HAL open science

Bouclage de sortie et observateur

Vincent Andrieu

▶ To cite this version:

Vincent Andrieu. Bouclage de sortie et observateur. Mathematics [math]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. English. NNT : . pastel-00001530

HAL Id: pastel-00001530
https://pastel.hal.science/pastel-00001530v1

Submitted on 19 Jun 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

par

Vincent ANDRIEU

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité : Mathématiques et Automatique

BOUCLAGE DE SORTIE ET OBSERVATEUR

Soutenue le 07 décembre devant le Jury composé de

Laurent PRALY	Directeur de thèse
Alain GLUMINEAU	Examinateur
Helene PIET-LAHANIER	Examinateur
Jean-Baptiste POMET	Examinateur
Alain RAPAPORT	Rapporteur
Rodolphe SEPULCHRE	Rapporteur

Vincent ANDRIEU

ONERA, DPRS ,
29 Av de la Division Leclerc, 92322 Chatillon Cedex, France ,
ENSMP, CAS ,
60, Bd. Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France .
E-mail : vincent.andrieu@gmail.com

Mots clefs. Stabilisation, Fonctions de Lyapunov, Bouclage de sortie, Backstepping, Passivité, Guidage et Pilotage d'engins, Systèmes à déphasage non-minimal, Suivi de trajectoire, Observateur de Luenberger non-linéaire, Observateur grand-gain.

BOUCLAGE DE SORTIE
ET
OBSERVATEURS

VINCENT ANDRIEU

Présentation Cette thèse est construite autour de deux sujets, proches l'un de l'autre, mais traités séparément. Le premier problème abordé concerne la synthèse des bouclages de sortie d'un point de vue général. Le second traite d'une méthode particulière de construction d'observateurs.

La littérature actuelle concernant le bouclage de sortie est riche de travaux épars, sans liens apparents, qui permettent de concevoir des bouclages de sortie pour de nombreux systèmes. Il est difficile pour le profane ou l'ingénieur de se retrouver dans les méandres de ces résultats. L'objectif de la première partie de cette thèse est donc double, dans un premier temps nous classifions et donnons pour la synthèse de bouclage de sortie des principes certes généraux, mais qui restent loin de l'application. Dans un second temps, en se restreignant aux systèmes triangulaires nous donnons de la matière à ces règles générales, ce qui nous permet de constater au passage que des contraintes jusque là imposées peuvent être relâchées.

Notre étude concernant la synthèse d'observateur est basée sur de récents travaux qui traitent de l'extension des observateurs de Luenberger aux systèmes non-linéaires. Notre contribution réside dans l'extension de cette méthode à une classe plus générale de systèmes et par la mise en lumière des procédés de synthèse de cet observateur.

REMERCIEMENTS

Je remercie Alain Rapaport et Rodolphe Sepulchre, rapporteurs de ma thèse ainsi qu'Alain Glumineau et Jean-Baptiste Pomet, examinateurs.

Je tiens à remercier tout particulièrement Laurent Praly qui a été mon directeur de thèse, pour tout ce qu'il m'a apporté tant sur le plan scientifique que personnel, et notamment pour son enseignement, ses conseils, et sa disponibilité.

Je remercie Hélène Piet-Lahanier, mon encadrant à l'ONERA, pour tous les conseils pertinents qu'elle a apportés au cours de ce travail, pour son soutien dans les moments difficiles et aussi pour sa bonne humeur.

Je remercie tous les membres du département DPRS de l'ONERA, ainsi que le personnel du CAS de Fontainebleau tant pour leur contribution à ce travail que pour les liens d'amitié que j'ai pu tisser tout au long de ces années passées en ces lieux. Je citerai notamment Bérénice, Cédric, Xavier, Arnaud, Sylvain, Julien, Thomas, Jérémy, et aussi Thierry, Nicolas, Jean, Thérèse, Antoine, Patrice, Claude, Claire, Sandrine, Catherine ...

Table des matières

I Bouclage de Sortie **5**

1 Introduction **9**
1.1 La problématique . . . 9
1.2 Formulation du problème . . . 9
1.2.1 Bouclage de sortie dynamique et stationnaire . . . 9
1.2.2 Des difficultés apparentes . . . 10
1.2.3 Autres problèmes de stabilisation par bouclage de sortie . . . 12
1.3 Deux approches . . . 13

2 Erreur de commande **15**
2.1 Principe Général . . . 15
2.1.1 Conditions nécessaires . . . 15
2.1.2 Interprétation : changement et erreur de commande . . . 17
2.1.3 Synthèse par l'approche d'erreur de commande . . . 19
2.2 Domination dans le cas ISS . . . 22
2.2.1 Le contexte général . . . 22
2.2.2 Sur l'ISS-Stabilisabilité . . . 27
2.2.3 Sur les observateurs de loi commande . . . 28
2.2.4 Extension au cas iISS . . . 35
2.3 Domination dans le cas général . . . 39
2.3.1 Principe général . . . 39
2.3.2 Cas Semi-Global . . . 41
2.3.3 Cas Global . . . 42
2.4 Approche par élimination de Γ (passivité) . . . 44
2.4.1 Cas général . . . 44
2.4.2 Le bouclage stabilisant dépend de la dérivée de la sortie . . . 44
2.4.3 Application à l'Interception Exo-Atmosphérique . . . 49
2.4.4 Extension au cas d'une intégrale de la sortie . . . 53
2.4.5 Autre méthode d'élimination . . . 54

3 Erreur de dynamique **57**
3.1 Principe Général . . . 57
3.1.1 Conditions nécessaires . . . 57
3.1.2 Interprétation . . . 59
3.1.3 Synthèse par l'approche d'erreur de dynamique . . . 61
3.2 Domination pour l'erreur de dynamique . . . 65
3.2.1 Principe général . . . 65

3.2.2 Sur les observateurs . . . 68
3.2.3 Sur la L^p-Stabilisabilité . . . 73
3.2.4 Exemple de bouclage de sortie par une approche erreur de dynamique 74
3.3 Approche Élimination . . . 84
3.3.1 Principe général . . . 84
3.3.2 Modification de l'observateur . . . 84

4 Cas des systèmes sous forme triangulaire 89
4.1 La Forme Normale . . . 89
4.1.1 Définition et Motivation . . . 89
4.1.2 État de l'art du bouclage de sortie pour les systèmes triangulaires . . 91
4.2 Systèmes à non minimum de phase . . . 93
4.2.1 Principe général . . . 93
4.2.2 Cas Erreur de dynamique . . . 94
4.2.3 Lien avec [59] . . . 99
4.2.4 Cas Erreur de Commande et Domination L^p . . . 102
4.2.5 Exemples . . . 107
4.3 Extension à la poursuite . . . 115
4.3.1 Problématique de la poursuite . . . 115
4.3.2 Contexte Considéré . . . 115
4.3.3 Discussion sur l'hypothèses 25 . . . 119

II Observateurs de Kazantzis-Kravaris/ Luenberger 121

5 Introduction 123
5.1 Problématique . . . 123
5.2 Les observateurs de Luenberger . . . 123
5.3 Conditions suffisantes d'existence d'un observateur de Luenberger . . . 124
5.3.1 Le contexte . . . 124
5.3.2 Théorème général d'existence . . . 125

6 Existence et Expression de T 129
6.1 Existence d'une solution . . . 129
6.1.1 Solution continue . . . 129
6.1.2 Autre résultat d'existence d'une solution continue . . . 130
6.2 Expression de T . . . 131
6.2.1 Forme Intégrale . . . 131
6.2.2 Expression de T pour des systèmes particuliers . . . 132

7 Injectivité de T et construction de l'observateur 135
7.1 Injectivité . . . 135
7.1.1 Cas local . . . 135
7.1.2 Résultat global de Kreisselmeier et Engel . . . 136
7.1.3 Injectivité générique . . . 137
7.1.4 Injectivité dans le cas de l'observabilité complète . . . 139
7.1.5 Injectivité de T dans le cas des exemples du paragraphe 6.2.2 . . . 140
7.2 Construction de l'observateur . . . 143

7.2.1 Expression de T^* . . . 143
7.2.2 Cas d'une extension Lipschitzienne . . . 143
7.2.3 $\frac{\partial T}{\partial x}$ est génériquement de rang plein . . . 146

8 Extension **149**
8.1 Approximation . . . 149
8.1.1 Modification de l'observateur . . . 149
8.1.2 Les observateurs grand-gain . . . 151
8.2 Systèmes non complets . . . 152
8.3 Système commandé . . . 154
8.4 Extension dynamique . . . 156
8.4.1 Contexte . . . 156
8.4.2 Extension dynamique dans le cas du pendule inversé . . . 157
8.5 Exemple du moteur asynchrone . . . 160
8.5.1 Modélisation du moteur asynchrone . . . 160
8.5.2 Construction de T dans le cas G nul et α connu . . . 160
8.5.3 Construction de T dans le cas G non nul et α connu . . . 161
8.5.4 Construction de T dans le cas G non nul et α inconnue . . . 163
8.5.5 Inversion de T . . . 164

A Annexes Techniques **165**
A.1 Terminologie et Définitions . . . 165
A.1.1 Terminologie . . . 165
A.1.2 Définition . . . 166
A.2 Démonstrations de résultats . . . 168
A.2.1 Loi de commande ISS pour le système (2.40) . . . 168
A.2.2 ISS n'implique pas iISS . . . 171
A.2.3 Propagation d'une propriété iISS . . . 172
A.2.4 Démonstration du Lemme 1 . . . 175
A.2.5 Démonstration du Théorème 21 . . . 178
A.2.6 Démonstration que pour le système (1.11) il n'y a pas de bouclage de sortie stationnaire . . . 180

B Simulation et Exemples **181**
B.1 Cas de l'interception . . . 181
B.1.1 État initial . . . 181
B.1.2 Résultats obtenus . . . 182
B.2 Le moteur asynchrone . . . 184
B.2.1 Le système . . . 184
B.2.2 Scénario 1 : w_r est polynomial en t . . . 184
B.2.3 Scénario 2 : τ_l est polynomial en t . . . 185
B.2.4 Simulation de la deuxième simplification . . . 186

C On the existence of Kazantzis-Kravaris / Luenberger Observers **189**

Première partie

Bouclage de Sortie

RESUME DE LA PARTIE BOUCLAGE DE SORTIE

Chapitre 1 Dans ce chapitre, nous formalisons le problème de bouclage de sortie. Nous donnons ensuite un premier aperçu des difficultés que nous rencontrons pour résoudre ces problèmes. Enfin, nous introduisons les deux grandes classe de méthode permettant d'obtenir un bouclage de sortie : l'*erreur de commande* et l'*erreur de dynamique*.

Chapitre 2 et 3 Dans ces chapitres nous formalisons ces deux grandes classes de méthode nous permettant de synthétiser des bouclages de sortie. Ces techniques introduites de façon abstraite et conceptuelle permettent une relecture, une classification et une comparaison des résultats publiés sur le sujet. Ce point est pourtant à peine abordé vu l'étendue et la diversité de ce qui est disponible. Cette présentation permet aussi d'observer que des voies possibles n'ont pas reçu d'attention ou que bien qu'intéressantes conceptuellement, elles mènent à des difficultés insurmontables aujourd'hui.

Chapitre 4 Pour être plus constructif, les idées développées précédemments sont mises à profit dans ce chapitre pour présenter un résultat nouveau du fait qu'il s'applique à des systèmes à déphasage non-minimal, mais aussi du fait qu'il met en exergue l'intérêt d'utiliser d'autres méthodes d'analyse. Nous étendons alors ces résultats au problème de la poursuite.

Avertissement Pour que le lecteur ait le moins de doutes possibles sur ce que nous pouvons sous-entendre dans le texte qui suit, nous donnons en Annexe A.1.1 un précis de notations et de terminologie et en Annexe A.1.2, nous faisons des rappels sur la stabilité

Chapitre 1

Introduction

1.1 La problématique

Nous considérons un système dynamique commandé de la forme :

$$\dot{x} \;=\; f(x,u) \quad , \qquad y \;=\; h(x) \quad , \qquad (x,y,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \;, \tag{1.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sont des fonctions localement Lipschitziennes, x est l'état, u est la commande et y est la seule mesure accessible. Nous considérons le cas où le système (1.1) admet un point d'équilibre. Nous appelons origine ce point que nous prenons comme 0 de nos coordonnées. Ainsi nous avons,

$$f(0,0) \;=\; 0 \;. \tag{1.2}$$

Nous cherchons à analyser de façon synthétique les méthodes permettant d'élaborer une loi de commande stabilisant l'origine du système (1.1) à partir de la connaissance de la mesure du système y. Plusieurs types de lois sont possibles ; nous nous limitons ici au bouclage de sortie dynamique stationnaire.

1.2 Formulation du problème

1.2.1 Bouclage de sortie dynamique et stationnaire

Un bouclage de sortie dynamique et stationnaire est caractérisé par un triplet (q, ϖ, ν) où q est un entier, $\varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ et $\nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ sont des fonctions localement Lipschitziennes. Ce triplet définit une loi de commande de la forme :

$$u \;=\; \varpi(y,w) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; \nu(y,w) \quad , \qquad w \in \mathbb{R}^q \;. \tag{1.3}$$

L'objectif est alors :

Objectif 1 (Objectif Général) *Étant donné $\mathcal{I}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ un fermé, trouver un entier q, des fonctions localement Lipschitziennes $\varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$, $\nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ et $\mathcal{I}_w$ un fermé de $\mathbb{R}^q$ tels qu'il existe $\mathcal{M}_w$ un compact de $\mathbb{R}^q$ tel que $\{0\} \times \mathcal{M}_w \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ est un ensemble asymptotiquement stable pour le système :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} \;=\; f(x, \varpi(h(x), w)) \;, \\ \dot{w} \;=\; \nu(h(x), w) \;. \end{array} \right. \quad , \qquad (x,w) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q) \tag{1.4}$$

avec un bassin d'attraction $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_w$.

Remarque 1 :

1. En autorisant $\mathcal{M}_w$ à être un ensemble non réduit à un point unique, nous ne demandons pas la convergence vers l'origine de la composante w des solutions de (1.4) mais seulement leur bornitude.
2. Le rôle joué par le fermé $\mathcal{I} = \mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_w$ dans ce problème est celui de contenir les conditions initiales du système (1.4). Lorsque $\mathcal{I}$ est $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ tout entier, cela signifie que nous n'avons aucune connaissance à priori des conditions initiales du système et que nous ne restreignons pas celles du contrôleur. Le problème de stabilisation est dit "global" dans ce cas.
3. Le cas où nous imposons que $\mathcal{I}_x$ soit un compact mais quelconque correspond au problème de stabilisation semi-globale.

Pour la plupart des résultats connus, nous nous plaçons dans un cas où $\mathcal{A}_x$, la projection de $\mathcal{A}$ sur la composante x, est $\mathbb{R}^n$ tout entier. Bien que ceci va alourdir la suite de la présentation, nous avons préféré introduire cet ouvert $\mathcal{A}_x$ plutôt que de passer au cas $\mathbb{R}^n$ pour attirer l'attention du lecteur sur le fait que le bouclage de sortie repose sur un mécanisme qui fait que les solutions du système bouclé ne franchissent pas la frontière de $\mathcal{A}_x$.

1.2.2 Des difficultés apparentes

Le principe de séparation ne fonctionne pas pour les système non-linéaires

Dans la suite de ce document nous décrirons de façon précise ce que sont les observateurs et comment construire un bouclage de sortie à partir de ceux là mais dès à présent nous pouvons exhiber les difficultés provoquées par le fait que le principe de séparation n'est pas valide pour les systèmes non-linéaires. Dans de bonnes conditions où nous avons un bouclage d'état et un observateur d'état qui nous donne une bonne estimation de l'état (= erreur d'estimation tend vers 0) tant que la solution existe, le problème essentiel est celui de garantir justement que la solution du système en boucle fermée n'explose pas. En d'autres termes il ne suffit pas, comme selon le principe de séparation, de faire un bouclage de sortie à partir d'un contrôleur et d'un observateur. Ceci ne marche que si en plus nous savons garantir la bornitude des solutions (ou qu'elles restent dans l'ensemble $\mathcal{A}_x$ où le bouclage d'état est bien défini). Une illustration de ce fait est donnée par l'exemple suivant, proposé par Kokotovic dans [40] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 x_1^2 + u \ , \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \ , \end{cases} \quad , \qquad y \ = \ x_1 \ . \tag{1.5}$$

Le bouclage $u = -x_2 x_1^2$ est un bouclage d'état globalement asymptotiquement stabilisant. De plus,

$$\dot{w} = -w + y^2 \tag{1.6}$$

est un observateur de x_2. En effet

$$\dot{\widehat{x_2 - w}} = -(x_2 - w) \tag{1.7}$$

L'erreur d'estimation est donc exponentiellement dćroissante le long des solutions et cela quelque soit la commande u pour le système.

Pourtant avec le bouclage de sortie :

$$\dot{w} \;=\; -w + y^2 \quad , \qquad u \;=\; -wy^2 \;. \tag{1.8}$$

le système en boucle fermée a des solutions qui explosent en temps fini. Par contre pour toutes celles qui sont bornées nous avons la convergence de (x_1, x_2, w) vers 0. Nous avons aussi que $(0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable, mais pas globalement, comme le donnait le bouclage d'état.

A noter tout de même que le système (1.5) est globalement stabilisable par le bouclage de sortie statique staionnaire :

$$u \;=\; -4\, x_1\, |x_1|^3 \;. \tag{1.9}$$

En effet, la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x_1, x_2) \;=\; |x_1| + \dfrac{x_2^2}{2}$ donne le long des solutions du système (1.5) :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}(x_1, x_2)}} \;\leq\; -|x_1| - \frac{3}{4}\, x_2^2 \;. \tag{1.10}$$

Cas d'un système non-observable uniformément par rapport à la commande

Dans ce document nous ne considérons que les systèmes stabilisables par bouclage de sortie stationnaire. En d'autres termes, les fonction ϖ et ν ne dépendent pas du temps (sauf mention du contraire). Il existe cependant certains cas où cette restriction ne permet pas de définir de bouclage de sortie stationnaire. Considérons, par exemple, le système suivant sur $\mathbb{R}$ étudié par Coron dans [17] :

$$\dot{x} \;=\; u \quad , \qquad y \;=\; x^2 \;. \tag{1.11}$$

L'origine du système (1.11) n'est pas stabilisable asymptotiquement par un bouclage de sortie dynamique et stationnaire. La difficulté vient ici du fait que le système (1.11) n'est pas observable uniformément par rapport à la commande depuis la mesure y. En effet les dérivées successives de y donne :

$$y \;=\; x^2 \quad , \qquad \dot{y} \;=\; 2\, u\, x \quad , \qquad \ddot{y} \;=\; 2\, \dot{u}\, x \;+\; 2\, u^2 \quad , \qquad \ldots \tag{1.12}$$

Ainsi pour $u \equiv 0$, ce qui est désiré à l'équilibre, nous ne pouvons pas connaître le signe de x. Par des arguments de topologie algèbrique nous démontrons en annexe A.2.6 que pour ce système, le problème, tel que nous l'avons posé dans la section 1.2.1, n'est pas soluble. En fait, Coron a démontré dans [17], qu'il est possible de stabiliser l'origine du système (1.11) par un bouclage de sortie dynamique mais dépendant du temps.

Cas d'explosion non observable

Il existe une obstruction à la possibilité de stabiliser certains systèmes de façon globale par bouclage de sortie dynamique. Elle est liée au fait que les trajectoires du système peuvent exploser en temps fini (sortir de $\mathcal{A}_x$) sans que ce phénomène soit observable depuis la sortie. Ainsi, dans [61], a été mis en évidence une classe de système pour laquelle il ne peut exister

de bouclage de sortie dynamique et continue qui résolve le problème. Les systèmes considérés sont les suivants :

$$\begin{cases} \dot{y} \;=\; x \;, \\ \dot{x} \;=\; x^{\ell} \;+\; u \;, \end{cases} \tag{1.13}$$

où ℓ est un entier positif et où $\mathcal{I} = \mathbb{R}^2$ (nous sommes dans le cas global).

Comme il a été démontré par Mazenc et al. dans [61] ce système est stabilisable par un bouclage de sortie dynamique et continu dans le cas où ℓ est inférieur ou égal à deux. Par contre dès lors que celui-ci est supérieur ou égal à trois, il n'existe pas de solution au problème de stabilisation par bouclage de sortie dynamique et continu.

Dans le cas $\ell = 2$ le système satisfait l'hypothèse d'observabilité de la non bornitude des solutions. Ce qui n'est pas le cas dans le cas $\ell \geq 3$. Cette hypothèse peut être donnée de la façon suivante :

Hypothèse 1 [Observabilité de la non bornitude] :

Il existe $\mathcal{U}_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ une fonction radialement non bornée définie positive et C^1 et γ_f une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial x}(x) f(x,u) \;\leq\; \mathcal{U}_f(x) \;+\; \gamma_f\left(|h(x)| + |u|\right) \;, \tag{1.14}$$

Cette hypothèse signifie que si les trajectoires du système explosent en temps fini, alors nécessairement u ou y explosent au même instant. Notons cependant que cette hypothèse n'est pas nécessaire à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine.

En effet, considérons le système suivant :

$$\dot{x} \;=\; -x \;+\; (u \;+\; y)\, x^2 \quad , \qquad \dot{y} \;=\; -y \;, \tag{1.15}$$

Ce système n'est pas observable et pour $u = 1 - y$, toutes les solutions issues de $x > 1$, explosent en temps fini. La dynamique en y étant exponentiellement stable, la composante y de toute solution qui explose est bornée ; il en est de même pour u. Le système n'a donc pas la propriété d'observabilité de la non bornitude. Pourtant $u = -y$ est un bouclage de sortie statique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine.

1.2.3 Autres problèmes de stabilisation par bouclage de sortie

Comme cela est montré par les deux derniers exemples du paragraphe précédent, en nous restreignant à des bouclages de sortie dynamiques et stationnaires de la forme (1.3) nous ne pouvons résoudre le problème du bouclage de sortie en toute généralité. Nous donnons ici un bref résumé de formulations différentes du problème de stabilisation par bouclage de sortie.

Stabilisation Locale

Le problème de stabilisation locale signifie que la loi de commande implémentée sera valide "autour" du point d'équilibre mais sans spécifier à priori l'ensemble $\mathcal{I}_x$ des conditions initiales. Le fait de se restreindre au cas local nous permet par exemple de supposer l'approximation linéaire valide, et ainsi, d'utiliser les outils développés dans le cadre du bouclage de sortie linéaire.

Stabilisation Pratique

Ce problème peut être formulé comme suit :

Étant donné ϵ strictement positif, trouver une loi de commande dépendant uniquement de la mesure y telle que la composante x, état du système (1.1), des solutions du système bouclé entre en temps fini et reste dans le compact :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \epsilon\} \tag{1.16}$$

Dans ce cas on ne demande plus à stabiliser l'origine du système mais seulement un compact contenu dans l'ensemble donné ci-dessus en (1.16). Bien évidemment, si l'on trouve un bouclage de sortie qui résout le problème posé dans le paragraphe 1.2.1, alors celui-ci résout aussi le problème de stabilisation pratique et cela pour tout ϵ. La différence avec le problème de stabilisation est que le bouclage ne dépend pas de ϵ.

1.3 Deux approches

Dans ce document, nous nous inspirons de la classification que Pomet a introduit dans son mémoire de thèse traitant de la commande non-linéaire adaptative [66]. Cette classification commence par une division des techniques permettant d'obtenir un bouclage de sortie dynamique en deux familles :

1. **Technique de l'approche directe et erreur de commande**
   Cette technique part de la connaissance d'une loi de commande stabilisante qui dépend de l'état complet du système. Le bouclage de sortie dynamique a alors pour but de directement reproduire ce bouclage d'état stabilisant. La technique repose alors sur l'espoir que l'écart entre le bouclage d'état stabilisant et le bouclage dynamique de sortie qui cherche à le reproduire ne provoquera pas d'instabilité. Elle nécessite donc des propriétés de robustesse du système par rapport à une erreur de commande.

   Bien qu'elle soit conceptuellement trés intéressante, il existe aujourd'hui que peu de résultats théoriques suivant cette approche.
2. **Technique de l'approche indirecte et erreur de dynamique**
   Cette technique est la plus fructueuse (au moins au niveau théorique). Elle peut aussi être appelée approche "Observateur-Contrôleur".

   Elle passe par l'introduction d'un système dynamique annexe, dépendant de la mesure y. Si son état converge vers celui du système donné, ce système constitue alors un observateur. Pour obtenir cette propriété nous donnons à ce système la forme d'une copie de la dynamique du système donné à laquelle est ajoutée un terme de correction ayant pour but d'assurer la convergence. Dans cette approche, du point de vue de l'observateur, le terme de correction est donc un bon terme. Mais du point de vue de la commande il apparaît comme une erreur de dynamique venant perturber le système donné.

   L'approche *erreur de dynamique* consiste donc à introduire une loi de commande qui stabilise l'origine de l'état du système de l'observateur malgré la présence de cette

perturbation. La propriété désirée pour les trajectoires du système donné est alors obtenue de façon indirecte du fait des propriétés de convergence de l'observateur.

Le chapitre 2 regroupera différentes techniques de stabilisation par bouclage de sortie apparentées à l'approche directe avec erreur de commande. Nous illustrerons cette stratégie avec un exemple de stabilisation par bouclage de sortie appliqué à un problème d'interception exo-atmosphérique. L'approche indirecte avec erreur de dynamique sera l'objet du chapitre 3.

Chapitre 2

Erreur de commande

Dans ce chapitre, l'interprétation d'une condition nécessaire va justifier la présentation d'une première famille de bouclage de sortie reposant sur une approche erreur de de commande.

