



HAL
open science

Alliages à Mémoire de Forme: Modélisation et Calcul de Structures

Bertrand Peultier

► **To cite this version:**

Bertrand Peultier. Alliages à Mémoire de Forme: Modélisation et Calcul de Structures. Sciences de l'ingénieur [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2005. Français. NNT : 2005ENSAM0012 . pastel-00001444

HAL Id: pastel-00001444

<https://pastel.hal.science/pastel-00001444>

Submitted on 9 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Metz**

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
D'ARTS ET MÉTIERS**

Spécialité: Mécanique et Matériaux

par

Bertrand PEULTIER

**ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME :
MODÉLISATION ET CALCUL DE STRUCTURES**

Soutenue le 11 juillet 2005 devant le jury composé de

MM.	D.	FAVIER	Professeur à l'Université Joseph Fourier (Grenoble)	Président
	C.	LEXCELLENT	Professeur à l'ENSMM (Besançon)	Rapporteur
	K.	SAANOUNI	Professeur à l'Université Technologique de Troyes	Rapporteur
	M.	KOHL	Docteur à Forschungszentrum Karlsruhe	Examineur
	D.	FAVIER	Professeur à l'Université Joseph Fourier (Grenoble)	Examineur
	E.	PATOOR	Professeur à l'ENSAM, Metz	Directeur de thèse
	T.	BEN ZINEB	Maître de conférences à l'ENSAM, Metz	Co-Directeur de thèse
	J.	GOURNAY	Senior Manager R.D. MEDTRONIC-SOFAMOR-DANEK	Invité
	P.	MAXY	Senior Ingénieur Recherche MEDTRONIC-SOFAMOR-DANEK	Invité
	B.	PRANDI	Directeur de MEMOMETAL INDUSTRIE	Invité

Mis en page avec la classe thloria.

Retrouvez ce mémoire de thèse en version informatique sur <http://pastel.paristech.org/>

Remerciements

L'histoire d'une thèse est une aventure passionnante. À mi chemin entre l'étudiant et le salarié, le doctorant n'a pas un status bien défini. Avec un peu de bonne volonté il récupère les avantages des deux camps : prix étudiants, avantages salariés, congrès aux 4 coins du monde, vacances de rêve... Quoique les vacances soient rapidement dévorées par l'envie passionnée de trouver 'la' solution miracle!

Je souhaitais remercier toutes les personnes qui ont contribué à rendre cette aventure inoubliable.

Commençons biensûr par mes directeurs de thèse Etienne et Tarak qui ont su trouver l'équilibre entre l'encadrement et la liberté d'action, présents et de bon conseil lorsqu'il s'agissait de trouver une solution mais laissant libre court à mes réflexions dans mon cheminement vers la compréhension du problème. De manière générale le cadre du laboratoire est probablement exceptionnel : des moyens techniques importants, une ambiance de travail avec de nombreux thésards et des belles récompenses avec des congrès à l'international!

Le projet était porté également par mes deux responsables industriels José et Philippe, qui ont rapidement fait confiance à l'équipe du laboratoire et moi même, nous permettant d'explorer différentes voies, ce qui a conduit à des impasses mais également à des succès. Les travaux ont donnés des résultats au cours de la thèse et je crois qu'ils apporterons d'autres fruits à court ou moyen terme. Il faut souligner que la confiance continue puisque je suis maintenant embauché à un poste d'ingénieur développement! Ces travaux servirons également à la société Mémometal notamment les outils de dimensionnement développées ainsi que la base de données matériau.

La vocation des travaux de recherche est d'augmenter les connaissances scientifiques dans un domaine. Il est aussi important de faire des travaux de qualité que de publier ces travaux. L'étape de rédaction du mémoire est donc fondamentale, ainsi que celle de la soutenance de thèse. C'est pourquoi je remercie les membres du jury d'avoir donné des critiques constructives de ces travaux, apportant un point de vue différent et toujours enrichissant. L'approfondissement nécessaire à la préparation de la soutenance ainsi que le débat suivant la soutenance de thèse ont été l'occasion de déterminer l'intérêt et les limites de ces travaux.

À propos de l'ambiance de travail formidable, je ne peux pas oublier Mourad mon co-locataire de bureau : que d'heures passées à discuter théorie, modélisation et expérimentations. À chaque blocage sa solution, à chaque question sa discussion. Également partenaire pour les sorties course à pieds, Mourad a fait partie de l'équilibre personnel / professionnel. Je souhaite joindre également à ces remerciements tous les thésards du laboratoire et en particulier du site de l'ENSAM, ainsi que tous les collègues enseignants et chercheurs qui ont su apporter une ambiance détendue et constructive en réunions, repas et autres pauses café.

Enfin, je souhaite remercier toute ma famille Papa, Maman, Mathieu, Damien, Emmy qui m'ont supporté et incité à me lancer dans cette aventure et m'ont supporté dans les moments difficiles. Un remerciement tout spécial à Sandrine qui m'a apporté tout son support et son affection au moment délicat où l'avenir était incertain.

La thèse est une période de travail scientifique et technique approfondie, mais également une période de développement individuel. Ce projet a été l'occasion d'affirmer et confirmer mes capacités et ma volonté de réussir un projet, mais également de trouver mes limites. Le travail de thèse est très spécialisé sur un sujet, mais c'est en même temps l'occasion d'apprendre beaucoup de chose et de s'ouvrir au monde et aux autres.

Je suis heureux d'avoir conduit ces travaux à leur terme et je crois que toutes les personnes qui ont contribué à sa réussite le sont aussi.

Table des matières

	i
Liste des tableaux	xiii
Introduction générale	1
Chapitre 1 Présentation des AMF	3
1.1 Introduction	3
1.2 Comportement des AMF	4
1.2.1 Effet mémoire de forme	4
1.2.2 Superélasticité	6
1.2.3 Autres comportements	9
1.3 Origine du comportement des AMF	11
1.3.1 Définition de la transformation martensitique	11
1.3.2 Description de la transformation martensitique	12
1.4 Caractéristiques des AMF	14
1.4.1 Famille des NiTi	15
1.4.2 Famille des Cuivreux	16
1.4.3 Famille des Ferreux	16
1.5 Conclusion	16
Chapitre 2 Caractérisation du matériau	19
2.1 Introduction	19
2.2 État de l'art	20
2.2.1 Diagramme de transformation	20
2.2.2 Chargements complexes	22
2.2.3 Couplage thermique	22
2.2.4 Chargements partiels	23
2.2.5 Conclusions	25
2.3 Matériau et système expérimental	26

2.3.1	Matériau	26
2.3.2	Système expérimental	27
2.4	Caractérisation des fils	28
2.4.1	Caractérisation des fils superélastiques	28
2.4.2	Caractérisation des fils mémoires	32
2.4.3	Discussion	37
2.4.4	Conclusion caractérisation des fils	39
2.5	Caractérisation des éprouvettes planes	40
2.5.1	Éprouvettes superélastiques	40
2.5.2	Éprouvettes mémoires	45
2.5.3	Discussion éprouvettes planes	50
2.6	Conclusion	58
Chapitre 3 Modélisation du comportement des AMF		61
3.1	Introduction	61
3.2	Bibliographie	62
3.2.1	Choix des variables internes	64
3.2.2	Chargements 3D non proportionnels	65
3.2.3	Thermodynamique de la transformation de phase	66
3.3	Thermodynamique de la transformation martensitique	67
3.3.1	Définition de l'enthalpie libre	68
3.3.2	Énergie élastique stockée	72
3.3.3	Équilibre thermodynamique du VER	77
3.3.4	Chargements partiels	82
3.4	Application à des cas de chargement proportionnels	87
3.4.1	Chargements mécaniques	87
3.4.2	Chargements thermiques	91
3.4.3	Effet mémoire de forme	92
3.5	Conclusion	94
Chapitre 4 Intégration numérique		95
4.1	Introduction	95
4.2	Intégration numérique	96
4.2.1	Techniques d'intégration	97
4.2.2	Exemples de la littérature	100
4.2.3	Application au modèle du comportement AMF	101
4.3	Choix de la forme du système d'équations	102

4.3.1	Gestion des saturations	102
4.3.2	Loi de normalité	104
4.3.3	Translation de la variable de contrôle mécanique	105
4.3.4	Forme finale du système d'équation	105
4.4	Résolution du système d'équations	106
4.4.1	Sélection du système d'équations actif	106
4.4.2	Algorithme de résolution	107
4.4.3	Modules tangents mécaniques et thermiques	111
4.5	Validation de l'intégration numérique	113
4.5.1	Chargements proportionnels	114
4.5.2	Influence de la discrétisation	115
4.5.3	Changements de trajet	116
4.6	Validation expérimentale du modèle	117
4.6.1	Validation sur les expérimentations NiTi	117
4.6.2	Validation sur les expérimentations AMF à base Cuivre	125
4.6.3	Validation sur trajet complexe	128
4.7	Conclusion	128
Chapitre 5 Applications et dimensionnement		133
5.1	Introduction	133
5.2	Application du modèle au calcul de structures	134
5.2.1	Bagues superélastiques	134
5.2.2	Micro-pince à mémoire de forme [Kohl 00, Kohl 02]	137
5.2.3	Conclusion	140
5.3	Dimensionnement	141
5.3.1	Actionneur à mémoire de forme	141
5.3.2	Structures mécaniques en AMF	145
5.4	Conclusion	148
Conclusion générale		149
Bibliographie		153
Annexes		159
Annexe A Machine thermomécanique		159
A.1	Enceinte thermique	159
A.2	Machine mécanique	160
A.2.1	Présentation	160

A.2.2	Capteur de force	160
A.2.3	Validation mécanique	163
A.2.4	Asservissement	163
A.3	Montage anti-flambement	165
A.3.1	Présentation	165
A.3.2	Validation	165
Annexe B	Dérivées	169
B.1	Jacobien du système	170
B.2	Calcul des dérivées	171
B.2.1	Dérivées des résidus	171
B.2.2	Dérivées des forces thermodynamiques	174
B.2.3	Dérivées des termes d'interaction	174

Table des figures

1	Différentes échelles d'observation	2
1.1	Effet mémoire de forme (<i>Les valeurs numériques sont caractéristiques d'un AMF de type NiTi</i>)	5
1.2	Applications de l'effet mémoire de forme	6
1.3	Superélasticité des AMF (<i>Les valeurs numériques sont caractéristiques d'un AMF de type NiTi</i>)	7
1.4	Force de rappel	7
1.5	Applications de la superélasticité	8
1.6	Limiteur de force et Hystérésis	9
1.7	Autres comportements	9
1.8	Microscopie optique avec polarisation d'un polycristal d'AMF CuAlBe (Niclaeys 02a)	12
1.9	Description de la transformation martensitique	12
1.10	Réorientation des variantes de martensite [Guénin 95]	13
1.11	Diagramme de transformation complet	14
2.1	Diagrammes de transformation de la littérature	21
2.2	Surface limite de transformation	22
2.3	Trajets non-proportionnels	23
2.4	Couplage thermique	24
2.5	Chargements partiels	25
2.6	Éprouvettes planes ; Traitement thermomécanique du matériau	26
2.7	Machine thermomécanique	27
2.8	Chargement mécanique à différentes températures, fil superélastique	29
2.9	Cyclage mécanique, éprouvette superélastique	30
2.10	Diagramme de transformation fil superélastique	30
2.11	Boucles internes	31
2.12	Phase R	32
2.13	Chargement mécanique à différentes températures fil mémoire	33
2.14	Cyclage mécanique	33
2.15	Chargement thermique à différentes contraintes, fil mémoire	34
2.16	Déformation et limites de transformation, fil mémoire	35
2.17	Effet mémoire de forme, retour à différentes rigidités, projection dans différents plans	36
2.18	Comportement caoutchoutique fil mémoire à 20°C	37
2.19	Localisation de la transformation	38

2.20	Déformation de transformation et déformation caoutchoutique	39
2.21	Chargements mécaniques éprouvette superélastique	41
2.22	Effet de rochet, éprouvette superélastique à 50°C	42
2.23	Chargements thermiques éprouvette superélastique	43
2.24	Diagramme de Phase éprouvette superélastique	44
2.25	Chargements mécaniques éprouvette mémoire	45
2.26	Chargements thermiques éprouvette mémoire	46
2.27	Déformation de transformation à saturation	47
2.28	Diagramme de transformation éprouvettes mémoires, limites mécaniques et thermiques	47
2.29	retour libre, retour contraint, effet de “rochet”	49
2.30	retour contraint à différentes rigidités, éprouvette mémoire, projection dans différents plans	51
2.31	Boucles internes, retour libre après cyclage contraint	52
2.32	Retour mémoire contraint avec jeu initial, projection dans différents plans	52
2.33	Points particuliers de la transformation de phase	53
2.34	Dissymétrie traction/compression	55
2.35	Température en surface des éprouvettes superélastiques au cours de différents chargements mécaniques	56
3.1	Représentation schématique des différentes sources d'énergie élastique interne dans un AMF polycristallin	69
3.2	Variables internes et représentation du V.E.R.	71
3.3	Microstructure des AMF polycristallins.	73
3.4	Critères de charge	80
3.5	Comportement en chargements partiels	82
3.6	Description du comportement en chargements partiels	83
3.7	Boucles internes en réorientation	84
3.8	Chargements mécaniques typiques prédits par le modèle	88
3.9	Chargements thermiques	91
3.10	Retour mémoire contraint	93
4.1	Pilotage en contrainte et implantation dans un code de calcul E.F.	113
4.2	Prédictions du modèle numérique pour différents chargements typiques	114
4.3	Prédictions du modèle numérique pour des retours mémoire libres et contraints. Projection sur 3 plans	115
4.4	Effet de la discrétisation sur la réponse en chargement mécanique.	116
4.5	Comparaison du modèle en réorientation avec un modèle de plasticité cinématique linéaire	117
4.6	Comparaison numérique/expérimental chargements mécaniques, Matériau Superélastique	121
4.7	Comparaison numérique/expérimental chargements thermiques, Matériau Superélastique	122
4.8	Comparaison Numérique/Expérimental, Chargements mécaniques, Matériau Mémoire	123
4.9	Comparaison Numérique/Expérimental, Chargements thermiques en traction et en compression, Matériau mémoire	124
4.10	Déformation de transformation prédite et numérique	125

4.11	Retours mémoire à différentes rigidités, Conditionnement en traction et en compression, Matériau mémoire	126
4.12	Validation chargements thermomécaniques d'un polycristal d'AMF CuAlBe [Entemeyer 96]	127
4.13	Courbe de référence et Surface critique de transformation [Bouvet 01]	129
4.14	Trajet Superélastique Non-Proportionnel [Bouvet 01]	130
5.1	Bagues superélastiques	134
5.2	Système de test des bagues superélastiques	135
5.3	Ouverture de bagues superélastiques	136
5.4	Ouverture d'une bague superélastique	137
5.5	Principe de la micro-pince : positions ouverte, fermée ; Unités d'activation I et II	138
5.6	Modèle numérique	139
5.7	Résultats micro-pince	140
5.8	Actionneur à mémoire de forme	143
5.9	Photos de la pince automatique et de l'actionneur à effet mémoire	144
5.10	Pince automatique : principe et résultat	145
5.11	Applications de l'effet superélastique	147
A.1	Enceinte thermique	160
A.2	Machine de sollicitation thermomécanique	161
A.3	Capteur de force	162
A.4	Validation mécanique	164
A.5	Montage anti-flambement	166
A.6	Validation du montage anti-flambement	166

Liste des tableaux

1.1	Propriétés des AMF [Guéin 95, Hautcoeur 04]	15
1.2	Tenue aux chargements mémoire cycliques des NiTi et des Cuivreux [Lebreton 03, Hautcoeur 04]	15
4.1	paramètres matériau pour le NiTi superélastique	120
4.2	paramètres matériau pour le NiTi mémoire	120
4.3	Paramètres matériaux pour le retour contraint, tenant compte de l'évolution des caractérisitiques du matériau avec le cyclage	123
4.4	Paramètres matériau polycristal Cu Al11.6 Be0.5 [Entemeyer 96]	127
4.5	Paramètres matériau polycristal Cu AlBe0.5 [Bouvet 01]	128
5.1	Paramètres matériaux pour la micro-pince (phase-R)	139

Introduction générale

Le choix du matériau est au centre du processus de conception d'un produit mécanique. Les idées les plus géniales ne peuvent devenir réalité sans une structure matérielle capable de les supporter. Avec l'utilisation d'un nouveau matériau, l'ingénieur va pouvoir améliorer la solution technologique existante en termes de volume, de poids ou de résistance. Réciproquement un nouveau matériau apporte de nouvelles idées et de nouvelles possibilités de création : il est au coeur de l'innovation.

Le développement d'un matériau est long et hasardeux de sa découverte à son utilisation concrète et industrielle. Le transfert technologique des laboratoires vers les industriels est limité par plusieurs verrous : connaissance par les ingénieurs des caractéristiques du matériau, outils de dimensionnement d'applications, coût de mise en oeuvre de la solution.

Dans le cas des Alliages à Mémoire de Forme diverses applications existantes (voir chapitre "Présentation des AMF") montrent que l'utilisation du matériau est viable économiquement. De nombreux efforts de diffusion au grand public ont été faits sous forme d'expositions technologiques et artistiques. Le développement d'applications dans le secteur médical et notamment l'explosion de l'utilisation de stents coronariens a conduit au développement d'outils numériques de dimensionnement de structures en AMF.

L'objectif de ces travaux de thèse est de contribuer au développement d'outils de dimensionnement et de détailler les différentes utilisations qui peuvent exploiter les propriétés originales des AMF. Actuellement l'accent est mis sur les aspects mécaniques du comportement et notamment la superélasticité du matériau. Pourtant le couplage thermique / mécanique fort présent dans ce matériau permet de définir un chargement qui lui donne son nom : l'effet mémoire de forme. Cet effet confère au matériau un aspect d'actionneur mécanique piloté par la température imposée. La combinaison des aspects de structure et d'actionneur rend ces matériaux très intéressants aux faibles dimensions où des micro-systèmes monobloc peuvent être construits. Le couplage thermique / mécanique est analysé expérimentalement et théoriquement jusqu'à la construction d'un modèle du comportement adapté au calcul de structures par la méthode des éléments finis (voir figure 1).

Le mémoire est découpé en 5 chapitres :

1. Présentation des Alliages à Mémoire de Forme (AMF) :

Les AMF sont des matériaux très spécifiques qui possèdent notamment la faculté de se déformer de manière contrôlée en fonction de leur température. À cette propriété originale s'ajoutent d'autres propriétés mécaniques telles que la superélasticité et des capacités d'amortissement mécaniques. Ces différentes propriétés seront illustrées et expliquées dans cette partie.

2. Caractérisation du matériau :

Les deux principaux comportements sont mesurés expérimentalement : effet mémoire de forme et superélasticité. Plusieurs matériaux et éprouvettes sont testées. L'objectif est de

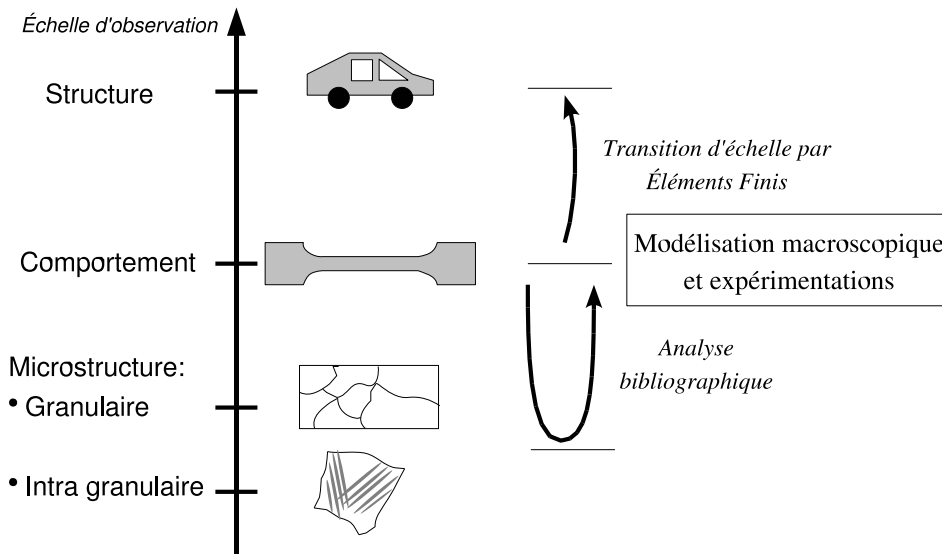


FIG. 1 – Différentes échelles d'observation

mettre en avant le couplage thermique / mécanique. Nous montrerons en particulier qu'il n'est pas possible de connaître entièrement l'état du matériau uniquement à partir de l'étude de chargements mécaniques à température constante.

3. Modélisation du comportement :

L'idée est de développer un modèle macroscopique du comportement du matériau prenant en compte des aspects mécaniques (superélasticité et réorientation de la martensite) mais également le couplage avec la température (effet mémoire de forme). Le modèle est basé sur une analyse thermodynamique et micro-mécanique simplifiée de la transformation de phase martensitique.

4. Intégration numérique :

Le modèle est implanté dans un code de calcul par la méthode des Éléments Finis de manière à pouvoir dimensionner des structures en AMF. Le travail a porté sur le développement d'un algorithme d'intégration robuste. Le modèle numérique est comparé et validé à partir d'expérimentations et de données de la littérature.

5. Applications et dimensionnement :

Le modèle numérique est exploité pour dimensionner deux applications : des bagues superélastiques et un micro-actionneur à effet mémoire [Kohl 00]. Puis quelques règles de dimensionnement et des exemples d'applications sont données dans le cas du développement d'un actionneur ou d'une structure mécanique.

Chapitre 1

Présentation des AMF

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Comportement des AMF	4
1.2.1	Effet mémoire de forme	4
1.2.2	Superélasticité	6
1.2.3	Autres comportements	9
1.3	Origine du comportement des AMF	11
1.3.1	Définition de la transformation martensitique	11
1.3.2	Description de la transformation martensitique	12
1.4	Caractéristiques des AMF	14
1.4.1	Famille des NiTi	15
1.4.2	Famille des Cuivreux	16
1.4.3	Famille des Ferreux	16
1.5	Conclusion	16

1.1 Introduction

Deux grandes catégories de matériaux solides peuvent être définies : les matériaux passifs et les matériaux actifs.

Les matériaux classiquement utilisés sont de type passif. Ces matériaux peuvent être des métaux, des alliages métalliques, des polymères, des céramiques ou des composites de plusieurs matériaux. Ils diffèrent par leurs propriétés physiques : principalement mécaniques (déformation élastique, caractéristiques de mise en forme, résistance à la rupture, amortissement,...), mais également chimiques (résistance à la corrosion) ainsi que d'autres propriétés comme la conduction électrique, magnétique, ou de la chaleur. Les différentes caractéristiques physiques sont des propriétés constantes de ces matériaux.

Depuis plusieurs décennies sont développés des matériaux dits actifs pour lesquels il existe un couplage entre les grandeurs mécaniques et une autre grandeur physique comme : un champ électrique (matériaux piézoélectriques), un champ magnétique (matériaux magnétostrictifs et AMF magnétiques) ou la température (Alliages à Mémoire de Forme). Ces matériaux peuvent être utilisés pour réaliser des structures mécaniques passives mais le couplage multi-physique présent dans ces matériaux leur confère des propriétés actives :

- leur comportement mécanique est modifié lorsque la grandeur physique couplée évolue, ce qui leur confère un aspect d'actionneur,
- réciproquement, la grandeur couplée évolue lorsqu'un chargement mécanique est appliqué, ce qui leur confère un aspect de capteur.

Les matériaux piézo-électriques par exemple sont utilisés pour réaliser des capteurs de force mais également des actionneurs en contrôle de vibrations. L'un des intérêts des Alliages à Mémoire de Forme est la possibilité de générer une force élevée et un déplacement relativement important, donc un travail mécanique conséquent, pour une évolution de température de quelques dizaines de degrés.

Les matériaux actifs peuvent remplacer avantageusement les systèmes à actionneurs classiques dans l'optique d'une réduction d'encombrement, puisque les fonctions de structure et d'actionneur peuvent être réalisées en une seule pièce. Ils prennent tout leur intérêt dans les micro-systèmes, où le rapport poids/puissance d'une solution AMF est nettement supérieur à celui des solutions classiques ; mais ils apportent également une valeur ajoutée lors du développement d'applications en conditions difficiles (aéronautique, spatial, biomédical...)

Le nom d'Alliage à Mémoire de Forme est donné aux matériaux métalliques qui, après une pré-déformation, possèdent la capacité de retrouver leur configuration initiale par simple élévation de leur température. Le phénomène a pour origine une transformation de phase du matériau réversible. Cette évolution de la micro-structure du matériau induit également d'autres propriétés mécaniques intéressantes telles que la superélasticité et des capacités d'amortissement.

Nous allons présenter dans un premier temps de manière phénoménologique les principaux comportements des AMF et les différentes utilisations qui en sont faites. L'origine du couplage multi-physique sera ensuite détaillée. Finalement les principaux AMF et leurs caractéristiques seront présentés.

1.2 Comportement des AMF

Le nom d'alliage à mémoire de forme couvre un certain nombre de matériaux qui diffèrent par leur composition mais également par leur traitement thermo-mécanique de mise en forme. Ils possèdent tous des caractéristiques similaires mais sont chacun adaptés à une utilisation précise. On peut globalement les regrouper en deux types en les comparant à une température d'utilisation de référence (généralement la température ambiante) : les matériaux à effet mémoire et les matériaux superélastiques.

1.2.1 Effet mémoire de forme

Un AMF à effet mémoire est adapté à une utilisation en tant qu'actionneur. Son utilisation est comparable à celle d'un vérin hydraulique simple effet : il faut tout d'abord mettre le vérin en position initiale en appliquant un effort, puis le vérin est actionné en augmentant la pression de l'huile ce qui génère une force proportionnelle à la pression d'huile et un allongement du vérin. Avant de recommencer une activation il faut ramener le vérin en position initiale. De même pour les AMF, l'effet mémoire de forme simple sens est décrit par un cycle mémoire (figure 1.1) composé d'une étape de conditionnement suivie d'une étape d'activation :

1. Conditionnement de l'actionneur :

- Refroidissement en dessous d'une température critique.
- Déformation mécanique de l'AMF. Le matériau se déforme très facilement sous un faible niveau de contrainte jusqu'à une valeur de déformation maximale à ne pas dépasser, au

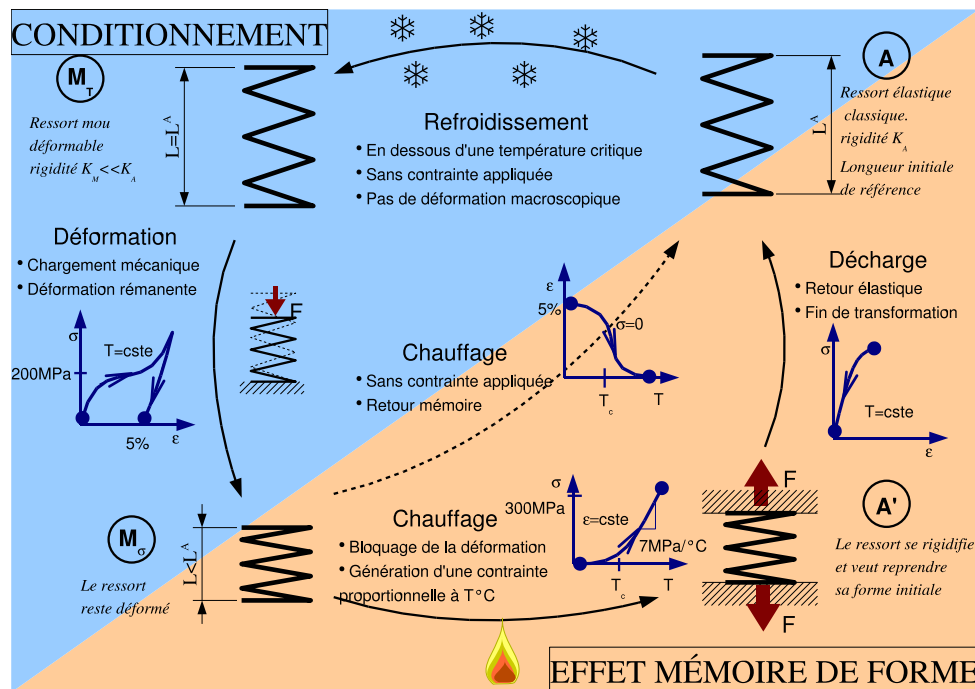


FIG. 1.1 – Effet mémoire de forme (Les valeurs numériques sont caractéristiques d'un AMF de type $NiTi$)

delà la rigidité du matériau augmente. La déformation rémanente est à priori irréversible.

2. Activation de l'actionneur : augmentation de la température au dessus de la température critique :
 - La déformation rémanente va décroître jusqu'à disparition, l'AMF va retrouver sa forme chaude initiale.
 - Si la déformation mémoire est bloquée, le matériau va générer un effort proportionnellement à la température appliquée. Puis une simple décharge élastique et le matériau va retrouver sa forme chaude initiale. La contrainte générée peut être très élevée puisque la limite de plasticité du matériau AMF peut être atteinte si la température maximale est trop élevée.

La forme chaude a été donnée à l'AMF au moment de sa mise en forme. L'étape de conditionnement permet de lui donner une autre forme, mais il peut à tout moment retrouver sa forme chaude par simple chauffage.

Le cycle fait donc intervenir un système de refroidissement et un système de chauffage. Pour que le cycle fonctionne sans système de refroidissement, il suffit que la température froide corresponde à la température ambiante. Le chauffage peut être appliqué par une source de chaleur extérieure mais peut également être obtenu par effet joule en faisant circuler un courant électrique dans le matériau métallique. L'étape de refroidissement se fait généralement à l'air libre. Cette étape est limitante en termes de temps de réaction, mais le refroidissement est d'autant plus rapide que l'actionneur est petit : la solution AMF devient très intéressante lorsque le système est de petite taille !

Le principe de l'effet mémoire de forme est exploité dans plusieurs applications (figure 1.2) :

- Accouplement de tubes en Titane. Une des premières applications des AMF proposée par

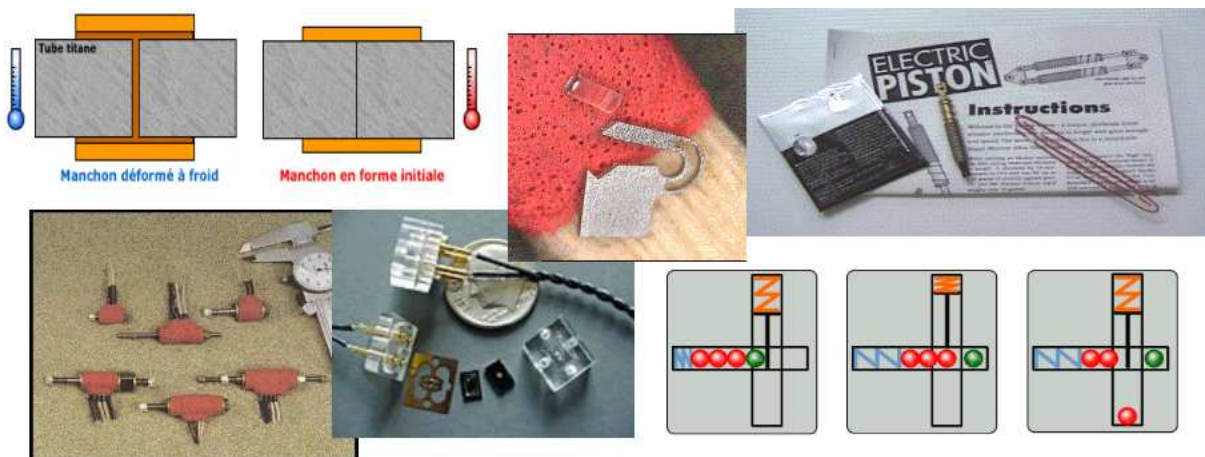


FIG. 1.2 – Applications de l'effet mémoire de forme

la Raychem dans les années 50 : devant la difficulté d'assembler deux tubes en Titane par soudage ils proposent d'utiliser un manchon serrant, fonctionnant sur le principe du frettage mais utilisant l'effet mémoire de forme plutôt que la dilatation thermique pour accoupler les tubes.

- Rupture d'une liaison sans explosifs, séparation des étages d'une fusée : les efforts développés par effet mémoire sont suffisamment élevés pour entraîner la rupture d'un assemblage par vis.
- Robotique : actionneur simple effet, chauffage par effet joule, mouvements souples.
- Agrafes d'ostéosynthèse : rapprochent les deux faces d'un os brisé grâce à l'augmentation de la température lors de l'insertion dans le corps humain.
- Micro-actionneurs (dimensions de quelques mm) : micro-pince, micro-pompe, micro-valve. Les systèmes sont monoblocs ou très simplifiés, l'AMF joue le rôle de structure et d'actionneur. Activation par effet joule.
- Contrôle de la température : capteur de suivi de la chaîne du froid, si l'AMF dépasse sa température critique il effectue un marquage physique du produit. Mitigeur d'eau : la température de sortie de l'eau est ajustée par la force de serrage appliquée à l'AMF et indépendamment de la température des eaux chaude et froide.

Outre la question du refroidissement du matériau l'autre limitation principale est la tenue au cyclage. En effet, le comportement du matériau évolue avec le nombre de cycles et se traduit notamment par une réduction de la déformation réversible par effet mémoire après une centaine de cycles de chargement. Pour éviter cette dégradation des propriétés mémoire il est nécessaire de limiter la déformation ainsi que le niveau de contrainte générés par effet mémoire.

1.2.2 Superélasticité

Un AMF superélastique est déjà chaud à température ambiante. Pour obtenir un effet mémoire il faudrait le refroidir, mais après retour à température ambiante le matériau serait déjà revenu en forme chaude ! Par contre, au cours d'un chargement mécanique à température constante, une déformation additionnelle (inélastique) est observée. Cette déformation additionnelle est réversible après décharge mécanique, le matériau retrouve sa forme initiale : c'est l'effet superélastique.

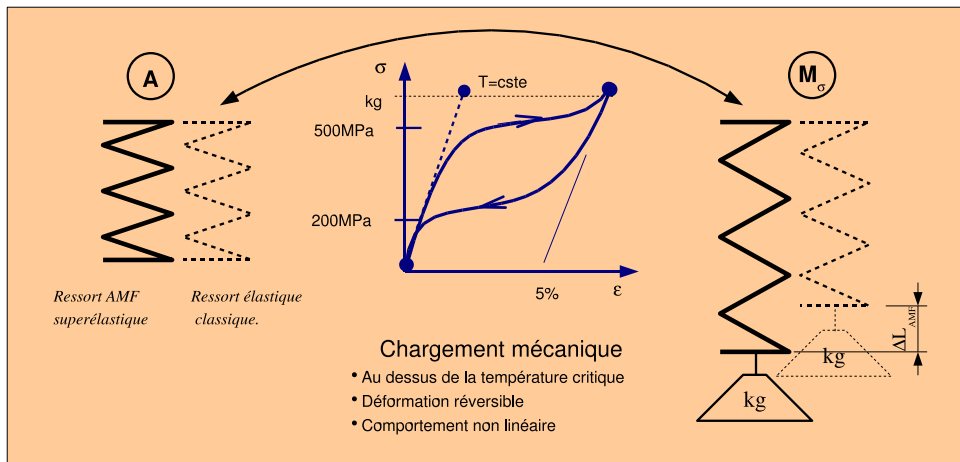


FIG. 1.3 – Superélasticité des AMF (Les valeurs numériques sont caractéristiques d'un AMF de type *NiTi*)

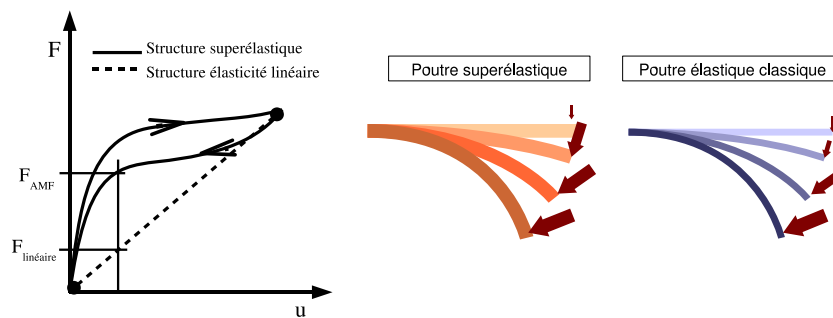


FIG. 1.4 – Force de rappel

En effet, la température critique qui marque le changement de comportement chaud / froid est décalée lorsqu'une contrainte est appliquée : plus la contrainte est élevée, plus la température critique augmente. Ainsi, en appliquant une contrainte suffisamment élevée la température critique va évaluer puis dépasser la température ambiante induisant un changement de comportement du matériau. Il en résulte un comportement non linéaire : avec une première phase de déformation caractérisée par une rigidité élastique classique, suivie d'une phase au cours de laquelle la contrainte reste quasi-constante tandis que le matériau se déforme, cette déformation est limitée par une valeur maximale de déformation, au-delà le comportement retrouve un comportement élastique. Ce comportement est réversible, après retour à contrainte nulle le matériau retrouve sa forme initiale (voir figure 1.3). Le trajet suivi n'est pas identique à la charge et à la décharge, ce qui décrit un hystérésis mécanique.

Pour obtenir cet effet superélastique il faut que la limite d'élasticité du matériau soit suffisamment élevée pour que le changement de comportement soit observé avant que la limite de plasticité ne soit dépassée. Ces matériaux sont donc particulièrement écrouis au moment de la mise en forme. D'autre part, la température d'utilisation du matériau doit être maîtrisée, puisque si elle n'est pas assez élevée la déformation ne sera pas entièrement réversible mais si au contraire elle est trop élevée le matériau va plastifier avant de se déformer.

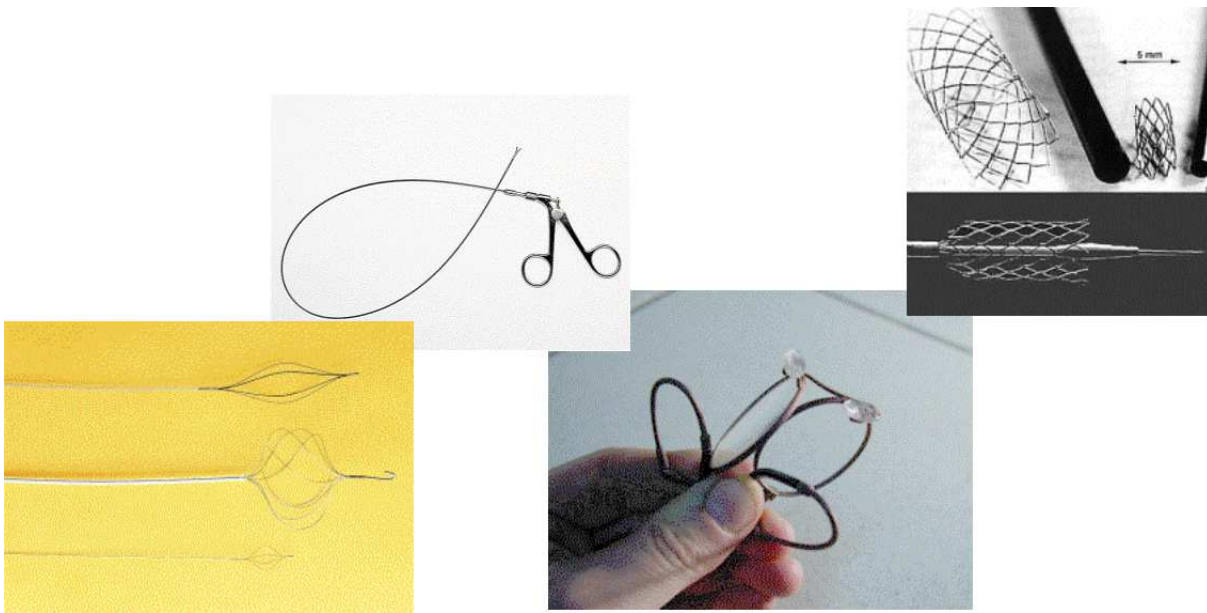


FIG. 1.5 – Applications de la superélasticité

Un matériau superélastique supporte une déformation réversible 10 fois supérieure à la déformation élastique classique ! De plus, le comportement non linéaire ajoute un effet intéressant : si deux tiges, l'une en AMF superélastique et l'autre en matériau élastique linéaire classique, ont dimensionnées pour avoir la même flèche en flexion, alors lors d'une sollicitation en flexion la tige superélastique aura une force de rappel plus élevée que la tige élastique linéaire. En effet, puisque le matériau superélastique admet une grande déformation, pour une flèche identique la section de la poutre superélastique peut être plus grande que celle de la tige élastique linéaire. Or, le comportement de l'AMF est non linéaire, ainsi la force de rappel de la tige en AMF pourra être semblable à celle de la tige élastique linéaire pour une grande flèche, mais elle restera relativement élevée pour une flèche plus petite. Au contraire, la tige élastique linéaire générera une force de rappel proportionnelle à la flèche et donc une force faible pour une petite flèche (figure 1.4). Ainsi une tige élastique linéaire se déformant sous son propre poids pourrait rester rectiligne avec un matériau superélastique.

Ces deux propriétés de grande flexibilité et de force de rappel élevée sont beaucoup utilisées dans le domaine médical mais également dans quelques produits de grande consommation (figure 1.5) :

- > stents,
- > chirurgie non invasive,
- > forêt dentaire,
- > antenne de téléphone portable,
- > lunettes flexibles,
- > armature de soutien gorge.

Le comportement superélastique présente un plateau à contrainte constante : indépendamment de la déformation du matériau, la force de réaction est quasiment constante (figure 1.6) . Applications :

- > fil orthodontique,

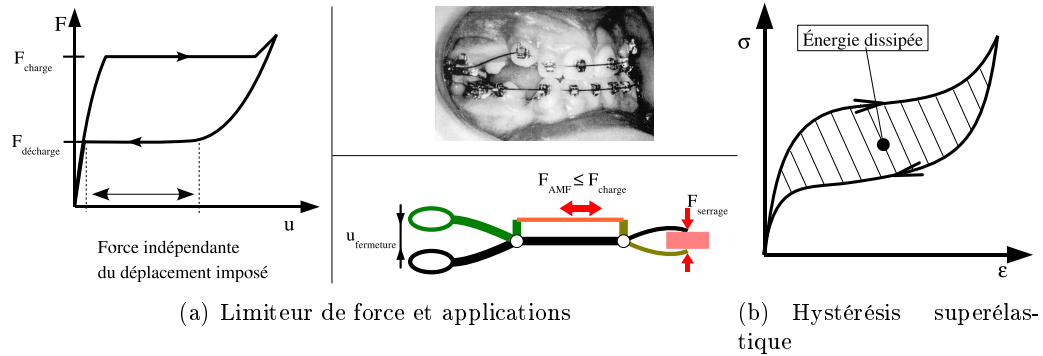


FIG. 1.6 – Limiteur de force et Hystérésis

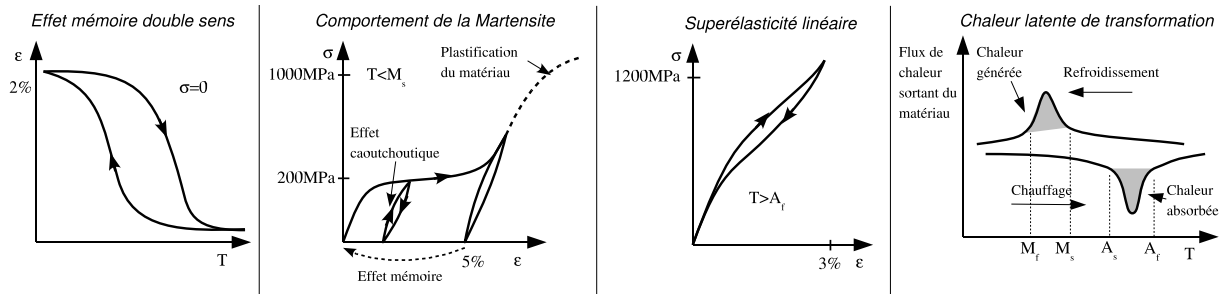


FIG. 1.7 – Autres comportements

> limiteur de force pince chirurgicale.

Enfin le comportement présente un hystérésis. Cet hystérésis dissipe, sous forme de chaleur, quasiment la moitié de l'énergie mécanique apportée au matériau (AMF NiTi) (figure 1.6). Des travaux sont en cours pour développer des amortisseurs anti-sismiques qui exploitent cette propriété. L'amortissement est le plus efficace pour des fréquences de sollicitation d'environ 1Hz. De plus le coefficient d'amortissement peut être contrôlé en modifiant la température du matériau.

De la même manière que pour l'effet mémoire, la principale limitation du comportement superélastique est la tenue aux chargements cycliques. En effet, la micro-structure du matériau évolue beaucoup à chaque cycle superélastique et, après quelques centaines de chargements, la déformation réversible additionnelle se réduit et le changement de rigidité est beaucoup moins marqué et plus étalé. Pour éviter ces dégradations des propriétés mécaniques il faut limiter la déformation réversible à environ 1%.

1.2.3 Autres comportements

Les applications actuelles exploitent principalement le principe de l'effet mémoire de forme et le comportement superélastique. Mais les AMF présentent d'autres caractéristiques intéressantes (figure 1.7).

Effet mémoire double sens

Tout d'abord l'effet mémoire de forme peut être étendu à un effet double sens : le cycle présenté précédemment nécessite une phase de conditionnement au cours de laquelle le matériau doit être déformé à froid, tandis qu'il conserve la mémoire de sa forme chaude. Lorsque le cycle d'effet mémoire est répété, les propriétés du matériau se dégradent, et en particulier la déformation réversible par effet mémoire diminue. Mais en contrepartie la force nécessaire au conditionnement du matériau diminue également. Après quelques centaines de cycles, la force nécessaire au conditionnement devient négligeable et le matériau se "reconditionne" automatiquement lorsqu'il est refroidit. Il présente alors deux formes stables qui peuvent être sélectionnées par simple variation de la température. Il faut néanmoins remarquer qu'il n'est pas possible de générer d'effort lors d'un refroidissement car celui-ci aurait pour effet de reconditionner le matériau, effaçant la forme froide en mémoire. Pour éviter que la mémoire de la forme froide ne se perde il est préférable d'assister l'effet mémoire double sens en appliquant un léger effort de reconditionnement à l'aide par exemple d'un petit ressort de rappel.

Comportement martensitique

À froid, les AMF possèdent une faible rigidité qui les rend facilement déformables et malléables à la main. Puis la forme donnée au matériau peut être effacée par simple chauffage en phase chaude. Cette propriété est utilisée en chirurgie pour réaliser des spatules formables à la main par le chirurgien.

Effet caoutchoutique

La phase froide présente également les propriétés élastiques semblables à celles du caoutchouc : un module élastique apparent faible (environ 35000MPa) et un hystérésis entre la charge et la décharge. Cet hystérésis est tout à fait différent de celui du comportement superélastique : pas de plateau, énergie dissipée plus faible. En revanche, cette propriété mécanique ne se dégrade pas à chaque cycle de chargement. De plus, l'hystérésis est atteint pour de faibles valeurs de déformations : cela confère à la phase froide des propriétés d'amortissement mécanique des vibrations. L'effet peut être illustré par exemple par une cloche en AMF : à chaud la cloche résonne et génère une note mais au contraire en phase froide les vibrations sont atténuées et la cloche ne génère pas de son.

Superélasticité linéaire

En modifiant le traitement thermique de mise en forme de l'AMF, il est possible d'éviter le changement de rigidité lors du chargement superélastique. Le comportement reste alors quasiment linéaire, présente un faible hystérésis, un module élastique apparent faible et une grande déformation réversible (environ 3%). De plus, ce comportement est quasiment indépendant de la température. Comme dans le cas des matériaux superélastiques, pour obtenir cet effet il est nécessaire d'écraser fortement le matériau au moment de sa mise en forme, cela limite donc les géométries réalisables.

Résistivité et chaleur latente

Finalement les AMF présentent d'autres propriétés comme l'évolution de la résistivité électrique du matériau en fonction de son état et de sa température, mais également la propriété d'absorber ou de restituer de la chaleur : le matériau tend à conserver une température proche de

sa température critique, si le matériau est refroidit celui-ci va dégager de la chaleur de manière à limiter l'évolution de la température et au contraire absorber de la chaleur lorsque le matériau est chauffé. La quantité de chaleur maximale absorbée est d'environ 28000J/kg pour les AMF NiTi.

1.3 Origine du comportement des AMF

Nous avons décrit l'effet mémoire de forme à partir d'un changement de comportement entre une phase chaude et une phase froide. De plus le passage de l'une à l'autre fait intervenir une chaleur latente qui s'oppose au changement de phase. Ces propriétés macroscopiques apparentes proviennent d'un changement de la micro-structure du matériau : une transformation de phase martensitique.

1.3.1 Définition de la transformation martensitique

La définition de la transformation martensitique donnée par Adder et al. [Adder 90], basée sur les travaux de Cohen et al. [Cohen 79], décrit bien les caractéristiques de cette transformation de phase solide-solide :

“La transformation de phase martensitique est un changement de structure virtuellement sans diffusion, caractérisée par une déformation homogène du réseau avec une composante déviatorique dominante et un changement de forme associé tel que l'énergie de déformation mise en jeu gouverne la cinétique et la morphologie de la transformation.”

La transformation de phase est caractérisée par un cisaillement du réseau cristallin qui se traduit macroscopiquement par une déformation additionnelle. Ce cisaillement du réseau est limité par la morphologie de la structure cristalline de la martensite qui se traduit au niveau macroscopique par une valeur de déformation de transformation maximale.

La transformation de phase martensitique est sans diffusion, la distorsion du réseau cristallin résulte d'un déplacement des atomes inférieur à la distance inter-atomiques. En fonction de l'agitation thermique, la position de stabilité des atomes évolue entre une phase mère de maille cubique centrée, appelée phase austénitique, et une phase fille de maille hexagonale compact, quadratique ou rhomboédrique, appelée phase martensitique [Guénin 95, Patoor 94]. Le changement de phase martensitique est donc à priori réversible. De plus, la déformation de transformation est principalement déviatorique, ce qui réduit les risques de plastification locale de la phase mère autour des cristaux de martensite. Le cristal d'austénite présente un nombre de symétries plus grand que le cristal de martensite, l'entropie des deux phases est différente ce qui se traduit par un saut de la première dérivée de l'énergie libre, caractéristique d'une transformation de phase du premier ordre.

La martensite apparaît sous forme de cristallites qui germent et croissent dans la matrice austénitique. Les cristallites sont totalement ou partiellement cohérentes avec la phase parent [Berveiller 01]. L'énergie de déformation de la matrice et de la martensite est réduite par des déformations d'accommodation de la martensite et par l'adoption d'une forme lenticulaire par les cristallites de martensite [Adder 90]. L'observation de la structure microscopique d'un CuAlBe [Niclaey 02a] la présence de martensite sous forme d'aiguilles orientées suivant plusieurs directions (figure 1.8).

Le terme de transformation martensitique est à l'origine associé à la transformation qui se produit lors de la trempe des aciers. Par extension il désigne également les transitions de phase

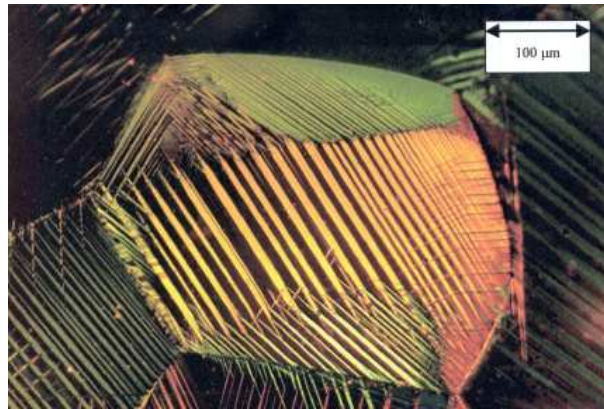


FIG. 1.8 – Microscopie optique avec polarisation d'un polycristal d'AMF CuAlBe (Nicaeys 02a)

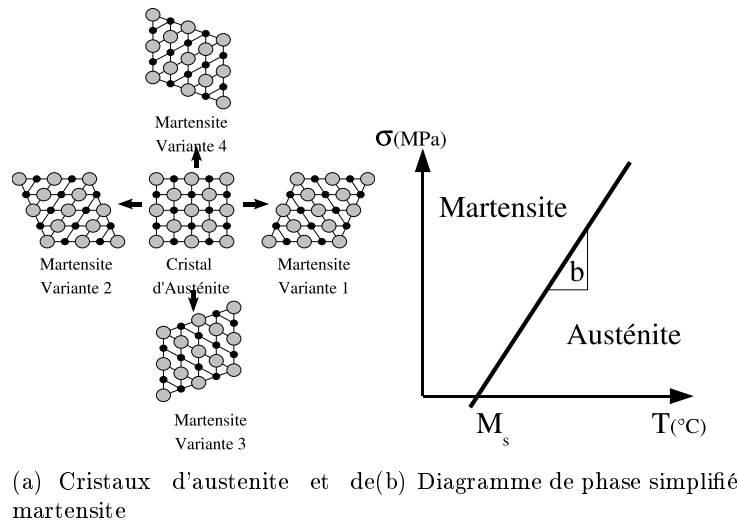


FIG. 1.9 – Description de la transformation martensitique

se produisant dans un certain nombre d'alliages dont les alliages à mémoire de forme. Mais on retrouve également cette transformation dans d'autres matériaux et notamment dans les aciers TRIP.

1.3.2 Description de la transformation martensitique

La transformation d'un cristal d'austénite en un cristallite de martensite est schématisé figure (1.9.a). À partir d'un cristal d'austénite il est possible de créer plusieurs variantes de cristallites de martensites caractérisées par une direction de cisaillement différente. Cette transformation de phase est fonction de l'agitation thermique des atomes et débute à une température critique M_s . Il paraît également évident que l'application d'une contrainte de cisaillement sur le cristal d'austénite va privilégier la création des variantes les mieux orientées par rapport au champ de contrainte. On décrit la présence de martensite dans le matériau à l'aide d'un diagramme de transformation, fonction des deux grandeurs qui pilotent la transformation martensitique : la contrainte et la température (figure 1.9.b). Dans ce diagramme la zone de stabilité de la marten-

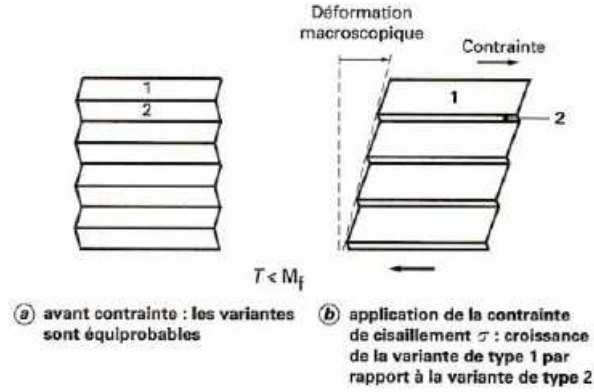


FIG. 1.10 – Réorientation des variantes de martensite [Guénin 95]

site est séparée de la zone de stabilité de l'austénite par une droite critique de transformation, définie par une température critique M_s et une pente de dépendance à la contrainte b . Cette droite provient d'une loi de type Clausius-Clapeyron [Patoor 94] :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \frac{H^{A-M}}{M_s \varepsilon_{max}^T}$$

avec H^{A-M} l'enthalpie ou chaleur latente de transformation et ε_{max}^T la déformation de la martensite par rapport à l'austénite.

Au cours du changement de phase plusieurs variantes de martensite différentes peuvent apparaître simultanément. En particulier lorsque la transformation de phase est due à un refroidissement sans contrainte appliquée, les variantes de martensite fabriquées ont des champs de déformation qui globalement se compensent de manière à ne pas générer de déformation de transformation macroscopique : la martensite est auto-accommodée. Au contraire, la martensite fabriquée suite à l'application d'un champ de contrainte extérieur est composée des variantes les mieux orientées par rapport à ce champ de contrainte, générant une déformation macroscopique : la martensite est orientée. Finalement, lorsqu'un champ de contrainte est appliqué sur de la martensite auto-accommodée, les variantes les moins bien orientées disparaissent au profit de celles générant une déformation dans la direction des contraintes : c'est la réorientation des variantes de martensite (figure 1.10).

La phase de conditionnement d'un cycle mémoire de forme est composée d'une première étape de refroidissement sans contrainte au cours de laquelle aucune déformation macroscopique n'apparaît, suivie d'une seconde étape de chargement mécanique qui conduit à réorienter la martensite auto-accommodée et à générer une déformation rémanente. Lors du retour mémoire, la martensite orientée disparaît pour retrouver le cristal d'austénite initial ne présentant pas de déformation. Le retour mémoire libre se présente alors quasiment comme un saut de déformation. Mais, si cette fois un obstacle limite la déformation macroscopique au cours du chauffage, il y a toujours consommation de la martensite au profit de l'austénite, mais la déformation de transformation de la martensite est cette fois compensée par une déformation élastique de l'austénite, ce qui génère une contrainte. Or l'augmentation de la contrainte décale la température critique de transformation et retarde le retour mémoire. C'est pourquoi, lors d'un retour contraint, la transformation de phase n'est pas instantanée et la contrainte augmente proportionnellement à la température en suivant la limite de transformation inverse Martensite \rightarrow Austénite.

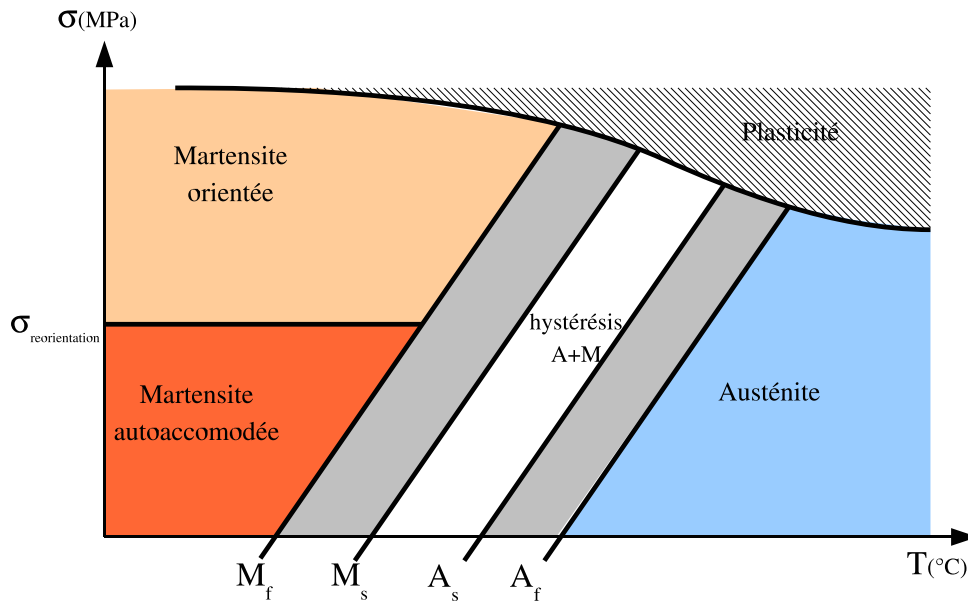


FIG. 1.11 – Diagramme de transformation complet

Finalement la transformation martensitique est présente un hystérésis : la température critique de disparition de la martensite A_f est plus chaude que la température critique de création de la martensite M_s . De plus, la transformation de phase n'est pas instantanée mais est plus ou moins étalée suivant le traitement thermique de mise en forme du matériau, définissant deux nouvelles limites M_f température de fin de transformation directe Austénite→Martensite et A_s température de début de transformation inverse Martensite→Austénite. Dans le diagramme de transformation (1.11) sont également indiquées : la limite de réorientation indépendante de la température et la limite élastique qui diminue avec la température et qui est plus élevée pour la phase martensitique que pour la phase austénitique.

Le comportement de la phase martensitique provient des caractéristiques élastiques de la martensite mais également de la propriété de réorientation des variantes de martensite. Lorsqu'un champ mécanique est appliqué sur la phase martensitique les variantes les moins bien orientées disparaissent au profit des mieux orientées. Après décharge mécanique il reste une déformation de réorientation rémanente. Néanmoins, sous l'effet du champ de contraintes internes résiduel une partie de la réorientation des variantes est réversible. C'est l'effet caoutchoutique, une partie de la déformation de réorientation est réversible décrivant un petit hystérésis mécanique.

1.4 Caractéristiques des AMF

Il existe trois familles d'AMF métalliques :

- à base NiTi (environ 50-50%) + éléments d'addition Cu, Fe ... Communément appelés alliages NiTi ou Nitinol
- à base Cuivre (+ Zn 26% Al 4% ; + Al 14%wt Ni 4%wt ; +Al 12%wt Be 0.3%wt)
- à base Fer + Mn 32%wt Si 3%wt + éléments anti-corrosion (acier inoxydable) Ni Cr

Les caractéristiques mécaniques et mémoire sont comparées dans le tableau (1.1)

Propriété	NiTi	Base Cuivre	Base Fer
Masse volumique (kg/m^3)	6500	7500	7800
Résistivité électrique ($\Omega m 10^{-6}$)	0.5 à 1.1	0.07 à 0.09	
Conductivité thermique ($W/(mK)$)	10	75	
Enthalpie de transfo. (J/kg)	28000	7000	
Module d'Young (GPa)	70	90	210
Limite à la rupture (MPa)	800 à 1000	400 à 700	400 à 700
Température de transfo. M_s ($^{\circ}C$)	-50 à 110	-150 à 100	-200 à 150
Hystérésis thermique $A_f - M_s$ ($^{\circ}C$)	20 à 40	20 à 25	100 à 200
Déf. mémoire maxi. (%)	8	3 à 6 (monocristal = 10)	3 à 4
Déf. superélastique maxi. (%)	4	3 (monocristal = 10)	/
Pente retour contraint ($MPa/^{\circ}C$)	7 à 10	2 à 3	0.5
Amortissement ($SDC - \%$)	15	10 à 30	
Corrosion / biocompatibilité	excellente	mauvaise	+Ni Cr bonne

TAB. 1.1 – Propriétés des AMF [Guéniin 95, Hautcoeur 04]

Nombre de cycles	NiTi		Base Cuivre
	Déf. maxi (%)	Contr. maxi (MPa)	Déf. maxi (%)
1	8%	500 MPa	3%
100	4%	275 MPa	1.2%
10 000	2%	140 MPa	0.8%
+100 000	1%	70 MPa	0.5%

TAB. 1.2 – Tenue aux chargements mémoire cycliques des NiTi et des Cuivreux [Lebreton 03, Hautcoeur 04]

1.4.1 Famille des NiTi

Les AMF NiTi sont les plus développés commercialement car ils présentent de bonnes caractéristiques mécaniques, un effet de superélasticité, une bonne tenue au cyclage et surtout une bonne biocompatibilité pour les applications médicales.

L'ajout d'éléments d'additions permet d'ajuster les caractéristiques mécaniques mais rend le matériau non biocompatible.

Parmi leurs inconvénients on peut citer la difficulté de mise en forme du matériau : l'obtention des propriétés mémoires et superélastiques nécessite lors de la fabrication un fort écrouissage du matériau et une réduction de la taille de grain pour obtenir une limite élastique élevée. L'usinage classique est difficile à cause d'une usure rapide des outils de coupe. Néanmoins l'électro-érosion et la rectification sont bien adaptés. L'assemblage se fait généralement par soudure laser ou assemblage mécanique par effet mémoire [Lebreton 03].

À cause de la dégradation des propriétés mécaniques au cours de chargements cycliques, il est nécessaire de limiter la déformation mémoire et la contrainte générée par retour contraint (voir tableau (1.2)) tiré de [Lebreton 03]).

Ces matériaux vieillissent bien tant que la température reste inférieure à 300°C.

1.4.2 Famille des Cuivreux

Ces matériaux sont plutôt adaptés à des applications non médicales car ils ne sont pas biocompatibles. En fonction de leur composition ils présentent des caractéristiques mécaniques intéressantes. Les alliages CuAl+Ni ou Be ont des déformations de transformation relativement comparables à celles des NiTi pour un hystérésis plus faible et sont donc intéressants en superélasticité.

La matière première ne coûte pas chère, mais la mise en forme est relativement complexe : la composition doit être choisie de manière précise, puis une trempe permet de stabiliser la phase austénitique à température ambiante, suivie de différents traitements thermiques. Le matériau est en état méta-stable vieillit moins bien que les NiTi. Les propriétés se dégradent significativement pour un vieillissement à 200°C pendant 25h [Guéniin 95].

De la même manière, l'amplitude de l'effet mémoire doit être réduite lorsque le nombre de cycles à effectuer augmente (tableau (1.2)).

Un de leur intérêt majeur est la possibilité de fabriquer des monocristaux sous forme de fil et de ruban. Ces monocristaux possèdent des caractéristiques mécaniques et de tenue aux chargements cycles exceptionnelles, ainsi qu'un faible hystérésis de transformation.

Ces matériaux sont bien adaptés à la superélasticité.

1.4.3 Famille des Ferreux

Les AMF à base fer sont intéressants pour leur capacité à être produits en masse à partir des moyens classiques de fabrication des aciers.

Ces AMF peuvent être rendus inoxydables par l'ajout d'éléments d'addition. Mais les températures de transformations et leur large hystérésis limite leur utilisation dans le domaine médical.

Leurs caractéristiques mécaniques sont nettement moins bonnes, la martensite créée par transformation ne possède pas la propriété de réorientation et la limite élastique est trop faible pour effectuer un chargement superélastique.

Néanmoins, du fait du grand hystérésis de la transformation ces matériaux sont bien adaptés à l'assemblage d'éléments par manchons à effet mémoire [Guéniin 95].

1.5 Conclusion

Les Alliages à Mémoire de Forme se distinguent des matériaux classiques par un fort couplage thermomécanique qui a pour origine une transformation de phase du matériau. L'état du matériau est modifié par une variation de quelques dizaines de degrés évoluant d'une phase molle et déformable aux températures froides (Martensite) à une phase rigide et élastique à température plus chaude (Austénite).

Cette propriété procure aux AMF une grande variété de comportements passifs ou actifs :

- > Actionneur à effort proportionnel à la température.
- > Amortissement variable.
- > Détecteur de température seuil.
- > Déformation "effaçable".
- > Limiteur d'efforts.
- > Superélasticité.

Les fonctions de structure et d'actionneur peuvent être regroupées en une seule pièce avec un gain de volume et de masse particulièrement intéressant pour les petits systèmes de quelques millimètres.

L'utilisation des AMF dans des systèmes réels demande une bonne connaissance des caractéristiques du matériau et nécessite des moyens de dimensionnement de solutions en AMF.

L'étape suivante consiste donc à faire une étude de caractérisation du comportement du matériau. Le comportement thermomécanique complexe des AMF peut être abordé par différents types d'approches : approche mécanique à différentes températures, approche thermique à différentes contraintes, cycles d'effet mémoire de forme et retour contraint, analyse de la transformation de phase par DSC... Chaque approche est un point de vue différent sur la même propriété de changement de phase du matériau. La confrontation des différents points de vue permettra de remonter aux informations et paramètres essentiels caractérisant le matériau, pour en déduire d'une part des valeurs quantitatives des propriétés du matériau et d'autre part une base pour construire un modèle du comportement des AMF intégrant les aspects mécaniques mais également thermiques en une seule formulation.

Chapitre 2

Caractérisation du matériau

Sommaire

2.1	Introduction	19
2.2	État de l'art	20
2.2.1	Diagramme de transformation	20
2.2.2	Chargements complexes	22
2.2.3	Couplage thermique	22
2.2.4	Chargements partiels	23
2.2.5	Conclusions	25
2.3	Matériau et système expérimental	26
2.3.1	Matériau	26
2.3.2	Système expérimental	27
2.4	Caractérisation des fils	28
2.4.1	Caractérisation des fils superélastiques	28
2.4.2	Caractérisation des fils mémoires	32
2.4.3	Discussion	37
2.4.4	Conclusion caractérisation des fils	39
2.5	Caractérisation des éprouvettes planes	40
2.5.1	Éprouvettes superélastiques	40
2.5.2	Éprouvettes mémoires	45
2.5.3	Discussion éprouvettes planes	50
2.6	Conclusion	58

2.1 Introduction

Les Alliages à Mémoire de Forme sont à l'origine d'une grande variété de comportements. Nous les avons décrit de manière qualitative dans le premier chapitre. Il s'agit maintenant de les définir de manière quantitative. Nous ne pouvons pas étudier en détail tous les comportements, mais nous allons nous concentrer sur les comportements les plus utilisés dans les applications en AMF : la superélasticité et l'effet mémoire de forme. Nous allons observer le comportement macroscopique de différents AMF sous différents chargements thermomécaniques. L'objectif de cette étude est de déduire :

- des principes d'applications,
- des règles de dimensionnement,

➤ une base de données pour construire et valider un modèle de comportement.

