1.4.2	Exemple d’application	33
1.4.3	Application à la coulée continue : introduction d’une zone tampon	35

Chapitre 2

Modélisation thermomécanique avec le logiciel Thercast®

2.1	Introduction	40
2.2	Les équations de conservation	40
2.3	Lois de comportement	41
2.3.1	Loi de comportement pour la thermique	41
2.3.2	Lois de comportement pour la mécanique	42

2.4	Conditions aux limites et initiales	46
2.4.1	Pour le problème thermique	47
2.4.2	Pour le problème mécanique	47
2.5	Adaptation du problème thermomécanique à la coulée continue	49
2.5.1	Les différentes géométries de machine de coulée continue	49
2.5.2	Nomenclature de la stratégie globale instationnaire	51
2.5.3	Conditions aux limites pour le problème thermique	52
2.5.4	Conditions aux limites pour le problème mécanique	54

Chapitre 3

Résolution numérique du problème thermomécanique

3.1	Formulation forte du problème thermomécanique à résoudre	58
3.2	Résolution découplée du problème thermomécanique	59
3.3	Résolution du problème thermique \mathcal{T}	59
3.3.1	Formulation faible et discrétisation spatiale	59
3.3.2	Discrétisation temporelle	61
3.4	Résolution du problème mécanique \mathcal{M}	63
3.4.1	Formulation faible et discrétisation temporelle	63
3.4.2	Gestion incrémentale du contact unilatéral	65
3.4.3	Discrétisation spatiale	69

Chapitre 4

Validation et exploitation du logiciel Theracast[®] pour la coulée continue d'aciers

4.1	Validation du problème thermique	88
4.1.1	Présentation et mise en données	88
4.1.2	Résultats thermiques	90
4.2	Résultats obtenus pour la machine de Sollac - Dunkerque	95
4.2.1	Présentation de la machine et mise en données	95
4.2.2	Prédiction du gonflement entre les rouleaux	97
4.2.3	Prédiction de défauts : analyse des contraintes	104
4.2.4	Quelques mots sur l'optimisation du temps de calcul	114
4.3	Cas 3D : la machine de coulée d'Hagondange	116
4.3.1	Présentation de la machine	116

4.3.2	Résultats thermiques	118
4.3.3	Résultats Mécaniques	119

Conclusions et perspectives

Annexes

Annexe A Acier 18M5	129
Annexe B Acier 100C6	135
Bibliographie	141

Introduction : présentation du procédé de coulée continue d'aciers et objectifs de la thèse

Dans l'industrie sidérurgique, la coulée continue est le procédé qui se situe entre l'élaboration de l'acier et le laminage. Ce procédé a pris, depuis 30 ans, une place de plus en plus importante dans la filière de production en raison des avantages par rapport à la technique traditionnelle de coulée en lingots : économie d'énergie et de main d'œuvre, meilleur rendement et amélioration de la qualité du produit.

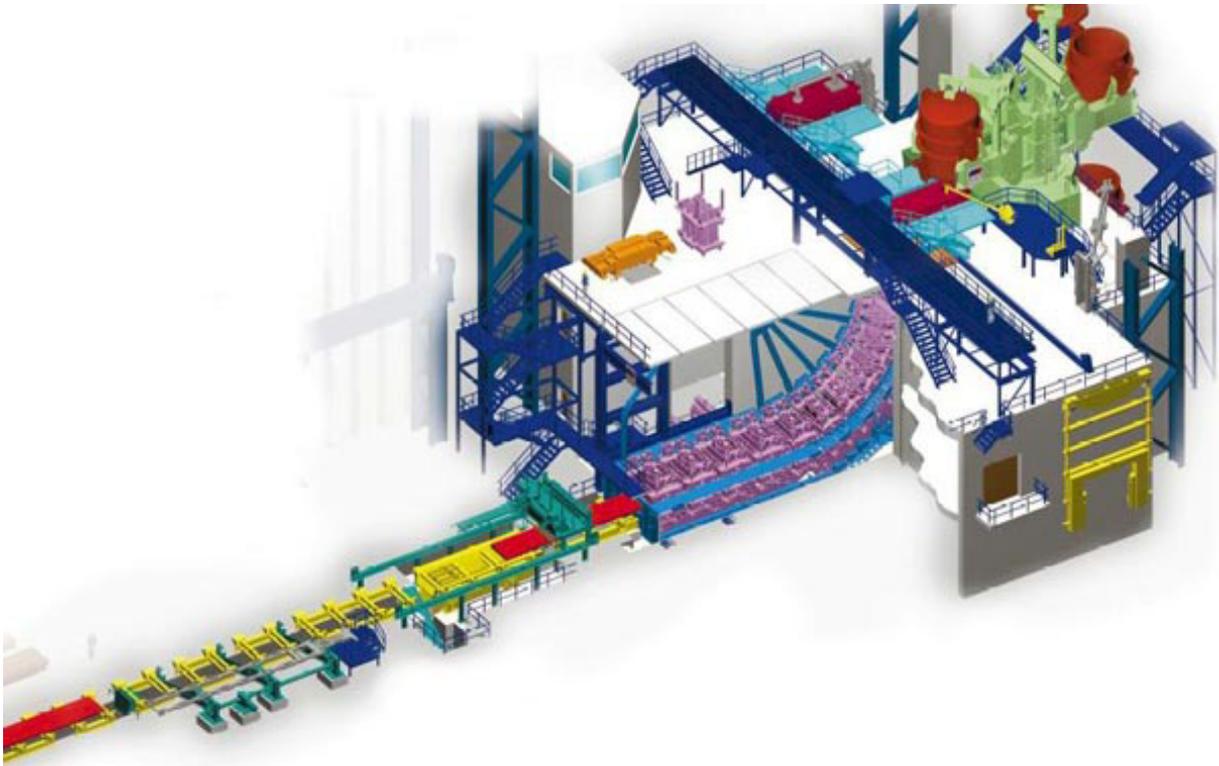


FIG. 1 – Exemple de machine de coulée continue de brames

Pour schématiser le procédé, on peut le décrire de la manière suivante : l'acier en fusion contenu dans une poche est coulé dans **une lingotière sans fond** maintenue à basse température par un système de refroidissement (en général hydraulique). L'acier liquide, au contact avec la lingotière, va se solidifier et une peau solide commence ainsi à se former. On parle de refroidissement primaire. Sous la lingotière sont disposés des rouleaux extracteurs qui font avancer le produit dans la machine à vitesse constante. Entre ces rouleaux, un deuxième système de refroidissement est constitué de jets d'eau (on parle alors de **refroidissement secondaire**). Au fur et à mesure que le produit progresse dans la machine, l'épaisseur de la couche solidifiée augmente et inversement l'acier liquide tend à disparaître pour obtenir finalement un produit complètement solidifié en fin de procédé. Au cours de ce refroidissement, l'acier passe par trois états : liquide, pâteux et solide. En fin de procédé, une fois sa solidification terminée, le produit est découpé en tronçons et envoyé vers un parc de stockage ou plus directement vers un four avant d'être laminé. Notre étude portent sur les procédés mettant en jeu le refroidissement secondaire, nous ne mentionnerons pas les procédés à solidification très rapide tels que la coulée de brames minces entre cylindres par exemple.

À l'aide des notations de la figure (FIG. 2), décrivons les éléments principaux d'une machine de coulée continue :

Le régulateur de débit (aussi appelé répartiteur, distributeur ou tundish) est un récipient placé entre la poche amenant le métal liquide de l'aciérie et la ou les lingotières. Ses principaux rôles sont de permettre l'alimentation simultanée de plusieurs lingotières (généralement deux pour les coulées continues de brames) et la coulée en séquence (sans arrêt de la machine) de plusieurs poches consécutives.

La lingotière de longueur inférieure à 1 mètre, dont les parois en cuivre sont refroidies par circulation intense d'eau, est l'élément essentiel de la machine. Elle permet la mise en forme du produit coulé et assure la formation d'une peau solidifiée suffisamment épaisse pour contenir le métal liquide. Le métal en provenance du répartiteur est distribué dans la lingotière par une busette en céramique, le plus souvent immergée. Afin d'éviter le collage de la peau contre les parois de cuivre, la lingotière est animée d'un mouvement d'oscillation verticale de faible amplitude et un lubrifiant (huile ou laitier synthétique) est introduit. Les formats classiques sont la brame (section rectangulaire, typiquement 2 m × 0.25 m), le bloom et la billette (deux produits de section carrée, la billette étant limitée à 155 mm de coté) et le rond (section circulaire).

Le refroidissement secondaire est la partie de la machine que traverse le produit lors-

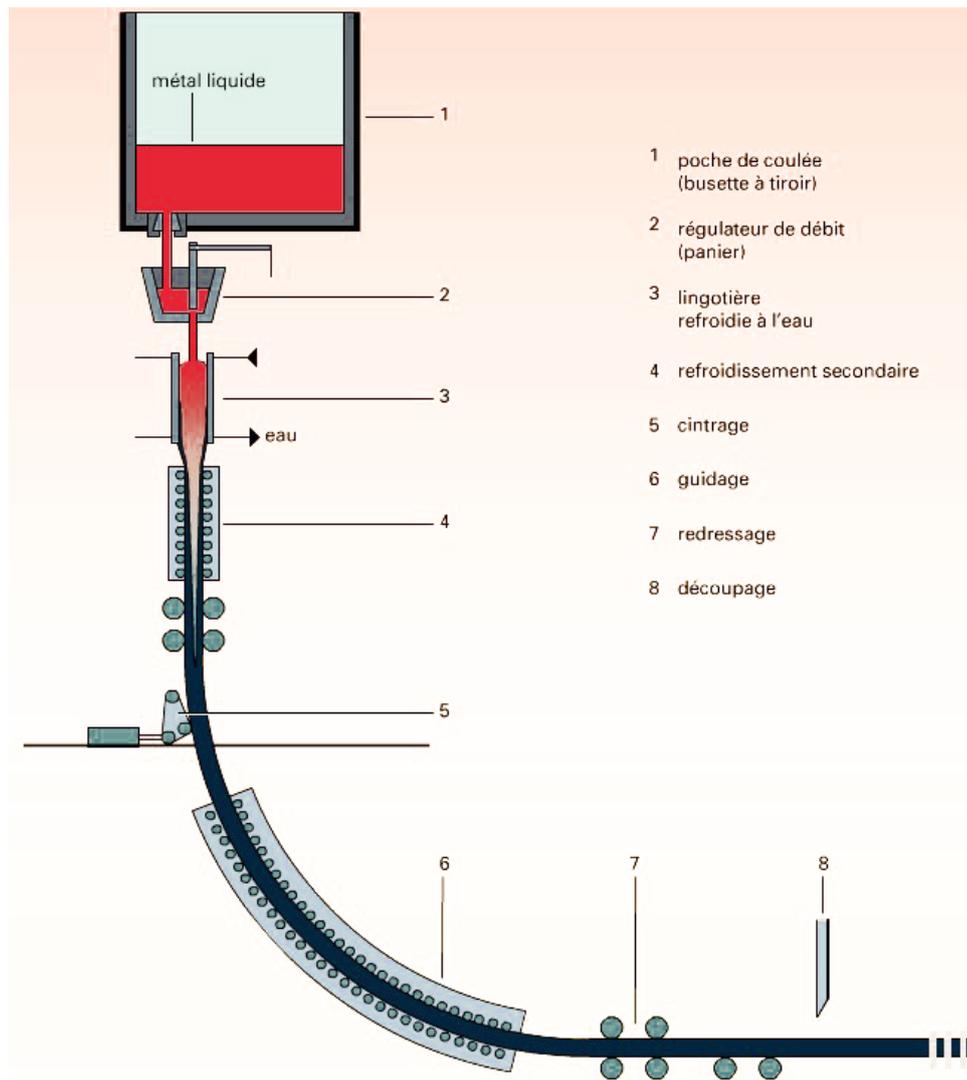


FIG. 2 – Coupe 2D d'une machine de coulée continue verticale avec cintrage [Dufflot, 2004]

qu'il est extrait de la lingotière. Il est constitué d'une part, d'un système mécanique de soutien et de guidage du produit par rouleaux, et d'autre part, d'un système de refroidissement par aspersion d'eau permettant la maîtrise de la température de surface du produit jusqu'à sa complète solidification. Il est organisé en zones de refroidissement successives ayant chacune son propre système de réglage en débit.

Le guidage formé de rouleaux dont certains sont motorisés, assure la descente du produit à vitesse constante dans la machine. Pour une machine donnée, la vitesse d'extraction (ou **vitesse de coulée**) est choisie en fonction du format coulé, de la nuance d'acier à solidifier et des caractéristiques géométriques des installations. À titre d'exemple, les vitesses pratiquées industriellement en coulée continue de brames



FIG. 3 – Versement de l'acier liquide dans la poche de coulée à l'aciérie de Fos-sur-Mer (Arcelor)

conventionnelles varient selon les sites et les fabrications entre 0.5 et 2.5 mètres par minute.

L'oxycoupage est l'outil qui permet la coupe à longueur du produit solidifié et son identification avant son évacuation vers le laminoir.

L'amorçage du procédé se fait à l'aide d'un **mannequin** dont le rôle a pour fonction de pourvoir la lingotière d'un fond provisoire en début de coulée et de rendre l'extraction possible, et d'amener le produit jusqu'à la cage d'extraction où il sera coupé.

Une maîtrise accrue de la qualité des produits est, à l'heure actuelle, le principal moteur du développement de la coulée continue. Le procédé a aujourd'hui atteint un niveau de maturité tel qu'il est très difficile, voire impossible de détecter sur les produits les rares défauts. Le plus souvent les défauts sont révélés dans les stades ultimes de la chaîne de fabrication. Cette qualité des produits bruts de coulée revêt deux aspects : la qualité de

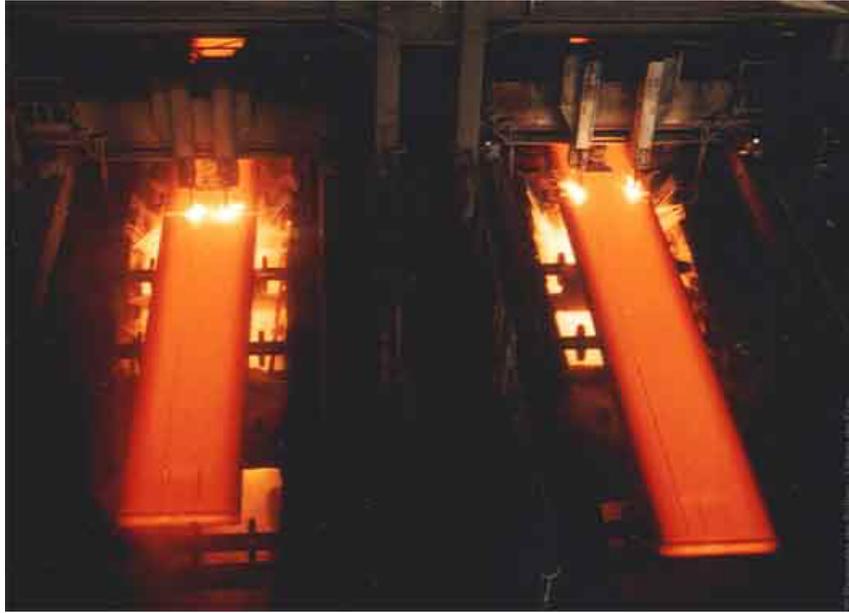


FIG. 4 – Oxycoupage à l’aciérie de Fos-sur-Mer (Arcelor)

surface et la qualité interne. Une surface de qualité signifie absence de fissures de surface (criques), de défauts d’aspects et limitation des inclusions non-métalliques piégées sous la surface du produit.

Les principaux défauts internes (qualité interne) que présentent les produits de coulée continue sont les ségrégations majeures et les criques internes. Les ségrégations majeures (ségrégations centrales ou ségrégations en V) se forment dans la partie basse de la machine de coulée continue, au voisinage de la fin de solidification. Les criques internes ségrégées peuvent se former tout au long de la machine.

Garantir une qualité des produits coulés en continu nécessite des réglages très sophistiqués des machines de coulée qui dépendent fortement de la nuance d’acier. L’amélioration sans cesse de la productivité et de la qualité des produits bruts de coulée, qui sont difficiles à couler en continu, nécessite d’adopter de nouveaux réglages des machines et de mettre en place de nouveaux moyens d’actions en ligne (réduction mécanique du produit en cours de solidification, refroidissement intense du produit, mode de lubrification en lingotière de coulée continue, brassage électromagnétique, ...). Les réflexions qui sous-tendent ces choix sont basées sur des résultats de calculs obtenus à partir de modèles simples de thermique et de thermomécanique. Nous verrons dans la suite que ces approches sont limitées et qu’une modélisation globale de la coulée continue devient désormais nécessaire.

Notre étude (modélisation globale du procédé de coulée continue) fait partie d’un vaste

programme qui comprend l'étude de la thermo-hydraulique, des changements de phases, du transport des éléments d'alliages dans le liquide par convection et, en particulier, **de la thermomécanique du produit** (contraintes, déformations, gonflements entre les rouleaux,...). La finalité est que cet outil numérique consiste à fournir une aide à la définition d'actionneurs et des paramètres process associés de la machine de coulée continue permettant l'amélioration et la fiabilisation de la qualité interne et de la qualité de surface des aciers coulés en continu tout en réduisant les coûts et les délais de fabrication.

L'objectif de cette thèse consiste à fournir une modélisation thermomécanique complète du refroidissement secondaire du procédé pour n'importe quel type d'acier. Nous ne tiendrons pas compte des phénomènes physiques présents au niveau de la lingotière (oscillations, l'écoulement de l'acier liquide à la sortie de la busette immergée, ...). Le caractère tridimensionnel de l'étude permettra de traiter tous les différents formats d'aciers coulés (brames, blooms, billettes et ronds).

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet O.S.C. (Optimisation des Systèmes de Coulée). Ce projet, soutenu par le Ministère de l'Industrie et plusieurs partenaires industriels (dont, pour la partie coulée continue, Arcélor et Ascométal) a pour objectif le développement des techniques de simulation numérique et leur application aux divers procédés de coulée de métaux, parmi eux la coulée continue d'aciers. Ce travail a été mené au sein du groupe de recherche TMP(thermomécanique et Plasticité) du Centre de Mise en Forme des Matériaux, laboratoire de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Aujourd'hui, au CEMEF, deux codes numériques permettent de modéliser les phénomènes thermomécaniques associés aux procédé de solidification :

R2SOL, pour une modélisation bidimensionnelle dont l'application à la coulée continue a fait l'objet des travaux de thèse de [Heinrich, 2003].

THERCAST, pour une modélisation tridimensionnelle.

Dans ce mémoire, nous présentons l'adaptation de Theracast[®] pour une modélisation tridimensionnelle du procédé de coulée continue d'aciers. Un premier chapitre rappelle les différentes modélisations du procédé de coulée continue recensées dans la littérature. Dans ce chapitre, nous détaillerons la stratégie adoptée et sa mise en œuvre. Les deux chapitres suivants exposent le problème thermomécanique à résoudre ainsi que sa résolution. Nous verrons comment sont abordées les particularités d'une machine de coulée continue et plus particulièrement la gestion du contact avec les rouleaux de soutien. Pour finir nous présentons des résultats obtenus pour des configurations de machines réelles.

Chapitre 1

Modélisation du procédé de coulée continue d'aciers

Sommaire

1.1	Approche du procédé ou choix d'une stratégie de résolution .	9
1.1.1	Les <i>stratégies stationnaires</i>	9
1.1.2	Les <i>stratégies instationnaires</i>	12
1.2	Choix du formalisme : eulérien ou lagrangien ?	14
1.3	Notions de maillage/remailage	17
1.3.1	Rappel sur la définition d'un maillage	17
1.3.1.1	Topologie de maillage	17
1.3.1.2	Théorème de volume minimal	19
1.3.2	Opérations sur les topologies de maillage : le mailleur	20
1.3.2.1	Les opérateurs de topologie	20
1.3.2.2	Génération de maillage par minimisation du volume	23
1.3.2.3	Ajout et suppression de nœuds	24
1.3.2.4	Remailage surfacique	25
1.3.2.5	Raffinement de maillage	25
1.3.2.6	Critère de remailage	26
1.3.2.7	Autres opérations	26
1.3.3	Transport des variables de l'ancien vers le nouveau maillage	27
1.4	Adaptation du mailleur à la stratégie globale instationnaire .	28
1.4.1	Extraction de topologie	28
1.4.1.1	Découpe du domaine	28
1.4.1.2	Recollement de deux domaines	30
1.4.1.3	Nouvelle numérotation : algorithme de tri	31

1.4.2	Exemple d'application	33
1.4.3	Application à la coulée continue : introduction d'une zone tampon	35

Dans ce chapitre, nous présentons les différents modèles numériques du procédé de coulée continue d'aciers que nous avons rencontrés dans la littérature. En fonction de notre objectif de départ - modéliser la zone de refroidissement secondaire - cette analyse nous a amenés à proposer une approche originale du problème que nous avons appelée : stratégie globale instationnaire. Cette stratégie a été mise en place afin de mieux décrire le comportement thermomécanique du produit coulé tout en tenant compte du caractère global et de la géométrie réelle du procédé. Nous verrons ensuite la mise en œuvre d'une telle approche pour une modélisation par éléments finis en nous intéressant à la gestion du maillage.

1.1 Approche du procédé ou choix d'une stratégie de résolution

Choisir une stratégie de résolution va dépendre des résultats qu'on souhaite obtenir. On recense dans la littérature deux grandes familles de stratégies de résolution.

1.1.1 Les *stratégies stationnaires* où le domaine étudié reste fixe par rapport à la machine de coulée.

Ce type de stratégie est souvent utilisé lors d'une étude en lingotière pour obtenir l'écoulement de l'acier liquide à la sortie et autour de la busette [Thomas *et al.*, 1992] par exemple, ou encore simuler le comportement thermomécanique de la coque solide qui se crée [Huespe *et al.*, 2000]. Ainsi, comme le domaine à mailler n'est pas très étendu, les auteurs proposent de mailler finement une partie du produit dans la lingotière pour y effectuer un calcul "global" à maillage fixe, (FIG. 1.1).

Certains auteurs comme [Dalin, 1987] utilisent cette stratégie pour calculer le gonflement entre deux ou plusieurs rouleaux de soutien alors qu'une fraction de l'épaisseur seulement est solidifiée, comme indiqué sur la figure (FIG. 1.2). Ils calculent alors un écoulement viscoplastique stationnaire où l'inconnue du problème est le champ de vitesse \mathbf{v} vérifiant la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$). Le calcul du gonflement se fait par un traitement spécifique des surfaces libres considérées comme des surfaces d'écoulement, ce qui signifie qu'un point sur la surface libre reste sur la surface libre jusqu'à ce qu'il rencontre un rouleau éventuellement, et se traduit en 3D par la condition tangentielle du vecteur vitesse :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt \quad (1.1)$$

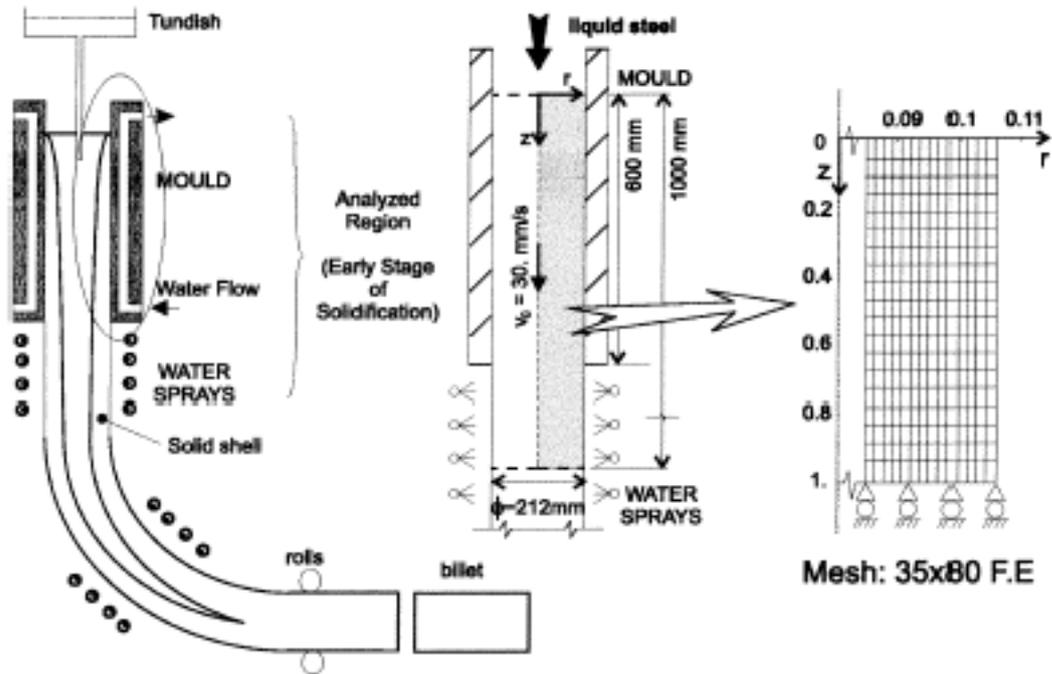


FIG. 1.1 – Schématisation de la coulée continue pour un calcul stationnaire en lingotière [Huespe *et al.*, 2000]

à laquelle il faut ajouter une condition de contrainte nulle (la pression atmosphérique est alors négligée) :

$$\mathbf{T} = 0 \quad (1.2)$$

\mathbf{T} étant le vecteur contrainte ($= \sigma n$, n normale extérieure, σ tenseur des contraintes).

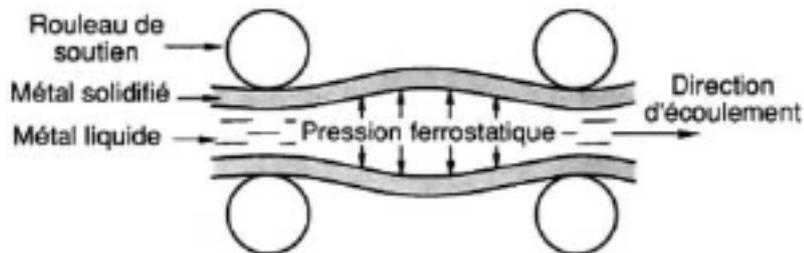


FIG. 1.2 – Schématisation de la coulée continue pour un calcul stationnaire en fin de refroidissement secondaire [Dalin, 1987]

Le calcul du gonflement entre les rouleaux de soutien se fait de manière suivante : le domaine initial correspond à un gonflement nul. Un premier calcul permet de déterminer

un champ de vitesse en imposant uniquement $\mathbf{T} = 0$ sur la surface libre. Le champ obtenu ne vérifie pas la condition de surface libre ; l'intégration approchée de 1.1 permet alors de modifier la forme du domaine. Plusieurs calculs du champ de vitesse sont alors nécessaires, en réactualisant la surface libre au cours de chacun de ses calculs, pour obtenir la convergence comme indiqué sur la figure (FIG. 1.3). En fait, on itère simultanément sur la résolution de l'équilibre mécanique et la condition de surface libre $v\dot{n} = 0$. L'équilibre est résolu sous deux contraintes, l'incompressibilité et la condition de surface libre, les deux étant supposées par une technique de pénalisation.

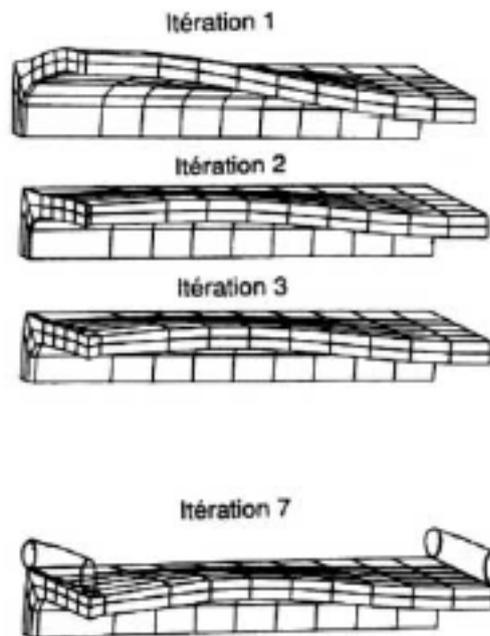


FIG. 1.3 – Calcul du gonflement entre deux cylindres de soutien, évolution du maillage au cours des itérations [Dalin, 1987]

Cette approche a le mérite de proposer une méthode de calcul de l'ampleur du gonflement entre les rouleaux en tenant compte des effets tridimensionnels (typiquement de un à trois intervalles inter-rouleaux). Cette approche est donc ciblée sur une toute petite partie de la machine, pour laquelle un autre modèle numérique doit fournir l'épaisseur de la peau solidifiée. Les interactions entre "cages" ne peuvent pas être prises en compte, pas plus que le comportement rhéologique complexe du métal (élasto-viscoplastique) qui doit faire intervenir des variables d'histoire, telle que la déformation plastique cumulée.

[M'Hamdi *et al.*, 1999], lors d'une étude concernant la macroségrégation de la coulée continue d'aciers, proposent d'utiliser une approche globale stationnaire sur toute la coulée

d'acier. Leur étude se focalise sur l'étude de zone pâteuse en supposant que toute la phase solide se déplace à la vitesse de coulée. Ils ne tiennent donc pas compte du comportement élasto-viscoplastique du solide et leur formulation ne permet pas le calcul de contraintes et de déformations dans la phase solidifiée. L'approche, inspirée de la mécanique des fluides, néglige les variations de la surface libre : pas de calcul de gonflement entre les rouleaux, ni de prédiction de lame d'air entre le produit et la lingotière.

Pour conclure sur ces méthodes stationnaires, on remarquera que la faible diffusivité de l'acier implique une longueur de solidification élevée avec une zone pâteuse très étendue (d'où les formes courbes des machines de coulée continue de brames épaisses). Ces stratégies dites stationnaires sont en fait utilisées pour décrire un phénomène précis et généralement local au cours du procédé de coulée continue d'aciers. Dans le cas d'une modélisation thermomécanique globale du procédé, elles semblent peu adaptées et trop coûteuses.

1.1.2 Les *stratégies instationnaires* où le domaine étudié est tracté dans la machine avec ou sans croissance de maillage

On distingue, là encore, deux types de stratégies instationnaires. Le premier, que nous avons appelé *stratégie instationnaire tranche*, est plus généralement répandu dans la littérature.

Voyant que les limites des moyens informatiques étaient rapidement atteintes au début des années 90, certains auteurs ont effectué des calculs sur un domaine d'intégration plus restreint. Ainsi, [Thomas *et al.*, 1992, Boehmer *et al.*, 1998] proposent de limiter les calculs thermomécaniques sur une portion de produit coulé (tranche) se déplaçant à la vitesse de coulée dans la machine, (FIG. 1.4).

Il supposent ainsi que ces calculs donnent la solution stationnaire. Bien que les auteurs obtiennent de bons résultats en thermique avec une telle méthode (dus en particulier aux faibles gradients thermiques axiaux pour la coulée continue d'aciers - ce qui est faux pour la coulée continue d'aluminium [Boehmer *et al.*, 1998]), cette méthode présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte la totalité du domaine et reste inadaptée pour les calculs des déformations et du gonflement. Pour contrer ce problème, [Pascon *et al.*, 2001] proposent d'étendre le domaine étudié et donc d'utiliser une tranche plus longue. À l'aide d'une modélisation élasto-viscoplastique pour décrire le comportement de l'acier, ils sont en mesure d'effectuer un calcul de lame d'air entre la brame et la lingotière. Le com-

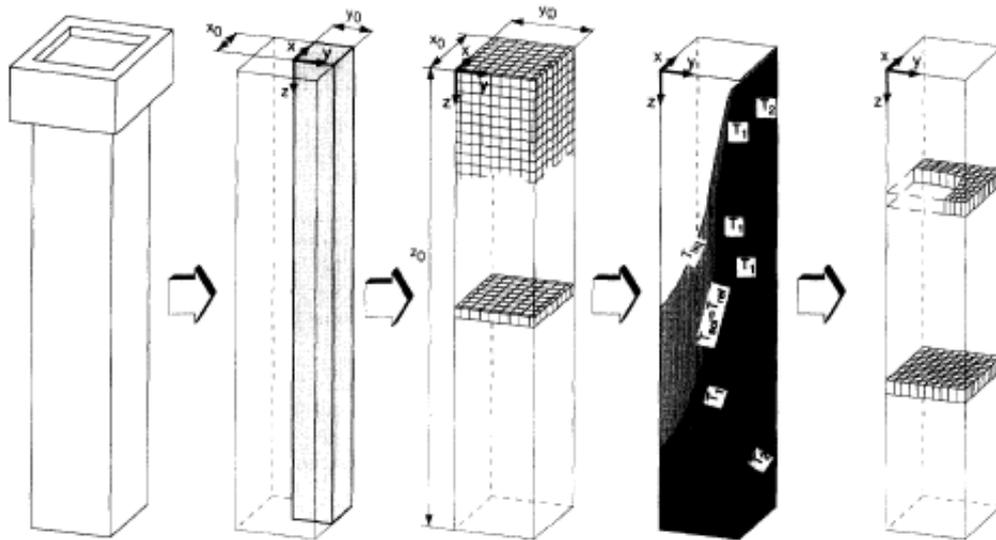


FIG. 1.4 – Calcul thermomécanique à l'aide d'une stratégie de type tranche instationnaire

portement de l'acier en zone de refroidissement secondaire n'est alors pas étudié. Dans sa thèse, conscient des limites inhérentes à toute approche de type tranche dans cette zone, [Pascon, 2003] parvient à mettre en œuvre une solution palliative. À partir d'un calcul de déflexion d'une coque considérée élastique, il est possible, même si sa mise en œuvre est délicate, de rendre compte des gonflements observés. Malheureusement, ce type d'approche ne permet pas de prédire ces déflexions mais seulement d'en tenir compte.

Le second type de stratégie, plus précis mais beaucoup plus coûteux en temps de calcul, consiste à faire des calculs thermomécaniques sur toute la longueur du produit à l'aide d'une approche instationnaire - que nous appellerons dans la suite de ce manuscrit *stratégie globale instationnaire*. Le domaine d'intégration va croître : [Drezet et Rappaz, 1997] ou encore [Li et Ruan, 1995] décrivent l'expansion du domaine depuis le ménisque dans la lingotière, il est ensuite tracté à la vitesse de coulée dans la machine avec croissance du volume, (FIG. 1.5).

Ils utilisent cette méthode pour simuler les phases d'alimentation du procédé et réalisent des calculs thermomécaniques en lingotière. Cette approche est rare, parce que coûteuse. Dans la littérature, elle est surtout utilisée pour la modélisation de la coulée continue d'aluminium où le champ total de l'étude est plus petit qu'en coulée continue d'aciers. À notre connaissance, personne n'utilise ce type d'approche pour l'étude du comportement de l'acier en zone secondaire. D'un point de vue technique, cette stratégie peut s'apparenter aux techniques de remplissage : on alimente le produit depuis la lingotière (au niveau du ménisque ou à longueur métallurgique nulle) et il est guidé dans la zone de

refroidissement secondaire à la vitesse de coulée où son volume va alors s'agrandir.

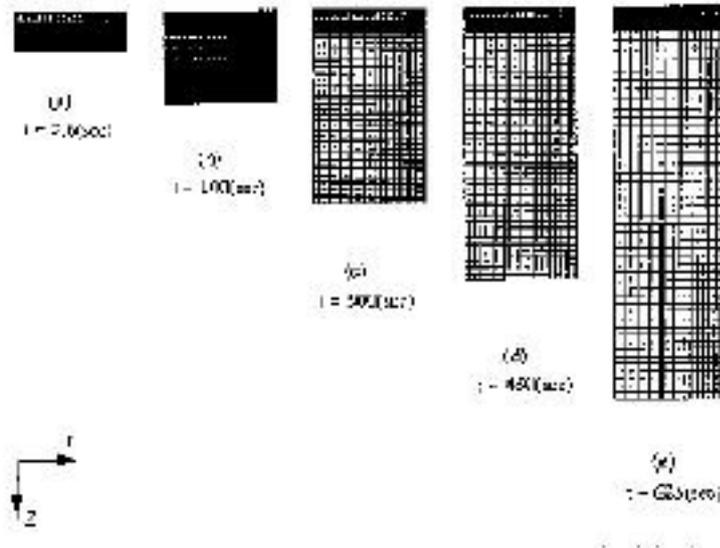


FIG. 1.5 – Principe de la stratégie globale instationnaire : croissance du domaine de calcul. Application à la coulée d'aluminium, [Li et Ruan, 1995]

Comme le montrent [Drezet et Rappaz, 1997] pour la coulée continue d'aluminium, ces méthodes instationnaires permettent d'obtenir naturellement la forme extérieure de la brique. On peut alors faire un calcul global en prenant en compte les différents états de l'acier (liquide, pâteux et solide) et obtenir les différentes contributions externes lors du passage du produit en zone de refroidissement secondaire (effet de rouleaux de guidage, gonflements, ...).

Cette brève description des différentes approches (stationnaires, instationnaires) montre que pour notre étude en zone de refroidissement secondaire l'approche globale instationnaire semble la mieux adaptée pour connaître l'état thermomécanique du produit en régime permanent de coulée. Mais il faut remarquer ici que notre principal objectif consiste à établir la solution stationnaire. Or cette technique de résolution s'apparente à une stratégie non stationnaire, on peut donc légitimement se poser la question suivante : combien de mètres faut-il couler pour atteindre ce régime stationnaire ?

1.2 Choix du formalisme : eulérien ou lagrangien ?

Nous nous plaçons dans le cadre de notre étude : la stratégie globale instationnaire. La mise en œuvre d'une telle méthode pour résoudre les équations thermomécaniques avec

les éléments finis passe par le choix d'un formalisme lagrangien ou eulérien.

Comme nous l'avons suggéré, les stratégies globales instationnaires consistent à alimenter le produit en acier tout en le tractant dans la machine de coulée continue. On parlera alors de remplissage continu de la lingotière sans fond. Pour traiter ce type de problème de simulation numérique qui consiste à regarder l'évolution temporelle et spatiale du front de matière, on utilise des méthodes numériques que l'on peut diviser en deux grandes parties :

- la formulation eulérienne, caractérisée par un maillage fixe dans lequel on observe le déplacement des particules de matière.
- la formulation lagrangienne, qui consiste à convecter le maillage avec la matière. Ainsi, chaque nœud s'identifie à la même particule tout au long de la déformation.

Dans sa thèse, [Bahloul, 2000] passe en revue les diverses méthodes numériques et donne les avantages et inconvénients de chacune d'elles. Le fait de vouloir étudier le comportement de l'acier en zone de refroidissement secondaire va nous inciter à choisir un formalisme lagrangien plutôt qu'eulérien. Bien que cette dernière permette de modéliser des phénomènes comme la recirculation d'un fluide, ce qui peut être fort coûteux voire impossible avec une formulation lagrangienne (remaillages fréquents), le principal inconvénient des formulations eulériennes réside dans la nécessité d'utiliser une procédure de suivi de la surface libre qui requiert un temps de calcul important et génère bien souvent des imprécisions numériques : mailler très finement le vide et résoudre une équation de transport associée à une fonction caractéristique de la matière dans le vide [Pichelin, 1998]. Au vu des déplacements de surface libre attendus en coulée continue d'aciers (quelques dixièmes de millimètres de gonflement), cette technique n'est pas adaptée car elle nécessiterait des maillages beaucoup trop volumineux.

Par contre, les formulations lagrangiennes donneront, par l'absence de termes convectifs, une représentation fidèle du mouvement du front de matière et donc une bonne description des surfaces libres (entre les rouleaux de soutien, par exemple). En revanche, elles entraînent une dégradation progressive de la qualité des éléments au niveau de l'alimentation, ce qui affecte la précision du calcul et se traduit par une erreur sur le champ de vitesse et par la suite une erreur sur la position du front de matière. Il devient alors impossible de poursuivre le calcul sans remailler. La figure (FIG. 1.6) montre cette dégénérescence du maillage lors de l'utilisation de la stratégie globale instationnaire.

L'objectif initial, être capable de prédire tous les phénomènes thermomécaniques du

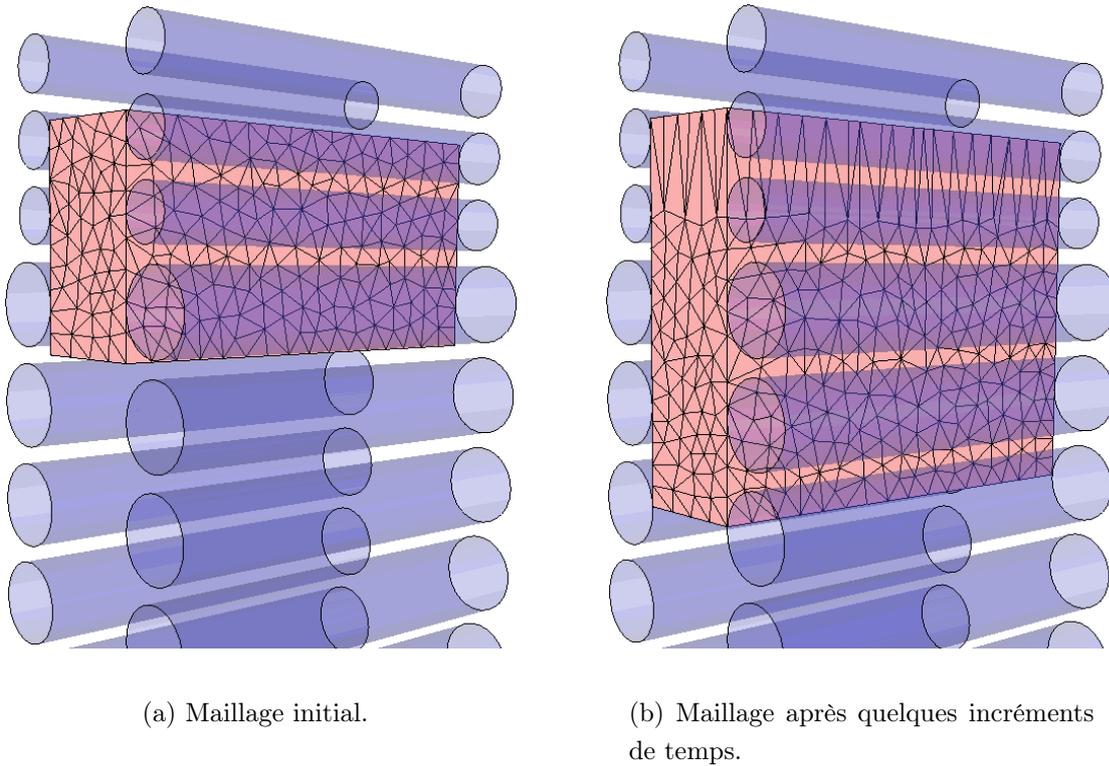


FIG. 1.6 – Principe et conséquences sur le maillage d’une stratégie globale instationnaire avec croissance de maillage, en formation lagrangienne. Le calcul est ici initié dans la zone de refroidissement secondaire, mais la problématique est la même au niveau de la lingotière.

refroidissement secondaire dans sa globalité, nous pousse à choisir une méthode lagrangienne pour une approche globale instationnaire. Dans ce cas une adaptation doit être envisagée. En effet, sans trop parler des différentes conditions initiales aux limites pour mettre en œuvre une telle stratégie qui seront détaillées dans la suite, on peut juste signaler que la partie supérieure, simulant l’injection, reste fixe alors que la partie inférieure, représentant le mannequin, a une vitesse imposée égale à la vitesse de coulée. On devine alors aisément que la fréquence des remaillages est fortement liée à la finesse du maillage et à la vitesse de coulée. Mais on peut remarquer que la déformation des éléments est localisée et proche de la surface bloquée. On peut donc se servir de cette remarque pour optimiser de façon considérable les temps de calcul dus aux remaillages. Avant de décrire cette optimisation, rappelons le principe du remaillage.

1.3 Notions de maillage/remailage

Dans la suite, nous présentons une partie des travaux de [Coupez, 2000] décrivant un algorithme de génération et d'adaptation de maillage par une méthode de minimisation de volume. Cet algorithme n'est optimal que pour des maillages dits non-structurés qui présentent l'avantage de prendre en compte des géométries complexes. En effet, l'objectif est de développer un modèle numérique capable de simuler la solidification de l'acier en sortie de lingotière. A sa sortie, la forme du produit peut être une billette, un bloom ou une brame : il s'agit dans tous les cas d'une sorte de parallélépipède continu d'acier avec la présence ou non de congés. Le maillage non structuré offrira plus de souplesse que le maillage structuré pour tenir compte de toutes ces particularités mais aussi pour une étude plus fine de la zone pâteuse (raffinement local du maillage). Avant de décrire l'algorithme de remailage, donnons quelques définitions utiles pour la construction d'un maillage.

1.3.1 Rappel sur la définition d'un maillage

1.3.1.1 Topologie de maillage

Un maillage est un objet représentant une discrétisation d'une partie finie de l'espace \mathbb{R}^d où $d = 1, 2, 3$ est la dimension de l'espace considéré. Il est composé de deux ensembles :

- un ensemble fini de nœuds \mathcal{N} . Chaque nœud n est défini par ses d coordonnées dans l'espace de dimension d : $n(x_1, \dots, x_d)$;
- un ensemble fini d'éléments \mathcal{E} . Chaque élément est déterminé par un sous-ensemble de \mathcal{N} noté $T(E)$ où T est l'application définie par :

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{N}) \\ e &\longmapsto T(e) = \{n^1, n^2, \dots\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\mathcal{P}(\mathcal{N})$ représente l'ensemble des parties de \mathcal{N} et $T(e)$ l'ensemble des nœuds de \mathcal{N} définissant l'élément E .

L'application T , appelée connectivité du maillage, donne pour chaque élément e l'ensemble des nœuds qui le constituent. Dans le cas d'un maillage contenant un seul type d'élément (c'est à dire avec un même nombre de nœuds par élément, D) , on a :

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{N}^D \\ e &\longmapsto T(e) = \{n^1, n^2, \dots, n^D\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dans le cas où $D = d + 1$, un élément noté $d - \text{simplexe}$ correspond à :

- un triangle pour $d = 2; D = 3$;
- un tétraèdre pour $d = 3, D = 4$.

Dans la suite nous nous limitons aux maillages simpliciaux, où chaque élément est constitué exactement de D nœuds.

Nous définissons donc la topologie de maillage \mathcal{T} comme étant simplement un ensemble de $d - \text{simplexes}$ ($\mathcal{T} \subset \mathcal{P}_D(\mathcal{N})$) vérifiant quelques propriétés données ultérieurement. L'ensemble des nœuds de la topologie \mathcal{T} est donc l'union de tous les nœuds appartenant aux éléments de \mathcal{T} à savoir :

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T \quad (1.5)$$

Cette définition peut, bien sûr, s'appliquer à n'importe quel ensemble d'éléments, (FIG. 1.7).

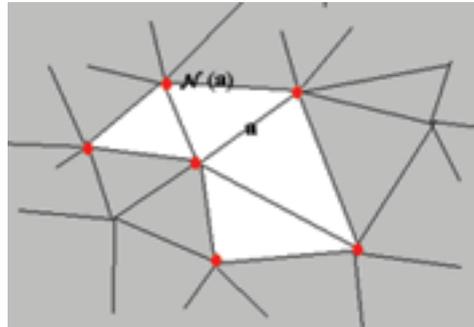
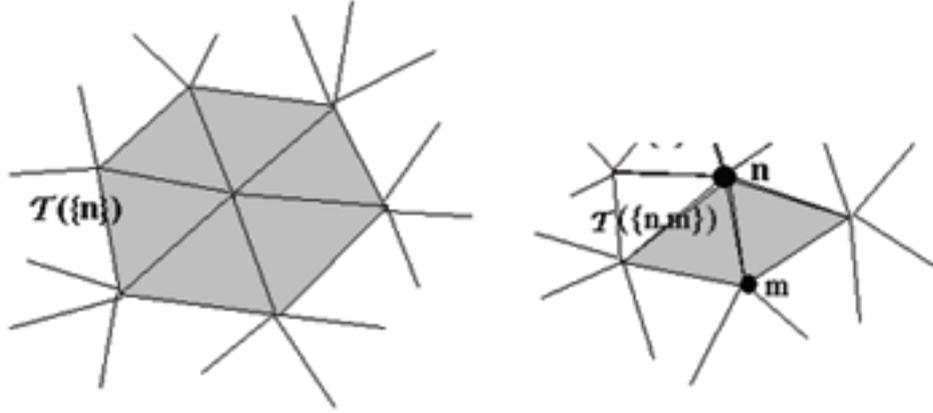


FIG. 1.7 – Le sous ensemble de nœuds $\mathcal{N}(a)$ est l'ensemble des nœuds appartenant à l'ensemble d'éléments que contient la topologie a .