2.1 Principe Général

2.1.1 Conditions nécessaires

En reprenant un argument de Prieur et Praly présenté dans [80], nous pouvons montrer que l'existence d'un bouclage d'état stabilisant est une condition presque nécessaire à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique stationnaire stabilisant de la forme (1.3).

Supposons en effet qu'il existe un triplet :

$$(q \in \mathbb{N}, \varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m, \nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q) \tag{2.1}$$

ainsi qu'un compact $\mathcal{M}_w \subset \mathbb{R}^q$ telles que $\{0\} \times \mathcal{M}_w$ est un ensemble asymptotiquement stable pour le système (1.4) de bassin d'attraction $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_w$, où $\mathcal{I}_w$ est un compact de $\mathbb{R}^q$.

D'après le Théorème de Lyapunov inverse [93], et [73, Chap. III, Cor. 3.256], il existe une fonction $\mathcal{V} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, propre et C^∞, telle que, pour tout (x, w) dans $\mathcal{A}$,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x, w)\, f(x, \varpi(h(x), w)) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w}(x, w)\, \nu(h(x), w) \leq -\mathcal{V}(x, w) . \tag{2.2}$$

et, telle que pour tout (x, w) dans $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{V}(x, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 , \; w \in \mathcal{M}_w . \tag{2.3}$$

Soit $\mathcal{A}_x$ l'ensemble des x tel que l'ensemble $\mathcal{A}_w(x) = \{w : (x, w) \in \mathcal{A}\}$ est non vide.

Pout tout x dans $\mathcal{A}_x$, la fonction $w \to \mathcal{V}(x, w)$ est continue, bornée inférieurement et propre en w sur $\mathcal{A}_w(x)$. Elle admet donc un minimum global en w. Soit $\mathrm{ArgMin}_{w \in \mathcal{A}_w(x)} \mathcal{V}(x, w)$ l'ensemble des minimiseurs. Nous avons alors, pour tout x dans $\mathcal{A}_x$ et pour tout ψ dans $\mathrm{ArgMin}_{w \in \mathcal{A}_w(x)} \mathcal{V}(x, w)$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}(x, w) \geq \mathcal{V}(x, \psi) \quad , \qquad \forall \quad w \in \mathcal{A}_w(x) , \\ &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w}(x, \psi) = 0 . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nous pouvons associer à chaque x dans $\mathcal{A}_x$ un ψ dans $\mathrm{ArgMin}_{w\in\mathcal{A}_w(x)}\mathcal{V}(x,w)$. Notons ce choix $\psi(x)$ et introduisons la fonction $\mathcal{U} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\mathcal{U}(x) \;=\; \mathcal{V}(x,\psi(x)) \;. \tag{2.5}$$

Nous avons :

Proposition 1 ([80]) *Si il existe une sélection ψ de $ArgMin_{w\in\mathcal{A}_w(x)}\mathcal{V}(x,w)$ qui est Höldérienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, alors la fonction $\mathcal{U}$ est une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point.*

Preuve : Tout d'abord montrons que $\mathcal{A}_x$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit x_0 appartenant à $\mathcal{A}_x$. Par définition, il existe w_0 dans $\mathbb{R}^q$ tel que (x_0,w_0) est dans $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ étant un ouvert, il existe $\epsilon > 0$, tel que $\mathcal{B}_\epsilon(x_0,w_0) \subseteq \mathcal{A}$. Mais pour tout x dans $\mathcal{B}_\epsilon(x_0)$, (x,w_0) est dans $\mathcal{B}_\epsilon(x_0,w_0)$ et donc dans $\mathcal{A}$. De ce fait nous concluons que pour tout x_0 dans $\mathcal{A}_x$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}_\epsilon(x_0)$ est dans $\mathcal{A}_x$ ce qui montre que $\mathcal{A}_x$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De même nous pouvons montrer que $\mathcal{A}_w(x)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^q$.

$\mathcal{A}_x$ étant un ouvert, ψ étant Höldérienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$ il existe un réel strictement positif ϵ tel que pour tout x dans $\mathcal{A}_x$ nous pouvons trouver c et h_0 tels que $\mathcal{B}_h(x) \subseteq \mathcal{A}_x$ et :

$$\frac{|\psi(x+vh) \,-\, \psi(x)|}{\sqrt{|h|}} \;\leq\; c\,|h|^\epsilon \qquad \forall\, h \;\leq\; h_0\,,\; \forall\,|v| = 1\;. \tag{2.6}$$

En utilisant (2.5), on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{U}(x+hv) \,-\, \mathcal{U}(x)}{h} \;&=\; \frac{\mathcal{V}(x+hv,\psi(x+hv)) \,-\, \mathcal{V}(x,\psi(x+hv))}{h} \\
&\qquad - \frac{\mathcal{V}(x,\psi(x+hv)) \,-\, \mathcal{V}(x,\psi(x))}{h} \\
&=\; \left(\int_0^1 \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}(x+shv,\psi(x+hv))ds\right) v \\
&\qquad - \left(\int_0^1 \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial w}(x,\psi(x)+s[\psi(x+hv)-\psi(x)])ds\right) \frac{\psi(x+hv)-\psi(x)}{h}\;.
\end{aligned}$$

Mais, (2.4) donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial w}(x,\psi(x)+s[\psi(x+hv)-\psi(x)]) \;&=\; (\psi(x+hv)-\psi(x))^T \\
&\qquad \times \left(\int_0^1 s\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial w^2}(x,\psi(x)+st[\psi(x+hv)-\psi(x)])dt\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{U}(x+hv)-\mathcal{U}(x)}{h} \;&=\; \left(\int_0^1 \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}(x+shv,\psi(x+hv))ds\right) v - \left(\frac{\psi(x+hv)-\psi(x)}{\sqrt{h}}\right)^T \\
&\qquad \times \left(\int_0^1\int_0^1 s\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial w^2}(x,\psi(x)+st[\psi(x+hv)-\psi(x)])dtds\right) \\
&\qquad \times \frac{\psi(x+hv)-\psi(x)}{\sqrt{h}}.
\end{aligned}$$

Avec (2.6), nous pouvons passer à la limite lorsque h tend vers 0 pour conclure :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) \;=\; \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x, \psi(x)) \;. \tag{2.7}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{U}$ est C^1. Du fait (2.2) et (2.4), nous avons alors :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\, f\left(x, \varpi(h(x), \psi(x))\right) \;\leq\; -\mathcal{U}(x) \tag{2.8}$$

□

Donc, sous l'hypothèse supplémentaire qu'il existe une sélection ψ Höldérienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, cette équation nous garantit que la fonction :

$$\phi(x) \;=\; \varpi(h(x), \psi(x)) \tag{2.9}$$

définit un bouclage statique d'état stabilisant l'origine du système (1.1).

Nous avons de cette façon mis en évidence que l'existence d'un bouclage d'état stabilisant l'origine du système est une condition presque nécessaire à la résolution du problème de bouclage de sortie.

2.1.2 Interprétation : changement et erreur de commande

Avec $\mathcal{U}$ définie en (2.5), $\mathcal{V}$ se décompose sous la forme :

$$\mathcal{V}(x, w) \;=\; \underbrace{\mathcal{U}(x)}_{\text{Fonction de Lyapunov en } x} + \underbrace{(w - \psi(x))^T\, M(x, w)\, (w - \psi(x))}_{\text{Fonction "distance" de l'écart entre } w \text{ et } \psi}, \tag{2.10}$$

où :

$$M(x, w) \;=\; \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial w^2}(x, \psi(x) + rs(w - \psi(x)))s\, dr\, ds \;. \tag{2.11}$$

et de sorte que le second terme est non négatif.

Cette décomposition est très intéressante car elle fait apparaître $\mathcal{V}$ comme la somme d'une fonction de Lyapunov $\mathcal{U}$ strictement assignable au système (1.1), avec l'état x comme argument, et d'une fonction que l'on peut interpréter comme une distance entre w et $\psi(x)$. Nous voyons ainsi w comme une estimation non pas de l'etat x du systeme mais d'une fonction de celui-ci et meme non pas d'une fonction quelconque mais de celle definissant la loi de commande $\psi(x)$. De plus le bouclage d'état assignant la fonction $\mathcal{U}$ est

$$\phi(x) \;=\; \varpi(h(x), \psi(x)) \;. \tag{2.12}$$

C'est une fonction de la mesure et de cette fonction ψ intervenant dans l'erreur ci-dessus.

Pour mieux interpréter ce que nous venons de voir, nous faisons un changement de commande. Précisément, restreignons la commande u du système donné (1.1) à être de la forme :

$$u \;=\; \varpi(y, v) \;. \tag{2.13}$$

où v dans $\mathbb{R}^q$ est la nouvelle commande. Le système (1.1) devient :

$$\dot{x} \;=\; f(x, \varpi(h(x), v)) \;:=\; \bar{f}(x, v) \quad , \qquad x \in \mathbb{R}^n \;, \tag{2.14}$$

avec v la commande.

D'après ce qui précède une condition nécessaire d'existence d'un bouclage de sortie dynamique et stationnaire est l'existence d'une fonction ψ qui, si elle est Höldérienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, est telle que le système (2.14) admet un bouclage d'état stabilisant :

$$v \;=\; \psi(x) \quad , \qquad x \in \mathcal{A}_x \;. \tag{2.15}$$

Ce bouclage d'état stabilisant apparaît explicitement (voir 2.10) dans une fonction de Lyapunov $\mathcal{V}$ pour le système en boucle fermée dans un terme d'erreur $w - \psi(x)$, w étant l'état du bouclage dynamique.

Il est ainsi intéressant d'introduire e dans $\mathbb{R}^q$ pour représenter ce terme d'erreur,

$$e \;=\; v - \psi(x) \;. \tag{2.16}$$

Cette erreur est une erreur de commande associée au système (2.14) qui s'écrit alors :

$$\dot{x} \;=\; \bar{f}(x, \psi(x) + e) \;. \tag{2.17}$$

La fonction $\mathcal{U}$ est assignée au système (2.14) par ψ. En présence de l'erreur de commande, elle satisfait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\bar{f}\left(x, \psi(x) + e\right) \;\leq\; & \underbrace{-\mathcal{U}(x)}_{\text{Négativité due au bouclage stabilisant } \psi} \\ & + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\left[\bar{f}(x, \psi(x) + e) - \bar{f}(x, \psi(x))\right]}_{\text{Terme induit par l'erreur de commande}} \;. \end{aligned} \tag{2.18}$$

L'erreur de commande introduit ainsi une possible perte de négativité.

En adaptant ce point de vue, l'objectif du bouclage de sortie dynamique est de compenser cette perte. Nous avons vu avec l'exemple (1.5) du paragraphe 1.2.2 que, même si $|e|$ decroît exponentiellement vers 0, la perte de négativité induite peut-être telle que des solutions explosent (respectivement, sortent de $\mathcal{A}_x$) en temps fini. Techniquement ceci se traduit comme nous le voyons dans l'équation (2.2), par d'une fonction caractérisant une distance en w et $\psi(x)$ (voir (2.10)), et par l'utilisation du bouclage de sortie dynamique et stationnaire (1.3).

Tout ceci nous conduit à interpréter le rôle du bouclage de sortie dynamique comme celui de compenser la présence du terme dans (2.18) induit par l'erreur de commande.

Remarque 2 : Dans le cas où q la dimension de w est égale à n la dimension de x, où ϖ ne dépend pas de y, et où ψ est la fonction identité le changement de commande est alors :

$$u \;=\; \phi(v) \tag{2.19}$$

avec v dans $\mathbb{R}^n$. Le bouclage d'état stabilisant est alors $v = x$. Dans ce cas, le rôle de w peut être interprété comme celui de fournir une estimation de l'état du système. Si ϖ dépend de y et $q = n - 1$ alors w est interprété comme l'état d'un observateur d'ordre réduit.

2.1.3 Synthèse par l'approche d'erreur de commande

Le paragraphe précédent nous permet d'envisager une première approche pour construire un bouclage de sortie. Celle-ci repose sur une analyse qui peut être faites à partir d'une fonction de Lyapunov assignable en l'état x et l'estimation d'un bouclage d'état stabilisant ϕ.

Ainsi, dans ce qui suit, nous supposons l'existence d'un bouclage d'état qui stabilise asymptotiquement l'origine du système pour toutes trajectoires issues de $\mathcal{I}_x$.

Hypothèse 2 [Stabilisabilité] :

Il existe une fonction d'état continue $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que pour le système suivant :

$$\dot{x} \;=\; f(x, \phi(x)) \;. \tag{2.20}$$

l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{I}_x$. Plus précisément, il existe une fonction définie positive, C^1, et propre $\mathcal{U} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\, f(x, \phi(x)) \;\leq\; -\mathcal{U}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}_x \;. \tag{2.21}$$

Remarque 3 : Comme nous l'avons vu précédemment le système (2.20) peut être le système (1.1) directement commandé où le système (2.14) après changement de commande.

Suivant toujours l'interprétation du paragraphe précédent, nous introduisons le terme d'erreur de commande e dans $\mathbb{R}^m$:

$$e \;=\; u \,-\, \phi(x) \quad , \qquad (\text{resp. } v - \psi) \;. \tag{2.22}$$

Le système (1.1) (resp. (2.14)) s'écrit alors :

$$\dot{x} \;=\; f(x, \phi(x) + e) \;. \tag{2.23}$$

L'hypothèse 2 de stabilisabilité nous donne l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f\,(x, \phi(x) \,+\, e) \;\leq\; & \underbrace{-\mathcal{U}(x)}_{\text{Négativité due à la stabilisabilité}} \\ & + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\,[f(x, \phi(x) \,+\, e) \,-\, f(x, \phi(x))]}_{\text{Terme induit par l'erreur de commande}} \;.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ici il est opportun de redécomposer le terme de droite de cette inégalité en 2 pour obtenir :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f\,(x, \phi(x) \,+\, e) \;\leq\; -\alpha(x, e) \,+\, \Gamma(x, e) \;, \tag{2.25}$$

où α est une fonction définie positive en x pour chaque e et qui caractérise la négativité apportée par la stabilisabilité. La fonction Γ caractérise le terme induit par l'erreur de commande. Il satisfait :

$$\Gamma(x, 0) \;=\; 0 \quad , \qquad \forall\, x \,\in\, \mathcal{A}_x \;. \tag{2.26}$$

Nous pouvons exploiter de différentes façons la négativité découlant de la stabilisabilité pour obtenir des fonction α et Γ donnant une équation de la forme (2.25). Par exemple, dans le paragraphe 2.4.5 est introduite une décomposition de l'équation (2.24) où la négativité considérée est $\alpha(x, e) = \mathcal{U}(x + e)$.

Selon notre interprétation du paragraphe précédent, un bouclage de sortie stabilisant a pour objectif de compenser la perte de négativité représenté par Γ. Pour réaliser cet objectif diverses stratégies peuvent être exploitées :

1. **Domination de Γ**

   L'objectif est ici de trouver un bouclage de sortie (q, ϖ, ν) forçant Γ à être le plus petit possible par l'intermédiaire de e, malgré la non connaissance de x. Dans ce cas, nous pouvons espérer que la négativité due à la stabilité notée α dominera Γ et ainsi, de l'inégalité (2.25) nous conclurons que les trajectoires du système bouclé restent dans $\mathcal{A}_x$, sont de plus bornées et, en ajoutant des hypothèses, convergent vers l'origine.

   Nous voulons donc trouver un bouclage de sortie rendant $\Gamma(x, e)$ petit le long des solutions et ce, quelque soit l'évolution de x.

   Du fait que, pour tout x dans $\mathcal{A}_x$, $\Gamma(x, 0) = 0$ une démarche pourrait-être de choisir un bouclage de sortie tel que, le long des solutions :

   $$|e| \longrightarrow 0 \ , \tag{2.27}$$

   indépendamment du comportement de x. En d'autres termes, nous devons faire en sorte que w converge vers $\phi(x)$. Nous introduirons deux situations différentes dans lesquelles nous suivrons cette démarche.

   (a) Dans un premier cas, nous ferons une hypothèse de stabilisabilité plus forte que celle introduite au début de ce chapitre de sorte que, par un effet domination du terme négatif représenté par $-\alpha(x, e)$, nous puissions travailler comme si $\Gamma(x, e)$ ne dépendait que de l'erreur de commande e.

   Dans ce cas de figure, trouver un bouclage de sortie qui donne (2.27) nous garantira que Γ devient petit le long des solutions. Cette stratégie sera abordée dans la section 2.2.

   (b) Le deuxième contexte correspond au cas où la fonction Γ dépend trop fortement de l'état x. Dans ce cas (2.27) ne nous garantit pas directement que Γ devient petit le long des solutions. L'issue possible réside dans une estimation de la commande $\phi(x)$ suffisamment rapide pour contrer la croissance probable de la fonction Γ par le biais du signal x. Ceci requiert une hypothèse de détectabilité plus forte ou une connaissance à priori sur $|x|$ (i.e. $\mathcal{I}_x$ est borné). Cette stratégie sera abordée dans la section 2.3.

2. **Élimination de Γ**

   La seconde stratégie ne repose pas sur une propriété de robustesse. L'objectif est de trouver un bouclage de sortie dynamique tel que le terme induit pas l'erreur de commande puisse être annulé. Par des propriétés de passivité, nous montrerons que ceci est possible au moins pour une classe de systèmes.

Dans la suite de ce chapitre, ces stratégies de domination et d'élimination seront abordées tour à tour et nous exposerons un exemple d'application pratique de la méthode d'élimination au problème de l'interception exo-atmosphérique.

2.2 Domination dans le cas ISS

2.2.1 Le contexte général

Dans l'approche domination, l'objectif du bouclage de sortie est de rendre petit le terme $\Gamma(x, e)$ de façon à ce qu'il puisse être dominé par la négativité induite par la stabilisabilité. Pour que cette domination soit possible nous avons besoin d'une hypothèse forte de stabilisabilité. Nous la formulons pour le système (2.23), en considérant e pour entrée et en reprenant le formalisme de stabilité entrée-état (ISS en anglais abrégé) introduit par Sontag dans [85].

Définition 1 (Système ISS) *Le système,*

$$\dot{x} \;=\; f(x, u) \;, \tag{2.28}$$

est dit ISS sur $\mathcal{A}_x$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, si il existe $\mathcal{U} \;:\; \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$, une fonction définie positive, C^1, et propre dans $\mathcal{A}_x$, et ρ une fonction de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x, u) \;\leq\; -\mathcal{U}(x) \;+\; \rho(|u|) \quad , \qquad \forall\, (x, u) \;\in \mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m \;. \tag{2.29}$$

Il est dit ISS dans le cas où $\mathcal{A}_x = \mathbb{R}^n$

Avec cette définition l'hypothèse plus forte de stabilisabilité est la suivante :

Hypothèse 3 [Stabilisabilité-ISS sur $\mathcal{A}_x$] :

Étant donné l'ensemble $\mathcal{I}_x$ des conditions initiales, il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et un ouvert $\mathcal{A}_x$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{I}_x$ tels que le système suivant est ISS dans $\mathcal{A}_x$:

$$\dot{x} \;=\; f(x, \phi(x) \;+\; e) \;, \tag{2.30}$$

où $e \;\in\; \mathbb{R}^m$ est la commande. Plus précisément, il existe $\mathcal{U} \;:\; \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie positive, C^1, et radialement non bornée, et $\rho_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{K}$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\, f(x, \phi(x) \;+\; e) \;\leq\; -\mathcal{U}(x) \;+\; \rho_0(|e|) \qquad \forall (x, e) \in \mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^p \;. \tag{2.31}$$

Nous verrons au paragraphe 2.2.2 comment cette hypothèse peut-être satisfaite. Pour le moment, observons en comparant (2.24) et (2.31) que si elle est satisfaite, alors Γ le terme induit par l'erreur de commande est :

$$\Gamma(x, e) \;=\; \rho_0(|e|) \;. \tag{2.32}$$

Ainsi par exemple, si l'erreur reste bornée, alors l'état x restera dans $\mathcal{A}_x$. Dans ce contexte l'objectif du bouclage de sortie dynamique est simplement de garantir une erreur bornée le long des solutions et même convergente vers 0 et ce quelque soit l'évolution de x :

Objectif 2 (Domination ISS) *Sous l'hypothèse 3, trouver un triplet (q, ϖ, ν) tel qu'il existe un compact $\mathcal{M}_w$ et un ouvert $\mathcal{A}_w$ avec :*

$$\mathcal{M}_w \;\subset\; \mathcal{A}_w \;\subseteq\; \mathbb{R}^q \;, \tag{2.33}$$

tel que le long des trajectoires du système bouclé,

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x, \varpi(y,w)) \\ \dot{w} \;=\; \nu(y,w) \end{cases} \quad , \qquad y \;=\; h(x) \;, \tag{2.34}$$

l'ensemble :

$$\{(x,w) \;\in\; \mathcal{A}_x \times \mathcal{M}_w \;\; : \varpi(y,w) - \phi(x) \;=\; 0\} \tag{2.35}$$

est asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$.

Si cet objectif est réalisé alors $\varpi(y,w)$ reconstruit le bouclage d'état $\phi(x)$ pour w dans tout compact $\mathcal{I}_w$ inclus dans $\mathcal{A}_w$. Une façon de le réaliser est de satisfaire l'hypothèse de détectabilité suivante :

Hypothèse 4 [Observateur de la loi de commande ϕ] :

Il existe $\mathcal{A}_w$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $\varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$, et $\nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ deux fonctions localement Lipschitziennes, $\mathcal{W} : \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^1, et $\rho_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$, telles que nous avons pour tout (x,w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$ tel que $\mathcal{W}(x,w) \;\neq\; 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}(x,w) f(x, \varpi(h(x),w)) \;+\; \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w}(w,x)\, \nu(h(x),w) \;<\; 0 \;, \tag{2.36}$$

et,

$$\mathcal{W}(x,w) \;\geq\; \rho_1(|\phi(x) \;-\; \varpi(h(x),w)|) \quad , \qquad \forall\, (x,w) \;\in\; \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;, \tag{2.37}$$

enfin, pour tout réel positif W_0 et pour tout compact C dans $\mathcal{A}_x$ l'ensemble :

$$\{(x,w) \;\in\; \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{W}(x,w) \;\leq\; W_0 \text{ et } x \;\in\; C\} \tag{2.38}$$

est un compact.

Nous discuterons au paragraphe 2.2.3 comment cette hypothèse peut être satisfaite. Comme nous l'avons mentionné c'est un point de passage garantissant le succès de la synthèse du bouclage de sortie. En effet nous avons :

Théorème 1 (Erreur de commande et domination ISS) *Étant donné un fermé* $\mathcal{I}_x$ *de* $\mathbb{R}^n$*, si les hypothèses 3 et 4 sont satisfaites alors le triplet* (q, ϖ, ν) *et le compact* $\mathcal{M}_w$ *sont tels que le bouclage dynamique stationnaire,*

$$u \;=\; \varpi(y,w) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; \nu(y,w) \;, \tag{2.39}$$

rend l'ensemble $\{0\} \times \mathcal{M}_w$ *asymptotiquement stable pour le système bouclé composé de (1.1) et (2.39) avec* $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$ *comme bassin d'attraction.*

Comme nous le verrons plus loin, la preuve de ce "résultat" est simple au moins pour son principe puisqu'il relève du "dicton" : la cascade d'un système ISS et d'un système ayant une stabilité asymptotique globale a une stabilité asymptotique globale. Ce théorème ennonce qu'une voie menant au résultat voulu est de trouver (peut-être après changement de commande) d'abord un bouclage d'état donnant la propriété ISS telle que formulée dans l'hypothèse 3, puis un observateur de bouclage, comme formulé dans l'hypothèse 4. Pour illustrer comment un tel programme est possible, nous traitons un exemple ci dessous.

Exemple 1

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + u \end{cases} \quad , \qquad y = x_1 \ . \tag{2.40}$$

ISS-Stabilisabilité :

En utilisant les outils développés par Freeman et Kokotovic dans [24], nous avons introduit dans l'annexe A.2.1, une fonction continue φ telle que le changement de commande suivant :

$$u = \varphi(v, x_1) \ , \tag{2.41}$$

est telle que la commande $v = \phi(x_1, x_2)$:

$$\phi(x_1, x_2) = x_2 \exp(-x_1) \tag{2.42}$$

est une loi de commande ISS-Stabilisante (qui satisfait l'hypothèse 3), i.e, le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + \varphi(x_2 \exp(-x_1) + e, x_1) \ , \end{cases} \tag{2.43}$$

est ISS.

Observateur de commande :

Considérons le système suivant :

$$\dot{w} = u \exp(-y) - w + \exp(-y) \quad , \qquad \varpi(w, y) = w - \exp(-y) \ , \tag{2.44}$$

et introduisons la fonction positive et C^1 suivante :

$$\mathcal{W}(w, x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\varpi(w, y) - \phi(x_1, x_2))^2 \ . \tag{2.45}$$

cette fonction satisfait le long des trajectoires du système étendu (composé de (2.40) et de (2.44)) :

$$\dot{\overline{\mathcal{W}(w, x_1, x_2)}} = -2\,\mathcal{W}(w, x_1, x_2) \ . \tag{2.46}$$

Ainsi le système (2.44) définit un observateur de la loi de commande ϕ. D'après le Théorème 1, nous pouvons conclure que :

$$u = \varphi(\varpi(w, y), y) \quad , \qquad \varpi(w, y) = w - \exp(-y) \ , \tag{2.47}$$

avec,

$$\dot{w} = u \exp(-y) - w + \exp(-y) \ , \tag{2.48}$$

définit un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système (2.40).

