



HAL
open science

Etude du modèle de Hubbard bidimensionnel à demi remplissage par des méthodes constructives.

Stéphane Afchain

► **To cite this version:**

Stéphane Afchain. Etude du modèle de Hubbard bidimensionnel à demi remplissage par des méthodes constructives.. Physique [physics]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT: . pastel-00001436

HAL Id: pastel-00001436

<https://pastel.hal.science/pastel-00001436v1>

Submitted on 8 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude du modèle de Hubbard
bidimensionnel à demi-remplissage par des
méthodes constructives

Stéphane Afchain

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	v
1 Le modèle de Hubbard	1
1.1 Modélisation très générale d'un système à N -corps	1
1.2 Le formalisme de seconde quantification	12
1.3 Considérations physiques	20
2 Algèbres de Grassmann et intégrale fonctionnelle fermionique	23
2.1 Algèbres de Grassmann	23
2.2 Calcul dans les algèbres de Grassmann	28
2.3 Dérivées et intégrales	34
2.4 Mesures gaussiennes grassmanniennes	36
2.5 Théorème de Wick	40
2.6 Intégrales gaussiennes grassmanniennes et traces dans l'espace de Fock	42
2.7 Noyau intégral fermionique de la fonction delta	44
2.8 Une formule pour la trace	49
2.9 L'intégrale de chemin fermionique	53
3 Le modèle de Hubbard dans le langage de la théorie des champs	55
3.1 Formulation générale	55
3.2 Développement à l'aide d'une formule d'interpolation	66
3.3 Le problème de la surface de Fermi	74
3.4 Formule de jungle	81
3.5 Les bornes sur les coefficients dans des cas simplifiés	83

4 Petite théorie des réseaux	89
4.1 Réduction à un réseau ayant une seule source et un seul puits	91
4.2 Coupures	92
Premier article : Renormalisation des fonctions à deux points	97
Second article : Une borne inférieure sur la self-énergie	149
Conclusion et perspectives	185
Bibliographie	187

Remerciements

Même si le lecteur risque de commencer la lecture du présent travail par cette page, je préfère l'avertir qu'elle a été rédigée en dernier. En effet, sans doute avec la volonté de « garder le meilleur pour la fin », j'ai préféré différer sa rédaction jusqu'au dernier moment, après avoir mis tous mes efforts dans la rédaction du mémoire qui suit, ce qui fut évidemment un travail de longue haleine. Si ce dernier a plutôt été écrit avec la tête, j'écris maintenant cette page avec le cœur.

Tout d'abord je remercie Patrick Mora, directeur du Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, qui a accepté que je rejoigne son laboratoire en tant que doctorant, rendant ainsi possible mon travail de thèse sur le plan matériel. J'ai aussi pu apprécier, en particulier lors des conseils de laboratoire, sa diplomatie, son honnêteté et sa franchise.

J'exprime évidemment toute ma gratitude à ceux qui ont encadré mon travail, Jacques Magnen et Vincent Rivasseau. En fait, même si Jacques fut mon directeur de thèse officiel, il est juste de dire que ma thèse s'est déroulée en co-tutelle. Ceci est finalement bien naturel quand on songe à la collaboration passée et présente de ces deux chercheurs, qui constituent un tandem impressionnant à plus d'un titre, dans lequel j'ai fait en sorte de m'intégrer. Je considère que j'ai eu une réelle chance de pouvoir travailler avec eux, car outre des compétences très étendues dans leur domaine de recherche, Jacques et Vincent m'ont maintes fois prouvé qu'ils avaient en plus de grandes qualités humaines.

Je remercie sincèrement les membres de mon jury. Philippe Nozières m'a fait l'honneur d'accepter de le présider, tandis que Benoît Douçot et Manfred Salmhofer ont pris en charge la tâche difficile des rapporteurs. Enfin, je remercie sincèrement Antoine Georges qui a accepté de se joindre au jury, et à qui je dois quelques éclaircissements sur la problématique des fermions corrélés.

Par ailleurs, j'ai naturellement une pensée pour toutes les personnes qui assurent le fonctionnement matériel du laboratoire : Florence Auger et Malika Lang pour le secrétariat ; Florence Hamet, Stéphane Aicardi et Philippe Beauchet pour l'informatique.

Enfin, je serais impardonnable si j'oubliais tous les doctorants que j'ai pu côtoyer pendant ma thèse : Claudia Isola, Hervé Moutarde, Sylvain Ribault, Stéphane Fianza qui ont terminé la leur avant moi, et

REMERCIEMENTS

aussi Christina Timirgaziu, Pascal Grange, Domenico Orlando, Alexei Lokhov, Luciano Abreu, Chloé Papineau, Liguori Jegu, Barbara Tumpach et Frédéric Charve. Pour terminer, je n'oublie pas Claude de Calan, dont j'ai pu apprécier la gentillesse et les casse-têtes mathématiques souvent difficiles, parfois insolubles.

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le programme général de l'étude rigoureuse de systèmes physiques constitués de fermions en interaction. L'étude de tels systèmes correspond au problème à N corps, et il est bien connu que la règle générale en ce domaine est l'impossibilité d'aboutir à des solutions exactes. En fait, même s'il est vrai que dans certains cas particuliers, en basse dimension, de telles solutions ont pu être élaborées, il semble clair que l'on ne doit plus attendre aujourd'hui de progrès significatifs par cette approche.

On peut alors considérer ces systèmes fermioniques sous un angle plus physique, en privilégiant par exemple une certaine image physique ou un certain régime de la théorie, mais évidemment il est alors difficile de justifier *a posteriori* la pertinence de cette approche : tout au plus peut-on constater à la fin une non-contradiction avec les hypothèses initiales. Les conclusions que l'on tire de cette façon ne sont donc pas démontrées au niveau de rigueur mathématique, mais néanmoins bien étayées. Cependant, ceci n'exclut pas que des méthodes rigoureuses (et non pas exactes) puissent permettre d'apporter un éclairage intéressant sur ces questions.

L'approche rigoureuse consiste à partir des premiers principes, pour obtenir des résultats certes plus faibles que des solutions exactes, mais démontrés mathématiquement. En l'occurrence pour l'étude des systèmes fermioniques à basse température, les premiers principes sont constitués par la mécanique statistique quantique. Plus précisément l'objet de cette thèse est l'étude du modèle de Hubbard bidimensionnel à demi-remplissage. Le modèle de Hubbard est le modèle le plus simple pour décrire le comportement de fermions (génériquement des électrons) sur un réseau : il ne prend en compte que leur diffusion et une interaction ultra-locale (c'est-à-dire qui n'intervient que pour des électrons placés sur le même site). Il s'agit donc d'un modèle très simplifié, presque naïf, mais dont l'étude rigoureuse s'avère particulièrement difficile dès que la dimension est au moins égale à 2. Le demi-remplissage signifie intuitivement que le nombre total d'électrons est égal à la moitié du nombre de sites du réseau ¹.

Lorsque le couplage est suffisamment faible, l'idée la plus naturelle est d'utiliser des méthodes

¹Sur un réseau infini, ceci est valable en moyenne sur toute région assez grande mais finie.

perturbatives. Mais dans une approche rigoureuse, il est nécessaire d'établir le bien-fondé de ces développements : la question de leur convergence notamment doit être traitée. C'est là que les techniques constructives peuvent être mises en œuvre. Historiquement initiées pour aborder des problèmes de théorie relativiste des champs (en passant toutefois par une formulation euclidienne), elles sont appliquées depuis les années 1990 à l'étude de la matière condensée. Ces techniques sont dites « constructives » en ce sens qu'elles permettent de construire rigoureusement des modèles de théorie des champs. En l'occurrence, notre modèle de Hubbard bidimensionnel à demi-remplissage peut être formulé en termes d'une théorie des champs. L'approche constructive permet de montrer que cette théorie des champs est mathématiquement bien formulée, c'est-à-dire que les développements perturbatifs correspondants ont un rayon de convergence non nul en la constante de couplage. Ce résultat permet donc d'identifier un domaine où l'on a une phase bien déterminée du modèle de Hubbard, à savoir sa phase normale. Néanmoins, il ne permet pas d'identifier avec certitude tout le domaine de valeurs des paramètres correspondant à cette phase normale.

Le second résultat majeur de cette thèse concerne la self-énergie. En effet, cette grandeur joue un rôle très important pour la physique du modèle, et elle a permis à Salmhofer (voir [Sal98]) de formuler un critère mathématiquement précis pour distinguer les deux classes d'universalité bien connues pour les systèmes de fermions à basse température : celle des liquides de Fermi au sens de Landau, et celle des liquides de Luttinger. Très brièvement, on a un liquide de Fermi² si et seulement si, dans le domaine de convergence, la self-énergie et toutes ses dérivées premières et secondes (dans l'espace de Fourier) sont uniformément bornées. Or, précisément, nous montrons que ce critère est violé par notre modèle de Hubbard bidimensionnel à demi-remplissage, si bien que nous en concluons que son comportement *n'est pas* celui d'un liquide de Fermi.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le chapitre 1 introduit le modèle de Hubbard. Notre démarche a été de partir d'un système à N corps très général, puis de mettre en lumière les différentes simplifications et hypothèses qui permettent d'aboutir au modèle particulier que nous étudions par la suite. Cette approche est fondée, comme nous l'avons dit, sur les premiers principes, c'est-à-dire sur la mécanique statistique quantique dans la formulation hamiltonienne. Dans ce chapitre, nous ne prétendons bien sûr pas à l'originalité, mais il nous a semblé utile, en ce sens que la démarche permettant de passer par approximations successives d'un hamiltonien très général au hamiltonien de Hubbard est à notre connaissance très rarement explicitée dans la littérature.

Le chapitre 2 permet de passer du formalisme hamiltonien au formalisme fonctionnel grassman-

²Dans toute la suite de ce mémoire, et conformément à l'usage adopté dans la littérature, nous écrirons « liquide de Fermi » pour signifier « liquide de Fermi au sens de Landau ».

nien. L'usage des variables de Grassmann et de l'intégrale fonctionnelle grassmannienne est standard, mais il nous a semblé néanmoins utile de faire le point sur ce sujet. L'idée essentielle que nous avons voulu faire ressortir est que les fonctions de corrélation de l'approche hamiltonienne peuvent être écrites grâce à des intégrales fonctionnelles fermioniques, qui reformulent donc naturellement le modèle étudié en termes d'une théorie des champs. Là encore, ce point est rarement explicité de façon satisfaisante dans la littérature.

Le chapitre 3 constitue une introduction, que nous espérons pédagogique, aux principales techniques constructives. Pour cela, nous prenons le temps d'expliquer pourquoi les méthodes naïves ne peuvent permettre de contrôler la convergence des développements perturbatifs. En particulier, les fameux développements en graphes de Feynman, écrits sans précaution particulière, ne permettent pas de conclure favorablement car le nombre de ces graphes est trop important. L'approche constructive consiste à utiliser des « développements en arbres » qui, de façon imagée, n'explicitent qu'à moitié les graphes de Feynman. Ceux-ci sont donc remplacés par des arbres qui eux ne sont pas trop nombreux. Cette idée est un premier élément mais est insuffisante. En fait, le cœur de l'approche constructive réside dans ce qui est appelé « analyse multi-échelles ». Ceci signifie que le modèle doit être étudié selon les différents ordres de grandeur d'impulsions possibles. Mais en fait, cette dernière phrase n'est pas complètement exacte : dans les modèles de matière condensée, ce qui compte n'est pas la valeur absolue des impulsions, mais leur distance à la surface de Fermi. Ceci conduit, selon des techniques standard, à introduire une sectorisation de l'espace de Fourier en fonction de laquelle le développement en arbres doit être optimisé. L'écriture d'un tel développement est aujourd'hui possible directement en une seule étape, grâce à une très jolie formule connue sous le nom de « formule de jungle de Taylor-Brydges-Kennedy », expliquée en détails. Nous espérons ainsi que cette introduction permettra au lecteur peu familier des techniques constructives de pouvoir ensuite aborder la lecture du premier article. Il nous a semblé inutile de reprendre les démonstrations qui y figurent, vu que cela aurait conduit à d'inévitables et nombreuses paraphrases. C'est pourquoi nous avons jugé légitime que cet article figure *in extenso* dans le corps de ce mémoire. Il en est de même pour le second article, qui explique en détails tous les calculs permettant d'aboutir à une borne inférieure convenable du premier graphe non-trivial contribuant à la self-énergie. Là encore, il nous a semblé très difficile d'échapper à la paraphrase, et comme le contenu de cet article fait partie intégrante de la preuve que le critère de Salmhofer est violé, il nous a semblé que sa reprise intégrale dans le présent mémoire était la meilleure solution.

Enfin, le dernier chapitre peut être vu comme un appendice. Son but est de présenter un théorème de théorie des graphes (ou plus précisément deux versions d'un même théorème), le(s) théorème(s) de Menger dont l'utilisation est cruciale pour le contrôle des contributions dangereuses. Nous terminons

par une conclusion rapide, en suggérant quelques approfondissements aux résultats de cette thèse.

Chapitre 1

Le modèle de Hubbard

Le but de ce chapitre est de présenter le modèle de Hubbard. Au-delà de sa définition, nous voulons le situer dans le cadre de la physique statistique des solides. C'est pourquoi ce chapitre débute par quelques notions générales sur la modélisation des solides pour déboucher après plusieurs approximations sur le modèle de Hubbard proprement dit. Au passage, nous serons amenés à faire allusion à d'autres modèles également envisageables, qui résultent d'autres approximations. Nous espérons ainsi mettre en lumière le fait que le modèle de Hubbard, comme de nombreux modèles de physique statistique, est un modèle très schématique.

Ensuite, nous aborderons l'aspect véritablement statistique, en définissant les valeurs moyennes des observables dans l'ensemble grand-canonique, ce qui suppose l'introduction d'une température T et d'un potentiel chimique μ . Nous terminerons en définissant quelques grandeurs pertinentes du modèle, qui nous permettront de préciser la problématique à laquelle la présente thèse tente de répondre.

1.1 Modélisation très générale d'un système à N -corps

L'espace des états

Du point de vue de la mécanique quantique, un solide peut être considéré comme un ensemble constitué d'un très grand nombre de particules, d'espèces *a priori* différentes. On sait bien que la matière ordinaire est constituée à partir d'atomes, comprenant chacun un noyau et un ou plusieurs électrons. Il peut y avoir plusieurs espèces d'atomes, que nous repérerons par un indice i parcourant un ensemble fini I . Néanmoins, certains solides sont constitués d'un seul type d'atome, du moins dans le cas idéal d'une pureté parfaite : c'est le cas notamment des métaux purs. Un atome d'espèce i est constitué d'un noyau de type i et de Z_i électrons ; Z_i est le nombre de charges de l'atome i . Si nous appelons N_i le

nombre d'atomes d'espèce i présents dans l'échantillon étudié, nous avons donc au total $\sum_{i \in I} N_i$ noyaux et $N = \sum_{i \in I} Z_i N_i$ électrons.

La mécanique quantique d'un tel système doit être formulée à l'aide d'un espace de Hilbert et d'un opérateur hamiltonien \hat{H} agissant sur cet espace (voir [Sch81], [LL58], [CTDL73], [Pru71]). Si on travaille dans l'espace euclidien tridimensionnel, assimilable à \mathbb{R}^3 , on sait que l'espace de Hilbert représentant les états d'un seul électron peut-être réalisé par :

$$\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes E_{\text{spin } \frac{1}{2}} \cong L^2(\mathbb{R}^3 \times \{\uparrow, \downarrow\}), \quad (1.1)$$

où $L^2(\mathbb{R}^3)$ désigne naturellement l'ensemble des (classes de) fonctions définies sur \mathbb{R}^3 , à valeurs complexes et de carré intégrable, et $E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert quelconque de dimension 2 (par exemple on peut prendre $E_{\text{spin } \frac{1}{2}} = \mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire canonique). $E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ est l'espace du degré de liberté interne de l'électron, à savoir son spin. Si on note $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ une base orthonormée de cet espace, alors il est bien connu que le produit tensoriel $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{\uparrow, \downarrow\})$, c'est-à-dire que tout élément de $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ peut être considéré comme une fonction de deux variables (l'une parcourant \mathbb{R}^3 et l'autre appartenant à un ensemble à deux éléments que nous notons \uparrow et \downarrow) et de carré intégrable par rapport à ces deux variables.

Pour représenter les états d'un système de N électrons, on sait qu'on doit considérer le produit tensoriel de \mathcal{H}_{el} N fois par lui-même, c'est-à-dire $(\mathcal{H}_{\text{el}})^{\otimes N}$. En vertu du principe de Pauli, on doit en fait se limiter au sous-espace antisymétrique $(\mathcal{H}_{\text{el}})_{\text{anti}}^{\otimes N}$ qui est l'image de $(\mathcal{H}_{\text{el}})^{\otimes N}$ par le projecteur d'antisymétrisation P_{anti} défini de la façon suivante : si f_1, \dots, f_N sont des éléments de \mathcal{H}_{el} ,

$$P_{\text{anti}}(f_1 \otimes \dots \otimes f_N) = \frac{1}{(N)!} \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(N)}, \quad (1.2)$$

où S_N désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble $[N] = \{1, \dots, N\}$, et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ .

Concrètement, l'espace des états électroniques peut donc être visualisé comme l'espace des (classes de) fonctions $f(x_1, s_1; \dots; x_N, s_N)$ définies sur $\times_{k=1}^N (\mathbb{R}^3 \times \{\uparrow, \downarrow\})$ antisymétriques par rapport aux (x_k, s_k) et de carré sommable :

$$\sum_{s_1, \dots, s_N \in \{\uparrow, \downarrow\}} \int_{\mathbb{R}^3} dx_1 \dots dx_N |f(x_1, s_1; \dots; x_N, s_N)|^2 < +\infty. \quad (1.3)$$

On se doit également d'introduire l'espace de Hilbert représentant les états des noyaux. Pour un seul noyau, l'espace des états est très semblable à \mathcal{H}_{el} , à ceci près que l'espace de spin $E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ doit maintenant être remplacé par $E_{\text{spin } s}$, où s est le spin du noyau. Nous rappelons que s est un entier ou un demi-entier, et que $E_{\text{spin } s}$ est un espace de Hilbert de dimension $2s + 1$ (que nous pouvons réaliser

par \mathbb{C}^{2s+1} muni du produit scalaire canonique). On peut choisir une base orthonormée de $E_{\text{spin } s}$, dont les vecteurs seront indexés par les valeurs $-s, -s+1, \dots, s-1, s$. Celles-ci ne sont en fait rien d'autre que les valeurs possibles, en unités $\frac{\hbar}{2}$, de l'observable moment angulaire selon un axe. On a alors :

$$\mathcal{H}_{\text{noyau } i} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes E_{\text{spin } s_i} \cong L^2(\mathbb{R}^3 \times \{-s_i, -s_i+1, \dots, s_i-1, s_i\}). \quad (1.4)$$

L'espace des états de N_i noyaux de type i est alors obtenu en prenant le produit tensoriel de $\mathcal{H}_{\text{noyau } i}$, N_i fois, et en se restreignant ensuite au sous-espace symétrisé si s_i est entier, et au sous-espace antisymétrisé si s_i est demi-entier. C'est là une conséquence du fameux théorème de connexion spin-statistique, selon lequel une particule est un boson si elle est de spin entier, et un fermion si elle est de spin demi-entier (voir [SW64] par exemple). Ainsi, l'espace des états de N_i noyaux de type i fermioniques sera :

$$\mathcal{H}_i = \left(\mathcal{H}_{\text{noyau } i} \right)_{\text{anti}}^{\otimes N_i} = P_{\text{anti}} \left(\mathcal{H}_{\text{noyau } i}^{\otimes N_i} \right), \quad (1.5)$$

tandis que l'espace des états d'un noyau de type i bosonique sera :

$$\mathcal{H}_i = \left(\mathcal{H}_{\text{noyau } i} \right)_{\text{sym}}^{\otimes N_i} = P_{\text{sym}} \left(\mathcal{H}_{\text{noyau } i}^{\otimes N_i} \right), \quad (1.6)$$

où P_{sym} est le projecteur de symétrisation défini sur $\mathcal{H}_{\text{noyau } i}^{\otimes N_i}$ par :

$$\forall f_1, \dots, f_{N_i} \in \mathcal{H}_{\text{noyau } i}, P_{\text{sym}}(f_1 \otimes \dots \otimes f_{N_i}) = \frac{1}{(N_i)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{N_i}} f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(N_i)}. \quad (1.7)$$

Remarque : Les noyaux ne sont bien sûr pas des particules élémentaires puisqu'ils sont constitués de protons et de neutrons. En fait, on sait aujourd'hui que les protons et les neutrons eux-mêmes sont constitués de trois particules plus fondamentales, les quarks. On pourrait donc songer à introduire non pas l'espace $\mathcal{H}_{\text{noyau}}$, mais $\mathcal{H}_{\text{protons}} \otimes \mathcal{H}_{\text{neutrons}}$, voire même $\mathcal{H}_{\text{quarks}}$ ¹. Mais ceci compliquerait énormément la formulation de la théorie, pour un bénéfice quasiment nul. En effet la plupart des propriétés que l'on étudie en physique du solide ne dépendent pas des phénomènes nucléaires ou subnucléaires. On entend rendre compte du transport électronique, de propriétés de conducteur ou d'isolant, voire de supraconducteur, ou encore de propriétés magnétiques, autant de phénomènes qui peuvent *a priori* être compris en termes d'électrons, en incorporant éventuellement leurs interaction avec les noyaux. Or l'énergie de liaison typique d'un électron est de l'ordre de quelques keV , à comparer avec l'énergie de liaison par nucléon (de l'ordre de quelques MeV : voir [BS91], [Wil91], [AML01]) ou encore à l'énergie de liaison des quarks (de l'ordre de $150 MeV$). Devant de telles différences d'échelle d'énergie, nous

¹En fait, une étude plus approfondie de la théorie décrivant l'interaction des quarks (la chromodynamique quantique) montrerait qu'il est en fait extrêmement difficile voire impossible de construire l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{quarks}}$ ([Mut98], [GS95], [Ynd83]). A cause du phénomène de confinement, il est impossible d'observer un quark isolé, si bien que la construction de $\mathcal{H}_{\text{quarks}}$ n'aurait en fait pas de sens.

ferons donc l'hypothèse que les phénomènes proprement électroniques sont complètement découplés des phénomènes nucléaires et subnucléaires. C'est là un principe fondamental en physique, maintes fois vérifié par l'expérience : les phénomènes physiques dont les grandeurs typiques diffèrent de plusieurs ordres de grandeur sont pratiquement découplés (cette idée est particulièrement bien exprimée dans [ZJ02]). En un sens, si ce principe était généralement mis en défaut, les progrès de la physique seraient sans doute considérablement ralentis puisque la modélisation d'un phénomène donné nécessiterait de prendre en compte beaucoup d'autres phénomènes en même temps. Ainsi, il est possible, et heureusement, de formuler les équations du mouvement d'un pendule simple sans faire référence aux atomes qui le constituent. De même, les propriétés des solides peuvent être décrites, jusqu'à preuve du contraire, sans faire référence aux nucléons. Autrement dit, lorsqu'on considère que les noyaux atomiques sont constitués de nucléons, on quitte le domaine de la physique du solide pour entrer dans celui de la physique nucléaire.

Compte tenu de ce qui précède, l'espace de Hilbert des états d'un ensemble de N atomes identiques de type i est donc :

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\text{él}}^{\otimes N})_{\text{anti}} \otimes \mathcal{H}_i. \quad (1.8)$$

Si on introduit plusieurs types d'atomes, l'espace des états s'écrit :

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\text{él}}^{\otimes N})_{\text{anti}} \otimes \left(\bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_i \right). \quad (1.9)$$

Le hamiltonien

L'espace des états \mathcal{H} étant précisé, il s'agit maintenant, conformément aux principes de la mécanique quantique, de définir l'opérateur hamiltonien \hat{H} agissant sur \mathcal{H} . Ce hamiltonien correspond classiquement à l'énergie totale du système, donc à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'interaction. L'énergie cinétique E_{cin} est donnée classiquement par :

$$E_{\text{cin}} = \sum_{i \in I} \sum_{n=1}^{N_i} \frac{\vec{P}_{n,i}^2}{2M_i} + \sum_{n=1}^N \frac{\vec{P}_n^2}{2m}, \quad (1.10)$$

où m et M_i désignent respectivement les masses d'un électron et d'un noyau atomique de type i , \vec{P}_n est l'impulsion du n -ième électron, tandis que $\vec{P}_{n,i}$ est l'impulsion du n -ième noyau de type i . Il nous faut également exprimer l'énergie potentielle d'interaction. Là encore, si nous nous servons d'une image classique, nous sommes amenés à penser aux énergies potentielles gravitationnelle et électrique. Mais il est bien connu que l'interaction gravitationnelle peut toujours être négligée devant l'interaction électrique dans la matière ordinaire. C'est pourquoi nous nous limiterons à prendre en compte l'interaction

coulombienne uniquement. L'énergie potentielle correspondante peut s'écrire :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{(j,n) \in \mathcal{S} \\ (j,n) \neq (i,m)}} \frac{1}{2} \frac{Z_i Z_j e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_{j,n}\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{S}} \sum_{n=1}^N \frac{Z_i e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_n\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^N \frac{1}{2} \frac{e^2}{\|\vec{r}_n - \vec{r}_p\|} \quad (1.11)$$

où \mathcal{S} est un ensemble permettant d'indexer les noyaux atomiques : $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times [N_i])$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de la forme (i, m) avec $i \in I$ et $m \in [N_i]$. Ainsi (i, m) correspond au m -ième noyau de type i . $\vec{r}_{i,m}$ est l'élément de \mathbb{R}^3 qui repère la position spatiale du noyau (i, m) , tandis que \vec{r}_n est la position spatiale du n -ième électron. ϵ_0 est une constante qui vaut $\frac{1}{4\pi 10^{-7} c^2} = 8,854.10^{-12} F.m^{-1}$ dans le système S.I., et e est la charge électrique élémentaire : $e = 1,6.10^{-19} C$. L'expression de V fait clairement apparaître trois groupes de termes. Ces regroupements sont quelque peu artificiels dans la mesure où nous avons choisi de distinguer les noyaux des électrons. Ainsi la première somme correspond à l'interaction des noyaux entre eux, la deuxième à l'interaction des noyaux avec les électrons et enfin la troisième à l'interaction des électrons entre eux. Observons que les contributions des première et troisième sommes sont positives (car l'interaction entre deux particules ayant des charges identiques est répulsive), tandis que celle de la deuxième est négative (interaction attractive entre les noyaux chargés positivement et les électrons chargés négativement). Enfin, remarquons la présence des facteurs $\frac{1}{2}$ pour la première et la troisième somme, qui assure que les contributions écrites sont bien égales aux sommes sur les paires de noyaux ou d'électrons. La deuxième somme ne comporte pas de facteur $\frac{1}{2}$ car elle prend en compte l'interaction entre des particules appartenant chacune à deux ensembles distincts.

L'énergie totale E du système s'écrit donc :

$$E = \sum_{(i,n) \in \mathcal{S}} \frac{\vec{P}_{i,n}^2}{2M_i} + \sum_{n=1}^N \frac{\vec{p}_n^2}{2m} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{(j,n) \in \mathcal{S} \\ (j,n) \neq (i,m)}} \frac{1}{2} \frac{Z_i Z_j e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_{j,n}\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{S}} \sum_{n=1}^N \frac{Z_i e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_n\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^N \frac{1}{2} \frac{e^2}{\|\vec{r}_n - \vec{r}_p\|} \quad (1.12)$$

Dans l'approche quantique, conformément au principe de correspondance, on « déduit » le hamiltonien du système en élevant $\vec{P}_{i,n}$ et \vec{p}_n au rang d'opérateurs. Il est bien connu que $\vec{P}_{i,n}$ devient $-i\hbar \vec{\nabla}_{i,n}$ et \vec{p}_n : $-i\hbar \vec{\nabla}_n$. Ainsi $\vec{P}_{i,n}^2$ est l'opérateur $-\hbar^2 \Delta_{i,n}$ agissant dans le n -ième espace de Hilbert \mathcal{H}_i , tandis que \vec{p}_n^2 est l'opérateur $-\hbar^2 \Delta_n$, agissant dans le n -ième \mathcal{H}_{el} . Evidemment, pour obtenir un opérateur bien défini sur l'espace total \mathcal{H} , nous sous-entendons que la restriction de $\vec{P}_{i,n}^2$ aux espaces \mathcal{H}_{el} et \mathcal{H}_j ($j \neq i$) est l'identité, de même que sa restriction aux espaces \mathcal{H}_i correspondant aux noyaux d'indices

différents de (i, n) . Autrement dit, si $\psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{H}_{\text{el}}$ et pour chaque $i \in I$, $\psi_{i,1}, \dots, \psi_{i,N_i} \in \mathcal{H}_{\text{noyau } i}$, alors :

$$\vec{P}_{i,n}^2 \left(\bigotimes_{m=1}^N \psi_m \right) \otimes \left(\bigotimes_{\substack{(j,m) \in \mathcal{J} \\ (j,m) \neq (i,n)}} \psi_{j,m} \right) \otimes \psi_{i,n} = \left(\bigotimes_{m=1}^N \psi_m \right) \otimes \left(\bigotimes_{\substack{(j,m) \in \mathcal{J} \\ (j,m) \neq (i,n)}} \psi_{j,m} \right) \otimes (-\hbar^2 \Delta \psi_{i,n}). \quad (1.13)$$

Naturellement, des conventions analogues s'appliquent à la définition de \vec{p}_n^2 .

Quant à la définition de V en tant qu'opérateur agissant sur \mathcal{H} , elle est *a priori* facile, $\frac{1}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_{j,n}\|}$ s'interprète simplement comme l'opérateur de multiplication².

Ainsi, on peut écrire le hamiltonien de notre système de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & - \sum_{(i,n) \in \mathcal{J}} \frac{\hbar^2}{2M_i} \Delta_{i,n} - \sum_{n=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_n + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{(j,n) \in \mathcal{J} \\ (j,n) \neq (i,m)}} \frac{1}{2} \frac{Z_i Z_j e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_{j,n}\|} \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{J}} \sum_{n=1}^N \frac{Z_i e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_n\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^N \frac{1}{2} \frac{e^2}{\|\vec{r}_n - \vec{r}_p\|}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

La donnée de \mathcal{H} et \hat{H} permet de formuler complètement la mécanique quantique du problème. Dans cette approche, nous nous posons donc la question, étant donné un état initial du système représenté par le vecteur normalisé $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$, quel est l'état à une date t , $|\psi\rangle(t)$? Il s'agit de résoudre l'équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} |\psi\rangle(0) & = |\psi_0\rangle \\ i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt}(t) & = \hat{H}|\psi\rangle(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

dont la solution est donnée par le théorème de Stone (voir [Pru71]) :

$$|\psi\rangle(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_0\rangle. \quad (1.16)$$

Mais l'évaluation concrète de $|\psi\rangle(t)$ à partir de cette équation est en pratique impossible. En effet, ce problème est équivalent à la diagonalisation de \hat{H} , c'est-à-dire à la détermination de ses valeurs propres et des états propres correspondants. Ce problème de diagonalisation est déjà impossible à résoudre exactement pour un système de deux électrons dans le potentiel créé par un noyau supposé immobile. Il faut donc renoncer complètement à pouvoir avancer par cette approche. Nous allons donc utiliser deux idées essentielles et complémentaires :

- introduire des simplifications dans le modèle,
- avoir recours à une approche statistique.

²Il y a de nombreux points techniques que nous avons passés sous silence. Notamment, quel est le domaine de définition de l'opérateur \hat{V} ? Et surtout : \hat{H} est-il auto-adjoint? Pour plus de détails sur ces questions, le lecteur est invité à consulter l'excellent livre de Prugovečki ([Pru71]), qui traite de toutes ces questions en détail.

Introduction du réseau cristallin

En effet, dans la formulation très générale qui précède, nous n'avons fait pour le moment aucune approximation et nous avons pris en compte tous les degrés de liberté du système. Finalement, nous avons formulé un problème à N corps très général ³, dont les conséquences physiques incluent en principe absolument tous les phénomènes que l'on peut déduire à partir de la mécanique quantique : formation de liaisons chimiques covalentes, formation de cristaux métalliques, propriétés de conductivité, propriétés optiques, etc. En pratique, on modélise une situation physique pour rendre compte d'un phénomène précis, ou d'une classe relativement restreinte de phénomènes. En l'occurrence, nous souhaitons étudier les propriétés électroniques des solides ⁴. A cette fin, nous renonçons à expliquer la formation du solide lui-même.

L'étude de l'état solide permet de reconnaître essentiellement trois types :

- les solides amorphes,
- les solides cristallins,
- les quasi-cristaux.

Dans les solides amorphes, les atomes et/ou molécules sont arrangés de façon désordonnée. C'est le cas notamment des matériaux que l'on appelle génériquement des verres ; c'est aussi le cas de polymères à l'état solide. L'étude de ces matériaux est rendue difficile par la présence de ce désordre, et c'est pourquoi des techniques probabilistes sont généralement mises en œuvre.

Les solides cristallins sont en quelque sorte l'opposé des solides amorphes : les atomes qui les constituent sont régulièrement ordonnés dans l'espace. Il importe d'expliquer un peu plus précisément ce que signifie cette régularité. Le concept fondamental qui permet de comprendre l'arrangement d'un solide cristallin est celui de **périodicité**. Ainsi un cristal tridimensionnel peut en principe être reconstitué à partir de la connaissance des positions d'un petit nombre d'atomes : il suffit pour cela de faire agir sur ces positions des translations du type $n_1 a \vec{u} + n_2 b \vec{v} + n_3 c \vec{w}$, où \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont des vecteurs unitaires linéairement indépendants de \mathbb{R}^3 , a , b et c des longueurs finies bien choisies et n_1 , n_2 , n_3 des entiers relatifs. Observons que ces entiers sont en fait astreints à décrire un ensemble fini, du fait que le nombre total de particules, et *a fortiori* le nombre de noyaux, est borné. Il est clair que la notion de cristal (parfait) est une idéalisation. En pratique, un solide cristallin réel présente toujours des défauts : soit des inclusions d'impuretés (c'est-à-dire d'atomes n'appartenant pas à l'arrangement cristallin) soit des défauts de périodicité (c'est-à-dire des atomes du cristal placés à des sites non-prévus

³ où plutôt un problème à $N + \sum_{i \in I} Z_i N_i$ corps

⁴ Nous renvoyons le lecteur à des ouvrages généraux de physique du solide ([Bla70], [Pat71], [JM73], [Mad78], [Har79], [RW93], [And84], [Kit96], [Mye97], [Mar00], [O'R02], [AM02], [Pis96]).

par les propriétés de périodicité ou encore l'absence d'atomes en certains sites). L'étude d'un solide cristallin réel peut donc avoir recours dans une certaine mesure à des méthodes probabilistes pour décrire la présence des défauts. On pourrait croire que ces défauts jouent un rôle marginal, mais en fait ils sont absolument nécessaires pour expliquer certaines propriétés macroscopiques (conductivité des semi-conducteurs dopés, supraconductivité : voir [Bob04], [OYH94], [KKF⁺95], [Feh96], [RA97]). La « densité de défauts » que l'on introduit dans le modèle permet de passer continûment du cristal parfait (densité de défauts égale à 0) au solide amorphe (où la densité de défauts, de l'ordre de la densité des particules appartenant au réseau cristallin, est telle que l'ordre cristallin est finalement détruit).

Les quasi-cristaux sont des matériaux fascinants en ce sens qu'ils présentent un arrangement régulier d'atomes, mais non-périodique. Cette absence de périodicité rend l'étude de ces matériaux particulièrement difficile ([HG94], [TF98], [RMTdL97]). En effet, on ne peut pas définir simplement l'espace dual de Fourier, si bien que de nombreuses notions familières aux physiciens du solide (zone de Brillouin, modes de phonons, ...) perdent ici leur sens. Une approche intéressante pour l'étude des quasi-cristaux est d'avoir recours à la géométrie non-commutative (voir [Jan92], [Hof92] et [Sén95]). Mais, comme on peut s'en douter, les problèmes rencontrés sont encore bien plus complexes que pour l'étude des cristaux et de nombreux progrès restent encore à faire dans ce domaine.

Revenons donc aux solides cristallins. Le fait qu'un échantillon réel comporte un nombre fini de particules implique que les translations $n_1 a \vec{u} + n_2 b \vec{v} + n_3 c \vec{w}$ permettant de reconstituer l'ensemble de l'échantillon sont aussi en nombre fini. Cette limitation empêche d'avoir une véritable invariance par translation, donc une structure de groupe additif permettant de recourir à la transformation de Fourier.

L'approche cristallographique consiste à considérer que le réseau cristallin est infini. Les entiers n_1 , n_2 et n_3 peuvent alors être choisis sans aucune contrainte, et l'ensemble des positions spatiales des noyaux atomiques devient alors lui aussi infini, et peut être vu comme une superposition de réseaux. C'est cette approche que nous retiendrons par la suite : considérer que les noyaux sont fixés et que leurs positions forment une superposition de réseaux infinis. Il n'échappera pas au lecteur que pour le moment nous avons gardé le nombre d'électrons fini et bien déterminé, égal à $N = \sum_{i \in I} Z_i N_i$. Il y a donc là une contradiction assez inconfortable, que l'on peut surmonter en restaurant un volume fini pour le système, tout en préservant une structure de groupe. Pour cela, il suffit de considérer un espace quotient du type $\mathbb{R}^3 / L_1 a \mathbb{Z} \vec{u} \oplus L_2 b \mathbb{Z} \vec{v} \oplus L_3 c \mathbb{Z} \vec{w}$. Dans le langage des physiciens, on dit que l'on travaille à volume fini avec conditions aux limites périodiques. C'est cette approche qui est généralement adoptée. Elle présente le gros avantage de préserver une structure de groupe additif (ce qui sera essentiel pour pouvoir utiliser la transformation de Fourier) tout en gardant le nombre total de particules fini.

Un autre aspect intervient : si on considère que les noyaux atomiques ont des positions fixées, on

ne peut pas considérer que les N électrons obéissent à une dynamique qui leur est propre. En fait, si les noyaux forment un réseau cristallin rigide, c'est précisément parce qu'un certain nombre d'électrons ont été utilisés pour former des liaisons covalentes. Le nombre total d'électrons dynamiques n'est donc pas $N = \sum_{i \in I} Z_i N_i$, mais $N' = \sum_{i \in I} Z'_i N_i$, où Z'_i est le nombre d'électrons de l'atome de type i ne participant pas aux liaisons chimiques.

Compte tenu de tout ce qui a été dit précédemment, nous ne nous intéressons plus qu'à la dynamique des électrons non-covalents. La théorie doit donc être reformulée. Comme on l'a vu, l'espace ambiant n'est plus \mathbb{R}^3 mais $\mathbb{R}^3 / L_1 a \mathbb{Z} \vec{u} \oplus L_2 b \mathbb{Z} \vec{v} \oplus L_3 c \mathbb{Z} \vec{w}$. L'espace de Hilbert des états à un seul électron est alors $L^2\left(\mathbb{R}^3 / L_1 a \mathbb{Z} \vec{u} \oplus L_2 b \mathbb{Z} \vec{v} \oplus L_3 c \mathbb{Z} \vec{w}\right) \otimes E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ et l'espace des états des N' électrons sera donc :

$$\mathcal{H} = \left(\mathcal{H}_{\text{él}}\right)_{\text{anti}}^{\otimes N'} . \quad (1.17)$$

La partie libre du hamiltonien s'écrira simplement :

$$\hat{H}_0 = - \sum_{n=1}^{N'} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_n . \quad (1.18)$$

En revanche, l'écriture de l'interaction est beaucoup plus délicate. Bien sûr, l'interaction coulombienne des électrons de conduction est toujours :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{N'} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{N'} \frac{1}{2} \frac{e^2}{\|\vec{r}_n - \vec{r}_p\|} ; \quad (1.19)$$

de même, l'interaction de ces électrons avec les noyaux atomiques peut s'exprimer par :

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,m) \in \mathcal{I}} \sum_{n=1}^{N'} \frac{Z_i e^2}{\|\vec{r}_{i,m} - \vec{r}_n\|} . \quad (1.20)$$

Mais il est impossible d'écrire convenablement l'interaction des N' électrons de conduction avec les $N - N'$ électrons assurant la rigidité du cristal, puisque leurs positions spatiales ne sont pas bien définies. En fait, la présence de ces électrons autour des noyaux fait que le potentiel coulombien créé par ceux-ci et ressenti par les électrons de conduction est écrantée. L'idée est finalement de considérer que l'ensemble { noyaux atomiques + électrons de liaison } crée un **potentiel effectif** ressenti par les électrons de conduction, dont l'expression exacte reste à définir.

(N.B. : On peut aussi mentionner un phénomène plus subtil, à savoir que dans certains gros atomes tels que l'or, les électrons de cœur deviennent relativistes. Fondamentalement, une approche par la mécanique quantique non-relativiste ne peut donc rendre compte de ces phénomènes. Mais il importe de remarquer qu'alors les énergies associées à ces électrons de cœur est beaucoup plus élevée, de plusieurs ordres de grandeur, que celles associées aux électrons de conduction. Les lois physiques qui

les gouvernements peuvent alors être considérées comme découplées. Le potentiel effectif « vu » par les électrons de conduction inclut alors la présence des noyaux atomiques et des électrons de valence, même si certains électrons de cœur deviennent éventuellement relativistes.)

Si nous notons V_{eff} ce potentiel effectif, l'interaction des électrons peut alors s'écrire :

$$V = -e \sum_{n=1}^{N'} V_{\text{eff},n} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^{N'} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N'} \frac{1}{2} \frac{e^2}{\|\vec{r}_m - \vec{r}_n\|} \quad (1.21)$$

où $V_{\text{eff},n}$ agit dans l'espace de Hilbert du n -ième électron.

Le hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ décrit finalement un solide cristallin sans simplification excessive, mais nous sommes encore loin du modèle de Hubbard proprement dit. Fondamentalement, ce dernier est un modèle **discrétisé**. Ceci signifie que le tore continu $\mathbb{R}^3 / L_1\mathbb{Z}\vec{u} \oplus L_2\mathbb{Z}\vec{v} \oplus L_3\mathbb{Z}\vec{w}$ va être remplacé par $\Lambda = a\mathbb{Z}\vec{u} \oplus b\mathbb{Z}\vec{v} \oplus c\mathbb{Z}\vec{w} / L_1\mathbb{Z}\vec{u} \oplus L_2\mathbb{Z}\vec{v} \oplus L_3\mathbb{Z}\vec{w}$, où a , b et c sont des longueurs choisies de telle sorte que $\frac{L_1}{a}$, $\frac{L_2}{b}$ et $\frac{L_3}{c}$ soient des entiers. Cette schématisation peut sembler brutale, et en un sens elle l'est effectivement. Le passage du continu au discret fait que l'espace de la théorie est maintenant approximé par un nombre fini de points, ce qui oblige à redéfinir encore l'espace des états, et même le hamiltonien (le laplacien, notamment, doit devenir un « laplacien discret ») Remarquons que cette discrétisation est véritablement inhérente au modèle : le réseau $a\mathbb{Z}\vec{u} \oplus b\mathbb{Z}\vec{v} \oplus c\mathbb{Z}\vec{w}$ n'est pas introduit pour des raisons techniques pour ensuite prendre la limite continue $a, b, c \rightarrow 0$: ce réseau est censé représenter le réseau atomique lui-même.

Physiquement, cela revient à dire que les électrons sont astreints à avoir des probabilités de présence non nulle au voisinage immédiat des sites atomiques. Remarquons que nous nous sommes alors implicitement restreints au cas d'un seul type d'atomes. Ceci signifie que le réseau cristallin est véritablement constitué d'atomes identiques comme dans le cas des métaux purs, ou que les autres atomes, constituant le « motif » dans le langage des cristallographes, ne joue pas ou peu de rôle. Cette approximation par discrétisation est légitimée par le fait qu'on s'attend à ce que le potentiel effectif V_{eff} ait tendance à localiser les électrons de conduction au voisinage des sites atomiques. N'oublions pas que V_{eff} résulte du potentiel coulombien des noyaux atomiques, écranté par les électrons de cœur. La charge effective de chaque site atomique reste tout de même positive, si bien que l'interaction entre les électrons de conduction et les noyaux écartés reste attractive.

Une fois admise cette discrétisation, on peut convenir de ne plus introduire V_{eff} dans l'interaction : le rôle de V_{eff} aura été de localiser les électrons au voisinage des sites atomiques. Il s'agit d'un procédé assez courant en physique du solide, où un champ de fond périodique est échangé contre l'introduction d'une discrétisation préservant cette périodicité. Néanmoins, même après l'introduction du réseau discret $a\mathbb{Z}\vec{u} + b\mathbb{Z}\vec{v} + c\mathbb{Z}\vec{w}$, on pourrait songer à garder une trace de ce champ de fond, mais ce n'est pas

le cas dans le modèle de Hubbard, qui est relativement simple.

Enfin, nous allons considérer que le réseau discret est lui-même le plus simple possible, c'est-à-dire cubique. Pour cela, nous supposons que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 et que les longueurs a , b et c sont égales. Plus précisément, afin de simplifier les notations, nous supposons que $a = b = c = 1$. Nous nous limiterons dans toute la suite au modèle de Hubbard bidimensionnel. C'est pourquoi le réseau fini que nous considérerons sera finalement assimilable à $\mathbb{Z}^2 / (L_1\mathbb{Z} \times L_2\mathbb{Z})$, avec L_1 et L_2 entiers, et il n'y aura aucun inconvénient à choisir $L_1 = L_2 = L$, si bien que la théorie que nous considérons est maintenant définie sur $\Lambda = (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$.

Comme nous l'avons dit, la discrétisation nous oblige à redéfinir le laplacien. Si $\psi \in L^2(\Lambda)$, on peut définir les dérivées partielles discrètes par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^v}(x) = \psi(x + \vec{e}_v) - \psi(x), \text{ pour } v = 1 \text{ ou } 2. \quad (1.22)$$

En fait, il y a une certaine part d'arbitraire dans la définition de ces dérivées discrètes. Il aurait été tout aussi légitime de poser :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^v}(x) = \psi(x) - \psi(x - \vec{e}_v) \quad (1.23)$$

et d'autres expressions seraient également possibles. Si nous retenons uniquement la définition (1.22), nous serions amenés à l'écriture suivante pour le laplacien discret :

$$\Delta \psi(x) = \sum_{v=1}^2 \left(\psi(x + 2\vec{e}_v) - 2\psi(x + \vec{e}_v) + \psi(x) \right). \quad (1.24)$$

Mais là encore, il est possible de proposer d'autres expressions, et nous retiendrons la suivante, plus symétrique, qui s'obtient en composant les deux versions (1.22) et (1.23) de la dérivée :

$$\Delta \psi(x) = \sum_{v=1}^2 \left(-2\psi(x) + \psi(x + \vec{e}_v) + \psi(x - \vec{e}_v) \right). \quad (1.25)$$

Le fait de travailler sur un réseau discret nous oblige également à reconsidérer l'expression du potentiel coulombien, puisqu'il nous faut maintenant préciser ce que signifie l'expression $\frac{e^2}{\|\vec{r}_n - \vec{r}_p\|}$ lorsque $\vec{r}_n = \vec{r}_p$ ⁵. On peut convenir de poser $\frac{e^2}{\|\vec{r}_n - \vec{r}_p\|} = +\infty$ lorsque $\vec{r}_n = \vec{r}_p$, ce qui revient à interdire les configurations où deux électrons occupent le même site (pour être tout à fait précis, cela revient à dire que l'on se limite à un certain sous-espace de \mathcal{H} , celui des fonctions d'onde $\psi(x_1, s_1, \dots, x_{N'}, s_{N'})$ nulles dès qu'il existe $i, j \in [N']$, $i \neq j$, tels que $x_i = x_j$).

⁵Ce point a pu être négligé auparavant car lorsque Λ était un tore continu, l'ensemble des points \vec{r}_n et \vec{r}_p tels que $\vec{r}_n = \vec{r}_p$ était de mesure nulle.

1.2 Le formalisme de seconde quantification

Nous allons maintenant introduire un nouveau formalisme, plus perfectionné que celui utilisé jusqu'à présent, pour pouvoir formuler de façon plus simple le modèle de Hubbard. En principe, ce formalisme dit de seconde quantification n'est pas absolument nécessaire puisque la formulation précédente est parfaitement claire et rigoureuse. Néanmoins, nous verrons que l'écriture du hamiltonien à l'aide de la seconde quantification est particulièrement agréable et surtout sera un préalable indispensable à l'utilisation d'outils issus de la théorie des champs, notamment l'intégrale fonctionnelle.

Nous commençons par introduire l'espace de Fock. Etant donné un espace de Hilbert \mathcal{H} , l'espace de Fock construit à partir de \mathcal{H} s'écrit :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad (1.26)$$

étant entendu que $\mathcal{H}^{\otimes n}$ est le produit tensoriel hilbertien de n copies de \mathcal{H} et que la somme directe est la somme directe hilbertienne. Concrètement, l'espace \mathcal{F} est donc l'ensemble des suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{\otimes n}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \|h_n\|^2 < +\infty$. Ceci n'est rien d'autre que la définition de la somme directe hilbertienne, qui doit être distinguée de la somme directe algébrique, qui serait définie comme l'ensemble des suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les mêmes propriétés que précédemment, mais où la condition $\sum_{n=0}^{+\infty} \|h_n\|^2 < +\infty$ est remplacée par la prescription que les vecteurs $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nuls sauf au plus un nombre fini.

L'interprétation physique de \mathcal{F} peut sembler surprenante ; un élément de \mathcal{F} (normalisé) peut donc être considéré comme une superposition d'états appartenant à des $\mathcal{H}^{\otimes n}$ différents. Autrement dit, \mathcal{F} est l'espace de Hilbert naturel pour étudier un système ayant un nombre indéfini de particules, alors que nous avons dit jusqu'à présent que le nombre d'électrons dynamiques de notre modèle était bien déterminé et égal à N' . En un certain sens, l'espace \mathcal{F} semble donc trop gros, mais son introduction est inévitable si nous voulons parler des fameux opérateurs d'annihilation et de création, qui ont la propriété de ne laisser aucun sous-espace $\mathcal{H}^{\otimes n}$ stable.

L'espace de Hilbert $L^2(\Lambda) \otimes E_{\text{spin } \frac{1}{2}}$ est en fait particulièrement simple, car de dimension finie. Comme Λ est un ensemble fini, il est quelque peu pédant de parler de $L^2(\Lambda)$, qui se réduit en fait à \mathbb{C}^Λ . On a donc $\mathcal{H} = \mathbb{C}^\Lambda \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^\Gamma$ avec $\Gamma = \Lambda \times \{\uparrow, \downarrow\}$. \mathbb{C}^Γ peut être vu comme l'ensemble des fonctions f de deux variables x et σ , avec $x \in \Lambda$ et $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$. Le produit scalaire est naturellement défini par :

$$\forall f, g \in \mathbb{C}^\Gamma, \langle f | g \rangle = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}} \overline{f(x, \sigma)} g(x, \sigma). \quad (1.27)$$

On peut introduire une base orthonormée naturelle $(\chi_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ définie simplement par :

$$\chi_{(y, \tau)}(x, \sigma) = \delta_{y, x} \delta_{\tau, \sigma}. \quad (1.28)$$

Nous définissons les opérateurs d'annihilation $(a_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ de la façon suivante : si $\xi \in \Gamma$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}$, on pose :

$$\begin{cases} a(\mathbb{C}) = 0 \\ a_\xi(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \sqrt{n} \langle \chi_\xi | f_1 \rangle f_2 \otimes \dots \otimes f_n. \end{cases} \quad (1.29)$$

L'opérateur a_ξ est appelé opérateur d'annihilation au « point » ξ pour des raisons évidentes : partant de $f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ (c'est-à-dire d'un état à n particules), l'action de a_ξ donne un état à $n - 1$ particules, éventuellement nul si $\langle \chi_\xi | f_1 \rangle = 0$. En termes imagés, si $\xi = (x, \sigma)$, l'action de a_ξ détruit une particule située en x et de spin σ , laissant les autres inchangées. S'il n'existe pas de telle particule dans l'état f_1 (c'est-à-dire si $\langle \chi_\xi | f_1 \rangle = 0$), l'action de a_ξ donne 0.

L'opérateur adjoint de a_ξ , noté a_ξ^* est défini par :

$$a_\xi^*(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \sqrt{n+1} \chi_\xi \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n. \quad (1.30)$$

Ces opérateurs a_ξ^* sont appelés opérateurs de création. Comme le montre l'expression précédente, on voit que l'action de a_ξ^* s'interprète intuitivement comme la création d'une particule en ξ par rapport à l'état $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$. C'est précisément pour pouvoir définir ces opérateurs a_ξ et a_ξ^* que l'on a introduit l'espace de Fock \mathcal{F} , car on voit que $a_\xi(\mathcal{H}^{\otimes n}) \subset \mathcal{H}^{\otimes(n-1)}$ et $a_\xi^*(\mathcal{H}^{\otimes n}) \subset \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$. Mais on peut alors se demander quel est l'intérêt d'introduire ces familles d'opérateurs $(a_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ et $(a_\xi^*)_{\xi \in \Gamma}$. En fait, comme nous allons le voir, ils vont nous permettre d'écrire très simplement le hamiltonien de Hubbard.

Pour traiter un système de fermions, nous ne devons pas parler de l'espace de Fock tout entier, mais de l'espace de Fock antisymétrisé, noté \mathcal{F}_- :

$$\mathcal{F}_- = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \left(\mathcal{H} \right)_{\text{anti}}^{\otimes n} = P_-(\mathcal{F}), \quad (1.31)$$

où P_- est le projecteur d'antisymétrisation. Les opérateurs d'annihilation et de création doivent alors être redéfinis par :

$$a_{\xi,-} = P_- a_\xi P_- \text{ et } a_{\xi,-}^* = P_- a_\xi^* P_- . \quad (1.32)$$

Dans la suite, nous écrirons simplement a_ξ et a_ξ^* au lieu de $a_{\xi,-}$ et $a_{\xi,-}^*$, étant entendu que nous travaillerons toujours avec des objets antisymétrisés. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *L'algèbre d'opérateurs engendrée par les $(a_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ et $(a_\xi^*)_{\xi \in \Gamma}$ antisymétrisés est égale à l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur \mathcal{F}_- .*

Pour une démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage classique [Ber66]. Concrètement, vu que $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^\Gamma$ est de dimension finie, \mathcal{F}_- l'est aussi, ce qui signifie que tout opérateur sur \mathcal{F}_- est nécessairement borné et peut s'exprimer polynômiament à l'aide des opérateurs a_ξ et a_ξ^* . Ainsi :

Théorème 1.2.2 *Pour tout opérateur A défini sur \mathcal{F}_- , il existe un polynôme*

$$P \in \mathbb{C} \left[\left(X_\xi \right)_{\xi \in \Gamma}, \left(\bar{X}_\xi \right)_{\xi \in \Gamma} \right]$$

tel que

$$A = P \left(\left(a_\xi \right)_{\xi \in \Gamma}, \left(a_\xi^* \right)_{\xi \in \Gamma} \right). \quad (1.33)$$

Cela signifie que A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \sum_{\substack{X \subset \Gamma \\ Y \subset \Gamma}} \lambda_{X,Y} \left(\prod_{\xi \in X} a_\xi^* \right) \left(\prod_{\xi \in Y} a_\xi \right), \quad (1.34)$$

où $(\lambda_{X,Y})_{X,Y \in \Gamma}$ est une famille de nombres complexes indexée par $\mathcal{P}(\Gamma)^2$. En définitive, c'est sur ce résultat que repose tout l'intérêt du formalisme de seconde quantification. Néanmoins, il est clair que si le polynôme P comportait des termes de degré élevé, recourir aux opérateurs a_ξ et a_ξ^* serait évidemment de peu d'intérêt. Mais en pratique, de très nombreux hamiltoniens peuvent s'écrire avec des termes de degré relativement bas. Comme nous allons le voir, la partie libre peut s'écrire à l'aide d'un polynôme homogène de degré total 2, tandis que toute interaction à deux corps peut s'exprimer à l'aide d'un polynôme homogène de degré 4.

On peut tout d'abord remarquer que le hamiltonien

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n=1}^{N'} \Delta_n + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^{N'} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N'} \frac{1}{2} \frac{e^2}{\|\vec{r}_m - \vec{r}_n\|} \quad (1.35)$$

ne prend en compte ni création, ni annihilation de particules (rappelons que notre théorie est non-relativiste), ce qui se traduit par le fait que l'expression de \hat{H} grâce aux a_ξ et a_ξ^* ne fera intervenir que des termes dont les degrés par rapport aux a_ξ et a_ξ^* sont égaux. Compte tenu de l'expression du laplacien discret, il est facile de voir que le hamiltonien libre peut s'écrire :

$$\hat{H}_0 = \sum_{(\xi, \eta) \in \Gamma^2} T(\xi, \eta) a_\xi^* a_\eta = \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} \sum_{(\sigma, \tau) \in \{\uparrow, \downarrow\}^2} T(x, \sigma; y, \tau) a_{x,\sigma}^* a_{y,\tau} \quad (1.36)$$

avec

$$T(x, \sigma; y, \tau) = \delta_{\sigma, \tau} \sum_{v=1}^2 (2\delta_{x,y} - \delta_{x,y+\vec{e}_v} - \delta_{x,y-\vec{e}_v}). \quad (1.37)$$

L'image physique est très claire : l'action de $a_\xi^* a_\eta$ sur un élément de \mathcal{F}_- s'interprète immédiatement comme la destruction d'un électron en η , suivie de la création d'un électron en ξ . Ainsi, on peut dire que $a_\xi^* a_\eta$ déplace un électron du site η vers le site ξ . On peut donc écrire n'importe quel opérateur A sur \mathcal{F}_- dont l'action s'interprète comme un déplacement d'électrons sous la forme :

$$\sum_{x,y \in \Lambda} \sum_{\sigma, \tau \in \{\uparrow, \downarrow\}} T(x, \sigma; y, \tau) a_{x, \sigma}^* a_{y, \tau} \quad (1.38)$$

où, pour chaque valeur de x, σ, y, τ , le coefficient $T(x, \sigma; y, \tau)$ fixe l'intensité du déplacement. Notamment, $T(x, \sigma; y, \tau) = 0$ dès que le passage d'un électron de (x, σ) à (y, τ) est interdit. En l'occurrence, on voit que l'expression du laplacien discrétisé autorise un électron à passer d'un site de Λ à ses plus proches voisins en conservant son spin.

Remarque : Dans la littérature, l'opérateur \hat{H}_0 est souvent écrit :

$$\hat{H}_0 = t \sum_{x, y \in \Lambda} \sum_{\sigma, \tau \in \{\uparrow, \downarrow\}} T(x, \sigma; y, \tau) a_{x, \sigma}^* a_{y, \tau} \quad (1.39)$$

où t est appelé «paramètre de saut» (*hopping parameter* en anglais). t vaut donc $\frac{\hbar^2}{2m}$, ce qui signifie que plus la masse m est grande, plus t est petit, ce qui est conforme à l'idée que plus une particule est massive, moins elle a la possibilité de se «propager» sur un site voisin. On peut remarquer au passage que si nous avons introduit un pas a dans notre réseau, l'expression de t aurait été $t = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$. Là encore, ceci est conforme à l'intuition que plus les sites du réseau sont proches, plus les particules sont susceptibles de sauter sur les sites voisins (en revanche, il est plus difficile de deviner l'exposant 2 pour la dépendance en a sans faire référence au laplacien.)

Le fait que les électrons ne soient autorisés qu'à sauter d'un site à un de ses plus proches voisins provient d'une convention dans la définition des dérivées discrètes. Il aurait été possible de définir celles-ci en faisant intervenir des différences finies impliquant des sites plus éloignés ; le laplacien discrétisé correspondant aurait alors autorisé des déplacements entre sites plus éloignés que les plus proches voisins. Le hamiltonien libre s'écrirait alors :

$$\hat{H}_0 = \sum_{x,y \in \Lambda} \sum_{\sigma, \tau \in \{\uparrow, \downarrow\}} T'(x, \sigma; y, \tau) a_{x, \sigma}^* a_{y, \tau} \quad (1.40)$$

avec, par exemple,

$$T'(x, \sigma; y, \tau) = \delta_{\sigma, \tau} \sum_{v=1}^2 \left(2\delta_{x,y} - t(\delta_{x,y+\vec{e}_v} + \delta_{x,y-\vec{e}_v}) - t'(\delta_{x,y+2\vec{e}_v} + \delta_{x,y-2\vec{e}_v}) \right) \quad (1.41)$$

Cette approche conduirait à ce qui est appelé le modèle de Hubbard étendu dans la littérature, mais celui-ci ne sera pas abordé dans la présente thèse. Pour terminer sur ce point, signalons simplement que

l'opérateur \hat{H}_0 , que ce soit dans sa version simple (1.36) ou étendue (1.40) décrit bel et bien la *diffusion* des électrons sur le réseau $(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$.

Examinons maintenant l'interaction entre les électrons, encodée par l'opérateur \hat{V} . Comme on a vu que l'algèbre engendrée par les opérateurs d'annihilation $(a_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ et de création $(a_\xi^*)_{\xi \in \Gamma}$ était égale à l'algèbre de tous les opérateurs, l'interaction V peut s'écrire *a priori* en toute généralité :

$$V = \sum_{\substack{X \subset \Gamma \\ Y \subset \Gamma}} V_{X,Y} \prod_{\xi \in X} a_\xi^* \prod_{\eta \in Y} a_\eta \quad (1.42)$$

Evidemment, il s'agit maintenant d'introduire des simplifications nécessaires, motivées par des considérations physiques. La question à se poser est donc : quelles sont les interactions possibles entre les électrons ? Une première réponse est, bien sûr, l'interaction coulombienne bien connue :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (1.43)$$

où r est la distance entre deux électrons. En choisissant convenablement les unités, on peut bien sûr se ramener au cas où $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1$. Sachant que le nombre d'électrons sur le site x et de spin σ est donné par $n_{x,\sigma} = a_{x,\sigma}^* a_{x,\sigma}$, nous serions amenés à proposer l'expression suivante :

$$V_{\text{Coulomb}} = \int_{\Gamma} d\xi \int_{\Gamma} d\eta \frac{1}{|x-y|} a_\xi^* a_\xi a_\eta^* a_\eta. \quad (1.44)$$

Néanmoins, l'utilisation de ce potentiel en $\frac{1}{r}$ introduit de lourdes difficultés pour la suite. Le point le plus délicat est que, dès que la dimension spatiale d est au moins égale à 2, ce potentiel a une décroissance lente, ce qui complique singulièrement l'estimation des quantités physiques pertinentes (voir [Bry78] et [BF80]). En effet, comme nous le verrons plus loin, celles-ci sont souvent exprimées formellement comme des séries dont la convergence est très difficile à montrer.

Mais puisque le problème est aussi difficile, on peut choisir de le contourner, à défaut de le résoudre. Ainsi, au lieu de prendre $\frac{1}{|x-y|}$ comme énergie potentielle d'interaction entre deux électrons placés respectivement en x et y , on peut choisir un potentiel $v(x-y)$ décroissant rapidement. Cette simplification peut sembler extrême, au point de faire disparaître l'image physique du problème. Mais on peut avancer l'argument que l'interaction coulombienne dans la matière condensée est très rapidement « écrantée ». En fait, en moyenne, dès que deux électrons sont éloignés de quelques sites atomiques, tout se passe comme si leur interaction mutuelle était pratiquement nulle.

Nous allons pousser cette logique à l'extrême en choisissant pour interaction :

$$v(x-y) = U \delta_{x,y}. \quad (1.45)$$

On voit là apparaître le germe d'une idée fondamentale pour la suite, à savoir que dans certaines conditions (par exemple lorsqu'on examine un système à « grande distance »), la « vraie » interaction à

l'échelle microscopique peut être remplacée par une interaction effective sans que le calcul des quantités physiques pertinentes en soit affecté. C'est là l'idée fondamentale de la renormalisation (voir les références classiques [Wil71a], [Wil71b] et [Wil75]), et nous aurons l'occasion de revenir sur ce point par la suite.