Après avoir défini l'ensemble $\mathcal{N}(a)$ nous introduisons sa réciproque à savoir $\mathcal{T}(\eta)$ qui représente l'ensemble des éléments partageant le même ensemble de nœuds donnés η , (FIG. 1.8).

$$\mathcal{T}(\eta) = \{T \in \mathcal{T}, \eta \subset T\} \quad (1.6)$$

Pour chaque élément T nous pouvons définir son contour ∂T , cette frontière étant l'ensemble des sous-ensembles de $D - 1$ nœuds appartenant à l'élément T . Ce contour représente simplement les trois arêtes d'un triangle ou les quatre faces d'un tétraèdre. Par


 FIG. 1.8 – Sous ensemble d'éléments ; $\mathcal{T}(\eta) = \{T \in \mathcal{T}, \eta \subset T\}$.

abus de langage nous parlerons des faces de l'élément pour désigner ce contour. L'ensemble des faces d'une topologie de maillage est alors donné par :

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \partial T \quad (1.7)$$

Nous pouvons alors remarquer que chaque face d'une topologie de maillage est partagée par, au plus, deux éléments. On peut alors donner la définition suivante :

Définition. \mathcal{T} est une topologie si

$$|\mathcal{T}(F)| \leq 2, \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$$

La frontière de \mathcal{T} est :

$$\partial \mathcal{T} = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{T}), \text{card}(\mathcal{T}(F)) = 1\}$$

(l'opérateur sur les ensembles $\text{card}(\cdot)$ étant le cardinal, il donne le nombre d'entités contenues dans un ensemble donné).

1.3.1.2 Théorème de volume minimal

Le théorème du volume minimal est le fondement d'une méthode originale de génération de maillage. Nous pouvons associer les coordonnées du maillage aux nœuds par la bijection suivante :

$$X : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d (d = 2, 3).$$

Ceci nous permet de noter par $X(T)$ l'ensemble des coordonnées associées à un élément T . Ces coordonnées définissent Ω_T comme l'enveloppe convexe de ces D points. De la même façon, nous définissons Γ_F comme étant l'enveloppe convexe des $D - 1$ points de F , F étant une face frontière de la topologie ($F \in \partial\mathcal{T}$). L'ensemble de ces éléments génère un domaine $\Omega(\mathcal{T}, X)$. L'ensemble des faces génère lui une surface $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X)$.

$$\Omega(\mathcal{T}, X) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \Omega_T \quad (1.8)$$

$$\Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \bigcup_{F \in \partial\mathcal{T}} \Gamma_F \quad (1.9)$$

Dans le cas général $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X)$ et $\partial\Omega(\mathcal{T}, X)$ la frontière de $\Omega(\mathcal{T}, X)$ peuvent être différents. Cependant, lorsque (\mathcal{T}, X) représente un maillage conforme de Ω , $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X)$ et $\partial\Omega(\mathcal{T}, X)$ sont identiques, un maillage étant conforme sous les conditions suivantes :

Théorème. *Soit (\mathcal{T}, X) définie comme ci-dessus, \mathcal{T} étant orientée. Nous supposons que $(\partial\mathcal{T}, X)$ est une discrétisation conforme de la frontière du domaine Ω (i.e. $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \partial\Omega(\mathcal{T}, X)$), alors :*

(a)

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| \geq |\Omega| \quad (1.10)$$

(b) (\mathcal{T}, X) est un maillage de Ω si et seulement si :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = |\Omega| \quad (1.11)$$

et $|\Omega_T| > 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}$ ($|\Omega_T|$ étant le volume de Ω_T).

La preuve de ce théorème est donnée dans [Coupez, 2000]. Les notations précédentes sont expliquées par l'exemple représenté sur la figure (FIG. 1.9). Cet exemple montre le principe du volume minimum sur un domaine non convexe défini simplement par deux triangles. Dans ce cas là il y a deux topologies de maillage possibles, mais une seule est un maillage conforme : celle qui minimise le volume.

1.3.2 Opérations sur les topologies de maillage : le mailleur

1.3.2.1 Les opérateurs de topologie

Toute modification d'un maillage peut être considérée comme une opération de type couper-coller :

$$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} - a + b \quad (1.12)$$

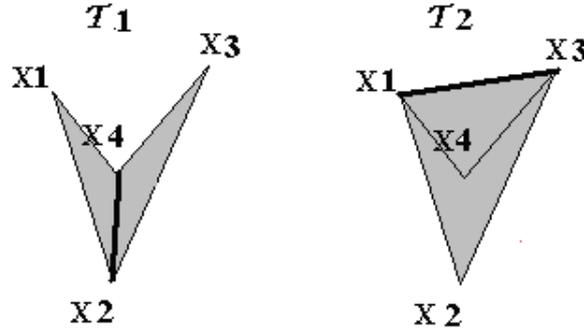


FIG. 1.9 – Principe du volume minimal. $\mathcal{T}1 = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\mathcal{T}2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 3, 1\}\}$; $\partial\mathcal{T}1 = \partial\mathcal{T}2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$; $|\Omega(\mathcal{T}1, X)| < |\Omega(\mathcal{T}2, X)|$; $\partial\Omega(\mathcal{T}1, X) = [X1, X2] \cup [X2, X3] \cup [X3, X4] \cup [X4, X1]$, $\partial\Omega(\mathcal{T}2, X) = [X1, X2] \cup [X2, X3] \cup [X3, X1]$

où a est un sous-ensemble d'éléments de \mathcal{T} à enlever et b un nouvel ensemble d'éléments à insérer dans \mathcal{T} . Il faut bien sûr que les frontières de a et b soient identiques ($\partial a = \partial b$). Cependant cette opération n'est valide que si le résultat d'une telle opération reste une topologie de maillage. Ce dernier point est le principal problème de la méthodologie d'optimisation de topologie par minimisation du volume, mais il peut être résolu en restreignant le choix des ensembles a et b .

Nous pouvons montrer que toute modification de maillage peut se décomposer en une succession de modifications élémentaires qui sont locales. Ces modifications élémentaires sont au nombre de deux :

- l'une sur les éléments partageant un nœud ;
- l'autre sur les éléments partageant une arête.

Les différents choix pour a sont « $a = \mathcal{T}(\{n\})$ » et « $a = \mathcal{T}(\{n, m\})$ » où n représente un nœud, et $\{n, m\}$ les deux nœuds d'une arête (voir la figure (FIG. 1.8) ainsi que la définition 1.6).

De même, pour définir les différents choix de b introduisons un générateur de topologie trivial (topologie étoilée) qui consiste à connecter un nœud à un ensemble donné de faces

frontière, comme montré sur la figure (FIG. 1.10) :

$$\mathcal{T}^*(n, \partial\mathcal{T}) = \{T \mid T = \{\{n\} \cup F\}, F \in \partial\mathcal{T}, n \notin F\} \quad (1.13)$$

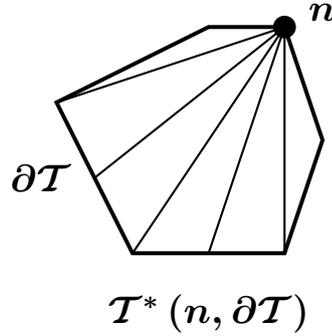


FIG. 1.10 – Le générateur de topologie étoilée.

Ce générateur est efficace (le résultat obtenu est un maillage de qualité convenable) si la région considérée est assez petite. En effet, pour une frontière importante, la topologie de maillage obtenue est rarement un maillage conforme et si tel est le cas, la qualité du maillage obtenu est très mauvaise. Ceci étant, nous cherchons à améliorer cette première topologie de maillage à l'aide des opérations de couper-coller définies précédemment.

Il faut cependant noter que le résultat de telles opérations de couper-coller doit être une topologie de maillage, ceci afin de pouvoir les itérer. Or cette condition n'est pas forcément vérifiée pour des opérations de couper-coller quelconques. Afin de rendre les opérations précédentes compatibles topologiquement on introduit \bar{a} la fermeture de a définie par :

$$\bar{a} = \{T \in \mathcal{T}, T \subset \mathcal{N}(a)\} \quad (1.14)$$

Les problèmes de compatibilité topologique sont ainsi résolus en utilisant \bar{a} à la place de a .

Finalement, nous pouvons définir un opérateur de changement de topologie locale θ_η^m par :

$$\theta_\eta^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}(\eta)} + \mathcal{T}^*(m, \overline{\mathcal{T}(\eta)}) \quad (1.15)$$

où $\eta \subset \mathcal{N}$ et $m \in \mathcal{N}$, (FIG. 1.11).

L'algorithme de maillage en $2d$, comme en $3d$, est simplement une combinaison de cet opérateur appliqué au voisinage de :

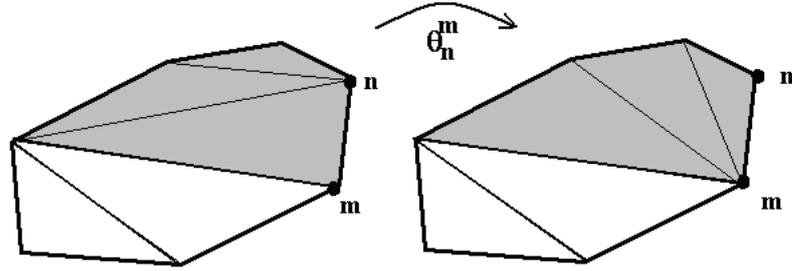


FIG. 1.11 – $\theta_n^m(\mathcal{T})$ change les éléments connectés à n par des éléments connectés à m .

- chaque nœud :

$$\mathcal{T} \leftarrow \theta_n^m(\mathcal{T}); \quad (1.16)$$

- chaque arête :

$$\mathcal{T} \leftarrow \theta_{\{n_1, n_2\}}^m(\mathcal{T}), \quad (1.17)$$

L'optimisation du processus est due à un choix optimum du nœud d'étoilement m pour chaque opération de couper-coller effectuée autour de chaque nœud n et de chaque arête $\{n_1, n_2\}$.

1.3.2.2 Génération de maillage par minimisation du volume

Pour obtenir un maillage, il faut trouver la topologie de maillage définie sur le bord du domaine minimisant son volume : $Vol(\mathcal{T}) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} |\tau|$.

Cette définition de volume permet une évaluation locale du volume de la topologie du maillage. On peut alors optimiser localement cette topologie en utilisant des opérations comme celles décrites sur la figure (FIG. 1.9). La topologie de maillage \mathcal{T}_1 minimise le volume, qui est égal au volume du quadrilatère. Dans ce cas, on dira que \mathcal{T}_1 est un maillage alors que \mathcal{T}_2 ne l'est pas.

Pour trouver une topologie de maillage minimisant son volume, on introduit une relation d'ordre sur les topologies de maillage à l'aide d'un *critère de qualité* sur la forme des tétraèdres. La qualité de forme d'un tétraèdre est définie comme le rapport entre le volume de l'élément et la somme de ses arêtes :

$$c(\tau) = \frac{|\tau|}{h(\tau)^{dim}}, \quad dim = 3 \quad (1.18)$$

La qualité de forme d'un élément est maximale pour un simplexe équilatéral et nulle pour un élément plat.

Étant donné une topologie de maillage, on classe des éléments par ordre croissant suivant leur qualité de forme. On peut alors définir la relation d'ordre entre topologies :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a < \mathcal{T}_b \\ \exists e, \forall i < e, c(a_i) = c(b_i) \text{ et } c(a_e) < c(b_e) \end{aligned} \quad (1.19)$$

La meilleure topologie est celle qui maximise la qualité du plus mauvais élément.

L'algorithme complet consiste à générer arbitrairement une topologie étoile issue du maillage de la surface du domaine, et à l'optimiser localement par des opérations sur les nœuds et sur les arêtes. On génère ainsi un maillage du domaine mais qui ne contient aucun nœud interne. Sa qualité est souvent mauvaise ; c'est pourquoi on introduit une opération supplémentaire d'ajout ou de suppression de nœuds toujours à l'aide de l'opérateur d'étoilement.

1.3.2.3 Ajout et suppression de nœuds

Nous sommes à ce stade capable de générer un maillage conforme, à partir d'une frontière donnée. Toutefois, ce maillage ne contient aucun nœud interne : tous les nœuds du maillage appartiennent à sa frontière. La qualité de forme des éléments du maillage, ainsi générés, est généralement très mauvaise et le maillage obtenu ne permet pas de lancer une simulation numérique. Il est donc nécessaire de pouvoir créer des nœuds internes sans pénaliser la qualité de forme du maillage.

Un nouveau nœud, interne ou pas, est rajouté à la liste des nœuds de la topologie de maillage \mathcal{N} , ce nœud est composé par les coordonnées du barycentre des coordonnées des nœuds du sous-domaine extrait lors de l'opération de couper-coller. Soit a ce sous-domaine, l'ensemble des nœuds de ce sous-domaine est $\mathcal{N}(a)$ et nous avons :

$$X(new) = \sum_{i \in \mathcal{N}(a)} X(i) / |\mathcal{N}(a)|$$

Cette opération, ainsi que son inverse, permet de créer des nœuds, d'en supprimer mais aussi de repositionner les nœuds internes par barycentrage. La création de nœud s'effectue en prenant la fermeture de $a = \mathcal{T}(\{n, n'\})$ représentant l'ensemble des éléments partageant l'arête $\{n, n'\}$. La suppression de nœuds consiste à prendre la fermeture de $a = \mathcal{T}(\{n\})$ et à remplacer la topologie étoilée par rapport à n par une topologie étoilée à partir d'un nœud différent de n . Le repositionnement d'un nœud n consiste simplement à

supprimer ce nœud pour le remplacer par le barycentre (combinaison des deux opérations précédentes).

1.3.2.4 Remailage surfacique

Il est possible d'intégrer la surface du maillage au maillage volumique en introduisant une bande d'éléments virtuels (éléments frontières). Cette intégration simplifie considérablement les opérations de remailage en ne considérant plus qu'une seule entité. Le volume du sous-domaine contenant les éléments virtuels doit quant à lui rester nul, ou presque nul si l'on autorise de légères modifications de la frontière. Cette bande virtuelle est obtenue par duplication des nœuds frontière. La géométrie du maillage est à ce moment contenue dans l'ensemble de ces nœuds virtuels. Un élément est défini comme virtuel s'il contient au moins un nœud virtuel. La topologie de maillage peut alors se décomposer en deux parties :

$$\mathcal{T} = (\mathcal{T} - \mathcal{T}^v) \cup \mathcal{T}^v, \quad (1.20)$$

où \mathcal{T}^v est l'ensemble des éléments virtuels.

L'introduction de cette bande d'éléments permet de modifier la frontière. Le volume de ces éléments virtuels doit rester nul tout au long du processus d'optimisation :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = \sum_{T \in \mathcal{T} - \mathcal{T}^v} |\Omega_T| \quad (1.21)$$

Cette propriété permet à $\mathcal{T} - \mathcal{T}^v$ de représenter un maillage de Ω sous la condition d'extension du principe du volume minimal (on pourra se référer à [Coupez, 2000]) défini par :

Définition. Soit (\mathcal{T}, X) tel que $(\partial\mathcal{T}, X)$ soit une triangularisation de $\partial\Omega$ alors : $(\mathcal{T} - \mathcal{T}^v, X)$ est un maillage conforme de Ω si :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = |\Omega| \quad (1.22)$$

$$\text{et } \sum_{T \in \mathcal{T}^v} |\Omega_T| = 0$$

1.3.2.5 Raffinement de maillage

Maillages isotropes : Le maillage obtenu ne vérifie pas de critère de taille de maille. Or la précision d'une simulation numérique dépend grandement de la taille de maille. On

est alors amené à imposer une carte de maille selon les besoins numériques. Pour que le mailleur puisse vérifier un critère de taille de maille, on introduit une fonction de taille de maille H définie aux éléments du maillage. La taille d'un élément est la moyenne des tailles de ses nœuds :

$$H(T) = \sum_{i \in T} \frac{H(i)}{D}; \quad D = 4, \text{ nombre de nœuds par élément } T \quad (1.23)$$

Le processus d'adaptation consiste à améliorer le maillage tant que la taille de maille courante ne correspond pas à la taille de maille désirée (fonction de H).

Maillages anisotropes : La construction de maillages anisotropes consiste à généraliser le critère de forme présenté ci-dessus. Une transformation géométrique locale est effectuée avant chaque évaluation de la qualité d'un élément. Par exemple, si l'on cherche à obtenir des éléments allongés suivant l'axe X , nous allons utiliser une transformation compactant les éléments dans la direction X . Un élément équilatéral aura une qualité faible alors qu'un élément allongé aura lui une qualité correcte.

1.3.2.6 Critère de remaillage

Lors de la simulation numérique, le remaillage est activé soit de manière périodique, soit lorsque la qualité minimale du maillage q_{min} est inférieure à une valeur seuil :

$$q_{min} = \min_{T \in \mathcal{T}} c_H(X, T) \quad (1.24)$$

En dessous de ce seuil, on remaille le domaine en volume pour une frontière fixe suivant la carte de maille imposée. On remaille ensuite la surface tout en respectant la géométrie. Les opérations de surface se répercutent sur la topologie du maillage volumique. On génère alors des raccordements volumiques pour garder une topologie de maillage.

1.3.2.7 Autres opérations

Il est souvent utile de conserver une ou plusieurs parties du maillage en bloquant les nœuds et donc les éléments. En effet bloquer un nœud consiste à empêcher le mailleur de modifier ses coordonnées ; de même bloquer l'ensemble des nœuds d'un même élément va contraindre le mailleur à garder l'élément tel quel et donc conserver les connexions entre les nœuds bloqués. Cette option sera fort utile en vue d'une optimisation de l'utilisation appropriée à la stratégie globale instationnaire.

1.3.3 Transport des variables de l'ancien vers le nouveau maillage

Dans une discrétisation spatiale par éléments finis, pour un problème thermomécanique, la configuration du domaine Ω est définie par :

- la géométrie du domaine,
- les champs de température, de vitesse et de pression,
- l'état de contrainte (déviatoire).

Ces informations sont alors connues aux nœuds ou aux éléments du maillage. Lors d'un remailage, la topologie du maillage est modifiée. Il faut donc réaffecter les données de la configuration de l'ancien vers le nouveau maillage. On parle de *transport* des variables sur la nouvelle configuration.

Dans le cas d'une discrétisation $P1^+/P1$, les champs de température, de vitesse et de pression sont nodaux. Le transport des variables nodales ($P1$ par morceaux) s'effectue en deux étapes :

- Recherche de l'élément d'appartenance de chaque nœud du nouveau maillage dans l'ancien maillage.
- Interpolation des valeurs nodales depuis les sommets de l'élément d'appartenance de l'ancien maillage jusqu'aux nœuds du nouveau maillage. L'interpolation est exacte (sans diffusion numérique) et est effectuée en utilisant les fonctions d'interpolation de l'ancien maillage.

Par contre l'état de contrainte est constant sur l'élément et donc discontinu sur le domaine discrétisé, on parle de variable $P0$ par élément. L'interpolation est donc plus délicate et est elle aussi effectuée en deux étapes

- En un premier temps, on utilise une méthode de lissage par moindres carrés afin d'affecter des valeurs aux nœuds de l'ancien maillage à partir des valeurs définies par élément :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\bar{u}_1^{liss}, \dots, \bar{u}_{Nbnoe}^{liss}) \text{ tel que :} \\ & (\bar{u}_1^{liss}, \dots, \bar{u}_{Nbnoe}^{liss}) = \arg_{\bar{u}_i^{liss}} \min \left\| \sum_{i=1}^{Nbnoe} \bar{u}_i^{liss} N^i - \sum_{j=1}^{Nbnoe} u_j \mathbf{1}^j \right\|^2 \end{aligned} \quad (1.25)$$

où u_j est la valeur sur l'élément j , \bar{u}_i est la valeur lissée au nœud i , N^i est la fonction de forme du nœud i et $\mathbf{1}^j$ est la fonction indicatrice sur l'élément j .

Ce lissage est fait dans le but d'utiliser la procédure de transport de variables nodales décrites précédemment.

- Dans une deuxième étape, on cherche l'élément d'appartenance dans l'ancien maillage du centre de gravité de chaque élément du nouveau maillage. Grâce aux fonctions de base définies sur l'ancien maillage, on affecte la valeur au centre de gravité en interpolant les variables nodales lissées sur l'ancien maillage.

La valeur de la variable interpolée au centre de gravité est celle affectée à l'élément (le champ transporté étant $P0$). Cette procédure de transport induit une diffusion numérique contrairement au cas du transport nodal. En effet, les valeurs affectés aux nœuds lors de l'extrapolation ne sont qu'une moyenne pondérée des valeurs $P0$ des éléments contenant ce nœud, [Traoré, 2001].

1.4 Adaptation du mailleur à la stratégie globale instationnaire

Le mailleur, dont nous venons de décrire le principe, est utilisé de telle sorte que toute la topologie doit être remaillée. Ainsi même si une topologie n'est que localement dégénérée, le mailleur tel qu'il est, remaille dans sa totalité cette topologie. Cette opération et celle qui lui est directement liée - le transport des variables de l'ancien vers le nouveau maillage - peuvent être très coûteuses en temps de calcul. Dans le cas de la modélisation de la coulée continue par une approche globale instationnaire, nous l'avons optimisé afin de réduire considérablement les temps de calcul en introduisant l'opération qu'on appellera **extraction de topologie**.

1.4.1 Extraction de topologie

1.4.1.1 Découpe du domaine

Partant du principe que le maillage est localement déformé et essentiellement proche de la zone d'injection, comme le suggère la figure (FIG. 1.12), on propose de découper le maillage déformé (domaine) en deux (d pour dégénéré et \bar{d} pour non dégénéré).

- un premier maillage contenant la partie dégénérée du maillage (\mathcal{T}_d, X_d) (partie rouge),
- un second maillage avec le reste du maillage de bonne qualité ($\mathcal{T}_{\bar{d}}, X_{\bar{d}}$) (partie bleue).

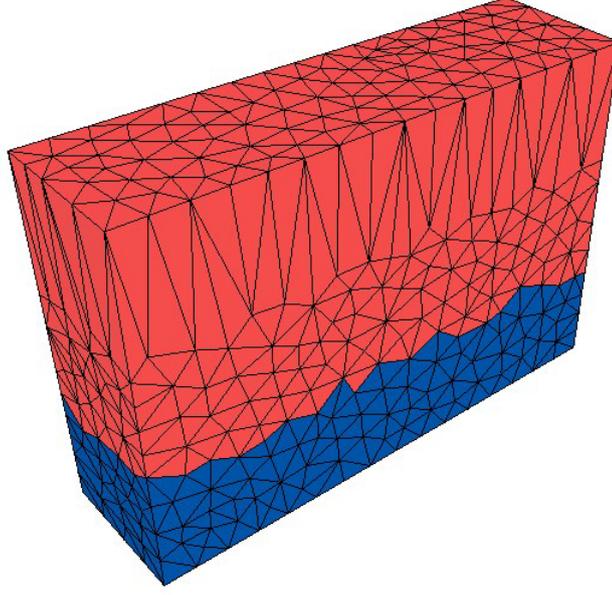


FIG. 1.12 – Illustration de découpe de maillage.

Remarque : Le critère qui va délimiter les deux domaines n'est pas détaillé dans ce paragraphe. On choisit de découper notre domaine de telle sorte que le domaine contenant la partie dégénérée du remaillage contienne suffisamment de nœuds et d'éléments pour que le mailleur puisse "travailler" convenablement.

Notre domaine est décomposé en deux domaines :

$$\Omega(\mathcal{T}, X) = \Omega_d(\mathcal{T}_d, X_d) \cup \Omega_{\bar{d}}(\mathcal{T}_{\bar{d}}, X_{\bar{d}}) \quad (1.26)$$

$$\Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_d, X_d) \cup \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}}, X_{\bar{d}}) \quad (1.27)$$

On cherche donc à remailler dans ce cas le domaine Ω_d composé du maillage dégénéré (\mathcal{T}_d, X_d) et de frontière $\Gamma_d(\partial\mathcal{T}_d, X_d)$. En retirant le domaine Ω_d , on devine bien que ce dernier possède une frontière tronquée. Une première étape consiste donc à "fermer" le domaine pour qu'il puisse être remaillé. On a donc le domaine à remailler Ω_d composé d'une nouvelle topologie de maillage $(\mathcal{T}_{d'}, X_d)$ (les coordonnées des nœuds ne varient pas) et de frontière :

$$\Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d'}, X_d) = \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_d, X_d) \cup \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d1}, X_d) \quad (1.28)$$

De même, si on "ferme" le domaine $\Omega_{\bar{d}}$ à l'aide de la topologie $(\mathcal{T}_{\bar{d}'}, X_{\bar{d}})$, on a :

$$\Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}'}, X_{\bar{d}}) = \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}}, X_{\bar{d}}) \cup \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}1}, X_{\bar{d}}) \quad (1.29)$$

On peut alors en déduire :

$$\begin{aligned}\Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d1}, X_d) &= \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d'}, X_d) \cap \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}'}, X_{\bar{d}}) \\ \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{d1}, X_{\bar{d}}) &= \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d'}, X_d) \cap \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}'}, X_{\bar{d}})\end{aligned}$$

Et donc :

$$\Gamma_{d1} = \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{d1}, X_{\bar{d}}) = \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d1}, X_d) \quad (1.30)$$

La figure (FIG. 1.13) résume ces notations

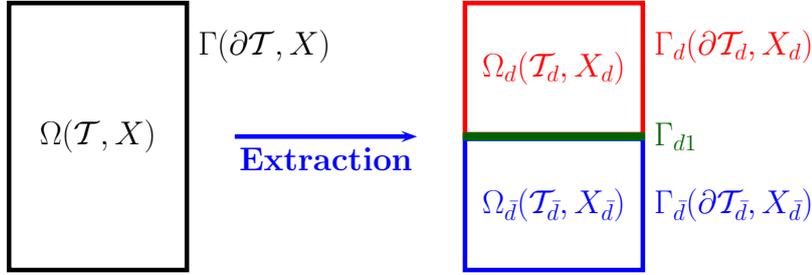


FIG. 1.13 – Principe de l'extraction schématisé.

1.4.1.2 Recollement de deux domaines

On est donc en mesure de remailler le domaine dégénéré. L'opération de recollement, qui consiste à fusionner en un seul maillage deux maillages présentant une zone de frontière commune, peut s'avérer fort ennuyeuse à partir du moment où la frontière commune n'a pas le même maillage. Pour contourner ce problème et éviter de mettre en œuvre une technique de recherche ε proposée par [Frey et George, 1999], on bloque les nœuds des éléments dont les faces composent cette frontière commune. Ainsi ces nœuds ne sont pas modifiés lors du remaillage ainsi que les connexions des éléments bloqués. Cette option permet alors de garder la frontière Γ_{d1} commune aux deux domaines intacte avant et après remaillage.

Après remaillage du domaine Ω_d , on se retrouve avec une nouvelle topologie de maillage $(\mathcal{T}_{d,new}, X_{d,new})$ et de frontière $\Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d,new}, X_{d,new})$, (FIG. 1.14). Le recollement des deux domaines Ω_d et $\Omega_{\bar{d}}$ donnera le domaine Ω avec la nouvelle topologie de maillage $(\mathcal{T}_{new}, X_{new})$

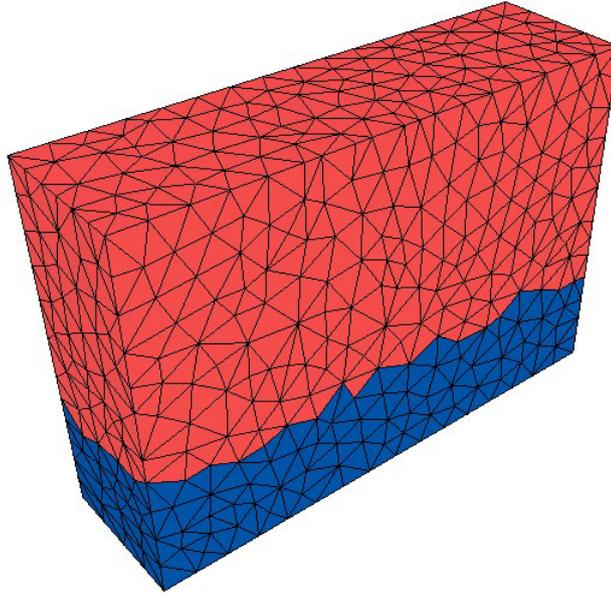


FIG. 1.14 – Recollement de 2 topologies de maillage après remaillage. Par rapport à la figure (FIG. 1.12), la surface frontière séparant les deux domaines est restée inchangée.

et de frontière $\Gamma(\partial\mathcal{T}_{new}, X_{new})$ dans laquelle on aura pris le soin d’ôter la frontière commune qui après recollement n’en est pas une :

$$\Gamma(\partial\mathcal{T}_{new}, X_{new}) = (\Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d,new}, X_{d,new}) \cup \Gamma_{\bar{d}}(\partial\mathcal{T}_{\bar{d}}, X_{\bar{d}})) \setminus \Gamma_d(\partial\mathcal{T}_{d1}, X_d) \quad (1.31)$$

Nous venons de décrire le principe du recollement sans parler de sa mise en œuvre qui passe par une nouvelle numérotation de la topologie initiale (\mathcal{T}, X) du domaine Ω .

1.4.1.3 Nouvelle numérotation : algorithme de tri

Un maillage est donc composé d’une topologie de maillage \mathcal{T} et de sa frontière $\partial\mathcal{T}$, qui donne l’ensemble des connexions des nœuds appartenant à la liste \mathcal{N} dont les coordonnées appartiennent à $X(\mathcal{T})$. Ainsi pour chaque élément T , on est capable de donner les nœuds qui le composent et à l’aide de l’application X on peut en déduire les coordonnées de chaque nœud. Lorsqu’on crée un nœud, on rajoute ce nœud à la liste \mathcal{N} ; même chose pour les éléments avec \mathcal{T} .

Le fait de découper notre domaine initial en deux domaines va permettre d’une part de limiter les opérations dues au remaillage et d’autre part limiter les opérations de transport des données de l’ancien vers le nouveau maillage. Pour cela, il est bon d’ordonner de façon

judicieuse le maillage initial. À l'aide d'un algorithme de tri, nous repérerons les nœuds composant la frontière commune aux deux domaines et à la partie modifiée de la nouvelle topologie. En effet cette dernière peut se décomposer en deux parties :

$$\Omega(\mathcal{T}_{new}, X_{new}) = \Omega_d(T_{d,new}, X_{d,new}) \cup \Omega_{\bar{d}}(\mathcal{T}_{\bar{d}}, X_{\bar{d}}) \quad (1.32)$$

Un premier algorithme va trier la liste \mathcal{N} de telle sorte que les nœuds composant le domaine $\Omega_{\bar{d}}$ sont placés en début de liste et les autres nœuds du domaine Ω_d en fin de liste en prenant le soin que les nœuds communs aux deux domaines soient en fin de "début de liste" (ou en début de "fin de liste"). On peut remarquer ici que pour chaque nœud déplacé, alors la topologie \mathcal{T} sera faussée : il faut donc bien évidemment répercuter ces déplacements des nœuds dans les éléments T qui composent la topologie \mathcal{T} .

Ainsi un nœud n qui se situait au rang x dans la liste \mathcal{N} et qui se retrouve au rang y après cet algorithme, aura pour effet de modifier les éléments qui contiennent ce nœud. Par exemple, si on reprend la topologie $\mathcal{T}1 = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ donnée par la figure (FIG. 1.9) et qu'on déplace le nœud du rang 4 au rang 3, on a alors la nouvelle topologie $\mathcal{T}1 = \{\{1, 2, \mathbf{3}\}, \{2, \mathbf{4}, \mathbf{3}\}\}$. Seule la numérotation change.

Une fois terminé cet algorithme de tri des nœuds, on déplace les éléments des listes \mathcal{T} (pour les éléments) et $\partial\mathcal{T}$ (pour les faces en $3d$) en faisant le même raisonnement : les éléments (faces) composant le domaine $\Omega_{\bar{d}}$ sont placés en début de liste et les autres éléments (faces) du domaine Ω_d en fin de liste (on n'a pas besoin de répercuter ces changements dans la liste \mathcal{N}).

À ce stade, on peut donc récupérer la topologie du domaine Ω_d en prenant les nœuds, les éléments et les faces des listes \mathcal{N} , \mathcal{T} et $\partial\mathcal{T}$ respectivement. On est donc capable de créer de nouvelles listes : \mathcal{N}_d , \mathcal{T}_d et $\partial\mathcal{T}_d$. Comme on l'a vu, la frontière $\Gamma_d(\partial\mathcal{T}_d, X_d)$ n'est pas fermée. Cette opération de fermeture du domaine va compléter et ajouter des éléments de frontière : de nouvelles faces seront ajoutées à la liste $\partial\mathcal{T}$. Les éléments qui engendrent ces nouvelles faces vont être bloqués afin de les conserver après le remaillage volumique. Pour mieux repérer ces faces (et donc les nœuds qui les composent) qui vont être supprimées lors du recollement, on utilise le même algorithme de tri décrit précédemment : on déplace les nœuds bloqués en début de liste \mathcal{N}_d tout en répercutant ces changements dans \mathcal{T}_d et $\partial\mathcal{T}_d$. Puis on place les faces bloquées en début de la liste $\partial\mathcal{T}_d$. Cette étape a pour avantage de supprimer ces faces en trop sans les chercher dans la liste $\partial\mathcal{T}_{d,new}$ créée après remaillage. Le recollement entre les deux domaines devient alors plus aisé.

Toutes ces opérations de tri sur listes de topologie de maillage sont bien sûr répercutées sur les différentes données que l'on peut avoir aux nœuds (champ de température, ...) et aux éléments (état de contrainte, ...). Ainsi, seule la partie du domaine extrait sera concernée par les opérations de transport de l'ancien vers le nouveau maillage, limitant ainsi les temps de calcul qui lui sont impartis.

Lors du calcul thermomécanique du procédé de coulée continue d'aciers avec une stratégie globale instationnaire, le domaine va croître et générer des maillages volumineux puisque le domaine d'étude peut atteindre plus de 20 mètres. Grâce à cette technique, le temps consacré à chaque remaillage reste alors le même qu'on soit en début ou en fin de simulation. Seules les opérations de tri peuvent avoir une influence mais elle reste minime.

1.4.2 Exemple d'application

Pour mettre en œuvre l'extraction de topologie, on se propose de remailler plus finement la partie supérieure en rouge déterminée sur la figure (FIG. 1.15). À chaque incrément de calcul, on multiplie la taille des éléments par 0.8 ; petit à petit une partie du domaine va se raffiner.

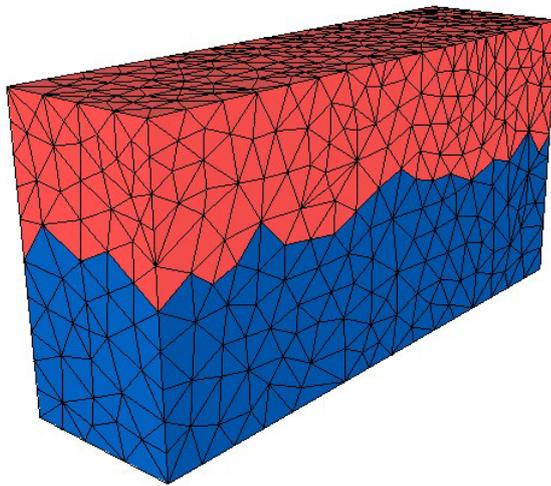
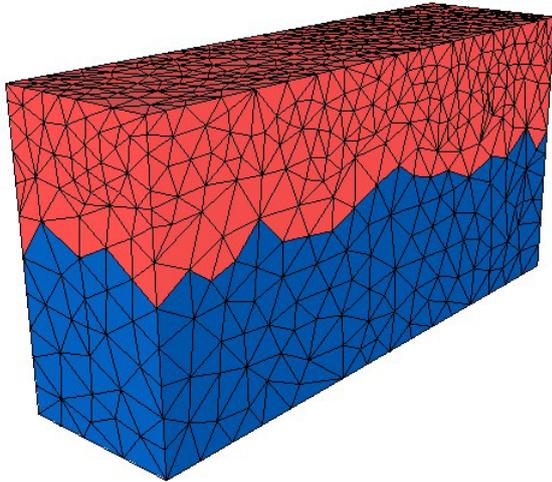


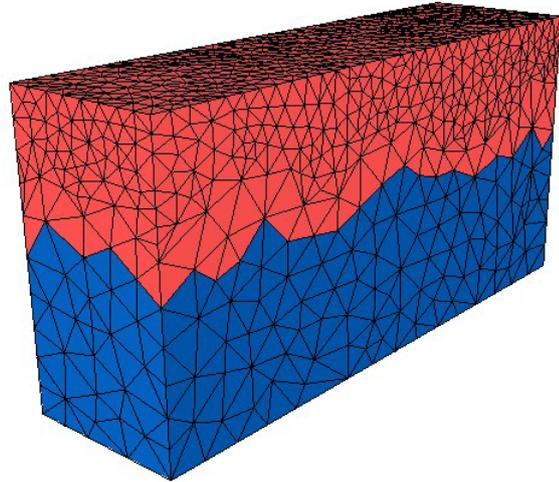
FIG. 1.15 – Maillage initial découpé en 2

Comme on peut le voir sur la figure (FIG. 1.16), seule la partie rouge est remaillée, la partie bleue reste intacte à chaque remaillage. On remarque aussi qu'une bande d'éléments du domaine rouge reste fixe. En fait ce sont les éléments qui ont un ou plusieurs nœuds décrivant la frontière commune entre le domaine bleu et le domaine rouge. Ceci dans le but de garder intact et de mieux repérer la frontière commune pour supprimer les faces

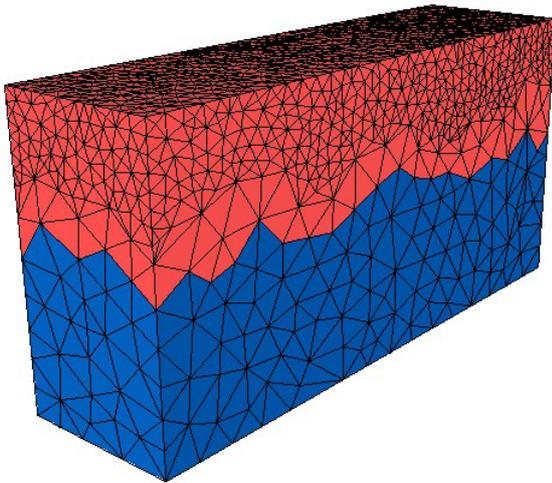
créées par le remaillage du domaine rouge. Ce phénomène sera à prendre en compte lors du choix de la longueur de la zone à remailler.



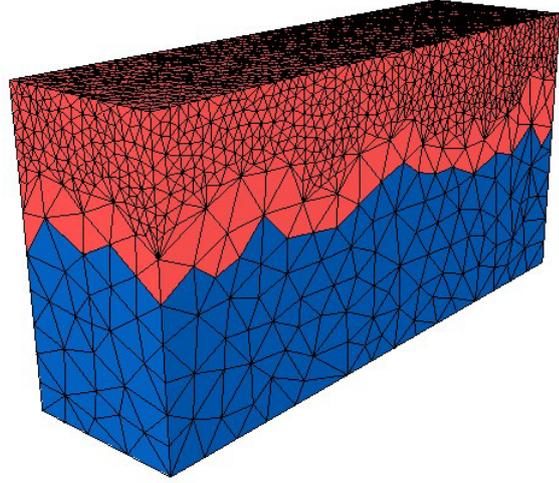
(a) Increment 1



(b) Increment 2



(c) Increment 3



(d) Increment 4

FIG. 1.16 – Raffinement d'une partie de maillage par extraction de topologie

1.4.3 Application à la coulée continue : introduction d'une zone tampon

Dans le cas de la coulée continue d'aciers, que ce soit en lingotière ou en zone de refroidissement secondaire avant la solidification complète, nous pouvons observer une certaine concavité du champ de température quand on regarde une coupe horizontale de la brame où les extrema seront de 900°C et de 1500°C environ selon le type d'acier coulé.

L'utilisation de la stratégie globale instationnaire nous oblige à passer par des étapes de remaillage et donc de transport de l'ancien vers le nouveau maillage. On observe alors une perte d'énergie consécutive à l'interpolation de la température comme peut l'illustrer la figure (FIG. 1.17) : au bout de deux remaillages, le profil du champ de température devient différent du profil initial, d'autant plus si le maillage est grossier.

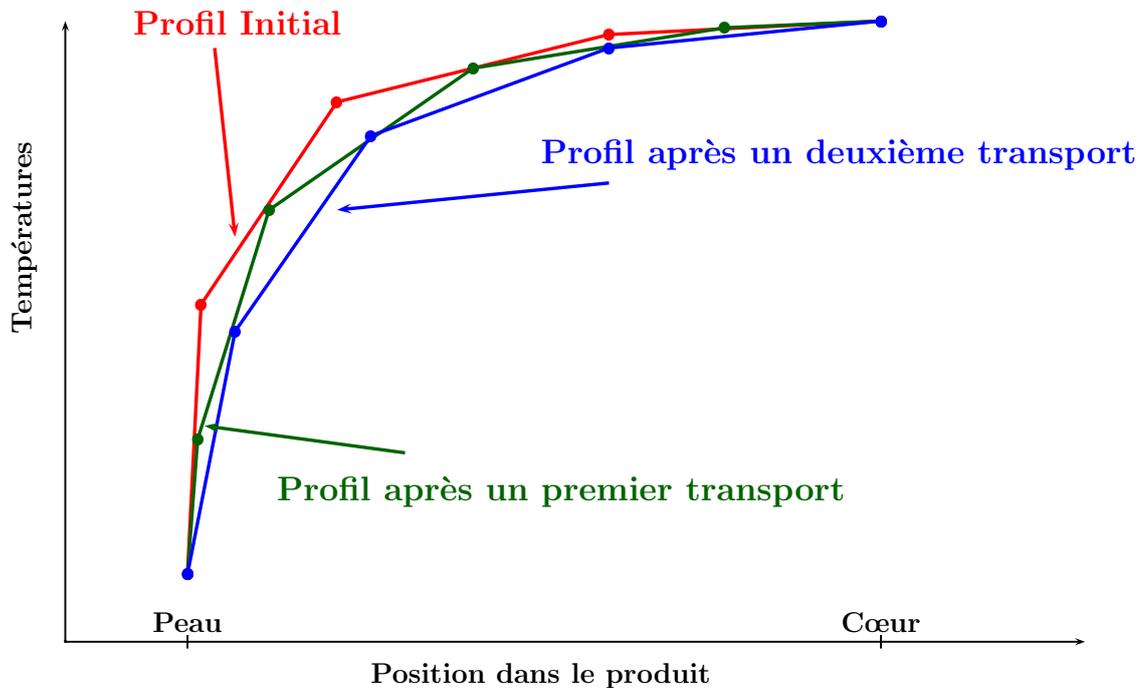


FIG. 1.17 – Comparaison entre profils de température après deux remaillages

Nous venons de décrire le principe de la stratégie adoptée avec l'extraction locale de topologie. Par conséquent le transport associé est lui aussi local et seule la partie extraite du maillage sera concernée par cette perte d'énergie. Nous fixons à L (calcul détaillé un peu plus loin) la longueur du maillage à extraire.

Pour neutraliser le problème du transport de données, nous introduisons une "zone

tampon" dont la hauteur doit être plus grande que celle de la partie sujette à extraction locale, remaillage et transport, notée L . De plus, pour neutraliser son influence sur le calcul, cette "zone tampon" est placée au-dessus de la longueur métallurgique initiale. Par exemple, si on souhaite prendre en compte le début de la solidification dans la lingotière, on place la zone tampon, qui est égale au maillage initial, au dessus du ménisque. La figure (FIG. 1.18) met en pratique cette zone tampon pour un calcul "pseudo-bidimensionnel" détaillé plus loin dans le manuscrit.

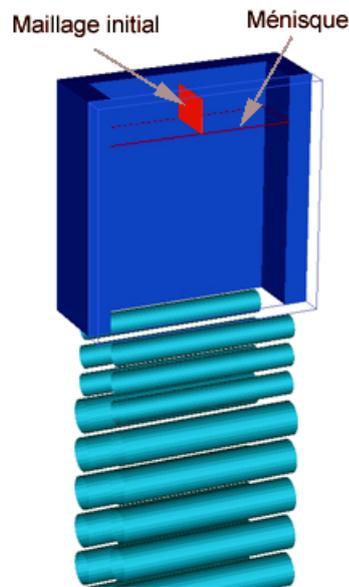


FIG. 1.18 – Zone tampon définie au dessus du ménisque dans le cas d'une approche "pseudo-2D", pour un calcul qui veut prendre en compte le début de la solidification dans la lingotière.

Dans cette zone, la température reste fixe et égale à T_{ini} , la température nominale de coulée. Pour éviter un refroidissement de cette zone, nous imposons une condition d'adiabaticité sur toutes les faces qui sont au dessus de la longueur métallurgique initiale (au dessus du ménisque dans l'exemple choisi).

Discussion sur le calcul de la longueur L On doit être capable de définir la longueur minimale (L) de la partie à remailler afin que le mailleur fournisse des maillages de qualité convenable. Pour cela, il faut au minimum compter 4 bandes d'éléments dont celle dégénérée et celle qui reste fixe. D'autre part, on devine aisément que cette longueur L est fonction de :

- la taille maximale des éléments appartenant à la topologie extraite $H_{\max}(T)$
- la qualité minimale des éléments souhaitée q_{\min} .

Il est difficile d'établir une règle stricte pour déterminer cette longueur L . Cependant à vitesse de coulée donnée et pour un même pas de temps de calcul, on peut remarquer que plus $H_{\max}(T)$ est petite, plus vite le maillage est dégénéré et inversement.

Dans la pratique et en contexte coulée continue, on fixe q_{\min} tel que la taille maximale d'un élément proche de la surface bloquée devient supérieure à 3 fois sa taille d'origine*. Ainsi, la longueur L minimale se déduit d'un rapide calcul :

$$\begin{aligned} L &\geq 3 * H_{\max}(T) + (4 - 1) * H_{\max}(T) \\ &\geq 6 * H_{\max}(T) \end{aligned} \tag{1.33}$$

Dans le cas de maillages non homogènes, seuls les éléments dont la taille est égale à $H_{\max}(T)$ seront pris en compte pour déterminer la longueur de la zone tampon (par extension, la longueur du maillage initial). La fréquence des remaillages dépend plutôt de la dégénérescence des éléments de plus petite taille.

*la taille caractéristique de ces éléments va évoluer au cours du calcul en fonction de la vitesse de coulée et du pas de temps de résolution

Chapitre 2

Modélisation thermomécanique avec le logiciel Theracast[®]

Sommaire

2.1	Introduction	40
2.2	Les équations de conservation	40
2.3	Lois de comportement	41
2.3.1	Loi de comportement pour la thermique	41
2.3.2	Lois de comportement pour la mécanique	42
2.3.2.1	Loi de comportement de type élasto-viscoplastique	45
2.3.2.2	Loi de comportement de type visco-plastique	46
2.4	Conditions aux limites et initiales	46
2.4.1	Pour le problème thermique	47
2.4.2	Pour le problème mécanique	47
2.5	Adaptation du problème thermomécanique à la coulée continue	49
2.5.1	Les différentes géométries de machine de coulée continue	49
2.5.2	Nomenclature de la stratégie globale instationnaire	51
2.5.3	Conditions aux limites pour le problème thermique	52
2.5.3.1	Le refroidissement pariétal	52
2.5.3.2	L'outil d'injection	54
2.5.3.3	Le mannequin	54
2.5.4	Conditions aux limites pour le problème mécanique	54
2.5.4.1	Le contact avec la lingotière et les rouleaux	54
2.5.4.2	L'outil d'injection	55
2.5.4.3	Le mannequin	55

2.1 Introduction

Le logiciel Theracast[®], qui fait partie des codes industriels de fonderie, permet de faire une simulation tridimensionnelle par la méthode des éléments finis des phénomènes thermomécaniques associés à la phase de refroidissement post remplissage des moules. Il permet ainsi de prédire l'évolution du champ de température dans la pièce et les moules, de prévoir les différents phénomènes intervenant au cours de la solidification (mouvements, contraintes internes, lames d'air, ...). La résolution de ce problème est basée sur une décomposition multidomaine du système de refroidissement. Dans ce cas, la pièce et les moules sont associés à des sous-domaines (SD) représentés par des maillages éléments finis indépendants. Ainsi, le problème thermomécanique est résolu sur chacun des sous-domaines où les maillages sont indépendants (non coïncidents aux frontières) tout en tenant compte des différents échanges qui peuvent intervenir au cours de la modélisation.

L'objet de ce chapitre consiste à présenter le problème thermomécanique résolu par le logiciel Theracast[®] et plus particulièrement l'adaptation du logiciel à la coulée continue en utilisant la stratégie globale instationnaire. Ce chapitre rappelle les différentes équations du problème thermomécanique. Nous présenterons les différentes conditions aux limites et initiales utilisées pour la fermeture du problème dans le cas de la coulée continue.

2.2 Les équations de conservation

Lorsque l'hypothèse des milieux continus est vérifiée, nous considérons les sous domaines comme des domaines bornés $\Omega_{i;i=1,\dots,SD}$ régis par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la masse (2.2), de la quantité de mouvement (2.4) et de l'énergie (2.1) [Rappaz *et al.*, 1998]. Dans $\Omega_i(t)$, on a :

- **L'équation de conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H \vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{j}_T) = 0 \quad (2.1)$$

On note ici t la variable temps, H l'enthalpie massique, \vec{v} la vitesse d'écoulement, ρ la masse volumique et \vec{j}_T le vecteur flux de chaleur. Le terme de source interne de chaleur est supposé nul.

- **L'équation de conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.2)$$

qui s'écrit encore :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

- **L'équation de conservation de la quantité de mouvement**, ou l'équation de la dynamique, relie la variation temporelle de la densité massique de quantité de mouvement d'un point matériel à l'ensemble des forces qui s'exercent sur lui :

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.4)$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy et \vec{f} l'ensemble des densités massiques des forces extérieures.