Dans le cadre de nos travaux de thèse nous nous sommes intéressés aux AMF NiTi binaires, utilisés en biomécanique pour leur bonne compatibilité avec le corps humain. Ces matériaux sont déjà largement étudiés dans la littérature car ils possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques (déformation réversible, tenue au cyclage). On constate que l'angle d'observation est majoritairement le même : des chargements mécaniques à température fixée. Paradoxalement l'effet mémoire est très peu étudié à l'échelle du comportement du matériau. La majorité des études portent directement sur une géométrie d'actionneurs à mémoire de forme. Nous allons montrer expérimentalement que les comportements mécaniques et thermiques sont très dépendants et fortement non linéaires et qu'une approche purement mécanique ne permet pas d'appréhender de manière suffisamment précise l'influence de la température.

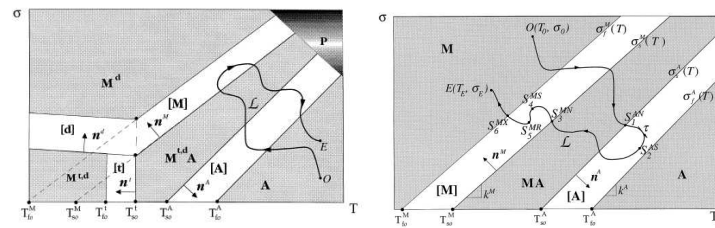
Pour réaliser ces essais il a été nécessaire de développer une machine de chargements thermomécaniques qui permet le pilotage en Température-Déplacement et l'asservissement à une consigne de Force et une consigne de Rigidité = Force / Déplacement. Plusieurs géométries et matériaux ont été testés en traction, et un montage anti-flambement a permis de solliciter des éprouvettes planes en traction-compression. Les observations permettront de compléter la bibliographie concernant les phénomènes à modéliser à l'échelle macroscopique.

2.2 État de l'art

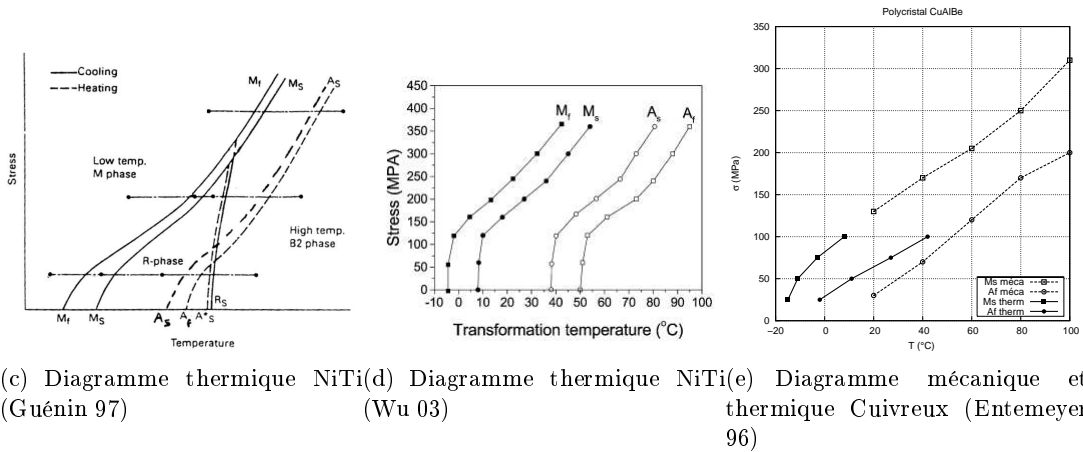
Les alliages à mémoire de forme sont caractérisés par une transformation de phase réversible du matériau suite à un chargement thermomécanique, transformant la phase mère austénitique en une phase fille martensitique. Chaque phase possède des caractéristiques mécaniques propres : l'austénite a un comportement élastoplastique classique, tandis que la martensite peut être facilement déformée et présenter une déformation rémanente. La déformation du matériau est directement fonction de la quantité de martensite ainsi que de la déformation globale de la martensite présente dans le matériau. La définition d'un diagramme de transformation permet de représenter l'état de transformation du matériau en fonction de l'état de chargement thermomécanique.

2.2.1 Diagramme de transformation

Pour chaque matériau, le diagramme de transformation est construit à partir d'une série de chargements thermomécaniques expérimentaux. La majorité des auteurs réalisent des essais mécaniques à différentes températures. Dans ce type d'essais la transformation est repérée par un changement de rigidité dans le comportement : des limites de transformation sont définies à partir des contraintes de début et de fin de transformation directe et inverse relevées à différentes températures. Remarquons que les limites construites de cette manière sont des limites de déformation de transformation et non pas exactement des limites de transformation. Pour remonter à la quantité de martensite présente dans le matériau il est nécessaire de faire l'hypothèse d'une fraction de martensite proportionnelle à la déformation de transformation macroscopique. Les diagrammes de transformation construits par cette méthode peuvent être résumés par le diagramme proposé par Brinson [Bekker 98] qui distingue une zone où la martensite est orientée par les contraintes, une zone où la martensite est autoaccommodée et un intervalle de réorientation de la martensite (figure 2.1.a). La transformation inverse est caractérisée par des limites de transformation linéaires. Ce diagramme est souvent simplifié en négligeant la zone de martensite autoaccommodée (figure 2.1.b).



(a) Diagramme mécanique complet (Bekker 98) (b) Diagramme mécanique simplifié



(c) Diagramme thermique NiTi(d) Diagramme thermique NiTi(e) Diagramme mécanique et thermique Cuivreux (Entemeyer 96)

FIG. 2.1 – Diagrammes de transformation de la littérature

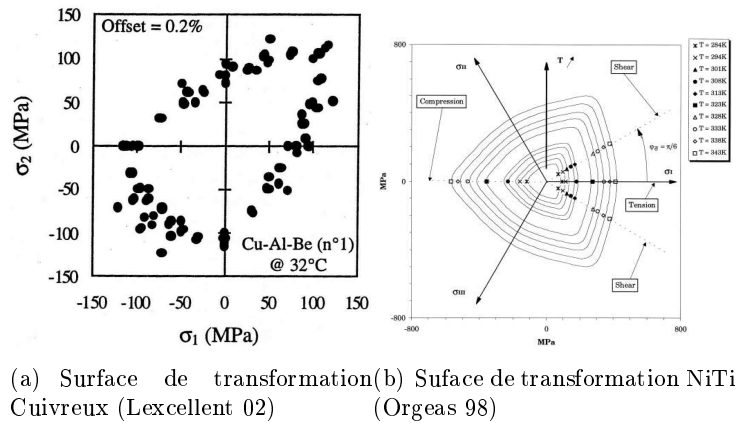


FIG. 2.2 – Surface limite de transformation

D'autres auteurs construisent le diagramme de transformation à partir d'essais thermiques à différents niveaux de contraintes [Guéniin 97, Wu 03] (figure 2.1. c et d). Au cours de ces essais la déformation évolue rapidement lorsque la température dépasse une température critique pour finir à une seconde température. De nouveau, les limites déterminées sont des limites de déformation de transformation plutôt que des limites de transformation. Pour des niveaux de contrainte élevés (supérieurs à la limite de réorientation) les limites de transformation sont bien corrélées aux diagrammes mécaniques. En revanche pour de faibles niveaux de contrainte les limites de transformation deviennent non linéaires. Le même phénomène intervient pour des alliages de NiTi et pour les Cuivreux (diagramme construit à partir d'essais réalisés par Entemeyer [Entemeyer 96] (figure 2.1.e)).

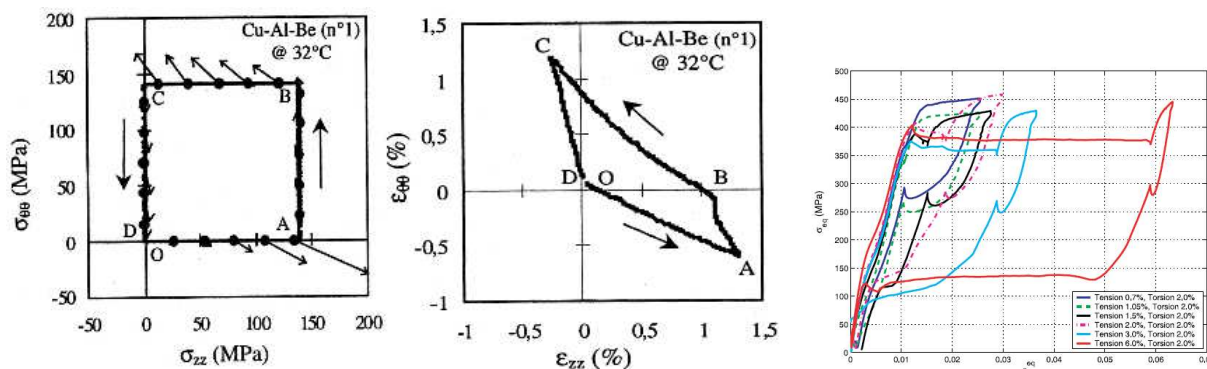
2.2.2 Chargements complexes

L'analyse du comportement à partir du diagramme de transformation est généralement limitée aux chargements 1D en traction. Des chargements plus complexes sur des éprouvettes planes ou tube sollicitées en traction, compression et cisaillement montrent que les limites de transformation sont fortement dépendantes du type de chargement tant pour les AMF cuivreux [Lexcelent 02] que pour les NiTi [Orgéas 98]. Plusieurs auteurs ont déterminé la forme de la surface de transformation à partir de différents chargements (figure 2.2). Cette surface n'est pas symétrique et mal approximée par les critères classiques utilisés en plasticité (Von Mises, Hill ...). Il est nécessaire d'introduire des descriptions plus complexes faisant intervenir le 3ème invariant des contraintes [Patoor 96, Qidwai 00, Manach 97, Raniecki 98].

D'autres auteurs ont réalisé des chargements mécaniques non proportionnels sur des cuivreux [Bouvet 04] et sur des NiTi [McNaney 03] qui montrent que la réponse à un trajet de chargement non-proportionnel ne peut pas être déduite directement de l'analyse des chargements proportionnels (figure 2.3). Il y a en particulier apparition d'un effet d'écroutissage de transformation de type cinématique et pas simplement isotrope.

2.2.3 Couplage thermique

Le comportement des AMF est principalement étudié sous l'angle mécanique tout en tenant compte d'une dépendance à la température. Ce point de vue est adopté tant au niveau expérimental avec des chargements mécaniques à température constante, que théorique en modélisant le



(a) Traction-compression interne tube Cuivreux superélastique (Bouvet 04) (b) traction-torsion NiTi superélastique (McNaney 03)

FIG. 2.3 – Trajets non-proportionnels

comportement mécanique et en introduisant une dépendance des paramètres à la température. Pourtant dans les AMF le couplage thermique est primordial, comme le montre la différence entre les diagrammes construits à partir de chargements mécaniques ou à partir de chargements thermiques.

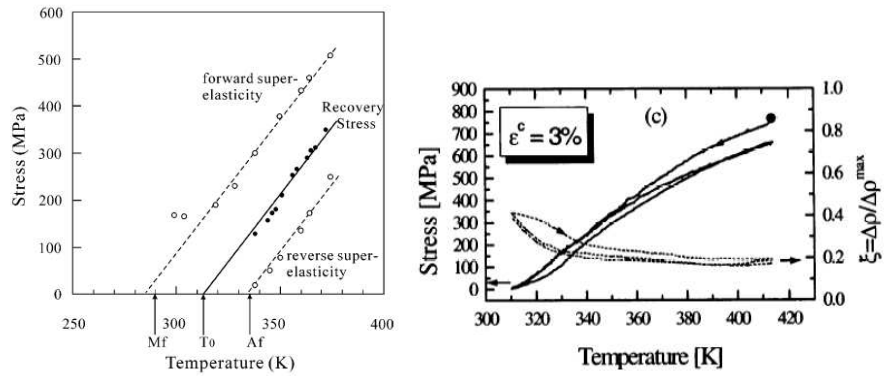
Ce couplage thermique fort permet de générer l'effet mémoire de forme libre au cours duquel la déformation de transformation est récupérée sous contrainte nulle, et l'effet retour contraint au cours duquel une contrainte est générée tandis que la déformation est bloquée. Dans la littérature, les auteurs s'intéressent principalement au retour mémoire de forme libre. Néanmoins dans l'optique d'applications des AMF sous forme d'actionneur ce point de vue n'est pas suffisant : un actionneur en AMF doit être capable de transformer une énergie thermique en travail mécanique $W(J) = F(N) * u(m)$ composé d'un déplacement $u(m)$ mais également d'une force $F(N)$. Or le retour mémoire est fortement modifié lorsqu'une force est appliquée (ou générée) induisant un décalage des températures limites de transformation. La principale caractéristique de l'effet mémoire de forme des AMF est donc le retour contraint, tandis que le retour mémoire libre n'est que le cas particulier où la contrainte reste nulle.

Quelques auteurs [Sittner 00, Kato 04] ont étudié le retour contraint avec des fils de NiTi et montrent la capacité à générer une force proportionnelle à la température (figure 2.4.a et b). Le coefficient de proportionnalité est égal à la pente des limites des transformations dans le diagramme de phase, mais la température critique de début d'effet mémoire n'est pas bien corrélée avec la température A_s déterminée à partir du diagramme de transformation mécanique.

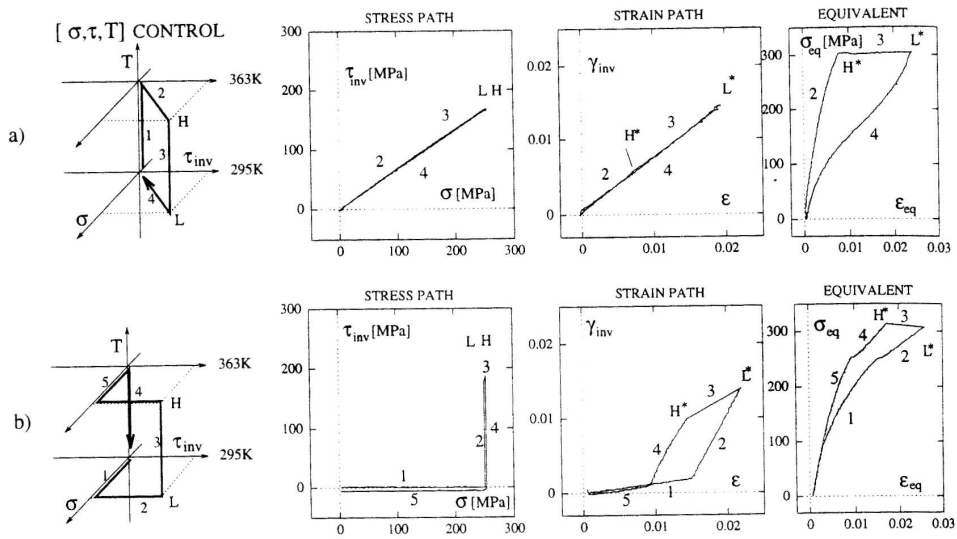
Sittner [Sittner 96] propose également une série de chargements complexes mécaniques et thermique sur des alliages à base Cuivre (figure 2.4.c).

2.2.4 Chargements partiels

La transformation de phase martensitique est caractérisée par un hystérésis entre la transformation directe $A \rightarrow M$ et la transformation inverse $M \rightarrow A$. C'est généralement la boucle d'hystérésis principale qui est représentée, décrivant le comportement du matériau lors du passage d'un état totalement austénitique à un état quasi-totalement martensitique et inversement. Pourtant dans l'optique du développement de structures ou d'actionneurs en AMF, le chargement appliqué ne conduira généralement pas à une transformation complète du matériau. Or la réponse du



(a) Retour contraint fil NiTi (Kato 04) (b) Retour contraint fil NiTi (Sittner 00)



(c) Chargement thermomécanique (Sittner 96)

FIG. 2.4 – Couplage thermique

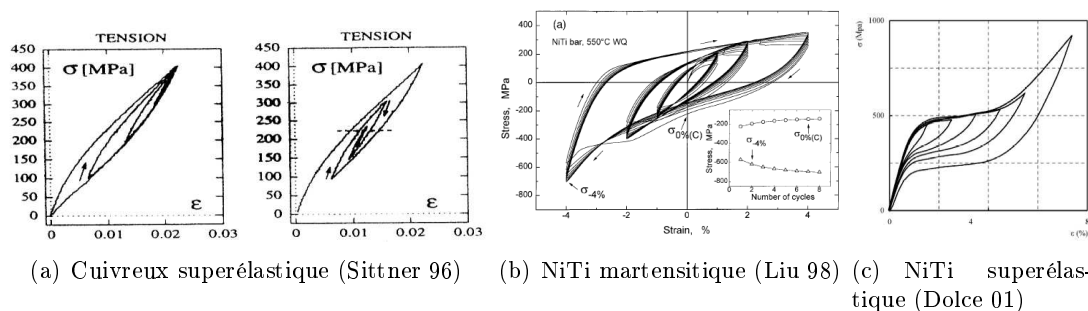


FIG. 2.5 – Chargements partiels

matériau à un chargement partiel ne peut pas être directement déduite de la boucle principale de transformation, il y a un effet de boucle interne : la réponse du matériau se situe à l'intérieur de la boucle principale. L'effet est particulièrement important pour les alliages à base cuivre [Sittner 96, Orgéas 97] mais apparaît également pour les NiTi [Liu 98, Dolce 01] (figure 2.5).

L'origine de l'effet boucle interne est très discutée : pour certains auteurs [Huo 93, Leclercq 96] il est lié à une forme non convexe du potentiel thermodynamique et serait le résultat de l'instabilité de la transformation de phase martensitique, tandis que pour d'autres auteurs [Tanaka 95, Bekker 98] il a une origine dissipative se traduisant par une évolution des contraintes et températures critiques de transformation en fonction de l'état interne du matériau.

2.2.5 Conclusions

Il paraît intéressant d'approfondir le couplage entre les effets thermiques et mécaniques. Dans la suite de ce chapitre seront construits les diagrammes de transformation de chaque matériau à partir d'une approche mécanique et d'une approche thermique. L'observation du comportement à faible contrainte. Les principales divergences se situent aux faibles niveaux de contraintes avec un couplage entre la création de martensite, l'orientation des variantes de martensite créées et la réorientation des variantes présentes.

Dans l'optique d'applications de type structures en AMF le comportement mécanique en boucles internes doit être approfondi.

De même l'utilisation des AMF sous forme d'actionneurs requière une étude approfondie de l'effet mémoire de forme. Classiquement l'effet mémoire de forme est étudié soit en retour libre sans appliquer de contrainte soit en retour contraint en bloquant totalement la déformation de l'élément en AMF. En utilisation réelle les actionneurs sont connectés à un système sur lequel ils vont appliquer une force. Le système possède une valeur de rigidité propre qui lie la force et le déplacement. Dans le cas général cette rigidité est intermédiaire entre la rigidité nulle (retour mémoire libre) et la rigidité infinie (retour contraint).

Les AMF commercialisés sont généralement adaptés à un type d'utilisation donné, plutôt mécanique ou plutôt effet mémoire. Ces matériaux diffèrent par leur composition mais également les traitement thermomécanique qui leurs sont appliqués [Zhang 94]. En fonction de la géométrie de l'élément en AMF il est plus ou moins difficile d'écrouir le matériau ce qui influe sur ses caractéristiques finales.

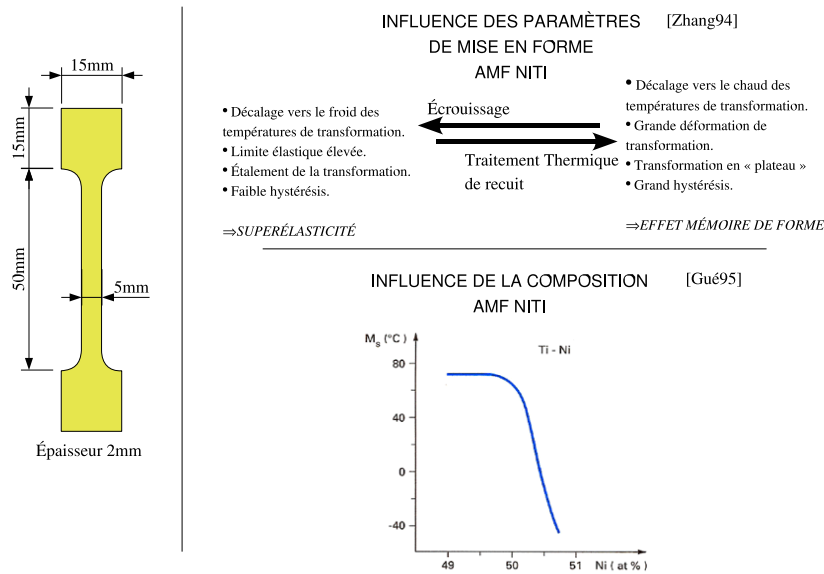


FIG. 2.6 – Éprouvettes planes ; Traitement thermomécanique du matériau

2.3 Matériau et système expérimental

L'objectif de l'étude présentée dans ce chapitre est de caractériser quatre séries d'éprouvettes de deux géométries et de deux matériaux différents sollicitées suivant différents chargements thermomécaniques.

Pour cela il a été nécessaire de développer une machine de sollicitation thermomécanique spécifique. Cette machine a d'abord été validée sur des chargements classiques et avec des matériaux connus (métaux au comportement élasto-plastique). De plus, de manière à solliciter des éprouvettes planes en compression, un montage anti-flambement a été testé et validé sur des éprouvettes en acier élasto-plastique de géométrie identique à celle des éprouvettes AMF.

2.3.1 Matériau

Nous allons étudier 4 alliages fournis par MÉMOMÉTAL INDUSTRIE. Ils sont déclinés en deux géométries et deux matériaux : une géométrie fils de diamètre 1.8mm, une géométrie d'éprouvettes de section $2 \times 5 \text{mm}^2$ usinée par électro-érosion dans une plaque d'épaisseur 2mm (voir figure 2.6).

Pour chaque géométrie deux matériaux différents ont été testés : superélastique (austénitique à température ambiante) ou mémoire (martensitique à température ambiante). Ils diffèrent par leur composition et leur traitement thermomécanique. La composition influe directement sur les valeurs des températures de transformation [Gué95] (figure 2.6). Ces matériaux subissent un traitement thermomécanique de mise en forme, composé d'une phase d'écrouissage suivie d'un recuit, mais différent en fonction de l'effet recherché. Ce traitement thermomécanique a pour effet d'une part d'ajuster précisément les températures, et d'autre part d'optimiser la limite d'élasticité (superélasticité) ou la déformation de transformation réversible (effet mémoire) [Zhang 94] (figure 2.6).

Enfin suivant la géométrie fil / plaque il n'est pas possible d'appliquer le même traitement

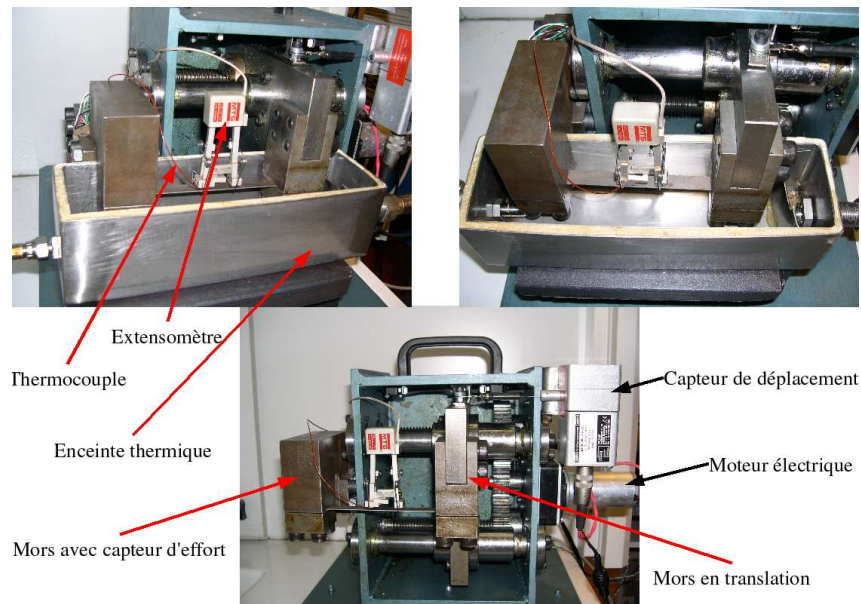


FIG. 2.7 – Machine thermomécanique

thermomécanique. En particulier la phase d'écroissage pourra être importante sur une géométrie fil mais sera limitée sur une géométrie plaque. Cela influe notamment sur la limite élastique du matériau qui sera plus élevée sur une géométrie fil. On observe également un phénomène de localisation de la transformation spécifique à la géométrie fil.

2.3.2 Système expérimental

Afin de réaliser des mesures de température précises et homogènes nous avons choisi de plonger l'éprouvette dans un bain liquide en circulation. La température du fluide est contrôlée par une machine thermique commerciale JULABO F25. Du fait de la bonne convection entre le fluide et l'éprouvette nous pouvons également considérer que lors d'un essai mécanique la chaleur dégagée par la transformation de phase est rapidement évacuée par le liquide.

Le dispositif est conçu sur le principe d'une séparation des parties mécaniques par rapport aux parties thermiques. L'axe de sollicitation de l'éprouvette est décalé par rapport à l'axe de la machine, ce qui permet de maintenir le capteur d'effort et l'extensomètre à l'air ambiant tandis que l'éprouvette est plongée dans le bain liquide (figure 2.7).

Le dispositif permet d'appliquer une force de $\pm 8kN$, sur une course de 90mm, à une vitesse allant de 3 à 20mm/min. La plage de température est de $-10^{\circ}C$ à $+90^{\circ}C$ avec une vitesse de $+6^{\circ}C/min$ en chauffage et $-1^{\circ}C/min$ en refroidissement.

Le capteur d'effort a été calibré en référence aux capteurs des machines de sollicitation mécaniques du laboratoire (voir annexe A). La déformation est mesurée à l'aide d'un extensomètre commercial MTS 623-12F. La longueur de base de l'extensomètre est de 30mm pour une longueur d'éprouvettes entre mors de 50mm. Ainsi la mesure de l'extensomètre donne une moyenne représentative de la déformation de l'échantillon même en cas de localisation de la transformation.

La température dans l'enceinte est mesurée grâce à un thermocouple connecté à un circuit avec température de référence.

Le dispositif est piloté en déplacement. Le contrôle et le maintien d'une force est rendu possible

grâce à une boucle d'asservissement sur la force mesurée. La vitesse de réaction de la chaîne d'asservissement étant limitée, le saut de déformation observé au moment de la transformation de phase peut conduire à une erreur d'asservissement allant jusqu'à 100N. Le phénomène est particulièrement marqué avec les éprouvettes fils, ce traduisant par une erreur de 40MPa dans la mesure des contraintes. La transformation de phase des éprouvettes planes est plus étalée et l'erreur est beaucoup moins marquée.

L'asservissement à force constante est étendu à un asservissement de la rigidité de déformation : dans le cas d'un cycle d'effet mémoire avec retour contraint, l'éprouvette devient l'actionneur qui applique un effort sur la machine de sollicitation simple système de mesure. L'asservissement en rigidité consiste à imposer une relation linéaire entre le déplacement de la traverse et la force appliquée. L'objectif est de mesurer la réponse du matériau au cours d'un retour mémoire intermédiaire entre le retour libre à contrainte nulle et le retour contraint à déformation nulle.

Des tests de validation du dispositif ont été réalisés sur différentes éprouvettes de matériau et géométries différentes. La comparaison des résultats avec les mesures de référence des machines de traction du laboratoire valide le dispositif (voir annexe A).

Pour solliciter les éprouvettes planes en compression et limiter le risque de flambage nous avons conçu un dispositif anti-flambement. Il s'agit de guider l'éprouvette dans les deux directions perpendiculaires à la direction de sollicitation. Une géométrie en deux demi-glissières en cisaillement a été choisie qui permet d'éviter que l'éprouvette se coince à l'intérieur du dispositif et fausse les mesures de déformation et de force (voir annexe A). Néanmoins, malgré la lubrification liée à l'environnement liquide, les efforts de frottements résultant du contact de l'éprouvette avec les glissières ne peuvent être évités. Le dispositif a été validé sur des éprouvettes en acier E24 au comportement élastoplastique et de géométrie identique aux éprouvettes planes en AMF. Nous remarquons enfin que le couplage du dispositif anti-flambement avec le montage déporté induit malheureusement un effet d'arc-boutement de la glissière pour des forces élevées limitant le chargement à -5kN qui correspond à une contrainte de compression maximale de -500MPa.

2.4 Caractérisation des fils

Nous avons travaillé sur des fils de diamètre 1,8mm et une longueur entre mors de 50mm. Deux types de matériaux ont été testés, différents par leur composition et leur traitement thermique : un matériau superélastique et un matériau à mémoire à température ambiante. Dans ces matériaux la transformation en phase-R est observée très distinctement, même sous chargement mécanique.

Pour chaque matériau différents types d'essais ont été réalisés :

- Essais mécaniques à température constante : vitesse de chargement mécanique $v=1,510^{-3}s^{-1}$, influence de la température sur le comportement, réponse lors de charges/décharges partielles.
- Essais thermiques à contrainte constante : influence de la contrainte sur la réponse du matériau, évolution de la déformation maximale de transformation avec la contrainte.
- Effet mémoire de forme (pour l'éprouvette mémoire) : retour libre, retour contraint à différentes rigidités.

Ces mesures ont été utilisées pour construire le diagramme de transformation de première charge de chaque matériau.

2.4.1 Caractérisation des fils superélastiques

Du fait des températures de transformation du matériau hors des limites thermiques de la machine nous n'avons pas pu réaliser d'essais thermiques à contrainte constante pour ce matériau.

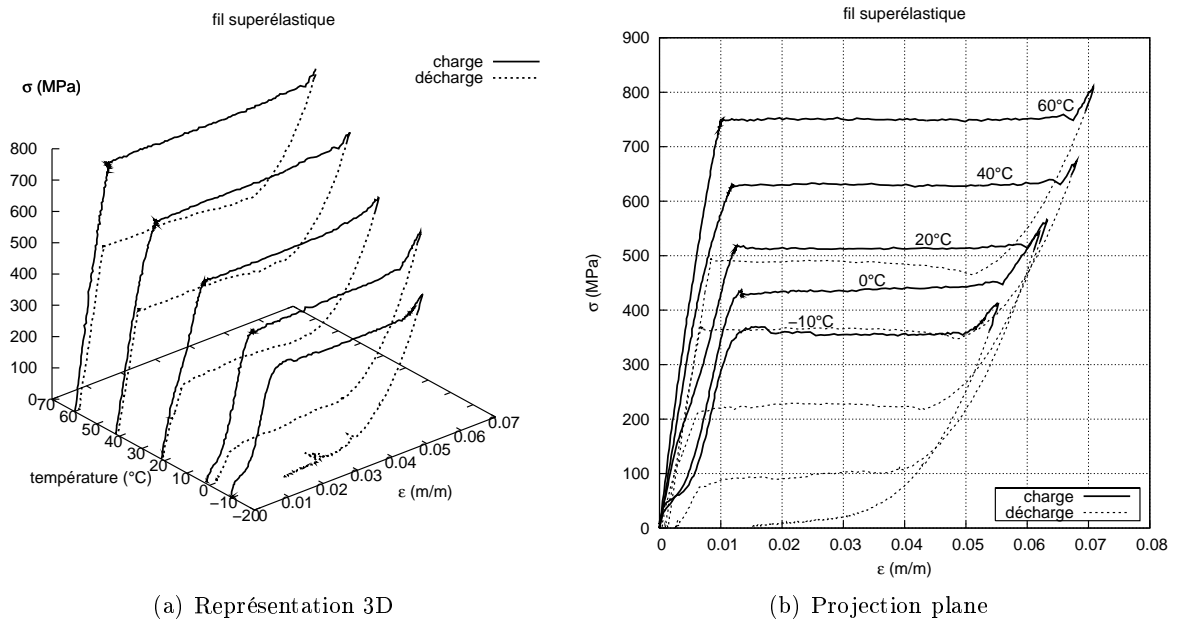


FIG. 2.8 – Chargement mécanique à différentes températures, fil superélastique

Essais mécaniques

Au début du chargement le matériau est austénitique. La charge est arrêtée dès que la saturation de la transformation est atteinte de manière à éviter la pastification du matériau. Les essais mécaniques ont été effectués à différentes températures. Pour chaque température un échantillon vierge a été chargé 5 fois ce qui nous permet de déterminer plus précisément la limite de réversibilité du matériau (figures 2.8 et 2.9).

On observe :

- La localisation de la transformation martensitique, et plateau de transformation à contrainte constante.
- L'évolution de la contrainte limite de transformation avec la température.
- La chute de la contrainte critique de transformation lors du cyclage et l'apparition d'une déformation irréversible.
- Une transformation en phase R avant le début de la transformation martensitique.
- Une augmentation de la déformation réversible avec le niveau de contrainte.

Diagramme de transformation

Construction du diagramme de transformation : les contraintes de début et de fin de transformation sont confondues, c'est pourquoi seules les limites M_s et A_f ont été tracées. La limite de début de transformation en phase R a également été définie (figure 2.10).

Les caractéristiques matériau suivantes ont été mesurées :

- Les limites de transformation sont linéaires de pente $7\text{MPa}/^\circ\text{C}$ et identique pour les transformations directe et inverse. La pré-transformation en phase R quand à elle est plus sensible à la température avec une dépendance de $20\text{MPa}/^\circ\text{C}$.
- L'hystérésis de la transformation est indépendant de la température et prend la valeur de

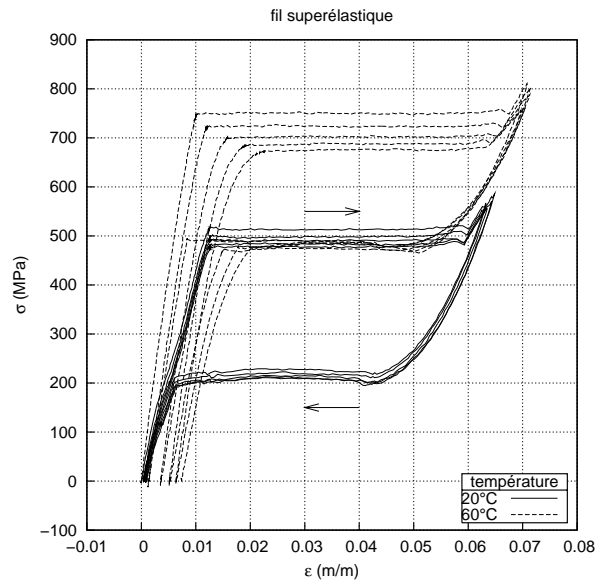


FIG. 2.9 – Cyclage mécanique, éprouvette superélastique

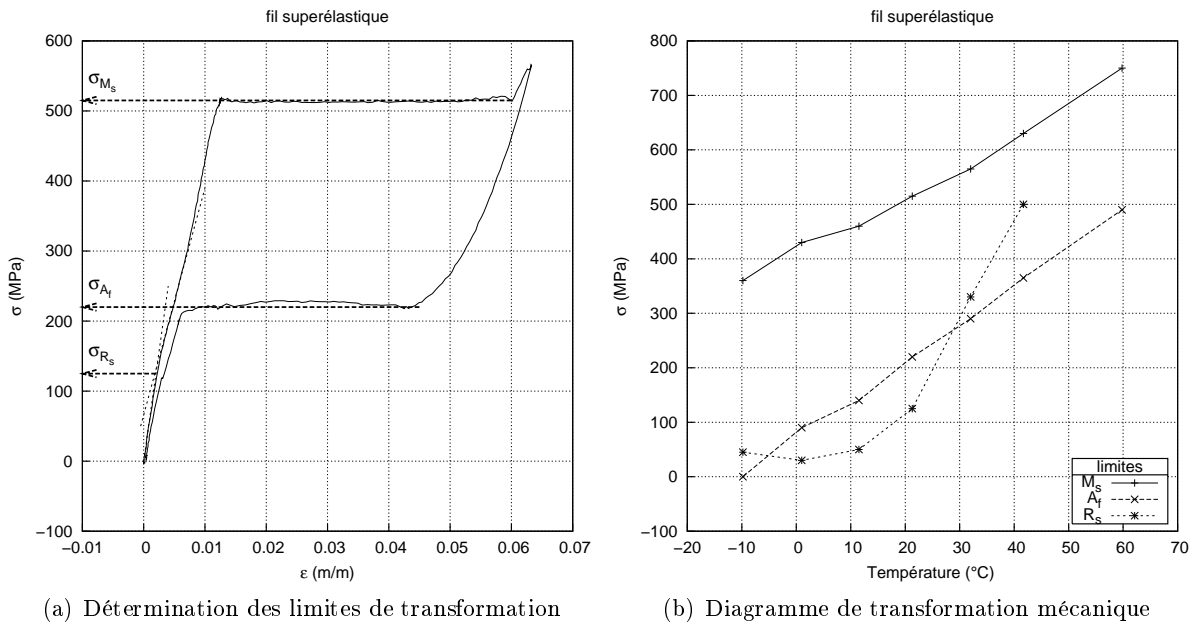


FIG. 2.10 – Diagramme de transformation fil superélastique

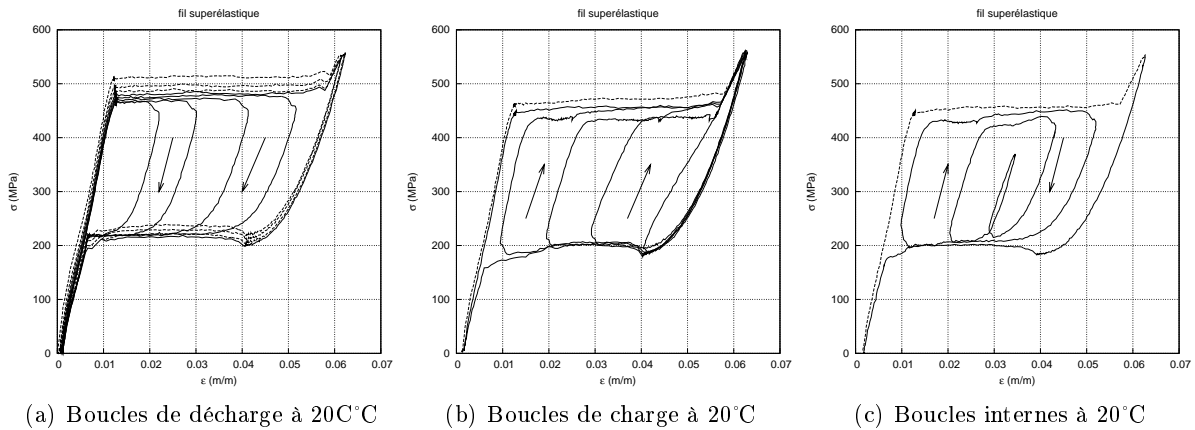


FIG. 2.11 – Boucles internes

280MPa .

- Les températures de transformation sont déduites par extrapolation des limites de transformation : $M_s \approx -50^\circ\text{C}$, $A_f \approx 10^\circ\text{C}$.

Boucles internes

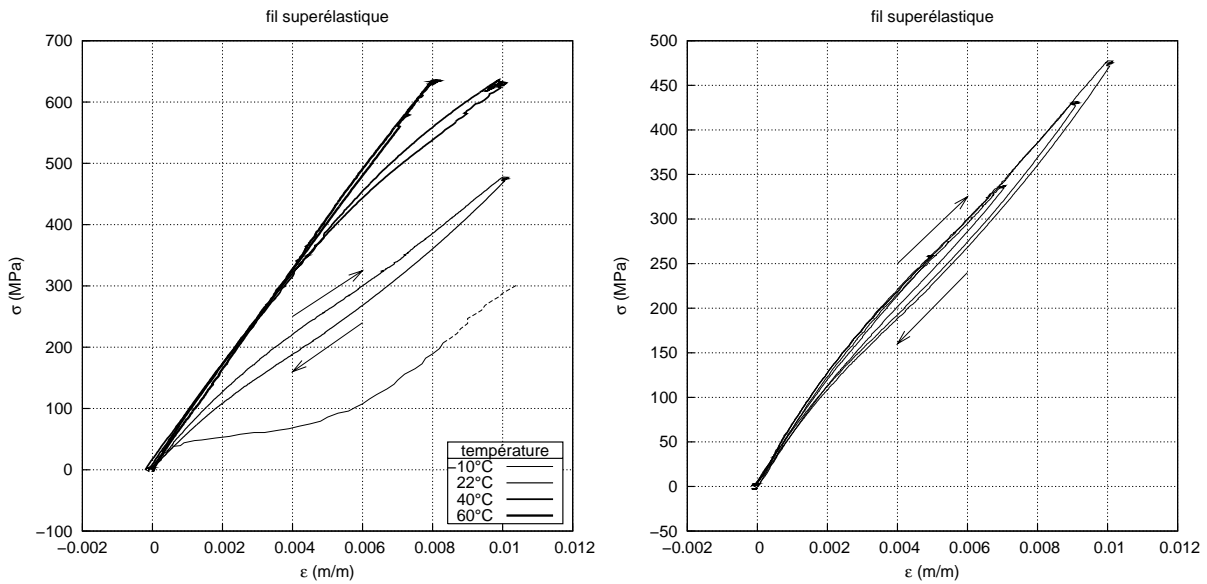
Le comportement mesuré précédemment montre un cycle de transformation complet Austénite \rightarrow Martensite. Il est également intéressant d'observer la réponse du matériau lors de charge-décharges partielles, effectuées à 20°C. Le fil est d'abord stabilisé par 5 cycles complets, suivent plusieurs décharges partielles, plusieurs charges partielles et enfin des trajets de boucles internes de plus en plus petites (figure 2.11). On observe :

- Les évolutions de la contrainte limite de transformation et la déformation résiduelle accentuées lorsque la valeur de saturation de la déformation de transformation est atteinte.
- Le comportement élastique du matériau lors d'une charge/décharge à l'intérieur du cycle principal.
- La diminution de la rigidité élastique apparente avec la quantité de martensite.

Phase R

La transformation en phase R induit une déformation réversible supplémentaire et non négligeable. Elle est mise en avant en évitant d'atteindre la limite de transformation de phase martensitique (figure 2.12).

Cette transformation est très dépendante de la température et caractérisée par un fort étalement en contrainte mais un faible hystérésis comparé à la transformation martensitique. Lorsque la température est suffisamment élevée pour que la transformation R soit réversible, elle s'apparente macroscopiquement à une déformation élastique supplémentaire, diminuant la rigidité apparente de la phase mère de 70000MPa à 50000MPa. Lorsque la température est trop faible on observe un effet de réorientation de la phase R sous la forme d'un plateau à 50MPa d'une longueur d'environ 0.7%.



(a) Observation de la phase R à différentes températures (b) Hystérésis et boucles internes en phase R à 22°C

FIG. 2.12 – Phase R

2.4.2 Caractérisation des fils mémoires

Les températures de transformation nous permettent cette fois de réaliser des essais mécaniques et thermiques.

Essais mécaniques

Les mêmes caractéristiques générales que pour les fils superélastiques sont retrouvées : localisation et très faible étalement de la transformation, pré-transformation en phase R, évolution du comportement à chaque cycle et apparition d'une déformation résiduelle. Cependant les propriétés se dégradent plus rapidement avec le nombre de cycles que pour le matériau superélastique (figures 2.13 et 2.14).

Essais thermiques

Une contrainte est appliquée à l'état austénitique puis maintenue. Le matériau subit un cycle thermique en deux étapes sous contrainte constante : une étape de refroidissement jusqu'à atteindre la saturation de la transformation suivie d'une étape de chauffage jusqu'à retrouver l'état austénitique. Le cycle a été effectué à différents niveaux de contraintes avec un échantillon différent pour chaque test (figure 2.15).

Les courbes de déformation de transformation créée lors du refroidissement, et de déformation réversible après chauffage ont été tracées en fonction de la contrainte appliquée (figure 2.16.a). La déformation de transformation augmente avec le niveau de contrainte et une déformation résiduelle apparaît pour des contraintes élevées $\sigma > 300$ MPa. À cette valeur de contrainte la déformation mémoire réversible est maximale. L'hypothèse d'une déformation de transformation constante est souvent admise dans les modèles phénoménologiques. Les résultats présents invalident l'hypothèse pour des chargements thermiques à $\sigma < 150$ MPa. Or si on ne s'intéresse qu'aux

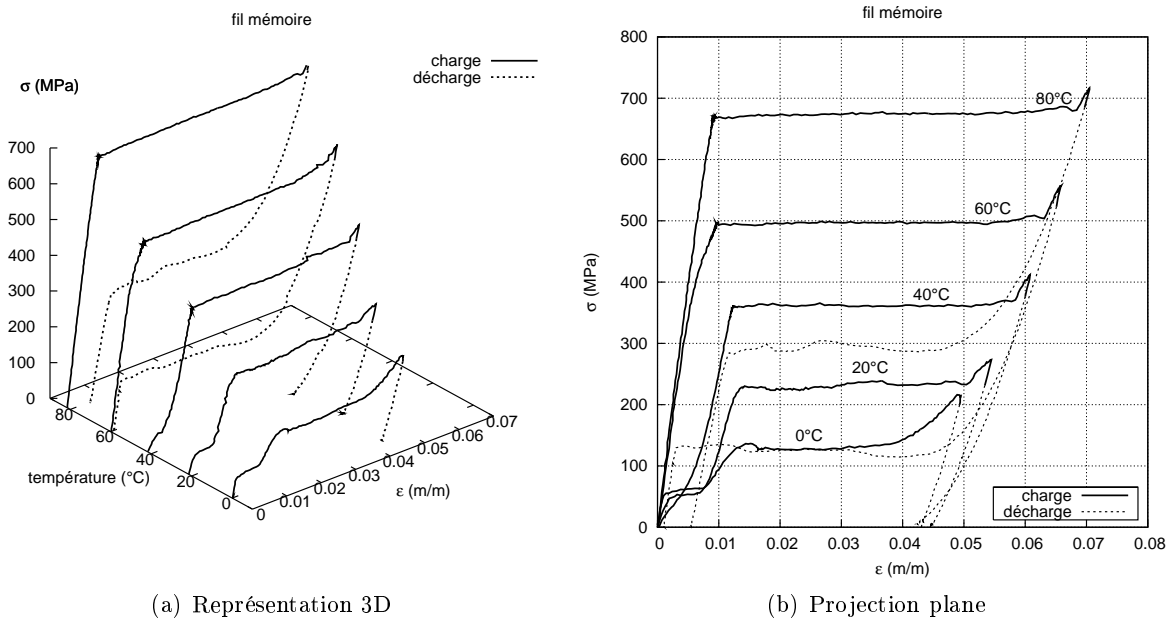


FIG. 2.13 – Chargement mécanique à différentes températures fil mémoire

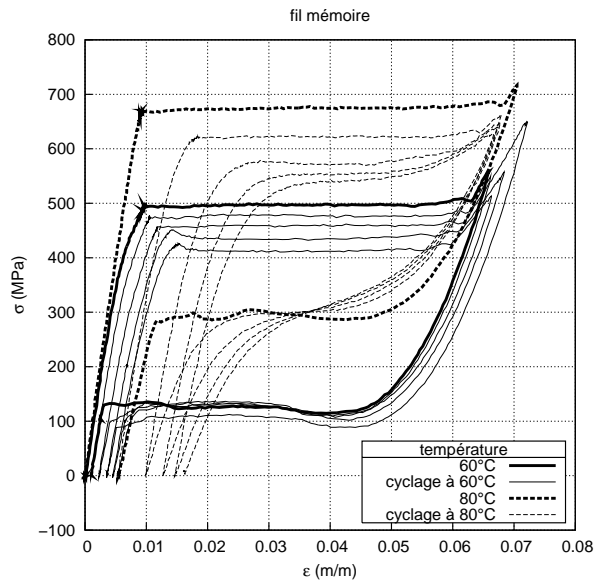


FIG. 2.14 – Cyclage mécanique

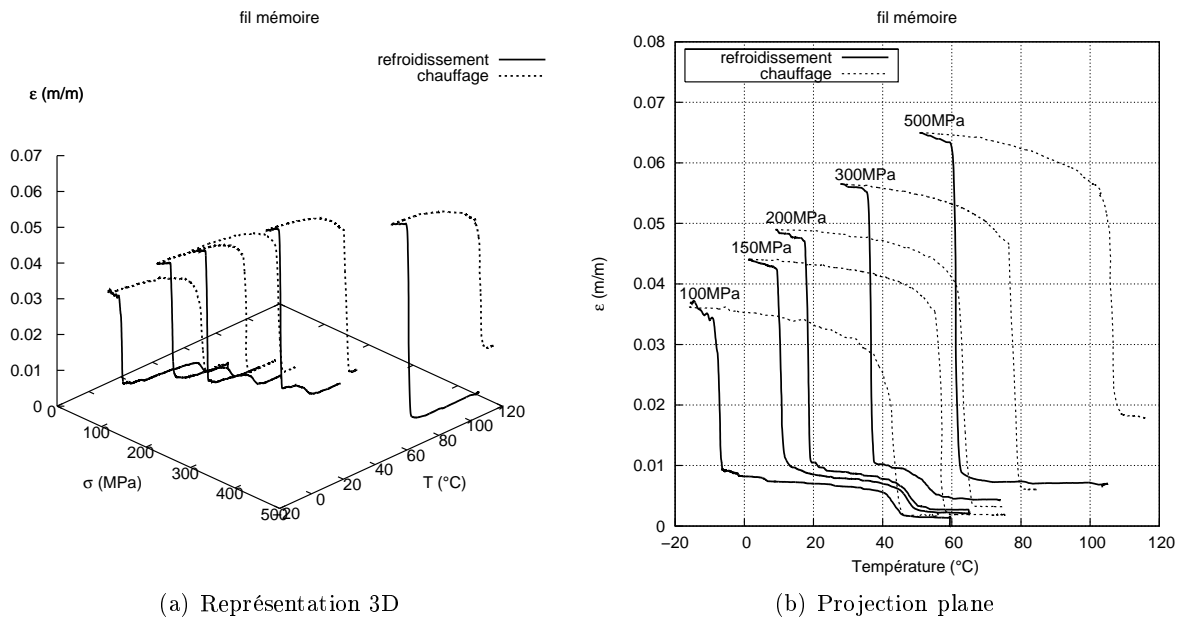


FIG. 2.15 – Chargement thermique à différentes contraintes, fil mémoire

chargements pour lesquels le comportement du matériau est réversible ($\sigma < 300 \text{ MPa}$) l'effet ne peut plus être négligé.

Diagramme de transformation

Le diagramme de transformation de première charge est construit en se basant sur les 2 types d'essais (figure 2.16.b). On constate que les limites thermiques et mécaniques se superposent, surtout aux contraintes élevées $\sigma > 150 \text{ MPa}$. Aux faibles contraintes, nous sommes aux limites de capacités de la machine de tests et il paraît difficile de conclure.

Les caractéristiques matériau suivantes ont été mesurées :

- Des limites de transformations directes et inverses linéaires de pente $8 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$.
- Un hystérésis mécanique de 400 MPa correspondant à un hystérésis thermique de 50°C .
- Des températures de transformation déduites par extrapolation des limites de transformation à : $M_s = -5^\circ\text{C}$ et $A_f = 45^\circ\text{C}$.

Effet mémoire de forme

La température de transformation inverse étant supérieure à l'ambiante, une géométrie martensitique donnée restera stable à température ambiante $T_{amb} = 20^\circ\text{C}$, ce matériau est donc bien adapté à la réalisation d'un cycle mémoire :

1. Matériau initialement austénitique à 20°C .
2. Transformation du matériau et déformation rémanente par chargement mécanique à 20°C .
3. Chauffage à $T > A_f$ en contraignant le retour mémoire à une rigidité imposée. Le retour libre est obtenu en imposant une rigidité nulle.
4. Décharge mécanique à température constante, retour à l'état austénitique.

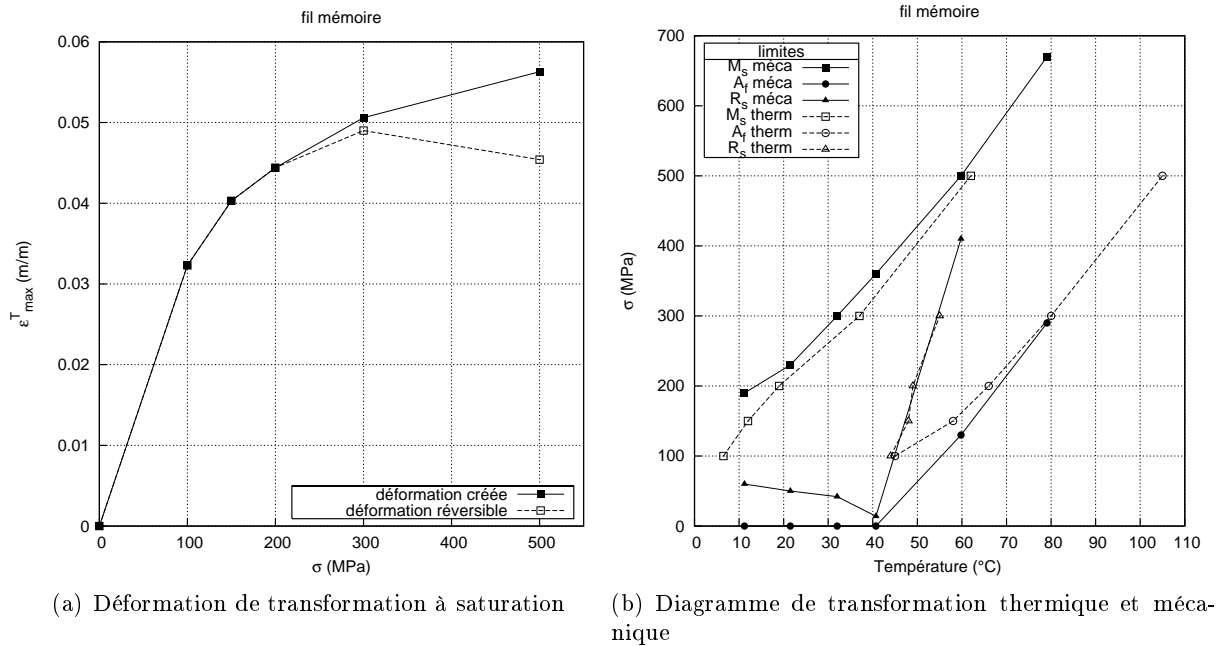


FIG. 2.16 – Déformation et limites de transformation, fil mémoire

5. Refroidissement à 20°C, matériau austénitique.

Le cycle mémoire est décrit dans l'espace (T, ε, σ) . Nous pouvons le représenter par les 3 plans de projection simultanés (σ, ε) , (σ, T) , (ε, T) (figure 2.17).

Les 4 retours contraints à différentes rigidités ont été réalisés avec le même échantillon. Cet échantillon avait déjà subi quelques tests de retour contraints préliminaires. La contrainte maximale générée par effet mémoire a été volontairement limitée à 300MPa, limite de réversibilité du mesurée lors des chargements thermiques. Grâce à cette limitation, le cycle mémoire est répétable et la déformation réversible est d'environ 4%.

On observe tout d'abord que la phase R a quasiment disparue : cela pourrait s'expliquer par une plastification locale du matériau et un piégeage de la phase R. En effet, la pente de dépendance thermique de la transformation en phase R est plus élevée que celle de la transformation martensitique. Donc à une température donnée, la contrainte générée par retour contraint de la phase R est plus élevée que celle générée par la martensite : la phase R va être piégée pour une température plus faible que la phase martensitique. Elle aurait plastifié au cours des tests préliminaires pour disparaître dans les essais présentés.

Les retours contraints ont été effectués à différentes rigidités. Pour de faibles rigidités la transformation de phase inverse est terminée avant d'atteindre la contrainte limite de 300MPa et on observe à une saturation de la contrainte générée. Par contre pour des rigidités plus élevées, la martensite n'a pas été totalement consommée à 300MPa. Mais puisque nous sommes à $T > A_f$ la transformation inverse peut être récupérée par décharge mécanique : le comportement lors de la décharge mécanique correspond à celui d'une décharge superélastique à la même température.

Enfin, le comportement dans le plan (σ, T) est remarquable au sens où indépendamment de la rigidité du système sur lequel agit l'AMF la contrainte générée est proportionnelle à la température. Le coefficient de proportionnalité semble être identique aux pentes des limites de

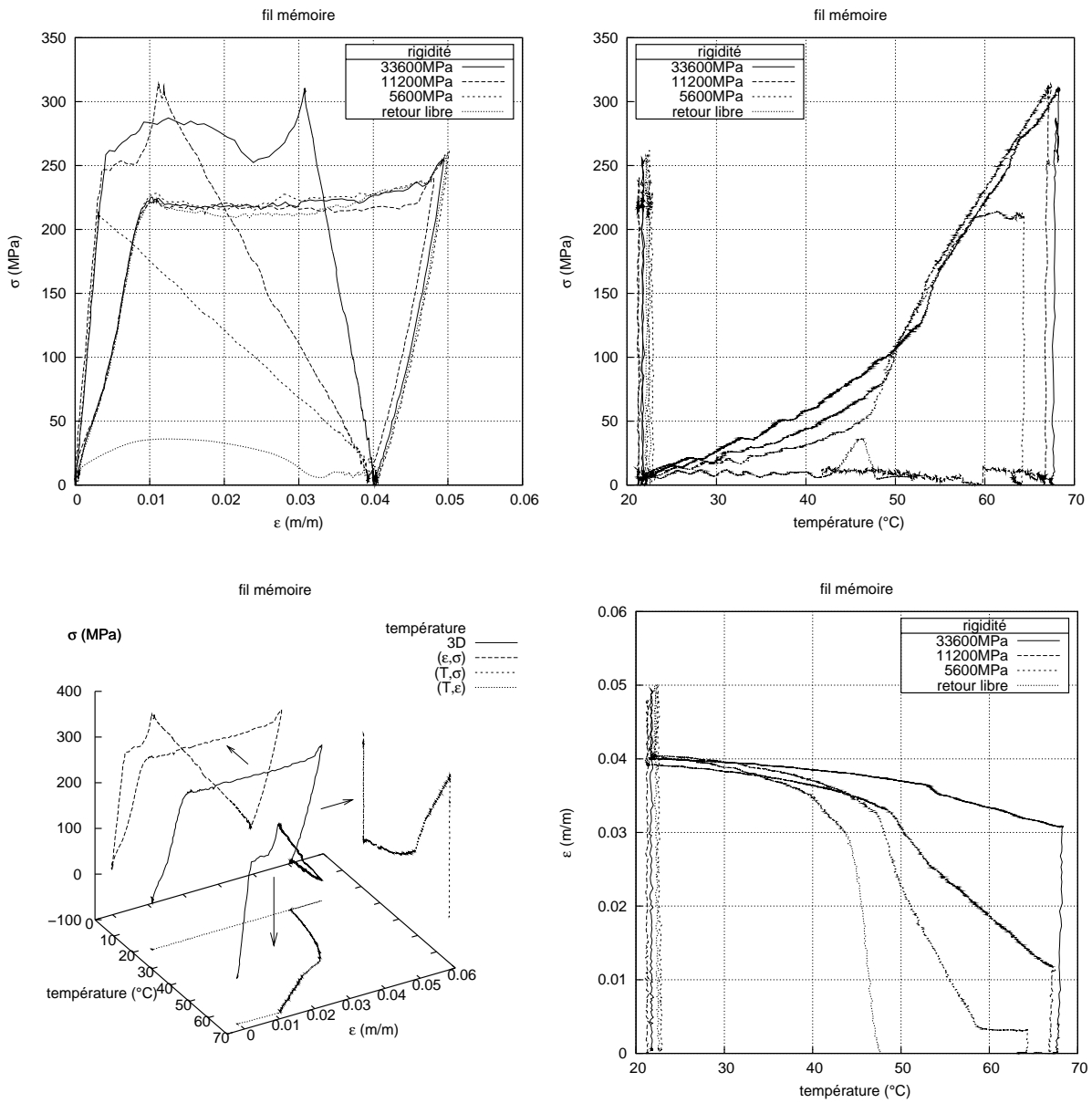


FIG. 2.17 – Effet mémoire de forme, retour à différentes rigidités, projection dans différents plans

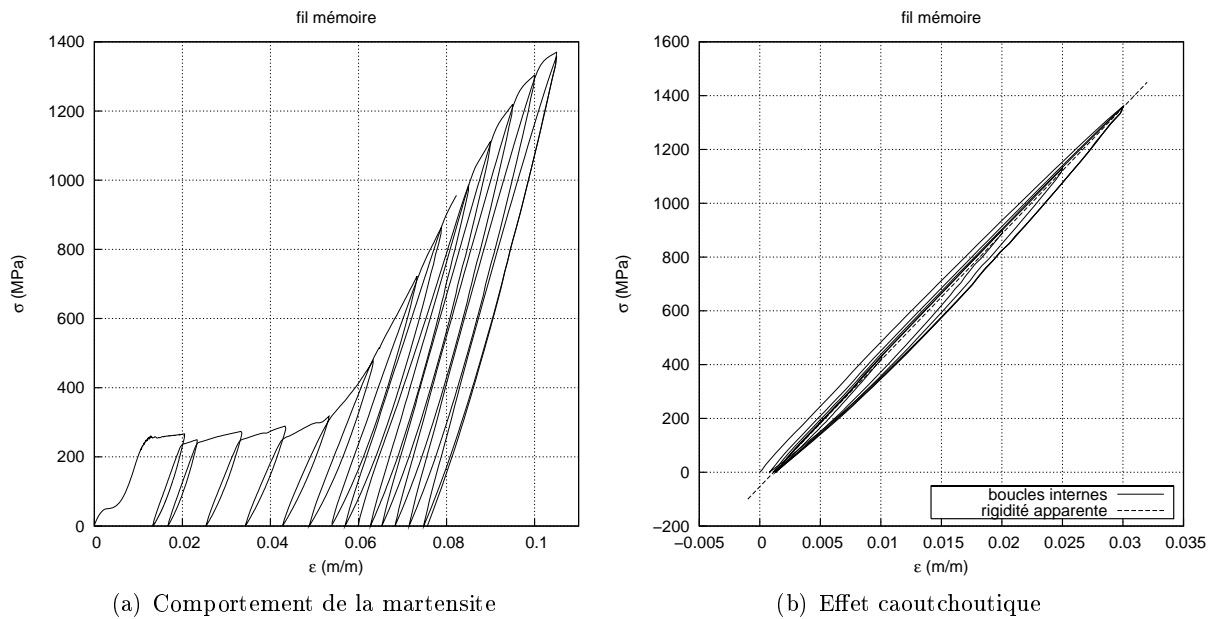


FIG. 2.18 – Comportement caoutchoutique fil mémoire à 20°C

transformation. Nous déduisons de ces tests qu'un actionneur fonctionnant par effet mémoire va permettre de contrôler facilement la force générée, par contre le déplacement ne sera pas contrôlé mais sera dépendant de la rigidité du système sur lequel l'effort est appliqué. Un actionneur à effet mémoire peut être comparé à un vérin hydraulique classique à simple effet, pour lequel l'effort généré est proportionnel à la pression du fluide injecté.

Comportement de la martensite

Le comportement de la phase martensitique a également été étudié (figure 2.18.a). Une succession de chargements mécaniques à 20°C ont été effectués à différentes déformations imposées.

Le comportement en décharge présente une non-linéarité non négligeable. À la charge suivante le comportement rejoint le point limite de réorientation en empruntant un trajet différent. Ce cycle est répétable et définit un hystérésis mécanique : c'est l'effet caoutchoutique (figure 2.18.b). La rigidité apparente du cycle est de 35000 MPa, plus faible que la rigidité élastique de l'austénite (70000 MPa). Cette rigidité apparente ne correspond pas à la rigidité élastique du cristal de martensite, mais est liée à une réversibilité partielle du phénomène de réorientation des variantes de martensite. Tant que la déformation n'est pas saturée l'effet est limité à la contrainte seuil de réorientation (environ 250 MPa). Mais si le matériau est déformé de manière à atteindre la déformation maximale de transformation alors la contrainte limite augmente jusqu'à 1400 MPa avec une déformation réversible de 3%.

2.4.3 Discussion

Localisation de la transformation

Lors des différents essais sur les éprouvettes fils, la martensite apparaît de manière localisée. Suite au chargement mécanique et thermique la transformation de phase n'a pas lieu de manière

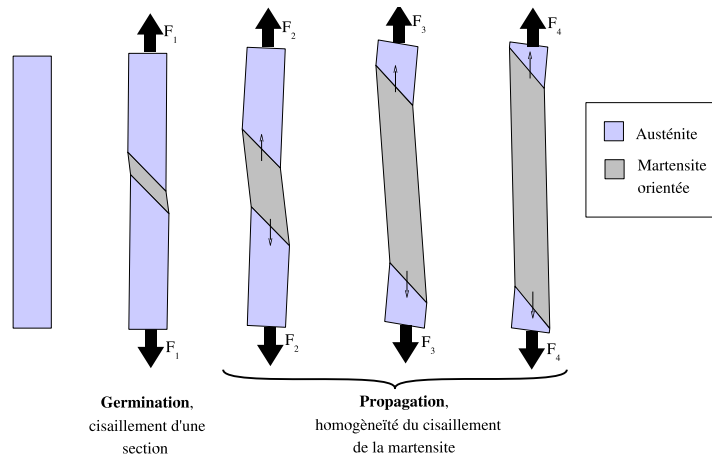


FIG. 2.19 – Localisation de la transformation

homogène dans tout le volume de l'éprouvette : localement une section du fil se cisaille en se transformant en martensite. Toute la déformation est accommodée par ce petit volume de martensite. Puis si on poursuit le chargement les deux frontières de ce volume se propagent et la déformation du fil augmente (figure 2.19).

La localisation est détectable de plusieurs façons : la transformation localisée est caractérisée par un plateau de rigidité quasiment nulle, si la transformation ne localise pas dans la zone de mesure de l'extensomètre celui-ci ne va plus indiquer d'évolution de la déformation alors que l'éprouvette est toujours sollicitée, un pic d'effort est observé au moment de la création d'une bande.

Le phénomène peut être comparé à l'apparition de bandes de Lüders en plasticité cristalline. Il dépend du matériau et notamment du taux d'écroutissage donné au matériau au moment de sa mise en forme, de la géométrie de l'éprouvette fil ou tube pour laquelle il est possible d'atteindre des taux d'écroutissage élevés et du type de sollicitation car le phénomène n'apparaît que en traction et parfois en torsion (tube). Ce phénomène permet d'expliquer l'absence d'effet "boucle interne" lors de transformations partielles : la martensite est caractérisée par une déformation de transformation constante et homogène sur toute la zone martensitique, ainsi la martensite créée au début, au cours de la propagation et à la fin de la transformation est toujours la même, le seul paramètre est la longueur de la zone transformée. Quelque soit l'instant où le changement de sens de chargement est effectué, l'état de la martensite et donc la contrainte limite de transformation sont les mêmes. C'est pourquoi à l'intérieur de l'hystérésis le comportement est "élastique" jusqu'à rejoindre les boucles de transformation principales (figure 2.11).

Propriétés des matériaux

Le comportement mécanique des deux matériaux montre une dépendance à la température légèrement différente et une taille d'hystérésis plus faible pour le matériau superélastique. De plus les propriétés se dégradent plus rapidement lors du cyclage mécanique du matériau mémoire. Ces différences peuvent s'expliquer par le traitement thermique différent reçu par les deux matériaux : l'un qui tend à maintenir la limite d'élasticité élevée pour le matériau superélastique et l'autre qui tend à augmenter la déformation de transformation.

Un test mécanique à 110°C sur le matériau mémoire retarde suffisamment la transformation

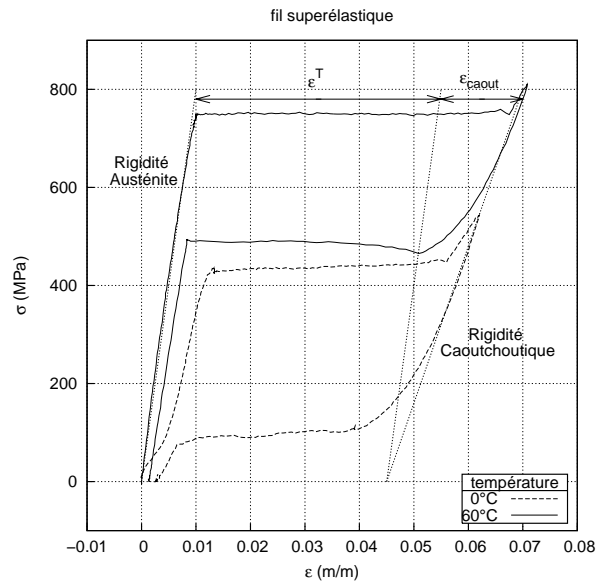


FIG. 2.20 – Déformation de transformation et déformation caoutchoutique

martensitique pour permettre de mesurer une limite de plasticité de l'austénite de 600MPa avant d'entrer en transformation. Cela ne permet pas d'expliquer la dégradation des propriétés lors du test à 60°C pour lequel le plateau de transformation se situe à 500MPa. De plus lors des cyclages en boucle interne à 20°C (figure 2.11) le comportement se dégrade plus vite lorsque la saturation de la transformation est atteinte. Nous en concluons que l'apparition d'une déformation résiduelle est principalement liée au blocage de variantes de martensites plutôt qu'à la plastification de la matrice austénitique.