Pour résumer, le hamiltonien du modèle de Hubbard s'écrit donc :

$$\hat{H}_{\text{Hubbard}} = -t \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \sum_{\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}} a_{x,\sigma}^* a_{y,\sigma} + U \sum_{x \in \Lambda} n_{x,+} n_{x,-} . \quad (1.46)$$

Pour conclure cette section, nous dirons simplement que le modèle de Hubbard est un modèle *très schématique*. Néanmoins, et nous laissons le lecteur en juger, il est non-trivial, notamment en ce qui concerne son comportement à basse température.

Le hamiltonien \hat{H} achève pratiquement la définition du modèle. Pour pouvoir entreprendre son étude sous l'angle de la physique statistique, il nous reste à préciser dans quel ensemble statistique nous désirons travailler : micro-canonique, canonique ou grand-canonique. Rappelons que l'ensemble micro-canonique est *a priori* le mieux adapté pour l'étude des systèmes isolés (l'énergie et le nombre de particules sont donc constants), que l'ensemble canonique correspond aux systèmes en contact avec un thermostat qui impose une certaine température T mais qui n'échangent pas de matière avec l'extérieur, et enfin que l'ensemble grand-canonique est privilégié pour étudier un système au contact d'un thermostat, pouvant échanger éventuellement de la matière avec l'extérieur qui est alors considéré comme un « réservoir de particules ».

Dans le problème que nous considérons ici, l'ensemble grand-canonique est tout indiqué, puisque d'une part nous voulons étudier le rôle de la température, et d'autre part nous avons utilisé le formalisme de la seconde quantification qui est précisément adapté pour étudier les systèmes dont le nombre de particules n'est pas fixé. Nous rappelons ici que le modèle de Hubbard est *non-relativiste*, ce qui signifie que les créations et/ou annihilations de particules ne sont sûrement pas à interpréter comme résultant de réactions, mais tout simplement d'échanges de particules avec l'extérieur. Nous allons donc travailler dans l'ensemble grand-canonique. Pour cela, nous devons donc introduire une température T , ainsi qu'un paramètre μ qui va, d'une certaine manière, fixer l'intensité des échanges de matière avec l'extérieur. μ est appelé le potentiel chimique, et on peut l'interpréter comme l'énergie qu'il faut fournir au système pour lui arracher une particule.

T et μ ayant été fixés, il reste maintenant à définir, pour chaque observable du système, sa valeur moyenne dans l'ensemble grand-canonique. Conformément aux principes de la mécanique quantique, toute observable est représentée par un opérateur linéaire auto-adjoint de l'espace des états. Il s'agit donc de définir une application de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_-)$ (ensemble des applications \mathbb{C} -linéaires de \mathcal{F}_- dans \mathcal{F}_-)

dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{T,\mu} : \mathcal{L}(\mathcal{F}_-) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{O} &\mapsto \langle \mathcal{O} \rangle_{T,\mu} \end{aligned}$$

Conformément aux principes de la mécanique statistique quantique, on sait que les valeurs moyennes des observables sont définies par :

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{T,\mu} = \frac{\text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \mathcal{O} \right)}{\text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \right)}. \quad (1.47)$$

où β est une notation standard pour $\frac{1}{kT}$, k étant la constante de Boltzman, et \hat{N} l'opérateur nombre :

$$\hat{N} = \sum_{\xi \in \Gamma} n_{\xi} = \int d\xi a_{\xi}^* a_{\xi}. \quad (1.48)$$

Pour simplifier les notations, nous poserons $k = 1$ de sorte que β est tout simplement l'inverse de la température. Le dénominateur $\text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \right)$ est appelé la fonction de partition.

Comme n'importe quel élément de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_-)$ peut être écrit comme une combinaison linéaire d'opérateurs du type $\left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right)$, la valeur moyenne de tout $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_-)$ peut être calculée à partir des nombres $\left\langle \left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right) \right\rangle_{T,\mu}$. Ces quantités sont appelées fonctions de corrélation ; en ce sens, il faut plutôt les penser comme des fonctions des variables $\xi \in X$ et $\eta \in Y$. Dans la suite, nous serons essentiellement intéressés par la fonction dite à deux points, $\langle a_{\xi}^* a_{\eta} \rangle_{T,\mu} = \langle a_{x,\sigma}^* a_{y,\tau} \rangle_{T,\mu}$.

L'étude d'un modèle défini par un hamiltonien \hat{H} dans l'ensemble grand-canonique paramétré par T et μ revient donc à étudier les fonctions de corrélations. Les difficultés commencent véritablement avec la constatation que leur calcul explicite, avec un hamiltonien général, est presque toujours impossible. En fait, on ne sait guère calculer explicitement que les fonctions de corrélations correspondant à des hamiltoniens libres $\hat{H} = \hat{H}_0$, ce qui nous apprend finalement très peu de choses sur le système réel, nécessairement en interaction.

En outre, nous devons nous montrer capables d'étudier la limite thermodynamique de ces quantités, c'est-à-dire la limite de volume infini. Puisque le calcul explicite est impossible, il s'agit donc de la première question que nous devons nous poser :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \left\langle \left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right) \right\rangle \text{ existe-t-elle ?} \quad (1.49)$$

On peut aussi se poser la même question à propos de la fonction de partition : $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} Z_\Lambda$ existe-t-elle ?⁶

Ces questions sont loin d'être triviales et leur résolution est indispensable pour pouvoir ensuite parler du modèle étudié comme d'un modèle statistique bien défini. Ce n'est qu'après que nous pouvons nous pencher sur les questions proprement physiques comme par exemple : le modèle présente-t-il (ou plusieurs) transition de phase ? Et si oui, pour quelles valeurs critiques des paramètres T et μ ? Peut-on estimer le comportement des fonctions de corrélations ? (par exemple par des lois du genre : $\langle a_{x,\sigma}^* a_{y,\sigma} \rangle_{T,\mu} \sim_{|x-y| \rightarrow +\infty} \frac{K}{|x-y|^\alpha}$ pour une certaine constante numérique K et un certain exposant α). Et puisque T et μ peuvent être considérés comme des paramètres de contrôle, on peut également étudier leur influence. En particulier, nous nous intéresserons dans la suite à la limite de température nulle : $T \rightarrow 0^+$.

Afin de pouvoir étudier ces questions, et en résoudre certaines, nous allons recourir à un outil particulièrement puissant, à savoir la représentation des traces d'opérateurs linéaires de \mathcal{F}_- dans \mathcal{F}_- sous la forme d'une intégrale fonctionnelle fermionique. La justification rigoureuse de cette représentation est longue et assez technique. Elle fait l'objet du chapitre suivant, qui peut donc être passé en première lecture, car on peut admettre cette représentation sans démonstration. Le résultat est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right) e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) \\ = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \left(\prod_{\xi \in X} \bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\eta \in Y} \psi(\eta) \right) e^{-\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dx_0 \int_{\Lambda} d^d x H_{int}(\bar{\psi}(x_0, x), \psi(x_0, x))} . \end{aligned} \quad (1.50)$$

où C est la covariance :

$$C(k) = \frac{1}{ik_0 - E(k)}. \quad (1.51)$$

$E(k)$ est la relation de dispersion, et $d\mu_C(\bar{\psi}, \psi)$ désigne la mesure gaussienne fermionique de covariance C . Avec ce résultat, nous sommes donc passés d'un problème de physique statistique à une théorie des champs fermionique. L'étude du modèle de Hubbard pour $d = 2$ se poursuivra désormais dans ce cadre. La relation de dispersion s'écrit alors précisément :

$$E(k) = 2 - \cos(k_1) - \cos(k_2) - \mu . \quad (1.52)$$

Il importe de remarquer que $E(k)$ dépend *a priori* de μ . L'hypothèse de demi-remplissage consiste à fixer μ de telle sorte que la relation de dispersion se réduise à $E(k) = -\cos(k_1) - \cos(k_2)$.

⁶En fait, il s'avèrera que la fonction de partition n'est pas une quantité pertinente dans la limite thermodynamique, et diverge presque toujours. La bonne quantité est plutôt la pression (aussi appelée énergie libre par unité de volume) : $P = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_\Lambda$

1.3 Considérations physiques

Dans l'approche statistique, on peut alors se poser des questions de nature thermodynamique :

- Quelle est l'énergie du système, quelle est son entropie, son énergie libre ?
- Quelle est sa capacité calorifique ?
- Que valent les fonctions de corrélation ?

Ces questions sont difficiles dès que l'on considère le système en interaction. Néanmoins, le cas du système libre est résoluble exactement. En fait, toutes ces questions peuvent être ramenées à une seule, celle de la détermination de la fonction de partition $Z_\Lambda = \text{Tr}\left(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\right)$. En effet, l'énergie moyenne du système n'est autre que

$$\langle \hat{H} \rangle_{T,\mu} = \frac{\text{Tr}(\hat{H} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})}{Z_\Lambda} = -\frac{1}{Z_\Lambda} \frac{\partial Z_\Lambda}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z_\Lambda}{\partial \beta}. \quad (1.53)$$

L'énergie libre est définie par $F = \langle \hat{H} - \mu\hat{N} \rangle_{T,\mu} = -\frac{\ln Z_\Lambda}{\beta}$ et l'entropie : $S = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial F}{\partial \beta}$. Enfin, la capacité calorifique (à volume constant) s'écrit :

$$C_V = \left(\frac{\partial \langle \hat{H} \rangle_{T,\mu}}{\partial T} \right)_\mu = -\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial \langle \hat{H} \rangle_{T,\mu}}{\partial \beta} \right)_\mu \quad (1.54)$$

Enfin, pour calculer les fonctions de corrélation du type $\left\langle \left(\prod_{\xi \in A} a_\xi^* \right) \left(\prod_{\eta \in B} a_\eta \right) \right\rangle_{T,\mu}$, il est commode de définir la « fonctionnelle » :

$$Z_\Lambda(h_1, h_2) = \text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N} + \sum_{\xi \in \Gamma} h_1(\xi) a_\xi + \sum_{\eta \in \Gamma} h_2(\eta) a_\eta^*)} \right). \quad (1.55)$$

h_1 et h_2 sont souvent appelés « champs externes » dans la littérature, mais ne correspondent pas nécessairement à la situation physique considérée. On a alors simplement :

$$\left\langle \left(\prod_{\xi \in A} a_\xi^* \right) \left(\prod_{\eta \in B} a_\eta \right) \right\rangle_{T,\mu} = \left(\prod_{\xi \in A} \frac{\partial}{\partial h_1(\xi)} \right) \left(\prod_{\eta \in B} \frac{\partial}{\partial h_2(\eta)} \right) Z_\Lambda(\{h_1(\xi)\}, \{h_2(\eta)\}). \quad (1.56)$$

Néanmoins, le calcul explicite de la fonction de partition du système en interaction est impossible. La seule chose que l'on puisse faire est en fait de calculer les quantités physiques pertinentes dans le cas du système libre. L'interaction sera ensuite traitée comme une perturbation qui n'est pas nécessairement petite *a priori*. Remarquons que comme \hat{H}_0 et \hat{V} ne commutent pas, on ne peut écrire :

$$e^{-\beta(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V} - \mu\hat{N})} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} e^{-\beta\lambda \hat{V}}. \quad (1.57)$$

Si tel était le cas, il serait possible d'évaluer Z_Λ en écrivant que $e^{-\beta\lambda \hat{V}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta\lambda)^n}{n!} \hat{V}^n$, et on aurait alors à évaluer une somme de fonctions de corrélation, la moyenne étant calculée pour la théorie libre.

Malheureusement, les choses sont beaucoup plus compliquées. La méthode précédente ne pouvant être appliquée, nous allons tout de même garder sa philosophie qui consiste, comme toujours, à développer autour de la théorie libre. L'approche que nous retiendrons sera d'utiliser une représentation fermionique de la fonction de partition et de ses fonctions de corrélation.

Chapitre 2

Algèbres de Grassmann et intégrale fonctionnelle fermionique

Le but de ce chapitre est de donner les fondements mathématiques du formalisme des théories fermioniques. Il s'agit d'un sujet assez standard, mais qui est rarement traité de façon complètement satisfaisante. Le but est de donner un sens rigoureux (c'est-à-dire non formel) aux expressions définissant les fonctions de corrélation de la théorie et sa fonction de partition :

$$Z(V) = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \exp \left(\lambda \int_V d^3x \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x) \right). \quad (2.1)$$

Pour cela nous aurons besoin de deux notions essentielles : celle d'algèbre de Grassmann et celle d'intégrale grassmannienne. Fondamentalement, nous resterons dans le cadre de la dimension finie. La présentation qui suit est largement empruntée à [Fel] et à [Sal99].

2.1 Algèbres de Grassmann

Définition

On appelle algèbre de Grassmann (de dimension finie) toute algèbre \mathcal{A} sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} (dont l'addition est notée $+$ et la multiplication \cdot) admettant un ensemble fini G de générateurs qui anticommulent deux à deux :

$$\forall \psi, \psi' \in G, \{\psi, \psi'\} = \psi \cdot \psi' + \psi' \cdot \psi = 0.$$

Cette contrainte d'existence d'un ensemble de générateurs anticommutants est très forte, et on peut donc *a priori* se demander légitimement si de telles algèbres existent. En fait, dans le cas de la dimension finie, il est facile d'en construire explicitement à partir de procédés standards d'algèbre

linéaire, notamment le produit tensoriel antisymétrisé et la somme directe. Néanmoins, ces procédés pourraient se généraliser aisément au cas de la dimension infinie.

Construction d'algèbres de Grassmann de dimension finie

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Par définition, l'algèbre de Grassmann engendrée par E est :

$$\Lambda(E) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(E) .$$

où $\Lambda^0(E) = \mathbb{C}$ et $\Lambda^n(E)$, pour $n \geq 1$, est le produit tensoriel antisymétrisé de n copies de E . Cette construction est bien connue du mathématicien, qui parle plutôt de l'algèbre extérieure de E . Nous continuerons néanmoins à utiliser le vocabulaire des physiciens, et nous parlerons donc d'algèbre de Grassmann engendrée par E . Une des propriétés bien connue du produit tensoriel antisymétrisé est que, si on note D la dimension de E , alors $\Lambda^n(E)$ est réduit à $\{0\}$ pour $n > D$. Ainsi, la somme directe $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(E)$ n'est pas infinie, et aurait pu être écrite $\bigoplus_{n=0}^D \Lambda^n(E)$. Le produit qui définit une structure d'algèbre sur $\Lambda(E)$ est donné par le produit tensoriel antisymétrisé. La définition donnée dans de nombreux ouvrages de physique fait explicitement appel à une base de E . Ceci se justifie d'un point de vue pratique car dès que l'on désire effectuer des calculs explicite, le recours à une base semble souvent inévitable. Néanmoins, cette définition cache le fait que ce produit est **indépendant** du choix de la base : il s'agit d'une notion intrinsèque ¹.

La notion d'algèbre de Grassmann de dimension finie est suffisante pour les théories fermioniques dans lesquelles l'espace-temps est réduit schématiquement à un nombre fini de points, c'est-à-dire aux théories sur réseau. Mais il est apparemment légitime de chercher à définir ces théories directement dans le continu. Dans cette optique, le cadre de la dimension finie s'avère trop restreint, ce qui n'est pas surprenant. Il serait alors nécessaire d'introduire des algèbres de Grassmann de dimension infinie, ce qui est un sujet un peu plus délicat. En fait, nous pourrions nous dispenser d'introduire des algèbres de dimension infinie : ceci revient en pratique à effectuer les calculs dans le cadre de la dimension finie, puis à prendre ensuite la limite continue sur les quantités calculées, pourvu que cette limite existe effectivement. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point au chapitre 3.

Si (e_1, \dots, e_D) est une base de E , c'est un système de générateurs de $\Lambda(E)$. De plus, une base de $\Lambda(E)$ est fournie par les éléments de la forme $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ pour $0 \leq p \leq D$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq D$ (avec la convention que pour $p = 0$, $e_1 \dots e_{i_p}$ désigne en fait l'unité dans \mathbb{C}). Ainsi tout élément f de $\Lambda(E)$

¹Pour plus de détails sur la notion de produit tensoriel antisymétrisé, on pourra consulter [Gre67].

peut d'écrire de façon unique :

$$f = \alpha_0 + \sum_{k=1}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} \alpha_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}, \quad (2.2)$$

où α_0 et les α_{i_1, \dots, i_k} sont des nombres complexes. Dans la suite nous écrivons également :

$$f = \sum_{k=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} \alpha_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \quad (2.3)$$

en sous-entendant que le terme correspondant à $k = 0$ est α_0 . On voit ainsi que les termes de la décomposition précédente peuvent être indexés par l'ensemble des parties de $[D] = \{1, \dots, D\}$. Ainsi, $\dim \Lambda(E) = 2^D$ et on peut écrire :

$$f = \sum_{X \subset [D]} \alpha_X e_X, \quad (2.4)$$

avec la convention que si $X = \{i_1, \dots, i_k\}$ avec $i_1 < \dots < i_k$, alors $e_X = e_{i_1} \dots e_{i_k}$. Il est donc important de tenir compte de l'ordre existant sur $[D]$, donc sur X . Ainsi, lorsque nous écrivons $e_X = \prod_{i \in X} e_i$, nous sous-entendons que le produit est écrit dans le sens des i croissants de la gauche vers la droite. Il faut alors prendre garde que dans ces conditions **on n'a pas en général** $e_X \cdot e_Y = e_{X \cup Y}$. En effet, il faut tenir compte des règles d'anticommutation pour réordonner les facteurs. Précisément, on a :

$$\begin{cases} e_X \cdot e_Y = 0 & \text{si } X \cap Y \neq \emptyset, \\ e_X \cdot e_Y = \text{sgn}(X, Y) e_{X \cup Y} & \text{si } X \cap Y = \emptyset, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $\text{sgn}(X, Y)$ est la signature de la permutation qui « redresse » l'ordre de $X \cup Y$. Précisément, si on a $X = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $Y = \{j_1, \dots, j_\ell\}$, on pose $X \cup Y = \{p_1, \dots, p_{k+\ell}\}$ avec $p_1 = i_1, \dots, p_k = i_k, p_{k+1} = j_1, \dots, p_{k+\ell} = j_\ell$. Alors il existe une unique permutation π de $\{1, \dots, k + \ell\}$ telle que $p_{\pi(1)} < p_{\pi(2)} < \dots < p_{\pi(k+\ell)}$, et $\text{sgn}(X, Y) = \text{sgn}(\pi)$.

Quelques remarques

Tout ce qui précède est bien connu des mathématiciens, mais les physiciens ont été amenés à utiliser ces notions avec un vocabulaire différent. Ainsi, pour un physicien, on appelle algèbre de Grassmann une algèbre engendrée par des objets abstraits $(\psi_i)_{i \in I}$ tels que $\forall i, j \in I, \{\psi_i, \psi_j\} = \psi_i \cdot \psi_j + \psi_j \cdot \psi_i = 0$. Mais il importe de souligner qu'une telle « définition » est largement insuffisante à bien des égards. Tout d'abord, comment définir les objets $(\psi_i)_{i \in I}$? Ou en d'autres termes, comment peuvent-ils être réalisés à partir d'objets connus ? Comment sont définies l'addition et la multiplication ? Et enfin, de telles algèbres existent-elles ?

Les remarques des paragraphes précédents montrent que la réponse à cette dernière question est affirmative : ce que les physiciens appellent « algèbre de Grassmann » peut être identifiée à l'algèbre extérieure construite sur un certain espace vectoriel E . Plus spécifiquement, dans le cas d'un nombre fini D de générateurs, il suffit de choisir un espace vectoriel de dimension D , par exemple \mathbb{C}^D . Pour faire le lien avec les notations des physiciens, nous désignerons par $(\psi_i)_{1 \leq i \leq D}$ la base canonique de \mathbb{C}^D : $\psi_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le nombre 1 est placé en i -ième position. Alors l'algèbre de Grassmann engendrée par les ψ_i n'est autre que $\Lambda(\mathbb{C}^D)$. Nous noterons également $\mathcal{G}_D = \Lambda(\mathbb{C}^D)$ et parfois nous omettrons même de préciser l'entier D . \mathcal{G} désignera simplement $\Lambda(\mathbb{C}^D)$ pour un certain entier D . De plus, le symbole du produit \cdot sera omis dans la suite afin d'alléger les notations, et nous écrirons donc simplement $\psi_i \psi_j$ au lieu de $\psi_i \cdot \psi_j$. Historiquement, les physiciens ont introduit la notion d'algèbre de Grassmann pour disposer d'une structure permettant d'encoder les propriétés d'antisymétrie par permutation des systèmes fermioniques. En termes plus imagés, il s'agissait d'introduire des « nombres anticommutants ». Ainsi, dans la littérature, les générateurs $(\psi_i)_{1 \leq i \leq D}$ de \mathcal{G}_D sont souvent appelés « variables de Grassmann » ou « variables anticommutantes ».

On peut signaler qu'il existe des algèbres bien connues présentant des propriétés d'anticommutativité intéressantes : les algèbres de Lie. Dans ces algèbres, la loi de multiplication, notée généralement $[\cdot, \cdot]$ (crochet de Lie) est anticommutative par définition : si \mathcal{A} est une algèbre de Lie, $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $[A, B] = -[B, A]$. En outre, il est très facile de réaliser des algèbres de Lie, par exemple à partir de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, muni de la multiplication $[A, B] = AB - BA$, est une algèbre de Lie.

On peut donc penser *a priori* que les algèbres de Lie sont potentiellement intéressantes pour encoder les propriétés d'antisymétrie des systèmes fermioniques. Cependant, il n'en est rien, et les algèbres de Lie ne doivent pas être confondues avec les algèbres de Grassmann. En fait, un état lié de deux fermions forme un boson, et les systèmes bosoniques sont complètement symétriques sous les permutations. Il importe donc d'avoir une structure mathématique qui, bien que définie par des relations d'anticommutation, autorise certains objets à commuter entre eux. Or ceci est absolument impossible dans une algèbre de Lie : deux éléments A et B ne peuvent vérifier $[A, B] = [B, A]$, sauf dans le cas trivial où $[A, B] = 0$. En revanche, dans une algèbre de Grassmann \mathcal{G} , il est tout à fait possible d'avoir $fg = gf$, bien que les générateurs ψ_i vérifient $\psi_i \psi_j = -\psi_j \psi_i$. C'est bien pour cette raison que les algèbres de Grassmann sont les structures privilégiées pour traiter les systèmes fermioniques.

En fait, nous avons déjà introduit une algèbre de Grassmann au chapitre précédent : l'espace de Fock fermionique $\mathcal{F}_- = \Lambda(\mathbb{C}^\Gamma)$ est muni d'une structure canonique d'algèbre de Grassmann. En fait, dans une première approche, seule la structure d'espace vectoriel sur \mathcal{F}_- a été soulignée. Mais en fait, si $v, w \in \mathcal{F}_-$, il est possible de définir le produit $v \cdot w$ grâce au produit tensoriel antisymétrisé. En

fait, comme Γ est un ensemble fini, nous avons vu que \mathbb{C}^Γ admet une base naturelle $(\chi_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ définie par : $\chi_\xi(\zeta) = \delta_{\xi, \zeta}$. Donc, on peut dire que \mathcal{F}_- , en tant qu'algèbre de Grassmann, est engendré par les $(\chi_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ qui vérifient bien $\{\chi_\xi, \chi_{\xi'}\} = 0$.

Normes sur les algèbres de Grassmann

Nous aurons besoin, notamment pour définir l'exponentielle et le logarithme d'un élément $f \in \mathcal{G}$, d'introduire une topologie sur \mathcal{G} . En fait, comme \mathcal{G} est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, la topologie qui s'impose est celle qui est définie par n'importe quelle norme sur \mathcal{G}^2 . Nous introduisons une famille de normes qui nous seront utiles pour la suite.

Définition 2.1.1 *Pour tout réel q strictement positif, on définit une application $\|\cdot\|_q: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante. Pour tout $f \in \mathcal{G}$ écrit de façon unique sous la forme :*

$$f = \sum_{k=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} \alpha_{(i_1, \dots, i_k)} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}, \quad (2.6)$$

on pose :

$$\|f\|_q = \sum_{k=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} |\alpha_{(i_1, \dots, i_k)}| q^{\frac{k}{2}}. \quad (2.7)$$

On a alors :

Lemme 2.1.1 *Pour tout $q > 0$, l'application $\|\cdot\|_q$ est une norme d'algèbre sur \mathcal{G} , c'est-à-dire que c'est une norme vérifiant :*

$$\forall f, g \in \mathcal{G}, \|fg\|_q \leq \|f\|_q \cdot \|g\|_q. \quad (2.8)$$

Démonstration :

On vérifie très facilement que $\|\cdot\|_q$ est bien une norme. Pour établir l'inégalité, considérons deux éléments f et g de \mathcal{G} :

$$f = \sum_{k=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} \alpha_{(i_1, \dots, i_k)} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}, \quad (2.9)$$

$$g = \sum_{\ell=0}^D \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq D} \beta_{(j_1, \dots, j_\ell)} \psi_{j_1} \dots \psi_{j_\ell}. \quad (2.10)$$

²Puisque \mathcal{G} est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Alors

$$fg = \sum_{k=0}^D \sum_{\ell=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq D} \alpha_{(i_1, \dots, i_k)} \beta_{(j_1, \dots, j_\ell)} (\psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}) (\psi_{j_1} \dots \psi_{j_\ell}) \quad (2.11)$$

$$= \sum_{\substack{(k,\ell) \\ k+\ell \leq D}} \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \\ \{j_1, \dots, j_\ell\} \\ \text{disjoints}}} \alpha_{(i_1, \dots, i_k)} \beta_{(j_1, \dots, j_\ell)} \text{sgn}(\pi) \psi_{p_{\pi(1)}} \dots \psi_{p_{\pi(k+\ell)}} \quad (2.12)$$

où on a posé $(p_1, \dots, p_{k+\ell}) = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell)$ et π est l'unique permutation de $S_{k+\ell}$ telle que $p_{\pi(1)} < \dots < p_{\pi(k+\ell)}$. Ainsi,

$$\|fg\|_q = \sum_{\substack{(k,\ell) \\ k+\ell \leq D}} \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \\ \{j_1, \dots, j_\ell\} \\ \text{disjoints}}} |\alpha_{(i_1, \dots, i_k)}| |\beta_{(j_1, \dots, j_\ell)}| \cdot q^{\frac{k+\ell}{2}}, \quad (2.13)$$

tandis que :

$$\|f\|_q \cdot \|g\|_q = \sum_{k=0}^D \sum_{\ell=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq D} |\alpha_{(i_1, \dots, i_k)}| |\beta_{(j_1, \dots, j_\ell)}| \cdot q^{\frac{k+\ell}{2}}. \quad (2.14)$$

Les termes apparaissant dans $\|fg\|_q$ sont également présents dans $\|f\|_q \cdot \|g\|_q$, mais cette dernière somme contient clairement des termes supplémentaires positifs, du fait de l'absence des contraintes $k+\ell \leq D$ et $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_\ell\} = \emptyset$. Ainsi, on a bien $\|fg\|_q \leq \|f\|_q \cdot \|g\|_q$. ■

Remarque : Pour $q = 1$, on obtient ce qu'on appelle habituellement la norme 1 :

$$\|f\|_{q=1} = \sum_{k=0}^D \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq D} |\alpha_{(i_1, \dots, i_k)}|. \quad (2.15)$$

En revanche, on prendra garde que le cas où $q = 2$ ne correspond pas à ce qu'on appelle habituellement la norme 2, ou norme euclidienne.

2.2 Calcul dans les algèbres de Grassmann

Inversion d'un élément

Maintenant que nous avons introduit les variables de Grassmann, nous voulons pouvoir les utiliser pour mener à bien des calculs, exactement comme avec les nombres complexes. Notamment, il s'agit de pouvoir parler de dérivation, d'intégration, et aussi de fonctions usuelles telles que le logarithme et l'exponentielle. Et avant même de s'intéresser à ces questions, on peut se demander si on peut définir

une division dans une algèbre de Grassmann ou, en termes plus précis, quels sont les éléments inversibles. Sauf mention expresse du contraire, E désignera toujours un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension D . Nous écrirons indifféremment $\Lambda(E)$ ou \mathcal{G} pour désigner l'algèbre de Grassmann associée. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soit $f \in \Lambda(E)$, s'écrivant de façon unique $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in \mathbb{C}$ et $f_1 \in \bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)$. Si $f_0 \neq 0$, alors il existe un unique élément $f' \in \Lambda(E)$ tel que $ff' = f'f = 1$.*

Démonstration : L'idée de la démonstration est d'utiliser l'identité suivante, valable pour tout $a \in \Lambda(E)$ et tout entier naturel n :

$$(1+a)\left(1-a+a^2-a^3+\dots+(-1)^n a^n\right) = \left(1-a+a^2-a^3+\dots+(-1)^n a^n\right)(1+a) = 1+(-1)^n a^{n+1}. \quad (2.16)$$

Si a est nilpotent, c'est-à-dire si $a^{n+1} = 0$ pour n assez grand, alors nous aurons obtenu l'inverse de $(1+a)$, égal à $(1-a+a^2-a^3+\dots+(-1)^n a^n)$. On écrit donc :

$$f = f_0 + f_1 = f_0 \left(1 + \frac{f_1}{f_0}\right), \quad (2.17)$$

ce qui est possible puisque $f_0 \neq 0$. Comme

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{f_1}{f_0}\right) \left(1 - \frac{f_1}{f_0} + \frac{f_1^2}{f_0^2} - \dots + (-1)^n \frac{f_1^n}{f_0^n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{f_1}{f_0} + \frac{f_1^2}{f_0^2} - \dots + (-1)^n \frac{f_1^n}{f_0^n}\right) \left(1 + \frac{f_1}{f_0}\right) = 1 + (-1)^n \frac{f_1^{n+1}}{f_0^{n+1}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

en prenant $n = D = \dim E$, on a $f_1^{n+1} = 0$ d'où, finalement :

$$\begin{aligned} & f_0 \left(1 + \frac{f_1}{f_0}\right) \left(\frac{1}{f_0} - \frac{f_1}{f_0^2} + \frac{f_1^2}{f_0^3} - \dots + (-1)^n \frac{f_1^D}{f_0^{D+1}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{f_0} - \frac{f_1}{f_0^2} + \frac{f_1^2}{f_0^3} - \dots + (-1)^D \frac{f_1^D}{f_0^{D+1}}\right) f_0 \left(1 + \frac{f_1}{f_0}\right) = 1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ce qui signifie précisément que f est inversible, d'inverse $\left(\frac{1}{f_0} - \frac{f_1}{f_0^2} + \frac{f_1^2}{f_0^3} - \dots + (-1)^D \frac{f_1^D}{f_0^{D+1}}\right)$. ■

Ainsi, le lemme (2.2.1) autorise à parler de l'inverse d'un élément d'une algèbre de Grassmann, mais sous réserve que sa partie de degré 0 soit non nulle. On observera que lorsqu'on parle de l'algèbre engendrée par les objets ψ_i vérifiant les relations d'anticommutation $\{\psi_i, \psi_j\} = 0$, les éléments ψ_i sont de degré 1 et ne sont donc pas inversibles.

Fonction exponentielle

Poursuivons l'étude du calcul grassmannien. Nous aurons besoin notamment d'un analogue des fonctions exponentielle et logarithme. La question est donc : si $f \in \Lambda(E)$, peut-on définir e^f ? Il est naturel de proposer la définition suivante :

$$e^f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}. \quad (2.20)$$

La convergence de cette série dans $\Lambda(E)$ est assurée par le fait que $\left\| \frac{f^n}{n!} \right\|_q \leq \frac{\|f\|_q^n}{n!}$ pour tout $q > 0$ (voir lemme (2.1.1)), ce qui prouve que cette série est normalement convergente donc, puisque $\Lambda(E)$ est complet, convergente. On peut facilement vérifier le lemme suivant, très classique, et dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 2.2.2 *Pour tous éléments f et g de $\Lambda(E)$ qui commutent, on a $e^{f+g} = e^f e^g$.*

Remarque : En décomposant $f \in \Lambda(E)$ sous la forme $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in \mathbb{C}$ et $f_1 \in \bigoplus_{k=1}^D \Lambda^k(E)$, on peut écrire $e^f = e^{f_0+f_1} = e^{f_0} e^{f_1}$ puisque f_0 et f_1 commutent. Mais comme $f_1^{D+1} = 0$, e^{f_1} se réduit à $\sum_{n=0}^D \frac{f_1^n}{n!}$ et on a :

$$e^f = e^{f_0} \left(\sum_{n=0}^D \frac{f_1^n}{n!} \right). \quad (2.21)$$

En fait, il aurait été possible de définir l'exponentielle de f par l'expression (2.21). Celle-ci présente la caractéristique de ne pas faire explicitement appel à une notion de convergence dans $\Lambda(E)$, utilisant simplement la convergence dans \mathbb{C} dont dépend l'existence de e^{f_0} .

Fonctions analytiques de variables de Grassmann

En fait, comme le lecteur peut le soupçonner, cette définition de l'exponentielle n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général : si on se donne une série entière $\sum a_n z^n$ ayant un rayon de convergence non nul R , définissant dans son disque de convergence $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ une fonction analytique $\lambda(z)$, on peut se demander s'il est possible de définir, pour $f \in \Lambda(E)$, la quantité $\lambda(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n$. Précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R , définissant dans le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ une fonction analytique $\lambda(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors, si $f \in \Lambda(E)$ avec $f = f_0 + f_1$ ($f_0 \in \mathbb{C}$, $f_1 \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \Lambda^n(E)$) et si $|f_0| < R$, la série de terme général $a_n f^n$ converge dans $\Lambda(E)$ et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n = \sum_{n=0}^D \frac{1}{n!} \lambda^{(n)}(f_0) f_1^n. \quad (2.22)$$

Démonstration :

Comme $|f_0| < R$, on a :

$$\lambda^{(n)}(f_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{(n+k)}(0)}{k!} f_0^k, \quad (2.23)$$

donc :

$$\sum_{n=0}^D \frac{\lambda^{(n)}(f_0)}{n!} f_1^n = \sum_{n=0}^D \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!k!} \lambda^{(n+k)}(0) f_0^k \right) f_1^n. \quad (2.24)$$

On pose alors $N = n + k$ afin de réordonner selon les valeurs de N :

$$\sum_{n=0}^D \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!k!} \lambda^{(n+k)}(0) f_0^k \right) f_1^n = \sum_{n=0}^D \left(\sum_{N=n}^{+\infty} \frac{1}{n!(N-n)!} \lambda^{(N)}(0) f_0^{N-n} \right) f_1^n. \quad (2.25)$$

Puisque la somme sur n est finie, il n'y a pas de difficulté pour intervertir les deux sommes, et on obtient :

$$\sum_{n=0}^D \frac{\lambda^{(n)}(f_0)}{n!} f_1^n = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\min(D,N)} \frac{1}{n!(N-n)!} \lambda^{(N)}(0) f_0^{N-n} f_1^n. \quad (2.26)$$

Comme $f_1^n = 0$ dès que $n > D$, la somme sur n peut aller de 0 à N au lieu de $\min(D, N)$. De plus, puisque

$$\sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} f_0^{N-n} f_1^n = (f_0 + f_1)^N, \quad (2.27)$$

on a finalement :

$$\sum_{n=0}^D \frac{\lambda^{(n)}(f_0)}{n!} f_1^n = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{(N)}(0)}{N!} f^N = \sum_{N=0}^{+\infty} a_N f^N, \quad (2.28)$$

ce qui établit le théorème. ■

Fonction logarithme

On voit ainsi que le théorème précédent permet de définir sans difficulté $\lambda(f)$ si λ est une fonction « usuelle » sans singularité à l'origine. Néanmoins, il y a une fonction très importante qui n'est pas analytique au voisinage de l'origine : la fonction logarithme. Pour $f \in \Lambda(E)$, peut-on définir $\ln f$? De façon heuristique, si $f \in \Lambda(E)$ est écrit sous la forme $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in \mathbb{C}$ et $f_1 \in \bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)$ et si on suppose de plus que $f_0 > 0$, on peut proposer :

$$\ln f = \ln \left(f_0 \left(1 + \frac{f_1}{f_0} \right) \right) = \ln f_0 + \ln \left(1 + \frac{f_1}{f_0} \right), \quad (2.29)$$

à condition toutefois de pouvoir définir $\ln \left(1 + \frac{f_1}{f_0} \right)$. Or la fonction $z \mapsto \ln(1+z)$ étant analytique au voisinage de l'origine, on peut utiliser le théorème (2.2.1). Nous adopterons donc la définition suivante :

Définition 2.1 Soit $f \in \Lambda(E)$, tel que $f = f_0 + f_1$ ($f_0 \in \mathbb{C}$ et $f_1 \in \bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)$). Si $f_0 > 0$, on pose :

$$\ln f = \ln f_0 + \sum_{n=1}^D \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{f_1}{f_0} \right)^n. \quad (2.30)$$

Cette définition est raisonnable car on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\begin{cases} \text{si } f_0 \in \mathbb{R}, \text{ alors } \ln(e^f) = f, \\ \text{si } f_0 > 0, \text{ alors } e^{(\ln f)} = f. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, il sera commode d'utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.3 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans $\Lambda(E)$, dérivable et vérifiant :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f(\alpha)f(\beta) = f(\beta)f(\alpha) \text{ et } f_0(\alpha) \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

Alors on a :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(e^{f(\alpha)} \right) = f'(\alpha) e^{f(\alpha)}. \quad (2.32)$$

Démonstration :

On décompose f sous la forme $f = f_0 + f_1$ (avec f_0 à valeurs dans \mathbb{C} et f_1 à valeurs dans $\bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)$) et on écrit :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(e^{f(\alpha)} \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(e^{f_0(\alpha)} \left(\sum_{n=0}^D \frac{f_1(\alpha)^n}{n!} \right) \right) \quad (2.33)$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \left(e^{f_0(\alpha)} \right) \left(\sum_{n=0}^D \frac{f_1(\alpha)^n}{n!} \right) + e^{f_0(\alpha)} \left(\sum_{n=1}^D \frac{1}{(n-1)!} f_1'(\alpha) f_1(\alpha)^{n-1} \right) \quad (2.34)$$

$$= f_0'(\alpha) e^{f_0(\alpha)} \left(\sum_{n=0}^D \frac{f_1(\alpha)^n}{n!} \right) + f_1'(\alpha) e^{f_0(\alpha)} \left(\sum_{n=0}^{D-1} \frac{1}{n!} f_1(\alpha)^n \right). \quad (2.35)$$

Comme $f_1(\alpha) \in \bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)$, on a de même $f_1'(\alpha) \in \bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)$. Donc $f_1'(\alpha) f_1(\alpha)^D = 0$ et la dernière somme $\sum_{n=0}^{D-1}$ peut donc être remplacée par $\sum_{n=0}^D$. Ainsi, on a bien obtenu :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(e^{f(\alpha)} \right) = f'(\alpha) e^{f(\alpha)}. \quad (2.36)$$

■

Lemme 2.2.4 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans $\Lambda(E)$ qui est dérivable, et qui vérifie :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f(\alpha)f(\beta) = f(\beta)f(\alpha) \text{ et } f_0(\alpha) > 0.$$

Alors on a :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\ln f(\alpha) \right) = \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}. \quad (2.37)$$

Démonstration :

Calculons $\frac{d}{d\alpha} \left(\ln f(\alpha) \right)$. On a :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\ln f(\alpha) \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\ln f_0(\alpha) \right) + \sum_{n=1}^D \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{f_1(\alpha)}{f_0(\alpha)} \right)^n \quad (2.38)$$

$$= \frac{f'_0(\alpha)}{f_0(\alpha)} + \sum_{n=1}^D (-1)^{n+1} \left[\frac{f_1(\alpha)^{n-1}}{f_0(\alpha)^n} f'_1(\alpha) - \frac{f_1(\alpha)^n}{f_0(\alpha)^{n+1}} f'_0(\alpha) \right] \quad (2.39)$$

$$= \frac{f'_0(\alpha)}{f_0(\alpha)} + \sum_{n=0}^{D-1} (-1)^n \frac{f_1(\alpha)^n}{f_0(\alpha)^{n+1}} f'_1(\alpha) + \sum_{n=1}^D (-1)^n \frac{f_1(\alpha)^n}{f_0(\alpha)^{n+1}} f'_0(\alpha). \quad (2.40)$$

Dans la première somme du dernier membre de droite $\sum_{n=0}^{D-1}$, on isole le terme correspondant à $n = 0$, et on peut ajouter artificiellement un terme correspondant à $n = D$ qui est en fait nul. En effet, on a :

$$f_1(\alpha)^D f'_1(\alpha) = \frac{1}{D+1} \frac{d}{d\alpha} \left(f_1(\alpha)^{D+1} \right) = 0. \quad (2.41)$$

On obtient donc :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\ln f(\alpha) \right) = \frac{f'_0(\alpha)}{f_0(\alpha)} + \frac{f'_1(\alpha)}{f_0(\alpha)} + \sum_{n=1}^D (-1)^n \frac{f_1(\alpha)^n}{f_0(\alpha)^{n+1}} f'(\alpha). \quad (2.42)$$

On reconnaît, au premier terme correspondant à $n = 0$ près, l'expression de l'inverse :

$$\frac{1}{f(\alpha)} = \sum_{n=0}^D (-1)^n \frac{f_1(\alpha)^n}{f_0(\alpha)^{n+1}}. \quad (2.43)$$

Ainsi

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\ln f(\alpha) \right) = \frac{f'_0(\alpha)}{f_0(\alpha)} + \frac{f'_1(\alpha)}{f_0(\alpha)} + \left(\frac{1}{f(\alpha)} - \frac{1}{f_0(\alpha)} \right) f'(\alpha) \quad (2.44)$$

$$= \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}. \quad (2.45)$$

■

Démonstration du théorème (2.2.2) :

$f \in \Lambda(E)$ étant fixé, on considère les applications $\alpha \mapsto \alpha f$ et $\alpha \mapsto \ln e^{\alpha f}$ de \mathbb{R} dans $\Lambda(E)$. Il est clair que $\frac{d}{d\alpha}(\alpha f) = f$ et $\frac{d}{d\alpha}(\ln e^{\alpha f}) = \frac{f e^{\alpha f}}{e^{\alpha f}} = f$. Donc $\frac{d}{d\alpha}(\ln e^{\alpha f} - \alpha f) = 0$, ce qui signifie qu'il existe $g \in \Lambda(E)$ tel que $\ln e^{\alpha f} = \alpha f + g$. En prenant $\alpha = 0$, on obtient $g = 0$, et en prenant $\alpha = 1$, il vient $\ln e^f = f$.

Réciproquement, soit $f \in \Lambda(E)$ tel que $f_0 > 0$, et considérons l'application $\alpha \mapsto e^{\ln \alpha f} - \alpha f$. Pour prouver que $e^{\ln f} = f$, il suffit de prouver que l'application $\ln : \mathbb{R}^{+*} \oplus (\bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E)) \rightarrow \Lambda(E)$ est injective. En effet, $\ln(e^{\ln f}) = \ln f$ d'après la première partie. Considérons donc deux éléments f et g de $\mathbb{R}^{+*} \oplus (\bigoplus_{n=1}^D \Lambda^n(E))$ tels que $\ln f = \ln g$. Cela signifie que :

$$\ln f_0 + \sum_{n=1}^D \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n = \ln g_0 + \sum_{n=1}^D \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^n. \quad (2.46)$$

En comparant dans les deux membres les termes de degré 0, il vient immédiatement que $\ln f_0 = \ln g_0$, d'où $f_0 = g_0$. Considérant alors les termes de degré 1 dans l'égalité

$$\sum_{n=1}^D \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n = \sum_{n=1}^D \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^n, \quad (2.47)$$

on obtient $\left(\frac{f}{f_0}\right)_1 = \left(\frac{g}{g_0}\right)_1$. On considère alors

$$\left(\frac{f_1}{f_0}\right)_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_1^2}{f_0^2}\right)_2 = \left(\frac{g_1}{g_0}\right)_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{g_1^2}{g_0^2}\right)_2 \quad (2.48)$$

et il vient $\left(\frac{f}{f_0}\right)_2 = \left(\frac{g}{g_0}\right)_2$. Par récurrence finie, on prouve ainsi de proche en proche que $\forall k \in \{0, \dots, D\}$, $\left(\frac{f}{f_0}\right)_k = \left(\frac{g}{g_0}\right)_k$.

■

2.3 Dérivées et intégrales

Les résultats exposés jusqu'à présent montrent que les variables de Grassmann peuvent se manier presque comme des nombres quant aux principales opérations algébriques. Nous pouvons pousser l'analogie encore plus loin en définissant des dérivées et des intégrales. Définir les dérivées ne pose pas de difficulté, mais l'intégration va présenter un aspect surprenant, en ce sens qu'il s'agit en fait de la même opération que la dérivation.

Dérivation dans les algèbres de Grassmann

Definition 2.2 Soit \mathcal{G} une algèbre de Grassmann engendrée par ψ_1, \dots, ψ_D . Pour tout $k \in [D]$, la dérivation par rapport à ψ_k , notée $\frac{\partial}{\partial \psi_k}$, est l'application linéaire de \mathcal{G} dans \mathcal{G} définie sur chaque monôme $\psi_{i_1} \dots \psi_{i_p}$ par :

$$\frac{\partial}{\partial \psi_k} (\psi_{i_1} \dots \psi_{i_p}) = \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell+1} \delta_{k, i_\ell} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_{\ell-1}} \psi_{i_{\ell+1}} \dots \psi_{i_p}. \quad (2.49)$$

On peut évidemment considérer des dérivées d'ordre supérieur du type $\frac{\partial}{\partial \psi_k} \frac{\partial}{\partial \psi_\ell}$, qui sont simplement des compositions de dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial \psi_k} \frac{\partial}{\partial \psi_\ell} = \left(\frac{\partial}{\partial \psi_k} \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial \psi_\ell} \right). \quad (2.50)$$

On peut d'ores et déjà remarquer qu'une dérivée d'ordre m agissant sur un monôme de degré p donne, si $p \geq m$, une somme de monômes d'ordre $p - m$; elle vaut 0 dès que $m > p$. On en déduit que dès que l'ordre d'une dérivation est strictement plus grand que le nombre de générateurs anticommutants de l'algèbre \mathcal{G} , cette dérivation est l'application nulle de \mathcal{G} dans \mathcal{G} . En fait, dans la somme (2.49), au plus un terme est non nul puisqu'on peut supposer les indices i_1, \dots, i_p tous distincts. Si k est différent de i_1, \dots, i_p , alors $\frac{\partial}{\partial \psi_k} (\psi_{i_1} \dots \psi_{i_p}) = 0$. Cette définition est très naturelle et tout à fait analogue à celle de la dérivation des polynômes à plusieurs variables réelles. Simplement, il faut tenir compte des règles d'anticommutation, d'où la présence du facteur $(-1)^{\ell+1}$.

On peut également remarquer qu'à l'instar des générateurs $(\psi_k)_{k \in [D]}$, les dérivées $(\frac{\partial}{\partial \psi_k})_{k \in [D]}$ anticommulent :

$$\forall k, \ell \in [D], \frac{\partial}{\partial \psi_k} \frac{\partial}{\partial \psi_\ell} = - \frac{\partial}{\partial \psi_\ell} \frac{\partial}{\partial \psi_k}. \quad (2.51)$$

Intégrales

Passons maintenant à l'intégration. Celle-ci n'est pas définie à l'aide d'une quelconque « théorie de la mesure », mais de façon purement algébrique.

Definition 2.3 Pour tout $k \in [D]$, l'intégrale $\int d\psi_k$ est l'application linéaire de \mathcal{G} dans \mathcal{G} égale à la dérivation $\frac{\partial}{\partial \psi_k}$.

La motivation de parler d'intégration plutôt que de dérivation selon les situations est donc purement psychologique. De façon tout à fait analogue, on peut aussi parler d'intégrales multiples :

$$\int d\psi_{i_1} \dots d\psi_{i_p} = \left(\int d\psi_{i_1} \right) \circ \dots \circ \left(\int d\psi_{i_p} \right). \quad (2.52)$$

Une intégrale qui sera particulièrement importante pour la suite est celle qui fait intervenir tous les générateurs, $\int d\psi_1 \dots d\psi_D$. En fait, cette forme linéaire est nulle sur tout monôme de degré strictement inférieur à D , et on a :

$$\int d\psi_1 \dots d\psi_D \psi_D \dots \psi_1 = 1 . \quad (2.53)$$

De plus, on peut vérifier les propriétés suivantes :

Propriété 2.3.1 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \{2, \dots, D\}$, on a l'égalité :*

$$\int d\psi_1 f(\psi_1 - \alpha\psi_k, \psi_2, \dots, \psi_D) = \int d\psi_1 f(\psi_1, \dots, \psi_D) . \quad (2.54)$$

Plus généralement, si $X \subset [D]$, alors on a, pour tout $f \in \mathcal{G}$:

$$\int \left(\prod_{i \in X} d\psi_i \right) f \left((\psi)_X, (\psi)_{[D] \setminus X} \right) = \int \left(\prod_{i \in X} d\psi_i \right) f \left((\psi)_X - A(\psi)_{[D] \setminus X}, (\psi)_{[D] \setminus X} \right) , \quad (2.55)$$

où $(\psi)_X$ est le « vecteur-colonne » dont les composantes sont les ψ_i pour $i \in X$, $(\psi)_{[D] \setminus X}$ est le vecteur-colonne dont les composantes sont les ψ_i pour $i \in [D] \setminus X$ et A est une matrice complexe à $|X|$ lignes et $D - |X|$ colonnes.

La vérification est immédiate.

2.4 Mesures gaussiennes grassmanniennes

Ayant défini les mesures grassmanniennes qui sont en quelque sorte l'analogue anticommutatif de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , nous allons maintenant définir les mesures gaussiennes grassmanniennes. L'analogie formelle avec le cas de \mathbb{R}^n est presque exacte. Pour définir une mesure gaussienne sur \mathbb{R}^n , on se donne une matrice symétrique réelle définie positive A . L'inverse A^{-1} est alors bien définie et on note $C = A^{-1}$. C est appelée la covariance de la mesure gaussienne, et est également une matrice symétrique définie positive. Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$(X, AY) = X^T AY = \sum_{i,j=1}^n x_i A_{i,j} y_j . \quad (2.56)$$

On a alors le résultat bien connu :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(X, AX)} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\det(2\pi C)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{\sqrt{\det A}} . \quad (2.57)$$

On peut donc définir la mesure gaussienne normalisée de covariance C sur \mathbb{R}^n par :

$$d\mu_C = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi C)}} e^{-\frac{1}{2}(X, C^{-1}X)} dx_1 \dots dx_n . \quad (2.58)$$

Revenons maintenant au cas grassmannien. Si \mathcal{G} est engendrée par ψ_1, \dots, ψ_D , ψ désignera la matrice colonne dont les coefficients sont ψ_1, \dots, ψ_D :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_D \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

On pourrait alors songer à définir une intégrale gaussienne grassmannienne par :

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.60)$$

$$f \mapsto \int d\psi_1 \dots d\psi_D e^{-\frac{1}{2}(\psi, A\psi)} f. \quad (2.61)$$

Cependant, si A est symétrique, $(\psi, A\psi) = 0$. En effet, $(\psi, A\psi) = \sum_{i,j=1}^D A_{i,j} \psi_i \psi_j$; les termes correspondant à $i = j$ s'annulent puisque $\psi_i^2 = 0$, d'où :

$$(\psi, A\psi) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^D A_{i,j} \psi_i \psi_j \quad (2.62)$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^D A_{i,j} \psi_i \psi_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^D A_{i,j} \psi_i \psi_j \quad (2.63)$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^D (A_{i,j} - A_{j,i}) \psi_i \psi_j. \quad (2.64)$$

Autrement dit, la quantité $(\psi, A\psi)$ ne dépend que de la partie antisymétrique de A ; on peut donc supposer que A est antisymétrique. Il est possible de développer la théorie des intégrales gaussiennes grassmanniennes selon cette approche (voir [Fel]). On peut alors montrer que, si D est pair, alors :

$$\int d\psi_1 \dots d\psi_D e^{-\frac{1}{2}(\psi, A\psi)} = \text{Pf}(A) \quad (2.65)$$

où $\text{Pf}(A)$ désigne le pfaffien de la matrice A . Cependant, l'usage des pfaffiens est assez peu répandue dans les ouvrages standard de théorie des champs et de physique statistique quantique. En fait, il est possible de proposer une approche légèrement différente des intégrales gaussiennes grassmanniennes. Pour cela, nous allons considérer dans toute la suite de ce travail des algèbres de Grassmann engendrées par un nombre pair de générateurs. Afin de ne pas introduire de notation supplémentaire, nous noterons $2D$ ce nombre, et conformément à la tradition, les générateurs seront notés : $\bar{\psi}_1, \psi_1, \bar{\psi}_2, \psi_2, \dots, \bar{\psi}_D, \psi_D$, où le symbole « barre » n'a évidemment rien à voir avec la conjugaison complexe, mais est simplement un moyen commode de regrouper les $2D$ générateurs en deux ensembles distincts de D générateurs chacun. Les intégrales gaussiennes grassmanniennes que nous allons considérer sont alors du type :

$$\int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 \dots d\bar{\psi}_D d\psi_D e^{-(\bar{\psi}, A\psi)}, \quad (2.66)$$

où $\bar{\psi}$ et ψ désignent respectivement les vecteurs-colonnes :

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\psi}_D \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_D \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Le doublement du nombre de générateurs fait maintenant qu'aucun terme présent dans $(\bar{\psi}, A\psi)$ ne s'annule *a priori* :

$$(\bar{\psi}, A\psi) = \sum_{i,j=1}^D A_{i,j} \bar{\psi}_i \psi_j. \quad (2.68)$$

Dans la suite nous noterons $\int d\bar{\psi}d\psi$ au lieu de $\int d\bar{\psi}_1d\psi_1 \dots d\bar{\psi}_Dd\psi_D$. L'intégrale (2.66) peut alors être calculée très simplement.

Proposition 2.4.1 $\forall A \in \mathcal{M}_D(\mathbb{C})$, on a :

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = \det A. \quad (2.69)$$

Démonstration :

Par définition de l'exponentielle, on a :

$$e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\bar{\psi}, A\psi)^k. \quad (2.70)$$

Comme $(\bar{\psi}, A\psi)$ est de degré 2 par rapport aux $\bar{\psi}$, ψ , cette somme est finie et $\sum_{k=0}^{+\infty}$ peut être remplacée par $\sum_{k=0}^D$. Ainsi :

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = \sum_{k=0}^D \frac{(-1)^k}{k!} \int d\bar{\psi}d\psi (\bar{\psi}, A\psi)^k. \quad (2.71)$$

Il est clair que $(\bar{\psi}, A\psi)^k$ est une somme de termes d'ordre k en ψ et k en $\bar{\psi}$. Compte tenu des règles d'intégration grassmannienne, on a $\int d\bar{\psi}d\psi (\bar{\psi}, A\psi)^k = 0$ dès que $k \neq D$. Examinons donc le cas où $k = D$:

$$(\bar{\psi}, A\psi)^D = \left(\sum_{i,j=1}^D \bar{\psi}_i A_{i,j} \psi_j \right)^D \quad (2.72)$$

$$= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_D=1 \\ j_1, \dots, j_D=1}}^D \left(\prod_{k=1}^D A_{i_k, j_k} \right) \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right). \quad (2.73)$$

Ainsi :

$$\int d\bar{\psi}d\psi (\bar{\psi}, A\psi)^D = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_D=1 \\ j_1, \dots, j_D=1}}^D \left(\prod_{k=1}^D A_{i_k, j_k} \right) \int d\bar{\psi}d\psi \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right). \quad (2.74)$$

Or, on a :

$$\int d\bar{\psi}d\psi \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right) = \varepsilon_{i_1, \dots, i_D} \varepsilon_{j_1, \dots, j_D} (-1)^D. \quad (2.75)$$

En effet :

$$\left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right) = (-1)^{\frac{D(D-1)}{2}} \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \right) \left(\prod_{k=1}^D \psi_{j_k} \right), \quad (2.76)$$

et chaque produit $(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k})$ et $(\prod_{k=1}^D \psi_{j_k})$ peut être réordonné au prix d'une signature de permutation :

$$\left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \right) = \varepsilon_{i_1, \dots, i_D} \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_k \right) \quad (2.77)$$

$$\left(\prod_{k=1}^D \psi_{j_k} \right) = \varepsilon_{j_1, \dots, j_D} \left(\prod_{k=1}^D \psi_k \right). \quad (2.78)$$

Ainsi :

$$\left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right) = (-1)^{\frac{D(D-1)}{2}} \varepsilon_{i_1, \dots, i_D} \varepsilon_{j_1, \dots, j_D} \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_k \right) \left(\prod_{k=1}^D \psi_k \right) = \varepsilon_{i_1, \dots, i_D} \varepsilon_{j_1, \dots, j_D} \left(\prod_{k=1}^D \bar{\psi}_k \psi_k \right). \quad (2.79)$$

Finalement,

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = \frac{(-1)^D}{D!} (-1)^D \sum_{\sigma, \sigma' \in S_D} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^D A_{\sigma(k), \sigma'(k)} \quad (2.80)$$

$$= \frac{1}{D!} \sum_{\sigma \in S_D} \sum_{\sigma' \in S_D} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^D A_{\sigma(k), \sigma'(k)} \quad (2.81)$$

où on a utilisé le fait que S_D est un groupe : σ étant fixée, la somme sur σ' peut être effectuée en remplaçant σ' par $\sigma'\sigma$ puisque $\sigma \mapsto \sigma'\sigma$ est une bijection de S_D . Or $\prod_{k=1}^D A_{\sigma(k), \sigma'(k)}$ est indépendant de σ , donc :

$$\sum_{\sigma \in S_D} \prod_{k=1}^D A_{\sigma(k), \sigma'(k)} = D! \prod_{k=1}^D A_{k, \sigma'(k)}, \quad (2.82)$$

et comme $\varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma'\sigma) = \varepsilon(\sigma^2) \varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma')$, on a :

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} = \sum_{\sigma' \in S_D} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^D A_{k, \sigma'(k)}, \quad (2.83)$$

ce qui n'est rien d'autre que la définition du déterminant de la matrice A , d'où le résultat. ■

Contrairement au cas des mesures gaussiennes sur \mathbb{R}^n , le résultat est donc bien défini, même dans le cas où $\det A = 0$, bien que le résultat soit alors trivial. Pour définir une mesure gaussienne grassmannienne normalisée, nous allons néanmoins demander que A soit inversible. Nous avons alors la définition suivante : si $A \in GL_D(\mathbb{C})$, on appelle mesure gaussienne grassmannienne de covariance $C = A^{-1}$

la forme linéaire :

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.84)$$

$$f(\bar{\psi}, \psi) \mapsto \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) f(\bar{\psi}, \psi) = \frac{1}{\det A} \int \left(\prod_{k=1}^D d\bar{\psi}_k d\psi_k \right) e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} f(\bar{\psi}, \psi) . \quad (2.85)$$

Il est possible de définir ces mesures gaussiennes lorsque l'algèbre de Grassmann totale \mathcal{G} admet plus de générateurs anticommutants que les $2D$ éléments $\bar{\psi}_1, \psi_1, \dots, \bar{\psi}_D, \psi_D$. Dans ces conditions, si $f \in \mathcal{G}$ n'appartient pas à la sous-algèbre engendrée par les $(\bar{\psi}_k)_{k \in [D]}$ et les $(\psi_k)_{k \in [D]}$, l'expression $\int (\prod_{k=1}^D d\bar{\psi}_k d\psi_k) f$ désigne en fait un élément de \mathcal{G} et non pas un nombre complexe. De façon imagée, on peut dire que f n'a pas été complètement intégrée (voir par exemple le lemme (2.5.1)).

2.5 Théorème de Wick

Pour pouvoir utiliser facilement des mesures gaussiennes grassmanniennes, nous devons nous montrer capables d'évaluer des expressions du type $\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) f(\bar{\psi}, \psi)$. Par linéarité, on peut se limiter au cas où $f(\bar{\psi}, \psi)$ est un monôme du type $\bar{\psi}^I \psi^J$. Là encore, le parallélisme avec le cas bosonique est presque parfait : on sait que pour les mesures gaussiennes sur \mathbb{R}^n , on a le théorème de Wick :

$$\int d\mu_C x_{i_1} \dots x_{i_{2p}} = \sum_{\substack{\text{appariements} \\ \pi \text{ sur } [2p]}} \prod_{\{k, \ell\} \in \pi} \int d\mu_C x_{i_k} x_{i_\ell} . \quad (2.86)$$

Un appariement sur $[2p]$ est une partition de $[2p]$ dont chaque élément est une paire d'éléments de $[2p]$. Evidemment, pour un monôme de degré impair, l'intégrale correspondante est nulle.

Dans le cas fermionique, ce résultat s'adapte en tenant compte d'éventuelles introductions de signes (-1) du fait de l'anticommutativité des variables, et du fait qu'une variable du type $\bar{\psi}$ doit nécessairement s'apparier avec une variable du type ψ . La démonstration du théorème de Wick fermionique sera grandement simplifiée par l'usage du lemme suivant :

Lemme 2.5.1 *Soit \mathcal{G} une algèbre de Grassmann engendrée par $4D$ générateurs anticommutants, $(\bar{\psi}_i)_{1 \leq i \leq D}$, $(\psi_i)_{1 \leq i \leq D}$, $(\bar{\eta}_i)_{1 \leq i \leq D}$ et $(\eta_i)_{1 \leq i \leq D}$. Soit $C \in GL_D(\mathbb{C})$ et $\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi)$ l'intégrale gaussienne fermionique définie par l'équation (2.84). On a alors l'identité :*

$$\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} = e^{(\bar{\eta}, C\eta)} . \quad (2.87)$$

Démonstration :

Notant $A = C^{-1}$, on a :

$$\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} = \frac{1}{\det A} \int \left(\prod_{k=1}^D d\bar{\psi}_k d\psi_k \right) e^{-(\bar{\psi}, A\psi) + (\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} . \quad (2.88)$$

Or $-(\bar{\psi}, A\psi) + (\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta) = (\bar{\eta}, C\eta) - (\bar{\psi} - C^T \bar{\eta}, A(\psi - C\eta))$, donc :

$$\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} = e^{(\bar{\eta}, C\eta)} \frac{1}{\det A} \int \left(\prod_{k=1}^D d\bar{\psi}_k d\psi_k \right) e^{-(\bar{\psi} - C^T \bar{\eta}, A(\psi - C\eta))}. \quad (2.89)$$

En utilisant la propriété (2.3.1), on obtient :

$$\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} = e^{(\bar{\eta}, C\eta)} \frac{1}{\det A} \int \left(\prod_{k=1}^D d\bar{\psi}_k d\psi_k \right) e^{-(\bar{\psi}, A\psi)} \quad (2.90)$$

$$= e^{(\bar{\eta}, C\eta)} \quad (2.91)$$

■

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.5.1 La valeur moyenne d'un monôme $\prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k}$ pour une mesure gaussienne grassmannienne de covariance $C \in GL_D(\mathbb{C})$ s'écrit :

$$\left\langle \prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right\rangle_C = \det M_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \\ (j_1, \dots, j_p)}}(C) \quad (2.92)$$

avec $i_1 < \dots < i_p$ et $j_1 < \dots < j_p$, où $M_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \\ (j_1, \dots, j_p)}}(C)$ est la matrice extraite de C pour les p -uplets (i_1, \dots, i_p) et (j_1, \dots, j_p) , c'est-à-dire la matrice $p \times p$ dont le coefficient en position (k, ℓ) vaut C_{i_k, j_ℓ} .