2.3 Lois de comportement

D'un point de vue mathématique, nous disposons de trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est donc nécessaire d'ajouter aux équations de conservation des équations de comportement. En ce qui concerne les équations gouvernant la mécanique, la contrainte est reliée à la déformation et au taux de déformation à l'aide d'une loi de comportement mécanique. Deux relations entre l'enthalpie massique, le flux de chaleur et la température sont données pour la fermeture de l'équation de conservation de l'énergie.

2.3.1 Loi de comportement pour la thermique

L'enthalpie massique H est définie par :

$$H = \int_{T_0}^T c_p(\zeta) d\zeta + f_l(T)L \quad (2.5)$$

où T est la température, T_0 est une température de référence arbitraire, c_p la chaleur massique à pression constante du matériau et L la chaleur massique latente de solidification (supposée constante). Le chemin de solidification, c'est à dire la donnée de la fraction massique du liquide en fonction de la température $f_l(T)$, est supposé connu. Dans la suite du document, nous ferons l'approximation de confondre fraction volumique et fraction massique de chacune des phases, solide et liquide.

On introduit la chaleur massique effective définie par :

$$c_{\text{eff}} = \frac{\partial H}{\partial T} = c_p + L \frac{df_l(T)}{dT} \quad (2.6)$$

qui tient compte de la chaleur latente libérée au cours de la solidification. Au sens de la théorie des distributions, le terme $\frac{df_i(T)}{dT}$ de cette dernière équation (2.6) peut s'apparenter à une masse de Dirac à la température de fusion dans le cas de la solidification pour un corps pur.

D'autre part, le vecteur flux de chaleur par diffusion est donné par une équation similaire à la première loi de Fick (la loi de Fourier) :

$$\vec{j}_T = -k\nabla T \quad (2.7)$$

où k est la conductivité thermique.

On peut alors écrire l'équation (2.1), en utilisant (2.2) et (2.7) :

$$\rho \frac{dH}{dt} - \nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (2.8)$$

ou l'exprimer en fonction de la température T , en faisant intervenir la chaleur massique effective et le fait que $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial T} \frac{dT}{dt}$:

$$\rho c_{\text{eff}} \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (2.9)$$

ou encore :

$$\rho c_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_{\text{eff}} \vec{v} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (2.10)$$

2.3.2 Lois de comportement pour la mécanique

Au cours du refroidissement et plus particulièrement lors de la solidification, le comportement du matériau change. Il va passer par trois états successifs : liquide, pâteux et solide. De nombreux codes utilisent une seule loi de comportement de type élasto-viscoplastique pour simuler l'état du matériau qu'il soit liquide, pâteux ou solide. Dans ce cas, pour négliger les déformations élastiques, on impose que le module de Young du liquide soit élevé. Ce choix, comme le souligne dans sa thèse [Jaouen, 1998], est en contradiction avec les mesures expérimentales obtenues par [Decultieux, 1996] et [Vicente-Hernandez, 1994] où le module de Young à l'état solide décroît avec T et reste de l'ordre du Giga-Pascal pour

des températures proches de la température de solidus. Aussi pour contrer ce problème pouvant avoir des imperfections tant au niveau physique (pas de prise en compte de la convection naturelle) qu'au niveau numérique (gestion du saut de valeur du module de Young entre le liquidus et le solidus), [Jaouen, 1998] propose de faire une modélisation à deux lois de comportement :

- une loi de comportement de type visco-plastique lorsque le matériau est liquide ou pâteux
- et une loi de comportement de type élasto-viscoplastique pour l'état solide.

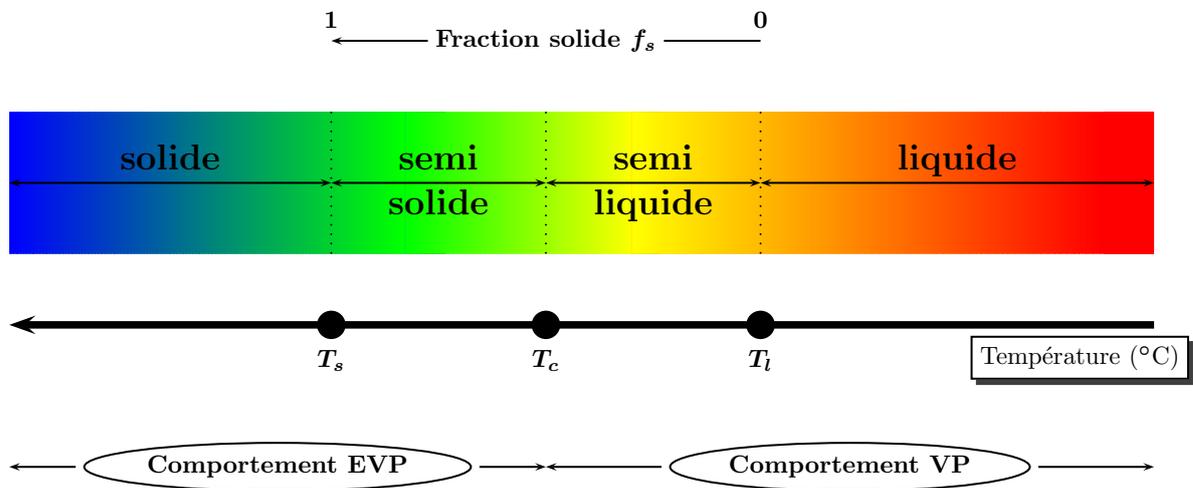


FIG. 2.1 – Comportement du matériau en fonction de son état

Comme le montre la figure (FIG. 2.1), le changement d'une loi de comportement vers l'autre s'opère à une température arbitraire T_c . Le matériau est alors considéré newtonien en phase liquide, visco-plastique en début de solidification et enfin élasto-viscoplastique en fin de solidification et en phase solide. Dans la pratique, on fixera la température de transition entre les lois rhéologiques comme étant égale à la température du solidus ([Jaouen, 1998], [Bellet et Jaouen, 1999]).

Ces lois de comportement doivent tenir compte des variations des différents coefficients rhéologiques (qui peuvent être non négligeables) afin de décrire au mieux les phénomènes issus de la solidification. D'autre part, le matériau subit des dilatations thermiques importantes et non négligeables en particulier à l'état solide ([Kozłowski *et al.*, 1992]). De manière générale, le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$ est alors décomposé linéairement

comme suit :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^* + \dot{\varepsilon}^{th}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}^{vp} & \text{pour la loi de type visco-plastique} \\ \text{avec } \dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^{el} & \text{pour la loi de type elasto-visco-plastique} \\ \dot{\varepsilon}^{th} & \text{le tenseur sphérique des vitesses de dilatation thermique} \end{array} \quad (2.11)$$

Au tenseur des vitesses de dilatation thermique, on ajoute un terme dû à la variation de volume intrinsèque à la solidification entre les températures du liquidus et du solidus. À partir de (2.2) et (2.3), on a pour une transformation ne faisant pas intervenir d'autre source de changement de volume,

$$\mathbf{Tr} \dot{\varepsilon}^{th} = \mathbf{Tr} \dot{\varepsilon} = \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.12)$$

Le tenseur étant sphérique, on a donc

$$\dot{\varepsilon}^{th} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{I} \quad (2.13)$$

\mathbf{I} , la matrice identité.

Remarque : Pour une transformation faisant intervenir l'élasticité, qui est une autre source de déformation volumique, on pourra retenir cette expression de $\dot{\varepsilon}^{th}$ mais en notant qu'alors ρ désigne la masse volumique de la configuration dite "relâchée", c'est-à-dire la configuration courante à laquelle on a "soustrait" la déformation élastique.

- Si $\rho(T)$, cas général, on a :

$$\dot{\varepsilon}^{th} = -\underbrace{\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dT}}_{\alpha} \dot{T} \mathbf{I} = \alpha \dot{T} \mathbf{I} \quad (2.14)$$

$\alpha(T)$ est appelé le coefficient de dilatation thermique.

- Si $\rho(f_s)$, dans l'intervalle de solidification, avec ρ linéaire en f_s conformément à la loi de mélange $\rho = f_s \rho_s + f_l \rho_l = f_s(\rho_s - \rho_l) + \rho_l$ alors :

$$\dot{\varepsilon}^{th} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{df_s} \dot{f}_s \mathbf{I} = -\frac{1}{3} \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho} \dot{f}_s \mathbf{I} \approx \frac{1}{3} \underbrace{\frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_l}}_{\Delta \varepsilon^{tr}} \dot{f}_s \mathbf{I} = \Delta \varepsilon^{tr} \dot{f}_s \mathbf{I} \quad (2.15)$$

$\Delta\varepsilon_{tr}$ représente l'expansion volumique relative constatée lors de la solidification entre les températures du liquidus (T_l) et du solidus (T_s) - variable supposée constante. En général, $\Delta\varepsilon_{tr}$ est négatif, traduisant une contraction ("retrait") lors de la solidification.

Reste maintenant à détailler les différentes lois de comportement pour la mécanique et plus particulièrement le terme $\dot{\varepsilon}^*$

2.3.2.1 Loi de comportement de type élasto-viscoplastique (EVP)

La base du modèle est donc une décomposition additive du tenseur des vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}$. Dans le cadre des petites déformations, nous avons :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{th} \quad (2.16)$$

La partie élastique de $\dot{\varepsilon}$ est reliée à la dérivée temporelle des contraintes par la loi de Hooke, sous sa forme hypoélastique :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}\dot{\varepsilon}^{el} = \frac{E}{1+\nu}\dot{\varepsilon}^{el} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{Tr}(\dot{\varepsilon}^{el})\mathbf{I} \quad (2.17)$$

\mathbf{E} est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 dont les composantes dépendent de E , le module de Young et de ν , le coefficient de Poisson. $\dot{\sigma}$ désigne la dérivée particulière temporelle du tenseur des contraintes de Cauchy σ (cette dérivée, bien que non objective, est admissible dans notre étude, les rotations et déformations incrémentales étant très faibles).

En décomposant le tenseur σ en une partie déviatoire \mathbf{s} et une partie sphérique $-p\mathbf{I}$:

$$\sigma = \mathbf{s} - p\mathbf{I} = \mathbf{s} + \frac{\text{Tr}(\sigma)}{3}\mathbf{I} \quad (2.18)$$

Nous pouvons écrire la partie visco-plastique de $\dot{\varepsilon}$, de trace nulle, en nous référant à un potentiel de viscoplasticité ([Rappaz *et al.*, 1998]). Dans cette étude, nous choisissons un potentiel de type Perzyna et écrivons :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{eq}} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_s}{K(T)\bar{\varepsilon}^n\sqrt{3}} \right\rangle^{\frac{1}{m(T)}} \mathbf{s} \quad (2.19)$$

où $K(T)$ est la consistance du matériau et $m(T)$ la sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation. La fonction qui à x associe $\langle x \rangle$ donne la valeur de x pour $x > 0$ ou 0 sinon.

Dans l'équation (2.19), on peut donc dire qu'il n'y a écoulement plastique que si la contrainte équivalente de von Mises est supérieure au seuil d'écoulement statique σ_s .

Sachant que la contrainte d'écoulement de von Mises est donnée par $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} : \mathbf{s}$ et que la vitesse de déformation généralisée a pour expression $\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^{vp} : \dot{\varepsilon}^{vp}}$, la forme monodimensionnelle de (2.19) s'écrit par :

$$\sigma_{eq} = \sigma_s + K(T) \sqrt{3}^{m(T)+1} \dot{\bar{\varepsilon}}^{m(T)} \bar{\varepsilon}^{n(T)} \quad (2.20)$$

Cette loi combine donc les influences de la vitesse de déformation et de l'écroutissage sous une forme multiplicative ($\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} d\tau$ est la déformation plastique cumulée).

2.3.2.2 Loi de comportement de type visco-plastique (VP)

Celle-ci dérive de la loi de comportement EVP, en annulant la contrainte seuil σ_s et en faisant tendre vers l'infini le module de compressibilité donné par $\chi = \frac{E}{3(1-2\nu)}$. Les déformations d'origine élastique sont alors négligées et les équations de la loi de comportement VP peuvent alors s'écrire de la façon suivante :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^{th} \quad (2.21)$$

Nous nous plaçons dans le cadre de la loi de Norton-Hoff et on a :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{2K_{vp}(T)} \left(\sqrt{3} \dot{\bar{\varepsilon}} \right)^{1-m(T)} \mathbf{s} \quad (2.22)$$

où $K_{vp}(T)$ désigne la consistance visco-plastique à la température T .

On peut écrire l'équation (2.22) avec les invariants :

$$\sigma_{eq} = K_{vp}(T) \sqrt{3}^{m(T)+1} \dot{\bar{\varepsilon}}^{m(T)} \quad (2.23)$$

Remarque : Dans l'équation (2.22), quand $m(T) = 1$, on retrouve l'expression du tenseur des taux de déformation newtonien. Ceci correspond à l'état purement liquide de l'alliage, pour lequel K_{vp} est donc égal à la viscosité dynamique.

2.4 Conditions aux limites et initiales

Pour que le système d'équations (2.9) et (2.4) soit bien posé, il convient d'y ajouter des conditions aux limites adéquates. La nature parabolique des équations de conservation nécessite une condition initiale et des conditions aux limites sur la frontière $\Gamma_{i;i=1,\dots,SD}$ de $\Omega_{i;i=1,\dots,SD}$, respectivement.

2.4.1 Pour le problème thermique

Les conditions aux limites résultant des interactions avec l'extérieur s'appliquent sur toute ou une partie de la surface extérieure. Elles sont de plusieurs types :

- Condition de type **flux imposé** (flux extrait sortant de signe positif) :

$$-k\nabla T \cdot \vec{n} = \Phi_{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma_{i,1} \quad (2.24)$$

où \vec{n} est la normale sortante. Si le flux est nul ($\Phi_{\text{imp}} = 0$), on parle alors de *condition adiabatique*.

- Condition de type **convection et/ou rayonnement** avec l'extérieur :

$$-k\nabla T \cdot \vec{n} = h(T - T_{\text{ext}}) \quad \text{sur } \Gamma_{i,2} \quad (2.25)$$

où $h = h_{cv} + \varepsilon_r \sigma_r (T + T_{\text{ext}})(T^2 + T_{\text{ext}}^2)$ est le coefficient d'échange thermique. h_{cv} est le coefficient de transfert par convection. ε_r est l'émissivité du matériau, supposé ici de type corps gris, ($0 < \varepsilon_r < 1$). $\sigma_r = 5.66961 \cdot 10^{-8} \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan, T_{ext} la température extérieure.

- Condition de type **température imposée** (condition de Dirichlet)

$$T = T_{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma_{i,3} \quad (2.26)$$

- **L'échange thermique** entre sous domaines est défini par la relation :

$$-k\nabla T \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_{ij}}(T - T_j^s) \quad \text{sur } \Gamma_{ij} \quad (2.27)$$

où $h_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$ ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) est le coefficient de transfert entre les sous domaines Ω_i (R_{ij} est la résistance thermique de contact) et Ω_j et T_j^s est la température de surface du sous-domaine Ω_j en vis-à-vis.

Il est de plus nécessaire de donner une **condition initiale en température** :

$$T(x, t = 0) = T_{\text{ini}}(x) \quad \text{sur } \Omega_i \quad (2.28)$$

2.4.2 Pour le problème mécanique

En ce qui concerne la fermeture du problème mécanique, on décompose la frontière Γ_i du domaine Ω_i par :

$$\Gamma_i = \Gamma_{i,\tau} \cup \Gamma_{i,v} \cup \Gamma_{i,c} \cup \Gamma_{i,F} \quad (2.29)$$

où l'intersection entre chacune de ces sous parties de la frontière est vide. On différencie alors :

- $\Gamma_{i,\tau}$, la surface où l'on **impose une contrainte** :

$$\sigma \vec{n} = \vec{\tau}_{\text{imp}} \quad (2.30)$$

\vec{n} représente la normale sortante de la frontière du domaine étudié.

- $\Gamma_{i,v}$, la surface où on a des conditions **imposées en vitesse** (*condition de Dirichlet*) :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{imp}} \quad (2.31)$$

- $\Gamma_{i,c}$, **la surface en contact**. La force surfacique de réaction avec l'outil (autre sous domaine) se décompose en une composante normale appelée vecteur contrainte normale, $\tau_n = \sigma_n \vec{n} = (\sigma \vec{n}) \cdot \vec{n} \vec{n}$ et une partie tangentielle appelée cission de frottement $\vec{\tau}_f = \sigma \vec{n} - \vec{\tau}_n$:

$$\sigma \vec{n} = \vec{\tau}_n + \vec{\tau}_f \quad (2.32)$$

Le terme $\sigma_n = \sigma \vec{n} \cdot \vec{n}$ est appelé contrainte normale. Généralement, le vecteur cission de frottement est défini en fonction de la vitesse par une loi de frottement : $\tau_f = \tau_f(\vec{v}, \vec{v}_{\text{outil}}, \sigma_n)$, ou éventuellement pris nul pour un contact "parfaitement glissant". Cette loi peut être de type Coulomb ou de type viscoplastique selon le cas étudié.

Les conditions de **contact unilatéral** de Signorini doivent alors être vérifiées :

$$(\vec{v} - \vec{v}_{\text{outil}}) \cdot \vec{n} \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_{i,c} \quad (2.33)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_{i,c} \quad (2.34)$$

$$((\vec{v} - \vec{v}_{\text{outil}}) \cdot \vec{n}) \cdot \sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{i,c} \quad (2.35)$$

Ces conditions de non-pénétration sont une conséquence à l'interface de la conservation de masse. Ces équations peuvent s'écrire de manière suivante sur $\Gamma_{i,c}$:

$$[(\sigma_n = 0) \text{ et } ((\vec{v} - \vec{v}_{\text{outil}}) \cdot \vec{n} < 0)] \quad \text{ou} \quad [(\sigma_n < 0) \text{ et } ((\vec{v} - \vec{v}_{\text{outil}}) \cdot \vec{n} = 0)] \quad (2.36)$$

Lorsqu'il y a égalité dans l'équation (2.33), on parle de **contact bilatéral** : il ne peut y avoir de décollement entre la pièce et l'outil.

- $\Gamma_{i,F}$, **la surface libre** sur laquelle on a $\tau_f = 0$ et $\sigma_n = -P_{\text{atmos}} = 0$, en négligeant la pression atmosphérique devant les autres contraintes. La vitesse est donc inconnue sur cette surface.

2.5 Adaptation du problème thermomécanique à la coulée continue

Nous souhaitons construire un logiciel applicable à différents procédés de coulée continue. Il est donc important de développer une formulation s'adaptant aux différentes géométries de machine qui, comme nous le verrons, jouent un rôle important sur le comportement thermomécanique du produit coulé.

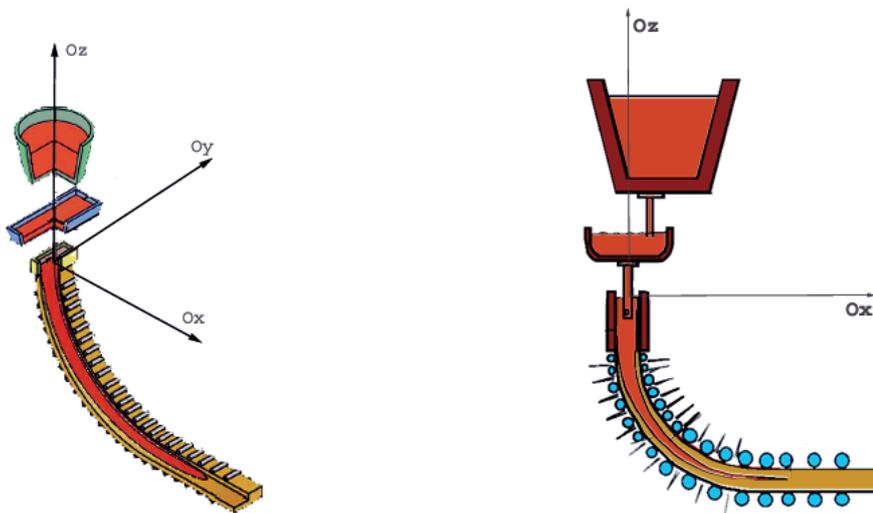
2.5.1 Présentation des différentes géométries de machine de coulée continue

On recense différents types de machines :

- Les machines traditionnelles ont pour origine **la coulée continue droite** où le produit est coulé, extrait et découpé à la verticale. l'inconvénient majeur de ce type de machine est sa hauteur excessive lorsque l'on cherche à obtenir des productions élevées, inconvénient majeur lorsque le laminoir réclame des demi-produits de grande longueur.
- Pour diminuer cette hauteur, on a cherché à courber le produit après solidification et extraction de façon à effectuer la coupe à l'horizontale : c'est **la machine verticale cintrée** (quasiment disparue de nos jours).
- Puis, toujours dans un souci de diminuer cette hauteur, on est passé à des machines où la courbure est donnée dès la lingotière, on parle alors dans ce cas de **machine courbe** (beaucoup plus répandue).
- Enfin, dans le but de réduire les efforts de décintrage, on a remplacé le rayon de courbure unique par plusieurs rayons, de plus en plus grands, se raccordant de façon continue : c'est **la machine courbe à rayons multiples**.
- On peut rajouter une dernière catégorie qui est la combinaison de plusieurs types de machines. Dans un souci de qualité, il n'est pas rare de trouver des machines où la lingotière est droite et la courbure ne commence qu'à environ 1,5 m au-dessous de celle-ci ; c'est **la machine courbe à lingotière droite**.

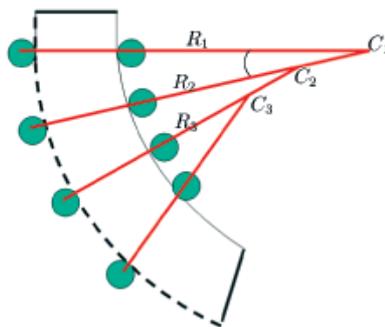
L'objectif est donc de prendre en compte tous ces types de machines. Pour cela nous avons mis en place une convention suffisamment souple pour connaître la position des différents rouleaux de guidage et les différentes zones verticale, horizontale ou courbe :

- 1) On suppose que la coulée s'effectue dans un même plan $\mathcal{P} = (Ox, Oz)$. On retrouve le sens de coulée d'une machine représentée en 3D sur une coupe 2D, (FIG. 2.2(b))
- 2) L'origine du plan \mathcal{P} se situe au niveau du ménisque, dans la lingotière.
- 3) Chaque zone de courbure est définie par un centre de courbure dans \mathcal{P} , un rayon de courbure et un angle de courbure. Ces courbures sont liées entre elles pour assurer une certaine continuité dans la machine, (FIG. 2.2(c)).



(a) Coupe 3D

(b) Coupe 2D, plan de coulée : $\mathcal{P} = (Ox, Oz)$



(c) Zones de courbure successives définies dans le plan \mathcal{P}

FIG. 2.2 – Paramètres géométriques d'une machine de coulée continue

- 4) Un rayon de courbure infini pour une zone indique que celle-ci est droite (verticale ou horizontale).
- 5) Une machine de coulée continue peut-être soit verticale (en général utilisée pour la coulée de bloom ou de billette), soit verticale puis courbe puis horizontale, soit seulement courbe puis horizontale (pour la coulée de brame).
- 6) Chaque rouleau est déterminé par son centre et son rayon, le vecteur directeur de l'axe du rouleau dans (Ox, Oy, Oz) et par sa longueur. On pourra remarquer qu'en coulée de brames, les rouleaux sont parallèles à la direction Oy , ce qui n'est pas le cas en coulée de blooms ou de billettes.

Ainsi, la longueur parcourue par le produit dans la machine de coulée, plus communément appelé **longueur métallurgique** (terme que nous emploierons tout au long de ce manuscrit), prendra en compte tous ces changements de courbure.

2.5.2 Nomenclature de la stratégie globale instationnaire

Comme nous l'avons précisé dans la première partie de ce manuscrit, la stratégie globale instationnaire consiste à modéliser le procédé de coulée continue comme si l'on se trouvait dans sa phase d'amorçage. Le produit est alors alimenté en métal liquide depuis la lingotière et est tracté dans la zone de refroidissement secondaire à l'aide d'un outil. La figure (FIG. 2.3) représente les différents outils qui vont nous servir à mettre en œuvre cette stratégie.

À la surface du produit discrétisé en éléments finis, on identifie des groupes de faces sur lesquels seront appliqués différentes conditions aux limites que nous détaillerons plus loin, pour la fermeture des problèmes mécanique et thermique.

L'outil d'injection : représenté par le groupe de faces **bleu** dans la figure (FIG. 2.3), il permet de simuler continuellement l'apport de matière dans la machine.

La lingotière : elle est modélisée à l'aide d'un ou plusieurs sous domaines selon sa complexité. C'est dans la lingotière que le refroidissement est le plus brutal afin de créer une peau assez solide pour contenir le métal liquide.

Les rouleaux : ils délimitent le chemin de solidification secondaire et guident la brame dans la machine. Nous nous limitons aux rouleaux de guidage sans tenir compte de leur motorisation ni leur résistance au roulement. Dans notre étude chaque rouleau est assimilé à un obstacle fixe sur lequel la brame glisse sans frottement.

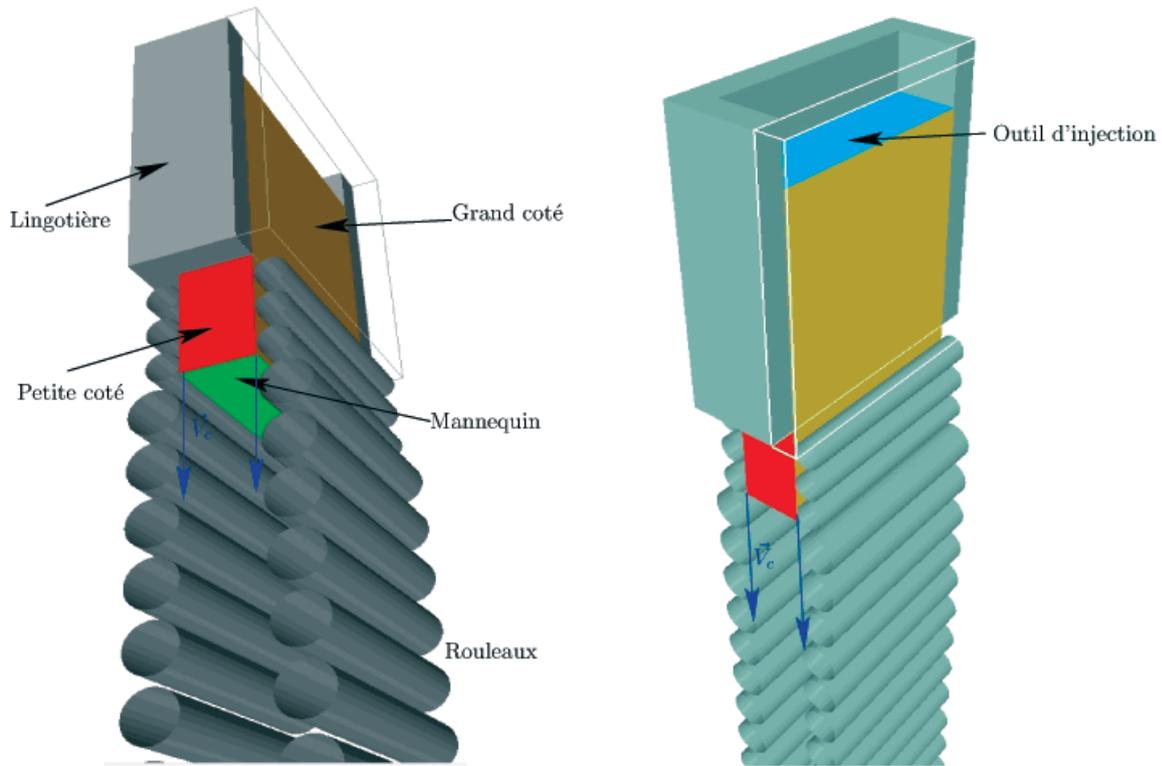


FIG. 2.3 – Définitions des différents éléments géométriques utilisés lors de la modélisation avec une approche globale instationnaire. Illustration pour une coulée de brames.

Le mannequin : Cet outil fictif, représenté par le groupe de faces vert dans la figure (FIG. 2.3), permet de tracter la brame dans la machine à une vitesse de coulée donnée. Il faut remarquer que cet outil ne représente pas le mannequin utilisé par les industriels lors de la phase d'amorçage d'une machine de coulée.

2.5.3 Conditions aux limites pour le problème thermique

2.5.3.1 Le refroidissement pariétal

Au cours de son évolution dans la machine, le produit (brame, bloom ou billette) va être refroidi soit lors de son contact avec la lingotière, soit par aspersion d'eau. Pour décrire ce refroidissement pariétal de la brame, nous supposons qu'il peut être moyenné par zone. Ainsi, l'IRSID est en mesure de nous fournir entre différentes longueurs métallurgiques des données caractéristiques de l'intensité du refroidissement. Le tableau (2.1) donne un exemple de données fournies pour le cas d'une machine de coulée de brames de Dunkerque.

Type de refroidissement	Longueur métallurgique (cm)	Flux (type=1) W.cm^{-2} ou h (type=2) $\text{W.K}^{-1}.\text{cm}^{-2}$ ou ε_r (type=3)
1	47	130.00
2	70	0.0500
2	103.5	0.0420
2	196.	0.0330
2	294.5	0.0283
2	448.5	0.0285
2	622.	0.0232
2	799.5	0.0260
2	1200.	0.0222
2	1675.	0.0213
2	2975.	0.0200

TAB. 2.1 – Conditions aux limites pariétales (grand côté) pour une machine de Dunkerque.

De manière générale, on suppose que l'échange de chaleur au niveau de la lingotière est uniforme et peut-être modélisé avec une condition de type flux extrait (2.24) (type 1). Le refroidissement par aspersion d'eau, le contact thermique avec les cylindres et le rayonnement seront modélisés par une condition de type convection et/ou rayonnement (2.25) (type 2 pour convection et type 3 pour le rayonnement seul). Une conséquence est que l'on ne calcule pas la signature thermique du contact de chaque rouleau de soutien. Dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle, ces conditions peuvent être différentes que l'on soit sur le grand côté (entre les rouleaux) ou que l'on soit sur le petit côté à longueur métallurgique donnée.

Remarque : Dans le cas d'une étude plus fine pour étudier le comportement du produit en début de solidification, on peut utiliser l'échange thermique entre la lingotière et le produit défini par la condition (2.27) plus précise qu'une valeur moyennée.

Concernant, la zone tampon introduite dans la partie précédente, nous rajoutons une zone de refroidissement supplémentaire (ajout transparent pour l'utilisateur) dans laquelle la condition d'adiabaticité est imposée (flux nul). Cette zone de refroidissement est de longueur L , celle du maillage initial. Rappelons qu'après chaque remaillage, la température de cette zone reste fixe et égale à la température de l'outil d'injection.

2.5.3.2 L'outil d'injection

Au niveau de l'outil de l'injection, on utilise une condition de type température imposée, (2.26), afin de rendre compte de l'alimentation continue du matériau dans la machine de coulée continue. Une carte de température peut être utilisée en fonction de la position de cet outil d'injection dans la machine.

2.5.3.3 Le mannequin

Le mannequin est supposé adiabatique, de flux nul. A priori, on pourrait penser que cette hypothèse, bien que discutable, est justifiée par la présence de faibles gradients thermiques dans la direction de la coulée et plus particulièrement dans la zone de refroidissement secondaire. Cependant, plusieurs études en lingotière dont celle faite par [Huespe *et al.*, 2000] ont montré que le gradient de température dans le sens de coulée n'était pas négligeable. Une alternative consisterait donc à imposer un flux donné qui devrait évoluer en fonction de la position du mannequin dans la machine.

Remarquons que dans notre cas, nous ne cherchons pas à calculer l'état thermomécanique de la phase transitoire d'amorçage de la coulée. L'objectif est d'obtenir le plus rapidement possible en chaque point de la machine le régime thermomécanique stationnaire. En conséquence, la condition d'adiabaticité semble la plus appropriée.

2.5.4 Conditions aux limites pour le problème mécanique

2.5.4.1 Le contact avec la lingotière et les rouleaux

Le contact du produit coulé avec la lingotière ou avec les rouleaux est supposé unilatéral et on néglige les frottements au niveau de la lingotière dans notre étude. Le contact dans la lingotière est exprimé de façon classique en utilisant les conditions de Signorini définies par (2.33), (2.34) et (2.35).

Le fait que la matière ne doive pas pénétrer ces rouleaux se traduit par la condition suivante : *Pour tout point matériel M en surface du produit et pour tout cercle de centre C_r et de rayon R_r "désignant" le rouleau r , on a alors la relation : $\|C_r M\| \geq R_r$.* Le traitement spécifique du contact avec les rouleaux sera détaillé dans le chapitre suivant lors de la résolution du problème thermomécanique.

Pour différencier ces deux zones de contact, nous décomposerons Γ_c en deux par :

$$\begin{aligned} \Gamma_c &= \Gamma_l \cup \Gamma_r && \text{pour l=lingotière} \\ \Gamma_l \cap \Gamma_r &= \emptyset && \text{et r=rouleaux} \end{aligned}$$

2.5.4.2 L'outil d'injection

On néglige l'écoulement induit de la busette qui alimente la machine en produit. Dans le cas où la simulation est initiée depuis la lingotière, les faces en contact avec l'outil d'injection sont soumises à une certaine contrainte normale. Compte tenu de l'utilisation d'une zone tampon de longueur L , pour avoir une pression hydrostatique rigoureusement nulle au ménisque ($z = 0$), nous supposons sur les faces d'injection une contrainte normale positive :

$$\sigma \vec{n} = \rho g L \vec{n} \quad (2.37)$$

Pour une longueur de zone tampon $L = 0.3$ m, en prenant $\rho \approx 8000$ kg.m⁻³ et $g = 10$ m.s⁻², cette contrainte normale vaut 24000 Pa. On pourra donc la négliger en première approximation pour notre étude centrée sur le refroidissement secondaire. À l'inverse, pour une étude de formation de lame d'air en lingotière, cette approximation devrait être évitée.

2.5.4.3 Le mannequin

Au niveau du mannequin, on impose une condition de type vitesse imposée (2.31) dont les composantes évoluent en fonction de la vitesse de coulée \vec{V}_c et de la courbure de la machine. Les trois composantes de la vitesse sont imposées sur l'ensemble des nœuds appartenant à ce groupe de face. Le contact avec le mannequin est donc de type bilatéral collant.

On remarque que c'est au niveau du mannequin que le débit de matière est imposé. Au ménisque, seule une condition en contrainte est appliquée. De cette façon, le champ de vitesse au ménisque va s'ajuster de lui-même afin de satisfaire la conservation globale de la masse, en tenant compte notamment des retraites thermiques tout au long du refroidissement.

Chapitre 3

Résolution numérique du problème thermomécanique

Sommaire

3.1	Formulation forte du problème thermomécanique à résoudre	58
3.2	Résolution découplée du problème thermomécanique	59
3.3	Résolution du problème thermique \mathcal{T}	59
3.3.1	Formulation faible et discrétisation spatiale	59
3.3.2	Discrétisation temporelle	61
3.4	Résolution du problème mécanique \mathcal{M}	63
3.4.1	Formulation faible et discrétisation temporelle	63
3.4.2	Gestion incrémentale du contact unilatéral	65
3.4.2.1	Contact avec la lingotière	65
3.4.2.2	Contact avec les rouleaux de soutien	66
3.4.3	Discrétisation spatiale	69
3.4.3.1	Expression des termes du contact avec les cylindres	72
3.4.3.2	Adaptation locale du facteur de pénalisation	74
3.4.3.3	Homogénéisation du système en vitesse-pression	80
3.4.3.4	Algorithme de résolution	82
3.4.3.5	Recherche linéaire	82

3.1 Formulation forte du problème thermomécanique à résoudre

Résumons, ci-dessous, les équations régissant le problème thermomécanique $\forall t \in]0, \mathfrak{t}[$. Ces équations ont été établies au chapitre précédent, où les conditions initiales et aux limites ont été également présentées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_{\text{eff}} \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \\ T(x, 0) = T_{\text{ini}}(x) \quad \forall x \in \Omega_i \\ -k \nabla T \cdot \vec{n} = \Phi_{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma_{i,1} \\ -k \nabla T \cdot \vec{n} = h(T - T_{\text{ext}}) \quad \text{sur } \Gamma_{i,2} \\ T = T_{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma_{i,3} \\ -k \nabla T \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_{ij}}(T - T_j^s) \quad \text{sur } \Gamma_{ij} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \sigma + \rho \vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{dans } \Omega_i \\ \sigma = \mathbf{s} - p \mathbf{I} \text{ avec } p = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \text{ et } \mathbf{s} \text{ défini selon une loi de comportement EVP ou VP} \\ \vec{\tau}_{\text{imp}} = \sigma \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{i,\tau} \\ \vec{v} = \vec{v}_{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma_{i,v} \\ [(\sigma_n = 0) \text{ et } ((\vec{v} - \vec{v}_{\text{outil}}) \cdot \vec{n} < 0)] \text{ ou } [(\sigma_n < 0) \text{ et } ((\vec{v} - \vec{v}_{\text{outil}}) \cdot \vec{n} = 0)] \quad \text{sur } \Gamma_{i,l} \\ \|C_{\text{r}} M\| \geq R_{\text{r}} \quad \text{sur } \Gamma_{i,\text{r}} \\ \vec{\tau}_f = \tau_f(\vec{v}, \vec{v}_{\text{outil}}, \sigma_n) \quad \text{sur } \Gamma_{i,c} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Afin de simplifier les écritures, on note \mathcal{T} le problème thermique issu de (3.1) et

\mathcal{M} le problème mécanique issu (3.2) dans lesquels on retrouve les inconnues qui sont la température T et le vecteur vitesse \vec{v} .

3.2 Résolution découplée du problème thermomécanique

Les problèmes mécanique et thermique sont couplés et supposent donc de résoudre un système non linéaire, à l'instant t_n , sous la forme :

$$\text{Sur } \Omega^{t_{n-1}} \quad \begin{cases} \mathcal{T}(T^{t_n}, v^{t_n}) = 0 \\ \mathcal{M}(T^{t_n}, v^{t_n}) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Or la résolution couplée de ces deux problèmes est possible mais compliquée (présence de termes croisés). On préfère découpler les problèmes en considérant que les termes couplés sont d'ordre supérieur. Finalement la résolution du problème thermomécanique incrémental se fera selon l'algorithme suivant :

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ✓ Boucle sur les incréments de temps ✓ $\Omega^{t_{n-1}}$ est connu ✓ Résolution du problème \mathcal{T} ✓ Résolution du problème \mathcal{M} ✓ Actualisation de Ω selon le schéma | $x^{t_n} = x^{t_{n-1}} + \Delta t v^{t_n}$ |
|---|--|

3.3 Résolution du problème thermique \mathcal{T}

3.3.1 Formulation faible et discrétisation spatiale

Mis sous forme faible, le problème thermique \mathcal{T} devient :

Trouver le champ de température $T \in \mathcal{V}$ tel que, $\forall T^* \in \mathcal{W}$:

$$\int_{\Omega_i} \rho c_{\text{eff}} \frac{dT}{dt} T^* dV + \int_{\Omega_i} k \nabla T \cdot \nabla T^* dV + \int_{\Gamma_{i,2}} h T T^* dS + \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{R_{ij}} T T^* dS = - \int_{\Gamma_{i,1}} \Phi_{\text{imp}} T^* dS + \int_{\Gamma_{i,2}} h T_{\text{ext}} T^* dS + \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{R_{ij}} T_j^s T^* dS \quad (3.4)$$

où $\mathcal{V} = \{T \in H^1(\Omega_i) / T = T_{\text{imp}} \text{ sur } \Gamma_{i,3}\}$ et $\mathcal{W} = \{T \in H^1(\Omega_i) / T = 0 \text{ sur } \Gamma_{i,3}\}$ sont les espaces des fonctions test correctement choisis.

Le problème thermique est résolu par la méthode des éléments finis. Les éléments utilisés pour mailler les sous-domaines sont de type tétraèdre linéaire P1 dont une représentation est donnée par la figure (FIG. 3.1).

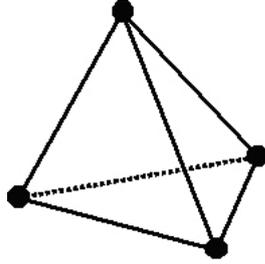


FIG. 3.1 – Représentation de l'élément fini de type P1

Les éléments tétraèdres sont utilisés et les variables inconnues sont interpolées, à un instant t donné, à l'aide des fonctions de base $\{N_n, n=1\dots Nbnoe\}$:

$$T_h(x) = \sum_{n=1}^{Nbnoe} N_n(x)T_n \quad (3.5)$$

où l'indice h signifie variable discrète, $Nbnoe$ le nombre de nœuds de la discrétisation spatiale du domaine Ω_i

En remplaçant les fonctions test par les fonctions de base $\{N_n, n=1\dots Nbnoe\}$, l'assemblage des équations sur tout le maillage conduit à un système discret, d'inconnu le vecteur $T = \{T_1 \dots T_{Nbnoe}\}$, qui peut se mettre sous la forme :

$$C \frac{dT}{dt} + KT = Q \quad (3.6)$$

Comme les paramètres thermiques sont supposés dépendre de la température : la matrice C de capacité, la matrice K de conductivité et le vecteur chargement Q dépendent de T et donc le problème à résoudre est non-linéaire. Donnons le détail des matrices C et K et du vecteur Q :

$$C_{nm} = \sum_e^{Nbelt} \left\{ \int_{\Omega_i^e} \rho c_{\text{eff}} N_n N_m dV \right\} \quad (3.7)$$

$$K_{nm} = \sum_e^{Nbelt} \left\{ \int_{\Omega_i^e} k \nabla N_n \cdot \nabla N_m dV + \int_{\Gamma_{i,2}^e} h N_n N_m dS + \int_{\Gamma_{ij}^e} \frac{1}{R_{ij}} N_n N_m dS \right\} \quad (3.8)$$

$$Q_n = \sum_e^{Nbelt} \left\{ - \int_{\Gamma_{i,1}^e} \Phi_{\text{imp}} N_n dS + \int_{\Gamma_{i,2}^e} h T_{\text{ext}} N_n dS + \int_{\Gamma_{ij}^e} \frac{1}{R_{ij}} T_j^s N_n dS \right\} \quad (3.9)$$

Le calcul de c_{eff} issu de (2.6) peut être assez délicat et plus particulièrement dans l'intervalle de solidification où on peut observer un saut à cause de la présence de la chaleur latente. [Lemmon, 1979] propose une régularisation spatiale du type :

$$\rho c_{\text{eff}} \approx \frac{\|\nabla H\|}{\|\nabla T\|} \quad (3.10)$$

où l'on suppose que l'enthalpie H est interpolé de la même manière que le champ de température T . Dans ce cas (3.10) devient constante par élément, ce qui nous permet de simplifier l'écriture de (3.7) :

$$\text{Sur chaque élément } e, \text{ on a : } C_{nm}^e = \rho c_{\text{eff}} \int_{\Omega_e} N_n N_m dV \quad (3.11)$$

3.3.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation est effectuée à un instant $t^* \in [t_{n-1}, t_n]$ afin de rendre le schéma plus stable et plus consistant que si on avait cherché à résoudre le problème faible à l'instant t_{n-1} , [Soyris, 1990] :

$$t^* = \alpha_1 t_{n-2} + \alpha_2 t_{n-1} + \alpha_3 t_n \quad \text{et} \quad T^* = \alpha_1 T^{t_{n-2}} + \alpha_2 T^{t_{n-1}} + \alpha_3 T^{t_n} \quad (3.12)$$

où les coefficients α_1 , α_2 et α_3 sont arbitraires et leur somme est égale à 1.

Les mêmes pas de discrétisation temporelle sont utilisés pour le problème mécanique et pour le problème thermique afin de n'utiliser qu'un seul maillage. La dérivée par rapport au temps est discrétisée par un schéma à deux pas :

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{\partial T^*}{\partial t} = (1 - \gamma_2) \frac{T^{t_{n-1}} - T^{t_{n-2}}}{t_{n-1} - t_{n-2}} + \gamma_2 \frac{T^{t_n} - T^{t_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}} \quad (3.13)$$

En pratique, nous utiliserons un schéma de type Euler implicite à un pas. Dans ce cas, on a la simplification de l'équation (3.13) par :

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{T^{t_n} - T^{t_{n-1}}}{\Delta t} \quad \Delta t = t_n - t_{n-1} \text{ constant } \forall n. \quad (3.14)$$

Le système matriciel à résoudre à l'instant $t^* \in [t_{n-1}, t_n]$ est :

$$R(T^*) = C \frac{T^{t_n} + T^{t_{n-1}}}{\Delta t} + K T^{t_n} - Q = 0 \quad (3.15)$$

La dépendance en température des matrices du système non linéaire discret (3.15) rendent l'utilisation de cette formule fastidieuse. Une technique de linéarisation proposée par [Zlamal, 1971] peut être utilisée comme le suggère [Menai, 1995]. Après plusieurs manipulations, on obtient finalement le système discret sous la forme :

$$AT^{t_n} = B \quad (3.16)$$

Toutefois, dans le cas de la solidification, le système (3.15) peut être fortement non-linéaire (problème de conservation d'énergie). [Fachinotti et Bellet, 2004] propose de le résoudre à l'aide d'une méthode de type Newton-Raphson. On détermine le champ de température à l'itération (k) par : $T^{(k+1)} = T^{(k)} + \Delta T^{(k)}$ où $\Delta T^{(k)}$ est solution du système linéaire suivant :

$$R^{(k)} + \left[\frac{dR}{dT} \right]^{(k)} \Delta T^{(k)} = 0 \quad (3.17)$$

où $\frac{dR}{dT}$ la matrice tangente (ou jacobien).

3.4 Résolution du problème mécanique \mathcal{M}

3.4.1 Formulation faible et discrétisation temporelle

La multiplication de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (2.4) par un champ de vitesse virtuelle $v^* \in \mathcal{V}^0 = \{v, v \in (H^1(\Omega_i))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_{i,v}\}$, puis une intégration par partie sur le domaine Ω_i permet d'écrire la forme faible de l'équation d'équilibre, appelée *Principe des Puissances virtuelles*, sous forme mixte vitesse/pression. On pose :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \{v, v \in (H^1(\Omega_i))^3, v = v_{\text{imp}} \text{ sur } \Gamma_{i,v}\} \\
 \mathcal{V}^0 &= \{v, v \in (H^1(\Omega_i))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_{i,v}\} \\
 \mathcal{V}_{\text{ca}} &= \{v, v \in \mathcal{V}, (v - v_{\text{outil}}) \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_{i,l} \text{ et } \|C_r M\| \geq R_r \text{ sur } \Gamma_{i,r}\} \\
 \mathcal{V}_{\text{ca}}^0 &= \{v, v \in \mathcal{V}^0, (v - v_{\text{outil}}) \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_{i,l} \text{ et } \|C_r M\| \geq R_r \text{ sur } \Gamma_{i,r}\} \\
 \mathcal{P} &= L^2(\Omega_i)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Trouver $(v, p) \in \mathcal{V}_{\text{ca}} \times \mathcal{P}$ vérifiant l'équation d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega_i} \mathbf{s} : \dot{\varepsilon}^* dV - \int_{\Omega_i} p \nabla \cdot v^* dV + \int_{\Omega_i} \rho \frac{dv}{dt} \cdot v^* dV - \int_{\Omega_i} \rho g \cdot v^* dV \\
 - \int_{\Gamma_{i,\tau}} \tau_{\text{imp}} \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_{i,c}} \tau_f \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_{i,c}} \tau_n \cdot v^* dS = 0 \quad \forall v^* \in \mathcal{V}_{\text{ca}}^0 \\
 \int_{\Omega_i} p^* \mathbf{Tr}(\dot{\varepsilon}^{vp}) dV = 0 \quad \forall p^* \in \mathcal{P}
 \end{array} \right. \tag{3.19}$$

La variable pression p apparaît comme un multiplicateur de Lagrange de la contrainte plastique d'incompressibilité. Ainsi, le terme de l'intégrale de la seconde équation dans (3.19) changera selon l'état local du matériau (*i.e.* en fonction de la température locale). Dans le cas où le matériau est solide (comportement élasto-viscoplastique (2.16)), on aura :

$$\mathbf{Tr} \dot{\varepsilon}^{vp} = \mathbf{Tr} \dot{\varepsilon} - \mathbf{Tr} \dot{\varepsilon}^{el} - \mathbf{Tr} \dot{\varepsilon}^{th} = \nabla \cdot v + \frac{3(1-2\nu)}{E} \dot{p} - 3\alpha(T) \dot{T} - \dot{f}_s \Delta \varepsilon^{tr} \tag{3.20}$$

Alors que dans le cas où le matériau est pâteux ou liquide, où il n'y a pas de contribution élastique (comportement élasto-viscoplastique (2.21)), on aura :

$$\mathbf{Tr} \dot{\varepsilon}^{vp} = \mathbf{Tr} \dot{\varepsilon} - \mathbf{Tr} \dot{\varepsilon}^{th} = \nabla \cdot v - 3\alpha(T) \dot{T} - \dot{f}_s \Delta \varepsilon^{tr} \tag{3.21}$$

Ces deux relations traduisent en fait la conservation de la masse, étant données les

relations (2.2), (2.16) et (2.21). De même, la partie déviatoire \mathbf{s} du tenseur des contraintes σ variera en fonction de l'état du matériau.