Nous donnons maintenant la preuve du Théorème 1 :

Preuve : Considérons la fonction de Lyapunov :

$$\mathcal{V}(x,w) \;=\; k(\mathcal{U}(x)) \;+\; \ell(\mathcal{W}(x,w)) \;, \tag{2.49}$$

où, $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions C^1 de classe $\mathcal{K}_\infty$ que nous définirons par la suite. Pour tout V_0, réel strictement positif, nous avons :

$$\begin{aligned}\{(x,w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{V}(x,w) \;\leq\; V_0\} \subseteq \{(x,w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{W}(x,w) \;\leq\; \ell^{-1}(V_0)\} \\ \cap \{x \in \mathcal{A}_x \,:\, \mathcal{U}(x) \;\leq\; k^{-1}(V_0)\} \;.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Du fait que la fonction $\mathcal{U}$ est propre en x dans $\mathcal{A}_x$, pour tout V_0 dans $\mathbb{R}_+$, l'ensemble $\{x \in \mathcal{A}_x \,:\, \mathcal{U}(x,w) \;\leq\; V_0\}$ est un compact dans $\mathcal{A}_x$. Nous concluons alors en utilisant l'hypothèse 4 que la partie droite de (2.50) est un compact. Ainsi $\mathcal{V}$ est propre en (x,w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$.

Nous notons $\mathcal{M}_w$ l'ensemble :

$$\mathcal{M}_w \;=\; \{w \in \mathcal{A}_w \,:\mathcal{W}(0,w) \;=\; 0\} \;. \tag{2.51}$$

Du fait des propriétés sur la fonction $\mathcal{W}$, il s'agit d'un compact, et, pour tout (x,w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$,

$$\mathcal{V}(x,w) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,w) \in \{0\} \times \mathcal{M}_w \;. \tag{2.52}$$

En utilisant l'hypothèse de stabilisabilité-ISS (2.31), nous obtenons le long des solutions du système (1.1) avec la loi de commande (2.39) :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}(x,w)}} \;\leq\; -k'(\mathcal{U}(x))\mathcal{U}(x) \;+\; k'(\mathcal{U}(x))\eta(\mathcal{W}(x,w)) \;+\; \ell'(\mathcal{W}(x,w))\dot{\overline{\mathcal{W}(x,w)}} \;, \tag{2.53}$$

où η est la fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ définie par :

$$\eta(s) \;=\; \rho_0(\rho_1^{-1}(s)) \;, \tag{2.54}$$

où, ρ_1^{-1} est l'application inverse de ρ_1 qui est de classe $\mathcal{K}_\infty$ et est définie en (2.37).

D'autre part, à tout U et W dans $\mathbb{R}_+$ nous associons l'ensemble :

$$\mathcal{B}(U,W) \;=\; \{(x,w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{U}(x) \leq U \,,\, \mathcal{W}(w,x) \;=\; W\} \;. \tag{2.55}$$

La fonction $\mathcal{U}$ étant propre dans $\mathcal{A}_x$ et du fait de l'hypothèse 4, $\mathcal{B}(U,W)$ est un compact dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$. Nous avons de plus :

$$a \;<\; b \;\Rightarrow\; \mathcal{B}(a,W) \;\subset\; \mathcal{B}(b,W) \;. \tag{2.56}$$

La fonction $\mathcal{W}$ étant continue, nous pouvons alors définir la fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ comme :

$$\alpha(U,W) \;=\; -\left(\max_{(x,w)\,\in\,\mathcal{B}(U,W)} \dot{\overline{\mathcal{W}(x,w)}}\right) \;. \tag{2.57}$$

De (2.56) nous déduisons que cette fonction α est décroissante en son premier argument. Enfin, pour tout (c_1,c_2,c_3) dans $\mathbb{R}_{+*}$, nous avons :

$$\inf_{U\leq c_1\,,\,c_2\leq W\leq c_3} \alpha(U,W) \neq 0 \;. \tag{2.58}$$

En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait deux suites $(x_n)_{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{\mathbb{N}}$ satisfaisant,

$$\mathcal{U}(x_n) \leq c_1 \quad , \qquad c_2 \leq \mathcal{W}(x_n, w_n) \leq c_3 \quad , \qquad 0 \geq \dot{\widehat{\mathcal{W}(x_n, w_n)}} \geq -\frac{1}{n} \ . \tag{2.59}$$

Comme nous l'avons déjà observé (2.59) implique que ces deux suites sont dans des compacts de $\mathcal{A}_x$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement. Par ailleurs, $\dot{\mathcal{W}}, \mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ étant des fonctions continues, nous en déduisons l'existence de x_* et w_* satisfaisant :

$$\mathcal{U}(x_*) \leq c_1 \quad , \qquad c_2 \leq \mathcal{W}(x_*, w_*) \leq c_3 \quad , \qquad \dot{\widehat{\mathcal{W}(x_*, w_*)}} = 0 \ . \tag{2.60}$$

D'après (2.36), nous avons donc

$$\mathcal{W}(x_*, w_*) \ = \ 0 \ , \tag{2.61}$$

ce qui contredit le fait que c_2 est strictement positif. Ainsi le fait (2.58) est vérifié.

L'inégalité (2.53) peut alors s'écrire (pour plus de clarté nous avons enlevé la dépendance en w et x de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{W}$) :

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}(x, w)}} \ \leq \ -k'(\mathcal{U})\mathcal{U} \ + \ k'(\mathcal{U})\eta(\mathcal{W}) \ - \ \ell'(\mathcal{W})\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \ , \tag{2.62}$$

Nous considérons alors deux cas :

– Si $\mathcal{U}(x) \ > \ 2\eta(\mathcal{W}(x, w))$, l'inégalité (2.62) devient :

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}(x, w)}} \ \leq \ -k'(\mathcal{U})\frac{\mathcal{U}}{2} \ - \ \ell'(\mathcal{W})\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \ . \tag{2.63}$$

– Si $\mathcal{U}(x) \ \leq \ 2\eta(\mathcal{W}(x, w))$, l'inégalité (2.62) devient :

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}}} \ \leq \ -k'(\mathcal{U})\mathcal{U} \ + \ k'(\mathcal{U})\eta(\mathcal{W}) \ - \ \ell'(\mathcal{W})\alpha(2\eta(\mathcal{W}), \mathcal{W}) \ , \tag{2.64}$$

Nous avons de plus, pour toute fonction γ de classe $\mathcal{K}_\infty$:

$$k'(\mathcal{U})\eta(\mathcal{W}) \ \leq \ \gamma^{-1}(k'(\mathcal{U}))k'(\mathcal{U}) \ + \ \gamma(\eta(\mathcal{W}))\eta(\mathcal{W}) \ . \tag{2.65}$$

où, γ^{-1} est l'application inverse de γ. L'inégalité (2.64) donne alors :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\mathcal{V}(x, w)}} \ \leq \ -k'(\mathcal{U})\mathcal{U} \ + \ \gamma^{-1}(k'(\mathcal{U}))k'(\mathcal{U}) \ + \ \gamma(\eta(\mathcal{W}))\eta(\mathcal{W}) \\ - \ \ell'(\mathcal{W})\alpha(2\eta(\mathcal{W}), \mathcal{W}) \ , \end{aligned} \tag{2.66}$$

Nous allons maintenant sélectionner les fonctions ℓ, k et γ (qui doivent toutes être de classe $\mathcal{K}_\infty$) de façon à obtenir la négativité.

Introduisons la fonction $\bar{\alpha} \ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\bar{\alpha}(s) \ = \ \begin{cases} \inf\limits_{1 \leq r \leq s} \alpha(2\eta(r), r) \quad , & \forall \, s \ \geq \ 1 \ , \\ \inf\limits_{s \leq r \leq 1} \alpha(2\eta(r), r) \quad , & \forall \, s \ \leq \ 1 \ . \end{cases} \tag{2.67}$$

Cette fonction est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty)$, et vérifie $\bar{\alpha}(s) \leq \alpha(s)$, pour tout s dans $\mathbb{R}_+$. Nous pouvons alors construire une autre fonction $\bar{\bar{\alpha}} \ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie positive, telle que $\bar{\bar{\alpha}}(s) \leq \alpha(s)$ mais qui est continue.

Nous choisissons maintenant γ une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ telle que :

$$\gamma(s) \begin{cases} \leq & \bar{\bar{\alpha}}(2s, \eta^{-1}(s)) \text{ pour } s \text{ dans } [0,1] \ , \\ \geq & \bar{\bar{\alpha}}(2s, \eta^{-1}(s)) \text{ pour } s \text{ dans } [2,+\infty] \ . \end{cases} \tag{2.68}$$

nous définissons alors :

$$\ell(\mathcal{W}) \ = \ 2 \int_0^{\mathcal{W}} \frac{\gamma(\eta(s))\eta(s)}{\bar{\bar{\alpha}}(2\eta(s), s)} \, ds \ . \tag{2.69}$$

Cette fonction est bien définie et du fait que η est une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ elle est aussi de classe $\mathcal{K}_\infty$. De plus elle satisfait :

$$-\ell'(\mathcal{W})\bar{\bar{\alpha}}(2\eta(\mathcal{W}), \mathcal{W}) \ + \ \gamma(\eta(\mathcal{W}))\eta(\mathcal{W}) \ = \ -\frac{1}{2}\ell'(\mathcal{W})\bar{\bar{\alpha}}(2\eta(\mathcal{W}), \mathcal{W}) \ . \tag{2.70}$$

Aussi, nous choisissons :

$$k(\mathcal{U}) \ = \ \int_0^{\mathcal{U}} \gamma\left(\frac{s}{2}\right) \, ds \ , \tag{2.71}$$

qui donne :

$$-k'(\mathcal{U})\mathcal{U} \ + \ \gamma^{-1}(k'(\mathcal{U}))k'(\mathcal{U}) \ = \ -k'(\mathcal{U})\frac{\mathcal{U}}{2} \ , \tag{2.72}$$

Ainsi en utilisant (2.70) et (2.72) dans (2.66), nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}(x,w)}} \ \leq \ -k'(\mathcal{U})\frac{\mathcal{U}}{2} \ - \ \frac{1}{2}\ell'(\mathcal{W})\bar{\bar{\alpha}}(2\eta(\mathcal{W}), \mathcal{W}) \ , \tag{2.73}$$

alors d'après (2.63) et (2.73), puisque $\bar{\bar{\alpha}}$ est définie positive et continue, et en utilisant (2.52) nous avons pour tout (x, w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$ mais non dans $\{0\} \times \mathcal{M}_w$,

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}(x,w)}} \ < \ 0 \ . \tag{2.74}$$

Puisque $\{0\} \times \mathcal{M}_w$ est une ligne de niveau de la fonction $\mathcal{V}$ qui est propre sur $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$, $\{0\} \times \mathcal{M}_w$ est alors asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$.

□

2.2.2 Sur l'ISS-Stabilisabilité

L'ISS-Stabilisabilité est la première condition à satisfaire dans la synthèse par l'approche d'erreur de commande avec domination. Sontag a montré dans [85] que cette hypothèse est impliquée par la simple stabilisabilité dans le cas où le système est affine en la commande.

Théorème 2 ([85]) *Si le système (1.1) peut se mettre sous la forme :*

$$\dot{x} \ = \ f(x) \ + \ g(x)\, u \ , \tag{2.75}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une fonction C^1, et s'il est stabilisable alors le système est ISS-Stabilisable

Preuve : Le système (2.75) est stabilisable, donc il existe ϕ_0 une fonction qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine avec pour bassin d'attraction $\mathcal{A}_x$, ouvert de $\mathbb{R}^n$. A partir du Théorème de Kurzweil [51] et en utilisant [73, Chap. III, Cor. 3.256], il existe une fonction $\mathcal{V} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ propre et C^1 dont la dérivée temporelle le long des solutions du système (1.1) satisfait pour tout x dans $\mathcal{A}_x$:

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}(x)}} \leq -\mathcal{V}(x) \ . \tag{2.76}$$

On introduit maintenant la loi de commande :

$$u = \phi(x) = \phi_0(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x)g(x)\right)^T \ , \tag{2.77}$$

Nous considérons alors le système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\left[\phi(x) + e\right] \ , \tag{2.78}$$

et on obtient le long des solutions :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\mathcal{V}(x)}} &\leq -\mathcal{V}(x) - \left|\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x)g(x)\right|^2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x)g(x)e \ , \\ &\leq -\mathcal{V}(x) + |e|^2 \ , \end{aligned} \tag{2.79}$$

ainsi le système (2.78) est ISS et (2.30) est alors satisfaite. □

Pour le cas où le système n'est pas affine en la commande, nous renvoyons nos lecteurs à l'article [86] de Sontag. Un autre résultat intéressant est celui de Freeman dans [24]. Il porte sur une technique de synthèse de loi de commande pour les systèmes triangulaires donnant une stabilité Entrée/ État pratique.

2.2.3 Sur les observateurs de loi commande

La deuxième condition porte sur l'existence d'un observateur de la loi de commande ISS-Stabilisante ϕ. C'est là que réside la principale difficulté de l'approche par erreur de commande avec domination. De tels observateur peuvent ne pas exister. Par exemple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + u \end{cases} \ , \qquad y = x_1 \ , \tag{2.80}$$

n'est pas stabilisable par bouclage de sortie pourtant, ce système étant sous forme normale, il est stabilisable et affine en la commande ainsi d'après la proposition 2, il existe une loi de commande ISS-Stabilisable. Cette loi de commande ne peut donc pas être estimée par un observateur de commande.

Dans ce paragraphe, nous allons explorer une méthode inspirée du cas linéaire. Malheureusement, pour le moment nous n'avons pas pu aboutir à des résultats significatifs pour le cas non-linéaire.

La méthode se fait en deux temps :

1. Tout d'abord nous introduisons un observateur de la loi de commande stabilisante ϕ, mais qui est autorisé à dépendre de l'état complet x du système.

2. Dans un deuxième temps nous cherchons des coordonnées dans lesquelles cet observateur ne dépend que de la mesure y et est ainsi réalisable. Ceci nous définira alors un bouclage de sortie stabilisant résolvant le problème.

Nous allons à maintenant présenter de façon plus précise ces deux points :

1) Observateur de loi de commande dépendant de tout l'état

Un observateur d'une loi de commande dépendant de tout l'état du système est caractérisé par un triplet $(q, \bar{\varpi}, \bar{\nu})$, avec $\bar{\varpi} : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ et $\bar{\nu} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ des fonctions localement Lipschitziennes, telles qu'il existe $\mathcal{A}_\vartheta$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $\bar{\mathcal{W}} : \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_\vartheta \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^1 et une fonction $\bar{\rho} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que pour tout $(x, w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_\vartheta$ satisfaisant $\bar{\mathcal{W}}(x, \vartheta) \neq 0$; nous avons :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{W}}}{\partial x}(x, \vartheta) f(x, \bar{\varpi}(x, \vartheta)) \; + \; \frac{\partial \bar{\mathcal{W}}}{\partial \vartheta}(x, \vartheta) \bar{\nu}(\vartheta, x) \; < \; 0 \; , \tag{2.81}$$

et,

$$\bar{\mathcal{W}}(x, \vartheta) \; \geq \; \bar{\rho}(|\phi(x) \; - \; \varpi(x, \vartheta)|) \quad , \qquad \forall \, (x, \vartheta) \; \in \; \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_\vartheta \; . \tag{2.82}$$

De plus, pour tout réel positif W_0 et pour tout compact C dans $\mathcal{A}_\vartheta$ l'ensemble :

$$\{(x, \vartheta) \; \in \; \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_\vartheta \; : \; \bar{\mathcal{W}}(x, \vartheta) \; \leq \; W_0 \text{ et } x \; \in \; C\} \tag{2.83}$$

est un compact.

Contrairement à la recherche d'un triplet (q, ϖ, ν), trouver $(q, \bar{\varpi}, \bar{\nu})$ définissant un observateur d'une loi de commande dépendant de tout l'état ne représente aucune difficulté. Nous pouvons par exemple prendre :

$$\bar{\varpi}(x, \vartheta) \; = \; \phi(x) \; + \; \vartheta \; , \tag{2.84}$$

et choisir $\bar{\nu}$ telle que l'origine est asymptotiquement stable pour le système,

$$\dot{\vartheta} \; = \; \bar{\nu}(\vartheta, x) \; . \tag{2.85}$$

En effet, le choix,

$$\bar{\nu}(\vartheta, x) \; = \; -\vartheta \; , \tag{2.86}$$

donne un observateur de la loi de commande ϕ dépendant de tout l'état, la fonction $\bar{\mathcal{W}}$ associée est alors :

$$\bar{\mathcal{W}}(x, \vartheta) \; = \; \vartheta^T \vartheta \; . \tag{2.87}$$

Elle satisfait (2.81) et (2.82) avec $\mathcal{A}_\vartheta \; = \; \mathbb{R}^q$.

2) Recherche de coordonnées où l'observateur de la loi de commande ne dépend que de la mesure

Le système (1.1) bouclé par l'observateur de la loi de commande ϕ noté $(q, \bar{\varpi}, \bar{\nu})$ définit un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} \; = \; \bar{\nu}(x, \vartheta) \\ \dot{x} \; = \; f(x, \bar{\varpi}(x, \vartheta)) \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} u \; = \; \bar{\varpi}(x, \vartheta) \\ y \; = \; h(x) \end{cases} \tag{2.88}$$

où, u et y sont les mesures. Nous aurons un observateur de commande ne dépendant que de la mesure si il existe un difféomorphisme de la forme $(x, \vartheta) \to (x, w) = (x, \zeta(\vartheta, x))$ tel que, dans les nouvelles coordonnées (x, w), le système (2.88) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{w} &= \nu(w, y) \\ \dot{x} &= f(x, \varpi(w, y)) \end{cases} , \qquad \begin{cases} u &= \varpi(w, y) \\ y &= h(x) \end{cases} \tag{2.89}$$

Un tel difféomorphisme n'existe pas en général. Ce n'est que par un choix approprié du triplet $(q, \bar{\varpi}, \bar{\nu})$ dans le point précédent que l'on peut espérer l'obtenir.

Cas des systèmes linéaires

Il est possible de retrouver les résultats classiques de stabilisation par bouclage de sortie dans le cas des systèmes linéaires en suivant l'approche ci-dessus. Ainsi, nous prenons $\mathcal{I}_x = \mathbb{R}^n$ (cas global) et supposons le système (1.1) de la forme :

$$\dot{x} \;=\; Fx + Gu \quad , \qquad y \;=\; Hx \;, \tag{2.90}$$

avec F, G et H des matrices. Nous supposons le système stabilisable avec un bouclage d'état stabilisant linéaire de la forme :

$$u \;=\; \phi\, x \;, \tag{2.91}$$

où ϕ est une matrice. Le système bouclé avec cette commande étant linéaire nous avons nécessairement l'ISS-Stabilisabilité.

1) Observateur de la loi de commande ϕ dépendant de tout l'état

En suivant la démarche exposée précédemment nous pouvons introduire un observateur de la commande ϕ dépendant de l'état tout entier :

$$\bar{\varpi}(x, \vartheta) \;=\; \phi\, x + \bar{\varpi}_\vartheta\, \vartheta \quad , \qquad \dot{\vartheta} \;=\; \bar{\nu}\, \vartheta \;. \tag{2.92}$$

où $\bar{\nu}$ et $\bar{\varpi}_\vartheta$ sont des matrices. Si nous prenons la matrice $\bar{\nu}$ comme étant une matrice de Hurwitz, le triplet $(q, \bar{\varpi}, \bar{\nu})$ définira un observateur de commande (dépendant de tout l'état). En effet, en prenant :

$$\bar{\mathcal{W}}(x, \vartheta) \;=\; \vartheta^T P \vartheta \;, \tag{2.93}$$

où P est une matrice solution de l'équation :

$$\bar{\nu}^T P \;+\; P\bar{\nu} \;=\; -I \tag{2.94}$$

nous obtenons le long des trajectoires du système (2.90) avec la loi de commande (2.92) :

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathcal{W}}(x, \vartheta) \;=\; -\bar{\vartheta}^T \bar{\vartheta} \;. \tag{2.95}$$

Ainsi (2.81) est trivialement satisfaite. De même, $\bar{\mathcal{W}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} |\bar{\varpi}(x, \vartheta) - \phi\, x| \;&=\; |\bar{\varpi}_\vartheta\, \vartheta| \;, \\ &\leq\; |P|^{\frac{1}{2}} |\bar{\varpi}_\vartheta|\, \bar{\mathcal{W}}(x, w)^{\frac{1}{2}} \;, \end{aligned} \tag{2.96}$$

et donc (2.82) est elle aussi satisfaite.

Les degrés de liberté de cet observateur de commande sont donc $\bar{\nu}$ et $\bar{\varpi}_\vartheta$.

2) Recherche de coordonnées où l'observateur de la loi de commande ne dépend que de la mesure

L'objectif est maintenant de choisir les deux matrices $\bar{\nu}$ et $\bar{\varpi}_\vartheta$ de façon à ce qu'il existe un changement de coordonnée $\vartheta \to w = \zeta(\vartheta, x)$ de la forme (2.89). Le système étant linéaire, nous prenons ζ linéaire :

$$w \;=\; \zeta(\vartheta, x) \;=\; \vartheta \,+\, \zeta_x\, x \tag{2.97}$$

où ζ_x est une matrice. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; Fx \,+\, Gu \\ \dot{w} \;=\; \bar{\nu}(w - \zeta_x x) \,+\, \zeta_x(Fx \,+\, Gu) \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} y \;=\; Hx \\ u \;=\; (\phi - \bar{\varpi}_\vartheta \zeta_x)\, x \,+\, \bar{\varpi}_\vartheta\, w \end{cases} \tag{2.98}$$

Pour que le système (2.90) avec la loi de commande (2.92) se transforme en un système de la forme (2.89), la matrice ζ_x doit satisfaire :

$$\begin{aligned} \phi \,-\, \bar{\varpi}_\vartheta\, \zeta_x \;&=\; K_1\, H \;, \\ \zeta_x\, F \,-\, \bar{\nu}\, \zeta_x \;&=\; K_2\, H \;. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Si le système linéaire (2.90) est détectable un quadruplet $(\zeta_x, \bar{\vartheta}, K_1, K_2)$ existe et il suffit de prendre :

$$\zeta_x \;=\; I \quad , \qquad \bar{\nu} \;=\; F \,-\, K_2 H \quad , \qquad \bar{\varpi}_\vartheta \;=\; \phi \;. \tag{2.100}$$

Le bouclage de sortie est alors le classique observateur-contrôleur :

$$u \;=\; \phi\, w \quad , \qquad \dot{w} \;=\; F\, w \,+\, G\, u \,+ K_2(y \,-\, H\, w) \tag{2.101}$$

Ainsi nous retrouvons le résultat bien connu de conception d'un bouclage de sortie basé sur des hypothèses de stabilisabilité et de détectabilité.

Une idée étudiée pour obtenir le difféomorphisme

Dans le cas, non-linéaire la recherche d'un difféomorphisme s'avère être d'une grande difficulté.

Cependant, les travaux introduits par Delaleau et Respondek dans [21] nous permettent d'énoncer des conditions suffisantes permettant d'obtenir l'existence du difféomorphisme ζ transformant le système (2.88) en (2.89). Nous nous plaçons dans le cas global où $\mathcal{A}_x$ est $\mathbb{R}^n$ et où $\mathcal{A}_w \;=\; \mathcal{A}_\vartheta \;=\; \mathbb{R}^q$.

Supposons que l'observateur de la loi de commande dépendant de l'état $(q, \bar{\nu}, \bar{\varpi})$ que nous avons trouvé est tel que nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(x, \vartheta) \;&=\; \breve{\nu}(y, \ldots, y^{(\ell)}, \vartheta) \\ \bar{\varpi}(x, \vartheta) \;&=\; \breve{\varpi}(y, \ldots, y^{(\ell)}, \vartheta) \end{aligned} \tag{2.102}$$

où ℓ est un entier positif, et $y^{(i)}$ dénote la dérivée de Lie d'ordre i de la mesure $h(x)$ le long des solutions du système (2.88).

Nous considérons alors le système Entrée / Sortie sous la forme généralisée suivante :

$$\dot{\vartheta} \;=\; \breve{\nu}(y,\ldots,y^{(\ell)},\vartheta) \quad , \qquad u \;=\; \breve{\varpi}(y,\ldots,y^{(\ell)},\vartheta) \;, \tag{2.103}$$

où y est considérée comme l'entrée du système et u la sortie.

Ce système Entrée / Sortie est en boucle ouverte. Il satisfait que la composante en ϑ d'une solution du système (2.88) est aussi solution du système (2.103) en prenant y délivrés par (2.88) en entrée de (2.103). Par contre l'inverse est faux.

Nous cherchons maintenant un difféomorphisme $\vartheta \;\rightarrow\; w = \zeta(\vartheta, y, \dot{y}, \ldots, y^{(\ell)})$ tel que le système (2.103) devient dans les coordonnées w :

$$\dot{w} \;=\; \nu(w,y) \quad , \qquad u \;=\; \varpi(w,y) \;. \tag{2.104}$$

Ce problème a fait l'objet de nombreuses recherches dans la littérature, les plus abouties sont les travaux de Delaleau et Respondek, dans [21] (voir aussi [23, 84]) où les auteurs ont énoncé des conditions nécessaires et suffisantes nous permettant de trouver un tel difféomorphisme. Ces conditions sont des conditions géométriques. Nous introduisons $\bar{\mathfrak{L}}$, l'opérateur différentiel suivant :

$$\bar{\mathfrak{L}} \;=\; \sum_{i=1}^{q} \breve{\nu}_i \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \;+\; \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\ell} y_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(j)}} \;, \tag{2.105}$$

où $\breve{\nu}_i$ correspond à la $i$ème composante de $\breve{\nu}$. Le théorème est le suivant :

Théorème 3 ([21]) *Il existe un difféomorphisme global transformant le système (2.103) en un système de la forme (2.104) si et seulement si les champs*

$$\left\{ ad_{\bar{\mathfrak{L}}}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i^{(\ell)}} \quad , \qquad 0 \;\leq\; k \;\leq\; \ell \;,\; 0 \;\leq\; i \;\leq\; p \right\} \;, \tag{2.106}$$

sont complets,

$$\left[ad_{\bar{\mathfrak{L}}}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i^{(\ell)}}, ad_{\bar{\mathfrak{L}}}^{l} \frac{\partial}{\partial y_j^{(\ell)}} \right] \;=\; 0 \quad , \qquad \begin{cases} 0 \;\leq\; k,l \;\leq\; \ell \\ 0 \;\leq\; i,j \;\leq\; p \end{cases} \;, \tag{2.107}$$

et enfin,

$$L_{ad_{\bar{\mathfrak{L}}}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i^{(\ell)}}} \breve{\varpi} \;=\; 0 \quad , \qquad \begin{cases} 0 \;\leq\; k \;\leq\; \ell - 1 \\ 0 \;\leq\; i \;\leq\; p \end{cases} \;, \tag{2.108}$$

pour tout $(\vartheta, y, \dot{y}, \ldots, y^{(\ell)})$ *dans* $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^\ell$.