Démonstration :

On peut écrire :

$$\prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} = \left[\prod_{k=1}^p \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{j_k}} \right) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} \right]_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (2.93)$$

d'où :

$$\left\langle \prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right\rangle_C = \left\langle \left[\prod_{k=1}^p \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{j_k}} \right) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} \right]_{\eta, \bar{\eta}=0} \right\rangle_C \quad (2.94)$$

Or les dérivées étant en nombre pair, elles commutent avec $\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi)$, donc :

$$\left\langle \prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right\rangle_C = \left[\prod_{k=1}^p \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{j_k}} \right) \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{(\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)} \right]_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (2.95)$$

$$= \prod_{k=1}^p \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_{i_k}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{j_k}} \right) e^{(\bar{\eta}, C\eta)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (2.96)$$

d'après le lemme (2.5.1).

Pour évaluer ces dérivées, il est utile de se souvenir que les dérivations et les intégrales grassmanniennes sont en fait identiques, et on a :

$$\left\langle \prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right\rangle_C = (-1)^p \int \left(\prod_{k=1}^p d\bar{\eta}_{j_k} d\eta_{i_k} \right) e^{(\bar{\eta}, C\eta)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (2.97)$$

$$= (-1)^p \int \left(\prod_{k=1}^p d\bar{\eta}_{j_k} d\eta_{i_k} \right) \sum_{q=0}^D (\bar{\eta}, C\eta)^q \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} . \quad (2.98)$$

Il est clair que le seul terme ayant une contribution non nulle est celui correspondant à $q = p$ et donc :

$$\left\langle \prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right\rangle_C = \frac{(-1)^p}{p!} \int \left(\prod_{k=1}^p d\bar{\eta}_{j_k} d\eta_{i_k} \right) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_p=1 \\ n_1, \dots, n_p=1}}^D C_{m_1, n_1} \dots C_{m_p, n_p} \bar{\eta}_{m_1} \eta_{n_1} \dots \bar{\eta}_{m_p} \eta_{n_p} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} . \quad (2.99)$$

Là encore, on peut remarquer que les seuls termes ayant une contribution non nulle sont ceux pour lesquels $\{m_1, \dots, m_p\} = \{i_1, \dots, i_p\}$ et $\{n_1, \dots, n_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}$. On procède alors comme pour la démonstration de la proposition (2.4.1) en écrivant que :

$$\bar{\eta}_{m_1} \eta_{n_1} \dots \bar{\eta}_{m_p} \eta_{n_p} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \bar{\eta}_{m_1} \dots \bar{\eta}_{m_p} \eta_{n_1} \dots \eta_{n_p} \quad (2.100)$$

$$= (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \varepsilon_{m_1, \dots, m_p}^{i_1, \dots, i_p} \varepsilon_{n_1, \dots, n_p}^{j_1, \dots, j_p} \bar{\eta}_{i_1} \dots \bar{\eta}_{i_p} \eta_{j_1} \dots \eta_{j_p} \quad (2.101)$$

$$= \varepsilon_{m_1, \dots, m_p}^{i_1, \dots, i_p} \varepsilon_{n_1, \dots, n_p}^{j_1, \dots, j_p} \bar{\eta}_{i_1} \eta_{j_1} \dots \bar{\eta}_{i_p} \eta_{j_p} . \quad (2.102)$$

On a donc obtenu :

$$\int \left(\prod_{k=1}^p d\bar{\eta}_{j_k} d\eta_{i_k} \right) e^{(\bar{\eta}, C\eta)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma, \sigma' \in S_p} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') C_{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma'(1)}} \dots C_{i_{\sigma(p)}, j_{\sigma'(p)}} \quad (2.103)$$

puisque $\int \left(\prod_{k=1}^p d\bar{\eta}_k d\eta_k \right) \left(\prod_{k=1}^p \bar{\eta}_k \eta_k \right) = (-1)^p$. Or l'expression $\varepsilon(\sigma') C_{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma'(1)}} \dots C_{i_{\sigma(p)}, j_{\sigma'(p)}}$ est indépendante de σ , et on en déduit :

$$\left\langle \prod_{k=1}^p \bar{\psi}_{i_k} \psi_{j_k} \right\rangle_C = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) C_{i_1, j_{\sigma(1)}} \dots C_{i_p, j_{\sigma(p)}} \quad (2.104)$$

$$= \det M \begin{matrix} (i_1, \dots, i_p) \\ (j_1, \dots, j_p) \end{matrix} \quad (2.105)$$

■

2.6 Intégrales gaussiennes grassmanniennes et traces dans l'espace de Fock

Nous avons maintenant introduit tout ce dont nous aurons besoin concernant les algèbres de Grassmann pour en arriver véritablement au cœur du sujet, à savoir l'expression des valeurs moyennes d'observables à l'aide d'une intégrale gaussienne grassmannienne (ou plus précisément d'une limite de

telles intégrales). La valeur moyenne d'une observable $\mathcal{O} : \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_-$ étant définie par :

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{T,\mu} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{O} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})}{\text{Tr}(e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})})}, \quad (2.106)$$

il s'agit donc d'écrire la trace d'un opérateur du type $\text{Tr}(\mathcal{O} e^{\beta A})$ ou $\text{Tr}(e^{\beta A})$ à l'aide d'une intégrale fermionique.

Afin de préciser ce point, nous rappelons la définition de l'espace de Fock fermionique. L étant un entier naturel non nul, nous appelons Λ le réseau sur lequel est défini notre modèle de Hubbard :

$$\Lambda = \mathbb{Z}^2 / (L\mathbb{Z})^2. \quad (2.107)$$

Posant $\Gamma = \Lambda \times \{\uparrow, \downarrow\}$, l'espace des états à une particule est $L^2(\Gamma) \approx \mathbb{C}^\Gamma$. Les éléments de Γ seront ordonnés selon l'ordre lexicographique naturel, en considérant par exemple que \uparrow précède \downarrow . Le choix de cet ordre n'est pas essentiel pour la suite, mais il est en revanche nécessaire d'en choisir un. L'espace de Fock fermionique est alors :

$$\mathcal{F}_- = \Lambda(L^2(\Gamma)) \approx \Lambda(\mathbb{C}^\Gamma) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{C}^\Gamma)_{\text{anti}}^{\otimes n}. \quad (2.108)$$

On a vu que \mathcal{F}_- est une algèbre de Grassmann. En tant qu'espace vectoriel, il admet une base donnée par les $(\phi_\Delta)_{\Delta \in \Gamma}$, où $\phi_\Delta = (\prod_{\xi \in \Delta} a_\xi^*) \Omega$, les opérateurs a_ξ^* étant les opérateurs de création usuels, le produit $(\prod_{\xi \in \Delta} a_\xi^*)$ étant écrit en respectant la relation ordre définie sur Γ , et Ω étant l'élément de \mathcal{F}_- représenté par $(1, 0, \dots, 0)$. Si A est une observable, c'est-à-dire un opérateur linéaire de \mathcal{F}_- dans \mathcal{F}_- , on peut parler de la matrice de A dans la base $(\Phi_\Delta)_{\Delta \in \Gamma}$, notée $A(\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'})$. Par définition, $A(\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'})$ est la composante selon Φ_Δ de $A(\Phi_{\Delta'})$. On a alors, pour tout $v = \sum_{\Delta \in \Gamma} v_\Delta \Phi_\Delta \in \mathcal{F}_-$, $A(v) = \sum_{\Delta \in \Gamma} A(\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}) v_{\Delta'}$. La trace de A s'écrit alors tout simplement :

$$\text{Tr } A = \sum_{\Delta \in \Gamma} A(\Phi_\Delta, \Phi_\Delta). \quad (2.109)$$

Cette somme discrète peut être interprétée comme une « intégrale » sur $\mathcal{P}(\Gamma)$, et la matrice $A(\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'})$ comme le « noyau intégral » de l'opérateur A . Mais ceci n'est pas ce que nous voulons faire ; comme nous l'avons dit, nous voulons obtenir une expression faisant intervenir une intégrale Grassmannienne. L'idée est donc de remplacer $\sum_{\Delta \in \Gamma}$ par $\int \prod_{\Delta \in \Gamma} d\bar{\psi}^\Delta$ ou $\int \prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi)$. En fait, la forme précise de l'expression cherchée sera donnée par le théorème (2.8.1). Comme nous le verrons, ceci nous obligera à écrire une intégrale fermionique $\int (\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi))$, c'est-à-dire que nous aurons en fait deux jeux de « différentielles fermioniques » indexées par Γ . Ceci n'est pas étonnant, car nous avons vu dans la section précédente que l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{F}_-, \mathcal{F}_-)$ comportait deux sous-algèbres de Grassmann remarquables, à savoir celles engendrées par les a_ξ et les a_ξ^* respectivement. Mais on a alors la difficulté

suivante : on s'attend à avoir :

$$(Av)(\bar{\psi}) = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) A'(\bar{\psi}, \chi) v(\bar{\chi}) \right), \quad (2.110)$$

mais à condition d'imposer $\chi = \bar{\chi}$. Ceci est possible si on introduit l'équivalent d'une « fonction delta fermionique » $\delta(\bar{\chi} - \chi)$. Voyons maintenant comment exprimer précisément ces idées.

2.7 Noyau intégral fermionique de la fonction delta

Cas d'une algèbre engendrée par deux générateurs anticommutants

Considérons une algèbre de Grassmann engendrée par ψ_1 et ψ_2 . On cherche une « fonction » des variables ψ_1 et ψ_2 , notée $\delta(\psi_1, \psi_2)$, telle que, pour toute fonction d'une variable $f(\psi_2)$ ³, on ait :

$$\int d\psi_2 \delta(\psi_1, \psi_2) f(\psi_2) = f(\psi_1). \quad (2.111)$$

Comme $f(\psi_2)$ n'a qu'une seule variable, elle est nécessairement de la forme :

$$f(\psi_2) = a + b\psi_2, \quad (2.112)$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$. Par un raisonnement analogue, $\delta(\psi_1, \psi_2)$ peut s'écrire *a priori* :

$$\delta(\psi_1, \psi_2) = \alpha + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2 + \delta\psi_1\psi_2, \quad (2.113)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Ainsi :

$$\delta(\psi_1, \psi_2) f(\psi_2) = \alpha a + \beta a \psi_1 + (\alpha b + \gamma a) \psi_2 + (\beta b + \delta a) \psi_1 \psi_2. \quad (2.114)$$

Donc

$$\int d\psi_2 \delta(\psi_1, \psi_2) f(\psi_2) = (\alpha b + \gamma a) - (\beta b + \delta a) \psi_1 \quad (2.115)$$

et on veut que cette quantité soit par ailleurs égale à $f(\psi_1) = a + b\psi_1$. On doit donc avoir, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \alpha b + \gamma a = a \\ \beta b + \delta a = -b \end{cases} \quad (2.116)$$

³Naturellement, ceci est un abus de langage : dire que $\delta(\psi_1, \psi_2)$ est une « fonction » des variables ψ_1 et ψ_2 signifie en fait que δ est un élément de l'algèbre engendrée par ψ_1 et ψ_2 . De même, dire que $f(\psi_2)$ est une « fonction » de la seule variable ψ_2 signifie en fait que f appartient à la sous-algèbre engendrée par ψ_2 . Les égalités (2.112) et (2.113) ne font qu'exprimer ce point.

d'où :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \\ \delta = 0 . \end{cases} \quad (2.117)$$

Finalement, on a obtenu $\delta(\psi_1, \psi_2) = \psi_2 - \psi_1$.

Pour aller plus loin, nous voulons disposer d'une représentation intégrale pour $\delta(\psi_1, \psi_2)$ ⁴. On peut remarquer que l'on a :

$$\psi_2 - \psi_1 = \int d\psi e^{(\psi_1 - \psi_2)\psi} . \quad (2.118)$$

En effet :

$$e^{(\psi_1 - \psi_2)\psi} = 1 + (\psi_1 - \psi_2)\psi \quad (2.119)$$

donc :

$$\int d\psi e^{(\psi_1 - \psi_2)\psi} = \psi_2 - \psi_1, \quad (2.120)$$

ce qui est bien l'expression attendue de $\delta(\psi_1, \psi_2)$. Nous résumons tout ceci sous la forme du lemme suivant :

Lemme 2.7.1 *Dans une algèbre de Grassmann engendrée par ψ_1, ψ_2 et ψ , on a les égalités :*

$$\int d\psi_2 (\psi_2 - \psi_1) f(\psi_2) = f(\psi_1) \quad (2.121)$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \int d\psi e^{(\psi_1 - \psi_2)\psi} \quad (2.122)$$

$$\int d\psi_2 \int d\psi e^{(\psi_1 - \psi_2)\psi} f(\psi_2) = f(\psi_1) . \quad (2.123)$$

Généralisation à une algèbre de Grassmann comportant un nombre arbitraire de générateurs

Cette généralisation est naturelle mais se heurte au problème de l'anticommutativité des variables de Grassmann. En effet soit Γ un ensemble fini et ordonné d'indices (on peut penser Γ comme étant $\Lambda \times \{\uparrow, \downarrow\}$ ordonné lexicographiquement), et considérons une algèbre de Grassmann engendrée par les $(\bar{\psi}(\xi))_{\xi \in \Gamma}$ et $(\bar{\psi}'(\xi))_{\xi \in \Gamma}$. On cherche à généraliser la « fonction delta » de la section précédente. On peut songer à considérer $\prod_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi))$, mais il faut bien avoir à l'esprit que cette définition est quelque peu arbitraire quant au signe - global éventuel (puisque chaque facteur $\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)$ étant de degré impair, deux quelconques d'entre eux anticommulent).

⁴Par analogie, on a sur \mathbb{R} , au sens des distributions : $\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi(x-y)} d\xi$.

Notant $\bar{\psi}'^\Delta = \prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi)$ (produit écrit de gauche à droite en respectant l'ordre existant sur Δ) et $f(\bar{\psi}') = \sum_{\Delta \subset \Gamma} f_\Delta \bar{\psi}'^\Delta$, calculons :

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) f(\bar{\psi}') \\ &= \sum_{\Delta \subset \Gamma} f_\Delta \left[\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \right] \bar{\psi}'^\Delta. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Or

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \bar{\psi}'^\Delta \\ &= \varepsilon(\Delta, \Gamma \setminus \Delta) \left(\prod_{\xi \in \Gamma \setminus \Delta} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right) \end{aligned} \quad (2.125)$$

où $\varepsilon(\Delta, \Gamma \setminus \Delta)$ vaut +1 ou -1 selon la règle (2.5). En utilisant le fait que $\bar{\psi}'(\xi)^2 = 0$, on voit facilement que

$$\left(\prod_{\xi \in \Delta} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi) = (-1)^{|\Delta|} \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right) \quad (2.126)$$

et donc :

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \bar{\psi}'^\Delta \\ &= \varepsilon(\Delta, \Gamma \setminus \Delta) (-1)^{|\Delta|} \left(\prod_{\xi \in \Gamma \setminus \Delta} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi)) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right). \end{aligned} \quad (2.127)$$

En prenant l'intégrale grassmannienne $\int (\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi))$, on voit que la seule contribution non nulle du produit $\prod_{\xi \in \Gamma \setminus \Delta} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi))$ est donnée par le terme $\prod_{\xi \in \Gamma \setminus \Delta} \bar{\psi}'(\xi)$ et on a :

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) \right) \varepsilon(\Delta, \Gamma \setminus \Delta) (-1)^{|\Delta|} \left(\prod_{\xi \in \Gamma \setminus \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right) \\ &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) \right) \varepsilon(\Delta, \Gamma \setminus \Delta) \left(\prod_{\xi \in \Gamma \setminus \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}(\xi) \right) \\ &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} \bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}(\xi) \right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

A ce stade, on constate que l'intégrale grassmannienne $\int (\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi)) (\prod_{\xi \in \Gamma} \bar{\psi}'(\xi))$ ne vaut pas nécessairement 1, mais ± 1 . Ceci est dû au fait que notre produit initial $\prod_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi))$ n'est pas écrit dans un ordre convenable par rapport à l'intégrale grassmannienne $\int (\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi))$: il

faut ordonner les facteurs dans l'ordre inverse. Nous noterons $\prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim}$ ce produit dans lequel les facteurs apparaissent dans l'ordre inverse de l'ordre de Γ . Il est facile de voir que la relation entre les deux produits est donnée par :

$$\prod_{\xi \in \Gamma} \left(\tilde{\psi}'(\xi) - \tilde{\psi}(\xi) \right) = (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}} \prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim} \left(\tilde{\psi}'(\xi) - \tilde{\psi}(\xi) \right). \quad (2.129)$$

Ainsi :

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\tilde{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} \tilde{\psi}'(\xi) \right) = (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\tilde{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim} \tilde{\psi}'(\xi) \right) = (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}} \quad (2.130)$$

Cette question de signe disparaît si l'on prend soin dès le départ de prendre $\prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim} \left(\tilde{\psi}'(\xi) - \tilde{\psi}(\xi) \right)$ comme définition de la fonction delta fermionique. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.7.2 *Dans une algèbre de Grassmann engendrée par $\left(\tilde{\psi}'(\xi) \right)_{\xi \in \Gamma}$ et $\left(\tilde{\psi}(\xi) \right)_{\xi \in \Gamma}$, on a l'égalité :*

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\tilde{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim} \left(\tilde{\psi}'(\xi) - \tilde{\psi}(\xi) \right) \right) f(\tilde{\psi}') = f(\tilde{\psi}). \quad (2.131)$$

Comme on vient de le voir, le fait que les fonctions delta fermioniques à une variable soient des éléments impairs de l'algèbre engendre quelques complications malvenues. Cependant, la relation (2.123) peut se généraliser sans faire intervenir ces questions de signe. En effet, en utilisant le lemme (2.7.2) et l'égalité (2.123), on a :

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\tilde{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim} \left[\int d\psi(\xi) e^{\left(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}'(\psi) \right) \psi(\xi)} \right] \right) f(\tilde{\psi}') = f(\tilde{\psi}). \quad (2.132)$$

Les exponentielles $e^{\left(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}'(\psi) \right) \psi(\xi)}$ étant des éléments pairs, elles commutent avec tous les éléments, donc

$$\prod_{\xi \in \Gamma}^{\sim} \left[\int d\psi(\xi) e^{\left(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}'(\psi) \right) \psi(\xi)} \right] = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) \prod_{\xi \in \Gamma} e^{\left(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}'(\xi) \right) \psi(\xi)} \quad (2.133)$$

$$= (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) \prod_{\xi \in \Gamma} e^{\left(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}'(\xi) \right) \psi(\xi)} \quad (2.134)$$

Donc :

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\tilde{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) e^{\sum_{\xi \in \Gamma} \left(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}'(\xi) \right) \psi(\xi)} f(\tilde{\psi}') = (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}} f(\tilde{\psi}). \quad (2.135)$$

Or, comme

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) = (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) d\psi(\xi) \right), \quad (2.136)$$

nous avons donc établi le lemme suivant :

Lemme 2.7.3 *Soit \mathcal{G} une algèbre de Grassmann engendrée par $(\bar{\psi}(\xi))_{\xi \in \Gamma} \cup (\bar{\psi}'(\xi))_{\xi \in \Gamma} \cup (\psi(\xi))_{\xi \in \Gamma}$. Soit $f(\bar{\psi})$ un élément de la sous-algèbre \mathcal{A} engendrée par $(\bar{\psi}(\xi))_{\xi \in \Gamma}$. On a alors l'égalité :*

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}'(\xi) d\psi(\xi) \right) \exp \left(\sum_{\xi \in \Gamma} (\bar{\psi}(\xi) - \bar{\psi}'(\xi)) \psi(\xi) \right) f(\bar{\psi}') = f(\bar{\psi}). \quad (2.137)$$

Bilan

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le résultat que nous voulions, exprimant l'action d'un opérateur linéaire $A: \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_-$ sur un élément v de \mathcal{F}_- .

Théorème 2.7.1 *Soit $A: \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_-$ un opérateur linéaire de l'espace de Fock $\mathcal{F}_- = \Lambda(\mathbb{C}^\Gamma)$ dans lui-même et v un élément de \mathcal{F}_- . Soit $A(a^*, a)$ la forme normale de A . Alors on a :*

$$(Av)(\bar{\psi}) = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) e^{-\langle \bar{\chi}, \chi \rangle} A(\bar{\psi}, \chi) e^{\langle \bar{\psi}, \chi \rangle} v(\bar{\chi}). \quad (2.138)$$

Démonstration :

On peut remarquer que l'action d'un opérateur d'annihilation a_ξ sur $v \in \mathcal{F}_-$ peut s'écrire :

$$(a_\xi v)(\bar{\psi}) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}(\xi)} \right) v(\bar{\psi}). \quad (2.139)$$

On peut aussi écrire l'action d'un opérateur de création :

$$(a_\xi^* v)(\bar{\psi}) = \bar{\psi}(\xi) v(\bar{\psi}). \quad (2.140)$$

Par ailleurs, la forme normale de l'opérateur A peut être explicitée sous la forme :

$$A = \sum_{\Delta, \kappa \subset \Gamma} A_{\Delta, \kappa} \left(\prod_{\xi \in \Delta} a_\xi^* \right) \left(\prod_{\xi \in \kappa} a_\xi \right). \quad (2.141)$$

Ainsi :

$$(Av)(\bar{\psi}) = \sum_{\Delta, \kappa \subset \Gamma} \bar{\psi}^\Delta \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \right)^\kappa v(\bar{\psi}) \quad (2.142)$$

avec $\bar{\psi}^\Delta = \prod_{\xi \in \Delta} \bar{\psi}(\xi)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}}\right)^\kappa = \prod_{\xi \in \kappa} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}(\xi)}$. D'autre part, $v(\bar{\psi})$ peut être écrit en utilisant la « fonction delta fermionique » (voir lemme (2.7.3)) :

$$v(\bar{\psi}) = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) e^{(\bar{\psi} - \bar{\chi}, \chi)} v(\bar{\chi}). \quad (2.143)$$

On en déduit :

$$(Av)(\bar{\psi}) = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \sum_{\Delta, \kappa \subset \Gamma} \bar{\psi}^\Delta \chi^\kappa e^{(\bar{\psi} - \bar{\chi}, \chi)} v(\bar{\chi}) \quad (2.144)$$

d'où le résultat :

$$(Av)(\bar{\psi}) = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) e^{-(\bar{\chi}, \chi)} A(\bar{\psi}, \chi) e^{(\bar{\psi}, \chi)} v(\bar{\chi}). \quad (2.145)$$

■

2.8 Une formule pour la trace

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la trace de $A: \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_-$ sous la forme d'une intégrale fermionique grâce au théorème suivant :

Théorème 2.8.1 *Soit $A: \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_-$ un opérateur linéaire de l'espace de Fock dans lui-même et $A(a^*, a)$ sa forme normale. Alors on a :*

$$\text{Tr } A = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) A(-\bar{\psi}, \psi) e^{-2(\bar{\psi}, \psi)}. \quad (2.146)$$

On observera que la quantité figurant sous l'intégrale grassmannienne est bien $A(-\bar{\psi}, \psi)$ (avec un signe - devant les $\bar{\psi}$) et non pas simplement $A(\bar{\psi}, \psi)$. La présence du facteur 2 dans l'exponentielle peut également surprendre, mais le lecteur pourra vérifier qu'en prenant par exemple $A = Id$, on a alors l'intégrale $\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) e^{-2(\bar{\psi}, \psi)}$ qui vaut $2^{|\Gamma|}$, ce qui est bien la dimension de \mathcal{F}_- .

Démonstration :

On sait que la trace de A peut s'écrire en utilisant la base $(\Phi_\Delta)_{\Delta \subset \Gamma}$:

$$\text{Tr } A = \sum_{\Delta \subset \Gamma} \langle \Phi_\Delta | A \Phi_\Delta \rangle. \quad (2.147)$$

En utilisant le théorème (2.7.1), chaque terme peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_\Delta | A \Phi_\Delta \rangle &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) e^{-(\bar{\psi}, \psi)} \psi^{\tilde{\Delta}} (A \Phi_\Delta) (\bar{\psi}) & (2.148) \\
 &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) e^{-(\bar{\psi}, \psi)} \psi^{\tilde{\Delta}} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) e^{-(\bar{\chi}, \chi)} A(\bar{\psi}, \chi) e^{(\bar{\psi}, \chi)} \bar{\chi}^\Delta \\
 &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) e^{-(\bar{\psi}, \psi)} e^{-(\bar{\chi}, \chi)} \psi^{\tilde{\Delta}} A(\bar{\psi}, \chi) e^{(\bar{\psi}, \chi)} \bar{\chi}^\Delta .
 \end{aligned}$$

Les contributions non-nulles proviennent des termes de $A(\bar{\psi}, \chi)$ de degré $|\Delta|$ en $\bar{\psi}$ et de degré $|\Delta|$ en χ . On peut donc intervertir $A(\bar{\psi}, \chi)$ et $e^{-(\bar{\psi}, \psi)} e^{-(\bar{\chi}, \chi)} \psi^{\tilde{\Delta}}$ et écrire :

$$\langle \Phi_\Delta | A \Phi_\Delta \rangle = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) A(\bar{\psi}, \chi) e^{(\bar{\psi}, \chi)} e^{-(\bar{\psi}, \psi)} e^{-(\bar{\chi}, \chi)} \psi^{\tilde{\Delta}} \bar{\chi}^\Delta . \quad (2.149)$$

Or $\psi^{\tilde{\Delta}} \bar{\chi}^\Delta = \prod_{\xi \in \Delta} (-\bar{\chi}(\xi) \psi(\xi))$ et :

$$\sum_{\Delta \subset \Gamma} \prod_{\xi \in \Delta} (-\bar{\chi}(\xi) \psi(\xi)) = \prod_{\xi \in \Gamma} (1 - \bar{\chi}(\xi) \psi(\xi)) \quad (2.150)$$

$$= \prod_{\xi \in \Gamma} e^{-\bar{\chi}(\xi) \psi(\xi)} \quad (2.151)$$

$$= e^{-(\bar{\chi}, \psi)} . \quad (2.152)$$

Finalement, on a obtenu :

$$\text{Tr } A = \sum_{\Delta \subset \Gamma} \langle \Phi_\Delta | A \Phi_\Delta \rangle \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) A(\bar{\psi}, \chi) e^{(\bar{\psi}, \chi)} e^{-(\bar{\psi}, \psi)} e^{-(\bar{\chi}, \chi)} e^{-(\bar{\chi}, \psi)} \\
 &= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) A(\bar{\psi}, \chi) e^{-(\bar{\chi} + \bar{\psi}, \chi + \psi)} e^{2(\bar{\psi}, \chi)} . \quad (2.154)
 \end{aligned}$$

On veut alors intégrer sur les $\bar{\chi}$ et les ψ . Pour cela, nous devons préalablement réordonner la mesure grassmannienne, pour passer de $\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right)$ à

$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\psi(\xi) \right)$. Or on a :

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) = \varepsilon(\Gamma) \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) \quad (2.155)$$

avec $\varepsilon(\Gamma) = (-1)^{\frac{|\Gamma|(|\Gamma|-1)}{2}}$, donc :

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) = \\ & \quad \varepsilon(\Gamma)^2 \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\chi(\xi) \right) \\ & = (-1)^{|\Gamma|} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\chi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\psi(\xi) \right) \\ & \quad = (-1)^{|\Gamma|} \varepsilon(\Gamma)^2 \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\psi(\xi) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu :

$$\text{Tr } A = (-1)^{|\Gamma|} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\psi(\xi) \right) A(\bar{\psi}, \chi) e^{-(\bar{\chi} + \bar{\psi}, \chi + \psi)} e^{2(\bar{\psi}, \chi)}. \quad (2.156)$$

Or

$$\int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\psi(\xi) \right) e^{-(\bar{\chi} + \bar{\psi}, \chi + \psi)} = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\psi(\xi) \right) e^{-(\bar{\chi}, \psi)} \quad (2.157)$$

$$= 1 \quad (2.158)$$

par la propriété d'invariance par translation. Ainsi :

$$\text{Tr } A = (-1)^{|\Gamma|} \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\chi(\xi) \right) A(\bar{\psi}, \chi) e^{2(\bar{\psi}, \chi)}. \quad (2.159)$$

On peut alors absorber le signe $(-1)^{|\Gamma|}$ dans la mesure grassmannienne en changeant tous les $\bar{\psi}$ en $-\bar{\psi}$. En changeant les χ en ψ , on a donc obtenu la formule :

$$\text{Tr } A = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}(\xi) d\psi(\xi) \right) A(-\bar{\psi}, \psi) e^{-2(\bar{\psi}, \psi)}. \quad (2.160)$$

■

Pour préparer la suite, nous allons maintenant exprimer la trace d'un produit d'opérateurs. Soit $n \geq 1$ un entier, et A_1, \dots, A_n des opérateurs linéaires définis sur l'espace de Fock \mathcal{F}_- . On a alors :

$$\text{Tr } A_1 \dots A_n = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) (\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n)(-\bar{\chi}, \chi) e^{-(\bar{\chi}, \chi)} \quad (2.161)$$

où $(\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n)(-\bar{\chi}, \chi)$ est le noyau intégral fermionique du produit d'opérateurs $A_1 \dots A_n$. On en déduit :

$$\text{Tr } A_1 \dots A_n = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \left[\prod_{k=1}^{n-1} (d\bar{\chi}_k(\xi) d\chi_k(\xi)) \right] \mathcal{A}_1(-\bar{\chi}, \chi_1) \mathcal{A}_2(\bar{\chi}_1, \chi_2) \dots \mathcal{A}_n(\bar{\chi}_{n-1}, \chi) e^{-(\bar{\chi}, \chi)} e^{-(\bar{\chi}_1, \chi_1)} \dots e^{-(\bar{\chi}_{n-1}, \chi_{n-1})} \quad (2.162)$$

$$= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \left[\prod_{k=1}^{n-1} (d\bar{\chi}_k(\xi) d\chi_k(\xi)) \right] \mathcal{A}_1(-\bar{\chi}, \chi_1) \mathcal{A}_2(\bar{\chi}_1, \chi_2) \dots \mathcal{A}_n(\bar{\chi}_{n-1}, \chi) e^{-(\bar{\chi}, \chi)} e^{-(\bar{\chi}_1, \chi_1)} \dots e^{-(\bar{\chi}_{n-1}, \chi_{n-1})} e^{-(\bar{\chi}, \chi_1)} e^{(\bar{\chi}_1, \chi_2)} \dots e^{(\bar{\chi}_{n-1}, \chi)} \quad (2.163)$$

$$= \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\chi}(\xi) d\chi(\xi) \right) \left[\prod_{k=1}^{n-1} (d\bar{\chi}_k(\xi) d\chi_k(\xi)) \right] \mathcal{A}_1(-\bar{\chi}, \chi_1) \mathcal{A}_2(\bar{\chi}_1, \chi_2) \dots \mathcal{A}_n(\bar{\chi}_{n-1}, \chi) e^{-(\bar{\chi}, \chi + \chi_1)} e^{(\bar{\chi}_1, \chi_2 - \chi_1)} \dots e^{(\bar{\chi}_{n-2}, \chi_{n-1} - \chi_{n-2})} e^{(\bar{\chi}_{n-1}, \chi - \chi_{n-1})} . \quad (2.164)$$

On pose alors :

$$\begin{cases} \bar{\eta}_1 = -\bar{\chi} & ; \eta_1 = \chi_1 \\ \bar{\eta}_2 = \bar{\chi}_1 & ; \eta_2 = \chi_2 \\ & \vdots \\ \bar{\eta}_n = \bar{\chi}_{n-1} & ; \eta_n = \chi . \end{cases} \quad (2.165)$$

et on obtient :

$$\text{Tr } A_1 \dots A_n = \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} [-d\bar{\eta}_1(\xi)] d\eta_n(\xi) \right) \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_{k+1}(\xi) d\eta_k(\xi) \right) \right] A_1(\bar{\eta}_1, \eta_1) \dots A_n(\bar{\eta}_n, \eta_n) e^{(\bar{\eta}_1, \eta_1 + \eta_n)} e^{(\bar{\eta}_2, \eta_2 - \eta_1)} \dots e^{(\bar{\eta}_n, \eta_n - \eta_{n-1})} \quad (2.166)$$

A ce stade, on souhaite réordonner la mesure grassmannienne. On a :

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} [-d\bar{\eta}_1(\xi)] d\eta_n(\xi) \right) \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_{k+1}(\xi) d\eta_k(\xi) \right) \right] \\ &= (-1)^{|\Gamma|} \varepsilon \Gamma^n \int \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_1(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\eta_n(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_2(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\eta_1(\xi) \right) \dots \\ & \quad \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_n(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\eta_{n-1}(\xi) \right) \\ &= (-1)^{|\Gamma|} \varepsilon(\Gamma)^n (-1)^{(n-1)|\Gamma|} \prod_{k=1}^n \left[\left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_k(\xi) \right) \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\eta_k(\xi) \right) \right] \\ &= (-1)^{n|\Gamma|} \varepsilon \Gamma^{2n} \int \prod_{k=1}^n \left[\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_k(\xi) d\eta_k(\xi) \right] \quad (2.167) \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que comme $\Gamma = \Lambda \times \{\uparrow, \downarrow\}$, $|\Gamma|$ est nécessairement pair, donc $(-1)^{n|\Gamma|} = 1$.

On a donc le résultat :

$$\text{Tr } A_1 \dots A_n = \int \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_k(\xi) d\eta_k(\xi) \right) A_1(\bar{\eta}_1, \eta_1) \dots A_n(\bar{\eta}_n, \eta_n) e^{(\bar{\eta}_1, \eta_1 + \eta_n)} e^{(\bar{\eta}_2, \eta_2 - \eta_1)} \dots e^{(\bar{\eta}_n, \eta_n - \eta_{n-1})} \quad (2.168)$$

qui peut être réécrit :

$$\text{Tr } A_1 \dots A_n = \int \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\eta}_k(\xi) d\eta_k(\xi) \right) A_1(\bar{\eta}_1, \eta_1) \dots A_n(\bar{\eta}_n, \eta_n) e^{\sum_{k=1}^n (\bar{\eta}_k, \eta_k - \eta_{k-1})}$$

avec la convention que $\eta_0 = -\eta_n$. Ce point n'est pas anodin, car il suggère l'idée que l'ensemble d'indices $\{1, \dots, n\}$ doit être muni de conditions aux limites antipériodiques, ce qui est un aspect fondamental des théories fermioniques.

2.9 L'intégrale de chemin fermionique

Nous avons alors tout ce qui est nécessaire pour aborder vraiment le cœur du problème, à savoir exprimer $\text{Tr}(e^{-A})$ à l'aide d'une intégrale fonctionnelle fermionique. Evidemment, on pourrait songer à écrire⁵ :

$$\text{Tr}(e^{-A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \text{Tr}(A^n) \quad (2.169)$$

et exprimer $\text{Tr}(A^n)$ sous la forme donnée par le théorème (2.8.1). Mais en faisant ceci, nous ne réussirions pas à écrire $\text{Tr}(e^{-A})$ sous la forme d'une intégrale fermionique, mais d'une somme (infinie) de telles intégrales. Ce développement ne serait pas très éclairant, et de surcroît n'apporterait pas plus d'information que (2.169). En fait, l'idée intéressante pour la suite est d'écrire plutôt :

$$\text{Tr}(e^{-A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr} \left[\left(1 - \frac{A}{n} \right)^n \right]. \quad (2.170)$$

On a donc :

$$\text{Tr}(e^{-A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}_k(\xi) d\psi_k(\xi) \right) e^{\sum_{k=1}^n (\bar{\psi}_k, \psi_k - \psi_{k-1})} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n} A(\bar{\psi}_k, \psi_k) \right). \quad (2.171)$$

Nous sommes maintenant très proches d'une « intégrale de chemin fermionique ». L'idée est d'écrire que $1 - \frac{1}{n} A(\bar{\psi}_k, \psi_k) \simeq e^{-\frac{A(\bar{\psi}_k, \psi_k)}{n}}$ et d'interpréter k comme une variable temporelle discrète. Heuristiquement, on obtient ainsi :

$$\text{Tr}(e^{-A}) \simeq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\xi \in \Gamma} d\bar{\psi}_k(\xi) d\psi_k(\xi) \right) e^{\sum_{k=1}^n [(\bar{\psi}_k, \bar{\psi}_k - \psi_{k-1}) - \frac{1}{n} A(\bar{\psi}_k, \psi_k)]}. \quad (2.172)$$

⁵Rappelons que A , en tant qu'opérateur linéaire sur un espace de dimension finie est nécessairement continu, et la trace est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}(\mathcal{F}_-, \mathcal{F}_-)$.

En fait, on peut montrer que l'égalité est exacte, à cause du passage à la limite. Au stade où nous en sommes, nous faisons le choix de ne pas faire figurer ici la démonstration de cette assertion, et de renvoyer le lecteur à la preuve qu'en donne Salmhofer dans [Sal99]. En admettant donc ce point un peu délicat, on a le théorème suivant :

Théorème 2.9.1 *Soit $\beta > 0$ et A un opérateur linéaire sur \mathcal{F}_- . Alors on a :*

$$\text{Tr}\left(e^{-\beta A}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k\tau \in \mathbb{T}_n} (d\bar{\psi}(\tau, \xi) d\psi(\tau, \xi)) e^{\frac{\beta}{n} \sum_{\tau \in \mathbb{T}_n} \left((\bar{\psi}(\tau), \partial_\tau \psi(\tau)) - A(\bar{\psi}(\tau), \psi(\tau)) \right)} \quad (2.173)$$

avec $\mathbb{T}_n = \left\{ -\frac{\beta}{2} + \frac{k}{n}\beta, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ et $\partial_\tau \psi(\tau) = \frac{n}{\beta} [\psi(\tau) - \psi(\tau - \frac{\beta}{n})]$ pour $\tau \neq -\frac{\beta}{2}$ et $\partial_\tau \psi(-\frac{\beta}{2}) = \frac{n}{\beta} [\psi(-\frac{\beta}{2}) + \psi((\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\beta)]$.

Qu'avons-nous obtenu avec ce résultat ? Exactement ce qui peut être considéré comme une intégrale de chemin (à temps discret) fermionique. Nous allons donc pouvoir mettre en œuvre des méthodes propres aux *théories de champ*. C'est tout l'intérêt du formalisme des algèbres de Grassmann : permettre de passer d'un problème de *physique statistique* à un problème de *théorie des champs*. Ce formalisme recèle donc une profondeur insoupçonnée, alors qu'il ne semblait introduire que des notations commodes pour les physiciens familiarisés avec la théorie des champs (rappelons que l'espace de Fock fermionique \mathcal{F}_- est isomorphe en tant qu'algèbre à \mathcal{G} , l'algèbre de Grassmann dont les générateurs sont indexés par Γ).

Il n'en demeure pas moins vrai que le résultat du théorème (2.9.1) pourrait encore être amélioré si on pouvait supprimer ce passage explicite à la limite. En fait, il faudrait pour cela introduire une algèbre de Grassmann de dimension infinie, munie d'une « mesure Grassmannienne » convenablement définie.

Chapitre 3

Le modèle de Hubbard dans le langage de la théorie des champs

3.1 Formulation générale

La limite de temps continu

Le chapitre 1 avait introduit le modèle de Hubbard sous l'angle de la mécanique statistique quantique. Notamment, nous avons vu que les grandeurs thermodynamiques du système peuvent être évaluées à partir des fonctions de corrélations :

$$\left\langle \left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right) \right\rangle_{\beta, \mu} = \frac{\text{Tr} \left(\left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right) e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right)}{\text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right)}. \quad (3.1)$$

Le formalisme grassmannien introduit au chapitre 2 a conduit à une représentation des fonctions de corrélation en termes d'intégrales de Grassmann (ou plus précisément d'une limite d'intégrales de Grassmann) :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\prod_{\xi \in X} a_{\xi}^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_{\eta} \right) \right\rangle_{\beta, \mu} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int D^n \bar{\psi} D^n \psi \left(\prod_{\xi \in X} \bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\eta \in Y} \psi(\eta) \right) e^{\frac{\beta}{n} \sum_{\tau \in \mathbb{T}_n} \left((\bar{\psi}(\tau), \partial_{\tau} \psi(\tau)) - H(\bar{\psi}(\tau), \psi(\tau)) + \mu N(\bar{\psi}(\tau), \psi(\tau)) \right)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec :

$$- \mathbb{T}_n = \left\{ -\frac{\beta}{2} + \frac{k}{n} \beta, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- $D^n \bar{\psi} D^n \psi = \prod_{(x_0, x_1, x_2, \sigma) \in \mathbb{T}_n \times \Lambda \times \{\uparrow, \downarrow\}}$
- $\left(\psi(\tau), \partial_\tau \psi(\tau) \right) = \frac{n}{\beta} \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ \sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}}} \bar{\psi}_\sigma(\tau, x) [\psi_\sigma(\tau, x) - \psi_\sigma(\tau - \frac{\beta}{n}, x)]$
- $H(\bar{\psi}(\tau), \psi(\tau)) + \mu N(\bar{\psi}(\tau), \psi(\tau))$ est obtenu en remplaçant dans la forme normale de $\hat{H} - \mu \hat{N}$ les a_ξ^* par $\bar{\psi}(\tau, \xi)$ et les a_ξ par $\psi(\tau, \xi)$.

Dans la suite de ce mémoire, nous sous-entendrons la limite $n \rightarrow +\infty$ dans la formule (3.2) et nous adopterons l'écriture suivante :

$$\left\langle \left(\prod_{\xi \in X} a_\xi^* \right) \left(\prod_{\eta \in Y} a_\eta \right) \right\rangle_{\beta, \mu} = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \left(\prod_{\xi \in X} \bar{\psi}(\xi) \right) \left(\prod_{\eta \in Y} \psi(\eta) \right) e^{\lambda \int_V \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x) d^3x} \quad (3.3)$$

où $V = \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} \right] \times \Lambda$ et où nous avons absorbé tous les termes quadratiques en $\bar{\psi}, \psi$ dans la mesure gaussienne $d\mu_C(\bar{\psi}, \psi)$

Evidemment, cette expression est formelle ; pour pouvoir lui donner un sens rigoureux, il aurait fallu introduire une algèbre de Grassmann de dimension infinie, dans laquelle on aurait pu définir une intégrale $S = \int_V \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x) d^3x$, une exponentielle e^S , et enfin une intégrale grassmannienne $\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi)$. Mais cette imprécision n'est pas gênante pour la suite. En effet, les formules (3.2) et (3.3) ne vont en définitive servir qu'à définir une série, la fameuse série des perturbations, dont on se propose d'étudier la convergence. L'une ou l'autre de ces formules conduit en fait au même problème. Pour simplifier, nous examinerons ce point uniquement sur la fonction de partition $Z(V) = \text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right)$. On a :

$$Z(V) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int d\mu_{C_n}(\bar{\psi}, \psi) e^{\lambda \frac{\beta}{n} \sum_{x \in \mathbb{T}_n \times \Lambda} \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x)} \quad (3.4)$$

où C_n est la covariance pour une théorie à temps discret définie sur $\mathbb{T}_n \times \Lambda^1$. Pour n fixé, l'intégrale grassmannienne étant continue, on peut écrire :

$$Z(V) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int d\mu_{C_n}(\bar{\psi}, \psi) \left(\frac{\beta}{n} \sum_{x \in \mathbb{T}_n \times \Lambda} \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x) \right)^k \quad (3.5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{\beta}{n} \right)^k \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \\ \in \mathbb{T}_n \times \Lambda}} \left[\det C_n(x_i, x_j) \right]_{i,j}^2. \quad (3.6)$$

Or, au sens des séries formelles, on a :

¹ Voir chapitre 2 : \mathbb{T}_n est le tore discrétisé $\left\{ -\frac{\beta}{2} + \frac{\beta k}{n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{\beta}{n}\right)^k \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \\ \in \mathbb{T}_n \times \Lambda}} \left[\det_{i,j} C_n(x_i, x_j) \right]^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{\beta}{n}\right)^k \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \\ \in \mathbb{T}_n \times \Lambda}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \det_{i,j} C_n(x_i, x_j) \right]^2 \quad (3.7)$$

et précisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} \det(C_n) = \det(C)$. Ceci est exactement la série formelle que l'on aurait obtenue en développant la formule (3.3). C'est cette approche qui est généralement adoptée dans la littérature, car elle a l'avantage d'alléger les notations, et d'utiliser un propagateur plus facile à manier. Nous sommes donc amenés à l'étude de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \left[\det_{i,j} C(x_i, x_j) \right]^2 \quad (3.8)$$

où $V = \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right] \times \Lambda$.

Dans la suite nous nous permettrons de supposer que les variables k_1 et k_2 continues et sont éléments de $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \approx [-\pi, \pi[$ au lieu d'appartenir au réseau dual Λ^* de Λ , ce qui rend les manipulations de la transformée de Fourier *a priori* plus faciles. En toute rigueur, le passage à des variables k_1 et k_2 continues devrait être justifié plus soigneusement mais ceci est laissé au lecteur.

Définition du modèle

A ce stade, résumons notre point de départ. Nous considérons finalement que l'espace de Fourier de la théorie est $\pi T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$. Dans un premier temps, nous représenterons le tore $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ par la première zone de Brillouin $[-\pi, \pi]^2$. Un élément générique de $\pi T\mathbb{Z} \times [-\pi, \pi]^2$ sera noté $k = (k_0, k_1, k_2)$ et le propagateur dans l'espace de Fourier $C(k)$ est défini par :

$$C(k_0, k_1, k_2) = \frac{1}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} \quad (3.9)$$

si $k_0 = 2(n+1)\pi T$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $C(k_0, k_1, k_2) = 0$ si $k_0 \in 2\pi T\mathbb{Z}$. Ainsi, seuls les multiples impairs de πT vont intervenir dans la suite, si bien que l'on a l'habitude de dire que $C(k_0, k_1, k_2)$ n'est défini que pour $k_0 \in \mathbb{M}_T = \{(2n+1)\pi T, n \in \mathbb{Z}\}$ (ensemble des fréquences de Matsubara). L'espace réel est donc assimilé à $\mathbb{R}/(2\beta\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ dont l'élément générique est noté $x = (x_0, x_1, x_2)$. Là encore, le cercle $\mathbb{R}/(2\beta\mathbb{Z})$ sera représenté par l'intervalle $[-\beta, \beta[$. En fait, comme on a vu que le propagateur dans l'espace de Fourier s'annule dès que $k_0 \in 2\pi T\mathbb{Z}$, le propagateur dans l'espace réel $C(x_0, x_1, x_2)$ admet β comme antipériode, si bien que nous considérerons dans la suite que $x_0 \in \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right[$, en gardant toutefois à l'esprit les conditions aux limites antipériodiques. Dans l'espace réel, le propagateur est donné par :

$$C(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk_0 \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{\pi} dk_2 \frac{e^{ik \cdot x}}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} \quad (3.10)$$

où $\int dk_0$ signifie en fait $\pi T \sum_{k_0 \in \mathbb{M}_T}$.

Ces définitions étant posées, nous allons étudier la série formelle représentant la fonction de partition ². Celle-ci s'écrit symboliquement :

$$Z(V) = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{\lambda \int_V d^3x \bar{\psi}_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \bar{\psi}_{\downarrow}(x) \psi_{\downarrow}(x)} \quad (3.11)$$

où V est un volume fini qui sert de cut-off infra-rouge :

$$V = \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} \right] \times \llbracket -L, L \rrbracket^2. \quad (3.12)$$

Cette écriture représente en fait la série formelle en la constante de couplage λ :

$$Z(V) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \left(\prod_{k=1}^n \bar{\psi}_{\uparrow}(x_k) \psi_{\uparrow}(x_k) \bar{\psi}_{\downarrow}(x_k) \psi_{\downarrow}(x_k) \right). \quad (3.13)$$

On est alors certain que chaque coefficient est parfaitement défini. Le problème que nous nous posons dans un premier temps est d'étudier la convergence de cette série. L'idéal serait de pouvoir déterminer exactement son rayon de convergence, mais cette question est en général extrêmement difficile. En fait, on se contente le plus souvent de prouver que le rayon de convergence est non nul, par exemple en établissant une minoration par un nombre strictement positif. Avant de commencer l'étude de la série $Z(V)$ proprement dite, nous signalons au lecteur un dernier détail, afin de faire le lien avec les conventions utilisées dans [Riv], [AMR05a] et [AMR05b]. Le terme d'interaction $\bar{\psi}_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \bar{\psi}_{\downarrow}(x) \psi_{\downarrow}(x)$ peut être écrit :

$$\bar{\psi}_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \bar{\psi}_{\downarrow}(x) \psi_{\downarrow}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2. \quad (3.14)$$

En effet,

$$\left(\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2 = \sum_{a, b \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \bar{\psi}_b(x) \psi_b(x). \quad (3.15)$$

Comme le carré d'une variable de Grassmann est nul, la somme du membre de droite se réduit en fait à deux termes :

²Nous avons déjà signalé que la fonction de partition n'est pas une quantité pertinente dans la limite thermodynamique et qu'elle doit plutôt être remplacée par la pression $\frac{1}{V} \ln Z(V)$. Quant aux fonctions de corrélation, elles présentent la difficulté d'être exprimées comme des quotients. C'est pourquoi nous préférons commencer par expliquer le développement de la fonction de partition, plus simple.

$$\left(\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2 = \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x) + \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x) \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \quad (3.16)$$

et comme les éléments $\bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x)$ et $\bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x)$ commutent, on a bien :

$$\left(\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2 = 2 \bar{\psi}_\uparrow(x) \psi_\uparrow(x) \bar{\psi}_\downarrow(x) \psi_\downarrow(x). \quad (3.17)$$

Ainsi, quitte à changer λ en $\frac{\lambda}{2}$, la fonction de partition sera finalement représentée par l'expression :

$$Z(V) = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) e^{\lambda \int_V d^3x (\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x))^2}, \quad (3.18)$$

qui correspond précisément à la série formelle :

$$Z(V) = \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ b_1, \dots, b_n \in \{\uparrow, \downarrow\}}} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \prod_{k=1}^n \bar{\psi}_{a_k}(x_k) \psi_{a_k}(x_k) \bar{\psi}_{b_k}(x_k) \psi_{b_k}(x_k). \quad (3.19)$$

Deux approches extrêmes

Le développement complet du déterminant

Compte tenu des règles d'intégration grassmanniennes, nous avons :

$$\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \prod_{k=1}^n \left(\bar{\psi}_{a_k}(x_k) \psi_{a_k}(x_k) \bar{\psi}_{b_k}(x_k) \psi_{b_k}(x_k) \right) = \det \begin{pmatrix} C(x_1, a_1; x_1, a_1) & C(x_1, a_1; x_1, b_1) & \dots & C(x_1, a_1; x_n, a_n) & C(x_1, a_1; x_n, b_n) \\ C(x_1, b_1; x_1, a_1) & C(x_1, b_1; x_1, b_1) & \dots & C(x_1, b_1; x_n, a_n) & C(x_1, b_1; x_n, b_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C(x_n, a_n; x_1, a_1) & C(x_n, a_n; x_1, b_1) & \dots & C(x_n, a_n; x_n, a_n) & C(x_n, a_n; x_n, b_n) \\ C(x_n, b_n; x_1, a_1) & C(x_n, b_n; x_1, b_1) & \dots & C(x_n, b_n; x_n, a_n) & C(x_n, b_n; x_n, b_n) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

avec $C(x, a; y, b) = \delta_{a,b} C(x, y) = \delta_{a,b} C(y - x)$. Ce déterminant fermionique a une structure très simple : il suffit d'imaginer que les lignes sont indexées par les antichamps $\bar{\psi}_{a_1}(x_1), \bar{\psi}_{b_1}(x_1), \dots, \bar{\psi}_{a_n}(x_n), \bar{\psi}_{b_n}(x_n)$, et les colonnes par les champs $\psi_{a_1}(x_1), \psi_{b_1}(x_1), \dots, \psi_{a_n}(x_n), \psi_{b_n}(x_n)$. Les coefficients sont alors donnés par les propagateurs correspondant aux contractions $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ de la théorie libre.

Afin d'écrire le déterminant de façon plus compacte, nous introduisons certaines notations. Nous convenons d'appeler « champ » tout quadruplet $(x, a, \text{type}, \text{ordre})$ où $x \in V$, $a \in \{\uparrow, \downarrow\}$, type est un élément d'une paire notée $\{-, +\}$ et $\text{ordre} \in \{1, 2\}$. Intuitivement, cette définition correspond au fait qu'un champ est parfaitement déterminé par une position spatiale x , un spin a , un type qui permet de savoir s'il s'agit d'un antichamp $\bar{\psi}$ (correspondant à $\text{type} = -$) ou d'un champ ψ (correspondant

à $type = +$), et enfin un ordre (1 ou 2) qui permet de distinguer les deux champs de même type dans l'interaction quartique « $\bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2$ ». Etant donné un n -uplet (x_1, \dots, x_n) de positions spatiales et deux n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) de spins, nous définissons la famille des antichamps $\mathcal{A}\mathcal{F}$ par ³ :

$$\mathcal{A}\mathcal{F} = \left((x_1, a_1, -, 1), (x_1, b_1, -, 2), \dots, (x_n, a_n, -, 1), (x_n, b_n, -, 2) \right). \quad (3.21)$$

Cette famille est totalement ordonnée selon :

$$(x_1, a_1, -, 1) \prec (x_1, b_1, -, 2) \prec \dots \prec (x_n, a_n, -, 1) \prec (x_n, b_n, -, 2). \quad (3.22)$$

De même, nous définissons la famille des champs par :

$$\mathcal{F} = \left((x_1, a_1, +, 1), (x_1, b_1, +, 2), \dots, (x_n, a_n, +, 1), (x_n, b_n, +, 2) \right), \quad (3.23)$$

ordonnée selon :

$$(x_1, a_1, +, 1) \prec (x_1, b_1, +, 2) \prec \dots \prec (x_n, a_n, +, 1) \prec (x_n, b_n, +, 2). \quad (3.24)$$

Si $f = (x, a, type, ordre)$ est un élément de $\mathcal{A}\mathcal{F}$ ou de \mathcal{F} , nous noterons x_f sa position spatiale x et a_f son spin. Avec ces notations, il est alors facile d'écrire le déterminant fermionique selon :

$$\int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \prod_{k=1}^n \left(\bar{\psi}_{a_k}(x_k) \psi_{a_k}(x_k) \bar{\psi}_{b_k}(x_k) \psi_{b_k}(x_k) \right) = \det_{(f,g) \in \mathcal{A}\mathcal{F} \times \mathcal{F}} \left(C(f,g) \right) \quad (3.25)$$

où $C(f,g) = C(x_f, a_f; x_g, a_g)$.

Nous utiliserons aussi la notation dite de Cayley pour le déterminant fermionique :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A}\mathcal{F} \times \mathcal{F}} \left(C(f,g) \right) = \begin{Bmatrix} (x_i, a_i) \\ (y_i, b_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}\mathcal{F} \\ \mathcal{F} \end{Bmatrix}.$$

Nous avons donc :

$$Z(V) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \begin{Bmatrix} \mathcal{A}\mathcal{F} \\ \mathcal{F} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \det_{(f,g) \in \mathcal{A}\mathcal{F} \times \mathcal{F}} \left(C(x_f, a_f; x_g, a_g) \right) \quad (3.27)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n u_n. \quad (3.28)$$

³ $\mathcal{A}\mathcal{F}$ est définie comme étant une *famille* et non pas un *ensemble*, afin par exemple de toujours distinguer $(x_1, a_1, -, 1)$ de $(x_2, a_2, -, 1)$, même lorsque $x_1 = x_2$ et $a_1 = a_2$. Ainsi, $\mathcal{A}\mathcal{F}$ a toujours exactement $2n$ éléments.

Nous nous proposons d'étudier la convergence de cette série, et pour cela nous devons nous montrer capables d'établir des bornes sur le module de son terme général, qui est une somme d'intégrales de déterminants. Comment majorer de telles quantités ? La réponse naïve qui vient immédiatement à l'esprit est de développer explicitement le déterminant. On peut écrire :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)) = \sum_{\substack{\text{bijections} \\ \alpha: \mathcal{A} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}}} \varepsilon(\alpha) \prod_{f \in \mathcal{A} \mathcal{F}} C(f, \alpha(f)). \quad (3.29)$$

où $\varepsilon(\alpha)$ vaut +1 ou -1 selon la « parité » de α ⁴. A ce stade, nous nous rendons compte d'une difficulté typique des développements perturbatifs en théorie des champs, à savoir le grand nombre de termes engendrés par un développement complet. Dans le cas présent, la somme exprimant le déterminant comporte exactement $(2n)!$ termes. Cela signifie que même si nous avons un propagateur $C(x,y)$ majoré uniformément par une constante : $|C(x,y)| \leq K$, nous sommes amenés à :

$$\left| \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)) \right| \leq (2n)! K^{2n} \quad (3.30)$$

d'où :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n!} 2^n V^n (2n)! K^{2n}, \quad (3.31)$$

soit

$$|u_n| \leq \frac{(2n)!}{n!} (2VK^2)^n. \quad (3.32)$$

Le membre de droite étant le terme général d'une série entière de rayon nul, on ne peut naturellement rien conclure quant à celui de $Z(V)$. Remarquons que nous n'avons même pas cherché à optimiser les intégrales du type $\int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \prod_{f \in \mathcal{A} \mathcal{F}} C(x, f, x_{\alpha(f)})$, car une analyse plus soignée à ce stade ne ferait qu'améliorer le facteur V^n qui, tant que l'on ne cherche pas à étudier la limite thermodynamique ($V \rightarrow +\infty$), n'est pas essentiel dans l'estimation du rayon de convergence. Nous concluons donc que même dans la situation favorable où le volume est fini, le développement explicite du déterminant fermionique est une très mauvaise méthode pour étudier les séries perturbatives. Ceci peut se comprendre facilement par le fait que lorsqu'on écrit :

$$\left| \sum_{\substack{\text{bijections} \\ \alpha: \mathcal{A} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}}} C(f, \alpha(f)) \right| \leq \sum_{\substack{\text{bijections} \\ \alpha: \mathcal{A} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}}} \prod_{f \in \mathcal{A} \mathcal{F}} |C(f, \alpha(f))|, \quad (3.33)$$

⁴L'expression explicite de $\varepsilon(\alpha)$ est quelque peu alourdie par le fait que les lignes et les colonnes du déterminant fermionique sont indexées par des antichamps et des champs et non pas par des entiers naturels. Si nous numérotions très provisoirement les (anti)champs de 1 à $2n$ au moyen d'une application $\delta: \mathcal{A} \mathcal{F} \cup \mathcal{F} \rightarrow [2n]$, nous avons $\varepsilon(\alpha) = \prod_{\substack{f,g \in \mathcal{A} \mathcal{F} \\ \delta(f) < \delta(g)}} \frac{\delta(\alpha(f)) - \delta(\alpha(g))}{\delta(f) - \delta(g)}$.

on fait complètement disparaître les compensations de signe dues à la présence du facteur $\varepsilon(\alpha)$. Par exemple, dans le cas extrême où tous les coefficients $C(f, g)$ sont égaux, le déterminant fermionique est trivialement nul, tandis que le membre de droite de l'équation (3.33) donne une majoration excessivement mauvaise en $(2n)!K^n$! Dès lors, la question est donc : peut-on donner une borne raisonnable sur le déterminant fermionique, qui tire parti des compensations de signe ? La réponse est affirmative, en utilisant un résultat classique d'algèbre linéaire : l'inégalité de Gram.

Bornes *a priori* sur le déterminant

L'approche précédente montre clairement que le développement du déterminant engendre trop de termes. C'est là un fait général dans les théories fermioniques : le développement naïf supprime les compensations dues aux différences de signe (qui sont la conséquence du principe de Pauli). On peut alors rechercher des bornes "globales sur le déterminant", qui tiennent implicitement compte de certaines compensations de termes de signes différents.

Borne de Gram

L'inégalité de Gram est un résultat très classique d'algèbre linéaire, mais souvent énoncé dans le cadre trop restreint des espaces vectoriels de dimension finie. Nous en donnons ici un énoncé valable dans un espace de Hilbert quelconque.

Théorème 3.1.1 *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert quelconque, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $(u_i)_{i \in [n]}$ et $(v_j)_{j \in [n]}$ deux familles de n vecteurs de \mathcal{H} . Alors on a :*

$$\left| \det_{(i,j) \in [n]^2} (\langle u_i, v_j \rangle) \right| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\| \cdot \|v_i\| .$$

Démonstration :

Si la famille $(u_i)_{i \in [n]}$ est liée alors l'équation $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$ admet une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non-triviale (c'est-à-dire différente de $(0, \dots, 0)$) dans \mathbb{C}^n donc, en multipliant scalairement à droite par chaque v_j , ce même n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est également solution du système d'équations :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u_i, v_j \rangle \right)_{j \in [n]} .$$

Cela signifie que les lignes de la matrice $(\langle u_i, v_j \rangle)_{(i,j) \in [n]^2}$ sont liées, donc $\det_{(i,j) \in [n]^2} (\langle u_i, v_j \rangle) = 0$ et l'inégalité est alors trivialement vérifiée. De façon analogue, si la famille $(v_j)_{j \in [n]}$ est liée, $\det_{(i,j) \in [n]^2} (\langle u_i, v_j \rangle) = 0$ car les colonnes de la matrice $(\langle u_i, v_j \rangle)_{(i,j) \in [n]^2}$ sont également liées. On s'intéresse donc au cas où $(u_i)_{i \in [n]}$ et $(v_j)_{j \in [n]}$ sont libres. On peut de plus supposer que ces deux familles engendrent le même

espace vectoriel, c'est-à-dire que $\text{Vect}\left((u_i)_{i \in [n]}\right) = \text{Vect}\left((v_j)_{j \in [n]}\right)$. En effet, si P est le projecteur orthogonal sur $E = \text{Vect}\left((u_i)_{i \in [n]}\right)$, alors on a :

$$\forall (i, j) \in [n]^2, \langle u_i, v_j \rangle = \langle u_i, P v_j \rangle .$$

Ceci résulte simplement du fait que $v_j = P v_j + (Id - P)v_j$ et $(Id - P)v_j \perp E$ donc $\langle u_i, v_j \rangle = \langle u_i, P v_j \rangle + \langle u_i, (Id - P)v_j \rangle = \langle u_i, P v_j \rangle$. Donc quitte à remplacer $(v_j)_{j \in [n]}$ par $(P v_j)_{j \in [n]}$, on peut supposer que $E = \text{Vect}\left((u_i)_{i \in [n]}\right) = \text{Vect}\left((v_j)_{j \in [n]}\right)$. L'idée de la démonstration est d'utiliser la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour orthonormaliser $(u_i)_{i \in [n]}$ et $(v_j)_{j \in [n]}$, de la façon suivante. On définit une famille de vecteurs $(\alpha_i)_{i \in [n]}$ par :

$$\begin{cases} \alpha_1 = u_1, \\ \text{pour } i \in [2, n], \alpha_i \text{ est le projeté orthogonal de } u_i \text{ sur } (\text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}))^\perp. \end{cases}$$

Ainsi, $\forall j \in [n]$, chaque α_j s'écrit : $\alpha_j = u_j + \sum_{i=1}^{j-1} M_{i,j} u_i$, où les coefficients $M_{i,j}$ sont déterminés de façon unique. Ils permettent de définir la matrice de passage de $(u_i)_{i \in [n]}$ à $(\alpha_i)_{i \in [n]}$ qui est donc une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. Par construction, la famille $(\alpha_i)_{i \in [n]}$ est orthogonale. Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de multiplier chaque α_i par $\frac{1}{\|\alpha_i\|}$. On pose donc $u'_i = \frac{1}{\|\alpha_i\|}$, ce qui revient à dire que la matrice de passage des α_i aux u'_i est $\text{diag}\left(\frac{1}{\|\alpha_1\|}, \dots, \frac{1}{\|\alpha_n\|}\right)$. Le passage de $(u_i)_{i \in [n]}$ à $(u'_i)_{i \in [n]}$ est donc donné par la matrice $M' = \text{diag}\left(\frac{1}{\|\alpha_1\|}, \dots, \frac{1}{\|\alpha_n\|}\right) \cdot M$. La matrice M' est donc triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $M'_{i,i} = \frac{1}{\|\alpha_i\|}$. On procède de façon tout à fait analogue pour orthonormaliser $(v_i)_{i \in [n]}$: on pose $\beta_1 = v_1$ et pour $i \geq 2$, on définit β_i comme le projeté orthogonal de v_i sur $(\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1}))^\perp$, et après avoir normalisé $(\beta_i)_{i \in [n]}$, on obtient une base orthonormée $(v'_i)_{i \in [n]}$. La matrice de passage N' de $(v_i)_{i \in [n]}$ à $(v'_i)_{i \in [n]}$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $N'_{i,i} = \frac{1}{\|\beta_i\|}$. Pour conclure, il reste à remarquer que la matrice $G' = (\langle u'_i, v'_j \rangle)_{(i,j) \in [n]^2}$ peut être interprétée comme la matrice de passage de $(u'_i)_{i \in [n]}$ à $(v'_i)_{i \in [n]}$ (puisque $v'_j = \sum_{i=1}^n \langle u'_i, v'_j \rangle u'_i$) donc elle est orthogonale et son déterminant vaut 1. Comme on a de plus :

$$\langle u'_i, v'_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n M'_{k,i} u_k, \sum_{\ell=1}^n N'_{\ell,j} v_\ell \right\rangle \quad (3.34)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \overline{M'_{k,i}} \langle u_k, v_\ell \rangle N'_{\ell,j} \quad (3.35)$$

$$= (\overline{M'^t} G N')_{i,j}, \quad (3.36)$$

on peut écrire l'égalité matricielle :

$$G' = \overline{M'^t} G N' .$$

Ainsi, $\det G' = \det(\overline{M'}^t \det G \det N')$, soit :

$$1 = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \|\alpha_i\|} \times \det G \times \frac{1}{\prod_{i=1}^n \|\beta_i\|},$$

et finalement :

$$\det G = \prod_{i=1}^n \|\alpha_i\| \|\beta_i\|.$$

Comme $\|\alpha_i\| \leq \|u_i\|$ et $\|\beta_i\| \leq \|v_i\|$, le résultat est bien établi :

$$\det_{(i,j) \in [n]^2} (\langle u_i, v_j \rangle) \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\| \|v_i\|.$$

■

Borne de Hadamard

Nous rappelons ici une autre inégalité classique permettant de majorer le déterminant d'une matrice. Il s'agit de l'inégalité de Hadamard, qui peut être vue très simplement comme un cas particulier de l'inégalité de Gram. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [n]^2}$ une matrice à coefficients complexes. Alors on a :

$$\det_{(i,j) \in [n]^2} (a_{ij}) \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Démonstration :

On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^n muni de sa base canonique $(e_j)_{j \in [n]} : e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Soit $(a_i)_{i \in [n]}$ la famille de vecteurs de \mathbb{C}^n correspondant aux lignes de la matrice $A : a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$. Les coefficients de la matrice A peuvent alors s'écrire : $a_{ij} = \langle a_i, e_j \rangle$ et d'après l'inégalité de Gram, on a :

$$\det A \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\| \|e_i\|,$$

et comme $\|a_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ et $\|e_i\| = 1$, le résultat est établi.