Le formalisme lagrangien utilisé actualise, à la fin de chaque incrément de temps (*i.e.* t_n), la position du domaine Ω et son état de contrainte (*i.e.* Ω^{t_n}), par rapport à la configuration du début de l'incrément (*i.e.* $t_{n-1} = t_n - \Delta t$ et $\Omega^{t_{n-1}}$) et non par rapport à la configuration initiale (*i.e.* t_0 et Ω^{t_0}). Dans ce cas on suppose qu'à partir de l'équilibre du début d'incrément, on peut déterminer la variation des grandeurs physiques induites par le champ de vitesse au cours de l'incrément, de manière à retrouver l'équilibre en fin d'incrément.

Connaissant la température à l'instant t_n (*i.e.* T^{t_n}), la résolution du système (3.19) nécessite le choix d'un schéma d'intégration temporel afin de décrire l'évolution en temps des champs inconnus (ou variables d'histoire) : la position x , la vitesse v et la pression p . Au temps t_{n-1} , on suppose connus $x^{t_{n-1}}$, $v^{t_{n-1}}$, $p^{t_{n-1}}$ et leurs variations $\dot{x}^{t_{n-1}}$, $\dot{v}^{t_{n-1}}$, $\dot{p}^{t_{n-1}}$ et vérifient l'équilibre thermomécanique du problème. On cherche alors à déterminer leurs variations \dot{x}^{t_n} , \dot{v}^{t_n} et \dot{p}^{t_n} telles que les champs inconnus x^{t_n} , v^{t_n} et p^{t_n} vérifient aussi l'équilibre thermomécanique au temps t_n . On utilise pour cela un schéma différences finies de type Euler implicite pour les variables vitesse/pression :

$$\begin{aligned} v^{t_n} &= v^{t_{n-1}} + \Delta t \dot{v}^{t_n} \\ p^{t_n} &= p^{t_{n-1}} + \Delta t \dot{p}^{t_n} \end{aligned} \quad (3.22)$$

À l'aide de ces notations, on peut réécrire le problème mécanique (3.19) à résoudre à l'instant $t_n = t$:

Trouver $(v, p)^t$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_i^{t-\Delta t}} \mathbf{s}^t : \dot{\varepsilon}^* dV - \int_{\Omega_i^{t-\Delta t}} p^t \nabla \cdot v^* dV + \int_{\Omega_i^{t-\Delta t}} \rho \frac{v^t - v^{t-\Delta t}}{\Delta t} \cdot v^* dV - \int_{\Omega_i^{t-\Delta t}} \rho g \cdot v^* dV \\ \quad - \int_{\Gamma_{i,\tau}^{t-\Delta t}} \tau_{\text{imp}}^t \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_{i,c}^{t-\Delta t}} \tau_f^t \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_{i,c}^{t-\Delta t}} \tau_n^t \cdot v^* dS = 0 \quad \forall v^* \in \mathcal{V}_{\text{ca}}^0 \\ \int_{\Omega_i^{t-\Delta t}} p^* (\nabla \cdot v^t + \left\{ \begin{array}{l} \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{p^t - p^{t-\Delta t}}{\Delta t} \\ 0 \end{array} \right. - 3\alpha(T)\dot{T} + \dot{f}_s \Delta \varepsilon^{tr}) dV = 0 \quad \forall p^* \in \mathcal{P} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Dans cette équation, où l'on différencie le cas EVP et le cas VP, les variations tempo-

relles \dot{T} et \dot{f}_s sont issues de la résolution du problème thermique \mathcal{T} .

En fin d'incrément et après résolution, on actualise la configuration à l'aide du schéma :

$$x^t = x^{t-\Delta t} + \Delta t v^t \quad (3.24)$$

3.4.2 Gestion incrémentale du contact unilatéral

La gestion du contact unilatéral va être divisée en deux dans le contexte de la coulée continue : la première partie traite de manière classique le contact entre deux sous domaines (la lingotière et la produit coulé) alors que la deuxième partie détaille le traitement du contact entre le produit et les rouleaux de soutien.

3.4.2.1 Contact avec la lingotière

Le problème du contact dans la lingotière se présente comme un problème d'optimisation sous contraintes : il s'agit de trouver un champ de vitesse vérifiant les équations d'équilibre sous la contrainte des conditions de Signorini (2.33),(2.34) et (2.35). Ces conditions de contact unilatéral peuvent s'interpréter en termes d'événements comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{le point n'est pas en contact (surface libre)} & \sigma_n = 0 \text{ et } \Delta v_n \text{ quelconque} \\ \text{le point est en contact et le reste} & \sigma_n < 0 \text{ et } \Delta v_n = 0 \\ \text{le point est en contact et se décolle} & \sigma_n = 0 \text{ et } \Delta v_n < 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Dans notre cas, en adoptant une formulation vitesse/pression, le problème mécanique se résume à trouver $(v, p) \in \mathcal{V}_{ca} \times \mathcal{P}$ solution de (3.23) tels que les conditions de contact unilatéral soient vérifiées. La satisfaction de ces conditions est réalisée à l'aide d'une méthode de pénalisation. Cette méthode consiste à appliquer localement à la surface du produit un vecteur contrainte τ_n , colinéaire au vecteur normal n et de module proportionnel à l'éventuelle pénétration du produit dans la lingotière selon la direction normale. Le coefficient de proportionnalité, a priori un scalaire positif de valeur élevée, est noté θ_1 ; Ceci nous conduit à l'écriture suivante.

$$\tau_n = -\theta_1 \left\langle (v^t - v_{\text{outil}}) \cdot n - \frac{\delta^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\rangle n \quad \text{sur } \Gamma_{i,1} \quad (3.26)$$

avec $\delta^{t-\Delta t}$, la distance entre la pièce et la lingotière à l'instant $(t - \Delta t)$. Par convention $\delta < 0$ correspond à une pénétration. On note $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$.

En d'autres termes, on accepte que le champ de vitesse solution résulte en une légère pénétration numérique du produit dans la lingotière. La pénétration est "pénalisée" d'autant plus intensément que la valeur du facteur de pénalisation, θ_1 , est grande. À l'inverse, un choix trop petit de ce coefficient entraîne une prise de compte du contact non satisfaisante. Il n'existe pas de règle précise quant au choix d'une "bonne" valeur de ce coefficient. Nous verrons en fin de chapitre une méthode locale d'adaptation de ce facteur de pénalisation.

L'introduction de ce chargement mécanique en surface du produit conduit au terme suivant dans l'écriture du principe des puissances virtuelles, après discrétisation temporelle, (3.23) :

$$\int_{\Gamma_{i,1}^{t-\Delta t}} \tau_n^t \cdot v^* dS = -\theta_1 \int_{\Gamma_{i,1}^{t-\Delta t}} \left\langle (v^t - v_{\text{outil}}) \cdot n^{t-\Delta t} - \frac{\delta^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\rangle n \cdot v^* dS \quad (3.27)$$

Notons ici que seule la partie du produit en contact avec la lingotière sera concernée par le frottement. Dans le cas de la coulée continue, on a :

$$\int_{\Gamma_{i,c}^{t-\Delta t}} \tau_f^t \cdot v^* dS = \int_{\Gamma_{i,1}^{t-\Delta t}} \tau_f^t \cdot v^* dS \quad (3.28)$$

3.4.2.2 Contact avec les rouleaux de soutien

Le traitement du contact du produit coulé avec les rouleaux est traité de manière analogue au contact avec la lingotière à l'aide d'une méthode de pénalisation. La seule différence vient de l'expression du vecteur contrainte τ_n^t . Nous supposons que tous les rouleaux sont considérés comme des obstacles immobiles et rigides. Le fait que tout point matériel M en surface du produit ne doive pénétrer n'importe quel rouleau de soutien de centre X_r , de rayon R_r et d'axe de direction \vec{d}_r se traduit par :

Soit C le centre du cercle défini dans le plan orthogonal à d_r et passant par M , alors on vérifie la condition de non pénétration du rouleau par :

$$\|CM\| \geq R_r \quad (3.29)$$

Cette relation permet d'utiliser la forme analytique donnée par la géométrie circulaire de chaque rouleau. Ceci aura toute son importance lors de la discrétisation spatiale par éléments finis des différents sous domaines. En effet l'expression discrète du contact pénalisé issue de (3.27) suppose un maillage de chacun des sous-domaines. Or dans le cas

de la coulée continue, mailler tous les rouleaux peut devenir très fastidieux, générer des coûts de calcul en terme de recherche de face et engendrer des imprécisions numériques plus ou moins importantes selon la finesse du maillage du rouleau créé.

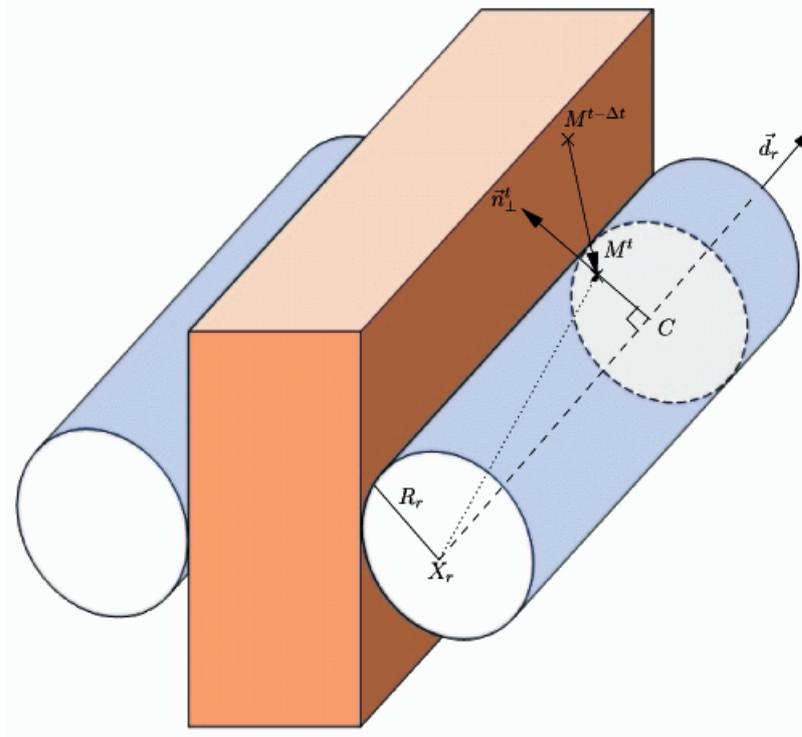


FIG. 3.2 – Définition du contact pénalisé entre le produit coulé et les rouleaux de soutien

Reste donc à déterminer le vecteur contrainte τ_n^t sur la frontière Γ_r . À l'aide des notations de la figure (FIG. 3.2), lorsqu'un point matériel frontière à l'instant $t - \Delta t$ a une vitesse v^t telle que la position actualisée du point en fin d'incrément de temps, M^t , soit à l'intérieur d'un rouleau, ce point est pénalisé et subit une "force répulsive" dans la direction du vecteur normalisé \vec{n}_\perp^t qui n'est autre que le vecteur normalisé $\overrightarrow{CM^t}$:

$$\int_{\Gamma_{i,r}^{t-\Delta t}} \tau_n^t \cdot v^* dS = \theta_r \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma_{i,r}^{t-\Delta t}} \langle R_r - \|CM^t\| \rangle \vec{n}_\perp^t \cdot v^* dS \quad (3.30)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} M^t = M^{t-\Delta t} + \Delta t v^t \\ \vec{n}_\perp^t = \frac{\overrightarrow{CM^t}}{\|CM^t\|} \end{cases} \quad (3.31)$$

La présence de $\frac{1}{\Delta t}$ permet d'exprimer cette composante du contact en vitesse et non en déplacement afin d'être parfaitement homogène avec l'expression issue de (3.27).

Attardons-nous sur la construction de \overrightarrow{CM}^t pour laquelle on définit $P_{\vec{d}_r}$ l'opérateur de projection orthogonale sur \vec{d}_r :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}^t &= \overrightarrow{X_r M^t} - P_{\vec{d}_r}(\overrightarrow{X_r M^t}) \\ &= \overrightarrow{X_r M^t} - (\overrightarrow{X_r M^t} \cdot \vec{d}_r) \vec{d}_r\end{aligned}\quad (3.32)$$

exprimé en coordonnées pour $l = 1, \dots, 3$ et $k = 1, \dots, 3$, ce vecteur donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}^t_l &= \overrightarrow{X_r M^t}_l - (\overrightarrow{X_r M^t}_k \cdot \vec{d}_{r,k}) \vec{d}_{r,l} \\ &= \underbrace{(\delta_{lk} - d_k \cdot d_l)}_{\mathbf{P}_{kl}} \cdot (\overrightarrow{X_r M^t})_l\end{aligned}\quad (3.33)$$

avec δ_{lk} symbole de Kronecker.

ou plus simplement :

$$CM^t = \mathbf{P} \cdot (X_r M^t) \quad (3.34)$$

Ainsi, connaissant la direction de l'axe des rouleaux, on peut déterminer, en 3D, la direction de la "force répulsive" pour n'importe quel point matériel. En d'autres termes sont pénalisés tous les champs de vitesse aboutissant, après intégration temporelle, à une position des points de surface de la pièce à l'intérieur des rouleaux. Ces points sont alors pénalisés suivant la direction \vec{n}_\perp^t fonction de v^t . On remarquera dans la construction de la figure (FIG. 3.2) que \vec{n}_\perp^t dépend du champ de vitesse matériel sur l'incrément de temps, ce qui traduit le caractère implicite de la méthode mise en œuvre : le contact est jugé par rapport à la configuration de fin d'incrément.

Remarque : Il existe bien sûr d'autres méthodes pour résoudre ce problème d'optimisation sous contraintes comme les méthodes de lagrangien ou lagrangien augmenté qui ont l'avantage de prendre en compte de façon exacte la condition de contact mais présentent l'inconvénient de rajouter une inconnue au problème en plus de la vitesse et de la pression. Se pose aussi le problème d'un choix judicieux d'espace fonctionnel correct pour les multiplicateurs de Lagrange [Hild, 1998]. Pour une présentation pédagogique des méthodes de pénalisation et de lagrangien, le lecteur pourra se référer aux articles de [Mijar et Arora, 2000] ou de [Wriggers, 1995]. Une alternative peut être utilisée pour une prise en compte exacte des conditions de contact sans rajouter d'inconnue et sans utiliser de méthode de pénalisation. Elle consiste à intégrer directement les conditions cinématiques de contact aux équations d'équilibre [Rio, 2003]. Mais la principale des difficultés

est la modification de la topologie de la matrice de raideur - matrice que nous allons introduire dans la partie suivante.

3.4.3 Discrétisation spatiale

Nous détaillons ici la méthode des éléments finis utilisée sur chacun des sous domaines $\Omega_{i,i=1..SD}$. Afin de ne pas alourdir les écritures, nous posons $\Omega_i = \Omega$.

Le mini-élément $P1+ / P1$ est utilisé pour la résolution du problème incrémental (3.23) où les contraintes sont pénalisées (3.27). Il s'agit d'un élément mixte tétraèdre pour lequel la vitesse et la pression sont interpolées par des fonctions linéaires par morceaux, (FIG. 3.3).

Cet élément a l'avantage de vérifier les conditions de Brezzi-Babuska pour un problème de Stokes grâce à l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire en vitesse au centre ([Fortin, 1985]). Au Cemef, [Coupez, 1995] l'a étendu au cas tridimensionnel pour des comportements visco-plastiques ; puis il a été repris par [Gay, 1995] dans le cas d'un comportement élasto-plastique et par [Bellet, 1999, Jaouen, 1998] pour un comportement visco-plastique compressible et élasto-viscoplastique, respectivement.

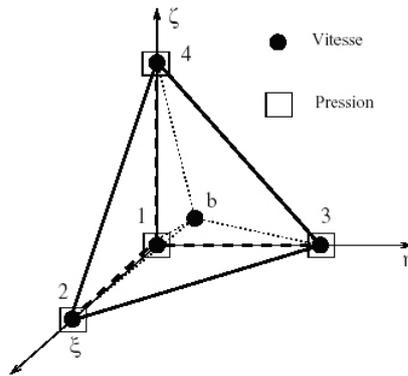


FIG. 3.3 – Mini élément $P1 + / P1$

Soit τ_h une triangulation régulière du domaine Ω_h^t qui est une approximation spatiale discrète du domaine. L'ensemble des sous éléments de l'élément e sera noté Ω_e :

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in \tau_h} \Omega_e \quad \tau_h \subset \mathbb{N} \quad (3.35)$$

où Ω_e est un simplicial de \mathbb{R}^3 .

L'espace d'approximation de la vitesse est enrichi par l'espace des fonctions de type bulle, qui sont linéaires sur chaque sous-élément et nulles sur le bord de chaque élément. On décompose alors le champ de vitesse interpolé w_h de manière unique de la façon suivante :

$$w_h = v_h + b_h \quad \text{avec } w_h \in \mathcal{W}_h = \mathcal{V}_h \otimes \mathcal{B}_h \quad (3.36)$$

où v_h est la partie linéaire du champ de vitesse et b_h la partie relative au champ bulle.

$$\mathcal{V}_h = \left\{ v_h \in (C^0(\Omega_e))^3, v_h = v_{\text{imp}} \text{ sur } \Gamma_v \text{ et } v_h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^3, \forall e \in \tau_h \right\} \quad (3.37)$$

où $(C^0(\Omega_e))^3$ est l'espace des fonctions continues sur le domaine $\Omega_h \in \mathbb{R}^3$ et $(P1(\Omega_e))^3$ est l'espace des fonctions linéaires sur l'élément $\Omega_e \subset \mathbb{R}$.

\mathcal{B}_h est l'espace de fonctions bulle. Cet espace est inclus dans l'espace des polynômes de degré 3. En 3D, la mise en œuvre numérique de tels polynômes devient lourde. Aussi, [Coupez, 1995] a introduit une fonction bulle linéaire par morceaux sur l'élément :

$$\mathcal{B}_h = \left\{ b_h \in (C^0(\Omega_e))^3, b_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_e, \forall e \in \tau_h, b_h|_{\Omega_{e_i}} \in (P1(\Omega_{e_i}))^3, i = 1, \dots, 4 \right\} \quad (3.38)$$

où Ω_{e_i} $i = 1, \dots, 4$ représente les sous-tétraèdres dont le centre de gravité du tétraèdre est un sommet commun. Ce qui signifie que la fonction bulle est continue sur l'élément Ω_e , mais pas dérivable.

Par conséquent, le champ de vitesse discret s'écrit, en un point de l'espace $x \in \Omega_h$:

$$w_h(x) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(x) V_k + \sum_{j=1}^{Nbelt} N_j^b(x) B_j \quad (3.39)$$

où $w_h \in \mathcal{W}_h$, $N_k^l \in \mathcal{V}_h$, $k = 1, \dots, Nbnoe$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément linéaire associées au nœud k et $N_j^b \in \mathcal{B}_h$ sont les fonctions bulle associées à l'élément j . $Nbnoe$ et $Nbelt$ sont le nombre de nœuds et d'éléments respectivement.

Compte tenu des supports des fonctions d'interpolation, le champ de vitesse s'écrit au niveau local (dans l'élément contenant le point x)

$$w_h(x) = \sum_{k=1}^4 N_k^l(x) V_k + N^b(x) B \quad (3.40)$$

On dira que $w_h \in P1^+(\Omega_e)$.

Le champ de pression est linéaire et continu :

$$\mathcal{P}_h = \{p_h \in C^0(\Omega_e) \text{ et } p_h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \forall e \in \tau_h\} \quad (3.41)$$

La pression s'exprime en un point de l'espace x par :

$$p_h(x) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(x) P_k \quad (3.42)$$

Et donc au niveau local par :

$$p_h(x) = \sum_{k=1}^4 N_k^l(x) P_k \quad (3.43)$$

Munis de ces espaces, nous pouvons maintenant réécrire la discrétisation par éléments finis du problème mixte incrémental (3.23) par :

Trouver $(w_h, p_h)^t \in (\mathcal{W}_h, \mathcal{P}_h)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v_h^* \in \mathcal{V}_h^0, \quad \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} \mathbf{s}(w_h^t) : \dot{\varepsilon}(v_h^*) dV - \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} p_h^t \nabla \cdot v_h^* dV - \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} \rho g \cdot v_h^* dV \\ + \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} \rho \frac{w_h^t - w_h^{t-\Delta t}}{\Delta t} \cdot v_h^* dV - \int_{\Gamma_{h,\tau}^{t-\Delta t}} \tau_{\text{imp}} \cdot v_h^* dS - \int_{\Gamma_{h,c}^{t-\Delta t}} \tau_f^t \cdot v_h^* dS \\ + \theta_1 \int_{\Gamma_{h,1}^{t-\Delta t}} \left\langle (w_h^t - v_{\text{outil}}) \cdot n^{t-\Delta t} - \frac{\delta^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\rangle n^{t-\Delta t} \cdot v_h^* dS \\ - \frac{\theta_r}{\Delta t} \int_{\Gamma_{h,r}^{t-\Delta t}} \left\langle R_r - \|\mathbf{P} \cdot (X_r M)(w_h^t)\| \right\rangle \frac{\mathbf{P} \cdot (X_r M)(w_h^t)}{\|\mathbf{P} \cdot (X_r M)(w_h^t)\|} \cdot v_h^* dS = 0 \\ \\ \forall b_h^* \in \mathcal{B}_h, \quad \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} \mathbf{s}(w_h^t) : \dot{\varepsilon}(b_h^*) dV - \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} p_h^t \nabla \cdot b_h^* dV - \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} \rho g \cdot b_h^* dV \\ + \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} \rho \frac{w_h^t - w_h^{t-\Delta t}}{\Delta t} \cdot b_h^* dV = 0 \\ \\ \forall p_h^* \in \mathcal{P}_h, \quad \int_{\Omega_h^{t-\Delta t}} p_h^* (\nabla \cdot w_h^t + \left\{ \begin{array}{l} \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{p_h^t - p_h^{t-\Delta t}}{\Delta t} \\ 0 \end{array} \right. - 3\alpha(T)\dot{T} + \dot{f}_s \Delta \varepsilon^{tr}) dV = 0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

où $\mathcal{V}_h^0 = \left\{ v_h \in (C^0(\Omega_e))^3, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_v \text{ et } v_h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^3, \forall e \in \tau_h \right\}$

En remplaçant les fonctions test par les fonctions de base des espaces d'approximation, on obtient un système non linéaire discret noté de manière suivante à l'instant t :

$$\begin{cases} R^v(V^t, B^t, P^t) = 0 \\ R^b(V^t, B^t, P^t) = 0 \\ R^p(V^t, B^t, P^t) = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

avec $V^t = (V_1^t, \dots, V_{3*Nbnoe}^t)$, $B^t = (B_1^t, \dots, B_{3*Nbelt}^t)$ et $P^t = (P_1^t, \dots, P_{Nbnoe}^t)$.

Il est possible de démontrer que le terme R^v ne dépend pas de B^t , [Jaouen, 1998]. Le système (3.45) s'écrit donc :

$$\begin{cases} R^v(V^t, P^t) = 0 \\ R^b(V^t, B^t, P^t) = 0 \\ R^p(V^t, B^t, P^t) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Ce problème est rendu non linéaire à cause des termes de contact, de frottement et de comportement et est résolu par l'algorithme de Newton-Raphson. À chaque itération de Newton-Raphson, un système linéaire de la forme suivante doit être résolu :

$$\begin{pmatrix} K^{vv} & 0 & K^{vp} \\ 0 & K^{bb} & K^{bp} \\ {}^tK^{vp} & {}^tK^{bp} & K^{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V^t \\ \Delta B^t \\ \Delta P^t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^v(V^t, P^t) \\ R^b(V^t, B^t, P^t) \\ R^p(V^t, B^t, P^t) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

avec $K^{xy} = \frac{\partial R^x}{\partial y}$.

Grâce à une technique d'élimination des degrés de liberté de type bulle (internes à chaque élément), détaillée dans la thèse de [Jaouen, 1998], on obtient le système condensé suivant :

$$\begin{pmatrix} K^{vv} & K^{vp} \\ {}^tK^{vp} & K^{pp} - {}^tK^{bp} K^{bb^{-1}} K^{bp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V^t \\ \Delta P^t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^v \\ R^p - {}^tK^{bp} K^{bb^{-1}} K^{bp} P^t - {}^tK^{bp} K^{bb^{-1}} R^b \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

3.4.3.1 Expression des termes du contact avec les cylindres

Nous nous intéressons ici à l'expression du résidu et de la matrice hessienne issus du contact du produit avec les rouleaux. Nous invitons le lecteur à consulter la thèse

de [Jaouen, 1998] pour le traitement spécifique du contact pénalisé entre sous domaines (lingotière/produit dans notre cas). On pose :

$$R = R_r^v = -\frac{\theta_r}{\Delta t} \int_{\Gamma_{h,r}^{t-\Delta t}} \langle R_r - \|\mathbf{P} \cdot (X_r M)(v_h^t)\| \rangle \frac{\mathbf{P} \cdot (X_r M)(v_h^t)}{\|\mathbf{P} \cdot (X_r M)(v_h^t)\|} \cdot v_h^* dS \quad (3.49)$$

le terme de résidu décrivant le contact entre les rouleaux et le produit.

Pour simplifier les écritures, nous posons :

$$a = \mathbf{P} \cdot (X_r M)(v_h^t) \quad (3.50)$$

vecteur donné à l'itération courante.

À l'aide des fonctions d'interpolations N^l décrites par (3.40) pour chaque nœud n frontière du maillage, nous pouvons donner l'expression de la $k^{\text{ième}}$ composante de (3.49) :

$$\begin{aligned} R_{n,k} &= -\frac{\theta_r}{\Delta t} \int_{\Gamma_{h,r}^{t-\Delta t}} \langle R_r - \|a^{(n)}\| \rangle \frac{a_k^{(n)}}{\|a^{(n)}\|} N_n^l \\ &= -\frac{\theta_r}{\Delta t} \langle R_r - \|a^{(n)}\| \rangle \frac{a_k^{(n)}}{\|a^{(n)}\|} S_n \end{aligned} \quad (3.51)$$

où S_n est la surface de contrôle associée au nœud n .

On peut alors calculer les termes de la matrice tangente associée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} K_{nk,pl}^{vv} &= \frac{\partial R_{nk}}{\partial V_{pl}} \\ &= \frac{\theta_r}{\Delta t} \left(\frac{\partial \|a^{(n)}\|}{\partial V_{pl}} \cdot \frac{a_k^{(n)}}{\|a^{(n)}\|} - (R_r - \|a^{(n)}\|) \cdot \frac{\partial}{\partial V_{pl}} \left[\frac{a_k^{(n)}}{\|a^{(n)}\|} \right] S_n \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Or, le calcul des différentes dérivées à l'aide de (3.50) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^{(n)k}}{\partial V_{pl}} &= \mathbf{P}_{kl} \delta_{np} \Delta t & \mathbf{P}_{kl} &= \delta_{kl} - d_k d_l \\ \frac{\partial \|a^{(n)}\|}{\partial V_{pl}} &= \frac{1}{\|a^{(n)}\|} a_l^{(n)} \delta_{np} \Delta t \end{aligned}$$

Finalement, après simplification, on a :

$$K_{nk,pl}^{vv} = \theta_r \delta_{np} \left(\mathbf{P}_{kl} - \frac{R_r}{\|a^{(n)}\|} \left[\mathbf{P}_{kl} - \frac{1}{\|a^{(n)}\|^2} a_k^{(n)} a_l^{(n)} \right] \right) \quad (3.53)$$

Cette expression analytique permet de bien prendre en compte la géométrie des rouleaux de soutien et est plus précise qu'une approche de type contact entre sous domaines (à cause des approximations numériques qui seraient associées à une facétisation des cylindres). Elle est aussi beaucoup plus rapide puisqu'elle ne fait intervenir que les paramètres de chaque rouleau et évite ainsi une recherche de surface en vis-à-vis, étape qui peut être lourde en temps de calcul si on choisit de mailler tous les rouleaux. Enfin, on remarquera que cette expression de la matrice (3.53) n'affecte pas la symétrie de la matrice tangente globale. Ce dernier point aura toute son importance lors de la résolution du système linéaire (3.48).

Nous avons déjà énoncé que le choix du coefficient de pénalisation θ_* ($*$ = l ou $*$ = r) jouait un rôle important : pour mémoire, une valeur trop petite de ce coefficient entraînera une non satisfaction de la prise en compte du contact. À l'inverse une valeur trop grande donnera une pénalisation trop importante et pourra perturber le conditionnement de la matrice tangente. Reste à affiner l'expression des coefficients de pénalisation de façon à bien contrôler l'"intensité" de cette pénalisation du contact.

3.4.3.2 Adaptation locale du facteur de pénalisation

En effet, de manière générale, la distribution des efforts surfaciques de contact peut être très variable à la frontière d'une pièce. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de la fonderie, pour lequel on peut rencontrer à un même instant des régions à l'état liquide sous des pressions métallostatiques très différentes (cas des très grosses pièces de fonderie), ainsi que des régions à l'état solide avec des pressions de contact très variables (contraction autour de noyaux, gravité). C'est également vrai en coulée continue où les pressions de contact sur les différents rouleaux de soutien ainsi qu'en lingotière sont extrêmement variables ; il est évident que les rouleaux en bas de machine sont soumis à des efforts plus importants que ceux situés en haut de machine.

Dès lors, il est difficile de dégager une stratégie pour le choix de la valeur locale du coefficient de pénalisation. [Jaouen, 1998] a proposé l'indexation de θ_* sur la valeur de la pression de contact maximum ou locale, mais cela s'est avéré insuffisamment robuste. Plus récemment, il a été développé au CEMEF une technique visant à assurer que les termes de raideur provenant du contact pénalisé soient prédominants par rapport aux autres contributions selon un ratio fixé a priori (par exemple 1000). Bien que plus satisfaisante,

cette technique a également montré ses limites. En particulier, nous avons constaté que les pénétrations dans le moule étaient très variables : de 10^{-2} fois la taille de maille - valeur semblant a priori correcte - à 10^{-9} fois cette même taille ! Cela montre que certaines zones sont excessivement pénalisées avec ce type de raisonnement. Autrement dit, il doit être possible de diminuer les coefficients de pénalisation du contact dans certaines régions, et donc d'améliorer le conditionnement des systèmes à résoudre, en contrôlant l'évolution de la pénétration. C'est ce qui a inspiré la nouvelle méthode décrite ci-après [Bellet, a].

Contrôle incrémental et local du facteur de pénalisation θ_1 , en lingotière. Notons d'abord que le coefficient θ_1 peut être considéré localement en chaque nœud frontière. En début de chaque incrément de temps, on procède à un ajustement de la valeur de θ_1 selon le raisonnement suivant. D'après (3.26), en cas de contact effectif dans le sous domaine (*i.e.* la lingotière), la pression de contact au nœud est donnée à l'incrément précédent par :

$$p_c^{(n)} = \theta_1^{(n)} \underbrace{\left\langle v^t \cdot n - \frac{\delta^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\rangle}_{\xi_1} \quad (3.54)$$

où $\xi_1 \Delta t$ est la pénétration locale (positive) constatée en fin d'incrément précédent, à convergence.

En notant pen_{obj} la pénétration "objectif", c'est à dire la valeur de consigne autour de laquelle on souhaiterait contrôler ξ_1 , on détermine la nouvelle valeur de θ_1 en supposant que la pression de contact va approximativement rester la même sur le nouvel incrément et que la pénétration visée est pen_{obj} . On a alors :

$$\theta_{1,new}^{(n)} \cdot \frac{pen_{obj}}{\Delta t} = \theta_1^{(n)} \xi_1 \quad (3.55)$$

ce qui donne la nouvelle valeur du coefficient $\theta_{1,new}^{(n)}$:

$$\theta_{1,new}^{(n)} = \theta_1^{(n)} \frac{\xi_1 \Delta t}{pen_{obj}} \quad (3.56)$$

Si la pénétration actuelle $\xi_1 \Delta t$ se situe au voisinage de pen_{obj} , la correction de $\theta_1^{(n)}$ est mineure. À l'inverse, pour éviter de trop grandes variations de $\theta_1^{(n)}$, nous avons limité sa variation à une multiplication ou une division par un facteur 10. Ainsi, après une phase d'ajustement sur les tout premiers incréments de temps, on voit la valeur des pénétrations s'homogénéiser autour de la valeur de consigne sur tout l'interface produit-lingotière.

Pour initialiser les $\theta_1^{(n)}$, nous nous appuyons sur le fait que chacun des termes de pénalisation du contact doivent assurer une prédominance par rapport aux autres contributions dans la matrice tangente. Nous écrivons ainsi :

$$\theta_{1,\text{ini}}^{(n)} = \theta_0 \max_{n \in \Gamma_1} \left| K_{nk,nk}^{vv,\text{other}} \right| \quad (3.57)$$

où θ_0 est un coefficient fixé a priori (typiquement, 10^3) et où $K_{nk,nk}^{vv,\text{other}}$ désigne les termes diagonaux des autres contributions à la partie vv de la matrice tangente associée au nœud n sur la frontière considérée.

Contrôle incrémental et local du facteur de pénalisation θ_r , (contact avec les rouleaux) Concernant le facteur de pénalisation pour la gestion du contact avec les rouleaux la problématique est un peu différente. Tout d'abord, nous avons associé le facteur de pénalisation θ_r aux rouleaux. En effet lors de l'utilisation de notre stratégie globale instationnaire, les nœuds frontière ne sont que de "passage" et restent en contact avec chacun des rouleaux sur seulement quelques incréments de temps; trop peu pour envisager une stabilisation du coefficient de pénalisation si celui-ci est affecté au nœud frontière.

Dans ce cas la pression de contact maximum constatée sur chaque rouleau sera de :

$$p_c^{(r)} = \theta_r \underbrace{\max (R_r - \|\mathbf{P} \cdot (X_r M)\|)}_{\xi_r} \quad (3.58)$$

En faisant le même raisonnement que précédemment, on obtient la nouvelle valeur du coefficient $\theta_{r,\text{new}}$ attaché au rouleau r :

$$\theta_{r,\text{new}} = \theta_r \frac{\xi_r}{pen_{\text{obj}}} \quad (3.59)$$

où θ_r est le coefficient de pénalisation attaché au rouleau r en fin d'incrément précédent.

Concernant l'initialisation de θ_r , nous l'avons fixé à une valeur arbitraire de 10^6 . Ce choix vient de la discussion dans l'exemple suivant.

Application sur une tranche statique Afin de mettre en évidence la bonne prise en compte du contact analytique entre le produit et les rouleaux de soutien, nous avons calculé l'évolution d'une tranche statique épaisse entre des rouleaux. L'épaisseur de cette

tranche est de 20 centimètres et sa longueur est de 50 centimètres. Deux rouleaux d’une distance de 40 centimètres maintiennent cette tranche statique. Nous avons choisi un comportement de type newtonien avec une viscosité suffisamment faible ($K = 10^5$ Pa.s) pour modéliser l’affaissement de la brame entre ces rouleaux et donc mettre en évidence la bonne prise en compte des rouleaux de soutien. Le résultat de ce calcul est représenté par la figure (FIG. 3.4) où au bout d’un certain temps la tranche tend à s’affaisser sous l’effet de la gravité.

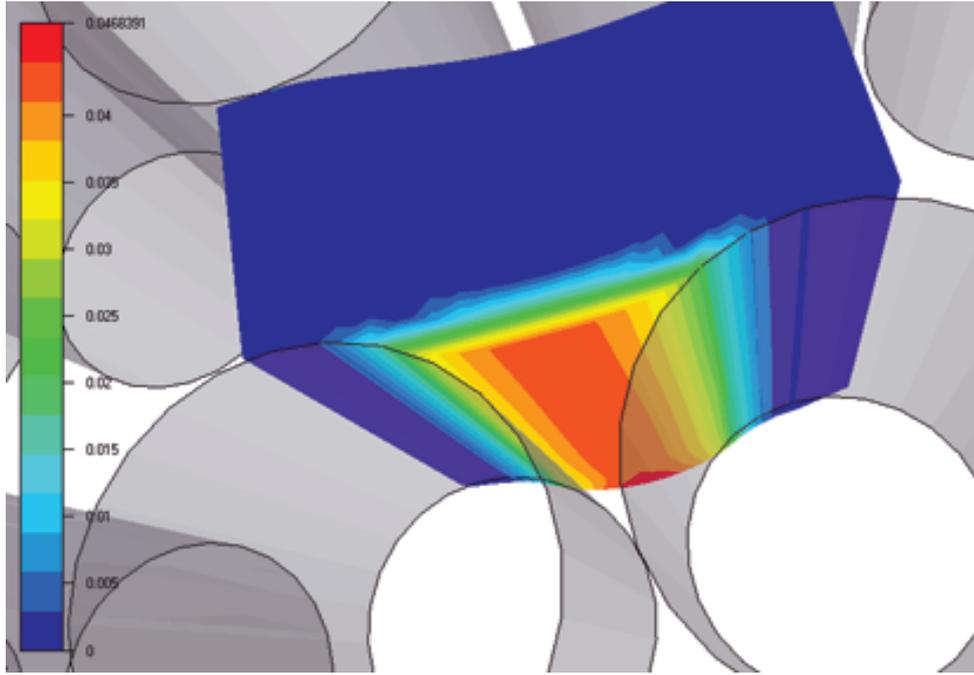
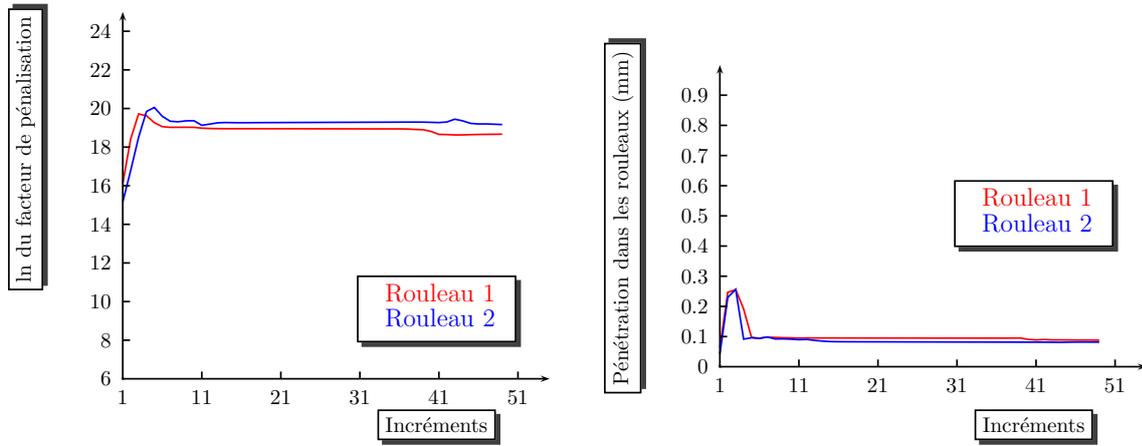


FIG. 3.4 – Prise en compte des rouleaux de soutien. Sous l’effet de la gravité, la tranche statique s’affaisse et sa forme tient compte des rouleaux de soutien. On mesure ici le gonflement, exprimé en millimètres, de la tranche par rapport à sa position initiale.

Au cours de ce calcul nous avons pu mesurer l’évolution du facteur de pénalisation affecté à chacun des rouleaux. Comme on peut le voir sur la figure (FIG. 3.5), cette stabilisation ne peut se faire qu’au bout d’un certain nombre d’incréments et avec une initialisation de θ_r à 10^6 .

La stabilisation des facteurs de pénalisation permet celle de la distance de pénétration dans les rouleaux autour de la pénétration objectif, fixée à $pen_{obj} = 10^{-4}$, (FIG. 3.5(b)).

Choisir une valeur de pen_{obj} plus petite provoquerait un calcul de facteur de pénalisation trop grand et donc un mauvais conditionnement du système à résoudre (*i.e.* d’après



(a) Stabilisation du facteur de pénalisation

(b) Stabilisation de la distance de pénétration dans les rouleaux autour de la pénétration objectif fixée à 0.1 millimètres

FIG. 3.5 – Régularisation du facteur de pénalisation au cours du calcul et distance de pénétration dans les rouleaux pour θ_r initialisé à 10^6

(3.59), quand $pen_{obj} \rightarrow 0$ alors $\theta_r \rightarrow +\infty$). Pour contrer ce problème, nous avons augmenté arbitrairement le rayon des rouleaux de la valeur de la pénétration objectif (négligeable par rapport au rayon des rouleaux). Ainsi, le produit peut pénétrer de pen_{obj} les rouleaux de rayon $R_r + pen_{obj}$ et donc cela permet d'obtenir une pénétration effective nulle par rapport à la position nominale des rouleaux.

Ceci a été appliqué lors d'une étude de sensibilité à l'initialisation de θ_r . Comme on peut le voir sur les figures (FIG. 3.6(c)) et (FIG. 3.6(d)), la pénétration objectif ramenée à zéro est bien respectée sans affecter les valeurs des facteurs de pénalisation.

Quelque soit l'initialisation de θ_r , la stabilisation des facteurs de pénalisation ne peut se faire qu'au bout d'un certain nombre d'incrément. Mais elle est beaucoup plus rapide lorsque la valeur du facteur de pénalisation est plus grande (*i.e.* : $\theta_r = 10^6$). Un calcul a été aussi fait pour une valeur de $\theta_r = 10^9$, mais celui-ci n'a pas pu aller au delà du premier incrément : cette valeur trop grande engendrait un mauvais conditionnement du système et donc une non convergence dans l'algorithme de Newton-Raphson.

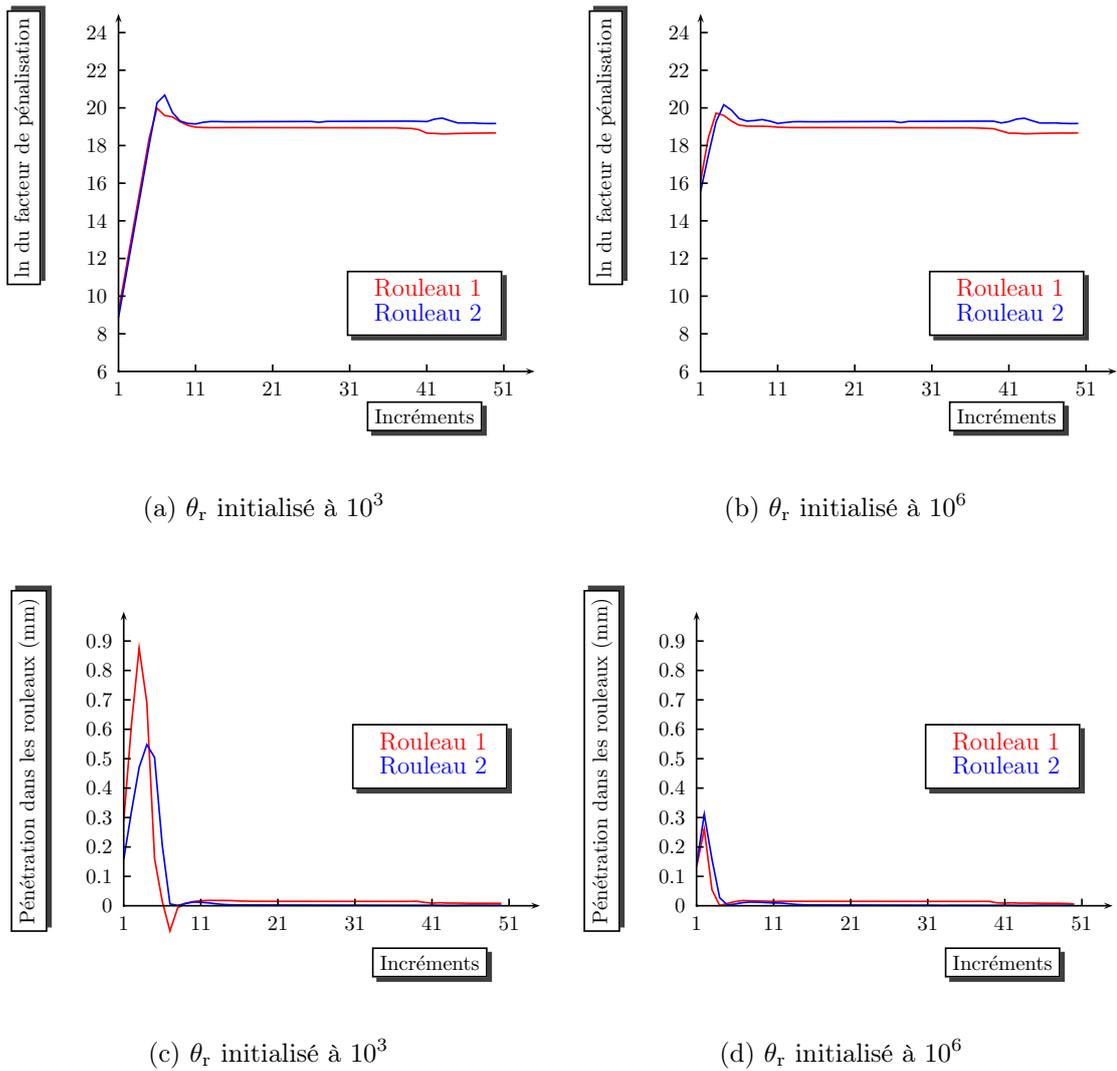


FIG. 3.6 – Régularisation du facteur de pénalisation au cours du calcul et distance de pénétration dans les rouleaux pour différentes initialisations de θ_r .

3.4.3.3 Homogénéisation du système en vitesse-pression

Avant de résoudre le système (3.48), on peut remarquer que les résidus ne sont pas de même dimension. Le premier résidu, R^v résultant de la première équation de (3.44) est homogène à une force (N), tandis que le second, résultant d'une combinaison entre les deux dernières équations de (3.44) est homogène à un débit ($m^3.s^{-1}$). Deux problèmes se posent alors. D'une part, on constate que la matrice du système linéaire (3.48) est généralement mal conditionnée. Ceci est un handicap important dans la mise en œuvre de méthodes itératives de résolution, dont la rapidité de convergence dépend fortement du conditionnement de la matrice. Or ces méthodes sont absolument nécessaires en calcul intensif. D'autre part, on conçoit que la définition d'une norme sur le vecteur résidu assemblé est problématique, de par la non homogénéité de ses termes.

Changement p/q : Un changement de variable sur l'inconnue pression doit alors être envisagé. Un tel changement de variable a été proposé dans la thèse de [Gay, 1995] pour la modélisation d'écoulements élasto-plastiques. Dans la thèse de [Jaouen, 1998], il a été adapté au comportement hybride de Theracast[®], visco-plastique/élasto-viscoplastique, en proposant :

$$p_h^t = \frac{\bar{\eta}}{\bar{l}} q_h^t = \beta q_h^t \quad (3.60)$$

avec $\bar{\eta}$ viscosité caractéristique et \bar{l} taille caractéristique. Du point de vue des dimensions, β s'exprime en ($N.m^{-3}.s$) ou ($kg.m^{-2}.s^{-1}$) et q_h^t devient homogène à une vitesse ($m.s^{-1}$).

On montre alors que la nouvelle matrice de raideur tangente issue du système linéaire (3.48) a pour nouvelle expression :

$$\begin{pmatrix} H^{vv} & H^{vq} \\ {}^tH^{vq} & H^{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{vv} & K^{vq} \\ {}^tK^{vq} & K^{qq} - {}^tK^{bq}K^{bb^{-1}}K^{bq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{vv} & \beta K^{vp} \\ \beta {}^tK^{vp} & \beta^2(K^{pp} - {}^tK^{bp}K^{bb^{-1}}K^{bp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{vv} & \beta H^{vp} \\ \beta {}^tH^{vp} & \beta^2 H^{pp} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Les deux composantes du second membre du système (3.48) ont après changement de variable la dimension d'une force (N) et les termes de raideur s'expriment en ($N.m^{-1}.s$) ou ($kg.s^{-1}$).

Changement p/q optimisé : L'expérience a montré que la détermination de β en chaque nœud n'est pas toujours chose aisée, pour plusieurs raisons :

- le choix d'une taille caractéristique \bar{l} appropriée n'est pas évident ;
- le choix d'une viscosité caractéristique $\bar{\eta}$ est problématique en présence de gradients thermiques, et donc de gradients de paramètres rhéologiques ;
- avec le modèle de comportement hybride visco-plastique/élasto-viscoplastique, ce choix est a fortiori très délicat pour les nœuds appartenant à la fois à des éléments visco-plastiques et à des éléments élasto-viscoplastiques.

D'un point de vue pratique, le changement de variable (3.60) s'est avéré insuffisant en terme d'amélioration du conditionnement de la matrice du système. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner les minima et maxima des termes diagonaux H^{vv} et H^{qq} : dans la plupart des cas, ils sont loin de coïncider en ordre de grandeur.

Le changement de variable suivant est alors proposé ([Bellet, b]), issu de la simple observation de la matrice du système (3.61), pour tout nœud n du maillage :

$$\beta_n = \sqrt{\frac{\max_{i=1, \dim} H_{ni,ni}^{vv}}{|H_{nn}^{pp}|}} \quad (3.62)$$

\dim désigne ici la dimension du problème.