Rigidité de la phase martensitique en superélasticité

Lors de chargements mécaniques, et en particulier pour le matériau superélastique, la déformation de transformation semble augmenter avec le niveau de contrainte. D'autre part, lors de charges-décharges partielles, la rigidité "élastique" à l'intérieur de l'hystérésis évolue d'une valeur de 70000MPa pour l'austénite à une valeur de 35000MPa en fin de transformation, devient de moins en moins linéaire et forme un hystérésis "en amande" comparable au comportement caoutchoutique de la phase martensitique. Nous en concluons que cette faible rigidité apparente la martensite induit pour de fort niveaux de contrainte une déformation "caoutchoutique" non négligeable qui vient s'ajouter à la déformation de transformation (environ 1.5% de déformation "caoutchoutique" à 800MPa) (figure 2.20).

2.4.4 Conclusion caractérisation des fils

Le comportement des éprouvettes fils mesuré dans cette étude est spécifique aux géométries fil et tube. En effet celles-ci permettent d'une part d'écraser fortement le matériau au moment de la mise en forme et donc d'augmenter sa limite d'élasticité, et d'autre part induit un effet de localisation de la transformation. Il est vrai que plusieurs applications exploitent un AMF sous forme de fil, néanmoins la possibilité de développer des éléments en AMF à géométrie plus complexe ouvre de nombreuses perspectives (biomécanique, microsystèmes). Il faut pour cela s'affranchir

de la spécificité fil en travaillant par exemple sur une géométrie d'éprouvette plane découpée dans une plaque. La géométrie fil la sollicitation à des chargements en traction et éventuellement en torsion. Or nous savons que le type de chargement influe sur le comportement du matériau, ainsi un montage anti-flambement a été développé pour pouvoir solliciter les éprouvettes planes traction mais également en compression.

2.5 Caractérisation des éprouvettes planes

La démarche de l'étude des éprouvettes planes est similaire à celle employée pour les fils.

Les éprouvettes planes ont été découpées par électro-érosion dans une plaque de 2mm d'épaisseur : section utile $2 \times 5 \text{mm}^2$, longueur entre mors 50mm. Deux types de matériaux sont testés : superélastique ($A_f < 20^\circ\text{C}$) et mémoire ($A_f > 20^\circ\text{C}$). Pour chaque matériau différents types d'essais ont été réalisés :

- Essais mécaniques à température constante : cycle de chargement en traction suivi d'un chargement en compression, vitesse de chargement mécanique $v = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$, influence de la température, réponse en charges-décharges partielles.
- Essais thermiques à contrainte constante : influence du niveau de contrainte, évolution de la déformation maximale de transformation avec la contrainte.
- Cycle mémoire de forme (pour les éprouvettes mémoires) pour différentes conditions de chargement.

À partir de ces données seront reconstruits les diagrammes de transformation de première charge pour chaque matériau.

2.5.1 Éprouvettes superélastiques

Un essai de calorimétrie montre la présence d'une pré-transformation en phase-R ($M_f = -65^\circ\text{C}$, $M_s = -40^\circ\text{C}$, $R_f = -5^\circ\text{C}$, $R_s = 15^\circ\text{C}$, $A_s = 10^\circ\text{C}$, $A_f = 30^\circ\text{C}$). Étonnamment les températures de transformation martensitique sont très froides, l'hystérésis thermique semble énorme et le matériau risque de plastifier avant transformation. Les essais montreront que ce n'est pas le cas. On remarque également que le matériau n'est pas exactement superélastique à 20°C .

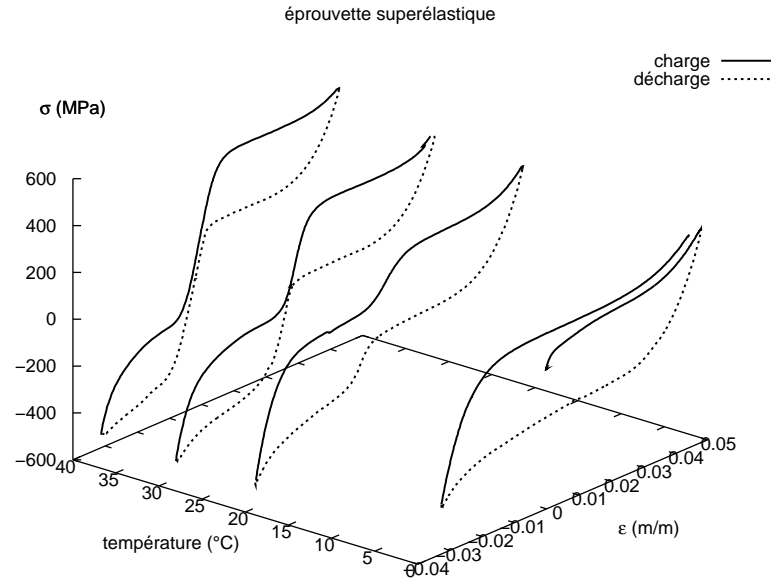
Les limites thermiques de la machine d'essais ne nous permettent pas d'atteindre la fin de transformation à faible contrainte (il faut au moins $|\sigma| > 100 \text{MPa}$). De plus le montage de compression limite la contrainte maximale de compression à une valeur de -500MPa .

Essais mécaniques

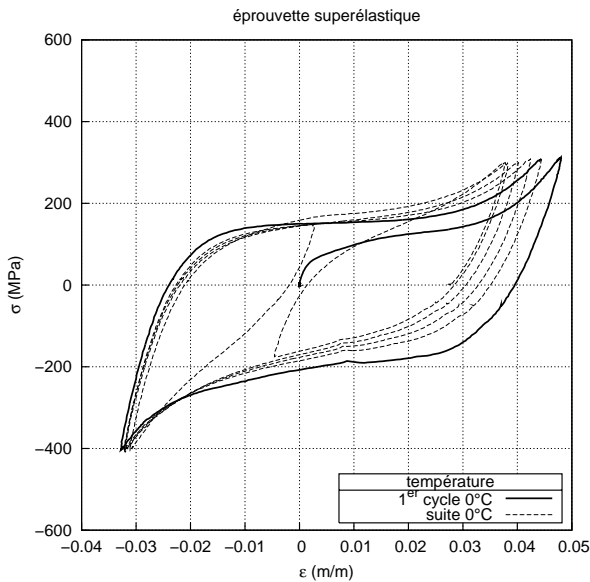
Les essais mécaniques ont été réalisés à différentes températures avec une éprouvette vierge pour chaque température. Partant d'un état initial austénitique, le matériau est d'abord amené à température de test, puis un cycle mécanique de traction-compression est appliqué (figure 2.21.a).

La contrainte appliquée en traction et en compression est toujours limitée de manière à ne pas "forcer" la saturation de transformation. De cette manière le comportement se dégrade beaucoup moins à chaque cycle et il est possible d'effectuer des chargements partiels (figure 2.21.c).

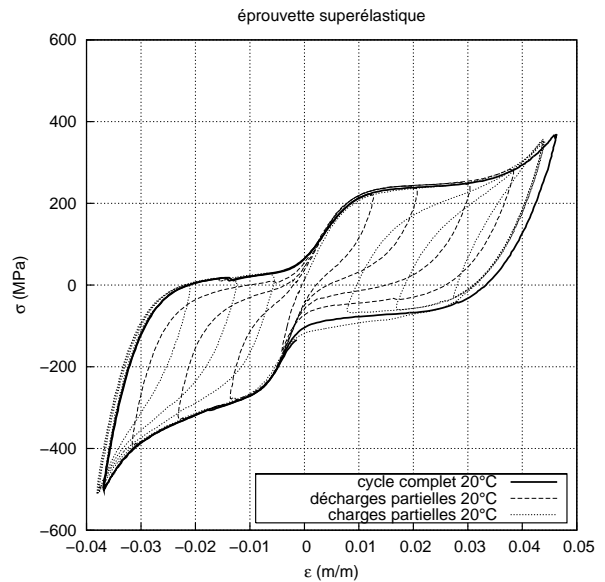
Après la première charge à 0°C le matériau reste à l'état martensitique, le comportement observé est un comportement de réorientation de la martensite. À chaque cycle la pente "d'écrouissage" de réorientation augmente et la déformation de réorientation diminue. Le cycle global ne stabilise pas et il est difficile de définir les boucles internes de réorientation (figure 2.21.b).



(a) Chargement mécanique à 0°C, 20°C, 30°C et 40°C



(b) Comportement de la martensite à 0°C



(c) Boucles internes à 20°C

FIG. 2.21 – Chargements mécaniques éprouvette superélastique

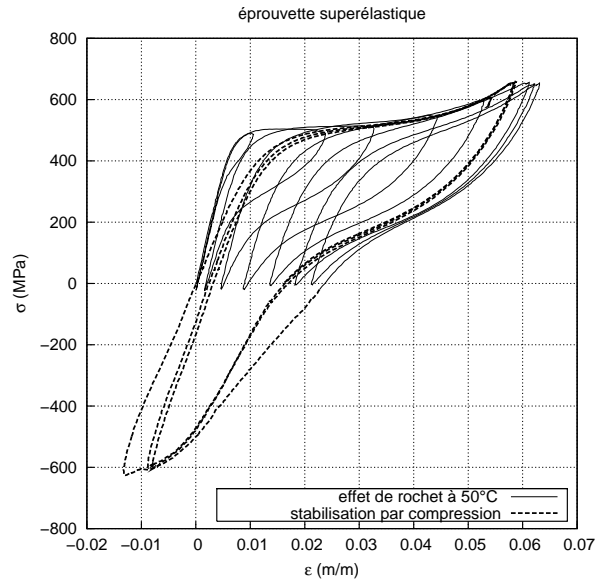


FIG. 2.22 – Effet de rochet, éprouvette superélastique à 50°C

À 20°C la déformation de transformation n'est pas réversible après décharge à contrainte nulle. Néanmoins, la transformation inverse $M \rightarrow A$ peut être forcée en appliquant un effort de signe opposé. De cette manière la transformation inverse est complétée avant qu'une nouvelle transformation directe ne soit initiée.

Tests à 30°C et 40°C : c'est la plage de température d'utilisation de l'AMF en chargement superélastique. Si le chargement ne force pas le matériau à saturation de transformation alors le matériau a une bonne tenue au cours des cycles. Une dissymétrie des déformations de transformations et des contraintes critiques de transformation entre le chargement de traction et celui de compression est nettement observée.

À 50°C la transformation n'est plus réversible, la limite d'élasticité est atteinte qui se traduit par un effet de rochet (figure 2.22) : à chaque cycle la déformation résiduelle vient augmenter, le comportement ne tend pas vers une boucle stabilisée. Parallèlement à l'augmentation de la déformation résiduelle il y a diminution du seuil de contrainte de transformation, augmentation de la rigidité de transformation et réduction de la déformation réversible. L'effet de rochet apparaît suite à une série de chargements de traction pure, mais il est possible de stabiliser le comportement en faisant un cycle complet traction-compression. Cela a également pour effet de "débloquer" une partie de la déformation de rochet et de retrouver la contrainte critique et la rigidité de transformation initiale.

Essais thermiques

Des essais thermiques à contrainte constante sont réalisés (figure 2.23). La diminution du niveau de contrainte appliquée a pour effet de décaler les températures vers le froid. Les limites thermiques de la machine nous empêchent de tester des contraintes faibles ($\sigma < 100\text{MPa}$). Les réponses aux chargements thermique sont caractérisées par :

- L'apparition d'une pré-transformation phase-R pour les faibles niveaux de contrainte.
- L'évolution de la rigidité de transformation avec le niveau de contrainte et avec le signe de

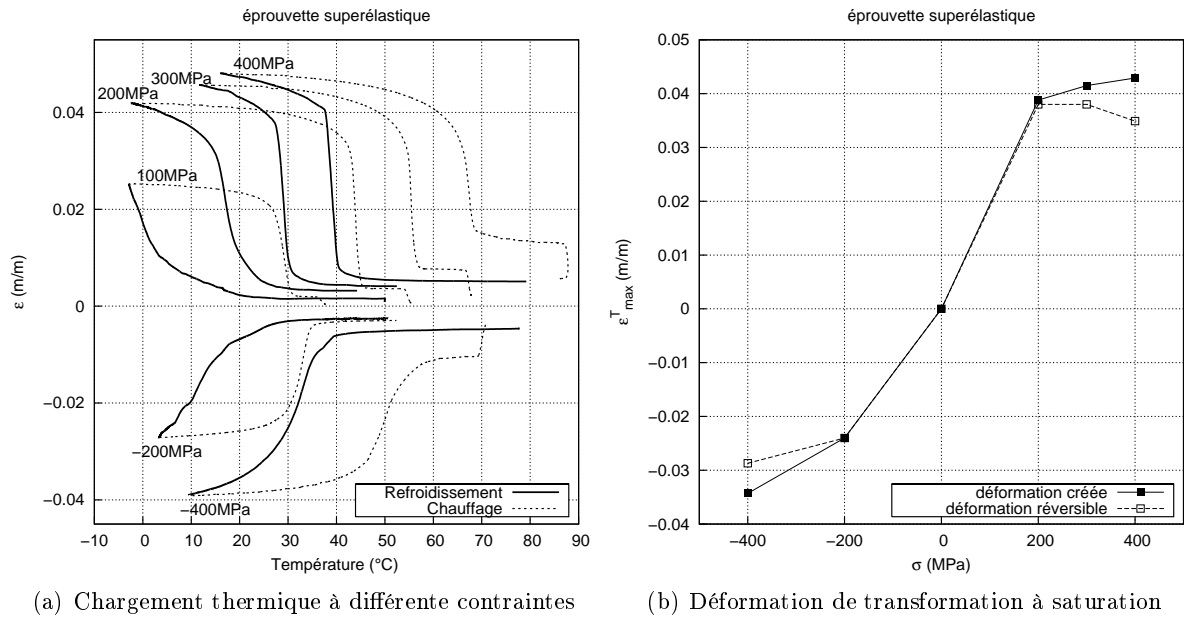


FIG. 2.23 – Chargements thermiques éprouvette superélastique

- la contrainte, et en particulier un étalement de la transformation aux faibles contraintes.
- L'évolution de la déformation de transformation maximale avec le niveau de contrainte. Cette déformation de transformation est dissymétrique entre la traction et la compression.

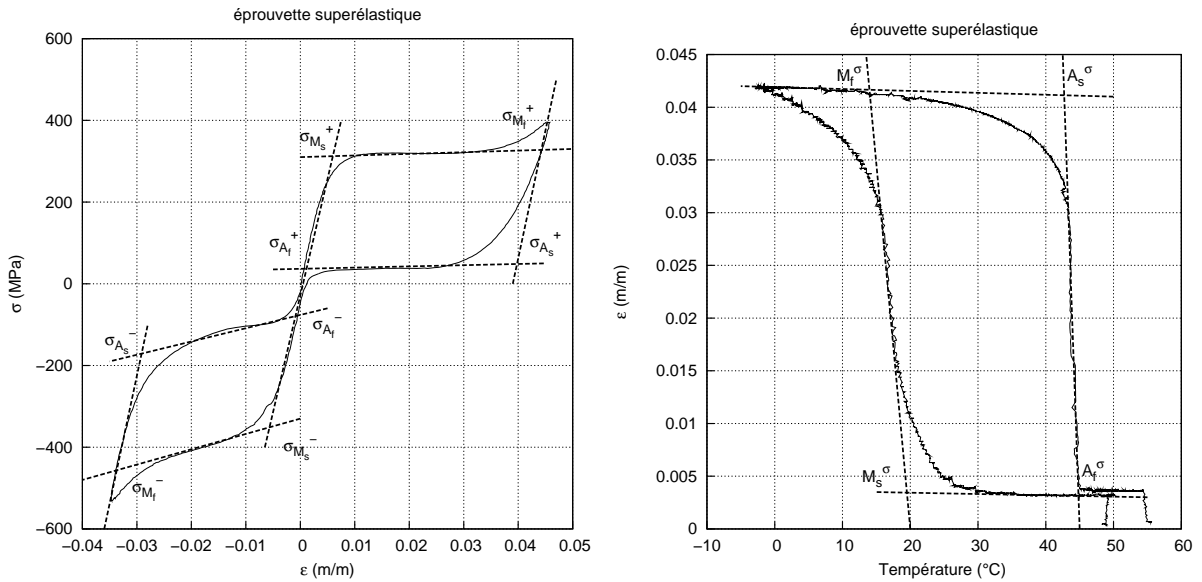
Diagramme de transformation

Les diagrammes de transformation thermiques et mécaniques sont construits à partir de chaque type d'essais, les limites de transformation de la phase R ne sont pas reconstituées à cause du faible nombre de données (figure 2.24). Pour ce matériau, la transformation est étalée sur un intervalle de contrainte ou de température, nous pouvons donc distinguer les températures de début et de fin de transformation. Les limites de début de transformation M_s et de fin de transformation inverse A_f sont bien définies. En revanche, les limites M_f et A_s sont plus difficiles à déterminer car les transitions transformation / élasticité de la martensite sont beaucoup moins marquées que les transitions élasticité de l'austénite / transformation. Les températures de transformation mesurées par calorimétrie sont également indiquées.

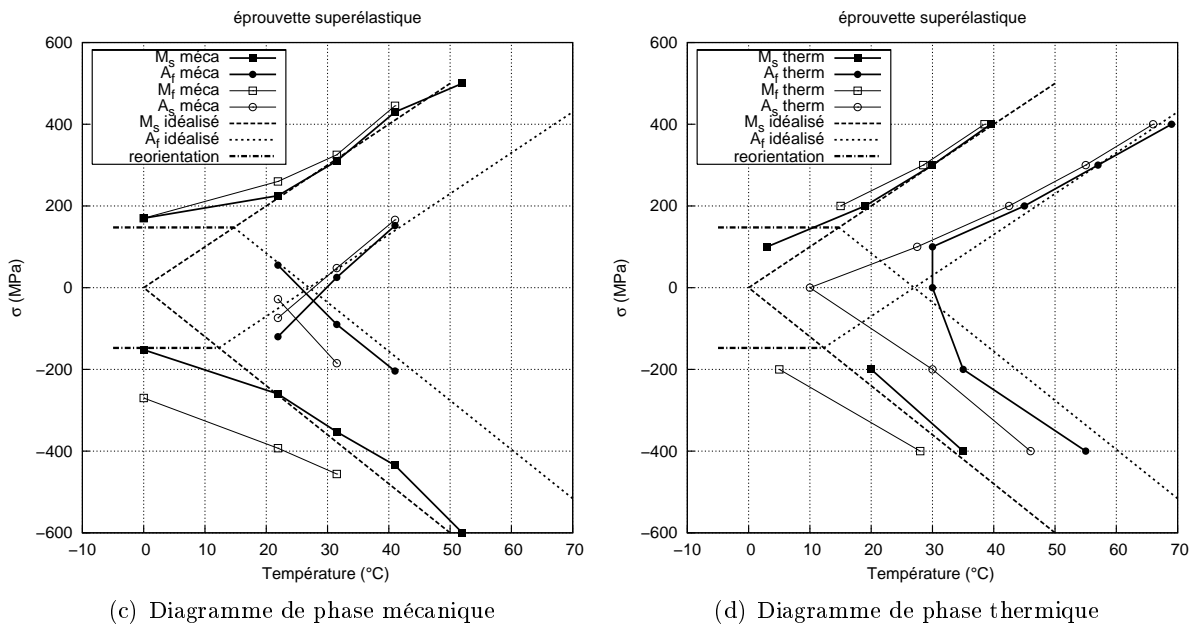
Pour pouvoir comparer les deux diagrammes, des limites de transformation idéalisées sont tracées en faisant les hypothèses suivantes : des pentes des limites de transformation directes et inverses identiques, une dissymétrie entre les pentes de limites de transformation en traction et en compression, et une contrainte limite de réorientation constante et symétrique. Les limites sont déterminées de manière à ajuster au mieux les deux diagrammes de transformation.

On constate :

- Une bonne corrélation des limites mécaniques et thermiques pour $|\sigma| > 200\text{MPa}$ (contrainte limite de réorientation).
- Aux faibles niveaux de contrainte $|\sigma| < 200\text{MPa}$ les limites thermiques et mécaniques ne correspondent plus. En particulier, lors d'essais thermiques, la transformation a tendance à s'étaler lorsque la contrainte diminue.



(a) Construction des limites de transformation méca- (b) Construction des limites de transformation thermiques



(c) Diagramme de phase mécanique

(d) Diagramme de phase thermique

FIG. 2.24 – Diagramme de Phase éprouvette superélastique

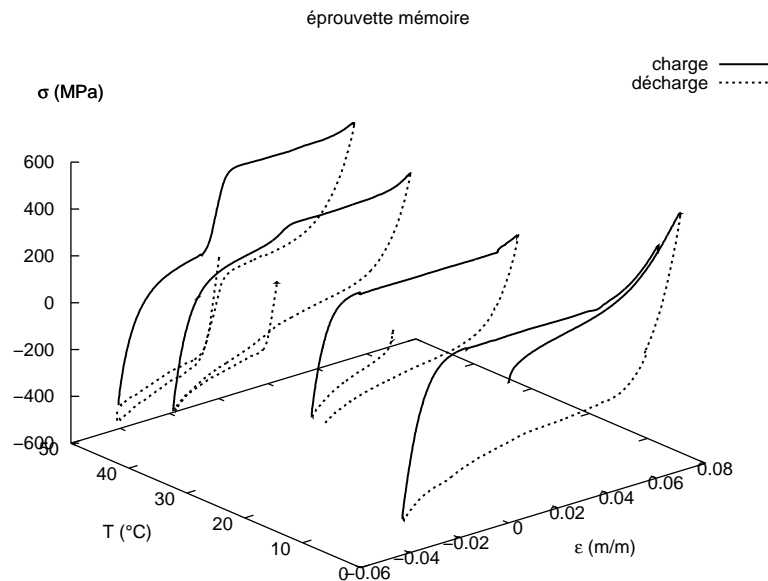


FIG. 2.25 – Chargements mécaniques éprouvette mémoire

- L'étalement de la transformation de phase mesuré par calorimétrie est beaucoup plus large que l'étalement de la déformation de transformation.
- Des limites de transformation linéaires et une dépendance thermique différente en traction ($10\text{MPa}/^\circ\text{C}$) et en compression ($-13\text{MPa}/^\circ\text{C}$)
- La température $M_s = 0^\circ\text{C}$ déterminée par extrapolation des limites de transformation directe ne correspond pas du tout à la température mesurée par calorimétrie ($M_s = -40^\circ\text{C}$). Pour la transformation inverse l'effet est moins marqué $A_f \approx 30^\circ\text{C}$.
- La limite de transformation inverse mécanique définie dans le cas d'une transformation de phase en traction peut être prolongée dans le plan de compression et réciproquement.

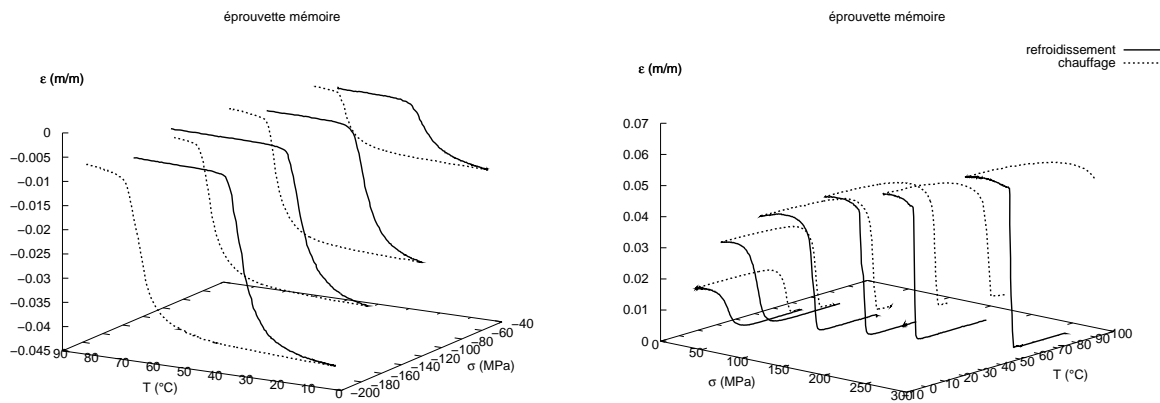
2.5.2 Éprouvettes mémoires

Les températures de transformation ont été mesurées à l'aide d'un essai de calorimétrie : $M_f = -5^\circ\text{C}$, $M_s = 20^\circ\text{C}$, $A_s = 30^\circ\text{C}$, $A_f = 50^\circ\text{C}$. Le matériau mémoire présente un étalement des températures plus marqué que le matériau superélastique. Les températures de transformation sont décalées vers le chaud ce qui a autorisé la réalisation des essais thermiques à contrainte faible.

Essais mécaniques

Des essais cycliques de traction/compression ont été réalisés à différentes températures avec une éprouvette vierge à chaque essai (figure 2.25).

Un comportement de réorientation est observé pour les essais à 0°C et 20°C . Les courbes de première charge en traction et en compression ont été mesurées sur deux essais à 0°C . Le comportement ne se stabilise pas avec le cyclage.



(a) Chargements thermiques à contrainte de compression (b) Chargements thermiques à contrainte de traction

FIG. 2.26 – Chargements thermiques éprouvette mémoire

40°C est la température limite de transformation de phase du matériau : la réponse à la première charge ressemble à un comportement en transformation (contrainte critique élevée suivie d'un comportement à faible rigidité). Néanmoins, le comportement global d'un cycle complet traction/compression ressemble plutôt au comportement de réorientation, en particulier le comportement ne se stabilise pas avec le cyclage. Ce test est à la frontière transformation / réorientation.

À 50°C la transformation de phase est nettement observée. Le comportement est presque stable avec le cyclage. La température n'est pas assez élevée pour que la transformation inverse soit complétée à contrainte nulle et il est nécessaire de forcer la transformation inverse pour retrouver toute la déformation de transformation.

Pour des températures supérieures il y a plastification du matériau au cours du chargement mécanique et apparition d'une déformation irréversible.

Essais thermiques

La réponse à un chargement thermique à contrainte constante est mesurée pour différents niveaux de contrainte de traction et de compression (figure 2.26).

On observe une diminution de la déformation de transformation à saturation avec la réduction de la contrainte appliquée. À partir de ces essais est construite la courbe d'évolution de la déformation de transformation à saturation en fonction de la contrainte appliquée (figure 2.27). Pour de faibles niveaux de contrainte, la déformation de transformation évolue proportionnellement à la contrainte. Au delà d'une valeur limite, la déformation de transformation sature à une valeur maximale. Cette valeur maximale est dissymétrique entre la traction et la compression (−3.5%/5%).

Diagramme de transformation

Les diagrammes de transformation mécaniques et thermiques sont construits à partir des différents essais (figure 2.28). Les températures mesurées par calorimétrie sont également placées sur le diagramme de transformation thermique.

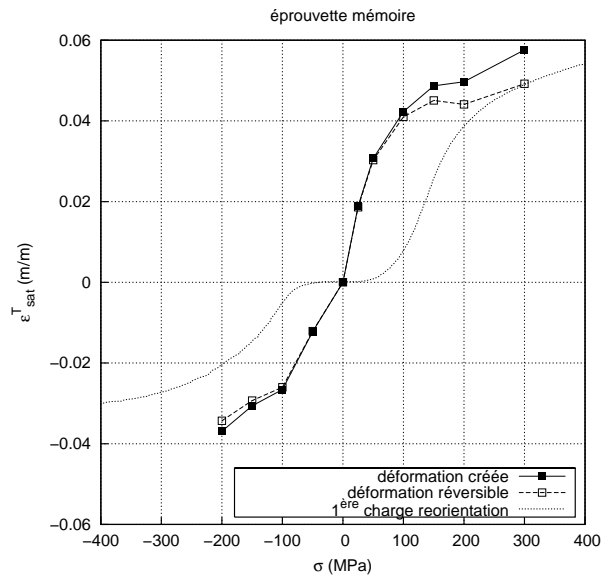
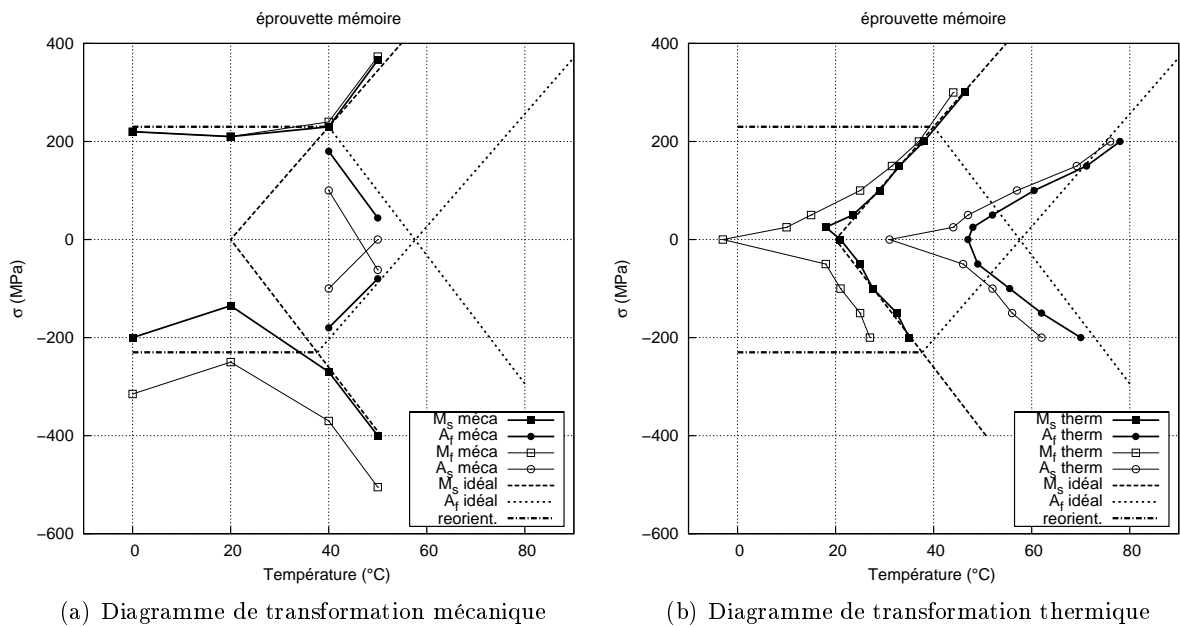


FIG. 2.27 – Déformation de transformation à saturation



(a) Diagramme de transformation mécanique

(b) Diagramme de transformation thermique

FIG. 2.28 – Diagramme de transformation éprouvettes mémoires, limites mécaniques et thermiques

- On observe une bonne corrélation et une linéarité des limites thermiques et mécaniques de transformation directe $A \rightarrow M$. Les limites de début de transformation M_s convergent bien vers la température déterminée par calorimétrie $M_s = 20^\circ C$. Par contre l'étalement de la transformation obtenu par calorimétrie est beaucoup plus large que celui de la déformation.
- La corrélation des limites de transformation inverse $M \rightarrow A$ en chargement mécanique et thermique est beaucoup moins bonne. Si les limites thermiques convergent vers les limites de transformation mesurées par calorimétrie, ce n'est pas le cas des limites mécaniques. Il semble néanmoins possible de définir des limites de transformation inverse, parallèles aux limites directes mais coupant l'axe des abscisses en $A_f = 57^\circ C$.
- À faible niveau de contrainte les limites thermiques sont non linéaires, l'hystérésis thermique a tendance à se réduire et la transformation a tendance à s'étaler.
- Les pentes des limites de transformation sont différentes en traction ($11.5MPa/^\circ C$) et en compression ($-13MPa/^\circ C$).
- La limite de réorientation est symétrique.

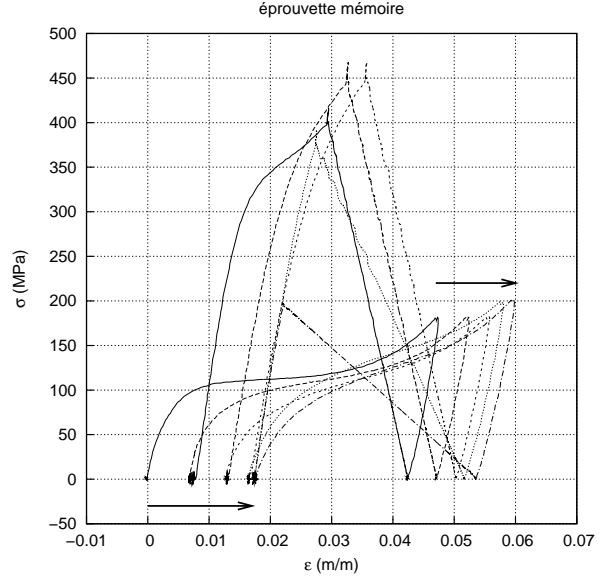
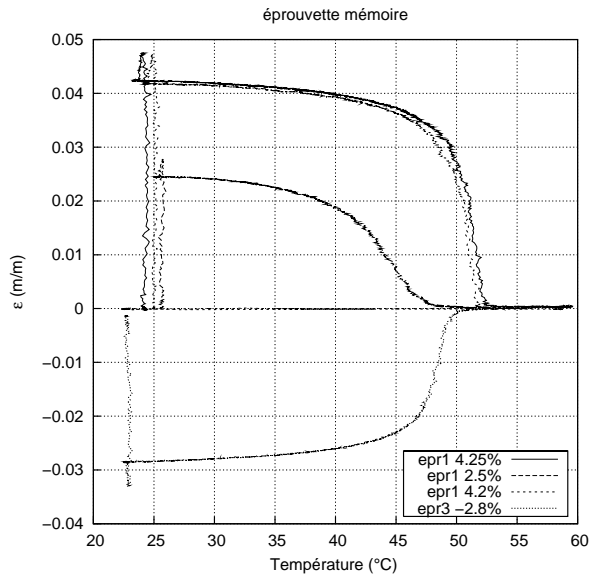
Essais d'effet mémoire

Des essais ont été effectués en retour libre et retour contraint avec rigidité asservie. La nécessité de stabiliser le comportement du matériau lors des retours contraints nous ont conduit à ne tester que deux éprouvettes en traction et une éprouvette en compression. Le cycle mémoire est identique à celui des fils mémoire : conditionnement à $20^\circ C$, retour libre / contraint, décharge mécanique à température maximale, retour à $20^\circ C$ sous contrainte nulle.

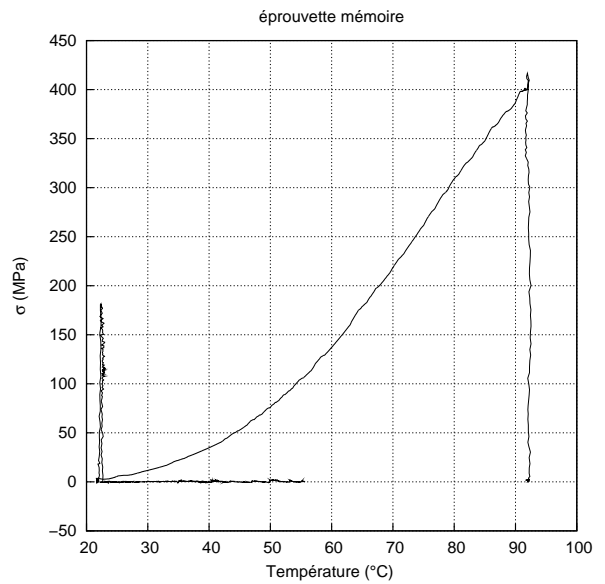
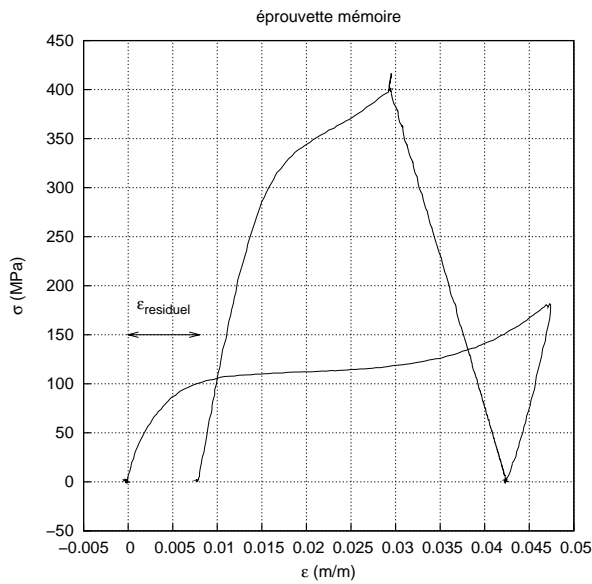
Retour libre sur éprouvettes vierges. L'éprouvette est maintenue à chaque extrémité dans les mors de la machine d'essai, mais la position des mors est asservie de manière à maintenir une contrainte nulle ($\pm 10MPa$) dans l'éprouvette (figure 2.29). La déformation de conditionnement est totalement réversible et le cycle de retour libre est répétable sur plusieurs cycles. On remarque que la température limite de transformation diminue avec la déformation de conditionnement et que la transformation s'étale sur une gamme de températures plus grande.

Retour contraint, l'éprouvette est maintenue entre les mors de la machine mais cette fois une partie la déformation mémoire est retenue ce qui induit la génération d'une contrainte dans l'éprouvette (figure 2.29). On observe alors dans le plan (σ, T) que la contrainte reste négligeable tant que $T < A_f$ puis augmente proportionnellement à la température pour $T > A_f$. Le chauffage est arrêté de manière à ne pas dépasser une contrainte limite de plastification du matériau de $450MPa$. À cette température, une décharge mécanique est effectuée de manière à retrouver l'état austénitique. On observe un comportement semblable à celui d'une boucle de décharge superélastique mais une déformation résiduelle apparaît. La répétition du cycle mémoire contraint génère un effet de "rochet" (figure 2.29) : à chaque cycle une déformation résiduelle s'accumule, mais est en partie compensée par une augmentation de la déformation maximale du matériau. Après plusieurs cycles le comportement se stabilise.

Une fois le comportement stabilisé, des cycles mémoire contraint à différentes rigidités sont réalisés (figure 2.30). Le comportement dans le plan (σ, T) reste semblable indépendamment de la rigidité : à partir d'une température critique il y a génération d'une contrainte proportionnelle à la température. Par contre, dans le plan (ε, T) la déformation mémoire s'étale sur un intervalle de température d'autant plus large que la rigidité est élevée. Finalement, lorsque la déformation



(a) Retour mémoire libre pour différents conditionnements (b) Effet de rochet après plusieurs cycles de retour contraint



(c) Premier retour contraint, Plan (contrainte : déformation) (d) Premier retour contraint, Plan (contrainte : température)

FIG. 2.29 – retour libre, retour contraint, effet de “rochet”

de transformation est totalement recouverte il ne reste plus de martensite dans le matériau et la contrainte générée par effet mémoire sature à une valeur maximale.

Pour observer les boucles internes en effet mémoire, le cycle mémoire est modifié : l'étape de décharge mécanique à haute température est remplacée par un refroidissement à rigidité asservie. On observe ainsi l'effet de (dé)charges partielles en effet mémoire (figure 2.31). Les réponses au chauffage et au refroidissement ne sont pas superposables et décrivent un hystérésis. La pente de dépendance thermique est identique au chauffage et au refroidissement. À une faible rigidité de 15000MPa le comportement de boucle interne à l'intérieur de l'hystérésis n'est pas très marqué : la contrainte reste quasiment indépendante de la température. À rigidité plus importante l'effet boucle interne est plus marqué : le plateau de contrainte a disparu mais le comportement tend ensuite à rejoindre la courbe de refroidissement. En effet, si la contrainte générée au cours du chauffage est indépendante de la rigidité, il n'en est pas de même pour la déformation : pour la même valeur de contrainte, la variation de la déformation du matériau est d'autant plus faible que la rigidité élevée, et il en va de même pour la fraction de martensite.

Retour libre après plusieurs cycles de retour contraint : les courbes ont été décalées de la valeur de déformation résiduelle pour pouvoir être comparées à la courbe de retour libre initiale (figure 2.31). Les températures de transformation ont été modifiées par le cyclage.

Cycle retour contraint avec rattrapage de jeu : le matériau est conditionné à -3% , puis il subit un retour libre jusque -1.5% suivi d'un retour contraint à rigidité fixée (figure 2.32). Le cycle est comparé à un autre cycle : conditionnement à -1.5% puis retour contraint immédiat.

2.5.3 Discussion éprouvettes planes

Comparaison avec les fils

Tout d'abord comparons les résultats sur les éprouvettes planes avec ceux des fils : pas de localisation, déformation réversible plus faible, étalement de la transformation, comportement en cours de transformation non linéaire avec en particulier un arrondi de saturation non négligeable, plage de contrainte et température d'utilisation plus faible.

Toutes ces différences ont principalement une seule origine : une limite d'élasticité plus importante dans les fils que dans les éprouvettes. Cela est dû à la possibilité d'écrouir plus fortement le matériau de géométrie au moment de sa mise en forme. Or, de manière générale une structure complexe en AMF aura des propriétés thermomécaniques plus proches de celles des éprouvettes planes que de celles des fils.

Remarquons tout de même qu'on observe un effet de localisation au cours du premier cycle de réorientation des éprouvettes planes et donc que le matériau est tout de même fortement écroui.

Calorimétrie

Les températures mesurées par calorimétrie sur les éprouvettes mémoire correspondent bien à celles reconstituées par l'ensemble des chargements thermiques et mécaniques. Mais il en va autrement pour les éprouvettes superélastiques. En effet la calorimétrie indique un hystérésis de la transformation martensitique de l'ordre de $70^{\circ}C$ alors que les essais montrent un hystérésis d'environ $30^{\circ}C$. Si la température A_f mesurée par calorimétrie est correcte, ce sont les températures de transformation directe qui sont décalées. Ce résultat est confirmé dans la littérature pour

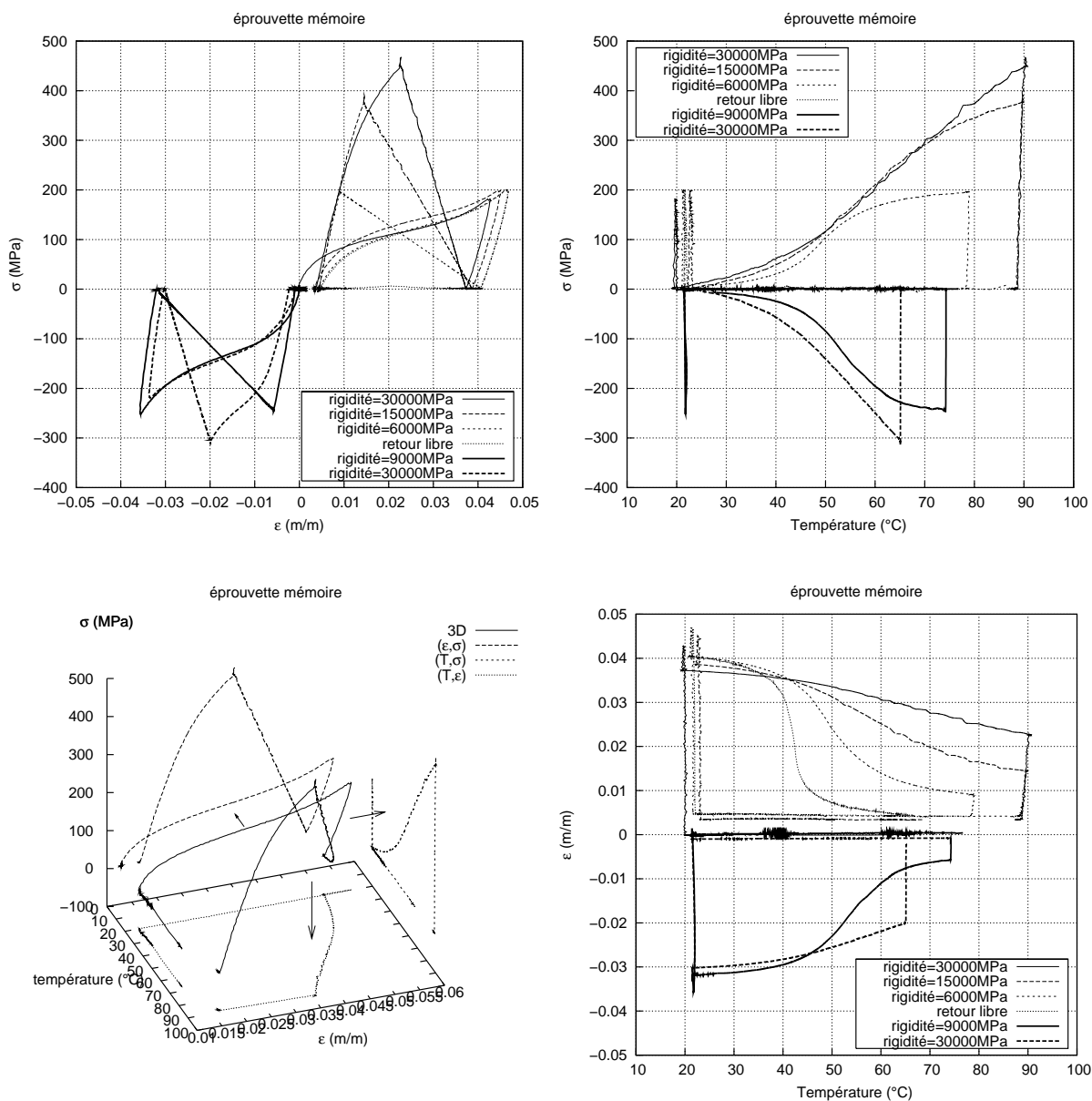


FIG. 2.30 – retour contraint à différentes rigidités, éprouvette mémoire, projection dans différents plans

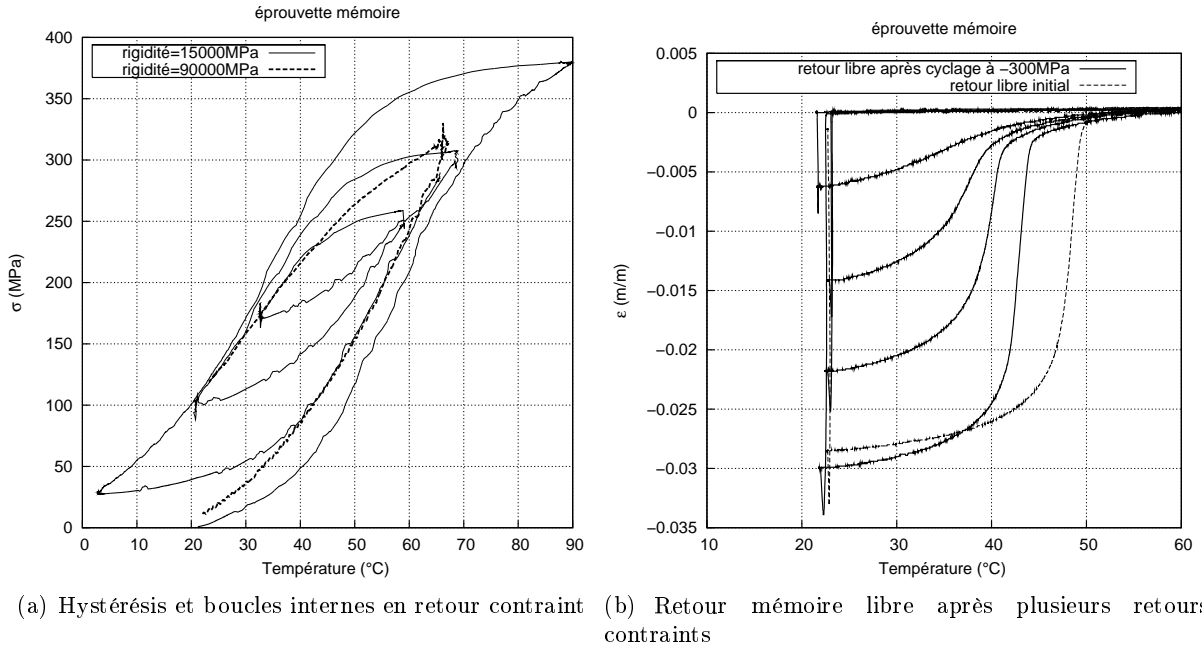


FIG. 2.31 – Boucles internes, retour libre après cyclage contraint

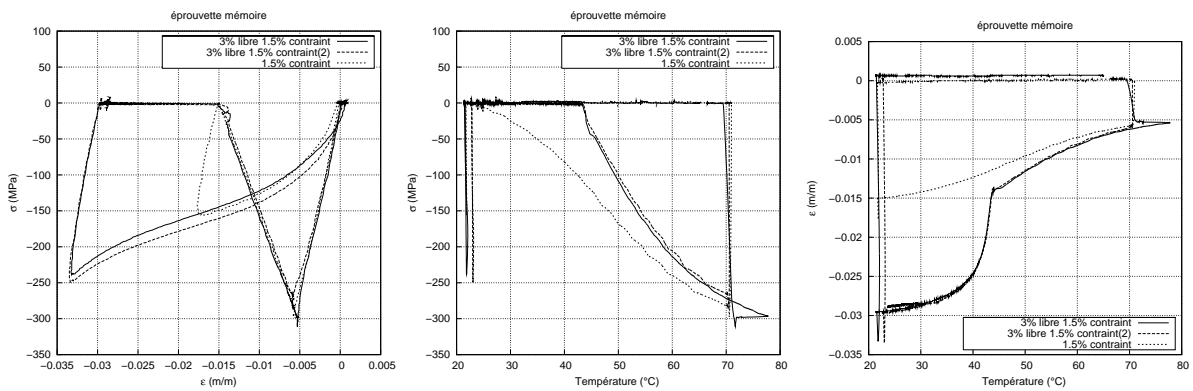


FIG. 2.32 – Retour mémoire contraint avec jeu initial, projection dans différents plans

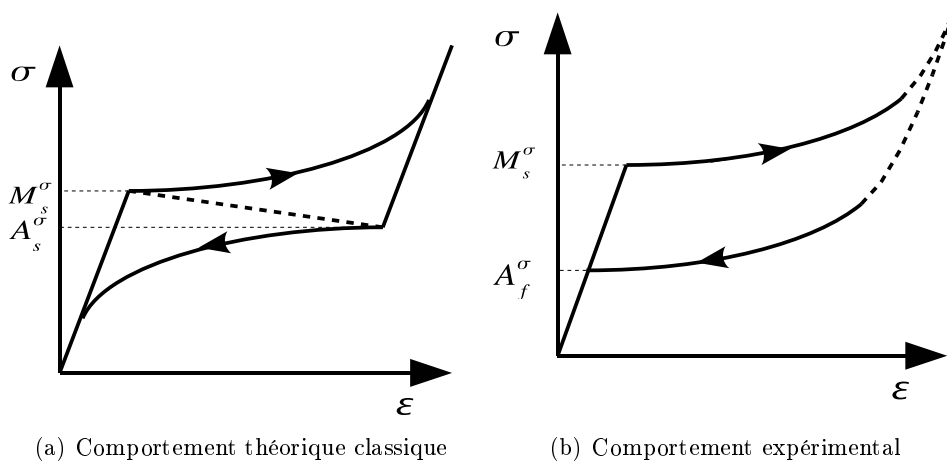


FIG. 2.33 – Points particuliers de la transformation de phase

des alliages riches en nickel pour lesquels il y a intervention de la transformation intermédiaire en phase R [Wang 04, Liu 03]. C'est probablement cette phase-R qui retarde la transformation martensitique aux faibles niveaux de contrainte et en calorimétrie.

Symétrie des transformations directes et inverses

Les comportements de transformation directe et inverse sont symétriques. D'un point de vue phénoménologique, le point A_s de début de transformation inverse Martensite→Austénite est souvent considéré comme le symétrique du point M_s de début de transformation directe Austénite→Martensite (figure 2.33.a).

Pourtant expérimentalement le symétrique de M_s est plutôt A_f . En effet, à cause des arrondis de début et de fin de transformation, les points critiques de transformation ne sont pas clairement définis. Ils sont construits comme l'intersection entre la droite extrapôlant le comportement en transformation avec les droites de comportement élastique de l'austénite et de la martensite (voir figure 2.24). Le comportement élastique de l'austénite étant bien défini la construction des points M_s et A_f est aisée. En revanche, la construction des points M_f et A_s est moins précise car la limite d'élasticité du matériau est généralement dépassée avant d'atteindre l'état d'élasticité pur de la martensite. Ainsi expérimentalement, le point limite d'apparition du premier volume de martensite M_s a pour symétrique A_f le point limite de disparition du dernier volume de martensite.

Diagramme de transformation

Les limites de transformation mécaniques sont bien linéaires de même que la limite de début de transformation directe construite à partir des chargements thermique. Par contre lors des chargements thermiques l'hystérésis de la transformation diminue avec le niveau de contrainte appliqué et la limite de fin de transformation inverse présente une non linéarité. De plus les transformations directes et inverses ont tendance à s'étaler lorsque la contrainte diminue jusqu'à atteindre la valeur d'étalement maximal mesurée par calorimétrie. Ainsi l'étalement de la transformation mesuré par calorimétrie ne traduit pas du tout l'étalement observé lors de chargements thermiques et mécaniques, 3 fois plus faible en compression et quasiment nul en traction.

Les divergences entre les limites mécaniques et thermiques semblent être corrélées à la limite de réorientation $|\sigma_{reorient}| < 200MPa$.

Ces non-linéarités s'expliquent en observant que lors de chargements mécaniques la martensite est créée alors que la contrainte est élevée $|\sigma| > 200MPa$ donc cette martensite est complètement orientée, la déformation de transformation est maximale et les limites de transformation sont linéaires. Par contre plus la contrainte diminue (chargement thermiques à $|\sigma| < 200MPa$) moins la martensite est orientée et plus l'hystérésis et l'étalement de la transformation évoluent, jusqu'à atteindre une valeur maximale lorsque de la martensite autoaccommodée est fabriquée (essai de calorimétrie). Ainsi pour modéliser le comportement à faible contrainte il faut abandonner l'hypothèse selon laquelle la martensite est toujours orientée de manière maximale.

Déformation de transformation

Physiquement la déformation de transformation macroscopique est limitée par le fait que le cisaillement des variantes de martensite est une constante matériau. De plus, en fonction de la direction de sollicitation des variantes différentes vont apparaître qui se traduisent par une déformation de transformation macroscopique différente. D'autre part la martensite peut apparaître sous forme de groupes auto-accommodants qui ne génèrent pas de déformation de transformation. Lorsqu'aucune contrainte n'est appliquée il est énergétiquement préférable de ne pas déformer l'éprouvette et seules des variantes auto-accommodées sont produites. Par contre, à contrainte élevée les variantes les mieux orientées sont sélectionnées et la déformation de transformation est maximale.

Lors des chargements thermiques on observe une saturation de la déformation de transformation, mais cette valeur de saturation évolue avec le niveau de contrainte. À partir d'une valeur seuil de contrainte la déformation de transformation a atteint une valeur maximale et n'évolue plus (figure 2.23). Cette valeur seuil est d'environ $200MPa$ qui correspond à la limite de réorientation de la martensite. Wu et al ainsi que Entemeyer [Wu 03, Entemeyer 96] proposent de comparer la courbe de déformation de transformation avec la courbe 1^{ère} charge de réorientation. C'est ce qui a été fait figure 2.26 en retranchant la déformation élastique (avec $E = 45000MPa$) à la déformation de réorientation mesurée. Il y a une bonne corrélation des résultats et la dissymétrie de la déformation de transformation maximale est correctement prédite.

Dissymétrie

Cette particularité de AMF d'avoir un comportement dépendant de la direction de sollicitation est bien visible sur la courbe de déformation de transformation (chargements thermiques). On mesure un rapport de dissymétrie de $\frac{3}{4}$ pour l'éprouvette superélastique et de $\frac{2}{3}$ pour l'éprouvette mémoire.

Par contre cette dissymétrie semble moins marquée sur les chargements mécaniques. Mais les essais mécaniques ont été réalisés de manière à limiter la saturation de la transformation et d'éviter la plasticité du matériau. Par exemple lors de l'essai de réorientation $20^{\circ}C$ la valeur de contrainte appliquée est différente en traction ($250MPa$) et en compression ($-300MPa$) ce qui réduit la dissymétrie apparente ($-3\%/+4.5\%$). Par contre si on applique un niveau de contrainte symétrique ($\pm 500MPa$) (essai à $0^{\circ}C$), cette dissymétrie est accentuée ($-3.5\%/+6\%$). (figure 2.34)

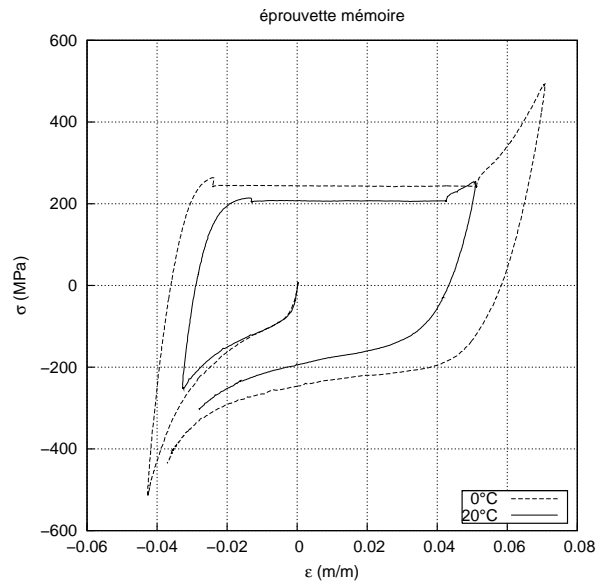


FIG. 2.34 – Dissymétrie traction/compression

Transition réorientation - transformation

Lorsqu'on effectue un chargement mécanique en phase martensitique (figure 2.21 à $T = 0^\circ\text{C}$) on observe le comportement de réorientation de la martensite similaire à de la plasticité : si on décharge le matériau il reste une déformation rémanente et pour modifier cette déformation il faut dépasser une valeur seuil de contrainte. Au contraire lorsqu'on effectue un chargement mécanique à $T > A_f$ la déformation de transformation est réversible après décharge mécanique : c'est l'effet superélastique.

La transformation de phase est caractérisée par une chaleur latente de transformation qui induit notamment lors d'un chargement adiabatique une augmentation de la température du matériau lors de la charge et un refroidissement du matériau lors de la décharge. Ce phénomène n'existe pas lors d'un chargement en phase martensitique puisqu'il ne s'agit plus ici de transformation de phase, mais de réorientation de variantes de martensite. Cet effet de la chaleur latente a été mesuré au cours des expérimentations en plaçant un thermocouple au contact de l'éprouvette (figure 2.35). En effet si le bain liquide évacue rapidement la chaleur produite par le matériau il subsiste une faible variation de température de quelques degrés captée par le thermocouple en surface.

Pour l'essai à 0°C on observe tout d'abord un pic de chaleur à la première traction signe que le matériau n'est pas initialement totalement en phase martensitique, puis au cours des cycles suivants la température reste constante car le matériau reste martensitique.

Au cours de l'essai à 40°C la température fluctue de quelques degrés, le matériau a tendance à s'échauffer lors de la transformation de phase directe et à refroidir lors de la transformation inverse, on est donc en présence de transformation de phase.

Comment s'effectue la transition entre le comportement superélastique à $T > A_f$ et le comportement en réorientation $T < M_f$? Un exemple est donné avec l'essai à $T = 20^\circ\text{C}$. Un comportement typique de transformation de phase est observé (dissymétrie, boucles internes) et pourtant il subsiste une déformation rémanente après décharge mécanique. En débutant par exemple par

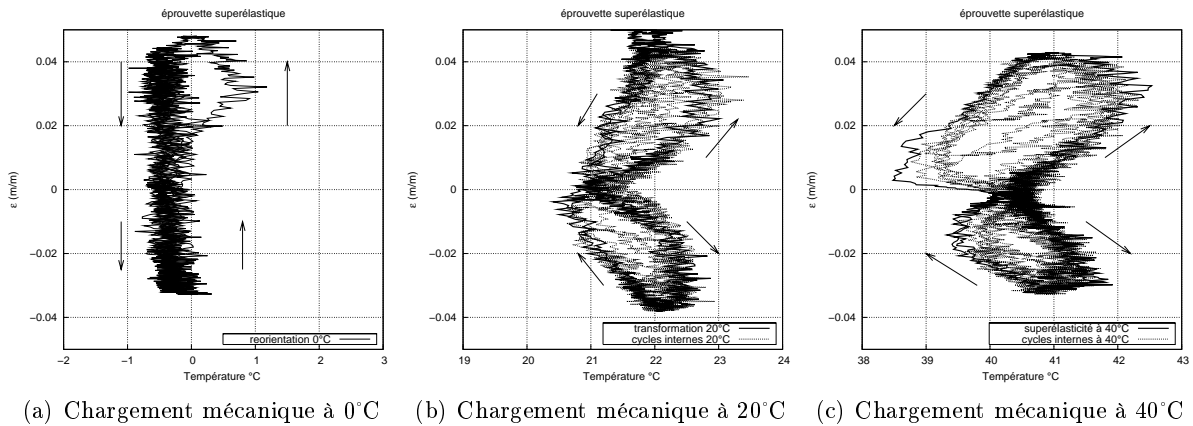


FIG. 2.35 – Température en surface des éprouvettes superélastiques au cours de différents chargements mécaniques

une traction, le matériau est transformé en martensite. Mais, puisque nous sommes à $T < A_f$, la contrainte critique de transformation inverse n'est pas atteinte après décharge et il reste une déformation rémanente de 3.5%. On peut forcer la transformation inverse en appliquant une contrainte de compression au matériau. La transformation inverse est tout d'abord observée avec un début de transformation inverse à une contrainte seuil de -100MPa , puis lorsque tout le matériau a retrouvé son état austénitique et sa forme initiale il peut de nouveau se transformer en martensite sous l'effet de la contrainte de compression mais à une contrainte seuil différente de -250MPa . La courbe de température permet de vérifier que nous sommes bien en présence de transformation de phase (courbe en forme de "Bretzel")

Enfin, l'hystérésis de la transformation de phase semble identique à celui de la réorientation et les limites de transformation inverse semblent débiter à l'intersection de la limite de réorientation avec la limite de transformation directe M_s^σ .

Plasticité

Les limites d'irréversibilité sont plus faibles pour les éprouvettes planes que pour les fils et elles sont plus faibles pour le matériau mémoire que pour le matériau superélastique. De nouveau le taux d'écroutissage au moment de la mise en forme des éprouvettes planes est mis en cause : il est plus faible que pour les fils et la limite d'élasticité du matériau en est réduite. Les deux matériaux se distinguent par un traitement thermique différent visant à décaler les températures de transformation et ayant pour effet de réduire la limite d'élasticité du matériau mémoire.

D'autre part, une déformation irréversible est observée lors du chargement mécanique à 50°C de l'éprouvette superélastique, alors que la contrainte appliquée reste inférieure à la limite de plasticité de l'austénite (figure 2.21). Cela peut s'expliquer par un effet de piégeage de la martensite. En effet lors du chargement à 50°C il n'y a pas d'augmentation de la contrainte lors de la saturation de la transformation à $\varepsilon = 4\%$. À l'entrée en saturation les grains les moins bien orientésaturent en premier et leur contrainte interne augmente fortement. La phase austénitique, la moins résistante, va plastifier pour accommoder cette contrainte. Lors de la décharge, une partie de la martensite est piégée dans la matrice austénitique plastifiée et reste irréversible.

Cela induit des contraintes internes qui facilitent la transformation lors du chargement suivant, plus de grains sont transformés et la déformation de transformation maximale semble augmenter. Par contre si la martensite piégée est libérée en appliquant une contrainte de compression, alors le seuil de transformation, la rigidité de transformation et la déformation de saturation initiale sont retrouvés.

Effet mémoire de forme

Les résultats de retour libre confirment l'influence de la déformation de transformation sur les limites de transformation : étalement de la transformation et décalage de A_f vers le froid lorsque la déformation de transformation diminue.

La répétition du cycle de retour contraint conduit à une modification des caractéristiques matériau. On observe en particulier un effet de "rochet" lors du conditionnement : une déformation résiduelle apparaît et augmente à chaque cycles, mais est en partie compensée par une augmentation de la déformation de transformation.

Cet effet de rochet s'accompagne d'un décalage des températures vers de froid et une réduction de l'hystérésis de transformation. De plus on constate que la température critique du premier retour contraint ($45^\circ C$) est plus faible que la température de critique de retour libre à conditionnement identique ($50^\circ C$) (figure 2.29). Cela semble indiquer que la déformation irréversible, responsable du décalage des températures, apparaît dès le début de la montée en contrainte. C'est donc la martensite fabriquée au moment de la saturation de la transformation qui induit une déformation irréversible. Cela pourrait être vérifié expérimentalement en réalisant un essai mémoire sur une éprouvette vierge, avec une première étape de retour libre consommant la martensite "de saturation" suivie d'un retour contraint. On retrouverait alors une température de début de transformation de $50^\circ C$ et toute la déformation devrait être réversible.

La pente de la dépendance de la contrainte en fonction de la température reste constante au cours du cyclage à une valeur de $9MPa/^\circ C$ en traction et $-11MPa/^\circ C$ en compression.

Boucles internes

Nous constatons tout d'abord que le comportement dans les cas de charges-décharges partielles et boucles internes est plus complexe que dans le cas des fils. L'absence de boucles internes dans les fils avait été corrélée à l'effet de localisation de la transformation, effet qui n'intervient pas dans le cas des éprouvettes planes.

Nous observons que dans le cas de la superélasticité, le lieu des contraintes critiques de transformation est bien décrit par la "diagonale" de l'hystérésis. La rigidité de transformation est également dépendant du schéma interne et augmente de manière à toujours tendre vers le point M_f^c en transformation directe et vers A_f^c en transformation inverse.

Nous avons montré que d'une part la courbe de 1^{ère} charge de réorientation est distincte du cycle complet de réorientation, et que d'autre part cette courbe permet de prédire la valeur de la déformation de transformation de saturation en fonction du niveau de contrainte. Il est donc nécessaire de la caractériser correctement. Cette courbe de première charge peut être comparé à un trajet de boucle interne du cycle complet de réorientation. Les boucles internes en réorientation seraient décrites de la même façon que pour la transformation : une diagonale critique et une rigidité de réorientation qui tend à rejoindre la saturation de l'orientation.

2.6 Conclusion

Nous avons décrit le comportement thermomécanique des Alliages à Mémoire de Forme d'un point de vue macroscopique. Nous observons dans ce matériau un couplage thermomécanique fort et une réponse non linéaire et hystérétique. De plus cette réponse est différente en fonction du matériau superélastique ou mémoire et dépend également de la géométrie de l'élément en AMF.

La distinction matériau superélastique et matériau mémoire est plus "commerciale" et "technique" que physique. Pour une température de référence donnée (l'ambiante par exemple) chaque matériau n'aura pas effectivement la même réponse : réponse mécanique pour le matériau superélastique et réponse thermique pour le matériau mémoire. De plus les techniques d'obtention du matériau sont un peu différentes. Néanmoins les mêmes phénomènes physiques sont en jeu et il est possible de décrire de la même façon le comportement pour un matériau superélastique et un matériau mémoire. Seul la valeur des différents paramètres va changer.

La géométrie influe de deux manières sur le comportement du matériau : effet de localisation de la transformation et caractéristiques mécaniques. Le comportement mesuré en présence de localisation de la transformation peut être considéré comme le comportement "extrême" des AMF tant pour des chargements mécaniques que thermiques : limites de transformation bien linéaires, brusque changement de rigidité, déformation réversible importante, limite d'élasticité élevée, tenue au cyclage. Le cas particulier de la localisation peut être très intéressant dans le cadre d'applications, mais il est limité aux géométries fils et mini tubes. Sur des géométries plus complexes le matériau va avoir une réponse plus arrondie et des caractéristiques moins marquées. L'obtention de l'effet superélastique nécessite une limite d'élasticité élevée et donc nécessite d'écrouir fortement le matériau au moment de sa mise en forme, limitant les géométries possibles à des volumes usinés dans des tiges, tubes ou plaques. L'obtention de l'effet mémoire de forme est moins restrictif, mais une limite d'élasticité élevée reste toujours intéressante. Néanmoins, qu'il y ait ou non localisation de la transformation les mêmes caractéristiques définissent le comportement du matériau :

- Caractéristiques thermoélastiques.
- Limite d'élasticité de chaque phase.
- Limites de transformation (pente, température de référence, hystérésis).
- Limite de réorientation.
- Comportement en cours de transformation / réorientation (rigidité, arrondi de début de transformation, arrondis de saturation de transformation et d'orientation).
- Déformation maximale de transformation.
- Dissymétrie du comportement en fonction de la direction de sollicitation.