■

Application au contrôle de la série perturbative

Voyons maintenant en quoi les inégalités de Gram et de Hadamard peuvent nous aider pour le contrôle des séries perturbatives. En fait, pour pouvoir utiliser l'inégalité de Gram, nous devons écrire le propagateur $C(x, y)$ comme un certain produit scalaire dans un espace de Hilbert convenable. Nous avons vu que :

$$C(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^s} \pi T \sum_{k_0 \in \mathbb{M}_T} \int_{[-\pi, \pi]^r} dk_1 dk_2 \frac{e^{ik \cdot (y-x)}}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2}. \quad (3.37)$$

Cette forme intégrale suggère d'essayer d'écrire l'intégrande $\frac{e^{ik \cdot (y-x)}}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2}$ sous la forme d'un produit de deux fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{M}_T \times [-\pi, \pi]^2$. Or, en toute rigueur, ceci n'est pas possible à cause de la dépendance en k_0 . Il y a là une petite difficulté que l'on peut résoudre de la façon suivante. L'idée est d'exploiter le fait que la relation de dispersion $e(\vec{k}) = \cos k_1 + \cos k_2$ est uniformément bornée : $|e(\vec{k})| \leq 2$. Donc si E est une constante numérique assez grande (par exemple $E = 10$), on peut écrire :

$$\frac{1}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} = \frac{1}{ik_0 - E} + \frac{1}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} - \frac{1}{ik_0 - E} \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{ik_0 - E} + \frac{\cos k_1 + \cos k_2 - E}{(ik_0 - E)(ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2)}. \quad (3.39)$$

On peut alors réorganiser tout le développement en absorbant la quantité $\frac{1}{ik_0 - E}$ dans une redéfinition du potentiel chimique (ce qui est possible puisque E ne dépend pas de (k_1, k_2)), et en prenant

$$C_E(k) = \frac{\cos k_1 + \cos k_2 - E}{(ik_0 - E)(ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2)} \quad (3.40)$$

comme propagateur. Néanmoins, comme on peut s'en douter, l'usage du propagateur $C_E(k)$ au lieu de $C(k)$ est très incommode et risque de compliquer énormément les développements ultérieurs. En fait, comme cela a été discuté dans [FT90], [FT91] et [GLM02], on peut montrer que la théorie obtenue avec $C_E(k)$ est équivalente à celle formulée à l'aide de $C(k)$, à condition de mettre un cut-off convenable sur la variable k_0 . C'est cette approche que nous retiendrons par la suite. Ainsi, nous sous-entendons à partir de maintenant que $\sum_{k_0 \in \mathbb{M}_T}$ signifie en fait $\sum_{k_0 \in \mathbb{M}_T} \eta_T(k_0)$ où η_T est une fonction C^∞ à support compact qui s'annule lorsque $|k_0|$ est de l'ordre de $1/T$. C'est cette convention qui a été implicitement utilisée dans [Riv], [AMR05a] et [AMR05b].

Ce point étant précisé, revenons maintenant à notre borne de Gram. Puisque la somme sur k_0 comporte maintenant un nombre fini de termes, l'écriture de $C(x, y)$ sous la forme d'un produit scalaire ne pose plus aucune difficulté. On a par exemple :

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \pi T \sum_{k_0 \in \mathbb{M}_T} \int_{[-\pi, \pi]^2} dk_1 dk_2 \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{k_0^2 + (\cos k_1 + \cos k_2)^2}} \cdot \frac{-(ik_0 + \cos k_1 + \cos k_2)e^{ik \cdot y}}{\sqrt{k_0^2 + (\cos k_1 + \cos k_2)^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \pi T \sum_{k_0 \in \mathbb{M}_T} \int_{[-\pi, \pi]^2} dk_1 dk_2 F_x(k) G_y(k) \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec

$$F_x(k) = \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{k_0^2 + (\cos k_1 + \cos k_2)^2}} \quad (3.42)$$

et

$$G_y(k) = \frac{-(ik_0 + \cos k_1 + \cos k_2)e^{ik \cdot y}}{\sqrt{k_0^2 + (\cos k_1 + \cos k_2)^2}} \quad (3.43)$$

Les normes L^2 des fonctions F_x et G_y peuvent être majorées par une même constante K indépendante de x , y et T :

$$\|F_x\| \leq K \text{ et } \|G_y\| \leq K, \quad (3.44)$$

si bien que la borne de Gram peut être immédiatement appliquée au déterminant fermionique pour donner :

$$\left| \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}} (C(f,g)) \right| \leq \left(\prod_{f \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}} \|F_{x_f}\| \right) \left(\prod_{g \in \mathcal{F}} \|G_{x_g}\| \right) \quad (3.45)$$

$$\leq K^{2n}. \quad (3.46)$$

Le coefficient d'ordre n dans le développement de la fonction de partition $Z(V)$ peut alors être majoré par :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n!} 2^n V^n K^{2n}. \quad (3.47)$$

On voit que la borne de Gram nous a permis de majorer le déterminant sans faire apparaître de nombreux termes. Cette borne sur $|u_n|$ nous permet de vérifier une propriété que nous aurions pu prévoir *a priori* : pour $T > 0$ fixée et dans un volume fini Λ fini et fixé, $Z(V)$ est analytique en λ sans restriction (rayon de convergence infini). En fait, ceci était évident à partir de l'expression :

$$Z(V) = \text{Tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) \quad (3.48)$$

puisque dans un volume fini, \hat{H} et \hat{N} sont trivialement des opérateurs bornés. Toute la difficulté étant justement d'étudier la limite $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2$, il est clair que la borne (3.47) ne convient pas à cause du facteur V^n . Notons que la borne de Hadamard conduirait au même type d'expression, impuissante à étudier la limite thermodynamique.

3.2 Développement à l'aide d'une formule d'interpolation

Les deux approches précédentes, trop naïves toutes les deux, nous obligent à envisager d'autres méthodes. En fait, elles sont toutes les deux extrêmes en ce sens que la première, en développant complètement le déterminant, fait apparaître des propagateurs entre tous les vertex, donc permet en principe d'effectuer les intégrations $\int_{V^n} \prod_{v=1}^n dx_v$ dans la limite thermodynamique, mais se heurte au problème bien connu du « trop grand nombre » de graphes de Feynman, tandis que la seconde tire parti

du principe de Pauli mais ne permet pas d'utiliser la décroissance du propagateur pour effectuer les intégrales $\int_{V^n} \prod_{v=1}^n dx_v$, donc ne permet pas d'étudier la limite thermodynamique.

En fait, nous voudrions trouver une technique intermédiaire, qui développe suffisamment le déterminant fermionique pour faire explicitement apparaître des propagateurs dont on pourra exploiter la décroissance, tout en laissant une partie du déterminant non développée. Pour être plus précis, nous aimerions avoir une expression du type :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)) = \sum_L \left(\prod_{\ell \in L} C(x_\ell, y_\ell) \right) \det_{\text{left}, L} (C(f,g)), \quad (3.49)$$

où L décrit une certaine classe d'ensemble de lignes connectant tous les vertex. Pour le moment, cette idée n'est pas encore formalisée, mais nous voyons immédiatement les problèmes que nous devons résoudre, qui ne sont que des reformulations des difficultés qui ont fait échouer les deux méthodes naïves précédentes :

- les ensembles L ne doivent pas être « trop nombreux »,
- le déterminant restant doit pouvoir être borné par une inégalité de type Gram.

Ce développement intermédiaire peut être fourni grâce à une formule inductive fondée sur le « théorème fondamental de l'analyse » : si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 alors $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t) dt$.

Philosophie générale

En effet, imaginons que certains propagateurs $C(f_1, g_1)$ (pour (f_1, g_1) appartenant à un certain sous-ensemble \mathcal{C}_1 de $\mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}$) du déterminant fermionique soient interpolés linéairement à l'aide d'un paramètre $s_1 \in [0, 1]$: ils sont remplacés par $C(f_1, g_1)(s_1) = s_1 C(f_1, g_1)$, de sorte que $C(f_1, g_1) = C(f_1, g_1)(s_1) \Big|_{s_1=1}$. Cette interpolation en s_1 se répercute sur le déterminant fermionique, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)) &= \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)(s_1)) \Big|_{s_1=1} \\ &= \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)(s_1)) \Big|_{s_1=0} + \int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)(s_1)). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nous rappelons ici que la dérivée d'un déterminant dont les coefficients dépendent d'un paramètre s'écrit généralement :

$$\frac{d}{ds_1} \det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} (C(f,g)(s_1)) = \sum_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} \frac{d C(f,g)(s_1)}{ds_1} \frac{\partial \det (C(f,g)(s_1))}{\partial C(f,g)} \quad (3.51)$$

où $\frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1) \right)}{\partial C(f,g)}$ est une notation commode pour désigner le mineur du déterminant fermionique correspondant à la position (f,g) . En l'occurrence, $\frac{d C(f,g)(s_1)}{ds_1} = 0$ dès que $C(f,g)$ n'a pas été interpolé (c'est-à-dire $(f,g) \notin \mathcal{C}_1$) et comme l'interpolation en s_1 est linéaire, $\frac{d C(f,g)(s_1)}{ds_1} = C(f,g)$ si $(f,g) \in \mathcal{C}_1$. Ainsi, on a :

$$\frac{d}{ds_1} \det_{(f,g) \in \mathcal{A}\mathcal{F} \times \mathcal{F}} \left(C(f,g)(s_1) \right) = \sum_{(f_1,g_1) \in \mathcal{C}_1} C(f_1,g_1) \frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1) \right)}{\partial C(f,g)} \quad (3.52)$$

d'où :

$$\det \left(C(f,g) \right) = \det \left(C(f,g)(s_1) \right) \Big|_{s_1=0} + \sum_{(f_1,g_1) \in \mathcal{C}_1} \int_0^1 ds_1 C(f_1,g_1) \frac{\partial \det \left(C(f_1,g_1)(s_1) \right)}{\partial C(f_1,g_1)}. \quad (3.53)$$

On voit d'emblée que cette technique de développement est à la fois très simple et très souple d'utilisation puisqu'on peut choisir l'ensemble \mathcal{C}_1 comme on le souhaite (\mathcal{C}_1 n'est pas nécessairement de la forme $A \times B$ avec $A \subset \mathcal{A}\mathcal{F}$ et $B \subset \mathcal{F}$). Cette procédure peut être itérée : chaque mineur $\frac{\partial \det \left(C(f_1,g_1)(s_1) \right)}{\partial C(f_1,g_1)}$ peut à son tour être interpolé grâce à un paramètre $s_2 \in [0,1]$. Pour cela, il suffit de choisir un sous-ensemble $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}\mathcal{F} \times \mathcal{F} \setminus \{(f_1,g_1)\}$, puis de remplacer chaque $C(f_2,g_2)(s_1)$, où $(f_2,g_2) \in \mathcal{C}_2$ par $C(f_2,g_2)(s_1,s_2) = s_2 C(f_2,g_2)(s_1)$. On peut alors écrire :

$$\frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1) \right)}{\partial C(f_1,g_1)} = \frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1,s_2) \right)}{\partial C(f_1,g_1)} \Big|_{s_2=1} \quad (3.54)$$

$$= \frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1,s_2) \right)}{\partial C(f_1,g_1)} \Big|_{s_2=0} + \int_0^1 ds_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \left[\frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1,s_2) \right)}{\partial C(f_1,g_1)} \right] \quad (3.55)$$

Il est à noter qu'en fait le sous-ensemble $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ de propagateurs interpolés à la deuxième étape peut être choisi en fonction de chaque $(f_1,g_1) \in \mathcal{C}_1$ d'une façon différente. Il serait donc plus juste de noter $\mathcal{C}_2(f_1,g_1)$ l'ensemble des propagateurs interpolés par s_2 , pour chaque terme de la somme $\sum_{(f_1,g_1) \in \mathcal{C}_1}$. A cette deuxième étape du développement, on a donc obtenu l'expression suivante pour le déterminant fermionique :

$$\begin{aligned} \det \left(C(f,g) \right) &= \det \left(C(f,g)(s_1) \right) \Big|_{s_1=0} + \sum_{(f_1,g_1) \in \mathcal{C}_1} \int_0^1 ds_1 C(f_1,g_1) \frac{\partial \det \left(C(f,g)(s_1,s_2) \right)}{\partial C(f_1,g_1)} \Big|_{s_2=0} \\ &+ \sum_{(f_1,g_1) \in \mathcal{C}_1} \sum_{(f_2,g_2) \in \mathcal{C}_2(f_1,g_1)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 C(f_1,g_1) C(f_2,g_2)(s_1) \frac{\partial^2 \det \left(C(f,g)(s_1,s_2) \right)}{\partial C(f_2,g_2) \partial C(f_1,g_1)}. \quad (3.56) \end{aligned}$$

On peut naturellement poursuivre le développement à un ordre quelconque, qui doit bien sûr rester inférieur ou égal à $2n$, l'ordre du déterminant fermionique. Cette stratégie de développement est très générale et peut être appliquée à des quantités caractéristiques de systèmes à grand nombre de particules, telles que la fonction de partition ou les fonctions de Schwinger.

Néanmoins, le lecteur remarquera que l'écriture des formules obtenues devient très vite assez lourde. De plus, il est clair qu'un tel développement ne peut présenter un intérêt que si les règles qui définissent les ensembles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2(f_1, g_1), \mathcal{C}_3((f_1, g_1), (f_2, g_2)), \dots$, permettent effectivement de mieux contrôler la série perturbative. On voit que chaque dérivation par rapport à un paramètre d'interpolation permet de "sortir" explicitement un propagateur du déterminant (au prix d'une somme sur les propagateurs interpolés). C'est précisément à l'aide de ces propagateurs que l'on entend borner les intégrales sur les positions spatiales des vertex. *A priori*, un seul propagateur est suffisant pour intégrer sur un vertex donné ; on s'attend donc à ce qu'il soit inutile (et même dangereux) d'interpoler un deuxième propagateur entre v et v' si cela a déjà été fait. De plus, nous devons faire en sorte que le déterminant restant, $\frac{\partial^p \det \left(C(f, g)(s_1, \dots, s_p) \right)}{\partial C(f_1, g_1) \dots \partial C(f_p, g_p)}$, soit compatible avec la borne de Gram. Reprenons donc ce développement de façon plus précise, en examinant particulièrement ces deux points.

Développement inductif « à la Battle-Federbush »

On peut considérer, de façon légèrement imagée, le déterminant comme "l'énergie d'interaction de n objets, en l'occurrence les vertex. Chacun de ces objets interagit avec tous les autres. On peut donc essayer de représenter ces objets en interaction de la façon suivante.

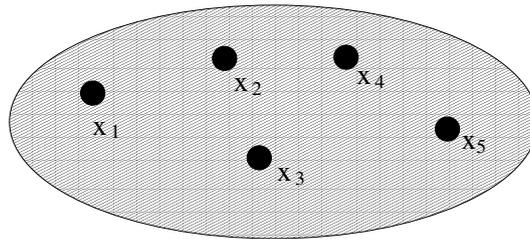


FIG. 3.1: n vertex en interaction

On choisit un premier vertex de référence (par exemple x_1), et grâce à une interpolation, nous allons nous ramener à une situation où x_1 est découplé des autres vertex. Pour cela, on pose :

$$\begin{cases} C(f, g)(s_1) = s_1 C(f, g) \text{ si } (f, g) \text{ connecte } x_1 \text{ à l'extérieur }^5, \\ = C(f, g) \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.57)$$

On obtient donc :

$$\det \left(C(f, g) \right) = \det \left(C(f, g)(s_1) \right) \Big|_{s_1=0} + \int_0^1 ds_1 \sum_{\substack{(f_1, g_1) \text{ connectant} \\ x_1 \text{ à } \{x_2, \dots, x_n\}}} C(f_1, g_1) \frac{\partial \det \left(C(f, g)(s_1) \right)}{\partial C(f_1, g_1)}, \quad (3.58)$$

ce qui peut être représenté par la figure suivante :

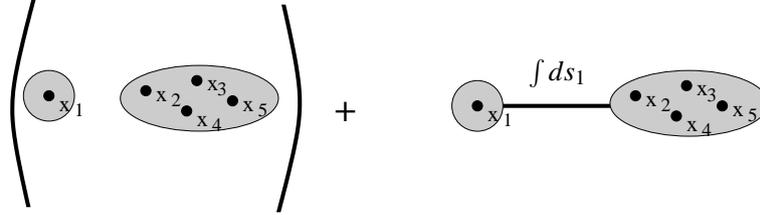


FIG. 3.2: La première étape du développement

On remarque que le terme $\det \left(C(f, g)(s_1) \right) \Big|_{s_1=0}$ correspond à un découplage de x_1 et des autres vertex. Ce déterminant peut donc se factoriser : $\det \left(C(f, g)(s_1) \right) \Big|_{s_1=0} = \det_{(f, g) \in \mathcal{F}(x_1)} \times \det_{(f, g) \in \mathcal{F}(x_2, \dots, x_n)}$, où nous avons noté $\mathcal{F}(x_1)$ l'ensemble des (f, g) tels que $x_f = x_g = x_1$, et $\mathcal{F}(x_2, \dots, x_n)$ celui des (f, g) tels que x_f et x_g sont éléments de $\{x_2, \dots, x_n\}$. Chaque mineur $\frac{\partial \det \left(C(f, g)(s_1) \right)}{\partial C(f_1, g_1)}$ est ensuite interpolé d'une façon spécifique, dépendant de (f_1, g_1) . Soit x_{v_1} le vertex lié à x_1 par (f_1, g_1) . On pose :

$$\begin{cases} C(f, g)(s_1, s_2) = s_2 C(f, g)(s_1) \text{ si } (f, g) \text{ connecte } \{x_1, x_{v_1}\} \text{ à l'extérieur,} \\ = C(f, g)(s_1) \text{ sinon.} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \det \left(C(f, g) \right) &= \det \left(C(f, g)(s_1) \right) \Big|_{s_1=0} + \int_0^1 ds_1 \sum_{\substack{(f_1, g_1) \text{ connectant} \\ x_1 \text{ à l'extérieur}}} C(f_1, g_1) \frac{\partial \det \left(C(f, g)(s_1, s_2) \right)}{\partial C(f_1, g_1)} \Big|_{s_2=0} \\ &+ \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \sum_{\substack{(f_1, g_1) \text{ connectant} \\ x_1 \text{ à l'extérieur}}} \sum_{\substack{(f_2, g_2) \text{ connectant} \\ \{x_1, x_{v_1}\} \text{ à l'extérieur}}} C(f_1, g_1) C(f_2, g_2)(s_1) \frac{\partial^2 \det \left(C(f, g)(s_1, s_2) \right)}{\partial C(f_2, g_2) \partial C(f_1, g_1)}, \quad (3.59) \end{aligned}$$

Là encore, on peut remarquer que le mineur $\frac{\partial \det \left(C(f, g)(s_1, s_2) \right)}{\partial C(f_1, g_1)} \Big|_{s_2=0}$ peut être factorisé :

$$\frac{\partial \det \left(C(f, g)(s_1, s_2) \right)}{\partial C(f_1, g_1)} \Big|_{s_2=0} = \det_{\substack{(f, g) \in \mathcal{F}(x_1, x_{v_1}) \\ (f, g) \neq (f_1, g_1)}} \left(C(f, g)(s_1) \right) \times \det_{(f, g) \in \mathcal{F}(\mathcal{V}_n \setminus \{x_1, x_{v_1}\})} \left(C(f, g) \right).^6$$

⁶Nous avons noté \mathcal{V}_n l'ensemble de tous les vertex : $\mathcal{V}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Il n'y a pas de problème de signe puisqu'on déplace toujours un bloc du même nombre de lignes et de colonnes, ce qui donne un nombre pair de transpositions. On peut sans difficulté de principe poursuivre le développement jusqu'à l'ordre $n - 1$ et écrire :

$$\det(C(f, g)) = \sum_{r=0}^{n-1} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_r \sum_{\substack{(f_1, g_1) \text{ connectant} \\ x_1 \text{ à l'extérieur}}} \sum_{\substack{(f_2, g_2) \text{ connectant} \\ \{x_1, x_{v_1}\} \text{ à l'extérieur}}} \dots \sum_{\substack{(f_r, g_r) \text{ connectant} \\ \{x_1, x_{v_1}, \dots, x_{v_{r-1}}\} \\ \text{à l'extérieur}}} C(f_1, g_1) C(f_2, g_2)(s_1) \dots C(f_r, g_r)(s_1, \dots, s_{r-1}) \left. \frac{\partial^r \det(C(f, g)(s_1, \dots, s_r))}{\partial C(f_r, g_r) \dots \partial C(f_1, g_1)} \right|_{s_{r+1}=0} \quad (3.60)$$

avec les conventions naturelles que le terme $r = 0$ est simplement $\det(C(f, g)(s_1)) \Big|_{s_1=0}$ et que lorsque

$r = n - 1$, la prescription $s_{r+1} = 0$ pour $\frac{\partial^r \det(C(f, g)(s_1, \dots, s_r))}{\partial C(f_r, g_r) \dots \partial C(f_1, g_1)}$ doit être supprimée.

Ce développement est connu sous le nom de développement « à la Battle-Federbush » dans la littérature (voir [BF84] et [Bry86]). Le lecteur peut facilement se rendre compte que chaque terme du développement, correspondant à un système de paires $(f_1, g_1), \dots, (f_r, g_r)$ peut être représenté par un graphe qui a la particularité de ne contenir aucune boucle, par construction : chaque paire (f_k, g_k) définit deux vertex distincts que l'on peut relier par un lien. La formule (3.60) peut donc s'interpréter comme une formule d'arbre. Observons toutefois que les arbres considérés ici ne sont pas astreints à connecter tous les vertex ; ceci provient du fait que nous avons considéré jusqu'à présent le déterminant fermionique dans sa globalité, en prenant en compte ses parties non-connexes. Si on se limitait à sa partie connexe $\det(C(f, g))_c$, on pourrait l'exprimer comme une somme sur les arbres connectant tous les vertex. De plus, l'intérêt de ce développement est que le déterminant obtenu à la fin est compatible avec la borne de Gram. Ainsi, on peut écrire :

$$\left| \frac{\partial^{n-1} \det(C(f, g)(s_1, \dots, s_{n-1}))}{\partial C(f_{n-1}, g_{n-1}) \dots \partial C(f_1, g_1)} \right| \leq K^{n+1}, \quad (3.61)$$

uniformément par rapport aux paramètres s_1, \dots, s_{n-1} . Ceci est dû au fait qu'à chaque étape, ces paramètres définissent un découplage convexe au sens de [Bry86].

Développement à l'aide d'une formule de forêt

Comme on l'a vu, la formule (3.60) exprimant le déterminant fermionique a été obtenue « à la main » de façon inductive. Ceci est en soi un peu désagréable car il serait beaucoup plus commode de disposer d'une formule générale permettant d'écrire directement le résultat. De plus, le développement inductif précédent n'est pas vraiment canonique puisqu'il repose sur le choix d'un vertex de départ

privilegié. Ces inconvénients peuvent être résolus par l'usage d'une formule de forêt que nous exposons maintenant. Pour avoir plus de détails à ce sujet, le lecteur intéressé pourra consulter [AR95].

Formule de forêt de Taylor-Brydges-Kennedy

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, $[n]$ l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{P}_2([n])$ l'ensemble des paires de $[n]$ (de cardinal $n(n-1)/2$). Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^{\mathcal{P}_2([n])}$, à valeurs complexes, et de classe C^∞ . On note $\mathbb{1}$ l'élément de $\mathbb{R}^{\mathcal{P}_2([n])}$ dont toutes les composantes valent 1 : $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)$. On a alors la formule suivante :

$$F(\mathbb{1}) = \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F} \\ \text{sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \frac{\partial F}{\partial w_\ell} \right) \left(X^{\mathcal{F}} \left((w_\ell)_{\ell \in \mathcal{F}} \right) \right)$$

où $X^{\mathcal{F}} \left((w_\ell)_{\ell \in \mathcal{F}} \right)$ est un élément de $\mathbb{R}^{\mathcal{P}_2([n])}$, dépendant de la famille de variables d'intégration $(w_\ell)_{\ell \in \mathcal{F}}$, défini par ses composantes :

$$\begin{cases} X_{\{i,j\}}^{\mathcal{F}} \left((w_\ell)_{\ell \in \mathcal{F}} \right) = 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ ne sont pas connectés par } \mathcal{F} , \\ = \inf \{ w_\ell, \ell \in P_{\mathcal{F}}(i, j) \} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont connectés par } \mathcal{F} , \end{cases}$$

où $P_{\mathcal{F}}(i, j)$ est l'unique chemin de \mathcal{F} joignant i à j . Cette formule particulièrement élégante nous rend capable de développer le déterminant fermionique de la façon suivante : chaque propagateur $C(f, g)$ est remplacé par $w_{\{i,j\}} C(f, g)$ où i et j sont les indices de vertex respectifs des champs f et g , et les $w_{\{i,j\}}$ sont une famille de paramètres réels indexés par $\mathcal{P}_2([n])$. Le déterminant fermionique devient alors une fonction des $w_{\{i,j\}}$, et on peut écrire directement, par application de la formule des forêts de Taylor-Brydges-Kennedy :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} \left(C(f, g) \right) = \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F} \\ \text{sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial w_\ell} \det \left(w_{\{v(f), v(g)\}} C(f, g) \right) \right) \Big|_{w_{\{i,j\}} = X_{\{i,j\}}^{\mathcal{F}}(\{w_\ell\})} ,$$

où $v(f)$ et $v(g)$ désignent les indices de vertex des champs f et g .

Pour aller plus loin, il suffit d'explicitier les dérivées partielles $\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial w_\ell} \det$. Pour cela, examinons d'abord le cas d'une dérivée simple : $\frac{\partial \det}{\partial w_{\{i,j\}}}$. Il est facile de voir que $w_{\{i,j\}}$ apparaît exactement huit fois dans le déterminant interpolé. En effet, si on fixe $\{i, j\} \in \mathcal{P}_2([n])$, on se rend compte que l'ensemble des $(f, g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ tels que $\{v(f), v(g)\} = \{i, j\}$ est exactement :

$$\{(x_i, \uparrow; x_j, \uparrow), (x_i, \uparrow; x_j, \downarrow), (x_i, \downarrow; x_j, \uparrow), (x_i, \downarrow; x_j, \downarrow), (x_j, \uparrow; x_i, \uparrow), (x_j, \uparrow; x_i, \downarrow), (x_j, \downarrow; x_i, \uparrow), (x_j, \downarrow; x_i, \downarrow)\}$$

Ces huit possibilités correspondent au choix d'attribuer l'un des indices i ou j à l'antichamp f ou au champ g , puis au choix d'une valeur de spin pour chaque f et g . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial w_{\{i,j\}}} &= \sum_{a,b \in \{\uparrow, \downarrow\}} C(x_i, a; x_j, b) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial C(x_i, a; x_j, b)} \\ &+ \sum_{a,b \in \{\uparrow, \downarrow\}} C(x_j, a; x_i, b) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial C(x_j, a; x_i, b)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

où, là encore, $\frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial C(x_{i(j)}, a; x_{j(i)}, b)}$ est une notation commode pour représenter le mineur relatif à la position $(x_{i(j)}, a; x_{j(i)}, b)$. Compte tenu du symbole de Kronecker $\delta_{a(f),a(g)}$ dans l'expression du propagateur $C(f,g)$, il est clair que dès que $a \neq b$, $C(x_{i(j)}, a; x_{j(i)}, b) = 0$, donc l'expression précédente peut être simplifiée en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial w_{\{i,j\}}} &= \sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} C(x_i, x_j) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial C(x_i, a; x_j, a)} \\ &+ \sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} C(x_j, x_i) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\partial C(x_j, a; x_i, a)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Cette remarque permet en outre d'écrire simplement le mineur en position $(x_i, a; x_j, a)$ comme $\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \setminus \{(x_i, a)\} \times \mathcal{F} \setminus \{(x_j, a)\}}$: autrement dit, il n'y a pas à se soucier de la présence éventuelle d'un signe -1 . Pour alléger les expressions précédentes, nous introduisons quelques notations. Nous appellerons lien orienté un couple (ℓ, a) où ℓ est un couple (i, j) d'éléments de $[n]$ tel que $i \neq j$, et $a \in \{\uparrow, \downarrow\}$. Si (ℓ, a) est un lien orienté avec $\ell = \{i, j\}$, nous dirons que la paire (non-orientée) $\{i, j\}$ est le support de (ℓ, a) , et nous noterons $\{i, j\} = \text{supp}(\ell, a)$. Enfin nous appellerons forêt orientée tout nsemble de lien orientés dont les supports sont tous distincts et forment un forêt sur $[n]$. On peut alors réécrire le développement du déterminant fermionique de façon complètement explicite :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \mathcal{F} \times \mathcal{F}} \left(C(f,g) \right) = \sum_{\substack{\text{forêts orientées} \\ \mathcal{F} \text{ sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \int_0^1 dw_{\text{supp}(\ell)} \right) \prod_{\ell \in \mathcal{F}} C(f(\ell), g(\ell)) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f),v(g)\}} C(f,g) \right)}{\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \partial C(f(\ell), g(\ell))}.$$

Au stade où nous en sommes, résumons-nous : nous avons exprimé la fonction de partition du modèle

grâce à la série formelle en λ suivante :

$$Z(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} dx_1 \dots dx_n \sum_{\substack{\text{forêts orientées} \\ \mathcal{F} \text{ sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \int_0^1 dw_{\text{supp}(\ell)} \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f), v(g)\}} C(f, g) \right)}{\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \partial C(f(\ell), g(\ell))} \Bigg|_{w_{\{i,j\}} = X^{\mathcal{F}}_{\{i,j\}}(\{w_{\{i,j\}}\})} . \quad (3.64)$$

On voudrait en déduire une expression pour la pression $\log Z(V)$. Il est bien connu en théorie perturbative des champs que si la fonction de partition $Z(V)$ est donnée par la somme des amplitudes de tous les graphes de Feynman possibles, la pression $\log Z(V)$ est donnée par la somme des amplitudes des graphes **connexes**. Le lecteur ne sera donc pas surpris de constater que si l'expression de $Z(V)$ fait intervenir des sommes sur des forêts (orientées), celle de $\log Z(V)$ comporte une somme sur les forêts connexes (plus précisément : sur les forêts orientées dont le support est connexe). Autrement dit, $\log Z(V)$ s'écrit comme une série formelle dont chaque coefficient est une somme sur les arbres orientés sur $[n]$, c'est-à-dire sur les forêts orientées dont le support est un arbre sur $[n]$:

$$\log Z(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} dx_1 \dots dx_n \sum_{\substack{\text{arbres orientés} \\ \mathcal{F} \text{ sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \int_0^1 dw_{\text{supp}(\ell)} \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \frac{\partial \det \left(w_{\{v(f), v(g)\}} C(f, g) \right)}{\prod_{\ell \in \mathcal{F}} \partial C(f(\ell), g(\ell))} \Bigg|_{w_{\{i,j\}} = X^{\mathcal{F}}_{\{i,j\}}(\{w_{\{i,j\}}\})} . \quad (3.65)$$

3.3 Le problème de la surface de Fermi

La formule de forêt de Taylor-Brydges-Kennedy est sans doute à l'heure actuelle le moyen le plus direct d'écrire un développement du déterminant fermionique qui explicite le minimum de propagateurs pour connecter tous les vertex, tout en préservant la borne de Gram. Néanmoins, ce développement est insuffisant pour établir l'analyticité du modèle à volume infini dans un domaine $|\lambda| \leq \frac{\text{Cte}}{\log^2 T}$. Pour aller plus loin, nous aurons besoin d'utiliser un outil fondamental complètement occulté jusqu'à présent : l'analyse multi-échelles. Comme nous allons le voir, cet outil n'est rien d'autre que l'implémentation dans un cadre constructif des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation ([Wil71a], [Wil71b], [Wil75]). L'aspect fondamental formulé par Wilson est qu'une théorie des champs générale doit être analysée en termes **d'échelles d'énergie**. Autrement dit, nous allons devoir analyser plus finement notre espace de Fourier. En effet, le propagateur $C(x)$ a de mauvaises propriétés de décroissance dans l'espace réel du fait de la singularité définie par $ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2 = 0$. Nous avons vu qu'en fait k_0 n'est

jamais nul à température $T > 0$ puisque k_0 décrit l'ensemble des fréquences de Matsubara, d'où $|k_0| > \pi T$. Néanmoins, pour se représenter le problème, il est utile de supposer provisoirement que k_0 est une variable continue pouvant éventuellement prendre la valeur 0. La singularité du propagateur dans l'espace de Fourier est appelée **surface de Fermi**, et nous la noterons \mathcal{F} . $k \in \mathcal{F}$ est donc équivalent à :

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ \cos k_1 + \cos k_2 = 0, \end{cases} \quad (3.66)$$

soit :

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 + k_2 = \pm\pi[4\pi] \\ k_1 - k_2 = \pm\pi[4\pi]. \end{cases} \quad (3.67)$$

En considérant (k_1, k_2) non pas comme un élément de $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ mais comme un élément de la première zone de Brillouin $[-\pi, \pi]^2$, on obtient :

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 + k_2 = \pm\pi \\ k_1 - k_2 = \pm\pi. \end{cases} \quad (3.68)$$

Ainsi dans le plan $k_0 = 0$, la surface de Fermi est la réunion de quatre segments de droite formant rigoureusement un carré. La figure (3.3) donne une représentation de cette surface de Fermi.

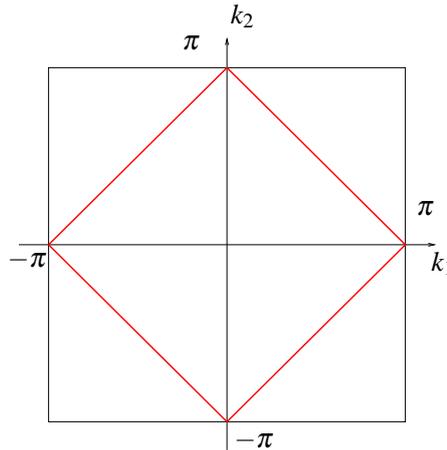


FIG. 3.3: La surface de Fermi dans la première zone de Brillouin

Nous insistons sur le fait que cette représentation est valable dans la première zone de Brillouin. En réalité, comme nous l'avons dit, (k_1, k_2) doit être considéré comme appartenant au tore $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$,

si bien que les « coins » $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$ d'une part doivent être identifiés, de même que les « coins » $(0, \pi)$ et $(0, -\pi)$ d'autre part. La surface de Fermi est donc singulière en ce sens qu'il ne s'agit pas d'une courbe C^1 : aux coins du carré, les vecteurs tangents n'existent pas (tout au plus on peut définir des vecteurs tangents à gauche et à droite). Dans la littérature, ces coins constituent des singularités de Van Hove. Il semblerait que celles-ci aient une importance capitale pour la physique du modèle. En effet, on a vu au chapitre 1 qu'on s'attendait à ce qu'un système bidimensionnel d'électrons puisse être décrit selon la théorie de Landau des liquides de Fermi. Or, le résultat majeur de la présente thèse est précisément que le critère de Salmhofer ([Sal98]) pour les liquides de Fermi est violé. Enfin, remarquons que la présence de ces points non-réguliers sur la surface de Fermi est très particulière au cas du demi-remplissage. En effet, dès que le potentiel chimique est différent de 2, elle est définie par :

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ \cos k_1 + \cos k_2 = 2 - \mu . \end{cases} \quad (3.69)$$

Les singularités disparaissent alors complètement, et la surface de Fermi prend alors l'allure suivante :

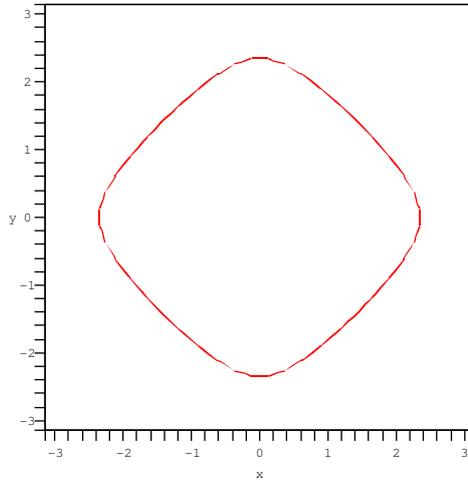


FIG. 3.4: Surface de Fermi avec $2 - \mu \neq 0$

Cette surface de Fermi est d'une importance capitale car c'est elle qui va nous guider dans l'analyse du propagateur que nous voulons mener. Les idées exprimées dans l'article historique de Wilson impliquent très généralement d'étudier une théorie des champs selon les différentes échelles d'énergie possibles. En fait, dans notre contexte, la formulation de cette idée doit être légèrement modifiée : ce qui conditionne la physique du modèle n'est pas la hiérarchie des différentes échelles d'énergie considérées dans l'absolu, mais *les échelles d'énergie comptées à partir de la singularité du propagateur*,

c'est-à-dire de la surface de Fermi. Néanmoins, comme nous allons le voir, tirer précisément parti de cette grande idée est difficile. C'est là l'essence des problèmes (et donc l'intérêt) liés aux singularités. Historiquement, les théories des champs ont tout d'abord étudié des modèles ayant des singularités ponctuelles. L'étude de modèles avec des singularités étendues est relativement récente ([DR00a] et [DR00b]), et est nettement plus difficile. Les modèles fermioniques apparaissent donc naturellement comme un approfondissement de ces idées. La singularité du propagateur, à savoir la surface de Fermi, bien que non ponctuelle, reste néanmoins bornée. Ceci est une conséquence du fait que la première zone de Brillouin est elle-même de taille finie. Un approfondissement de ces questions pourrait consister en l'étude de modèles où la singularité est non bornée. C'est le cas de nombreuses théories des champs formulées dans l'espace de Minkowski. Par exemple, pour la théorie ϕ^4 minkowskienne, le propagateur dans l'espace de Fourier est $\frac{1}{k^2 - m^2}$ où k^2 est la norme minkowskienne : $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - \dots - k_d^2$, si bien que l'ensemble défini par $k^2 - m^2 = 0$ est une surface non bornée, l'hyperboloïde de masse. A notre connaissance, aucune étude constructive de ce genre de modèle n'a été entreprise jusqu'à présent. La voie standard est de formuler une théorie euclidienne, pour ensuite tenter de définir la théorie minkowskienne par prolongement analytique (voir [OS73]). Cependant, ces approches ne sont pas complètement satisfaisantes, et il serait de loin préférable d'avoir une approche minkowskienne directe qui fait encore défaut aujourd'hui.

Pour aborder le problème de la singularité étendue, commençons par découper le propagateur, selon la proximité de (k_0, k_1, k_2) à la surface de Fermi, ou autrement dit selon l'ordre de grandeur de $|ik_0 - \cos(k_1) - \cos(k_2)|$. Une façon commode de faire ceci est de découper \mathbb{R}^+ à l'aide d'une progression géométrique de raison $M > 1$, par exemple en écrivant :

$$\mathbb{R}^{+*} = [M, +\infty[\cup \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [M^{-(i+1)}, M^{-i}[\right), \quad (3.70)$$

l'intervalle $[M, +\infty[$ correspondant à la tranche de moment d'indice $i = 0$, tandis que les intervalles $[M^{-(i+1)}, M^{-i}[$ correspondent aux tranches d'indice $i \geq 1$. L'égalité (3.70) définit *a priori* une partition infinie de \mathbb{R}^{+*} , mais cet infini est artificiel car, comme nous l'avons déjà indiqué, $|ik_0 - \cos(k_1) - \cos(k_2)|$ ne peut jamais être rigoureusement nul si $T > 0$. En fait, on a : $|ik_0 - \cos(k_1) - \cos(k_2)| > \pi T$, ce qui implique que dès que $M^{-(i+1)} < 2\pi T$, le découpage peut être arrêté. Nous sommes donc amenés à considérer uniquement :

$$[M, +\infty[\cup \left(\bigcup_{i=1}^{i_{\max}(T)} [M^{-(i+1)}, M^{-i}[\right), \quad (3.71)$$

avec $i_{\max}(T) = \max_{i \in \mathbb{N}^*} \{M^{-i} > \pi T\}$, d'où :

$$i_{\max}(T) = E \left(\frac{|\ln \pi T|}{\ln M} \right) \quad (3.72)$$

en supposant $\pi T \leq 1$. On pose alors :

$$C(k) = \sum_{i=0}^{i_{\max}(T)} C_i(k), \quad (3.73)$$

avec

$$\begin{cases} C_0(k) = 1_{\{E(k) \in [M, +\infty[\}}(k) C(k) \\ C_i(k) = 1_{\{E(k) \in [M^{-(i+1)}, M^{-i}[\}}(k) C(k) \text{ pour } 1 \leq i \leq i_{\max}(T). \end{cases} \quad (3.74)$$

On se propose alors d'établir des propriétés de décroissance pour le propagateur $C_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^3k e^{ik \cdot x} C_i(k)$. Pour cela, il serait commode de pouvoir profiter d'éventuelles propriétés de régularité des fonctions $C_i(k)$ (du moins par rapport aux variables continues k_1 et k_2) en procédant à des intégrations par partie.

Cependant, le découpage introduit est « dur » car les fonctions caractéristiques $1_{[M^{-(i+1)}, M^{-i}[}$ ne sont même pas continues. Nous sommes donc amenés à abandonner le découpage précédent, peu maniable, par un autre qui va être effectué à l'aide d'une fonction C^∞ . Considérons donc une fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} u(r) = 1 \text{ pour } r \in [0, 1], \\ u(r) \in [0, 1] \text{ pour } r \in [1, 2], \\ u(r) = 0 \text{ pour } r \geq 2. \end{cases} \quad (3.75)$$

Le graphe de u a l'allure suivante :

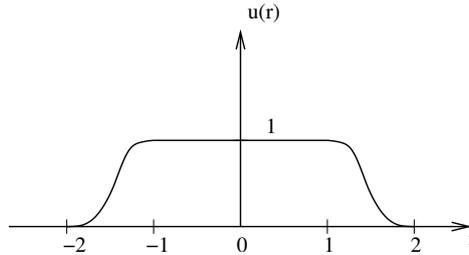


FIG. 3.5: La fonction de cut-off u

Il est alors facile de définir une partition de l'unité (c'est-à-dire une famille de fonctions à valeurs comprises entre 0 et 1 dont la somme vaut identiquement 1) en posant :

$$\begin{cases} u_0(r) = 1 - u(r) \\ u_i(r) = u(M^{2(i-1)}r) - u(M^{2i}r) \text{ pour } i \in \llbracket 1, i_{\max}(T) \rrbracket. \end{cases} \quad (3.76)$$

Nous voyons que plus i augmente, plus le support de u_i se localise près de l'origine. Plus précisément, on peut voir que $\text{supp}(u_i) \subset [M^{-2i}, 2M^{-2(i-1)}]$ et que pour $r \in [2M^{-2i}, M^{-2(i-1)}]$, $u_i(r) \equiv 1$

Nous aurons également besoin de découper les tranches en secteurs plus petits. En effet, dans une tranche d'indice i , on connaît l'ordre de grandeur de $|ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2|$ (en l'occurrence M^{-i}), on ne peut rien dire sur les ordres de grandeur respectifs de k_0 , k_1 et k_2 pris isolément. Ceci implique que les propriétés de décroissance que l'on établirait pour le propagateur dans la tranche i , $C_i(x)$, ne seraient pas optimales et ne permettraient pas de retrouver le comptage de puissance juste renormalisable de la théorie. La question est donc : comment définir le découpage « angulaire », c'est-à-dire les secteurs à l'intérieur de chaque tranche i ? Une première idée pourrait consister à introduire un découpage selon les valeurs de k_1 et k_2 , d'où l'introduction de deux indices entiers s_1 et s_2 . Evidemment, nous devons effectuer ce découpage angulaire en respectant les principes qui nous ont guidés dans la définition des tranches ; ainsi, un découpage en $|k_1| \approx M^{-s_1}$ et $|k_2| \approx M^{-s_2}$ ne serait d'aucune utilité, puisque nous avons déjà indiqué que le modèle devait être analysé non pas en fonction de l'ordre de grandeur absolu des moments, mais plutôt en fonction de leur distance à la surface de Fermi. Ainsi, on pourrait introduire un découpage tel que :

$$\begin{cases} d(k_1, \mathcal{F}) \approx M^{-s_1} \\ d(k_2, \mathcal{F}) \approx M^{-s_2} \end{cases}, \quad (3.77)$$

où $d(k, \mathcal{F})$ désigne la distance entre la partie spatiale de k et la surface de Fermi :

$$d((k_0, k_1, k_2), \mathcal{F}) = \inf_{(k'_1, k'_2) \in \mathcal{F}} \left\{ \sqrt{(k_1 - k'_1)^2 + (k_2 - k'_2)^2} \right\}. \quad (3.78)$$

C'est une idée similaire que nous allons retenir, mais nous allons l'exprimer de façon plus maniable pour la suite. Tout d'abord, nous procédons à un changement de variable qui va rendre les côtés de la surface de Fermi parallèles aux axes des coordonnées. On pose donc :

$$\begin{cases} k_+ = \frac{k_1 + k_2}{2} \\ k_- = \frac{k_1 - k_2}{2} \end{cases}, \quad (3.79)$$

si bien que

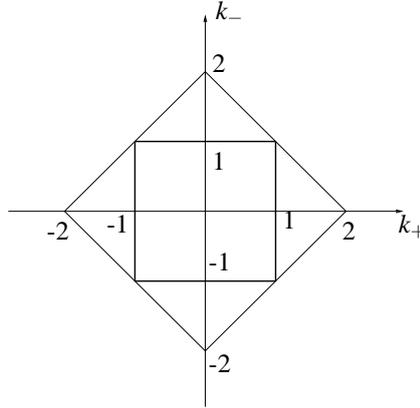
$$\cos k_1 + \cos k_2 = 2 \cos \frac{k_1 + k_2}{2} \cos \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (3.80)$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_- . \quad (3.81)$$

Dans les variables (k_+, k_-) , la surface de Fermi est définie par :

$$\begin{cases} k_+ = \pm 1 \\ k_- = \pm 1 \end{cases}. \quad (3.82)$$

La surface de Fermi dans les coordonnées (k_+, k_-) est représentée sur la figure (3.3).


 FIG. 3.6: La surface de Fermi dans les variables k_{\pm}

La distance de (k_+, k_-) à la surface de Fermi peut alors être évaluée très simplement :

$$\begin{cases} d_+(k, \mathcal{F}) = \inf\{|k_+ - 1|, |k_+ + 1|\} \\ d_-(k, \mathcal{F}) = \inf\{|k_- - 1|, |k_- + 1|\} . \end{cases} \quad (3.83)$$

En fait, lorsque $|k_{\pm} \pm 1|$ est petit, cette grandeur se comporte pratiquement comme $\cos \frac{\pi}{2} k_{\pm}$. En effet, on a :

$$\cos \frac{\pi}{2} k_{\pm} \approx \frac{\pi}{2} |d_{\pm}(k, \mathcal{F})| \quad (3.84)$$

pour k_{\pm} proche de ± 1 . Ceci conduit à poser la définition suivante du découpage angulaire. Pour chaque tranche i , on introduit une suite finie de fonctions v_0, v_1, \dots, v_i définie par :

$$\begin{cases} v_0(r) = 1 - u(M^2 r) \\ v_s(r) = u_{s+1}(r) \text{ pour } s \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket \\ v_i(r) = u(M^{2i} r) . \end{cases} \quad (3.85)$$

On pose alors :

$$C_{(i,s_+,s_-)}(k) = \frac{u_i(k_0^2 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{2} k_+ \cos^2 \frac{\pi}{2} k_-) v_{s_+}(\cos^2 \frac{\pi}{2} k_+) v_{s_-}(\cos^2 \frac{\pi}{2} k_-)}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-} \quad (3.86)$$

et bien sûr, dans l'espace réel :

$$C_{(i,s_+,s_-)}(x) = \frac{1}{2\beta(2\pi)^2} \int d^3k C_{(i,s_+,s_-)}(k) . \quad (3.87)$$

En fait, ce découpage en secteurs de l'espace de Fourier respecte une autre prescription essentielle : plus la courbure d'une tranche est élevée et plus la longueur des secteurs doit être petite. Dit en termes imagés, le découpage doit être tel que les secteurs ressemblent à des rectangles ([Riv], [FMRT92]).

Munis de cette sectorisation C^∞ , nous allons pouvoir démontrer pour un propagateur localisé dans un secteur σ des propriétés de décroissance. En fait, nous avons le lemme suivant (voir [Riv]) :

Lemme 3.3.1 *Si la fonction u est de la classe de Gevrey d'ordre $\alpha < 1$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$|C_\sigma(x)| \leq c.M^{-s_+ - s_-} e^{-(d_\sigma(x))^\alpha} \quad (3.88)$$

avec

$$d_\sigma(x) = M^{-i}|x_0| + M^{-s_+}|x_+| + M^{-s_-}|x_-|. \quad (3.89)$$

3.4 Formule de jungle

Maintenant que nous avons introduit notre sectorisation de l'espace de Fourier, nous voulons en tirer parti pour le contrôle des grandeurs thermodynamique du système. Le développement précédent à l'aide d'une formule de forêt est insuffisant en ce sens qu'il est totalement indifférent aux secteurs. Nous voudrions donc une formule de forêt optimisée pour les secteurs. L'idée est que lorsque l'on cherche à connecter des vertex, on va utiliser les propagateurs de meilleure décroissance en priorité. Cependant, il importe de préciser la signification de cette meilleure décroissance. Nous avons vu que $|C_\sigma(x)|$ admet des taux de décroissance en M^{-i} , M^{-s_+} et M^{-s_-} respectivement dans les directions 0, + et -. Ainsi, intégrer sur un volume infini un tel propagateur va nous donner un facteur $M^{i+s_++s_-}$ qui est en quelque sorte le coût d'intégration d'un vertex par rapport à un autre. Il semble donc naturel de vouloir organiser le développement selon les valeurs croissantes de l'indice $i+s_++s_-$ (qui a été noté $2r$ dans [Riv] et [AMR05a]). Il y a ici un point important à souligner : il serait tentant de vouloir optimiser selon les trois indices i , s_+ et s_- séparément, mais cela ne peut être fait de façon constructive. Nous sommes donc obligés d'optimiser par rapport à cet indice moyen $r = \frac{i+s_++s_-}{2}$. A ce stade, on entrevoit une difficulté sur laquelle nous aurons à revenir par la suite : un propagateur $C_\sigma(x)$ peut avoir une bonne décroissance dans une certaine direction, mais une décroissance médiocre dans une autre.

On voit alors l'avantage décisif que fournit la formule de Taylor-Brydges-Kennedy par rapport au procédé inductif de Battle-Federbush : l'optimisation peut être écrite de façon relativement simple dans le premier cas, tandis que la seconde option conduirait à des formules inextricables. Expliquons ce que signifie précisément cette optimisation. Etant donnée une attribution de secteurs $\{\sigma_v^j\}$, une valeur d'indice r est assignée à chaque champ et antichamp. On ne considère d'abord que les (anti)champs d'indice $r = 0$ et on interpole le déterminant fermionique à l'aide d'une première famille de paramètres

$\{s_{\{i,j\}}^0\}$. On écrit alors :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}} = \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F}_0 \\ \text{sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_0} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_0} \int_0^1 ds_\ell^0 \right) \det_{\text{left}, \mathcal{F}_0} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^0\}) \right). \quad (3.90)$$

On est alors certain d'avoir utilisé le maximum de propagateurs ayant l'indice $r = 0$. On considère alors $\det_{\text{left}, \mathcal{F}_0} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^0\}) \right)$, que l'on interpole à l'aide d'une famille de paramètres $\{s_{\{i,j\}}^1\}$, se rapportant alors aux antichamps d'indice $r = 1$ tels que i et j ne soient pas déjà connectés par \mathcal{F}_0 . On a alors :

$$\det_{\text{left}, \mathcal{F}_0} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^0\}) \right) = \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F}_1 \\ \text{sur } [n]}} \prod_{\ell \in \mathcal{F}_1} C(f(\ell), g(\ell)) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_1} \int_0^1 ds_\ell^1 \right) \det_{\text{left}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^0\}, \{s_{\{i,j\}}^1\}) \right) \quad (3.91)$$

avec la contrainte que $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ doit toujours être une forêt sur $[n]$. A ce stade, nous pouvons donc écrire :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}} C(f, g) = \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F}_0 \\ \text{sur } [n]}} \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F}_1 \\ \text{sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_0} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_1} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_0} \int_0^1 ds_\ell^0 \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_1} \int_0^1 ds_\ell^1 \right) \det_{\text{left}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^0\}, \{s_{\{i,j\}}^1\}) \right). \quad (3.92)$$

A ce stade, compte tenu de la contrainte que \mathcal{F}_1 doit être telle que $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ soit encore une forêt, l'expression précédente peut être réécrite :

$$\det_{(f,g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}} C(f, g) = \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F}_0 \\ \text{sur } [n]}} \sum_{\substack{\text{forêts } \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_0 \\ \text{sur } [n]}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_1} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_0} \int_0^1 ds_\ell^0 \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_1} \int_0^1 ds_\ell^1 \right) \det_{\text{left}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^0\}, \{s_{\{i,j\}}^1\}) \right). \quad (3.93)$$

Là encore, ce développement peut être poursuivi jusqu'à un ordre m quelconque. On voit que l'on va alors faire apparaître des sommes du type :

$$\sum_{\mathcal{F}_0} \sum_{\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_0} \dots \sum_{\mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_{m-1}}. \quad (3.94)$$

Ceci conduit à poser la définition suivante : étant donné un entier $m \geq 1$, on appelle m -jungle une suite croissante finie de m forêts. On peut alors montrer en toute généralité la formule suivante, appelée formule de jungle de Taylor-Brydges-Kennedy (voir [AR95]) :

Soit $\mathcal{P}_{n,m} = \mathcal{P}_2([n]) \times [m]$ et F une application de $[0, 1]^{\mathcal{P}_{n,m}}$ dans \mathbb{C} de classe C^∞ . On a alors :

$$F(\mathcal{K}) = \sum_{\substack{m\text{-jungles} \\ \mathcal{J}=(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_m} ds_\ell \right) \left[\left(\prod_{k=1}^m \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1}} \frac{\partial}{\partial s_\ell^k} \right) \right) \right] \left(X^{\mathcal{J}}(\{s_{\{i,j\}}^k\}) \right) \quad (3.95)$$

où les composantes du vecteur $X^{\mathcal{J}}(\{s_{\{i,j\}}^k\})$ sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{\mathcal{J}}(\{s_{\{i,j\}}^k\})_{\{i,j\}} = 0 \text{ si } i \text{ et } j \text{ ne sont pas connectés par } \mathcal{F}_k, \\ = \inf\{s_\ell, \ell \in P_{\mathcal{F}_k}(i, j) \setminus \mathcal{F}_{k-1}\} \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont connectés par } \mathcal{F}_k \text{ mais pas par } \mathcal{F}_{k-1}, \\ = 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont connectés par } \mathcal{F}_{k-1}, \text{ avec la convention que } \mathcal{F}_0 = \emptyset. \end{array} \right. \quad (3.96)$$

Cette formule de jungle nous met alors en mesure d'écrire un développement du déterminant fermionique optimisé selon l'indice $r = \frac{i+s_++s_-}{2}$, en choisissant $m = 3i_{\max}(T) + 1$ (c'est-à-dire le nombre de valeurs possibles pour l'indice r). C'est ce développement qui est le point de départ de l'analyse multi-échelles utilisée dans [Riv] et [AMR05a] :

$$\det(C(f, g))_{(f,g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}} = \sum_{\substack{m\text{-jungles} \\ \mathcal{J}=(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_m} C(f(\ell), g(\ell)) \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{F}_m} \int_0^1 ds_\ell \right) \det_{\text{left}, \mathcal{F}_m} \left(C(f, g)(\{s_{\{i,j\}}^k\}) \right). \quad (3.97)$$

Evidemment, si on se restreint à l'évaluation des contributions à la pression ou à une fonction de Schwinger normalisée, on fait apparaître la contrainte que la forêt \mathcal{F}_m , c'est-à-dire le dernier étage de la jungle \mathcal{J} , doit être un arbre connectant tous les vertex. On obtient alors bel et bien une formule d'arbre, mais celui-ci est optimisé en ce sens qu'il utilise les meilleures décroissances.

3.5 Les bornes sur les coefficients dans des cas simplifiés

Nous avons maintenant complètement préparé le lecteur à la suite, plus technique. Le but de ce développement multi-échelles est de pouvoir prouver que les fonctions de Schwinger à volume infini et à température $T > 0$ du modèle, sont analytiques en la constante de couplage λ pour $|\lambda| \leq \frac{K}{\log^2 T}$.

L'article [Riv] aborde le problème en considérant deux versions simplifiées de notre modèle, selon une démarche assez habituelle. La première version consiste à étudier un modèle « mono-tranche », c'est-à-dire dans lequel la covariance est non pas $C(k)$ mais $C_i(k) = u_i(k)C(k)$. Ainsi, $|ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2|$ a un ordre de grandeur fixé, qui est M^{-i} . On a alors le théorème suivant :

Theorem 3.1 *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, i_{\max}(T) \rrbracket$, les fonctions de Schwinger à volume infini du modèle défini par le propagateur C_i sont analytiques en λ pour $|\lambda| \leq \frac{c}{i}$.*

Pour la preuve détaillée de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [Riv], mais nous donnons néanmoins une idée de la démarche. Nous ne considérerons que la pression pour simplifier. Le développement à l'aide d'une formule de jungle donne :

$$\frac{1}{V} \ln Z(V) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^n \quad (3.98)$$

avec :

$$p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mathcal{B}, \mathcal{EB} \\ \{a_v\}, \{b_v\}, \mathcal{T}}} \sum'_{\{\sigma_v^j\}} \varepsilon(\mathcal{T}) \int_{V^n} \prod_{j=1}^n \delta(x_j) \prod_{\ell \in \mathcal{T}} C_\sigma(x_\ell, y_\ell) \prod_{j=1}^n \chi_j(\sigma) \prod_{b \in \mathcal{B}} \chi_b(\sigma) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 ds_\ell \right) \det_{\text{left}, \mathcal{T}} \left(C(f, g)(\{s_\ell\}) \right). \quad (3.99)$$

Explicitons chaque élément de cette expression :

- \mathcal{B} est le sous-arbre de l'arbre de Gallavotti-Nicolò qui correspond aux bipeds,
- \mathcal{EB} est une famille de paires de champs et d'antichamps pour chaque biped $b \in \mathcal{B}$,
- $\{a_v\}$ et $\{b_v\}$ sont les indices de spin, qui d'ailleurs ne jouent pas un rôle crucial dans la suite,
- \mathcal{T} est un arbre connectant les n vertex (qui doit donc être considéré comme le dernier étage d'une jungle),
- $\sum'_{\{\sigma_j\}}$ est une somme sur les attributions de secteurs, où le symbole \sum' rappelle qu'il existe une contrainte selon laquelle il doit exister au moins un schéma de contraction de Wick compatible avec chaque attribution,
- $\chi_j(\sigma)$ est une fonction caractéristique portant sur les secteurs attachés au j -ième vertex, exprimant la loi de conservation des moments,
- $\chi_b(\sigma)$ exprime la contrainte que tous les champs internes du biped b ont des indices r plus petits que les champs externes.

On passe alors au module et on écrit :

$$|p_n| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mathcal{B}, \mathcal{EB} \\ \{a_v\}, \{b_v\}, \mathcal{T}}} \sum'_{\{\sigma_v^j\}} \int_{V^n} \prod_{j=1}^n \delta(x_j) \prod_{\ell \in \mathcal{T}} |C_\sigma(x_\ell, y_\ell)| \prod_{j=1}^n \chi_j(\sigma) \prod_{b \in \mathcal{B}} \chi_b(\sigma) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 ds_\ell \right) \left| \det_{\text{left}, \mathcal{T}} \left(C(f, g)(\{s_\ell\}) \right) \right|. \quad (3.100)$$

Le déterminant peut être majoré uniformément par rapport aux paramètres $\{s_\ell\}$:

$$\left| \det_{\text{left}, \mathcal{T}} \left(C(f, g)(\{s_\ell\}) \right) \right| \leq c^n \prod_{f \text{ left}} M^{-\frac{i+l_f}{2}} \quad (3.101)$$

où nous avons introduit l'indice $l = s_+ + s_- - i$. Observons que dans le modèle mono-tranche, i ne dépend naturellement pas du champ auquel il est attaché. Evidemment, les intégrales $\left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 ds_\ell \right)$

donnent un facteur 1, tandis que l'intégration sur tous les vertex, en tenant compte des propriétés de décroissance et du comptage de puissance des propagateurs, donne :

$$\int \prod_{j=1}^n \delta(x_j) \prod_{\ell \in \mathcal{T}} |C_{\sigma}(x_{\ell}, y_{\ell})| \leq \prod_{\ell \in \mathcal{T}} c \cdot M^{-i-\ell} M^{i+s_{+,\ell}+s_{-,\ell}} \quad (3.102)$$

$$= c^n \prod_{\ell \in \mathcal{T}} M^i. \quad (3.103)$$

En prenant en compte la borne sur le déterminant et en se souvenant que celui-ci est d'ordre $n+1$ tandis que l'arbre \mathcal{T} comporte $n-1$ lignes, on obtient :

$$|p_n| \leq \frac{c^n}{n!} M^{-2i} \sum_{\substack{\mathcal{B}, \mathcal{E} \mathcal{B} \\ \{a_v\}, \{b_v\}, \mathcal{T}}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \prod_{j=1}^n \chi_j(\sigma) \prod_{b \in \mathcal{B}} \chi_b(\sigma) \prod_{\ell \in \mathcal{T}} M^{\ell} \prod_{f \in \mathcal{A} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{F}} M^{-\ell/2}. \quad (3.104)$$

On utilise alors deux lemmes (voir lemmes 5 et 6 dans [Riv]) qui permettent d'établir que :

$$\sum_{\{\sigma_v^j\}} \prod_{j=1}^n \chi_j(\sigma) \prod_{b \in \mathcal{B}} \chi_b(\sigma) \prod_{\ell \in \mathcal{T}} M^{\ell} \prod_{f \in \mathcal{A} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{F}} M^{-\ell/2} \leq i^{n+2} \quad (3.105)$$

et :

$$\sum_{\substack{\mathcal{B}, \mathcal{E} \mathcal{B} \\ \{a_v\}, \{b_v\}, \mathcal{T}}} \frac{1}{n!} \leq c^n. \quad (3.106)$$

Ceci permet de conclure que $|p_n| \leq i^2 M^{-3i-3} (c \cdot i)^n$, ce qui établit le théorème (3.1).