Les coefficients β_n sont gardés constants en chaque nœud sur un incrément de temps. Par conséquent, l'expression (3.62) est calculée en fonction des termes H^{vv} et H^{pp} obtenus à l'incrément précédent. Si on fait alors intervenir dans (3.62) le coefficient β_n utilisé au même nœud à l'incrément précédent, on obtient :

$$\beta_n^{\text{new}} = \beta_n \sqrt{\frac{\max_{i=1, \dim} H_{ni,ni}^{vv}}{|H_{nn}^{pp}|}} \quad (3.63)$$

Les termes H^{vv} et H^{qq} ont les valeurs diagonales maximum qui sont du même ordre de grandeur, voire souvent très proches. De plus les minima de ces mêmes valeurs sont également proches, ce qui constitue un résultat favorable plus inattendu. Dans ces conditions, le conditionnement du nouveau système linéaire à résoudre est grandement amélioré.

3.4.3.4 Algorithme de résolution

Plusieurs facteurs (temps de calcul, stockage des matrices, parallélisation du système, ...) nous poussent à choisir une méthode itérative plutôt qu'une méthode directe. La résolution du système linéaire (3.48) avec changement de variables est alors effectuée par une méthode itérative de type résidu minimal préconditionné par une matrice bloc diagonale définie positive [Marie, 1997].

En définitive, la résolution du problème non linéaire se fait par la méthode de Newton-Raphson. Son algorithme s'écrit à chaque pas de temps t :

$$\begin{array}{l}
 k = 1 \\
 \left\| \begin{array}{l}
 \text{Tant que } \|R(V_k^t, P_k^t)\| \geq \text{critère d'arrêt} \\
 \\
 \text{Calculer la direction de descente } (\Delta V_k^t, \Delta P_k^t) \\
 \text{solution du système linéaire (3.48) avec (3.61)} \\
 \\
 \text{Actualisation : } \begin{pmatrix} V_{k+1}^t \\ P_{k+1}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_k^t \\ P_k^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta V_k^t \\ \Delta P_k^t \end{pmatrix} \\
 \\
 k = k + 1
 \end{array} \right. \quad (3.64)
 \end{array}$$

3.4.3.5 Recherche linéaire

Nous décrivons ici la procédure de recherche linéaire que nous avons mis en place pour optimiser la convergence d'un problème non linéaire comme dans le cas de la coulée continue (la gestion implicite du contact avec les rouleaux de soutien accentue fortement la non linéarité du problème à résoudre).

Pour des problèmes non linéaires, il arrive fréquemment, après un certain nombre d'itérations dans l'algorithme de Newton-Raphson (3.64), que l'itéré courant soit très éloigné de la solution désirée. Cette divergence est généralement due à un choix de pas de temps trop grand dans le schéma de discrétisation temporelle (3.22). Ceci est plus marqué si le point de départ (*i.e.* pour $k=1$) est loin de la solution finale. Pour y remédier, on peut bien entendu diminuer le pas de temps mais l'effet peut être considérable sur le temps de calcul. Une autre approche consiste à modifier l'actualisation dans (3.64) : on modifie ainsi la façon de déplacer l'itéré k vers l'itéré $k + 1$ quand la norme du résidu à l'itération

$k + 1$ est plus grande que celle du résidu à l'itération k . On peut traduire ceci par :

$$\text{On pose } \begin{cases} X_k = (V_k^t, P_k^t) \quad \text{et} \quad \Delta X_k = (\Delta V_k^t, \Delta P_k^t) \\ f(X_k) = \|R(X_k)\| \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f(X_{k+1}) > f(X_k) \text{ alors :} \\ \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \alpha \text{ tel que :} \\ X_{k+1} = X_k + \alpha \Delta X_k \text{ où } f(X_{k+1}) < f(X_k) \end{array} \right. \\ \text{Sinon } k = k + 1 \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Une première méthode pour trouver le paramètre α , appelée "backtracking", consiste à diviser α par 2 (en partant de la valeur initiale $\alpha = 1$) et réitérer cette opération jusqu'à ce que la relation $f(X_k + \alpha \Delta X_k) < f(X_k)$ soit vérifiée. Cette méthode a l'avantage d'être peu coûteuse mais s'avère inadaptée lors de la résolution de problèmes fortement non linéaires.

Une autre méthode, appelée "recherche linéaire", consiste à trouver α en minimisant la fonction linéaire suivante :

$$\varphi(\alpha) = f(X_k + \alpha \Delta X_k) \quad (3.66)$$

Rappelons que si f est différentiable, le pas optimal $\bar{\alpha}$ peut être caractérisé par :

$$\begin{cases} \varphi'(\bar{\alpha}) = 0, \\ \varphi(\bar{\alpha}) \leq \varphi(\alpha) \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha} \quad (3.67)$$

Autrement dit, $\bar{\alpha}$ est le minimum local de φ qui assure de plus la décroissance de f . Dans ce cas, trouver α par une méthode de recherche linéaire exacte peut entraîner le calcul un grand nombre de fois de la fonction φ : ce qui peut être dissuasif du point de vue du temps de calcul. Dans la pratique, on utilise une approche équivalente en invoquant le fait que les composantes de R_{k+1} doivent disparaître dans la direction de descente ΔX_k :

$$\varphi'(\alpha) \approx s(\alpha) = R_{k+1} \cdot \Delta X_k = 0 \quad (3.68)$$

où ΔX_k est fixée et R_{k+1} est fonction de α (i.e. $R_{k+1} = R(X_k + \alpha \Delta X_k)$).

Le but est donc de trouver α qui va annuler la fonction s . D'un point de vue numérique, on fixe un critère d'arrêt de recherche de α par [Crisfield, 1991] :

$$\begin{cases} \left| \frac{s(\alpha)}{s(\alpha = 0)} \right| < \beta_{1s} \\ \alpha < \text{Tol} \end{cases} \quad (3.69)$$

[Crisfield, 1991] propose de fixer β_{1s} autour de 0.8 par expérience. Si α est trop petit l'itéré X_{k+1} est trop proche de X_k et risque donc d'augmenter le nombre d'itérations dans l'algorithme de Newton-Raphson, c'est pourquoi on choisira $\text{Tol} = 0.01$.

Notons ici que le cas $\alpha = 0$ correspond à :

$$s_0 = s(\alpha = 0) = R_{k+1}(\alpha = 0) \cdot \Delta X_k = R_k \cdot \Delta X_k \quad (3.70)$$

on retrouve le résidu issu de l'itération précédente.

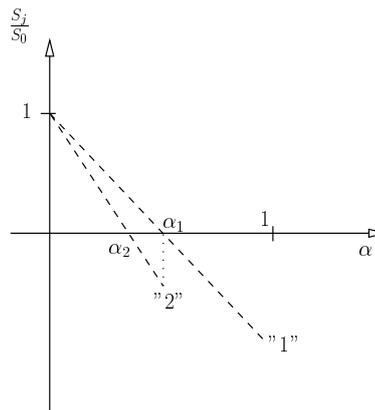
Finalement, chercher le paramètre α minimisant la fonction φ de (3.66) revient à trouver α annulant la fonction s de (3.68) à l'aide du critère d'arrêt (3.69). Dans la procédure de recherche linéaire, la recherche du paramètre optimum $\bar{\alpha}$ de (3.68) devient un point clé. [Crisfield, 1991] suggère d'utiliser une simple technique d'interpolation ou d'extrapolation selon différents cas en seulement deux "coups".

Initialement, la recherche linéaire débute pour $\alpha = 1$ qui correspond à une itération de Newton-Raphson basique (3.64). Deux possibilités, pour le calcul de α_1 , sont alors possibles mais le cas généralement rencontré (interpolation) est représenté sur les figures (FIG. 3.7(a)) et (FIG. 3.7(b)).

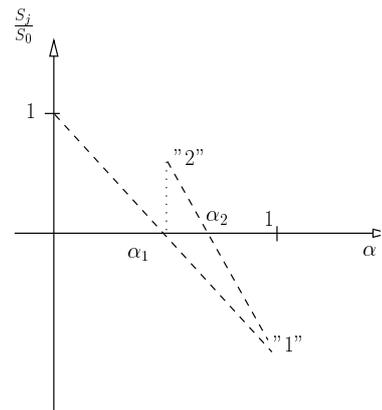
Le calcul de α_2 sera calculé par interpolation soit entre $\frac{s_2}{s_0}$ (noté par "2" par les figures) et $\frac{s_0}{s_0}$ comme le montre la figure (FIG. 3.7(a)), soit entre $\frac{s_2}{s_0}$ et $\frac{s_1}{s_0}$ comme le montre la figure (FIG. 3.7(b)).

Dans le cas où $\frac{s_1}{s_0}$ est proche de 1, une extrapolation engendrerait une valeur élevée de α pouvant entraîner un nombre excessif d'itérations ou une divergence. Dans la pratique, si les deux cas décrits par les figures (FIG. 3.7(c)) et (FIG. 3.7(d)) sont rencontrés la recherche linéaire n'est pas activée et on fixe la valeur de α à 1.

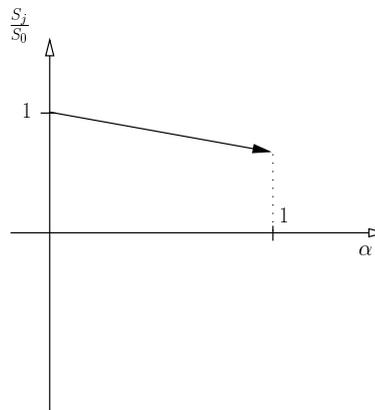
Des tests numériques, décrits plus loin dans ce manuscrit, ont montré de manière significative l'apport d'une telle méthode tant au niveau de la convergence de l'algorithme de Newton Raphson qu'au niveau des temps de calcul.



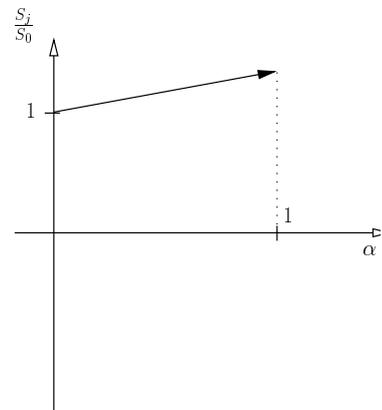
(a) Interpolation - cas 1



(b) Interpolation - cas 2



(c) Extrapolation - cas 1



(d) Extrapolation - cas 2

FIG. 3.7 – Recherche simple et rapide du paramètre α

Chapitre 4

Validation et exploitation du logiciel Thercast[®] pour la coulée continue d'aciers

Sommaire

4.1	Validation du problème thermique	88
4.1.1	Présentation et mise en données	88
4.1.2	Résultats thermiques	90
4.2	Résultats obtenus pour la machine de Sollac - Dunkerque . .	95
4.2.1	Présentation de la machine et mise en données	95
4.2.2	Prédiction du gonflement entre les rouleaux	97
4.2.2.1	Principe du calcul du gonflement entre les rouleaux de soutien	97
4.2.2.2	Résultats de gonflement	98
4.2.3	Prédiction de défauts : analyse des contraintes	104
4.2.3.1	Changement de repère	104
4.2.3.2	Résultats de contraintes	106
4.2.3.3	Prédiction de criques	112
4.2.4	Quelques mots sur l'optimisation du temps de calcul	114
4.3	Cas 3D : la machine de coulée d'Hagondange	116
4.3.1	Présentation de la machine	116
4.3.2	Résultats thermiques	118
4.3.3	Résultats Mécaniques	119
4.3.3.1	Résultats en déformations	119
4.3.3.2	Résultats en contraintes	121

Ce chapitre met en pratique notre approche globale instationnaire pour des configurations réelles de machine de coulée continue associées à différentes géométries de produit coulé :

- des brames sur la machine de Sollac Dunkerque (Arcélor),
- des blooms pour la machine d'Hagondange (Ascométal).

Avant de traiter ces deux cas, une première partie est consacrée à la validation du problème thermique en stratégie globale instationnaire. L'absence d'essais et d'études mécaniques ne permet pas d'en faire de même pour la validation du problème mécanique. En effet, dans le cadre du projet OSC, des essais sur pilote étaient planifiés à l'IRSID. Malheureusement, aucune mesure de gonflement n'a pu être effectuée. D'une part de fortes vibrations, liées à l'oscillation de la lingotière dont la fréquence augmente avec la vitesse de coulée et aux ultra sons imposés pour éviter le collage de la peau solide à la paroi de la lingotière, et d'autre part, un nuage de vapeur très dense se formant dans le refroidissement secondaire - qui résulte de l'arrosage de surface du produit chaud par les gicleurs d'eau froide - ont fait échouer toutes tentatives de mesures.

Nous ne sommes pas capable, à l'heure actuelle, de valider le problème mécanique avec notre approche globale instationnaire. Il est en effet bien plus simple, en coulée continue d'acier, d'effectuer des essais numériques que des essais expérimentaux.

4.1 Validation du problème thermique

Pour valider la résolution du problème thermique avec notre approche globale instationnaire (notée GI), nous avons utilisé la géométrie de la machine de Fos-sur-Mer. Cette machine aux dimensions imposantes permet de couler, à une vitesse de coulée de $1,25 \text{ m}\cdot\text{min}^{-1}$, des brames d'acier de largeur 1.80 m à 2.20 m et d'une épaisseur de 22 cm. En l'absence d'outils de calcul suffisamment puissants pour ambitionner de modéliser l'ensemble du procédé, nous nous sommes limités à travailler sur une portion de brame située à cœur : nous parlerons dans ce cas de brame à largeur réduite ou d'approche pseudo-bidimensionnelle.

4.1.1 Présentation et mise en données

La validation du problème thermique a été faite en comparant nos résultats issus d'une approche globale instationnaire et ceux obtenus en utilisant une approche de type tranche instationnaire également possible avec le logiciel Theracast[®].

Hormis l'évolution du produit dans la machine de coulée continue (rôle essentiel pour la mise œuvre des approches instationnaires), le problème mécanique peut-être considéré comme arbitraire dans le cas d'un calcul purement "thermique". Aussi, nous modélisons mécaniquement l'acier comme un milieu newtonien. Pour faciliter la convergence du problème mécanique, nous choisissons une viscosité arbitraire suffisamment élevée et constante. Par ailleurs, les termes d'inertie ($\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$) et la gravité ($\rho \vec{g}$) sont négligés.

Les données du problème thermique sont supposées constantes et proches de celles utilisées pour simuler le refroidissement d'un acier. Nous avons choisi :

$$\begin{aligned}
 k &= 40 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \\
 \rho &= 7.3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \\
 c_p &= 700 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\
 &\text{Chemin de solidification linéaire entre } 1528^\circ\text{C} \text{ et } 1495^\circ\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Au cours de son évolution dans la machine, la brame va passer dans plusieurs zones de refroidissement dont les valeurs sont répertoriées dans le tableau (TAB. 4.1)

Type de refroidissement	Longueur métallurgique (cm)	Flux (type=1) W.m^{-2} ou h (type=2) $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$
1	82	1 310 000
2	116	980
2	203,5	841
2	295,4	695
2	387,4	689
2	480,8	641
2	599,3	558
2	789,1	450
2	1174,5	386
2	1584	308
2	2227,7	273
2	3000	262

TAB. 4.1 – Conditions aux limites pariétales (grand coté) pour une machine de Fos-sur-Mer.

Le maillage est constitué d'une seule couche d'éléments. Il est déterminé par deux plans de symétrie et est situé dans le plan (Oz), plan longitudinal médian de la machine de coulée

(FIG. 4.1(a)). La taille du maillage initial est de 8 mm pour les éléments proches de la frontière et de 15 mm pour le reste, (FIG. 4.1(b)). Notre "zone tampon" (*i.e.* maillage initial) est donc composée de 383 nœuds et de 981 éléments et se situe au dessus du ménisque.

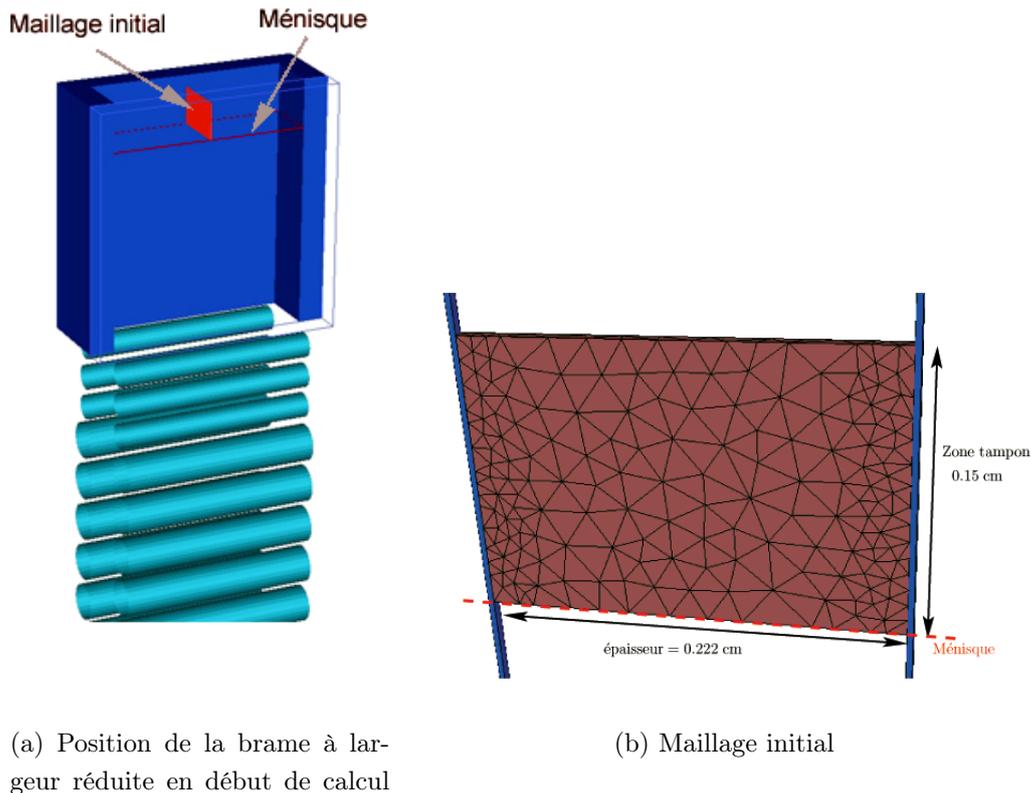


FIG. 4.1 – Présentation du maillage initial en vue d'un calcul global instationnaire sur une brame à largeur réduite (approche pseudo-2D)

4.1.2 Résultats thermiques

Le maillage va s'agrandir progressivement jusqu'à ce que le puits pâteux se ferme définitivement. La figure (FIG. 4.2) montre à différentes longueurs métallurgiques (*i.e.* 0, 3, 7, 13, 16 et 20 mètres) l'évolution de la fraction liquide. La fréquence de remaillage est périodique : tous les 3 incréments de temps ($\Delta t = 1$ s). Malgré cette croissance continue, les coûts dus au remaillage restent constants tout au long du calcul car proportionnels au nombre de nœuds dans la zone tampon. Le maillage final est composé de 58118 nœuds

pour 174099 éléments et a été atteint après 6 jours de calcul[†] pour 1010 incréments. Bien qu'importante, cette durée reste raisonnable au regard du nombre de nœuds.

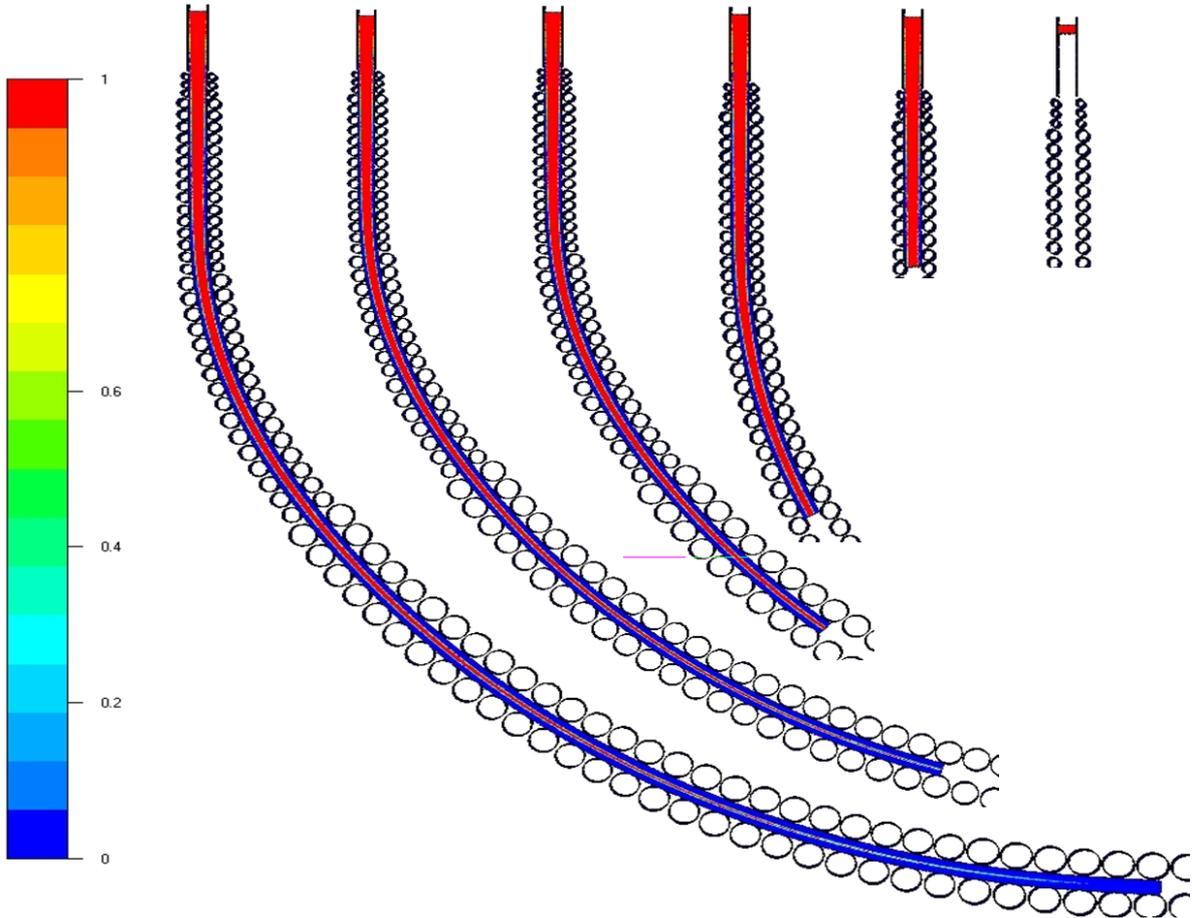


FIG. 4.2 – États successifs (0, 3, 6, 10, 15 et 21 mètres) de la brame et de la fraction liquide pour la géométrie de Fos-sur-Mer.

Nous avons adapté le logiciel Theracast[®] pour faire un calcul de type tranche instationnaire. Le logiciel en mode tranche instationnaire a été comparé et validé avec le logiciel commercial Abaqus[®] et le logiciel R2Sol[®] également développé au CEMEF, [Costes *et al.*, 2003]

Nous donnons à la figure (FIG. 4.3) l'évolution de la température à cœur et en peau en fonction de la longueur métallurgique obtenus avec les différents codes. L'évolution de la température à cœur permet d'estimer la fin des puits liquide et pâteux qui se situe à 11.5 et 19 mètres respectivement. On note que le passage d'une zone de refroidissement à une

[†]sur Pentium3, 1.8 GHz et 512 Mo de Ram

autre est caractérisé par un léger réchauffement en peau. Ceci provient de la décroissance du coefficient d'échange moyen h au long de la machine, d'une zone à l'autre (cf. (TAB. 4.1)). Au début d'une nouvelle zone, on a donc un phénomène de réchauffement de la peau par le cœur du produit.

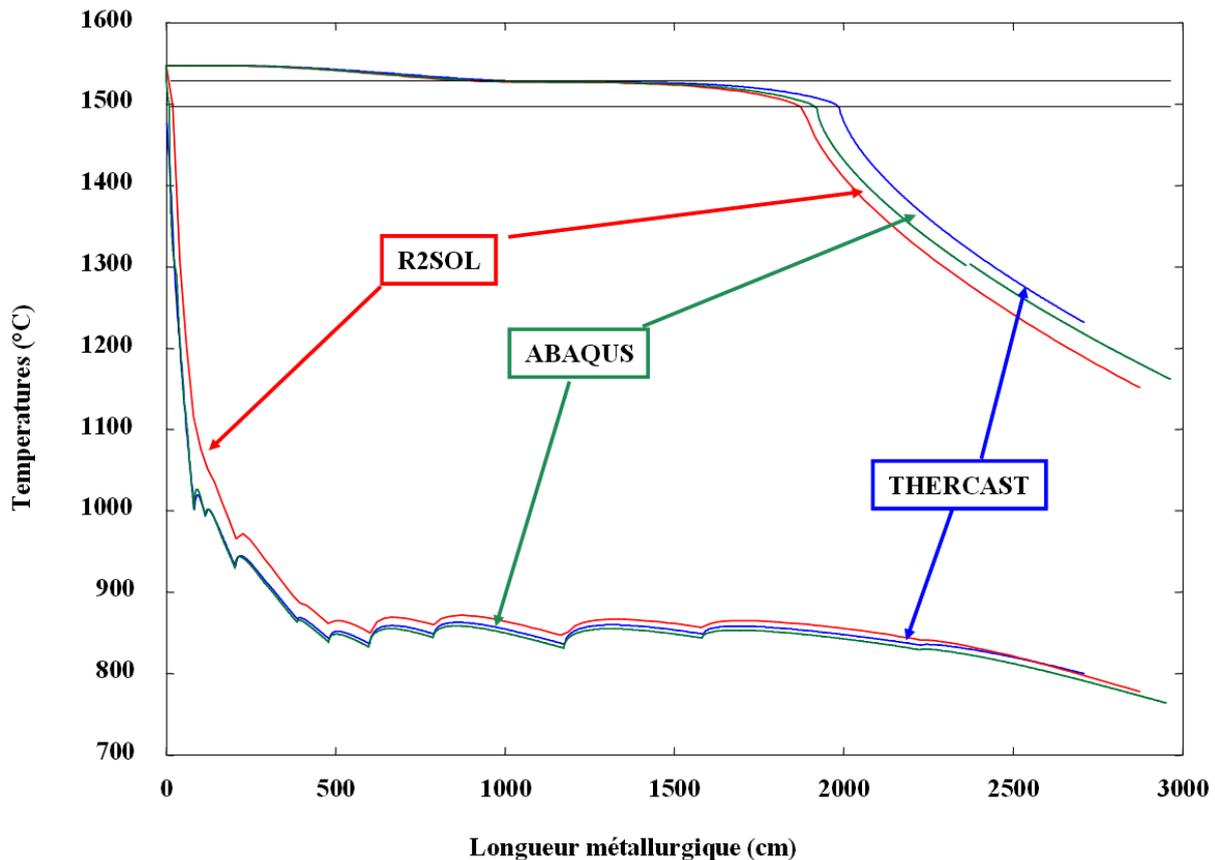


FIG. 4.3 – Évolution de la température à cœur et en peau de la brame. Confrontation entre différents logiciels pour la méthode tranche instationnaire

La courbe en bleu tracée sur la figure (FIG. 4.4) est issue du calcul tranche instationnaire calculé avec Thercast[®]. Elle est comparée avec celle issue d'un calcul global instationnaire, en rouge. Malgré les quelques variations en haut de la machine, les courbes sont en parfaite adéquation.

Pour pouvoir estimer le temps nécessaire à l'établissement de l'état stationnaire nous avons enregistré l'évolution de la température en différents points fixes de l'espace. Nous avons choisi trois points pour 3 sections de la brame à des longueurs métallurgiques de 1, 7 et 15 mètres. Dans une même section, nous définissons les capteurs de température de la façon suivante :

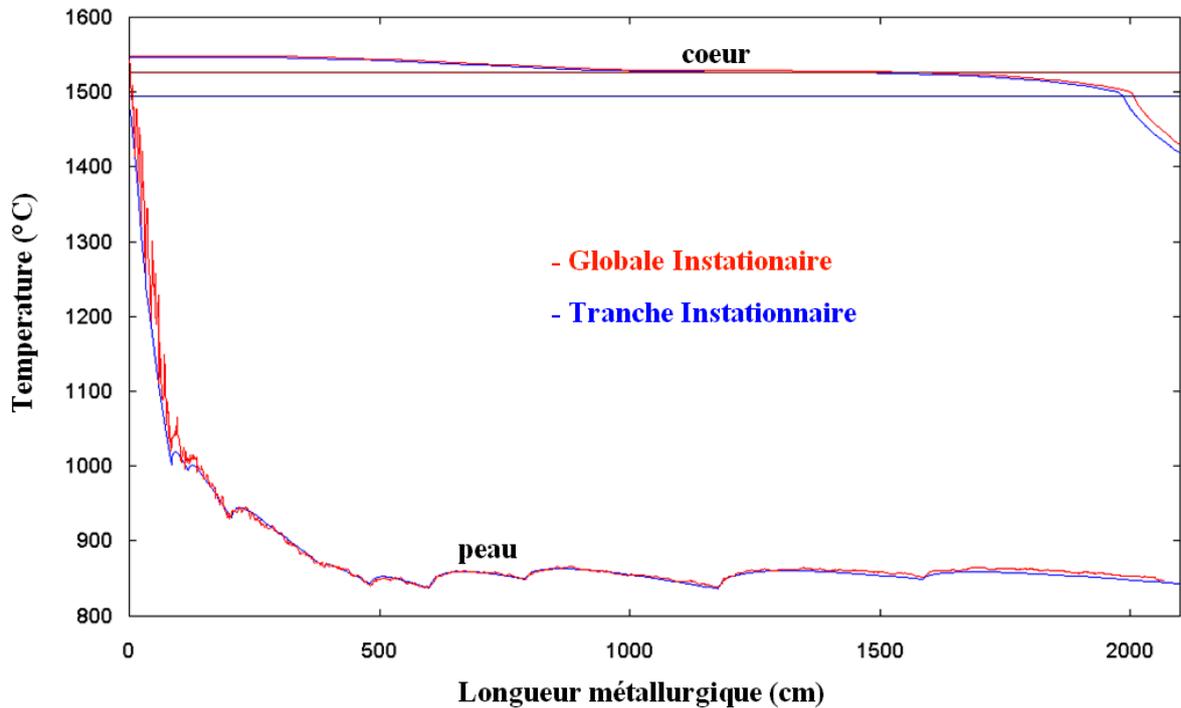
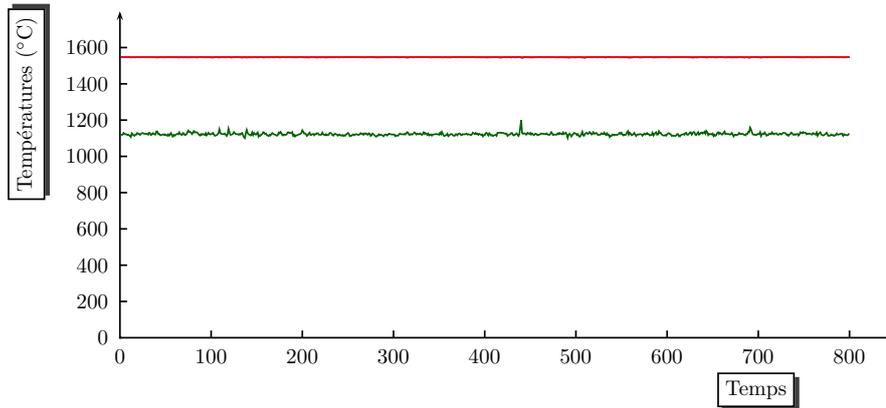


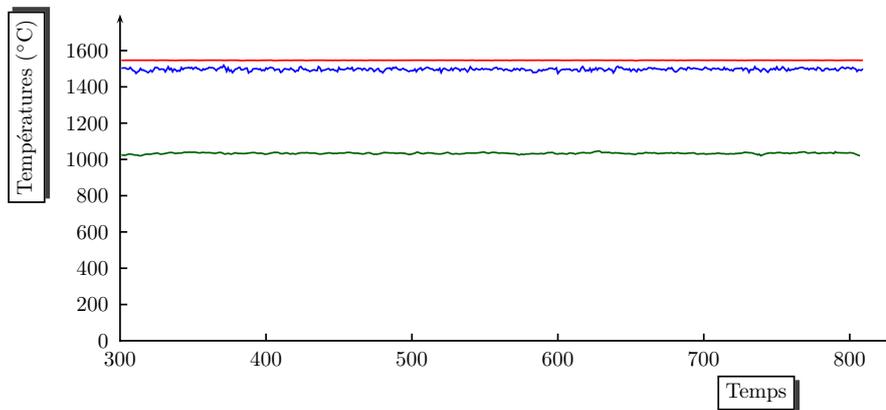
FIG. 4.4 – Évolution de la température à cœur et en peau de la brame. Confrontation entre les deux méthodes instationnaires

- Un premier capteur, en **rouge**, situé à cœur de la section considérée,
- Un deuxième capteur, en **vert**, situé à la surface extrados de la brame de la section,
- Un troisième situé, en **bleu**, au milieu des deux premiers.

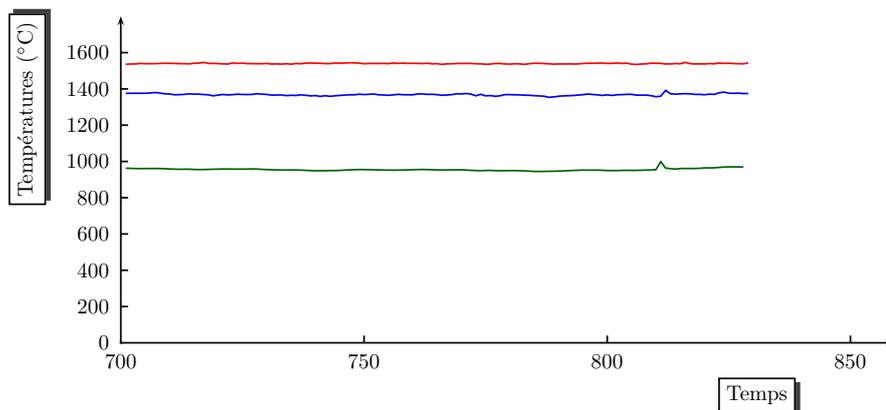
Ces capteurs sont de nature eulérienne : fixes dans l'espace. On recherche à chaque fois l'élément qui le contient et on interpole au sens des éléments finis. La figure (FIG. 4.5) représente les évolutions de la température au cours du temps pour ces différents capteurs. Nous pouvons conclure de ces trois figures que l'état stationnaire est très rapidement atteint (quasi immédiatement). Ceci est dû au choix de la condition adiabatique (flux nul) sur le groupe de faces représentant le mannequin. Les quelques oscillations présentes sont dues au maillage non structuré trop grossier qui "défile" par rapport aux capteurs.



(a) Longueur métallurgique : 1 m



(b) Longueur métallurgique : 7 m



(c) Longueur métallurgique : 15 m

FIG. 4.5 – Évolution de la température en fonction du temps en trois points de la section à une longueur métallurgique donnée. Pour chaque graphique, l'origine des abscisses correspond au temps auquel le mannequin atteint la section donnée

4.2 Résultats obtenus pour la machine de Sollac - Dunkerque

4.2.1 Présentation de la machine et mise en données

La machine de Dunkerque permet de couler des brames d'une largeur de 1.80 mètre pour une épaisseur de 0.25 mètre. Il s'agit d'une machine courbe avec un rayon de courbure unique de 10.5 mètres. Notre étude a été réalisée pour une lingotière de 0.47 m suite à une mauvaise lecture des plans de la machine. Cette longueur est en fait trop courte pour le type de produit coulé (en réalité, la lingotière a une longueur de 0.8 m environ). La peau solide qui se crée dans la lingotière est alors moins épaisse que lors de la coulée réelle et ceci a pour conséquence une solidification moins avancée à longueur métallurgique donnée. Les zones de refroidissement de la brame sont au nombre de 10 et se trouvent en annexe A de ce manuscrit ainsi que les variables thermo-dépendantes (ρ , c_p , k et f_s) du problème thermique.

Pour information, la fin du puits pâteux calculé se situe autour d'une longueur métallurgique de 21 mètres et la fin du puits liquide calculé est autour de 13 mètres.

Comme pour la machine de Fos-sur-Mer, nos calculs ont été réalisés sur une tranche à largeur réduite dans le plan moyen longitudinal (approche pseudo-2D). La vitesse de coulée est de $0.86 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$, la température de coulée est de 1528° C .

Dans sa thèse, [Heinrich, 2003] a pu mener une étude de sensibilité à la taille de maille et au pas de temps. En tenant compte des remarques de [Dalin, 1987], il en déduit que le maillage doit être assez fin en peau pour une meilleure estimation des déflexions. Ainsi, nous avons fait notre calcul sur un maillage où la taille de maille à cœur est de 0.015 m et de 0.008 m en peau, (FIG. 4.6). La longueur de la zone tampon est de 0.15 m ; le maillage initial est composé de 600 nœuds pour 2000 éléments.

Concernant les données thermomécaniques, nous rappelons ici les hypothèses que nous avons faites pour l'acier 18M5 :

- À l'état liquide, l'acier a un comportement newtonien de viscosité $10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (valeur arbitrairement élevée pour éviter la mise en mouvement du puits liquide).
- À l'état solide, nous utilisons le modèle rhéologique proposé par [Kozłowski *et al.*, 1992], plus précisément le modèle II. Ce modèle est équivalent au modèle élasto-viscoplastique de type multiplicatif que nous avons présenté au §2.3.2.1. Il est à noter que dans ce

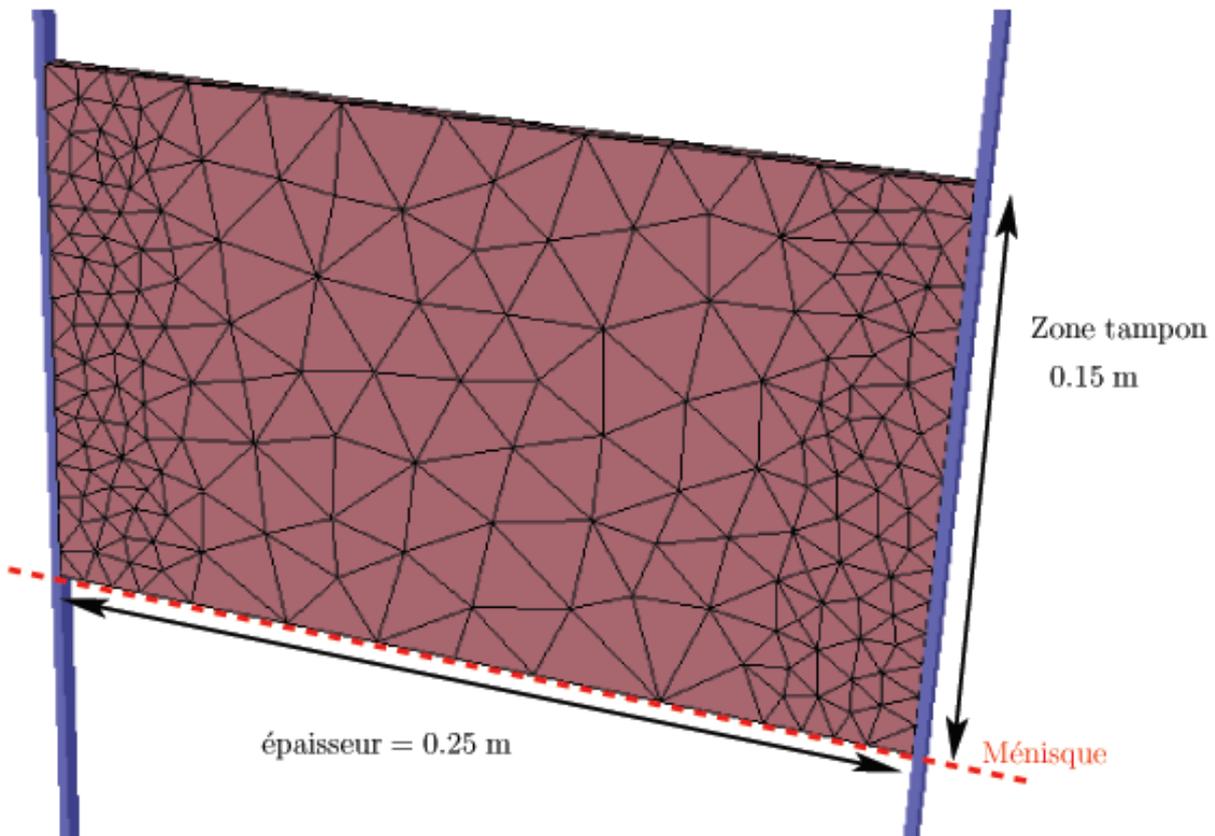


FIG. 4.6 – Zone tampon pour "Dunkerque" (maillage initial)

modèle II, la contrainte seuil σ_s est systématiquement considérée nulle. Par ailleurs, à partir de la données des divers coefficients du modèle II de [Kozłowski *et al.*, 1992], dépendant principalement selon les auteurs de la température et du pourcentage de carbone, il est facile d'en déduire l'évolution des coefficients K , m et n de notre modèle (2.20) pour un acier donné en fonction de la température.

- La zone pâteuse est décrite par une loi visco-plastique faisant le lien par interpolation entre les comportements élasto-viscoplastique de la zone solide et newtonien de la zone liquide.
- Pour le détail sur l'obtention de tous les paramètres rhéologiques, nous renvoyons le au chapitre 4 de la thèse de [Heinrich, 2003].
- La température du solidus est de 1418°C et celle du liquidus de 1508°C.

Un calcul de 15 jours sur Pentium3, 1.8 GHz et 512 Mo de Ram a permis d'atteindre, avec un pas de temps constant de 1 s (soit 1605 incréments), la longueur métallurgique

de 23 mètres pour un maillage final composé de 80600 nœuds pour 380000 éléments.

4.2.2 Prédiction du gonflement entre les rouleaux

Avant de présenter les résultats de gonflement obtenus, détaillons le principe de son calcul pour qu'aucune confusion ne soit faite.

4.2.2.1 Principe du calcul du gonflement entre les rouleaux de soutien

La forme extérieure du produit est déduite de l'évolution mécanique du maillage. Il est alors possible de déduire le gonflement entre les rouleaux en observant le comportement de la frontière du maillage. Nous pouvons calculer le gonflement à partir de la distance par rapport au centre géométrique de la brame. En effet, cette grandeur nous permet de calculer la distance qu'il y a entre chaque nœud et le lieu des points définissant le centre nominal du produit. Le principe du calcul du centre géométrique de la brame est obtenu à partir des considérations géométriques. Dans le cas de la coulée de brames, la figure 4.7 illustre notre stratégie de calcul des déflexions (positives ou négatives) à l'intrados et à l'extrados de la brame et donc du gonflement en un point frontière. Sur cette figure nous avons volontairement exagéré l'échelle des gonflements qui sont dans la pratique inférieurs à 1 mm.

Il suffit de savoir dans quelle zone géométrique se situe le point en question. Connaissant alors la position du centre de courbure et le rayon de courbure instantané de la machine à cet endroit, on en déduit les coordonnées du centre de la brame par :

$$\vec{x}_I = \left(R_{\text{courb}} - \frac{e}{2} \right) \frac{\vec{x} - \vec{x}_{\text{courb}}}{\|\vec{x} - \vec{x}_{\text{courb}}\|} + \vec{x}_{\text{courb}} \quad (4.2)$$

avec :

- \vec{x}_I est le vecteur position du centre géométrique I de la brame correspondant au vecteur position \vec{x} du point M de la frontière du maillage,
- R_{courb} est le rayon de courbure de la zone géométrique considérée (distance entre le centre de courbure et l'extrados nominal),
- e est l'épaisseur de la brame,
- \vec{x}_{courb} est le vecteur position du centre de courbure de la machine de la zone géométrique considérée.

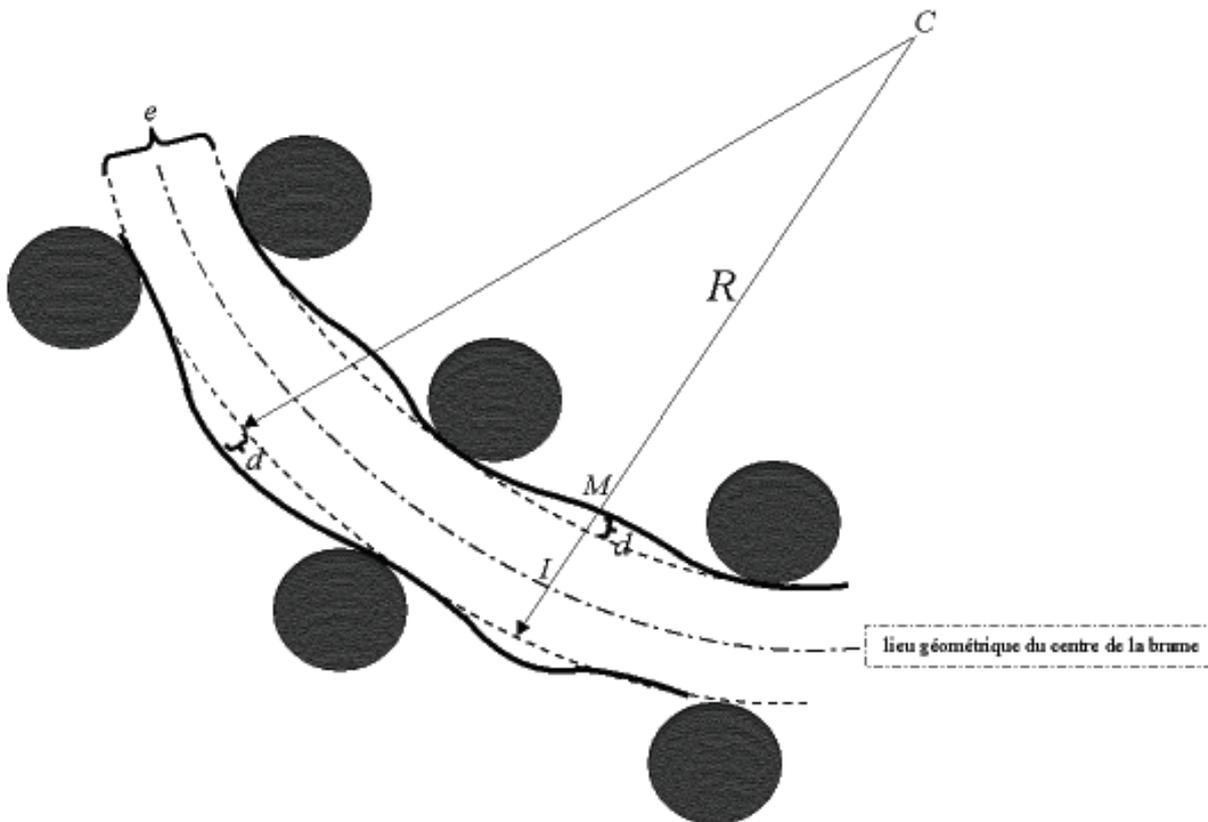


FIG. 4.7 – Principe de calcul du gonflement (en coulée de brames), [Heinrich, 2003]

La déflexion d au nœud frontière M est alors donnée par :

$$d = \|\vec{x} - \vec{x}_I\| - \frac{e}{2} \quad (4.3)$$

4.2.2.2 Résultats de gonflement

Nous présentons ici les courbes des déflexions à l'extrados et à l'intrados que l'on peut obtenir entre les rouleaux de soutien. Nous pouvons d'ores et déjà affirmer que la stabilité ne sera pas aussi immédiate que pour le champ de température. En effet, la machine ne présente pas une courbure régulière, pour plusieurs raisons (contraintes de construction, d'exploitation, ...). En conséquence, on peut s'attendre, d'un point de vue mécanique à ce que la progression du domaine de calcul dans la machine affecte non seulement la région proche du groupe de faces représentant le mannequin, mais aussi les régions amont. On peut aussi ajouter que la stabilisation des facteurs de pénalisation affectés aux rouleaux n'est pas sans conséquence sur celle des résultats mécaniques.

Pour mettre en évidence ce phénomène et vérifier si la stabilisation des déflexions existe, nous avons choisi de calculer les déflexions à différents stades du calcul, à savoir quand la face représentant le mannequin se situe à différentes longueurs métallurgiques dans la machine de coulée continue.

Les figures (FIG. 4.8) et (FIG. 4.9) montrent l'évolution du gonflement, respectivement, à l'intrados et l'extrados de la brame en fonction de la longueur métallurgique. Les points noirs sur l'axe des abscisses symbolisent l'emplacement des rouleaux. On représente :

- en **rouge**, lorsque le mannequin se trouve à 15 mètres,
- en **bleu**, lorsque le mannequin se trouve à 20 mètres,
- en **vert**, lorsque le mannequin se trouve à 23 mètres.

Une première lecture de ces graphiques montre que sur les 13.5 premiers mètres les courbes sont quasi identiques. Les déflexions maximales varient entre 0.2 et 0.4 mm en moyenne avec des "pics" vers 0.7 mm pour l'intrados alors que ces valeurs sont majorées de 0.1 mm pour l'extrados. On constate donc que le gonflement de la brame est quasi symétrique entre intrados et extrados.

Ceci montre, d'une part, que les **particularités de la machine** de Dunkerque (écartement entre les rouleaux irrégulier, par exemple) sont bien pris en compte par le calcul : déflexions plus importantes autour de 4.5, 8 ou 10 mètres et, d'autre part, que la géométrie et plus particulièrement la **courbure de la machine** a une influence sur ces résultats de gonflement. En effet, cette courbure induit un espace inter-rouleaux légèrement supérieur à l'extrados, ce qui est la cause d'un gonflement légèrement plus prononcé.