Ces expérimentations montrent qu'à faible contrainte les caractéristiques sont moins clairement définies (limites de transformation, hystérésis, rigidité). En particulier l'évolution de la valeur de saturation de la déformation de transformation avec le niveau de contrainte est très rarement pris en considération. En effet l'observation du comportement d'un point de vue mécanique ne met pas en évidence le phénomène. Dans le cadre de l'effet mémoire cette zone de faible contrainte et de réorientation devient prédominante et il devient nécessaire de la prendre en compte dans une modélisation.

Enfin il est important de noter également que le comportement du matériau évolue au cours du cyclage mécanique. Le phénomène a été entrevu sur les quelques cycles mécaniques effectués sur les fils, mais également durant l'effet mémoire des éprouvettes planes où les températures de transformation sont modifiées par le cyclage. Pour limiter le phénomène il est nécessaire de réduire le niveau de contrainte appliqué ou généré et donc de se rapprocher de la zone de comportement

à faible contrainte.

Après cette partie expérimentale l'étape suivante consiste à modéliser le comportement des AMF, en captant le maximum de comportements et en particulier la superélasticité et l'effet mémoire. Le modèle devrait également être adapté au dimensionnement de structures par la méthode des éléments finis. Pour cela nous conserverons le point de vue macroscopique mais nous nous attacherons à la description de la transformation de phase martensitique.

Finalement en nous basant sur ces données expérimentales nous décrirons dans le dernier chapitre quelques règles de dimensionnement d'éléments superélastiques et à effet mémoire de forme.

Chapitre 3

Modélisation du comportement des AMF

Sommaire

3.1	Introduction	61
3.2	Bibliographie	62
3.2.1	Choix des variables internes	64
3.2.2	Chargements 3D non proportionnels	65
3.2.3	Thermodynamique de la transformation de phase	66
3.3	Thermodynamique de la transformation martensitique	67
3.3.1	Définition de l'enthalpie libre	68
3.3.2	Énergie élastique stockée	72
3.3.3	Équilibre thermodynamique du VER	77
3.3.4	Chargements partiels	82
3.4	Application à des cas de chargement proportionnels	87
3.4.1	Chargements mécaniques	87
3.4.2	Chargements thermiques	91
3.4.3	Effet mémoire de forme	92
3.5	Conclusion	94

3.1 Introduction

La plupart des modèles du comportement des AMF de la littérature sont construits à partir d'une analyse du comportement mécanique des AMF. Or, la comparaison des diagrammes de transformation construits à partir de chargements mécaniques ou thermiques montre que le comportement thermique ne peut pas être déduit de manière satisfaisante à partir d'une approche mécanique pure (voir chapitre caractérisation). En effet, classiquement les modèles mécaniques sont bâti sur l'hypothèse d'une déformation de transformation proportionnelle à la quantité de martensite présente dans le matériau. Dans le cas de chargements thermiques à faibles contraintes cette hypothèse n'est plus valable. L'objectif de cette partie est donc de développer un modèle prenant en compte ce phénomène.

D'autres travaux [Sittner 96, Lim 99, L'excellent 02] montrent que la réponse du matériau à des chargements 3D complexes et non-proportionnels ne peut pas être déduite d'une simple

analyse du comportement 1D. Le modèle doit donc être construit sur une base intrinsèquement 3D en évitant en particulier l'hypothèse du chargement proportionnel.

Enfin l'objectif est d'introduire le modèle dans un code de calcul par Éléments Finis afin de pouvoir dimensionner des dispositifs et des structures mécaniques exploitant l'effet mémoire de forme.

Pour construire ce modèle nous allons tout d'abord analyser les modèles présents dans la littérature. Il en existe deux types : les approches macroscopiques et les approches microscopiques. Les premiers sont bien adaptés aux techniques E.F. et nous baserons notre modèle sur cette approche. Mais les modèles microscopiques, par leur finesse de description du matériau, prédisent plus précisément le comportement des AMF. Ce type de modèle sera donc également analysé de manière à dégager les ingrédients nécessaires à une bonne modélisation macroscopique.

Le modèle sera développé en se plaçant dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles à variables internes et en utilisant une écriture du type matériau standard généralisé. Le choix des variables internes est crucial pour avoir une bonne description de l'état du matériau. Le modèle est bâti sur nouvelle approche du problème, qui distingue la quantité de martensite présente dans le matériau de la déformation et de l'orientation intrinsèque de la martensite. Une analyse simplifiée de la micro-structure du matériau permettra ensuite de construire une expression explicite de l'énergie. Puis le comportement du matériau sera dérivé des relations d'équilibre thermodynamique.

Enfin les capacités du modèle seront vérifiées sur différents comportements typique des alliages à mémoire de forme : superélasticité, réorientation de la martensite, chargements thermiques à contrainte constante et effet mémoire de forme simple sens.

3.2 Bibliographie

Le comportement macroscopique des AMF est caractérisé par une déformation rémanente : la déformation de transformation $E_{ij}^T = E_{ij} - \mathcal{S}_{ijkl}\Sigma_{kl}$. Il s'agit donc de définir l'évolution de E_{ij}^T au cours d'un chargement thermomécanique. Cette déformation rémanente est issue d'un changement de phase solide/solide qui transforme une phase mère Austénitique en une phase fille Martensitique. Ces deux phases n'ont pas les mêmes propriétés mécaniques et physico-chimique, il est donc intéressant de connaître également l'évolution de la quantité de martensite définie par sa fraction volumique $f = \frac{V_M}{V}$.

Plusieurs modèles ont été développés afin de déterminer les lois d'évolution de ces deux termes. Il y a plusieurs façons de les classer mais on peut dégager globalement deux approches : les "modèles macroscopiques" avec des variables internes définies à l'échelle d'un volume d'AMF polycristallin et les "modèles microscopiques" avec des variables internes définies à l'échelle du monocristal. Suivant les auteurs, la construction du modèle est obtenue par une analyse purement phénoménologique de la déformation transformation ou par une approche thermodynamique de la transformation de phase :

- Modèles macroscopiques (variables internes définies à l'échelle d'un volume d'AMF polycristallin)
 - ↔ Approche purement phénoménologique [Tanaka 84, Bekker 98, Auricchio 01, Bouvet 04]
 - Ces modèles sont construits en 2 étapes :
 1. définition des surfaces de charge.
 2. définition d'une cinétique d'évolution.
 - ↔ Approche dérivant d'une analyse thermodynamique [Leclercq 96, Boyd 96, Sun 93]

Cela nécessite une étape supplémentaire de construction de l'énergie :

1. construction d'une expression explicite de l'énergie (origine phénoménologique ou analyse micromécanique).
 2. dérivation des différents critères de charge.
 3. cinétique d'évolution ou relation de consistance.
- Modèles microscopiques (variables internes définies à l'échelle du cristal ou du grain)
- ↪ Tous les modèles sont basés sur une approche thermodynamique [Patoor 88, Lim 02, Thamburaja 02, Blanc 04, Gao 00]
1. construction d'une expression explicite de l'énergie par une analyse micromécanique.
 2. dérivation des différents critères de charge.
 3. cinétiques d'évolution ou relation de consistance.

Dans le cas des modèles microscopiques de nombreuses variables internes sont introduites qui permettent de décrire finement l'évolution de la micro-structure du matériau. Ce sont généralement les 24 fractions de variantes de martensite, multiplié par le nombre de grains présent dans un Volume Élémentaire Représentatif du matériau. Avec un tel nombre de variables internes la difficulté réside dans un choix de règles d'évolution des variables internes cohérentes entre elles. L'approche thermodynamique est une bonne solution puisque cela rapporte le problème à la recherche du minimum d'une énergie, problème qui possède toujours une solution unique. La difficulté est reportée sur la construction de l'expression de l'énergie. Celle-ci est généralement obtenue par une analyse micromécanique du type inclusion d'un volume déformé (martensite) dans un milieu homogène équivalent. Ce type de modèle possède un grand pouvoir prédictif du comportement, grâce à la finesse de description de la microstructure du matériau : dissymétrie traction/compression, trajets de chargement non proportionnels, paramètres matériaux physiques et cristallographiques.

Au contraire, l'intérêt des modèles macroscopiques est de n'introduire qu'un nombre réduit de variables internes. Il devient alors plus facile de construire de manière phénoménologique un modèle cohérent, en s'appuyant par exemple sur le formalisme de la plasticité des métaux. Mais le pouvoir prédictif de ce type de modèle est très limité lorsqu'il s'agit de prédire la réponse du matériau à des chargement complexes non prévus initialement. Néanmoins les prédictions peuvent être améliorées se basant sur une approche thermodynamique physique modélisant précisément le phénomène de transformation de phase.

Dans l'optique du calcul de structures, nous choisissons de développer un modèle macroscopique moins coûteux en temps de calcul. Cela implique que le matériau peut subir des trajets de chargement 3D complexes dans différentes directions et selon des cycles non-proportionnels. Mais l'objectif principal de ce modèle est de prendre en compte correctement le comportement thermique du matériau en particulier l'évolution de la déformation de transformation avec le niveau de contrainte appliqué. Pour cela nous allons analyser les modèles présents dans la littérature sur trois points :

1. Choix des variables internes.
2. Prise en compte du comportement non proportionnel.
3. Thermodynamique du changement de phase.

3.2.1 Choix des variables internes

Les modèles micromécaniques ont un pouvoir prédictif élevé car les nombreuses variables internes introduites permettent de décrire finement la micro-structure du matériau et son évolution. Le choix des variables internes est donc fondamental.

À l'échelle du monocristal la martensite est présente sous forme de fines aiguilles caractérisées par un cisaillement homogène g . À partir d'un cristal d'austénite il est possible de fabriquer 24 variantes de martensite, chacune (n) de direction différente η_{ij}^n . Généralement les modèles micromécaniques utilisent les fractions volumiques f^n de chaque variantes comme variables internes [Patoor 88, Lim 02, Thamburaja 02, Blanc 04] même si dans certains modèles la structure auto-accommodante des variantes est mise en avant [Gao 00, Niclaeys 02b]. La déformation macroscopique et la fraction volumique de martensite d'un monocristal s'écrivent alors :

$$E_{ij}^T = \sum^n (f^n g \eta_{ij}^n) \quad (3.1)$$

$$f = \sum^n f^n \quad (3.2)$$

En fonction du niveau de contrainte appliqué au matériau au moment de la formation de la martensite, soit les variantes les mieux orientées vont être induites générant une déformation maximale g , soit au contraire les variantes vont préférentiellement apparaître sous forme auto-accommodée de manière à ce que leur déformation se compense et ne génère pas de déformation macroscopique. Intervient ensuite l'effet polycristallin qui vient homogénéiser la déformation de transformation et la fraction martensitique sur tout le volume.

Dans les modèles macroscopiques, la martensite est généralement décomposée en deux "variantes" [Bekker 98, Leclercq 96, Qidwai 00] : une martensite orientée de fraction f^σ et une martensite auto-accommodée f^T qui ne génère pas de déformation macroscopique. La martensite orientée est construite en faisant une hypothèse sur l'orientation des variantes : la martensite formée sous contrainte est supposée être composée des variantes les mieux orientées par rapport aux contraintes, définissant une déformation macroscopique de norme constante g^{macro} et une orientation η_{ij}^σ définie par la direction du champ de contrainte au moment de la création de la martensite. La martensite auto-accommodée quand à elle est produite lors d'un chargement thermique sous faible contrainte. La déformation macroscopique et la fraction martensitique s'écrivent :

$$E_{ij}^T = f^\sigma g^{macro} \eta_{ij}^\sigma \quad (3.3)$$

$$f = f^\sigma + f^T \quad (3.4)$$

L'hypothèse forte ici est de considérer que la martensite est soit totalement orientée par la contrainte soit totalement auto-accommodée. Cela ne pose généralement pas de problème dans le cas de chargements mécaniques mais l'hypothèse est trop restrictive dans le cas où la martensite est induite à partir d'un chargement thermique sous contrainte constante. En effet dans ce cas les variantes de martensite créées ne sont pas les mieux orientées par rapport au champ de contrainte macroscopique mais génèrent tout de même une déformation de transformation. L'effet est particulièrement important dans les polycristaux (voir chapitre "Caractérisation").

Une autre décomposition a été proposée dans la littérature [Sun 93, Rengarajan 98] sous la forme :

$$E_{ij}^T = f \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (3.5)$$

avec la déformation de transformation moyenne de la martensite :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^T = \langle \varepsilon_{ij}^T \rangle_{V_M} = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (3.6)$$

Néanmoins, ces auteurs font finalement l'hypothèse restrictive que la norme de $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ est constante égale à g^{macro} . La déformation de transformation moyenne est alors réduite à une simple variable intermédiaire et on retrouve la décomposition classique (3.3).

Nous proposons de ne pas imposer de conditions sur la forme du terme $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et de le considérer comme une variable interne indépendante de la quantité de martensite f [Patoor 96, Peultier 04a]. Cette décomposition présente trois intérêts :

- > les deux variables internes f et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ sont totalement indépendantes,
- > il est possible d'introduire une influence du niveau de contrainte sur la valeur de déformation de transformation,
- > l'introduction d'une variable interne tensorielle est utile pour décrire des chargements 3D.

En effet lorsque des chargements 3D complexes sont abordés, la connaissance de la fraction martensitique seule n'est pas suffisante pour caractériser l'état du matériau, il faut également introduire une variable interne tensorielle. Par analogie avec les modèles de plasticité c'est généralement la déformation de transformation macroscopique E_{ij}^T elle-même qui est choisie [Bouvet 04, Souza 98, Boyd 96]. Mais ces deux variables internes E_{ij}^T et f ne sont pas indépendantes et il est nécessaire de définir des lois d'évolutions couplées. Le problème se complexifie encore lorsque les trajets de chargements appliqués sont non-proportionnels.

3.2.2 Chargements 3D non proportionnels

Les modèles à variables internes microscopiques rendent bien compte du comportement lors de chargement non proportionnels [Tokuda 98, Zhu 02], au contraire des modèles macroscopiques sont souvent construits à partir d'hypothèses restrictives sur la déformation de transformation.

Classiquement les modèles macroscopiques adaptés au chargements 3D sont une simple extension du comportement 1D, en introduisant l'hypothèse de chargement proportionnel selon laquelle la déformation de transformation est totalement orientée par la contrainte macroscopique appliquée [Auricchio 99] :

$$E_{ij}^T = fg\eta(\Sigma_{ij}) \quad (3.7)$$

avec $\eta(\Sigma_{ij}) = \frac{S_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2}S_{kl}S_{kl}}}$ et le déviateur des contraintes $S_{ij} = \Sigma_{ij} - \frac{\Sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}$.

Avec cette hypothèse toutes les variables tensorielles ont la même direction $\eta(E_{ij}^T) = \eta(\Sigma_{ij}) = \eta(E_{ij})$ et le problème se réduit à une seule inconnue scalaire f . Pour introduire la dissymétrie du comportement les auteurs introduisent une surface de charge fonction des deux premiers invariants de la contrainte $[I_1 : J_2](\Sigma_{ij})$. En effet avec ce type de critère de charge il y a coïncidence entre la direction définie par la normale à la surface de charge et la direction du déviateur des contraintes. Cette forme de la surface de charge modélise correctement la dissymétrie du comportement dans le cas de chargement 1D traction / compression mais ne convient pas pour d'autres chargements (expansion équibiaxée ou cisaillement).

Pour mieux tenir compte de la dépendance à la direction de chargement, d'autres critères de charge faisant intervenir le troisième invariant des contraintes $[J_2 : J_3](\Sigma_{ij})$ ont été proposés [Patoor 96, Qidwai 00, Manach 97, Raniecki 98]. L'hypothèse d'un écoulement de la déformation de transformation normal à la surface de charge est généralement adoptée :

$$dE_{ij}^T = df g \eta_{ij}^{surface} \quad (3.8)$$

avec $\eta_{ij}^{surface}$ la normale à la surface de charge au point Σ_{ij} .

Pour ce type de surface de charge la direction de la normale à la surface ne peut plus être identifiée à la direction de la contrainte. Il n'y a plus de relation directe entre la déformation de transformation macroscopique et la fraction volumique de martensite et il est nécessaire de travailler avec 2 inconnues E_{ij}^T et f .

Les modèles associant un critère de charge dissymétrique à une loi d'écoulement isotrope présentent un faible pouvoir prédictif dans le cas de chargements non-proportionnels [Bouvet 01]. Certains auteurs [Boyd 96, Rengarajan 98, Bouvet 04] proposent d'introduire un effet cinématique X_{ij} dans le critère de charge qui prend la forme $[J_2 : J_3](\Sigma_{ij} - X_{ij})$. QP Sun [Sun 93] justifie cet effet cinématique par une analyse micromécanique d'une inclusion d'un volume de martensite déformée dans un milieu austénitique élastique. Il montre que le champ de contrainte dans l'austénite est perturbé et que la loi d'écoulement s'écrit :

$$dE_{ij}^T = df g \eta (\sigma_{ij}^{austenite}) \quad (3.9)$$

avec

$$\sigma_{ij}^{austenite} = \Sigma_{ij} - B E_{ij}^T \quad (3.10)$$

où B est une constante matériau.

Plusieurs auteurs [Bouvet 04, Helm 03] proposent une modélisation qui rend bien compte du comportement non-proportionnel en introduisant de manière générale 3 variables internes f , E_{ij}^T et X_{ij} . Ces 3 variables sont liées et leur évolution n'est déterminée qu'à partir d'un seul critère de charge. Souza [Souza 98] utilise un lien explicite entre les 3 termes de manière à n'introduire que E_{ij}^T comme variable interne tandis que la fraction martensitique est donnée par $f = \frac{|E_{ij}^T|}{g}$ et que le terme d'écrouissage cinématique dérive d'une analyse énergétique classiquement employée dans la modélisation macroscopique de la plasticité $X_{ij} = H E_{ij}^T$.

Finalement, une fois les variables internes choisies il faut définir leurs lois d'évolution. Une analyse thermodynamique de la transformation de phase permet de dériver des lois d'évolution cohérentes.

3.2.3 Thermodynamique de la transformation de phase

La phase martensitique est caractérisée par une cristallographie différente de celle de la phase mère austénitique et donc une entropie différente $S^M \neq S^A$. Ce saut d'entropie est caractéristique d'une transformation du 1^{er} ordre et implique une coexistence entre les phases hautes et basses température. Cette coexistence génère des incompatibilités de déformations internes au matériau qui conduisent à un champ de contraintes internes et à une énergie élastique interne.

Suite à la transformation de phase, l'énergie interne du matériau évolue du fait de deux contributions :

- La contribution entropique qui diminue progressivement de la valeur austénitique initiale $T S^A$ à la valeur martensitique finale $T S^M$.
- L'énergie élastique interne qui augmente avec la quantité de martensite.

La description du second terme est très importante et conditionne l'exactitude des prédictions des modèles de comportement. Généralement dans les modèles microscopiques et macroscopiques cette énergie interne est décomposée en deux contributions [Blanc 04, Sun 93, Boyd 96] :

- l'énergie d'interaction entre la phase martensitique et l'austénite $H_{A/M}f^A(1-f^A)$ avec $H_{A/M}$ un coefficient matériau et f^A la fraction volumique d'austénite
- l'énergie d'interaction entre les différentes variantes de martensite $\frac{1}{2}\sum^{n,m}H_{M/M}^{nm}f^n f^m$ ou $\frac{1}{2}H_{M/M}E_{ij}^T E_{ij}^T$ avec $H_{M/M}$ un coefficient matériau ou une matrice d'interaction, f^n les fractions martensitique des différentes variantes et E_{ij}^T la déformation de transformation globale.

Suivant les auteurs l'une ou l'autre contribution est considérée comme prédominante.

Si l'énergie d'interaction Austénite/Martensite est prédominante [Huo 93, Leclercq 96, Zhu 02], alors l'analyse de l'équilibre thermodynamique montre que celui-ci est instable. L'expression de l'énergie permet de définir deux critères de début de transformation directe et inverse puis l'état du matériau évolue hors équilibre en suivant une loi cinétique. Cela implique notamment que les transformations directe et inverse sont équivalentes :

- transformation directe : fabrication de Martensite à partir de l'Austénite, début de transformation à M_s puis cinétique d'évolution.
- transformation inverse : fabrication d'Austénite à partir de la Martensite, début de transformation à A_s puis cinétique d'évolution.

Cela conduit également à attribuer à l'énergie libre l'origine de l'effet de boucles internes observé lors de chargements partiels.

Si au contraire l'énergie d'interaction Martensite/Martensite domine [Patoor 88, Lim 02, Boyd 96], alors l'équilibre de la transformation est stable. La thermodynamique permet de construire un critère d'activation puis la cinétique d'évolution est donnée par la relation de consistance du critère de charge. Cette fois les transformations directe et inverse ne sont plus exactement équivalentes :

- transformation directe : fabrication de Martensite, caractérisée par une limite de début de transformation M_s décrivant le lieu où la première variante de martensite apparaît, puis évolution à partir de la relation de consistance.
- transformation inverse : consommation de la Martensite présente, caractérisée par la limite de fin de transformation A_f décrivant le lieu où la dernière variante de martensite disparaît, puis évolution à partir de la relation de consistance.

Notre modèle est construit en retenant la deuxième hypothèse notamment parce que l'expérimentation montre qu'il est plus facile de définir la limite de fin de transformation inverse A_f plutôt que celle du début A_s pour des AMF polycristallins (voir chapitre caractérisation).

3.3 Thermodynamique de la transformation martensitique

Afin de modéliser le comportement des alliages à mémoire de forme polycristallins nous allons nous attacher à décrire le phénomène de transformation martensitique d'un point de vue macroscopique. En reliant l'évolution de la transformation martensitique avec le chargement thermomécanique il sera ensuite possible d'en dériver différents comportements : superélasticité, réorientation de la phase martensitique et effet mémoire de forme simple sens. Dans cette étude les effets liés au vieillissement, aux cyclages mécaniques ou thermiques ne seront pas pris en compte. Le comportement sera toujours considéré en première approximation comme totalement réversible. Nous ferons également l'hypothèse que le comportement thermo-élastique des deux phases est identique.

D'un point de vue macroscopique, le matériau peut sous certaines conditions de chargement faire apparaître une déformation rémanente $E_{ij}^T = E_{ij} - \mathcal{S}_{ijkl}\Sigma_{kl}$. Cette déformation est réversible le matériau peut retrouver par la suite sa structure d'origine.

La première étape de l'étude thermodynamique consiste à réaliser le bilan énergétique sur un Volume Élémentaire Représentatif d'AMF. Ce VER est composé de plusieurs grains tandis que chaque grain est formé d'une phase mère austénitique qui peut se transformer en martensite. La martensite est caractérisée par une déformation de cisaillement du matériau par rapport à la configuration initiale austénitique. La phase martensitique est composée d'un ensemble de variantes qui ont un taux de cisaillement identique mais une direction de cisaillement différente. En fonction du type de variante sélectionnées la martensite est globalement auto-accommodée ou orientée (voir chapitre "Présentation des AMF"). Afin d'exprimer de manière explicite l'énergie du VER il est nécessaire de décrire la présence de martensite dans le matériau ainsi que la déformation de transformation que cela induit. Nous avons choisis d'introduire deux variables internes macroscopiques : la fraction volumique de martensite f et l'orientation moyenne de l'ensemble des variantes de martensite $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ (variable tensorielle). L'énergie interne du matériau pourra alors être détaillée et construite à partir d'une analyse de la micro-structure.

La deuxième étape consiste à imposer l'équilibre énergétique du VER en appliquant le premier et le second principe de la thermodynamique. Nous en déduisons deux critères de charge qui permettront de définir l'évolution des deux variables internes. Afin de prédire plus précisément la réponse du matériau lors de chargements partiels il sera nécessaire d'approfondir l'expression des termes de dissipation.

3.3.1 Définition de l'enthalpie libre

La transformation martensitique apparaît suite à une modification de la température ou de l'état de contrainte. Nous cherchons à construire une expression explicite de l'enthalpie libre de Gibbs du VER qui admet pour variables naturelles T et Σ_{ij} . De plus, puisque la transformation martensitique est fonction directement de la température et non pas du flux de chaleur nous pouvons découpler le problème du transfert thermique avec celui de la transformation. Nous supposons donc par la suite que l'état thermique est stationnaire (flux thermique $\vec{q} = 0$) et que la température est homogène dans l'ensemble du VER.

État initial austénitique

Le VER est initialement constitué d'un volume V de polycristal d'austénite.

Un volume dV d'un cristal d'austénite est caractérisé par son énergie interne volumique du^A .

Lorsque plusieurs cristaux d'austénite sont assemblés pour former un polycristal, il est nécessaire d'apporter de l'énergie élastique pour compenser les incompatibilités entre grains (figure 3.1). L'énergie interne initiale du VER complet prend la forme suivante :

$$U = U^A + \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij} \mathcal{S}_{ijkl} \sigma_{kl} dV \quad (3.11)$$

avec $U^A = \int_V du^A$ et σ_{ij} la contrainte dans le volume dV .

d'où l'enthalpie libre de Gibbs du VER :

$$G = \left(U^A + \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij} \mathcal{S}_{ijkl} \sigma_{kl} dV \right) - TS^A - \Sigma_{ij} E_{ij} \quad (3.12)$$

avec Σ_{ij} et E_{ij} la contrainte appliquée et la déformation totale du VER.

Nous choisissons cet état comme référence potentielle : initialement $\Sigma_{ij} = 0$ et $E_{ij} = 0$. De plus l'énergie élastique interne initiale est négligée par rapport à l'énergie interne qui apparaîtra au cours de la transformation de phase.

$$G^{init} = U^A - T^{init} S^A \quad (3.13)$$

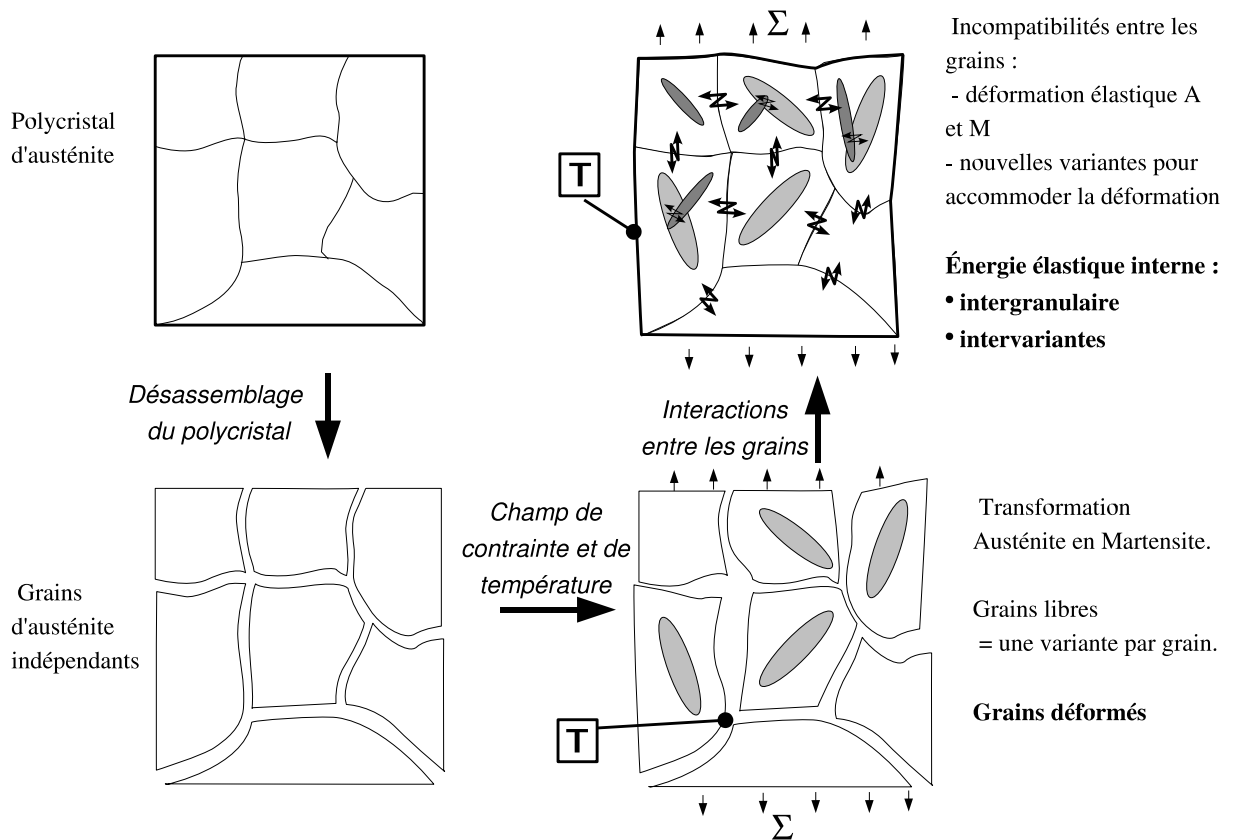


FIG. 3.1 – Représentation schématique des différentes sources d'énergie élastique interne dans un AMF polycristallin

État biphasé austénite-martensite

Suite à un chargement thermomécanique (Σ_{ij}, T) un volume V_M d'austénite se transforme en martensite (figure 3.1). La martensite est caractérisée par une entropie S^M plus faible que celle de l'austénite. Chaque variante de martensite est délimitée par une interface, dont la contribution énergétique totale est notée Γ . Mais la martensite adoptant une géométrie lamellaire qui minimise cette énergie, nous négligeons cette énergie d'interface par rapport aux autres termes d'énergie ($\Gamma \approx 0$) [Siredey 99].

De la même manière que pour l'état initial nous construisons l'enthalpie libre de Gibbs du VER à l'état biphasé :

$$G^{biphase} = \left(1 - \frac{V_M}{V}\right) (U^A - TS^A) + \frac{V_M}{V} (U^M - TS^M) - \Sigma_{ij} E_{ij} + \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \mathcal{S}_{ijkl} \sigma_{kl}(r) dV \quad (3.14)$$

Nous en déduisons la variation d'enthalpie libre du VER suite à un chargement thermomécanique :

$$\begin{aligned} \Delta G &= G^{biphase} - G^{init} \\ &= -\Delta TS^A + f(\Delta U - T\Delta S) \\ &\quad - (\Sigma_{ij} \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} \alpha_{ij} \Delta T + \Sigma_{ij} E_{ij}^T) + \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \mathcal{S}_{ijkl} \sigma_{kl}(r) dV \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans cette expression nous avons renommé $\Delta U = U^M - U^A$, $\Delta S = S^M - S^A$, $\Delta T = T - T^{init}$ et noté $f = \frac{V_M}{V}$ la fraction volumique de martensite. De plus, en faisant l'hypothèse de coefficients thermo-élastiques identiques pour les deux phases, la déformation totale peut être décomposée en un terme élastique, un terme de dilatation thermique et un terme de transformation $E_{ij} = \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T + E_{ij}^T$.

L'enthalpie libre du VER $\Delta G(\Sigma_{ij}, T, X_{interne})$ est fonction des variables de contrôle Σ_{ij} et T et d'un ensemble de variables internes $X_{interne}$ que nous allons préciser.

Choix des variables internes

Dans l'expression (3.15) deux variables décrivent la présence de martensite dans le VER : la fraction de martensite f et la déformation de transformation moyenne du VER $E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^T(r) dV$ avec $\varepsilon_{ij}^T(r)$ la déformation de transformation d'un volume dV . Ces deux variables sont dépendantes car la déformation de transformation E_{ij}^T va évoluer en fonction de la quantité de martensite produite f . Mais on ne peut pas déduire directement f à partir de E_{ij}^T : en effet pour la même quantité de martensite f la déformation macroscopique rémanente va être différente si la martensite produite est auto-accommodée ou orientée. Par contre, la déformation de transformation E_{ij}^T peut être décomposée en deux variables internes indépendantes, en remarquant que la déformation de transformation locale $\varepsilon_{ij}^T(r)$ est nulle hors du volume de martensite V_M :

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^T(r) dV = \frac{1}{V} \int_{V_M} \varepsilon_{ij}^T(r) dV = f \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon_{ij}^T(r) dV = f \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (3.16)$$

Cela fait apparaître la variable de déformation de transformation moyenne de la phase martensitique $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ moyennée uniquement sur la volume de martensite. Nous choisissons les deux variables f et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ comme variables internes. Cela permet d'introduire une distinction entre d'une part la transformation martensitique classiquement décrite par la fraction martensitique f , et

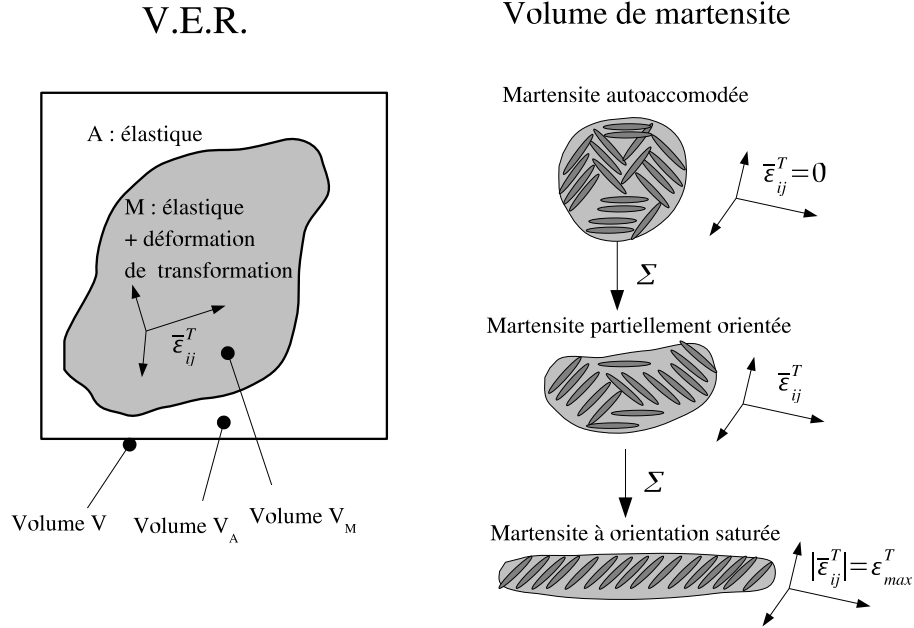


FIG. 3.2 – Variables internes et représentation du V.E.R.

d'autre part l'orientation moyenne de la martensite $\bar{\epsilon}_{ij}^T$ décrivant la présence de martensite autoaccommodée, de martensite partiellement orientée ou de martensite totalement orientée (figure 3.2). Nous qualifierons par la suite la variable interne $\bar{\epsilon}_{ij}^T$ de variable d'"orientation" de la martensite caractérisée par une amplitude $|\bar{\epsilon}_{ij}^T|$ et une direction $\frac{\bar{\epsilon}_{ij}^T}{|\bar{\epsilon}_{ij}^T|}$.

Les variables internes sont contraintes par différentes limitations physiques :

- La fraction martensitique ne peut, par définition, prendre une valeur hors de l'intervalle $[0 : 1]$

$$0 \leq f \leq 1 \quad (3.17)$$

- Dans les alliages à mémoire de forme, la transformation martensitique induit principalement un cisaillement pur et une variation de volume négligeable. Ainsi la déformation de transformation moyenne prendra une forme purement déviatorique :

$$\bar{\epsilon}_{kk}^T = 0 \quad (3.18)$$

- La déformation de transformation est physiquement limitée par le cisaillement maximal des variantes de martensite $|\bar{\epsilon}_{ij}^T| \leq \epsilon_{max}^T$. Cette limitation est plus délicate à exprimer que les deux précédentes, car due au faible degré de symétrie cristallographique de la martensite la déformation de transformation n'est pas isotrope [Patoor 95]. Son intensité dépend très fortement du type de variantes présentes dans le matériau et donc de la direction de $\bar{\epsilon}_{ij}^T$. Dans le modèle présenté, cet effet est introduit en utilisant un critère de saturation de l'orientation fonction de la direction de la déformation de transformation :

$$\frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon}_{ij}^T \bar{\epsilon}_{ji}^T}{\epsilon_{max}^T} \leq \sqrt{1 + \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\epsilon}_{ij}^T \bar{\epsilon}_{jk}^T \bar{\epsilon}_{ki}^T}{(\bar{\epsilon}_{ij}^T \bar{\epsilon}_{ji}^T)^{\frac{3}{2}}}} \quad (3.19)$$

où $0 \leq \beta \leq 1$ est un paramètre introduisant la dissymétrie du comportement (pour $\beta = 0$ on retrouve le critère de Von Mises).

Remarquons que classiquement la dissymétrie du comportement est introduite à l'aide d'une surface de charge de transformation dissymétrique en fonction de la direction de chargement mécanique. Le critère présenté ici a un effet opposé aux critères classiques : un critère classique sur la contrainte de chargement va prédire une contrainte limite de transformation plus faible en traction qu'en compression, au contraire un critère sur la déformation maximale de transformation doit prévoir une valeur de déformation plus grande en traction qu'en compression. Le critère sur la déformation de transformation présenté ici est basé sur un critère en contrainte limite de transformation proposé par Patoor [Patoor 96].

Nous pouvons maintenant réécrire l'expression de l'enthalpie libre du VER :

$$\begin{aligned} \Delta G(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) &= -\Delta T S^A + B(T - T_0) f \\ &\quad - (\Sigma_{ij} \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} \alpha_{ij} \Delta T + \Sigma_{ij} f \bar{\varepsilon}_{ij}^T) + W_{el}(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) \end{aligned} \quad (3.20)$$

où $B = -\Delta S$ (on a $B > 0$ car $S^M < S^A$), $T_0 = \frac{\Delta U}{\Delta S}$ est la température d'équilibre de la transformation et le terme $W_{el}(\Sigma_{ij}, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \mathcal{S}_{ijkl} \sigma_{kl}(r) dV$ décrit l'énergie élastique stockée dans le VER.

L'étape suivante consiste à donner une expression explicite de l'énergie élastique stockée W_{el} en fonction des variables de contrôle (Σ_{ij}, T) et internes $(f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T)$.

3.3.2 Énergie élastique stockée

Le terme d'énergie élastique stockée joue un rôle très important car de lui va dépendre l'évolution des variables internes au cours du chargement. Mais il est aussi le plus difficile à exprimer car il a pour origine les incompatibilités de déformation dans la micro-structure du matériau. Il paraît donc nécessaire de descendre à des échelles plus fine que celle du VER, pour analyser les interactions micro-structurales et pouvoir les quantifier à l'aide de paramètres et variables macroscopiques.

Échelles de la micro-structure

Exprimons tout d'abord sous une autre forme l'énergie élastique. Initialement :

$$W_{el} = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \mathcal{S}_{ijkl} \sigma_{kl}(r) dV \quad (3.21)$$

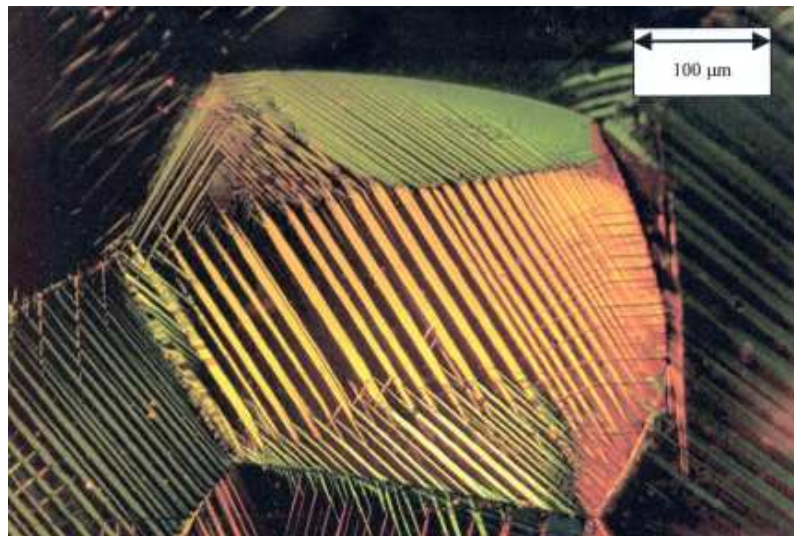
En utilisant la relation cinématique locale au point (r) de volume dV nous avons :

$$W_{el} = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) (\varepsilon_{ij}(r) - \alpha_{ij} \Delta T - \varepsilon_{ij}^T(r)) dV \quad (3.22)$$

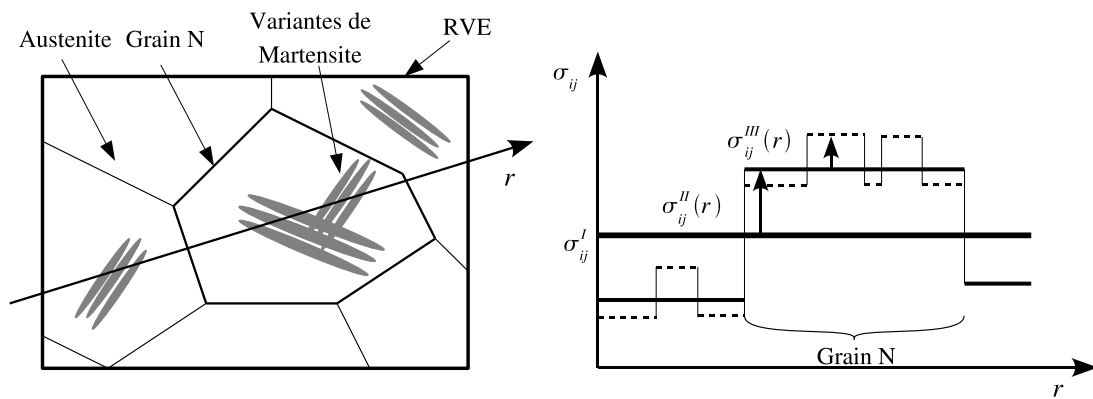
qui nous donne après intégration par partie et en tenant compte des conditions aux limites du VER :

$$W_{el} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij} - \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \alpha_{ij} \Delta T - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (3.23)$$

Nous avons dégagé deux contributions macroscopiques à l'énergie élastique, mais il reste encore un terme sous forme d'intégrale. Ce terme est directement lié aux incompatibilités de



(a) Microscopie optique avec polarisation d'un grain de CuAlBe (Niclaey 02a)



(b) Échelles de la microstructure

FIG. 3.3 – Microstructure des AMF polycristallins.

déformation à l'intérieur du VER induites par la présence de martensite et sa déformation de transformation $\varepsilon_{ij}^T(r)$. Recherchons les origines physique de ces incompatibilités.

L'observation de la micro-structure du VER d'un AMF polycristallin montre qu'on peut décomposer la structure du matériau en 3 échelles caractéristiques : le volume complet du VER ordre(I), l'échelle des grains ordre(II) et l'échelle des variantes à l'intérieur de chaque grain ordre (III). A chaque échelle les incompatibilités de déformation induisent une fluctuation de la contrainte par rapport au champ de contrainte macroscopique appliqué. La contrainte est décomposée en une somme de 3 contributions (figure 3.3) :

$$\sigma_{ij}(r) = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}(r) + \sigma_{ij}^{III}(r) \quad (3.24)$$

avec :

- La contrainte d'ordre I, $\sigma_{ij}^I = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(r) dV$, qui est la contrainte moyenne sur le volume V . À l'équilibre mécanique elle est égale à la contrainte macroscopique appliquée au VER $\sigma_{ij}^I = \Sigma_{ij}$.
- La contrainte d'ordre II, $\sigma_{ij}^{II}(r) = \frac{1}{V_N} \int_{V_N} \sigma_{ij}(r) dV - \sigma_{ij}^I$, qui est la différence entre la contrainte moyenne du grain N et la contrainte globale σ_{ij}^I . Elle est liée aux incompatibilités entre les différents grains déformés par la transformation de phase.
- La contrainte d'ordre III, $\sigma_{ij}^{III}(r) = \sigma_{ij}(r) - \sigma_{ij}^{II}(r) - \sigma_{ij}^I$, qui est la différence entre la contrainte locale au point (r) et la contrainte moyenne dans le grain N . Elle est liée aux incompatibilités entre les variantes de martensite.

Cette décomposition de la contrainte se traduit par 3 sources de stockage d'énergie élastique :

$$W_{el} = W_{macro} + W_{intergranulaire} + W_{intervariantes} \quad (3.25)$$

avec :

- L'énergie élastique de déformation macroscopique du VER :

$$\begin{aligned} W_{macro} &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij} - \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \alpha_{ij} \Delta T - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^I(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij} - \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \alpha_{ij} \Delta T - \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^T(r) dV \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij} (E_{ij} - \alpha_{ij} \Delta T - E_{ij}^T) \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} \end{aligned} \quad (3.26)$$

- L'énergie d'interaction inter-granulaire :

$$W_{intergranulaire} = -\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{II}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (3.27)$$

- L'énergie d'interaction inter-variantes :

$$W_{intervariantes} = -\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{III}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (3.28)$$

Nous cherchons maintenant à donner une expression macroscopique des deux derniers termes. Nous allons pour cela nous baser sur les résultats d'approches micromécaniques et de techniques d'homogénéisation et introduire certaines hypothèses simplificatrices.

Estimation de l'énergie inter-granulaire

Concentrons nous tout d'abord sur l'échelle du grain. La contrainte d'ordre (II) $\sigma_{ij}^{II}(r)$ est une fonction continue par morceaux qui prend une valeur constante $\sigma_{ij}^{II}(N)$ dans chaque grain N . L'expression intégrale de l'énergie inter-granulaire se simplifie donc en une somme de la contribution de chaque grain :

$$W_{intergranulaire} = -\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{II}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV = -\frac{1}{2} \sum_N \sigma_{ij}^{II}(N) \varepsilon_{ij}^T(N) \frac{V_N}{V} \quad (3.29)$$

avec $\varepsilon_{ij}^T(N) = \frac{1}{V_N} \int_{V_N} \varepsilon_{ij}^T(r) dV$ la déformation de transformation moyenne du grain N de volume V_N .

Une technique d'homogénéisation classique consiste à considérer chaque grain N comme étant l'inclusion d'une ellipsoïde de déformation de transformation $\varepsilon_{ij}^T(N)$ dans un milieu ayant une déformation homogène E_{ij}^T . La solution de Kröner de ce problème nous donne l'expression de la contrainte dans le grain N :

$$\sigma_{ij}^{II}(N) = C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) \left(E_{kl}^T - \varepsilon_{kl}^T(N) \right) \quad (3.30)$$

avec C_{ijmn} le tenseur élastique du matériau, I_{mnkl} le tenseur identité et $\mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N)$ le tenseur d'Eshelby du grain N .

En incluant (3.30) dans (3.29) l'énergie inter-granulaire est exprimée sous la forme :

$$\begin{aligned} W_{intergranulaire} &= -\frac{1}{2} \sum_N C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) E_{kl}^T \varepsilon_{ij}^T(N) \frac{V_N}{V} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_N C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) \varepsilon_{kl}^T(N) \varepsilon_{ij}^T(N) \frac{V_N}{V} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le premier terme correspond à l'interaction de tout le volume du VER localement sur le grain N . En faisant l'hypothèse que chaque grain a une géométrie identique ou au moins le même rapport de forme, alors le tenseur d'Eshelby $\mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N)$ identique pour tous les grains :

$$-\frac{1}{2} \sum_N C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) E_{kl}^T \varepsilon_{ij}^T(N) \frac{V_N}{V} = -\frac{1}{2} C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) E_{kl}^T E_{ij}^T \quad (3.32)$$

Le second terme est l'auto-interaction du grain N sur lui-même. En première approximation, ce terme est supposé identique pour chaque grain et il est approché en prenant la valeur calculée pour un grain moyen qui aurait une déformation de transformation E_{ij}^T . De plus les grains sont supposés avoir le même volume V_N :

$$-\frac{1}{2} \sum_N C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) \varepsilon_{kl}^T(N) \varepsilon_{ij}^T(N) \frac{V_N}{V} \approx -\frac{1}{2} \frac{V}{V_N} C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - \mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) \right) E_{kl}^T E_{ij}^T \quad (3.33)$$

Les deux termes (3.32) et (3.33) sont regroupé en introduisant un tenseur matériau d'interaction H_{ijkl} :

$$W_{intergranulaire} = \frac{1}{2} H_{ijkl} E_{kl}^T E_{ij}^T \quad (3.34)$$

avec $H_{ijkl} = \left(1 + \frac{V}{V_N} \right) C_{ijmn} \left(\mathbf{S}_{mnkl}^{esh}(N) - I_{mnkl} \right)$.

L'expression est encore simplifiée en supposant en première approximation que H_{ijkl} peut s'écrire sous la forme :

$$H_{ijkl} = H_{grain} I_{ijkl} \quad (3.35)$$

$$W_{intergranulaire} = \frac{1}{2} H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T f^2 \quad (3.36)$$

De nombreuses hypothèses simplificatrices ont été faites qui conduisent à négliger les différences entre les grains et en particulier la texture du matériau, mais elles nous permettent de n'introduire qu'un seul paramètre matériau H_{grain} .

D'autre part ce terme d'interaction est tout à fait analogue au terme d'énergie interne introduit en plasticité pour décrire l'effet d'écrouissage cinématique linéaire ($= \frac{1}{2} H E_{ij}^P E_{ij}^P$).

Estimation de l'énergie inter-variantes

Nous nous concentrons maintenant sur la présence de variantes de martensite à l'intérieur des grains d'austénite. L'énergie intervariantes du grain N de volume V_N s'écrit :

$$w_{intervariantes}^N = -\frac{1}{2V_N} \int_{V_N} \sigma_{ij}^{III}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (3.37)$$

L'énergie globale sur tout le VER est alors la moyenne des contributions de chaque grain :

$$W_{intervariantes} = \sum_N w_{intervariantes}^N \frac{V_N}{V} \quad (3.38)$$

Par une analyse micromécanique du comportement thermoélastique d'un grain d'AMF, Siredey exprime de la manière suivante l'énergie d'interaction inter-variantes dans un cristal d'AMF [Siredey 99] :

$$w_{intervariant}^N = \frac{1}{2} \sum_{m,n} f_m \mathcal{H}^{mn} f_n \quad (3.39)$$

avec f_n la fraction volumique de la variante n et \mathcal{H}^{mn} les coefficients d'énergie d'interaction entre les variantes n et m . Ces coefficients ne peuvent prendre que deux valeurs suivant la compatibilité ou l'incompatibilité des variantes n et m considérées. On soulignera notamment la forme quadratique en f_n de cette expression.

Afin de nous ramener à la variable macroscopique f , deux hypothèses simplificatrices sont introduites. Premièrement, quelque soit le chargement le même nombre de variantes compatibles et le même nombre de variantes incompatibles apparaissent et deuxièmement leurs fraction volumique f_n évolue proportionnellement à la fraction volumique globale f . Nous pouvons alors réduire (3.39) :

$$W_{intervariantes} = \frac{1}{2} H_{variante} f^2 \quad (3.40)$$

Ces hypothèses sont acceptables pour des chargements proportionnels mais négligent l'influence de la cristallographie. Néanmoins, elles permettent de n'introduire qu'un seul paramètre matériau $H_{variante}$.

3.3.3 Équilibre thermodynamique du VER

L'enthalpie libre du VER a été définie de manière explicite au cours des paragraphes précédents en utilisant uniquement deux variables internes macroscopiques : la fraction volumique de martensite et l'orientation moyenne de la phase martensitique. Pour modéliser complètement le comportement thermomécanique des AMF, il nous faut définir les lois d'évolution de ces variables internes.

Les variables internes ne sont pas pilotées directement par l'expérimentateur. Seules les variables de contrôle peuvent être modifiées et induire un déséquilibre dans l'état du matériau. Afin de retrouver son équilibre interne l'état du matériau va évoluer : en créant ou consommant de la martensite et en réorientant les variantes existantes. Les lois d'évolutions dérivent donc directement de l'équilibre thermodynamique du VER. Cet équilibre est défini en appliquant les 1^{er} et 2nd principes de la thermodynamique à l'enthalpie libre du VER. Nous montrerons que cela se réduit à chercher les valeurs des variables internes qui minimisent ΔG . Pour réaliser cette minimisation il faut tenir compte des limitations physiques contraignant l'évolution des variables internes. Ce problème d'optimisation sous contrainte est résolu en introduisant le formalisme de Kuhn-Tucker.

Expression enthalpie libre du VER

En combinant les différents termes construits au cours des précédents paragraphes nous pouvons finalement donner une expression explicite de l'enthalpie libre du VER :

$$\begin{aligned} \Delta G(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) &= -\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\mathcal{S}_{ijkl}\Sigma_{kl} - \Sigma_{ij}\alpha_{ij}\Delta T - \Delta TS^A + B(T - T_0)f - \Sigma_{ij}f\bar{\varepsilon}_{ij}^T \\ &\quad + \frac{1}{2}H_{\text{grain}}\bar{\varepsilon}_{ij}^T\bar{\varepsilon}_{ij}^T f^2 + \frac{1}{2}H_{\text{variante}}f^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pour construire cette expression de ΔG nous n'avons fait aucune hypothèse restrictive sur les variables internes. Donc elle ne tient pas compte des limitations physiques des variables internes (3.17), (3.18) et (3.19) qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 &\leq f \leq 1 \\ \bar{\varepsilon}_{kk}^T &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{eq}^T - \varepsilon_{sat}^T &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec $\varepsilon_{sat}^T = \varepsilon_{max}^T \left(1 + \beta\sqrt{6\frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T\bar{\varepsilon}_{jk}^T\bar{\varepsilon}_{ki}^T}{(\bar{\varepsilon}_{ij}^T\bar{\varepsilon}_{ji}^T)^{\frac{3}{2}}}} \right)^{\frac{1}{4}}$ et $\bar{\varepsilon}_{eq}^T = \sqrt{\frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_{ij}^T\bar{\varepsilon}_{ij}^T}$.

L'expression (3.41) n'est valable que dans le cas où les variables internes respectent les conditions de limitations physiques (3.42). Pour travailler sur une expression qui intègre directement ces conditions on utilise le formalisme de Kuhn-Tucker. Il s'agit de définir 3 multiplicateurs de Lagrange λ_0 , λ_1 et λ_2 , puis de construire le Lagrangien à partir de l'expression de l'énergie du VER. Les multiplicateurs de Lagrange doivent par définition être positifs ou nuls et vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_0 \cdot f &= 0 \\ \lambda_1 \cdot (1 - f) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (\varepsilon_{sat}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T) &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ainsi le multiplicateur λ_0 permet de tenir compte de la condition $f \geq 0$. En effet la première équation implique que λ_0 prend une valeur nulle tant que $f > 0$ et une valeur positive lorsque f

atteint 0. De la même façon le multiplicateur λ_1 est associé à la condition $f \leq 1$ et λ_2 est associé à la condition $\bar{\varepsilon}_{eq}^T - \varepsilon_{sat}^T \leq 0$.

Le Lagrangien est construit en ajoutant les termes nuls (3.43) à l'expression de ΔG :

$$\mathcal{L}(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = \Delta G(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) - \lambda_0 \cdot f - \lambda_1 \cdot (1 - f) - \lambda_2 \cdot (\varepsilon_{sat}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T) \quad (3.44)$$

Tant que les variables internes respectent leurs limitations physique les trois multiplicateurs sont nuls et $\mathcal{L} = \Delta G$. Par contre en introduisant les 3 inconnues supplémentaire λ_0 , λ_1 et λ_2 et leur équations associées les variables internes restent nécessairement bornées. Nous pourrons donc dans la suite de l'étude thermodynamique remplacer l'expression de l'enthalpie ΔG par celle du lagrangien \mathcal{L} accompagné des trois relations (3.43).

Forces thermodynamiques

Nous allons maintenant traduire en équation l'équilibre thermodynamique du VER en utilisant les 1^{er} et 2nd principes. Nous nous plaçons dans le cas où le VER est à l'équilibre thermique, c'est à dire que le flux de chaleur vers l'extérieur est nul. En effet, la transformation étant contrôlée directement par la température et non par le flux de chaleur nous pouvons découpler l'équilibre thermique de l'équilibre mécanique. Néanmoins, la transformation de phase a une influence sur la propagation de chaleur du fait de la chaleur latente de transformation. Nous supposons par la suite que la température est connue et identique en tout point du VER.

Le 1^{er} principe de la thermodynamique permet d'exprimer l'équilibre énergétique du VER par rapport aux échanges avec l'extérieur : l'accroissement de l'énergie interne volumique dU du matériau dépend du travail extérieur appliqué δW et de la chaleur apportée δQ :

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (3.45)$$

Si on impose au matériau une contrainte Σ_{ij} le seul travail apporté est mécanique :

$$\delta W = \Sigma_{ij} dE_{ij} \quad (3.46)$$

Pour travailler à contrainte et température imposée, il est préférable de travailler avec l'enthalpie libre plutôt que l'énergie interne :

$$G = U - TS - \Sigma_{ij} E_{ij} \quad (3.47)$$

$$dG = -TdS - SdT - E_{ij} d\Sigma_{ij} + \delta Q \quad (3.48)$$

Le 2nd principe de la thermodynamique permet d'exprimer l'équilibre interne du matériau. On exprime pour cela l'entropie du VER comme la contribution de 3 sources : échange avec l'extérieur sous forme de chaleur, entropie interne créée par un changement d'état du matériau et entropie interne irréversible :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_{chgt\ etat} + dS_{irreversible} \quad (3.49)$$

Dans un premier temps les sources d'irréversibilités sont négligées (piégeage de martensite, plasticité) et on considère que toute l'entropie interne créée lors de la transformation de phase et la réorientation de variantes de martensite est totalement récupérable par un chauffage ou une décharge mécanique :

$$dS_{irreversible} \approx 0 \quad (3.50)$$

Le 2nd principe dit que la création d'entropie due à l'évolution de l'état interne du matériau est toujours positive ou nulle : tant que $dS_{chgt\ etat} > 0$ l'état interne du matériau évolue spontanément, jusqu'à atteindre le point d'équilibre $dS_{chgt\ etat} = 0$ [Hillert 98] :

$$dS_{chgt\ etat} \geq 0 \quad (3.51)$$

D'où l'inégalité sur l'entropie du VER :

$$dS - \frac{\delta Q}{T} \geq 0 \quad (3.52)$$

$$TdS - \delta Q \geq 0 \quad (3.53)$$

Dans cette inégalité on remplace l'expression de δQ par celle tirée de (3.48) pour aboutir à la relation de Clausius-Duhem (avec l'hypothèse du flux de chaleur nul) :

$$-dG - SdT - E_{ij}d\Sigma_{ij} \geq 0 \quad (3.54)$$

Pour intégrer les limitations physiques des variables internes l'enthalpie est remplacée par le Lagrangien (3.44) et les relations qui l'accompagne (3.43). En développant la différentielle du Lagrangien 4 forces thermodynamiques sont définies :

$$F_{\sigma_{ij}}d\Sigma_{ij} + F_TdT + F_fdf + fF_{\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}^T \geq 0 \quad (3.55)$$

avec les forces thermodynamiques associées à chaque variable :

> force élastique :

$$F_{\sigma_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Sigma_{ij}} = \mathcal{S}_{ijkl}\Sigma_{kl} + \alpha_{ij}\Delta T + f\varepsilon_{ij}^T - E_{ij} \quad (3.56)$$

> force entropique :

$$F_T = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = \Sigma_{ij}\alpha_{ij} + S^A - Bf - S \quad (3.57)$$

> la force thermodynamique de transformation :

$$F_f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \Sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^T - B(T - T_0) - H_{variant}f - H_{grain}\varepsilon_{ij}^T\varepsilon_{ij}^T f - \lambda_0 + \lambda_1 \quad (3.58)$$

> la force thermodynamique d'orientation :

$$F_{\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_{ij}^T} = \Sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\Sigma_{kk}}{3} - H_{grain}f\varepsilon_{ij}^T - \lambda_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{sat}^T}{\partial \varepsilon_{ij}^T} - \frac{\partial \varepsilon_{eq}^T}{\partial \varepsilon_{ij}^T} \right) \quad (3.59)$$

Ici nous avons sorti un facteur f toujours positif de l'expression de la force d'orientation en sachant que lorsque $f = 0$ il n'y a pas de martensite et la force d'orientation ne peut pas être activée. Notons également que nous avons directement intégré la contrainte $\varepsilon_{kk}^T = 0$ dans la force d'orientation en retranchant la pression hydrostatique $\delta_{ij}\frac{\Sigma_{kk}}{3}$ à la contrainte Σ_{ij} .

L'équilibre thermoélastique étant beaucoup plus rapide que la transformation de phase les forces élastiques et entropiques sont toujours nulles :

$$F_{\sigma_{ij}} = 0 \quad (3.60)$$

$$F_T = 0 \quad (3.61)$$

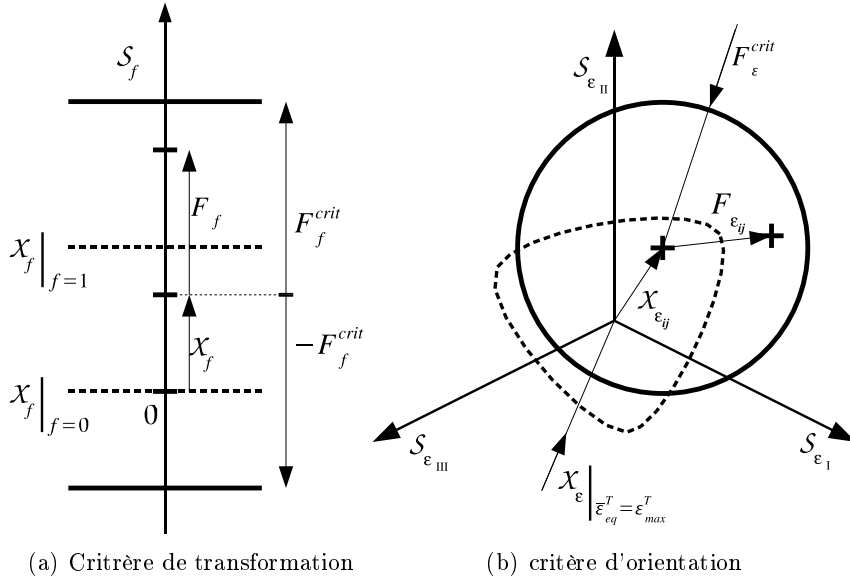


FIG. 3.4 – Critères de charge

D'autre part, puisque les variables internes sont indépendantes, l'équilibre de chaque forces thermodynamiques doit être traité indépendamment :

$$F_f df \geq 0 \quad (3.62)$$

$$F_{\epsilon_{ij}} d\bar{\epsilon}_{ij}^T \geq 0 \quad (3.63)$$

Ces deux inégalités expriment l'équilibre interne du matériau. Mais elles ne sont pas réellement exploitable sous cette forme. Classiquement elles sont transformée en deux critères de charges.

Critères de charge

Deux forces thermodynamiques ont été construites. Dans le cadre des matériaux standards généralisés, l'équilibre thermodynamique de ces deux forces est exprimé à l'aide de deux critères de charge, associés à deux lois d'écoulement normal à la surface de charge. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les phénomènes dissipatifs sous forme de deux forces critiques.

Critère d'orientation. La phénoménologie de la réorientation montre l'existence d'une contrainte critique symétrique traction / compression. Dans un premier temps, une force critique constante $F_{\epsilon}^{critique}$ est introduite, ainsi qu'une norme de Von Mises :

$$|F_{\epsilon_{ij}}| = \sqrt{\frac{3}{2} F_{\epsilon_{ij}} F_{\epsilon_{ij}}} \quad (3.64)$$

Le critère d'orientation est défini de la manière suivante (figure 3.4) :

$$\succ \text{ si } |F_{\epsilon_{ij}}| = F_{\epsilon}^{critique} \text{ et } d|F_{\epsilon_{ij}}| > 0$$

↪ alors le critère d'orientation est actif : évolution de $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ dans la direction de la normale à la surface de charge

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^T = \lambda_\varepsilon \frac{\partial |F_{\varepsilon_{ij}}|}{\partial F_{\varepsilon_{ij}}} = \lambda_\varepsilon \frac{F_{\varepsilon_{ij}}}{|F_{\varepsilon_{ij}}|} \quad (3.65)$$

> sinon critère inactif.

Puisque $F_{\varepsilon_{ij}}$ est fonction des deux variables internes, l'état "critère d'orientation inactif" ne signifie pas $d\bar{\varepsilon}_{ij}^T = 0$. Pour définir l'état inactif, il est nécessaire de décomposer la force d'orientation en un terme de contrainte thermodynamique motrice $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{ij}}$ et un terme de contrainte thermodynamique interne $\mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}}$:

$$F_{\varepsilon_{ij}} = \mathfrak{S}_{\varepsilon_{ij}} - \mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}} \quad (3.66)$$

avec

$$\mathfrak{S}_{\varepsilon_{ij}} = \Sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Sigma_{kk}}{3} \quad (3.67)$$

et

$$\mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}} = H_{grain} f \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \lambda_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{sat}^T}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}^T} - \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}^T}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}^T} \right) \quad (3.68)$$

L'état inactif exprime le fait que la contrainte motrice est trop faible pour entraîner l'évolution de la contrainte interne qui reste constante $\mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}} = \text{constante}_{ij}$ qui s'écrit également $d\mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}} = 0$. Notons que l'équation $d\mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}} = 0$ implique que lorsque $df \neq 0$ on a $d\bar{\varepsilon}_{ij}^T \neq 0$.

Critère de transformation. La construction du critère de transformation est très similaire à la précédente. Une force critique constante $F_f^{critique}$ est introduite pour décrire l'hystérésis entre la transformation directe et la transformation inverse. Puisque la force de transformation est scalaire, la norme de la force sera calculée à l'aide de la fonction valeur absolue $|F_f|$.

Le critère de transformation s'écrit (figure 3.4) :

> si $|F_f| = F_f^{critique}$ et $d|F_f| > 0$

↪ alors critère de transformation actif , f évolue :

$$df = \lambda_f \frac{\partial |F_f|}{\partial F_f} = \lambda_f \text{signe}(F_f) \quad (3.69)$$

> sinon transformation inactive.

Comme précédemment, pour définir l'état inactif, la force de transformation est décomposée en une contrainte motrice \mathfrak{S}_f et une contrainte interne \mathfrak{X}_f :

$$F_f = \mathfrak{S}_f - \mathfrak{X}_f \quad (3.70)$$

avec

$$\mathfrak{S}_f = \Sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^T - B(T - T_0) \quad (3.71)$$

et

$$\mathfrak{X}_f = H_{variant} f + H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T f + \lambda_0 - \lambda_1 \quad (3.72)$$

L'état de transformation inactive est défini par l'équation $d\mathfrak{X}_f = 0$.

La force de transformation étant scalaire, le critère de transformation peut être décomposé en deux critères classiques :

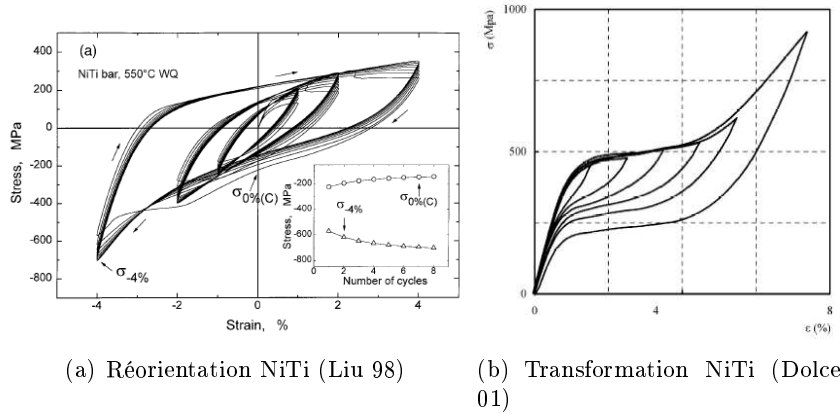


FIG. 3.5 – Comportement en chargements partiels

Étudions tout d’abord la transformation de phase exprimée par la force de transformation F_f .

- si $F_f = F_f^{critique}$ et $dF_f > 0$ alors transformation directe $A \rightarrow M : df = \lambda_f$
- si $F_f = -F_f^{critique}$ et $dF_f < 0$ alors transformation inverse $M \rightarrow A : df = -\lambda_f$
- sinon transformation inactive $d\mathcal{X}_f = 0$

Les critères de charge utilisés ont une expression simple qui introduit l’hystérésis de transformation et la contrainte critique de réorientation. Dans un deuxième temps, pour décrire plus précisément le comportement en boucles internes, il est nécessaire d’employer une expression plus complexe de la dissipation et des critères de charge.