Modèle multi-tranches

Le modèle complet (« multi-tranches ») conduit au même type d'expressions. Néanmoins, nous aurons besoin de faire apparaître non plus seulement les bipeds, mais aussi les quadrupeds. Ainsi, l'expression du n -ième coefficient de la pression P dans la limite de volume infini peut s'écrire :

$$p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mathcal{B}, \mathcal{E} \mathcal{B} \\ \mathcal{Q}, \mathcal{E} \mathcal{Q} \\ \{a_v\}, \{b_v\}, \mathcal{T}}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \varepsilon(\mathcal{T}) \int \prod_{v=1}^n dx_v \delta(x_v) \prod_{\ell \in \mathcal{T}} C_{\sigma_{\ell}}(x_{\ell}, y_{\ell}) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 ds_{\ell}^{r_{\ell}} \right) \det_{\text{left}} \left(C(f, g)(\{s_{\ell}^{r_{\ell}}\}) \right). \quad (3.107)$$

Là encore, du fait du comptage de puissance défavorable des bipeds et quadrupeds, la prise en compte de ces sous-graphes dangereux est difficile au premier abord. Il est alors d'usage de considérer dans un premier temps un modèle fictif, simplifié quelque peu artificiellement en prenant comme hypothèse qu'il n'y a ni biped ni quadruped. Autrement dit, on pose $\mathcal{B} = \mathcal{Q} = \emptyset$ (et bien sûr $\mathcal{E} \mathcal{B} = \mathcal{E} \mathcal{Q} = \emptyset$), et on obtient une série formelle qu'il est d'usage d'appeler « la partie complètement convergente », de la pression en l'occurrence. On note p_n^c les coefficients correspondants.

En appliquant l'inégalité de Gram puis en effectuant les intégrations sur les vertex, on obtient de façon tout à fait analogue à l'équation (3.104) :

$$|p_n^c| \leq \frac{c^n}{n!} \sum_{\substack{\mathcal{B}=\mathcal{Q}=\emptyset \\ \{a_v\}, \{b_v\}, \mathcal{F}}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \prod_{v=1}^l \chi_v(\sigma) \prod_{\ell \in \mathcal{F}} M^{2r_\ell} \prod_{f \in \mathcal{A} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{F}} M^{-\frac{r_f}{2} - \frac{l_f}{4}}. \quad (3.108)$$

Par des techniques standard que nous ne détaillerons pas ici, on peut prouver la borne :

$$|p_n^c| \leq (c \log T)^n, \quad (3.109)$$

ce qui prouve le théorème suivant :

Théorème 3.5.1 *Il existe une constante $c > 0$ telle que les parties complètement convergentes des fonctions de Schwinger du modèle sont analytiques en λ pour $|\lambda| \leq \frac{c}{|\log T|}$.*

Pour aller plus loin, il faudrait incorporer la présence des bipeds et quadrupeds dans la théorie. L'adjonction de ces derniers se fait simplement en posant $\mathcal{B} = \emptyset$ mais en laissant \mathcal{Q} être non trivial. On définit ainsi la partie « sans bipeds » des fonctions de Schwinger. Pour la pression, nous noterons p_n^{bf} les coefficients correspondants. La prise en compte de ces fameux quadrupeds nous oblige à affaiblir la borne du théorème (3.5.1) d'un facteur $\frac{1}{|\log T|}$. On a :

Théorème 3.5.2 *Il existe une constante $c > 0$ telle que les parties « sans bipeds » des fonctions de Schwinger du modèle sont analytiques en λ pour $|\lambda| < \frac{c}{|\log^2 T|}$.*

Là encore, nous renvoyons le lecteur à [Riv] pour une analyse plus détaillée. Pour pouvoir prendre en compte les bipeds sans affaiblir la borne du théorème (3.5.2), nous allons devoir mettre en œuvre des techniques beaucoup plus complexes. Cette étude fait l'objet de l'article reproduit en annexe A ([AMR05a]). Notamment, les contributions des bipeds doivent être renormalisées, mais cette renormalisation présente la particularité que les contre-termes utilisés sont nuls. Ceci est dû au fait que sur la surface de Fermi, les fonctions à deux points ainsi que leurs dérivées dans des directions le long de cette surface sont nulles. Autrement dit, la surface de Fermi est conservée par le flot de renormalisation. Ceci est une conséquence très particulière du demi-remplissage qui implique une symétrie particule-trou. L'un des principaux résultats énoncés dans l'article [AMR05a] est le théorème suivant :

Théorème 3.5.3 *Il existe une constante $c > 0$ telle que les fonctions de Schwinger du modèle sont analytiques en λ pour $|\lambda| < \frac{c}{|\log^2 T|}$.*

En résumé, le modèle complet a un rayon de convergence au moins égal à celui du modèle sans biped. Ce résultat fut difficile à établir. Nous n'allons pas répéter ici les arguments développés dans

[AMR05a], mais nous dirons néanmoins que nous avons complété le développement initial par un double développement en arches qui a permis d'isoler les contributions 2-particule-irréductibles. Ceci nous a permis d'utiliser un théorème de théorie des graphes connu sous le nom de théorème de Menger. A notre connaissance, l'usage de ce théorème pour le contrôle des développements constructifs est novateur. A ce sujet, nous nous permettons une remarque spéculative et nous suggérons que ce théorème puisse constituer un outil supplémentaire parmi l'arsenal des techniques constructives, et qu'il puisse ainsi aider à la résolution de certains problèmes. Le dernier chapitre de ce mémoire traite en détail ce fameux théorème et en donne une démonstration. Nous avons préféré élargir l'horizon et faire apparaître le théorème de Menger comme un corollaire d'un puissant théorème d'optimisation des réseaux : le théorème max flow-min cut.

Chapitre 4

Petite théorie des réseaux

Ce court chapitre peut être considéré comme un appendice : son but est simplement d'exposer le théorème de Menger. Plutôt que d'exposer brutalement celui-ci, nous avons préféré élargir un peu le point de vue et montrer en quoi ce théorème apparaît naturellement comme un corollaire d'un puissant théorème issu de la théorie des réseaux : le théorème « max flow - min cut »¹.

Définition 4.0.1 On appelle réseau R tout quadruplet $R = (D, X, Y, c)$ où D est un digraphe (un graphe dirigé), X et Y sont deux ensembles disjoints et non vides de l'ensemble des vertex de D , et c une fonction définie sur l'ensemble des arcs A de D , à valeurs dans \mathbb{N} .

D est appelé le digraphe sous-jacent du réseau R . X est l'ensemble des sources et Y l'ensemble des puits. c est la fonction de capacité.

Les vertex de D qui n'appartiennent ni à X ni à Y sont appelés les vertex intermédiaires, et l'ensemble de ces vertex sera noté I . On a donc :

$$V(D) = X \sqcup Y \sqcup I \text{ (union disjointe)}. \quad (4.1)$$

Remarque : il semblerait qu'on puisse tenter de définir l'ensemble des sources X comme l'ensemble des vertex qui sont l'origine de tous les arcs qui leur sont incidents. De même, on peut définir Y comme l'ensemble des vertex qui sont l'extrémité de tous les arcs qui leur sont incidents.

Nous introduisons également une notation très utile qui sera constamment utilisée par la suite : si f est une fonction de A dans \mathbb{R} , et si K est un sous-ensemble de D , nous poserons $f(F) = \sum_{a \in K} f(a)$. Pour $K \subset A$, nous noterons (K, \bar{K}) l'ensemble des arcs de A dont l'origine appartient à K et l'extrémité appartient à $\bar{K} = A \setminus K$. Enfin, nous poserons $f^+(K) = f(K, \bar{K})$ et $f^-(K) = f(\bar{K}, K)$. En d'autres termes,

¹On a gardé l'habitude d'utiliser ce vocable anglais même dans la littérature française, l'appellation « théorème du flot maximal et de la coupure minimale » n'ayant aucun succès.

$f^+(K)$ est la somme des $f(a)$, pour tous les arcs a dont l'origine est dans K et l'extrémité hors de K , autrement dit pour tous les arcs sortant de K . De même, $f^-(K)$ est la somme des $f(a)$ pour tous les arcs a entrant dans K .

Ces notations étant introduites, on peut alors donner facilement la définition d'un flot sur un réseau.

Définition 4.0.2 *Un flot sur un réseau est toute application $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :*

$$\forall a \in A, 0 \leq f(a) \leq c(a), \quad (4.2)$$

$$\forall v \in I, f^+(v) = f^-(v). \quad (4.3)$$

La première condition est appelée contrainte de capacité. Elle exprime naturellement qu'on ne peut faire passer à travers un arc une quantité plus grande que celle qui est autorisée par sa capacité (qui doit donc être pensée comme une capacité maximale). La seconde condition est simplement une loi de conservation. Celle-ci n'est naturellement vérifiée que pour les vertex intermédiaires, car elle ne pourrait être vérifiée pour un vertex-source ou un vertex-puits que dans le cas particulier où $f^+(v) = f^-(v) = 0$, évidemment peu intéressant.

Si $K \subset V(R)$ et f est un flot sur R , le flot sortant de K est la quantité $f^+(K) - f^-(K)$. Le flot entrant dans K est l'opposé de cette quantité, c'est-à-dire $f^-(K) - f^+(K)$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 4.0.1 *Dans un réseau R muni d'un flot f , le flot sortant de l'ensemble des sources X est égal au flot entrant dans l'ensemble des puits Y :*

$$f^+(X) - f^-(X) = f^-(Y) - f^+(Y). \quad (4.4)$$

La démonstration est facile et est laissée au lecteur. Ce lemme permet de définir la valeur d'un flot f , notée $val f$, comme étant la valeur commune de $f^+(X) - f^-(X)$ et $f^-(Y) - f^+(Y)$:

$$val f = f^+(X) - f^-(X) = f^-(Y) - f^+(Y). \quad (4.5)$$

Cette notion de valeur d'un flot est essentielle dans les applications pratiques. L'un des plus fameux problèmes sera celui de la recherche d'un flot maximal, c'est-à-dire un flot de valeur maximale. Concrètement, ceci a des applications au transfert d'information par exemple. Dans un réseau d'ordinateurs, imaginons qu'un ordinateur (le serveur) émette des données destinées à être recueillies par un autre ordinateur (un client). Un tel réseau informatique peut être représenté par un réseau (au sens mathématique) dont les vertex sont tous les ordinateurs, l'ensemble des sources se réduit à l'ordinateur A et l'ensemble des puits à l'ordinateur B . Les arcs du réseau représentent les connexions entre les machines, et la capacité de chaque arc peut être pensée comme le débit maximal des données informatiques à travers cet arc. Dans ce contexte, la recherche d'un flot maximal revient à attribuer à chaque arc

un débit de données tel que les informations seront transmises de A vers B en un minimum de temps. Il s'agit là d'un problème non-trivial, car en général le transfert des données doit être réparti à travers tout le réseau, et ne se limite pas à trouver un meilleur chemin joignant A et B.

On entrevoit alors, et nous aurons l'occasion d'y revenir, un application au contrôle des développements perturbatifs en théorie des champs. Si l'on cherche à majorer l'amplitude d'un graphe de Feynman, nous avons que le problème était de déterminer une procédure d'intégration des vertex les uns par rapport aux autres. Nous avons été amenés ainsi à choisir un arbre qui sous-tend ce graphe, et les intégrations étaient effectuées des feuilles vers la racine. On peut alors songer à optimiser le processus et à choisir le meilleur arbre. Ce procédé semble d'autant plus naturel que dans une approche constructive, où l'on s'interdit de faire apparaître les graphes complets, nous avons été amenés jusqu'à présent à effectuer des développements en arbres. Mais nous avons vu que nous pouvons nous permettre d'effectuer un développement supplémentaire, qui engendre des graphes 2-particule-irréductibles. Dès lors, le procédé d'intégration revient en quelque sorte à optimiser selon les décroissances les plus importantes, en ne se contentant pas simplement d'un arbre, mais de tout le graphe. En fait, ce n'est pas exactement dans cet esprit qu'a été effectué le contrôle du modèle de Hubbard, mais la preuve repose crucialement sur l'existence de trois chemins arêtes-disjoints (ou encore de deux chemins intérieurement vertex-disjoints) joignant les deux vertex externes. Il n'est pas impossible que la recherche d'un flot maximal à travers un graphe permette de jeter un éclairage nouveau sur le contrôle des développements constructifs de certains modèles encore non-résolus (comme par exemple le modèle du jellium à trois dimensions).

4.1 Réduction à un réseau ayant une seule source et un seul puits

La définition générale d'un réseau donnée précédemment prend en compte la possibilité d'avoir plusieurs sources et plusieurs puits. Néanmoins, en ce qui concerne la recherche d'un flot maximal, il est possible de se ramener à un réseau ayant uniquement une seule source et un seul puits. Pour ce faire, étant donné un réseau R , il suffit d'ajouter au digraphe sous-jacent deux nouveaux vertex x et y , de joindre x à chaque élément de X par un arc, et de joindre chaque élément de Y à y . La capacité de ces nouveaux arcs est prise égale à $+\infty$. On a ainsi obtenu un nouveau réseau R' dont l'unique source est x et l'unique puits y . Etant donné un flot f sur R , on peut alors définir un flot correspondant sur R' .

4.2 Coupures

Une notion extrêmement importante pour l'étude des flots sur un réseau est la notion de coupure. On appelle coupure tout ensemble d'arcs de la forme (K, \bar{K}) , où $x \in K$ et $y \in \bar{K}$. Il est clair que la suppression des arcs d'une coupure rend impossible la jonction de x et y par un chemin respectant l'orientation des arcs. En revanche, si l'on fait abstraction de l'orientation des arcs, autrement dit si on considère le graphe non-orienté sous-jacent, celui-ci n'est pas nécessairement non-connexe. Ainsi, une coupure n'est pas déterminée par un ensemble d'arcs, mais par un ensemble de vertex. On peut facilement voir qu'un réseau avec une seule source et un seul puits admet $2^{|I|}$ coupures, I étant l'ensemble de ses vertex intermédiaires.

Si C est une coupure, sa capacité est simplement définie comme étant la somme des capacités de ses arcs :

$$\text{cap } C = \sum_{a \in C} c(a). \quad (4.6)$$

Cette notion permet de définir la notion de coupure minimale : une coupure C est minimale si et seulement si sa capacité est inférieure (ou égale) à la capacité de n'importe quelle autre coupure :

$$C \text{ est une coupure minimale} \iff \text{pour toute coupure } C', \text{cap } C \leq \text{cap } C'. \quad (4.7)$$

Il n'est peut-être pas évident *a priori* de voir le lien entre le problème de la recherche d'un flot maximal et la notion de coupure minimale. Cependant, on a le résultat suivant, particulièrement élégant, dû à Ford et Fulkerson [FJF56], connu sous le nom théorème « max flow-min cut » :

Théorème 4.2.1 *Dans tout réseau, la valeur d'un flot maximal est égale à la capacité d'une coupure minimale.*

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de ce résultat. Nous procéderons par étapes, en établissant d'abord quelques lemmes et théorèmes préparatoires, dont le théorème max flow-min cut apparaîtra finalement comme un simple corollaire.

Lemme 4.2.1 *Pour tout flot f et toute coupure $C = (K, \bar{K})$ dans un réseau R , on a : $\text{val } f = f^+(K) - f^-(K)$.*

Démonstration :

Il suffit de remarquer que la condition de conservation impose :

$$\begin{cases} f^+(v) - f^-(v) = 0 \text{ si } v \neq x, \\ f^+(x) - f^-(x) = \text{val } f. \end{cases} \quad (4.8)$$

En sommant sur $v \in K$ et en simplifiant, on obtient :

$$\sum_{v \in K} [f^+(v) - f^-(v)] = \text{val } f = f^+(K) - f^-(K) . \quad (4.9)$$

■

Avant d'énoncer le théorème suivant, introduisons une terminologie commode. Si f est un flot sur un réseau R , et si a est un arc de R , nous dirons que a est nul pour f si $f(a) = 0$, f -insaturé si $f(a) < c(a)$ et f -saturé si $f(a) = c(a)$. On peut alors énoncer :

Théorème 4.2.2 *Pour tout flot f et toute coupure C d'un réseau R , on a l'égalité : $\text{val } f \leq \text{cap } C$. De plus, il y a égalité si et seulement si tout arc de $C = (K, \bar{K})$ est f -saturé et si tout arc de (K, \bar{K}) est nul pour f .*

Démonstration :

D'après le lemme précédent : $\text{val } f = f^+(K) - f^-(K)$. Or la contrainte de capacité pour le flot f implique : $\forall a \in C, 0 \leq f(a) \leq c(a)$, donc par sommation sur $a \in C$: $f^+(K) \leq \text{cap } C$. De plus, par définition, $f^-(K) \geq 0$. On en déduit donc que $\text{val } f \leq \text{cap } C$. Enfin, il est clair que l'égalité $\text{val } f = \text{cap } C$ a lieu si et seulement si $f^+(K) = \text{cap } C$ et $f^-(K) = 0$. La première égalité signifie que tous les arcs de C sont f -saturés (par définition, C est constituée de l'ensemble des arcs sortant de K) et la seconde signifie que tout arc entrant dans K est nul pour f .

■

Ainsi, on voit immédiatement que si l'on est capable d'exhiber un flot f et une coupure C tels que $\text{val } f = \text{cap } C$, alors on est assuré que f est un flot maximal et C une coupure minimale. En revanche, on ne peut pas encore assurer que si f est un flot maximal et C une coupure minimale, on a nécessairement $\text{val } f = \text{cap } C$. Pour établir enfin ce résultat, nous allons introduire une notion supplémentaire, à savoir celle de chemin f -incrémentant. A tout chemin P de R , on associe l'indice $\iota(P)$ défini par :

$$\iota(P) = \min_{a \in A(P)} \iota(a) \quad (4.10)$$

où :

$$\begin{cases} \iota(a) = c(a) - f(a) \text{ si } a \text{ est un arc dans le sens de } P, \\ \iota(a) = f(a) \text{ si } a \text{ est un arc de sens inverse de } P. \end{cases} \quad (4.11)$$

Nous dirons que P est f -saturé si $\iota(P) = 0$, et f -insaturé si $\iota(P) > 0$. Enfin, un chemin f -incrémentant est un chemin f -insaturé joignant la source x au puits y . Cette notion de chemin f -incrémentant est

importante car elle nous fournit un critère permettant de décider si un flot f est maximal. On a le théorème suivant :

Théorème 4.2.3 *Un flot f dans un réseau R est maximal si et seulement si R ne comporte aucun chemin f -incrémentant.*

Démonstration :

Supposons que R contienne un chemin P f -incrémentant. Alors f ne peut être un flot maximal. En effet, définissons un nouveau flot \hat{f} sur R par :

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + \iota(P) & \text{si } a \text{ est un arc dans le sens de } P, \\ f(a) - \iota(P) & \text{si } a \text{ est un arc dans le sens inverse de } P, \\ f(a) & \text{si } a \notin A(P). \end{cases} \quad (4.12)$$

Il est alors facile de voir que $\text{val } \hat{f} = \text{val } f + \iota(P)$ et comme $\iota(P) > 0$ par hypothèse, f n'est pas maximal. Par contraposition, on a donc prouvé que si f est un flot maximal, R n'a pas de chemin f -incrémentant.

Réciproquement, supposons que R n'a pas de chemin f -incrémentant. Notons K l'ensemble des vertex v tels qu'il existe un chemin f -insaturé joignant la source x à v . On convient que $x \in K$. Alors par hypothèse $y \notin K$ donc (K, \bar{K}) est une coupure de R . Soit (u, v) un arc de (K, \bar{K}) . Alors nécessairement (u, v) est f -saturé. En effet, si (u, v) était f -insaturé, en considérant un chemin f -insaturé joignant x à u (qui existe puisque $u \in K$) et en lui adjoignant l'arc (u, v) , on obtiendrait un chemin f -insaturé joignant x à v et on aurait $v \in K$, ce qui n'est pas. Considérons maintenant un arc $a = (u, v)$ de (\bar{K}, K) . Alors nécessairement $f(a) = 0$ car si a était non nul pour f , par le même argument que précédemment, on construirait facilement un chemin f -insaturé joignant x à v , et on aurait $v \in K$, ce qui contredit $v \in \bar{K}$.

Ainsi, par le théorème 11.1, on a donc prouvé que $\text{val } f = \text{cap } (K, \bar{K})$, donc f est un flot maximum. ■

On en déduit alors le fameux théorème max flow-min cut, comme un simple corollaire. Il est intéressant de remarquer que la preuve ci-dessus fournit le schéma d'un algorithme permettant de déterminer explicitement un flot maximal. Partant d'un flot quelconque (par exemple le flot nul), on recherche un chemin f -incrémentant. Si on en trouve un, f est remplacé par le flot \hat{f} . Si on ne trouve aucun chemin f -incrémentant, alors l'algorithme s'arrête car on sait alors que f est maximal. On construit donc ainsi une suite finie de flots, de valeurs strictement croissantes, dont le dernier élément est un flot maximal. Ainsi exposé, cet algorithme est finalement fort simple, mais nous avons caché la vraie difficulté, à savoir celle de trouver une « bonne » procédure permettant de trouver un chemin f -incrémentant, pour un

flot f donné. En 1957, Ford et Fulkerson ont proposé un tel algorithme (voir [FJF57]), mais il est important de préciser que cet algorithme (baptisé méthode des étiquetages) ne peut pas être considéré comme un « bon » algorithme. Cependant, en 1972, Edmonds et Karp ont proposé dans [EK72] une amélioration de la méthode des étiquetages, ce qui permet d'obtenir un algorithme efficace de recherche de chemins f -incrémentant. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet puisque finalement nous avons en vue l'utilisation du théorème max flow-min cut pour en déduire les théorèmes de Menger. Nous les énonçons maintenant sous la forme suivante :

Théorème 4.2.4 (« Version arêtes » du théorème de Menger) *Un graphe G est k -arête-connexe par rapport à deux vertex u et v si et seulement s'il existe au moins k chemins arête-disjoints joignant u et v .*

Théorème 4.2.5 (« Version vertex » du théorème de Menger) *Un graphe G (ayant au moins $k + 1$ vertex) est k -connexe par rapport à deux vertex u et v si et seulement s'il existe au moins k chemins intérieurement disjoints joignant u et v .*

Comme on peut le constater, ces énoncés des théorèmes de Menger ne font intervenir qu'une structure de graphe, alors que le théorème max flow-min cut requiert une structure nettement plus riche, à savoir celle de réseau. En fait, il est possible de montrer les théorèmes de Menger directement, par une démonstration par récurrence assez astucieuse (voir l'article original de Menger, [Men27]). On peut donc légitimement s'interroger sur la pertinence de l'approche qui est la nôtre, et qui consiste à introduire le langage de la théorie des réseaux. Cependant, comme nous l'avons signalé, s'il est vrai que les théorèmes de Menger sont suffisants pour établir nos résultats sur le modèle de Hubbard (bidimensionnel à demi-remplissage), il n'est pas impossible qu'une version « améliorée » des résultats de Menger permette de jeter un éclairage nouveau sur certains problèmes de physique faisant intervenir d'une façon ou d'une autre une optimisation sur des graphes. Or, avec un peu de recaul, il est assez juste de dire qu'en définitive, le théorème max flow-min cut est en quelque sorte une version « avec poids » des résultats de Menger : plutôt que de considérer que tous les arcs ont un poids égal à 1 (voir théorème suivant), on leur attribue une capacité.

Le lien entre la théorie des réseaux et la théorie des graphes est donnée par le résultat suivant :

Théorème 4.2.6 *Soit R un réseau ayant une seule source x et un seul puits y , dont tous les arcs ont une capacité égale à 1. On a alors :*

- *La valeur d'un flot maximal de R est égale au nombre maximal de chemins arc-disjoints joignant x et y .*

- *La capacité d'une coupure minimale dans R est égale au nombre minimum d'arcs dont la suppression coupe tout chemin dirigé joignant x et y dans R .*

Pour la démonstration, nous renvoyons par exemple le lecteur à [BM76].

Premier article : Renormalisation des fonctions à deux points

Article paru dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*.

Renormalization of the 2-Point Function of the Hubbard Model at Half-Filling

Stéphane Afchain, Jacques Magnen and Vincent Rivasseau

Abstract. We prove that the Hubbard model at finite temperature T and half-filling is analytic in its coupling constant λ for $|\lambda| \leq c/|\log T|^2$, where c is some numerical constant. We also bound the self-energy and prove that the Hubbard model at half-filling is *not* a Fermi liquid (in the mathematically precise sense of Salmhofer), modulo a simple lower bound on the first non-trivial self-energy graph, which will be published in a companion paper.

I Introduction

In [1] we introduced the tools for a multiscale analysis of the two-dimensional Hubbard model at half-filling: momentum slices, sectors and their conservation rules.

In this paper we achieve the proof that the correlation functions of the model at finite temperature T are analytic in the coupling constant λ for $|\lambda| \leq c/|\log T|^2$, by treating the renormalization of “bipeds” (two-particle subgraphs), that was missing in [1].

This proof requires a new tool which is a constructive two-particle irreducible analysis of the self-energy. This analysis according to the *line form* of Menger’s theorem ([2]) leads to the explicit construction of three line-disjoint paths for every self-energy contribution, in a way compatible with constructive bounds. On top of that analysis, another one which is scale-dependent is performed: after reduction of some maximal subsets provided by the scale analysis, two vertex-disjoint paths are selected in every self-energy contribution. This requires a second use of Menger’s theorem, now in the *vertex form*. This construction allows to improve the power counting for two-point subgraphs, exploiting the particle-hole symmetry of the theory at half-filling, and leads to our analyticity result.

In the last section we write the upper bounds on the self-energy that follow from our analysis. These upper bounds strongly suggest that the second momentum derivative of the self energy is not uniformly bounded in the region $|\lambda| \leq c/|\log T|^2$. A rigorous proof of this last statement follows from a rigorous *lower* bound of the same type than these upper bounds, but for the smallest non-trivial self-energy graph, so as to rule out any “miraculous cancellation”. This lower bound, which we have now completed, is the tedious but rather straightforward study of a single finite-dimensional integral. Since it is not related to the main analysis in this paper, we postpone it to a separate publication [5].

Taken all together these bounds prove that the model is *not* a Fermi liquid in the sense of Salmhofer’s criterion (see [3] and [4]). Indeed to be such a Fermi liquid the second derivative would have to be uniformly bounded in a *larger* region (of type $|\lambda| \leq c/|\log T|$) than the one for which we prove it is unbounded. The scaling properties of the self energy and its derivatives in fact mean that the model is not of Fermi but of Luttinger type, with logarithmic corrections if we compare to the standard one-dimensional Luttinger liquid.

Let us state precisely the main result of this paper:

Theorem *The radius of convergence of the Hubbard model perturbative series at half-filling is at least $c/\log^2 T$, where T is the temperature and c some numerical constant. As T and λ jointly tend to 0 in this domain, the self-energy of the model does not display the properties of a Fermi liquid in the sense of [3], but those of a Luttinger liquid (with logarithmic corrections).*

Let us also put our paper in perspective and relation with other programs of rigorous mathematical study of interacting Fermi systems. Recall that in dimension 1 there is neither superconductivity nor extended Fermi surface, and Fermion systems have been proved to exhibit Luttinger liquid behavior [6]. The initial goal of the studies in two or three dimensions was to understand the low temperature phase of these systems, and in particular to build a rigorous constructive BCS theory of superconductivity. The mechanism for the formation of Cooper pairs and the main technical tool to use (namely the corresponding $1/N$ expansion, where N is the number of sectors which proliferate near the Fermi surface at low temperatures) have been identified [8]. But the goal of building a completely rigorous BCS theory *ab initio* remains elusive because of the technicalities involved with the constructive control of continuous symmetry breaking.

So the initial goal was replaced with a more modest one, still important in view of the controversies over the nature of two-dimensional “Fermi liquids” [7], namely the rigorous control of what occurs before pair formation. The last decade has seen excellent progress in this direction.

As is well known, sufficiently high magnetic field or temperature are the two different ways to break the Cooper pairs and prevent superconductivity. Accordingly two approaches were devised for the construction of “Fermi liquids”. One is based on the use of non-parity invariant Fermi surfaces to prevent pair formation. These surfaces occur physically when generic magnetic fields are applied to two-dimensional Fermi systems. The other is based on Salmhofer’s criterion [3], in which temperature is the cutoff which prevents pair formation.

In a large series of papers [9], the construction of two-dimensional Fermi liquids for a wide class of non-parity invariant Fermi surfaces has been completed in great detail by Feldman, Knörrer and Trubowitz. These papers establish Fermi liquid behavior in the traditional sense of physics textbooks, namely as a jump of the density of states at the Fermi surface at zero temperature, but they do not apply to the simplest Fermi surfaces, such as circles or squares, which are parity invariant.

Another program in recent years was to explore which models satisfy Salmhofer's criterion. Of particular interest to us are the three most "canonical" models in more than one dimension namely:

- the jellium model in two dimensions, with circular Fermi surface, nicknamed J_2 ,
- the half-filled Hubbard model in two dimensions, with square Fermi surface, nicknamed H_2 ,
- and the jellium model in three dimensions, with spherical Fermi surface, nicknamed J_3 .

The study of each model has been divided into two main steps of roughly equal difficulty, the control of convergent contributions and the renormalization of the two-point functions. In this sense, five of the six steps of our program are now completed. J_2 is a Fermi liquid in the sense of Salmhofer [10]–[11], H_2 is not, and is a Luttinger liquid with logarithmic corrections, according to [1], to the present paper, and to [5].

Results similar to [10]–[11] have been also obtained for more general convex curves not necessarily rotation invariant such as those of the Hubbard model at low filling, where the Fermi surface becomes more and more circular, including an improved treatment of the four-point functions leading to better constants [12]. Therefore as the filling factor of the Hubbard model is moved from half-filling to low filling, we conclude that there must be a crossover from Luttinger liquid behavior to Fermi liquid behavior. This solves the controversy [7] over the Luttinger or Fermi nature of two-dimensional many-Fermion systems above their critical temperature. The short answer is that it depends on the shape of the Fermi surface.

Up to now only the convergent contributions of J_3 , which is almost certainly a Fermi liquid, have been controlled [13]. The renormalization of the two-point functions for J_3 , the last sixth of our program, remains still to be done. This last part is difficult since the cutoffs required in [13] do not conserve momentum. This means that the two-point functions that have to be renormalized in this formalism are not automatically one particle irreducible, as is the case both in [11] and in this paper. This complicates their analysis.

II Slices, sectors, propagator decay and momentum conservation

We recall here some generalities that were explained in [1], in order to make this paper self-contained. Given a temperature $T > 0$, the Hubbard model lives on $[-\beta, \beta[\times \mathbb{Z}^2$, where $\beta = \frac{1}{T}$. Indeed, the real interval $[-\beta, \beta[$ should be thought of as the circle of radius β . A generic element of $[-\beta, \beta[\times \mathbb{Z}^2$ will be denoted $x = (x_0, \vec{x})$, where $x_0 \in [-\beta, \beta[$ and $\vec{x} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Like in every Fermionic model, the propagator $C(x_0, \vec{x})$ ¹ is antiperiodic in the variable x_0 , with antiperiod $\frac{1}{T}$. Therefore, for the Fourier transform of the propagator $\hat{C}(k_0, \vec{k})$, the relevant values for k_0 are discrete and called the Matsubara frequencies:

$$k_0 = \frac{(2n + 1)\pi}{\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{II.1}$$

whereas the vector \vec{k} lives on the two-dimensional torus $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$.

At half-filling and finite temperature T , we have:

$$\hat{C}_{a,b}(k) = \delta_{a,b} \frac{1}{ik_0 - e(\vec{k})}, \tag{II.2}$$

with $e(\vec{k}) = \cos k_1 + \cos k_2$. a and b are spin indices (elements of the set $\{\uparrow, \downarrow\}$), and may sometimes be dropped when they are not essential. Hence the expression of the real space propagator is:

$$C_{a,b}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2\beta} \sum_{k_0} \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{\pi} dk_2 e^{ik \cdot x} \hat{C}_{a,b}(k). \tag{II.3}$$

The notation \sum_{k_0} really means the discrete sum over the integer n in (II.1). When $T \rightarrow 0^+$ (which means $\beta \rightarrow +\infty$), k_0 becomes a continuous variable, the corresponding discrete sum becomes an integral, and the corresponding propagator $C_0(x)$ becomes singular on the Fermi surface defined by $k_0 = 0$ and $e(k) = 0$. This Fermi surface is a square of side size $\sqrt{2}\pi$ (in the first Brillouin zone) joining the corners $(\pm\pi, 0), (0, \pm\pi)$. We call this square the Fermi square, its faces and corners are called the Fermi faces and corners. Considering the periodic boundary conditions, there are really four Fermi faces, but only two Fermi corners.

In the following, to simplify notations, we will write:

$$\int d^3k \equiv \frac{1}{\beta} \sum_{k_0} \int_{[-\pi, \pi]^2} dk_1 dk_2, \quad \int d^3x \equiv \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} dx_0 \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^2}. \tag{II.4}$$

The interaction of the Hubbard model is simply

$$S_V = \lambda \int_V d^3x \left(\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2, \tag{II.5}$$

where $V := [-\beta, \beta] \times V'$ and V' is an auxiliary volume cutoff in two-dimensional space, that will be sent to infinity eventually. Remark that in (II.1) $|k_0| \geq \pi/\beta \neq 0$

¹Indeed, the propagator should be seen as depending on two variables $x, y \in [-\beta, \beta] \times \mathbb{Z}^2$, but by translational invariance, we have $C(x, y) = C(0, y - x)$ and we shall write in the following simply $C(x)$ instead of $C(0, x)$.

hence the denominator in $C(k)$ can never be 0 at non-zero temperature. This is why the temperature provides a natural infrared cutoff.

We use in this paper the same slices and sectors than in [1] and recall the main points for completeness. Introducing a fixed large number $M > 1$, we perform a slice analysis according to geometric scales of ratio M . Like in [1] since we have a finite temperature, this analysis should stop for a scale $i_{\max}(T)$ such that $M^{-i_{\max}(T)} \simeq 1/T$. We write simply i_{\max} for $i_{\max}(T)$.

As in [1] we use the tilted orthogonal basis in momentum space (e_+, e_-) , defined by $e_+ = (1/2)(\pi, \pi)$ and $e_- = (1/2)(-\pi, \pi)$. In the corresponding coordinates (k_+, k_-) the Fermi surface is given by $k_+ = \pm 1$ or $k_- = \pm 1$. This follows from the identity

$$\cos k_1 + \cos k_2 = 2 \cos \frac{\pi k_+}{2} \cos \frac{\pi k_-}{2} . \tag{II.6}$$

We also use the convenient notations

$$q_{\pm} = k_{\pm} - 1 \text{ if } k_{\pm} \geq 0 ; q_{\pm} = k_{\pm} + 1 \text{ if } k_{\pm} < 0 \tag{II.7}$$

so that $0 \leq |q_{\pm}| \leq 1$.

Picking a Gevrey compact support function $u(r) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ of order $\alpha < 1$ which satisfies:

$$u(r) = 0 \text{ for } |r| > 2 ; u(r) = 1 \text{ for } |r| < 1 , \tag{II.8}$$

we consider the partition of unity:

$$1 = \sum_{i=0}^{i_{\max}(T)} u_i \left(k_0^2 + 4 \cos^2 \frac{\pi k_+}{2} \cos^2 \frac{\pi k_-}{2} \right) , \tag{II.9}$$

with

$$\begin{cases} u_0(r) = 1 - u(r) , \\ u_i(r) = u(M^{2(i-1)}r) - u(M^{2i}r) \text{ for } i \geq 1. \end{cases} \tag{II.10}$$

The sum over i a priori runs from 0 to $+\infty$ to create a partition of unity, but in fact since k_0^2 is at least of order $M^{-2i_{\max}(T)}$, the sum over i stops as $i_{\max}(T)$. This is similar to [1].

The i slice propagator $C_i(k) = C(k)u_i(k)$ is further sliced into the \pm directions exactly as in [1]:

$$C_i(k) = \sum_{\sigma=(i,s_+,s_-)} C_\sigma(k) , \tag{II.11}$$

where

$$C_\sigma(k) = C_i(k) v_{s_+} \left(\cos^2 \frac{\pi k_+}{2} \right) v_{s_-} \left(\cos^2 \frac{\pi k_-}{2} \right) \tag{II.12}$$

using a second partition of unity

$$1 = \sum_{s=0}^i v_s(r) , \tag{II.13}$$

where

$$\begin{cases} v_0 &= 1 - u(M^2 r) , \\ v_s &= u_{s+1} \text{ for } 1 \leq s \leq i - 1 , \\ v_i(r) &= u(M^{2i} r) . \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Like in [1] we need $s_+ + s_- \geq i - 2$ for non-zero $C_\sigma(k)$, and the depth $l(\sigma)$ of a sector is defined as $l = s_+ + s_- - i + 2$, with $0 \leq l \leq i + 2$.²

We have the scaled decay ([1], Lemma 1):

$$|C_\sigma(x, y)| \leq c M^{-i-l} e^{-c' [d_\sigma(x, y)]^\alpha} \quad (\text{II.15})$$

where c, c' are some constants and

$$d_\sigma(x, y) = M^{-i} |x_0 - y_0| + M^{-s_+} |x_+ - y_+| + M^{-s_-} |x_- - y_-| . \quad (\text{II.16})$$

Furthermore we recall the momentum conservation rules for the four sectors $\sigma_j, j = 1, \dots, 4$ meeting at any vertex ([1], Lemma 4):

Proposition 1: Momentum conservation at a vertex. *For M large enough, the two smallest indices among $s_{j,+}, j = 1, \dots, 4$ differ by at most one unit, or the smallest one, say $s_{1,+}$ must coincide with i_1 with $i_1 < i_j, j \neq 1$. Exactly the same statement holds independently for the minus direction.*

We say that the sectors which have smallest indices at a vertex in a direction “collapse” in that direction.

We also introduce a new index for each sector, $r(\sigma) = E(i(\sigma) + l(\sigma)/2)$ (where E means the integer part like in [1], section 4) and the corresponding slice propagator

$$C_r(k) = \sum_{\sigma \mid r(\sigma)=r} C_\sigma(k) . \quad (\text{II.17})$$

We remark that this slice cutoff respects the symmetries of the theory. It is with respect to this slice index that our main multislice analysis will be performed. The propagator with infrared cutoff r is defined as

$$C_{\leq r}(k) = \sum_{\sigma \mid r(\sigma) \leq r} C_\sigma(k) . \quad (\text{II.18})$$

²This definition of sectors looks at first sight a bit complicated. It is designed for Proposition 1 to hold, in order to get an analyticity in $|\lambda| \leq c/\log^2 T$. With less detailed sectors one could prove analyticity in a radius, e.g., only in $|\lambda| \leq c/\log^4 T$. This would be well enough to prove that the Hubbard model is not a Fermi liquid in Salmhofer’s sense. The reader only interested in this result could therefore skip some of the technicalities below by putting everywhere the l index to zero, and skipping Proposition 1. But he should not skip Sections VI–VII because the two particle irreducible analysis and the ring construction are there to fix the correct *power* counting, not just the logarithmic power counting.

III Renormalization of the two-point function

Let us define $S_{2,\leq r}(k_0, \vec{k})$ as the connected amputated two-point function with infrared cutoff r , and define also:

$$G_{2,\leq r}(k_0, \vec{k}) = \frac{1}{2} \left(S_{2,\leq r}(k_0, \vec{k}) + S_{2,\leq r}(-k_0, \vec{k}) \right). \tag{III.19}$$

Consider k such that $e(\vec{k}) = 0$. If our cutoff respects the symmetries of the theory, which is the case here, the nesting or particle-hole symmetry forces G_2 to vanish for such k . Using the variables q_+ and q_- defined in (II.7), this is expressed by

Lemma III.1 *The following equality holds:*

$$G_{2,\leq r}(k_0, q_+, q_-) \Big|_{\substack{q_+=0 \\ \text{or } q_-=0}} = 0. \tag{III.20}$$

Proof. Using the symmetries of the theory, it is easy to check that for any Feynman two-point function graph G , the Feynman amplitude I_G satisfies:

$$I_G(k_0, k_1, k_2) = I_G(k_0, k_2, k_1), \tag{III.21}$$

$$I_G(k_0, k_1, k_2) = I_G(k_0, -k_1, k_2), \tag{III.22}$$

$$I_G(k_0, k_1, k_2) = -I_G(-k_0, k_1 + \pi, k_2 + \pi). \tag{III.23}$$

The last symmetry, the particle-hole symmetry, is the only non-trivial one and it can be checked because it changes all the propagators in momentum space into their opposite with all the momentum conservation laws respected. Since there is an odd number of propagators in a two-point subgraph, (III.23) holds.

Now we consider a point \vec{k} in the first quadrant with $0 \leq k_1 \leq \pi$ and $0 \leq k_2 \leq \pi$. On the Fermi curve whose equation in this quadrant is $k_2 = \pi - k_1$, we apply the relation (III.23) and get

$$0 = I_G(k_0, k_1, k_2) + I_G(-k_0, k_1 + \pi, k_2 + \pi) = I_G(k_0, k_1, k_2) + I_G(-k_0, 2\pi - k_2, 2\pi - k_1). \tag{III.24}$$

By the symmetries (III.21), (III.22) and periodicity 2π we obtain that $I_G(k_0, \vec{k}) + I_G(-k_0, \vec{k}) = 0$. By symmetry this relation holds also for the other quadrants, hence on all the Fermi square.

Summing over all Feynman graphs we obtain the vanishing of $G_{2,\leq r}(k_0, q_+, q_-)$ on the Fermi surface whose equation is $q_+ = 0$ or $q_- = 0$. \square

The function being constant on the straight lines of the Fermi square, obviously its partial derivatives to any order along these straight directions also vanish on the Fermi surface.

Recall that in [1] analyticity of a *simplified* Hubbard model at half filling was established in a domain of the expected optimal form $|\lambda| \leq c/|\log T|^2$. Indeed

and more precisely the result was established only for a model called “biped-free” in which all two-point subgraphs appearing in the multislice expansion were suppressed. A straightforward extension of the bounds given in [1] is not enough to prove analyticity in the expected domain for the full model.

Naive power counting in the style of [1] is indeed not sufficient to sum geometric series made of insertions of a two-point subgraph at a scale r and a propagator at scale $s \gg r$. Consider, e.g., the simplest such sum, made of the chain of Figure 1, where the three internal lines of the biped have main scale r and the external one has main scale $s \gg r$. The naive bound for the contribution of such a chain is $M^{-r-l/2}$ per propagator at scale r , $M^{-s-l'/2}$ per propagator at scale s , and contains for each irreducible biped one integral over the position of one vertex evaluated through the decay of a propagator of scale s and one evaluated through the decay of a propagator of scale r . Let us neglect the auxiliary “depth indices” l and l' which are not essential. The bound is therefore a geometric series with ratio

$$M^{-3r} M^{-s} M^{2r} M^{2s} = M^{s-r} . \tag{III.25}$$

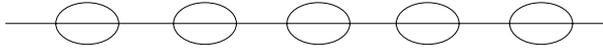


Figure 1. A simple chain of bipeds.

This bad factor M^{s-r} appears always in the naive bounds for any similar two-point function; it is exponential, not logarithmic in $s - r$, and certainly prevents a proof of analyticity, not only for $|\lambda| \leq c/|\log T|^2$, but for $|\lambda| \leq c/|\log T|^q$ for any integer q as well.

As remarked in [1], this is however only a bound, and the true contribution is much smaller due to the particle-hole symmetry of the model at half-filling. To exploit this, and to treat the true model, we must “renormalize” the two-point functions of the theory instead of suppressing them. This is accomplished by a second order Taylor expansion of the two-point function with given cutoff in the style of [11].

In momentum space we change first k_0 to the smallest possible values $\pm\pi T$:

$$\begin{aligned} S_{2,\leq r}(k_0, q_+, q_-) &= \frac{1}{2} \left\{ [S_{2,\leq r}(k_0, q_+, q_-) - S_{2,\leq r}(\pi T, q_+, q_-)] \right. \\ &\quad \left. + [S_{2,\leq r}(k_0, q_+, q_-) - S_{2,\leq r}(-\pi T, q_+, q_-)] \right\} \\ &\quad + G_{2,\leq r}(\pi T, q_+, q_-) . \end{aligned} \tag{III.26}$$

Then we use (III.20) to write

$$\begin{aligned} G_{2,\leq r}(\pi T, q_+, q_-) &= G_{2,\leq r}(\pi T, q_+, q_-) - G_{2,\leq r}(\pi T, 0, q_-) \\ &\quad - G_{2,\leq r}(\pi T, q_+, 0) + G_{2,\leq r}(\pi T, 0, 0) , \end{aligned} \tag{III.27}$$

where the variables (q_+, q_-) are the usual k variables translated, so as to vanish on the Fermi surface. They depend on the patch of coordinates chosen. This patch can be determined by the sector of the external line to which S_2 is hooked.

For constructive purpose one cannot however work in momentum space and one should write an equivalent dual formula in direct space. In practice a two-point function S_2 is integrated in a bigger function against a kernel always made of one external propagator C and a rest called R , which (in momentum space) may be in general a function of the set P_e of external momenta.

So in the momentum representation we have to compute not S_2 itself but integrals such as

$$I = \int dpdq S_2(p)C(q)R(p, q, P_e) \tag{III.28}$$

where from momentum conservation $R(p, q, P_e) = \delta(p - q)R'(p, q, P_e)$. To get the corresponding direct space representation we have to pass to the Fourier transform. Using same letters for functions and their Fourier transforms we write

$$I = \int dydz S_2(x, y)C(y, z)R(z, x, P_e) \tag{III.29}$$

(this integral being in fact by translation invariance independent of x) where

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= \int dp S_2(p)e^{ip(x-y)}; C(y, z) = \int dq C(q)e^{iq(y-z)}; \\ R(z, x, P_e) &= \int dpdq R(p, q, P_e)e^{ip(z-x)}, \end{aligned} \tag{III.30}$$

where the last integral is not really a double integral because of the δ function hidden in R .

Any counterterm for I that is expressed in momentum space by an operator τ acting on $S_2(p)$, such as putting S_2 to a fixed momentum k , hence $\tau S_2(p) = S_2(k)$, can also be represented by a dual operator τ^* acting in direct space, but on the external propagator. This τ^* is not unique, but a convenient choice is to use x as the reference point for τ^* :

$$\tau I = \int dpdq S_2(k)C(q)R(p, q, P_e) = \int dydz S_2(x, y)[e^{ik(x-y)}C(x, z)]R(z, x, P_e), \tag{III.31}$$

hence

$$\tau^* C(y, z) = e^{ik(x-y)}C(x, z). \tag{III.32}$$

The dual version of the more complicated expressions (III.26–III.27) is given by (we write the expressions in the patch where $q_+ = k_+ - 1, q_- = k_- - 1$)

$$I = \int dpdq S_2(p)C(q)R(p, q, P_e) = I_1 + I_2$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int dydz S_2(x, y) \left[C(y, z) - \cos(\pi T(x_0 - y_0)) C((x_0, y_+, y_-), z) \right] R(z, x, P_e) \\
I_2 &= \int dydz S_2(x, y) \cos(\pi T(x_0 - y_0)) C((x_0, y_+, y_-), z) R(z, x, P_e) \\
&\quad - \int dydz S_2(x, y) \cos(\pi T(x_0 - y_0)) e^{i(x_+ - y_+)} C((x_0, x_+, y_-), z) R(z, x, P_e) \\
&\quad - \int dydz S_2(x, y) \cos(\pi T(x_0 - y_0)) e^{i(x_- - y_-)} C((x_0, y_+, x_-), z) R(z, x, P_e) \\
&\quad + \int dydz S_2(x, y) \cos(\pi T(x_0 - y_0)) e^{i[(x_+ - y_+) + (x_- - y_-)]} C(x, z) R(z, x, P_e)
\end{aligned} \tag{III.33}$$

where the propagator C is now the natural extension of the propagator to the continuum.

Each integral I_1 and I_2 will be bounded separately. We need to exploit the differences as integrals of derivatives. This means that in I_1 we write:

$$\begin{aligned}
&C(y, z) - \cos(\pi T(x_0 - y_0)) C((x_0, y_+, y_-), z) \\
&= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left[C((ty_0 + (1-t)x_0, y_+, y_-), z) \cos(\pi T(1-t)(x_0 - y_0)) \right] \\
&= \int_0^1 dt \frac{1}{2} (y_0 - x_0) \left[e^{i\pi T(1-t)(x_0 - y_0)} (\partial_0 + i\pi T) C((ty_0 + (1-t)x_0, y_+, y_-), z) \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\pi T(1-t)(x_0 - y_0)} (\partial_0 - i\pi T) C((ty_0 + (1-t)x_0, y_+, y_-), z) \right]
\end{aligned} \tag{III.34}$$

and in I_2 we write

$$\begin{aligned}
&C((x_0, y_+, y_-), z) - e^{i(x_+ - y_+)} C((x_0, x_+, y_-), z) - e^{i(x_- - y_-)} C((x_0, y_+, x_-), z) \\
&\quad + e^{i[(x_+ - y_+) + (x_- - y_-)]} C(x, z) = F(1, 1) - F(0, 1) - F(1, 0) + F(0, 0)
\end{aligned} \tag{III.35}$$

where

$$F(s, t) = C\left((x_0, sy_+ + (1-s)x_+, ty_- + (1-t)y_+), z\right) e^{i[(1-s)(x_+ - y_+) + (1-t)(x_- - y_-)]}. \tag{III.36}$$

Finally we can use

$$F(1, 1) - F(0, 1) - F(1, 0) + F(0, 0) = \int_0^1 \int_0^1 dsdt \frac{d^2}{dsdt} (F(s, t)). \tag{III.37}$$

to obtain:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int dydz S_2(x, y) \cos(\pi T(x_0 - y_0)) R(z, x, P_e) e^{i[(1-s)(x_+ - y_+) + (1-t)(x_- - y_-)]} \\
&\quad \left[(y_+ - x_+)(y_- - x_-) (\partial_+ + i)(\partial_- + i) C\left((x_0, sy_+ + (1-s)x_+, ty_- + (1-t)y_+), z\right) \right].
\end{aligned} \tag{III.38}$$

IV Multislice expansion

We perform a multi-slice expansion, and get a Gallavotti-Nicolò or clustering tree structure as in [1]. In that paper a tree formula was used to express a typical function for the model, namely the pressure, but the analysis applies to any thermodynamic function. Now we would like to focus on the self-energy. A good starting point for this is the connected amputated two-point Schwinger function.

We fix here some conventions and notations that have not been introduced in [1]. We will call a “field” (between inverted commas) a five-tuple $(x, a, \sigma, \textit{nature}, \textit{order})$ where:

$$x \in V, a \in \{\uparrow, \downarrow\}, \sigma \in \text{Sect}(T), \textit{nature} \in \{+, -\}, \textit{order} \in \{1, 2\}. \tag{IV.39}$$

x is the spacetime position of the “field”, a its spin and σ its sector. \textit{nature} is an element of the set whose elements are denoted $+$ and $-$; this parameter is introduced in order to distinguish between the fields and the antifields (corresponding respectively to the Grassmann variables ψ and $\bar{\psi}$). Thus in the following, it may happen that we use the term field (without inverted commas) to mean a “field” such that $\textit{nature} = +$ and of course an antifield will be a “field” such that $\textit{nature} = -$. At last, the parameter \textit{order} allows to distinguish between the two copies of each field and antifield involved in the expansion of the quartic action: $(\sum_{a \in \{\uparrow, \downarrow\}} \bar{\psi}_a \psi_a) = \sum_{a, b} \bar{\psi}_a \psi_a \bar{\psi}_b \psi_b$, in such a way that $\textit{order} = 1$ corresponds to the first (anti)field represented by the Grassmann variables $\bar{\psi}_a$ and ψ_a , while $\textit{order} = 2$ corresponds to the second ones, represented by $\bar{\psi}_b$ and ψ_b .

Given an integer $n \geq 1$, an n -tuple (x_1, \dots, x_n) of elements of V , two n -tuples (a_1, \dots, a_n) and (b_1, \dots, b_n) of elements of $\{\uparrow, \downarrow\}$ and four n -tuples of elements of $\text{Sect}(T)$, denoted $(\sigma_1^j, \dots, \sigma_n^j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, we define the family of the antifields:

$$\mathcal{AF} = \left((x_1, a_1, \sigma_1^1, -, 1), (x_1, b_1, \sigma_1^2, -, 2), \dots, (x_n, a_n, \sigma_n^1, -, 1), (x_n, b_n, \sigma_n^2, -, 2) \right). \tag{IV.40}$$

We can imagine it as a $2n$ -tuple indexed by the set $[n] \times \{1, 2\}$ (where $[n]$ denotes the set $\{1, \dots, n\}$), lexicographically ordered:

$$(1, 1) \prec (1, 2) \prec (2, 1) \prec (2, 2) \prec \dots \prec (n, 1) \prec (n, 2). \tag{IV.41}$$

In the same way we introduce the family of the fields:

$$\mathcal{F} = \left((x_1, a_1, \sigma_1^3, +, 1), (x_1, b_1, \sigma_1^4, +, 2), \dots, (x_n, a_n, \sigma_n^3, +, 1), (x_n, b_n, \sigma_n^4, +, 2) \right). \tag{IV.42}$$

Observe that \mathcal{AF} and \mathcal{F} are defined as families and not as sets. Hence the cardinality of \mathcal{AF} and \mathcal{F} is $2n$, whatever may be the values of the parameters $\{x_v\}$, $\{a_v\}$, $\{b_v\}$ and $\{\sigma_v^j\}$.

Given $f \in \mathcal{AF}$ and $g \in \mathcal{F}$, we will simply denote by $C(f, g)$ the propagator:

$$C(f, g) = \delta_{a(f), a(g)} \delta_{\sigma(f), \sigma(g)} C(x(f) - x(g)), \tag{IV.43}$$

where the notations $a(f)$, $a(g)$, $\sigma(f)$, $\sigma(g)$, $x(f)$, $x(g)$ have an immediate obvious meaning.

With all these notations, we can express the partition function of the model as:

$$Z(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \det_{(f,g) \in \mathcal{AF} \times \mathcal{F}} (C(f, g)). \tag{IV.44}$$

Sometimes we shall write simply $\left\{ \begin{matrix} \mathcal{AF} \\ \mathcal{F} \end{matrix} \right\}$ for the Fermionic determinant (Cayley's notation). To write the unnormalized unamputated two-point Schwinger function:

$$S_2(Y, Z)_{\sigma_0} = \int d\mu_C (\bar{\psi}, \psi) \bar{\psi}_{\uparrow, \sigma_0}(Y) \psi_{\uparrow, \sigma_0}(Z) \exp \left(\lambda \int_V d^3x \left(\sum_a \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2 \right), \tag{IV.45}$$

we only need to add the source terms $(Y, \uparrow, \sigma_0, -)$ to \mathcal{AF} and $(Z, \uparrow, \sigma_0, +)$ to \mathcal{F}^3 . Since \mathcal{AF} and \mathcal{A} are indeed totally ordered families, we must specify in which position $(y, \uparrow, \sigma_0, -)$ and $(z, \uparrow, \sigma_0, +)$ are inserted. Clearly, they must be added in first position, that is, we have:

$$\mathcal{AF} = \left((y, \uparrow, \sigma_0, -), (x_1, a_1, \sigma_1^1, -, 1), \dots, (x_n, a_n, \sigma_n^1, -, 1), (x_n, b_n, \sigma_n^2, -, 2) \right) \tag{IV.46}$$

and

$$\mathcal{F} = \left((z, \uparrow, \sigma_0, +), (x_1, a_1, \sigma_1^1, -, 1), \dots, (x_n, a_n, \sigma_n^1, -, 1), (x_n, b_n, \sigma_n^2, -, 2) \right). \tag{IV.47}$$

Observe that, with a slight abuse of notation, we denote these two families again by \mathcal{AF} and \mathcal{F} . With this convention, the expression of the two-point function $S_2(y, z)_{\sigma_0}$ is exactly the same as the one of $Z(V)$:

$$S_2(Y, Z)_{\sigma_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \det_{(f,g) \in \mathcal{AF} \times \mathcal{F}} (C(f, g)). \tag{IV.48}$$

The main tool to express the *connected* two-point function is a Taylor jungle formula [14], that is a forest formula which is ordered according to the main slice index, namely r , attached to the propagator, to expand the Fermionic determinant.

³Note that these two external "fields" have no *order* parameter.

To extract the *connected* part of the two-point function, namely $S_2(Y, Z)_{c, \sigma_0} = Z^{-1} S_2(Y, Z)_{\sigma_0}$, we only need to factorize the contributions of the vacuum clusters of the jungle, and we get a *tree formula*:

$$S_2(Y, Z)_{c, \sigma_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}, \{\sigma_v^j\}} \sum_{\substack{\text{oriented trees } \mathcal{T} \\ \text{over } \mathcal{V}}} \sum_{\substack{\text{field attributions} \\ \Omega}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} C(f(\ell, \Omega), g(\ell, \Omega)) \right) \det_{(f, g) \in \mathcal{AF}_{\text{left}} \times \mathcal{F}_{\text{left}}} \left(C(f, g, \{w_\ell\}) \right). \tag{IV.49}$$

The amputated connected two-point function $S_2(y, z)_{c, a}$ is given by a similar formula, in which we should delete the two external sources Y and Z and the two propagators which connect them to two particular external distinguished vertices⁴. Let us rename the position of these vertices as y and z , and rename all remaining internal positions as x_1, \dots, x_n . So, after integration over positions of these n internal vertices, this amputated function is a function of the positions y and z of the two particular special external vertices.

We shall denote \mathcal{V} the family of the vertices: $\mathcal{V} = (y, z, x_1, \dots, x_n)$.

We recall that a tree over $\mathcal{V} = \{y, z, x_1, \dots, x_n\}$ is a set of pairs of vertices $\{v, v'\}$ (called the links of the tree), such that the corresponding graph has no loop and connects all the elements of \mathcal{V} . As $|\mathcal{V}| = n + 2$; any tree over \mathcal{V} has $n + 1$ links.

Once a tree \mathcal{T} over \mathcal{V} is chosen, a field attribution Ω for \mathcal{T} is a family of the form

$\left((\omega_\ell, \omega'_\ell) \right)_{\ell \in \mathcal{T}}$ where ω_ℓ is a map from the pair ℓ to $\{1, 2\}$ and ω'_ℓ a one-to-one map from ℓ to $\{+, -\}$. Hence Ω is simply the choice, for each “half-line” of the tree \mathcal{T} of a precise “field” of the vertex to which this half-line hooks. We have taken into account the constraint that a field must contract with an antifield by the fact that the maps $\omega_\ell : \ell \mapsto \{+, -\}$ are one-to-one.

Given $\ell \in \mathcal{T}$ and a field attribution Ω , we denote respectively by $f(\ell, \Omega)$ and $g(\ell, \Omega)$ the antifield and the field attached to ℓ by Ω . $\mathcal{AF}_{\text{left}}$ and $\mathcal{F}_{\text{left}}$ are the families of the remaining “fields”:

$$\mathcal{AF}_{\text{left}} = \mathcal{AF} \setminus \{f(\ell, \Omega), \ell \in \mathcal{T}\} \text{ and } \mathcal{F}_{\text{left}} = \mathcal{F} \setminus \{g(\ell, \Omega), \ell \in \mathcal{T}\}. \tag{IV.50}$$

At last we must precise the expression of the entries of the remaining Fermionic determinant that depends now on the interpolation parameters $\left(w_\ell \right)_{\ell \in \mathcal{P}_2(\mathcal{V})}$. We recall that (see [14] – [1] for details) the data w_ℓ allows to define a vector

⁴Indeed we can forget the graphs where these two external sources Y and Z connect to the same external vertex, the “generalized tadpoles”, since they are zero by the particle hole symmetry.

$X^{\mathcal{T}}(\{w_\ell\})$ whose components are indexed by $\mathcal{P}_2(\mathcal{V})$, the set of the (unordered) pairs of vertices. By definition, for $\{v, v'\} \in \mathcal{P}_2(\mathcal{V})$, $X^{\mathcal{T}}(\{w_\ell\})_{\{v, v'\}}$ is the infimum of the w_ℓ parameters over the unique path in \mathcal{T} from v to v' . Then, the expression of $C(f, g, \{w_\ell\})$ is simply obtained by multiplying $C(f, g)$ by the component of $X^{\mathcal{T}}(\{w_\ell\})$ corresponding to the vertices $v(f)$ and $v(g)$ of f and g . Hence we have:

$$C(f, g, \{w_\ell\}) = X^{\mathcal{T}}(\{w_\ell\})_{\{v(f), v(g)\}} C(f, g). \quad (\text{IV.51})$$

IV.1 The Gallavotti-Nicolò tree

In order to analyze further this sum, it is well known that the main tool is the ‘‘Gallavotti-Nicolò’’ or clustering tree which represents the inclusion relations of the connected components of ‘‘higher scales’’ (smaller r indices) into those of ‘‘lower scales’’ (bigger r indices) [6]. This tree is also the key tool to identify the components that require some renormalization (here the two-point functions). But before doing this, we want to describe precisely the constraints on the sum over the sectors $\{\sigma_v^j\}$. Indeed, this sum could be let free of constraints, but due to the expression of the propagator:

$$\begin{aligned} C(f, g) &= C((x(f), a(f), \sigma(f)); (x(g), a(g), \sigma(g))) \\ &= \delta_{a(f), a(g)} \delta_{\sigma(f), \sigma(g)} C_{\sigma(f)}(x(f), x(g)), \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

we see easily that the sectors and spin indices are conserved along each line of the tree \mathcal{T} . Therefore, once \mathcal{T} has been fixed, the sum over the σ_v^j 's can be understood as a sum over the families of sectors indexed by the lines of \mathcal{T} , denoted $(\sigma_\ell)_{\ell \in \mathcal{T}}$, and the families of sectors indexed by the remaining ‘‘fields’’, $(\sigma_f)_{f \in \mathcal{AF}_{\text{left}} \cup \mathcal{F}_{\text{left}}}$.

Now let us suppose we are given an oriented tree \mathcal{T} over \mathcal{V} , and an attribution of sectors, $(\sigma_\ell)_{\ell \in \mathcal{T}}$ and $(\sigma_f)_{f \in \mathcal{AF}_{\text{left}} \cup \mathcal{F}_{\text{left}}}$. The Gallavotti-Nicolò tree is defined as follows: for each index $r \in [0, r_{\max}(T)]$, we define a partition Π_r . Π_r is the set of the connected components of the graph whose set of vertices is \mathcal{V} and whose internal tree lines are the lines of \mathcal{T} such that $r_\ell \leq r$. The family $\bigcup_{r \in [0, r_{\max}]} \Pi_r$ is partially ordered by the inclusion relation and forms the nodes of the Gallavotti-Nicolò tree.