La conséquence immédiate de la stabilisation des facteurs de pénalisation se traduit par un gonflement exagéré dans les zones proches du mannequin que ce soit à l'intrados ou à l'extrados. Nous avons choisi une valeur volontairement basse pour l'initialisation du facteur de pénalisation associé à chaque rouleau, lorsque celui-ci est atteint par la brame (d'où la présence de "pics" de déflexion en tête de brame). En effet, nous avons constaté qu'une valeur trop grande a pour effet de perturber le conditionnement du système et donc d'empêcher la convergence dans l'algorithme de Newton-Raphson. Dans notre cas, la valeur initiale est de 10^6 et les facteurs de pénalisation vont se stabiliser autour de 10^{10} en moyenne, une dizaine d'incrément de temps après le passage du mannequin.

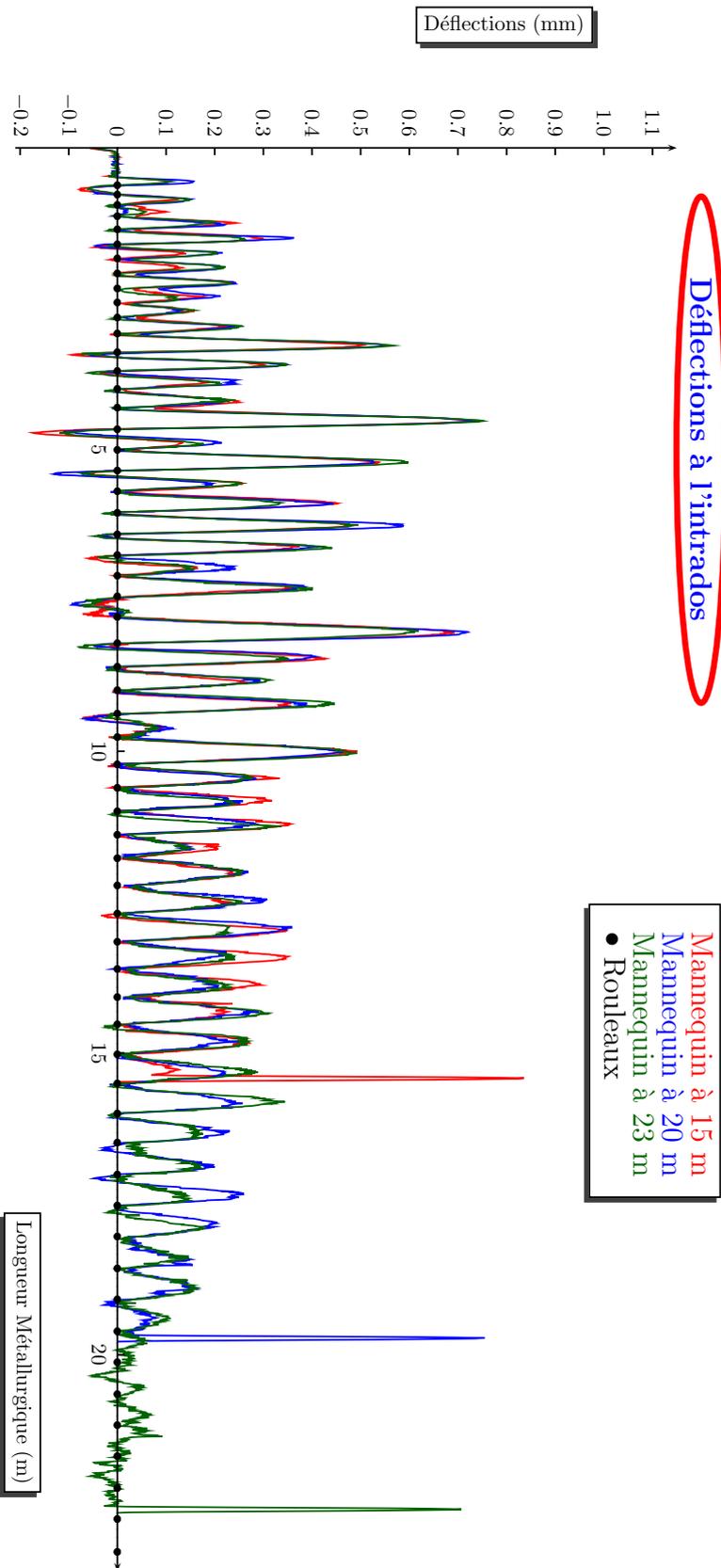


FIG. 4.8 – Évolution du gonflement à l'intrados pour différentes positions du mannequin

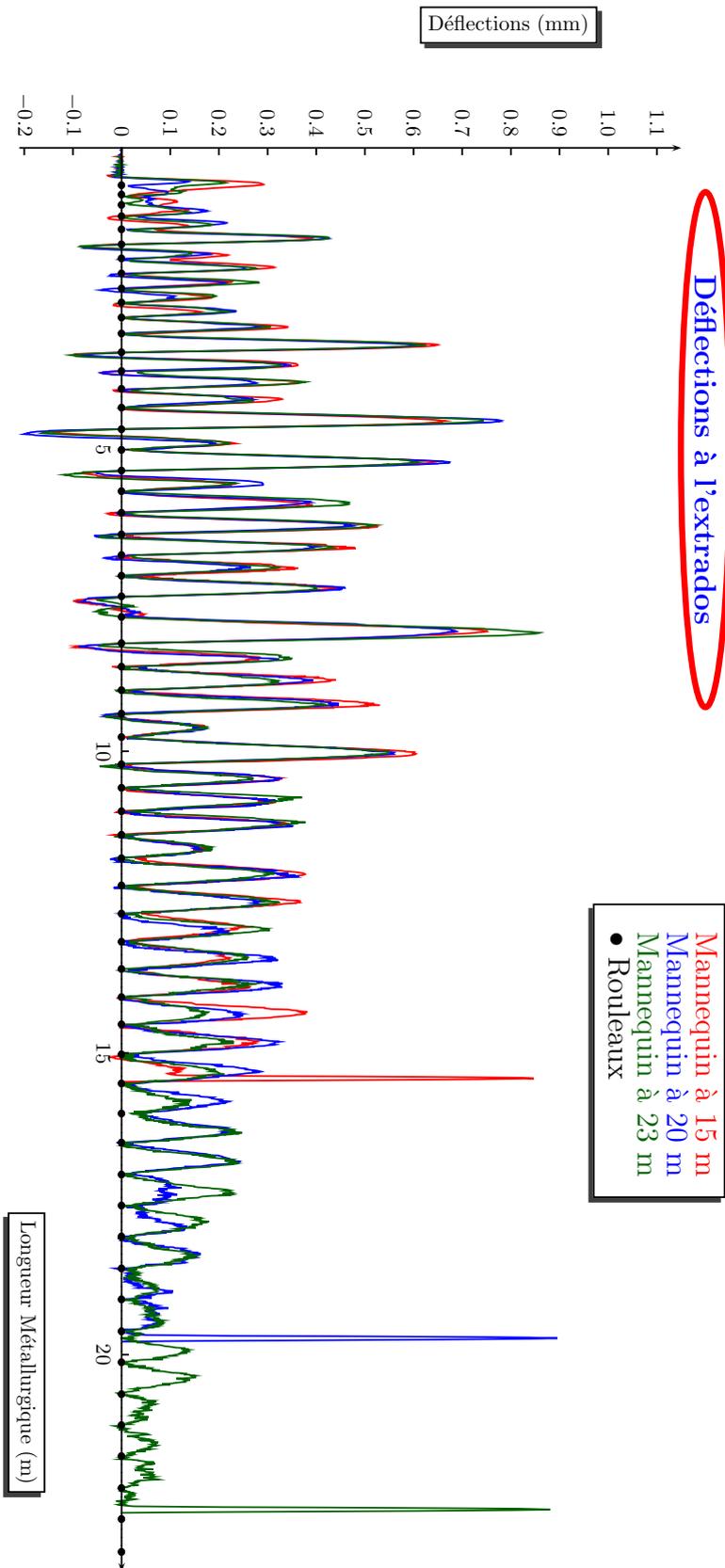


FIG. 4.9 – Évolution du gonflement à l'extrados pour différentes positions du mannequin

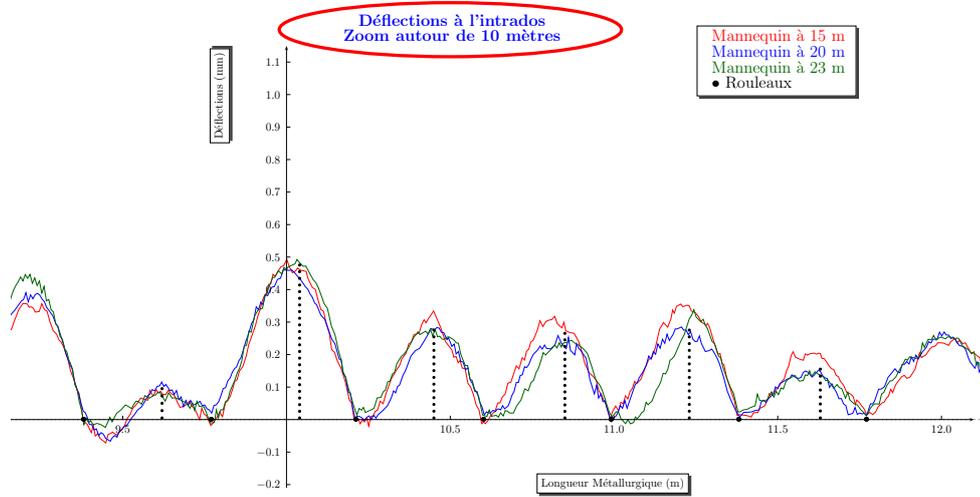
Sur chacune des deux figures, on constate qu'au delà de 13.5 mètres, la courbe rouge se démarque des deux autres. C'est sur les 1.5 mètres restant ($15 - 13.5$) que les courbes de déflexion vont petit à petit se stabiliser. On retrouve ce phénomène pour la courbe bleue qui se détache de la courbe verte vers 17.5 mètres. On peut donc estimer qu'il faut 1.5 à 2 mètres pour obtenir un état quasi stationnaire du gonflement.

Ces courbes mettent en évidence que les rouleaux sont bien pris en compte : une valeur nulle autour des rouleaux prouve que le produit est tangent aux rouleaux. Cette pénétration effective quasi nulle résulte de la conjugaison de la bonne maîtrise de la pénétration numérique, due au contrôle incrémental des coefficients de pénalisation associés aux rouleaux et de l'augmentation du rayon de ces derniers (cf §3.4.3.2). Toutes ces remarques (intensités des déflexions, état stationnaire, différences entre l'intrados et l'extrados, "pénétration objectif" des rouleaux) sont encore plus explicites en faisant un zoom sur une zone de la courbe, (FIG. 4.10). On remarque en plus que la flèche de gonflement (représentée par les segments de droite en pointillés noirs) entre deux rouleaux successifs est plus proche du rouleau aval. Ceci est en conformité avec les travaux de [Dalin, 1987], [Wunnenberg, 1978] et [Lamant *et al.*, 1984] qui montrent que le profil du gonflement ressemble à un profil "en goutte d'eau". Ce décalage vers l'aval de la déflexion est dû en effet aux trois facteurs suivant :

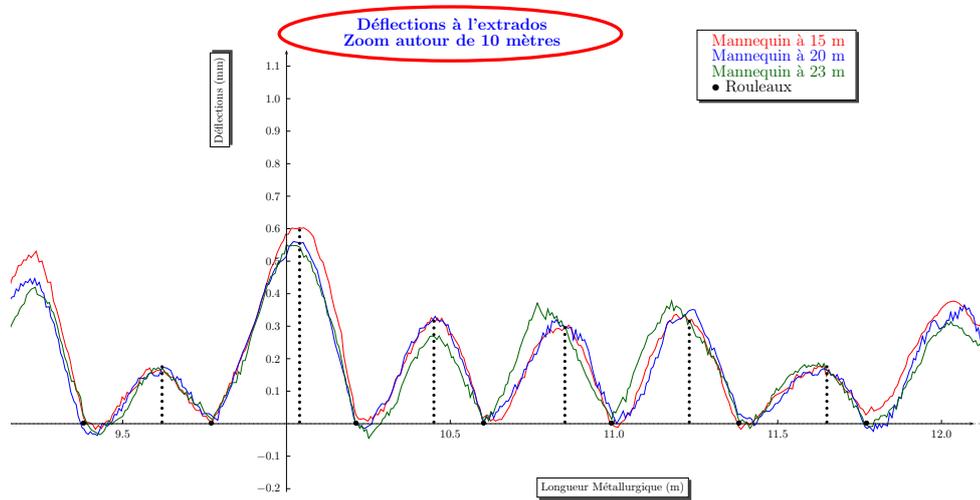
- mécanique de poutre en appui, subie par la coque solide entre deux rouleaux ;
- fluage viscoplastique du matériau ;
- vitesse de déplacement du matériau, vers l'aval.

Enfin, on note la présence de déflexions négatives et généralement juste après les rouleaux (comme pour les rouleaux situés autour de 9.5 mètres). Une étude menée par l'IRSID sur le site de Dunkerque montrait l'apparition de déflexions négatives après le passage d'un rouleau, [Lamant *et al.*, 1984].

D'autre part, on note une certaine perturbation des courbes avec des oscillations. La finesse de notre maillage doit très certainement jouer un rôle important : le maillage non structuré combiné à notre approche globale instationnaire, entraînent que les nœuds frontière ne rentrent pas en contact et ne sont pas relâchés de la même manière pour un rouleau donné. Quoi qu'il en soit, le modèle permet une très bonne appréhension des gonflements sur toute la machine.



(a) Zoom à l'intrados



(b) Zoom à l'extrados

FIG. 4.10 – Zoom autour de 10 mètres : flèches de gonflement proches du rouleau aval

Enfin, une remarque que l'on peut faire sur ces prévisions de gonflement est que, ayant été établies en analyse pseudo-2D, elles représentent a priori un majorant par rapport au gonflement réel. En effet, comme le souligne [Dalin, 1987], le gonflement réel est limité par le caractère tridimensionnel de la déformation : le gonflement est maximum dans le plan médian de la brame et décroît en allant vers les bords. Dans sa thèse, [Dalin, 1987] a analysé cet effet de bord. Il a montré que le gonflement maximum calculé en 3D tend asymptotiquement vers la valeur calculée en 2D lorsque le rapport largeur-brame/écartement-rouleaux augmente. À partir d'une valeur 3.5 de ce rapport, l'écart entre deux valeurs est très faible. Dans notre cas, on a typiquement :

$$\frac{\text{largeur-brame}}{\text{écartement-rouleaux}} \approx \frac{1.9}{0.4} > 1$$

On peut donc affirmer que les valeurs de gonflement issues de notre analyse pseudo-2D sont représentatives des gonflements maximaux dans le plan longitudinal moyen de la machine.

4.2.3 Prédiction de défauts : analyse des contraintes

4.2.3.1 Changement de repère

Il est intéressant de représenter les cartes de contraintes et plus particulièrement celles dont les composantes sont dans le plan de coulée. Il faut noter que les isovaleurs des contraintes obtenues par le logiciel Theracast[®] sont exprimées dans le repère global $\mathcal{R}(x, y, z)$.

Or, pour mesurer d'une part toute l'influence de la machine sur le produit coulé (les rouleaux par exemple), il est préférable d'exprimer ce tenseur des contraintes dans le sens de la coulée et donc de tenir compte des différentes zones de courbure.

D'autre part, la majorité des critères de prédiction de criques dépendent des composantes de contraintes locales ou des vitesses de déformations. Par exemple, [Pascon, 2003], pour évaluer le risque d'ouverture de criques transverses en surface, propose un indicateur de risque pour son approche tranche instationnaire de type :

$$I_1 = \begin{cases} \max(0, \sigma_{33}) & \text{si } T \in]T_1; T_2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

où $]T_1; T_2[$ représente l'intervalle de températures, variable selon l'acier étudié, dans lequel l'apparition de criques est le plus probable car l'acier y présente une faible ductilité. La

contrainte σ_{33} est exprimée dans le repère local de la tranche (composante normale à la tranche) : elle correspond donc à la contrainte d'ouverture en mode I d'une fissure transverse en surface.

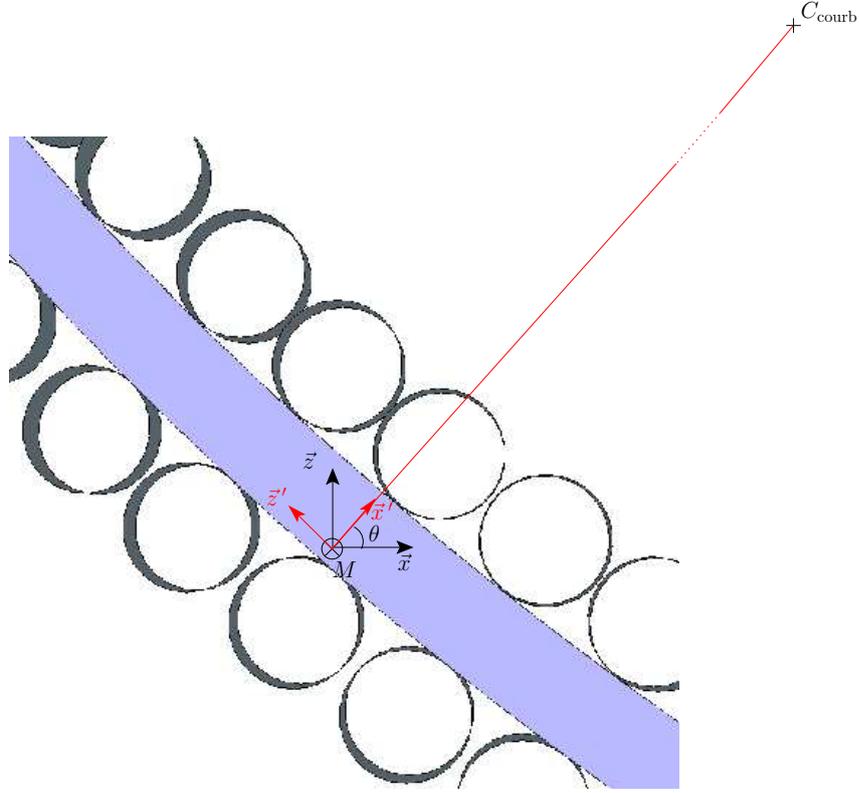


FIG. 4.11 – Changement de repère

Aussi, nous proposons un changement de repère pour exprimer les isovalues des contraintes σ . À l'aide des notations de la figure (FIG. 4.11), on exprime le tenseur des contraintes défini au point matériel M dans le repère local $\mathcal{R}'(x', y', z')$. L'axe x' est orienté suivant le vecteur $\overrightarrow{MC}_{\text{courb}}$, où C_{courb} est le centre de courbure de la zone dans laquelle se trouve M , l'axe z' est perpendiculaire à x' de telle sorte que $\mathcal{R}'(x', y', z')$ soit direct. Les axes y et y' sont quant à eux confondus. À chaque point M , le changement de repère se fait par une matrice de rotation d'angle θ . Le tenseur des contraintes σ' s'exprime dans le repère $\mathcal{R}'(x', y', z')$ sous forme matricielle :

$$\sigma' = P \sigma {}^tP \quad (4.5)$$

où P est la matrice de rotation par rapport à l'axe My :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{MC|_x}{\|MC\|} \\ \sin \theta = \frac{MC|_z}{\|MC\|} \end{cases}$$

4.2.3.2 Résultats de contraintes

Les figures (FIG. 4.12), (FIG. 4.13) et (FIG. 4.14) représentent les cartes des isovaleurs, lissées aux nœuds par le post-processeur, des contraintes $\sigma_{x'x'}$, $\sigma_{z'z'}$ et $\sigma_{x'z'}$. De manière globale et quelque soit la contrainte représentée, l'intensité des contraintes au point matériel varie selon sa position dans la machine de coulée continue. Pour chacune de ces figures, nous nous sommes focalisés sur deux zones :

- dans le haut de la courbure de la machine (longueur métallurgique ≈ 4 mètres),
- au niveau du décintrage, en bas de machine (longueur métallurgique ≈ 15 mètres).

Pour plus de lisibilité, nous avons fixé l'échelle des valeurs entre -5 et $+5$ MPa. On note de manière générale que les valeurs des contraintes sont similaires à l'intrados et à l'extrados en début de courbure mais qu'elles se différencient très nettement dans la zone de décintrage. On peut encore une fois, à la lecture de ces figures, mettre en évidence le rôle joué par la géométrie de la machine sur le comportement du matériau.

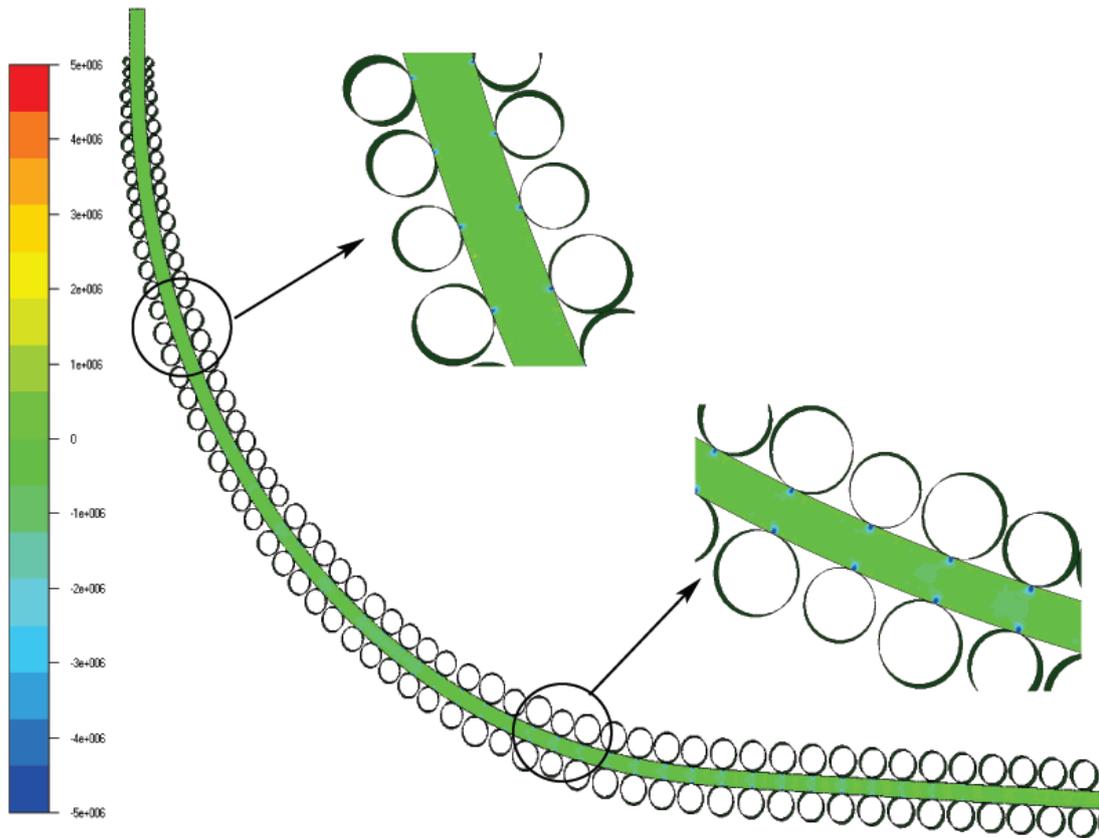


FIG. 4.12 – Isovaleurs du champ des contraintes $\sigma_{x'x'}$ (Pa) - contraintes dans la direction de l'épaisseur du produit.

La figure (FIG. 4.12) montre que les contraintes dans l'épaisseur ($\sigma_{x'x'}$) sont généralement faibles en peau et plus particulièrement dans la première partie de la machine et en fin de machine dans la partie horizontale. Mais elles restent élevées au passage des rouleaux et s'intensifient lors du décintrage. Ce phénomène diminue au fur et à mesure que le produit sort de la zone de décintrage. Ces résultats sont qualitativement tout à fait cohérents. En surface, sous chaque rouleau, $\sigma_{x'x'}$ est une contrainte de compression, négative, à l'opposé de la pression de contact. En surface libre entre les rouleaux, on ne retrouve pas exactement $\sigma_{x'x'} = 0$, correspondant à la condition de surface libre, mais une valeur faible. Ceci provient du fait que le calcul des contraintes en surface est délicat : si la pression, partie sphérique du tenseur, est bien calculée aux nœuds (donc en surface), la partie déviatoire n'est connue qu'au centre des tétraèdres, donc seulement *au voisinage* de la surface. Les résultats affichés sont donc tributaires d'une opérations de lissage effectuée a postéroiri.

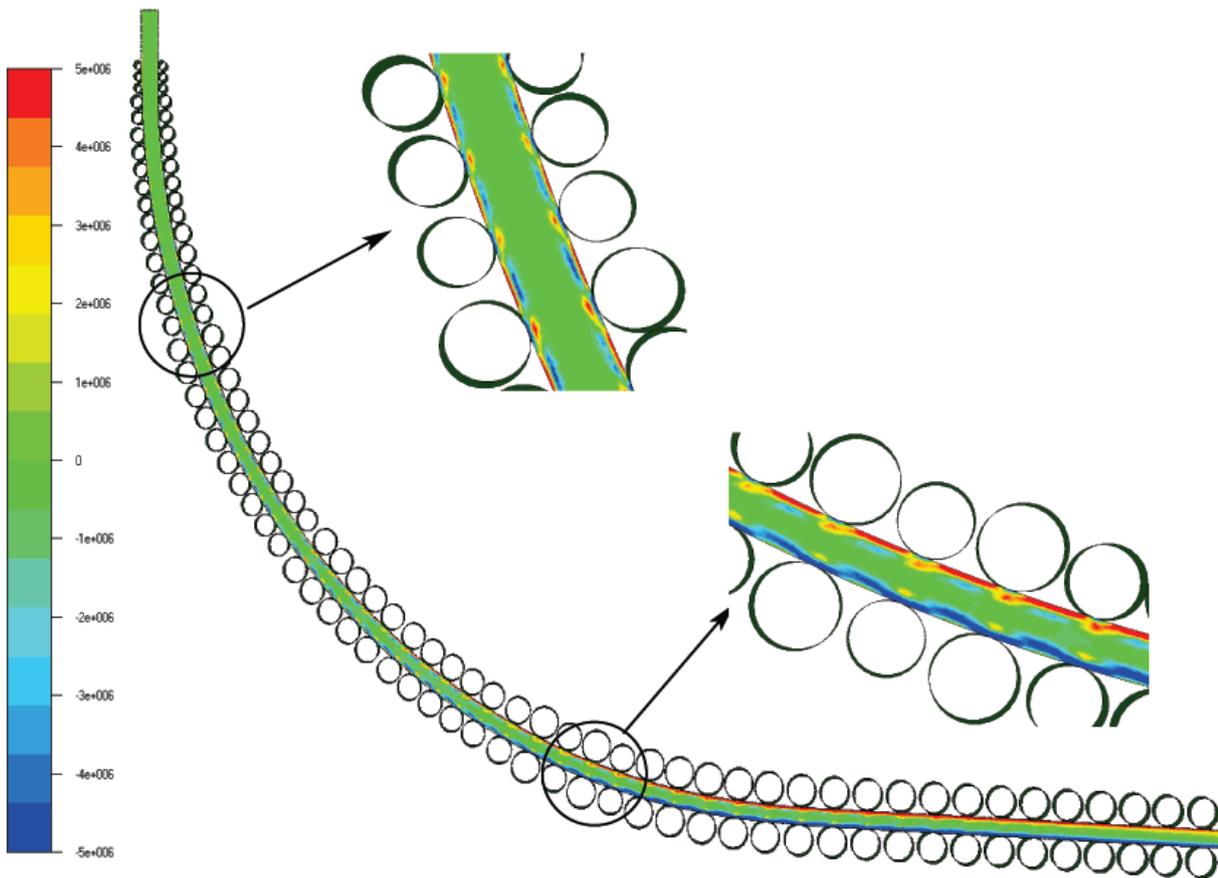


FIG. 4.13 – Isovaleurs du champ des contraintes $\sigma_{z'z'}$ (Pa) - contraintes dans la direction tangentielle à la coulée.

Sur la figure (FIG. 4.13) montrant les composantes de contraintes dans la direction de coulée, on devine aisément, hors zone de décintrage, les parties de la brame en traction (composantes positives, en rouge) et en compression (composantes négatives, en bleu)[‡]. On peut noter qu'en surface et entre les rouleaux, l'acier subit une traction dans le sens de coulée. À l'inverse, sous chaque rouleau, la contrainte axiale est de compression. L'acier subit donc une succession de séquences de traction-compression.

On constate qu'à l'intérieur du produit, au voisinage du front de solidification (qui n'apparaît pas sur la figure), l'acier est soumis à la même alternance traction-compression, mais en quadrature : cette fois, c'est au niveau du rouleau que la matière est en traction (dans le sens de la coulée) et c'est entre les rouleaux qu'elle est en compression.

[‡]les états de "traction" et de "compression" sont relatifs à des facettes orientées

Dans la zone de décintrage, ce phénomène disparaît à l'extrados où les zones de traction axiale ont quasiment disparu entre les rouleaux. Par contre, les rouleaux sont beaucoup plus sollicités avec des zones en compression beaucoup plus larges. On voit nettement que le décintrage ajoute une composante de traction axiale en peau à l'intrados et de compression axiale en peau à l'extrados, ce qui est conforme au bon sens physique.

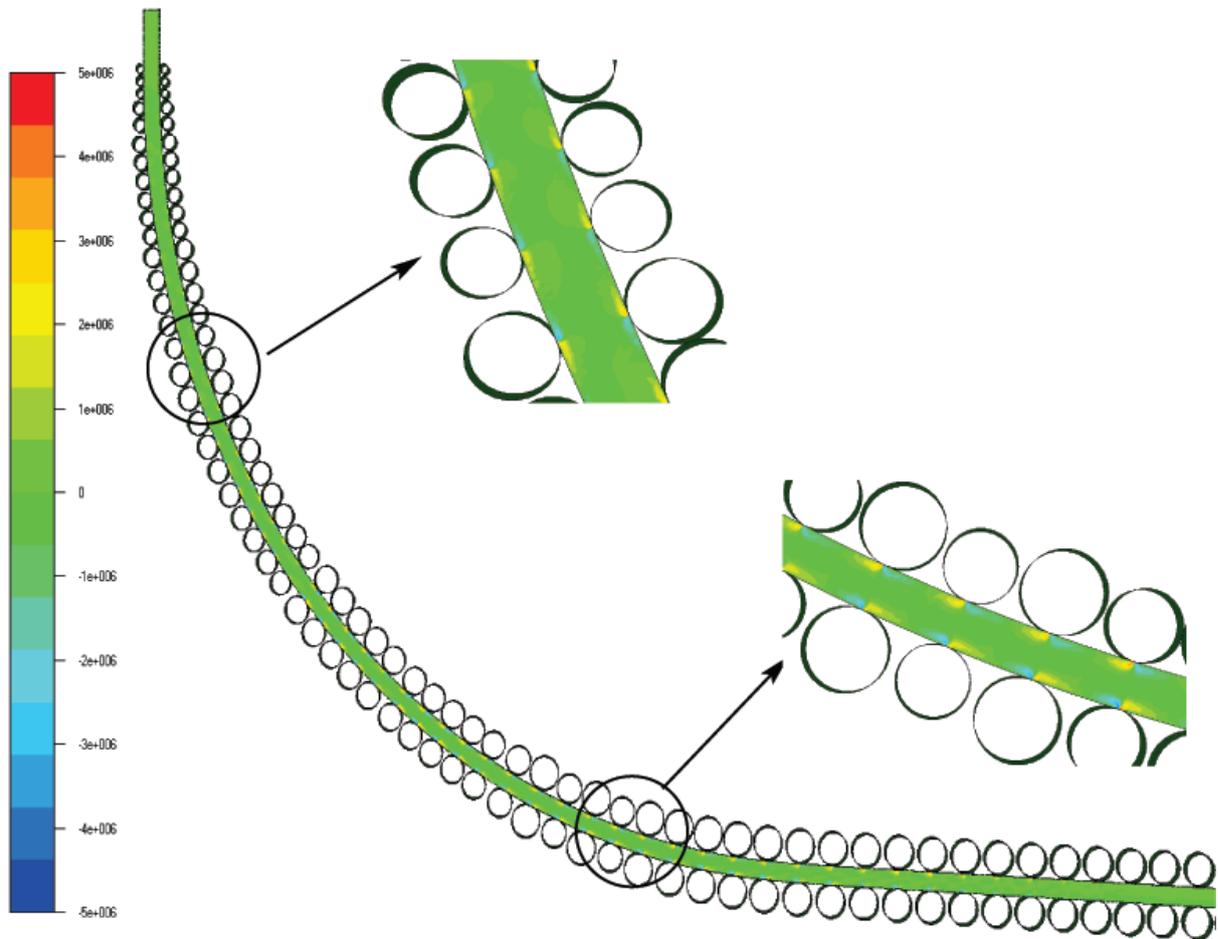


FIG. 4.14 – Isovaleurs du champ des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur $\sigma_{x'z'}$ (Pa) -

La figure (FIG. 4.14), représentant les contraintes de cisaillement, montre qu'elles sont concentrées dans les régions où la brome se trouve en contact avec les rouleaux. Elles sont d'un ordre de grandeur plus faible que $\sigma_{x'x'}$ qui est elle même plus faible que $\sigma_{z'z'}$. Là aussi, comme pour $\sigma_{x'x'}$, on observe une certaine périodicité. Cette figure met en évidence que les rouleaux jouent un rôle important sur l'orientation des contraintes de cisaillement. Pour justifier le signe des contraintes de cisaillement et traction axiale, les graphiques des figures (FIG. 4.15) et (FIG. 4.16) montrent l'évolution d'une facette orientée dans

la zone solide. On remarque que pour le cisaillement, les signes sont opposés suivant sa position dans la brame (proche de l'intrados ou proche de l'extrados). Ces contraintes sont associées au phénomène de gonflement et donc liées à son intensité.

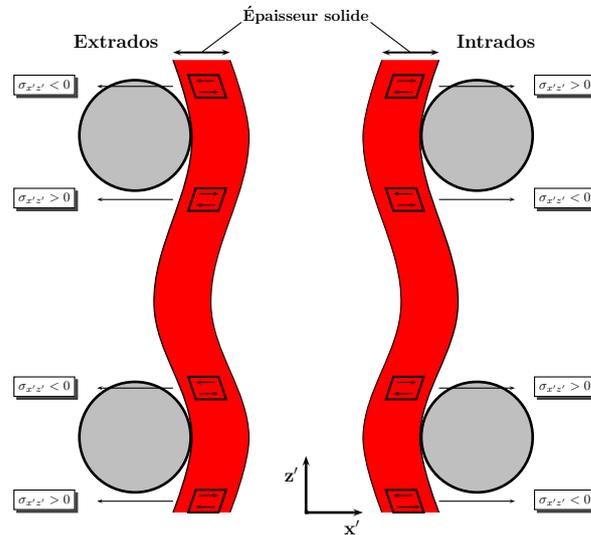


FIG. 4.15 – Explication du signe des contraintes de cisaillement en fonction de sa position par rapport aux rouleaux

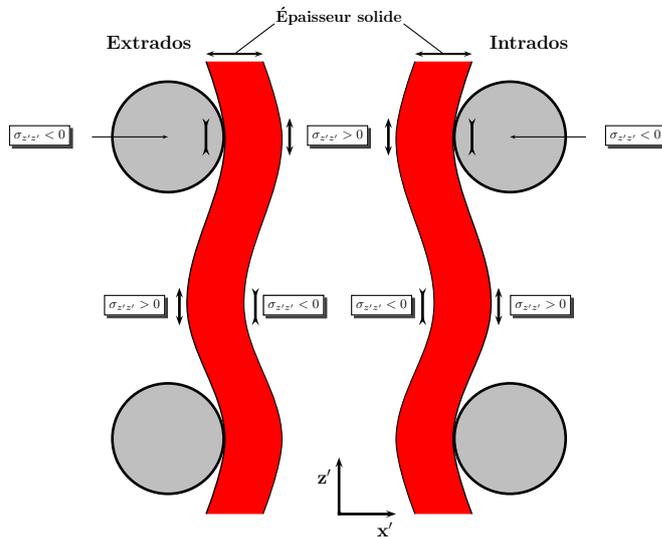


FIG. 4.16 – Explication du signe des contraintes de traction axiale en fonction de sa position par rapport aux rouleaux

De manière générale, notre modèle est donc suffisamment précis pour capter les phénomènes physiques qui peuvent se passer dans la zone de refroidissement secondaire. Notre

maillage semble bien adapté pour une description globale du procédé. Il faut néanmoins rester prudent sur ce dernier point, une analyse de sensibilité au maillage pourrait être utile pour mieux rendre compte de l'influence du maillage sur ces cartes de contraintes.

Par rapport à la littérature, plusieurs auteurs dont [Dalin, 1987, Kajitani *et al.*, 2001] ont déjà observé des cartes de contraintes pour la coulée continue d'acier, grâce à des modèles statiques. Cependant, c'est la première fois, à notre connaissance, qu'il est possible de visualiser des cartes de contraintes de manière globale. En particulier, notre modèle est capable de capturer la mécanique de poutre subie par la coque solide au cours du refroidissement secondaire, et ce sur la totalité de ce dernier. Il est évident que cet outil numérique peut être une aide considérable pour dimensionner les actionneurs des machines de coulée continue pour essayer de comprendre les phénomènes rencontrés au décintrage en fin de solidification.

Comme nous l'avons vu, les contraintes sont exprimées au centre des éléments. Pour montrer l'influence du décintrage et la différence présente entre l'intrados et l'extrados - et donc la dissymétrie des résultats, nous avons choisi de présenter l'évolution de la pression en fonction de la longueur métallurgique, (FIG. 4.18). À l'inverse des contraintes, qui sont exprimées au centre de l'élément, les pressions ont l'avantage d'être exprimées aux nœuds donc d'être accessibles en surface du produit. De plus la pression "résume" l'état de traction ou de compression de la matière en une seule variable scalaire.

L'analyse des champs de pression indique que la brame est sollicitée de façon cyclique en traction/compression, tout comme les contraintes axiales, dans la partie haute de la courbure de la machine :

- la peau est sollicitée en compression au contact des rouleaux, et en tension sur la surface libre,

Au décintrage, le comportement de la peau solide se différencie selon que l'on se place du côté intrados ou extrados :

- la peau solide est sollicitée en permanence en compression du côté extrados (pressions positives), et en tension/compression du côté intrados.

On prévoit donc que le risque d'apparition de défauts de surface au décintrage est plus critique du côté intrados.

En sortie de lingotière, des oscillations sont présentes et sont très certainement liées à la finesse de notre maillage. En effet, lors d'une étude thermomécanique de la peau solide

en lingotière, [Huespe *et al.*, 2000] sont obligés d'utiliser un maillage très fin pour bien décrire le comportement de la peau solide - étude qui a été effectuées en 2D également par [Heinrich, 2003] pour valider la méthode globale instationnaire. Il est bien sûr, à l'heure actuelle, impossible de simuler simultanément le comportement de l'acier en sortie de lingotière et dans la zone étendue de refroidissement secondaire avec un maillage aussi fin.

4.2.3.3 Prédiction de criques

Pour conclure, nous présentons les résultats déduits du critère de prédictions de criques défini par [Pascon, 2003]. L'intervalle de température adopté à notre problème est pris égal à :]850°C, 1000°C[. Par rapport au risque d'ouverture de criques transverses, la figure (FIG. 4.17) présente les isovaleurs de l'indicateur de risque I_1 défini par (4.4). Ces valeurs de contrainte axiale de traction sont comprises entre 0 et 10 méga-Pascal, dans la zone de décintrage. On voit nettement que la partie entre les rouleaux à l'intrados est plus sensible que celle à l'extrados - en conformité avec les courbes de pression (FIG. 4.18) et les distributions de $\sigma_{z'z'}$, (FIG. 4.13).

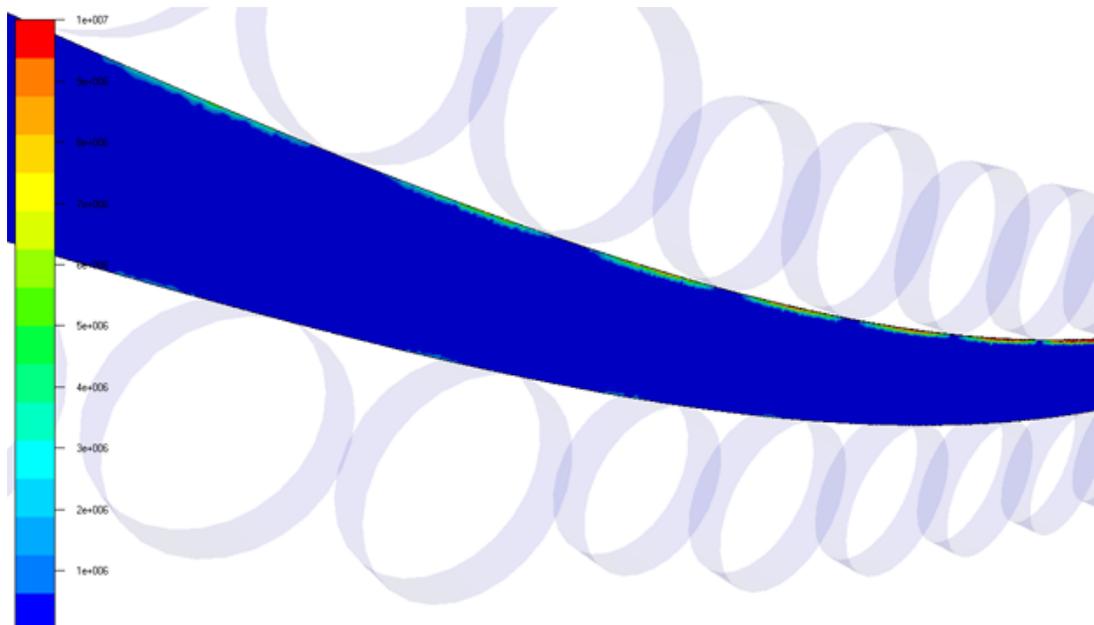


FIG. 4.17 – Isovaleurs issues du critère de prédiction de crrique (4.4) dans la zone de décintrage

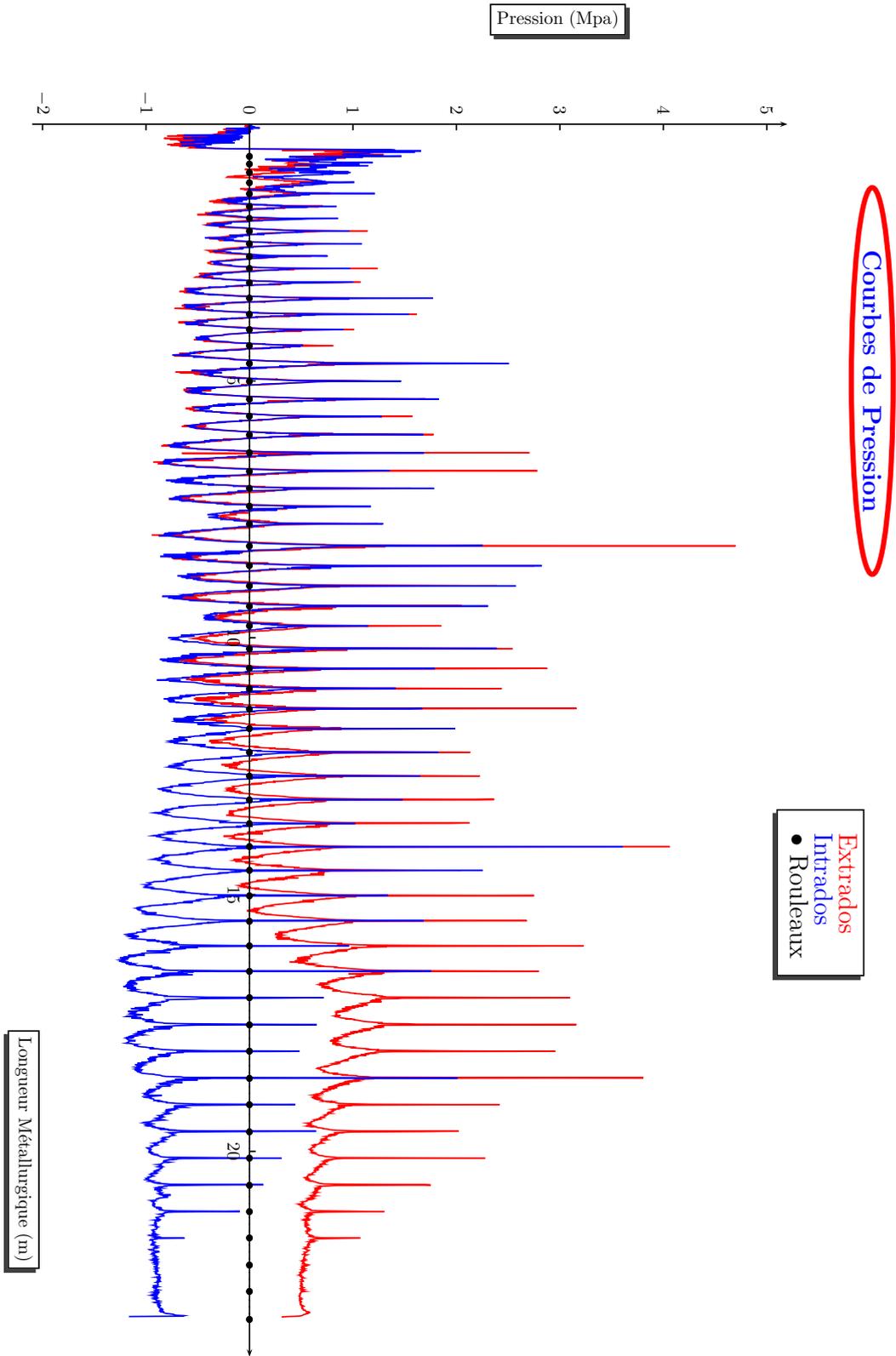


FIG. 4.18 – Pressions à l’extrados et l’intrados de la brame : effet du décintrage

4.2.4 Quelques mots sur l'optimisation du temps de calcul

Afin de mettre en évidence l'apport de la recherche linéaire par rapport à la méthode "backtracking", nous les avons comparées sur les premiers incréments de calcul de cette étude. Nous rappelons que la longueur de la lingotière est de 47 cm. Avec un pas de temps de résolution de 1 s, il faudra 33 incréments de calcul pour sortir de la lingotière et 44 incréments pour que la brame rencontre les premiers rouleaux situés à 15 cm de la lingotière.

Nous avons alors pu constater que l'optimisation de l'algorithme de Newton-Raphson par la méthode "backtracking" n'était pas efficace pour résoudre un problème mécanique fortement non-linéaire. Ce même calcul, nous a conforté dans notre choix d'utiliser la recherche linéaire. Pour chacune des méthodes, nous avons comptabilisé à chaque incrément de temps, (FIG. 4.19) :

- en **bleu**, le nombre total d'itérations faites pour obtenir la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson,
- en **rouge**, le nombre total d'itérations pour calculer le paramètre α .

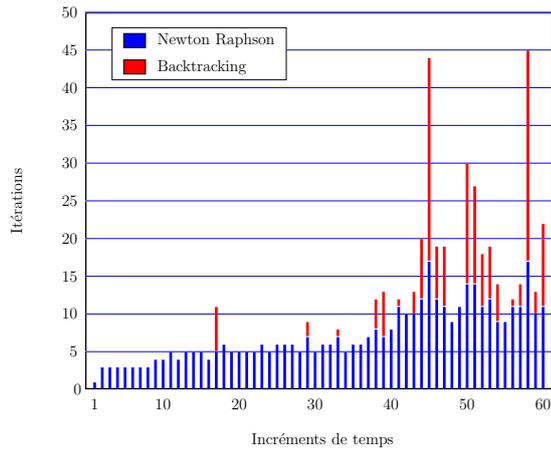
Une première lecture de ces diagrammes montre très nettement que la recherche linéaire est beaucoup plus efficace que la méthode "backtracking" dès que la brame sort de la lingotière pour entrer en zone de refroidissement secondaire (incrément supérieurs à 33). Plusieurs explications peuvent être avancées :

- premièrement, la recherche du paramètre α optimum est beaucoup plus rapide en utilisant la recherche linéaire (deux itérations suffisent)
- deuxièmement, quand la solution est très proche de celle désirée, il est généralement inutile d'optimiser l'algorithme de Newton-Raphson. Chose que ne peut faire la méthode "backtracking" avec son seul critère d'arrêt ($\|R(X_k + \alpha \Delta X_k)\| < \|R(X_k)\|$). Pour la recherche linéaire, nous rappelons ces critères d'arrêt :

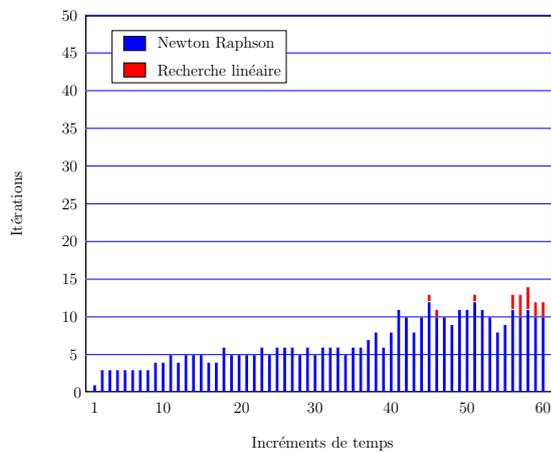
$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{s(\alpha)}{s(\alpha = 0)} \right| < \beta_{ls} \\ \alpha < Tol \end{array} \right.$$

Ces critères sont beaucoup plus stricts et, plus particulièrement grâce au premier, évitent le calcul de α quand la solution est trop proche de la solution à convergence (*i.e.* pente trop douce).