3.3.4 Chargements partiels

Lors de chargements thermiques ou mécaniques une boucle d’hystérésis principale est obtenue en faisant évoluer la déformation de transformation de la déformation de saturation en compression à la déformation de saturation en traction. Mais si le chargement est stoppé avant la saturation de la déformation, un comportement de boucle partielle est observé, situé à l’intérieur de la boucle principale (voir figure (3.5) et chapitre “Caractérisation”).

Ces boucles internes sont observées lors de la transformation de phase mais également lors du comportement de réorientation de la martensite. En particulier la courbe de 1^{re} charge de réorientation peut être assimilée à une réponse à un chargement partiel. La modélisation de cette courbe est particulièrement importante puisqu’elle permet de tenir compte de l’influence du niveau de contrainte sur la déformation de transformation.

La modélisation du comportement en boucle interne est également importante dans le cadre du calcul de structures : la sollicitation n’est pas homogène sur toute la structure, le matériau est donc principalement soumis à des chargements partiels.

Description des cas de chargement partiels

Dans la littérature, les comportements en boucles internes sont décrits de manière plus ou moins précise :

- Sans boucles internes : décharges élastiques à l’intérieur de la boucle principale (figure 3.6.a).

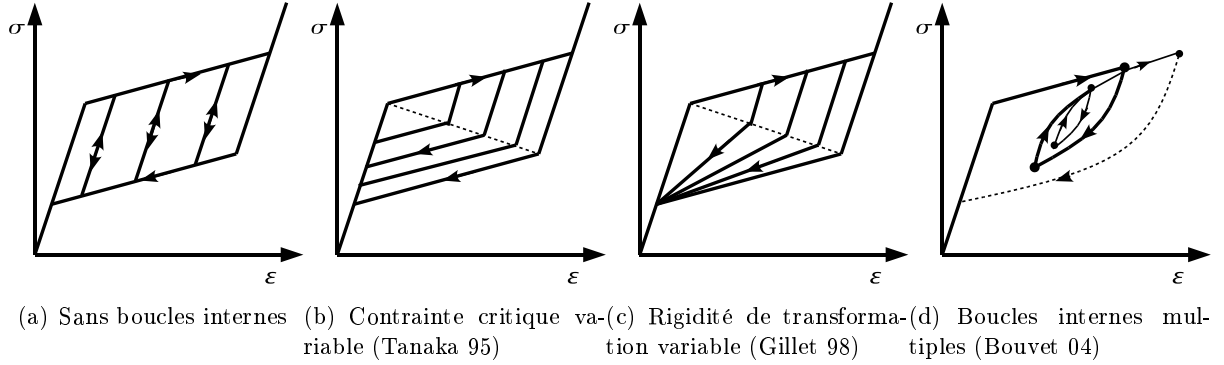


FIG. 3.6 – Description du comportement en chargements partiels

- Tanaka [Tanaka 95] fait évoluer la contrainte critique de transformation directe ou inverse avec l'état du matériau. Puis la cinétique de transformation est identique à celle de la boucle principale (figure 3.6.b).
- Pour rendre compte de l'évolution de la rigidité de transformation dans le cas de boucles internes Gillet [Gillet 98] fait évoluer la contrainte critique de transformation au cours de la cinétique de transformation, de manière à tendre vers le point σ_{A_f} dans le cas de décharges ou vers σ_{M_f} dans le cas de charges (figure 3.6.c).
- Dans le cas de multiples charges - décharges à l'intérieur de la boucle principale il est nécessaire d'introduire un point mémoire à chaque changement de sens et une règle de fermeture de boucle [Bouvet 04] (figure 3.6.d).

Dans la majorité des applications un chargement partiel simple s'avère suffisant. Pour la suite de l'étude nous considérerons donc que le comportement tend toujours vers les points σ_{A_f} ou σ_{M_f} .

Dans la littérature le phénomène de boucle interne est décrit pour la transformation de phase. Mais il est également observé expérimentalement pour des chargements de réorientation de la martensite.

Modélisation des boucles internes

Le modèle présenté introduit un critère de charge de transformation et un critère de charge d'orientation qui font intervenir des paramètres matériaux constants F_f^{crit} et F_ε^{crit} :

$$|F_f| \leq F_f^{critique} \quad (3.73)$$

$$|F_{\varepsilon_{ij}}| \leq F_\varepsilon^{critique} \quad (3.74)$$

Si les deux forces critiques sont ajustées de manière à modéliser correctement le comportement de la boucle d'hystérésis principale alors les réponses à un chargement partiel correspondront à des décharges élastiques dans la boucle principale (figure 3.6.a). Pour modéliser le comportement en boucle internes, il est nécessaire d'abandonner l'hypothèse de forces critiques constantes et de manière plus générale de modifier la forme des critères de charge.

L'effet boucle interne est caractérisé par le fait que le matériau semble se rendre compte des changements de sens de chargement et modifie son comportement en conséquence. Puisque la modélisation de la transformation de phase n'introduit qu'une variable interne scalaire, il est aisé de détecter un changement de sens de la transformation : transformation directe la fraction

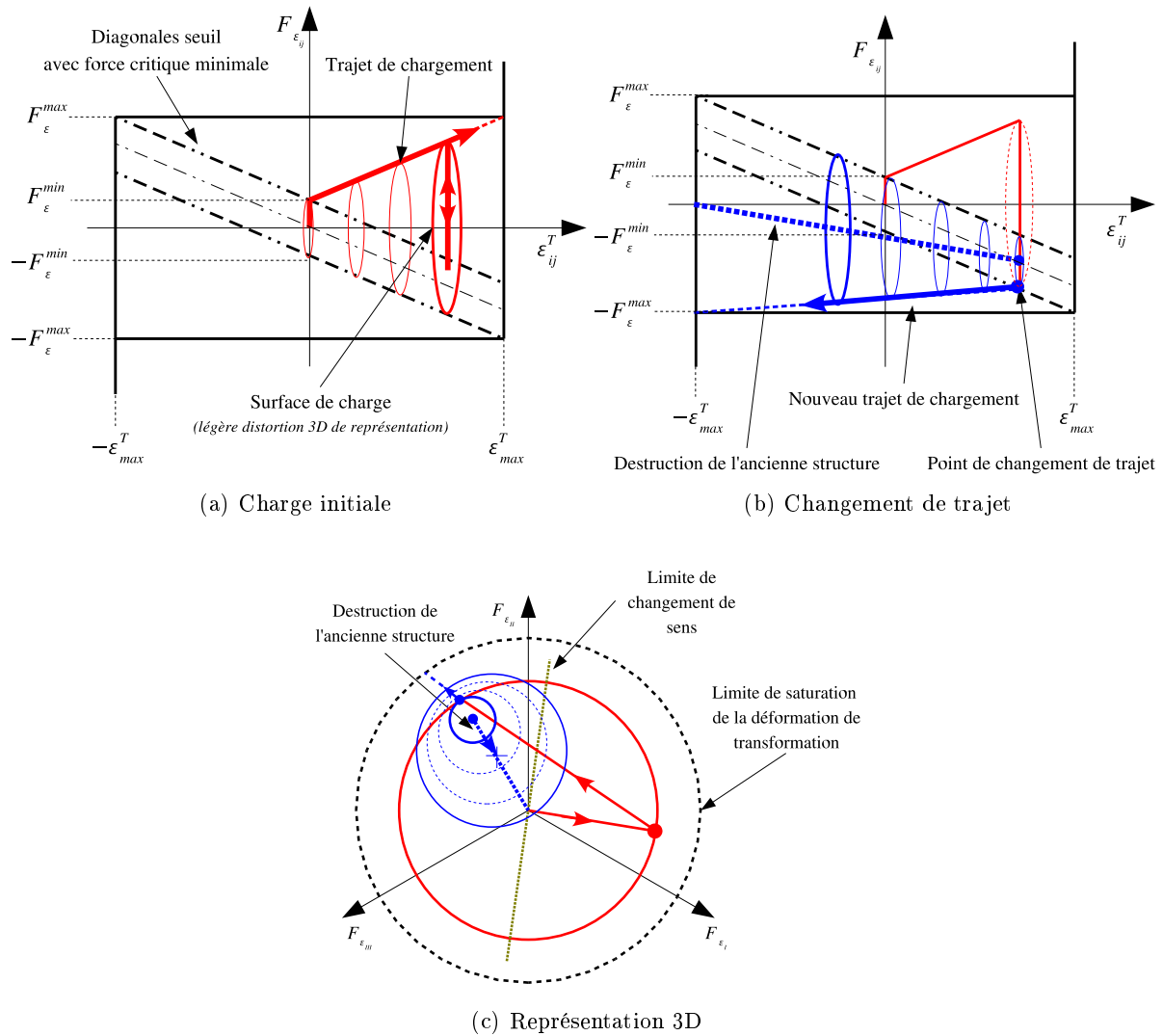


FIG. 3.7 – Boucles internes en réorientation

martensitique augmente, transformation inverse elle diminue. Dans le cas du critère d'orientation le problème est plus complexe puisqu'il fait intervenir une variable interne tensorielle : il n'y a plus de notion de sens de chargement.

De manière à appliquer le même formalisme pour la description des boucles internes de chacune des deux forces, nous allons d'abord nous intéresser au cas plus général de la force d'orientation pour réduire ensuite au cas de la force de transformation.

Structuration du matériau : Pour décrire le fait que le matériau est capable de “détecter” un changement de trajet il faut faire appel à la notion de structure interne au matériau.

Nous supposons donc que la présence de martensite orientée dans le matériau (au contraire de la martensite auto-accommodée) structure celui-ci en privilégiant une direction et un sens d'orientation pour la martensite.

1. Tant que le chargement est dans la direction de la structure, la force critique d'orientation

augmente, jusqu'à atteindre une valeur maximale F_ε^{max} lorsque la martensite est totalement orientée ($\bar{\varepsilon}_{eq}^T = \varepsilon_{sat}^T$). Le matériau se structure dans la direction de la martensite $E_{ij}^T = f\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ (voir figure 3.7.a).

2. Si le chargement est dans une direction opposée à celle de la structure interne alors il y a création d'une nouvelle structure qui vérifie la règle 1). L'ancienne structure (définie par une déformation $E_{ij}^{T^{mem}}$ et une force de résistance $F_{\varepsilon_{ij}}^{mem}$) disparaît petit à petit jusqu'à être totalement détruite lorsque l'état de saturation opposé est atteint et que la nouvelle structure couvre tout le volume (voir figure 3.7.b). L'ancienne structure agit comme un terme d'écoulement cinématique au niveau du critère de charge.

Il est nécessaire de décrire une évolution des structures internes. Il faut pour cela faire intervenir une variable d'évolution notée γ . Cette variable prend la valeur 0 lorsqu'une nouvelle structure est créée et augmente jusque la valeur 1 lorsque la martensite est totalement orientée et que l'ancienne structure a disparu.

De manière à rester le plus général possible nous introduisons une force critique minimale F_ε^{min} qui ne subit pas d'effet boucle interne et qui pourrait correspondre à la force critique du monocristal tandis que l'effet boucle interne proviendrait de l'état polycristallin du matériau.

Mise en équation : Pour tenir compte de l'évolution des structures internes du matériau, le critère de charge d'orientation est écrit sous forme suivante :

$$\left| F_{\varepsilon_{ij}} - (1 - \gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right| \leq \gamma (F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}) + F_\varepsilon^{min} \quad (3.75)$$

Il fait intervenir un aspect cinématique (ancienne structure mémoire) et un aspect isotrope (nouvelle structure en formation).

La direction d'écoulement de la variable d'orientation fait intervenir la force de résistance de l'ancienne structure interne :

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^T = \lambda_\varepsilon \eta_{ij}^{ec} \quad (3.76)$$

avec la normale à la surface de charge :

$$\eta_{ij}^{ec} = \frac{F_{\varepsilon_{ij}} - (1 - \gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem}}{\left| F_{\varepsilon_{ij}} - (1 - \gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right|} \quad (3.77)$$

La variable d'évolution de la boucle interne γ est donnée par une équation implicite qui fait intervenir la structure interne actuelle, formée de la nouvelle structure de déformation $f\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et du résidu de l'ancienne structure de déformation $E_{ij}^{T^{mem}}$:

$$\gamma = \frac{\left| f\bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1 - \gamma) E_{ij}^{T^{mem}} \right|}{\varepsilon_{max}^T} \quad (3.78)$$

Cette relation définit un évolution linéaire de γ entre le point de changement de trajet ($\gamma = 0$) et la limite de saturation de l'orientation de la martensite ($\gamma = 1$) .

Un changement de sens est détecté lorsque la direction d'écoulement est opposée à la direction de la structure actuelle du matériau :

$$\eta_{ij}^{ec} (f\bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1 - \gamma) E_{ij}^{T^{mem}}) < 0 \quad (3.79)$$

S'il y a changement de sens, la structure actuelle du matériau devient l'ancienne structure, permettant la formation d'une nouvelle structure. Les variables mémoires sont mises à jour de manière à ce que le comportement soit continu :

$$E_{ij}^{Tmem} = f \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (3.80)$$

$$F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} = (1 - \gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} + \eta_{ij}^{ec} \gamma (F_{\varepsilon}^{max} - F_{\varepsilon}^{min}) \quad (3.81)$$

Le cas d'un changement de trajet sur un chargement non proportionnel est illustré par la figure (3.7.c).

Cas de la transformation : Pour transposer la formulation tensorielle des boucles internes de réorientation à la formulation scalaire des boucles internes de transformation il suffit de translater le plan $(E_{ij}^T, F_{\varepsilon_{ij}})$ en (f, F_f) : à $0 \leq \left| \frac{E_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^T} \right| \leq 1$ correspond $0 \leq |2f - 1| \leq 1$ et à $0 \leq |F_{\varepsilon_{ij}}| \leq 1$ correspond $0 \leq |F_f| \leq 1$. Les expressions de la surface de charge (3.75) et de la variable d'évolution (3.78) deviennent :

$$|F_f - (1 - \gamma) F_f^{mem}| \leq \gamma (F_f^{max} - F_f^{min}) + F_f^{min} \quad (3.82)$$

$$\gamma = |2f - 1 - (1 - \gamma)(2f^{mem} - 1)| \quad (3.83)$$

en introduisant les termes mémoire F_f^{mem} et f^{mem} .

Ces deux expressions peuvent se simplifier. En effet, dans le cas d'un critère de charge scalaire il y a une relation directe entre F_f^{mem} et f^{mem} :

$$F_f^{mem} = (F_f^{max} - F_f^{min}) (1 - 2f^{mem}) \quad (3.84)$$

De même la variable d'évolution s'exprime simplement :

➤ transformation directe A→M ($f > f^{mem}$) alors $\gamma = \frac{f - f^{mem}}{1 - f^{mem}}$

➤ transformation inverse M→A ($f < f^{mem}$) alors $\gamma = \frac{f^{mem} - f}{f^{mem}}$

Le critère de charge de transformation (3.82) peut être simplifié en distinguant la transformation directe de la transformation inverse et en dédoublant le critère de charge en un critère de transformation et un critère de changement de sens :

➤ si $f > f^{mem}$, transformation directe A→M :

↪ si $F_f > \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{1 - 3f^{mem} + 2f f^{mem}}{1 - f^{mem}} + F_f^{min}$ alors transformation A→M active

↪ si $F_f < \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) (1 - 2f) - F_f^{min}$ alors changement de sens de transformation, réactualisation du terme mémoire $f^{mem} = f^{deb}$

↪ sinon transformation inactive

➤ si $f < f^{mem}$, transformation inverse M→A :

↪ si $F_f < - \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{f^{mem} + 2f(f^{mem} - 1)}{f^{mem}} - F_f^{min}$ alors transformation M→A active

↪ si $F_f > \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) (1 - 2f) + F_f^{min}$ alors changement de sens de transformation, réactualisation du terme mémoire $f^{mem} = f^{deb}$

↪ sinon transformation inactive

L'effet boucles internes est décrit dans le cas de la transformation mais également de la réorientation. Dans les deux cas elles ne font appel qu'à deux paramètres matériaux : la force critique maximale qui décrit la boucle d'hystérésis global et une force critique minimale. En ajustant la valeur de la force critique minimale, l'effet de boucle interne peut être maximal ($F_f^{min} = 0$) ou inexistant ($F_f^{min} = F_f^{max}$)

3.4 Application à des cas de chargement proportionnels

L'objectif de cette modélisation est de déterminer le comportement du matériau en réponse à une sollicitation thermomécanique quelconque. Pour caractériser le matériau à l'échelle macroscopique deux variables internes ont été introduites. À partir de l'étude thermodynamique, deux critères de charges ont été définis chacun associés à une variable interne, qui permettent de calculer l'état interne du matériau suite à une évolution du chargement externe (contrainte et température). Afin de mieux préciser comment les interactions entre les deux critères de charge permettent de reconstituer les différents comportements de l'AMF, plusieurs cas simples vont être étudiés de manière analytique. Les cas de chargements plus complexes seront abordés dans le chapitre suivant après intégration numérique du modèle.

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse d'un chargement proportionnel : le tenseur des contraintes est écrit comme le produit d'un scalaire Σ (positif ou négatif) orienté dans une direction η_{ij} :

$$\Sigma_{ij} = \Sigma \eta_{ij} \quad (3.85)$$

Puisque la contrainte est toujours maintenue dans une direction constante, alors en partant d'une déformation de transformation initialement nulle la force d'orientation et la déformation de transformation s'orientent dans cette même direction η_{ij} :

$$F_{\varepsilon_{ij}} = \Sigma \eta_{ij} - H_{grain} f \bar{\varepsilon}^T \eta_{ij} - \lambda_2 \eta_{ij} = F_\varepsilon \eta_{ij} \quad (3.86)$$

La déformation de transformation moyenne s'écrit donc :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^T = \bar{\varepsilon}^T \eta_{ij} \quad (3.87)$$

où $\bar{\varepsilon}^T$ est un scalaire positif ou négatif.

Dans ces conditions les forces thermodynamiques s'écrivent de manière scalaire :

$$F_f(\Sigma, T, f, \bar{\varepsilon}^T) = \Sigma \bar{\varepsilon}^T - B(T - T_0) - H_{variant} f - H_{grain} \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}^T f - \lambda_0 + \lambda_1 \quad (3.88)$$

et

$$F_\varepsilon(\Sigma, T, f, \bar{\varepsilon}^T) = \Sigma - H_{grain} f \bar{\varepsilon}^T - \lambda_2 \quad (3.89)$$

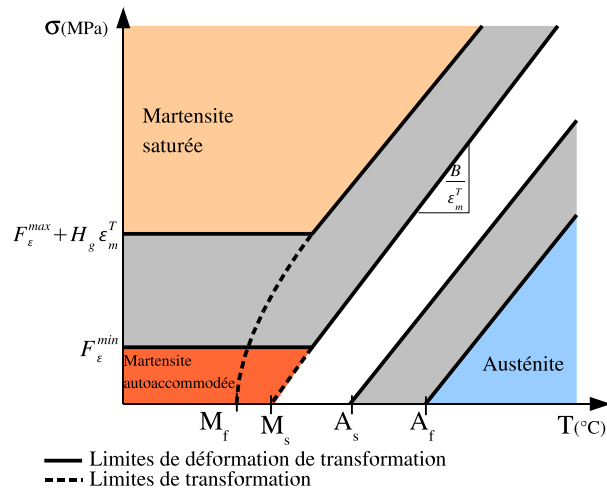
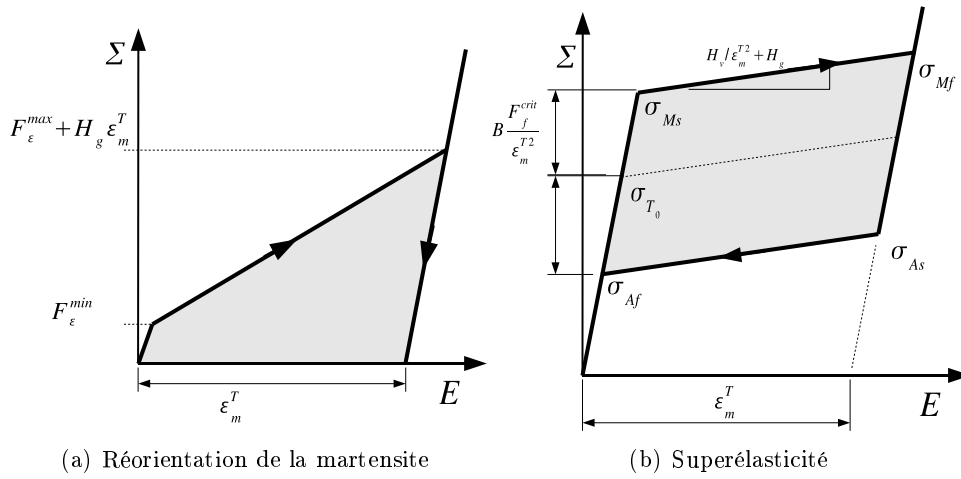
De même pour les limitations des variables internes :

$$\begin{aligned} \lambda_0 \cdot f &= 0 \\ \lambda_1 \cdot (1 - f) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (\varepsilon_{sat}^T - |\bar{\varepsilon}^T|) &= 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Avec cette écriture simplifiée nous pourrions construire les différents comportements typiques : chargements mécaniques, chargements thermiques et cycle mémoire de forme.

3.4.1 Chargements mécaniques

Le comportement du matériau est différent en fonction de la température. On distingue le comportement de réorientation de la phase martensitique, du comportement de transformation lorsque le matériau est initialement en phase austénitique.



(c) Diagramme de transformation mécanique

FIG. 3.8 – Chargements mécaniques typiques prédits par le modèle

Réorientation de la martensite

Un matériau initialement austénitique est refroidi à $T < M_f$ sans appliquer de contrainte : le matériau devient totalement martensitique $f = 1$ et la structure de la martensite est auto-accommodée $\bar{\varepsilon}^T = 0$. Un chargement mécanique est ensuite effectué à température constante, la transformation de phase n'intervenant pas, la fraction de martensite va rester constante à $f = 1$. Le comportement est déduit uniquement du critère d'orientation.

Puisque initialement la structure de la martensite est auto-accommodée il n'y a pas de déformation de transformation, ce qui induit un comportement de boucle interne du critère d'orientation, c'est le comportement de 1^{ère} charge de réorientation :

$$\Sigma - H_{grain}\bar{\varepsilon}^T - \lambda_2 \leq (F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}) \frac{\bar{\varepsilon}^T}{\varepsilon_{max}^T} + F_\varepsilon^{min} \quad (3.91)$$

Ce critère d'orientation est actif à partir d'un niveau de contrainte minimal F_ε^{min} . En dessous il n'y a pas de réorientation, ni de transformation, donc le comportement est élastique. Pour des contraintes plus élevées $\Sigma > F_\varepsilon^{min}$, l'équation (3.91) donne une évolution de la déformation de la martensite proportionnelle au niveau de contrainte :

$$\bar{\varepsilon}^T = \frac{\varepsilon_{max}^T}{H_{grain}\varepsilon_{max}^T + F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}} (\Sigma - F_\varepsilon^{min}) \quad (3.92)$$

Cette expression est valable tant que la déformation de la martensite n'est pas saturée ($\lambda_2 = 0$). Lorsque la saturation est atteinte alors $\bar{\varepsilon}^T = \varepsilon_{max}^T$, la fraction de martensite est toujours constante et le comportement est de nouveau élastique (figure 3.8.a). La contrainte limite de saturation est $\Sigma = F_\varepsilon^{max} + H_{grain}\varepsilon_{max}^T$. Après retour à contrainte nulle il reste une déformation rémanente $E^T = \varepsilon_{max}^T$.

Les deux contraintes limites de début et de fin de déformation de réorientation sont tracées dans le diagramme de phase et sont indépendantes de la température (figure 3.8.c).

Transformation de phase et superélasticité

Un chargement mécanique à température constante est cette fois appliqué sur un matériau initialement austénitique $f = 0$. En l'absence de martensite la variable $\bar{\varepsilon}^T$ n'est pas définie. Dès l'apparition de la première variante, la variable $\bar{\varepsilon}^T$ est définie par le critère d'orientation. Tant que la contrainte ne dépasse pas F_ε^{min} la force d'orientation n'est pas active et $\bar{\varepsilon}^T = 0$, il n'y a pas de déformation de transformation. Au delà, le critère de réorientation nous donne une orientation fonction de la quantité de martensite présente dans le matériau :

$$\bar{\varepsilon}^T = \frac{\varepsilon_{max}^T}{H_{grain}\varepsilon_{max}^T + F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}} \frac{\Sigma - F_\varepsilon^{min}}{f} \quad (3.93)$$

Pour de très faibles valeurs de f , la déformation de transformation propre $\bar{\varepsilon}^T$ devrait être infinie. En réalité elle sature à sa valeur maximale $\bar{\varepsilon}^T = \varepsilon_{max}^T$. On vérifie également que tout le long du chargement superélastique la déformation d'orientation calculée par (3.93) est trop élevée et reste saturée. On retrouve ici l'hypothèse classique d'une déformation de transformation macroscopique proportionnelle à la fraction martensitique pour une transformation par chargement mécanique :

$$E^T = f\varepsilon_{max}^T$$

Le comportement superélastique est donc déterminé uniquement à partir du critère de transformation directe :

$$\Sigma \varepsilon_{max}^T - B(T - T_0) - f(H_{variant} - H_{grain} \varepsilon_{max}^T \varepsilon_{max}^T) = F_f^{critique} \quad (3.94)$$

ou du critère de transformation inverse :

$$\Sigma \varepsilon_{max}^T - B(T - T_0) - f(H_{variant} - H_{grain} \varepsilon_{max}^T \varepsilon_{max}^T) = -F_f^{critique} \quad (3.95)$$

On en déduit les contraintes limites de début de transformation directe et de fin de transformation inverse pour $f = 0$:

$$\sigma_{Ms} = b(T - Ms) \quad (3.96)$$

$$\sigma_{Af} = b(T - Af) \quad (3.97)$$

avec les températures limites de transformation :

$$Ms = T_0 - \frac{F_f^{critique}}{\varepsilon_{max}^T} \quad (3.98)$$

$$Af = T_0 + \frac{F_f^{critique}}{\varepsilon_{max}^T} \quad (3.99)$$

et la dépendance à la température des limites de transformation :

$$b = \frac{B}{\varepsilon_{max}^T} \quad (3.100)$$

On retrouve une dépendance classique des contraintes limites de transformation avec la température. D'autre part, les contraintes limites de transformation σ_{Ms} et σ_{Af} , la pente des limites de transformation b ainsi que l'hystérésis de la transformation ($Af - Ms$) sont fonction de la valeur maximale de déformation de transformation ε_{max}^T . Ils seront donc différents en traction et en compression.

Les contraintes limites de fin de transformation directe et de début de transformation inverse sont plus élevées que σ_{Ms} et σ_{Af} à cause des termes d'interaction :

$$\sigma_{Mf} = \sigma_{Ms} + \frac{H_{variant}}{\varepsilon_{max}^T} + H_{grain} \varepsilon_{max}^T \quad (3.101)$$

$$\sigma_{As} = \sigma_{Af} + \frac{H_{variant}}{\varepsilon_{max}^T} + H_{grain} \varepsilon_{max}^T \quad (3.102)$$

Un comportement typique superélastique est tracé (figure 3.8.b) et le diagramme de phase est complété par des limites de transformation parallèles (figure 3.8.c). Les limites de transformation directe et inverse ne sont pas exactement identiques du fait de la zone de réorientation de la martensite. Les limites de transformation dans la zone de transition réorientation / transformation sont déduites du critère de transformation dans le cas où la contrainte n'est pas suffisamment élevée pour générer une déformation d'orientation saturée et que le critère d'orientation est actif.

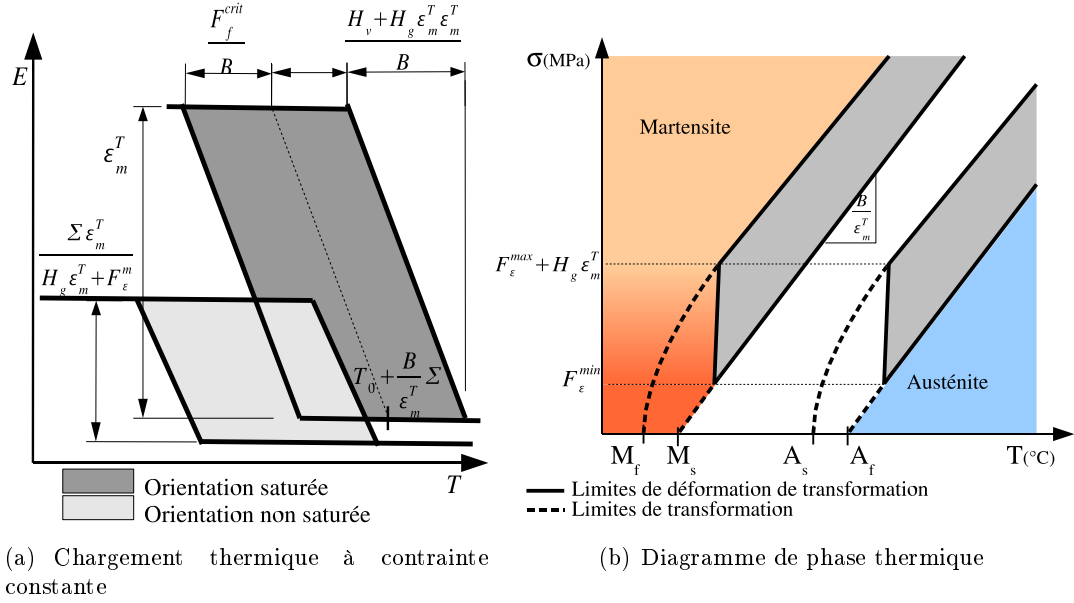


FIG. 3.9 – Chargements thermiques

3.4.2 Chargements thermiques

La température du matériau est modifiée tandis que la contrainte est maintenue constante. Comme pour la superélasticité, ce comportement est lié à la transformation de phase. Mais, en fonction du niveau de contrainte appliquée, le critère d'orientation conduit à une déformation de transformation à saturation variable (figure 3.9.a).

La réponse du matériau se décompose en deux étapes : au cours du refroidissement génération d'une déformation de transformation puis fabrication de martensite auto-accommodée n'induisant pas de déformation supplémentaire. Au cours du chauffage les mêmes étapes interviennent dans l'ordre inverse.

Initialement le matériau est austénitique sans déformation de transformation ($f_{\bar{\epsilon}^T} = 0$). Pour une contrainte suffisamment élevée ($\Sigma > F_\epsilon^{min}$), dès la création de la première variante de martensite le critère d'orientation s'active avec un effet de boucle interne. Comme pour la superélasticité, la déformation d'orientation calculée par (3.93) est trop élevée et sature à sa valeur maximale :

$$\bar{\epsilon}^T = \epsilon_{max}^T \quad (3.103)$$

La martensite fabriquée génère donc une déformation de transformation. La limite de début de transformation directe est donc identique à celle du comportement superélastique.

Si la contrainte appliquée est élevée (supérieure à la limite de réorientation) alors la déformation d'orientation reste saturée tout au long de la transformation.

$$\Sigma > H_{grain} \epsilon_{max}^T + F_\epsilon^{max} \quad (3.104)$$

Mais, pour un niveau de contrainte plus faible, il existe une valeur limite de fraction de martensite :

$$f > \frac{\Sigma - F_\epsilon^{min}}{H_{grain} \epsilon_{max}^T + F_\epsilon^{max} - F_\epsilon^{min}} \quad (3.105)$$

pour laquelle la déformation d'orientation ne sature plus et est déterminée par la relation (3.93). Cette relation peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$f\bar{\varepsilon}^T = \frac{\Sigma - F_\varepsilon^{min}}{H_{grain}\varepsilon_{max}^T + F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}}\varepsilon_{max}^T \quad (3.106)$$

Or, la contrainte appliquée est constante, donc la déformation de transformation globale reste constante :

$$E^T = f\bar{\varepsilon}^T = \text{constante} \quad (3.107)$$

La martensite créée est donc auto-accommodée et globalement ne génère pas de déformation de transformation. À la fin de la transformation $f = 1$, la déformation de transformation sature à :

$$E_{saturation}^T = \frac{\Sigma - F_\varepsilon^{min}}{H_{grain}\varepsilon_{max}^T + F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}}\varepsilon_{max}^T \quad (3.108)$$

La déformation de transformation à saturation est donc proportionnelle au niveau de contrainte. Remarquons que cette expression décrit également la courbe de première charge de réorientation (3.92).

La limite de transformation auto-accommodée est construite en combinant la relation d'orientation (3.106) avec le critère de transformation. Cela définit une limite non-linéaire.

La martensite est ensuite consommée lors du chauffage en deux étapes et dans l'ordre inverse du refroidissement : tout d'abord consommation de la martensite auto-accommodée puis, lorsqu'il ne reste que de la martensite orientée, diminution de la déformation de transformation jusqu'au retour à l'état austénitique. Les limites des transformation directes et inverse sont donc identiques (figure 3.9.b).

Remarquons que l'hystérésis thermique reste constant et que la rigidité de transformation est constante indépendamment du niveau de contrainte.

3.4.3 Effet mémoire de forme

Le dernier chargement classique étudié est le cycle mémoire de forme. Il est caractérisé par la capacité du matériau à générer un effort au cours de la reprise de forme. Cela nécessite que le matériau soit contraint par un élément extérieur de rigidité donnée. La déformation de l'AMF est alors fonction de cette rigidité (figure 3.10).

Ce chargement comporte une première étape de conditionnement du matériau qui consiste à le transformer en martensite orientée $E_{cond}^T = \varepsilon_{max}^T$. Ce conditionnement peut se faire en phase martensitique où par transformation à contrainte élevée.

La deuxième étape consiste à maintenir la déformation du matériau avec un montage extérieur de rigidité K :

$$\Sigma = K (E_{cond}^T - E) \quad (3.109)$$

et à augmenter la température de manière à activer la transformation inverse :

$$F_f = -F_f^{critique} \quad (3.110)$$

Supposons que le montage extérieur ne génère pas initialement de contrainte. La transformation inverse commence à contrainte nulle, à $f = 1$ et lorsque la force de transformation est active :

$$-B(T - T_0) - H_{variant} - H_{grain}\varepsilon_{max}^T\varepsilon_{max}^T = -F_f^{critique} \quad (3.111)$$

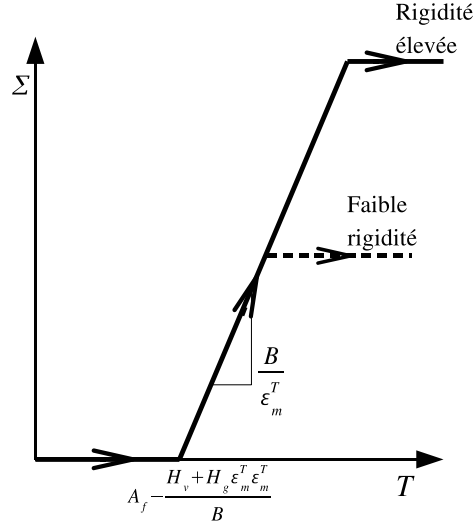


FIG. 3.10 – Retour mémoire contraint

d'où la température de début de transformation inverse :

$$T_{SME} = A_f - \frac{H_{variant} + H_{grain} \varepsilon_{max}^T \varepsilon_{max}^T}{B} \quad (3.112)$$

Puis la martensite est consommée tandis que la contrainte évolue :

$$df = \frac{d\Sigma \varepsilon_{max}^T - B dT}{H_{variant} + H_{grain} \varepsilon_{max}^T \varepsilon_{max}^T} \quad (3.113)$$

En exploitant la relation d'élasticité, cette variation de la fraction martensitique est introduite dans la relation de rigidité du montage :

$$d\Sigma = -K \left(\frac{d\Sigma}{C} + df \varepsilon_{max}^T \right) \quad (3.114)$$

d'où l'influence de la température sur la contrainte générée par retour contraint :

$$\frac{d\Sigma}{dT} = \frac{KB \varepsilon_{max}^T}{K \varepsilon_{max}^T \varepsilon_{max}^T + \left(1 + \frac{K}{C}\right) (H_{variant} + H_{grain} \varepsilon_{max}^T \varepsilon_{max}^T)} \quad (3.115)$$

Remarquons que les termes d'interaction sont généralement négligeable devant K sauf pour une très faible rigidité. Alors la dépendance de la contrainte à la température se simplifie en :

$$\frac{d\Sigma}{dT} \approx \frac{B}{\varepsilon_{max}^T} \quad (3.116)$$

On retrouve les résultats expérimentaux qui montrent que cette pente est bien indépendante de la rigidité du montage contraignant le matériau. Par contre, la contrainte générée ne peut pas augmenter infiniment avec la température mais elle va saturer lorsque toute la martensite aura été consommée. Mais, plus la rigidité du montage sera élevée, plus la contrainte générée par retour contraint sera élevée.

3.5 Conclusion

L'objectif de la modélisation était de réaliser un modèle tridimensionnel du comportement mécanique et thermique des Alliages à Mémoire de Forme ayant un formalisme adaptable aux techniques de calcul de structure par la méthode des Éléments Finis.

De manière assez caricaturale on peut distinguer dans la littérature d'une part les modèles macroscopiques qui sont bien adaptés aux techniques E.F. et d'autre part les modèles microscopiques qui captent bien les aspects de chargements thermomécaniques complexes mais qui ne sont pas adaptés au calcul de structure complexes.

Ce modèle est proposé comme une alternative entre ces deux extrêmes en combinant deux avantages :

- c'est une modélisation de la transformation de phase martensitique. Cela assure la prise en compte de deux phénomènes associés : la transformation de phase et la réorientation de la martensite. De plus le modèle est intrinsèquement écrit en 3D et doit être capable de rendre compte de chargements complexes.
- Le point de vue adopté est macroscopique et le nombre de variables internes et paramètres est limité comparé à ceux employés dans les modèles microscopiques. Cela assure une rapidité de résolution adaptée aux techniques E.F. De plus l'approche énergétique est bien adaptée aux techniques de résolution implicites type Newton-Raphson.

Le modèle se base sur une description originale de l'état du matériau en décomposant de la déformation de transformation en un produit de deux variables internes : la fraction de martensite classiquement introduite pour quantifier l'évolution de la transformation de phase, et la déformation de transformation moyenne de la martensite qui permet de décrire l'orientation de la martensite et la phénomène de réorientation de la martensite.

Une première analyse du modèle montre qu'il permet de capter un grand nombre de phénomènes physiques mis en avant au cours des expérimentations : transformation de phase, réorientation, hystérésis de transformation, influence du niveau de contrainte, retour contraint indépendant de la rigidité du système.

Les chargements testés jusqu'ici étaient des trajets proportionnels. Dans le cas général de trajets plus complexes, le problème ne se résout plus analytiquement et nécessite une intégration numérique des équations.

Nous proposons dans le chapitre suivant de réaliser une intégration implicite robuste et d'implanter ce modèle dans le code de calcul de structures par éléments finis ABAQUS/Umat. Le modèle pourra ensuite être comparé aux résultats expérimentaux du chapitre "caractérisation" et sera testé sur des chargements thermomécaniques plus complexes.

Chapitre 4

Intégration numérique

Sommaire

4.1	Introduction	95
4.2	Intégration numérique	96
4.2.1	Techniques d'intégration	97
4.2.2	Exemples de la littérature	100
4.2.3	Application au modèle du comportement AMF	101
4.3	Choix de la forme du système d'équations	102
4.3.1	Gestion des saturations	102
4.3.2	Loi de normalité	104
4.3.3	Translation de la variable de contrôle mécanique	105
4.3.4	Forme finale du système d'équation	105
4.4	Résolution du système d'équations	106
4.4.1	Sélection du système d'équations actif	106
4.4.2	Algorithme de résolution	107
4.4.3	Modules tangents mécaniques et thermiques	111
4.5	Validation de l'intégration numérique	113
4.5.1	Chargements proportionnels	114
4.5.2	Influence de la discrétisation	115
4.5.3	Changements de trajet	116
4.6	Validation expérimentale du modèle	117
4.6.1	Validation sur les expérimentations NiTi	117
4.6.2	Validation sur les expérimentations AMF à base Cuivre	125
4.6.3	Validation sur trajet complexe	128
4.7	Conclusion	128

4.1 Introduction

Le passage du modèle de la forme analytique à la forme numérique est une nécessité :

- pour pouvoir calculer la réponse du modèle à un chargement complexe non proportionnel,
- dans l'objectif d'une implantation dans un code de calcul de structures par la méthode des Éléments Finis.

Ce passage n'est pas direct et induit des difficultés supplémentaires propres aux aspects numériques et discrets par opposition à la continuité et la dérivabilité du modèle analytique. La solution numérique calculée est toujours une approximation de la solution exacte. Différentes méthodes d'intégration numérique existent qui minimisent l'erreur numérique mais qui sont chacune adaptées à un type d'équations : différentielle, intégrale, non linéaire... De plus il peut être nécessaire d'adapter les équations du modèle analytique de manière à rendre plus efficace les méthodes d'intégrations : par exemple le problème de la gestion de la saturation des variables internes. C'est pourquoi nous avons choisi de dédier un chapitre entier à l'intégration numérique du modèle et aux résultats issus de cette intégration.

Le modèle développé dans le chapitre précédent se résume en un système de deux équations intégrales et une équation différentielle, fonctions de deux inconnues limitées à un intervalle d'évolution borné. Il s'agit de choisir la méthode d'intégration numérique la mieux adaptée à notre problème. Pour cela nous allons nous appuyer sur une étude bibliographique des différentes méthodes d'intégration et de leurs applications dans différents modèles de la littérature.

Une méthode d'intégration implicite en suivant le schéma de Newton/Raphson sera choisie pour intégrer notre modèle. En contre partie il sera nécessaire de modifier les équations du modèle pour s'adapter à cette méthode : gestion de la saturation des variables internes, forme adaptée de la relation de normalité et modification des variables de contrôle du modèle.

Enfin l'intégration sera validée par rapport aux résultats analytiques attendus. Puis les résultats du modèle seront comparés aux expérimentations présentées au chapitre "Caractérisation". D'autres cas de chargements plus complexes de la littérature seront étudiés.

4.2 Intégration numérique

Un modèle du comportement est un ensemble d'équations $\mathcal{M}^{continu}$ qui lie des variables inconnues X et leur différentielle dX à des variables de pilotage imposées Y :

$$\mathcal{M}^{continu}(X, dX, Y, dY) = 0 \quad (4.1)$$

Les équations nécessaires à la description du comportement peuvent être regroupées en deux types :

- Les équations différentielles qui décrivent une évolution des variables :

$$dX = \mathcal{G}(X, Y) dY \quad (4.2)$$

- Les équations intégrales qui définissent un état d'équilibre comme le zéro d'une fonction :

$$\mathcal{F}(X, Y) = 0 \quad (4.3)$$

Notons qu'il est toujours possible par différentiation de réduire une équation intégrale en une équation différentielle. Par contre, dans le cas général il n'est pas possible d'intégrer analytiquement les équations différentielles en équations intégrales.

Le but de l'intégration est de déterminer l'état des variables inconnues $X(t)$ lorsqu'on modifie les variables de pilotage $Y(t)$ en suivant un trajet de chargement donné (avec t un paramètre d'évolution qui correspond au temps physique pour les modèles de comportement dépendant du temps).

Pour effectuer cette intégration de manière numérique il est nécessaire de discrétiser le chargement en une série d'états de chargement $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots, Y_N$ en supposant une évolution linéaire du chargement entre deux états $Y_n : Y_{n+1}$.

Pour chaque état de chargement Y_n , il s'agit de calculer l'état des variables inconnues X_n à partir des équations du modèle. Le calcul est effectué de manière incrémentale avec :

- comme état initial l'état au pas précédent (X_{n-1}, Y_{n-1})
- l'incrément imposé des variables de pilotage $\Delta Y = Y_n - Y_{n-1}$
- $\Delta X = X_n - X_{n-1}$ l'incrément de variables inconnues à calculer en vérifiant les équations du modèle :

$$\mathcal{M}^{incremental}(X_{n-1}, \Delta X, Y_{n-1}, \Delta Y) = 0 \quad (4.4)$$

Le calcul de l'incrément ΔX n'est pas toujours direct et il peut s'avérer nécessaire d'effectuer une série d'itérations $\Delta X^0, \Delta X^1, \dots, \Delta X^i, \dots, \Delta X^I$ de manière à converger vers l'état $X_n = X_{n-1} + \Delta X^I$ qui vérifie les équations du modèle.

Nous voyons que la forme incrémentale du système d'équations est différente de sa forme continue. Cette translation du continu au discret pose deux questions :

1. Comment translate-t-on la différentielle dX en incrément ΔX ?
2. À quel instant écrit-on les équations du modèle ?

- (a) au début de l'incrément, formulation explicite :

$$\mathcal{M}^{incremental}(X_{n-1}, \Delta X, Y_{n-1}, \Delta Y) = 0 \quad (4.5)$$

- (b) en fin d'incrément, formulation implicite :

$$\mathcal{M}^{incremental}(X_n, \Delta X, Y_n, \Delta Y) = 0 \quad (4.6)$$

- (c) à une valeur intermédiaire, formulation semi-implicite :

$$\mathcal{M}^{incremental}(X_{n-1} + \theta \Delta X, \Delta X, Y_{n-1} + \theta \Delta Y, \Delta Y) = 0 \quad (4.7)$$

avec $\theta \in [0 : 1]$

Différentes techniques d'intégration existent chacune adaptée au type d'équation à intégrer. Le choix de la technique d'intégration numérique est d'autant plus important qu'il influe sur la précision et la stabilité de la solution calculée. En conséquence, lorsqu'on veut atteindre l'état de chargement (X_N, Y_N) il est généralement nécessaire de découper le chargement en incréments intermédiaires de manière à augmenter la précision et la stabilité de la solution. En contre partie le temps de calcul augmente et limite le nombre maximum admissible d'incrément.

4.2.1 Techniques d'intégration

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la translation de la différentielle continue en incrément discret. Puis nous étudierons les différentes méthodes de résolution des équations.

Translation de la différentielle en incrément

Les équations différentielles du modèle sont écrites en continu en faisant intervenir la différentielle des variables inconnues :

$$dX = \mathcal{G}(X, Y) dY \quad (4.8)$$

Lors du passage au discret la notion de différentielle dX disparaît, plutôt remplacée par l'incrément ΔX . De manière générale, l'incrément des variables inconnues ΔX est calculé en fonction de l'expression de la différentielle dX :

$$\Delta X = \text{fct}(\mathcal{G}(X_\alpha, Y_\alpha), \Delta Y) \quad (4.9)$$

avec $\alpha = [n; n + \theta; n + 1]$ en fonction du schéma d'intégration explicite / semi-implicite / implicite.

La translation basique, ou méthode d'Euler, provient de l'idée que dans le proche voisinage du point (X_α, Y_α) l'évolution des variables inconnues est linéaire et proportionnelle au taux d'accroissement d'où :

$$\Delta X \approx \mathcal{G}(X_\alpha, Y_\alpha) \Delta Y \quad (4.10)$$

L'hypothèse de linéarité n'est valable que localement autour du point (X_α, Y_α) et il est nécessaire de réaliser de petits incréments de chargements pour que la solution calculée soit précise.

Si une forme approchée de la solution de l'équation différentielle est connue, la précision du calcul sera améliorée en introduisant une relation non linéaire entre ΔX et $\mathcal{G}(X_\alpha, Y_\alpha) \Delta Y$. La technique d'intégration asymptotique est par exemple utilisée pour l'intégration des modèles de plasticité avec écrouissage cinématique non linéaire [Chaboche 96].

Dans le cas général, les méthodes de Runge Kutta 2 et 4 permettent d'estimer la courbure au point (X_n, Y_n) à l'aide de plusieurs calculs du taux d'accroissement à différents points. L'extrapolation n'est plus simplement linéaire, elle permet d'améliorer grandement la précision de la solution conduisant à découper le chargement en de plus grand incréments.

Intégration explicite

Cette technique est directement adaptée à la résolution de systèmes d'équations différentielles $dX = \mathcal{G}(X, Y) dY$ [Nougier 01]. Une fois la fonction de translation différentielle \rightarrow incrément choisie, le système d'équation est exprimé en début d'incrément n :

$$\Delta X = \text{fct}(\mathcal{G}(X_n, Y_n) \Delta Y) \quad (4.11)$$

Dans cette relation toutes les grandeurs sont connues puisque (X_n, Y_n) est l'état initial et ΔY est l'incrément des variables de pilotage. Le calcul de ΔX et de l'état final $(X_n + \Delta X, Y_n + \Delta Y)$ est donc direct, mais également directement dépendant de la précision de la technique d'interpolation et de la taille de l'incrément de chargement.

Pour appliquer cette technique à une équation intégrale du type $\mathcal{F}(X, Y) = 0$, il faut tout d'abord réduire cette équation sous forme différentielle. En effet, partant d'un état équilibré $\mathcal{F} = 0$, l'équilibre à l'instant suivant s'écrit sous la forme $\mathcal{F} + d\mathcal{F} = 0$ qui se simplifie en $d\mathcal{F} = 0$. D'où :

$$d\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X} dX + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y} dY = 0 \quad (4.12)$$

$$\Leftrightarrow dX = \mathcal{G}(X, Y) dY \quad (4.13)$$

avec $\mathcal{G}(X, Y) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X}^{-1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y}$.

Lorsque l'équation différentielle dérive d'une équation intégrale, l'équilibre en fin d'incrément n'est pas nécessairement vérifié $\mathcal{F}(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \epsilon \neq 0$.

La stabilité de la solution numérique est directement liée à la taille de l'incrément, pour de grands incréments la solution calculée va osciller autour de la solution exacte et il existe une valeur critique au-delà de laquelle les oscillations sont divergentes [Nougier 01]. Une solution pour dépasser cette taille maximale d'incrément est l'utilisation d'une intégration implicite.

Intégration implicite

Cette technique est directement adaptée à la recherche de zéros d'un système d'équations $\mathcal{F}(X, Y) = 0$ [Nougier 01]. En partant de l'état initial connu X_n , nous cherchons l'état final des variables inconnues X_{n+1} qui vérifie l'équilibre à la fin de l'incrément $\mathcal{F}(X_{n+1}, Y_{n+1}) = 0$. Cette fois le système à résoudre est fonction de l'état final des variables qui n'est justement pas encore connu : c'est un système implicite.

Dans le cas général, la résolution du système à chaque incrément introduit naturellement une recherche itérative de la solution $X_{n+1}^0, X_{n+1}^1, \dots, X_{n+1}^i, \dots, X_{n+1}^I$. En effet, à partir d'un état estimé X_{n+1}^i le calcul de $\mathcal{F}(X_{n+1}^i, Y_{n+1})$ donne une estimation de l'erreur et de la distance à la solution du problème. Il suffit ensuite d'appliquer une correction aux variables inconnues X_{n+1}^i de manière à réduire l'erreur $\|\mathcal{F}(X_{n+1}^{i+1}, Y_{n+1})\| < \|\mathcal{F}(X_{n+1}^i, Y_{n+1})\|$. En réalisant plusieurs itérations de ce type l'état calculé X_{n+1}^i converge vers la solution exacte du problème X_{n+1} . Néanmoins la principale difficulté réside justement dans le choix d'une correction qui induise une convergence de la série itérative.

Différentes méthodes sont classiquement utilisées pour calculer les corrections des variables inconnues [Fortin 01, Vignes 80] :

- > Pour un système 1D à une équation et une inconnue scalaire il existe les corrections par les méthodes sécantes, de bisection...
- > Le système est écrit sous une forme récurrente $X_{n+1}^{i+1} = \mathcal{H}(X_{n+1}^i)$.
- > Méthode de Newton-Raphson : développement limité au premier ordre du système d'équations.
- > Transformation du système d'équation en un problème de minimisation de fonction et résolution par la méthode de la grande pente ou du gradient conjugué.

L'intérêt majeur de la méthode d'intégration implicite d'un système de fonctions à annuler est que la solution calculée est exacte et stable. Il est donc possible d'imposer des incréments de chargement importants dans la limite où la boucle itérative est convergente et que le problème n'a qu'une seule solution !

Pour appliquer cette technique à une équation différentielle $dX = \mathcal{G}(X, Y) dY$ il faut tout d'abord réécrire celle-ci sous la forme d'une fonction à annuler :

$$\mathcal{F}(\Delta X, \Delta Y) = \Delta X - \text{fct}(\mathcal{G}(X_n + \Delta X, Y_n + \Delta Y), \Delta Y) \quad (4.14)$$

Nous voyons ici qu'il est nécessaire d'introduire comme inconnue non pas les variables à l'état final X_{n+1} mais l'incrément ΔX des variables pour passer de l'état initial à l'état final. Remarquons que le choix d'une méthode d'intégration implicite d'une équation différentielle n'élimine pas les problèmes d'exactitude de la solution calculée puisque il est toujours nécessaire de faire intervenir la translation différentielle → incrément. Par contre, avec un schéma implicite la solution calculée est stable.

La solution d'intégration semi-implicite permet d'améliorer la précision de résolution d'une équation différentielle tout en conservant la stabilité du schéma d'intégration implicite.

Intégration semi-implicite

Cette méthode appelée également θ -méthode est adaptée à la résolution d'équations différentielles [Chaboche 96]. Elle est basée sur le fait que l'incrément exact des variables inconnues est encadré par la valeur d'incrément estimée à partir de l'état initial et par la valeur d'incrément

estimée à partir de l'état final :

$$\Delta X_{\text{explicite}} = \text{fct}(\mathcal{G}(X_n, Y_n), \Delta Y) < \Delta X_{\text{exact}} < \Delta X_{\text{implicite}} = \text{fct}(\mathcal{G}(X_{n+1}, Y_{n+1}), \Delta Y) \quad (4.15)$$

Ainsi l'incrément des variables inconnues estimé à partir d'un état intermédiaire $(X_{n+\theta}, Y_{n+\theta})$ avec $\theta \in [0 : 1]$ est nécessairement plus précis que les incréments purement explicite ou purement implicite. Généralement une valeur de 0,5 est choisie pour θ .

L'expression de l'incrément ΔX_θ faisant intervenir des grandeurs non définies au début de l'incrément il est nécessaire de résoudre le problème par une série d'itérations.

4.2.2 Exemples de la littérature

Les modèles de comportement élasto-plastique sont une référence dans la modélisation du comportement des matériaux. Le comportement superélastique des AMF peut être décrit avec des équations du même type que celles utilisées pour la modélisation de la plasticité. Les méthodes d'intégration sont donc similaires dans les deux cas, c'est pourquoi nous allons étudier les techniques d'intégration des modèles de comportement plastique parallèlement à celles utilisées pour l'intégration de modèles du comportement des AMF.

Les différents types d'intégration sont rencontrés dans la littérature. Le choix d'une méthode explicite simple à mettre en oeuvre permet d'intégrer facilement des modèles complexes. Au contraire lorsque l'objectif est l'implantation du modèle dans un code de calcul il est préférable de travailler avec une intégration implicite ou semi-implicite plus robuste.

Les modèles développés dans le cadre des matériaux standard généralisés sont bien adaptés à un schéma d'intégration implicite [Besson 01] : dans ces modèles la fonction de charge et la fonction d'érouissage sont définies à partir d'un même potentiel, qui prend une forme intégrale. Il est donc naturel de traiter le problème avec une méthode implicite. Mais il subsiste toujours une équation différentielle, nécessaire pour exprimer la direction d'écoulement de la déformation additionnelle à partir de la loi de normalité à la surface de charge. La méthode implicite pure n'est pas très bien adaptée à l'intégration d'équations différentielles. Néanmoins l'erreur d'intégration numérique de cette relation n'a pas une grande influence sur le niveau de précision, et dans la plupart des modèles de la littérature la loi de normalité est intégrée avec le changement de variables d'Euler et en exprimant la normale à la surface de charge à la fin de l'incrément :

$$\Delta E_{ij}^{\text{additionnel}} = \Delta E^{\text{additionnel}} \eta_{ij}^{n+1} \quad (4.16)$$

avec η_{ij}^{n+1} la normale à la surface de charge en fin d'incrément

Cas particuliers

En plasticité, dans le cas d'une élasticité isotrope et d'une surface de charge de type Von Mises, la direction d'écoulement peut être prédéterminée par la prédiction élastique et il ne reste que la loi d'érouissage scalaire à équilibrer [Besson 01]. Pour intégrer son modèle du comportement des AMF, Auricchio [Lublinter 96] utilise la prédiction élastique / retour radial. Il construit un critère de transformation directe $A \rightarrow M$, un critère de transformation inverse $M \rightarrow A$ et un critère de réorientation. Ce critère de réorientation sert uniquement à définir la direction de la déformation de transformation de la manière suivante :

- Lorsque le critère d'orientation est inactif, la direction de la déformation de transformation est constante .

- Dans le cas contraire la déformation de transformation est orientée par les contraintes et change de direction avec elles.

Avec cette approche la direction de la déformation de transformation en fin d'incrément est connue dès le début de l'incrément. Il ne reste qu'à calculer sa norme à partir du critère de transformation actif qui est une équation scalaire et s'équilibre simplement de manière implicite.

Cas général

Dans le cas général on ne peut pas prédéterminer la direction d'écoulement dès le début de l'incrément. La direction d'écoulement η_{ij}^{n+1} est alors une inconnue du problème et la loi de normalité (4.16) est conservée dans le système d'équation. Dans ce cas le problème est décrit par un système d'équations et non plus par une simple équation scalaire. Il est généralement résolu de manière implicite par une méthode de type Newton/Raphson [Chaboche 96, Souza 98]. Le principal inconvénient de cette méthode est la nécessité de calculer et d'inverser numériquement le jacobien du système.

Une solution intermédiaire parfois utilisée, consiste à sortir la loi de normalité (4.16) du système d'équations. On retrouve alors une seule équation scalaire qui définit la loi d'écroutissage ou de transformation, intégrée de manière implicite par une Newton/Raphson. Néanmoins afin de respecter la normalité à la fin de l'incrément, la direction de la normale est mise à jour à chaque itération de la boucle implicite de Newton/Raphson [Bouvet 01, Vieille 03]. Remarquons que dans ce cas la convergence de la boucle itérative n'est pas assurée.

Modèles multi fonctions de charge

Généralement en plasticité et en superélasticité pure, une seule surface de charge est activée à la fois, qui permet de calculer l'évolution du multiplicateur plastique et d'en déduire l'évolution de toutes les variables internes. Les modèles de comportement couplant la plasticité à l'endommagement du matériau introduisent 2 variables internes indépendantes et 2 surfaces de charge. Saanouni et al. propose une intégration implicite de ce type de modèle [Saanouni 03]. En revanche, dans le cas général où plusieurs surfaces de charges sont actives en même temps, l'intégration du comportement se fait généralement de manière explicite : modèles micromécaniques à 24 variables internes par cristal [Patoor 88, Lim 02], modèle phénoménologique de Helm et Haupt [Helm 03], modèle du comportement piézo-électrique [Elhadrouz 04]. Dans ces modèles, les lois d'écoulement sont généralement décrites par des équations différentielles qu'il est plus efficace de résoudre par des méthodes explicites ou semi-implicites.

4.2.3 Application au modèle du comportement AMF

Le modèle présenté dérive d'une analyse énergétique réalisée dans le cadre des matériaux standards généralisés. Il se présente sous la forme de deux fonctions de charge à équilibrer et d'une loi d'écoulement. L'approche implicite semble donc toute indiquée pour résoudre ce système.

Se pose néanmoins le problème de l'intégration de la relation de normalité qui se présente sous forme différentielle. La prédiction élastique ne suffit pas pour déduire la direction d'écoulement et il s'avère nécessaire d'introduire la loi de normalité dans le système d'équation à résoudre. Comme dans le cas de la plasticité le changement de variables d'Euler sera utilisé et la direction d'écoulement sera écrite en fin d'incrément.

Enfin, puisque les équations sont exprimées de manière analytique, il est aisé de calculer le jacobien du système en tout point, nous utiliserons donc la méthode de Newton/Raphson pour résoudre le système implicite de manière itérative.

4.3 Choix de la forme du système d'équations

Le modèle de comportement des AMF décrit dans ces travaux est composé de deux variables internes dont l'évolution est définie, dans la limite de leur plage de variation, à l'aide de deux critères de charge et d'une loi d'écoulement. L'état externe appliqué au matériau est contrôlé en termes de contrainte mécanique et de température ¹ :

$$\begin{cases} F_f(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = \pm F_f^{crit} \\ |F_{\varepsilon_{ij}}(\Sigma_{ij}, T, f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T)| = F_{\varepsilon}^{crit} \\ d\bar{\varepsilon}_{ij}^T = d\varepsilon^T \frac{3}{2} \eta_{ij} \end{cases} \quad (4.17)$$

avec $\eta_{ij} = \frac{F_{\varepsilon_{ij}}}{|F_{\varepsilon_{ij}}|}$.

Ce modèle doit être intégré numériquement afin de tester des chargements complexes et afin de l'utiliser avec la méthode des éléments finis. Le passage du continu au discret est réalisé à l'aide d'une méthode implicite. Cela induit trois nouveaux problèmes :

- La gestion de la saturation des variables internes à l'aide de multiplicateurs de lagrange n'est pas adaptée au schéma implicite et risque d'entraîner la divergence de la boucle d'équilibre interne.
- Intégration de la loi de normalité dans le schéma implicite.
- Dans l'optique de l'utilisation du modèle en calcul de structures par la méthode des éléments finis, il serait préférable d'utiliser comme variable de contrôle mécanique la déformation totale E_{ij} à la place de la contrainte globale Σ_{ij} .

Le modèle doit être sensiblement modifié pour améliorer la gestion de la saturation, tandis que les deux autres points seront traités en analysant plus précisément le choix et la forme des équations introduites dans le système à résoudre.

4.3.1 Gestion des saturations

La gestion de la saturation dans le modèle continu n'est pas un réel problème. En effet le point de saturation étant bien défini : un certain nombre d'équations sont valables jusqu'à ce point, tandis que d'autres équations sont valables après ce point.

Le passage au discret induit une difficulté liée au fait que le point exact de saturation n'est jamais exactement atteint : à l'état n la transformation n'est pas encore saturée, tandis qu'au point $n+1$ la transformation est déjà saturée. Puisque le jeu d'équations est différent au début et à la fin de l'incrément le jacobien du système n'est pas continu et peut conduire à une divergence de la boucle d'équilibre par Newton/Raphson.

De plus à chaque fois que les variables internes saturent le comportement du matériau change. Et si on combine deux critères de charge actifs ou inactifs aux trois saturations des variables internes cela peut définir jusqu'à 23 comportements différents décrits chacun par un système d'équations particulier.

Ainsi, pour améliorer la résolution des systèmes d'équations et simplifier la gestion de la sélection du comportement, les limitations physiques des variables internes sont gérées en remplaçant les multiplicateurs de Lagrange par des équivalents numériques, des termes non-linéaires et saturants :

¹Dans un souci de simplicité d'écriture nous n'avons pas surchargé l'expression des deux fonctions de charge avec les modifications apportées pour décrire les boucles internes. Néanmoins le problème prend la même forme, seule l'expression du jacobien du système sera modifiée. Le système d'équations avec boucles internes est traité en Annexe B.

- dans la force de transformation, le terme λ_0 associé à la saturation $f = 0$ est remplacé par la fonction :

$$\alpha_{deb}^f \frac{1-f}{f} \quad (4.18)$$

- dans la force de transformation, le terme λ_1 associé à la saturation $f = 1$ est remplacé par la fonction :

$$\alpha_{fin}^f \frac{f}{1-f} \quad (4.19)$$

- dans la force d'orientation, le terme $\lambda_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{sat}^T}{\partial \varepsilon_{ij}^T} - \frac{\partial \varepsilon_{eq}^T}{\partial \varepsilon_{ij}^T} \right)$ associé à la saturation $\bar{\varepsilon}_{eq}^T \leq \varepsilon_{sat}^T$ est remplacé par la fonction suivante dans laquelle est introduit le paramètre matériau $\beta \in [0 : 1]$ qui exprime la dissymétrie du comportement.

$$\alpha_{max}^\varepsilon \frac{f \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\sqrt{1 + \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{jk}^T \bar{\varepsilon}_{ki}^T}{(\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ji}^T)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^T}}} \quad (4.20)$$

De manière à intégrer complètement les termes de saturation dans l'écriture des forces thermodynamiques, les notations suivantes sont introduites :

$$h_f(f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = H_{variant} f + H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T f - \alpha_{deb}^f \frac{1-f}{f} + \alpha_{fin}^f \frac{f}{1-f} \quad (4.21)$$

$$h_{\varepsilon_{ij}}(f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = H_{grain} f \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \alpha_{max}^\varepsilon \frac{f \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\sqrt{1 + \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{jk}^T \bar{\varepsilon}_{ki}^T}{(\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ji}^T)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^T}}} \quad (4.22)$$

Les forces thermodynamiques s'écrivent alors :

$$F_f = \Sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^T - B(T - T_0) - h_f \quad (4.23)$$

$$F_{\varepsilon_{ij}} = \Sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Sigma_{kk}}{3} - h_{\varepsilon_{ij}} \quad (4.24)$$

Cette notation a trois intérêts :

- Elle renomme les variables thermodynamiques internes $h_f = \mathfrak{X}_f$ et $h_{\varepsilon_{ij}} = \mathfrak{X}_{\varepsilon_{ij}}$, qui avaient été introduites pour définir l'état "inactif" des forces thermodynamiques (voir chapitre "modélisation"). Ainsi, lorsque le critère de transformation est inactif il faut vérifier $h_f = constante$ et lorsque le critère d'orientation est inactif il faut vérifier $h_{\varepsilon_{ij}} = constante_{ij}$.
- Elle définit des termes d'interaction globalement non linéaires. En choisissant des coefficients de saturation α_{deb}^f , α_{fin}^f et α_{max}^ε non négligeables devant H_{grain} et $H_{variant}$, l'entrée en transformation et la saturation de la transformation se fera de manière progressive comme cela peut être observé pour des AMF polycristallins.
- Grâce à ces termes additionnels, les trois états de saturation pure $f = 0$, $f = 1$ et $\bar{\varepsilon}_{eq}^T = \varepsilon_{sat}^T$ ne sont jamais exactement atteints. Ainsi, même lorsqu'on s'approche des limites de saturation le comportement sature mais les critères de charge restent valables. Le problème de sélection du comportement est alors considérablement simplifié puisqu'il ne reste plus que quatre combinaisons :

1. Lorsque les deux critères de charge sont respectés, les deux forces sont inactives :

$\rightsquigarrow h_f = \text{constante}$

$\rightsquigarrow h_{\varepsilon_{ij}} = \text{constante}$

2. Lorsque le critère de transformation est violé, seule la force de transformation est active :

$\rightsquigarrow |F_f| = F_f^{\text{critique}}$

$\rightsquigarrow h_{\varepsilon_{ij}} = \text{constante}$

3. Lorsque le critère d'orientation est violé, seule la force d'orientation est active et la direction d'écoulement est donnée par la loi de normalité :

$\rightsquigarrow |F_{\varepsilon_{ij}}| = F_{\varepsilon}^{\text{critique}}$

$\rightsquigarrow \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T = \Delta \varepsilon^T \frac{3}{2} \eta_{ij}^{n+1}$

$\rightsquigarrow h_f = \text{constante}$

4. Lorsque les deux critères de charge sont violés, les deux forces sont actives ainsi que la loi de normalité :

$\rightsquigarrow |F_f| = F_f^{\text{critique}}$

$\rightsquigarrow |F_{\varepsilon_{ij}}| = F_{\varepsilon}^{\text{critique}}$

$\rightsquigarrow \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T = \Delta \varepsilon^T \frac{3}{2} \eta_{ij}^{n+1}$

Néanmoins, nous verrons dans les prochains paragraphes qu'il subsiste encore quelques difficultés pour présélectionner correctement le comportement actif connaissant uniquement les incréments des variables de contrôle à l'état initial.

4.3.2 Loi de normalité

Lorsque la force d'orientation est active il est nécessaire de définir une direction d'écoulement de l'incrément de déformation de transformation $\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T$. Cette direction est choisie comme étant la normale à la surface d'orientation (voir chapitre "Modélisation").

Puisque le schéma d'intégration implicite pur a été choisi la loi de normalité est exprimée en fin d'incrément $n + 1$:

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T = \Delta \varepsilon^T \frac{3}{2} \eta_{ij}^{n+1} \quad (4.25)$$

avec $\eta_{ij} = \frac{F_{\varepsilon_{ij}}}{F_{\varepsilon_{eq}}}$ la normale à la surface de charge d'orientation qui est définie par un équivalent

de Von Mises $F_{\varepsilon_{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} F_{\varepsilon_{ij}} F_{\varepsilon_{ij}}}$.