Les hypothèses de ce théorème semblent difficilement réalisables dans le cas où ℓ est grand car celui-ci fait appel aux conditions d'involutivité. Ce contexte généralise les résultats obtenus par Freedman et Willems dans [23], où les auteurs s'étaient restreints au cas où $\ell = 1$, l'équation (2.103) est alors :

$$\dot{\vartheta} \;=\; \breve{\nu}(\vartheta, y, \dot{y}) \quad , \qquad u \;=\; \vartheta \;. \tag{2.109}$$

Dans ce cas plus simple la condition nécessaire et suffisante est :

Proposition 2 ([23]) *Il existe un difféomorphisme global transformant le système (2.109) en un système de la forme (2.104) si et seulement si :*

- *La fonction* $\breve{\nu}$ *est linéaire en* $\dot{y}$*, i.e. nous avons la décomposition :*

$$\breve{\nu}(\vartheta, y, \dot{y}) \;=\; \breve{\nu}_0(\vartheta, y) \;+\; \breve{\nu}_1(\vartheta, y)\dot{y} \;, \tag{2.110}$$

- *Les champs vectoriels définis par les colonnes de la fonction* $\breve{\nu}_1$ *commutent.*

Exemple non-linéaire

Dans cet exemple nous exhibons les difficultés rencontrées pour parvenir à exploiter l'approche par difféomorphisme. Considérons le système suivant déjà étudié par Mazenc, Praly et Dayawansa dans [61] :

$$\begin{cases} \dot{y} &= x \\ \dot{x} &= x^2 + u \end{cases} \tag{2.111}$$

Dans [61], il a été démontré qu'il existe un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine de ce système. En s'inspirant de leur démarche, nous réécrivons le système dans les coordonnées $z = x\exp(-y)$ et y :

$$\begin{cases} \dot{y} &= z\,\exp(y)\ , \\ \dot{z} &= u\,\exp(-y) \end{cases} \tag{2.112}$$

Nous pouvons introduire la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{U}(x,z) \;=\; \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\,(z+y)^2\ . \tag{2.113}$$

En prenant :

$$\phi(z,y) \;=\; -2\,(z+y)\exp(2y)\ , \tag{2.114}$$

nous obtenons le long des solutions pour $u = \phi(z,y)$:

$$\dot{\widehat{\mathcal{U}(x,z)}} \;=\; -y^2\,\exp(y) - (z+y)^2\exp(y)\ , \tag{2.115}$$

Considérons maintenant un observateur de la loi de commande ϕ dépendant de l'état non mesuré z de la forme :

$$\dot{\vartheta} \;=\; \bar{\nu}(\vartheta,z,y) \quad , \qquad u = \vartheta\ , \tag{2.116}$$

où ϑ est dans $\mathbb{R}$. Il doit être tel que le long du système bouclé :

$$\dot{\widehat{(\vartheta - \phi(z,y))^2}} \;<\; 0 \qquad , \quad \forall\,(\vartheta,z,y)\ . \tag{2.117}$$

Nous pouvons montrer qu'il n'existe pas de difféomorphisme tel que cet observateur conduise à un bouclage de sortie dynamique, i.e. transformant le système (2.116) en un système de la forme (2.104). En effet, commençons par écrire l'équivalent de l'équation (2.102). D'après l'expression de z en fonction de $\dot{y}$ donnée par (2.112), nous pouvons réécrire (2.116) sous la forme :

$$\bar{\nu}(\vartheta,z,y) \;=\; \breve{\nu}(\vartheta,\dot{y},y) \;=\; \bar{\nu}(\vartheta,\dot{y}\exp(-y),y) \tag{2.118}$$

Dans ce cas $\ell = 1$. La Proposition 2, nous indique que, si le difféomorphisme existe, alors nécessairement $\breve{\nu}$ doit être linéaire en $\dot{y}$, ou de façon équivalente que $\bar{\nu}$ doit être linéaire en z. Mais par ailleurs, (2.116) doit être un observateur de la commande $\phi(z,y)$ donnée en (2.114). En d'autre terme la fonction :

$$\ell(\vartheta,z,y) \;=\; \dot{\widehat{\vartheta - \phi(z,y)}} \tag{2.119}$$

doit être de signe opposé à $\vartheta - \phi(z,y)$ pour assurer la convergence de cette erreur vers 0. Nous allons démontrer qu'il est impossible que $\bar{\nu}$ soit linéaire en z et que ℓ soit de signe opposé à $\vartheta - \phi(z,y)$ pour tout (ϑ, z, y). Nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\vartheta,z,y) &= \dot{\vartheta} \ , \\ &= \ell(\vartheta,z,y) + \dot{\overbrace{\phi(z,y)}} \ , \\ &= \ell(\vartheta,z,y) - 2\,\vartheta\exp(y) - 2(2z^2 + 2zy + z)\exp(3y) \end{aligned} \tag{2.120}$$

Si $\bar{\nu}$ est linéaire en z, nous avons alors :

$$\frac{\partial^2 \bar{\nu}}{\partial z^2}(\vartheta,z,y) = 0 \qquad , \quad \forall\,(\vartheta,z,y)\ . \tag{2.121}$$

Avec (2.120), ceci donne l'équation aux dérivée partielles :

$$8\exp(3y) + \frac{\partial^2 \ell}{\partial z^2}(\vartheta,z,y) = 0 \tag{2.122}$$

Les solutions de cette équation aux dérivées partielles sont de la forme :

$$\ell(\vartheta,z,y) = -4\exp(3y)z^2 + F_1(\vartheta,y)z + F_2(\vartheta,y) \tag{2.123}$$

où, F_1 et F_2 sont des fonctions quelconques. Mais alors, pour (ϑ, y) fixé, avec (2.114), nous observons que $\vartheta - \phi(z,y)$ est du même signe que z quand z est grand. Mais dans les mêmes circonstances (2.123) nous indique que ℓ est négatif.

Cet exemple met en évidence les difficultés liées à cette méthode qui n'a pour l'heure pas abouti à beaucoup de résultats, mais qui pourtant qui est très attractive conceptuellement.

2.2.4 Extension au cas iISS

En s'inspirant des travaux de Arcak et Kokotovic dans [11], nous allons maintenant introduire un contexte légèrement différent de celui de la domination ISS présentée précédemment. La caractéristique est maintenant que les erreurs de commande sont supposées intégrables (dans l'espace L^1) sur le temps d'existence des solutions.

Le contexte est le suivant :

Hypothèse 5 [Stabilisabilité ρ_0-ISS] :

Étant donnée ρ_0 une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$, nous supposons l'existence d'un bouclage stabilisant $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui est ρ_0-ISS stabilisant sur $\mathcal{A}_x$ inclus dans $\mathbb{R}^n$ qui contient $\mathcal{I}_x$. Précisément nous supposons l'existence de ϕ, d'un ouvert $\mathcal{A}_x$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{I}_x$ et d'une fonction $\mathcal{U} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ définie positive, propre et C^1, et α une fonction continue définie positive telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\, f(x, \phi(x) + e) \;\leq\; -\alpha(x) \;+\; \rho_0(|e|) \qquad \forall (x,e) \in \mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^p \;. \tag{2.124}$$

Mise à part qu'ici ρ_0 est imposée à priori, l'unique différence avec la ISS-Stabilisabilité, de l'hypothèse 3 est que la fonction α n'est pas nécessairement propre.

Bien que très proche dans la forme ces deux propriétés sont différentes. La propriété de ISS-Stabilisabilité, nous indique que si l'erreur est bornée (i.e. dans L^∞) alors les solutions du système sont bornées. La seconde indique que cette bornitude a lieu si $\rho_0(|e|)$ évaluée le long des solutions est dans L^1. Pour une autre comparaison de ces deux propriétés, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.2.2.

Pour pouvoir tirer profit de l'inégalité (2.124), nous devons revoir l'hypothèse de détectabilité pour que celle-ci garantisse que le bouclage de sortie dynamique rend L^1 le signal $\rho_0(|e|)$:

Hypothèse 6 [ρ_0-Détectabilité] :

Il existe un ouvert $\mathcal{A}_w$ de $\mathbb{R}^q$, deux fonctions localement Lipschitziennes $\varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, et $\nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, une fonction $\mathcal{W} : \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}_+$, une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$, $\rho_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, telle que nous avons pour tout (x, w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$:

$$D^+\mathcal{W}(x,w) \begin{pmatrix} f(x, \varpi(h(x), w)) \\ \nu(h(x), w) \end{pmatrix} \;<\; -\rho_0(|\phi(x) \;-\; \varpi(h(x), w)|) \;, \tag{2.125}$$

où D^+ dénote la dérivée à gauche de Dini, et,

$$\mathcal{W}(x,w) \;=\; 0 \quad , \qquad \forall\, (x,w) \;\in\; \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;:\; \phi(x) \;-\; \varpi(y,w) \;=\; 0 \;\; . \tag{2.126}$$

Enfin, pour tout réel positif W_0 et pour tout compact C dans $\mathcal{A}_x$ l'ensemble :

$$\{(x,w) \;\in\; \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{W}(x,w) \;\leq\; W_0 \text{ et } x \;\in\; C\} \tag{2.127}$$

est un compact.

A l'inverse de ce qui était imposé par l'inégalité (2.37) dans l'hypothèse 4, nous n'im-

posons pas ici que, si $\mathcal{W}$ est bornée, alors $\phi(x) - \varpi(y,w)$ (donc l'erreur de commande) est borné. Cette nouvelle hypothèse garantit par contre que $\rho_0(|\phi(x) - \varpi(y,w)|)$ est intégrable sur le temps d'existence des solutions dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$.

De plus, il nous suffit d'écrire (2.125) avec une dérivée de Dini plutôt qu'une différentiation classique. Ceci nous autorise en effet à considérer des fonctions $\mathcal{W}$ associées à l'observateur qui ne sont pas C^1.

Ces deux nouvelles hypothèses sont suffisantes pour pouvoir résoudre notre problème de bouclage de sortie dynamique. En effet, nous avons :

Théorème 4 (Erreur de commande et domination iISS) *Étant donné un fermé $\mathcal{I}_x$ dans $\mathbb{R}^n$, si il existe ρ_0 une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ telle que ϕ est ρ_0-ISS Stabilisant sur un ouvert $\mathcal{A}_x$ contenant $\mathcal{I}_x$ (hypothèse 5) et s'il existe un triplet (q, ϖ, ν) tel que le système (1.1) satisfait l'hypothèse 6 de ρ_0-Détectabilité sur $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$, alors le système :*

$$u \;=\; \varpi(y,w) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; \nu(y,w) \;, \tag{2.128}$$

définit un bouclage de sortie dynamique tel que $\{0\} \times \mathcal{M}_w$ est uniformément et asymptotiquement stable pour le système en boucle fermé de (1.1) et (2.128) et son bassin d'attraction est $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$.

Là encore la preuve de ce Théorème est une trivialité. Ce qui nous intéresse ici est la mise en évidence de deux étapes de synthèse :

1. Trouver un bouclage donnant la propriété de ρ_0-ISS
2. Puis trouver un observateur de ce bouclage donnant la ρ_0-Détectabilité.

Notons qu'ici, il est encore plus évident que les deux étapes sont couplées puisque les deux impliquent la fonction ρ_0.

Preuve : Considérons la fonction :

$$\mathcal{V}(x,w) \;=\; \mathcal{U}(x) \;+\; \mathcal{W}(x,w) \;. \tag{2.129}$$

Pour tout V_0, réel strictement positif, nous avons :

$$\begin{aligned}\{(x,w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{V}(x,w) \;\leq\; V_0\} \;\subseteq\; \{(x,w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{W}(x,w) \;\leq\; V_0\} \\ \cap\, \{x \in \mathcal{A}_x \;:\; \mathcal{U}(x,w) \;\leq\; V_0\} \;.\end{aligned} \tag{2.130}$$

Du fait que la fonction $\mathcal{U}$ est propre en x dans $\mathcal{A}_x$, pour tout V_0 dans $\mathbb{R}_+$, l'ensemble $\{x \in \mathcal{A}_x \;:\; \mathcal{U}(x,w) \;\leq\; V_0\}$ est un compact dans $\mathcal{A}_x$. Nous concluons alors en utilisant l'hypothèse 6 que la partie droite de (2.130) est un compact, la partie gauche est ainsi bornée et finalement du fait que $\mathcal{V}$ est une fonction continue, nous en déduisons qu'elle est propre en (x,w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$.

Nous avons de plus en utilisant les hypothèses 6 et 5, pour tout (x,w) dans $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$ tel que $\mathcal{W}(x,w) \;\neq\; 0$:

$$\dot{\overbrace{\mathcal{V}(x,w)}} \;<\; -\alpha(x) \;, \tag{2.131}$$

La fonction α étant définie positive sur $\mathcal{A}_x$, (2.131) implique que la fonction $\dot{\mathcal{V}}$ qui est continue sur $\mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w$ et non positive n'est nulle que sur l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M} \;=\; \{(0,w) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{W}(0,w) \;=\; 0\} \;. \tag{2.132}$$

$\mathcal{M}$ étant l'ensemble où s'annule la fonction $\mathcal{V}$, nous pouvons alors conclure que $\mathcal{M}$ est un compact asymptotiquement stable pour le système composé de (1.1) et (2.128). □

Liens avec les travaux de Arcak et Kokotovic présentées dans [11]

Arcak et Kokotovic ont introduit un ensemble d'hypothèses permettant d'utiliser les observateurs d'état qu'ils ont proposés dans le but de construire un bouclage de sortie. Comme nous allons le voir nous pouvons réinterpréter leur contexte dans le cadre de l'approche résumée dans le Théorème 4.

Changement de commande :

Dans [11], la démarche consiste à utiliser un observateur qui reconstruit l'état en entier. Pour retrouver notre formalisme nous introduisons le changement de commande, v dans $\mathbb{R}^n$:

$$u \;=\; \phi(v) \;, \tag{2.133}$$

où ϕ est le bouclage d'état qui satisfait l'hypothèse de stabilisabilité. La nouvelle commande est alors notée v dans $\mathbb{R}^n$ et le système (1.1) devient :

$$f(x,u) \;=\; f(x,\phi(v)) \;. \tag{2.134}$$

La loi de commande stabilisante est alors :

$$v \;=\; x \;. \tag{2.135}$$

Nous pouvons introduire alors l'erreur de commande :

$$e \;=\; v \,-\, x \;. \tag{2.136}$$

Stabilisabilité ρ_0-ISS :

Dans [11], les auteurs ne considèrent pas explicitement le système iISS-Stabilisable. Leur hypothèse est :
Il existe une fonction continue ϕ, une fonction définie positive, C^1 et propre $\mathcal{U}$ et une fonction ρ_0, de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x,\phi(x)) \;&\leq\; -\mathcal{U}(x) \quad , \qquad \forall\, x \,\in \mathcal{A}_x \;, \\ \Gamma(x,e) \;:=\; \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\,(f(x,\phi(x+e)) - f(x,\phi(x))) \;&\leq\; \rho_0(|e|)\,\mathcal{U}(x) \quad , \qquad \forall\, x \,\in \mathcal{A}_x \;. \end{aligned} \tag{2.137}$$

De plus il existe ϵ et k des réels positifs tels que,

$$\rho_0(s) \;\leq\; k\,s \quad , \qquad \forall\, s \,\in\, [0,\epsilon] \;. \tag{2.138}$$

Cette hypothèse implique la stabilisabilité ρ_0-ISS. En effet, en posant,

$$\mathcal{U}_1(x) \;=\; \ln(1+\mathcal{U}(x)) \;, \tag{2.139}$$

nous obtenons pour tout (x, e) dans $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x}(x)\, f(x, \phi(x+e)) \;&\leq\; -\frac{\mathcal{U}(x)}{1+\mathcal{U}(x)} \;+\; \frac{\Gamma(x,e)}{1+\mathcal{U}(x)} \;, \\ &\leq\; -\frac{\mathcal{U}(x)}{1+\mathcal{U}(x)} \;+\; \rho_0(|e|) \;, \end{aligned} \tag{2.140}$$

Ceci prouve que le système est ρ_0-ISS Stabilisable si x est la loi de commande stabilisante.

ρ_0-Détectabilité

Dans [11], les auteurs introduisent un observateur d'état qui, dans notre contexte est interprété comme un observateur de commande de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x, \phi(v)) \;, \\ \dot{v} \;=\; \nu(y, v) \;. \end{cases} \tag{2.141}$$

En effet, cet observateur est tel que nous avons :

$$\dot{\overline{e^T P e}} \;\leq\; -\lambda\, |e|^2 \;, \tag{2.142}$$

où $e \;=\; v - x$ (voir 2.136), $P \;=\; P^T$ est une matrice définie positive et λ est un réel strictement positif.

Afin d'exhiber une fonction $\mathcal{W}$ démontrant que l'hypothèse de ρ_0-Détectabilité est satisfaite dans ce cas, nous introduisons la fonction $\ell : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\ell(s) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{pour } s = 0 \;, \\ \displaystyle\int_0^s \rho_2\, \frac{\max\left\{k\sqrt{\frac{t}{\rho_1}}, \rho_0\left(\sqrt{\frac{t}{\rho_1}}\right)\right\}}{t}\, dt & \text{pour } s \neq 0 \;, \end{cases} \tag{2.143}$$

où ρ_1 est la valeur propre minimale de P. Avec (2.138), cette fonction est bien définie, continue, et de classe $\mathcal{K}_\infty$. Nous pouvons alors définir la fonction $\mathcal{W}$ comme :

$$\mathcal{W}(e) \;=\; \frac{1}{\lambda}\, \ell(e^T P e) \;. \tag{2.144}$$

Au sens des dérivées de Dini elle satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\mathcal{W}(e)}} \;&\leq\; -\,\rho_2\, \frac{\rho_0\left(\sqrt{\frac{e^T P e}{\rho_1}}\right)}{e^T P e} |e|^2 \;, \\ &\leq\; -\,\rho_0(|e|) \;. \end{aligned} \tag{2.145}$$

2.3 Domination dans le cas général

Dans les paragraphes précédents nous avons vu que la technique de domination consiste à faire compenser par l'observateur de commande, ce que le bouclage d'état stabilisant ne peut pas prendre en compte. Mais pour cela nous avons tout de même demandé que ce bouclage d'état donne plus que la simple stabilisabilité, en requièrant une stabilisabilité ISS ou iISS. Que se passe t-il donc s'il n'y a que la simple stabilisabilité de l'hypothèse 2 ? Cette question fait l'objet de cette section où nous reprenons divers résultats publiés et les mettons en relation dans un contexte unifié.

La première remarque à faire est que la stabilisabilité est une propriété intrinsèquement robuste. Nous allons préciser ceci en introduisant la notion de *marge de stabilité*. Dans ce contexte, selon la démarche de domination, nous allons devoir trouver un observateur de commande tel que les perturbations dues à l'erreur de commande ne dépassent pas cette marge.

2.3.1 Principe général

Marge de stabilité

De l'hypothèse toute simple de stabilisabilité 2, nous déduisons (peut-être après changement de commande) :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x, \phi(x) + e) \leq -\mathcal{U}(x) + \Gamma(x, e) , \tag{2.146}$$

où la fonction Γ est continue en chacun de ces arguments et satisfait :

$$\Gamma(x, 0) = 0 \quad , \qquad \forall\, x \in \mathcal{A}_x . \tag{2.147}$$

Nous introduisons la fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ comme suit :

$$\beta(U, E) = E + \max_{(x,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \mathcal{U}(x) \leq U \,,\, |e| \leq E} |\Gamma(x, e)| . \tag{2.148}$$

Cette fonction est croissante en son premier argument et strictement croissante en son deuxième. Elle satisfait de plus :

$$\forall\, U \in \mathbb{R}_+ \begin{cases} \beta(U, 0) = 0 \\ \lim\limits_{E \to +\infty} \beta(U, E) = +\infty \end{cases} . \tag{2.149}$$

et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \,,\, \mathcal{U}(x) > \beta(\mathcal{U}(x), |e|) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x, \phi(x) + e) < -|e| , \tag{2.150}$$

Nous pouvons alors introduire la marge de stabilité associée à la loi de commande ϕ comme la fonction $\mathcal{M} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\mathcal{M}(U) = \sup_{E \in \mathbb{R}_+ : \beta(U,E) \leq U} E . \tag{2.151}$$

Avec cette fonction ainsi définie et du fait que β est strictement croissante en son deuxième argument, nous avons :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,\ |e| < \mathcal{M}(\mathcal{U}(x)) \ &\Rightarrow\ \beta(\mathcal{U}(x),|e|) < \mathcal{U}(x)\ ,\\ &\Rightarrow\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x,\phi(x)+e) \ \leq\ -\mathcal{U}(x) + \beta(\mathcal{U}(x),|e|) - |e|\ ,\\ &\leq\ -|e|\ .\end{aligned}$$

Nous en déduisons que, si, pour une solution donnée de la boucle fermée, il existe un temps t_0 tel que :

$$|e(t)| \ <\ \mathcal{M}(\mathcal{U}(X(x,t)))\quad ,\qquad \forall\, t \geq t_0\ , \tag{2.152}$$

alors nous aurons décroissance de la fonction de Lyapunov $\mathcal{U}$ et les trajectoires seront bornées. Ainsi, l'objectif que nous pouvons fixer à l'observateur est de reconstruire la loi de commande stabilisante ϕ de façon à ce que l'erreur devienne en temps fini et avant toute explosion inférieure à la marge de stabilité.

Obtenir cette propriété sur le temps d'existence des solutions semble une opération difficile. Dans cette section nous allons reprendre différents résultats publiés qui peuvent être revus selon cette démarche. Nous nous plaçons dans le cas mono entrée, mono sortie.

Observabilité et changement de commande

Reprenons ici la contribution de Teel et Praly présentée dans [91].

Hypothèse 7 [Observabilité Complète et Uniforme] :

Il existe deux entiers n_y et n_u et une fonction suffisamment différentiable η telle que pour toute solution du système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u_0)\\ \dot{u}_0 &= u_2\\ \vdots &= \vdots\\ \dot{u}_{n_u} &= u_{n_u+1}\\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{2.153}$$

nous avons le long des trajectoires :

$$x \ =\ \eta\left(y,\ldots,y^{(n_y)},u_0,\ldots,u_{n_u}\right)\quad ,\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\ , \tag{2.154}$$

où $y^{(i)}$ dénote la dérivée temporelle d'ordre i de $h(x)$.

Par une procédure de backstepping nous pouvons étendre la stabilisabilité pur le système (1.1) que nous supposons sur $\mathbb{R}^n$, (i.e. $\mathcal{A}_x = \mathbb{R}^n$) au système (2.153), ainsi, nous pouvons trouver ϕ_u tel que :

$$u_{n_u+1} \ =\ \phi_u(x,u_0,\ldots,u_{n_u}) \tag{2.155}$$

stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système (2.153).

Dans ce cas,

$$\dot{u}_0 \ =\ u_1\quad ,\qquad \dot{u}_1 \ =\ u_2\quad ,\qquad \ldots\quad \dot{u}_{n_u} \ =\ \phi_u(x,u_0,\ldots,u_{n_u})\ . \tag{2.156}$$

apparaît comme un bouclage d'état dynamique pour le système (1.1). Les variables $(u_i)_{i\leq n_u}$ étant connues, nous pouvons proposer le changement de commande :

$$u_{n_u+1} \;=\; \phi_u(v, u_0, \ldots, u_{n_u}) \;. \tag{2.157}$$

Pour le système étendu (2.153), (2.157), un bouclage d'état stabilisant est :

$$v \;=\; x \;. \tag{2.158}$$

L'objectif est alors de donner une estimation de x de façon à pouvoir implémenter cette loi de commande. Cette estimation devant se faire suffisamment vite pour que la marge de stabilité soit atteinte avant toute explosion des trajectoires.

Observateur

Par dérivations successives de la fonction h le long des solutions de (2.153) nous voyons qu'il existe une fonction φ et un entier $n_u < n_y$ tel que :

$$y^{(n_y+1)} \;=\; \varphi(x, u_0, \ldots, u_{n_u}) \;. \tag{2.159}$$

Suivant la démarche introduite par Khalil et Esfandiari dans [38], nous considérons des observateurs de commande grand-gains de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{y}}_0 & = & \hat{y}_1 \;+\; Ll_0(y-\hat{y}_0) \\ & \vdots & \\ \dot{\hat{y}}_{n_y} & = & L^{n_y+1} l_{n_y}(y-\hat{y}_0) \;+\; \varphi(\hat{x}, u, \ldots, u_{n_u}) \end{array}\right. \tag{2.160}$$

Dans ce cas, l'estimation de la commande (2.158) est donnée par :

$$\hat{x} \;=\; \mathrm{sat}_M(\eta(\hat{y}, \ldots, \hat{y}_{n_y}, u_0, \ldots, u_{n_u})) \;. \tag{2.161}$$

où,

$$\mathrm{sat}_M(s) \;=\; \min\left\{1, \frac{M}{|s|}\right\} s \;. \tag{2.162}$$

Cet observateur est un observateur grand-gain tel qu'il a été introduit dans [28]. Pour fonctionner le gain L doit être sélectionné en fonction du gain incrémental (constante de Lipschitz locale) des fonctions intervenant dans les dynamiques du système. Typiquement ce gain incrémental tend vers l'infini lorsque l'état tend vers l'infini. Le choix de L est donc délicat.