Ainsi, la convergence est beaucoup plus rapide avec la recherche linéaire et comme on peut l'imaginer beaucoup plus économique en temps de calcul[§] : 15 min pour les 60 premiers incréments de calcul avec recherche linéaire contre 19 min avec la méthode "backtracking". Cette différence reste assez significative même sur de "petits" maillages : nous obtenons un gain de 25% en temps de calcul. Ceci a toute son importance lorsque le mannequin est en bas de machine.



(a) Calcul avec "Backtracking"



(b) Calcul avec "Recherche linéaire"

FIG. 4.19 – Comparaison du nombre d'itérations de Newton Raphson selon différentes méthodes d'optimisation

[§]sur Pentium III 1.8 GHz et 512 Mo de RAM

4.3 Cas 3D : la machine de coulée d'Hagondange

4.3.1 Présentation de la machine



Mise en place en 1986 à l'usine d'Hagondange, la machine de coulée continue d'Ascométal permet de produire des blooms à section carrée de 240 millimètres de côté. Il s'agit d'une machine verticale de longueur métallurgique de 18 mètres (longueur de la zone de refroidissement secondaire) pour une longueur totale de 36 mètres.

L'acier, de nuance 100C6, est composé de 1.01 % de carbone et 15 % de chrome. Sa température de coulée est de 1470° C. Cet acier haut carbone sera décrit par le modèle II de [Kozlowski *et al.*, 1992]. Le liquide sera considéré comme un fluide newtonien de viscosité 10⁶ Pa.s. La température du liquidus est de 1461.2° C et celle du solidus est de 1307.9° C. Les données thermophysiques pour la résolution des problèmes thermique et mécanique sont répertoriées en Annexe B.

La vitesse de coulée est de 0.62 mètres par minute et on recense 4 zones de refroidissement :

Type	Longueur métal. (m)	ϕ (type=1) (W.m ⁻²) h (type=2) (W.K ⁻¹ .m ⁻²) ε_r (type=3)
1	0.50	1300000
2	0.84	423
2	3.24	370
3	15.00	0.85
3	18.00	0.85

FIG. 4.20 – Coulée de bloom d'Hagondange

En fonction de la position du produit dans la machine, le type de conditions aux limites, moyennées par zone, varie : dans la lingotière, d'une longueur de 50 centimètres, on aura une condition de flux de chaleur imposé ; en sortie de lingotière, le refroidissement secondaire est modélisé par une condition de convection - jusqu'à 3.24 mètres - puis par une condition de type rayonnement

sur le reste de la machine. La température extérieure est fixée à 25°C.

Dans notre calcul, le rôle de la lingotière est uniquement mécanique. Son évolution thermique n'est pas calculée et elle n'est utilisée que pour "contenir" mécaniquement le métal par l'intermédiaire de l'algorithme de contact unilatéral. À noter que dans ce calcul, la lingotière est considérée "droite" : sa conicité - réelle - est ici négligée.

La géométrie particulière de cette machine, (FIG. 4.20), permet d'exploiter notre approche globale instationnaire pour un cas en trois dimensions. En outre, les particularités physiques (peu ou pas de déflexions et faibles gradients thermiques dans la direction de coulée) permettent d'utiliser un maillage anisotrope où les mailles sont allongées dans le sens de la coulée. Pour cela nous définissons une métrique référençant les tailles des mailles dans les trois directions : $M(t_x, t_y, t_z)$ t = taille de maille.

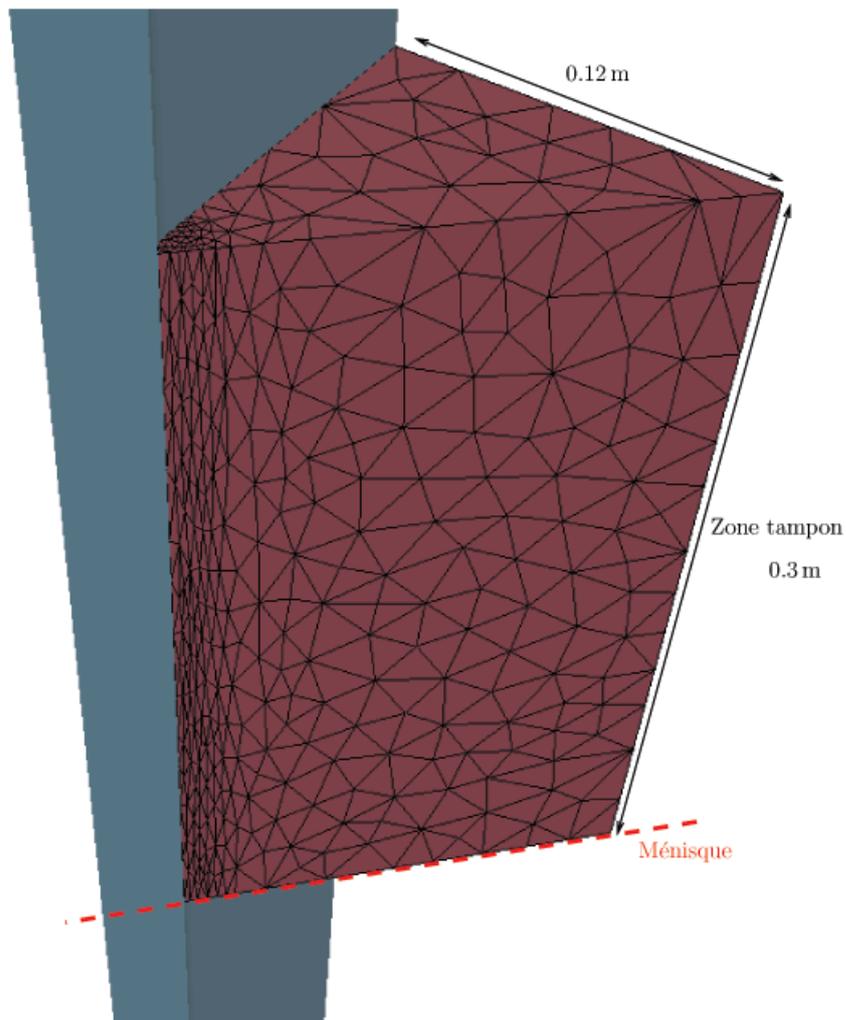


FIG. 4.21 – Maillage initial pour modéliser la coulée continue d'Hagondange

Pour bien prendre en compte la forme géométrique du produit, et plus particulièrement les congés, nous devons utiliser une taille de maille suffisamment fine dans les directions (Ox, Oy) (la direction de coulée se fait selon l'axe $-Oz$ - la longueur métallurgique l d'un point matériel aura pour coordonnée en z , la valeur $-l$). Cette particularité limite le facteur d'allongement des éléments. Dans ce cas, notre maillage initial sera non homogène avec les métriques suivantes :

- $M = (0.0025, 0.0025, 0.02)$ pour la zone où se situe le congé (rayon 0.01),
- $M = (0.01, 0.01, 0.02)$ pour le reste du maillage.

Ainsi, notre zone tampon sera d'une longueur de 30 centimètres afin de permettre au mailleur de fournir un maillage de bonne qualité. Par raison de symétrie, seul un huitième du bloom est modélisé : les groupes de faces qui ne sont pas en contact sont des faces de symétrie. D'autre part, on en déduit la condition au limite mécanique de la surface d'injection, à savoir : $\sigma n = \rho g h_{\text{tampon}} n$ où $\rho g h_{\text{tampon}} = 7010 \times 10 \times 0.3 \text{ Pa} \approx 0.02 \text{ MPa}$.

Le maillage initial, composé de 1560 nœuds et de 7129 éléments, est représenté sur la figure (FIG. 4.21).

Après 15 jours de calcul[¶], nous obtenons un maillage ayant parcouru une longueur métallurgique de 14 mètres et composé de 61600 nœuds et de 283500 éléments.

4.3.2 Résultats thermiques

On peut alors visualiser l'évolution de la température en fonction de la longueur métallurgique :

- en **rouge**, à cœur du produit,
- en **bleu**, en surface du produit, au milieu des faces,
- en **vert**, en surface du produit, sur le congé.

La fin des puits liquide et pâteux se situe à environ 5.6 mètres et 10.1 mètres du ménisque, respectivement. Les évolutions thermiques de surface calculées par Thercast[®] montrent bien l'intensité des gradients de réchauffage au passage des différentes zones de la machine. On remarque que le refroidissement du congé est plus brutal, ce qui est caractéristique d'une coulée de format carré. On note aussi des oscillations en lingotière

[¶]toujours sur Pentium3, 1.8 GHz et 512 Mo de Ram

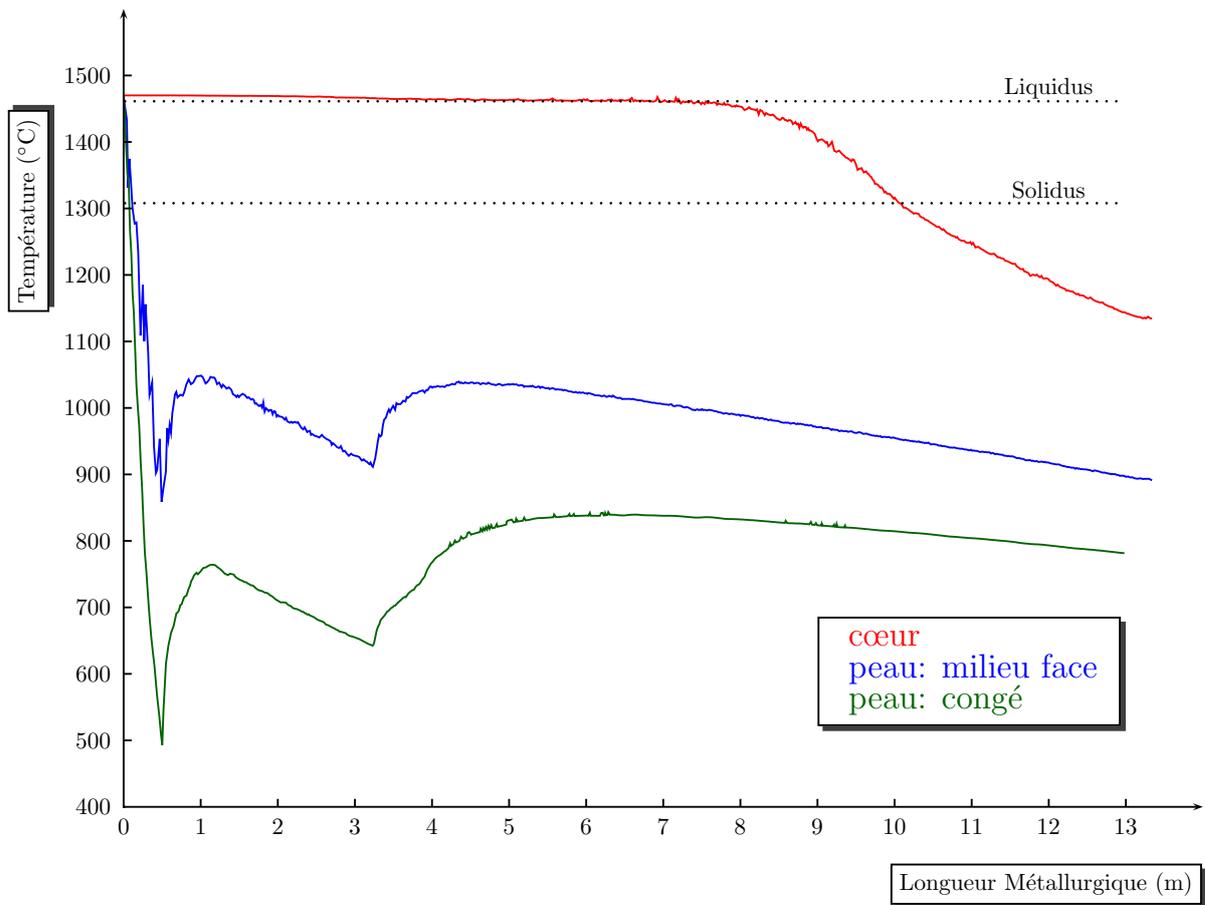


FIG. 4.22 – Évolutions de température sur différentes sections du produit

(avant le premier réchauffement de la peau) pour le capteur situé en milieu de face. Notre maillage est en effet trop grossier pour bien capter le refroidissement rapide qui s'opère en lingotière. Comme on peut le voir, ces oscillations n'apparaissent pas pour le capteur situé en surface sur le congé : notre maillage est suffisamment fin dans cette zone pour tenir compte de tous ces phénomènes.

4.3.3 Résultats Mécaniques

4.3.3.1 Résultats en déformations

Thercast[®], hors contexte coulée continue, permet de calculer la lame d'air qui se crée entre la pièce et un moule lors de calculs simulant le refroidissement en fonderie. Pour ce calcul, nous trouvons une lame d'air entre le produit coulé et la lingotière. Elle atteint son maximum sur le congé et en fin de lingotière. On devine par les traits noirs sur la figure (FIG. 4.23), la forme et la position de la fin de la lingotière par rapport au bloom.

Les isovaleurs en rouge situées en dehors de la lingotière ne sont pas à prendre en compte (artefact de post-processing). Seules les isovaleurs dans la lingotière sont correctes. La lame d'air s'amorce à 13 centimètres du ménisque. On note aussi qu'il n'y a pas de lame d'air au milieu des faces. Le choix d'une lingotière droite pour ce calcul, et non conique comme sur site, explique la présence de cette lame d'air.

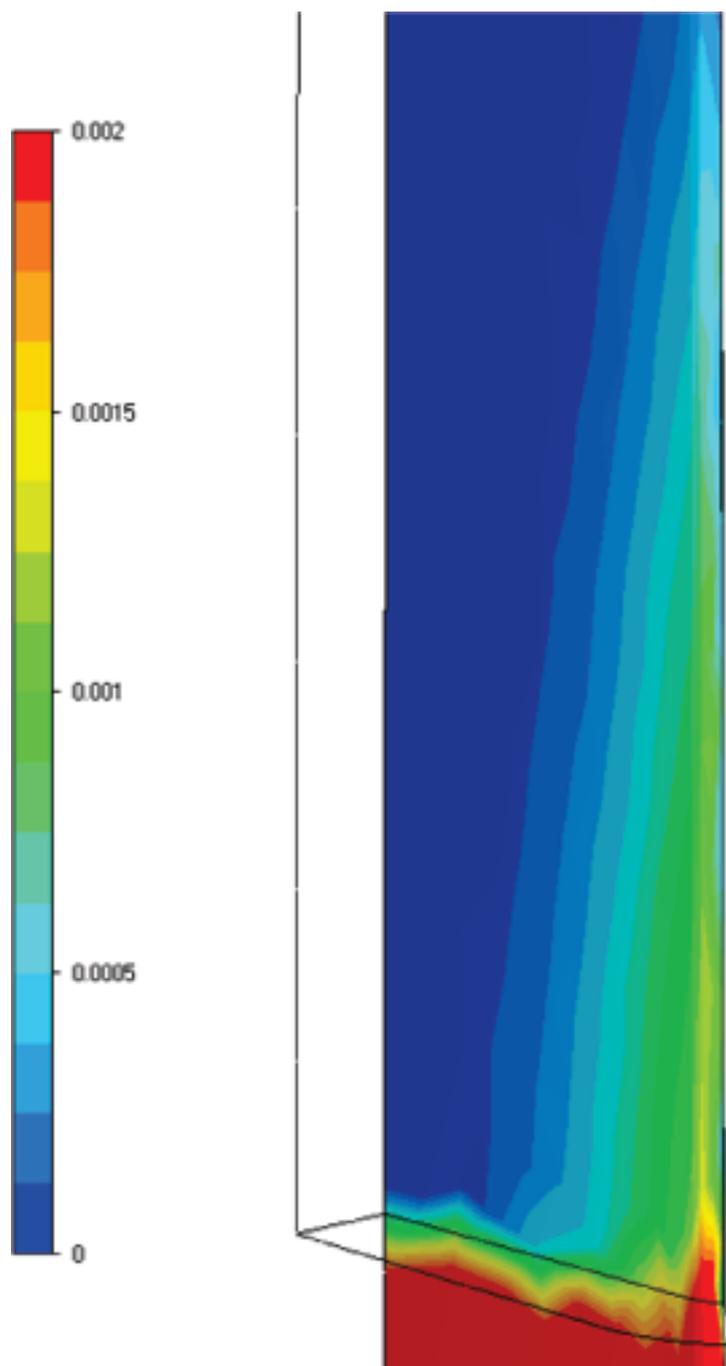


FIG. 4.23 – Distribution de lame d'air entre le bloom et la lingotière

Par ailleurs, nous avons calculé qu'il n'y a pas de déflexion du bloom (pas de gonflement). Ceci correspond à l'expérience des aciéristes : les blooms sont réputés ne pas gonfler (fort effet tridimensionnel).

4.3.3.2 Résultats en contraintes

La coulée s'effectue selon l'axe Oz , l'origine du repère se situant au niveau du ménisque, au centre du produit. L'évolution des composantes de contraintes σ_{xx} et σ_{zz} en fonction de la longueur métallurgique, est présentée sur la figure (FIG. 4.24). La géométrie du bloom et les conditions aux limites étant symétriques, il semble indifférent de considérer l'axe Oy et Ox . C'est ce que l'on vérifie également dans le calcul où, à cœur, les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont identiques.

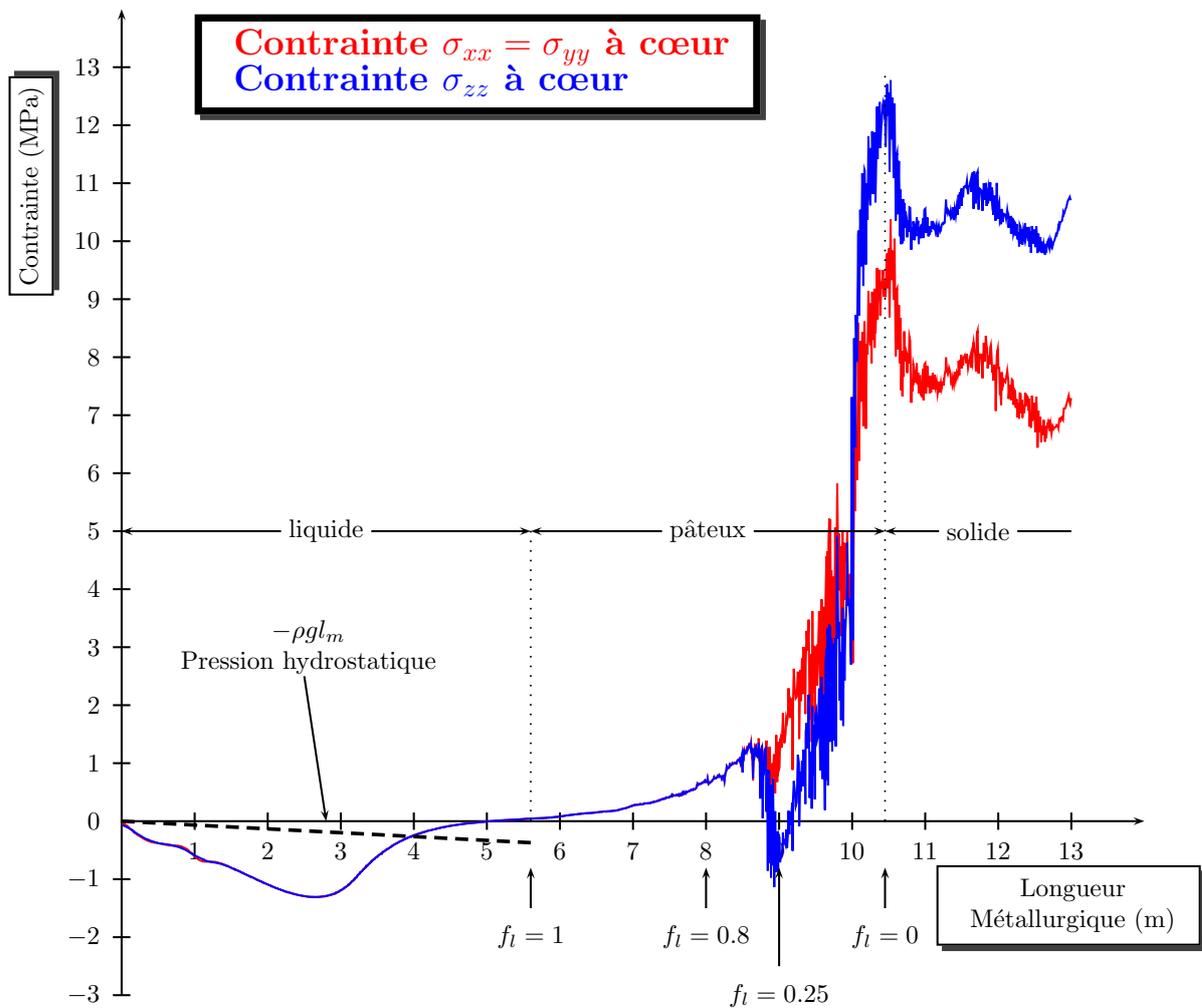


FIG. 4.24 – Évolution des contraintes σ_{xx} et σ_{zz} au cœur du produit (sur l'axe Oz).

Sur les 5 premiers mètres, le liquide est logiquement en compression hydrostatique. Les trois composantes de contraintes sont égales et négatives. Mais leur valeur est très nettement en dessous de la pression hydrostatique (< 0.4 MPa). Le choix d'une viscosité trop élevée pour le comportement du liquide (10^6 Pa.s) peut être la cause de ce phénomène.

À l'aide du résultat de la figure (FIG. 4.22) et connaissant le chemin de solidification de l'acier, nous avons reporté sur la figure quelques valeurs de f_l pour certaines longueurs métallurgiques. On constate que le milieu pâteux commence à transmettre des efforts mécaniques significatifs à partir de $f_l = 0.3$.

On constate alors que le milieu pâteux est sollicité en traction : ces trois composantes sont en effet positives, et leur valeur croît jusqu'à la fermeture du puits pâteux. Concernant la contrainte σ_{xx} , le maximum de contrainte en traction est de 10.3 MPa, coïncidant avec la fermeture du puits pâteux. Malgré les oscillations, dûes à notre maillage trop grossier à cœur, on devine l'évolution moyenne de la contrainte en fin de solidification. Le cœur est en traction y compris à l'état pâteux. À l'inverse de σ_{xx} , la contrainte σ_{zz} passe par des états de compression et de traction successivement dans la zone pâteuse puis évolue similairement à σ_{xx} (traction). Le maximum de contrainte en traction est plus élevé : 12.5 MPa.

De manière générale, l'état de traction généralisée dans la zone pâteuse est un indicateur de défauts potentiels. Toutefois, l'analyse du risque de rupture à chaud ("hot tear") en fond de zone pâteuse demanderait un examen plus approfondi, mettant en jeu notamment une analyse diphasique, combinée à un critère d'amorçage de la rupture à chaud tel que celui proposé par [Rappaz *et al.*, 1999]. Certaines études sont entreprises dans ce sens au CEMEF, mais sont actuellement limitées à une analyse bidimensionnelle, [LeCorre et Bellet, 2004].

Pour les défauts en peau, l'évolution des contraintes en surface et plus particulièrement sur le congé (là où le maillage est le plus fin) peut être une source d'information utile à l'optimisation du procédé.

Comme on peut le voir sur la figure (FIG. 4.25), le changement de zone de refroidissement a une grande influence sur le comportement mécanique de la peau. La contrainte représentée est celle donnée dans le sens de la coulée : σ_{zz} . Les deux autres contraintes sont quasiment nulles, ce qui traduit d'une part la condition de surface libre et d'autre part de faibles contraintes dans la direction tangentielle horizontale. Bien qu'en compression tout le long du procédé sauf au début du procédé (avant la création de la lame d'air),

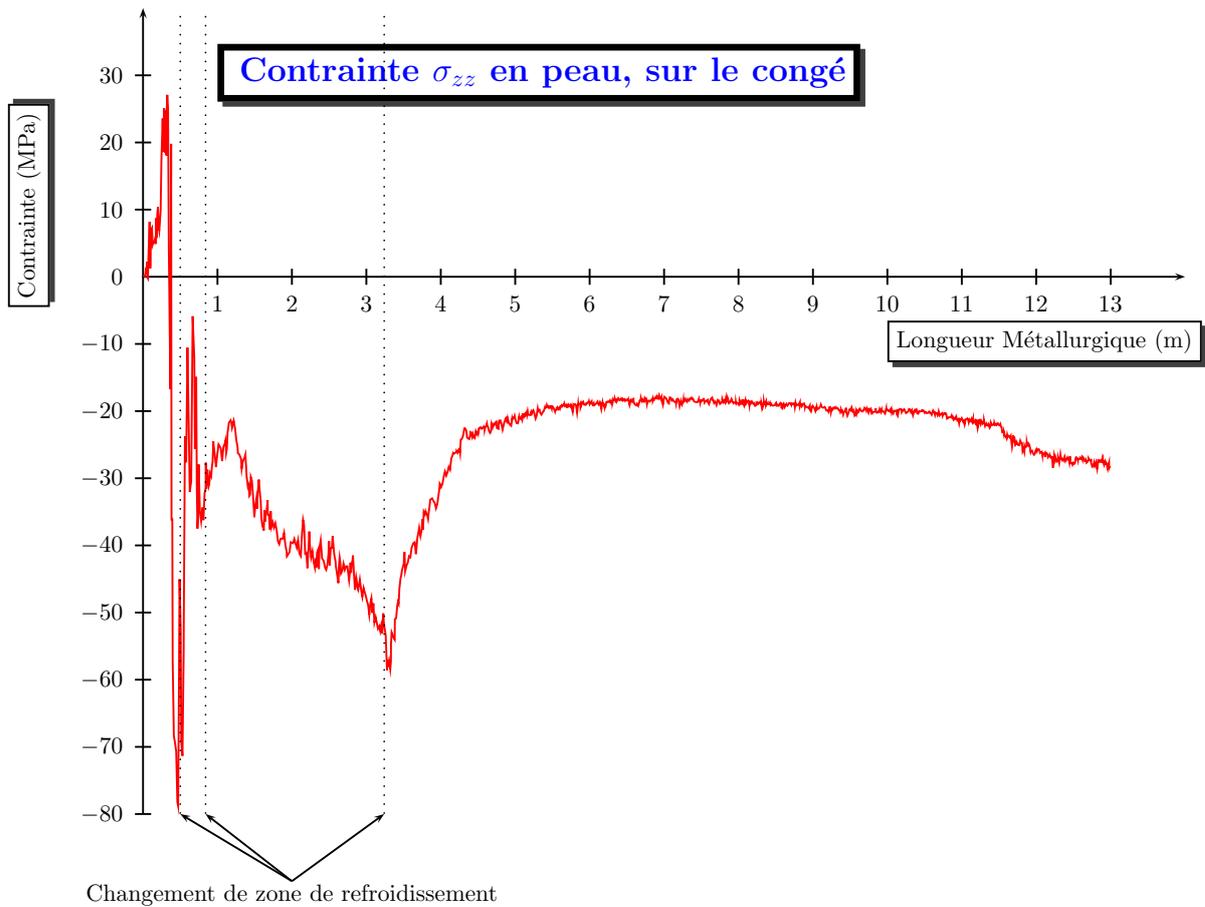


FIG. 4.25 – Évolution de la contrainte σ_{zz} en peau, sur le congé, du produit : on voit très nettement l'influence des zones de refroidissement

l'intensité de la contrainte varie selon la position du bloom dans la machine. En sortie de lingotière (*i.e.* 0.5 mètres), la valeur absolue de la contrainte est très importante et liée au refroidissement brutal qu'on a pu observer lors de la présentation des courbes de températures. Ensuite, à chaque changement de zone de refroidissement, cette intensité (valeur absolue de la contrainte en Oz) diminue et semble se stabiliser autour de -20 MPa. Une certaine relaxation des contraintes coïncide avec les phases de réchauffement de la peau. Du point de vue du risque d'ouverture de crique transverse au coin, la région la plus critique est donc la lingotière (σ_{zz} de traction). Après une analyse plus fine de ces résultats, on pourra utiliser ce type de simulation pour optimiser les paramètres de refroidissement par exemple.

Conclusions et perspectives

Nos travaux visaient initialement à établir une modélisation thermomécanique tri-dimensionnelle de la coulée continue d'aciers. L'objectif était de pouvoir modéliser, en adaptant le logiciel Theracast[®] la totalité du refroidissement secondaire du procédé pour n'importe quel type d'acier.

Avant de présenter les perspectives à ce travail, faisons un bilan sur les différents points abordés au cours de ces travaux.

La mise en place d'une stratégie nouvelle, la stratégie globale instationnaire, a orienté notre travail tout au long de cette thèse. Cette stratégie visant à modéliser le procédé dans sa globalité peut s'apparenter à la phase d'amorçage du procédé de coulée continue. Numériquement, le mannequin tracté, à la vitesse imposée égale à la vitesse de coulée, le produit dans la machine qui peut-être droite ou courbe. La partie supérieure représentant l'injection reste fixe et permet l'apport continu de matière. Comme pour tout problème de modélisation en 3D, le premier souci est le temps de calcul. L'adaptation locale du maillage par l'extraction de topologie a permis de mettre en œuvre cette stratégie où les temps dus aux remaillages restent constants et proportionnels à la zone déformée (*i.e.* zone tampon). Ainsi, les temps de calcul dépendent essentiellement de la résolution du problème thermomécanique. Cette stratégie a permis de faire des calculs thermomécaniques pour des maillages commençant dans la lingotière au niveau du ménisque et finissant au delà de la fin du puits pâteux quand le produit est totalement solidifié. Par ailleurs, dans un souci de traiter toutes les formes de produits coulés, nous avons généralisé cette approche pour la rendre capable de modéliser n'importe quelle géométrie de machine (droite ou courbe).

Concernant la modélisation thermomécanique, nous avons adopté une résolution couplée pour décrire le comportement de l'acier. À chaque incrément de temps, est d'abord résolu le problème thermique puis le problème mécanique. Le refroidissement du produit (aspersion d'eau, contacts thermiques - rouleaux et lingotière) est modélisé par des

conditions aux limites moyennées par zone, de type flux, convection et rayonnement. Pour simuler l'apport continu de la matière, l'injection a une condition aux limites de type température imposée. Quant au mannequin, une condition de type adiabatique nous a semblé la plus appropriée en vue d'obtenir l'état stationnaire le plus rapidement possible.

Pour le problème mécanique, nous avons utilisé la résolution monophasée du matériau déjà présente dans Theracast[®]. À savoir, quand le matériau est liquide, il a un comportement newtonien ; quand il est pâteux, il suit une loi de comportement visco-plastique alors que lorsqu'il est solide, il obéit à une loi de comportement de type elasto-visco-plastique. Pour les aciers étudiés au cours de cette thèse, nous avons utilisé le modèle II de [Kozłowski *et al.*, 1992] décrivant les aciers moyen et haut carbone à l'état solide. Les autres paramètres ont été fournis par les partenaires industriels et leur obtention est détaillée dans la thèse de [Heinrich, 2003].

La prise en compte des géométries diverses des machines de coulée continue, nous a poussé à adapter et à optimiser le contact pénalisé présent dans le logiciel Theracast[®]. En particulier, le traitement spécifique du contact avec les rouleaux a permis de s'affranchir des erreurs numériques en optant pour une formulation analytique et implicite de ce contact. Par ailleurs, tout en généralisant en trois dimensions cette formulation du contact pénalisé rouleaux/produit, nous avons introduit une recherche adaptée du facteur de pénalisation. De même, l'homogénéisation du système a permis de bien conditionner le système matriciel à résoudre. L'introduction de notre contact implicite rouleaux/produit, nous a conduit à utiliser une technique de recherche linéaire pour faciliter la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson.

Toutes ces modifications ont permis de modéliser le procédé de coulée continue dans sa globalité et nous l'avons validé puis testé sur deux types de machine de coulée continue : une machine courbe pour une coulée de brames (acier de nuance 18M5) et une machine droite pour une coulée de bloom s(acier de nuance 100C6). La validation n'a pu se faire que pour le problème thermique. On a pu constater que l'état stationnaire est immédiatement atteint. Les résultats de déflexions tendent à montrer que l'état stationnaire du problème mécanique est atteint environ 2 mètres après le passage du mannequin. Les résultats obtenus en contraintes ont permis de rendre compte des sollicitations complexes subies par l'acier dans son parcours dans la machine -tractions, compressions. Notre modélisation globale a pu mettre en évidence les rôles que jouent, d'une part, le décintrage par la géométrie d'une machine, et d'autre part, les zones de refroidissement sur l'état thermomécanique du produit (bloom ou brame).

Les premiers résultats obtenus grâce à notre approche montrent que cet outil numérique peut être une aide aux actionneurs. Mais il reste bien sûr perfectible pour prendre en compte tous les phénomènes complexes présents lors de l'élaboration de l'acier par le procédé de coulée continue. Nous en venons donc aux perspectives dégagées par ce travail.

D'un point de vue physique, il serait bon de confronter les résultats issus de notre approche globale instationnaire et ceux obtenus sur des coulées réelles. La campagne d'essais que doit réaliser l'IRSID sur l'essai pilote sera une source de renseignements très utiles comme l'ordre de grandeur des déflexions. Une meilleure description de la zone pâteuse semble aussi inévitable pour bien capter l'influence du gonflement sur les défauts internes. Les récents travaux de Steven Le Corre montrent qu'une approche diphasique permet une meilleure description du comportement de type "éponge" de cette zone et donc de prédire les risques de rupture interne et les ségrégations. En combinant notre approche avec ce modèle, on sera capable de bien décrire le procédé de coulée continue d'aciers en fin de solidification.

Une meilleure description du procédé en lui même peut être aussi envisageable en vue d'une prédiction plus efficace des criques de surface.

On peut pour cela mieux décrire le refroidissement du produit et en particulier dans la zone de refroidissement secondaire. Fabien Marini travaille actuellement sur une meilleure modélisation du système d'aspersion d'eau dans cette zone et du contact thermique avec les rouleaux. On pourra aussi mieux tenir compte des échanges mécaniques existants entre le rouleau et le produit comme : déformation des rouleaux (supposés dans cette étude indéformable), résistance à l'avancement, réduction douce, motorisation de certains rouleaux, ...

Par ailleurs, cette méthode peut être utilisée pour "remonter" plus haut dans la machine et décrire plus finement les phénomènes présents dans la lingotière : l'échange thermique entre la lingotière et le produit, oscillations de la lingotière, écoulement du métal liquide de type convection forcée avec turbulence, brassage électro-magnétique, frottement entre la lingotière et le produit, ...

D'un point de vue numérique et en vue d'une simulation complète - sans passer par une tranche pseudo-2D, le calcul parallèle semble incontournable tout en disposant d'outil informatique suffisamment puissant. Nous avons pu utiliser la première version de Theracast[®] parallélisé lors de cette thèse où seuls certains des modules les plus gourmands en temps de calcul, comme l'algorithme de résolution des systèmes linéaires mécanique

et thermique, sont parallélisés grâce aux travaux d'Hugues Digonnet. Cette parallélisation incomplète du logiciel nous a permis de mesurer l'importance de cet outil mais reste encore trop "limitée" pour une modélisation complète d'une brame d'acier.

Pour conclure, cet outil n'est qu'un premier pas vers la simulation complète du procédé de coulée continue mais nous espérons qu'il peut d'ores et déjà servir à l'optimisation du procédé.

Annexe A

Données thermophysiques et thermomécaniques de l'acier 18M5 pour la machine de Dunkerque

composant	teneur (% massique)
Carbone	0,18
Silicium	0,42
Manganèse	1,37
Aluminium	0,036
Soufre	0,009
Phosphore	0,018
Niobium	0,04

TAB. A.1 – composition chimique de l'acier 18M5

Les données thermophysiques sont issues du rapport de [Bobadilla *et al.*, 1993]. Les données thermomécaniques sont calculées à partir du modèle II de [Kozłowski *et al.*, 1992].

Lm	Type	Valeurs
0.47	1	-130.0D4
0.70	2	0.0500D4
1.035	2	0.0420D4
1.960	2	0.0330D4
2.945	2	0.0283D4
4.485	2	0.0285D4
6.220	2	0.0232D4
7.995	2	0.0260D4
12.000	2	0.0222D4
16.750	2	0.0213D4
30.000	2	0.0200D4

Lm = longueur métallurgique (m)

Type = 1 , ϕ (W.m^{-2})

Type = 2 , h ($\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$)

Type = 3 , ε_r

Température extérieure: 20 °C

Vitesse de coulée: 0.86 m.min^{-1}

FIG. A.1 – Zones de refroidissement et vitesse de coulée de la machine de Dunkerque

Remarque : La longueur de la lingotière est ici sous-estimées par rapport à la réalité (cf §4.2.1).

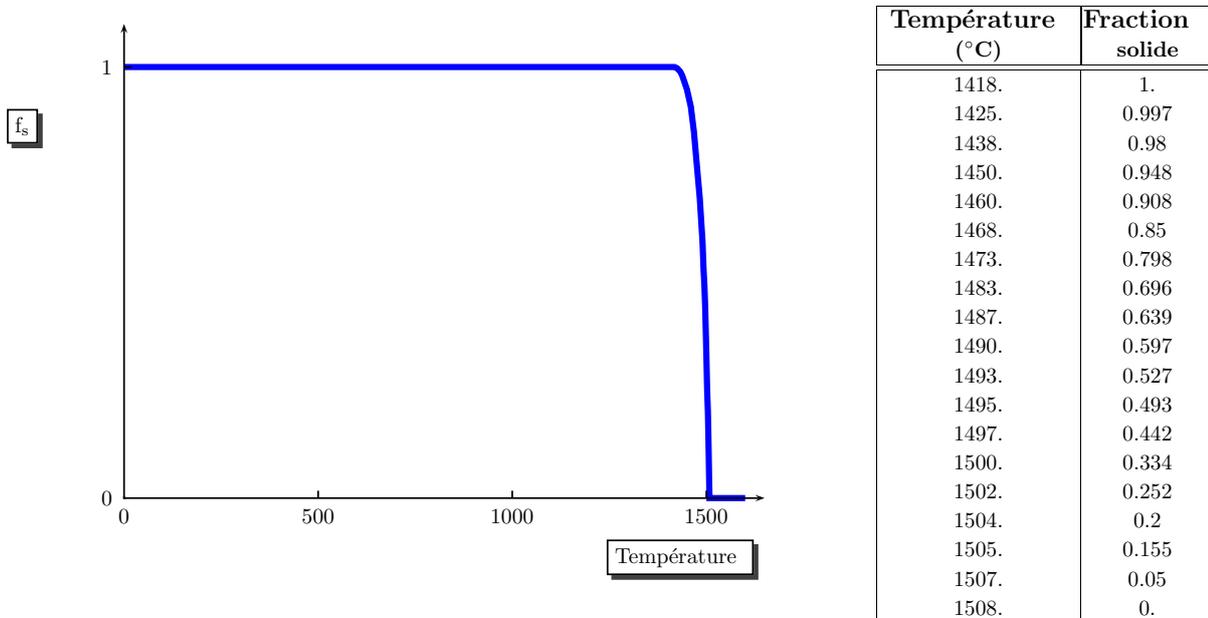


FIG. A.2 – Évolution de la fraction solide du 18M5 en fonction de la température.

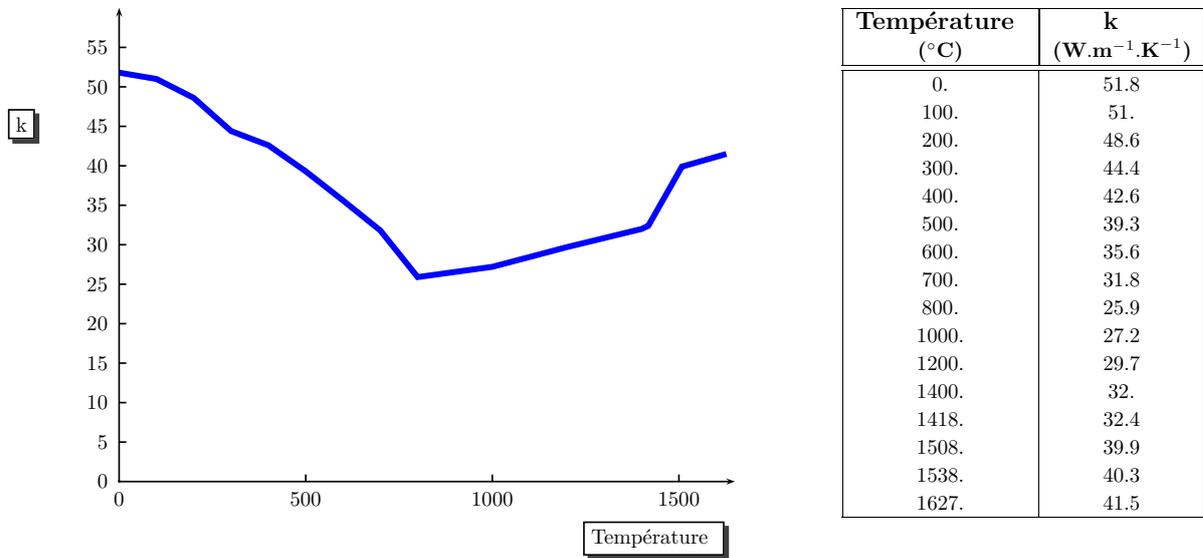


FIG. A.3 – Évolution de la conductivité thermique du 18M5 en fonction de la température.

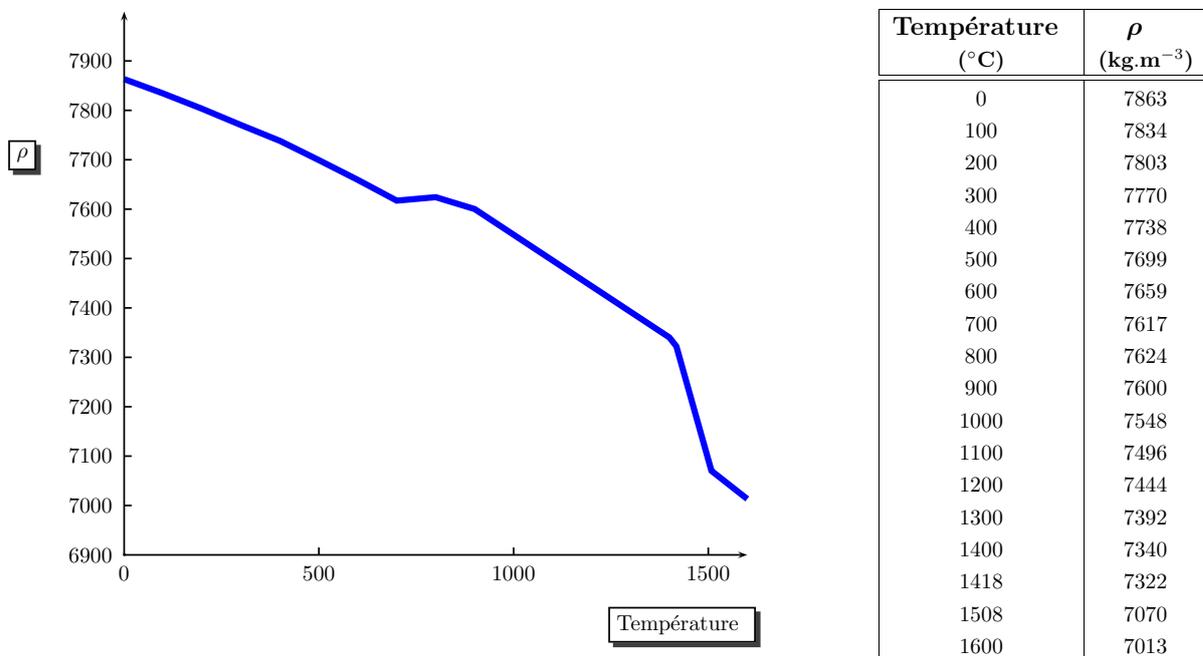


FIG. A.4 – Évolution de la masse volumique du 18M5 en fonction de la température.

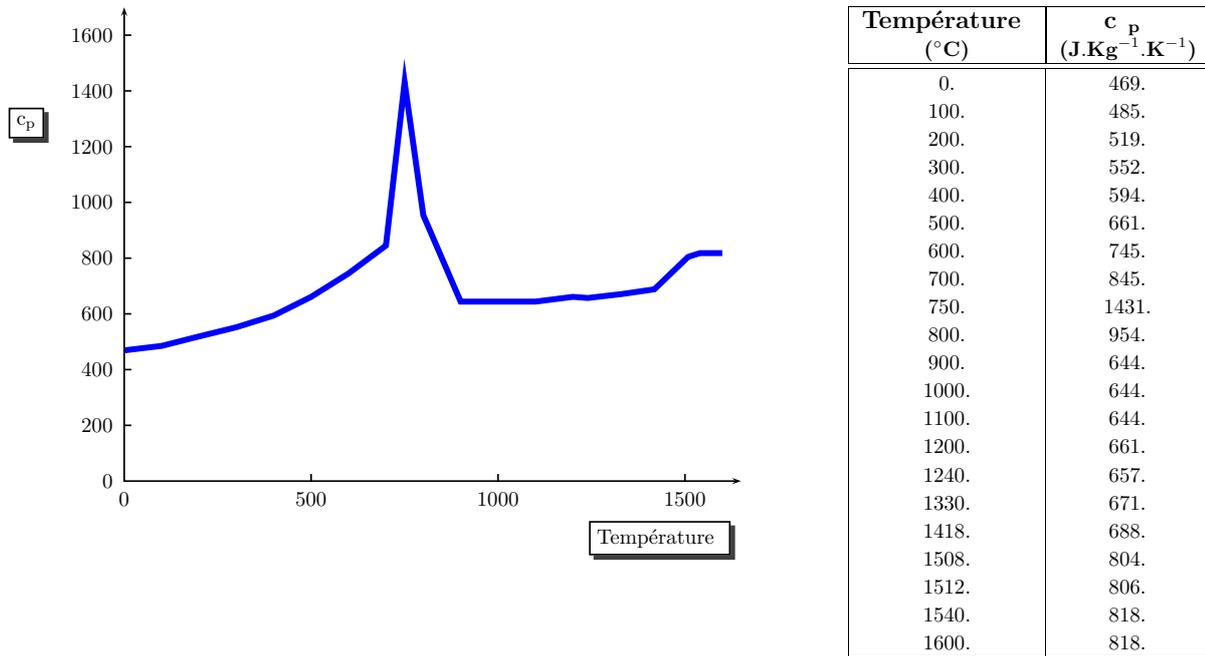


FIG. A.5 – Évolution de la chaleur spécifique du 18M5 en fonction de la température. La chaleur latente est de 260000 J.Kg⁻¹.

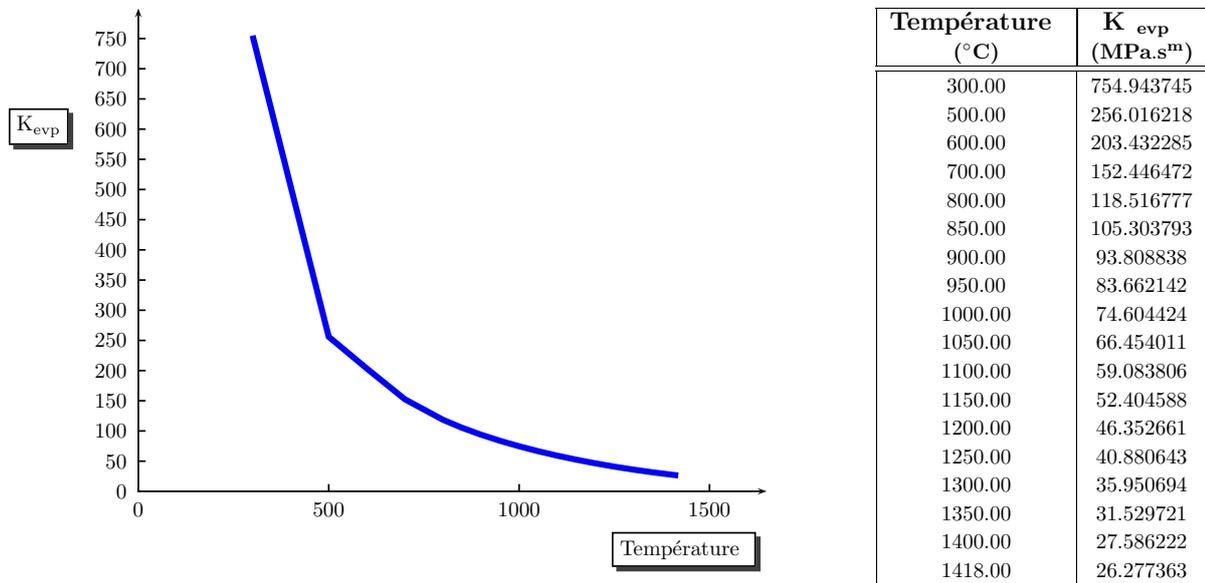


FIG. A.6 – Évolution de la consistance K_{evp} à l'état solide pour le 18M5 en fonction de la température (loi elasto-viscoplastique multiplicative (2.20)).