To visualize better the situation, let us take the example of Figure 2 for an amputated two-point function with external vertices at y and z (the external amputated legs in slice 6 are represented as dotted lines in Figure 2). The total number of vertices is 8, hence there are 7 lines in the tree \mathcal{T} represented as bold lines, and 16 internal fields in the determinant represented as thin half-lines.

In the attribution of r indices chosen we see that there is a two-point subfunction to renormalize, the one in the dotted box, which is completed at scale 3 with external lines at scale 5.

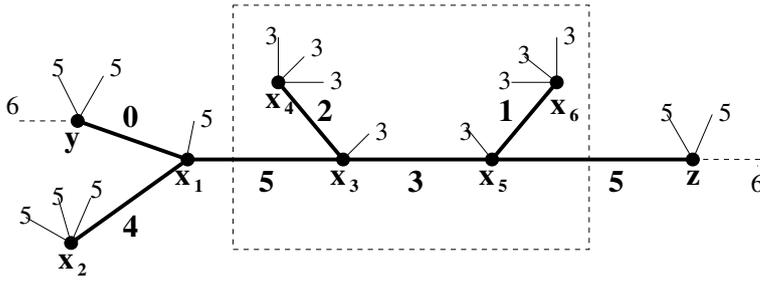


Figure 2. A contribution with eight vertices to the two-point function at scale 6.

The corresponding Gallavotti-Nicolò tree is pictured in Figure 3 (with determinant fields omitted for simplicity). This abstract tree should not be confused with \mathcal{T} , whose lines are the bold lines of Figure 3.

As in [1], we can now write an expression of $S_2(y, z)_{c,a}$ re-ordered in terms of these “clustering tree structures”, in which all nested sums have to be compatible:

$$\begin{aligned}
 S_2(y, z)_{c,a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{n!} \int_{V^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \\
 &\quad \times \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \sum_{\substack{\text{clustering tree} \\ \text{structures } \mathcal{C}}} \sum_{\substack{\text{trees } \mathcal{T} \\ \text{over } \mathcal{V}}} \sum_{\substack{\text{field attributions} \\ \Omega}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \\
 &\quad \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} C(f(\ell, \Omega), g(\ell, \Omega)) \right)_{(f, g) \in \mathcal{AF}_{\text{left}} \times \mathcal{F}_{\text{left}}} \det \left(C(f, g, \{w_\ell\}) \right).
 \end{aligned}
 \tag{IV.53}$$

In the Gallavotti-Nicolò tree, of particular interest to us are the nodes such as the dotted box of Figure 2 between scales 3 and 5 which correspond to *two-point functions*. They are the ones that were artificially suppressed in the simplified model [1]. We need to renormalize them to solve the divergent power counting explained in Section III. But we can choose to renormalize only the two-point functions for which external lines have r index bigger than the maximum index of internal lines plus 2, so as to create a gap between internal and external supports⁵. Such two-point functions are the *dangerous* nodes of the GN tree. The gap ensures that all such *dangerous* two-point functions, which are those that we need to renormalize, are automatically one-particle irreducible by momentum conservation⁶. Hence they correspond to the so-called self-energy.

⁵The two-point functions for which the external r index is the maximum r index of internal lines plus 1 don't really need renormalization, as is obvious from power counting (see (III.25)).

⁶Indeed any one particle reducible two-point function would have its external momentum also flowing through any internal one-particle-reducibility line, which is a contradiction with the fact that the internal and external cutoffs have empty intersection.

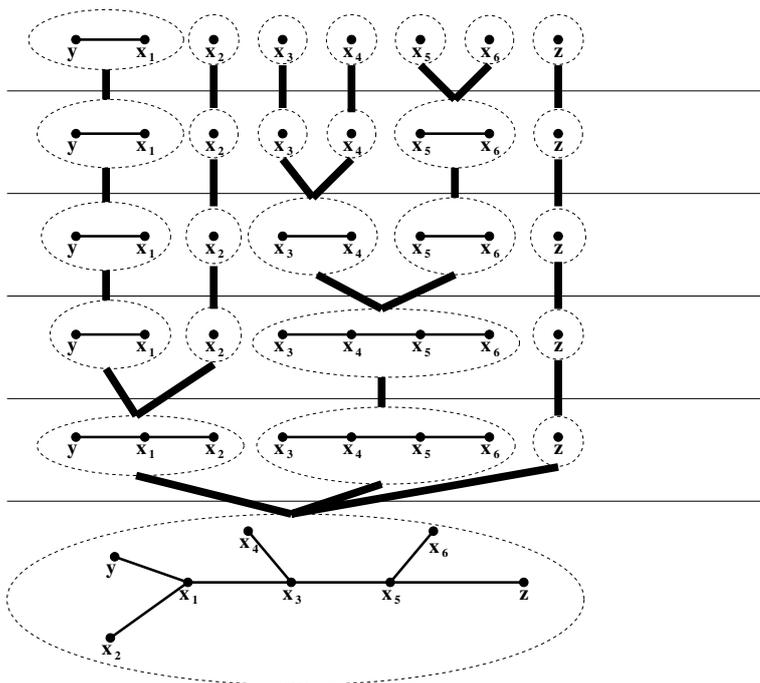


Figure 3. The Gallavotti-Nicolò tree corresponding to Figure 2.

We can re-order the expression of $S_2(y, z)_{c, a}$ in terms of these dangerous two-point subgraphs, in the spirit of [1]:

$$\begin{aligned}
 S_2(y, z)_{c, a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{n!} \int_{V^n} d^3 x_1 \dots d^3 x_n \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \\
 &\quad \sum_{\substack{\text{biped structures} \\ \mathcal{B}}} \sum_{\substack{\text{external fields} \\ \mathcal{E}\mathcal{B}}} \sum_{\substack{\text{clustering tree} \\ \text{structures } \mathcal{C}}} \sum_{\substack{\text{trees } \mathcal{T} \\ \text{over } \mathcal{V}}} \sum_{\substack{\text{field attributions} \\ \Omega}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \\
 &\left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} C(f(\ell, \Omega), g(\ell, \Omega)) \right) \det_{(f, g) \in \mathcal{AF}_{\text{left}} \times \mathcal{F}_{\text{left}}} \left(C(f, g, \{w_\ell\}) \right).
 \end{aligned}
 \tag{IV.54}$$

V Main theorem on the self-energy

We have given in the last section an expression for the connected amputated 2-point Schwinger function. Now we would like to consider the self-energy $\Sigma(y, z)$. This quantity can be defined either through its Feynman graph expansion, or through a Legendre transform.

In the first approach, which we use, $\Sigma(y, z)$ is given by the same sum (IV.54) than $S_2(y, z)_{c, a}$ but restricted to the contributions which are 1-particle-irreducible in the channel $y-z$, that is, in which y and z cannot be disconnected by the deletion of a single line. This definition does not look very constructive because in principle we would have to expand out all the remaining determinant in (IV.54) to know which contributions are 1-PI or not. But in the next section we shall see that to extract this information a partial (still constructive) expansion of the determinant is enough.

In this section we only formulate our main bound on this connected amputated and one particle irreducible (1-PI) 2-point function or self-energy Σ . Note that, for convenience, we shall simply write in the following “1-PI” to mean: “1-particle-irreducibility in the channel $y - z$ ”.

The sum of all contributions to the self-energy with infrared cutoff r and fixed external positions y and z will be called $\Sigma_2(y, z)^{\leq r}$.

Consider the set Σ_r of triplets $\bar{\sigma} = (i(\bar{\sigma}), s_+(\bar{\sigma}), s_-(\bar{\sigma}))$ with $0 \leq i \leq r$ and $0 \leq s_{\pm} \leq r$, also called “generalized sectors”. We can obviously also define the scale distance $d_{\bar{\sigma}}(y, z)$ for such triplets as in (II.16), and the index $r(\bar{\sigma}) = (i(\bar{\sigma}) + s_+(\bar{\sigma}) + s_-(\bar{\sigma}))/2$. Then with all the notations of the previous section, the following bound holds:

Theorem V.1 *There exists a constant K such that:*

$$|\Sigma_2(y, z)^{\leq r}| \leq (\lambda |\log T|)^2 \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_r} K M^{-3r(\bar{\sigma})} e^{-cd_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(y, z)}, \tag{V.55}$$

$$|y_+ - z_+| \cdot |y_- - z_-| \cdot |\Sigma_2(y, z)^{\leq r}| \leq (\lambda |\log T|)^2 \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_r} K M^{-2r(\bar{\sigma})} e^{-cd_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(y, z)}, \tag{V.56}$$

$$|y_0 - z_0| \cdot |\Sigma_2(y, z)^{\leq r}| \leq (\lambda |\log T|)^2 \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_r} K M^{-2r(\bar{\sigma})} e^{-cd_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(y, z)}. \tag{V.57}$$

For the second equation (V.56), a naive bound would have M^{-r} instead of M^{-2r} . So the crucial point is to gain a factor M^{-r} in the bound (V.56). (V.55) and (V.57) are easy.

The next four sections are dedicated to the proof of this theorem. We call a self energy contribution “primitively divergent” if there is no smaller biped in it. The sum of all such “primitively divergent” contributions to the self-energy with infrared cutoff r and fixed external positions y and z is called $\Sigma_{2,pr}(y, z)^{\leq r}$. We first prove in the next three sections that the bounds (V.56) and (V.57) hold for $\Sigma_{2,pr}(y, z)^{\leq r}$, then by an inductive argument we extend the bound to the general unrestricted self-energy.

The most naive bounds don’t work. Indeed we should optimize power counting and positions integrals separately in the 0 and \pm directions in order to bound correctly the effect of the $(y - z)_{\pm}$ factors in (V.56). But the problem is how to do this constructively. One cannot simultaneously build the three spanning trees that would optimize spatial integrations with respect to the 0 and \pm directions, as this

may typically develop too many loops out of the determinant. The road to solve this problem is to derive not only a 1-PI, but a 2-PI expansion inside each two-point contribution to renormalize. This expansion can be controlled constructively; then one can optimize over the 0 and \pm multiscale analysis, using only the tree \mathcal{T} and the additional loops which the expansion has taken out of the determinant.

In this way one obtains a better bound than the one obtained naively by simply exploiting a single tree formula as in [1]. This is the key to our problem of the renormalization of the 2-point function.

VI Multiarch expansion

Consider the self-energy of the model. The previous tree expansion insured the connexity of the graphs but not their 1 or 2-particle-irreducibility. We are going now to expand out explicitly some additional lines from the determinant, in order to complete the tree \mathcal{T} into a 2-PI graph. Nevertheless it is not trivial to ensure that this additional expansion does not generate “too many” terms, or in other words that it is “constructive”. In the following section, we explain in detail this expansion for an expression of the type $F = \prod_{\ell \in \mathcal{T}} C_{\sigma(\ell)}(f(\ell), g(\ell)) \det_{\text{left}, \mathcal{T}}$.

VI.1 1-particle-irreducible arch expansion

First, we fix some conventions. We consider the tree \mathcal{T} connecting all the vertices y, z, x_1, \dots, x_n . We distinguish in \mathcal{T} the unique path connecting y and z through \mathcal{T} , denoted by $P(y, z, \mathcal{T})$. Each vertex of this path is numbered by an integer starting with 0 for y and increasing towards z , which is the end of the path (with number p). The set of the remaining $2(n + 2)$ fields and antifields, denoted by $\mathfrak{F}_{\text{left}, \mathcal{T}} = \mathcal{AF}_{\text{left}, \mathcal{T}} \cup \mathcal{F}_{\text{left}, \mathcal{T}}$, is divided into $p + 1$ disjoint subsets or “packets” $\mathfrak{F}_0, \dots, \mathfrak{F}_p$: by definition, an element $f \in \mathfrak{F}_{\text{left}, \mathcal{T}}$ belongs to \mathfrak{F}_k if and only if k is the first vertex of $P(y, z, \mathcal{T})$ met by the unique path in \mathcal{T} joining the vertex to which f is hooked to y . Figure 4 allows to visualize better the situation. When f belongs to the packet \mathfrak{F}_k we also say that the packet index of f is k .

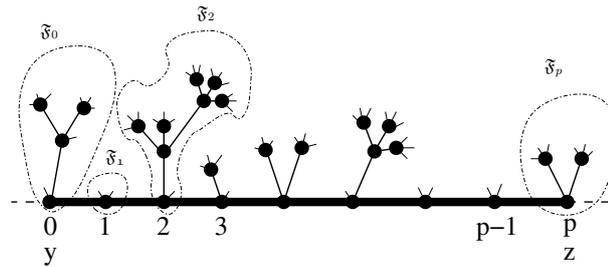


Figure 4. The tree \mathcal{T} and the “field packets” $\mathfrak{F}_0, \dots, \mathfrak{F}_p$.

In this figure we have represented the external (amputated) propagators by dotted lines, the links of $P(y, z, \mathcal{T})$ by bold lines, the other links of \mathcal{T} by thin lines and at last the remaining fields in the determinant by thinner half-lines.

Once the ordered family of subsets of fields $\mathfrak{F}_0, \dots, \mathfrak{F}_p$ has been defined, the arch expansion is carried out in the standard way of [11], Appendix B1.

Let us recall this expansion here for self-completeness. Among all the possible contraction schemes implicitly contained in $\det_{\text{left}}, \mathcal{T}$, we select through a Taylor expansion step with an interpolating parameter s_1 those which have a contraction between an element of \mathfrak{F}_0 and $\cup_{k=1}^p \mathfrak{F}_k$. Given such a contraction, we call k_1 the index of the precise packet joined to \mathfrak{F}_0 by this contraction. Thus we have added to \mathcal{T} an explicit line ℓ_1 joining \mathfrak{F}_0 to \mathfrak{F}_{k_1} . At this stage, the graph obtained is 1-particle-irreducible in the channel $y - x_{k_1}$ (see Figure 5).

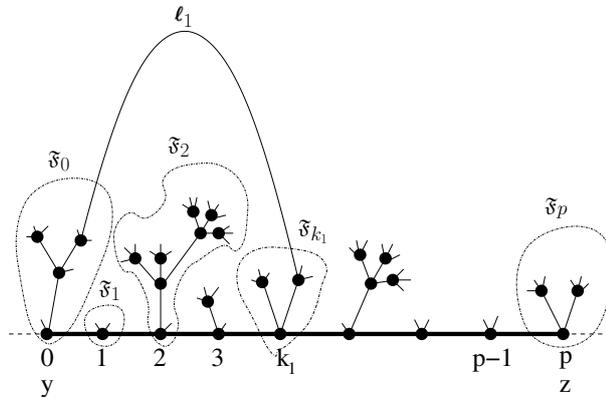


Figure 5. The tree \mathcal{T} completed by a first line from the arch expansion.

Then we continue the procedure, testing whether there is a contraction between an element of $\cup_{k=0}^{k_1} \mathfrak{F}_k$ and one of $\cup_{k=k_1+1}^p \mathfrak{F}_k$. If there is not, the line from k_1 to $k_1 + 1$ of the path $P(x, y, \mathcal{T})$ is certainly a line of 1-particle-reducibility (i.e., its deletion would disconnect y and z), and therefore the corresponding contraction schemes do not contribute to the self-energy. But on the contrary, if there exists a line ℓ_2 between $\cup_{k=0}^{k_1} \mathfrak{F}_k$ and $\cup_{k=k_1+1}^p \mathfrak{F}_k$, we select it and we have the picture of Figure 6.

The graph $\mathcal{T} \cup \{\ell_1, \ell_2\}$ is clearly 1-particle-irreducible in the channel $y - x_{k_2}$. Observe that $0 < k_1 < k_2$ therefore, in at most p steps, we shall reach certainly the end vertex z and we shall have a 1-particle-irreducible graph (in the channel $y - z$). Any final set of m arches derived in this way is called an m -arch system.

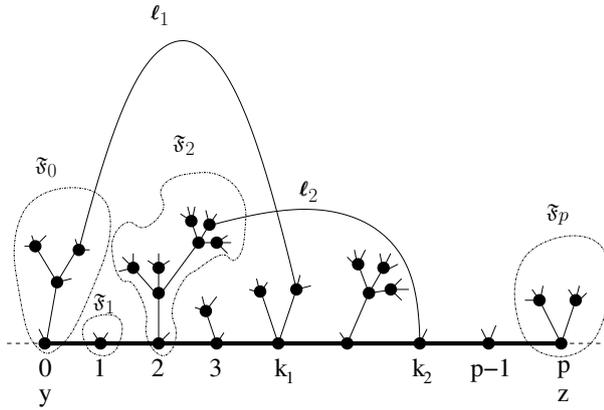


Figure 6. The tree \mathcal{T} completed by two lines from the arch expansion.

We obtain the 1-PI part of the determinant as:

$$F_{1-PI} = \sum_{\substack{\text{m-arch systems} \\ (f_1, g_1), \dots, (f_m, g_m) \\ \text{with } m \leq p}} \left[\prod_{r=1}^m \int_0^1 ds_r \right] \left(\prod_{r=1}^m C(f_r, g_r)(s_1, \dots, s_{r-1}) \right) \frac{\partial^m \det_{\text{left}, \mathcal{T}}}{\prod_{r=1}^m \partial C(f_r, g_r)}(\{s_r\}) . \quad (\text{VI.58})$$

The expansion respects positivity of the interpolated propagator at any stage, because all s_r interpolations are always performed between a subset of packets and its complement, hence the final covariance as function of the s_r parameters is a convex combination with positive coefficients of block-diagonal covariances. This ensures that the presence of the s_r parameters does not alter Gram’s bound on the remaining determinant, which is the same than with all these parameters set to 1 ([10]–[11]).

Furthermore it is constructive in the sense that it does not generate any factorial in the bounds for the sum over all derived arches. Here is a subtlety. Once the departure and arrival fields joined by the arches have been fixed (which costs at most 4^n), the arrival fields are determined because their packet indices are strictly growing. But the departure fields are not, and in principle this could create a constructive problem.

For example, if the line ℓ_1 joins \mathfrak{F}_0 to \mathfrak{F}_{k_1} , it is possible for the second one, ℓ_2 , to join \mathfrak{F}_0 to \mathfrak{F}_{k_2} (see Figure 7). Remark that in this case *a posteriori* ℓ_1 is useless.

With three arches, an arch system such as Figure 8 shows the same phenomenon, in the sense that *a posteriori* ℓ_2 is useless.

This is not a great disadvantage, because in spite of this lack of minimality, the expansion can indeed be controlled in a constructive way. The reason is that

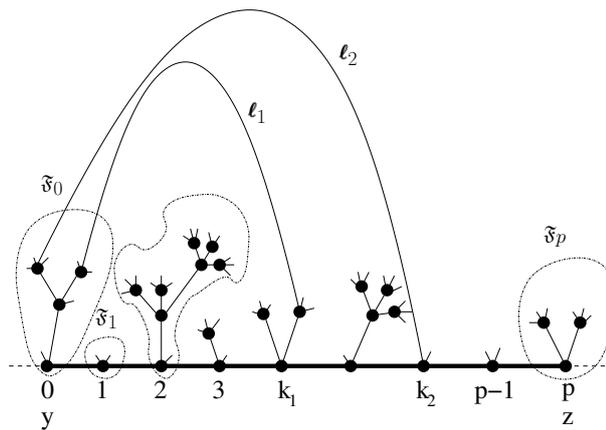


Figure 7. A pair of arches which is not minimal from the 1-PI point of view.

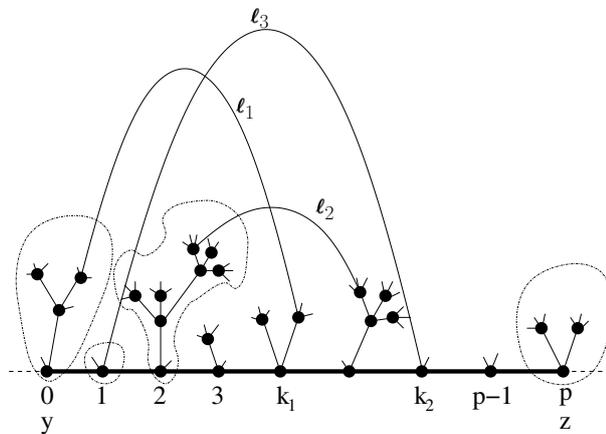


Figure 8. Another example of a “non-minimal” system of three arches.

the arches for which the departure fields indices do not grow are damped by small s interpolation parameters, so that the result is indeed bounded by K^n [11]. More precisely the dependence in the s_r parameters in front of each arch system is a monomial $\prod_{r=1}^m s_r^{q_{r,m-\text{arch}}}$, so that we have:

$$\left(\prod_{r=1}^m C(f_r, g_r)(s_1, \dots, s_{r-1}) \right) = \prod_{r=1}^m C(f_r, g_r) \prod_{r=1}^m s_r^{q_{r,m-\text{arch}}} . \quad (\text{VI.59})$$

The reader can check that the integer $q_{r,m-\text{arch}} \geq 0$ is the number of arches which fly entirely over the r th arch, making it useless.

Lemma VI.1 *There exists some numerical constant K such that (for $n \geq 1$):*

$$\sum_{m=1}^p \sum_{\substack{m\text{-arch systems} \\ (f_1, g_1), \dots, (f_m, g_m) \\ \text{with } m \leq p}} \left(\prod_{r=1}^m \int_0^1 ds_r \right) \prod_{r=1}^m s_r^{q_r, m\text{-arch}} \leq c.K^n . \tag{VI.60}$$

Proof. The proof is identical to [11], Lemma 9. We reproduce it here for completeness. Consider \mathfrak{F}_{k_r} the arrival packet of the r th arch, which joins the field f_r to the field $g_r \in \mathfrak{F}_{k_r}$. The set of possible departure packets to which f_r must belong is

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{F}_0 \cup \mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{k_{r-1}} \tag{VI.61}$$

We also define $e_i = |\mathfrak{E}_i - \mathfrak{E}_{i-1}|$ as the number of fields and antifields in \mathfrak{E}_i and not in \mathfrak{E}_{i-1} .

The sum over all m -arch systems which we have to bound is

$$\sum_{m=1}^p \sum_{0 < k_1 < \dots < k_m = p} \sum_{\substack{g_r \in \mathfrak{F}_{k_r} \\ r=1, \dots, m}} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_m \sum_{\substack{f_r \in \mathfrak{E}_r \\ r=1, \dots, m}} \prod_{r=1}^m s_r^{q_r, m\text{-arch}} . \tag{VI.62}$$

We start observing that

$$\sum_{\substack{f_r \in \mathfrak{E}_r \\ r=1, \dots, m}} \prod_{r=1}^m s_r^{q_r, m\text{-arch}} \leq \prod_{r=1}^m a_r(s_1, \dots, s_{r-1}) \tag{VI.63}$$

where a_r is defined inductively by

$$a_1 = e_1 \quad \text{and} \quad a_r(s_1, \dots, s_{r-1}) = e_r + s_{r-1} a_{r-1}(s_1, \dots, s_{r-2}).$$

To see this we remark that we have e_1 choices to choose f_1 . In the same way, we have e_2 choices to choose f_2 if it does not hook to \mathfrak{F}_1 . If it does hook to \mathfrak{F}_1 , we have $e_1 = a_1$ choices, but we also have a multiplicative factor s_1 coming from $s_1^{q_1, m\text{-arch}}$. This iterates into (VI.63). Remark that (VI.63) is an overestimate, not an equality, as, once f_1 is fixed we have only $e_1 - 1$ choices for f_2 if it falls in the \mathfrak{F}_1 packet, and so on.

We have also

$$\int_0^1 \prod_{r=1}^m ds_r \prod_{r=1}^m a_r(s_1, \dots, s_{r-1}) \leq e^{\sum_{r=1}^q e_r} . \tag{VI.64}$$

Indeed this follows from the inductive use of

$$\int_0^1 (as + b) ds \leq \int_0^1 e^{as+b} ds \leq (1/a)e^{a+b} , \text{ for } a > 0, b > 0. \tag{VI.65}$$

Now, as $e_r = |\mathfrak{E}_r \setminus \mathfrak{E}_{r-1}|$, we have

$$\sum_{r=1}^m e_r \leq 2(n+2) \tag{VI.66}$$

since $2(n+2)$ is the total number of remaining fields (after extraction of the tree) in the amputated two-point function considered.

Finally it is easy to check that

$$\sum_m \sum_{0 < k_1 < \dots < k_m = p} \sum_{\substack{g_r \in \mathfrak{F}_r \\ r=1, \dots, m}} 1 \leq K^n . \tag{VI.67}$$

Indeed

$$\sum_{\substack{g_r \in \mathfrak{F}_r \\ r=1, \dots, m}} 1 = \sum_{r=1}^m |\mathfrak{F}_{k_r}| < 2(n+2) \tag{VI.68}$$

and $\sum_{0 < k_1 < \dots < k_m = p} 1$ is bounded by the number of subsets of $\{0, \dots, p-1\}$, hence is bounded by $2^p \leq 2^n$. This ends the proof. \square

This allows us to express the self-energy as:

$$\begin{aligned} \Sigma(y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{n!} \int_{\Lambda^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \\ &\sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \sum_{\mathfrak{B}} \sum_{\mathfrak{E}\mathfrak{B}} \sum_{\substack{\text{clustering tree} \\ \text{structures } \mathfrak{C}}} \sum_{\substack{\text{trees } \mathcal{T} \\ \text{over } \mathcal{V}}} \sum_{\Omega} \\ &\sum_{\{\sigma_v^j\}} \sum_{\substack{m\text{-arch systems} \\ (f_1, g_1, \dots, f_m, g_m) \\ \text{with } m \leq p}} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 dw_\ell \right) \left(\prod_{r=1}^m \int_0^1 ds_r \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} C_{\sigma(\ell)}(f_\ell, g_\ell) \right) \\ &\left(\prod_{r=1}^m C(f_r, g_r)(s_1, \dots, s_{r-1}) \right) \frac{\partial^m \det_{\text{left}, \mathcal{T}}}{\prod_{r=1}^m \partial C(f_r, g_r)} (\{w_\ell\}, \{s_r\}) . \end{aligned} \tag{VI.69}$$

The result of the first expansion is however complicated and it is convenient to select from the arch system an optimized sub-system, called a minimal 1-PI arch system. This defines a map ϕ which to any m -arch system \mathcal{A} associates a minimal 1-PI \bar{m} arch-system \mathcal{M} .

To define this map we select as first arch of \mathcal{M} the unique arch in \mathcal{A} which starts in \mathfrak{F}_0 and ends in \mathfrak{F}_{q_1} with q_1 maximal. If $q_1 = p$ we are done. If $q_1 \neq p$, we select as second arch of \mathcal{M} the unique one in \mathcal{A} which starts in $\cup_{k=0}^{q_1} \mathfrak{F}_k$ and ends in \mathfrak{F}_{q_2} with q_2 maximal, and so on.

Starting from the tree \mathcal{T} , we have now a minimal arch system of lines which completes it into a 1-PI graph. For simplicity, let us first describe these graphs

when the arch system \mathcal{M} has no “coinciding packet” (i.e., no \mathfrak{F}_k contains more than one arch extremity). We have:

- the path $P(y, z, \mathcal{T})$,
- the \bar{m} arches $(f_1, g_1), \dots, (f_{\bar{m}}, g_{\bar{m}})$ of \mathcal{M} completed by the unique path joining f_r to $x_{k'_r}$ and the unique path joining g_r to x_{k_r} through \mathcal{T} ,
- the remaining links which form subtrees of \mathcal{T} .

These three kinds of links are illustrated on Figure 9, where the links of $P(y, z, \mathcal{T})$ are drawn in bold lines, those of the completed arches in “normal” lines and the remaining ones in dashed lines.

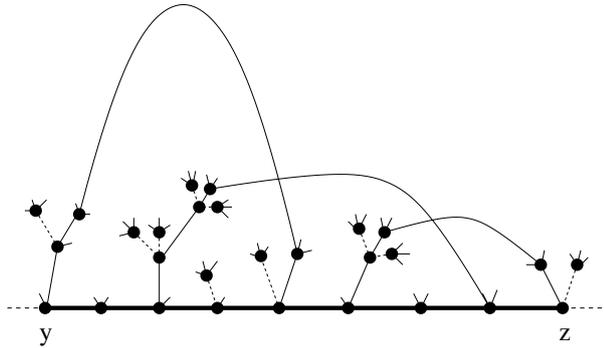


Figure 9. The three kinds of links after a first arch expansion.

When the packet indices are all different, the structure of the minimal 1PI-arch-system is therefore the one represented on Figure 10:

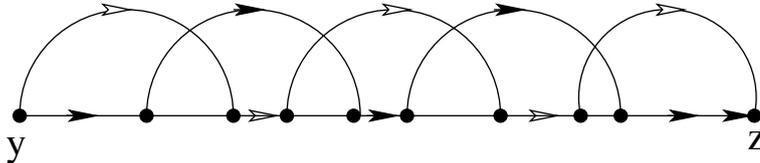


Figure 10. The minimal 1-PI structure without the remaining links of \mathcal{T} .

which can also be represented as a kind of “fish”, whose borders are shown with corresponding arrows in Figure 11.

Now let us examine the case where the minimal 1PI-arch-system has “coinciding packets”, i.e., where the end of some arch and the origin of the next one belong to the same \mathfrak{F}_k . We shall distinguish various cases, according to the way the two arches are branching to \mathfrak{F}_k . From the vertex x_k , apart from the two links

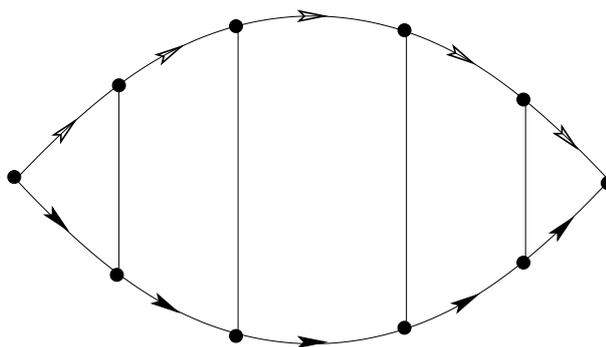


Figure 11. The “fish” structure.

of $\mathcal{P}(y, z, \mathcal{T})$, hook two half-lines or lines which are potentially the beginning of two subtrees of \mathcal{T} . First, consider the case where x_k has two half-lines. Then the branching of the arches is like on Figure 12 (case 1):

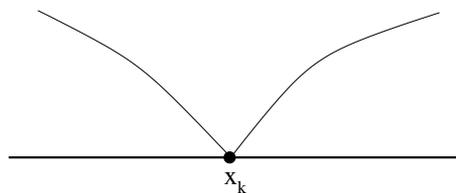


Figure 12. The branching of two arches when x_k has two half-lines (case 1).

If x_k bears a half-line and a subtree of \mathcal{T} , we must distinguish two sub-cases: both arches can hook to the subtree (cases 2), or only one of them can hook to the subtree whereas the other one hooks to the half-line (cases 3). These two situations are pictured on Figures 13 and 14.

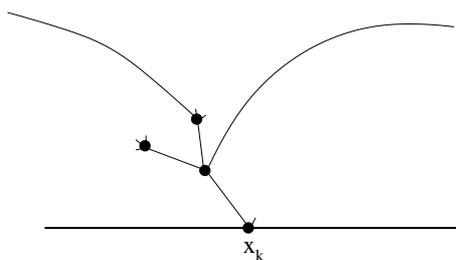


Figure 13. Two arches branching on the same subtree of \mathcal{T} (case 2).

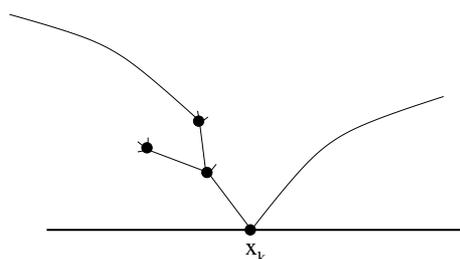


Figure 14. One arch branching on a subtree and the other one on the half-line of x_k (case 3).

At last, if x_k is the root of two subtrees of \mathcal{T} , we have two sub-cases: both arches can hook to the same subtree (case 4), or each of them can hook to distinct subtrees (case 5). These two sub-cases are represented on Figures 15 and 16.

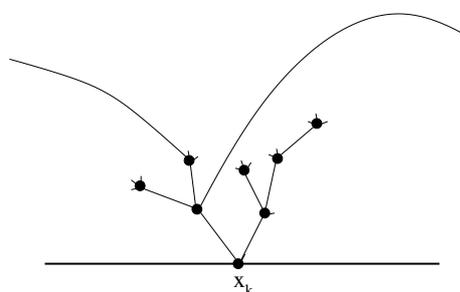


Figure 15. Two arches branching on the same subtree, the other subtree being not touched (case 4).

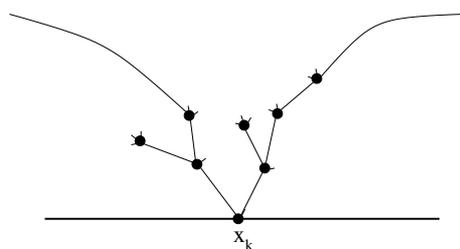


Figure 16. Two arches branching on different subtrees (case 5).

The inspection of these five cases reveals that the “fish structure” of Figure 11 iterates. Cases 1, 3 and 5 induce a pinch leading to a “new fish” separated from

the previous one by a vertex of reducibility (1-VR). Cases 2 and 4 do not induce any pinch but simply enlarge the “fish”.

In the end we obtain a sequence of “fishes” separated by vertices of reducibility, as in Figure 17.

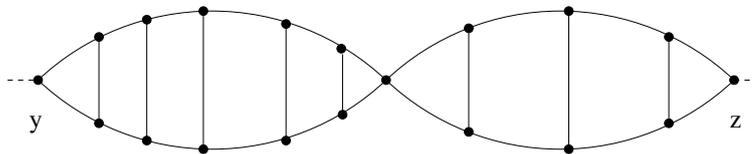


Figure 17. The general 1-PI structure.

This object is called a fish structure, and it is made of an upper and a lower path, together with middle bars and middle 1-VR vertices. Any vertex on the upper or lower path which is neither a middle 1-VR vertex nor on a middle bar is called a ladder vertex. In the next section we use the minimal 1PI-arch-system as a guide for a 2-PI expansion, just like the initial tree \mathcal{T} was the guide for the 1-PI expansion.

VI.2 2-particle-irreducible arch expansion

The self-energy $\Sigma_2(y, z)$ is defined as the sum of the 1-PI contributions, but it has automatically a stronger property in our model: it is 2-PI and one-vertex irreducible (1-VI) in the yz channel. This is just a consequence of the fact that all vertices in our theory have coordination 4. To take advantage of this fact, we devise an additional arch expansion, which derives explicitly more lines out of the determinant. These additional lines, which insure 2-PI, are necessary for the proof of Theorem V.1. Nevertheless, we must be careful in performing this second arch expansion to respect again the positivity property so that Gram’s bound is not deteriorated, and also to check the analog of Lemma VI.1, that is the constructive character of the expansion.

A naive approach could consist in keeping the definition of the previous “field packets” \mathfrak{F}_k (in which, of course, the fields used in the first expansion are deleted), but this would not select exactly the 2-PI contributions.

For example, if the first arch of the first expansion is of the type of Figure 18, that is, if the starting field is not hooked directly to the vertex y , the second arch expansion could arise as in Figure 19, and the two cuts indicated on the picture would still disconnect y and z . In order to avoid this difficulty, we need to use the general structure of the graph obtained after the first arch expansion. to define the new “field packets” and there is a small additional difficulty, which is that these packets are not totally ordered but only partially ordered in a natural way.

The new definition of the field packets is the following: a field packet contains either all the fields whose path to y first meets the fish structure in a given middle

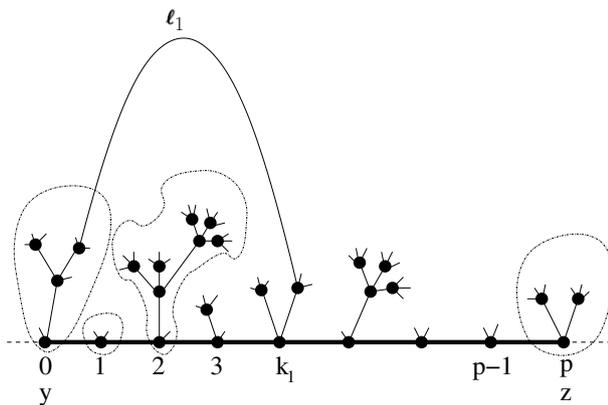


Figure 18. An arch not hooked directly to y .

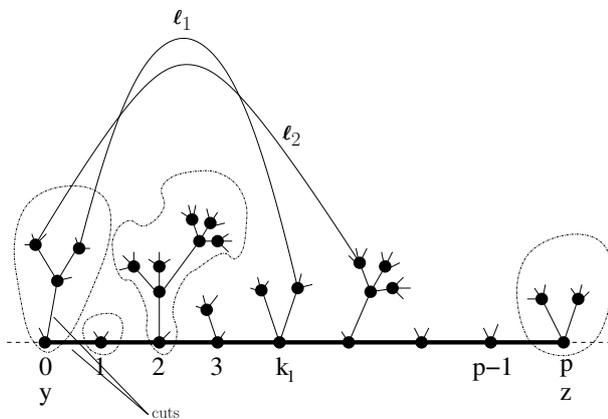


Figure 19. The beginning of a wrong 2-PI arch expansion.

bar, or all the fields whose path to y meets the fish structure at a given ladder vertex. In the first case we say that we have a “bar packet”, in the last case we have a “ladder packet”. Finally we could also add packets for each middle reducibility vertex, also called bar packets; although they do not contain any field, it is convenient to introduce them for consistency of the partial ordering defined below. These packets are shown in Figure 20 as dotted ellipses: in this figure there are 6 “bar packets” and 9 “ladder packets”.

Furthermore we have an ordering on these packets, but it is only a partial ordering, noted \prec . If we put arrows from y to z on the two outer paths in the fishes, packets A and B satisfy $A \prec B$ if and only if one can go from A to B by a path which does not run against any arrow.

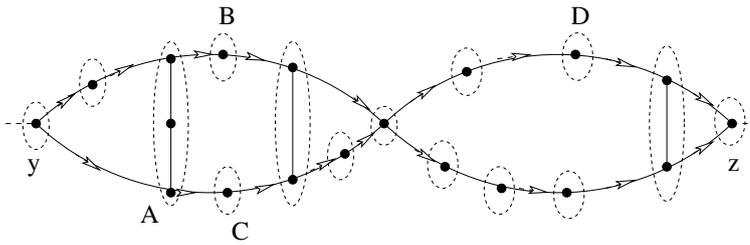


Figure 20. The partial ordering in a multi-fish structure.

For instance in Figure 20, we have $A \prec B \prec D$ and $A \prec C \prec D$ but there is no relation between B and C .

To grasp this partial ordering better, we can label the bar packets as $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_q$ and label the ladder packets between bar packets r and $r + 1$ as $\mathfrak{G}_{r,a}, \mathfrak{G}_{r,b}, \dots$ on the upper path and $\mathfrak{G}_{r,a'}, \mathfrak{G}_{r,b'}, \dots$ on the lower path. This is illustrated on Figure 21:

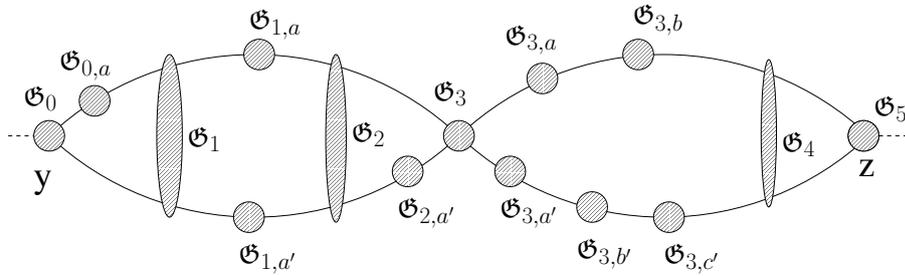


Figure 21. The numbering of the field packets for the 2-PI arch expansion.

Once this is done, the 2-PI expansion is carried out in a similar way than before, but with a few modifications. We introduce successive interpolation parameters s'_1, s'_2, \dots . The first one tests the packet \mathfrak{G}_0 with the complement, that is the set of all later packets in the partial ordering. Hence the first Taylor expansion step creates a first arch joining this packet \mathfrak{G}_0 to a bar packet \mathfrak{G}_r or to a ladder packet $\mathfrak{G}_{r,i}$ or $\mathfrak{G}_{r,i'}$ called the first arrival packet. Such an arch insures 2-PI only for the block of all packets which are smaller or equal than the arrival packet *in the sense of the partial ordering* \prec .

So at second stage we have to launch the second arch from this 2-PI block to the set of all the remaining packets not in this block, and so on.

At any given stage of the induction, the 2-PI block is a “fish-commencing section”, that is either the set of packets smaller or equal to a single given packet (of any type $r, (r, i)$ or (r, i')), or the set of packets smaller or equal to one among

two ladder packets (r, i) and (r, i') with same index r , one on the lower and the other on the upper part of the fish.

From this block the next arch is launched to the remaining packets. This defines uniquely inductively our expansion.

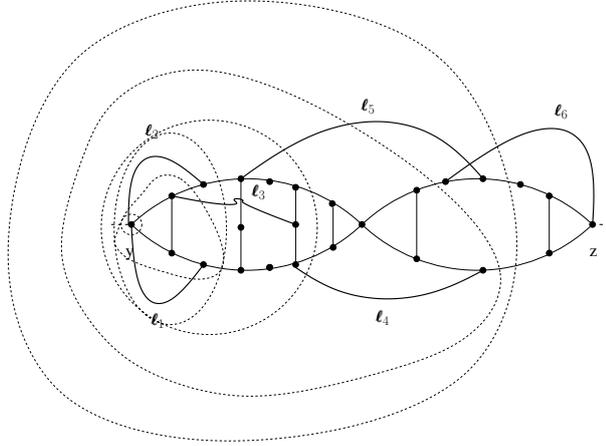


Figure 22. A possible arch system for the 2-PI arch expansion.

Now the result is a system of arches which insures 2-PI from y to z . On Figure 22 we have shown a possible example of such a system. The arches are represented by bold lines l_1, l_2, \dots and the corresponding successive 2-PI blocks are shown by the successive larger and larger dotted surrounding contours.

The final result is therefore given by the same kind of formula than VI.69. If we call the second arch system an m' -arch system, we have:

$$\begin{aligned} \Sigma(y, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{n!} \int_{\Lambda^n} d^3x_1 \dots d^3x_n \sum_{\{a_v\}, \{b_v\}} \sum_{\text{biped structures}_{\mathcal{B}}} \\ & \sum_{\text{external fields}_{\mathcal{E}\mathcal{B}}} \sum_{\text{clustering tree structures}_{\mathcal{C}}} \sum_{\text{trees}_{\mathcal{T}} \text{ over } \mathcal{V}} \sum_{\text{field attributions}_{\Omega}} \sum_{\{\sigma_v^j\}} \sum_{\substack{m\text{-arch systems} \\ (f_1, g_1), \dots, (f_m, g_m)}} \sum_{\substack{m'\text{-arch systems} \\ (f'_1, g'_1), \dots, (f'_{m'}, g'_{m'})}} \\ & \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} \int_0^1 dw_{\ell} \right) \left(\prod_{\ell \in \mathcal{T}} C_{\sigma(\ell)}(f_{\ell}, g_{\ell}) \right) \left(\prod_{r=1}^m \int_0^1 ds_r \right) \\ & \left(\prod_{r'=1}^{m'} \int_0^1 ds'_{r'} \right) \left(\prod_{r=1}^m C(f_r, g_r)(s_1, \dots, s_{r-1}) \right) \left(\prod_{r'=1}^{m'} C(f'_{r'}, g'_{r'})(s'_1, \dots, s'_{r'-1}) \right) \\ & \frac{\partial^{m+m'} \det_{\text{left}, \mathcal{T}}}{\prod_{r=1}^m \partial C(f_r, g_r) \prod_{r'=1}^{m'} \partial C(f'_{r'}, g'_{r'})} (\{w_{\ell}\}, \{s_r\}, \{s'_{r'}\}) \end{aligned} \tag{VI.70}$$

In such a formula the nested sums are other all compatible possibilities, in particular the m' -arch system has to be one of the possible ones that can arise using the fish structure of the m -arch system as the guide for the second expansion.

This formula displays explicit 2-PI. Using the fact that vertices have coordination four, it also displays explicit 1-VI. We have to check that it also respects positivity and remains constructive, i.e., satisfies an analog of Lemma VI.1.

The expansion respects again positivity of the interpolated propagator at any stage, for the same reasons than the first one, namely all the $s'_{r'}$ interpolations are always performed between a subset of packets and its complement, so the final covariance as function of the $s'_{r'}$ parameters is a convex combination with positive coefficients of block-diagonal covariances. This ensures that the presence of these $s'_{r'}$ parameters again does not alter Gram's bound on the remaining determinant.

We need finally to check that the expansion is still constructive. Arches system such as those of Figure 22 obey some constraints. For two arches ℓ_i and ℓ_j with $i < j$, the arrival packets A_i and A_j cannot coincide and it is not possible to have $A_j \prec A_i$, hence arrivals respect the *partial* ordering \prec . Furthermore let us say that the arch is of upper type if the arrival packet is a bar packet with index r or an upper ladder packet (r, i) and is of lower type if the arrival packet is a lower ladder packet with index (r, i') . Then the set of arrival points for upper type arches is strictly ordered under \prec , and so is the set of arrival points for lower type arches.

Hence we can fix separately the set of arrival fields, the set of departure fields, and for each arch for $r' = 1, \dots, m'$ whether it is an upper or lower arch. This choice costs at most $4^{2(n+2)}2^{m'} \leq 2^{5(n+2)}$, since the total number of fields is at most $2(n+2)$ (this is not an optimal bound!). Once this choice is fixed we know exactly the arrival points $g'_{r'}$ for each arch. Then the choice of the corresponding departure points is determined using the $s'_{r'}$ parameters exactly as in Lemma VI.1, where the \mathfrak{E}_r are now the sets of strictly growing "commencing sections", that is the successive regions surrounded by dotted contours in Figure 22, and the numbers $e_i = |\mathfrak{E}_i - \mathfrak{E}_{i-1}|$ are now the total number of fields hooked to the region between two successive contours with labels $i-1$ and i . Therefore Lemma VI.1 also holds for the m' arch system.

VI.3 Three disjoint paths

By the previous double arch expansion, we have explicitly displayed the 2-PI structures contributing to the self-energy. The advantage of this expansion is that we have now at our disposal more explicitly derived links, which can be used to bound in a better way the integrations $\int \prod_v dx_{v,0} dx_{v,+} dx_{v,-}$. Integrating the vertices positions in the standard way using the decay of the lines of a single tree connecting all the vertices is (apparently) not sufficient to obtain the requested bounds of theorem V.1. Thanks to the 2-PI structure extracted by the double arch expansion, we are going to forge a better scheme of integration.

We need a theorem (in fact, two versions of the same theorem) known as Menger's theorem. Roughly speaking, it states that in a p -particle-irreducible graph, there exists (at least) $p + 1$ line-disjoint paths joining two given vertices. A cautious statement of this result is the following one:

Theorem (“edge version” of Menger’s theorem): *Let G be a graph, u and v two distinct vertices of G . Suppose that u and v cannot be disconnected by the deletion of p lines (edges) of G , for $p \in \mathbb{N}$. Then there exists $p+1$ line-disjoint paths joining u and v through G . \square*

Two (or more) paths P_1 and P_2 are said line-disjoint if $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (remember that a path is by definition a set of lines). We stress the fact that these paths whose existence is insured by the edge version of Menger’s theorem may go across some identical vertices; in other words, they are not necessarily *vertex-disjoint*, even if we take away the end vertices u and v .

But there exists another version of Menger’s theorem:

Theorem (“vertex version” of Menger’s theorem): *Let G be a graph, u and v two distinct vertices of G . Suppose that u and v cannot be disconnected by the deletion of p vertices ($p \in \mathbb{N}$). Then there exist $p+1$ internally vertex-disjoint paths joining u and v . \square*

We say that two paths P_1 and P_2 are internally *vertex-disjoint* if P_1 and P_2 , once deprived from their end vertices, have no vertex in common. For more details about these two versions of Menger’s theorem, the reader may consult [2] or any textbook on graph theory. Although Menger’s theorems are very simple, their proof is quite subtle. They can be seen as corollaries of a famous powerful theorem of graph optimization, the so-called “max flow-min cut theorem” [2].

It is easy to give examples of 2-PI graphs for which the previous theorem naturally holds, but in which it is impossible to exhibit three vertex-disjoint paths, for instance the graph of Figure 23:

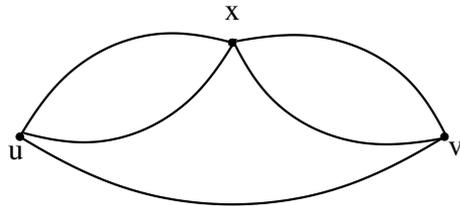


Figure 23. A 2-PI graph with no triplet of vertex-disjoint paths joining u and v .

Note also that the theorem does not state that the set of the paths is unique in general. Unicity can be insured only in the very special case of graphs having the (rather trivial) structure of Figure 24.

But if the graph $G - \{u, v\}$ has vertices linked to more than two neighbors it is possible to find several sets of three line-disjoint paths connecting u and v . Finally,

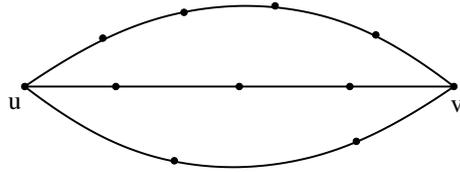


Figure 24. A graph with a unique triplet of line-disjoint paths joining u and v .

we remark that these paths cannot be determined naively and independently of the other ones. For example, in the graph of Figure 25 , if we choose the first two

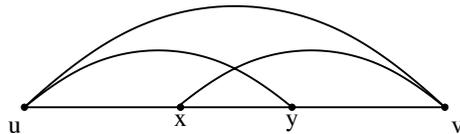


Figure 25. A 2-PI graph for which Menger’s theorem is not trivial.

paths as being $\{\{u, v\}\}$ and $\{\{u, x\}, \{x, y\}, \{y, v\}\}$, we cannot find a third one. Thus the result of the theorem is quite subtle and not totally obvious.

The set of lines we derived explicitly thanks to our initial tree expansion and our two successive arch expansions is by construction 2-PI in the channel $y - z$. Then a straightforward application of the edge version of Menger’s theorem insures that, if we call G the graph whose vertices are \mathcal{V} and lines those of \mathcal{T} plus the ones explicitly derived by the two arch expansions, there exist (at least) 3 line-disjoint paths P_1, P_2 and P_3 joining y to z .

From now on for vertex integration purposes we use only the the lines in $L = \mathcal{T} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$, hence forget any arch line not in $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ and the remaining fields in the determinant or remaining lines. Remark that the union $\mathcal{T} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$ is not necessarily disjoint, since some lines of the P_i ’s may belong to \mathcal{T} .

VII Ring construction

In this section the scales of the lines enter the picture. Out of the lines of L we shall extract a subset, called a ring, which is the union of *two* line-and-vertex-disjoint paths from y to z . This ring has to satisfy Lemma VII.1 below and its extraction depends therefore on the Gallavotti-Nicolò tree structure associated to the scales assignments over all lines and fields.

We consider therefore the forest \mathcal{F} of those connected parts or nodes Γ of the Gallavotti-Nicolò tree associated to the scale decomposition (including the initial bare vertices, with four legs). The full two-point contribution G that we analyze is itself such a node $\Gamma_0 = G$. Recall that for any such Γ and any pair of its external

legs, there exists a unique path in $\mathcal{T} \cap \Gamma$ joining the vertices to which these two external lines are hooked (this path being eventually empty when both lines hook to the *same* vertex!). We call this path the “tree shortcut” for the pair. This is because $\mathcal{T} \cap \Gamma$ is a tree of Γ . Since we are studying primitively divergent two-point subgraphs, any Γ except G itself has at least 4 external legs. (If Γ contains y or z , we count the corresponding external lines of G as external legs of Γ .)

Lemma VII.1 *There exists a ring $R \subset L$ which is the union of two line-and-vertex-disjoint paths from y to z , with the additional property that for any $\Gamma \in \mathcal{F}$, at least two external legs of Γ are not in the ring R .*

Proof. An element Γ is called a “cut” if removing it separates y from z , or in other words if every path in L from y to z touches Γ . It is called “contractible” if it is not a cut.

We consider the set S of all maximal contractible elements in \mathcal{F} (by our convention they can be ordinary bare vertices). Elements of S must be all disjoint by the forest character of \mathcal{F} .

We reduce each element of S to a point, that is we ignore the interior of any element of S , and keep all the elements of S plus all the lines and determinant fields attached to them connected as before. In this way we obtain a new graph G' , which has generalized vertices with 4 legs or more, in particular it has one such vertex for each element of S . It must still have three line-disjoint paths P'_1 , P'_2 and P'_3 , made of those lines in P_1 , P_2 and P_3 which were not internal to any contractible element of \mathcal{F} . The graph G' is therefore still 2-lines irreducible in the channel $y \rightarrow z$.

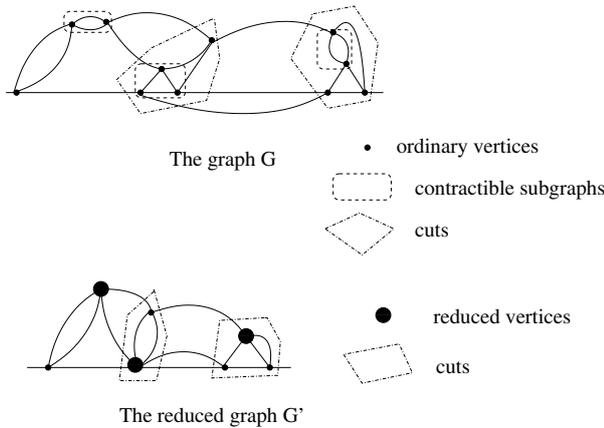


Figure 26. The process of contraction.

G' is also one-vertex irreducible in the channel $y \rightarrow z$, since by definition for any vertex v of G' distinct from y and z there is a path in L from y to z which avoids v , so the corresponding reduced path in G' also avoids the vertex v .

By the vertex-version of Menger’s theorem, there is therefore a *ring* $R' \subset G'$ in this graph, namely a subset of lines which is the union of two *vertex* disjoint paths R'_1 and R'_2 from y to z .

We consider now the graph $G' - R'$. It must connect y to z . Otherwise there would be a connected component $C(y)$ of $G' - R'$ containing y and not z , and removing the two last exits of R'_1 and R'_2 from that component would disconnect G' , hence G' would not be 2-PI in the channel $y \rightarrow z$.

Therefore there exists a path R'_3 from y to z in G' entirely line-disjoint from the ring R' .

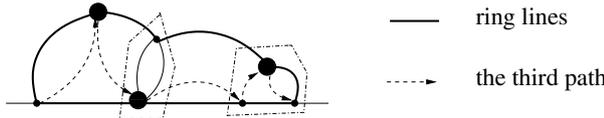


Figure 27. The ring in G' .

We complete the ring R' of G' into a true ring R of G by adding, for every non-bare vertex of G' touched by the ring the shortcut between the entrance and exit in \mathcal{T} . Clearly this defines $R \subset L$ in a unique way.

Let us check that R has the desired property. It is obvious for Γ 's which are contractible. Indeed

- either they are maximal contractible, in which case they are touched by at most only one of the two vertex-disjoint paths R'_1 and R'_2 of the ring, and the number of their external legs in the ring R' is at most two, the entrance and exit of that path. We are done, since Γ has at least four external legs, of which only two belong to R (the ones in $R - R'$ are internal to Γ or disjoint from Γ).
- or Γ is not maximal contractible, hence strictly inside a reduced vertex of G' . Then recall that the ring R is made of a corresponding tree shortcut in \mathcal{T} . Again it can touch Γ only twice (it cannot enter and reexit; this is due to the key property of \mathcal{T} , whose restriction to any Γ node in the GN tree is a spanning tree in Γ). We conclude in the same way.

Therefore we have to consider Γ 's which are cuts. But such Γ appear as subgraphs Γ' in G' which must be still cuts of G' . Therefore they must be touched by R'_3 . Following R'_3 , its first entrance into Γ' (when $y \notin \Gamma$) and its last exit out of Γ' (when $z \notin \Gamma$) give external legs of Γ' which do not belong to R' , hence two external legs of Γ which do not belong to R . □

VII.1 Regrouping ring sectors

We shall now regroup some sectors for the ring lines in a way compatible with the vertex momentum conservation rules and the propagator’s decay, keeping the tree

\mathcal{T} and the clustering tree structure \mathcal{C} fixed. This is necessary to adjust correctly the logarithmic power counting in the next section, and perform the sums over the auxiliary l indices of the ring lines. The reader who wants solely to understand the true power counting can skip this subtlety.

For any ring vertex we fix with a finite factor which pairs of legs collapse in the $+$ and in the $-$ direction in the sense of [1] and Proposition 1 above. Recall that an index collapses, e.g., in the plus direction when it is the smallest at the vertex, up to plus or minus 1.

Now consider any ring line ℓ not in the tree \mathcal{T} , joining vertices v and v' , which does not collapse in any direction at any end. For such a line we want to sum up all ring sectors $s_+(\ell)$ or $s_-(\ell)$ into extended sectors $\sigma_{\pm}^e(\ell)$. What are the constraints on the range of $s_+(\ell)$ or $s_-(\ell)$ if we keep the tree \mathcal{T} with all its indices and the structure \mathcal{C} fixed? Let us introduce $s_{\pm,v}, s_{\pm,v'}$ as the value of the collapsing indices at v or v' plus two. The condition of no collapse means that

$$s_{\pm}(\ell) \geq \max\{s_{\pm,v}, s_{\pm,v'}\} = s_{\pm,v,v'}. \tag{VII.71}$$

Moreover we have the constraint

$$s_+(\ell) + s_-(\ell) \geq i - 2. \tag{VII.72}$$

where i is the main i index of line ℓ .

The condition that the line ℓ is not in \mathcal{T} means that its r index is larger or equal to the smallest r index at which v and v' fall into a single Γ component of \mathcal{C} . Let us call $r(\ell, \mathcal{T})$ this smallest value. Since $r = (s_+ + s_- + i)/2$ the condition is

$$s_+(\ell) + s_-(\ell) \geq 2r(\ell, \mathcal{T}) - i \tag{VII.73}$$

and we can regroup (VII.72) and (VII.73) into the single condition

$$s_+(\ell) + s_-(\ell) \geq \bar{i}(\ell, \mathcal{T}) - 2 \tag{VII.74}$$

with $\bar{i}(\ell, \mathcal{T}) = \max\{i - 2, 2r(\ell, \mathcal{T}) - i\}$.

So we regroup the following packets of sectors:

a) If $s_{+,v,v'} + s_{-,v,v'} \geq \bar{i}(\ell, \mathcal{T})$, the condition (VII.71) imply (VII.74) and we can forget (VII.74). We regroup all sectors satisfying (VII.71) into an enlarged sector $\sigma^e(\ell) = (i, s_{+,v,v'}^e, s_{-,v,v'}^e)$ where an enlarged index s_+^e or s_-^e means that the corresponding slice cutoff $v_{s_+}(r)$ or $v_{s_-}(r)$ in (II.14) is replaced by the “sum-of slices” cutoff $u(M^{2s_+r})$ or $u(M^{2s_-r})$ ⁷. The lines of $R - \mathcal{T}$ in this case form a set called $R_{\mathbf{a}}$.

b) If $s_{+,v,v'} + s_{-,v,v'} < \bar{i}(\ell, \mathcal{T}) = i - 2 \leq 2r(\ell, \mathcal{T}) - i$, or

c) if $s_{+,v,v'} + s_{-,v,v'} < \bar{i}(\ell, \mathcal{T}) = 2r(\ell, \mathcal{T}) - i < i - 2$; in both cases **b** and **c**, we pick one preferred direction, say the $+$ direction and regroup the sectors into

⁷Remark that indices in (II.14) $s_+ = i$ or $s_- = i$ are already enlarged in this sense.

- one sector extended in both directions $\sigma^e(\ell) = (i, s_{+,v,v'}^e, s_-^e = \bar{i}(\ell, \mathcal{T}) - s_{+,v,v'})$
- a certain number (in fact $\bar{i}(\ell, \mathcal{T}) - s_{+,v,v'} - s_{-,v,v'}$) of sectors extended only in direction $+$, $\sigma^e(\ell) = (i, s_+^e, s_- = \bar{i}(\ell, \mathcal{T}) - s_+^e)$, with $s_{+,v,v'} < s_+^e \leq \bar{i}(\ell, \mathcal{T}) - s_{-,v,v'}$.

This resummation being performed at fixed value of the i index, it is easy to check that these enlarged sectors have exactly the same bounds and decay properties (II.15) than the ordinary ones.

Once the regrouping has been performed we arrived therefore for the ring lines not in \mathcal{T} to two types of such resumed sectors:

- for the lines of $R_{\mathbf{a}}$, the two (extended) indices are completely determined by the collapsing indices at the ends of the line.
- in case **b**, this is no longer necessarily true, but the new extended sectors have an auxiliary index l which is 0, since the sum of their s_+ and s_- indices, extended or not, is exactly $i - 2$. The lines of $R - \mathcal{T}$ in this case form a set called $R_{\mathbf{b}}$.
- finally in case **c** the new extended sectors have not necessarily an auxiliary index l which is 0, but since $s_+ + s_- = 2r(\ell, \mathcal{T}) - i$, they have an index $r(\ell) = (s_+ + s_- + i)/2 = r(\ell, \mathcal{T})$. This means that these lines although not in \mathcal{T} “could” have been in \mathcal{T} . Let us make this slightly more precise. We call $R_{\mathbf{c}}$ the set of lines of the ring in this case, and $\Gamma_1(\ell), \Gamma_2(\ell)$ the two connected components at level $r(\ell) - 1$ containing the ends of ℓ . They are connected at level $r(\ell) = r(\ell, \mathcal{T})$ by a path $P(\ell, \mathcal{T})$, so to any ℓ we can associate a line $t(\ell)$ in this path so that $(\mathcal{T} - t(\ell)) \cup \{\ell\}$ is still a tree which is a subtree in every connected component Γ of \mathcal{C} .

The map t from $R_{\mathbf{c}}$ to \mathcal{T} is also such that $t^{-1}(\bar{\ell})$ has at most two elements for any $\bar{\ell} \in \mathcal{T}$. This is because if $t(\ell) = t(\ell')$ for $\ell, \ell' \in R_{\mathbf{c}}$, then $\Gamma_1(\ell) = \Gamma_1(\ell')$ and $\Gamma_2(\ell) = \Gamma_2(\ell')$ (or the converse), and these components must be “cuts” in the sense of the previous subsection (otherwise the reduced ring R' would not be vertex disjoint, see Figure 27). These cuts must even be consecutive in the natural order of the cuts from y to z . Therefore there cannot be a third line $\ell'' \in R_{\mathbf{c}}$ with $t(\ell) = t(\ell') = t(\ell'')$.

VII.2 Ring sector

Let us now return to the bound on the primitively divergent self-energy contribution with cutoff r_{\max} , namely $|\Sigma_{2,pr}^{\leq r_{\max}}(y, z)|$.

There is a first scale $r_{\mathcal{T}}$ at which y and z fall into a common connected component of the GN tree. It is the largest index on the initial path in \mathcal{T} from y to z . Let us call r_R the first r index at which the ring connects y and z . Obviously

since \mathcal{T} is optimized with respect to the r indices, we have $r_{\mathcal{T}} \leq r_R$. r_R can be expressed as a minimax over the two disjoint paths $P_{R,1}$ and $P_{R,2}$ which compose the ring:

$$r_R = \min_{j=1,2} r_{R,j} ; r_{R,j} = \max_{k \in P_{R,j}} r(k) \quad (\text{VII.75})$$

Obviously we have $r_R \leq r_{\max}$.