Le problème à résoudre est donc de sélectionner les deux paramètres M et L de façon à obtenir une convergence de l'erreur suffisamment rapide.

2.3.2 Cas Semi-Global

Une manière de simplifier le problème que nous venons d'énoncer est de se placer dans un contexte tel que ce gain incrémental soit borné. C'est le cas par exemple si nous pouvons nous limiter à le considérer sur un compact. Pour permettre une telle limitation Teel et Praly dans [91], se sont restreints au cas où $\mathcal{I}_x$, l'ensemble des conditions initiales de x, est

un compact. Dans ce cas, en choisissant $(u_0, \ldots, u_{n_u})$ dans un compact $\mathcal{I}_u$, pour tout compact $\mathcal{C}_{u,x}$ contenant strictement $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_u$ les fonctions définissant la dynamique (2.153) et (2.157) sont bornées. Donc si nous prenons garde à conserver la commande v bornée, il existe un temps T tel que toute solution issue de $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_u$ est dans $\mathcal{C}_{u,x}$, pour tout t dans $[0, T)$.

Si le compact $\mathcal{C}_{u,x}$ est choisi tel qu'il est invariant si la marge de stabilité est satisfaite, il ne reste plus qu'à déterminer M et L de façon à ce que pendant ce laps de temps, $[0, T)$ l'erreur devienne, puis reste, inférieure à la marge de stabilité.

Il est effectivement démontré dans [91] le résultat suivant :

Théorème 5 ([91], Erreur de commande domination semi-globale) *Si $\mathcal{I}_x$ est borné dans $\mathbb{R}^n$, si le système est uniformément et complètement observable et si le système est stabilisable alors il existe L^* et M^* et deux compact $\mathcal{I}_w$ de $\mathbb{R}^{n_y}$ et $\mathcal{I}_u$ de $\mathbb{R}^{n_u}$ tel que l'origine du système :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u_0) \\ \dot{u}_0 &= u_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \dot{u}_{n_u} &= \phi_u(\hat{x}, u_0, \ldots, u_{n_u}) \\ \dot{\hat{y}}_0 &= \hat{y}_1 + Ll_0(y - \hat{y}_0) \\ \vdots & \\ \dot{\hat{y}}_{n_y} &= L^{n_y+1} l_{n_y}(y - \hat{y}_0) + \varphi(\hat{x}, u, \ldots, u_{n_u})) \end{cases} \tag{2.163}$$

$$\begin{cases} y &= h(x) \\ \hat{x} &= sat_M(\eta(\hat{y}, \ldots, \hat{y}_{n_y}, u_0, \ldots, u_{n_u})) \ . \end{cases}$$

est asymptotiquement stable de bassin d'attraction contenant $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_u \times \mathcal{I}_w$.

2.3.3 Cas Global

Si $\mathcal{I}_x$ n'est pas à priori borné, nous ne pouvons pas trouver ces compacts $\mathcal{I}_u$ et $\mathcal{C}_{x,u}$ tels que $\mathcal{C}_{u,x}$ contient $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_u$. L'intérêt de $\mathcal{C}_{u,x}$ était que nous pouvions connaître à priori des bornes sur toutes les fonctions intervenant dans le problème. N'ayant plus cette connaissance à priori, l'idée est de savoir l'acquérir par l'observation. Dans ce but Praly et Astolfi dans [75] suppose l'existence d'un observateur de la norme de x (voir aussi [12]). Cet observateur est tel qu'il nous donne un majorant de la norme de l'état en temps fini et avant toute explosion du système. Le gain L de l'observateur (2.160) ainsi que M dans (2.161) pourraient alors être calculés à partir de ce majorant. Malheureusement même avec cette possibilité supplémentaire, l'observateur (2.160) ne semble pas avoir les propriétés suffisantes et les auteurs de [12] ont dû introduire un observateur plus complexe pour pouvoir résoudre le problème complètement. Nous renvoyons le lecteur à [12] pour une présentation complète du résultat correspondant. Ici, nous nous contentons de rapporter dans ce qui suit une solution plus simple mais qui n'est que conceptuelle.

Un condition nécessaire à l'existence d'un observateur de la norme de x, telle que supposée dans [12], est l'hypothèse 1 d'observabilité de la non bornitude (voir Angeli et Sontag dans [7]) introduite dans le paragraphe 1.2.2.

Comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe 1.2.2, la non-observabilité de la non bornitude peut être la source d'une impossibilité à construire des bouclages de sortie

dynamiques (voir [61]). Mais comme nous l'avons vu aussi cette hypothèse 1 n'est pas une condition nécessaire à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique.

Par ailleurs pour pouvoir reconstituer la commande $v = x$ après changement de commande, $u = \phi(v)$ à partir de la mesure, nous avons besoin de :

Hypothèse 8 [Distinguabilité] :

Le système est dit distinguable en temps petit depuis la sortie si un temps T et une commande $u_\theta : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ existent tels que, pour tout x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $x_1 \neq x_2$, pour tout s dans $(0,T)$ il existe $t \leq s$:

$$h(X(x_1,t,u_\theta)) \neq h(X(x_2,t,u_\theta)) \ . \tag{2.164}$$

Ces deux hypothèses suffisent pour proposer le schéma suivant (voir [70] pour plus de détails) :

1. Observons tout d'abord que l'hypothèse de distinguabilité implique que pour tout t_θ dans $[0,T)$, si la commande est :
$$u(t) = u_\theta(t) \quad , \qquad \forall\, t \leq t_\theta \ , \tag{2.165}$$
puis autre chose pour $t > t_\theta$, alors la fonction :
$$\mathcal{H} : x \mapsto (t \in [0,t_\theta] \mapsto h(X(x,t,u_\theta))) \tag{2.166}$$
qui associe à x, la fonction de sortie sur l'intervalle $[0,t_\theta]$ est injective. Elle admet donc une inverse à gauche $\mathcal{H}^*$ satisfaisant :
$$\mathcal{H}^*(t \in [0,t_\theta] \mapsto h(X(x,t,u_\theta))) = x \ . \tag{2.167}$$

2. Ensuite grâce à l'hypothèse 1 d'observabilité de la non bornitude, il est possible de connaître un intervalle $[0,t_\theta]$ sur lequel nous sommes sûres que les solutions n'ont pas explosé. En effet, si par exemple nous introduisons :
$$\dot{\tau} = 1 + \gamma_f\left(|h(x)| + |u|\right) \quad , \qquad \tau(0) = 0 \ . \tag{2.168}$$
Cette fonction τ est strictement croissante et l'hypothèse 1 implique que si τ est borné les trajectoires le sont aussi. L'instant t_θ peut donc être le plus petit entre disons 1, $\frac{\tau_\theta}{2}$ et l'instant tel que τ devient supérieur à 1. t_θ est donc un temps d'arrêt, dépendant de la solution.

3. Nous pouvons alors introduire le bouclage instationnaire suivant :
$$u(t) = \begin{cases} u_\theta(t) \quad , & \forall\, t \leq t_\theta \\ \phi(X(\hat{x}, t - t_\theta, \phi(x)) \quad , & \forall\, t > t_\theta \end{cases} \tag{2.169}$$
Ici $\hat{x}$ est donné par :
$$\hat{x} = \mathcal{H}^*(t \in [0,t_\theta] \mapsto h(X(x,t,u_\theta))) \tag{2.170}$$
Le problème est donc résolu dans un contexte sans perturbation puisque l'observateur donne une estimation exacte de la commande stabilisante, i.e. $\hat{x} = X(x,t_\theta,u_\theta)$.

Cette démarche conceptuelle nous donne un bouclage de sortie instationnaire. Nous pouvons imaginer une procédure ressemblant à celle-ci mais qui réitère à chaque pas de temps cette procédure. Cette démarche a d'ailleurs été adoptée par Coron dans [17] dans le cas de la stabilisation locale.

2.4 Approche par élimination de Γ (passivité)

2.4.1 Cas général

Étudions maintenant le cas où au lieu de dominer l'effet perturbateur caractérisé par Γ résultat de l'erreur de commande, nous cherchons à le compenser exactement. Pour préciser un peu l'idée, rappelons que sous l'hypothèse de simple stabilisabilité du système (1.1), (peut-être après changement de commande) nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x,u) \;\leq\; -\alpha(x,e) \;+\; \Gamma(x,e) \;, \tag{2.171}$$

où,

$$\alpha(x,e) \;=\; -\mathcal{U}(x) \quad , \qquad \Gamma(x,e) \;=\; \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)(f(x,\phi(x)+e) \;-\; f(x,\phi(x))) \;, \tag{2.172}$$

et,

$$\Gamma(x,0) \;=\; 0 \quad , \qquad \forall\, x \,\in\, \mathcal{A}_x \;. \tag{2.173}$$

Cette dernière égalité implique, pour peu que Γ soit C^1, l'existence de fonction Γ_1 donnant la factorisation :

$$\Gamma(x,e) \;=\; \Gamma_1(x,e)e \;. \tag{2.174}$$

Nous en déduisons que le système :

$$\dot{x} \;=\; f(x,\phi(x)+e) \quad , \qquad z \;=\; \Gamma_1(x,e) \;, \tag{2.175}$$

est un système passif d'entrée e et de sortie z. Avec cette interprétation, nous voyons que l'idée de compensation peut se traduire comme trouver un bouclage dynamique de sortie tel que le système bouclé puisse être vu comme l'interconnexion du système ci-dessus et d'un système strictement passif d'entrée z et de sortie e.

Satisfaire cet objectif dans un cas général semble une tâche impossible à réaliser, pourtant, nous allons voir qu'il est possible d'aboutir pour une classe de systèmes qui inclut des systèmes dont la dynamique provient d'une formulation variationnelle. Observons aussi que cette façon de présenter l'élimination repose totalement sur la factorisation (2.174) mais toute autre factorisation :

$$\Gamma(x,e) \;=\; \Gamma_1(x,e)\,\Gamma_2(x,e) \;, \tag{2.176}$$

avec $\Gamma_2(x,0) \;=\; 0$ peut être exploitée.

2.4.2 Le bouclage stabilisant dépend de la dérivée de la sortie

Dans cette section nous présentons un cas trivial où l'approche par passivité peut être menée àu bout. Nous ne considérons que les systèmes linéaires en la commande tels qu'il ont été introduits dans (2.75). La stabilisabilité dont nous avons besoin est une notion plus forte que celle introduite en (2.20) :

Hypothèse 9 [P-Stabilisabilité] :

Il existe une fonction $\varphi : h(\mathcal{A}_x) \to \mathbb{R}^m$ et une fonction définie positive, C^1, et propre $\mathcal{U} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\,[f(x) + g(x)\varphi(h(x))] \leq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A}_x \ , \tag{2.177}$$

De plus les solutions qui sont bornées et complètes dans $\mathcal{A}_x$ du système suivant convergent vers l'origine :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\varphi(h(x)) \quad , \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) = 0 \ . \tag{2.178}$$

La stabilisabilité requise par cette hypothèse est très forte, puisque la commande doit être un bouclage statique de sortie. Cependant l'inégalité (2.177) n'étant pas stricte nous demandons seulement que cette loi de commande donne la stabilité mais pas l'attractivité. Pour obtenir l'attractivité il suffit de modifier le bouclage de sortie en le bouclage d'état :

$$u = \phi(x) := \varphi(h(x)) - \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x)\right)^T \ , \tag{2.179}$$

En effet, nous obtenons le long des solutions du système (2.75) avec la loi de commande (2.179) alors :

$$\dot{\overline{\mathcal{U}(x)}} \leq -\left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x)\right|^2 \ , \tag{2.180}$$

Nous concluons alors que les solutions du système sont complètes et bornées dans $\mathcal{A}_x$ et que l'origine est stable. Puis, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle (voir [29, theorem X.1.3]), les trajectoires convergent vers le plus grand invariant contenu dans l'ensemble des x de $\mathcal{A}_x$ satisfaisant :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) = 0 \quad , \qquad \mathcal{U}(x) = U_\infty \ . \tag{2.181}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans [31, Chap.10.7, p.44], nous pouvons montrer que l'hypothèse (2.178), suffit à démontrer que $\phi(x)$ est un bouclage d'état qui stabilise asymptotiquement l'origine du système. En effet, du fait de l'hypothèse (2.178), les solutions qui satisfont (2.181) convergent vers l'origine. La fonction $\mathcal{U}$ s'annulant en l'origine et étant constante le long de ces solutions, nous avons alors $U_\infty = 0$. De la continuité de la fonction $\mathcal{U}$, nous concluons de plus que $\mathcal{U}(x)$ converge vers $U_\infty = 0$ le long des solutions du système (2.75) bouclé avec la loi de commande (2.179). La fonction $\mathcal{U}$ étant définie positive, les solutions du système bouclé convergent vers l'origine et $\phi(x)$ est un bouclage d'état qui stabilise asymptotiquement l'origine du système.

Sous l'hypothèse (9) de P-Stabilisabilité nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)(f(x) + g(x)u) \leq \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x)\underbrace{(u - \varphi(h(x)))}_{e} \tag{2.182}$$

En introduisant l'erreur de commande :

$$e = u - \varphi(h(x)) \ . \tag{2.183}$$

et en posant,

$$\Gamma_1(x,e) \;=\; \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) \;, \tag{2.184}$$

L'équation (2.182) devient :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)(f(x) \,+\, g(x)(u \,+\, \varphi(h(x))) \;\leq\; \Gamma_1(x,e)e \tag{2.185}$$

et le système (1.1) dévient alors un système passif d'entrée e et de sortie Γ_1. D'après le paradigme des systèmes passifs interconnectés, il suffit de mettre un système strictement passif en contre-réaction (entre Γ_1 et e) pour obtenir la stabilité asymptotique de l'ensemble.

Pour nous permettre de construire un bouclage de sortie qui fasse apparaître un système strictement passif d'entrée Γ_1 et de sortie e, nous imposons que cette entrée soit liée à $y \,=\, h(x)$ comme suit :

Hypothèse 10 [P-Détectabilité] :

Il existe des fonctions $\varkappa : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ et $\xi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) \;=\; L_f\varkappa(h(x)) + \xi(h(x)) \tag{2.186}$$

avec,

$$L_g\varkappa(h(x)) \;=\; 0 \;. \tag{2.187}$$

Nous avons le Théorème suivant :

Théorème 6 ([80], Erreur de commande, Élimination, Dérivée de sortie) *Sous les hypothèses de P-Détectabilité et de P-Stabilisabilité le bouclage de sortie dynamique :*

$$u \;=\; w \,-\, x(y) \,+\, \varphi(y) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; -w \,+\, x(y) \,-\, \xi(y) \;. \tag{2.188}$$

rend l'origine asymptotiquement stable pour le système bouclé avec (2.188) de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m$.

Preuve : Considérons le système complet :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x) \,+\, g(x)u \;, \\ \dot{w} \;=\; -w \,+\, x(h(x)) \,-\, \xi(h(x)) \;. \end{cases} \tag{2.189}$$

Observons que nous pouvons toujours modifier $\varkappa$ dans (2.186) et (2.187) pour avoir $\varkappa(0) \,=\, 0$. Introduisons la fonction suivante :

$$\mathcal{W}(x,w) \;=\; \frac{1}{2}\left(w - x(y)\right)^2 \;. \tag{2.190}$$

Nous obtenons le long du système (2.188) :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\mathcal{W}(x,w)}} \;&=\; -\,2\mathcal{W}(x,w) \,-\, \left(\dot{\overline{x(h(x))}} + \xi(y)\right)\,(u - \varphi(y)) \;, \\ &=\; -\,2\mathcal{W}(x,w) \,-\, \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x)}_{\Gamma_1(x,e)}\underbrace{(u \,-\, \varphi(h(x)))}_{e} \;. \end{aligned} \tag{2.191}$$

Ainsi, le système (2.188) est strictement passif.

Considérons la fonction suivante :

$$\mathcal{V}(x,w) \;=\; \mathcal{U}(x) \;+\; \mathcal{W}(x,w)\;. \tag{2.192}$$

Cette fonction est définie positive et propre sur $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m$. En utilisant (2.186), (2.182) et (2.191), la dérivée de $\mathcal{V}$ le long des trajectoires du système (2.189) satisfait :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}(x,w)}} \;\leq\; -2\mathcal{W}(x,w)\;, \tag{2.193}$$

L'origine est donc stable. De plus, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle (voir [29, theorem X.1.3]), nous avons que les trajectoires du système convergent le plus grand ensemble invariant tel que :

$$\mathcal{W}(x,w) \;=\; 0 \quad , \qquad \mathcal{V}(x,w) \;=\; V_\infty\;. \tag{2.194}$$

où V_∞ est un réel positif. En utilisant (2.186), nous concluons que dans cet ensemble nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) \;=\; 0 \quad , \qquad \begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)\varphi(h(x))\;, \\ \dot{w} \;=\; -\,\xi(h(x))\;, \\ w \;=\; \varkappa(h(x))\;. \end{cases} \tag{2.195}$$

De la même façon que dans le cas du bouclage d'état ϕ de (2.179), sous l'hypothèse (2.178), les solutions de (2.195) convergent vers l'origine. La fonction $\mathcal{V}$ s'annulant en l'origine, nous avons alors $V_\infty \;=\; 0$.

De la continuité de la fonction $\mathcal{V}$, nous concluons de plus que $\mathcal{V}(x)$ converge vers $V_\infty \;=\; 0$ le long des solutions du système (2.189). La fonction $\mathcal{V}$ étant définie positive, les solutions convergent vers l'origine et (2.188) est un bouclage de sortie dynamique qui stabilise asymptotiquement le système de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m$. □

Cas des systèmes de Euler-Lagrange (voir [63])

Appliquons la méthode précédente aux systèmes mécaniques qui satisfont les équations d'Euler-Lagrange. Nous considérons un système mécanique avec pour état $x = (y, \dot{y})^\top$, qui satisfait les équations d'Euler-Lagrange lorsqu'il n'y a pas de dissipativité, i.e. nous avons :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(y,\dot{y})}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}(y,\dot{y})}{\partial y} \;=\; u^\top\,, \tag{2.196}$$

où $\mathcal{L}$ est la fonction de Lagrange définie par :

$$\mathcal{L}(y,\dot{y}) \;=\; T(y,\dot{y}) - V(y)\,, \tag{2.197}$$

où V est l'énergie potentielle et T est l'énergie cinétique :

$$T(y,\dot{y}) \;=\; \frac{1}{2}\dot{y}^T\, D(y)\,\dot{y}\;. \tag{2.198}$$

Nous pouvons démontrer que ce système satisfait toutes les hypothèses du Théorème 6.

Pour fonction de Lyapunov nous prenons la fonction d'énergie du système :

$$\mathcal{U}(x) \;=\; T(y,\dot{y}) + V(y)\;. \tag{2.199}$$

Nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\mathcal{U}(x)}} \;=\; \dot{y}^{\top} u\,. \tag{2.200}$$

Donc la condition (2.177) est satisfaite avec $\varphi(y) \;=\; 0$.

De plus,

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) g(x) \;=\; \dot{y}\;, \tag{2.201}$$

Les conditions (2.187) et (2.186) sont donc satisfaites avec $\varkappa(y) \;=\; y$ et $\xi(y) \;=\; 0$.

Enfin, avec (2.196) et (2.198) les solutions du système :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(y,\dot{y})}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}(y,\dot{y})}{\partial y} \;=\; 0 \quad , \qquad \dot{y} \;=\; 0\;. \tag{2.202}$$

satisfont :

$$T(y\,,\dot{y}) \;=\; 0 \quad , \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}(y,\dot{y}) \;=\; 0\;. \tag{2.203}$$

et donc,

$$\dot{y} \;=\; 0 \quad , \qquad T(y\,,\dot{y}) \;=\; 0 \quad , \qquad \frac{\partial V}{\partial y}(y) \;=\; 0\;. \tag{2.204}$$

Elles sont donc des points d'équilibres.

D'après (2.188), un bouclage de sortie stabilisant est donc :

$$u \;=\; w - y \quad , \qquad \dot{w} \;=\; -w + y\;. \tag{2.205}$$

2.4.3 Application à l'Interception Exo-Atmosphérique

Dans cette section nous allons présenter une application de cette méthode de bouclage de sortie. Il s'agit d'un problème d'interception d'une cible non-manœuvrante par un intercepteur en phase de vol exo-atmosphérique. Ces travaux sont issus de [5](ou [6]) et ont été réalisés dans le cadre d'une étude au sein de l'Onera. On se propose de déterminer une loi de commande réalisant l'interception dans le sens où la distance de passage à la cible est minimale et que la cible reste dans la ligne de mire de l'intercepteur.

Dans un premier temps, nous allons présenter les équations qui régissent ce problème et nous formaliserons le problème d'interception. Puis nous présenterons le bouclage de sortie qui en découle. Des résultats numériques sont présentés en Annexe B.1 de ce document.

Le système de l'interception Exo-Atmosphérique

Nous considérons un intercepteur commandé de forme approximativement cylindrique. La correction de trajectoire peut être effectuée par l'utilisation de quatre moteurs de poussée situés à proximité du centre de gravité. Ceux-ci sont orientés perpendiculairement à l'axe de l'intercepteur. L'intercepteur est aussi équipé d'un dispositif propulsif situé à l'arrière. Celui-ci permet de faire tourner l'engin autour de son centre de gravité. Cette poussée est assurée par huit tuyères secondaires perpendiculaires à l'axe du cylindre, et permet ainsi de contrôler les vitesses de rotation de tangage lacet et roulis. Pour la synthèse de la loi de commande, on ne considère aucune limite physique aux commandes, elles seront ensuite testées en simulation avec saturations et temps de retard.

Dans la suite des calculs, nous considérons que la cible n'est pas propulsée. Cependant, nous évaluerons la robustesse de la loi de commande obtenue vis-a-vis de faibles accélérations de la cible en Annexe B.1.

Les coordonnées considérées sont les coordonnées relatives à la position de l'intercepteur. Nous introduisons le trièdre associé à l'intercepteur dénoté $\mathcal{R}_M$ qui est centré en son centre de gravité. L'axe des x est porté par l'axe de symétrie longitudinale de l'engin, les autres axes sont portés suivant les axes de poussée des dispositifs propulsifs.

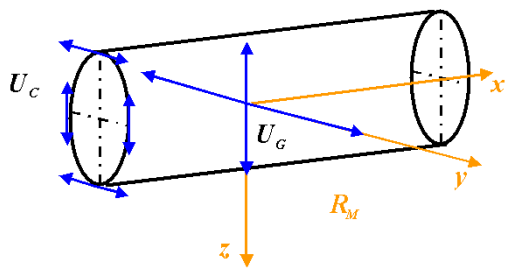

FIG. 2.1 – Intercepteur considéré

L'état du système est composé de :

- $X = (X_x, X_y, X_z)^\top$ dans $\mathbb{R}^3$ dénote les coordonnées de la position relative de la cible dans le trièdre $\mathcal{R}_M$.
- $V = (V_x, V_y, V_z)^\top$ dans $\mathbb{R}^3$ dénote les coordonnées de la vitesse relative de la cible.
- $\Omega = (p, q, r)^\top$ dans $\mathbb{R}^3$ caractérise la vitesse de rotation de l'engin autour de son centre de gravité.

Avec ces données, le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = V + X \wedge \Omega \,, \\ \dot{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_G \end{pmatrix} + V \wedge \Omega \,, \\ \dot{\Omega} = u_C + j(\Omega) \,, \end{cases} \tag{2.206}$$

où $u_G = (u_{Gy}, u_{Gz})^\top$ est la commande réalisée par les moteurs situés près du centre de gravité, et $u_C = (u_{Cp}, u_{Cq}, u_{Cr})^\top$ dénote la commande réalisée par les moteurs situés à l'arrière de l'engin. Enfin, $j(\Omega)$ est une fonction non linéaire traduisant les couplages dues au moment d'inertie.

L'intercepteur est équipé des capteurs suivants :

– Un gyromètre embarqué mesurant les vitesses angulaires de tangage, lacet et roulis :

$$\Omega = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^\top \,, \tag{2.207}$$

– Un autodirecteur infrarouge situé à l'avant de l'engin et lié à ses axes. Il mesure :

$$y = \begin{pmatrix} \frac{X_y}{X_x} & \frac{X_z}{X_x} \end{pmatrix}^\top \,, \tag{2.208}$$

Nous considérons seulement la partie terminale du duel. La cible est ainsi en présentation quasi frontale, et la distance relative diminue. De plus, la formulation d'un problème d'interception n'a de sens que lorsque X_x est positif. Ceci se traduit dans les conditions suivantes :

$$\begin{cases} X_x > 0 \\ |X_x| >> |X_y| + |X_z| \end{cases} \quad \text{et} \quad V_x < 0 \,. \tag{2.209}$$

Formalisation de l'interception

Pour ce problème d'interception, nous choisissons de faire tendre vers zéro une fonction de l'état qui correspond à

1. un critère d'interception défini par le produit vectoriel du vecteur de la vitesse relative et du vecteur Intercepteur / cible.
$$X \wedge V \,, \tag{2.210}$$
2. le souhait que la cible reste dans la ligne de mire de l'engin. En d'autres termes, nous voulons que la projection de la position de la cible reste proche de l'axe des x . Il faut donc réguler X_y et X_z autour de l'origine.
3. et enfin, le souhait que les vitesses de rotation de l'engin restent faibles.