La question qui se pose est comment intégrer cette relation dans notre boucle d'équilibre du comportement ?

1. Soit la normale est prédéterminée, système est résolu avec pour seule inconnue $\Delta \bar{\varepsilon}^T$ puis la normale est mise à jour à chaque itération.
2. Soit la relation de normalité est intégrée dans le système à résoudre sous forme d'une troisième équation $\eta_{ij} - \frac{F_{\varepsilon_{ij}}}{F_{\varepsilon_{eq}}} = 0$ et le système a pour inconnues $\Delta \varepsilon^T$ et η_{ij} .
3. Soit l'expression de la normalité (4.25) est introduite directement comme troisième équation et le système a pour inconnues $\Delta \varepsilon^T$ et $\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T$.

Les solutions 1. et 2. sont souvent choisies dans les algorithmes d'intégration de loi de comportement plastique car elles permettent d'écrire les équations du problème à l'aide du multiplicateur plastique. Mais dans notre cas, la saturation de la déformation de transformation $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ introduit une difficulté numérique supplémentaire. L'expérience montre que la boucle d'équilibre converge

plus facilement en utilisant la solution 3. La relation de normalité est alors introduite comme une force thermodynamique étendue :

$$F_{\Delta\varepsilon_{ij}} = \Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T - \Delta\varepsilon^T \frac{3}{2} \frac{F_{\varepsilon_{ij}}}{F_{\varepsilon_{eq}}} = 0 \quad (4.26)$$

Dans l'expression des critères de charge nous choisissons d'utiliser l'incrément de la déformation de transformation sous la forme de l'inconnue $\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et non pas sous la forme $\Delta\varepsilon^T \frac{3}{2} \eta_{ij}$. L'inconnue $\Delta\varepsilon^T$ n'apparaît donc que dans la nouvelle force $F_{\Delta\varepsilon_{ij}}$.

4.3.3 Translation de la variable de contrôle mécanique

Jusqu'ici le modèle présenté utilise comme variables de pilotage la température et la contrainte globale qui sont les variables naturelles de la transformation de phase. Nous souhaitons intégrer par la suite ce modèle dans un code de calcul de structure par la méthode des éléments finis. Or dans la grande majorité des cas, les éléments finis utilisés pour effectuer des calculs avec ce type de logiciel sont des éléments à champ de déformation cinématiquement admissible qui nécessitent d'utiliser une loi de comportement pilotée en déformation et non en contrainte. De plus le logiciel ABAQUS, utilisé par la suite, ne permet pas d'introduire une loi de comportement pilotée en contrainte.

Il apparaît donc nécessaire de traduire le pilotage en contrainte en pilotage en déformation. Il suffit pour cela de s'appuyer sur la relation élastique reliant les deux termes :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl} (E_{kl} - \alpha_{kl} (T - T^{init}) - f\bar{\varepsilon}_{kl}^T) \quad (4.27)$$

De nouveau la question qui se pose est comment intégrer cette relation dans notre système d'équation ?

La première solution serait de modifier les critères de charge en y introduisant la relation (4.27) : les variables internes sont calculées en fonction de l'incrément de déformation imposé et la contrainte finale est calculée à l'aide de la relation (4.27). Malheureusement cette approche n'est pas viable si on souhaite utiliser le modèle en calcul de structure. En effet lors de la résolution du système des critères de charge les valeurs des variables internes sont entachées d'approximations numériques puis lors du calcul de la contrainte ces approximations amplifiées par la rigidité élastique C_{ijkl} deviennent non négligeables et causent après passage sur structure une instabilité de la solution jusque divergence de l'équilibre global de la structure.

La seule solution consiste à intégrer cette relation dans la boucle implicite d'équilibre du comportement. Il y a toujours la possibilité de considérer cette expression indépendamment du système d'équation à résoudre et de simplement mettre à jour la contrainte à chaque itération d'équilibre. Mais pour être cohérent avec le cas de la loi de normalité nous avons préféré l'intégrer sous forme d'une 4^{eme} force thermodynamique à annuler :

$$F_{\sigma_{ij}} = \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T + f\bar{\varepsilon}_{ij}^T - E_{ij} = 0 \quad (4.28)$$

De cette manière il n'est pas nécessaire de réécrire les deux critères de charge en fonction de la déformation totale.

4.3.4 Forme finale du système d'équation

Finalement en tenant compte de ces trois modifications, le système à résoudre se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{F}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0 \quad (4.29)$$

Lorsque les variables de pilotage $\Delta Y = (\Delta E_{ij}, \Delta T)$ sont modifiées par l'utilisateur le système $\mathcal{F}(X, Y + \Delta Y) \neq 0$ est déséquilibré et les variables inconnues $\Delta X = (\Delta f, \Delta \varepsilon^T, \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T, \Delta \Sigma_{ij})$ évoluent de manière à rééquilibrer le système $\mathcal{F}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$.

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \text{transformation} : & \begin{cases} \text{si actif} : & |F_f| - F_f^{crit} \\ \text{si inactif} : & h_f - h_f^{deb} \end{cases} \\ \text{orientation} : & \begin{cases} \text{si actif} : & \begin{cases} F_{\varepsilon_{eq}} - F_{\varepsilon}^{crit} \\ F_{\Delta \varepsilon_{ij}} \end{cases} \\ \text{si inactif} : & \begin{cases} h_{\varepsilon_{ij}} - h_{\varepsilon_{ij}}^{deb} \\ F_{\sigma_{ij}} \end{cases} \end{cases} \end{cases} = \{0 \quad (4.30)$$

Le système est formé de quatre équations indépendantes (deux équations scalaires et deux équations tensorielles) et de quatre inconnues (deux scalaires et deux tensorielle). Il s'agit maintenant de calculer la solution du système en fonction du chargement imposé.

4.4 Résolution du système d'équations

Le problème se résume à une résolution d'un système d'équations non linéaires. À chaque incrément de chargement les équations du système sont modifiées et une nouvelle solution doit être calculée. En fonction de l'incrément de chargement appliqué les deux critères de charge vont être activés ou non et les équations à résoudre seront différentes. Cela définit quatre systèmes d'équations différents. Pour calculer la réponse du matériau il faut sélectionner quel système doit être résolu. Classiquement cette sélection se fait à partir d'une prédiction élastique. Cette solution est efficace pour beaucoup de modèles de la littérature, mais elle n'est pas suffisante dans le cas du modèle présenté, composé de deux critères de charge dont les expressions sont couplées.

Une fois le problème de la sélection de système résolu il s'agit de résoudre un système d'équations non linéaire de manière implicite. Puisque le système est analytique le jacobien peut être déterminé aisément. De plus, les relations du système sont dérivées d'un problème de minimisation d'énergie ce qui implique que le problème possède une solution et qu'elle est unique. La technique de résolution de Newton-Raphson est bien adaptée et a été retenue.

4.4.1 Sélection du système d'équations actif

Pour déterminer si un critère de charge doit s'activer au cours d'un incrément de chargement il faut vérifier que ce critère n'est pas violé en fin d'incrément. Malheureusement cet état final n'est pas connu puisqu'il est justement fonction de l'activation du critère de charge !

Il est donc nécessaire faire une hypothèse sur l'activation du critère de charge en début d'incrément, résoudre le problème avec cette hypothèse, puis vérifier que l'hypothèse initiale était correcte. Dans le cas contraire il faut corriger la solution en faisant une nouvelle hypothèse. Généralement, l'hypothèse initiale est de supposer que le critère de charge n'est pas actif. Dans ce cas, le comportement est purement élastique et sa résolution n'est pas coûteuse (pas de boucle implicite à mettre en oeuvre) : c'est le principe de la prédiction élastique. Cette première estimation peut être réutilisée ensuite dans la résolution du système d'équation dans le cas où le critère est finalement violé.

Cette technique fonctionne bien lorsqu'il n'y a qu'une seule surface de charge (plasticité, superélasticité pure) ou lorsque les différentes fonctions de charge ne sont pas couplées. Mais elle n'est plus adaptée au cas plus général où les expressions des critères de charge sont fonction de l'évolution des différentes variables internes.

Prenons le cas d'un système à deux critères de charge couplés où la prédiction élastique initiale prévoit l'activation d'un seul des deux critères. La résolution du système implique une évolution des deux variables internes. Cela induit une évolution du second critère de charge qui peut alors s'activer. Il faut donc tester une seconde fois l'activation du second critère de charge et si nécessaire de relancer une seconde résolution du nouveau système où les deux critères sont actifs.

Le second cas est plus délicat : cette fois la prédiction élastique initiale prévoit l'activation des deux critères. Le système est résolu de manière à ce qu'en fin d'incrément les deux critères soient équilibrés. Mais un calcul avec un seul critère actif aurait montré qu'en réalité le second critère ne s'activait pas ! Le problème intervient dans le cas d'une décharge superélastique lorsque les incréments de déformation sont trop grands, mais également lors d'un chargement thermique à contrainte constante. L'expérience montre que le problème intervient principalement avec le critère d'orientation et que le phénomène est négligeable avec le critère de transformation : si la transformation est initialement prédite alors elle est réellement active. Une solution consiste, dans le cas où l'activation des deux critères est prévue initialement, à faire tout d'abord un calcul en activant uniquement le critère de transformation pour ensuite le corriger si nécessaire par un second calcul avec les deux critères actifs.

L'algorithme de sélection est le suivant :

- Prédiction élastique initiale de la contrainte et des variables internes sans activation des critères de charge ; Calcul des critères de charge prédits.
- ↪ si le critère de transformation est violé : résolution du système d'équation avec le critère de transformation actif ; Mise à jour des critères de charge avec le nouvel état des contraintes et des variables internes.
 - si le critère d'orientation est violé : résolution du système d'équation avec les deux critères actifs.
- ↪ sinon si le critère d'orientation seul est violé : résolution du système d'équation avec le critère d'orientation actif ; Mise à jour des critères de charge avec le nouvel état des contraintes et des variables internes.
 - si le critère de transformation est violé : résolution du système d'équation avec les deux critères actifs.
- ↪ sinon aucun des critères n'était effectivement violé, le problème est résolu avec la prédiction élastique initiale.

Cet algorithme implique dans certains cas de résoudre deux fois le système d'équation. Cette approche est donc gourmande en temps de calcul. Par contre elle permet de sélectionner efficacement le bon système d'équation.

L'étape suivante consiste à résoudre les différents systèmes d'équations.

4.4.2 Algorithme de résolution

Les quatre systèmes d'équations sont regroupés sous une forme unique $\mathcal{F}(X, Y) = 0$ en notant X les variables inconnues du système et Y les variables de pilotage, de manière à utiliser ensuite le même algorithme de résolution. De manière générale pour l'ensemble des cas les variables inconnues sont les deux variables internes f et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ ainsi que la contrainte Σ_{ij} et les variables de pilotage sont la déformation totale E_{ij} et la température T . Remarquons tout d'abord qu'à

priori le problème pourrait être résolu en travaillant avec les formes totales des inconnues et non sous leur forme incrémentale : on cherche les inconnues f^{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{ij}^{T^{n+1}}$ et Σ_{ij}^{n+1} à l'instant $n + 1$ en fonction de l'état de chargement E_{ij}^{n+1} et T^{n+1} . En effet les expressions des forces de transformation, d'orientation et d'élasticité peuvent être exprimées directement en fonction de ces termes globaux et pas nécessairement sous forme incrémentale. Néanmoins dans le cas où la force d'orientation est active il faut vérifier la loi de normalité qui cette fois est écrite sous forme incrémentale en fonction de $\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et $\Delta\varepsilon^T$. Nous sommes donc contraint d'exprimer la déformation de transformation sous forme incrémentale, et de manière à rester cohérent pour l'ensemble des inconnues la fraction et la contrainte seront exprimés sous forme incrémentale. Ce modèle devant être implanté dans un code de calcul E.F. il est préférable de travailler avec des inconnues sous forme incrémentale (problème de stabilité de l'équilibre de la structure). Ainsi nous écrirons le problème sous la forme suivante où les inconnues sont les incréments ΔX et ΔY tandis que les termes X et Y sont des valeurs connues à l'état initial :

$$\mathcal{F}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0 \quad (4.31)$$

Les quatre systèmes à résoudre sont sensiblement différents et vont être explicités. Le cas où les deux critères sont inactifs est un cas trivial puisque les variables internes n'évoluent pas et que le comportement est purement thermo-élastique. Les autres cas sont résolus en utilisant un algorithme de type Newton/Raphson.

Deux forces thermodynamiques inactives

Ce cas trivial nous conduit à déterminer les incréments des variables internes qui vérifient $h_f = \text{constante}$ et $h_{\varepsilon_{ij}} = \text{constante}$. Or h_f et $h_{\varepsilon_{ij}}$ ne sont fonction que de f et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et donc les variables internes n'évoluent pas :

$$\Delta f = 0 \quad (4.32)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T = 0 \quad (4.33)$$

L'incrément de contrainte est déterminé directement avec la relation élastique :

$$\Delta\Sigma_{ij} = C_{ijkl} (\Delta E_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) \quad (4.34)$$

Les modules tangents mécaniques et thermiques sont thermo-élastiques. Ce cas de comportement ne nécessite pas de boucle complexe de résolution et est effectivement adapté à l'étape de prédiction initiale dans notre algorithme de sélection du comportement. Il correspond à un calcul de prédiction élastique classique.

Transformation pure

Dans ce cas seule la force de transformation est active. Il faut vérifier le critère de charge de transformation $|F_f| - F_f^{crit} = 0$ et la relation d'inactivation de l'orientation $h_{\varepsilon_{ij}} = \text{constante}$. Le terme $h_{\varepsilon_{ij}}$ est orienté par la déformation de transformation $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$. Puisque $h_{\varepsilon_{ij}}$ est maintenu constant cela impose à $\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ d'être colinéaire à $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$. Donc la direction de $\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ est fixée dès le début de la boucle implicite et reste constante :

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T = \Delta\varepsilon^T \eta_{ij}^{\varepsilon^T} \quad (4.35)$$

$$\text{avec } \eta_{ij}^{\varepsilon T} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\sqrt{\frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_{kl}^T\bar{\varepsilon}_{kl}^T}}.$$

L'équation d'orientation se réduit à une équation scalaire :

$$h_{\varepsilon_{eq}} = \text{constante} \quad (4.36)$$

$$\text{avec } h_{\varepsilon_{eq}} = h_{\varepsilon_{ij}} \frac{2}{3} \eta_{ij}^{\varepsilon T}.$$

Le système d'équation dans ce cas s'écrit :

$$\mathcal{F} = \begin{cases} |F_f| - F_f^{crit} \\ h_{\varepsilon_{eq}} - h_{\varepsilon_{eq}}^{deb} \\ F_{\sigma_{ij}} \end{cases} = \{0\} \quad (4.37)$$

et les inconnues sont :

$$\Delta X = \begin{cases} \Delta f \\ \Delta \varepsilon^T \\ \Delta \Sigma_{ij} \end{cases} \quad (4.38)$$

Orientation pure

Cette fois la force de transformation n'est pas activée, il faut donc vérifier $h_f = \text{constante}$. Par contre la force d'orientation est active : il faut non seulement équilibrer le critère d'orientation $F_{\varepsilon_{eq}} - F_{\varepsilon}^{crit} = 0$ mais également vérifier la loi d'écoulement normal $F_{\Delta\varepsilon_{ij}} = 0$. Le système d'équation dans le cas de l'orientation pure s'écrit :

$$\mathcal{F} = \begin{cases} h_f - h_f^{deb} \\ F_{\varepsilon_{eq}} - F_{\varepsilon}^{crit} \\ F_{\Delta\varepsilon_{ij}} \\ F_{\sigma_{ij}} \end{cases} = \{0\} \quad (4.39)$$

avec pour inconnues :

$$\Delta X = \begin{cases} \Delta f \\ \Delta \varepsilon^T \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T \\ \Delta \Sigma_{ij} \end{cases} \quad (4.40)$$

Transformation et orientation

Finalement lorsque les deux forces sont actives le système est très similaire au cas de l'orientation pure :

$$\mathcal{F} = \begin{cases} F_f - F_f^{crit} \\ F_{\varepsilon_{eq}} - F_{\varepsilon}^{crit} \\ F_{\Delta\varepsilon_{ij}} \\ F_{\sigma_{ij}} \end{cases} = \{0\} \quad (4.41)$$

avec pour inconnues :

$$\Delta X = \begin{cases} \Delta f \\ \Delta \varepsilon^T \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T \\ \Delta \Sigma_{ij} \end{cases} \quad (4.42)$$

Pour les trois derniers cas la solution implicite du système d'équation $\mathcal{F}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$ n'est pas directe notamment à cause des termes de saturation des critères de transformation et d'orientation. La solution est déterminée numériquement à l'aide d'un algorithme de résolution de type Newton-Raphson.

Algorithme de Newton-Raphson

Le problème se pose de la manière suivante : les variables de pilotage Y du système $\mathcal{F}(X, Y)$ ont été modifiées d'un incrément ΔY induisant un déséquilibre du système $\mathcal{F}(X, Y + \Delta Y) \neq 0$. L'objectif est de trouver l'incrément des variables inconnues ΔX qui va permettre de rééquilibrer le système $\mathcal{F}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$.

L'approche de Newton Raphson consiste à faire un développement limité au premier ordre du système. Il s'agit donc de dériver les différentes équations en fonction des variables inconnues. Par inversion du problème une première estimation de ΔX est obtenue. Mais le système étant non linéaire, le développement limité au premier ordre ne suffit pas à trouver la solution exacte et plusieurs itérations $\Delta X^0, \Delta X^1 \dots \Delta X^i \dots \Delta X^I$ sont nécessaires pour converger vers la bonne solution $X^{n+1} = X^n + \Delta X^I$. Chaque correction calculée à chaque itération sera notée $\delta \Delta X$.

Le schéma de Newton Raphson est le suivant :

1. Initialement $\Delta X^0 = 0$ et le système est déséquilibré

$$\mathcal{F}(X + \Delta X^0, Y + \Delta Y) \neq 0$$

2. Approximation de Newton :

$$\mathcal{F}(X + \Delta X^i, Y + \Delta Y) + \mathcal{J} \delta \Delta X \approx 0$$

avec le jacobien du système $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta X}$.

3. Calcul de la correction de Newton par inversion de la relation :

$$\delta \Delta X = \mathcal{J}^{-1} (-\mathcal{F}(X + \Delta X^i, Y + \Delta Y))$$

4. Amortissement de la correction pour que les variables internes restent dans leurs bornes :

$$\exists \alpha \in [0 : 1] \text{ tel que } 0 < f + \Delta f^i + \alpha \delta \Delta f < 1 \text{ et } \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^T + \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{T^i} + \alpha \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T \right)_{eq} < \varepsilon_{max}^T$$

5. Mise à jour de l'incrément

$$\Delta X^{i+1} = \Delta X^i + \alpha \delta \Delta X$$

6. Bouclage à l'étape 2. tant que $\mathcal{F}(X + \Delta X^{i+1}, Y + \Delta Y) \neq 0$ à un résidu numérique près.

Le calcul du jacobien est détaillé en annexe.

Amortissement de la solution : À l'algorithme de résolution classique de Newton-Raphson nous avons ajouté l'étape 4 "d'amortissement" de la solution de Newton. Cette étape est nécessaire car les inconnues sont bornées et que les expressions des critères de charge ne sont pas définies lorsque les inconnues prennent des valeurs en dehors de ces bornes. Le coefficient d'amortissement α est calculé de manière très simple car sa précision n'influe pas sur la vitesse de convergence de la boucle de Newton :

➤ Tant qu'on ne vérifie pas $(0 < f + \Delta f^i + \alpha \delta \Delta f^{NR} < 1 \text{ et } \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^T + \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{T^i} + \alpha \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{T^{NR}} \right)_{eq} < \varepsilon_{max}^T)$ alors $\alpha = \alpha/2$.

Cette boucle converge toujours puisque lorsque $\alpha \rightarrow 0$ on converge vers l'état précédent $(f + \Delta f^i, \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{T^i})$ qui vérifiait nécessairement les conditions limites.

Vitesse de convergence de l'algorithme : Globalement le système converge rapidement (1 à 10 itérations) dans la majorité des cas. Mais lorsque les deux variables internes évoluent en même temps et rapidement l'équilibre peut être difficile à atteindre. En effet la déformation de transformation globale est définie comme le produit des deux variables internes :

$$E_{ij}^T = f \bar{\varepsilon}_{ij}^T$$

La différentielle de la déformation de transformation s'écrit :

$$dE_{ij}^T = \bar{\varepsilon}_{ij}^T df + f d\bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (4.43)$$

Mais l'incrément de la déformation de transformation s'écrit :

$$\Delta E_{ij}^T = (f + \Delta f) (\bar{\varepsilon}_{ij}^T + \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T) - f \bar{\varepsilon}_{ij}^T = \Delta f \bar{\varepsilon}_{ij}^T + f \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \Delta f \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (4.44)$$

Cela fait apparaître un terme croisé $\Delta f \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T$ qui peut dans certains cas être non négligeable : par exemple lorsque f et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ sont initialement nuls la seule contribution à l'incrément de déformation de transformation ΔE_{ij}^T est ce terme $\Delta f \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T$! De manière générale lorsque les deux variables internes évoluent en même temps ce terme est non négligeable.

Or pour le calcul du jacobien du système, et ultérieurement des modules tangents mécaniques et thermiques, ce terme croisé est négligé comme produit de deux différentielles. Donc, partant de l'état austénitique $f = 0$ et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T = 0$ il ne devrait jamais y avoir de déformation de transformation !! En réalité, les deux variables internes ne sont jamais exactement nulles et la boucle de résolution implicite permet d'atteindre la solution du problème au prix d'un grand nombre d'itérations. Le problème se retrouve lors du calcul de l'équilibre de la structure où il est plus problématique de faire un grand nombre d'itérations très coûteuses en temps de calcul.

Avec cet algorithme nous pouvons donc calculer l'état de contrainte en fin d'incrément ainsi que l'évolution des variables internes. C'est suffisant en première approche si on recherche uniquement la réponse du matériau à un chargement en déformation et en température. Par contre par la suite nous souhaitons implanter ce modèle dans un code de calcul par éléments finis. Or l'intégration du modèle étant implicite il est naturel de vouloir utiliser une formulation élément finis implicite. Celle-ci requière, en plus de l'état de contrainte en fin d'incrément, de connaître la valeur des modules tangents mécaniques et thermiques.

4.4.3 Modules tangents mécaniques et thermiques

Pour que cette loi de comportement puisse être utilisée par un code de calcul par éléments finis utilisant un schéma d'intégration implicite il est nécessaire de fournir les modules tangents mécaniques et thermiques c'est à dire l'influence d'une perturbation de la déformation et de la température sur le niveau de contrainte :

$$\frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta E_{kl}} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta T} \quad (4.46)$$

Le calcul des modules tangents cohérents avec le schéma d'intégration de Newton est assez direct et ne nécessite pas de calculs supplémentaires. Le module tangent cohérent est déterminé à partir d'une analyse de l'effet d'une perturbation de l'état en fin d'incrément. Une petite

perturbation des variables de pilotage $\delta\Delta Y$ est imposée qui a pour effet de modifier linéairement les variables inconnues d'une valeur $\delta\Delta X$ en respectant l'équilibre de la solution :

$$\delta\mathcal{F} = 0 \quad (4.47)$$

$$\mathcal{J}_X\delta\Delta X + \mathcal{J}_Y\delta\Delta Y = 0 \quad (4.48)$$

$$\delta\Delta X = -\mathcal{J}_X^{-1}\mathcal{J}_Y\delta\Delta Y \quad (4.49)$$

avec les jacobiens $\mathcal{J}_X = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Delta X}$ et $\mathcal{J}_Y = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Delta Y}$.

Le jacobien \mathcal{J}_Y est simple à déterminer : il ne possède des termes non nuls que pour la force de transformation (si elle est active) et la force élastique :

$$\mathcal{J}_Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial F_f}{\partial\Delta T} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial\Delta T} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

avec $\frac{\partial F_f}{\partial\Delta T} = -B$, $\frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} = -I_{ijkl}$ et $\frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial\Delta T} = \alpha_{ij}$. Si la force de transformation n'est pas active le terme noté $\frac{\partial F_f}{\partial\Delta T}$ est simplement nul.

Nous remarquons que le jacobien \mathcal{J}_X est identique à celui calculé dans la boucle d'équilibre du système d'équation. Or nous avons besoin de la valeur du jacobien à la fin de l'incrément ce qui correspond au dernier jacobien calculé dans la boucle de Newton et son inverse \mathcal{J}^{-1} est déjà calculé. Le jacobien \mathcal{J}_Y étant singulièrement vide il suffit de ne conserver que deux termes de \mathcal{J}^{-1} :

$$\frac{\partial\Delta\Sigma_{kl}}{\partial F_f} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial\Delta\Sigma_{kl}}{\partial F_{\sigma_{ij}}} \quad (4.52)$$

On en déduit les modules tangents mécaniques et thermiques :

$$\frac{\partial\Delta\Sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\Delta\Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial\Delta\Sigma_{ij}}{\partial\Delta T} = B\frac{\partial\Delta\Sigma_{ij}}{\partial F_f} - \frac{\partial\Delta\Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}}\alpha_{kl} \quad (4.54)$$

Cette écriture peut être extrapolée au cas élastique pur en prenant :

$$\frac{\partial\Delta\Sigma_{kl}}{\partial F_f} = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial\Delta\Sigma_{kl}}{\partial F_{\sigma_{ij}}} = C_{ijkl} \quad (4.56)$$

Les modules tangents sont ensuite exploités par un algorithme de pilotage afin de pouvoir imposer une contrainte ou une force alors que le pilotage se fait en déformation ou déplacement.

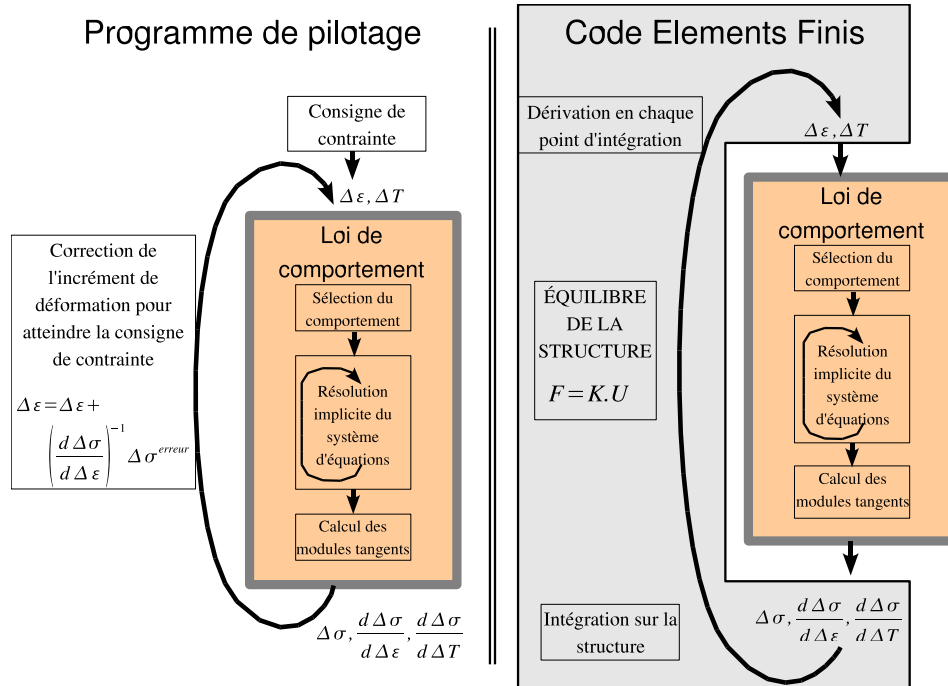


FIG. 4.1 – Pilotage en contrainte et implantation dans un code de calcul E.F.

L'expression des modules tangents est directement déduite du système de résolution des équations du comportement. Cela implique la cohérence entre le schéma d'intégration du modèle et les modules tangents renvoyés, assurant une bonne convergence de la boucle de pilotage. En revanche les mêmes difficultés numériques sont rencontrées pour la résolution du modèle et pour l'équilibre de la contrainte. En particulier le cas discuté dans la section précédente, où les deux variables internes évoluent en même temps et rapidement, entraîne des difficultés de convergence lors du passage sur structure. Le problème vient du fait que les deux inconnues du problème f et $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ sont présentes sous forme de produit $E_{ij}^T = f \bar{\varepsilon}_{ij}^T$. Une manière de contourner le problème serait par exemple d'utiliser un changement de variable pour prendre comme inconnue directement la déformation de transformation E_{ij}^T et la fraction martensitique f . Cela ne fait que décaler le problème, néanmoins les expressions des dérivées de E_{ij}^T seront directement calculées analytiquement, ce qui pourrait améliorer la convergence du système de résolution implicite. De manière générale, il s'agit de travailler l'expression des différentes équations du modèle. Il pourrait même être intéressant d'utiliser une certaine forme des équations pour l'intégration du modèle et une autre forme pour calculer les modules tangents.

Le modèle est maintenant prêt à être intégré dans un code de calcul par éléments finis. Le schéma d'intégration pourra être vérifié en comparant les calculs avec les valeurs théoriques du modèle analytique. Puis le modèle sera comparé avec des chargements expérimentaux.

4.5 Validation de l'intégration numérique

Le modèle a été codé en langage C/C++ sous forme d'une bibliothèque qui peut être appelée par le langage Fortran 77 (de manière à rester compatible avec la subroutine Umat du logiciel ABAQUS).

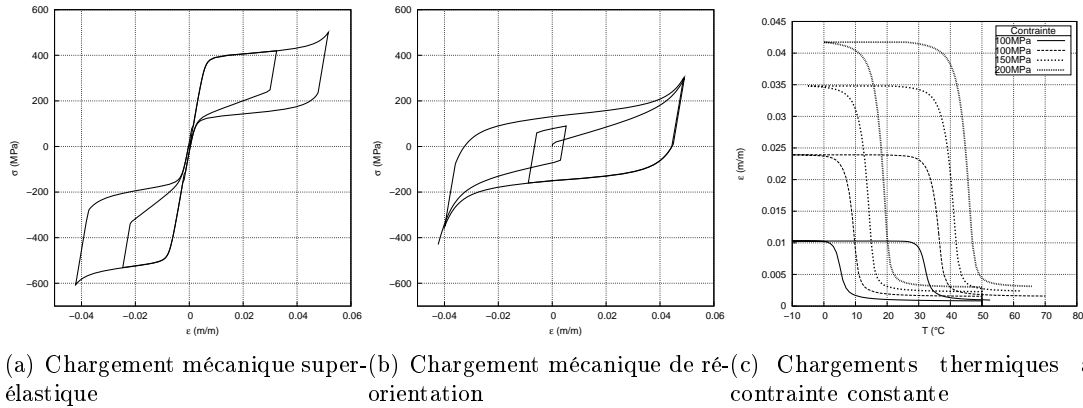


FIG. 4.2 – Prédictions du modèle numérique pour différents chargements typiques

Les variables de pilotage du modèle numérique sont la déformation totale et la température. La plupart des chargements nécessitent un contrôle en déformation mais également en contrainte. Nous avons développé une routine de pilotage permettant de contrôler le pilotage mécanique soit en imposant une déformation, soit en imposant une contrainte, soit en imposant une combinaison des deux (pour effectuer des retours mémoire contraints). Pour rester cohérent avec l'utilisation ultérieure avec la méthode implicite des éléments finis, le pilotage en contrainte est réalisé à l'aide d'une boucle implicite en s'appuyant sur les modules tangents renvoyés par la loi de comportement (voir schéma 4.1). Le programme est donc composé de deux boucles implicites imbriquées, l'une pour l'équilibre de la contrainte et l'autre pour l'équilibre interne du matériau. Lors de l'intégration ultérieure du modèle dans le code E.F. implicite, le pilotage sera effectué directement par le logiciel et la contrainte appliquée sera contrôlée par l'intermédiaire de la boucle d'équilibre implicite de la structure (voir schéma 4.1).

Nous pouvons maintenant imposer au modèle plusieurs types de chargements mécaniques et thermiques. L'objectif est de valider l'intégration numérique du modèle :

- Vérifier que les modifications apportées au modèle sont validées par rapport aux résultats analytiques (chargements proportionnels).
- L'intégration implicite des fonctions de charge implique une indépendance de la réponse calculée par rapport à la taille de discrétisation du comportement lors de chargements proportionnels.
- Le modèle doit supporter des chargements non-proportionnels. Par exemple, la réponse calculée lors d'un changement de trajet en réorientation sera comparée à la réponse d'un matériau équivalent ayant un comportement de plasticité cinématique linéaire.

4.5.1 Chargements proportionnels

Le comportement des AMF est caractérisé par quatre comportements classiques (figures 4.2, 4.3) :

- comportement superélastique à $T > A_f$,
- comportement de réorientation de martensite à $T < M_s$,
- comportement thermique à contrainte constante,
- effet mémoire de forme libre et contraint.

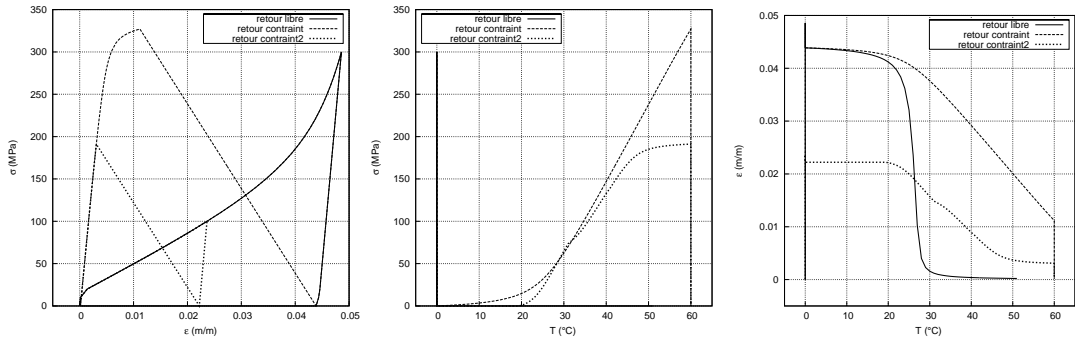


FIG. 4.3 – Prédiction du modèle numérique pour des retours mémoire libres et contraints. Projection sur 3 plans

Le comportement calculé par le modèle numérique est plus lissé que la réponse multilinéaire du modèle analytique, avec la présence d'arrondis de saturation de transformation et d'orientation. Le comportement est bien modifié lors de charges partielles en transformation et en réorientation, mais cette fois il n'y a pas d'arrondi lors de l'activation de la transformation et de l'orientation.

On retrouve une dissymétrie du comportement superélastique lié à la transformation de phase : déformation de transformation plus faible en compression, contraintes critiques de transformation et hystérésis de transformation différents en traction et en compression. Pour le comportement de réorientation, on retrouve une contrainte d'activation symétrique, seule la déformation maximale est différente en traction et en compression.

Lors des chargements thermiques la déformation de transformation de saturation augmente avec le niveau de contrainte. Plus le niveau de contrainte est élevé, plus cette déformation tend vers la déformation de transformation maximale mesurée lors d'un chargement superélastique (=5%).

L'effet mémoire de forme (figure 4.3) est représenté en projection sur les 3 plans principaux. On observe tout d'abord que la déformation de transformation est totalement réversible lors d'un retour libre. Lorsque l'effet mémoire est contraint en bloquant le retour avec une rigidité constante, la récupération de la déformation est étalée en fonction de la température. Par contre, et de manière quasi indépendante avec le taux de conditionnement, la contrainte générée par effet mémoire est proportionnelle à la température imposée. Dans le cas où la déformation de conditionnement est faible ($\sim 2.3\%$) il est possible de compléter la transformation et on observe la saturation du niveau de contrainte même en augmentant la température.

Ces différents trajets de chargement tests montrent que les modifications apportées au modèle pour faciliter l'intégration numérique n'introduisent pas d'erreur de comportement. Au contraire l'allure de la réponse calculée est plus proche du comportement d'un matériau polycristallin.

4.5.2 Influence de la discrétisation

L'évolution des deux variables internes est définie par l'équilibre de deux critères de charge. Le choix du schéma d'intégration implicite, qui vérifie exactement l'équilibre des fonctions, implique que pour un chargement proportionnel la solution au problème est indépendante de la discrétisation du trajet de chargement. Dans le cas de trajets non-proportionnels, la loi de normalité, écrite sous forme différentielle, intervient et rend la réponse dépendante de la taille des incréments de chargement.

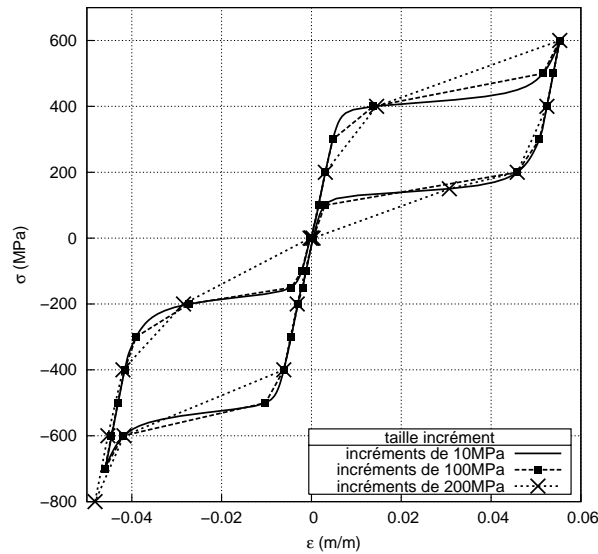


FIG. 4.4 – Effet de la discrétisation sur la réponse en chargement mécanique.

L'influence de la discrétisation est montrée sur un chargement mécanique superélastique (figure 4.4). Des chargements en contrainte pour différentes tailles d'incrément sont appliqués. Pour un incrément de contrainte de 10MPa la réponse est quasiment continue, tandis que pour des incréments plus grands de 100MPa et 200MPa la réponse observée est très discrétisée. Indépendamment de la taille des incréments, les points calculés se superposent bien, l'intégration implicite du modèle est donc validée.

4.5.3 Changements de trajet

Il existe quelques travaux expérimentaux [Sittner 96, Lexcelent 02, McNaney 03, Lim 99] et de modélisation [Bouvet 04, Helm 03] du comportement superélastique lors d'un changement de trajet de chargement. Mais il n'existe pas encore de modèle de référence pour ce type de chargements.

Le phénomène de réorientation de martensite peut être comparé à un comportement plastique de type cinématique linéaire tant que la déformation de transformation de saturation n'est pas atteinte. Les paramètres du modèle plastique ont été ajustés pour modéliser le comportement avant saturation de l'orientation (figure 4.5.a). La réponse en chargement superélastique sera comparée avec des données expérimentales de la littérature dans la section suivante.

Le chargement est imposé en contrainte en suivant un trajet carré dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ tandis que les autres composantes de la contrainte sont maintenues à zéros (figure 4.5.b). La réponse en déformation est représentée dans le plan des déformations totales $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ (figure 4.5.c). Deux trajets à des niveaux de contrainte différents ont été calculés : l'un à 190MPa de manière à ne pas atteindre la déformation de saturation de la martensite, l'autre à 220MPa au cours duquel la martensite sature à une déformation maximale. Tant que la déformation de transformation ne sature pas la réponse du présent modèle est tout à fait comparable à celle du modèle de plasticité. Par contre le comportement à saturation est très différent du comportement plastique à écrouissage cinématique linéaire. En effet, une fois la déformation

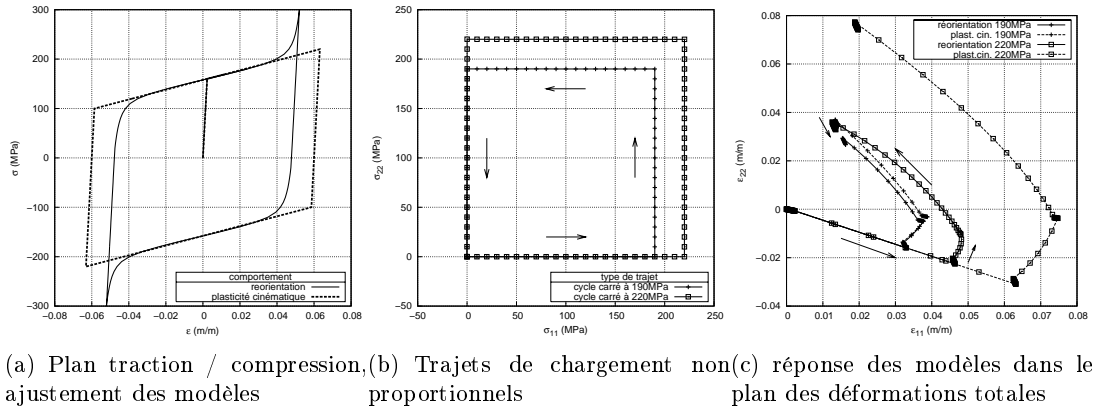


FIG. 4.5 – Comparaison du modèle en réorientation avec un modèle de plasticité cinématique linéaire

maximale atteinte, le tenseur des déformations tourne dans le plan en conservant une norme constante. La direction de la déformation est différente de celle de la contrainte imposée, avec toujours un déphasage en retard. Cela s'explique par le fait que le terme d'interaction interne intervient dans le comportement sous forme d'écroûissage cinématique.

4.6 Validation expérimentale du modèle

Après la validation de l'intégration numérique du modèle, il reste à comparer la réponse calculée avec le comportement mesuré expérimentalement.

Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux matériaux étudiés et essais réalisés au cours de nos travaux (voir chapitre "Caractérisation"). Ils concernent des alliages de NiTi riches en Nickel. Deux types de matériaux ont été testés (superélastique ou mémoire à température ambiante) sur deux géométries différentes (éprouvettes fils ou planes). Les éprouvettes fils n'ont permis de réaliser que des chargements thermomécaniques en traction et un effet de localisation de transformation spécifique à cette géométrie fil a été observé. Au contraire, un montage anti-flambement a permis de solliciter les éprouvettes planes en compression. De plus, l'effet de localisation n'est plus observé et le comportement mesuré est plus proche de celui rencontré dans une structure. Nous allons donc par la suite nous intéresser plus particulièrement aux essais sur éprouvettes planes.

De manière à ne pas restreindre le modèle au cas des AMF NiTi nous allons ensuite nous intéresser aux AMF à base Cuivre [Entemeyer 96, Bouvet 01].

4.6.1 Validation sur les expérimentations NiTi

Dans la partie expérimentale de ce travail toutes les éprouvettes ont été sollicitées en chargements mécaniques à différentes températures et en chargements thermiques à différentes contraintes. Les éprouvettes mémoire ont en plus été sollicitées en retours mémoire libres et contraints. Nous disposons donc d'une base de donnée suffisante pour déterminer les différents paramètres du modèle sur quelques chargements, puis comparer les prédictions du modèle avec les données expérimentales sur les autres chargements.

Détermination des paramètres du modèle

La mise en oeuvre du modèle nécessite la détermination de 16 paramètres :

- 3 propriétés thermo-élastiques E , ν et $\alpha_{dilatation}$ pour une élasticité et une dilatation isotherme.
- 2 coefficients d'énergie de transformation de phase : la dépendance à la contrainte $B(MPa/^\circ C)$ et la température d'équilibre $T_0(^\circ C)$.
- 4 forces critiques qui tiennent compte des effets de boucle interne : force critique de transformation minimale et maximale $F_f^{min}(MPa)$ et $F_f^{max}(MPa)$ et d'orientation $F_\varepsilon^{min}(MPa)$ et $F_\varepsilon^{max}(MPa)$.
- la déformation de transformation maximale ε_{max}^T et le coefficient de dissymétrie traction/compression β .
- 2 termes d'interaction $H_{variantes}(MPa)$ et $H_{grain}(MPa)$.
- 3 termes de saturation : de début de transformation α_f^{deb} , de fin de transformation α_f^{fin} et de saturation d'orientation α_ε^{max} .

En nous basant sur le diagramme de transformation idéalisé nous allons déterminer les coefficients qui s'ajustent de manière moyenne sur l'ensemble des courbes. Le diagramme de phase nous donne 4 paramètres : les températures $M_s(^\circ C)$ et $A_f(^\circ C)$, les pentes de limite de transformation en traction et compression $b^{trac}(MPa/^\circ C)$ et $b^{comp}(MPa/^\circ C)$ ainsi que la contrainte limite de réorientation $\sigma_{reorient}(MPa)$. Nous en déduisons les paramètres suivants :

$$T_0 = \frac{M_s + A_f}{2} \quad (4.57)$$

$$B = b^{trac} \varepsilon_{sat}^{T^{trac}} = b^{comp} \varepsilon_{sat}^{T^{comp}} \quad (4.58)$$

$$F_f^{max} = B(T_0 - M_s) \quad (4.59)$$

$$F_\varepsilon^{max} = \sigma_{reorient} \quad (4.60)$$

Les déformations de transformation maximale de traction $\varepsilon_{sat}^{T^{trac}}$ et de compression $\varepsilon_{sat}^{T^{comp}}$ sont déterminées à partir d'une courbe de chargement mécanique, par exemple à $T > A_f$. Nous déduisons également de cette courbe de chargement mécanique le module d'Young et nous choisissons par défaut les valeurs des coefficients de poisson $\nu = 0.3$ et de dilatation $\alpha_{dilatation} = 0$. Puis les deux termes d'interaction $H_{variante}$ et H_{grain} sont déterminés à partir d'une courbe de comportement de réorientation $T < M_s$ et une courbe de transformation $T > A_f$: ces deux termes définissent dans la pente "d'écrouissage" de transformation et tandis que seul le terme H_{grain} intervient dans la pente "d'écrouissage" de réorientation. Les coefficients de saturation sont choisis de manière à ajuster au mieux le comportement de transformation et d'orientation.

Les forces critiques minimales de transformation et d'orientation sont déterminées de manière à ajuster au mieux le comportement en boucles internes respectivement lors de chargements superélastiques et lors de chargements de réorientation. Deux rapports d'amplitude des boucles internes sont calculés en transformation $r_f = 1 - \frac{F_f^{min}}{F_f^{max}}$ et en orientation $r_\varepsilon = 1 - \frac{F_\varepsilon^{min}}{F_\varepsilon^{max}}$. Ces deux termes doivent prendre une valeur dans l'intervalle $[0 : 1]$: pour $r = 0$ il n'y a pas d'effet boucle interne tandis que pour $r = 1$ l'effet boucle interne est maximal.

Coefficient de dissymétrie : La dissymétrie de la déformation de transformation est fonction de la direction de l'orientation. Elle est exprimée sous la forme suivante :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^T \leq \varepsilon_{sat}^T \quad (4.61)$$

avec la déformation de saturation ε_{sat}^T variable en fonction de la direction de $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et ajustée par deux paramètres ε_{max}^T et β :

$$\varepsilon_{sat}^T = \varepsilon_{max}^T \left(1 + \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{jk}^T \bar{\varepsilon}_{ki}^T}{\left(\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ji}^T \right)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.62)$$

et la déformation équivalente de Von Mises :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^T = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T} \quad (4.63)$$

La dissymétrie est maximale entre la traction et la compression. La déformation de transformation s'exprime dans les deux cas :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{T^{trac}} = \varepsilon^{T^{trac}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{T^{comp}} = \varepsilon^{T^{comp}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Nous en déduisons l'expression des déformations de saturation dans les deux cas :

$$\begin{cases} \varepsilon_{sat}^{T^{trac}} = \varepsilon_{max}^T (1 + \beta)^{\frac{1}{4}} \\ \varepsilon_{sat}^{T^{comp}} = \varepsilon_{max}^T (1 - \beta)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad (4.66)$$

En notant le rapport des déformations de saturation

$$\gamma = \frac{\varepsilon_{sat}^{T^{comp}}}{\varepsilon_{sat}^{T^{trac}}} \quad (4.67)$$

on déduit l'expression des paramètres du modèle ε_{max}^T et β :

$$\beta = \frac{1 - \gamma^4}{1 + \gamma^4} \quad (4.68)$$

$$\varepsilon_{max}^T = \frac{\varepsilon_{sat}^{T^{trac}}}{(1 + \beta)^{\frac{1}{4}}} \quad (4.69)$$

Remarquons que pour la détermination du coefficient de dissymétrie il y a conflit entre les données provenant de la mesure des déformation de saturation en chargement mécanique $\varepsilon_{sat}^{T^{trac}}$ et $\varepsilon_{sat}^{T^{comp}}$ et les données provenant de la mesure des pentes des limites de transformation dans le diagramme de phase b^{trac} et b^{comp} . En effet ces quatre grandeurs sont liées par l'expression du paramètre d'énergie chimique :

$$B = b^{trac} \varepsilon_{sat}^{T^{trac}} = b^{comp} \varepsilon_{sat}^{T^{comp}}$$

Les rapports $\frac{b^{trac}}{b^{comp}}$ et $\frac{\varepsilon_{sat}^{T^{comp}}}{\varepsilon_{sat}^{T^{trac}}}$ devraient être sensiblement identiques. Or, pour le matériau superélastique, et de la même façon pour le matériau mémoire, le rapport des déformations de

$E(MPa)$	ν	$\alpha_{dil.}$	$\varepsilon_{max}^{T^{trac}}$	$\varepsilon_{max}^{T^{comp}}$	b^{trac} ($MPa/^\circ C$)	$M_s(^\circ C)$	$A_f(^\circ C)$
70000	0.3	0	0.05	0.039	10	0	27
r_f	F_ε^{max} (MPa)	r_ε	$H_{variante}$ (MPa)	H_{grain} (MPa)	α_f^{deb}	α_f^{fin}	α_ε^{max}
0.7	160	0.7	0.1	1	0.05	0.5	250

TAB. 4.1 – paramètres matériau pour le NiTi superélastique

$E(MPa)$	ν	$\alpha_{dil.}$	$\varepsilon_{max}^{T^{trac}}$	$\varepsilon_{max}^{T^{comp}}$	b^{trac} ($MPa/^\circ C$)	$M_s(^\circ C)$	$A_f(^\circ C)$
70000	0.3	0	0.06	0.05	11.5	20	58
r_f	F_ε^{max} (MPa)	r_ε	$H_{variante}$ (MPa)	H_{grain} (MPa)	α_f^{deb}	α_f^{fin}	α_ε^{max}
0.7	210	0.7	0.1	1	0.05	0.5	250

TAB. 4.2 – paramètres matériau pour le NiTi mémoire

transformation à saturation est de $\frac{2}{3}$ contre un rapport de pentes des limites de transformation de $\frac{4}{5}$.

Dans notre modèle la dissymétrie de l'hystérésis mécanique est également fonction de la dissymétrie de déformation :

$$\Delta\sigma_{hysteresis} = \frac{F_f^{crit}}{\varepsilon_{sat}^T} \quad (4.70)$$

Le rapport de dissymétrie de l'hystérésis mécanique confirme l'incohérence des mesures de déformation de transformation et semble privilégier la mesure de dissymétrie effectuée à partir des pentes des limites de transformation.

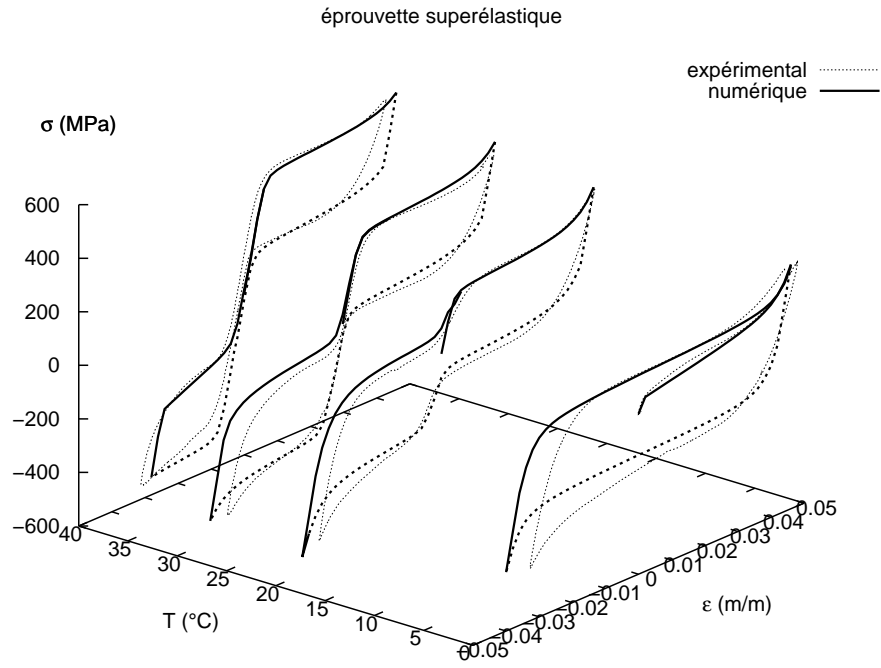
Dans la suite nous nous baserons toujours sur les mesures de dissymétrie des pentes des limites de transformation ce qui conduit à sous-estimer la dissymétrie de déformation.

Paramètres matériaux : Les paramètres retenus pour modéliser le matériau superélastique et le matériau mémoire sont globalement identiques (tables 4.1 et 4.2). Seules diffèrent les valeurs de température de transformation, les pentes de transformation, la force critique de réorientation et la déformation de transformation maximale qui dépendent directement de la composition et du traitement thermomécanique du matériau.

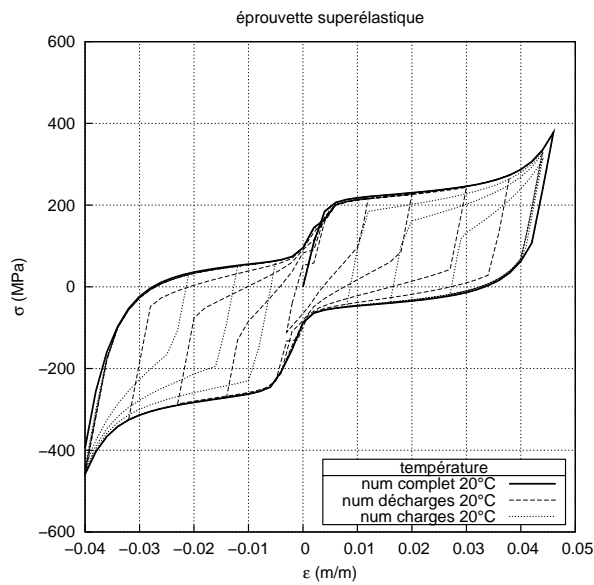
Comparaison numérique / expérimental

Éprouvettes planes matériau superélastique : Le comportement calculé est comparé avec les données expérimentales. Pour le matériau superélastique sont présentés plusieurs chargements mécaniques à différentes températures (figure 4.6.a), les boucles internes de transformation à 20°C (figure 4.6.b) et des chargements thermiques à contrainte constante (figure 4.7).

Le comportement en traction est bien prédit pour un chargement mécanique ou thermique. A partir de 50°C la contrainte induite mécaniquement dépasse la limite élastique du matériau et le comportement prédit s'éloigne du comportement réel.



(a) Validation chargement mécanique à 0°C, 20°C, 30°C et 40°C



(b) Boucles internes à 20°C

FIG. 4.6 – Comparaison numérique/expérimental chargements mécaniques, Matériau Superélastique

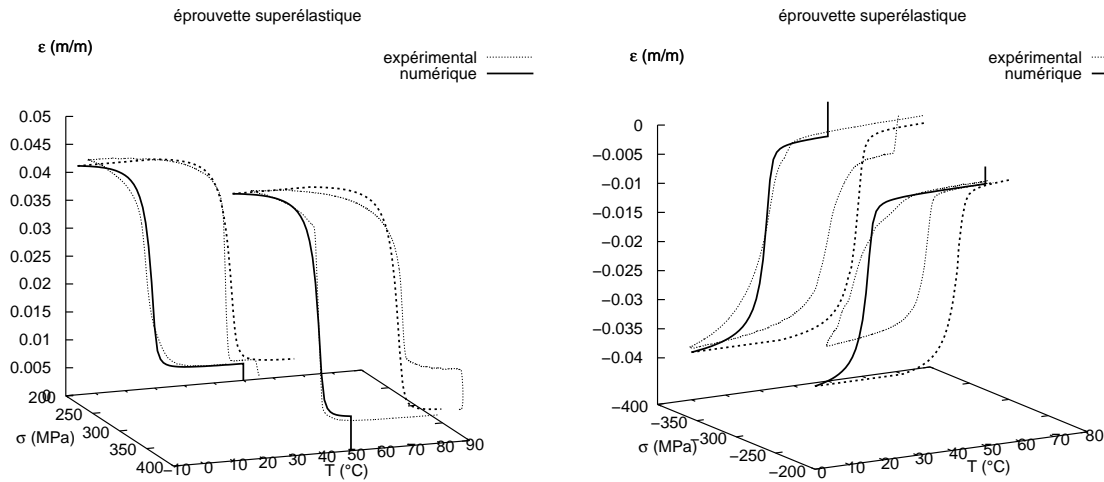


FIG. 4.7 – Comparaison numérique/expérimental chargements thermiques, Matériau Superélastique

Le modèle est construit avec l’hypothèse d’une rigidité élastique identique en austénite et en martensite. La superposition des courbes numériques et expérimentales met bien en avant la diminution de la rigidité apparente du matériau, de la rigidité élastique de l’austénite à la rigidité de la martensite. Cette diminution de la rigidité est liée à un phénomène non pris en compte dans la modélisation : l’effet caoutchoutique.

Ce phénomène pourrait expliquer pourquoi le modèle ne prédit pas correctement le rapport de dissymétrie de la déformation de transformation. L’effet caoutchoutique induit une déformation réversible supplémentaire que nous avons appelée déformation caoutchoutique (voir chapitre “Caractérisation”). Cette déformation n’est pas directement liée à la transformation de phase mais vient plutôt s’ajouter à la déformation de transformation $\varepsilon_{ij}^{reversible} = \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^{caoutchoutique}$. Or la rigidité caoutchoutique (et donc la déformation caoutchoutique) semble plus faible en traction qu’en compression (confirmé par les expérimentations de Favier [Manach 97] et Humbeeck [Liu 98]). Cette dissymétrie de la déformation caoutchoutique vient amplifier le phénomène de dissymétrie de comportement. Puisque notre modèle ne tient pas compte de l’effet caoutchoutique, le phénomène pourrait expliquer notre difficulté à trouver des paramètres matériaux modélisant au mieux la dissymétrie des pentes des limites de transformation et de la déformation martensitique réversible.

Éprouvettes planes matériau mémoire : Les mêmes comparaisons peuvent être réalisées avec le matériau mémoire (figures 4.8).

De nouveau le comportement mécanique à différentes températures est bien prédit par le modèle. On retrouve le problème d’une déformation de transformation en compression prédite plus grande que la valeur expérimentale.

Le modèle prédit bien l’évolution de la déformation de transformation à saturation avec le niveau de contrainte appliqué, ainsi que la dissymétrie entre les chargements en contrainte de traction ou de compression (figures 4.9). Mais pour le même niveau de contrainte le modèle

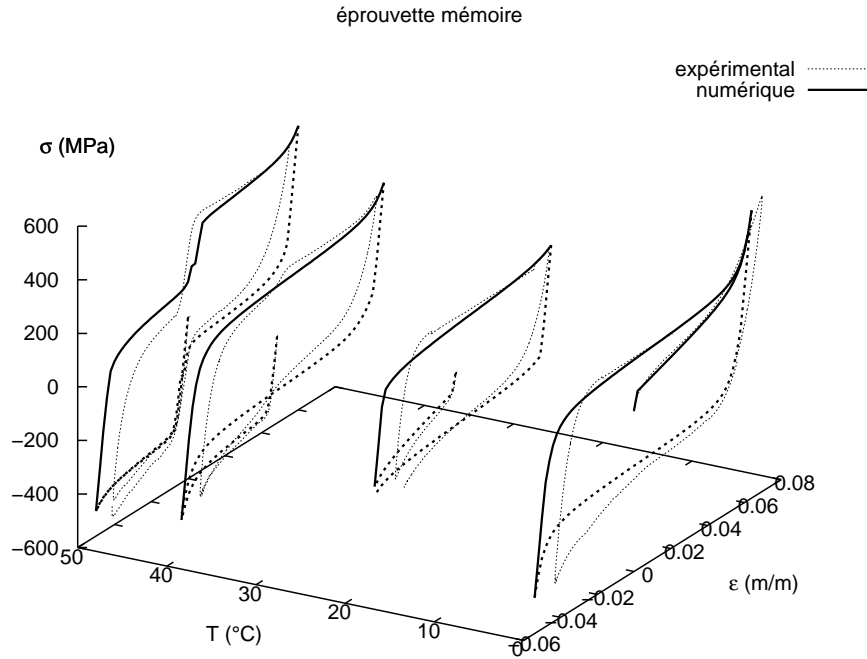


FIG. 4.8 – Comparaison Numérique/Expérimental, Chargements mécaniques, Matériau Mémoire

prévoit une déformation de transformation plus faible que la valeur expérimentale. En effet dans le modèle, la déformation de saturation est directement liée au comportement de première charge de réorientation. Or cette courbe présente une contrainte critique de réorientation non négligeable (~ 80 MPa), ce qui n'est pas vérifié dans les expérimentations (figure 4.10).

D'autre part l'expérimentation montre une diminution de l'hystérésis avec le niveau de contrainte, phénomène qui n'est pas intégré dans la modélisation.

Le matériau mémoire offre la possibilité de réaliser des cycles d'effet mémoire de forme et de retour contraint pour une variation de température dans la plage $[20^{\circ}\text{C} : 90^{\circ}\text{C}]$ (figures 4.11). Remarquons tout d'abord qu'expérimentalement la génération d'une contrainte par retour mémoire induit une plastification du matériau caractérisé par l'apparition d'une déformation résiduelle (voir chapitre "Caractérisation"). Aussi les paramètres matériaux utilisés jusqu'ici, valables

$E(\text{MPa})$	ν	$\alpha_{dil.}$	$\varepsilon_{max}^{T^{trac}}$	$\varepsilon_{max}^{T^{comp}}$	b^{trac} ($\text{MPa}/^{\circ}\text{C}$)	$M_s(^{\circ}\text{C})$	$A_f(^{\circ}\text{C})$
70000	0.3	0	0.042	0.035	10.5	10	45
r_f	F_{ε}^{max} (MPa)	r_{ε}	$H_{variante}$ (MPa)	H_{grain} (MPa)	α_f^{deb}	α_f^{fin}	$\alpha_{\varepsilon}^{max}$
0.7	190	0.7	0.1	1	0.05	0.5	250

TAB. 4.3 – Paramètres matériaux pour le retour contraint, tenant compte de l'évolution des caractéristiques du matériau avec le cyclage

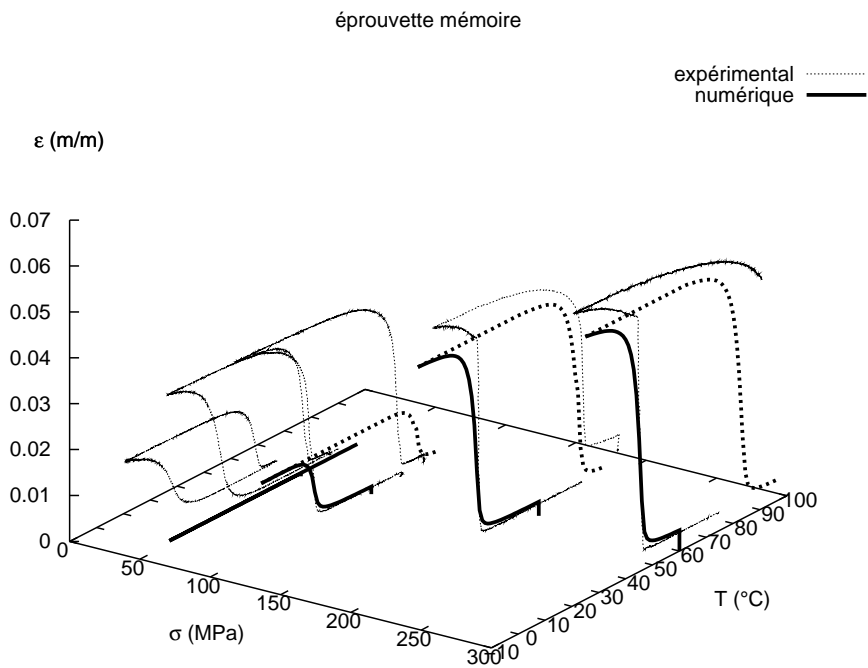
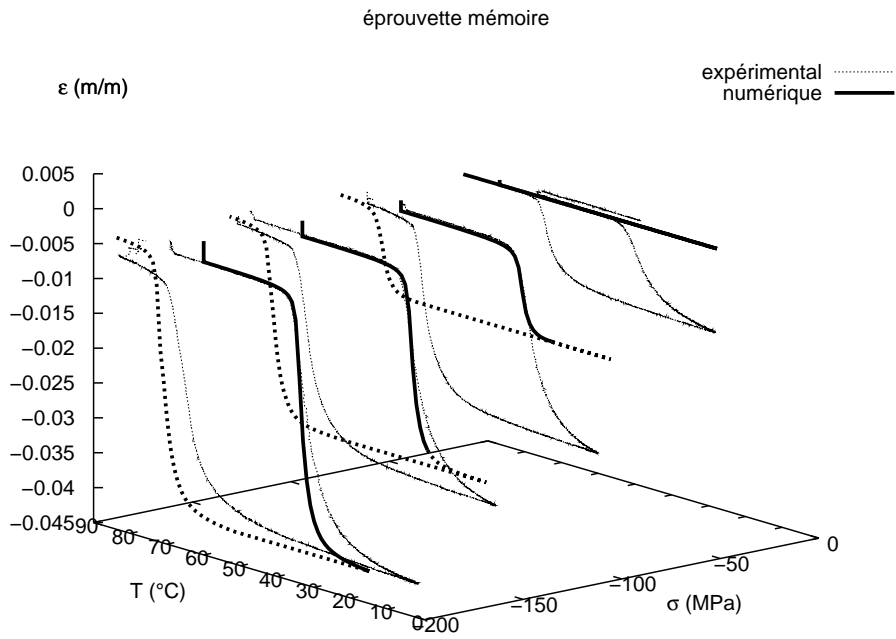


FIG. 4.9 – Comparaison Numérique/Expérimental, Chargements thermiques en traction et en compression, Matériau mémoire

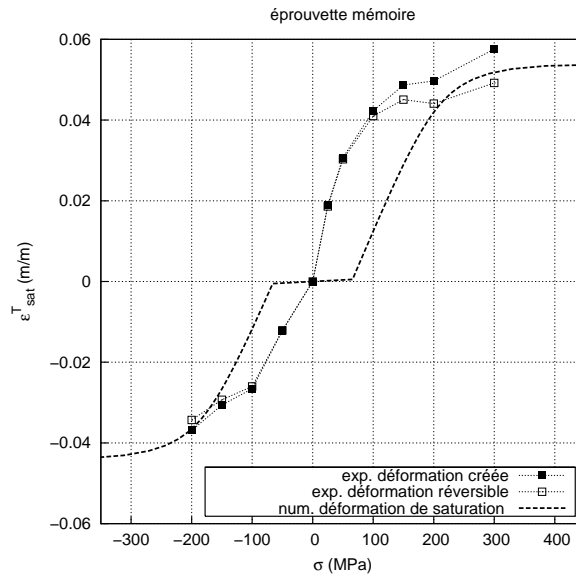


FIG. 4.10 – Déformation de transformation prédite et numérique

pour les premiers essais de retour libre et le premier cycle de retour contraint, ne le sont plus après plusieurs cycles de retour contraint. Après stabilisation du comportement du matériau, de nouveaux paramètres numériques sont choisis pour ajuster le nouveau comportement. À partir d'essais de retour libre nous remarquons que les températures de transformation sont décalées vers le froid et l'hystérésis de la transformation est réduit. D'un chargement de réorientation nous déduisons que les déformations de transformation sont également réduites. Globalement les paramètres matériaux semblent tendre vers ceux du matériau superélastique. En effet, si la génération de contrainte par effet mémoire induit une déformation irréversible elle a également pour effet d'écraser le matériau et augmente sa limite d'élasticité, comme c'est le cas dans les matériaux superélastiques. Nous en déduisons donc que la pente des limites de transformation va également être modifiée pour tendre vers la valeur superélastique. Les paramètres matériaux choisis sont détaillés dans le tableau 4.3.

Les prédictions du modèle sont bien corrélées aux données expérimentales, notamment la valeur de saturation de la contrainte lorsque la transformation de phase est finie.

4.6.2 Validation sur les expérimentations AMF à base Cuivre

Le modèle a été construit en observant le comportement des AMF NiTi, mais le processus de la transformation de phase est commun avec d'autres matériaux à mémoire de forme et notamment les alliages à base Cuivre : CuZnAl, CuAlBe.