In the same vein we should define a (generalized) sector $\bar{\sigma}_R$ associated to the ring R and the tree \mathcal{T} . It is a triplet $(i_{R,\mathcal{T}}, s_{+,R}, s_{-,R})$ depending on the sector attributions of the lines of the tree \mathcal{T} and of the ring R we have just built. $s_{+,R}$ and $s_{-,R}$ are also minimax of the corresponding indices over the two disjoint paths $P_{R,1}$ and $P_{R,2}$ which compose the ring. More precisely

$$s_{+,R} = \min_{j=1,2} s_{+,R,j} ; s_{+,R,j} = \max_{k \in P_{R,j}} s_+(k) \quad (\text{VII.76})$$

$$s_{-,R} = \min_{j=1,2} s_{-,R,j} ; s_{-,R,j} = \max_{k \in P_{R,j}} s_-(k). \quad (\text{VII.77})$$

The index $i_{R,\mathcal{T}}$ is optimized both over \mathcal{T} and R . More precisely we define, if $P(y, z, \mathcal{T})$ is the unique path from y to z in \mathcal{T} :

$$i_{\mathcal{T}} = \max_{k \in P(y,z,\mathcal{T})} i(k) ; \quad (\text{VII.78})$$

$$i_R = \min_{j=1,2} i_{R,j} ; i_{R,j} = \max_{k \in P_{R,j}} i(k) ; \quad (\text{VII.79})$$

$$i_{R,\mathcal{T}} = \min\{i_R, i_{\mathcal{T}}\} . \quad (\text{VII.80})$$

Using the relations $0 \leq s_{\pm} \leq i$ for ordinary sectors, one has $s_{\pm,R,j} \leq i_{R,j} \leq r_{R,j}$, hence $0 \leq s_{\pm,R} \leq r_{\max}$. Furthermore $i_{\mathcal{T}} \leq r_{\mathcal{T}} \leq r_{\max}$ so that the three indices $i_{R,\mathcal{T}}$, $s_{+,R}$ and $s_{-,R}$ being all bounded by r_{\max} are indeed those of a generalized sector $\bar{\sigma}_{R,\mathcal{T}}$ of $\Sigma_{r_{\max}}$, in the sense of Section V. We define the associated r index of this generalized sector as $r_{R,\mathcal{T}}$:

$$r_{R,\mathcal{T}} \equiv \frac{i_{R,\mathcal{T}} + s_{+,R} + s_{-,R}}{2} . \quad (\text{VII.81})$$

We also define the scaled distance for that ring sector $\bar{\sigma}_{R,\mathcal{T}} = (i_{R,\mathcal{T}}, s_{+,R}, s_{-,R})$ as

$$d_{R,\mathcal{T}}(y, z) = d_{i_{R,\mathcal{T}}, s_{+,R}, s_{-,R}}(y, z) . \quad (\text{VII.82})$$

VIII Power counting

Everything is now prepared for the bounds. We do not repeat all details but concentrate on what is new with respect to [1].

We introduce all the momentum constraints $\chi_j(\sigma)$ for all the vertices of the primitively divergent self energy contribution. After that we apply Gram's

bound on the remaining determinant. This replaces the remaining determinant by a product over its entries of the corresponding power counting factors (see [1]).

We shall first perform the spatial integration over the positions of internal vertices, using the propagators decay and the fields and propagators prefactors. This is really power counting. Then we shall perform the sector sums, using the coupling constants, which is a kind of logarithmic power counting.

The spatial integration are themselves divided in two steps. We write:

$$|\Sigma_{2,pr}^{\leq r_{\max}}(y, z)| \leq \sum_n \frac{(c\lambda)^n}{n!} \sum_{\mathcal{T}, \mathcal{R} \dots} \sum_{\sigma} \prod_j \chi_j(\sigma) I_{1,n}(y, z) I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm}) \quad (\text{VIII.83})$$

$$\begin{aligned} & |y_+ - z_+| \cdot |y_- - z_-| |\Sigma_{2,pr}^{\leq r_{\max}}(y, z)| \\ & \leq \sum_n \frac{(c\lambda)^n}{n!} \sum_{\mathcal{T}, \mathcal{R} \dots} \sum_{\sigma} \prod_j \chi_j(\sigma) I_{1,n,\pm}(y, z) I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm}) \end{aligned} \quad (\text{VIII.84})$$

$$\begin{aligned} & |y_0 - z_0| \cdot |\Sigma_{2,pr}^{\leq r_{\max}}(y, z)| \\ & \leq \sum_n \frac{(c\lambda)^n}{n!} \sum_{\mathcal{T}, \mathcal{R} \dots} \sum_{\sigma} \prod_j \chi_j(\sigma) I_{1,n,0}(y, z) I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm}) . \end{aligned} \quad (\text{VIII.85})$$

In $I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm})$ we keep the positions of y, z and the *spatial* positions of the *ring* vertices $x_{j,\pm}$ *fixed* and integrate other all the remaining positions. To pay for all these integrations we put in $I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm})$ a fraction (say 1/2) of the decay of every line in L , all the determinant fields prefactors and the line prefactors for the lines not in the ring. Hence:

$$I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm}) = \int \prod_{v \in R, v \neq y, z} dx_{v,0} \prod_{v \notin R} d^3x_v \prod_{f \notin R} M^{-r_f/2 - l_f/4} \prod_{k \in L} e^{-c \cdot d_{\sigma(k)}^\alpha / 2} \quad (\text{VIII.86})$$

(recall that f here runs over either determinant fields or propagator lines, where a line counts for two fields, one at each end).

Then in $I_{1,n}(y, z)$ we gather the remaining factors and integrations. We first prove a uniform bound on $I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm})$ independent of the fixed positions $y, z, x_{j,\pm}$:

Let ℓ_0 be the line with largest value $r(\ell_0) = r_{\mathcal{T}}$ of r index in the path $P(y, z, \mathcal{T})$ from y to z in \mathcal{T} .

Let R' be those lines of R which are of type **a** in section VII.1, *plus* ℓ_0 if it belongs to \mathcal{T} .

Lemma VIII.1 *The following bound holds:*

$$\begin{aligned} I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm}) \leq & K^n M^{-i_{\mathcal{T}}} \prod_{f \notin R'} M^{-l_f/12} \prod_{\substack{\Gamma \text{ ring-disjoint,} \\ e(\Gamma) > 4}} M^{-e(\Gamma)/6} \\ & \prod_{\substack{\Gamma \text{ ring-intersecting} \\ y \text{ and } z \text{ disjoint, } e'(\Gamma) > 2}} M^{-e'(\Gamma)/4} \prod_{\substack{\Gamma \text{ ring-intersecting} \\ \text{containing } y \text{ or } z, e'(\Gamma) > 1}} M^{-e'(\Gamma)/3} \end{aligned} \quad (\text{VIII.87})$$

where $e'(\Gamma)$ for a connected component Γ is the number of external fields of Γ not in the ring. The product $\prod_{f \notin R'}$ runs over all fields and lines except those of R' .

Proof. At fixed $+$ and $-$ positions for the ring vertices we integrate

- all x_0 positions with the \mathcal{T} propagators decay. This results in the factor $\prod_{\ell \in \mathcal{T}, \ell \neq \ell_0} M^{i(\ell)}$ (the ℓ_0 line is missing because both y and z are hold fixed). We have also other slightly different bound: for any line ℓ of $R_{\mathbf{c}}$ as defined at the end of subsection VII.1, we could replace the integral performed with the line ℓ by the one performed with line ℓ' if $t(\ell') = \ell$; it has the same r index, but may result in a better bound if $i(\ell) < i(t(\ell))$. Let us note $\bar{i}(\ell) = \min\{i(\ell), i(\ell') \mid t(\ell') = \ell\}$. We have therefore really a bound $\prod_{\ell \in \mathcal{T}, \ell \neq \ell_0} M^{\bar{i}(\ell)}$ for the integration of all x_0 positions.
- all x_{\pm} positions for the vertices not in the ring with the \mathcal{T} propagator decays.

Remark that a vertex v not in the ring integrated with a tree line of scale (s_+, s_-) costs exactly $M^{s_+ + s_-}$. These integrals are made exactly with the set of lines \mathcal{T}_1 of \mathcal{T} with index r such that at scale r the two connected components Γ at their ends do not both touch the ring.

In particular $\ell_0 \notin \mathcal{T}_1$, and every line in $R \cap \mathcal{T}$ is not in \mathcal{T}_1 . Therefore

$$\prod_{\ell \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_1, \ell \neq \ell_0} M^{-l(\ell)/2} \leq \prod_{\ell \in R \cap \mathcal{T}, \ell \neq \ell_0} M^{-l(\ell)/2} . \tag{VIII.88}$$

Joining all factors we obtain, defining $\bar{l}_{\ell} = 2[r(\ell) - \bar{i}(\ell)]$:

$$\begin{aligned} I_{2,n}(y, z, x_{j,\pm}) &\leq K^n \prod_{f \notin R} M^{-r_f/2 - l_f/4} \prod_{\ell \in \mathcal{T}_1} M^{s_+ + s_-} \prod_{\ell \in \mathcal{T}, \ell \neq \ell_0} M^{\bar{i}(\ell)} \\ &= K^n \prod_{f \notin R} M^{-r_f/2 - l_f/4} \prod_{\ell \in \mathcal{T}_1} M^{s_+ + s_- + i} \prod_{\ell \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_1, \ell \neq \ell_0} M^{\bar{i}(\ell)} \\ &= K^n \prod_{f \notin R} M^{-r_f/2 - l_f/4} \prod_{\ell \in \mathcal{T}_1} M^{2r_{\ell}} \prod_{\ell \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_1, \ell \neq \ell_0} M^{r_{\ell} - \bar{l}_{\ell}/2} \\ &\leq K^n \prod_{f \notin R'} M^{-l_f/12} \prod_{f \notin R} M^{-r_f/2} \prod_{\ell \in \mathcal{T}_1} M^{2r_{\ell}} \prod_{\ell \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_1, \ell \neq \ell_0} M^{r_{\ell}} , \tag{VIII.89} \end{aligned}$$

where in the last line we separated the r and l dependence and used (VIII.88). Indeed we have all the necessary factors $M^{-l_f/4}$ for the fields not in ℓ ; for the fields in $R_{\mathbf{b}}$ we have $l = 0$ so we can freely add that factor; and for the fields in $R_{\mathbf{c}}$ there at most two lines with $t(\ell') = t(\ell'') = \ell$, and we have $M^{-\bar{l}_{\ell}/2} \leq M^{-l_{\ell}/6} M^{-l_{\ell'}/6} M^{-l_{\ell''}/6}$, which gives the factor $M^{-\bar{l}_{\ell}/12}$ for each ends of the lines in $R_{\mathbf{c}}$.

We divide then as usual every factor M^{2r} , M^r or $M^{-r/2}$ as a product over all scales and we collect everything scale by scale. Following the previous section, we should distinguish the connected components Γ which have empty intersection

with the ring, also called *ring-disjoint*, and those which contain at least one vertex of the ring, called *ring-intersecting*. Among these one should also distinguish those who contain neither y nor z , called *y and z disjoint*, and those who contain y or z or both. There is then at each scale a factor M^2 to pay for each *ring-disjoint* component (corresponding to one particular vertex which plays the role of a center of mass for that component, which is integrated both on time and spatial position); a factor M to pay for each *ring-intersecting, y-z disjoint* component, for which only the time position of a ring vertex has to be integrated, and no factor to pay for the components containing y or z or both, since y and z are fixed. Therefore we get

$$\prod_{f \notin R} M^{-r_f/2} \prod_{\ell \in \mathcal{T}_1} M^{2r_\ell} \prod_{\ell \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_1, \ell \neq \ell_0} M^{r_\ell} = \prod_{\Gamma \text{ ring-disjoint}} M^{2-e(\Gamma)/2} \times \prod_{\Gamma \text{ ring-intersecting, } y \text{ and } z \text{ disjoint}} M^{1-e'(\Gamma)/2} \prod_{\Gamma \text{ containing } y \text{ or } z} M^{-e'(\Gamma)/2} . \tag{VIII.90}$$

Remark that this is not an upper bound but an equality.

Using the previous section we know that for every connected component Γ which is $y \cup z$ disjoint, $e'(\Gamma) \geq 2$; and since we consider a primitively divergent contribution, $e(\Gamma) \geq 4$. Furthermore for every connected component containing y or z but not both (these have odd numbers of external legs, since we amputated the external legs at y and z), we have $e'(\Gamma) \geq 1$, so that we have a decay factor M^{-1} from the first scale $r = 0$ until at least the first scale $r(\ell_0)$ at which y and z become connected in \mathcal{T} .

Hence following the usual argument as in [1] we get

$$\prod_{\Gamma \text{ ring-disjoint}} M^{2-e(\Gamma)/2} \prod_{\Gamma \text{ ring-intersecting, } y \text{ and } z \text{ disjoint}} M^{1-e'(\Gamma)/2} \prod_{\Gamma \text{ containing } y \text{ or } z} M^{-e'(\Gamma)/2} \leq M^{-r_{\mathcal{T}}} \prod_{\Gamma \text{ ring-disjoint, } e(\Gamma) > 4} M^{-e(\Gamma)/6} \prod_{\Gamma \text{ ring-intersecting } y \text{ and } z \text{ disjoint, } e'(\Gamma) > 2} M^{-e'(\Gamma)/4} \prod_{\Gamma \text{ ring-intersecting containing } y \text{ or } z \text{ } e'(\Gamma) > 1} M^{-e'(\Gamma)/3} . \tag{VIII.91}$$

Now using that $r_{\mathcal{T}} \geq i_{\mathcal{T}}$ completes the proof of the Lemma. □

We treat now the power counting of the ring lines and the space integration of the ring vertices together in I_1 . We have (calling x_1, \dots, x_p the internal positions of the vertices of the ring not equal to y or z):

Lemma VIII.2 *For some constant K*

$$I_{1,n}(y, z) = \int \prod_{j=1}^p dx_{j,+} dx_{j,-} \prod_{k \in R} M^{-(r+l/2)(k)} \prod_{k \in L} e^{-c.d_{\sigma(k)}^\alpha/2} \leq K^p M^{-s_{+,R,1} - s_{-,R,1} - s_{+,R,2} - s_{-,R,2}} e^{-c.d_{R,\mathcal{T}}^\alpha(y,z)/4} , \tag{VIII.92}$$

$$\begin{aligned}
I_{1,n,\pm}(y,z) &= \int \prod_{j=1}^p dx_{j,+} dx_{j,-} |y-z|_+ |y-z|_- \prod_{k \in R} M^{-(r+l/2)(k)} \prod_{k \in L} e^{-c \cdot d_{\sigma(k)}^\alpha / 2} \\
&\leq K^p M^{-s_{+,R} - s_{-,R}} e^{-c \cdot d_{R,\mathcal{T}}^\alpha(y,z)/4},
\end{aligned} \tag{VIII.93}$$

$$\begin{aligned}
I_{1,n,0}(y,z) &= \int \prod_{j=1}^p dx_{j,+} dx_{j,-} |y_0 - z_0| \prod_{k \in R} M^{-(r+l/2)(k)} \prod_{k \in L} e^{-c \cdot d_{\sigma(k)}^\alpha / 2} \\
&\leq K^p M^{-s_{+,R,1} - s_{-,R,1} - s_{+,R,2} - s_{-,R,2}} M^{i_{R,\mathcal{T}}} e^{-c \cdot d_{R,\mathcal{T}}^\alpha(y,z)/4}.
\end{aligned} \tag{VIII.94}$$

Proof. We use simply the triangular inequality and a fraction of the decay of the ring lines or of the \mathcal{T} lines to get the decay $e^{-c \cdot d_{R,\mathcal{T}}^\alpha(y,z)}$. We keep an other fraction of the ring lines decay to perform the integration over positions of the ring vertices. To check the prefactor we remark that we can separately optimize the $+$ and $-$ integration. The $+$ integration consumes all the lines M^{-s_+} prefactors except two, namely the smallest ones on the two paths of the ring, which are $M^{-s_{+,R,1}}$ and $M^{-s_{+,R,2}}$. Finally in the second bound (VIII.93) the $|y-z|_+$ factor consumes an $M^{-s_{+,R}}$ factor, and we can keep the other in the bound, and bound it again by a factor $M^{-s_{+,R}}$ (this seems not optimal, but works!). The same is true with the $-$ integrations. In the third bound (VIII.94) we keep both factors $M^{-s_{\pm,R,1}}$ and $M^{-s_{\pm,R,2}}$ but have to pay $M^{i_{R,\mathcal{T}}}$ for the $|y-z|_0$ factor. Remark that to get this factor and not simply $M^{i_{R,\mathcal{T}}}$, it is important to keep in $I_{1,n}$ a fraction of the decay of all the lines of $\mathcal{T} \cup R$, not only of R . \square

Let us now combine the factor $M^{-i_{\mathcal{T}}}$ in (VIII.87) with the other power counting factors $M^{-s_{+,R,1} - s_{-,R,1} - s_{+,R,2} - s_{-,R,2}}$ of (VIII.92), $M^{-s_{+,R} - s_{-,R}}$ of (VIII.93) and $M^{-s_{+,R,1} - s_{-,R,1} - s_{+,R,2} - s_{-,R,2} + i_{\mathcal{T}}}$ of (VIII.94).

We have

$$i_{R,\mathcal{T}} \leq i_R \leq \max_{k \in R} s_+(k) + \max_{k \in R} s_-(k) + 2 \tag{VIII.95}$$

(where we used $i \leq s_+ + s_- + 2$), hence

$$s_{+,R} + s_{-,R} + i_{R,\mathcal{T}} \leq 2(\max_{k \in R} s_+(k) + \max_{k \in R} s_-(k)) + 2 \tag{VIII.96}$$

so that, since $i_{R,\mathcal{T}} \leq i_{\mathcal{T}}$

$$3(s_{+,R} + s_{-,R} + i_{R,\mathcal{T}}) \leq 2(s_{+,R,1} + s_{-,R,1} + s_{+,R,2} + s_{-,R,2} + i_{\mathcal{T}}). \tag{VIII.97}$$

Therefore in (VIII.92) we have

$$\begin{aligned}
&M^{-s_{+,R,1} - s_{-,R,1} - s_{+,R,2} - s_{-,R,2}} M^{-i_{\mathcal{T}}} \\
&\leq M^{-(3/2)(s_{+,R} + s_{-,R} + i_{R,\mathcal{T}})} = M^{-3r_{R,\mathcal{T}}}.
\end{aligned} \tag{VIII.98}$$

Similarly combining the factors in (VIII.93) with $M^{-i_{\mathcal{T}}} \leq M^{-i_{R,\mathcal{T}}}$ we have

$$M^{-s_{+,R} - s_{-,R}} M^{-i_{\mathcal{T}}} \leq M^{-2r_{R,\mathcal{T}}} \tag{VIII.99}$$

and finally we also have, using (VIII.95),

$$\begin{aligned}
 M^{-(s_{+,R,1}+s_{-,R,1}+s_{+,R,2}+s_{-,R,2})} &= M^{-(s_{+,R}+s_{-,R}+\max_{k \in R} s_+(k)+\max_{k \in R} s_-(k))} \\
 &\leq M^{-(s_{+,R}+s_{-,R}+i_{R,T}-2)} , \tag{VIII.100}
 \end{aligned}$$

so that we obtain from (VIII.94)

$$\begin{aligned}
 M^{-s_{+,R,1}-s_{-,R,1}-s_{+,R,2}-s_{-,R,2}} M^{+i_{R,T}} M^{-i_T} \\
 \leq M^{-s_{+,R}-s_{-,R}-i_{R,T}+2} = K M^{-2r_{R,T}} . \tag{VIII.101}
 \end{aligned}$$

The power counting factors of the right-hand side of (VIII.98)–(VIII.99)–(VIII.101) are exactly those of bounds (V.55)–(V.56)–(V.57) of Theorem V.1.

Let us finally give indications on the logarithmic power counting, namely how to pay the sums over all sectors and indices r, l, s_{\pm} . This is similar to [1] except for two new difficulties:

The first additional difficulty comes when fixing all the r indices. Not only the 4-legged ring-disjoint components (also called “quadrupeds”) for which $e(\Gamma) = 4$ hence $2 - e(\Gamma)/2 = 0$ but also any connected component Γ touching the ring and y, z disjoint with $e'(\Gamma) = 2$, or containing y or z with $e'(\Gamma) = 1$ have now apparently marginal power counting. So fixing their largest internal r scale once their first external r scale is known costs also for them one factor $\log T$. It is however easy to check as in [1], that each new such component gives rise to one additional coupling constant, so the total number of such $\log T$ factors to pay is still bounded by n and in fact $n - 1$ where n is the total number of vertices in the self-energy.

Once all r scales are fixed, we have to sum over the auxiliary indices l and the s_+ and s_- indices, subject to the constraint $s_+ + s_- = r + l/2$. This is again done at a cost of one factor $\log T$ per vertex using the momentum conservation rule and the auxiliary decay factor $\prod_f M^{-l_f/12}$ as in [1], Lemma 5. In fact knowing all r and l indices and the sector of the external line of the self energy which is conserved, so present both at y and z , we have in fact only to pay $(\log T)^{n-1}$ to know all s_+ and s_- indices. However there is a second difficulty here, which is that there is no exponential $M^{-l/12}$ decay factor for the lines in $R_{\mathbf{a}}$, nor for the ℓ_0 line if it is in R .

But to find the corresponding l indices leads to at most one single new logarithmic factor $\log T$ to pay, to fix the l index of the line ℓ_0 (this is not a problem because we have at least two unemployed such factors corresponding to the last coupling constant at y).

Indeed for all lines in $R_{\mathbf{a}}$ both sectors s_+ and s_- collapse at some end, hence are determined by the corresponding collapsed sectors. Their sum (plus the r index) determines the l index of the line so there is no new logarithm to pay to know the l index of these lines. This is essentially what subsection VII.1 was about.

The result is at most a cost $\log T^{2n-1}$ to fix all internal sectors of the self-energy when the two external are known, like in [1]. This is why we get analyticity only in a domain $\lambda \leq c/\log^2 T$.

Finally we have to sum over the tree \mathcal{T} , the arch constructions and over n . This is standard or explained above. In this way the proof of Theorem V.1 is achieved for *primitively divergent* contributions. In the next section we use an induction to extend this proof to the general case.

IX Chains of bipeds

We turn now to the renormalization of a non-primitively divergent two-point subgraph.

The method is to perform all arch expansions for all two-point subgraphs first, then apply Gram’s inequality to all the remaining determinant, then apply inductively the bounds of the previous section from the smallest primitively divergent subgraphs towards the larger ones.

In a non-primitive two-point subgraph, with external vertices at positions Y and Z the “higher” self energy insertions can appear either as chains decorating a propagator from a vertex y to a vertex z , like in Figure 28, or as chains decorating a determinant field hooked at a vertex y , like in Figure 29.

Using the bounds of the previous section, in which Theorem V.1 was proved for primitive bipeds, we are now in a position to bound such maximal chains $Chain_r$ of primitively divergent 1PI bipeds B_1, \dots, B_q , such as the one of Figure 28 with fixed ends $y = z_0$ and $z = y_{q+1}$ or the one of Figure 29 with fixed end $y = z_0$. The two external vertices of each biped B_j are called y_j and z_j .

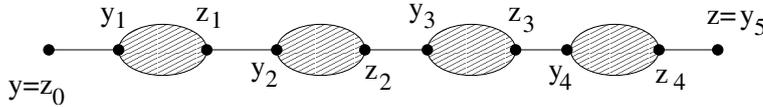


Figure 28. A chain of bipeds on a propagator.

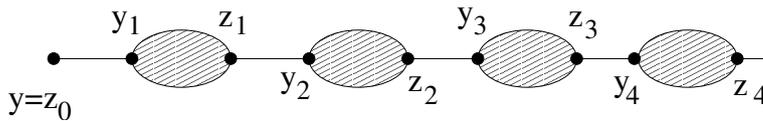


Figure 29. A chain of bipeds on a field.

Remark that by momentum conservation the $q + 1$ ordinary lines in Figure 28, or the q ordinary lines and the determinant field at the end of the chain in Figure 29 all belong to the same sector σ of scale r , not yet summed (or its nearest

neighbors). We have to compare the bound for such a decorated propagator to that of a regular bare propagator.

We have first to evaluate the action of the τ^* operators in (III.38) on the external lines. We find

$$\begin{aligned}
 & (\partial_+ + i)(\partial_- + i)C_\sigma \left[(x_0, sy_+ + (1-s)x_+, ty_- + (1-t)y_+), z \right] \\
 & \leq M^{-2r(\sigma)-l(\sigma)} \sup \left[e^{-d_\sigma^\alpha(x,z)}, e^{-d_\sigma^\alpha(y,z)} \right]
 \end{aligned} \tag{IX.102}$$

$$\begin{aligned}
 & (\partial_0 - i\pi T)C \left[(ty_0 + (1-t)x_0, y_+, y_-), z \right] \\
 & \leq M^{-2r(\sigma)} \sup \left[e^{-d_\sigma^\alpha(x,z)}, e^{-d_\sigma^\alpha(y,z)} \right]
 \end{aligned} \tag{IX.103}$$

We should take into account that there are $q + 1$ ordinary lines in the chain, and only q of them bear τ^* operators, hence have “improved” power counting prefactor $M^{-2r(\sigma)}$. The last one has the usual prefactor $M^{-r(\sigma)-l(\sigma)/2}$. Multiplying these bounds by the correct factors for the bipeds, namely those of the previous section (having spared as usual the necessary factors for summing over the trees), we obtain that the chain of Figure 28 is bounded by

$$\begin{aligned}
 & \sum_q \lambda^q K^q M^{-(2q+1)r(\sigma)-l(\sigma)/2} \\
 & \int e^{-d_\sigma^\alpha(y,y_1)} \prod_{j=1}^q dy_j dz_j \sup \left\{ e^{-d_\sigma^\alpha(y_j,y_{j+1})}, e^{-d_\sigma^\alpha(z_j,y_{j+1})} \right\} \\
 & \left[e^{-c.d_{R_j,\mathcal{T}_j}^\alpha(y_j,z_j)} M^{-2r_{R_j,\mathcal{T}_j}} \right] \leq KM^{-r(\sigma)-l(\sigma)/2} e^{-d_\sigma^\alpha(y,z)}. \tag{IX.104}
 \end{aligned}$$

with $\bar{\sigma} = (\max\{i(\sigma), i_{R_j,\mathcal{T}_j}\}, \max\{s_+(\sigma), s_{+,R_j,\mathcal{T}_j}\}, \max\{s_-(\sigma), s_{-,R_j,\mathcal{T}_j}\})$. Here the attentive reader could worry that the decay of this chain is no longer in d_σ but in $d_{\bar{\sigma}}$, and that the associated value of r can be quite higher than $r(\sigma)$.

Could this fact perturb the later multiscale analysis?

For instance if

$$i(\sigma) = 110, \quad s_+(\sigma) = s_-(\sigma) = 55,$$

hence $r(\sigma) = 110$, and if

$$i(R_j) = s_+(R_j) = s_-(R_j) = 100,$$

the decay is in $\bar{\sigma} = (110, 100, 100)$ which has an associated index $\bar{r} = 155$, quite higher than $r(\sigma) = 110$.

Fortunately there is no need to worry, because we never use the bound (IX.104) in later analysis. We should never compare the bound (IX.104) of the dressed chain to the bound (II.16) of a bare line of the initial tree \mathcal{T} , because it is not necessary. Indeed in the multiscale analysis *a line of the tree* is always used to bound the integral over one end (e.g., $z = y_{q+1}$) with respect to the other one

kept fixed (e.g., $y = z_0$). So what we should compare is bounds for integrals over one end. For the dressed chain, this integral is bounded by

$$\begin{aligned} \sum_q \lambda^q K^q M^{-(2q+1)r(\sigma)-l(\sigma)/2} \int dy_{q+1} e^{-d_\sigma^\alpha(y, y_1)} \prod_{j=1}^q dy_j dz_j \\ \sup \left\{ e^{-d_\sigma^\alpha(y_j, y_{j+1})}, e^{-d_\sigma^\alpha(z_j, y_{j+1})} \right\} \left[e^{-c \cdot d_{R_j, \tau_j}^\alpha(y_j, z_j)} M^{-2r_{R_j, \tau_j}} \right] \\ \leq K M^{+r(\sigma)-l(\sigma)/2} . \quad (\text{IX.105}) \end{aligned}$$

which is identical to the bound obtained by integrating over z at fixed y with a single bare line with sector $[r(\sigma), l(\sigma)]$ (see (II.16), where the prefactor M^{-i-l} is also $M^{-r-l/2}$, and the weight of integration over z is $M^{i+s_++s_-} = M^{2r}$).

The dressed field of Figure 29 is bounded in the same way but with one propagator replaced by a field:

$$\begin{aligned} \sum_q \lambda^q K^q M^{-(2q+1/2)r(\sigma)-l(\sigma)/4} \int \prod_{j=1}^q dy_j dz_j \sup \left\{ e^{-d_\sigma^\alpha(z_{j-1}, y_j)}, e^{-d_\sigma^\alpha(z_{j-1}, z_j)} \right\} \\ \left[e^{-c \cdot d_{R_j, \tau_j}^\alpha(y_j, z_j)} M^{-2r_{R_j, \tau_j}} \right] \leq K M^{-r(\sigma)/2-l(\sigma)/4} . \quad (\text{IX.106}) \end{aligned}$$

which is again identical to the bound for a bare undecorated field with sector $[r(\sigma), l(\sigma)]$ in a determinant. So when chains of primitively divergent bipoles are inserted into convergent graphs, they do not spoil at all the analysis and bounds of [1].

The last thing to check for the attentive reader is that when such new decorated lines, appear inside a new (i.e., non-primitive biped), the bound including the $|y - z|_+$ and $|y - z|_-$ factors (or the easier $|y - z|_0$ factor) of the previous sections do not deteriorate. We now explain why this is true.

The arch expansions have been performed for all 1PI bipoles which appear in the GN tree and need to be renormalized, so we know the rings for all these bipoles, not only for the primitive ones. For a given biped, not necessarily primitive, when a dressed line is a tree line not in the ring, it is always used in combination with an integral over one end, and the bound (IX.105) is identical to the bound with a bare line.

Finally when a dressed line is part of the ring for a later biped one could worry that it could “bear the $|y - z|_+$ or $|y - z|_-$ factor”. But again remark that in the ring analysis of Lemma VIII.2 we never bound *separately* the $|y - z|_+$ or $|y - z|_-$ factors (there are cases where they would indeed cost about M^{2r} instead of $M^r \dots$) but always *in combination* with all the $dx_{j,+}$ and $dx_{j,-}$ integrals on the intermediate vertices. So here again, remark that when dressed lines with quite big values of s_+ and s_- “bear the cost of the $|y - z|_+$ or $|y - z|_-$ factors”, they are *not* used for the corresponding integrals over any of their ends, which will be performed with the help of other lines with better decay. This is why the proof of

Lemma VIII.2 using (IX.105) remains absolutely unchanged when rings lines are dressed. Hence the lemma holds throughout the induction from smaller to bigger bipeds.

We have finally to explain why constants such as K in bounds (IX.105) or (IX.106) do not deteriorate in the induction. This is because at each stage of this induction the new decorated lines or fields hook to new distinct vertices which provide new unspoiled small coupling constants.

Therefore Theorem V.1 holds for the sum over all contributions to the self-energy, not only over the primitively divergent ones. Plugging that theorem into the analysis for convergent graphs of [1] finally completes the proof of analyticity of any correlation function for $|\lambda|(\log T)^2 \leq \text{const.}$

X Self-energy bounds

In this section we summarize what has been achieved by the previous sections into two bounds on the self-energy, one with the first non-trivial graph G_2 included and the other with that graph excluded⁸. We apply the analysis above to $\Sigma^r(k)$, the sum of all self-energy contributions with lines of index $\leq r$ and at least one line of index r . We must keep track of the maximal number of logarithmic factors due to quadrupeds in the clustering tree structure, which is $n - 1$ at order n . Each vertex costs a logarithm for sector summation (except one, thanks to the fixed external legs) and each quadruped (except the last one) costs another logarithm for power counting. Hence the total number of $|\log T|$ factors in Σ_n , the n th order contribution to the self energy is at most $2n - 2$. But each time we add a vertex there is a new factor $|\lambda| \leq c|\log T|^{-2}$ that compensates for the new logarithmic factors. Hence perturbation series is bounded by a geometric convergent series, and its resummed size is of same order than the leading first term. It is therefore straightforward to obtain the following bounds analogs to Theorem V.1, in which M^{-r} is the cutoff:

$$|\Sigma^r(k)| \leq K|\lambda|^2 r^2 M^{-r} , \tag{X.107}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma^r(k) \right| \leq K|\lambda|^2 r^2 , \tag{X.108}$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial k_\mu \partial k_\nu} \Sigma^r(k) \right| \leq K|\lambda|^2 r^2 M^r . \tag{X.109}$$

where K is some constant. The same quantities but with the particular graph G_2 taken out give similar but slightly better bounds since the series start with contributions of order 3:

$$|\Sigma_{n \geq 3}^r(k)| \leq K|\lambda|^3 r^4 M^{-r} , \tag{X.110}$$

⁸This first non-trivial graph is the elementary biped in the chain of Figure 1, since the tadpole vanishes.

$$\left| \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma_{n \geq 3}^r(k) \right| \leq K |\lambda|^3 r^4, \quad (\text{X.111})$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial k_\mu \partial k_\nu} \Sigma_{n \geq 3}^r(k) \right| \leq K |\lambda|^3 r^4 M^{+r}. \quad (\text{X.112})$$

(These bounds are certainly not optimal; they do not take into account the three paths built in the previous section, which show that for instance if $\mu = +$ and $\nu = -$, there is no linearly divergent factor M^{+r} in (X.112)).

One can now sum over $r \leq i_{\max}(T)$ the self energy contributions $\Sigma^r(k)$, $\Sigma_{n \geq 3}^r(k)$ and their first momentum derivatives in the domain $|\lambda| \log T|^2 \leq c$ for small c , and obtain the bounds

$$|\Sigma(k)| \leq K |\lambda|^2 \leq K c^2 |\log T|^{-4}, \quad (\text{X.113})$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma(k) \right| \leq K |\lambda|^2 |\log T|^3 \leq K c^2 |\log T|^{-1}, \quad (\text{X.114})$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial k_\mu \partial k_\nu} \Sigma_{n \geq 3}(k) \right| \leq K |\lambda|^3 |\log T|^4 T^{-1} \leq K c^3 |\log T|^{-2} T^{-1}. \quad (\text{X.115})$$

This proves that the self energy is uniformly C^1 in the domain of analyticity of the theory, namely $|\lambda| |\log T|^2 \leq c$. However the bounds for second derivatives grow with r , strongly suggesting that the self-energy is *not* uniformly of class C^2 in the domain $|\lambda| \leq c/|\log T|^2$, just like the Luttinger liquid in one dimension.

More precisely we proved by a tedious analysis ([5]) the following lower bound for the amplitude of the single graph G_2

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial k_\mu \partial k_\nu} \Sigma_{n=2}(k) \right| = |I_{G_2}(k)| \geq K' \lambda^2 T^{-1}, \quad (\text{X.116})$$

in the special case of μ, ν in the $(+, +)$ direction and incoming momentum $(k_0 = \pi T, k_+ = 1, k_- = 0)$.

This completes the proof that the Hubbard model at half-filling is *not* a Fermi liquid in the sense of [3]. Indeed for $|\lambda| |\log T|^4 \leq c$ and c smaller than $K'/2K$, the rest of the series, bounded in (X.115) by $K |\lambda|^3 |\log T|^4 T^{-1}$, hence by $K c |\lambda|^2 T^{-1}$, is smaller than half the right-hand side of (X.116). When we add $\Sigma_{n=2} = I_{G_2}$ and $\Sigma_{n \geq 3}$ the modulus of the full quantity $\frac{\partial^2}{\partial k_+ \partial k_+} \Sigma(\pi T, 1, 0)$ therefore diverges at least as $(K'/2)c^2 |\log T|^{-8} T^{-1}$ along the curve $|\lambda| |\log T|^4 = c$ as $T \rightarrow 0$, which means that Salmhofer's criterion for Fermi liquids is violated.

In fact $\frac{\partial^2}{\partial k_+ \partial k_+} \Sigma(\pi T, 1, 0)$ diverges also along the curve $|\lambda| |\log T|^2 \leq c$, because bound (X.112) is not optimal. A more careful analysis using the three paths built in the previous sections would spare two additional logarithms and prove

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial k_+ \partial k_+} \Sigma_{n \geq 3}(\pi T, 1, 0) \right| \leq K |\lambda|^3 |\log T|^2 T^{-1} \leq K c^3 |\log T|^{-4} T^{-1}, \quad (\text{X.117})$$

but this is left to the reader.

Acknowledgments. We thank A. Abdesselam for useful discussions on Menger's theorem, and our referee for his careful work, which lead to significant improvements of the first manuscript.

References

- [1] V. Rivasseau, The two-dimensional Hubbard Model at half-filling: I. Convergent Contributions, *Journ. Stat. Phys.* **106**, 693–722 (2002).
- [2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, North-Holland Editions, 1979.
- [3] M. Salmhofer, Continuous renormalization for Fermions and Fermi liquid theory, *Commun. Math. Phys.* **194**, 249 (1998).
- [4] M. Salmhofer, *Renormalization, an introduction*, Springer Verlag, 1999.
- [5] S. Afchain, J. Magnen and V. Rivasseau, Lower bound on the first self energy graph of the Hubbard model, to appear.
- [6] G. Benfatto and G. Gallavotti, Renormalization Group, Physics Notes, Chapter 11 and references therein, Vol. 1 Princeton University Press, 1995.
- [7] P.W. Anderson, Luttinger liquid behavior of the normal metallic state of the 2D Hubbard model, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1839–1841 (1990).
- [8] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz, Two-dimensional Many Fermion Systems as Vector Models, *Europhys. Letters* **24**, 521 (1993).
- [9] J. Feldman, H. Knörrer and E. Trubowitz, A two-dimensional Fermi Liquid, series of papers in *Commun. Math. Phys.* **247**, 1–319 (2004), and *Reviews in Math. Physics* **15**, 9, 949–1169 (2003).
- [10] M. Disertori and V. Rivasseau, Interacting Fermi liquid in two dimensions at finite temperature, Part I: Convergent Contributions, *Comm. Math. Phys.* **215**, 251 (2000).
- [11] M. Disertori and V. Rivasseau, Interacting Fermi liquid in two dimensions at finite temperature, Part II: Renormalization, *Comm. Math. Phys.* **215**, 291 (2000).
- [12] G. Benfatto, A. Giuliani and V. Mastropietro, Low temperature Analysis of Two-Dimensional Fermi Systems with Symmetric Fermi surface, *Ann. Henri Poincaré* **4** 137 (2003).
- [13] M. Disertori, J. Magnen and V. Rivasseau, Interacting Fermi liquid in three dimensions at finite temperature, part I: Convergent Contributions, *Ann. Henri Poincaré* **2**, 733–806 (2001).

- [14] A. Abdesselam and V. Rivasseau, *Trees, Forests and Jungles: A Botanical Garden for Cluster Expansions*, in “Constructive Physics”, LNP 446, Springer Verlag, 1995.

Stéphane Afchain and Jacques Magnen
Centre de Physique Théorique
CNRS, UMR 7644
École Polytechnique
F-91128 Palaiseau cedex
France
email: stephane.afchain@cpht.polytechnique.fr
email: jacques.magnen@cpht.polytechnique.fr

Vincent Rivasseau
Laboratoire de Physique Théorique
CNRS, UMR 8627
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay
France
email: rivass@th.u-psud.fr

Communicated by Joel Feldman
submitted 09/09/04, accepted 20/12/04



To access this journal online:
<http://www.birkhauser.ch>

Second article : Une borne inférieure sur la self-énergie

Article paru dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*.

The Hubbard Model at Half-Filling, Part III: the Lower Bound on the Self-Energy

Stéphane Afchain, Jacques Magnen and Vincent Rivasseau

Abstract. We complete the proof that the two-dimensional Hubbard model at half-filling is *not* a Fermi liquid in the mathematically precise sense of Salmhofer, by establishing a lower bound on a second derivative in momentum of the first non-trivial self-energy graph.

I Introduction

This paper is the third of a series ([1, 2]) devoted to the rigorous mathematical study of the two-dimensional Hubbard model at half-filling above the transition temperature to the expected low temperature region, which becomes Néel-ordered at zero temperature. The goal of this series was to prove that this model does not obey Salmhofer's criterion for Fermi liquid behavior of interacting Fermion systems at equilibrium ([3, 4]). In this way, this model differs sharply from those with a Fermi surface close to the circle, which obey Salmhofer's criterion ([5, 6, 7]).

In the first paper [1] the convergent contributions of the model were bounded in the domain $|\lambda| \log^2 T \leq K$. In the second one [2], renormalization of the self-energy was performed to complete the proof of analyticity in the coupling constant of all the correlation functions in that domain. Salmhofer's criterion requires beyond this analyticity that the self-energy (in momentum space) is uniformly bounded together with its first and second derivatives in a domain $|\lambda| |\log T| \leq K$. In this paper we prove that a certain second derivative of the self-energy at a particular value of the external momentum is *not* uniformly bounded in the domain $|\lambda| \log^2 T \leq K$ where we have established analyticity. This domain being smaller than the Salmhofer's one, it completes the proof that the two-dimensional half-filled Hubbard model is not a Fermi liquid. In conclusion, when we move from low filling to half-filling, the Hubbard model must undergo a cross-over from Fermi to non-Fermi (in fact Luttinger) liquid behavior. This solves the controversy on the nature of two-dimensional Fermionic systems in their ordinary phase [8]. We refer to [1, 2, 4] for a more complete review and further references on mathematical study of interacting Fermions.

II Recall of notations

The two-dimensional Hubbard model is defined on the lattice \mathbb{Z}^2 . Fixing a temperature $T > 0$, the “imaginary time”, denoted x_0 , belongs to the real interval $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$. In the following, we shall denote $\beta = \frac{1}{T}$. Indeed this interval should be thought of as a circle of length 2β , that is $\mathbb{R}/2\beta\mathbb{Z}$. Consequently, the momentum space, which is the dual of $\mathbb{R}/2\beta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ in the sense of the Fourier transform, is $\pi T\mathbb{Z} \times [\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]^2$. The torus $[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]^2$ will be represented by the square $[-\pi, \pi]^2$, with periodic boundary conditions.

In Fourier variables, the expression of the propagator at half-filling reads:

$$C(k_0, k_1, k_2) = \frac{1}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} \quad (\text{II.1})$$

if $k_0 = (2n+1)\pi T$ for some $n \in \mathbb{Z}$. If $k_0 = 2n\pi T$, $C(k_0, k_1, k_2) = 0$ because in the formalism of Fermionic theories at finite temperature, the propagator has an antiperiod β with respect to the x_0 variable and therefore each Fourier coefficient of even order vanishes. With a slight abuse of language, we can say that $C(k_0, k_1, k_2)$ is only defined for $k_0 = (2n+1)\pi T$. This set of values is called the Matsubara frequencies.

The expression of the propagator in real space is deduced by Fourier transform:

$$C(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk_0 \int dk_1 \int dk_2 \frac{e^{ik \cdot x}}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} \quad (\text{II.2})$$

where we adopt the notations of [1], namely the integral $\int dk_0$ really means the discrete sum over the Matsubara frequencies $2\pi T \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((2n+1)\pi T)$ (with $k_0 = (2n+1)\pi T$), whereas the integrals over k_1 and k_2 are “true” integrals, for $(k_1, k_2) \in [-\pi, \pi]^2$. (We do not need any ultraviolet cutoff for the graph studied in this paper, since it is ultraviolet convergent.)

For our analysis, it will be convenient to introduce another parametrization of the spaces $[-\pi, \pi]^2$ and \mathbb{Z}^2 . The idea is to “rotate” the Fermi surface of Figure II by an angle of $\frac{\pi}{4}$. In the $k_0 = 0$ plane, it is defined by $\cos k_1 + \cos k_2 = 0$, which is equivalent to $k_2 = \pi \pm k_1$ or $k_2 = -\pi \pm k_1$.

Introducing the variables $k_{\pm} = \frac{k_1 \pm k_2}{\pi} \iff \begin{cases} k_1 = \frac{\pi}{2}(k_+ + k_-) \\ k_2 = \frac{\pi}{2}(k_+ - k_-) \end{cases}$, the domain of integration $(k_1, k_2) \in [-\pi, \pi]^2$ becomes the set:

$$\mathcal{D} = \{(k_+, k_-) \in [-2, 2]^2 \text{ with } \left. \begin{array}{l} -2 \leq k_+ \leq 0 \\ -2 - k_+ \leq k_- \leq 2 + k_+ \end{array} \right\} \text{ or } \left. \begin{array}{l} 0 \leq k_+ \leq 2 \\ -2 + k_+ \leq k_- \leq 2 - k_+ \end{array} \right\} \}. \quad (\text{II.3})$$

As $\cos k_1 + \cos k_2 = 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-$, the Fermi surface in the variables k_{\pm} is simply defined by $k_+ = \pm 1, k_- = \pm 1$. The new domain of integration, with the Fermi surface is represented on Figure 2.

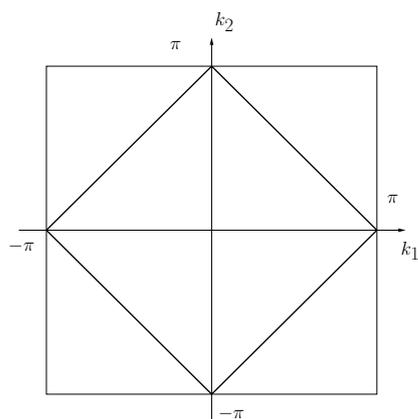


Figure 1. The square $[-\pi, \pi]^2$ and the Fermi surface.

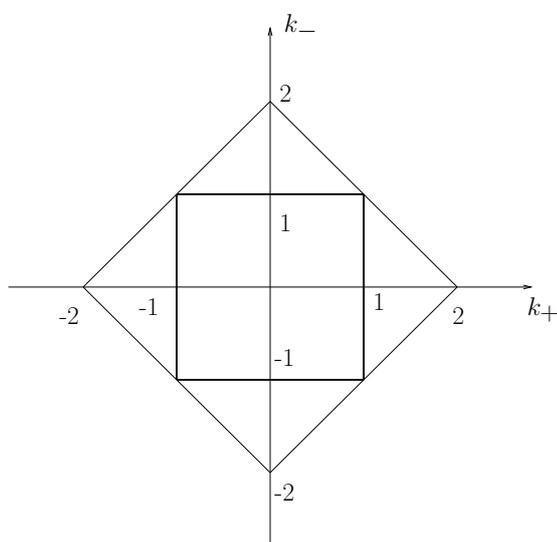


Figure 2. The domain of integration in (k_+, k_-) and the Fermi surface.

In a dual way, we introduce new variables in real space, x_+ and x_- in such a way that $k_1x_1 + k_2x_2 = k_+x_+ + k_-x_-$. We have:

$$\begin{cases} x_+ = \frac{\pi}{2}(x_1 + x_2) \\ x_- = \frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) . \end{cases} \tag{II.4}$$

Observe that the image of the lattice \mathbb{Z}^2 by this change of variable is not $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}^2$ but

the subset

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}m, \frac{\pi}{2}n \right), (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \equiv n[2] \right\}. \tag{II.5}$$

In other words, the integers m and n must have same parity.

As the Jacobian of the transformation $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_+ \\ k_- \end{pmatrix}$ is $J = -\frac{\pi^2}{2}$, we have:

$$\int_{[-\pi, \pi]^2} dk_1 dk_2 \frac{e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}}{ik_0 - \cos k_1 - \cos k_2} = \frac{\pi^2}{2} \int_{\mathcal{D}} dk_+ dk_- \frac{e^{i(k_+ x_+ + k_- x_-)}}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-}. \tag{II.6}$$

But the domain \mathcal{D} is not very convenient for practical computations, and therefore we would like the $k_+ k_-$ integration domain to factorize. Since the complement set $[-2, 2]^2 \setminus \mathcal{D}$ is another fundamental domain for the torus $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$, we have:

$$\int_{\mathcal{D}} dk_+ dk_- \frac{e^{i(k_+ x_+ + k_- x_-)}}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-} = \int_{[-2, 2]^2 \setminus \mathcal{D}} dk_+ dk_- \frac{e^{i(k_+ x_+ + k_- x_-)}}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-}. \tag{II.7}$$

Hence:

$$\int_{\mathcal{D}} dk_+ dk_- \frac{e^{i(k_+ x_+ + k_- x_-)}}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-} = \frac{1}{2} \int_{[-2, 2]^2} dk_+ dk_- \frac{e^{i(k_+ x_+ + k_- x_-)}}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-}. \tag{II.8}$$

Recapitulating, the expression of the propagator that we take as our starting point is:

$$C(x_0, x_+, x_-) = \int d^3 k \frac{e^{i(k_0 x_0 + k_+ x_+ + k_- x_-)}}{ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-} \tag{II.9}$$

for x_{\pm} satisfying the parity condition (II.5). In II.9 the notation $\int d^3 k$ means

$$\frac{1}{32\pi} \int dk_0 \int_{[-2, 2]^2} dk_+ dk_- , \tag{II.10}$$

where we recall that $\int dk_0$ means $2\pi T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta((2n+1)\pi T)$, since $k_0 = (2n+1)\pi T$.

Now, let us consider, in Fourier space, the amplitude of the graph G represented on Figure 3, with an incoming momentum $k = (k_0, k_+, k_-)$. This amplitude is denoted $A_G(k)$ and written as $A_G(k_0, k_+, k_-) = \int d^3 x C(x) \bar{C}(x)^2 e^{-ik \cdot x}$ (where arrows join antifields to fields).

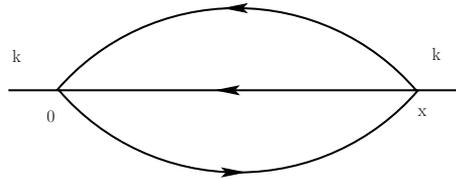


Figure 3. The first non-trivial graph contributing to the self-energy.

More precisely, we shall consider the second momentum derivative in the + direction of this quantity, which up to a global inessential minus sign is:

$$\partial_+^2 A_G(k) = \int d^3x x_+^2 C(x)\bar{C}(x)^2 e^{-ik \cdot x} . \tag{II.11}$$

The quantity we are going to study is explicitly written:

$$\begin{aligned} \partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0) = & \int d^3x x_+^2 \int d^3k_1 \frac{e^{ik_1 \cdot x}}{ik_{1,0} - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_{1,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{1,-}} \\ & \int d^3k_2 \frac{e^{ik_2 \cdot x}}{-ik_{2,0} - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_{2,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{2,-}} \\ & \int d^3k_3 \frac{e^{ik_3 \cdot x}}{-ik_{3,0} - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_{3,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{3,-}} e^{i(\pi T x_0 + x_+)} , \end{aligned} \tag{II.12}$$

where again $\int d^3x$ includes the parity condition (II.5). We state now the main result of this paper:

Theorem II.1 *There exists some strictly positive constant K such that, for T small enough:*

$$|\partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0)| \geq \frac{K}{T} . \tag{II.13}$$

We recall that this result, joined to the analysis of [2], leads to the result that the self-energy of the model is not uniformly \mathcal{C}^2 in the domain $|\lambda| \log^2 T < K$ and therefore that the two-dimensional Hubbard model at half-filling is not a Fermi liquid.

III Plan of the proof

Theorem (II.1) will be proven thanks to a sequence of lemmas. But before presenting these lemmas, let us give an overview of our strategy. We use the sector decomposition introduced in [1] to write:

$$\partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \int d^3x x_+^2 C_{\sigma_1}(x)\bar{C}_{\sigma_2}(x)\bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} , \tag{III.14}$$

where a sector σ is a triplet (i, s_+, s_-) with $0 \leq s_{\pm} \leq i$ and $s_+ + s_- \geq i$.

The main idea is that in the sum over sectors of equation (III.14), the leading contribution is given by a restricted sum corresponding to sectors close to the “vertical part” of the Fermi surface, defined by $k_+ = \pm 1$. To express this more precisely, let Λ be an integer (whose value will be chosen later), which will play the role of a cut-off for the sectors. We want to prove that as soon as one sector is not

close to $k_+ = \pm 1$, then we have a small contribution. Let us denote $\sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}}^\Lambda$ the sum in which at least one sector is “far” from the vertical sides of the Fermi surface. Precisely, this means that at least one index s_j^+ is smaller than $i_{\max}(T) - \Lambda$, where, as in [1], $M^{-i_{\max}(T)} \approx T$. This constrained sum can be written explicitly:

$$\begin{aligned} \sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}}^\Lambda &= \sum_{i_1, s_1^-, \sigma_2, \sigma_3} \sum_{s_1^+=0}^{\inf(i_1, i_{\max}(T) - \Lambda)} \\ &+ \sum_{i_1, s_1^-, i_2, s_2^-, \sigma_3} \sum_{s_1^+=i_{\max}(T) - \Lambda}^{i_1} \sum_{s_2^+=0}^{\inf(i_2, i_{\max}(T) - \Lambda)} \\ &+ \sum_{i_1, s_1^-, i_2, s_2^-, i_3, s_3^-} \sum_{s_1^+=i_{\max}(T) - \Lambda}^{i_1} \sum_{s_2^+=i_{\max}(T) - \Lambda}^{i_2} \sum_{s_3^+=0}^{\inf(i_3, i_{\max}(T) - \Lambda)}. \end{aligned} \tag{III.15}$$

Defining:

$$A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0) = \sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}}^\Lambda \int d^3x C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)}, \tag{III.16}$$

we write:

$$\partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0) = \partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) + \partial_+^2 A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0) \tag{III.17}$$

where $\partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) = \partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0) - \partial_+^2 A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0)$ is expressed as a sum over sectors that are all close to $k_+ = \pm 1$, i.e., such that each s_j^+ index is greater than $i_{\max}(T) - \Lambda$.

Each sector appearing in the sum expressing $\partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0)$ will be divided into two disjoint subsectors, according to the sign of k_+ . We recall that in [1], the sectors were defined as:

$$\left| ik_0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} k_+ \cos \frac{\pi}{2} k_- \right| \approx M^{-i}, \quad \left| \cos \frac{\pi}{2} k_+ \right| \approx M^{-s^+}, \quad \left| \cos \frac{\pi}{2} k_- \right| \approx M^{-s^-}. \tag{III.18}$$

We shall call σ^r and σ^l (“right” and “left”) the subdomains of σ corresponding to $k_+ > 0$ and $k_+ < 0$ respectively. The underlying motivation is that, if a momentum, say k_1 , is close to the side $k_+ = 1$, by momentum conservation at each vertex, the other ones are necessarily close to the other side $k_+ = -1$. Let us state precisely this point:

Lemma III.1 *In the sum expressing $\partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0)$, there must be one sector of the right type, and two of the left type.*

The proof is obvious by momentum conservation in the + direction. □

This Lemma implies that:

$$\begin{aligned}
 \partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) &= \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_1 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} \\
 &+ \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_2 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} \\
 &+ \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_3 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} . \quad (\text{III.19})
 \end{aligned}$$

Among these three contributions, the last two ones are indeed equal, and we have:

$$\begin{aligned}
 \partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) &= \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_1 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} \\
 &+ 2 \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_2 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} . \quad (\text{III.20})
 \end{aligned}$$

In each sum, we replace the $\cos \frac{\pi}{2} k_+$ appearing in the propagators by their Taylor expansions in the neighborhood of $+1$ in a right sector, and in a neighborhood of -1 in a left sector. We have $\cos \frac{\pi}{2} k_+ \approx -\frac{\pi}{2}(k_+ - 1)$ for k_+ in the neighborhood of 1 , in which case we put $q_+ = (k_+ - 1)$ and $\cos \frac{\pi}{2} k_+ \approx \frac{\pi}{2}(k_+ + 1)$ for k_+ in the neighborhood of -1 , in which case we put $q_+ = (k_+ + 1)$. This replacement gives an expression that we call $\partial_+^2 \tilde{A}_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0)$:

$$\begin{aligned}
 \partial_+^2 \tilde{A}_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) &= \int d^3x x_+^2 \int d^3k_1 \frac{u_\Lambda(q_{1,+}) e^{ik_{1,x}}}{ik_{1,0} + \pi q_{1,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{1,-}} \\
 &\int d^3k_2 \frac{u_\Lambda(q_{2,+}) e^{ik_{2,x}}}{-ik_{2,0} - \pi q_{2,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{2,-}} \int d^3k_3 \frac{u_\Lambda(q_{3,+}) e^{ik_{3,x}}}{-ik_{3,0} - \pi q_{3,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{3,-}} e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} \\
 &\quad + 2 \int d^3x x_+^2 \int d^3k_1 \frac{u_\Lambda(q_{1,+}) e^{ik_{1,x}}}{ik_{1,0} - \pi q_{1,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{1,-}} \\
 &\int d^3k_2 \frac{u_\Lambda(q_{2,+}) e^{ik_{2,x}}}{-ik_{2,0} + \pi q_{2,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{2,-}} \int d^3k_3 \frac{u_\Lambda(q_{3,+}) e^{ik_{3,x}}}{-ik_{3,0} - \pi q_{3,+} \cos \frac{\pi}{2} k_{3,-}} e^{-i(\pi T x_0 + x_+)} , \quad (\text{III.21})
 \end{aligned}$$

where the $u_\Lambda(q_+)$'s is now the smooth scaled cutoff function $u(M^{i_{\max}(T)-\Lambda}q_+)$ which expresses the former sector constraint $s_+ \geq i_{\max}(T) - \Lambda$ (u is a usual fixed Gevrey function which is 1 on $[-1, 1]$ and 0 out of $[-2, 2]$, see [1]).

In (III.21) we can freely change each integral over dk_+ which ran over $[-2, 2]$ into an integral on dq_+ which runs from $[-\infty, \infty]$. We still denote $\int d^3k$ the corresponding integrals.

We write now for each propagator in (III.21), $u_\Lambda(q_+) = 1 + u^1(q_+) + u_1^\Lambda(q_+)$ where $u^1(q_+) = u(q_+) - 1$ and $u_1^\Lambda(q_+) = u_\Lambda(q_+) - u(q_+)$. In this way we generate three terms:

- one in which all three functions $u_\Lambda(q_+)$ are replaced by 1. We call this term $\partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0)$
- one in which there is at least one factor $u_1^\Lambda(q_+)$ and no factor $u^1(q_+)$. We call this term $\partial_+^2 A_{G,1}^\Lambda(\pi T, 1, 0)$.
- finally one in which there is at least one factor $u^1(q_+)$. We call this term $\partial_+^2 A_G^1(\pi T, 1, 0)$.

At this stage, we recapitulate:

$$\begin{aligned} \partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0) &= \partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0) + \partial_+^2 A_{G,1}^\Lambda(\pi T, 1, 0) + \partial_+^2 A_G^1(\pi T, 1, 0) \\ &+ \left(\partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) - \partial_+^2 \tilde{A}_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) \right) + \partial_+^2 A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0). \end{aligned} \quad \text{(III.22)}$$

This relation shows that the quantity under study, $\partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0)$, is equal to the approximation $\partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0)$, up to the four error terms

$$\begin{aligned} \partial_+^2 A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0), \quad \partial_+^2 A_{G,1}^\Lambda(\pi T, 1, 0), \\ \left(\partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) - \partial_+^2 \tilde{A}_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) \right), \quad \partial_+^2 A_G^1(\pi T, 1, 0). \end{aligned} \quad \text{(III.23)}$$

Now we are going to prove a lower bound similar to the one of Theorem II.1, but on the quantity $\partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0)$, and establish an upper bound on each of the four error terms. More precisely, if we have $\left| \partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0) \right| > \frac{K}{T}$ for some constant $K > 0$ and if the modulus of each error term is smaller than $\frac{K'}{T}$ with $K' \ll K$, we shall conclude that:

$$\left| \partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0) \right| > \frac{K - 4K'}{T}, \quad \text{(III.24)}$$

which shall prove Theorem II.1. The result that $\left| \partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0) \right| > \frac{K}{T}$ is really the most difficult to establish, and its proof is the heart of this paper. But the control of the error terms is easier, and each one will correspond to a lemma. We shall begin by these lemmas in the next section, and then turn to the lower bound on $\left| \partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0) \right|$.

IV The control of the error terms

First we state a result that is not necessary for proving Theorem II.1 but whose proof illustrates the way the sector decomposition allows us to establish quite easily upper bounds.