La fonction que nous considérons est :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}\left((X \wedge V)^\top (X \wedge V) \; + \; X_x(X_y^2 \; + \; X_z^2) + X_x^3 \Omega^\top \Omega\right) \,. \tag{2.211}$$

Nous supposons que X_x est toujours strictement positif (la cible est toujours devant l'intercepteur). Ainsi, cette fonction $\mathcal{C}$ est positive et propre en $X \wedge V$, X_y, X_z, Ω. Enfin, nous avons :

$$\mathcal{C} = 0 \iff X \wedge V = 0 \,,\; X_y = 0 \,,\; X_z = 0 \,,\; \Omega = 0 \,. \tag{2.212}$$

En conséquence, le problème est maintenant de faire tendre $\mathcal{C}$ vers zéro. Ceci va être fait, en utilisant les outils développés dans la section 2.4.2.

Remarque 4 :

1. Cette fonction $\mathcal{C}$ semble difficile à interpréter physiquement. Il serait hasardeux de lui donner une signification énergétique.
2. Le terme en X_x^3 dans (2.211) est introduit pour homogénéiser les diverses contributions remarquant que X_x^3 apparaît lorsque nous dérivons $(X \wedge V)^\top (X \wedge V)$.
3. Dans l'étude théorique que nous avons développée dans le paragraphe (2.4.2) l'objectif était de faire tendre la fonction $\mathcal{U}$ vers 0. Cette fonction étant une fonction de Lyapunov, i.e. une fonction C^1, définie positive et radialement non bornée. Cela impliquait une stabilisation de l'origine en x. Dans l'application présente, la fonction $\mathcal{C}$ n'est pas une fonction de Lyapunov. Nous ne retenons donc de l'étude précédente uniquement la convergence vers 0 d'une fonction positive. Pour appliquer la méthode nous devrons alors supposer que les trajectoire sont bornées, ce qui dans le cas présent s'avère être une hypothèse réaliste.

Le bouclage de sortie

En dérivant $\mathcal{C}$ le long des trajectoires du système (2.206), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}} &= X_x^3 \dot{y}^\top (m(y)u_G + y) \\ &\quad + X_x^3 \Omega^\top (l(y)m(y)u_G + n(y)y^\top y + u_C + j(\Omega)) \\ &\quad + \frac{3}{2} V_x X_x^2 (y^\top y + \Omega^\top \Omega)\,. \end{aligned} \tag{2.213}$$

où $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 2}$, $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, et $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont définis comme :

$$\begin{aligned} l(y) &= \begin{pmatrix} -y_z & y_y \\ -y_y y_z & -1 - y_z^2 \\ 1 + y_y^2 & y_y y_z \end{pmatrix} ,m(y) = \begin{pmatrix} 1 + y_z^2 & -y_y y_z \\ y_y y_z & 1 + y_y^2 \end{pmatrix} , \\ n(y) &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -y_z \\ y_y \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2.214}$$

Ainsi, en suivant la démarche de la section 2.4.2, nous introduisons la fonction $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} = \mathcal{C} + \frac{X_x^3}{2}(w - y)^\top (w - y)\,. \tag{2.215}$$

En dérivant $\mathcal{W}$ le long des trajectoires du système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &= X_x^3 \dot{y}^\top (m(y)u_G + 2y - w) \\ &\quad + X_x^3 \dot{w}^\top (w - y) \\ &\quad + X_x^3 \Omega^\top (u_C + j(\Omega) + n(y)k(\Omega, y, w) + l(y)m(y)u_G) \\ &\quad + \frac{3}{2} V_x X_x^2 k(\Omega, y, w)\,, \end{aligned} \tag{2.216}$$

où k est la fonction définie positive par :

$$k(\Omega, y, w) \;=\; y^\top y + \Omega^\top \Omega + (w-y)^\top (w-y) \;, \tag{2.217}$$

et rappelons-le seuls y et Ω sont mesurés et V_x est négatif.

La matrice $m(y)$ est inversible, ce qui permet d'éliminer les termes en $\dot{y}$ en choisissant :

$$u_G \;=\; m(y)^{-1}(w-2y) \;. \tag{2.218}$$

En prenant :

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -w + y \;, \\ u_C &= -\Omega - j(\Omega) - n(y)k(\Omega, y, w) - l(y)m(y)u_G \;. \end{aligned} \tag{2.219}$$

la dérivée temporelle de $\mathcal{W}$ devient :

$$\dot{\mathcal{W}} \;=\; X_x^3(-|w-y|^2 - |\Omega|^2) + \frac{3}{2}V_x X_x^2 k(\Omega, y, w) \;. \tag{2.220}$$

Puisque V_x est non positif par hypothèse (2.209), $\dot{\mathcal{W}}$ est négatif. $\mathcal{W}$ décroît donc le long des solutions. Nous ne pouvons conclure plus pour le problème d'interception car le duel se fait en temps fini, s'arrêtant par hypothèse lorsque X_x devient nul. Néanmoins, nous avons observé que la convergence obtenue est suffisamment rapide pour que le critère $\mathcal{C}$ soit proche de zéro au moment de l'arrêt du duel. Une méthode permettant de transformer la convergence asymptotique en convergence en temps fini est de considérer un changement de temps qui prenne en considération la distance à la cible. Cette donnée n'étant pas mesurée par les capteurs nous ne pouvons l'appliquer directement à ce problème.

Des résultats de cette méthode sont présentés en annexe (B.1).

2.4.4 Extension au cas d'une intégrale de la sortie

Prieur et Halleux ont proposé dans [79] une méthode permettant de réguler un fluide dans un réservoir par bouclage de sortie. Leur approche peut être interprétée dans notre formalisme par une approche élimination où Γ_1 n'est pas liée à une dérivée de la mesure y (voir l'hypothèse 10) mais à une intégrale (voir aussi [80]). Illustrons l'idée en introduisant les hypothèses suivantes :

Hypothèse 11 [I-Détectabilité] :

Il existe des fonctions $\varkappa : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ et $\xi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) \;=\; k(x) \;+\; \varkappa(h(x)) \;, \tag{2.221}$$

où,

$$L_f k(x) \;=\; \xi(h(x)) \quad \text{et} \qquad L_g k(x) \;=\; 0 \;, \tag{2.222}$$

Un façon imprécise mais plus lisible d'écrire cette hypothèse est :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) \;=\; \int \xi(y(t))dt + \chi(y) \;. \tag{2.223}$$

Hypothèse 12 [I-Stabilisabilité] :

Il existe une fonction $\varphi : h(\mathcal{A}_x) \to \mathbb{R}^m$ et une fonction définie positive, C^1, et propre $\mathcal{U} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\left[f(x) \;+\; g(x)\varphi(y)\right] \;\leq\; 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A}_x \;, \tag{2.224}$$

et, pour toute constante K dans $\mathbb{R}$, les solutions bornées et complètes dans $\mathcal{A}_x$ du système suivant convergent vers l'origine :

$$\dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)\varphi(y) \quad , \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x) \;=\; K \;. \tag{2.225}$$

Nous avons le Théorème :

Théorème 7 ([80], Erreur de commande, Élimination, Intégrale de sortie) *Sous les hypothèses de I-Détectabilité et de I-Stabilisabilité, le bouclage de sortie dynamique :*

$$u \;=\; -w \;-\; \varkappa(y) \;+\; \varphi(y) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; -w \;+\; \xi(y) \;-\; \varkappa(y) \;, \tag{2.226}$$

rend l'origine du système bouclé asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m$.

Preuve : Observons que nous pouvons toujours modifier $\varkappa$ et k pour avoir :

$$\varkappa(0) \;=\; k(0) \;=\; 0 \;. \tag{2.227}$$

Considérons la fonction suivante :

$$\mathcal{V}(x,w) \;=\; \mathcal{U}(x) \;+\; \frac{1}{2}(w \;-\; k(x))^T(w \;-\; k(x)) \;, \tag{2.228}$$

Cette fonction est définie positive et propre sur $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m$. En utilisant (2.221) et (2.222), la dérivée de $\mathcal{V}$, le long des trajectoires du système (2.189) avec la loi de commande (2.226), satisfait :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}(x,w)}} \;\leq\; -(w + \varkappa(h(x)))^T(w + \varkappa(h(x))) \;. \tag{2.229}$$

L'origine est donc stable et toutes les solutions sont bornées et complètes dans $\mathcal{A}_x$. De plus, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle (voir [29, theorem X.1.3]), nous avons que les trajectoires du système convergent le plus grand ensemble invariant tel que

$$(w + \varkappa(h(x)))^T(w + \varkappa(h(x))) \;=\; 0 \quad , \qquad \mathcal{V}(x,w) \;=\; V_\infty \;. \tag{2.230}$$

où V_∞ est un réel positif. L'hypothèse 11 nous dit que dans cet ensemble nous avons :

$$\dot{\overline{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x)}} \;=\; 0 \quad , \qquad \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)\varphi(h(x)) \;. \tag{2.231}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans le Théorème 6, l'hypothèse (2.225) et le fait que $\mathcal{V}$ est une fonction continue nous permet de conclure que l'origine du système (2.189) est asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}_x \times \mathbb{R}^m$. □

Remarque 5 : L'hypothèse 11 ne fait intervenir que la sortie et son intégrale mais sans difficulté, il est possible d'étendre ce dernier résultat en le combinant avec le précédent en autorisant ainsi le terme $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)g(x)$ à s'écrire comme la somme d'une intégrale de mesure et d'une dérivée de mesure. Ce cas est traité dans [80].

2.4.5 Autre méthode d'élimination

Sous l'hypothèse 2 de stabilisabilité, procédons au changement de commande :

$$u \;=\; \phi(v) \quad , \qquad \bar{f}(x,v) \;=\; f(x,\phi(v)) \;. \tag{2.232}$$

La loi de commande stabilisante est alors :

$$v \;=\; x \;. \tag{2.233}$$

Jusqu'à maintenant nous avons exploité l'hypothèse 2 de stabilisabilité sous la forme de l'égalité :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\bar{f}\,(x, v+e) \;=\; \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\bar{f}\,(x,x)}_{\alpha(x,e)\,\leq\,0} \;+\; \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\left[\bar{f}(x,x+e) \;-\; \bar{f}(x,x)\right]}_{\Gamma(x,e)} \;. \tag{2.234}$$

Mais nous pouvons tout aussi bien écrire l'égalité :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\bar{f}\left(x, x+e\right) \;=\; \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x+e)\bar{f}\left(x+e, x+e\right)}_{\alpha(x,e)\,\leq\,0} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\bar{f}(x, x+e) \;-\; \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x+e)\bar{f}(x+e, x+e)}_{\Gamma(x,e)} \;. \tag{2.235}$$

Cette voie a été suivie avec une élimination de Γ par Pomet, Hirshorn et Cebuhar dans [67] dans le cas des systèmes linéaires en la variable non mesurée et sous une hypothèse supplémentaire de détectabilité qui exploite l'élimination du terme Γ. Nous ne décrivons pas plus ce résultat en renvoyant le lecteur à [67] pour plus de détails.

Chapitre 3

Erreur de dynamique

3.1 Principe Général

Dans le chapitre précédent, l'interprétation d'une condition nécessaire nous a conduit à envisager la synthèse d'un bouclage de sortie à partir d'un bouclage d'état et un reconstructeur de ce bouclage à partir des observations de la mesure. Comme nous l'avons signalé, cette approche n'a reçu que peu d'attention jusqu'à maintenant. Un autre approche elle beaucoup plus "populaire" peut-être motivée comme la précédente par l'interprétation d'une condition nécessaire.

3.1.1 Conditions nécessaires

En suivant une procédure similaire à celle du chapitre précédent et notamment du paragraphe 2.1.1, nous allons mettre en évidence une condition (presque) nécessaire à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique résolvant le problème posé dans la section 1.2.1.

Pour pouvoir aller plus loin dans l'énoncé de cette condition nécessaire, plaçons nous dans le cas où la mesure est une partie de l'état et où le système (1.1) peut s'écrire dans des coordonnées (x, y) avec x dans $\mathbb{R}^{n_x}$, où $n_x = n - p$. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x, y, u) \ , \\ \dot{y} &= C(x, y, u) \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

avec A et C des fonctions localements lipschitziennes.

Supposons maintenant qu'il existe un triplet :

$$(q \in \mathbb{N}, \varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m, \nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q) \tag{3.2}$$

ainsi qu'un compact $\mathcal{M}_w \subset \mathbb{R}^q$ telles que, pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x, y, \varpi(y, w)) \ , \\ \dot{y} &= C(x, y, \varpi(y, w)) \ , \\ \dot{w} &= \nu(y, w) \ , \end{cases} \tag{3.3}$$

$\{0\} \times \{0\} \times \mathcal{M}_w$ est un ensemble asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{I}_x \times \mathcal{M}_w \subseteq \mathcal{A}$ où $\mathcal{I}_x$ représente toujours l'ensemble donné des conditions initiales de l'état (x, y).

Toujours en évoquant un Théorème de Lyapunov inverse [93], nous savons qu'il existe une fonction $\mathcal{V} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ propre et C^∞, telle que pour tout (x, y, w) dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x,y,w)\, A(x,y,\varpi(y,w)) \,+\, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}(x,y,w)\, C(x,y,\varpi(y,w)) \,+\, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w}(x,y,w)\, \nu(y,w) \\ \leq\, -\mathcal{V}(x,y,w)\ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

et,

$$\{(x,y,w) \in \mathcal{A} : \mathcal{V}(x,y,w) \,=\, 0\} = \{0\} \times \{0\} \times \mathcal{M}_w\ . \tag{3.5}$$

Dans le paragraphe 2.1.1, pour expliciter une condition nécessaire nous avions fixé x dans $\mathcal{A}_x$ et minimisé la fonction $\mathcal{V}$ par rapport à w. Ici, nous fixons un couple (w, y), et cherchons un minimiseur pour $\mathcal{V}$ en x.

Soit $\mathcal{A}_{w,y}$ l'ensemble des (w, y) tel que l'ensemble $\mathcal{A}_x(w, y) = \{x : (x, y, w) \in \mathcal{A}\}$ est non vide. Cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{R}^q$.

Pout tout (w, y) dans $\mathcal{A}_{w,y}$, la fonction $x \to \mathcal{V}(x, y, w)$ est bornée inférieurement et propre sur $\mathcal{A}_x(w, y)$. Il existe donc un minimum global en x.

Soit $\mathrm{ArgMin}_{\{x \in \mathcal{A}_x(w,y)\}}\mathcal{V}(x, y, w)$ l'ensemble des minimiseurs. On a alors pour tout (w, y) dans $\mathcal{A}_{w,y}$ et pour tout ζ dans $\mathrm{ArgMin}_{\{x \in \mathcal{A}_x(w,y)\}}\mathcal{V}(x, y, w)$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}(x,y,w) \,\geq\, \mathcal{V}(\zeta,y,w) \quad , \qquad \forall \quad x \in \mathcal{A}_x(w,y)\ , \\ &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(\zeta,y,w) \,=\, 0\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Un ζ dans $\mathrm{ArgMin}_{\{x \in \mathcal{A}_x(w,y)\}}\mathcal{V}(x, y, w)$ peut être associé à chaque (w, y) dans l'ensemble $\mathcal{A}_w \times h(\mathcal{A}_x(w))$. Notons ce choix $\zeta(w, y)$ et introduisons la fonction $\mathcal{U} : \mathcal{A}_{w,y} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\mathcal{U}(w,y) \,=\, \mathcal{V}(\zeta(w,y),y,w) \tag{3.7}$$

En s'inspirant de Prieur et Praly dans [80] et de la même façon que dans le paragraphe 2.1.1, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3 *Si il existe une sélection ζ Höldérienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, alors la fonction $\mathcal{U} : \mathcal{A}_{w,y} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1, propre et satisfait :*

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial w}(w,y)\, \nu(w,y) \,+\, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(w,y)\, C(\zeta(w,y),y,\varpi(w,y)) \,\leq\, -\mathcal{U}(w,y) \tag{3.8}$$

et,

$$\begin{aligned} &\{(w,y) \in \mathcal{A}_{w,y} : \mathcal{U}(w,y) \,=\, 0\} \\ &\qquad = \{(w,y) \in \mathcal{A}_{w,y} : w \in \mathcal{M}_w,\, \zeta(w,y) \,=\, 0,\, y \,=\, 0\}\ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

La démonstration est identique à celle de la Proposition 1.

De ceci, nous tirons une première conclusion qui est que, sous l'hypothèse supplémentaire que la fonction ζ est Höldérienne d'ordre plus grand que $\frac{1}{2}$, une condition nécessaire à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique stabilisant est que pour le système :

$$\begin{cases} \dot{w} \,=\, \nu(y,w)\ , \\ \dot{y} \,=\, C(\zeta(w,y),y,\varpi(w,y))\ , \\ z \,=\, \zeta(w,y)\ , \end{cases} \tag{3.10}$$

d'état (y, w) et de sortie z, $\mathcal{M}_w \times \{0\}$ est un compact asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}_{w,y}$.

Le point tout à fait remarquable ici en comparaison de la Proposition 1 est que ce système (3.10) pour lequel nous avons cette de propriété de stabilité n'a en apparence aucun lien avec le système donné (1.1).

3.1.2 Interprétation

A l'image de la décomposition introduite dans le chapitre 2.1.1, nous pouvons écrire la fonction $\mathcal{V}$ de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, y, w) \;=\; & \underbrace{\mathcal{U}(w, y)}_{\text{Fonction de Lyapunov en } w \text{ et } y} \\ & + \underbrace{(x - \zeta(w, y))^T M(x, y, w)(x - \zeta(w, y))}_{\text{Fonction "distance" de l'écart entre } x \text{ et } \zeta} . \end{aligned} \tag{3.11}$$

où M est une fonction définie par :

$$M(x, y, w) \;=\; \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2}(\zeta(w, y) + rs(x - \zeta(w, y)), y, w)\, dr\, ds \;. \tag{3.12}$$

Cette décomposition est très intéressante car elle fait apparaître $\mathcal{V}$ comme la somme d'une fonction de Lyapunov d'un système ayant y et w pour état et d'une fonction (presque) "quadratique" de l'écart entre x et $\zeta(w, y)$. Ceci nous amène à introduire des notions "d'estimation d'état" ainsi que "d'erreur de dynamique".

Estimation d'état et Méthode indirecte

La décomposition précédente de la fonction $\mathcal{V}$ est composée de deux termes :

1. Le deuxième terme de (3.11) est une fonction que l'on peut interpréter comme une distance entre x et $\zeta(w, y)$. Nous voyons ainsi $\zeta(w, y)$ comme une estimation de l'état non mesuré x.
2. La première partie de (3.11) fait apparaître une fonction positive dépendant de w et de la mesure y et qui satisfait :

$$(w, y) \in \mathcal{A}_{w,y} \quad , \qquad \mathcal{U}(w, y) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad (\zeta(w, y), y) \;=\; 0 \;. \tag{3.13}$$

   Sous l'hypothèse de la proposition 3, c'est une fonction de Lyapunov pour le système (3.10). Ainsi, le long du système (3.10), la composante y de son état et sa sortie $z = \zeta(w, y)$ tendent vers 0.

Nous pouvons, de ce fait, envisager la synthèse un bouclage de sortie stabilisant par une procédure en deux temps. Dans un premier temps, nous cherchons une estimation de la composante x de l'état du système. Ceci nous donne les fonctions ζ et ν et le système suivant appelé *observateur* :

$$\hat{x} \;=\; \zeta(w, y) \quad , \qquad \begin{cases} \dot{w} \;=\; \nu(y, w) \;, \\ \dot{y} \;=\; C(x, y, \varpi(w, y)) \;. \end{cases} \tag{3.14}$$

Puis nous construisons un bouclage d'état stabilisant pour le système où x est remplacé par $\zeta(w,y)$. Cette stabilisation pour ce système auxiliaire ajoutée à la convergence de l'estimation permet d'espérer que l'objectif de stabilisation soit atteint. Il est important de noter la voie indirecte suivie pour arriver au résultat. Ceci est à opposer à ce que nous avons fait au chapitre 2 où l'on s'intéressait directement à la convergence de l'état du système donné.

Erreur de dynamique

La convergence de $\mathcal{U}$ vers 0 le long des solutions du système (3.10) ne garantit pas que cette fonction converge vers 0 le long des solutions du système bouclé (3.1).

En effet, le système (3.10) bouclé par le bouclage de sortie stabilisant et restreint aux dynamiques y et w peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{w} \;=\; \nu(y,w)\ , \\ \dot{y} \;=\; C(\zeta(w,y),y,\varpi(w,y)) + \underbrace{C(x,y,\varpi(w,y)) \;-\; C(\zeta(w,y),y,\varpi(w,y))}_{\text{erreur de dynamique}}\ , \end{cases} \tag{3.15}$$

Par conséquent, l'écart entre x et $\zeta(w,y)$ que nous avons interprété comme une erreur d'estimation introduit une modification de la dynamique du système (3.10) pour lequel nous espérons savoir résoudre le problème de stabilisation.

Notons k la fonction décrivant l'erreur de dynamique induite :

$$k(w,y,x) \;=\; C(x,y,\varpi(w,y)) \;-\; C(\zeta(w,y),y,\varpi(w,y)) \tag{3.16}$$

Nous avons :

$$\dot{\overline{\mathcal{U}(w,y)}} \;\leq\; \underbrace{-\mathcal{U}(x,y)}_{\text{Stabilisation de l'observateur}} \;+\; \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(w,y)k(w,y,x)}_{\text{Terme induit par l'erreur de dynamique}}\ . \tag{3.17}$$

A l'image des méthodes introduites dans le chapitre précédent, nous devrons ainsi imposer des propriétés de robustesse de la stabilisation du système de l'observateur par rapport à la présence d'erreur de dynamique.

Remarque 6 :

1. Dans le cas où la mesure y ne peut être considérée comme une composante de l'état toute l'analyse précédente reste valide si ce n'est que, dans l'équation (3.11), un nouveau terme apparaît. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x,w) \;=\; \mathcal{U}(w,h(x)) \;+\; (x-\zeta(w,h(x)))^T M(x,w)(x-\zeta(w,h(x))) \\ + \frac{\partial h}{\partial x}(x)(x \;-\; \zeta(w,h(x)))\ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

2. Notons que l'erreur de dynamique k s'annule lorsque $\zeta(w,y) = x$.

3.1.3 Synthèse par l'approche d'erreur de dynamique

Revenons aux systèmes sous forme générale tel que le système (1.1). L'approche traitée dans ce chapitre découle directement de l'interprétation précédente. Celle-ci repose sur l'idée de rendre asymptotiquement stable un système qui nous donne une estimation de l'état. Les fonctions de Lyapunov considérées dans ce chapitre seront donc constituées d'une partie nous assurant la reconstruction de l'état du système et d'une autre partie caractérisant la stabilité asymptotique vers l'origine de l'estimation. Pour simplifier la présentation de ce chapitre, nous allons considérer le cas global. Nous avons ainsi, $\mathcal{I}_x = \mathbb{R}^n$, nous n'avons aucune connaissance à priori des conditions initiales du système donné.

Estimation d'État

Le système nous donnant un estimé de l'état est appelé *Observateur d'état*, il est constitué d'une extension dynamique dépendant de la mesure y.

Du fait que nous voulons stabiliser l'origine du système, et que nous ne connaissons pas à priori la commande que l'on va utiliser pour le bouclage, nous demandons à l'observateur de fonctionner pour tout u. Cet observateur d'état devra donc avoir un comportement *uniforme en la commande*. Ceci constitue une requête très difficile à respecter. Heureusement, dans certains cas considérer, des observateurs d'état qui ne fonctionnent que pour une certaine classe de commande peut se révéler suffisant (Voir l'exemple de la section 3.2.4). Contrairement aux observateurs de commande introduits dans le chapitre précédent (Section 2.2.1), nous devons reconstituer l'état tout entier, (et non seulement une fonction de l'état). L'existence d'un observateur d'état semble donc plus difficile à obtenir. Pourtant, les résultats de stabilisation à partir d'un observateur d'état sont bien plus nombreux.

Se donnant w et la mesure $h(x)$ nous faisons correspondre un élément de $\mathbb{R}^n$ qui sera notre estimation de l'état et que nous notons $\hat{x} = \zeta(w, y)$.