Entemeyer [Entemeyer 96] a réalisé une série d'essais mécaniques et thermiques sur des fils polycristallins de diamètre 1.5mm et de composition 11.6%Al et 0.5%Be (en % massique).

Pour ajuster les paramètres matériaux du modèle nous nous basons sur le diagramme de transformation moyen construit à partir des chargements mécaniques et thermiques. Nous en déduisons les températures de transformation, la pente des limites de transformation et la largeur de l'hystérésis de transformation. La force critique de réorientation est calculée également à partir du diagramme en approximant :

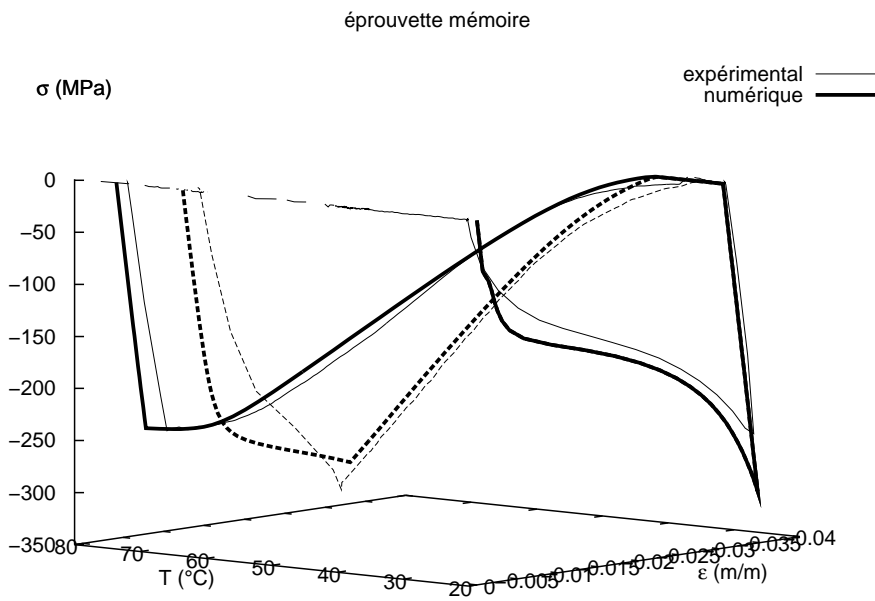
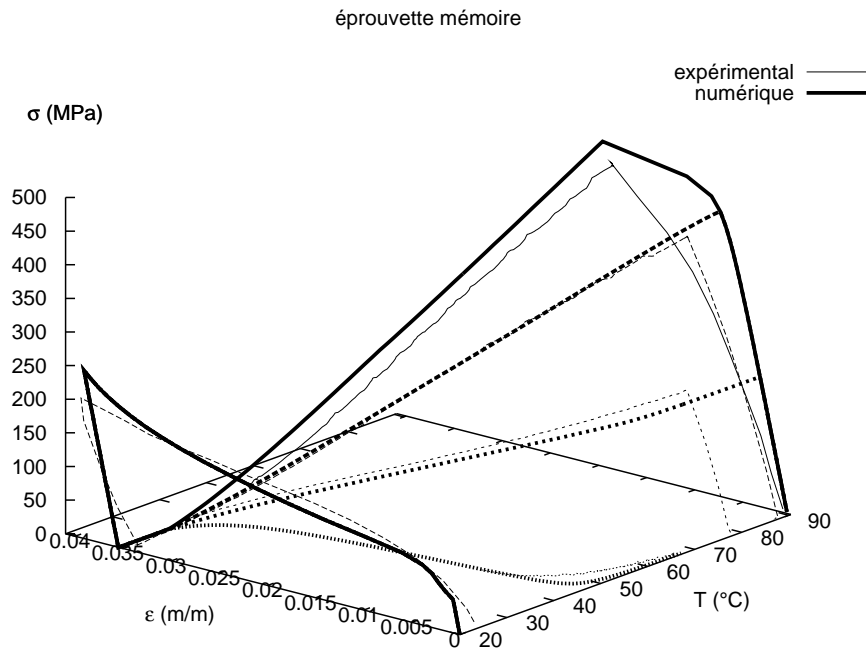


FIG. 4.11 – Retours mémoire à différentes rigidités, Conditionnement en traction et en compression, Matériau mémoire

$E(MPa)$	ν	$\alpha_{dil.}$	$\varepsilon_{max}^{T^{trac}}$	$\varepsilon_{max}^{T^{comp}}$	b^{trac} ($MPa/^\circ C$)	$M_s(^\circ C)$	$A_f(^\circ C)$
67000	0.3	0	0.04	0.04	2.3	-35	7
r_f	F_ε^{max} (MPa)	r_ε	$H_{variante}$ (MPa)	H_{grain} (MPa)	α_f^{deb}	α_f^{fin}	α_ε^{max}
0.8	50	0.8	0.1	1000	0.05	0.5	100

TAB. 4.4 – Paramètres matériau polycristal Cu Al11.6 Be0.5 [Entemeyer 96]

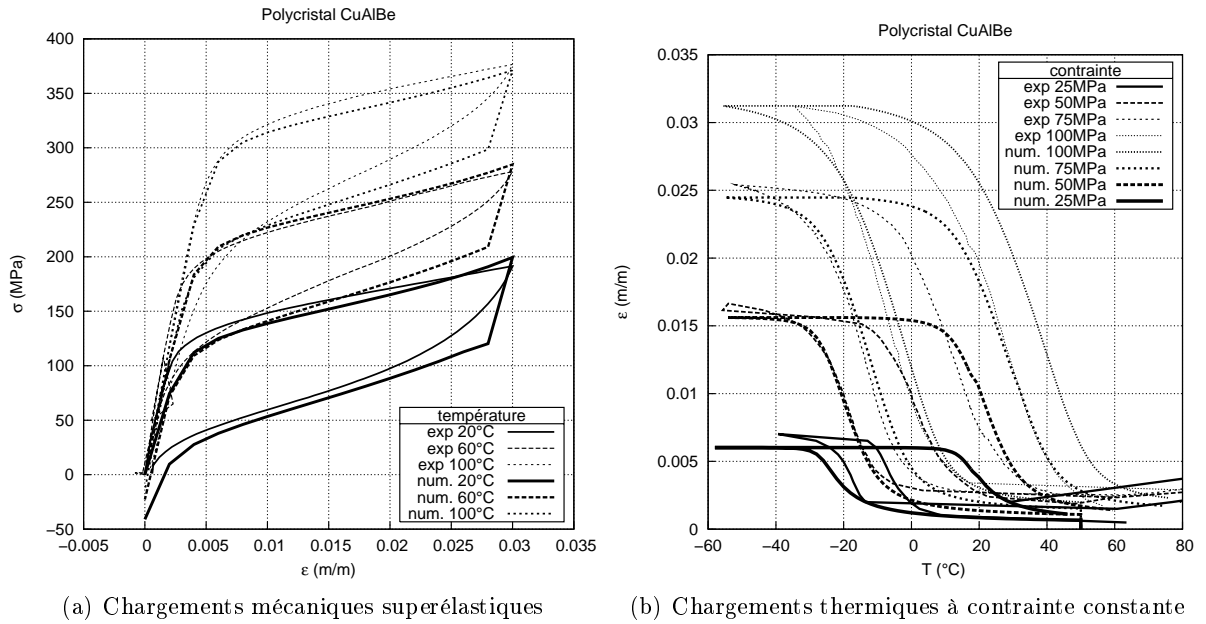


FIG. 4.12 – Validation chargements thermomécaniques d'un polycristal d'AMF CuAlBe [Entemeyer 96]

$$F_\varepsilon^{max} \approx b(T_0 - M_s) \quad (4.71)$$

Les coefficients de boucles internes sont pris assez grand car l'hystérésis mécanique est assez réduit et que l'évolution de la déformation de transformation de saturation est quasiment proportionnelle au niveau de contrainte.

Le module d'élasticité est déterminé sur une courbe mécanique. Les coefficients d'interaction et les coefficients de saturation sont ajustés sur le comportement mécanique en transformation. La déformation de transformation maximale est choisie à 4% car : d'une part l'arrondi de saturation n'est pas visible à 3% sur les courbes mécaniques et que d'autre part les AMF cuivreux présentent une déformation de transformation plus faible que les AMF NiTi. Les paramètres matériaux sont résumés dans le tableau 4.4.

Les résultats (figure 4.12) montrent une bonne prédiction du comportement mécanique et thermique. L'évolution de l'hystérésis de transformation avec le niveau de contrainte est beaucoup plus marquée pour ces matériaux que les NiTi présentés précédemment. De nouveau le modèle ne rend pas compte de cette évolution.

$E(MPa)$	ν	$\alpha_{dil.}$	ε_{max}^{Trac}	ε_{max}^{Comp}	b^{trac} ($MPa/^\circ C$)	$M_s(^\circ C)$	$A_f(^\circ C)$
67000	0.3	0	0.05	0.04	3	-5	15
r_f	F_ε^{max} (MPa)	r_ε	$H_{variante}$ (MPa)	H_{grain} (MPa)	α_f^{deb}	α_f^{fin}	α_ε^{max}
0.8	30	0.8	0.1	1700	0.05	0.5	100

TAB. 4.5 – Paramètres matériau polycristal Cu AlBe0.5 [Bouvet 01]

4.6.3 Validation sur trajet complexe

Bouvet [Bouvet 01] a réalisé des chargements mécaniques complexes non proportionnels sur des AMF à base cuivre de composition très proche de celle utilisée par Entemeyer. Pour les modéliser nous avons donc réajusté certains paramètres matériaux tels que les températures de transformation, la pente des limites de transformation ainsi que la rigidité de transformation à partir d'un trajet de chargement à 50°C. Nous avons choisit une dissymétrie de déformation de rapport $\frac{4}{5}$ à partir de la surface de charge mesurée expérimentalement par Bouvet (figure 4.13). Les paramètres matériaux choisis sont résumés dans le tableau (4.5).

Bouvet a imposé un chargement en contrainte de traction/pression interne à une éprouvette tube. Nous avons modélisé ce chargement par un trajet carré dans le plan des contraintes $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ en maintenant les autres termes nuls. Les prédictions du modèle sont comparées aux expérimentations (figure 4.14) et donnent globalement de bon résultats.

Le comportement prédit dans les deux plans $(\sigma_{11}, \varepsilon_{11})$ et $(\sigma_{22}, \varepsilon_{22})$ n'est pas identique ce qui montre bien l'effet changement de trajet. En revanche le trajet de déformation prédit est moins bon. En particulier la modèle prévoit une forte évolution de la déformation de transformation lors du premier changement de trajet (trajet A-B) ce qui n'est pas vérifié expérimentalement.

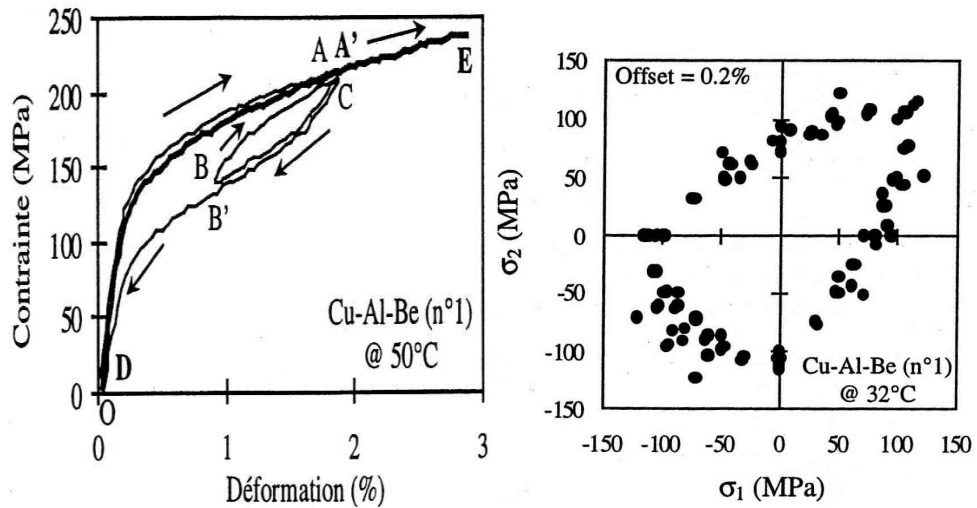
Le modèle est capable de rendre compte de la dissymétrie du comportement et de la surface de charge mais la réponse à un chargement non-proportionnel n'est pas précise.

4.7 Conclusion

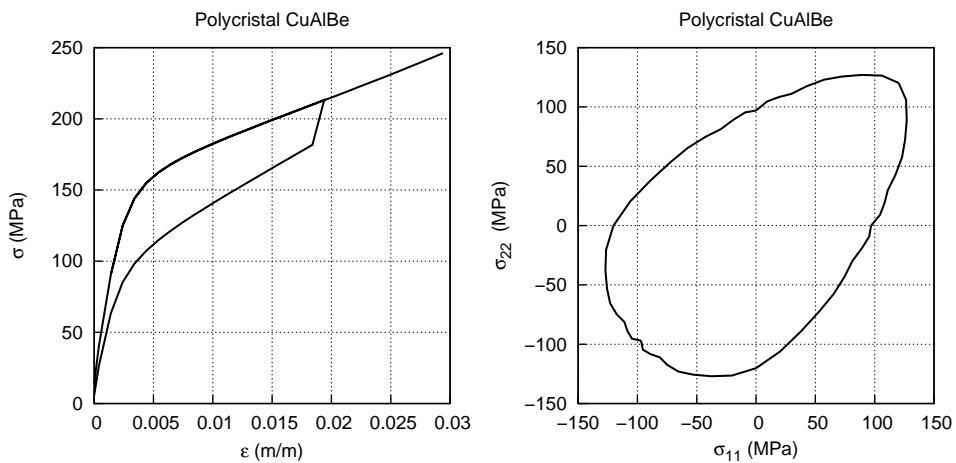
Le modèle de comportement analytique développé dans le partie "modélisation" a été intégré numériquement. La plupart des équations du modèles étant initialement sous forme intégrale, un schéma d'intégration implicite a été choisi. Cela implique une bonne stabilité de la solution calculée et pour certains types de chargements (chargements proportionnels) une indépendance de la solution par rapport à la discrétisation du chargement. Ce point est intéressant dans l'optique du calcul de structures en AMF et d'une implantation dans un code de calcul par la méthode des éléments finis à résolution implicite.

De manière à améliorer la convergence du système de résolution des équations, il a été nécessaire de modifier l'expression des équations du modèle. Les principales difficultés de l'intégration numérique proviennent des deux originalités du modèle : l'état interne du matériau est décrit à l'aide de deux variables internes qui apparaissent sous forme de produit dans les équations du modèle, et d'autre part l'évolution de ces deux variables internes indépendantes est déterminée à partir de deux critères de charge dont l'expression est fortement couplée. De plus les variables internes sont limitées en amplitude et le problème à résoudre est un système contraint.

L'intégration numérique du modèle permet de le valider par rapport aux expérimentations sur les NiTi présentées dans le chapitre "Caractérisation". Les différents paramètres du modèle

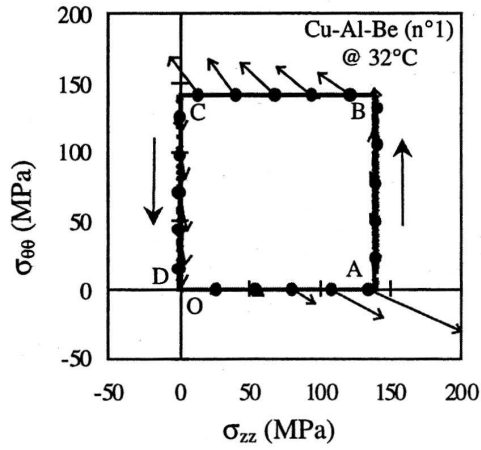


(a) Courbe expérimentale de référence (b) Surface critique de transformation expérimentale

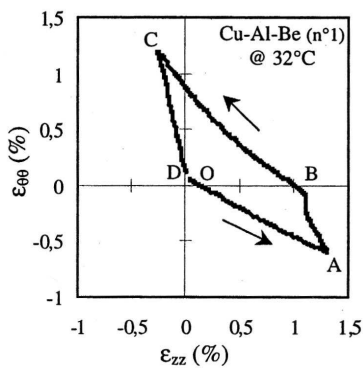


(c) Courbe numérique de référence (d) Surface critique de transformation numérique

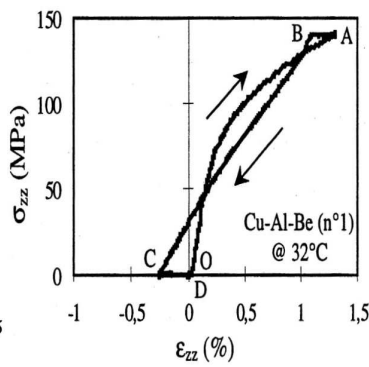
FIG. 4.13 – Courbe de référence et Surface critique de transformation [Bouvet 01]



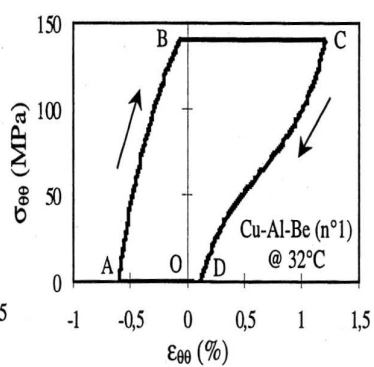
(a) Trajet de chargement non-proportionnel



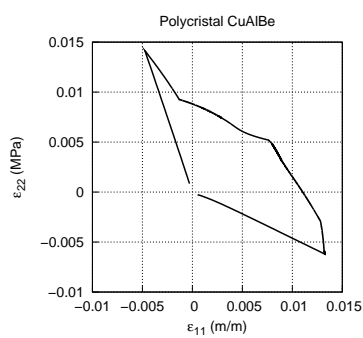
(b) Réponse exp. plan des déf.



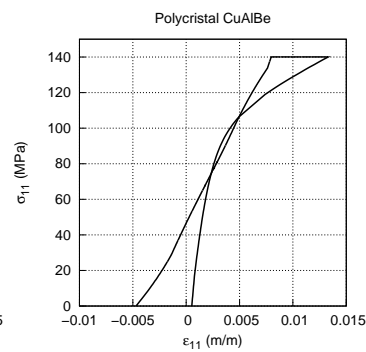
(c) Réponse exp. plan 11



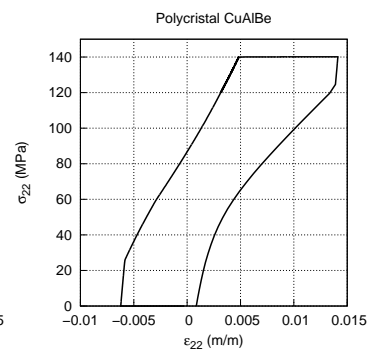
(d) Réponse exp. plan 22



(e) Réponse num. plan des déf.



(f) Réponse num. plan 11



(g) Réponse num. plan 22

FIG. 4.14 – Trajet Superélastique Non-Proportionnel [Bouvet 01]

sont ajustés à partir du diagramme de transformation, d'une courbe de comportement superélastique et d'une courbe de comportement de réorientation de la martensite. La réponse prédite du matériau est ensuite validée pour tous les autres chargements tels que des chargements mécaniques à différentes températures, des chargements thermiques à contrainte constante et des effets mémoire de forme libres ou contraints. Le modèle prédit bien en particulier l'évolution de la déformation de transformation de saturation avec le niveau de contrainte, ainsi que l'influence de la rigidité lors d'un retour mémoire contraint. Les paramètres matériaux sont légèrement différents lorsqu'il s'agit de modéliser un matériau "superélastique" à température ambiante ou un matériau "mémoire". Le modèle n'est pas restreint aux AMF NiTi et des paramètres matériaux sont également déterminés pour des AMF du type CuAlBe.

Le modèle a été construit sans restriction sur le type de chargement : le modèle a été testé avec des trajets de chargement non proportionnels. La réponse prédite est bien différente pour un chargement proportionnel et un chargement non-proportionnel.

Nous proposons dans le chapitre suivant quelques développements d'applications pour lesquels l'utilisation du modèle est intéressante. De manière plus générale différentes règles de dimensionnement d'applications en AMF sont décrites.

Chapitre 5

Applications et dimensionnement

Sommaire

5.1	Introduction	133
5.2	Application du modèle au calcul de structures	134
5.2.1	Bagues superélastiques	134
5.2.2	Micro-pince à mémoire de forme [Kohl 00, Kohl 02]	137
5.2.3	Conclusion	140
5.3	Dimensionnement	141
5.3.1	Actionneur à mémoire de forme	141
5.3.2	Structures mécaniques en AMF	145
5.4	Conclusion	148

5.1 Introduction

Le comportement des AMF est bien maîtrisé sur des essais de chargement 1D : traction, compression, cisaillement. Le dimensionnement d'applications utilisant un élément en AMF en chargement 1D est donc relativement aisé, puisqu'on peut exploiter directement les courbes de comportement correspondantes. Plusieurs modèles simples ont été développés qui permettent de prédire la réponse de structures simples à partir du comportement 1D : poutre en flexion / torsion, ressorts hélicoïdaux [Gillet 98, Tobushi 91, Atanackovic 89, Raniecki 01].

Le dimensionnement de structures en AMF soumises à des chargements plus complexes nécessite soit une campagne expérimentale spécifique, soit l'utilisation d'outils numériques de dimensionnement intégrant le comportement des AMF et généralement basés sur la méthode des éléments finis. Ces outils permettent de dimensionner une structure complexe en AMF (par exemple un micro-système monobloc en AMF) mais également des mécanismes faisant intervenir des matériaux classiques et un élément plus ou moins complexe en AMF.

Le modèle de comportement développé au cours de ces travaux a été adapté à la méthode des éléments finis. Il a été validé sur les tests de comportement thermomécaniques unidimensionnels. Nous proposons ici de comparer les prédictions du modèle dans le cas de chargements un peu plus complexes : bague superélastique sollicitée en expansion et micro-actionneur à effet mémoire actionnant une micro-pince monobloc [Kohl 00, Kohl 02].

À partir des expérimentations présentées au chapitre "Caractérisation du matériau" il est possible de déduire un certain nombre de règles et de consignes pour dimensionner une application

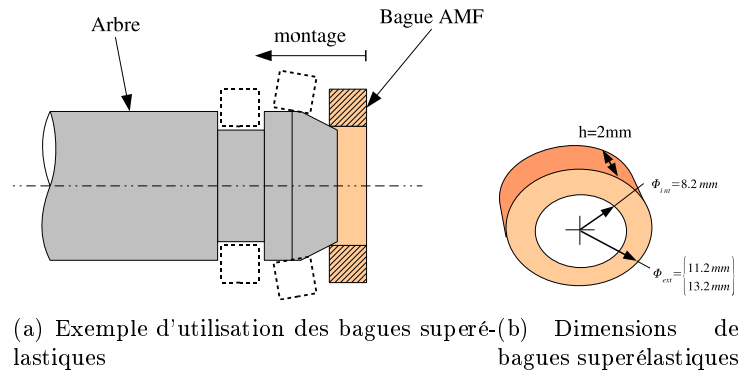


FIG. 5.1 – Bagues superélastiques

en alliage à mémoire de forme. L'exemple du dimensionnement d'une pince automatique est proposé.

5.2 Application du modèle au calcul de structures

Deux applications numériques du modèle sont présentées :

- La première exploite le comportement superélastique des NiTi sur une géométrie bague.
- La deuxième exploite l'effet mémoire de forme pour actionner une micro-pince en NiTi.

5.2.1 Bagues superélastiques

La géométrie bague est relativement simple et intéressante car très compacte. Les bagues superélastiques présentent l'intérêt de supporter un gonflement radial important c'est à dire une augmentation de leur diamètre intérieur de plusieurs $1/10^{emes}$ de mm.

Cela permet par exemple de pouvoir monter la bague sur un arbre en la faisant traverser un obstacle de diamètre plus grand (voir figure 5.1). Le comportement superélastique étant fortement non linéaire la force de montage n'est pas très élevée par rapport à un matériau élastique linéaire et il n'y a pas de détérioration du montage. Puis une fois l'obstacle passé la bague reprend sa forme initiale, et tant que la contrainte reste inférieure à la limite de transformation du matériau (environ 500MPa) le matériau se comporte comme un matériau élastique classique de module d'young 70000MPa .

Caractéristiques des bagues

La géométrie bague peut être obtenue en découpant un tube en tranche. Mais la fabrication d'un tube en NiTi n'étant pas simple, les bagues étudiées ici ont été découpées par électro-érosion dans une plaque laminée de NiTi d'épaisseur 2mm.

Les bagues étudiées peuvent être qualifiées de "massive" : l'épaisseur de l'anneau est non négligeable par rapport au rayon moyen de la bague (voir figure 5.1). Deux bagues d'épaisseur différente ont été étudiées : le diamètre intérieur est identique à $\phi_{int}^{bague} = 8.2mm$ mais pas le diamètre extérieur $\phi_{ext}^{bague1} = 11.2mm$ et $\phi_{ext}^{bague2} = 13.2mm$. Ce qui donne un rapport $r = \frac{epaisseur}{rayon}$ variant de 0.31 à 0.48. Les bagues étant découpées dans une plaque laminée elles ont une hauteur de 2mm.

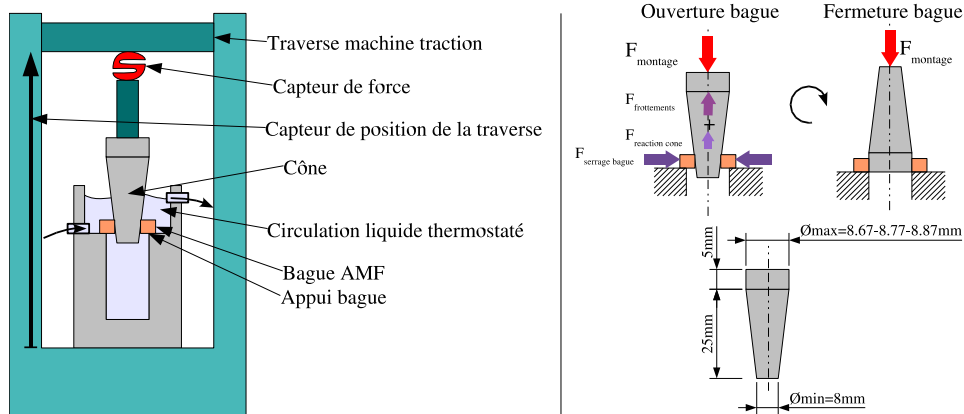


FIG. 5.2 – Système de test des bagues superélastiques

Les bagues étant d'épaisseur non négligeable, leur comportement ne peut pas être directement déduit du comportement unidimensionnel des AMF. En effet suite à un chargement radial on observe :

- > Un gradient de déformation dans l'épaisseur de la bague.
- > Des contraintes globalement tangentielles mais une composante radiale non négligeable apparaît au niveau du diamètre intérieur (liée à la force d'ouverture de la bague).
- > Un comportement axisymétrique.

Test d'ouverture des bagues

Le comportement des bagues a été mesuré à l'aide d'un test de passage des bagues à travers un cône (figure 5.2). Le diamètre le plus petit du cône est plus faible que le diamètre intérieur de la bague au contraire du grand diamètre du cône. Ainsi le passage du cône à travers la bague force l'augmentation de son diamètre intérieur puis après retrait du cône la bague revient à sa géométrie initiale. Le montage puis le démontage du cône nécessite l'application d'une force $F_{montage}$ non négligeable. L'ouverture de la bague génère un effort de serrage de la bague sur le cône. Du fait de l'angle du cône une partie de cette force de serrage radiale est renvoyée dans la direction axiale et vient s'ajouter aux efforts de frottement entre les deux pièces.

Du côté du grand diamètre le cône est prolongé d'une surface cylindrique.

Le test est adapté à une machine de test de traction/compression du laboratoire : le déplacement du cône par rapport à la bague est mesuré à l'aide du capteur de déplacement de la traverse tandis que la force de montage est mesurée par la cellule de force de la machine ($\pm 5kN$). La température du montage est contrôlée par un bain liquide thermostaté.

L'influence de différents paramètres a été étudiée :

- > Diamètre mini du cône constant $\phi_{min}^{cône} = 8mm$, mais différents diamètres maxi $\phi_{max}^{cône1} = 8.67mm$, $\phi_{max}^{cône2} = 8.77mm$ et $\phi_{max}^{cône3} = 8.87mm$. Longueur du cône de 25mm : l'angle du cône évolue donc de 0.77° à 1° .
- > 2 Épaisseurs (diamètre extérieur) de bague.
- > Différentes températures de test.

Les différents essais ont également été simulés à l'aide du modèle élément fini du comportement des AMF.

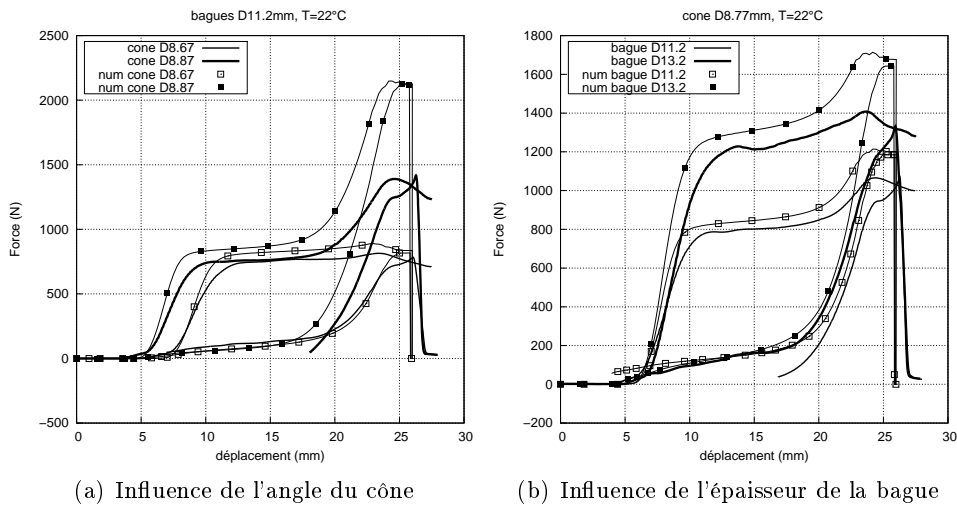


FIG. 5.3 – Ouverture de bagues superélastiques

Modélisation numérique

Le test est modélisé à l'aide d'éléments axisymétriques :

- Un cône en acier élastique module d'Young $E = 210000\text{MPa}$.
- 2 faces d'appui rigides pour le montage / démontage de la bague.
- Une bague en NiTi. Les paramètres matériaux sont issus des tests sur éprouvettes superélastiques. Il a néanmoins été nécessaire de réajuster les températures de transformation à partir d'un essai de calorimétrie sur le matériau des bagues : décalage de -7°C de $M_s = -7^\circ\text{C}$ et $A_f = 20^\circ\text{C}$. La déformation de transformation maximale en traction a également été augmentée à 5.5% de manière à s'ajuster aux courbes mesurées.
- Le contact entre les appuis et la bague se fait sans frottement, au contraire du contact cône/bague qui fait intervenir un coefficient de frottement. Celui-ci a été ajusté à $f = 0.15$ de manière à retrouver le niveau de force du montage expérimental.

Les résultats expérimentaux et numériques sont comparés et analysés

Résultats

La réponse de la bague au test est similaire au comportement superélastique en traction : tout d'abord une première phase d'élasticité de l'austénite, un changement de rigidité dans la réponse puis une saturation élastique de la réponse. La réponse présente un hystérésis entre la charge et la décharge. En fin de montage il y a une légère chute de la force. En effet, le cône est suivi d'une zone cylindrique sur laquelle la bague est stoppée avant démontage. La chute correspond à la transition cône / cylindre. Au cours de cette transition la bague subit une légère torsion de plus la force de serrage de la bague sur le cône génère une force de réaction axiale supplémentaire à la force de frottement, mais cette force de réaction disparaît lorsque la bague atteint la surface cylindrique.

Les tests sont concluants (figures 5.3 et 5.4) :

- Le modèle éléments finis prédit bien l'influence de la géométrie de la bague, de l'angle du cône et de la température.

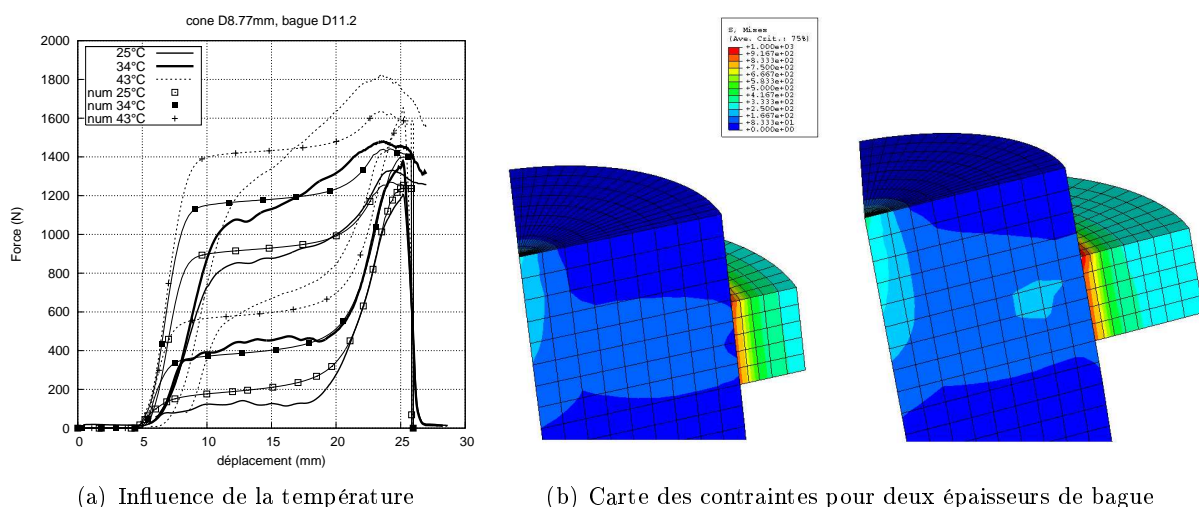


FIG. 5.4 – Ouverture d'une bague superélastique

- La carte des contraintes présente une forte hétérogénéité à l'intérieur des bagues et en particulier pour la bague épaisse. En effet, la déformation de la bague n'est pas homogène dans l'épaisseur. Pour des diamètres extérieurs plus importants, il existe un diamètre limite au-delà duquel le matériau ne subit pas de transformation de phase car la contrainte reste inférieure à la limite de transformation.
- La valeur des efforts de montage est définie à un coefficient de frottement près qui a été ajusté aux données expérimentales.

Les prédictions numériques présentent quelques limites de précision :

- La rigidité élastique est plus grande numériquement. En effet expérimentalement la mesure de déplacement prend en compte la rigidité élastique de l'ensemble du montage et de la fixation à la machine de traction, ce qui a pour effet de diminuer la rigidité apparente.
- Le modèle prévoit une saturation plus tôt que les mesures. Cela peut avoir pour origine une imprécision dans la mesure du diamètres intérieur des bagues et du diamètre maximal des cônes. Le matériau peut également admettre une déformation de transformation légèrement plus grande.
- Le modèle ne prévoit pas la plasticité du NiTi. C'est pourquoi la prédiction du comportement à 43°C est faussée car à cette température le matériau plastifie en même temps qu'il se transforme, ce qui modifie beaucoup ses caractéristiques de transformation. On en déduit également que les bagues ne sont utilisables de manière superélastique que dans le plage de température [20°C : 35°C].

5.2.2 Micro-pince à mémoire de forme [Kohl 00, Kohl 02]

Une micro-pince à effet mémoire de dimensions $2 \times 3.9 \times 0.1 \text{ mm}^3$ a été développée par Kohl et al. [Kohl 00, Kohl 02]. L'ouverture et la fermeture de la pince sont contrôlées par deux actionneurs à mémoire de forme, pilotés par un courant électrique et refroidis à température ambiante. Le mécanisme a été simulé à l'aide du code éléments finis ABAQUS et de la loi de comportement développée.

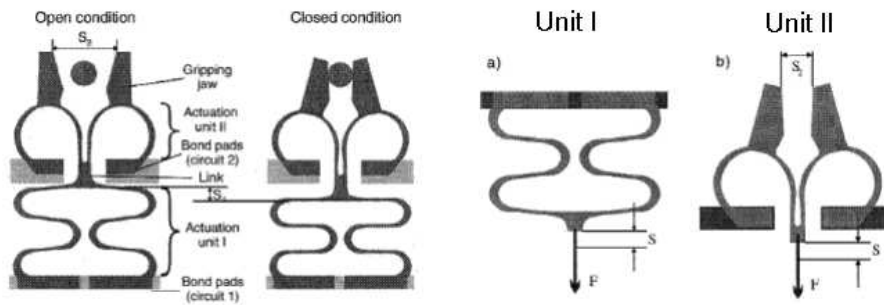


FIG. 5.5 – Principe de la micro-pince : positions ouverte, fermée ; Unités d’activation I et II

Principe de la micro-pince

La micro-pince est réalisée en une seule pièce à partir d’un film mince d’AMF NiTi. Elle est composée de deux unités d’activations antagonistes. Les deux points de fixations de chaque unité servent également de connecteur électrique. Les deux unités sont connectées entre elles à l’aide d’un pont de matière qui transmet le travail mécanique mais isole thermiquement les deux actionneurs (voir figure 5.5).

À température ambiante le matériau est martensitique. La pince est initialement montée pré-déformée. Le chauffage sélectif par effet joule de l’unité I ou II, induit un effet mémoire de forme qui entraîne l’ouverture ou la fermeture de la pince. Le refroidissement est obtenu par convection avec l’air à température ambiante. Du fait du montage antagoniste des deux actionneurs, le temps de refroidissement n’a pas d’influence sur le temps de réponse de l’actionneur sur un cycle fermeture / ouverture de la pince, par contre il détermine la fréquence maximale à laquelle le cycle peut être répété.

Les températures de transformation ont été déterminées par calorimétrie différentielle, résistivité électrique et chargement de flexion d’une poutre découpée dans le film mince de NiTi : $M_s = 20^\circ C$, $M_f = 12^\circ C$, $R_s = 44^\circ C$, $R_f = 40^\circ C$, $A_s = 56^\circ C$, $A_f = 66^\circ C$. Le matériau présente une pré-transformation martensitique en phase R. Lors d’un refroidissement à la température ambiante la transformation martensitique n’est pas atteinte. Le cycle mémoire de forme est donc obtenu grâce à la transformation en phase-R qui présente un faible hystérésis et une bonne tenue au cyclage mécanique et thermique. En contre partie la déformation réversible par effet mémoire est limitée à moins de 1%.

Modèle numérique [Peultier 04b]

L’unité I a été étudiée expérimentalement sous chargement thermique à charge constante. Elle servira de comparaison aux calculs numériques.

Du fait de la symétrie de la géométrie et du chargement, seule la moitié de l’unité I est modélisée à l’aide d’éléments en déformation plane (voir figure 5.6). Remarquons qu’il est nécessaire de modéliser la géométrie non conditionnée de l’actionneur puisque c’est celle-ci qui est “mémoire”. L’actionneur est maintenu au niveau de ses points de fixation, les conditions géométriques de symétrie sont appliquées au niveau du pont entre les deux unités.

Le chargement thermomécanique consiste à appliquer une charge constante au niveau de la connexion de l’actionneur avec le reste du mécanisme et à effectuer un chargement thermique avec une température uniforme sur tout l’actionneur. Le chargement est décomposé en 4 étapes : état

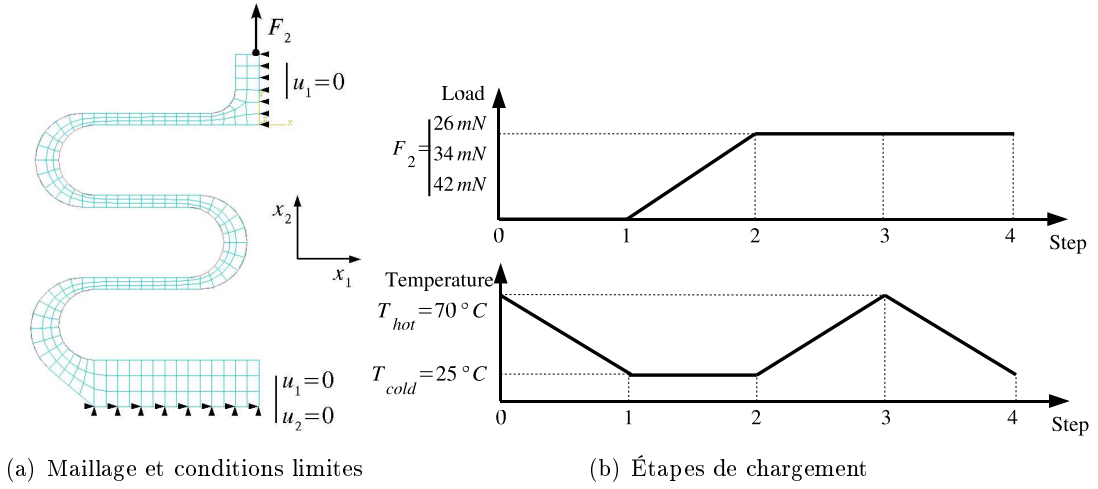


FIG. 5.6 – Modèle numérique

$E(MPa)$	ν	$\alpha_{dil.}$	$\varepsilon_{max}^{T^{trac}}$	$\varepsilon_{max}^{T^{comp}}$	b^{trac} ($MPa/^\circ C$)	$M_s(^\circ C)$	$A_f(^\circ C)$
70000	0.3	0	0.007	0.007	20	44	66
r_f	F_ε^{max} (MPa)	r_ε	$H_{variante}$ (MPa)	H_{grain} (MPa)	α_f^{deb}	α_f^{fin}	α_ε^{max}
0	10	0	1.5	10000	0.05	0.5	250

TAB. 5.1 – Paramètres matériaux pour la micro-pince (phase-R)

initiale austénitique, étape de refroidissement et transformation en phase R, étape de conditionnement de l'actionneur, puis cycle de chauffage / refroidissement à charge constante induisant un effet mémoire de forme de l'actionneur (figure 5.6). Différents cycles ont été calculés pour plusieurs valeurs de charge mécanique (26mN, 34mN, 42mN).

Les paramètres matériaux ont été ajustés pour modéliser la phase R, à partir des températures de transformation mesurées et des caractéristiques mécaniques tirées de la littérature : notamment une dépendance thermique de $20MPa/^\circ C$, une déformation de transformation de 0.7% et un fort étalement de la transformation traduit par des termes d'interactions élevés (table 5.1).

Résultats et discussion

Le champ de contraintes est montré pour une charge de 42mN sur la forme chaude et la forme froide (figure 5.7). Localement la contrainte atteint 120MPa pour un déplacement mémoire de 0.1mm. À partir de l'analyse numérique du champ de contraintes un travail d'optimisation de répartition de la contrainte et d'augmentation du déplacement mémoire pourrait être mené. Remarquons également que le problème a été modélisé à l'aide d'éléments à déformation plane car le modèle de comportement 3D s'adapte facilement à ce type d'éléments alors qu'il aurait été préférable de travailler sur des éléments à contrainte plane mais qui auraient nécessité la réécriture du modèle dans le cas spécifique des contraintes planes [Vieille 03].

L'effet mémoire de forme est tracé dans le plan déplacement / température pour les trois chargements 26mN, 34mN, 42mN (figure 5.7). Expérimentalement le déplacement est contrôlé

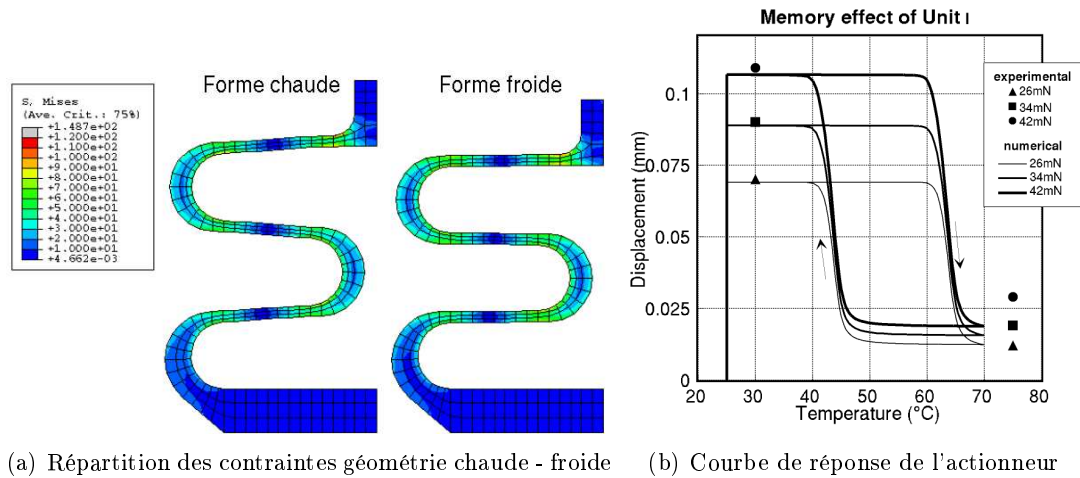


FIG. 5.7 – Résultats micro-pince

en fournissant une énergie électrique et non pas en imposant la température. L'évolution du déplacement mesurée expérimentalement fait donc intervenir le temps de chauffage et de conduction, ce qui n'est pas pris en compte dans le calcul. Néanmoins les prédictions numériques peuvent être comparées avec les mesures expérimentales du déplacement en forme froide et en forme chaude et présentent un bon accord.

Pour les faibles niveaux de charge le déplacement mémoire est proportionnel à la charge appliquée. Mais le calcul montre que pour la charge la plus élevée de 42mN la déformation de transformation maximale de 0.7% a été atteinte localement. Ainsi même si la charge est encore augmentée le déplacement mémoire va commencer à saturer et ne sera pas beaucoup plus grand que les 0.1mm mesurés à 42mN.

5.2.3 Conclusion

Le modèle donne des résultats encourageants sur le dimensionnement de structures. Il reste néanmoins à améliorer l'intégration numérique, notamment les capacités de convergence du calcul élément finis lors du passage sur structure.

Ce type de modèle permet de pré-dimensionner une structure en AMF, de faire une étude de faisabilité d'une solution et d'éliminer rapidement les solutions non viables. Il aide également à l'optimisation d'une solution AMF. En complément de tests expérimentaux il permet de connaître des informations supplémentaires : répartition des contraintes à l'intérieur du matériau, répartition de la martensite dans le matériau. Couplé à une analyse de transfert de chaleur et de génération de chaleur par effet joule il est possible de prédire le temps de réaction d'un actionneur AMF.

L'une des principales limites du modèle est de ne pas prendre en compte l'évolution des propriétés matériau lorsque le chargement est cyclé. Le fait est d'autant plus important que quelques cycles suffisent pour modifier les valeurs de déformation mémoire et les températures de transformation. Lors de l'utilisation en structure la tenue en fatigue (jusque rupture de la pièce) est un point important. Tous ces comportements sont liés à la modélisation de la plastification du matériau. En effet à chaque transformation de phase du matériau celui-ci plastifie légèrement, entraînant l'apparition d'une déformation résiduelle irréversible, une évolution des propriétés

de transformation et l'apparition d'un champ de contraintes internes entre autre à l'origine de l'effet mémoire double sens. L'entrée en plasticité du matériau est un phénomène important en lui-même puisque comme les montrent les tests sur les bagues les caractéristiques matériau évoluent énormément, avec une perte de la déformation réversible et une augmentation de la rigidité de transformation.

5.3 Dimensionnement

En fonction de leur composition et de leur traitement de mise en forme, les AMF exhibent une grande variété de comportement. On distingue d'une part l'effet mémoire de forme grâce auquel le matériau est actif et capable de générer un travail mécanique de manière contrôlée en fonction de la température ; et d'autre part les comportements passifs où le matériau subit des chargements purement mécaniques.

Les expérimentations et l'étude bibliographique permettent de dégager plusieurs règles de dimensionnement de solutions en AMF en fonction des propriétés recherchées. L'effet mémoire de forme sera illustré par le dimensionnement d'une pince mécanique automatique.

5.3.1 Actionneur à mémoire de forme

En appliquant un cycle thermomécanique à un AMF il est possible de générer un travail mécanique piloté par la température appliquée à l'AMF. L'effet qualifié de "mémoire de forme" devrait plutôt être nommé "effet de génération de force". En effet, la caractéristique principale du retour mémoire des AMF est de générer une force proportionnelle à la température :

$$F = K (T - T_{critique}) \quad (5.1)$$

avec $T_{critique}$ ($^{\circ}C$) la température de début d'effet mémoire et K ($N/^{\circ}C$) = $b * S$ où b ($MPa/^{\circ}C$) est un paramètre matériau et S (mm^2) est la section utile de l'AMF.

Bien sûr, en fonction de la réaction du mécanisme sur lequel est appliqué cet effort, il y aura génération d'un déplacement. Mais ce déplacement n'est pas directement contrôlé par la température. En particulier, s'il y a une brusque chute de la rigidité, causée par exemple par la rupture d'un élément, le déplacement de l'actionneur AMF n'est plus contrôlé et ne sera stoppé que par la fin de course de l'actionneur.

Un actionneur en AMF est donc tout à fait comparable à un actionneur classique de type vérin hydraulique simple effet capable de générer une force proportionnelle à la pression d'huile, mais dont le déplacement dépend du système sur lequel il agit.

Hystérésis

La force générée par retour mémoire augmente proportionnellement à la température lors du chauffage et réciproquement elle diminue lors du refroidissement. Mais il y a un hystérésis thermique entre le chauffage et le refroidissement (figure 5.8). Au refroidissement, la relation (5.1) est remplacée par une expression du même type mais avec une valeur de température critique plus faible qu'au chauffage. Pour tendre vers une relation linéaire entre la force et la température, l'hystérésis peut être réduit en choisissant le matériau adéquat (en ajoutant des éléments d'addition dans les NiTi, en utilisant la phase-R ou en utilisant un AMF Cuivreux monocristallin). Au contraire, l'hystérésis est intéressant pour certaines applications du type accouplement/manchonage : le montage avec élément en AMF est assemblé à température ambiante, puis suite à un chauffage l'élément en AMF génère un effort qui vient bloquer le montage

mais lors du retour à température ambiante le montage reste bloqué grâce à l'hystérésis thermique. L'hystérésis peut être augmenté en choisissant un matériau adéquat (éléments d'addition dans les NiTi, AMF à base fer).

Choix du matériau

Le choix du matériau dépend également des caractéristiques de l'actionneur recherchées : pour un contrôle précis de la force en fonction de la température on choisira un AMF de type cuivreux ($b \approx 3MPa/^\circ C$) au contraire pour une montée en force rapide on préférera les NiTi en compression ($b \approx 12MPa/^\circ C$) et en phase-R ($b \approx 20MPa/^\circ C$). La force et la course maximale générées dépendent beaucoup du nombre de cycles mémoire à effectuer avec le même actionneur en AMF : on pourra générer une déformation de 8% et une contrainte de 500MPa sur un cycle mémoire pour un AMF NiTi mais pour 10000 cycles il faudra se limiter à 2% et 140MPa. Le phénomène est identique pour les AMF cuivreux, seule exception : les monocristaux de cuivre ont une tenue au cyclage exceptionnelle et peuvent retrouver 8% de déformation après 10000 cycles ! Pour plus de précisions on pourra se rapporter au tableau des propriétés matériau du chapitre "présentation des AMF".

Dimensionnement d'un mécanisme actionné par effet mémoire

La principale contrainte lors du dimensionnement d'un actionneur AMF et liée à leur course relativement faible.

Plusieurs solutions existent pour amplifier la course d'un actionneur AMF : utiliser une géométrie d'actionneur élancée du type poutre / lamelle / ressort en flexion ou en torsion [Gillet 98, Tobushi 91, Atanackovic 89, Raniecki 01]. Ce type de géométrie doit être sur-dimensionnée en quantité de matière AMF puisque une partie du volume n'est pas utile à l'effet mémoire (coeur de la poutre).

Une autre solution est de rester sur un géométrie uniaxiale (traction, compression ou cisaillement). Une géométrie uniaxiale ne génère pas de grands déplacements. Par contre le matériau est capable de générer des efforts élevés (jusque sa limite de plasticité). On peut donc prévoir un système mécanique d'amplification du déplacement et de réduction de l'effort. Avec un système d'amplification du déplacement tous les rattrapages de jeux entre les différentes pièces du mécanisme sont autant de course perdue pour l'actionneur. De plus, sous des efforts importants la déformation élastique des pièces devient non négligeable.

Les propriétés de déformation mémoire de l'AMF sont données pour un retour mémoire libre. Or, lors de la génération d'un effort une partie de la déformation est consommée sous forme d'une déformation élastique de l'AMF. Dans le cas général cette déformation élastique n'est pas négligeable (un AMF de rigidité élastique 30000MPa qui génère une déformation à vide de 3% ne générera sous une charge de 300MPa qu'une déformation de 3% - $300/30000 = 2\%$) (voir figure 5.8).

Lors de l'utilisation d'une structure AMF élancée en compression il y a risque de flambement. L'expérience montre que contrairement au cas de flambement d'une structure superélastique, on peut se baser sur le module élastique de l'austénite ($70000MPa$) pour déterminer la force critique de flambement (pour une structure superélastique en compression il faut utiliser la rigidité apparente en cours de transformation qui est très faible $< 5000MPa$).

L'activation d'un actionneur AMF est pilotée par la température. Mais le contrôle de la température d'un solide n'est pas nécessairement évident : il fait intervenir de la convection avec le milieu ambiant ou une source de chaleur, de la conduction avec des éléments chauds

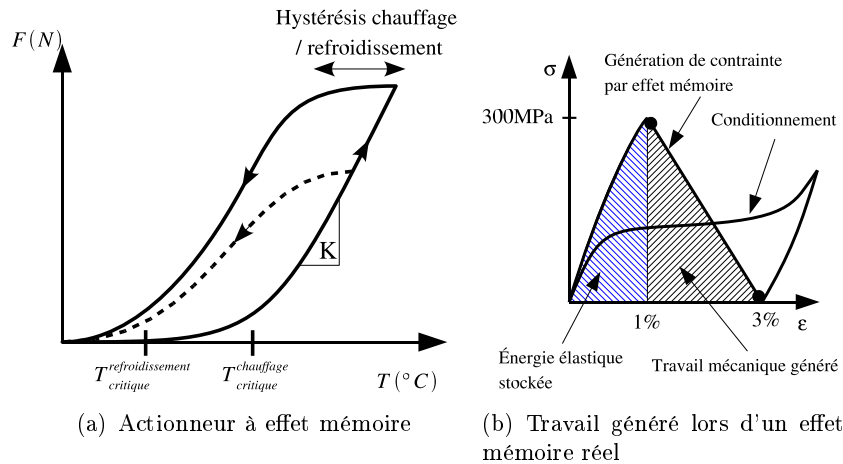


FIG. 5.8 – Actionneur à mémoire de forme

en contact ou une génération de chaleur par circulation d'un courant électrique dans l'AMF induisant un effet joule. La vitesse d'activation d'un actionneur AMF (pour des cycles complets de chauffage / refroidissement) dépasse difficilement 1Hz. Le refroidissement est l'étape la plus limitante, généralement obtenue par convection avec l'air ambiant. Une solution prometteuse testée par LExcellent et al. [Abadie 02] est l'utilisation de l'effet Peltier comme source chaude mais également source froide en inversant le champ électrique.

Exemple de dimensionnement d'une pince automatique (figure 5.9)

Caractéristiques recherchées :

- Au niveau de la pince génération d'une force de 5000N sur une course de 8mm.
- Manipulation à la main.
- Temps de réaction de quelques secondes.
- Utilisation unitaire : l'actionneur AMF est remplacé après chaque serrage. Il est inséré sous forme déjà conditionnée. Cela élimine l'étape du refroidissement et du reconditionnement de l'actionneur.

Nous nous sommes basés sur les caractéristiques mémoire pour les 100 premiers cycles d'un AMF NiTi : contrainte générée 300MPa, déformation mémoire sous contrainte 2%. Le travail par unité de volume qui peut être généré par l'AMF est donc de :

$$w_{AMF} (J) = \sigma (GPa) * \epsilon (m/m) = 6.10^{-3} Jmm^{-3} \quad (5.2)$$

Le travail demandé à la pince est important :

$$W_{pince} (J) = F (N) * u (m) = 40J \quad (5.3)$$

Ce qui nous donne un volume de matière AMF minimal de :

$$V_{AMF}^{mini} = \frac{W_{pince}}{w_{AMF}} = 6700mm^3 \quad (5.4)$$

Pour chauffer cette matière efficacement par effet joule il est nécessaire de l'agencer sous forme de fil de faible section ($\approx 1mm^2$) ce qui nous conduit à une grande longueur de fil, difficilement exploitable avec le principe du remplacement de l'élément en AMF.



FIG. 5.9 – Photos de la pince automatique et de l'actionneur à effet mémoire

L'autre solution est de travailler sur un actionneur AMF massif et de le chauffer par conduction et convection avec une source de chaleur environnante (résistance électrique). Cette deuxième solution a été retenue. Elle permet d'utiliser l'actionneur en compression avec un temps de réaction plus rapide qu'en traction. De plus une géométrie sous forme de tube est intéressante car le rayonnement d'une résistance électrique placée à l'intérieur est beaucoup plus efficace qu'un rayonnement extérieur. Pour réaliser ce tube nous avons utilisé un empilement de bagues NiTi mémoire en notre possession. Les bagues avaient déjà subies un cycle mémoire dans le sens radial d'augmentation de leur diamètre. Pour cette application à une pince mémoire elles seront utilisées selon leur épaisseur. Les problèmes de flambement en compression sont évités par l'insertion de la résistance électrique à l'intérieur du tube AMF formé de l'empilement des bagues (figure 5.9).

La section du tube AMF est de $S_{AMF} = 64mm^2$ il doit donc avoir une longueur minimale de :

$$L_{AMF}^{mini} = \frac{V_{AMF}^{mini}}{S_{AMF}} = 104mm \quad (5.5)$$

Avec ces dimensions l'actionneur va générer un effort maximal et une course de

$$F_{AMF} = S_{AMF} * \sigma_{AMF} \approx 20000N \quad (5.6)$$

$$u_{AMF}^{mini} = L_{AMF}^{mini} * \varepsilon_{AMF} \approx 2mm \quad (5.7)$$

Il faut donc une amplification du déplacement *4 pour avoir les caractéristiques recherchées au niveau du point de serrage de la pince. L'amplification est obtenue par un rapport de levier entre la force appliquée par l'AMF et le point de contact de la pince (voir figure 5.10.a). Remarquons que pour un actionneur classique l'amplification est généralement dans l'autre sens : augmentation de l'effort par réduction du déplacement (moteur électrique, pince manuelle, etc...).

L'ensemble des éléments mécaniques ont été dimensionnés pour un acier de limite élastique 300MPa. Même si la contrainte dans le bâti est faible, la déformation élastique des pièces induit

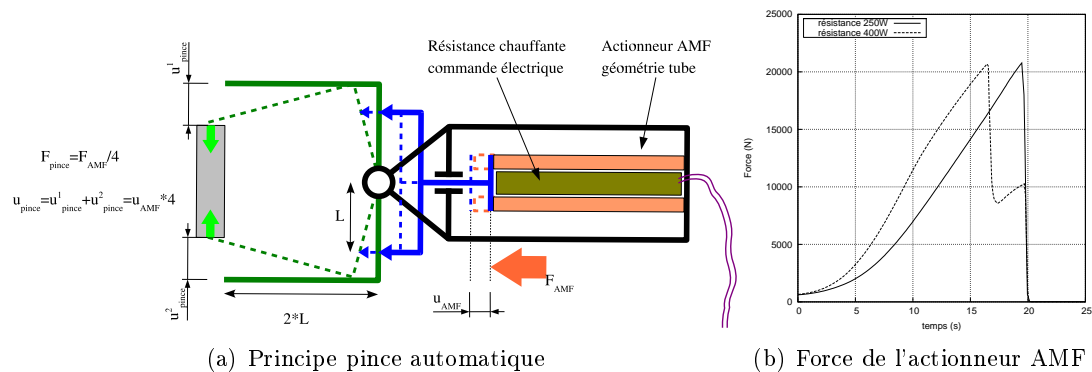


FIG. 5.10 – Pince automatique : principe et résultat

un déplacement élastique de la pince non négligeable par rapport au déplacement généré par effet mémoire. Pour compenser ces déformations élastiques la longueur du tube AMF a été augmentée de 30%.

Le tube AMF est chauffé à l'aide d'une résistance électrique placée à l'intérieur du tube. La température de l'AMF n'est pas contrôlée directement, mais simplement pilotée par la puissance électrique fournie à la résistance chauffante. Deux résistances ont été testées : d'une puissance de 250W et 400W. Le temps de réponse de l'actionneur AMF diminue avec la puissance de chauffage mais ne descend pas en dessous des 15s (figure 5.10.b). Remarquons que la génération d'effort de l'actionneur a été volontairement stoppée à 20000N correspondant à une contrainte dans l'AMF de 300MPa. En effet la température n'est pas contrôlée et l'inertie thermique de l'ensemble AMF+résistance électrique ne permet pas de stopper précisément l'effet mémoire : même après l'arrêt de l'alimentation électrique la température de l'AMF continue à augmenter avec le risque d'atteindre la limite de plasticité de l'AMF et le rendre inutilisable.

Lors de l'utilisation de l'actionneur AMF dans la pince automatique il paraît nécessaire de limiter l'effort généré par l'AMF. Pour cela un système de ressort précontraint a été employé qui à partir d'une force limite va absorber la déformation de l'AMF et limiter l'effort. Mais pour atteindre des efforts de 20000N il est nécessaire d'utiliser un ressort de forte rigidité et le changement de rigidité entre la précharge élastique et la rigidité du ressort n'est pas très marquée. Il aurait été plus intéressant d'utiliser un limiteur du type rupture d'une pièce mécanique ou un autre élément en AMF superélastique !! En effet l'effet superélastique peut être comparé à un ressort à très haute charge précontraint à la contrainte limite de transformation et dont la rigidité ressort correspond à la rigidité de la transformation de phase.

5.3.2 Structures mécaniques en AMF

En fonction des propriétés mécaniques des AMF on peut distinguer plusieurs utilisations possibles.

- comportement réversible linéaire, bonne tenue en fatigue ($> 10^4$ cycles) et faible dégradation des propriétés mécaniques
- comportement réversible avec plateau de contrainte et hystérésis charge/décharge
- comportement irréversible
- amortissement

Comportement réversible linéaire

Les matériaux AMF ont des propriétés mécaniques différentes des matériaux de structure plus courant : acier, laiton, titane ... Ils viennent élargir la gamme des matériaux de structure :

- élasticité de l'austénite : NiTi $E^A=70000\text{MPa}$ pour une limite d'élasticité $\sigma_{plast}=500$ à 1200MPa fonction de la géométrie plaque, tube ou tige ; Cuivreux polycristallins $E^A=70000\text{MPa}$ jusque $\sigma_{plast}=500\text{MPa}$; cuivreux monocristallin : élasticité fortement anisotrope $E^A=20000\text{MPa}$ sur un fil en traction jusque $\sigma_{plast}=500\text{MPa}$.
- élasticité de la martensite : effet caoutchoutique. La phase martensitique a un module élastique apparent plus faible que celui de l'austénite, grâce à un effet de réorientation des variantes de martensites partiellement réversible ; NiTi module élastique apparent $E^M=30000$ à 45000MPa pour une limite d'irréversibilité allant de $\sigma_{irreversible}=250$ à 1200MPa si le matériau est pré-déformé en phase martensitique.
- Pour utiliser l'effet superélastique en fatigue avec une faible dégradation des propriétés mécaniques il est nécessaire de limiter la déformation réversible à moins de 1%. Pour les NiTi le matériau présente alors une rigidité élastique apparente de $E=50000\text{MPa}$ pour une contrainte maximale de $\sigma=500\text{MPa}$.

Avec ces propriétés les AMF ne sont qu'une extension à la gamme de matériaux classique pour le développement de structures mécaniques. Mais ils présentent également la propriété plus spécifique de superélasticité.

Comportement réversible avec plateau

L'effet superélastique est la propriété des AMF de supporter une déformation réversible importante (de 5 à 10%) pour une contrainte appliquée relativement faible. Il se caractérise par un changement de rigidité dans la réponse du matériau et un hystérésis en contrainte entre la charge et la décharge. À l'extrême (géométrie fil) la rigidité de transformation est un plateau : le matériau se déforme à contrainte constante.

En revanche après quelques centaines de cycles de chargement cette propriété se dégrade : la rigidité de transformation et la contrainte à appliquer augmente tandis que la déformation réversible diminue. Pour limiter cette dégradation il faut limiter la déformation réversible et en particulier ne pas atteindre le point de saturation de la transformation. Pour les NiTi : déformation réversible additionnelle = 4 à 5%, contrainte du plateau de charge environ 500MPa , de décharge environ 200MPa .

Cas exceptionnel des monocristaux de cuivre (géométrie fi ou ruban) déformation réversible de 8% sur plus de 10^4 cycles !!

Applications de la propriété de superélasticité :

- Instrument très flexible avec force de rappel élevée (voir chapitre "présentation des AMF").
- Effet de limitation d'effort et de calibration de l'effort indépendamment de la déformation appliquée (voir chapitre "présentation des AMF").
- Stockage d'énergie mécanique et restitution d'un déplacement à force quasi constante (figure 5.11.a), alors qu'avec un montage élastique classique la force diminue proportionnellement au déplacement restitué. Une partie de l'énergie mécanique apportée initialement est perdue dans l'hystérésis de la transformation de phase, un matériau à faible hystérésis est donc plus intéressant (AMF Cuivreux).
- Effet de sens de déformation privilégié (figure 5.11.b). Il est aussi facile de décharger que de recharger un matériau élastique classique. Au contraire, un matériau superélastique à fort hystérésis de transformation va privilégier le sens de la décharge plutôt que celui de

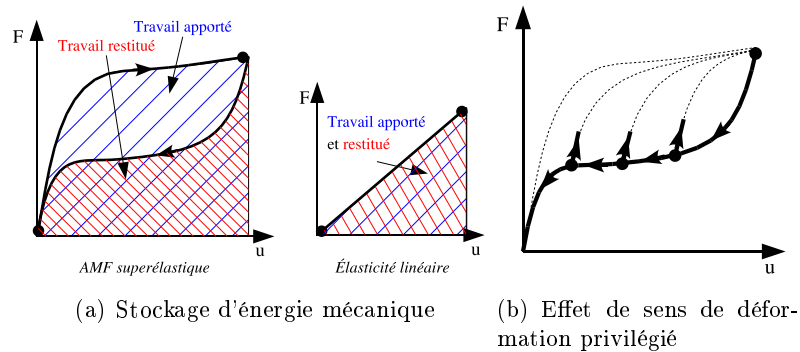


FIG. 5.11 – Applications de l'effet superélastique

sa recharge. La rigidité de décharge étant faible, le matériau se déforme à force quasi-constante, mais lorsqu'on cherche à recharger le matériau celui-ci présente une rigidité élastique, la force augmente rapidement jusqu'à atteindre la force limite de transformation du matériau. Il est donc plus facile de décharger le matériau que de le recharger.

La propriété de superélasticité est dépendante de la température du matériau : les contraintes limites de transformation augmentent avec la température. Si la température est trop élevée il y a risque de plastification avant transformation mais au contraire si la température est trop faible la déformation additionnelle n'est pas réversible.

Comportement irréversible

Ce comportement n'est pas lié à la plasticité du matériau mais à la propriété de réorientation des variantes de martensite. On retrouve l'effet de plateau : le matériau se déforme facilement sous une contrainte faible et quasi-constante. Lorsque la valeur limite de déformation est atteinte la rigidité du matériau augmente jusqu'à retrouver un comportement élasto-plastique classique. Cette déformation peut être ultérieurement "effacée" par simple chauffage du matériau au dessus de la température critique de transformation.

Les NiTi présentent un plateau martensitique à 200MPa pour déformation de 5% avant saturation. Dans ces matériaux la pré-transformation en phase R se fait à un plateau encore plus faible de 50MPa tandis que la déformation avant saturation n'est que de 0.8%.

Applications :

- > instruments à mettre en forme à la main et géométrie effaçable par chauffage
- > instrument flexible sans force de rappel
- > jonction déformable mono-bloc

Amortissement

Le comportement superélastique présente un hystérésis mécanique entre la charge et la décharge. Cet hystérésis dissipe sous forme de chaleur une partie du travail mécanique apporté au matériau. Le matériau supporte de grandes déformations, il emmagasine et dissipe donc beaucoup d'énergie. Cette dissipation de chaleur n'est pas très rapide et limite la fréquence de sollicitation du matériau. La dissipation est maximale lorsque le matériau est en cours de transformation de phase (le matériau doit donc être préchargé au milieu de la transformation de phase) et pour

une fréquence de sollicitation de quelques Hz. L'effet est utilisé pour développer des montages anti-sismiques.