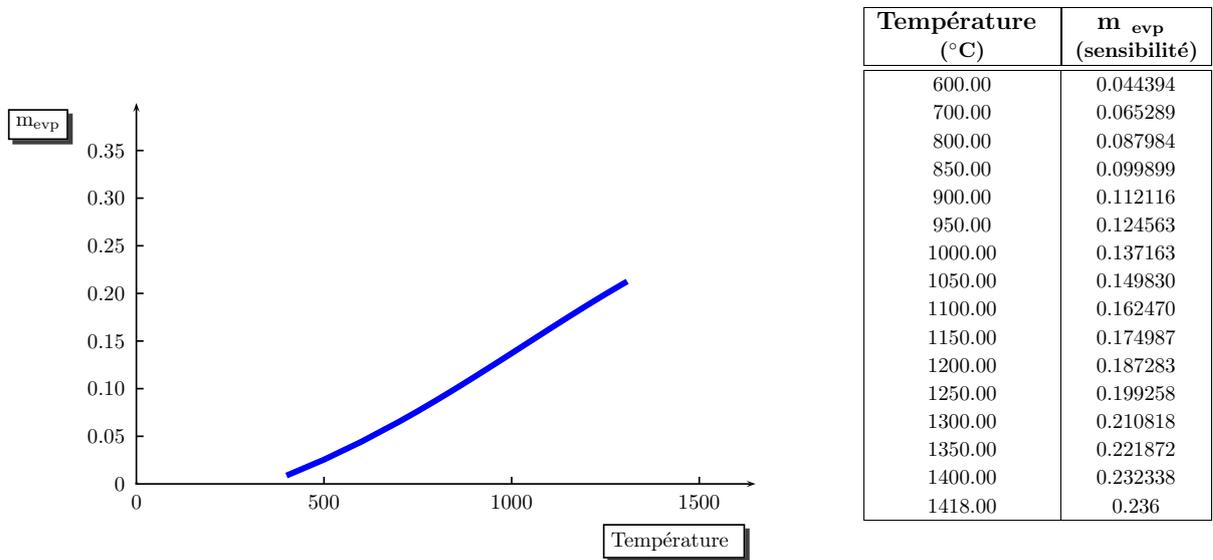


FIG. A.7 – Évolution de la sensibilité à la vitesse de déformation en fonction de la température pour le 18M5 à l'état solide (loi elasto-viscoplastique multiplicative (2.20)).

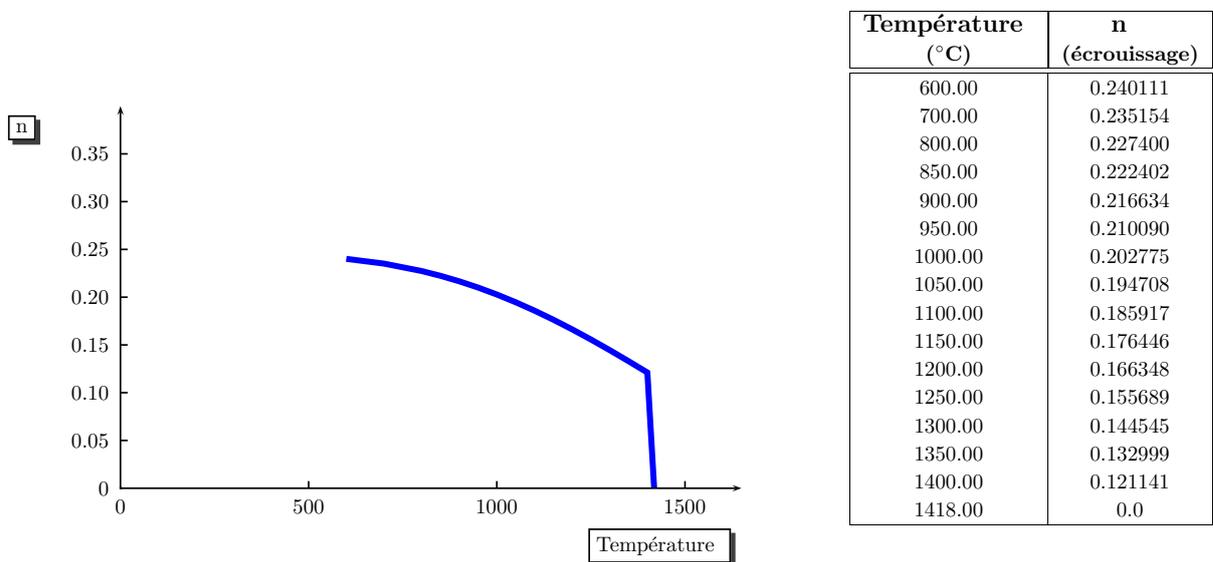


FIG. A.8 – Évolution du coefficient d'écrouissage en fonction de la température pour le 18M5 à l'état solide (loi elasto-viscoplastique multiplicative (2.20)).

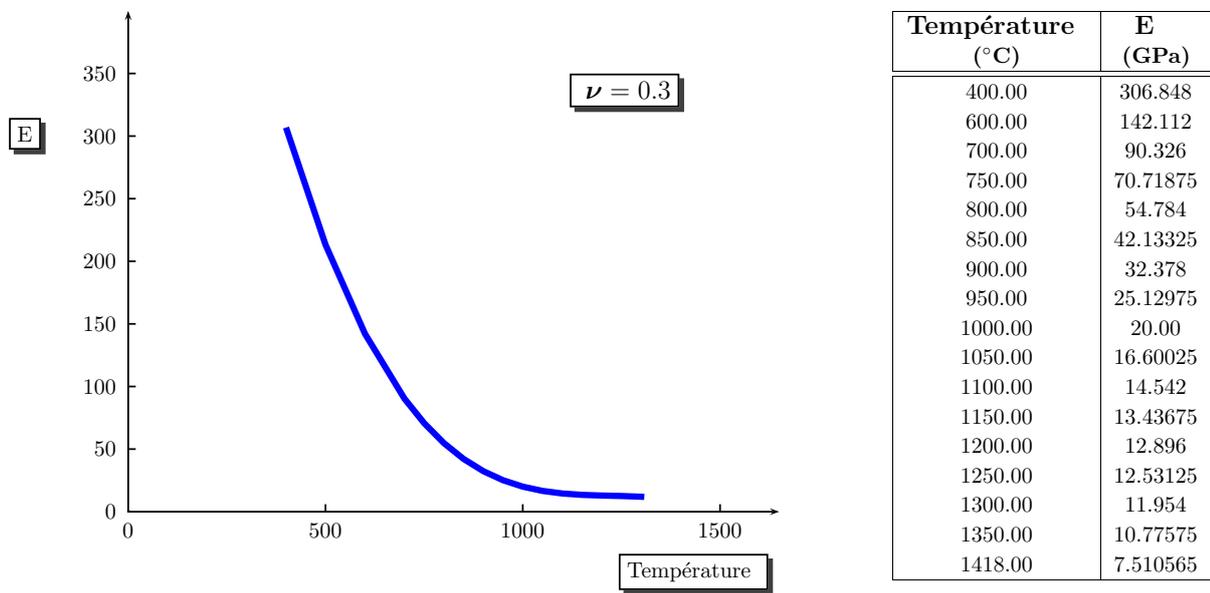


FIG. A.9 – Évolution du module de Young en fonction de la température pour le 18M5 à l'état solide. Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.3.

Annexe B

Données thermo-physiques et thermo-mécaniques de l'acier 100C6 pour la machine d'Hagongange

composant	teneur (% massique)
Carbone	1.01
Silicium	0,23
Manganèse	0.33
Aluminium	0,011
Soufre	0,026
Phosphore	0,021
Niobium	0,02

TAB. B.1 – composition chimique de l'acier 100C6

Les données thermophysiques sont issues du rapport de [Bobadilla *et al.*, 1993]. Les données thermomécaniques sont calculées à partir du modèle II de [Kozłowski *et al.*, 1992].

Lm	Type	Valeurs
0.5	1	-130.0D4
0.84	2	423.D0
3.24	2	370.D0
15.0	3	0.85
25.0	3	0.85

Lm = longueur métallurgique (m)

Type = 1 , ϕ (W.m^{-2})

Type = 2 , h ($\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$)

Type = 3 , ε_r

Température extérieure: 25 °C

Vitesse de coulée: 0.62 m.min⁻¹

FIG. B.1 – Zones de refroidissement et vitesse de coulée de la machine d’Hagondange.

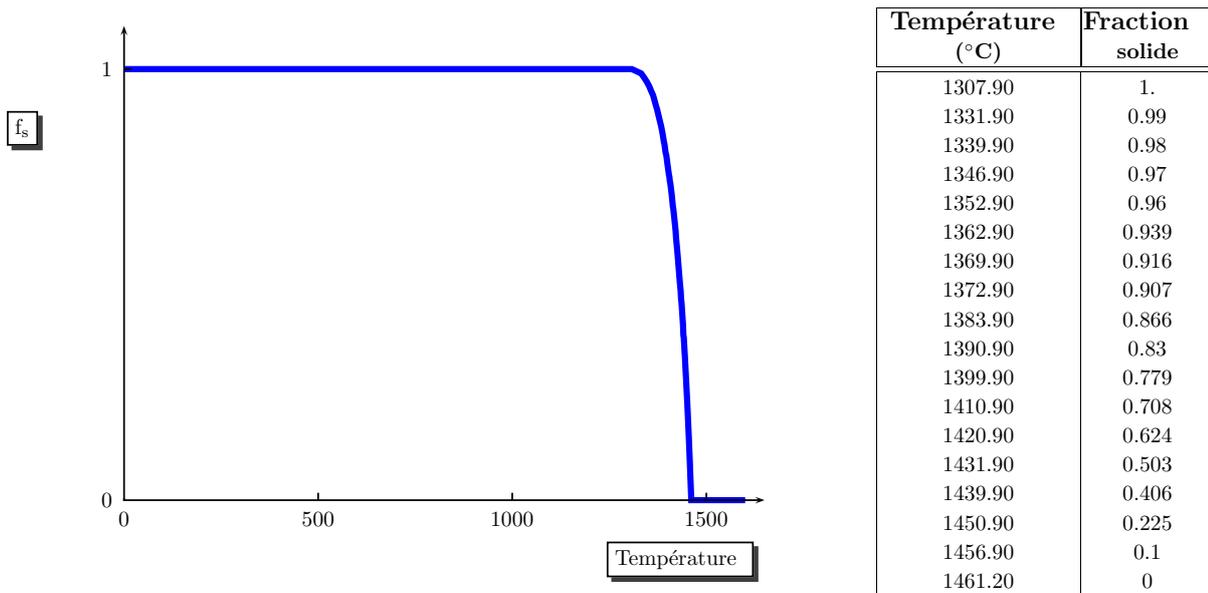


FIG. B.2 – Évolution de la fraction liquide du 100C6 en fonction de la température.

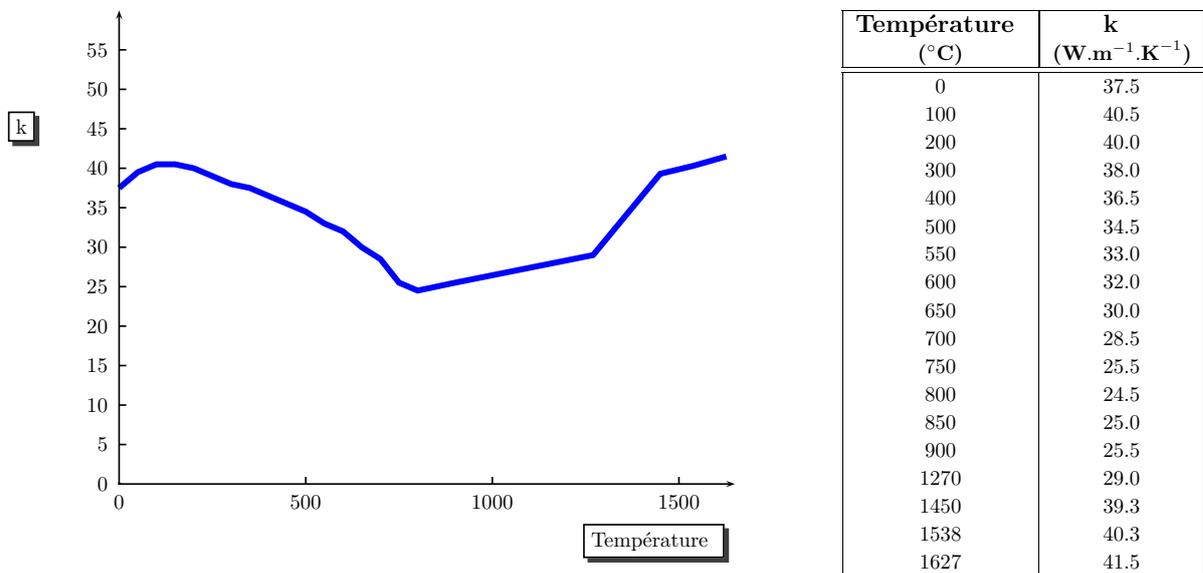


FIG. B.3 – Évolution de la conductivité thermique du 100C6 en fonction de la température.

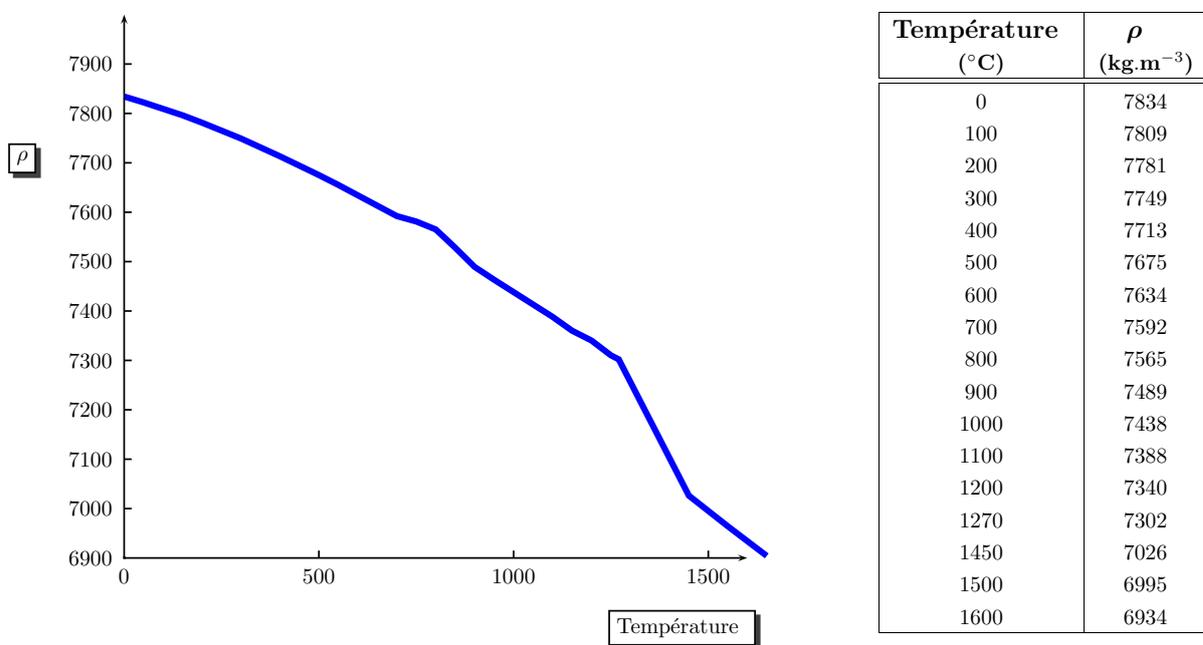
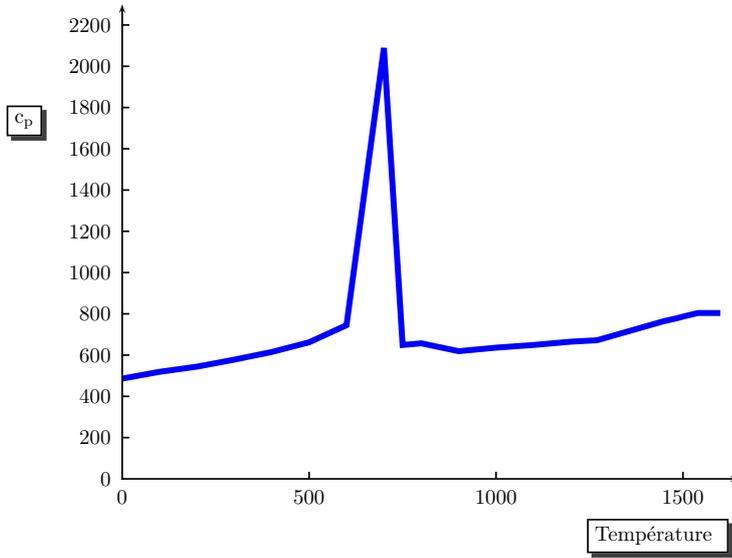
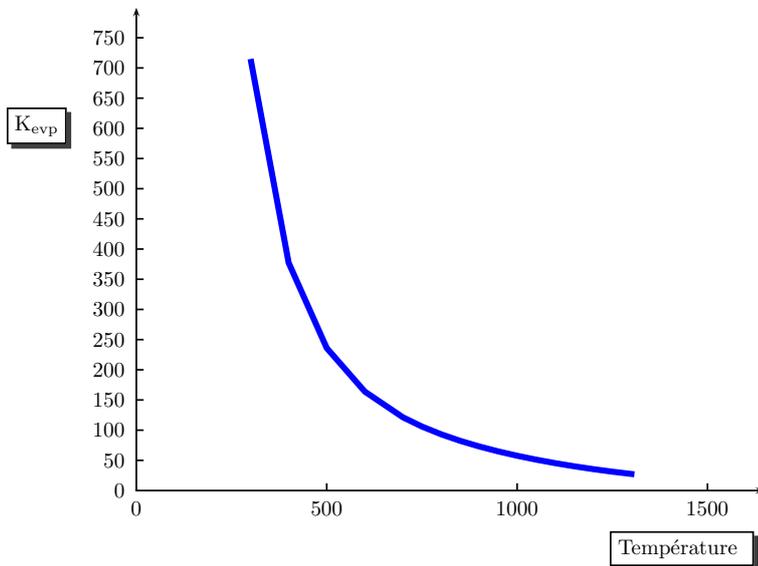


FIG. B.4 – Évolution de la masse volumique du 100C6 en fonction de la température.



Température (°C)	c_p (J.Kg ⁻¹ .K ⁻¹)
0	486
100	519
200	544
300	578
400	615
500	662
600	745
700	2089
750	649
800	657
900	619
1000	636
1100	649
1200	665
1270	672
1450	765
1480	777
1510	791
1540	804
1600	804

FIG. B.5 – Évolution de la capacité calorifique du 100C6 en fonction de la température. La chaleur latente est de 217000 J.Kg⁻¹.



Température (°C)	K_{evp} (MPa.s ^m)
300.00	714.943745
400.00	377.299646
500.00	236.016218
600.00	163.884093
700.00	121.331868
750.00	106.015382
800.00	93.262484
850.00	82.430634
900.00	73.073634
950.00	64.878071
1000.00	57.622132
1050.00	51.147958
1100.00	45.342471
1150.00	40.123695
1200.00	35.430812
1250.00	31.216899
1300.00	27.443675
1307.90	26.885584

FIG. B.6 – Évolution de la consistance K_{evp} à l'état solide pour le 100C6 en fonction de la température (loi elasto-viscoplastique multiplicative (2.20)).

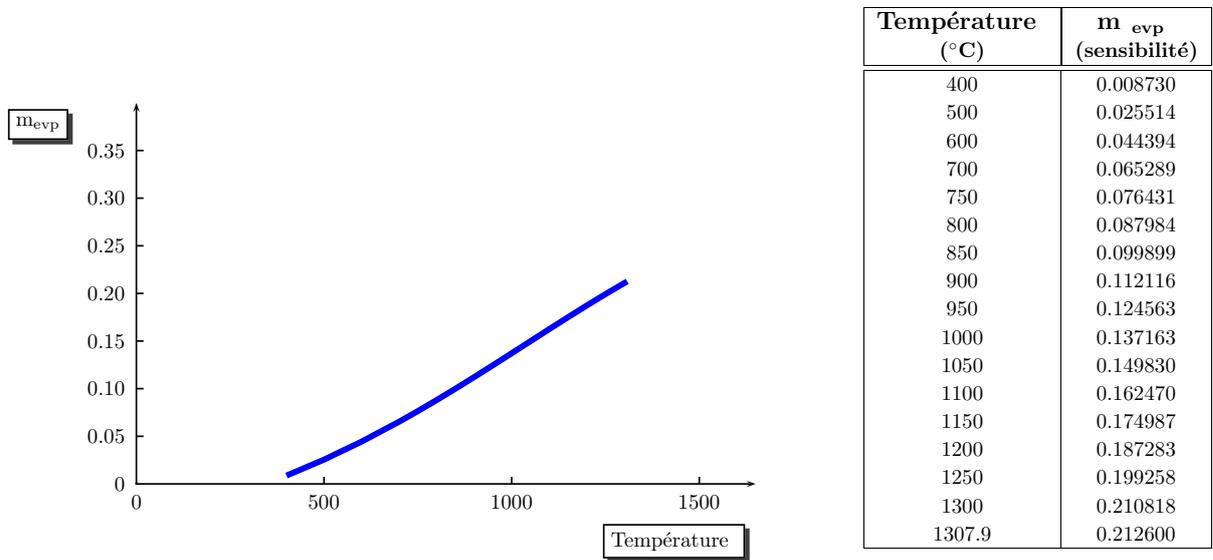


FIG. B.7 – Évolution de la sensibilité à la vitesse de déformation en fonction de la température pour le 100C6 à l'état solide (loi elasto-viscoplastique multiplicative (2.20)).

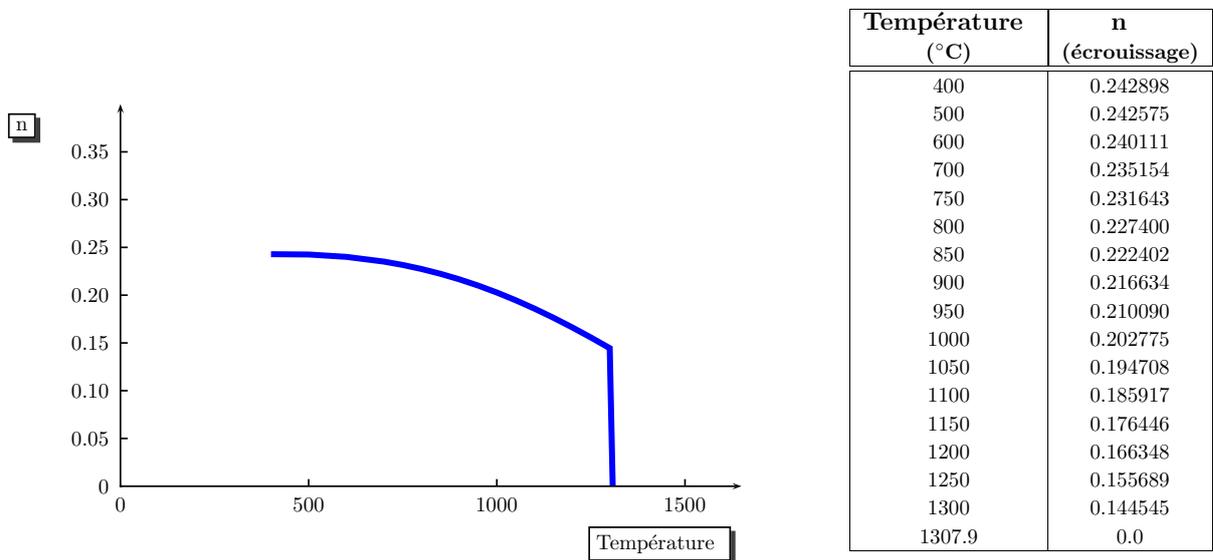


FIG. B.8 – Évolution du coefficient d'écrouissage en fonction de la température pour le 100C6 à l'état solide (loi elasto-viscoplastique multiplicative (2.20)).

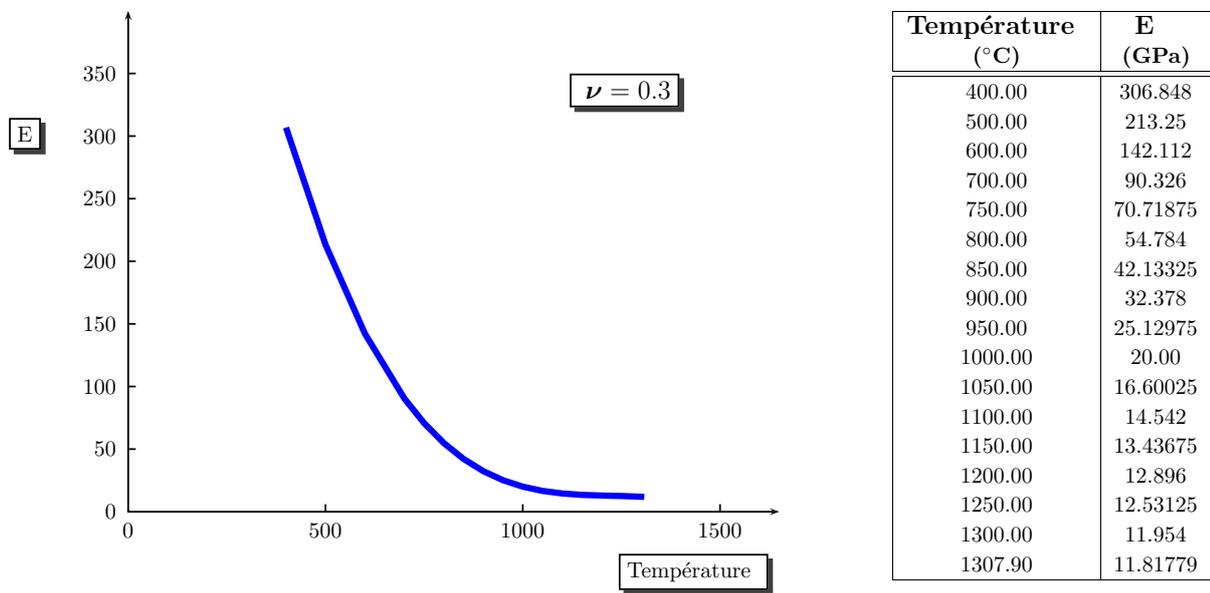


FIG. B.9 – Évolution du module de Young en fonction de la température pour le 100C6 à l'état solide. Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.3.

Bibliographie

- [Agassant *et al.*, 1996] J.F. Agassant, P. Avenas, J.P. Sergent, B. Vergnes, et M. Vincent. La mise en forme des matières plastiques. *Lavoisier, TEC & DOC*, 1996.
- [Aliaga, 2000] C. Aliaga. *Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermo-mécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Arnold *et al.*, 1984] D.N. Arnold, F. Brezzi, et M. Fortin. A stable finite element for stokes equation. *Calcolo*, 21 :337–352, 1984.
- [Bahloul, 2000] C. Bahloul. *Étude numérique des phénomènes thermo-mécanique pour la simulation tridimensionnelle du remplissage de moules en fonderie*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Batkam, 2002] S. Batkam. *Thermique multidomaines en simulation numérique du remplissage 3D*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [Bellet, a] M. Bellet. Contact pénalisé dans theracast et r2sol : une méthode d'adaptation locale du coefficient de pénalisation.
- [Bellet, b] M. Bellet. Optimisation du changement de variable sur la pression pour les formulations éléments finis vitesse-pression de theracast et r2sol.
- [Bellet *et al.*, 1994] M. Bellet, J.L. Chenot, L. Fourment, E. Massoni, et P. Montmitonnet. *Séminaire de plasticité*, volume 1. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [Bellet et Jaouen, 1999] M. Bellet et O. Jaouen. Finite element approach to thermo-mechanics of solidification processes. *Proc. Int. Conf. On Cutting Edge of Computer Simulation of Solidification and Casting, The Iron and Steel Institute of Japan (ISIJ)*, pages 173–190, 1999.
- [Bellet, 1999] M. Bellet. Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 175 :19–40, 1999.
- [Bobadilla *et al.*, 1993] M. Bobadilla, M. Niederlaender, C. Nuss, G. Perrin, et J. Séla-ries. *Données thermophysiques utilisées dans les modèles thermiques de solidification en coulée continue, pour différentes nuances d'aciers*. Rapport Interne, IRSID, 1993.

- [Bobadilla et Jacquot, 1986] M. Bobadilla et J.L. Jacquot. Elements de réflexion pour la maîtrise de la ségrégation dans les produits coulés en continu. Technical report, CESSID, 1986.
- [Boehmer *et al.*, 1998] J.R. Boehmer, G. Funk, M. Jordan, et F.N. Fett. Strategies for couples analysis of thermal strain history during continuous solidification processes. *Advances in Engineering Software*, 24, 1998.
- [Celentano, 1998] D. Celentano. Shrinkage prediction in the thermomechanical analysis of castings. *Proc. 8th Int. Conf. On Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, San Diego*, B.G. THOMAS and C. BECKERMANN (eds) :819–826, 1998.
- [Cervera *et al.*, 1998] M. Cervera, C. Agelet de Saracibar, et M. Chiumenti. Couples thermomechanical simulation of industrial solidification processes. *Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, San Diego*, 1998.
- [Chenot et Bellet, 1995] J.L. Chenot et M. Bellet. The ale-method for the numerical simulation of material forming process. *S.F. Shen and P. Dawson, Simulation of Materials Processing, Ithaca, USA Numiform*, pages 39–48, 1995.
- [Combeau *et al.*, 1996] H. Combeau, J.M. Drezet, A. Mo, et M. Rappaz. Modelling of microsegregation in macrosegregation computations. *Metall. and Mat. Trans. A*, 27A :2314–2327, 1996.
- [Comini et Mazan, 1994] G. Comini et M. Mazan. Stability characteristics of time integration schemes for finite element solution of conduction-type problems. *Int. J. Num. Meth. in Heat and Fluid Flow*, 4 :131–142, 1994.
- [Costes *et al.*, 2003] F. Costes, A. Heinrich, et M. Bellet. Three-dimensional thermomechanical simulation of the secondary cooling zone of steel continuous casting. *McWASP conference*, Sandestin, Florida, 2003.
- [Costes, 2001] F. Costes. *Approche diphasique des matériaux à l'état semi-solide*. Rapport Bibliographique, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Coupez, 1994] T. Coupez. A mesh improvement method for 3d automatic remeshing. *Numerical Grid Generation in computation fluid Dynamics and Related Fields*, N.P Weatherill ed. (Pineridge Press 1994) :615–626, 1994.
- [Coupez, 1995] T. Coupez. Stable stabilized finite element for 3d forming calculation. *communication interne*, 1995.
- [Coupez, 2000] T. Coupez. Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des éléments finis*, 9 :403–423, 2000.

-
- [Crisfield, 1991] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. Wiley, 1991.
- [Cross et Campbell, 1995] M. Cross et J. Campbell. Proc. 7th int. conf. on modelling of casting, welding and advanced solidification processes, london. *The Minerals Metals and Materials Society*, 1995.
- [Dalin, 1987] J.B. Dalin. *Modélisation Numérique de la Coulée Continue*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1987.
- [Davis, 1983] G. De Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity : a benchmark numerical solution. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 1983.
- [Decultieux, 1996] F. Decultieux. *Caractérisation du comportement thermomécanique d'alliages de fonderie pendant la solidification : application à la prédiction des défauts de rupture et à la modélisation des transferts de chaleur entre pièces et outils*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996.
- [Drezet et Rappaz, 1997] J.M. Drezet et M. Rappaz. Modeling of ingot distortions during direct chill casting of aluminium alloys. *Metallurgical and Material Transaction*, 1997.
- [Duflot, 2004] J. Duflot. La sidérurgie. *Encyclopédia Universalis*, <http://www.universalis-edu.com>, 2004.
- [Fachinotti et Bellet, 2004] V.D. Fachinotti et M. Bellet. A diffusion-split method to deal with thermal shocks using standard linear tetrahedral finite elements. *Numiform*, 2004.
- [Fachinotti, 2001] V. Fachinotti. *Modelado numérico de fenómenos termomecánicos en la solidificación y enfriamiento de aceros obtenidos por colada continua*. Thèse de doctorat, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídrica, Universidad Nacional del Litoral, Argentine, 2001.
- [Fahri, 1998] J. Fahri. Coulée continue de l'acier. *Techniques de l'Ingenieur, Traité de Métallurgie*, pages 8101–8122, 1998.
- [FFA, 2003] FFA. <http://www.ffacier.org/>. Fédération Française de l'Acier, 2003.
- [Fortin, 1985] M. Fortin. Experiments with several elements for viscous incompressible flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 5 :911–928, 1985.
- [Frey et George, 1999] P.J. Frey et P.L. George. *Maillages - Applications aux éléments finis*. Hermes Science, 1999.
- [Gaston, 1997] L. Gaston. *Simulation numérique par éléments finis bidimensionnels du remplissage de moules de fonderie et étude expérimentale sur maquette hydraulique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [Gay, 1995] C. Gay. *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.

- [Germain, 1973] P. Germain. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1973.
- [Griffiths *et al.*, 1953] E. Griffiths, the British Iron, et Steel Research Association. *Physical constants of some commercial steels at elevated temperatures*. Butterworths Scientific Publications, London, 1953.
- [Harste *et al.*, 1992] K. Harste, T. Suzuki, et K. Schwerdtfeger. Thermomechanical properties of steel : viscoplasticity of γ iron and γ *fe - c* alloys. *Material Science and Technology*, 8, 1992.
- [Hattel *et al.*, 1998] J. Hattel, J. Thorborg, et S. Andersen. Stress/strain modelling of casting processes in the framework of the control-volume method. *Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, San Diego*, 1998.
- [Heinrich *et al.*, 2002] A. Heinrich, M. Bellet, et F. Costes. Two dimensional thermomechanical simulation of the secondary cooling zone of steel continuous casting. *ESA-FORM conference*, Krakow, Poland, 2002.
- [Heinrich, 2000] A. Heinrich. *Modélisation de la coulée continue*. Rapport Bibliographique, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Heinrich, 2003] A. Heinrich. *Modélisation Bidimensionnelle de la coulée continue d'acier*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003.
- [Hild, 1998] P. Hild. *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.
- [Huespe *et al.*, 2000] A.E. Huespe, A. Cardona, et V. Fachinotti. Thermomechanical model of a continuous casting process. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 182 :439–455, 2000.
- [IRSID, 2001] IRSID. *Projet d'optimisation des systèmes de coulée - coulée continue*. *Rapport d'avancement annuel*, 2001.
- [Jaouen, 1998] O. Jaouen. *Modélisation Tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces - moules*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [Jardy et Combeau, 1997] A. Jardy et H. Combeau. Simulation numérique des phénomènes de transport. Technical report, Ecole des Mines de Nancy, cours de 3ème année, 1997.
- [Kajitani *et al.*, 2001] T. Kajitani, J.M. Drezl, et M. Rappaz. Numerical simulation of deformation-induced segregation in continuous casting of steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 32A :1479–1491, 2001.

-
- [Kelly *et al.*, 1988] J.E. Kelly, K.P. Michalek, T.G. O'Connor, B.G. Thomas, et J.A. Dantzig. Initial development of thermal and stress fields in continuously cast steel billets. *Metall. Trans. A*, 19A :2589–2602, 1988.
- [Kim *et al.*, 1996] K.H. Kim, Kyu Hwan Oh, et Dong Nyung Lee. Mechanical behavior of carbon steels during continuous casting. *Scripta Materiala*, 2 :31–307, 1996.
- [Kozłowski *et al.*, 1992] P.F. Kozłowski, Brian G. Thomas, Jean A. Azzi, et Hao Wang. Simple constitutive equations for steel at high temperature. *Metall. Trans. A*, 23A :903–918, March 1992.
- [Kraemer *et al.*, 1986] R. Kraemer, J.Y. Lamant, M. Larrecq, et P. Rabier. Comportement mécanique de la brame dans la zone de refroidissement secondaire d'une machine de coulée continue d'acier. Technical report, IRSID, UNIREC, 1986.
- [Lai *et al.*, 1996] W. M. Lai, D. Rubin, et Erhard Krempl. *Continuum Mechanics*. Butterworth Heinemann, 1996.
- [Lalli, 1985] L. Lalli. A model for deformation and segregation of solid-liquid mixtures. *Metall. Trans. A*, 16A :1393–1403, 1985.
- [Lamant *et al.*, 1984] J.Y. Lamant, M. Larrecq, J.L. Hengsen, J.P. Birat, Z. Smarzynski, C. Rossard, J.D. Weber, et J.C. Dhuyvetter. Etude du gonflement des brames de coulée continue. *Recherche technique acier, convention n°7210.CA/306, EUR 8363/III FR*, 1984.
- [Lamant *et al.*, 1985] J.Y. Lamant, M. Larrecq, J.P. Birat, J.L. Hengsen, J.D. Weber, et J.C. Dhuyvetter. Study of slabs bulging in a continuous casting. *Conférence de la Metals Society, Londres*, 1985.
- [Landau et Lifchitz, 1989] L. Landau et E. Lifchitz. *Mécanique des Fluides*, volume 6 of *Physique Théorique*. Mir, 1989.
- [Laxmanan et Flemings, 1980] V. Laxmanan et M. Flemings. Deformation of semi-solid sn-15 pct pb alloy. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 11A :1927–1937, 1980.
- [LeCorre et Bellet, 2004] S. LeCorre et M. Bellet. Two-phase modeling of metals solidification : a numerical approach for the thermomechanical problem. In *Proc. Numiform*, Columbus (USA), june 2004. 8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes. (to be published).
- [Lemmon, 1979] E.C. Lemmon. Phase-change techniques for finite element conduction codes. *Numerical Methods in Thermal Problems*, pages 149–158, 1979.
- [Li et Ruan, 1995] B.Q. Li et Y. Ruan. Integrated finite element model for transient fluid flow and thermal stresses during continuous casting, journal of thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*, 18 :359–381, 1995.

- [Lucas, 1972] L.D. Lucas. Densités de métaux à haute température (dans les états liquide et solide). *Mem. Sci. Rev. Mét.*, 6 :379, 1972.
- [Marie, 1997] S. Marie. *Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme des matériaux*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [Martin *et al.*, 1997] C. Martin, D. Favier, et M. Suéry. Viscoplastic behaviour of porous metallic saturated with liquid. *Int. J. Plasticity*, 13 :215–235, 1997.
- [Martin et Moyce, 1952] J.C. Martin et W.J. Moyce. Some gravity wave problems in the motion of perfect liquids. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1952.
- [Menai, 1995] M. Menai. *Simulation numérique tridimensionnelle du refroidissement des pièces en fonderie : approche thermomécanique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.
- [Menai, 1995] M. Menai. *Simulation Numérique Tridimensionnelle du Refroidissement des Pièces en Fonderie : Approche Thermo-mécanique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.
- [M’Hamdi *et al.*, 1999] M. M’Hamdi, M. Bobadilla, et H. Combeau. Analyse de l’influence de la convection thermosolutale et du retrait à la solidification sur les ségrégations en coulée continue. *Rapport Interne, IRSID*, 1999.
- [Mijar et Arora, 2000] A.R. Mijar et J.S. Arora. Review of formulation for elastostatic frictional contact problems. *Struct. Multidisc. Optim.*, 20 :167–189, 2000.
- [Miyazawa et Schwerdtferger, 1981] K. Miyazawa et K. Schwerdtferger. Macrosegregation in continuously cast steel slabs : preliminary theoretical investigation on the effect of steady state bulging. *Arch. Eisen*, 52(11), 1981.
- [Mo *et al.*, 2003] A. Mo, M. M’Hamdi, et G.H. Fjaer. Mushy zone rheology and hot tearing in aluminium dc casting. *The Minerals, Metals and Materials Society*, pages 199–206, 2003.
- [Mortensen, 1999] D. Mortensen. A mathematical model of the heat and fluid flows in direct-chill casting of aluminium sheet ingots and billets. *Metall. and Mat. Trans. B*, 30 B, 1999.
- [Newmark, 1959] N.M. Newmark. A method of computation of structural dynamics. *ASCE J. of Engng. Mech. Division*, 85, 1959.
- [Nguyen *et al.*, 1994] T. Nguyen, D. Favier, et M. Suéry. Theoretical and experimental study of isothermal mechanical behavior of alloys in the semi-solid state. *International Journal of Plasticity*, 10(6) :663–693, 1994.

-
- [Ni et Beckermann, 1996] J. Ni et C. Beckermann. A volume-averaged two-phase model for transport phenomena during solidification. *Metall. and Mat. Trans. A*, 27A :2754–2764, September 1996.
- [OSC, 2002] OSC. Rhéologie d’alliage semi-solide. *Optimisation des Systèmes de Coulés, Rapport n°2*, 2002.
- [Paccini, 2002] A. Paccini. *Modélisation thermomécanique de la peau solide formée en lingotière de coulée continue*. Rapport de Mastère, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [Pascon *et al.*, 2001] F. Pascon, A.M. Habraken, M. Bourdouxhe, et F. Labory. Finite element modeling of thermo-mechanical behavior of a steel strand in continuous casting. *The fourth international ESAFORM Conference on Material Forming*, pages 867–870, 2001.
- [Pascon, 2003] F. Pascon. $2D^{\frac{1}{2}}$ *Thermal-mechanical model of continuous casting of steel using finite element method*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2003.
- [Perchat, 2000] E. Perchat. *MINI-element et factorisations incomplètes pour la parallélisation d’un solveur de Stokes 2d*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [PETSC, 2004] PETSC. <http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-2>. Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation, 2004.
- [Pichelin, 1998] E. Pichelin. *Calcul par éléments finis du remplissage 3D pour des fluides visqueux incompressibles. Application à l’injection*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [Rappaz *et al.*, 1998] M. Rappaz, M. Deville, et M. Bellet. *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*, volume *Traité des Matériaux*, tome 10. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- [Rappaz *et al.*, 1999] M. Rappaz, J.M. Drezet, et M. Gremaud. A new hot-tearing criterion. *Metall. and Mat. Tans. A*, 30A :449–455, 1999.
- [Rio, 2003] G. Rio. Un modèle éléments finis sans multiplicateur de lagrange ou pénalisation. *16^{me} Congrès Français de Mécanique - Nice*, 2003.
- [Seconde et Suéry, 1984] J. Seconde et M. Suéry. Effect of strain rate on deformation behavior of semi-solid dendritic alloys. *J. mat. Sci.*, 19 :3995–4002, 1984.
- [Seconde, 1984] J. Seconde. *Microstructure et rhéologie des alliages Sn-Pb semi solides*. Thèse de doctorat, Institut national Polytechnique de Grenoble, 1984.
- [Smarzynski et Weber, 1981] Z. Smarzynski et J.D. Weber. Gonflement des brames dans la coulée continue de l’acier. *16^{ème} Colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris*, pages 109–124, 1981.

- [Sorimachi et Brimacombe, 1977] K. Sorimachi et J.K. Brimacombe. Improvements in mathematical modelling of stresses in continuous casting of steel. *Ironmaking and Steelmaking*, 4, 1977.
- [Soyris, 1990] N. Soyris. *Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1990.
- [Sundman, 1997] B. Sundman. *User's guide*. Royal Institute of Technology, Sweden, div of computational thermodynamics, dept of materials science and engineering edition, 1997.
- [Suéry et Flemings, 1982] M. Suéry et M. Flemings. Effect of strain rate on deformation behavior of semi-solid dendritic alloys. *Metall. and Mat. Trans. A*, 13 :1809–1819, 1982.
- [Suzuki *et al.*, 1988] T. Suzuki, K.H. Tacke, K. Wunnenberg, et K. Schwerdtfeger. Creep properties of steel at continuous casting temperatures. *Iron and Steelmaking*, 15 :90–100, 1988.
- [Taylor *et al.*, 1998] G.A. Taylor, C. Bailey, et M. Cross. A three dimensionnal finite volume approach to the thermomechanical modelling of the shape casting of metals. *Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, San Diego*, 1998.
- [Thomas *et al.*, 1992] B.G. Thomas, A. Moitra, et W. Storkmar. Thermo-mechanical model of steel shell behavior in the continuous casting mold. *EPD Congress*, 1992.
- [Thomas *et al.*, 1999] B.G. Thomas, H. Bai, S. Sivaramakrishnan, et S.P. Vanka. Detailed simulation of flow in continuous casting using k- ϵ , les, and piv. *International Symposium on Cutting Edge of Computer Simulation of Solidification and Processes*, Osaka-Japan, 1999.
- [Thomas et Beckermann, 1998] B.G. Thomas et C. Beckermann. *Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, San Diego*. The Minerals Metals and Materials Society, Warrendale, Pennsylvania, 1998.
- [Toyoshima, 1994] S. Toyoshima. A few simulation of densification in forming processes for semi-solid materials. *Third conference on semi-solid processing of alloys and composites*, pages 47–62, 1994.
- [Traoré, 2001] K. Traoré. *Simulation thermo-mécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Tszeng et Kobayashi, 1989] T.C. Tszeng et S. Kobayashi. Stress analysis in solidification processes : application to continuous casting. *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, 29, 1989.

-
- [Vannier, 1995] I. Vannier. *Modélisation de la solidification des lingots d'acier*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1995.
- [Vicente-Hernandez, 1994] P. Vicente-Hernandez. *Vers une approche thermomécanique du procédé de fonderie : caractérisation rhéologique et microstructurale d'alliages métalliques à l'état semi-solide*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [Wang et Beckermann, 1991] C. Wang et C. Beckermann. Equiaxed dendritic solidification with convection : Part1 multiscale/multiphase modeling. *Metall. and Mat. Trans. B*, 22B :2754–2764, 1991.
- [Wray, 1982] P.J. Wray. Effect of carbon content on the plastic flow of plain carbon steels at elevated temperatures. *Metallurgical Transactions A*, 13A :125–134, 1982.
- [Wriggers, 1995] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archive of Computational Methods in Engineering, State of the Art reviews*, 4(2) :1–49, 1995.
- [Wunnenberg, 1978] K. Wunnenberg. Strangausbauchung zwischen stützrollen beim stranggiessen von brammen. *Stahl u. Eisen* 98, 6 :254–259, 1978.
- [Zlamal, 1971] M. Zlamal. Finite element for non linear parabolic equations. *Rairo Num. Analysis*, 11 :93 – 107, 1971.

Résumé

Nous avons proposé une modélisation thermomécanique de la coulée continue d'acier en trois dimensions. Notre approche permet d'obtenir la solution thermomécanique stationnaire du procédé, sur toute la machine. Il est alors possible de déduire l'histoire thermique et mécanique du produit en visualisant les cartes de contraintes ou de température. Un des résultats attendus de notre étude concerne les déflexions entre les rouleaux qui traduisent le gonflement, à l'origine des ségrégations. Nous avons basé notre étude sur la stratégie globale instationnaire, en adoptant une approche purement lagrangienne. Nous simulons l'apport continu de matière, grâce à l'introduction d'un outil d'injection situé sur la face supérieure du domaine. La face inférieure du domaine admet la cinématique de l'outil de guidage du procédé. Ainsi, le maillage augmente constamment selon un chemin délimité par les rouleaux. L'évolution du maillage -création de nouveaux nœuds- est gérée de manière locale par une technique de recollement de maillages.

D'un point de vue modélisation, nous résolvons les équations instationnaires de conservation de l'énergie, de la matière et de la quantité de mouvement. Le problème mécanique est abordé selon une approche de type milieu monophasé équivalent ; nous négligeons les phénomènes de convection naturelle et de macroségrégation, mais les phénomènes de dilatation thermique et de retrait à la solidification sont pris en compte. La zone solide est supposée obéir à un comportement élasto-viscoplastique, dont la rhéologie est donnée par les lois de la littérature. Les zones pâteuse et liquide sont supposées obéir respectivement à un comportement viscoplastique et newtonien. Nous avons validé, avec succès, notre approche sur plusieurs cas et nous l'avons appliqué à deux machines de coulée industrielles.

Mots-clés: coulée continue, acier, solidification, rhéologie, modélisation élément finis, maillage, lagrangien, couplage thermo-mécanique.

Abstract

In this work, we introduce a thermo-mechanical model of the steel continuous casting process, in three dimensions. With our approach, it is possible to obtain thermo-mechanical steady-state solution of the process, for the whole product. The thermo-mechanical history of the product can thus be deduced, by viewing the stress and temperature fields, for instance. One of the expected results deals with the bulging between rolls, which is known to give birth to segregation phenomena. We base our study on the global non steady-state strategy using a Lagrangian approach. The flow of matter in the studied domain is simulated through one injection tool located in the upper surface of the domain. The lower face is supposed to be driven down at the starting block velocity. However, the mesh displacement at the upper surface is imposed to zero and consequently the mesh volume enlarges continuously. The evolution of the mesh - relocation of nodes, creation of new nodes - is treated by a specific generation mesh technique.

Concerning the model, non-steady thermo-mechanical conservation equations are solved. The approach to the mechanical problem is of equivalent one-phase type (velocity and pressure are the unknowns). In our approach, natural convection and macrosegregation are neglected but thermal dilatation and solidification shrinkage are accounted for. Solid, mushy and liquid states obey respectively to elasto-viscoplastic, viscoplastic and Newtonian behaviours. The rheology of the solid state is calculated thanks to laws from the literature. These developments have been validated on industrial cases, showing a good qualitative and quantitative agreement.

Keywords: steel, continuous casting, solidification, rheology, finite elements, generation mesh, Lagrangian, thermo-mechanical coupling.