Comme nous l'avons dit, dans la suite du chapitre, nous n'allons pas travailler directement sur l'état du système donné mais plutôt sur cette estimation $\hat{x}$. Par conséquent, nous devons nous assurer que des propriétés de bornitude de $\hat{x}$ implique de telles propriétés pour l'état réel x. Aussi nous voulons avoir une convergence de $\hat{x}$ vers x uniformément en u. Nous précisons tout ceci sous la forme de cette hypothèse :

Hypothèse 13 [Observateur uniforme en la commande] :

Il existe q un entier, $\mathcal{A}_w$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $\omega : h(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}_w \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ une fonction localement Lipschitzienne, $\zeta : h(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1, et $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et localement Lipschitzienne, tels que :

1. nous avons pour tout (x, w, u) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \times \mathbb{R}^m$ tel que $\mathcal{W}(x, w) \neq 0$:
$$D^+\mathcal{W}(x, w) \begin{pmatrix} f(x, u) \\ \omega(y, w, u) \end{pmatrix} < 0 , \tag{3.19}$$
2. $$\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : \mathcal{W}(x, w) = 0\} \subseteq \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : x = \zeta(y, w)\} , \tag{3.20}$$
3. enfin, pour tout réel positif W_0 et pour tout compact C dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble :
$$\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : \mathcal{W}(x, w) \leq W_0 \text{ et } \zeta(h(x), w) \in C\} \tag{3.21}$$
est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce contexte, l'estimation de l'état nous est donnée par l'observateur :

$$\hat{x} \;=\; \zeta(w, h(x)) \quad , \qquad \begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x,u) \;, \\ \dot{w} \;=\; \omega(h(x), w, u) \;. \end{cases} \tag{3.22}$$

Remarque 7 :

1. Étant donné x dans $\mathbb{R}^n$, les propriétés de la fonction $\mathcal{W}$ sont telles que lorsque w est dans $\{w \in \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{W}(x,w) \,=\, 0\}$ (si cet ensemble est non vide), alors nous avons :

$$x \;=\; \zeta(w, h(x)) \;. \tag{3.23}$$

   En d'autres termes pour cet élément x nous pouvons trouver un élément de $\mathcal{A}_w$ tel que l'estimation renvoyée par l'observateur est directement x.
   Il semble naturel de demander l'existence d'un tel w pour tout x dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, nous avons une application :

$$x \in \mathbb{R}^n \;\mapsto\; w \;=\; T(x) \;\in\; \{w \in \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{W}(x,w) \,=\, 0\} \;. \tag{3.24}$$

   En fait, à notre connaissance, tous les observateurs présents dans la littérature exhibent une telle application. En effet, dans le cas des observateurs de Kazantzis-Kravaris et Luenberger introduits dans la seconde partie de ce document, l'observateur est construit à partir de cette fonction T.
2. Le dernier point dans cette hypothèse, définissant les observateurs, implique que si $\hat{x}$ et $\mathcal{W}$ sont bornés alors x est borné dans $\mathbb{R}^n$ et w est borné dans $\mathcal{A}_w$. Cette hypothèse nous permet de travailler de façon indirecte sur l'estimation $\hat{x}$ pour assurer des propriétés de bornitude sur l'état x. Ceci implique en particulier que, pour toute fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ propre dans $\mathbb{R}^n$, la fonction définie par :

$$\mathcal{V}(x,w) \;=\; \mathcal{U}(\zeta(h(x),w)) \;+\; \mathcal{W}(x,w) \;, \tag{3.25}$$

   est propre en (x,w) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$. En effet, pour tout réel positif V_0, nous avons :

$$\begin{aligned} \{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{V}(x,w) \leq V_0\} \subseteq \\ \{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{U}(\zeta(x,w)) \leq V_0\} \cap \\ \{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{W}(x,w) \leq V_0\} \;. \end{aligned} \tag{3.26}$$

   Et du fait que $\mathcal{U}$ est propre dans $\mathbb{R}^n$, alors $\zeta(w,x)$ appartient à un compact. Donc, en utilisant l'hypothèse (3.21), nous concluons que la partie gauche de l'équation (3.26) est bornée. Puis, du fait de la continuité de la fonction $\mathcal{V}$, nous concluons qu'elle est propre dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$.
3. Utiliser la dérivée de Dini dans (3.19) plutôt que la différentiation classique nous autorise à considérer des fonctions $\mathcal{W}$ associées à l'observateur qui ne sont pas C^1.

En s'inspirant du système (3.15), l'observateur d'état ainsi défini, introduit une erreur de dynamique caractérisée par la fonction $k \;: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} k(x,w,u) \;=\; \frac{\partial \zeta(w,h(x))}{\partial w}\omega(w,h(x),u) \;+\; \frac{\partial \zeta(w,h(x))}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x,u) \\ -\; f(\zeta(w,h(x)),u) \;. \end{aligned} \tag{3.27}$$

La dynamique de l'estimé, $\hat{x} = \zeta(w, y)$ satisfait le long du système (3.22) :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \underbrace{k(x, w, u)}_{\text{Erreur de dynamique}} . \tag{3.28}$$

Ce système est appelé *Système de l'observateur* dans ce qui suit. Du point de vue de l'observateur ce terme k est le terme de correction qui permet la convergence de $\hat{x}$ vers x. Mais du point de vue du contrôleur ce terme correspond à une perturbation. Heureusement cette perturbation s'annule lorsque que $\mathcal{W}(x, w) = 0$. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 4 (Annulation du terme de correction lorsque $\mathcal{W}(x, w) = 0$) *Sous l'hypothèse 13, pour tout (x, w) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$ tel que $\mathcal{W}(x, w) = 0$ et pour tout u dans $\mathbb{R}^m$ nous avons l'égalité :*

$$k(x, w, u) = 0 . \tag{3.29}$$

Preuve : En effet, soit (x, w) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$ tel que

$$\mathcal{W}(x, w) = 0 . \tag{3.30}$$

Alors nous avons en utilisant l'hypothèse (3.20) :

$$x = \zeta(w, h(x)) . \tag{3.31}$$

Notons maintenant $(X(x, t, u), W(x, w, t, u)$ une solution du système (3.22), avec une loi de commande $u(t)$. Soit $[0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w}(x, w, u))$, l'intervalle maximal à droite de définition de cette solution à valeurs dans l'ouvert $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$. Du fait de (3.19), nous avons :

$$\mathcal{W}(X(x, t, u), W(x, w, t, u)) = 0 \quad , \qquad \forall t \in [0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w}(x, w, u)) , \tag{3.32}$$

L'hypothèse (3.20) donne alors :

$$X(x, t, u) = \zeta(W(x, w, t, u), h(X(x, t, u))) \quad , \qquad \forall t \in [0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w}(x, w, u)) , \tag{3.33}$$

En dérivant par rapport au temps la dernière équation et en posant $t = 0$, nous obtenons :

$$f(x, u) = \frac{\partial \zeta}{\partial w}(w, h(x))\omega(w, h(x), u) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(w, h(x))\frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x, u) . \tag{3.34}$$

En utilisant alors l'égalité (3.31) dans l'équation précédente, nous obtenons à $t = 0$:

$$k(x, w, u) = 0 . \tag{3.35}$$

□

Remarque 8 : Dans le cas où il existe une fonction T introduite dans la remarque 7 et sous des hypothèses de minimalité, il semble naturel que les fonctions $\mathcal{W}$ et T soit reliées par l'équation :

$$\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : \mathcal{W}(x, w) = 0\} = \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : w = T(x)\} . \tag{3.36}$$

Avec une telle fonction T et d'après la Proposition 4, l'erreur de dynamique k associée à cet observateur satisferait alors :

$$k(x, T(x), u) \;=\; 0 \;, \tag{3.37}$$

L'approche indirecte mise en évidence dans le paragraphe précédent nous incite ainsi à chercher une loi de commande pour le système de l'observateur nous assurant tout d'abord que $\widehat{x}$ reste dans $\mathbb{R}^n$ (n'explose pas en temps fini) et ensuite que l'origine soit un point asymptotiquement stable. La stabilisation pour l'état x du système donné découlera alors des propriétés de l'observateur et notamment du fait que $\hat{x}$ converge vers x.

Cette stabilisation pour $\hat{x}$ devra se faire malgré la présence de l'erreur de dynamique k. Cette erreur dépendant de x ne peut être considérée que comme une perturbation pour la synthèse de la loi de commande stabilisante. Ce sera par contre le rôle de l'observateur de rendre cette perturbation petite.

A l'image de l'approche adoptée dans le cadre d'une erreur de commande, la présence de l'erreur de dynamique introduit une perte de négativité. En effet, si l'on connaît une fonction $\phi \;: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{U} \;: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie positive, C^1 et propre dans $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{x}) f(\hat{x}, \phi(\hat{x})) \;\leq\; -\mathcal{U}(\hat{x}) \quad , \qquad \forall\, \hat{x} \,\in\, \mathcal{A}_x \;, \tag{3.38}$$

alors le long des solutions du système étendu (3.22), nous avons pour tout (x, w) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$:

$$\dot{\widehat{\mathcal{U}(\zeta(w, h(x)))}} \;\leq\; -\mathcal{U}(\zeta(w, h(x))) \;+\; \Gamma(w, x) \tag{3.39}$$

où,

$$\Gamma(w, x) \;=\; \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \hat{x}}(\zeta(w, h(x)))\, k(x, w, \phi(\zeta(w, h(x)))) \;. \tag{3.40}$$

Cette fonction Γ correspond à la perte de négativité induite par la présence de l'erreur de dynamique k. La négativité apportée par la stabilisabilité ainsi que celle apportée par la dérivée de la fonction $\mathcal{W}$ liée à l'observateur doivent compenser cette perte de négativité pour forcer $\hat{x}$ à rester borné dans $\mathbb{R}^n$ et dans un deuxième temps à le faire converger vers l'origine. Ceci nous amène de nouveau à envisager deux approche pour construire une loi de commande garantissant la stabilisation de $\hat{x}$ malgré la présence de la perturbation k :

1. **Domination**

   Comme au chapitre 2, la première approche consiste à trouver une loi de commande sur le système de l'observateur donnant une négativité suffisamment forte pour que la perte de négativité Γ induite par la présence de l'erreur de dynamique puisse apparaître comme dépendant uniquement de l'erreur de dynamique (et pas en plus de x).

2. **Élimination du terme**

   La seconde est à nouveau purement analytique. L'objectif est de trouver une loi de commande telle que le terme introduit par l'erreur de dynamique puisse être complètement compensé grâce aux propriétés de l'observateur.

La première stratégie sera abordée dans la section 3.2, la suivante fera l'objet de la section 3.3.

3.2 Domination pour l'erreur de dynamique

3.2.1 Principe général

Comme expliqué au paragraphe 3.1.3, l'approche par erreur de dynamique avec une hypothèse de stabilisabilité du système donné sur $\mathbb{R}^n$ permet d'obtenir (voir (3.39)) :

$$\dot{\widehat{\mathcal{U}(\widehat{x})}} \leq -\mathcal{U}(\hat{x}) + \Gamma(w,x) , \tag{3.41}$$

avec $\hat{x} = \zeta(w,y)$. Pour aller plus loin, il s'agit de traiter le terme perturbateur Γ dû à l'erreur de dynamique k. Notre première démarche consiste à imposer une certaine "borne" sur cette erreur de dynamique. Nous allons ainsi supposer que l'observateur nous garantit que l'erreur de dynamique associée a une solution est dans L^p sur le temps d'existence de celle-ci :

Hypothèse 14 [Observateur-L^p] :

Il existe q un entier, $\mathcal{A}_w$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $\omega : \mathbb{R}^p \times \mathcal{A}_w \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ et $\zeta : \mathbb{R}^m \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions localement Lipschitziennes, $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive localement Lipschitzienne, telle que, pour tout (x,w,u) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant $\mathcal{W}(x,w) \neq 0$ on a :

$$D^+\mathcal{W}(x,w)\begin{pmatrix} f(x,u) \\ \omega(y,w,u) \end{pmatrix} < -|k(x,w,u)|^p , \tag{3.42}$$

où k, est l'erreur de dynamique associée, i.e. :

$$\begin{aligned} k(x,w,u) = \frac{\partial\zeta(w,h(x))}{\partial w}\omega(w,h(x),u) + \frac{\partial\zeta(w,h(x))}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x,u) \\ - f(\zeta(w,h(x)),u) . \end{aligned} \tag{3.43}$$

et,

$$\{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : \mathcal{W}(x,w) = 0\} \subseteq \{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : x - \zeta(y,w) = 0\} . \tag{3.44}$$

Enfin, pour tout réel positif W_0 et pour tout compact C dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble :

$$\{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w : \mathcal{W}(x,w) \leq W_0 \text{ et } \zeta(h(x),w) \in C\} \tag{3.45}$$

est un compact.

L'unique ajout par rapport au observateurs uniformes en la commande tels qu'il sont introduits dans l'hypothèse 13, est la présence du terme $-|k(\hat{x},w,x,u)|^p$ dans l'équation (3.42). Ceci garantit que ce terme est intégrable sur le temps d'existence de chaque solution dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$.

Avec cette hypothèse d'existence d'un observateur rendant L^p son erreur de dynamique associée, il est naturel d'introduire une hypothèse de stabilisabilité caractérisant une robustesse par rapport à des perturbations dans L^p ; en d'autres termes, nous assurant que $\hat{x}$ reste borné dans $\mathbb{R}^n$ si la perturbation est dans L^p. L'hypothèse est :

Hypothèse 15 [L^p-Stabilisabilité] :

Il existe une fonction ϕ telle que le système suivant :

$$\dot{x} \;=\; f(x, \phi(x)) \;+\; d \;. \tag{3.46}$$

est L^p-ISS avec d pour entrée. Plus précisément, il existe une fonction définie positive, C^1, et radialement non bornée $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, et une fonction définie positive $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\;[f(x, \phi(x)) \;+\; d] \;\leq\; -\alpha(x) \;+\; |d|^p \qquad \forall (x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;. \tag{3.47}$$

L'hypothèse de L^p stabilisabilité implique que, si la loi de commande ϕ est utilisée, alors pour toute perturbation (ici d) qui sera dans L^p, les solutions seront bornées. Nous pouvons rapprocher cette stabilisabilité de celle introduite dans le contexte erreur de commande (hypothèse 5 dans le paragraphe 2.2.4) mise à part qu'ici la perturbation porte sur tout $\dot{x}$ et non pas sur la commande.

Les deux hypothèses que nous venons d'énoncer constituent un point de passage garantissant le succès de la synthèse du bouclage de sortie.

En effet, nous avons :

Théorème 8 (Erreur de dynamique, Domination L^p) *Sous les hypothèses 14 et 15, il existe $\mathcal{M}_w$ compact dans $\mathcal{A}_w$, tel que le système :*

$$u \;=\; \phi(\hat{x}) \quad , \qquad \dot{\hat{x}} \;=\; \zeta(w, h(x)) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; \omega(w, h(x), \phi(\hat{x})) \;, \tag{3.48}$$

définit un bouclage de sortie dynamique qui stabilise asymptotiquement l'ensemble $\{0\} \times \mathcal{M}_w$ pour le système bouclé (1.1) avec un bassin d'attraction $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$.

Preuve : Le système bouclé est décrit par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, \phi(\hat{x})) \;, \\ \dot{w} & = & \omega(y, w, \phi(\hat{x})) \;, \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & h(x) \;, \\ \dot{\hat{x}} & = & \zeta(y, w) \;, \end{array} \right. \tag{3.49}$$

Du fait de la L^p-Stabilisabilité et de la définition (3.43) de k, nous avons le long de ses solutions :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\widehat{\mathcal{U}(\hat{x})}} & \leq & \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(\hat{x})\,(f(\hat{x}, \phi(\hat{x})) \;+\; k(\hat{x}, w, x, u)) \;, \\ & \leq & -\alpha(\hat{x}) \;+\; |k(x, w, u)|^p \;. \end{array} \tag{3.50}$$

Considérons la fonction $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\mathcal{V}(x, w) \;=\; \mathcal{U}(\hat{x}) \;+\; \mathcal{W}(x, w) \;. \tag{3.51}$$

Pour tout réel positif V_0, nous avons :

$$\begin{array}{l} \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{V}(x, w) \leq V_0\} \subseteq \\ \qquad \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{U}(\zeta(x, w)) \;\leq\; V_0\} \cap \\ \qquad\qquad \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \;:\; \mathcal{W}(x, w) \;\leq\; V_0\} \;. \end{array} \tag{3.52}$$

Du fait que $\mathcal{U}_x$ est propre dans $\mathcal{A}_x$, $\zeta(w,x)$ appartient à un compact. En utilisant alors l'hypothèse (3.45), nous concluons que l'ensemble à gauche dans (3.52) est borné. Puis, du fait de la continuité de la fonction $\mathcal{V}$, nous concluons qu'elle est propre dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$.

De plus, en utilisant l'hypothèse (3.44), nous avons :

$$\begin{aligned} \{(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w \,:\, \mathcal{V}(x,w) \,=\, 0\,\} \;&=\; \{(x,w) \,:\, \zeta(w,h(x)) \,=\, 0\,,\; \mathcal{W}(x,w) \,=\, 0\}\;, \\ &=\; \{0\} \times \mathcal{M}_w\;, \end{aligned} \tag{3.53}$$

avec,

$$\mathcal{M}_w \;=\; \{w \in \mathcal{A}_w \,:\, \zeta(w,0) \,=\, 0\,,\; \mathcal{W}(0,w) \,=\, 0\}\;. \tag{3.54}$$

En utilisant une nouvelle fois l'hypothèse (3.45), nous avons que $\mathcal{M}_w$ est un compact dans $\mathcal{A}_w$.

En utilisant l'hypothèse (3.47) et (3.42), la dérivée de la fonction $\mathcal{V}$ le long des trajectoires du système (3.49) satisfait :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}(x,w)}} \;<\; 0 \quad , \qquad (x,w) \notin \{0\} \times \mathcal{M}_w\;. \tag{3.55}$$

De plus, la fonction $\mathcal{V}$ ne s'annulant qu'en $\{0\} \times \mathcal{M}_w$, nous concluons que cet ensemble est asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$. □

Il est possible de réinterpréter bon nombre de résultats de stabilisation globale par bouclage de sortie selon la logique du Théorème 8. Le cas $p = 2$, i.e. le cas L^2 a été traité par Kanellakopolous, Kokotovic et Morse dans [33] et par Marino et Tomei dans [57] dans le cas des systèmes admettant une forme triangulaire. Plus récemment, le cas $p = 1$, i.e. le cas L^1 a été considéré par Praly et Arcak dans [74].

Remarque 9 : Il est possible d'étendre la méthode en décomposant la fonction k. En effet, si l'erreur de dynamique associée à l'observateur se décompose en :

$$k(x,w,u) \;=\; n(h(x),w,u) \,+\, m(h(x),w,u)\,\ell(x,w,u)\;, \tag{3.56}$$

où donc n et m dépendent de $y = h(x)$ et non de l'état tout entier. nous pouvons relâcher l'hypothèse 14 et supposer que l'observateur rende L^p uniquement la fonction ℓ. Ainsi, il suffit que l'observateur vérifie, pour tout (x,w) dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}_w$ tel que $\mathcal{W}(x,w) \neq 0$:

$$\dot{\overline{\mathcal{W}(x,w)}} \;<\; -|\ell(x,w,u)|^p\;. \tag{3.57}$$

Par contre, la L^p-stabilisabilité doit être modifiée. L'hypothèse 15 concerne alors le système suivant :

$$\dot{\hat{x}} \;=\; f(\hat{x},u) \,+\, n(y,w,u) \,+\, m(y,w,u)d\;, \tag{3.58}$$

avec d la perturbation et y et w étant des entrées connues. Dans ce cas, il semble utile d'autoriser la fonction ϕ à dépendre de w et de y et plus seulement de $\hat{x}$.

Cette méthode sera développée plus en détails dans le chapitre 4 dans le cas des systèmes triangulaires. Elle a aussi été introduite par Praly et Arcak dans [74] (voir aussi [9]) dans le cas L^1.

3.2.2 Sur les observateurs

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la méthode permettant de cons--truire un bouclage de sortie dynamique dans le cadre d'une approche *Erreur de dynamique, Domination L^p* nécessite l'utilisation d'un observateur d'état uniforme en la commande.

Les observateurs dont nous avons besoin ici sont particuliers puisqu'ils doivent garantir qu'ils rendent L^p l'erreur de dynamique associée (voir l'hypothèse 14). Dans ce paragraphe nous introduisons deux grandes classes d'observateur et regardons sous quelles conditions ceux-ci nous donnent un observateur L^p de l'hypothèse 14.

3.2.2.1 Observateur d'ordre réduit

Une classe d'observateurs couramment utilisée est la classe des observateurs d'ordre réduit. Reprenons le cas où la mesure du système est un état du système, i.e. le système (1.1) est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x,y,u) \\ \dot{y} &= C(x,y,u) \end{cases} \tag{3.59}$$

avec x dans $\mathbb{R}^{n_x}$ et y dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2 (Observateur d'ordre réduit quadratique) *Nous disons que nous avons un observateur d'ordre réduit quadratique si il existe un difféomorphisme de la forme ζ_x^* : $(x,y) \to (w,y)$, tel qu'il existe une matrice définie positive P telle que :*

$$P\frac{\partial \omega}{\partial w}(y,w,u) + \frac{\partial \omega}{\partial w}(y,w,u)^T P < 0 \quad , \qquad \forall\,(w,y,u) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \ , \tag{3.60}$$

où ω est le champ A de (3.59) dans les coordonnées (w,y), i.e. la fonction définie par :

$$\omega(y,w,u) = \frac{\partial \zeta_x^*}{\partial x}(\zeta_x(w,y),y)\,A(\zeta_x(w,y),y,u) + \frac{\partial \zeta_x^*}{\partial y}(\zeta_x(w,y),y)\,C(\zeta_x(w,y),y,u) \tag{3.61}$$

où ζ_x est la fonction inverse de ζ_x^*, i.e tel que :

$$\zeta_x(\zeta_x^*(x,y),y) = x \qquad \forall (x,y) \ . \tag{3.62}$$

Dans ce cas l'observateur d'ordre réduit est :

$$\hat{x} = \zeta_x(w,y) \quad , \qquad \dot{w} = \omega(w,y,u) \tag{3.63}$$

Dans cette définition la condition (3.60) implique une contraction des trajectoires les unes sur les autres dans une partie de la dynamique du système (3.59). Celle-ci est plus facilement mise en évidence dans les coordonnées (w,y), i.e. pour les trajectoires du système :

$$\begin{cases} \dot{w} &= \omega(y,w,u), \\ \dot{y} &= C(\zeta_x(w,y),y,u) \ . \end{cases} \tag{3.64}$$

En effet, dans ce cas la fonction $\mathcal{W}$ associée à cet observateur est :

$$\mathcal{W}(x,y,w) = (w-\zeta_x^*(x,y))^T P(w-\zeta_x^*(x,y)) \quad , \qquad \forall\,(x,y,w) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n_x} \ . \tag{3.65}$$

Et d'après (3.60), nous avons le long des solutions du système étendu :

$$\dot{\widehat{\mathcal{W}(x,y,w)}} \;<\; 0 \quad , \qquad \forall\,(x,y,w)\;:\; w-\zeta^*_{\mathcal{X}}(x,y) \;\neq\; 0\;, \tag{3.66}$$

La condition (3.19) de l'hypothèse 13 est bien satisfaite.

A noter que le fait que (3.60) puisse être obtenu ou pas dépend aussi des coordonnées choisies.

Pour notre contexte, une caractéristique importante des observateurs d'ordre réduit quadratique est qu'ils donnent lieu à l'erreur de dynamique suivante, à comparer par exemple avec (3.86) :

$$k(x,y,w,u) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial\zeta_{\mathcal{X}}}{\partial y}(w,y)\,C(x,y,u) \;-\; \frac{\partial\zeta_{\mathcal{X}}}{\partial y}(\zeta^*_{\mathcal{X}}(x,y),y)\,C(\hat{x},y,u) \\ C(x,y,u) \;-\; C(\hat{x},y,u) \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

Dans le cadre d'une approche *Erreur de dynamique L^p*, nous souhaitons que cet observateur rende L^p le terme de corection associé. Cette hypothèse semble difficilement réalisable pour l'ensemble des observateurs d'ordre réduit quadratiques définis précédemment.

Pourtant, si nous nous restreignons alors aux observateurs d'ordre réduit avec une fonction ζ linéaire en w, i.e. aux cas des observateurs de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x} \;=\; w \;+\; \displaystyle\int_0^y K(s)\,ds \\ \hat{y} \;=\; y \end{cases} \quad , \qquad \dot{w} \;=\; A(\hat{x},y,u) \;+\; K(y)C(\hat{x},y,u) \tag{3.68}$$

où K est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{X}}}$. Avec une fonction ζ de cette forme, le terme de correction associé (voir (3.67)) est :

$$k(x,y,w,u) \;=\; \begin{pmatrix} K(y) \\ I \end{pmatrix} (C(x,y,u) \;-\; C(\hat{x},y,u)) \tag{3.69}$$

Dans ce contexte une condition suffisante pour le cas L^2 est

Proposition 5 *Si il existe une fonction K bornée et une matrice définie positive P qui satisfait*

$$P\,\frac{\partial A-KC}{\partial x}(x,y,u) \;+\; \frac{\partial A-KC}{\partial x}(x,y,u)^T P \;<\; -\,\frac{\partial C}{\partial x}(x,y,u)^T\,\frac{\partial C}{\partial x}(x,y,u)\;. \tag{3.70}$$

alors l'observateur défini en (3.68) satisfait (3.42) dans le cas $p=2$.