De même l'effet de réorientation des variantes est réversible pour de faibles déformations et présente un léger hystérésis entre la charge et la décharge : c'est l'effet caoutchoutique. Ce faible hystérésis n'est pas très influent dans le cas de sollicitations mécaniques classiques mais intervient dans le cas de sollicitations de faible amplitude mais de fréquence plus élevée : vibrations et ondes sonores.

Applications :

- > silent-blocs
- > amortissement contrôlé par la température : en changeant la température et la phase du matériau la rigidité évolue entre l'élasticité de l'austénite et l'effet caoutchoutique amortissant.

5.4 Conclusion

La propriété de changement de phase donne aux Alliages à Mémoire de Forme une grande diversité de comportements. À partir de ces comportements nouveaux peut être développée toute une série de nouvelles solutions technologiques et la possibilité de créer des applications innovantes.

Une liste des principales caractéristiques des AMF et de leurs possibles applications ont été données pour illustrer ces possibilités. La solution AMF n'est pas nécessairement économiquement rentable en concurrence aux solutions existantes mais mérite d'être étudiée dans le cas de nouvelles solutions innovantes et notamment dans les secteurs de haute technologie (Aéronautique, biomédical, robotique, micro-systèmes...).

Le dimensionnement de solutions se fait classiquement par l'étude expérimentale de plusieurs solutions. Mais des outils numériques se développent qui guident le concepteur dans la phase d'étude de faisabilité et pré-dimensionnement de la solution, mais aident également à l'optimisation de la solution. Le modèle développé en est un exemple : validé sur les courbes de comportement du matériau, il donne également des résultats intéressants sur des chargements plus complexes rencontrés dans les structures réelles.

Conclusion générale

Au cours de ces travaux, le comportement des Alliages à Mémoire de Forme a été étudié en adoptant un point de vue macroscopique. L'objectif était d'aider à la conception d'applications en AMF exploitant l'effet mémoire, la superélasticité ou le comportement martensitique. Le problème a été abordé de différentes façons : expérimentations sur des éprouvettes en AMF, modélisation du comportement du matériau, intégration numérique du modèle et implantation dans un code de calcul par Éléments Finis pour dimensionner des structures en AMF.

Expérimentations : Plusieurs matériaux et géométries d'éprouvettes ont été étudiées sous chargements thermo-mécaniques : un matériau NiTi superélastique, un matériau NiTi à effet mémoire, une géométrie fil ou une géométrie d'éprouvette plane. Les sollicitations thermomécaniques ont été réalisées à l'aide d'une machine d'essais développée pour l'occasion, permettant de solliciter le matériau en température, en déformation, en contrainte ou rigidité constante, en traction mais également en compression grâce à un montage anti-flambement adapté aux éprouvettes planes.

Les résultats montrent que le comportement du matériau ne peut pas être totalement déterminé à partir d'expérimentations mécaniques à température constante. L'évolution de la déformation de transformation à saturation aux faibles niveaux de contrainte ne peut pas être observée lors d'un chargement mécanique. L'effet est d'autant plus important que lors du passage sur structure il est nécessaire de limiter les valeurs de contrainte appliquées ou générées par le matériau.

Le comportement du matériau en boucles partielles est observé dans le cas de la transformation de phase mais également dans le cas de la réorientation. La courbe de première charge de réorientation est notablement différente et se situe à l'intérieur du cycle global de traction/compression. Cette courbe est bien corrélée avec la valeur de déformation de transformation à saturation des cycles thermiques.

La déformation de transformation est différente lors d'un chargement de traction comparé à un chargement de compression. L'effet est observé aussi bien en transformation qu'en réorientation. De même, la contrainte limite de transformation est bien dissymétrique, mais l'effet est beaucoup moins marqué pour la contrainte limite de réorientation.

L'objectif des expérimentations était double : bien analyser le couplage thermique / mécanique et l'effet mémoire de forme pour en déduire des règles de dimensionnement et une base pour un modèle du comportement. L'étude du retour mémoire à différentes rigidités est une première étape qui mériterait d'être approfondie pour des chargements mémoire plus complexes. L'une des limitations de l'effet mémoire est l'hystérésis de la transformation de phase. Il serait intéressant de tester des AMF à hystérésis plus réduit (NiTiCu, NiTi à phase-R, Cuivreux, monocristaux de cuivre...) pour obtenir des actionneurs plus linéaires. L'autre limitation qu'il serait intéressant d'étudier est l'évolution des caractéristiques mécaniques avec le nombre de cycles.

Modélisation : Le modèle du comportement est basé sur une approche thermodynamique à variables internes définies à l'échelle macroscopique d'un matériau polycristallin. Le choix original des variables internes permet de distinguer l'effet de la transformation de phase de celui de l'orientation des variantes de martensite et donc de la déformation de la martensite. L'évolution des variables internes est dérivée d'une analyse thermodynamique de la transformation de phase. L'expression de l'énergie est construite à partir d'une analyse simplifiée de la micro-structure du matériau. Deux critères de charges sont déduits : un critère de transformation et un critère d'orientation de la martensite. Le modèle est intrinsèquement 3D et ne fait appel à aucune d'hypothèse simplificatrice du type chargement proportionnel. Enfin, des effets de boucle interne pour la transformation et l'orientation sont introduits dans le modèle à partir des termes de dissipation.

Grâce à cette distinction entre la transformation et l'orientation le modèle rend bien compte de l'effet de superélasticité, du comportement mécanique de la martensite, du comportement thermique et de l'évolution de la déformation de transformation avec le niveau de contrainte, mais également de l'effet mémoire de forme libre ou contraint à différentes rigidités.

La dissymétrie du comportement est bien prévue, mais dans une moindre mesure que les valeurs expérimentales.

L'effet de boucle interne est important et notamment le cas des boucles internes en réorientation, puisqu'il permet de décrire la courbe de première charge d'orientation et l'évolution de la déformation de transformation. La modélisation de l'effet de réorientation en 3D fait appel à une détection de changement de trajet. Il serait intéressant d'introduire un effet de boucles internes "continu" et sans détection de changement de sens, en introduisant par exemple une variable mémoire évanescence similaire à celle introduite en plasticité à écrouissage cinématique non linéaire.

L'introduction de l'effet caoutchoutique permettrait de prédire plus précisément le comportement de la phase martensitique.

À plus long terme, les effets d'évolution du comportement avec le cyclage seraient utiles lors du dimensionnement d'applications en AMF.

Intégration numérique et calculs éléments finis : Dans l'objectif d'une implantation dans un code de calcul par Élément Finis, le modèle a été intégré numériquement. Le modèle se prête bien à un schéma d'intégration numérique implicite par la méthode de Newton-Raphson. Cela présente deux intérêts : une indépendance de la solution vis à vis de la discrétisation dans le cas de chargements proportionnels, mais également la possibilité d'intégrer le modèle dans un code de calcul E.F. implicite. Néanmoins plusieurs difficultés ont été rencontrées qui mériteraient d'être approfondies : la sélection du bon comportement nécessite dans certains cas de résoudre deux fois le système d'équations ; la résolution du système d'équation par une boucle implicite est particulièrement lente lorsque les deux critères de chargement sont activés et cela se répercute sur la convergence du calcul de l'équilibre de la structure.

Deux applications du modèle ont été proposées qui exploitent l'effet superélastique et l'effet mémoire de forme. Le modèle montre un certain intérêt dans le cadre d'une étude de faisabilité mais également pour une aide à l'optimisation de la solution. Il serait intéressant de tester de manière plus approfondie les prédictions du modèle sur structures complexes.

Quelques règles de dimensionnement ont été proposées pour dimensionner un actionneur à effet mémoire et des applications en structure mécaniques.

Les outils développés dans ces travaux sont une base pour l'aide à la conception d'applications en Alliages à Mémoire de Forme. Mais ils nécessitent au préalable de la part de l'ingénieur, une

bonne compréhension des phénomènes mis en jeu et notamment le couplage du comportement mécanique avec la température.

Bibliographie

- [Abadie 02] J. Abadie, N. Chaillet & C. LExcellent. *An integrated shape memory alloy micro-actuator controlled by thermoelectric effect*. Sensors and Actuators A/Physical, vol. A99, pages 297–303, 2002.
- [Adder 90] Y. Adder, J.M. Dupouy, J. Philibert & Y. Quéré. *Éléments de métallurgie physique : Tome 1 rappels et tome 4 diffusions-transformations*. INSTN collection enseignement CEA, 1990.
- [Atanackovic 89] T. Atanackovic & M. Achenbach. *Moment-curvature relations for a pseudoelastic beam*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, page 73, 1989.
- [Auricchio 99] F. Auricchio & E. Sacco. *A temperature-dependent beam for shape memory alloys : constitutive modelling, finite-element implementation and numerical simulations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 174, pages 171–190, 1999.
- [Auricchio 01] F. Auricchio. *A robust integration-algorithm for a finite-strain shape-memory-alloy superelastic model*. International Journal of Plasticity, vol. 17, pages 971–990, 2001.
- [Bekker 98] A. Bekker & L.C. Brinson. *Phase diagram based description of the hysteresis behavior of shape memory alloys*. Acta Materiala, vol. 46, no. 10, pages 3649–3665, 1998.
- [Berveiller 01] M. Berveiller, E. Gautier, C. LExcellent & E. Patoor. *Déformation par transformation martensitique ; Application aux alliages à mémoire de forme et aux aciers TRIP*. Rapport technique, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Octobre 2001.
- [Besson 01] J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche & S. Forest. *Mécanique non-linéaire des matériaux*. Hermès Science, 2001.
- [Blanc 04] P. Blanc & L. LExcellent. *Micromechanical modelling of a CuAlNi shape memory alloy behavior*. Materials Science and Engineering, vol. A378, pages 465–469, 2004.
- [Bouvet 01] C. Bouvet. *De l'uniaxial au multiaxial : comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2001.
- [Bouvet 04] C. Bouvet, S. Calloch & C. LExcellent. *A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings*. Mechanics of Materials, vol. 35, pages 969–986, 2004.
- [Boyd 96] J.G. Boyd & D.C. Lagoudas. *A thermodynamic constitutive model for the shape memory alloy materials. Part I : the monolithic shape memory alloy*. International Journal of Plasticity, vol. 12, pages 805–842, 1996.

- [Chaboche 96] J.L. Chaboche & G. Cailletaud. *Integration methods for complex plastic constitutive equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 133, pages 125–155, 1996.
- [Cohen 79] M. Cohen, G.B. Olson & P.C. Clapp. International Conference On MArtensitic Transformation, 1979.
- [Dolce 01] M. Dolce & D. Cardone. *Mechanical behaviour of shape memory alloys for seismic applications ; 2. Austenite NiTi wires subjected to tension*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 43, pages 2657–2677, 2001.
- [Elhadrouz 04] M. Elhadrouz. *Modélisation du comportement de céramiques ferroélectriques et ferroélastiques*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, 2004.
- [Entemeyer 96] D. Entemeyer. *Étude micromécanique du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme*. PhD thesis, Université de Metz, 1996.
- [Fortin 01] A. Fortin. Analyse numérique pour ingénieurs. Presses Internationales Polytechniques, 2nd édition 2001.
- [Gao 00] X. Gao, M. Huang & L.C. Brinson. *A multivariant micromechanical model for SMAs. Part I Crystallographics issues for single crystal model*. International Journal of Plasticity, vol. 16, pages 1345–1369, 2000.
- [Gillet 98] Y. Gillet, E. Patoor & M. Berveiller. *Calculation of pseudoelastic elements using a non-symmetrical thermomechanical transformation criterion and associated rule*. Journal of Intelligent Materials Systems and Structures, vol. 9, no. 5, pages 366–378, 1998.
- [Guénin 95] G. Guénin. Alliages à mémoire de forme. Techniques de l’Ingénieur, 1995.
- [Guénin 97] G. Guénin. *Shape memory and pseudoelastic properties of Fe-Mn-Si and Ti-Ni based alloys*. Journal de Physique IV, vol. 7, no. C5, pages 467–476, 1997.
- [Hautcoeur 04] A. Hautcoeur. <http://www.nimesis.com>. 2004.
- [Helm 03] D. Helm & P. Haupt. *Shape memory behaviour : modelling within continuum thermomechanics*. International Journal of Solids and Structures, vol. 40, pages 827–849, 2003.
- [Hillert 98] M. Hillert. Phase equilibria, phase diagrams and phase transformation : their thermodynamic basis. Cambridge University press, 1998.
- [Huo 93] Y. Huo & I. Muller. *Nonequilibrium thermodynamics of pseudoelasticity*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 5, pages 163–204, 1993.
- [Kato 04] H. Kato, N. Inagaki & K. Sasaki. *A one-dimensional modelling of constrained shape memory effect*. Acta Materiala, vol. 52, pages 3375–3382, 2004.
- [Kohl 00] M. Kohl, E. Just, W. Pfleging & S. Miyazaki. *SMA microgripper with integrated antagonism*. Sensors and Actuators A/Physical, vol. A83, pages 208–213, 2000.
- [Kohl 02] M. Kohl, B. Krevet & E. Just. *SMA microgripper system*. Sensors and Actuators A/Physical, vol. A97-98, pages 646–652, 2002.
- [Lebreton 03] C. Lebreton. Alliages à mémoire de forme niti ; fiche matériau. Techniques de l’Ingénieur, 2003.
- [Leclercq 96] S. Leclercq & C. LExcellent. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 44, no. 6, pages 953–980, 1996.

-
- [LExcellent 02] C. LExcellent, A. Vivet, C. Bouvet, S. Calloch & P. Blanc. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 52, pages 2717–2735, 2002.
- [Lim 99] T.J. Lim & D.L. McDowell. *Mechanical behavior of an NiTi shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading*. Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 121, pages 9–18, 1999.
- [Lim 02] T.J. Lim & D.L. McDowell. *Cyclic thermomechanical behavior of a polycrystalline pseudoelastic shape memory alloy*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 50, pages 651–676, 2002.
- [Liu 98] Y. Liu, Z. Xie, J.V. Humeeck & L. Delaey. *Assymetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta Materiala, vol. 46, no. 12, pages 4325–4338, 1998.
- [Liu 03] Y. Liu, H. Yang & A. Voigt. *Thermal analysis of the effect of aging on the transformation behaviour of Ti-50.9atpcNi*. Materials Science and Engineering, vol. A360, pages 350–355, 2003.
- [Lubliner 96] J. Lubliner & F. Auricchio. *Generalized plasticity and shape memory alloys*. International Journal of Solids and Structures, vol. 33, no. 7, pages 991–1003, 1996.
- [Manach 97] P.Y. Manach & D. Favier. *Shear and tensile thermomechanical behavior of a near equiatomic NiTi alloy*. Materials Science and Engineering, vol. A222, pages 45–57, 1997.
- [McNaney 03] J.M. McNaney, V. Imbeni, Y. Jung, P. Papadopoulos & R.O. Ritchie. *An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading*. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 23, pages 37–61, 2003.
- [Niclaeys 02a] C. Niclaeys. *Comportement des monocristaux en AMF. Application au comportement des polycristaux*. PhD thesis, Université de Metz, 2002.
- [Niclaeys 02b] C. Niclaeys, T. BenZineb, S. Arbab-Chirani & E. Patoor. *Determination of the interaction energy in the martensitic state*. International Journal of Plasticity, vol. 18, pages 1619–1647, 2002.
- [Nougier 01] J.P. Nougier. Méthodes de calcul numérique. vol1 systèmes d'équations. vol2 fonctions équations aux dérivées. Hermès Science publications, 2001.
- [Orgéas 97] L. Orgéas, Y. Liu & D. Favier. *Exprimental Study of Mechanical Hysteresis of NiTi during Ferroelastic and Superelastic Deformation*. Journal de Physique IV, no. C5, page 477, 1997.
- [Orgéas 98] L. Orgéas & D. Favier. *Stress-induced martensitic transformation of a NiTi alloy in isothermal shear, tension and compression*. Acta Materiala, vol. 46, no. 15, pages 5579–5591, 1998.
- [Patoor 88] E. Patoor, A. Eberhardt & M. Berveiller. *Thermomechanical behavior shape memory alloys*. Archives of Mechanics, vol. 40, no. 5-6, pages 775–794, 1988.
- [Patoor 94] E. Patoor & M. Berveiller. Technologie des alliages à mémoire de forme. Hermès, 1994.

- [Patoor 95] E. Patoor, M. El Amrani, A. Eberhardt & M. Berveiller. *Determination of the origin for the dissymmetry observed between tensile and compression tests on shape memory alloys*. Journal de Physique IV, vol. 2, no. C2, page 495, 1995.
- [Patoor 96] E. Patoor, A. Eberhardt & M. Berveiller. *Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys*. Journal de Physique IV, vol. 6, no. C1, pages 277–292, 1996.
- [Peultier 04a] B. Peultier, T. BenZineb & E. Patoor. *Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behavior ; Application to structure computation by F.E.M.* Accepted in Mechanics of Materials, 2004.
- [Peultier 04b] B. Peultier, T. BenZineb & E. Patoor. *Modelling of the martensitic phase transformation for finite element computation*. Journal de Physique IV, vol. 115, pages 351–359, 2004.
- [Qidwai 00] M.A. Qidwai & D.C. Lagoudas. *On thermodynamics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material*. International Journal of Plasticity, vol. 16, pages 1309–1343, 2000.
- [Raniecki 98] B. Raniecki & L. Lexcellent. *Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys*. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 17, no. 2, pages 185–205, 1998.
- [Raniecki 01] B. Raniecki, J. Rejzner & C. Lexcellent. *Anatomization of hysteresis loops in pure bending of ideal pseudoelastic SMA beams*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 43, pages 1339–1368, 2001.
- [Rengarajan 98] G. Rengarajan, R. Krishna Kumar & J.N. Reddy. *Numerical modeling of stress induced martensitic phase transformation in shape memory alloys*. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, pages 1489–1513, 1998.
- [Saanouni 03] K. Saanouni & J.L. Chaboche. Chapter 3.7 : Computational damage mechanics. application to metal forming, volume 3 : Numerical and Computational Methods. in Comprehensive Structural Integrity, Elsevier Ltd, Oxford, 2003.
- [Siredey 99] N. Siredey, E. Patoor, M. Berveiller & A. Eberhardt. *Constitutive equations for polycrystalline thermoelastic shape memory alloys. Part I Intragranular interactions and behavior of the grain*. International Journal of Solids and Structures, vol. 36, pages 4289–4315, 1999.
- [Sittner 96] P. Sittner, M. Takakura, Y. Hara & M. Tokuda. *On transformation pathways of general stress controlled thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloys*. Journal de Physique IV, vol. 6, no. C1, pages 357–366, 1996.
- [Sittner 00] P. Sittner, G.N. Dayananda D. Vokoun & R. Stalmans. *Recovery stress generation in shape memory Ti50Ni45Cu5 thin wires*. Materials Science and Engineering, vol. A286, pages 298–311, 2000.
- [Souza 98] A.C. Souza, E.N. Mamiya & N. Zouain. *Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations*. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 17, pages 789–806, 1998.
- [Sun 93] Q.P. Sun & K.C.Hwang. *Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys. Part I and II*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 41, no. 1, pages 1–33, 1993.
- [Tanaka 84] K. Tanaka. *A thermomechanical sketch of spahe memory effect : one-dimensional tensile behavior*. Res mechanica, vol. 18, pages 251–263, 1984.

-
- [Tanaka 95] K. Tanaka, F. Nishimura, T. Hayashi, H. Tobushi & C. Lexcellent. *Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads*. Mechanics of Materials, vol. 19, pages 281–292, 1995.
- [Thamburaja 02] P. Thamburaja & L. Anand. *Superelastic behavior in tension-torsion of an initially-textured Ti-Ni shape memory alloy*. International Journal of Plasticity, vol. 18, pages 1607–1617, 2002.
- [Tobushi 91] H. Tobushi & K. Tanaka. *Deformation of a shape memory alloy helical spring*. JSME International Journal Series 1, vol. 34, no. 1, page 83, 1991.
- [Tokuda 98] M. Tokuda, M. Ye, M. Takakura & P. Sittner. *Calculation of Mechanical behaviours of shape memory alloy under multi-axial loading conditions*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 40, no. 2-3, pages 227–235, 1998.
- [Vieille 03] B. Vieille. *De l'élaboration d'un modèle numérique à la prédiction du comportement de structures minces en alliage à mémoire de forme*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2003.
- [Vignes 80] J. Vignes. Algorithmes numériques. analyse et mise en oeuvre. tome 2 Équations et systèmes non linéaires. TECHNIP collection languages et algorithmes de l'informatique, 1980.
- [Wang 04] Z.G. Wang, X.T. Zu, X.D. Feng, S. Zhu, J.M. Zhou & L.M. Wang. *Annealing-induced evolution of transformation characteristics in TiNi shape memory alloys*. Physica, vol. B353, pages 9–14, 2004.
- [Wu 03] X.D. Wu, G.J. Sun & J.S. Wu. *The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol*. Materials Letters, vol. 57, pages 1334–1338, 2003.
- [Zhang 94] C.S. Zhang, Y.Q. Wang, J.X. Cheng & C.L. Zhao. *Pseudoelasticity of near-equiatomic NiTi shape memory alloy*. Proceedings of SMST conference, pages 383–388, 1994.
- [Zhu 02] J. Zhu, N. Liang, W. Huang, K.M. Liew & Z. Liu. *A thermodynamic constitutive model for stress induced phase transformation in shape memory alloys*. International Journal of Solids and Structures, vol. 39, pages 741–763, 2002.

Annexe A

Machine thermomécanique

Une machine de sollicitation thermo-mécanique est composée de 3 éléments :

1. Une enceinte thermique pour contrôler la température de l'éprouvette.
2. Une machine mécanique qui applique un chargement contrôlé en force ou en déplacement.
3. Un système de mesure de la réponse du matériau aux sollicitations : capteurs de force, déformation et température.

Les éprouvettes sont sollicitées en traction. Dans le cas de la compression il y a risque de flambement de l'éprouvette et un montage anti-flambement spécifique adapté aux éprouvettes planes a été développé.

La machine est pilotée et les mesures sont enregistrées sur PC.

A.1 Enceinte thermique

Le dispositif a été conçu de manière à séparer la partie thermique de la partie mécanique : l'axe de sollicitation est déporté par rapport à l'axe mécanique de la machine ce qui permet de venir plonger l'éprouvette dans une enceinte liquide extérieure à la partie mécanique. La disposition des différents éléments permet de maintenir le capteur d'effort et l'extensomètre en dehors du bain liquide, ils ne subissent donc quasiment pas les modifications de températures du bain liquide.

L'enceinte thermique est une double enceinte métallique, l'espace de 5mm entre les deux enceintes assure l'isolation thermique. La face supérieure de l'enceinte est ouverte de manière à pouvoir plonger l'éprouvette dans le bain liquide (figure A.1). Une plaque escamotable positionnée à l'intérieur de l'enceinte permet de maintenir le niveau du liquide.

Le fluide utilisé est du liquide de refroidissement automobile. La température du liquide est contrôlé par une machine thermique commerciale JULABO F25-MV qui permet de faire évoluer la température du liquide dans une plage allant de -10°C à 90°C . Les vitesses de chauffage et refroidissement sont fixées par la machine : $6^{\circ}\text{C}/\text{min}$ au chauffage et $-1^{\circ}\text{C}/\text{min}$ au refroidissement.

La température est mesurée par un thermocouple de type J. Ce thermocouple est connecté à un circuit avec mesure de température de référence fournit avec un boîtier de conditionnement de signal SCXI de National Instrument. La mesure de tension est ensuite enregistrée sur PC par une carte d'acquisition 6024E de National Instrument. Puis le signal en tension est converti en température grâce à une routine de conversion du logiciel LabView.

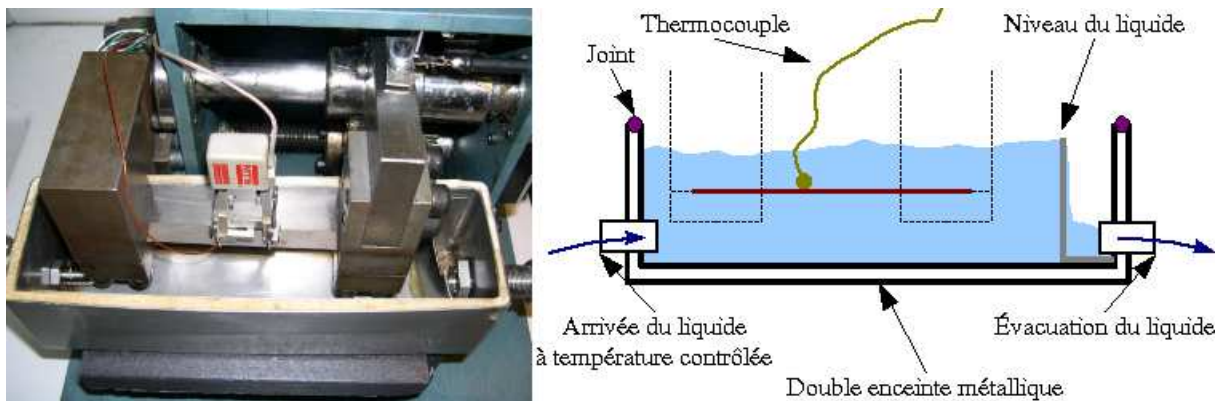


FIG. A.1 – Enceinte thermique

A.2 Machine mécanique

A.2.1 Présentation

La partie mécanique du dispositif permet d'imposer un allongement à l'éprouvette tout en mesurant la force nécessaire et la déformation locale de l'éprouvette. Le pilotage de l'allongement et l'acquisition des mesures sont effectuées par un PC, ce qui permet de réaliser une boucle d'asservissement de la force (figure A.2).

La machine est composée d'un bâti sur lequel est fixé une traverse fixe qui sert également de capteur d'effort. Une traverse mobile en translation permet d'imposer un allongement à l'éprouvette. Cette translation est imposée par un système mécanique de vis-écrou actionné par l'intermédiaire de plusieurs étages de réduction par un moteur électrique à courant continu de type... Le moteur est piloté en vitesse de rotation par le PC par l'intermédiaire d'une carte de puissance.

Un capteur de déplacement donne une position approximative de la traverse mobile par rapport au bâti, mais le montage n'est pas assez précis pour effectuer une mesure d'allongement de l'éprouvette.

L'allongement de l'éprouvette est effectuée en local grâce à un extensomètre 634-12F de MTS qui admet une déformation de -25% à +25%. Le pont de jauge de l'extensomètre est conditionné par un boîtier analogique. La mesure de la tension de déséquilibre du pont de jauge est ensuite enregistrée sur PC et convertie en déformation. La conversion en déformation a été calibrée sur la gamme complète de l'extensomètre assurant la précision de la mesure de déformations de quelques %. La mesure est précise à 0.1% près.

Le capteur d'effort a été entièrement développé pour l'occasion.

A.2.2 Capteur de force

Les capteurs de force commerciaux sont généralement conçus pour un chargement axial. Or le principe de la machine est de déporter l'axe de sollicitation par rapport à l'axe mécanique de la machine. Nous avons donc décidé de concevoir un capteur d'effort spécifique basé sur la flexion de deux lamelles parallèles (figure A.3).

Le capteur est sollicité dans le domaine d'élasticité des lamelles. Le matériau des lamelles est choisi pour sa limite d'élasticité élevée. Les lamelles se déforment proportionnellement à la charge. La déformation des lamelles est mesurée à l'aide de 4 jauges connectées en pont complet

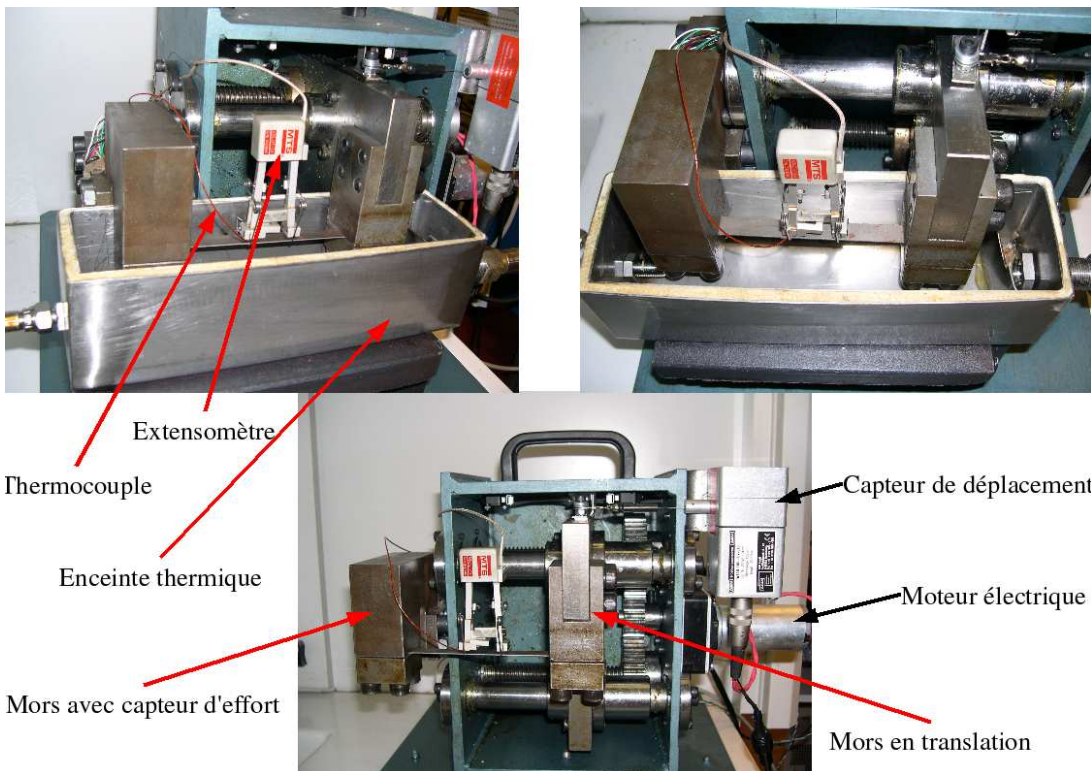
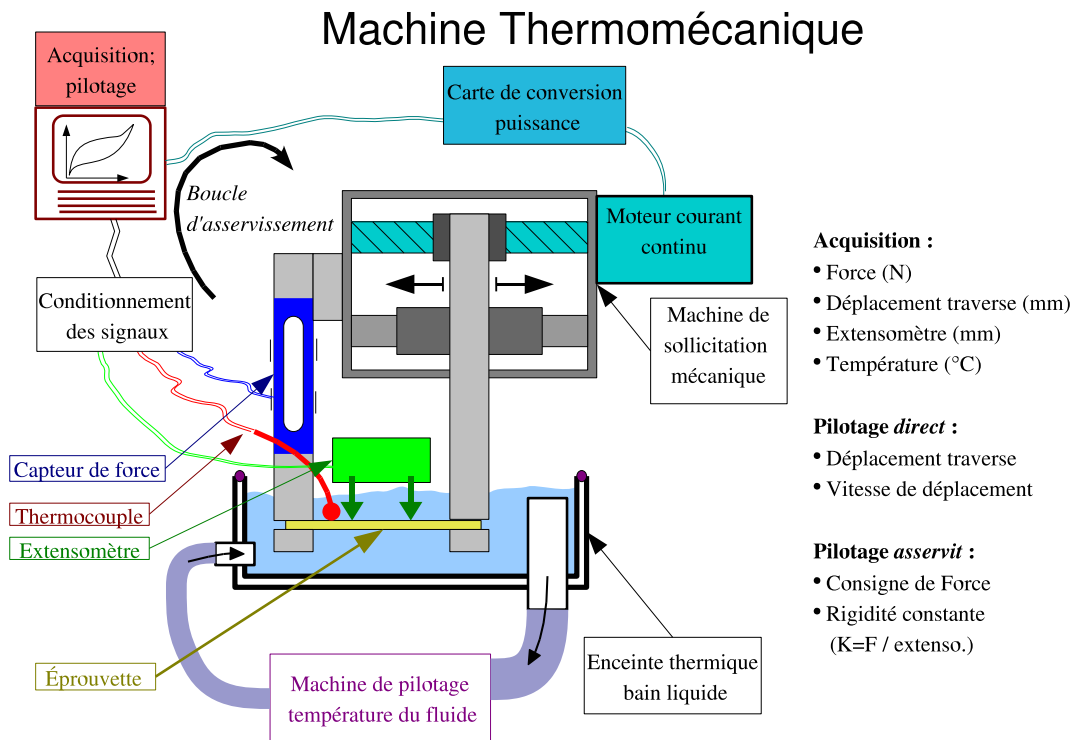
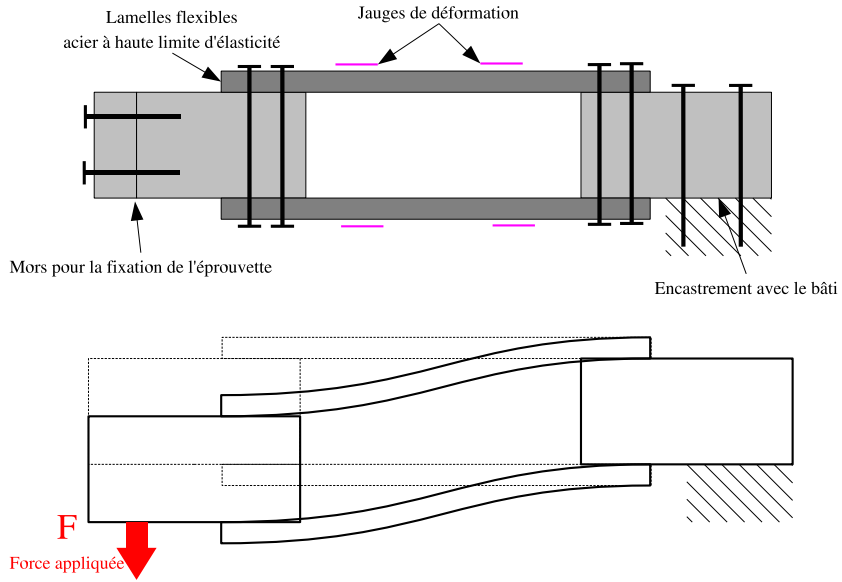
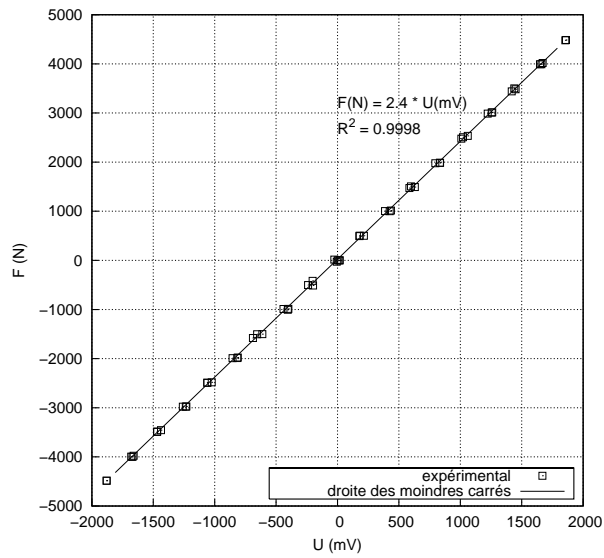


FIG. A.2 – Machine de sollicitation thermomécanique



(a) Principe du capteur d'effort



(b) Étalonnage du capteur d'effort

FIG. A.3 – Capteur de force

qui permet d'éliminer les effets de dilatation du matériau avec la température ainsi que les composantes de traction / compression des lamelles. Le pont est conditionné à l'aide d'un boîtier analogique. La tension de sortie est enregistrée sur le PC et convertie en valeur de Force.

Pour obtenir le coefficient de conversion Tension \leftrightarrow Force il a été nécessaire de calibrer le capteur d'effort. La gamme d'utilisation du capteur étant $\pm 10\text{kN}$ nous avons réalisé 2 étalonnages avec les capteurs de $\pm 100\text{kN}$ et $\pm 5\text{kN}$ des machines de traction de référence du laboratoire. La réponse du capteur est linéaire dans la gamme $\pm 10\text{kN}$, avec un coefficient de conversion de 2.4 N/mV (figure A.3).

A.2.3 Validation mécanique

Plusieurs types d'éprouvettes et de matériaux au comportement élasto-plastique ont été déformées par les machines de références du laboratoire et par la machine de traction développée : (figure A.4)

- > éprouvette en acier de section $1.5 \times 12.5\text{mm}^2$
- > éprouvette en acier de section $1 \times 12.8\text{mm}^2$
- > éprouvette en aluminium de section $1 \times 12.5\text{mm}^2$

La comparaison des résultats valide les mesures de force et déformation de la machine développée.

A.2.4 Asservissement

La fréquence d'acquisition des mesures est d'environ 700Hz . Les mesures sont ensuite filtrées par un filtre passe bas de fréquence coupure de $\dots\text{Hz}$. La vitesse d'acquisition est donc suffisamment rapide pour intégrer une boucle d'asservissement de la force appliquée par la machine.

Asservissement en force

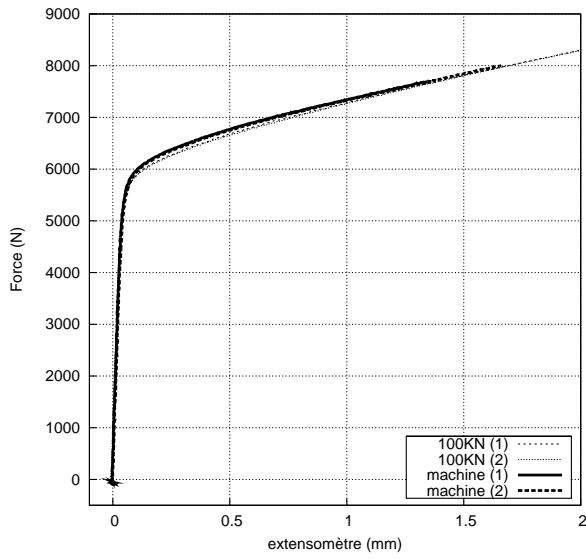
Le principe de départ de l'axe de sollicitation est source de jeux et frottements entre le couple moteur et la force de traction. La réponse de la machine n'est donc pas très linéaire et évolue avec le niveau de force. La réponse du moteur par rapport à la consigne de vitesse n'est également pas très linéaire, car ce pilotage se fait en boucle ouverte avec compensation R*I simple.

Dans ces conditions la recherche d'une boucle d'asservissement optimale s'avère difficile puisqu'il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert d'une machine dont la réponse est non linéaire.

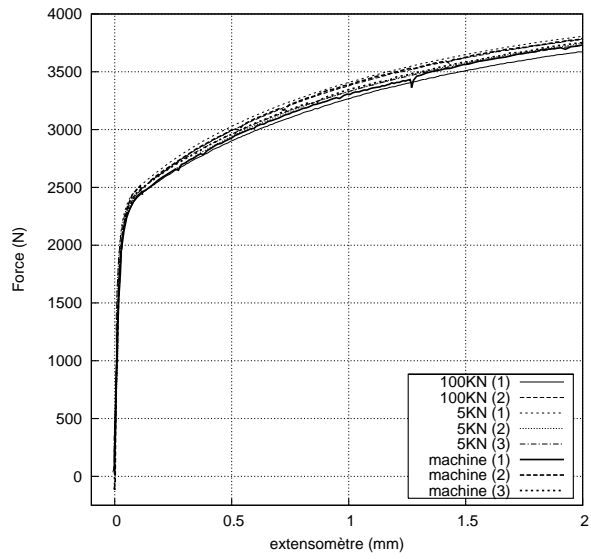
Nous avons donc préféré une solution simple et robuste mais moins précise et moins rapide qu'une solution optimisée. La consigne de vitesse du moteur est prise proportionnelle à l'erreur de force entre la force de consigne et la force réelle :

$$v_{\text{moteur}} = h(F_{\text{consigne}} - F_{\text{mesure}})$$

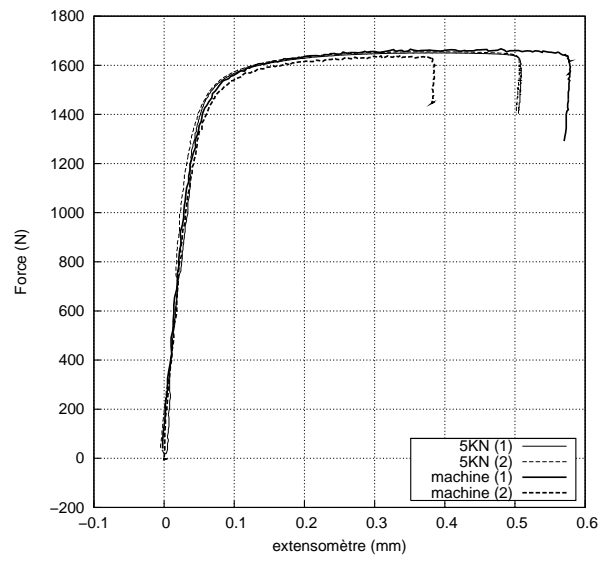
Cette solution peut conduire à une oscillation divergente de la consigne d'asservissement, à cause des différents retards dans la boucle d'acquisition et notamment dans le filtrage des données. Pour remédier à ce problème nous avons saturé la valeur de vitesse moteur de manière à ne jamais dépasser une vitesse de traction supérieure à 5mm/min . De cette manière l'asservissement est toujours stable et l'erreur de force est limitée à $\pm 20\text{N}$. Par contre le temps de réaction de l'asservissement est relativement lent. Le problème a été rencontré au cours de l'étude du comportement thermique des fils en AMF qui présente un saut de déformation à une température quasi constante. Dans ce cas l'erreur de force peut atteindre ponctuellement 100N et une erreur de contrainte de 40MPa .



(a) acier 1.5mm*12.5mm



(b) acier 1mm*12.8mm



(c) aluminium 1mm*12.5mm

FIG. A.4 – Validation mécanique

Asservissement en rigidité

L'asservissement en rigidité est utilisé dans l'étude de l'effet mémoire de forme. Avec un cycle mémoire de forme la relation entre l'éprouvette en AMF et la machine de sollicitation est inversée : l'éprouvette devient actionneur tandis que la machine est passive et ne sert qu'aux mesures de force et déformations. L'idée est de maîtriser le comportement passif de la machine en lui donnant une rigidité apparente linéaire : un déplacement de l'entre-mors proportionnel à la force appliquée. La rigidité apparente de la machine pourrait alors être modifiée.

Lorsque l'asservissement en force est programmé, l'asservissement en rigidité est relativement direct : il suffit de faire évoluer la consigne de force en fonction du déplacement actuel. Le comportement du matériau étant basée sur la mesure de déplacement de l'extensomètre, le calcul de la rigidité sera également basé sur la mesure de l'extensomètre et non pas sur la valeur du capteur de position de la traverse. La relation de rigidité de la machine s'écrit :

$$(F - F_{init}) = K(u - u_{init})$$

avec K la rigidité recherchée et (u_{init}, F_{init}) l'état initial en début d'asservissement.

La loi d'asservissement s'écrit alors :

$$v_{moteur} = h(K(u_{mesure}^{extenso} - u_{init}) + F_{init} - F_{mesure})$$

De nouveau la consigne de vitesse est saturée à une valeur maximale. L'asservissement est fonctionnel et la précision est d'autant meilleure que la rigidité est élevée.

A.3 Montage anti-flambement

A.3.1 Présentation

Le comportement des AMF est différent en fonction de la direction de sollicitation. L'effet de dissymétrie traction-compression est particulièrement important à observer.

Avec le brusque changement de comportement lié à la transformation de phase le risque de flambement des éprouvettes en AMF pour un chargement de compression est très important. Nous avons donc prévu un montage anti-flambement adapté aux éprouvettes planes de section $5 \times 2 \text{ mm}^2$ et de longueur utile 50mm.

Le principe est de guider la déformation de l'éprouvette à l'aide de deux demi glissières en cisaillement l'une par rapport à l'autre (figure A.5). Avec ce principe l'éprouvette est toujours en mouvement par rapport aux deux glissières du montage anti flambement ce qui évite les coincements : la déformation de l'éprouvette est homogène sur toute sa longueur. Par contre cela impose un certain parallélisme entre le mouvement des deux glissières. De plus malgré la lubrification du milieu ambiant liquide les problèmes de frottements ne sont pas éliminés.

A.3.2 Validation

Le montage anti-flambement est testé sur des éprouvettes en acier au comportement élasto-plastiques et de dimensions similaires aux éprouvettes en AMF.

Les éprouvettes sont chargées suivant un cycle de de traction - compression en augmentant régulièrement la déformation. Un cycle est effectuée en débutant par une traction. Un deuxième cycle sur une éprouvette neuve est effectué en débutant par une compression. Le deuxième cycle est tracé en inversant le signe des déformations et des contraintes. Ces essais sont répétés sur deux cycles différents avec des éprouvettes vierges pour chaque test (figure A.6).

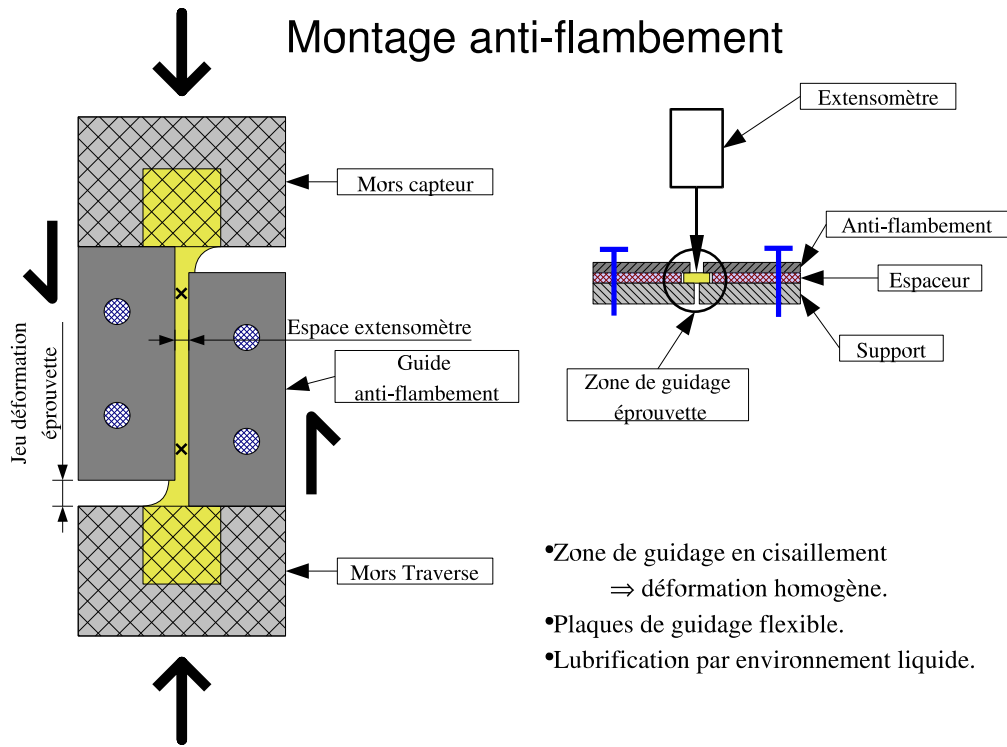


FIG. A.5 – Montage anti-flambement

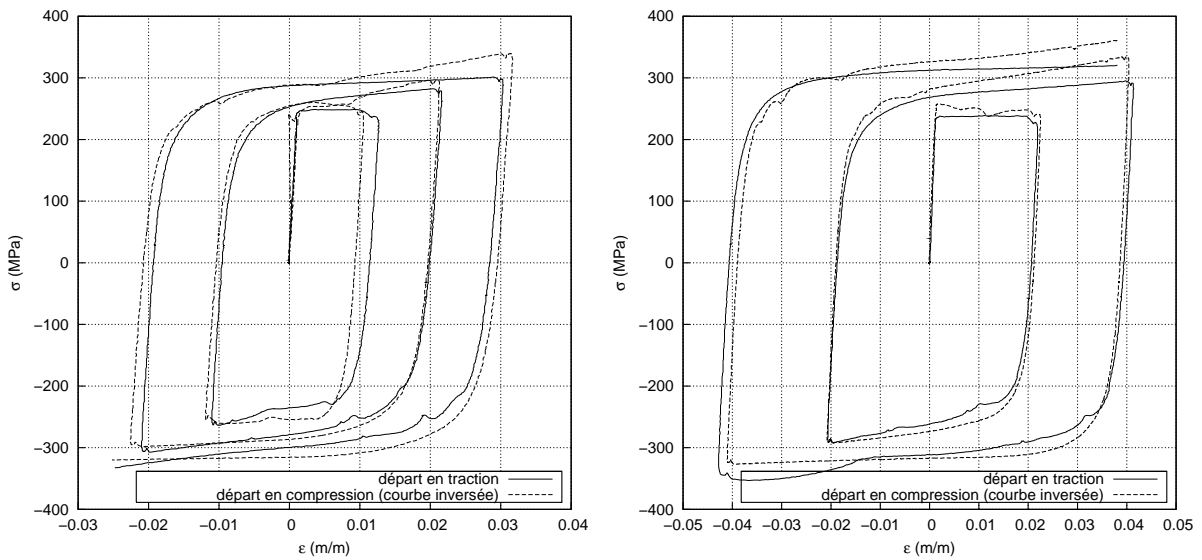


FIG. A.6 – Validation du montage anti-flambement

Les deux cycles sont bien superposables. En particulier la contrainte limite d'entrée en plasticité est bien prédite. La rigidité du comportement plastique est quand à elle légèrement surestimée en compression. En effet le frottement de l'éprouvette sur la glissière lors de la compression induit une force additionnelle qui ne peuvent être évitées avec ce type de montage. La seule solution pour éviter cette force de frottement additionnelle est d'utiliser une géométrie d'éprouvette qui ne risque pas de flamber !

Annexe B

Dérivées

Dans la cas général du comportement avec boucle interne le système d'équation à résoudre peut se mettre sous la forme de 4 résidus à annuler :

$$\mathcal{F}(\Delta X) = \begin{cases} R_f(\Delta X) \\ R_\varepsilon(\Delta X) \\ R_{\Delta\varepsilon_{ij}}(\Delta X) \\ R_{\sigma_{ij}}(\Delta X) \end{cases} = \{0\} \quad (\text{B.1})$$

fonction des inconnues :

$$\Delta X = \begin{cases} \Delta f \\ \Delta\varepsilon^T \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T \\ \Delta\Sigma_{kl} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Le problème ne sera traité ici que dans le cas général où les deux critères de transformation et d'orientation sont activés, les autres cas sont déduits simplement de celui-ci.

Les résidus s'expriment sous la forme suivante avec les grandeurs f , $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et Σ_{ij} exprimées en fin d'incrément :

> le résidu de transformation :

$$R_f(\Delta f, \Delta\varepsilon^T, \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta\Sigma_{kl}) = \begin{cases} A \rightarrow M : F_f(\Delta f, \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta\Sigma_{kl}) - \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{1-3f^{mem}+2ff^{mem}}{1-f^{mem}} - F_f^{min} \\ M \rightarrow A : F_f(\Delta f, \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta\Sigma_{kl}) + \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{f^{mem}+2f(f^{mem}-1)}{f^{mem}} + F_f^{min} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

> le résidu d'orientation :

$$R_\varepsilon(\Delta f, \Delta\varepsilon^T, \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta\Sigma_{kl}) = \left| F_{\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta\Sigma_{kl}) - (1-\gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right| - \gamma (F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}) - F_\varepsilon^{min} \quad (\text{B.4})$$

avec $|x_{ij}| = \sqrt{\frac{3}{2}x_{ij}x_{ij}}$ et la fonction d'évolution :

$$\gamma(f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = \frac{\frac{2}{3} \left| f\bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1-\gamma) E_{ij}^{T^{mem}} \right|}{\varepsilon_{max}^T} \quad (\text{B.5})$$

> le résidu d'écoulement :

$$R_{\Delta\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta\varepsilon^T, \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta\Sigma_{kl}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^T - \Delta\varepsilon^T \frac{3}{2} \frac{F_{\varepsilon_{ij}} - (1-\gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem}}{\left| F_{\varepsilon_{ij}} - (1-\gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right|} \quad (\text{B.6})$$

▷ le résidu élastique :

$$R_{\sigma_{ij}}(\Delta f, \Delta \varepsilon^T, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T + f \bar{\varepsilon}_{ij}^T - E_{ij} \quad (\text{B.7})$$

Ces résidus sont fonction des deux forces thermodynamique de transformation et d'orientation :

$$F_f(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \Sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^T - B(T - T_0) - h_f(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) \quad (\text{B.8})$$

$$F_{\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \Sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Sigma_{kk}}{3} - h_{\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) \quad (\text{B.9})$$

L'expression des forces fait intervenir deux termes d'interaction :

$$h_f(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) = H_{variant} f + H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T f - \alpha_{deb}^f \frac{1-f}{f} + \alpha_{fin}^f \frac{f}{1-f} \quad (\text{B.10})$$

$$h_{\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) = H_{grain} f \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \alpha_{max}^{\varepsilon} \frac{f \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\sqrt{1 + \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{jk}^T \bar{\varepsilon}_{ki}^T}{(\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ji}^T)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^T}}} \quad (\text{B.11})$$

B.1 Jacobien du système

La résolution du système d'équation (B.1) de manière implicite par la méthode Newton-Raphson nécessite le calcul du jacobien du système et son inversion :

$$\mathcal{F}(\Delta X) + \mathcal{J} \delta \Delta X \approx 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\delta \Delta X = \mathcal{J}^{-1}(-\mathcal{F}(\Delta X)) \quad (\text{B.13})$$

avec le jacobien :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_f}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} & \frac{\partial R_{\varepsilon}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \\ \frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} & \frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} & \frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Le jacobien se présente sous forme matricielle une collection d'objets de type différent : scalaires, tenseurs d'ordre 2 et tenseurs d'ordre 4. Pour effectuer l'inversion du jacobien il s'agit d'écrire le problème de manière plus homogène.

Une solution classique est d'écrire les tenseurs d'ordre 2 symétriques sous forme de vecteurs de dimension 6 et les tenseurs d'ordre 4 sous forme de matrices 6*6. Avec cette notation il faut compter en double les termes de cisaillement dans l'expression des forces thermodynamiques. Pour que le jacobien soit inversible il faut également introduire l'aspect déviatorique de l'orientation en supprimant la relation sur $R_{\Delta \varepsilon_{33}}$ et en reportant l'influence de $\Delta \bar{\varepsilon}_{33}^T$ sur les termes $\Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T$ et $\Delta \bar{\varepsilon}_{22}^T$. La relation (B.12) est explicité sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} R_f \\ R_\varepsilon \\ R_{\Delta\varepsilon_{11}} \\ R_{\Delta\varepsilon_{22}} \\ R_{\Delta\varepsilon_{12}} \\ R_{\Delta\varepsilon_{13}} \\ R_{\Delta\varepsilon_{23}} \\ R_{\sigma_{11}} \\ R_{\sigma_{22}} \\ R_{\sigma_{33}} \\ R_{\sigma_{12}} \\ R_{\sigma_{13}} \\ R_{\sigma_{23}} \end{bmatrix} + \mathcal{J} * \begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta\varepsilon^T \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^T \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^T \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^T \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^T \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^T \\ \Delta\Sigma_{11} \\ \Delta\Sigma_{22} \\ \Delta\Sigma_{33} \\ \Delta\Sigma_{12} \\ \Delta\Sigma_{13} \\ \Delta\Sigma_{23} \end{bmatrix} = [0] \quad (\text{B.15})$$

avec le jacobien :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_f}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T} & -\frac{\partial R_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^T} & \cdot & 2 \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^T} & 2. & 2. & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \Sigma_{11}} & \cdot & \cdot & 2 \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \Sigma_{12}} & 2. & 2. \\ \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T} & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. \\ \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T} & -\frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^T} & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^T} & 2. & 2. & \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta \Sigma_{11}} & \cdot & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{11}}}{\partial \Delta \Sigma_{12}} & 2. & 2. \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. \\ \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T} & -\frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^T} & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^T} & 2. & 2. & \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta \Sigma_{11}} & \cdot & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\Delta\varepsilon_{12}}}{\partial \Delta \Sigma_{12}} & 2. & 2. \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. \\ \frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T} & -\frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^T} & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^T} & 2. & 2. & \frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta \Sigma_{11}} & \cdot & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\sigma_{11}}}{\partial \Delta \Sigma_{12}} & 2. & 2. \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. \\ \frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} & \frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^T} & -\frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^T} & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^T} & 2. & 2. & \frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta \Sigma_{11}} & \cdot & \cdot & 2 \frac{\partial R_{\sigma_{12}}}{\partial \Delta \Sigma_{12}} & 2. & 2. \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. & \cdot & \cdot & \cdot & 2. & 2. & 2. \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Le système d'équations linéaire (B.15) est résolu numériquement par une méthode de Gauss. Chaque composante des inconnues est calculée directement sauf $\Delta\bar{\varepsilon}_{33}^T$ donné par la relation :

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{33}^T = -\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^T - \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^T \quad (\text{B.17})$$

B.2 Calcul des dérivées

Le calcul de chaque terme du jacobien sera progressif en commençant par les dérivées des résidus, fonction des dérivées des forces thermodynamiques, fonction des termes d'interaction.

B.2.1 Dérivées des résidus

Résidu de transformation

Il s'écrit :

$$R_f(\Delta f, \Delta \varepsilon^T, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \begin{cases} A \rightarrow M : F_f(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) - \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{1-3f^{mem}+2ff^{mem}}{1-f^{mem}} - F_f^{min} \\ M \rightarrow A : F_f(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) + \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{f^{mem}+2f(f^{mem}-1)}{f^{mem}} + F_f^{min} \end{cases} \quad (B.18)$$

avec f^{mem} une constante pendant le calcul de l'équilibre et F_f^{min} et F_f^{max} des paramètres matériaux.

Les dérivées par rapports ont inconnues s'écrivent :

$$\begin{cases} A \rightarrow M : \frac{\partial R_f}{\partial \Delta f} = \frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} - \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{2f^{mem}}{1-f^{mem}} \\ M \rightarrow A : \frac{\partial R_f}{\partial \Delta f} = \frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} + \left(F_f^{max} - F_f^{min} \right) \frac{2(f^{mem}-1)}{f^{mem}} \end{cases} \quad (B.19)$$

$$\frac{\partial R_f}{\partial \Delta \varepsilon^T} = 0 \quad (B.20)$$

$$\frac{\partial R_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} \quad (B.21)$$

$$\frac{\partial R_f}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} = \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \quad (B.22)$$

Résidu d'orientation

Il s'écrit :

$$R_\varepsilon(\Delta f, \Delta \varepsilon^T, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \left| F_{\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) - (1-\gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right| - \gamma (F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}) - F_\varepsilon^{min} \quad (B.23)$$

avec la norme $|x_{ij}| = \sqrt{\frac{3}{2}x_{ij}x_{ij}}$ et la fonction d'évolution :

$$\gamma(f, \bar{\varepsilon}_{ij}^T) = \frac{\frac{2}{3} \left| f \bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1-\gamma) E_{ij}^{T^{mem}} \right|}{\varepsilon_{max}^T} \quad (B.24)$$

$F_{\varepsilon_{ij}}^{mem}$ et $E_{ij}^{T^{mem}}$ sont des constantes pendant le calcul de l'équilibre et F_ε^{min} et F_ε^{max} des paramètres matériaux.

La direction d'écoulement de transformation est définie par :

$$\eta_{ij}^{ec} = \frac{F_{\varepsilon_{ij}} - (1-\gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem}}{\left| F_{\varepsilon_{ij}} - (1-\gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right|} \quad (B.25)$$

Les dérivées du terme d'évolution s'écrivent :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial E_{kl}^T} = \frac{f \bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1-\gamma) E_{ij}^{T^{mem}}}{\varepsilon_{max}^T \left| f \bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1-\gamma) E_{ij}^{T^{mem}} \right| - E_{ij}^{T^{mem}} \left(f \bar{\varepsilon}_{ij}^T - (1-\gamma) E_{ij}^{T^{mem}} \right)} \quad (B.26)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \Delta f} = \bar{\varepsilon}_{kl}^T \frac{\partial \gamma}{\partial E_{kl}^T} \quad (B.27)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = f \frac{\partial \gamma}{\partial E_{kl}^T} \quad (\text{B.28})$$

Et les dérivées du résidu d'orientation :

$$\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta f} = \frac{3}{2} \eta_{ij}^{ec} \left(\frac{\partial F_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta f} + F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta f} \right) - (F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}) \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta f} \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta \varepsilon^T} = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = \frac{3}{2} \eta_{ij}^{ec} \left(\frac{\partial F_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} + F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} \right) - (F_\varepsilon^{max} - F_\varepsilon^{min}) \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} = \frac{3}{2} \eta_{ij}^{ec} \frac{\partial F_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \quad (\text{B.32})$$

Résidu d'écoulement

Il s'écrit :

$$R_{\Delta \varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta \varepsilon^T, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^T - \Delta \varepsilon^T \frac{3}{2} \eta_{ij}^{ec}(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) \quad (\text{B.33})$$

Ses dérivées s'écrivent :

$$\frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta f} = -\frac{3}{2} \Delta \varepsilon^T N_{ijpq} \left(\frac{\partial F_{\varepsilon_{pq}}}{\partial \Delta f} + F_{\varepsilon_{pq}}^{mem} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta f} \right) \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} = -\frac{3}{2} \eta_{ij}^{ec} \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} - \frac{3}{2} \Delta \varepsilon^T N_{ijpq} \left(\frac{\partial F_{\varepsilon_{pq}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} + F_{\varepsilon_{pq}}^{mem} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} \right) \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial R_{\Delta \varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} = -\frac{3}{2} \Delta \varepsilon^T N_{ijpq} \frac{\partial F_{\varepsilon_{pq}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} \quad (\text{B.37})$$

avec le tenseur de dérivation de l'écoulement :

$$N_{ijkl} = \frac{I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} - \frac{3}{2} \eta_{ij}^{ec} \eta_{kl}^{ec}}{\left| F_{\varepsilon_{ij}} - (1 - \gamma) F_{\varepsilon_{ij}}^{mem} \right|} \quad (\text{B.38})$$

Résidu élastique

Il s'écrit :

$$R_{\sigma_{ij}}(\Delta f, \Delta \varepsilon^T, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \mathcal{S}_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T + f \bar{\varepsilon}_{ij}^T - E_{ij} \quad (\text{B.39})$$

et admet pour dérivées :

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta f} = \bar{\varepsilon}_{ij}^T \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \varepsilon^T} = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = f \left(I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} \right) \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} = S_{ijkl} \quad (\text{B.43})$$

B.2.2 Dérivées des forces thermodynamiques

Les dérivées des résidus sont fonction des dérivées des forces thermodynamiques de transformation et d'orientation. Elles ne sont fonction que de Δf , $\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T$ et $\Delta \Sigma_{kl}$.

Force de transformation

Elle s'écrit :

$$F_f (\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \Sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^T - B (T - T_0) - h_f (\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) \quad (\text{B.44})$$

D'où ses dérivées :

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} = -\frac{\partial h_f}{\partial \Delta f} \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = \Sigma_{kl} - \delta_{kl} \frac{\Sigma_{pp}}{3} - \frac{\partial h_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} = \bar{\varepsilon}_{kl}^T \quad (\text{B.47})$$

Force d'orientation

Elle s'écrit :

$$F_{\varepsilon_{ij}} (\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T, \Delta \Sigma_{kl}) = \Sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Sigma_{kk}}{3} - h_{\varepsilon_{ij}} (\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) \quad (\text{B.48})$$

D'où ses dérivées :

$$\frac{\partial F_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta f} = -\frac{\partial h_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta f} \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{\partial F_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = -\frac{\partial h_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial F_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \Sigma_{kl}} = I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} \quad (\text{B.51})$$

B.2.3 Dérivées des termes d'interaction

Les dérivées des forces thermodynamiques sont fonction des dérivées des deux termes d'interaction. Ces deux termes ne sont fonction que de Δf et $\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T$.

Interaction en transformation

Il s'écrit :

$$h_f(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) = H_{variant} f + H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T f - \alpha_{deb}^f \frac{1-f}{f} + \alpha_{fin}^f \frac{f}{1-f} \quad (B.52)$$

et ses dérivées :

$$\frac{\partial h_f}{\partial \Delta f} = H_{variant} + H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T - \frac{\alpha_{deb}^f}{f^2} + \frac{\alpha_{fin}^f}{(1-f)^2} \quad (B.53)$$

$$\frac{\partial h_f}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = 2H_{grain} f \bar{\varepsilon}_{kl}^T \quad (B.54)$$

Interaction en orientation

Il s'écrit :

$$h_{\varepsilon_{ij}}(\Delta f, \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T) = H_{grain} f \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \alpha_{max}^\varepsilon \frac{f \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\Lambda \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^T \right) - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^{T^2}}} \quad (B.55)$$

avec le terme de dissymétrie de la déformation de transformation :

$$\Lambda \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^T \right) = \sqrt{1 + \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\varepsilon}_{pq}^T \bar{\varepsilon}_{qr}^T \bar{\varepsilon}_{rp}^T}{\left(\bar{\varepsilon}_{pq}^T \bar{\varepsilon}_{qp}^T \right)^{\frac{3}{2}}}} \quad (B.56)$$

Ses dérivées s'écrivent :

$$\frac{\partial h_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta f} = H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \alpha_{max}^\varepsilon \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\Lambda - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^{T^2}}} \quad (B.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\varepsilon_{ij}}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} &= \left(H_{grain} f + \alpha_{max}^\varepsilon \frac{f}{\Lambda - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^{T^2}}} \right) \left(I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} \right) \\ &\quad - \alpha_{max}^\varepsilon \frac{f \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\left(\Lambda - \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T}{\varepsilon_{max}^{T^2}} \right)^2} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} - \frac{4}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_{kl}^T}{\varepsilon_{max}^{T^2}} \right) \end{aligned} \quad (B.58)$$

et

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^T} = \frac{3}{2} \beta \sqrt{6} \frac{\bar{\varepsilon}_{pq}^T \bar{\varepsilon}_{qr}^T \bar{\varepsilon}_{rp}^T \bar{\varepsilon}_{kl}^T - \bar{\varepsilon}_{kr}^T \bar{\varepsilon}_{rl}^T \bar{\varepsilon}_{pq}^T \bar{\varepsilon}_{qp}^T}{\left(\bar{\varepsilon}_{pq}^T \bar{\varepsilon}_{qp}^T \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \Lambda} \quad (B.59)$$

Résumé

La gamme des Alliages à Mémoire de Forme offre une variété de comportements mécaniques : effet mémoire de forme, superélasticité, amortissement... Ces matériaux peuvent être exploités en vue d'améliorer les solutions techniques existantes, mais ils sont également à l'origine de nouvelles solutions et de produits innovants. Ces travaux de thèse s'attachent au développement d'un outil numérique d'aide au dimensionnement d'applications en AMF. L'accent est mis sur le couplage thermique-mécanique et l'exploitation des AMF sous forme d'actionneur. Le modèle du comportement macroscopique des AMF développé est basé sur une étude de la thermodynamique de la transformation de phase martensitique et propose une description de l'état interne du matériau basé sur un choix original des variables internes : la fraction volumique de martensite et la déformation de transformation propre de la martensite. Le modèle est validé sur une campagne de caractérisation du comportement mécanique et thermique du matériau. Le point de vue macroscopique adopté autorise l'utilisation raisonnable du modèle avec la méthode des Éléments Finis. Le travail d'intégration numérique du modèle conduit à un algorithme robuste et efficace adapté au calcul de structures.

Mots-clés: effet mémoire de forme, superélasticité, caractérisation, intégration numérique, calcul de structures, éléments finis

Abstract

The range of Shape Memory Alloys offers a variety of mechanical behavior : shape memory effect, superelasticity, damping... These materials can be used to improve existing technical solutions, but can also be at the origin of new solutions and innovative products. A numerical tool for help to the desing of applications in SMA is developed in this PhD thesis. The work is focused on the thermomechanical coupling and the use of SMAs as actuators. The model of the macroscopic behavior of SMA developed in this work is based on a study of the thermodynamics of the martensitic phase transformation. It proposes a description of the internal state of the material based on an original choice of the internal variables : the volumic fraction of martensite and the mean transformation strain of the martensite. The model has been validated with a characterization campain of the mechanical and thermal behavior of the material. The adopted macroscopic point of view authorizes a reasonable use of the model within the finite element method. The numerical work of integration of the model led to a robust and effective algorithm adapted to the structural analysis.

Keywords: shape memory effect, superelasticity, characterization, numerical integration, structure computation, finite elements method