Lemma IV.1 *There exists some constant $K_1 > 0$ such that:*

$$|\partial_+^2 A_G(\pi T, 1, 0)| \leq \frac{K_1}{T}. \tag{IV.25}$$

Proof: We use the decay property of $C_{(i,s_+,s_-)}(x)$ (see [1], Lemma 1):

$$|C_{(i,s_+,s_-)}(x)| \leq c.M^{-s_+-s_-} \exp\left(-c\left(d_\sigma(x)\right)^\alpha\right), \tag{IV.26}$$

where $\alpha \in]0, 1[$ is a fixed number, c is a constant and $d_\sigma(x) = M^{-i}|x_0| + M^{-s_+}|x_+| + M^{-s_-}|x_-|$. We have:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq c^3.M^{-\sum_{j=1}^3 s_j^+ - \sum_{j=1}^3 s_j^-} \sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}} \int d^3x x_+^2 \exp\left(-c \sum_{j=1}^3 \left(M^{-i_j}|x_0| + M^{s_j^+}|x_+| + M^{-s_j^-}|x_-|\right)^\alpha\right). \tag{IV.27}$$

Among the indices i_1, i_2 and i_3 , we keep the best one, i.e., the smallest one, to perform the integration over x_0 . We proceed in an analogous way for the indices (s_1^+, s_2^+, s_3^+) and (s_1^-, s_2^-, s_3^-) respectively. Thus we have:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq c^3 \sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}} M^{-\sum_{j=1}^3 s_j^+ - \sum_{j=1}^3 s_j^-} M^{\inf\{i_j\}} M^{3\inf\{s_j^+\}} M^{\inf\{s_j^-\}}. \tag{IV.28}$$

To carry out our discussion, we introduce several notations. If (a_1, a_2, a_3) is a family of three (not necessarily distinct) real numbers, we denote as usual $\inf\{a_j\}$ the smallest number among the a_j 's, but we define also

$$\inf_2\{a_j\} = \inf\left(\{a_1, a_2, a_3\} \setminus \{\inf\{a_1, a_2, a_3\}\}\right) \tag{IV.29}$$

and:

$$\inf_3\{a_j\} = \inf\left(\{a_1, a_2, a_3\} \setminus \{\inf\{a_1, a_2, a_3\}, \inf_2\{a_1, a_2, a_3\}\}\right). \tag{IV.30}$$

Remark that $\inf_3\{a_j\}$ is indeed $\sup\{a_j\}$. Finally in this paragraph we shall write simply $\sum a_j$ instead of $\sum_{j=1}^3 a_j$, and similarly for the s_j^+ 's and the s_j^- 's. With these notations, it is very easy to check the following identity:

$$\inf\{a_j\} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 a_j - \frac{1}{3} \left[\inf_2\{a_j\} - \inf\{a_j\} \right] - \frac{1}{3} \left[\inf_3\{a_j\} - \inf\{a_j\} \right]. \quad (\text{IV.31})$$

We introduce the abbreviation:

$$\Delta\{a_j\} = \left[\inf_2\{a_j\} - \inf\{a_j\} \right] + \left[\inf_3\{a_j\} - \inf\{a_j\} \right], \quad (\text{IV.32})$$

so that we have:

$$\inf\{a_j\} = \frac{1}{3} \sum a_j - \frac{1}{3} \Delta\{a_j\}. \quad (\text{IV.33})$$

We use this identity to replace $\inf\{i_j\}$ and $\inf\{s_j^\pm\}$ in formula (IV.28), and we obtain:

$$\begin{aligned} & |\partial_+^2 A_G(k)| \\ & \leq c^3 \sum_{\{i_j, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}\}} M^{-\sum s_j^+ - \sum s_j^-} M^{\frac{1}{3} \sum i_j - \frac{1}{3} \Delta\{i_j\}} M^{\sum s_j^+ - \Delta\{s_j^+\}} M^{\inf\{s_j^-\}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Since $\inf\{s_j^-\} \leq \frac{1}{3} \sum s_j^-$, we can write:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq c^3 \sum_{\{i_j, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}\}} M^{\frac{1}{3} \sum i_j - \frac{1}{3} \Delta\{i_j\}} M^{-\Delta\{s_j^+\}} M^{-\frac{2}{3} \sum s_j^-}. \quad (\text{IV.35})$$

Now, we use the constraints in the sum $\sum_{\{i_j, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}\}}$ to write, for each $j \in \{1, 2, 3\}$:

$$s_j^- \geq i_j - s_j^+ - 2. \quad (\text{IV.36})$$

We deduce that:

$$\frac{1}{3} \sum s_j^- \geq \frac{1}{3} \sum i_j - \frac{1}{3} \sum s_j^+ - 2 \quad (\text{IV.37})$$

and

$$M^{-\frac{1}{3} \sum s_j^-} \leq M^2 M^{-\frac{1}{3} \sum i_j + \frac{1}{3} \sum s_j^+}. \quad (\text{IV.38})$$

Replacing in equation (IV.35), we get:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq c^3 M^2 \sum_{\{i_j, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}\}} M^{-\frac{1}{3} \Delta\{i_j\}} M^{\frac{1}{3} \sum s_j^+ - \Delta\{s_j^+\}} M^{-\frac{1}{3} \sum s_j^-}, \quad (\text{IV.39})$$

and using relation (IV.33), we have:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq c^3 M^2 \sum_{\{i_j, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}\}} M^{-\frac{1}{3} \Delta\{i_j\}} M^{\inf\{s_j^+\} - \frac{2}{3} \Delta\{s_j^+\}} M^{-\frac{1}{3} \sum s_j^-}. \quad (\text{IV.40})$$

At last, let us denote κ the value of the index j such that $s_\kappa^+ = \inf\{s_j^+\}$. We write $\inf\{s_j^+\} = i_\kappa - (i_\kappa - s_\kappa^+)$. Finally we obtain:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq c^3 M^2 \sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}} M^{i_\kappa} M^{-\frac{1}{3}\Delta\{i_j\}} M^{-(i_\kappa - s_\kappa^+) - \frac{2}{3}\Delta\{s_j^+\}} M^{-\frac{1}{3}\sum s_j^-} . \tag{IV.41}$$

Clearly the sums over s_1^-, s_2^- and s_3^- can be bounded by $K_2 = \frac{M}{(M^{1/3}-1)^3}$. The decay $M^{-\frac{2}{3}\Delta\{s_j^+\}}$ can be used to perform the sums over s_j^+ for $j \neq \kappa$, also at a cost K_2 . In the same way, we use the decay $M^{-\frac{1}{3}\Delta\{i_j\}}$ to sum over the values $i_j, j \neq \kappa$ also at cost K_2 per sum. It remains to sum over s_κ^+ :

$$\sum_{0 \leq s_\kappa^+ \leq i_\kappa} M^{-(i_\kappa - s_\kappa^+)} \leq \frac{M}{M-1} . \tag{IV.42}$$

At last, we have:

$$|\partial_+^2 A_G(k)| \leq K \sum_{i_\kappa=0}^{i_{\max}(T)} M^{i_\kappa} = K \frac{M^{i_{\max}(T)+1}}{M-1} \tag{IV.43}$$

and we have $M^{i_{\max}(T)} \sim \frac{1}{T}$ (see [1]), which proves lemma IV.1. □

We have then the following lemma, which is a slight refinement of lemma IV.1:

Lemma IV.2

$$|\partial_+^2 A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0)|, |\partial_+^2 A_{G,1}^\Lambda(\pi T, 1, 0)| \leq \frac{K_1}{M^\Lambda T} \tag{IV.44}$$

where K_1 is the constant of Lemma IV.1.

Proof: It is similar to the proof of Lemma IV.1. The case of $\partial_+^2 A_{G,1}^\Lambda(\pi T, 1, 0)$ can be decomposed into sectors exactly in the same way than $\partial_+^2 A_G^\Lambda(\pi T, 1, 0)$ because away from the singularity and in a bounded domain in k_+ , the presence of πq_+ instead of $\cos \frac{\pi}{2} k_+$ does not change anything to the bounds on the propagators in sectors. Each step is then similar to the proof of lemma IV.1 until we arrive at the last sum which we decompose in two pieces. The first piece corresponds to the domain $i_\kappa \leq i_{\max}(T) - \Lambda$ and gives

$$\sum_{i_\kappa=0}^{i_{\max}(T)-\Lambda} M^{i_\kappa} = \frac{M^{i_{\max}(T)-\Lambda+1} - 1}{M-1} \tag{IV.45}$$

$$\leq \frac{M}{M-1} \cdot \frac{M^{i_{\max}(T)}}{M^\Lambda} = \frac{K'}{T \cdot M^\Lambda} , \tag{IV.46}$$

and the second piece corresponds to the domain $i_{\max}(T) - \Lambda < i_\kappa \leq i_{\max}(T)$. In this case one should improve on equation (IV.42), to get

$$\sum_{0 \leq s_\kappa^+ \leq i_{\max}(T) - \Lambda} M^{-(i_\kappa - s_\kappa^+)} \leq K.M^{-(i_\kappa - (i_{\max}(T) - \Lambda))}, \tag{IV.47}$$

so that this second piece is bounded by

$$\sum_{i_\kappa = i_{\max}(T) - \Lambda}^{i_{\max}(T)} M^{i_\kappa} K.M^{-(i_\kappa - (i_{\max}(T) - \Lambda))} \leq K'.M^{i_{\max}(T) - \Lambda}, \tag{IV.48}$$

hence the bound for this second piece is the same as for the first. This proves the lemma. \square

The following lemma bounds the contributions with at least one large infrared cutoff u^1 on one propagator:

Lemma IV.3

$$|\partial_+^2 A_G^1(\pi T, 1, 0)| \leq K_2 \tag{IV.49}$$

where K_2 is some new constant.

Proof: The main idea is that a propagator bearing cutoff $u^1 = 1 - u$ on q_+ decays on a length scale $O(1)$ in x_+ , so the factor x_+^2 in $\partial_+^2 A_G^1$ is now harmless, and this prevents the divergence in $1/T$ of the bound.

We remark first that in the amplitude $\partial_+^2 A_G^1$ we can change the sum over x_+ into a sum over the non zero values of x_+ , because of the x_+^2 integrand. Since a propagator bearing cutoff $u^1 = 1 - u$ on q_+ is not absolutely integrable at large q_+ , we first prepare all such propagators (there are between 1 and 3 of them) using integration by parts.

For any such propagator we first split the q_+ integration into the two regions $\int_1^\infty dq_+$ and $\int_{-\infty}^{-1} dq_+$ and treat only the first term, the other one being identical. Similarly we can assume that we work on a ‘right’ propagator, so that $q_+ = k_+ - 1$, the other case being identical. The corresponding object is then:

$$\begin{aligned} D(x) &= e^{ix_+} \int dk_0 \int_{-2}^2 dk_- \int_1^\infty dq_+ \frac{[1 - u(q_+)]e^{i(k_0 x_0 + k_- x_- + q_+ x_+)}}{ik_0 + \pi q_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-} \\ &= -\frac{ie^{ix_+}}{x_+} \int dk_0 \int_{-2}^2 dk_- \int_1^\infty dq_+ \left[\frac{[\pi \cos \frac{\pi}{2} k_-][1 - u(q_+)]e^{i(k_0 x_0 + k_- x_- + q_+ x_+)}}{[ik_0 + \pi q_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u'(q_+)e^{i(k_0 x_0 + k_- x_- + q_+ x_+)}}{ik_0 + \pi q_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-} \right]. \tag{IV.50} \end{aligned}$$

The last term, having a compact support u' is similar to the ones of the previous lemma, and left to the reader. Let us treat the first term.

We divide it with a partition of unity into new sectors i, s_+, s_- according to the size of the denominator $ik_0 + \pi q_+ \cos \frac{\pi}{2} k_-$, which is M^{-i} , the size of q_+ which is now of order M^{+s_+} , with $s_+ > 0$, and of k_- which is of order $M^{-s_-} = M^{-i-s_+}$, with $s_- = i + s_+$. The bounds are:

$$\begin{aligned} |D_{i,s_+,s_-}(x)| &\leq K|x_+|^{-1}M^{+i}M^{s_+}M^{-2s_-}e^{-c[M^{-i}x_0+M^{s_+}x_++M^{-s_-}x_-]^\alpha} \\ &\leq \frac{2K}{\pi}M^{-i-s_+}e^{-c[M^{-i}x_0+M^{s_+}x_++M^{-s_-}x_-]^\alpha}, \end{aligned} \tag{IV.51}$$

since for non zero x_+ , on the tilted lattice $|x_+|^{-1}$ is bounded by $2/\pi$. Hence taking into account that the “integral” $\int dx_+$ is really a discrete sum on $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$:

$$\int dx_+x_+^2|D_{i,s_+,s_-}(x)| \leq KM^{-i-3s_+}e^{-[M^{-i}x_0+M^{-s_-}x_-]^\alpha/2}. \tag{IV.52}$$

Finally we need to optimize the dx_0 and dx_- using the best of the three other propagators. This leads to a bound which obviously is uniform in T . For instance if the three propagators have large infrared cutoffs $u^1 = 1 - u$, we get the bound

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3 \\ s_+,1,s_+,2,s_+,3}} KM^{-\sum_j i_j - \sum_j s_{+,j} - 2 \sup s_{+,j} + \inf\{i\} + \inf\{i+s_+\}} \\ \leq \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3 \\ s_+,1,s_+,2,s_+,3}} KM^{-(1/3)\sum_j i_j - (4/3)\sum_j s_{+,j}} \leq K', \end{aligned} \tag{IV.53}$$

and the other cases, when one or two propagators are of ordinary type, are similar and left to the reader. \square

Finally we state the lemma that allows us to control the replacement of $\cos \frac{\pi}{2} k_-$ by its Taylor expansion:

Lemma IV.4 *There exists a constant $K_3 > 0$ such that:*

$$\left| \partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) - \partial_+^2 \tilde{A}_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) \right| \leq K_3. \tag{IV.54}$$

Proof:

$$\begin{aligned} &\partial_+^2 A_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) - \partial_+^2 \tilde{A}_{G,\Lambda}(\pi T, 1, 0) \\ &= \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_1 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 \left[C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) - \tilde{C}_{\sigma_1^r}(x) \tilde{\bar{C}}_{\sigma_2^\ell} \tilde{\bar{C}}_{\sigma_3^\ell}(x) \right] \\ &\qquad\qquad\qquad e^{-(\pi T x_0 + x_+)} \\ &+ 2 \sum_{\substack{\{\sigma_j\}, i_j, s_j^+ > i_{\max(T)-\Lambda} \\ \sigma_2 \text{ right}}} \int d^3x x_+^2 \left[C_{\sigma_1}(x) \bar{C}_{\sigma_2}(x) \bar{C}_{\sigma_3}(x) - \tilde{C}_{\sigma_1^\ell}(x) \tilde{\bar{C}}_{\sigma_2^r} \tilde{\bar{C}}_{\sigma_3^r}(x) \right], \end{aligned} \tag{IV.55}$$

where

$$\tilde{C}_{\sigma^r}(x) = \int d^3k \frac{u_{\sigma^r}(k)e^{ik \cdot x}}{ik_0 + \pi(k_+ - 1) \cos \frac{\pi}{2}k_-} \tag{IV.56}$$

$$\tilde{C}_{\sigma^\ell}(x) = \int d^3k \frac{u_{\sigma^\ell}(k)e^{ik \cdot x}}{ik_0 - \pi(k_+ + 1) \cos \frac{\pi}{2}k_-} . \tag{IV.57}$$

Observing that there exists a constant K_4 such that:

$$\left| \cos \frac{\pi}{2}k_+ + (\pi/2)(k_+ - 1) \right| \leq K_4(k_+ - 1)^2 \tag{IV.58}$$

$$\left| \cos \frac{\pi}{2}k_+ - (\pi/2)(k_+ + 1) \right| \leq K_4(k_+ + 1)^2 \tag{IV.59}$$

uniformly in k_+ , we have:

$$\left| C_{\sigma^{r(\ell)}}(x) - \tilde{C}_{\sigma^{r(\ell)}}(x) \right| \leq c' . M^{-2s_+ - s_-} e^{-c' d_\sigma^\alpha(x)} . \tag{IV.60}$$

Using the relation

$$\begin{aligned} C_{\sigma_1} \overline{C}_{\sigma_2} \overline{C}_{\sigma_3} - \tilde{C}_{\sigma_1} \overline{\tilde{C}}_{\sigma_2} \overline{\tilde{C}}_{\sigma_3} = \\ (C_{\sigma_1} - \tilde{C}_{\sigma_1}) \overline{C}_{\sigma_2} \overline{C}_{\sigma_3} + \tilde{C}_{\sigma_1} (\overline{C}_{\sigma_2} - \overline{\tilde{C}}_{\sigma_2}) C_{\sigma_3} + \tilde{C}_{\sigma_1} \overline{\tilde{C}}_{\sigma_2} (\overline{C}_{\sigma_3} - \overline{\tilde{C}}_{\sigma_3}) , \end{aligned} \tag{IV.61}$$

to create differences of the type $C - \tilde{C}$, we gain $M^{-s_+} \leq M^{-(i_{\max} - \Lambda)}$ in the power counting with respect to a single propagator. □

V Main lower bound

Now we can state our main lower bound:

Theorem V.1 *There exists a constant $K_5 > 0$ such that:*

$$\left| \partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0) \right| \geq \frac{K_5}{T} . \tag{V.62}$$

This theorem with the lemmas of the previous section obviously imply Theorem II.1, hence the remaining of this paper is devoted to the proof of this Theorem V.1.

V.1 Integration over $k_{1,+}$, $k_{2,+}$ and $k_{3,+}$

We return to equation (III.21), in which all three cutoffs u_Λ have been replaced by 1. Let us write in equation (III.21) $\partial_+^2 \tilde{A}_G(\pi T, 1, 0)$ as $\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1} + 2\partial_+^2 \tilde{A}_{G,2}$ and let us consider the first term $\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}$.

The first propagator (after a change of variable to call the dummy variable q_+ again k_+):

$$\int d^3 k_1 \frac{e^{ik_1 \cdot x} e^{ix_+}}{ik_{1,0} + \pi k_{1,+} \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)}. \tag{V.63}$$

For $\cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right) \neq 0$ we have:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1,+} \frac{e^{ik_{1,+} x_+}}{ik_{1,0} + \pi k_{1,+} \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} = \frac{1}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1,+} \frac{e^{ik_{1,+} x_+}}{k_{1,+} + \left(\frac{ik_{1,0}}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)}\right)}. \tag{V.64}$$

The corresponding residue is $\exp\left(\frac{k_{1,0} x_+}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)}\right)$. If $x_+ > 0$, then we move the path of integration upwards. It is oriented in the positive direction, so we get:

$$\chi(x_+ > 0) \chi\left(-\frac{k_{1,0}}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} > 0\right) 2i\pi \exp\left(\frac{k_{1,0} x_+}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)}\right). \tag{V.65}$$

If $x_+ < 0$, then the path of integration is moved downwards, and we get a minus sign owing to the negative direction. Hence:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1,+} \frac{e^{ik_{1,+} x_+}}{ik_{1,0} + \pi k_{1,+} \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} = \frac{2i}{\cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} \exp\left(\frac{k_{1,0} x_+}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)}\right) \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(-\frac{k_{1,0}}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} > 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(-\frac{k_{1,0}}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right)} < 0\right) \right]. \tag{V.66}$$

We treat analogously the integrations over $k_{2,+}$ and $k_{3,+}$. The only difference with the previous case is that these propagators were near the left singularity $k_+ \simeq -1$, so there are some sign changes in $q_{2,+}$ and $q_{3,+} \approx -1$. We obtain:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{2,+} \frac{e^{ik_{2,+} x_+}}{-ik_{2,0} - \pi k_{2,+} \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right)} = \frac{-2i}{\cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right)} \exp\left(+\frac{k_{2,0} x_+}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right)}\right) \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right)} < 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right)} > 0\right) \right]. \tag{V.67}$$

$$\begin{aligned}
\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0) &= -8i \int d^3 x \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,0} dk_{3,-} \\
&\quad x_+^2 \frac{\exp\left(\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} + \frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})}\right) x_+\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{3,-}\right)} \\
&\quad e^{i(k_{1,0}+k_{2,0}+k_{3,0}+\pi T)x_0} e^{i(k_{1,-}+k_{2,-}+k_{3,-})x_-} \\
&\quad \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} < 0\right) \right. \\
&\quad \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} < 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} > 0\right) \\
&\quad \left. \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} > 0\right) \right]. \quad (\text{V.68})
\end{aligned}$$

V.2 Integration over x_0 and $k_{3,0}$

The calculation is done integrating over x_0 , which leads to a delta function in the integrand, denoted with a slight abuse of notation by $\delta(k_{1,0} + k_{2,0} + k_{3,0} + \pi T = 0)$. In fact, there is a prefactor $\frac{1}{T}$ that compensates the T factor of $\int dk_{3,0}$: remember that $\int dk_{3,0}$ means precisely: $2\pi T \sum_{k_{3,0} \in \pi T + 2\pi T\mathbb{Z}}$. This yields:

$$\begin{aligned}
\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0) &= -8i \int dx_+ dx_- \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,0} dk_{3,-} \\
&\quad x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} + \frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})}\right) x_+}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{3,-}\right)} \\
&\quad e^{i(k_{1,-}+k_{2,-}+k_{3,-})x_-} \delta(k_{1,0} + k_{2,0} + k_{3,0} + \pi T = 0) \\
&\quad \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} < 0\right) \right. \\
&\quad \left. - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} > 0\right) \right]. \quad (\text{V.69})
\end{aligned}$$

At this stage, we can use the delta function to integrate, for instance, over $k_{3,0}$:

$$\begin{aligned}
\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0) &= -8i \int dx_+ dx_- \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,-} \\
&\quad x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}+\pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})}\right) x_+}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} k_{1,-}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{2,-}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k_{3,-}\right)} e^{i(k_{1,-}+k_{2,-}+k_{3,-})x_-}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \right. \\ & \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} > 0\right) \\ & \left. \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} < 0\right) \right]. \quad (V.70) \end{aligned}$$

V.3 Simplification

This rather complicated expression can be slightly simplified. Indeed, if we perform the change of variables:

$$\begin{cases} x'_+ & = & -x_+ \\ k'_{1,0} & = & -k_{1,0} \\ k'_{2,0} & = & -k_{2,0} \end{cases} \quad (V.71)$$

the integral

$$\begin{aligned} & \int dx_+ dx_- \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,-} x_+^2 \\ & e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right) x_+} \\ & \frac{\chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} > 0\right)}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} \\ & \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} < 0\right) \quad (V.72) \end{aligned}$$

becomes:

$$\begin{aligned} & \int dx'_+ dx_- \int dk'_{1,0} dk_{1,-} dk'_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,-} x_+^2 \\ & e^{\left(\frac{k'_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k'_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k'_{1,0} + k'_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right) x'_+} \\ & \frac{\chi(x'_+ > 0) \chi\left(\frac{k'_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right)}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} \\ & \chi\left(\frac{k'_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k'_{1,0} + k'_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right). \quad (V.73) \end{aligned}$$

Consequently the previous expression of $\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0)$ can be factorized:

$$\begin{aligned} \partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0) & = -8i \int dx_+ dx_- \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,-} \\ & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0} + k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} e^{i(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-})x_-} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \\ & \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{3,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right. \\ & \quad \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{3,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right]. \end{aligned} \tag{V.74}$$

VI Integration over x_- and $k_{3,-}$

We now are going to perform the integration over x_- , which will provide a conservation rule for the moments $k_{1,0}$, $k_{2,0}$ and $k_{3,0}$, but only modulo 2. To understand that, remember that $\int dx_+ dx_-$ means more precisely: $\sum'_{(x_+,x_-) \in (\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})^2}$, where the prime in the sum means that one has to respect a parity condition between x_+ and x_- . By slight abuse of language, we say that x_+ and x_- have the same parity when $x_+ + x_- \in \pi\mathbb{Z}$. So $\sum'_{(x_+,x_-) \in (\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})^2}$ does not mean: $\sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}} \sum_{x_- \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}$ but $\sum_{x_+ \in \pi\mathbb{Z}} \sum_{x_- \in \pi\mathbb{Z}} + \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}} \sum_{x_- \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}}$. Now,

$$\sum_{x_- \in \pi\mathbb{Z}} e^{i(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-})x_-} = \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[2]) \tag{VI.75}$$

where by $\delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[2])$, we denote: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 2n)$. Then it is clear that

$$\sum_{x_- \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}} e^{i(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-})x_-} = e^{i\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-})} \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[2]). \tag{VI.76}$$

Indeed, the factor $e^{i\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-})}$ can take only two values: 1 if $k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[4]$, and -1 if $k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 2[4]$. Hence it is convenient to distinguish these two cases and write:

$$\begin{aligned} \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[2]) &= \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[4]) \\ &\quad + \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 2[4]) \end{aligned} \tag{VI.77}$$

and

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-})} \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[2]) \\ = \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[4]) - \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 2[4]). \end{aligned} \tag{VI.78}$$

At this stage, we can gather the previous remarks in the following formula :

$$\begin{aligned}
 \partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0) &= -8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} dk_{3,-} \\
 & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 0[4]) \\
 & \quad \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \\
 & \quad \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{3,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right. \\
 & \quad \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{3,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right] \\
 & - 8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} dk_{3,-} \\
 & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} \delta(k_{1,-} + k_{2,-} + k_{3,-} = 2[4]) \\
 & [\chi(x_+ \text{ even}) - \chi(x_+ \text{ odd})] \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \\
 & \quad \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{3,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right. \\
 & \quad \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{3,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right] . \quad (\text{VI.79})
 \end{aligned}$$

Then we can perform the integration over $k_{3,-}$. Formally, we only need to replace $\cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})$ by $\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))$ for the first piece and with $-\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))$ for the second piece. We obtain:

$$\begin{aligned}
 \partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0) &= -8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} \\
 & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \\
 & \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} > 0\right) \right. \\
 & \quad \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} > 0\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} \\
 & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} + \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-})}\right)x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \\
 & [\chi(x_+ \text{ even}) - \chi(x_+ \text{ odd})] \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \\
 & \left[e^{\frac{T x_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0}+k_{2,0}+\pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} < 0\right) \right. \\
 & \left. - e^{\frac{-T x_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0}+k_{2,0}-\pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} < 0\right) \right]. \tag{VI.80}
 \end{aligned}$$

Now it is clear that $\partial_+^2 \tilde{A}_{G,1}(\pi T, 1, 0)$ is a purely imaginary number. The first piece gives the leading behavior as $T \rightarrow 0$. Indeed the second piece is much smaller, thanks to the compensation in $[\chi(x_+ \text{ even}) - \chi(x_+ \text{ odd})]$. Indeed the sum

$$\sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} x_+^2 [\chi(x_+ \text{ even}) - \chi(x_+ \text{ odd})] \dots \tag{VI.81}$$

can be written as a sum of two terms of the type

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int dk e^{-2A(k)n} [(2n)^2 - (2n+1)^2 e^{-A(k)}] B(k) \tag{VI.82}$$

where A and B are independent of n and $A(k) > 0$. Then we can decompose the remaining integrals $\int dk$ into two zones, according to whether $A(k) \geq T^{1/3}$ or $A(k) \leq T^{1/3}$. In the first zone we do not need to exploit the subtraction, but we have simply $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^2 e^{-2T^{1/3}n} \leq c.T^{-2/3} \ll T^{-1}$, and in the second zone, we use $|(2n)^2 - (2n+1)^2 e^{-A(k)}| \leq 4n+1 + (2n+1)^2 A(k) \leq 4n+1 + (2n+1)^2 T^{1/3}$. The first term in $4n+1$ is then bounded with the same techniques than Lemma IV.1, but the factor $M^{\inf\{i_j\}+3\inf\{s_j^+\}+\inf\{s_j^-\}}$ is replaced by $M^{\inf\{i_j\}+2\inf\{s_j^+\}+\inf\{s_j^-\}}$ and the bound corresponding to equation (IV.40) gives now

$$\sum_{\{i_j\}, \{s_j^+\}, \{s_j^-\}} M^{-\frac{1}{3}\Delta\{i_j\}} M^{-\frac{2}{3}\Delta\{s_j^+\}} M^{-\frac{1}{3}\sum s_j^-} \leq 0(1), \tag{VI.83}$$

hence this piece does not diverge at all when $T \rightarrow 0$. Finally the piece with the factor $(2n+1)^2 T^{1/3}$ is similar to previous pieces, except for the new factor $T^{1/3}$, so that it is bounded in the manner of Lemma IV.1 by a factor $c.T^{-1}T^{1/3} = c.T^{-2/3}$.

So we are left to study:

$$\begin{aligned}
 A_1(T) = & -8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} x_+^2 \\
 & \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \\
 & \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0}+k_{2,0}+\pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} > 0\right) \right. \\
 & \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0}+k_{2,0}-\pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} > 0\right) \right]. \quad (\text{VI.84})
 \end{aligned}$$

VII Leading contribution

VII.1 Symmetry properties

Henceforward, we shall denote the integrand by $F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-})$ so that:

$$A_1(T) = -8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}). \quad (\text{VII.85})$$

The couple of variables of integration $(k_{1,-}, k_{2,-})$ describes the square $[-2, 2]^2$. To pursue the calculation, we shall make a partition of $[-2, 2]^2$, according to the signs of $\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})$, $\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})$ and $\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))$. This partition is represented in Figure 4.

The signs of the three cosines determine eight cases we can discuss separately. In fact, it is possible to restrict the domain of integration thanks to symmetries of the integrand involving the variables $k_{1,-}$ and $k_{2,-}$ together with the variables $k_{1,0}$ and $k_{2,0}$, which describe independently the set $\pi T + 2\pi T\mathbb{Z}$.

It is evident, by the parity of the cosine function, that the integrand is invariant under the replacement $k_{1,-} \rightarrow -k_{1,-}$ and $k_{2,-} \rightarrow -k_{2,-}$, which corresponds to the central symmetry with respect to the origin $(0,0)$. Hence we have:

$$A_1(T) = -16i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_{-2}^2 dk_{1,-} \int_0^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}). \quad (\text{VII.86})$$

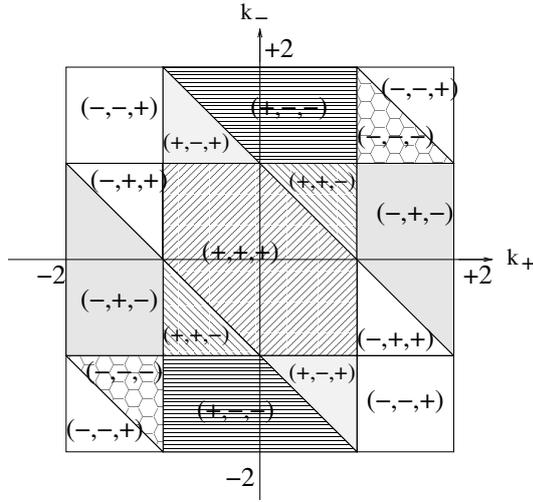


Figure 4. The domain of integration in (k_+, k_-) .

Symmetry properties of $F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-})$ can be exploited further. The above integral may be separated into two pieces:

$$\begin{aligned}
 A_1(T) = & -16i \left(\sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_{-2}^0 dk_{1,-} \right. \\
 & \left. \int_0^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}) \right. \\
 & \left. + \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_0^2 dk_{1,-} \int_0^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}) \right). \tag{VII.87}
 \end{aligned}$$

For the first integral, one can easily verify that the integrand $F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-})$ is invariant under the change of variables:

$$k'_{1,0} = k_{2,0}, \quad k'_{2,0} = k_{1,0}, \quad k'_{1,-} = -k_{2,-}, \quad k'_{2,-} = -k_{1,-}. \tag{VII.88}$$

We get:

$$\begin{aligned}
 & \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_{-2}^0 dk_{1,-} \int_0^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}) = \\
 & 2 \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_{-2}^0 dk_{1,-} \int_{-k_{1,-}}^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}). \tag{VII.89}
 \end{aligned}$$

We treat analogously the other integral; we set:

$$k'_{1,0} = k_{2,0}, \quad k'_{2,0} = k_{1,0}, \quad k'_{1,-} = k_{2,-}, \quad k'_{2,-} = k_{1,-}. \quad (\text{VII.90})$$

Hence:

$$\begin{aligned} & \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_0^2 dk_{1,-} \int_0^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}) = \\ & 2 \int dk_{1,0} dk_{2,0} \int_0^2 dk_{1,-} \int_{k_{1,-}}^2 dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}). \quad (\text{VII.91}) \end{aligned}$$

Finally, we have established owing to symmetry properties that:

$$A_1(T) = -32i \iint_{\mathcal{T}} dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}} dk_{1,-} dk_{2,-} F(x_+, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{1,-}, k_{2,-}), \quad (\text{VII.92})$$

the domain of integration in $(k_{1,-}, k_{2,-})$ being the triangle \mathcal{T} delimited by the lines $k_{2,-} = 2$, $k_{2,-} = k_{1,-}$ and $k_{2,-} = -k_{1,-}$.

VII.2 Discussion of the various cases

VII.2.1 The $(+, +, +)$ case

As we have said, it is now convenient to carry a discussion about the signs of $\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})$, $\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})$ and $\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))$, which allows us to perform explicitly the summation over $k_{1,0}$ and $k_{2,0}$ in each case.

We first begin with the case:

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) > 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) > 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})) > 0 \end{cases}, \quad (\text{VII.93})$$

that we will denote as $(+, +, +)$. The corresponding contribution to $A_1(T)$ is:

$$\begin{aligned} A_1^{(+,+,+)}(T) = & -32i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}_{(+,+,+)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \\ & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0} + k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \chi(k_{1,0} < 0) \chi(k_{2,0} < 0) \\ & \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} > -\pi T) \right. \\ & \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} > \pi T) \right], \quad (\text{VII.94}) \end{aligned}$$

where $\mathcal{T}_{(+,+,+)}$ denotes the subset of \mathcal{T} where the signs of the cosines are $(+, +, +)$ respectively. Since the conditions $k_{1,0} < 0$, $k_{2,0} < 0$ and $k_{1,0} + k_{2,0} > \pm\pi T$ are incompatible, $A_1^{(+,+,+)} = 0$.

VII.2.2 The $(+, +, -)$ case

Let us consider the case:

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) > 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) > 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})) < 0 \end{cases}, \quad (\text{VII.95})$$

corresponding to the sign configuration $(+, +, -)$. We have:

$$\begin{aligned} A_1^{(+,+, -)}(T) &= -32i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}_{(+,+, -)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \\ & x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0} + k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \chi(k_{1,0} < 0) \chi(k_{2,0} < 0) \\ & \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} < -\pi T) \right. \\ & \quad \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} < \pi T) \right]. \quad (\text{VII.96}) \end{aligned}$$

The conditions $\chi(k_{1,0} + k_{2,0} < \pm\pi T)$ can obviously be omitted. We must compute the following expression:

$$\begin{aligned} & (2\pi T)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) Tx_+} \\ & e^{-(2p+1)\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) Tx_+} \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \right], \quad (\text{VII.97}) \end{aligned}$$

which gives:

$$\begin{aligned} & (2\pi T)^2 e^{-\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) Tx_+} \\ & \frac{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) Tx_+} \right]}{\left[1 - e^{\frac{2Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \right]} \cdot \quad (\text{VII.98}) \\ & \frac{1}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) Tx_+} \right]} \end{aligned}$$

This is clearly a positive real number, and therefore we conclude that

$$iA_1^{(+,+, -)}(T) \leq 0. \quad (\text{VII.99})$$

Indeed, the minus sign of the prefactor $-32i$ is compensated by the minus sign of the product $\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))$.

VII.2.3 The (+, -, +) case

We now consider the (+, -, +) case. The corresponding contribution writes:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(+,-,+)}(T) = & -32i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}_{(+,-,+)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \\
 & x_+^2 e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \right) x_+} \\
 & \frac{\chi(k_{1,0} < 0)\chi(k_{2,0} > 0)}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \\
 & \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} > -\pi T) \right. \\
 & \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} > \pi T) \right]. \quad (\text{VII.100})
 \end{aligned}$$

Here like in all the other cases, we have to sum geometric sequences whose ratio is explicitly strictly smaller than 1. This facilitates the discussion of the signs of the corresponding quantities, as we shall see. If we perform the summation over $k_{1,0}$, we are lead to a geometric sequence whose ratio is $e^{-2 \left(\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \right)}$, which leads to a factor

$$\left[1 - e^{-2 \left(\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \right)} \right]^{-1}$$

whose sign is not uniform in $(k_{1,-}, k_{2,-})$.

Consequently we introduce the variable $s = k_{1,0} + k_{2,0}$ and replace $k_{2,0}$ by $s - k_{1,0}$. We must compute:

$$\begin{aligned}
 & \int dk_{1,0} ds e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{s-k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{s}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \right) x_+} \chi(k_{1,0} < 0)\chi(s > k_{1,0}) \\
 & \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(s > -\pi T) - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(s > \pi T) \right]. \quad (\text{VII.101})
 \end{aligned}$$

The variable s describes the set $2\pi T\mathbb{Z}$ and the condition $\chi(s > k_{1,0})$ can be omitted. Thus the previous expression writes:

$$\begin{aligned}
 (2\pi T)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1) \left(\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} \right)} \\
 \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p \left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} \right) Tx_+} \right. \\
 \left. - e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p \left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} \right) Tx_+} \right] \quad (\text{VII.102})
 \end{aligned}$$

which is equal to:

$$(2\pi T)^2 \frac{e^{-\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)Tx_+}}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}\right)Tx_+}\right]} \frac{\left[1 - e^{\frac{2Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}}\right]}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}\right)Tx_+}\right]}. \tag{VII.103}$$

This quantity is positive, thus the conclusion follows:

$$iA_1^{(+,-,+)}(T) \leq 0. \tag{VII.104}$$

VII.2.4 The (+, -, -) case

Let us examine now the (+, -, -) case. The contribution is:

$$A_1^{(+,-,-)}(T) = -32i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}_{(+,-,-)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \frac{x_+^2 e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \chi(k_{1,0} < 0) \chi(k_{2,0} > 0) \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} < -\pi T) - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} < \pi T) \right]. \tag{VII.105}$$

We set $k_{1,0} = s - k_{2,0}$ and we compute:

$$\int ds dk_{2,0} e^{\left(\frac{s-k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{s}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)x_+} \chi(s < k_{2,0}) \chi(k_{2,0} > 0) \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(s < -\pi T) - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(s < \pi T) \right]. \tag{VII.106}$$

The condition $\chi(s < k_{2,0})$ may be omitted and we must evaluate:

$$(2\pi T)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(2n+1)\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}\right)Tx_+} \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \sum_{p=1}^{+\infty} e^{-2p\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)Tx_+} \right]$$

$$- e^{\frac{T x_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p \left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \right) T x_+} \Big]. \quad (\text{VII.107})$$

We find:

$$(2\pi T)^2 \frac{e^{-\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \right) T x_+}}{\left[1 - e^{-2 \left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} \right) T x_+} \right]} \frac{\left[e^{\frac{-2T x_+}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}} - 1 \right]}{\left[1 - e^{-2 \left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \right) T x_+} \right]}. \quad (\text{VII.108})$$

This is a negative number, therefore

$$iA_1^{(+,-,-)}(T) \leq 0. \quad (\text{VII.109})$$

VII.2.5 The $(-, +, +)$ and $(-, +, -)$ cases

There is no discussion to carry out: in fact, for $(k_{1,-}, k_{2,-}) \in \mathcal{T}$, we have never $\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) < 0$, $\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) > 0$ and $\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})) < 0$ simultaneously. We also conclude in the same way for the $(-, +, -)$ case.

VII.2.6 The $(-, -, +)$ case

$$A_1^{(-,-,+)}(T) = -32i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}_{(-,-,+)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \frac{x_+^2 e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0} + k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \chi(k_{1,0} > 0) \chi(k_{2,0} > 0) \left[e^{\frac{-T x_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} > -\pi T) - e^{\frac{T x_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} > \pi T) \right]. \quad (\text{VII.110})$$

We remark that the conditions $\chi(k_{1,0} + k_{2,0} > \pm \pi T)$ are superfluous, and that there is no need to introduce the variable s .

We have:

$$\begin{aligned}
 (2\pi T)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(2n+1)\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)Tx_+} \\
 \sum_{p=0}^{+\infty} e^{(2p+1)\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)Tx_+} \\
 \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \right] = \\
 (2\pi T)^2 e^{-\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}\right)Tx_+} \\
 \frac{\left[e^{\frac{-2Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} - 1 \right]}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}\right)Tx_+} \right]} \cdot \\
 \frac{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}\right)Tx_+} \right]}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} - \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}\right)Tx_+} \right]}. \tag{VII.111}
 \end{aligned}$$

This quantity is negative and we conclude that

$$iA_1^{(-,-,+)}(T) \leq 0. \tag{VII.112}$$

VII.2.7 The $(-, -, -)$ case

We finally discuss the last case:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(-,-,-)}(T) = -32i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{\mathcal{T}(-,-,-)} dk_{1,-} dk_{2,-} \\
 x_+^2 \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}\right)x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))} \chi(k_{1,0} > 0) \chi(k_{2,0} > 0) \\
 \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} < -\pi T) \right. \\
 \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-}+k_{2,-}))}} \chi(k_{1,0} + k_{2,0} < \pi T) \right]. \tag{VII.113}
 \end{aligned}$$

But it is clear that the conditions $k_{1,0} > 0$, $k_{2,0} > 0$ and $k_{1,0} + k_{2,0} < \pm\pi T$ are incompatible (as in the $(+, +, +)$ case), hence

$$A_1^{(-,-,-)}(T) = 0. \tag{VII.114}$$

Lemma VII.1 *There exists a constant $K > 0$ such that:*

$$\left| A_1^{(+,+,-)}(T) + A_1^{(+,-,+)}(T) + A_1^{(+,-,-)}(T) + A_1^{(-,-,+)}(T) \right| > \frac{K}{T} . \quad (\text{VII.115})$$

Proof: As each one of the quantities are purely imaginary, with non-negative imaginary part, it is sufficient to prove the inequality $|A_1^{(+,+,-)}(T)| > \frac{K_1}{T}$ for some constant K_1 . We have:

$$\begin{aligned} |A_1^{(+,+,-)}(T)| &= 32(2\pi T)^2 \\ &\sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int \int_{\mathcal{T}^{(+,+,-)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \\ &x_+^2 e^{-\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{1,-}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{2,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}\right)Tx_+} \\ &\frac{1}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{1,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}\right)Tx_+}\right]} \\ &\frac{\left[1 - e^{-\frac{2Tx_+}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}}\right]}{\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{2,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}\right)Tx_+}\right]} . \quad (\text{VII.116}) \end{aligned}$$

As $\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{1,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}\right)Tx_+}\right] \leq 1$
and $\left[1 - e^{-2\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{2,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}\right)Tx_+}\right] \leq 1$, we get:

$$\begin{aligned} |A_1^{(+,+,-)}(T)| &\leq 32(2\pi T)^2 \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int \int_{\mathcal{T}^{(+,+,-)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \\ &\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))} \\ &x_+^2 e^{-\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{1,-}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}k_{2,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}\right)Tx_+} \left[1 - e^{-\frac{2Tx_+}{\cos \frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-})}}\right] . \quad (\text{VII.117}) \end{aligned}$$

As we are seeking a lower bound, we can restrict the integration over the open domain $\mathcal{T}^{(+,+,-)}$ to a compact $\mathcal{T}_\epsilon^{(+,+,-)} \subset \mathcal{T}^{(+,+,-)}$, where ϵ is a strictly positive constant (for example $\epsilon = \frac{1}{10}$), in which we have $\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \geq \epsilon$, $\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \geq \epsilon$

and $|\cos(\frac{\pi}{2}(k_{1,-} + k_{2,-}))| \geq \epsilon$. For $(k_{1,-}, k_{2,-}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(+,+, -)}$, we have:

$$0 < x_+^2 \cdot e^{-\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} k_{1,-}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} k_{2,-}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-})}\right) T x_+} \left[1 - e^{\frac{2T x_+}{\cos \frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-})}} \right] \leq e^{-3T x_+}. \tag{VII.118}$$

By Lebesgue domination theorem, we can invert \sum_{x_+} and $\int \int_{\mathcal{T}_\epsilon^{(+,+, -)}} dk_{1,-} dk_{2,-}$ and write:

$$|A_1^{(+,+, -)}(T)| \geq 32(2\pi T)^2 \int_{\mathcal{T}_\epsilon^{(+,+, -)}} dk_{1,-} dk_{2,-} \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} x_+^2 \cdot e^{-\frac{3}{2}T x_+} [1 - e^{-2T x_+}] , \tag{VII.119}$$

or:

$$|A_1^{(+,+, -)}(T)| \geq 32\pi^4 T^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\frac{3\pi}{2\epsilon} T n} (1 - e^{-\pi T n}) . \tag{VII.120}$$

Now we use the formula:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-an} = \frac{e^{-a} + e^{-2a}}{(1 - e^{-a})^3} \text{ (for } a > 0) \tag{VII.121}$$

to write:

$$|A_1^{(+,+, -)}(T)| \geq 32\pi^4 T^2 \left(\frac{e^{-\frac{3\pi}{2\epsilon} T} + e^{-\frac{3\pi}{\epsilon} T}}{(1 - e^{-\frac{3\pi}{2\epsilon} T})^3} - \frac{e^{-(\frac{3\pi}{2\epsilon} + \pi) T} + e^{-(\frac{3\pi}{\epsilon} + 2\pi) T}}{(1 - e^{-(\frac{3\pi}{2\epsilon} + \pi) T})^3} \right) \tag{VII.122}$$

$$\geq 32\pi T^{-1} \left(\frac{2 + O(T)}{(3/2\epsilon)^3} - \frac{2 + O(T)}{(3/2\epsilon + 1)^3} \right) . \tag{VII.123}$$

Hence for T small enough, we obtain the desired result:

$$|A_1^{(+,+, -)}(T)| \geq K T^{-1} . \tag{VII.124}$$

for some explicit K and the lemma is proven.

VIII Study of the other configurations

We now are going to treat the other configuration, corresponding to:

$$\begin{cases} k_{1,+} \approx -1 \\ k_{2,+} \approx 1 \\ k_{3,+} \approx -1 \end{cases} \text{ and } \begin{cases} k_{1,+} \approx -1 \\ k_{2,+} \approx -1 \\ k_{3,+} \approx 1 \end{cases} \tag{VIII.125}$$

which are equal and form the term called $2\partial_+^2 A_{G,2}(\pi T, 1, 0)$. Let us concentrate on the first case. We have to consider the propagator:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1,+} \frac{e^{ik_{1,+}x_+}}{ik_{1,0} - \pi k_{1,+} \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} = \frac{-1}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1,+} \frac{e^{ik_{1,+}x_+}}{k_{1,+} - \frac{ik_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}} \quad (\text{VIII.126})$$

The pole of the integrand is $\frac{ik_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}$ and the corresponding residue writes $e^{-\frac{k_{1,0}x_+}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}}$. Therefore we have:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1,+} \frac{e^{ik_{1,+}x_+}}{ik_{1,0} - \pi k_{1,+} \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} = \frac{-2i}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} e^{-\frac{k_{1,0}x_+}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})}} \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} > 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \right] \quad (\text{VIII.127})$$

Now, let us consider the integration over $k_{2,+}$. We have:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{2,+} \frac{e^{ik_{2,+}x_+}}{-ik_{2,0} + \pi k_{2,+} \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} = \frac{1}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{2,+} \frac{e^{ik_{2,+}x_+}}{k_{2,+} - \frac{ik_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}} \quad (\text{VIII.128})$$

In fact, the only change with the previous case is a global change of sign. We can immediately write:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{2,+} \frac{e^{ik_{2,+}x_+}}{-ik_{2,0} + \pi k_{2,+} \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} = \frac{2i}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} e^{-\frac{k_{2,0}x_+}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})}} \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} > 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \right] \quad (\text{VIII.129})$$

For the integration over $k_{3,+}$, we have $\cos(\frac{\pi}{2}k_{2,+}) \approx \frac{\pi}{2}(k_{2,+} + 1)$ and we consider:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{3,+} \frac{e^{ik_{3,+}x_+}}{-ik_{3,0} - \pi k_{3,+} \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} = \frac{-1}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_{3,+}x_+}}{k_{3,+} + \frac{ik_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,+})}} \quad (\text{VIII.130})$$

In this case, the pole is $-\frac{ik_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}$ and the residue $e^{\frac{k_{3,0}x_+}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}}$. Therefore the above integral writes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{3,+} \frac{e^{ik_{3,+}x_+}}{-ik_{3,0} - \pi k_{3,+} \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} = \frac{-2i}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} e^{\frac{k_{3,0}x_+}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}} \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} < 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right]. \quad (\text{VIII.131})$$

Hence we obtain:

$$\begin{aligned} \partial_+^2 \tilde{A}_{G,2}(\pi T, 1, 0) &= -8i \int dx \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,0} dk_{3,-} x_+^2 \\ &\quad e^{\left(-\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} + \frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right)x_+} \\ &\quad \frac{e^{i(k_{1,0}+k_{2,0}+k_{3,0}+\pi T)x_0} e^{i(k_{1,-}+k_{2,-}+k_{3,-})x_-}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} \\ &\quad \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} > 0\right) \right. \\ &\quad \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} < 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \\ &\quad \left. \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right]. \quad (\text{VIII.132}) \end{aligned}$$

Then we integrate over x_0 and perform the sum over $k_{3,0}$:

$$\begin{aligned} \partial_+^2 \tilde{A}_{G,2}(\pi T, 1, 0) &= -8i \int dx_+ dx_- \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,-} \\ &\quad x_+^2 \frac{e^{\left(-\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} - \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}+\pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})}\right)x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} e^{i(k_{1,-}+k_{2,-}+k_{3,-})x_-} \\ &\quad \left[\chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} > 0\right) \right. \\ &\quad \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} < 0\right) - \chi(x_+ < 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{1,-})} < 0\right) \\ &\quad \left. \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{2,-})} < 0\right) \chi\left(\frac{k_{3,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}k_{3,-})} > 0\right) \right]. \quad (\text{VIII.133}) \end{aligned}$$

Thanks to the change of variables $x'_+ = -x_+$, $k'_{1,0} = -k_{1,0}$, $k'_{2,0} = -k_{2,0}$, we get:

$$\begin{aligned} \partial_+^2 \tilde{A}_{G,2}(\pi T, 1, 0) &= -8i \int dx_+ dx_- \int dk_{1,0} dk_{1,-} dk_{2,0} dk_{2,-} dk_{3,-} \\ & x_+^2 \frac{e^{-\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} + \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} e^{i(k_{1,-}+k_{2,-}+k_{3,-})x_-} \\ & \chi(x_+ > 0) \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} > 0\right) \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} > 0\right) \\ & \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} > 0\right) \right. \\ & \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{3,-})} > 0\right) \right] . \quad (\text{VIII.134}) \end{aligned}$$

Then we perform the sum over x_- as previously and integrate over $k_{3,-}$. There is a small contribution with a compensating factor $[\chi(x_+ \text{ even}) - \chi(x_+ \text{ odd})]$ that can be bounded as in Section VI, and we have again to study the dominant contribution:

$$\begin{aligned} A_2(T) &= -8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} dk_{1,-} dk_{2,-} x_+^2 \\ & \frac{e^{-\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} + \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-}))}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-}))} \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{1,-})} > 0\right) \\ & \chi\left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k_{2,-})} > 0\right) \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-}))} > 0\right) \right. \\ & \left. - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-}))}} \chi\left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} (k_{1,-} + k_{2,-}))} > 0\right) \right] . \quad (\text{VIII.135}) \end{aligned}$$

Fortunately, we do not have to carry again a discussion about the signs of the three cosines. In fact, we can remark that $A_1(T) = A_2(T)$. To see that, let us perform the following change of variables in $A_1(T)$:

$$\begin{cases} k_{1,-} &= k'_{1,-} + 2 \\ k_{2,-} &= k'_{2,-} + 2 \end{cases} , \quad (\text{VIII.136})$$

to obtain:

$$\begin{aligned} A_2(T) &= -8i \sum_{x_+ \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}^*} \int dk_{1,0} dk_{2,0} \iint_{T'} dk'_{1,-} dk'_{2,-} x_+^2 \\ & \frac{e^{\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k'_{1,-})} + \frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k'_{2,-})} - \frac{k_{1,0}+k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} (k'_{1,-} + k'_{2,-}))}\right) x_+}}{\cos(\frac{\pi}{2} k'_{1,-}) \cos(\frac{\pi}{2} k'_{2,-}) \cos(\frac{\pi}{2} (k'_{1,-} + k'_{2,-}))} \chi\left(\frac{k_{1,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k'_{1,-})} < 0\right) \end{aligned}$$

$$\times \chi \left(\frac{k_{2,0}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} k'_{2,-})} < 0 \right) \left[e^{\frac{-Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k'_{1,-} + k'_{2,-}))}} \chi \left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} + \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k'_{1,-} + k'_{2,-}))} > 0 \right) - e^{\frac{Tx_+}{\cos(\frac{\pi}{2}(k'_{1,-} + k'_{2,-}))}} \chi \left(\frac{k_{1,0} + k_{2,0} - \pi T}{\pi \cos(\frac{\pi}{2}(k'_{1,-} + k'_{2,-}))} > 0 \right) \right], \quad (\text{VIII.137})$$

where \mathcal{T}' is the triangle \mathcal{T} translated by the vector $(-2, -2)$. Using the invariance under central symmetry and translations by vectors of the form $(4n_+, 4n_-)$, $(n_+, n_-) \in \mathbb{Z}^2$, we conclude that \mathcal{T}' may be replaced by \mathcal{T} .

Hence we have proved that $A_1(T) = A_2(T)$. This concludes the proof of Theorem V.1 hence of Theorem II.1.

Acknowledgments. We thank our referee for its very attentive reading and comments.

References

- [1] V. Rivasseau, The two dimensional Hubbard Model at half-filling: I. Convergent Contributions, *Journ. Stat. Phys.* **106**, 693–722 (2002).
- [2] S. Afchain, J. Magnen and V. Rivasseau, Renormalization of the 2-point function of the Hubbard model at half-filling, cond-mat/0409231.
- [3] M. Salmhofer, Continuous renormalization for Fermions and Fermi liquid theory, *Commun. Math. Phys.* **194**, 249 (1998).
- [4] M. Salmhofer, Renormalization, an introduction, Springer Verlag, 1999.
- [5] M. Disertori and V. Rivasseau, Interacting Fermi liquid in two dimensions at finite temperature, Part I: Convergent Attributions, *Commun. Math. Phys.* **215**, 251 (2000).
- [6] M. Disertori and V. Rivasseau, Interacting Fermi liquid in two dimensions at finite temperature, Part II: Renormalization, *Commun. Math. Phys.* **215**, 291 (2000).
- [7] G. Benfatto, A. Giuliani and V. Mastropietro, Low temperature Analysis of Two-Dimensional Fermi Systems with Symmetric Fermi surface, *Ann. Henri Poincaré* **4**, 137 (2003).
- [8] P.W. Anderson, Luttinger liquid behavior of the normal metallic state of the 2D Hubbard model, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1839–1841 (1990).

Stéphane Afchain and Jacques Magnen
Centre de Physique Théorique
CNRS, UMR 7644
École Polytechnique
F-91128 Palaiseau cedex
France
email: stephane.afchain@cpht.polytechnique.fr
email: jacques.magnen@cpht.polytechnique.fr

Vincent Rivasseau
Laboratoire de Physique Théorique
CNRS, UMR 8627
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay
France
email: rivass@th.u-psud.fr

Communicated by Joel Feldman
submitted 20/12/04, accepted 10/02/05



To access this journal online:
<http://www.birkhauser.ch>

Conclusion et perspectives

Les techniques constructives mises en œuvre dans ce travail ont finalement permis de prendre la théorie des perturbations « naïve » et de prouver que les développements correspondants peuvent être contrôlés rigoureusement. C'est là un fait général pour les théories fermioniques dans lesquelles, comme nous l'avons dit, le principe de Pauli introduit des alternances de signes dans les diverses contributions à sommer, si bien que les amplitudes résultantes ne sont finalement pas trop grandes. Dans le modèle que nous avons étudié, l'hypothèse de demi-remplissage conduit à quelques simplifications heureuses, notamment le fait que toute fonction à deux points s'annule si son impulsion d'entrée est sur la surface de Fermi (conséquence de la symétrie particule-trou). Cette identité, que l'on peut voir comme une identité de Ward, a la conséquence que le potentiel chimique n'est pas renormalisé. Ceci est dû au fait que tous les contre-termes correspondants sont nuls. Il serait sans doute possible d'étendre les résultats obtenus à un modèle faiblement éloigné du demi-remplissage. Mais dans ce cas, la preuve serait compliquée par le fait que nous devrions prendre en compte un flot de renormalisation non-trivial pour le potentiel chimique.

La question de savoir si un système de fermions corrélés a un comportement de liquide de Fermi ou de Luttinger ne peut donc pas être résolue de façon simple en considérant la dimensionalité. Il est bien établi qu'en dimension 1, on a des liquides de Luttinger et qu'en dimension 3, on a un comportement de Fermi. En dimension 2, on ne peut être aussi catégorique et il est nécessaire de tenir compte de la forme de la surface de Fermi. Il a été prouvé dans [DR00a] et [DR00b] que lorsque la surface de Fermi a la forme d'un cercle, on a un comportement de Fermi. Nous avons prouvé que lorsqu'elle est un carré, on a un comportement de Luttinger.

Il faut toutefois mentionner que l'étude rigoureuse des systèmes fermioniques en dimension a été entreprise dans [DMR], mais cette direction de recherche s'annonce extrêmement ardue. L'ensemble des techniques développées atteint sans doute une taille critique qui rend la communication de ces résultats difficiles. En ce sens, un travail de simplification des techniques de démonstration constituerait une avancée significative.

Nous terminerons par mentionner un problème particulièrement fascinant, et qui est lui aussi un prolongement direct de la problématique de cette thèse : l'étude constructive de l'effet Hall fractionnaire. Une littérature surabondante existe à ce sujet, aussi nous limiterons-nous à indiquer simplement [Sto92]. La situation physique est très simple à concevoir : on considère un système bidimensionnel de fermions en interaction, soumis à un fort champ magnétique extérieur perpendiculaire. On observe alors des plateaux dans la conductivité en fonction de l'intensité de ce champ, dont les valeurs n'ont pas encore reçu à l'heure actuelle d'explication vraiment satisfaisante. L'aspect le plus intéressant et que ce champ magnétique introduit une non-commutativité dans l'espace des phases, ce qui ouvre des perspectives complètement nouvelles pour les constructivistes.

Bibliographie

- [AM02] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, *La physique des solides*, EDP Sciences, 2002.
- [AML01] José M. Arias and M. M. Lozano (eds.), *An advanced course in modern nuclear physics*, Lecture notes in physics : 581, Springer, 2001.
- [AMR05a] Stéphane Afchain, Jacques Magnen, and Vincent Rivasseau, *Renormalization of the 2-point function of the Hubbard model at half-filling*, Annales Henri Poincaré (2005).
- [AMR05b] ———, *The two dimensional Hubbard model : III. The lower bound on the self-energy*, Annales Henri Poincaré (2005).
- [And84] P. W. Anderson, *Basic notions of condensed matter physics*, Frontiers in physics : 55, Benjamin, 1984.
- [AR95] A. Abdesselam and V. Rivasseau, *Trees, forests and jungles : a botanical garden for cluster expansions*, Lecture Notes in Physics, vol. 446, Springer, 1995.
- [Ber66] F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, 1966, traduit par N. Mugibayashi et A. Jeffrey.
- [BF80] D. C. Brydges and P. Federbush, *Debye screening*, Communications in Mathematical Physics **73** (1980), 197–246.
- [BF84] G. Battle and P. Federbush, *A note on cluster expansions, tree graph identities, extra $1/N!$ factors*, Letters in Mathematical Physics **8** (1984), 55.
- [Bla70] J. S. Blakemore, *Solid state physics*, Saunders physics books, Saunders, 1970.
- [BM76] J. A. Bondy and U. S. Murty, *Graph theory with applications*, North-Holland, 1976.
- [Bob04] J. Bobroff, *Impuretés et systèmes corrélés : des chaînes aux cuprates supraconducteurs*, Master's thesis, Université de Paris-Sud, 2004.
- [Bry78] D. C. Brydges, *A rigorous approach to Debye screening in dilute classical Coulomb systems*, Communications in Mathematical Physics **58** (1978), 313–350.

- [Bry86] ———, *A short course on cluster expansions*, Les Houches, session XLIII, 1984, Critical phenomena, random systems, gauge theories (K. Osterwalder and R. Stora, eds.), Elsevier Science Publishers, 1986.
- [BS91] R. J. Blin-Stoyle, *Nuclear and particle physics*, Physics and its applications : 4, Chapman and Hall, 1991.
- [CTDL73] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann, 1973.
- [DMR] M. Disertori, J. Magnen, and V. Rivasseau, *Interacting Fermi liquid in three dimensions at finite temperature : Part I : Convergent Contributions*, cond-mat/0012270.
- [DR00a] M. Disertori and V. Rivasseau, *Interacting Fermi liquid at finite temperature : convergent attributions*, Communications in Mathematical Physics **215** (2000), 251–290.
- [DR00b] ———, *Interacting Fermi liquid in two dimensions at finite temperature : Part II : Renormalization*, Communications in Mathematical Physics **215** (2000), 291–341.
- [EK72] J. Edmonds and R. M. Karp, *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, J. Assoc. Comput. Mach. **19** (1972), 248–264.
- [Feh96] R. Fehrenbacher, Physical Review Letters **77** (1996), 1849.
- [Fel] J. Feldman, *Renormalization group and fermionic functional integrals*, CRM Monographs Series, vol. 16.
- [FJF56] L. R. Ford Jr. and D. R. Fulkerson, *Maximal flow through a network*, Canadian Journal of Mathematics **8** (1956), 399–404.
- [FJF57] ———, *A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem*, Canadian Journal of Mathematics **9** (1957), 210–218.
- [FMRT92] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, and E. Trubowitz, *An infinite volume expansion for many Fermion Green's functions*, Helvetica Physica Acta **65** (1992), 679.
- [FT90] J. Feldman and E. Trubowitz, Helvetica Physica Acta **63** (1990), 157.
- [FT91] ———, Helvetica Physica Acta **64** (1991), 213.
- [GLM02] G. Gallavotti, J. L. Lebowitz, and V. Mastropietro, *Large deviations in rarefied quantum gases*, Journal of Statistical Physics **108**, issue **5** (sep 2002), 831–861.
- [Gre67] Werner H. Greub, *Multilinear algebra*, Springer, 1967.
- [GS95] Walter Greiner and Andreas Schäfer, *Quantum chromodynamics*, Springer, 1995.

- [Har79] Walter A. Harrison, *Solid state theory*, Dover books on physics and chemistry, Dover publications, 1979.
- [HG94] F. Hippert and D. Gratias (eds.), *Lectures on Quasicrystals*, Éditions de physique, Les Ulis, 1994.
- [Hof92] A. Hof, *Quasicrystals, aperiodicity and lattice systems*, Ph.D. thesis, Université de Groningen, 1992.
- [Jan92] C. Janot, *Quasicrystals : a primer*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [JM73] William Jones and Norman H. March, *Theoretical solid physics*, Interscience monographs and texts in physics and astronomy : 27, Wiley-Interscience, 1973.
- [Kit96] Charles Kittel, *Introduction to solid state physics*, 7-ième ed., John Wiley, 1996.
- [KKF⁺95] T. Kluge, Y. Koike, A. Fujiwara, M. Kato, T. Noji, and Y. Saito, *Physical Review* **B 52** (1995), 727.
- [LL58] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics, III : Quantum mechanics : non-relativistic theory*, Pergamon Press, 1958.
- [Mad78] Otfried Madelung, *Introduction to solid-state theory*, Springer series in solid state science : 2, Springer, 1978, traduit par B. C. Taylor.
- [Mar00] Michael P. Marder, *Condensed matter physics*, John Wiley, 2000.
- [Men27] K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, *Fund. Math.* **10** (1927), 96–115.
- [Mut98] Taizo Muta, *Foundations of quantum chromodynamics : an introduction to perturbative methods in gauge theories*, World Scientific, 1998.
- [Mye97] H. P. Myers, *Introductory solid state physics*, Taylor and Francis, 1997.
- [O'R02] Eoin P. O'Reilly, *Quantum theory of solids*, Master's series in physics and astronomy, Taylor and Francis, 2002.
- [OS73] K. Osterwalder and R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions*, *Communications in Mathematical Physics* **31** (1973), 83.
- [OYH94] N. P. Ong, Y. F. Yan, and J. M. Harris, *CCAST symposium on high T_c superconductivity*, bientôt publié.
- [Pat71] James D. Patterson, *Introduction to the theory of solid state physics*, Addison-Wesley, 1971.
- [Pis96] Cesare Pisani (ed.), *Quantum mechanical ab-initio calculation of the properties of crystalline materials*, *Lecture notes in chemistry* : 67, Springer, 1996.

- [Pru71] Eduard Prugovečki, *Quantum mechanics in Hilbert space*, Academic Press, 1971.
- [RA97] F. Rullier-Albenque, *Physica* **282-287** (1997), 1199.
- [Riv] Vincent Rivasseau, *The two-dimensional Hubbard Model at half-filling : I. Convergent Contributions*, *Journal of Statistical Physics* **106**, 693 – 722.
- [RMTdL97] S. Roche, D. Mayou, and G. Trambly de Laissardière, *Electronic transport properties of quasicrystals*, *Journal of Mathematical Physics* **38** (1997), 1794 – 1822.
- [RW93] M. N. Rudden and John Wilson, *Elements of solid state physics*, John Wiley, 1993.
- [Sal98] M. Salmhofer, *Continuous renormalization for Fermions and Fermi liquid theory*, *Communications in Mathematical Physics* **194** (1998), 249.
- [Sal99] Manfred Salmhofer, *Renormalization, an introduction*, Springer, 1999.
- [Sch81] Martin Schechter, *Operator methods in quantum mechanics*, North-Holland, 1981.
- [Sto92] Michael Stone (ed.), *Quantum Hall effect*, World Scientific, 1992.
- [SW64] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Benjamin, 1964.
- [Sén95] M. Sénéchal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [TF98] S. Takeuchi and T. Fujiwara (eds.), *Quasicrystals*, World Scientific, 1998.
- [Wil71a] K. G. Wilson, *Renormalization and critical phenomena. I : Renormalization and the Kadanoff scaling picture*, *Physical Review* **B 4** (1971), 3174–3183.
- [Wil71b] ———, *Renormalization and critical phenomena. II : Phase space cell analysis of critical behavior*, *Physical Review* **B 4** (1971), 3184.
- [Wil75] ———, *Renormalization group methods*, *Advances in Mathematics* **16** (1975), 170.
- [Wil91] William S. C. Williams, *Nuclear and particle physics*, Clarendon Press, 1991.
- [Ynd83] Francisco J. Ynduraín, *Quantum chromodynamics an introduction to the theory of quarks and gluons*, Springer, 1983.
- [ZJ02] Jean Zinn-Justin, *From theory to numbers*, *Comptes-rendus des séminaires Poincaré*, 2002.