Preuve : Suivant (3.65) et (3.68), la fonction $\mathcal{W}$ associée à cet observateur est :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x,y,w) \;&=\; \left(w-x \;+\; \int_0^y K(s)\,ds\right)^T P\left(w-x \;+\; \int_0^y K(s)\,ds\right)\;. \\ &=\; (\hat{x}-x)^T P(\hat{x}-x)\;. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Elle satisfait pour $\hat{x} \neq x$:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{\mathcal{W}(x,y,w)}} &= (\hat{x}-x)^T \\
&\qquad \int_0^1 P\frac{\partial A - KC}{\partial x}(x+s(\hat{x}-x),y,u) \;+\; \frac{\partial A - KC}{\partial x}(x+s(\hat{x}-x),y,u)^T P ds \\
&\qquad\qquad (\hat{x}-x)\ , \\
&< (\hat{x}-x)^T \\
&\qquad \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial x}(x+s(\hat{x}-x),y,u)^T\,\frac{\partial C}{\partial x}(x+s(\hat{x}-x),y,u) ds \\
&\qquad\qquad (\hat{x}-x)\ , \\
&< -(C(\hat{x},y,u) \;-\; C(x,y,u))^T\,(C(\hat{x},y,u) \;-\; C(x,y,u))\ .
\end{aligned}$$

Du fait que K est une fonction bornée, nous concluons que l'erreur de dynamique (3.69) évaluée le long des solutions est dans L^2. □

Remarque 10 :

1. Ces hypothèses dépendent des coordonnées dans lesquelles nous nous plaçons.
2. Nous remarquons que nous pouvons utiliser la décomposition introduite dans la remarque 9 (équation (3.56)) pour relaxer l'hypothèse que la fonction K est bornée. En effet, le terme de correction se factorise de la forme suivante :

$$k(x,y,w,u) \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} K(y) \\ I \end{pmatrix}}_{m(y,w,u)} \underbrace{(C(x,y,u) \;-\; C(\hat{x},y,u))}_{\ell(x,y,w,u)} \tag{3.72}$$

Nous pouvons alors demander à l'observateur de rendre L^p uniquement le terme ℓ. Mais alors la L^p-stabilisabilité associée caractérisée par l'hypothèse 15 doit être modifiée pour concerner maintenant le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} \;=\; A(\hat{x},y,u) \;+\; K(y)d \\ \dot{y} \;=\; C(\hat{x},y,u) \;+\; d \end{cases} \tag{3.73}$$

3.2.2.2 Les observateurs d'ordre réduit non-quadratiques

Observateur d'ordre réduit non-quadratique : Nous disons que nous avons un observateur d'ordre réduit non-quadratique si il existe un difféomorphisme $\zeta_x^* : (x,y) \to (w,y)$, tel qu'il existe une matrice définie positive P et des vecteurs t_i formant une famille génératrice (i.e. tels que la matrice $\sum_j t_j t_j^T$ est définie positive) satisfaisant :

$$\begin{aligned}
&\frac{e_w^T P \frac{\partial \omega}{\partial w}(y,w,u)e_w}{\sqrt{e_w^T P e_w}} + \sum_j \left(t_j^T \frac{\partial \omega}{\partial w}(y,w,u)e_w \right) \mathrm{signe}(t_j^T e_w) < 0\ , \\
&\qquad\qquad \forall (y,w,u) \quad , \qquad \forall e_w \in \mathbb{R}^{n_x} \,/\, 0\ ,
\end{aligned} \tag{3.74}$$

où ω est par (3.61) (champ A dans les coordonnées (w, y)) et,

$$e_w \;=\; w - \zeta^*_{\mathcal{X}}(x, y) \;. \tag{3.75}$$

Dans ce cas l'observateur d'ordre réduit est toujours de la forme (3.63). Mais, la fonction $\mathcal{W}$ associée à cet observateur est maintenant une fonction de la forme :

$$\mathcal{W}(x, y, w) \;=\; \sqrt{e_w^T P e_w} + \sum_j |t_j^T e_w| \;. \tag{3.76}$$

Cette fonction n'est pas C^1. Pourtant elle satisfait, au sens des dérivée de Dini,

$$\dot{\overline{\mathcal{W}(x, y, w)}} \;\leq\; < \; 0 \quad , \qquad \forall\, (x, y, w) \;:\; w - \zeta^*_{\mathcal{X}}(x, y) \;\neq\; 0 \;, \tag{3.77}$$

le long du système étendu.

A l'image du cas quadratique, les observateurs d'ordre réduit quadratique donnent lieu à l'erreur de dynamique introduite en (3.67). Aussi, nous pouvons établir un résultat similaire à la proposition 5 pour le cas L^1. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 6 *Si il existe une matrice définie positive P et des vecteurs t_i formant une famille génératrice (i.e. tels que la matrice $\sum_j t_j t_j^T$ est définie positive) satisfaisant :*

$$\begin{aligned} \frac{e_{\mathcal{X}}^T P \frac{\partial A - KC}{\partial x}(x, y, u) e_{\mathcal{X}}}{\sqrt{e_{\mathcal{X}}^T P e_{\mathcal{X}}}} + \sum_j \left(t_j^T \frac{\partial A - KC}{\partial x}(x, y) e_{\mathcal{X}} \right) \mathit{signe}(t_j^T e_{\mathcal{X}}) < \\ - \left| \frac{\partial C}{\partial x}(x, y, u) e_{\mathcal{X}} \right| \;, \qquad \forall (x, y, e_{\mathcal{X}}, u) \;. \end{aligned} \tag{3.78}$$

alors l'observateur défini en (3.68) satisfait (3.42) dans le cas $p = 1$.

Preuve : Considérons la fonction $\mathcal{W}$ associée à l'observateur définie par l'équation (3.76) :

$$\mathcal{W}(x, y, w) \;=\; \sqrt{e_{\mathcal{X}}^T P e_{\mathcal{X}}} + \sum_j |t_j^T e_{\mathcal{X}}| \;. \tag{3.79}$$

où $e_{\mathcal{X}} \;=\; x \;-\; \hat{x}$ et $\hat{x}$ est défini en (3.68). Elle satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\mathcal{W}(x, y, w)}} \;=\; & \int_0^1 \frac{e_{\mathcal{X}}^T \left(P \frac{\partial A - KC}{\partial x}(\hat{x} + s e_{\mathcal{X}}, y, u) \;+\; \frac{\partial A - KC}{\partial x}(\hat{x} + s e_{\mathcal{X}}, y, u)^T P \right) e_{\mathcal{X}}}{2\sqrt{e_{\mathcal{X}}^T P e_{\mathcal{X}}}} ds \\ & + \int_0^1 \sum_j \mathrm{signe}(t_j^T e_{\mathcal{X}}) t_j^T \frac{\partial A - KC}{\partial x}(\hat{x} + s e_{\mathcal{X}}, y, u) e_{\mathcal{X}} \, ds \;. \\ < \; & - \int_0^1 \left| \frac{\partial C}{\partial x}(\hat{x} + s e_{\mathcal{X}}, y, u) e_{\mathcal{X}} \right| ds \;, \\ < \; & -|C(x, y, u)| \;, \qquad \forall (x, y, \hat{x}, u) \;. \end{aligned} \tag{3.80}$$

□

3.2.2.3 Les observateurs d'ordre complet quadratique

Une autre classe d'observateurs est celle des observateurs de même dimension que l'état du système. Ainsi, q la dimension de w est égal à n, et $\mathcal{A}_w = \mathbb{R}^n$.

Leur dynamique est la même que la dynamique de l'état du système à laquelle nous rajoutons une fonction des écarts entre les sorties fictives de l'observateur et les sorties réelles du système.

Définition 3 (Observateur d'ordre complet quadratique) *Nous disons que nous avons un observateur d'ordre complet quadratique si il existe une fonction K et une matrice P telle que :*

$$P\frac{\partial\omega}{\partial w}(y,w,u) + \frac{\partial\omega}{\partial w}(y,w,u)^T P < 0 \quad , \qquad \forall\,(w,y,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \ , \tag{3.81}$$

où ω est la fonction définie par :

$$\omega(y,w,u) = f(w,u) + K(w,y)\,(h(w) - y) \ . \tag{3.82}$$

L'observateur est alors de la forme :

$$\hat{x} = w \quad , \qquad \dot{w} = f(w,u) + K(w,y)\,(h(w) - y) \qquad , \quad w \in \mathbb{R}^n \ . \tag{3.83}$$

La fonction $\mathcal{W}$ associée est directement :

$$\mathcal{W}(x,w) = (x - w)^T P(x - w) \ . \tag{3.84}$$

elle satisfait :

$$\dot{\overbrace{\mathcal{W}(x,w)}} < 0 \quad , \qquad \forall\, x \neq w \ . \tag{3.85}$$

Ainsi, (3.20) et (3.19) sont satisfaite.

Remarque 11 : Contrairement aux observateurs d'ordre réduit la contraction est dans l'espace des "x". Par contre, pour l'obtenir, il faut modifier la dynamique du système en ajoutant un terme de correction. Là aussi le fait de pouvoir obtenir (3.81) dépend des coordonnées choisies.

L'erreur de dynamique associée à un observateur d'ordre complet est :

$$k(x,w,u) = K(w,h(x))\,(h(w) - h(x)) \ . \tag{3.86}$$

Exemple : Les observateurs d'ordre complet sont utilisées dans le cas des systèmes sous forme *Output-Feedback* (voire [58]), i.e. de la forme :

$$\dot{x} = Ax + B(y,u) \quad , \qquad y = Cx \ , \tag{3.87}$$

avec la paire (A,C), détectable. En effet, nous pouvons considérer un observateur d'ordre complet avec $\mathcal{A}_w = \mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\hat{x} = w \quad , \qquad \dot{w} = Aw + B(y,u) + \underbrace{K(Cw - y)}_{k(w,x)} \ , \tag{3.88}$$

où K est une matrice telle que :

$$(A+KC)^T P \; + \; P(A+KC) \; \leq \; -I \; , \tag{3.89}$$

avec, P définie positive.

Nous pouvons montrer que dans ce cas cet observateur est de plus un observateur-L^1. En effet, une fonction $\mathcal{W}$ associée à cet observateur peut être :

$$\mathcal{W}(x,w) \; = \; \frac{(x \, - \, w)^T P (x \, - \, w)}{\sqrt{(x \, - \, w)^T P (x \, - \, w)}} \; . \tag{3.90}$$

Si l'on introduit $\lambda_{\min}(P)$ et $\lambda_{\max}(P)$ respectivement les valeures propres de norme la plus petite et la plus grande, nous avons :

$$\mathcal{W}(x,w) \; \geq \; \frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} |x \, - \, w| \; . \tag{3.91}$$

Elle satisfait au sens des dérivée de Dini le long des solutions du système étendu :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\mathcal{W}(x,w)}} \; &= \; -\frac{(x \, - \, w)^T (x \, - \, w)}{2\sqrt{(x \, - \, w)^T P (x \, - \, w)}} \; , \\ &\leq \; -\frac{1}{2\,|P|} \mathcal{W}(x,w) \; , \end{aligned} \tag{3.92}$$

et avec (3.91), nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\mathcal{W}(x,w)}} \; \leq \; -\frac{\lambda_{\max}(P)}{2\,|P|\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} |x \, - \, w| \; , \tag{3.93}$$

qui montrer que l'observateur est un observateur L^1.

En modifiant la fonction $\mathcal{W}$, nous pouvons montrer que cet observateur est un observateur L^p, $p \geq 1$

3.2.3 Sur la L^p-Stabilisabilité

La seconde hypothèse dont nous avons besoin dans le cadre d'une approche *Erreur de dynamique Domination L^p* est l'existence d'une loi de commande nous assurant une robustesse par rapport à des perturbation additive. Nous donnons ici un premier résultat dans ce contexte dans le cas L^1.

En annexe de ce document est donné un autre résultat qui est un lemme de propagation de propriété L^p-ISS dans le cas des systèmes triangulaires. Ces Lemmes nous permettront de travailler sur cette classe de système dans le chapitre 4.

La stabilisabilité L^1 est une condition équivalente à l'hypothèse qu'il existe une loi de commande stabilisant asymptotiquement l'origine du système avec une fonction de Lyapunov à gradient borné. En effet nous avons la proposition suivante :

Proposition 7 (CNS donnant la L^1-ISS stabilisabilité) *Le système est L^1-Stabilisable sur $\mathbb{R}^n$, si et seulement si il existe une fonction $\mathcal{U} \; : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie positive C^1 et propre dans $\mathbb{R}^n$, une fonction $\alpha \; : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ continue définie positive et une fonction $\phi \; : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et un réel M tels que :*

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x, \phi(x)) \; \leq \; -\alpha(x) \quad , \qquad \left| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) \right| \; \leq \; M \quad , \qquad \forall \, x \, \in \, \mathbb{R}^n \; . \tag{3.94}$$

Preuve : Nous démontrons les deux sens de l'équivalence tour à tour :

1. <=) Supposons qu'il existe $\phi \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction localement Lipschitzienne, $\mathcal{U} \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie positive C^1 et propre dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue définie positive telles que (3.94) est satisfaite. Alors, nous obtenons directement :
$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\,[f(x,\phi(x)) \,+\, d] \;\leq\; -\alpha(x) \,+\, M|d| \quad , \qquad \forall (x,d) \,\in\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;. \tag{3.95}$$
Ceci établit la propriété de L^1-ISS stabilisabilité.
2. =>) Inversement, supposons le système L^1-Stabilisable sur $\mathbb{R}^n$ par une loi de commande $u \,=\, \phi(x)$, i.e. il existe $\mathcal{U} \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie positive C^1, et propre dans $\mathbb{R}^n$, et une fonction $\alpha \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ continue définie positive telles que :
$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\,[f(x,\phi(x)) \,+\, d] \;\leq\; -\alpha(x) \,+\, |d| \quad , \qquad \forall (x,d) \,\in\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;. \tag{3.96}$$
En prenant,
$$d \,=\, \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\right)^T |f(x,\phi(x))| \;, \tag{3.97}$$
dans l'inégalité (3.96), nous obtenons, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$,
$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x) f(x,\phi(x)) + \left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\right|^2 |f(x,\phi(x))| \;\leq\; \left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\right| |f(x,\phi(x))| \tag{3.98}$$
et donc,
$$\left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\right|^2 |f(x,\phi(x))| \;\leq\; 2\left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\right| |f(x,\phi(x))| \;. \tag{3.99}$$
Puisque $f(x,\phi(x))$ ne peut s'annuler qu'en $x \,=\, 0$, nous obtenons :
$$\left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)\right| \;\leq\; 2 \;. \tag{3.100}$$

□

3.2.4 Exemple de bouclage de sortie par une approche erreur de dynamique

Dans ce paragraphe, nous donnons tous les détails d'une synthèse de bouclage de sortie. Ceci nous permet d'illustrer comment tirer profit des divers points que nous avons vus dans l'approche erreur de dynamique, et domination L^p.

Cet exemple est tiré de [72]. Le système est donné sous la forme suivante :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \,+\, x_3^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \dot{x}_3 & = & u \end{array}\right. \quad , \qquad y \,=\, x_1 \;. \tag{3.101}$$

Nous nous intéressons au problème de stabilisation par bouclage de sortie dans le cas global. Nous allons suivre une approche erreur de dynamique domination L^1.

Conception d'un observateur-L^1 d'ordre réduit

La première étape de l'approche erreur de dynamique est la conception d'un observateur. Considérons le difféomorphisme :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3^2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \tag{3.102}$$

Dans ces nouvelles coordonnées le système (3.101) devient :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= (1+2u)\, y_3 \\ \dot{y}_3 &= u \\ y &= y_1 \end{cases} \tag{3.103}$$

Nous introduisons l'observateur d'ordre réduit suivant :

$$\begin{cases} \hat{y}_1 &= y \\ \hat{y}_2 &= w_2 + k_2 y \\ \hat{y}_3 &= w_3 + k_3 y \end{cases} , \qquad \begin{cases} \dot{w}_2 &= (1+2u)\,(w_3 + k_3 y_1) - k_2\,(w_2 + k_2 y_1) \\ \dot{w}_3 &= u - k_3\,(w_2 + k_2 y_1) \end{cases} \tag{3.104}$$

avec k_2 et k_3 des réels que nous spécifierons plus tard. Nous notons :

$$e_2 = \hat{y}_2 - y_2 \quad , \qquad e_3 = \hat{y}_3 - y_3 . \tag{3.105}$$

La fonction $\mathcal{W}$ que nous associons à cet observateur est :

$$\mathcal{W}(e_2, e_3) = e_2^2 - \alpha\, e_2\, e_3 + \beta\, e_3^2 , \tag{3.106}$$

où α et β sont des réels qui satisfont :

$$\alpha^2 < 4\,\beta . \tag{3.107}$$

Cette fonction satisfait :

$$\dot{\mathcal{W}} = (2e_2 - \alpha e_3)\,[(1+2u)e_3 - k_2 e_2] - k_3\,(2\beta e_3 - \alpha e_2)\, e_2 , \tag{3.108}$$

$$= -(2k_2 - k_3\alpha)\, e_2^2 + (k_2\alpha + 2(1+2u) - 2k_3\beta)\, e_2\, e_3 - \alpha(1+2u)\, e_3^2 . \tag{3.109}$$

La partie de droite de cette équation est négative définie si et seulement si :

$$\begin{gathered} \alpha(1+2u) > 0 , \quad (2k_2 - k_3\alpha) > 0 , \\ (k_2\alpha + 2(1+2u) - 2k_3\beta)^2 < 4\,(2k_2 - k_3\alpha)\,\alpha(1+2u) \end{gathered} \tag{3.110}$$

ou de façon équivalente lorsque $1+2u$ est positif,

$$\begin{cases} \alpha > 0 \quad , \qquad (2k_2 - k_3\alpha) > 0 , \\ 4\,(1+2u)^2 - 4\left[k_3 \frac{4\beta-\alpha^2}{2} + (2k_2 - k_3\alpha)\frac{\alpha}{2}\right](1+2u) + \left[(2k_2 - k_3\alpha)\frac{\alpha}{2} - k_3\frac{4\beta-\alpha^2}{2}\right]^2 < 0 . \end{cases}$$

La dernière inégalité fait apparaître un polynôme en $1+2u$. Pour que celui soit négatif il est nécessaire qu'il ait des racines. Ceci implique que $k_3(2k_2 - k_3\,\alpha)$ doit être positif et par conséquent que k_2 et k_3 doivent être strictement positifs

Maintenant si nous voulons autoriser $1+2u$ à être dans $(0, \bar{u})$ avec $\bar{u}$ le plus grand possible, il faut :

$$(2k_2 - k_3\alpha)\frac{\alpha}{2} \;=\; k_3\frac{4\beta - \alpha^2}{2} \tag{3.111}$$

et,

$$k_3\frac{4\beta - \alpha^2}{2} \;+\; (2\,k_2 - k_3\,\alpha)\frac{\alpha}{2} \tag{3.112}$$

le plus grand possible. Soit encore :

$$k_2\alpha \;=\; 2\,k_3\,\beta\;. \tag{3.113}$$

et $k_3\frac{4\beta-\alpha^2}{2}$ aussi grand que possible.

De cette étude nous concluons que si k_2 est donné par (3.52) et si pour un réel strictement positif ε, nous avons :

$$2\,\varepsilon \;\leq\; 1+2u \;\leq\; k_3\,(4\beta - \alpha^2) \;-\; 2\,\varepsilon\;, \tag{3.114}$$

alors il existe un nombre strictement positif η tel que :

$$\dot{\mathcal{W}} \;\leq\; -\eta\,\mathcal{W}\;. \tag{3.115}$$

Ceci implique que $\mathcal{W}$ est exponentiellement décroissante. Nous avons donc un observateur d'état dans les coordonnées y_1, y_2, y_3. A noter cependant que nous n'avons pas uniformité en la commande. Ecrit dans les coordonnées x, cet observateur est de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}_1 \;=\; y \\ \hat{x}_2 \;=\; w_2 \;-\; \hat{x}_3^2 \;+\; k_2 y \\ \hat{x}_3 \;=\; w_3 \;+\; k_3 y \end{cases}\;, \qquad \begin{cases} \dot{w}_2 \;=\; (1+2u)\,(w_3 + k_3 y_1) \;-\; k_2\,(w_2 + k_2 y_1) \\ \dot{w}_3 \;=\; u \;-\; k_3\,(w_2 + k_2 y_1) \end{cases} \tag{3.116}$$

Nous pouvons associer à cet observateur l'erreur de dynamique :

$$\dot{\overbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \;+\; \hat{x}_3^2 \\ \hat{x}_3 \\ u \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e_2 \\ [k_2 \;+\; k_3\hat{x}_3]e_2 \\ -k_3 e_2 \end{pmatrix}}_{k(y,x_2,x_3,w_2,w_3)}\;, \qquad e_2 \;=\; y_2 \;-\; \hat{y}_2\;. \tag{3.117}$$

Nous allons procéder à une factorisation de l'erreur de dynamique comme indiquée dans la remarque 9, pour réécrire la dynamique de l'observateur :

$$\dot{\overbrace{\begin{pmatrix} y \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \;+\; \hat{x}_3^2 \\ x_1 \\ u \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \;+\; k_3\hat{x}_3 \\ -k_3 \end{pmatrix}}_{m(y,w_2,w_3)} \ell(y, x_2, x_3, w_2, w_3) \tag{3.118}$$

où,

$$\ell(y, x_2, x_3, w_2, w_3) \;=\; e_2\;. \tag{3.119}$$

Si l'observateur rend L^1 le terme e_2, alors nous pourrons suivre l'approche *Erreur de dynamique, Domination* L^1. Et si nous trouvons une loi de commande pour le système (3.118) robuste à des perturbations L^1 nous pourrons alors conclure en utilisant le Théorème 8.

Puisque, $\mathcal{W}$ est une fonction quadratique en e_2 et e_3, il existe une constante η_2 telle que :

$$\mathcal{W} \;\geq\; \eta_2^2\,|e_2|^2 \;. \tag{3.120}$$

Tant que la loi de commande satisfera la contrainte (3.114), la fonction $\mathcal{W}_2$ définie comme :

$$\mathcal{W}_2 \;=\; 2\sqrt{\mathcal{W}} \tag{3.121}$$

satisfait :

$$\dot{\mathcal{W}}_2 \;\leq\; -\eta_2\,|\ell| \;. \tag{3.122}$$

Nous avons donc un observateur rendant la L^1 la perturbation ℓ mais ceci toujours sous la condition (3.114) que doit vérifier la commande.

Conception d'un contrôleur

Pour pouvoir appliquer le Théorème 8, nous devons maintenant construire une loi de commande qui rend le système suivant L^1-ISS :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \widehat{x}_2 \;+\; \widehat{x}_3^2 \;+\; \ell \;, \\ \dot{\widehat{x}}_2 & = & \widehat{x}_1 \;+\; [k_2 + 2k_3\widehat{x}_3]\,\ell \;, \\ \dot{\widehat{x}}_3 & = & u \;-\; k_3\,\ell \;. \end{array}\right. \tag{3.123}$$

avec une commande satisfaisant la contrainte (3.114).

Dans un premier temps, nous ignorons la perturbation ℓ et nous cherchons une loi de commande en trois étapes combinant les techniques de backstepping et de forwarding.

Étape 1 : Nous considérons le système :

$$\dot{\widehat{x}}_2 \;=\; u_1 \;. \tag{3.124}$$

Du fait de la contrainte (3.114), portant sur u agissant sur $\dot{\widehat{x}}_3$ (et donc la dérivée de u_1), nous cherchons un bouclage dont la dérivée temporelle est bornée. Un choix possible est :

$$u_1(\widehat{x}_2) \;=\; -\gamma\,\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \;, \tag{3.125}$$

où γ et δ sont des réels strictement positifs. Observons que $\dot{u}_1$ est alors :

$$\dot{u}_1 \;=\; \frac{\gamma^2}{2}\,\frac{\widehat{x}_2}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\,\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|} \;. \tag{3.126}$$

qui est borné en norme par $\frac{\gamma^2}{\delta}$.

Étape 2 : Nous considérons maintenant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\widehat{x}}_2 & = & \widehat{x}_3 \;, \\ \dot{\widehat{x}}_3 & = & u_2 \;. \end{array}\right. \tag{3.127}$$

Nous cherchons un bouclage d'état stabilisant. Considérons la fonction :

$$\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \;=\; \mathcal{U}_1(\widehat{x}_2) \;+\; \int_{u_1(\widehat{x}_2)}^{\widehat{x}_3} \left(2\mu[s-u_1(\widehat{x}_2)] + \rho[s|s| - u_1(\widehat{x}_2)|u_1(\widehat{x}_2)|]\right) ds \;, \tag{3.128}$$

$$= \mathcal{U}_1(\widehat{x}_2) \;+\; \mu\left[\widehat{x}_3 + \gamma\,\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]^2 \tag{3.129}$$

$$+\,\rho\left[\tfrac{1}{3}|\widehat{x}_3|^3 + \gamma^2\,\tfrac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\widehat{x}_3 + \tfrac{2\gamma^3}{3}\,\tfrac{|\widehat{x}_2|^3}{\sqrt{(1+\delta|\widehat{x}_2|)^3}}\right] \;,$$

où μ et ρ sont des réels strictement positifs et $\mathcal{U}_1$ est fonction définie positive radialement non bornée et C^1. Nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{U}}_2 \;=\; \mathcal{U}_1'(\widehat{x}_2)\widehat{x}_3 \;+\; \left(2\mu\left[\widehat{x}_3 + \gamma\,\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] + \rho\left[\widehat{x}_3|\widehat{x}_3| + \gamma^2\,\tfrac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right]\right) u_2 \tag{3.130}$$

$$+\;\left[\mu\gamma\,\tfrac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\,\tfrac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|} \;+\; \rho\gamma^2\tfrac{\widehat{x}_2|(2+\delta|\widehat{x}_2|)}{(1+\delta|\widehat{x}_2|)^2}\right]\left[\widehat{x}_3 + \gamma\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]\widehat{x}_3$$

$$= \;-\gamma\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\mathcal{U}_1'(\widehat{x}_2) \;+\; \left[\widehat{x}_3 + \gamma\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] \times \tag{3.131}$$

$$\times\;\left[\mathcal{U}_1'(\widehat{x}_2) + \left(2\mu + \rho\frac{\widehat{x}_3|\widehat{x}_3| + \gamma^2\frac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}}{\widehat{x}_3 + \gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}}\right)u_2 \;+\; \gamma\tfrac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\left(\mu\tfrac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} + \rho\gamma\tfrac{|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right)\widehat{x}_3\right]$$

En choisissant $\mathcal{U}_1$ qui satisfait :

$$\mathcal{U}_1'(\widehat{x}_2) \;=\; \gamma\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\left(\mu\frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} + \rho\gamma\frac{|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right)\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \tag{3.132}$$

i.e. :

$$\mathcal{U}_1(\widehat{x}_2) = \mu\gamma^2\,\frac{\widehat{x}_2^2}{1+\delta|\widehat{x}_2|} \;+\; \frac{2\rho\gamma^3}{3}\frac{|\widehat{x}_2|^3}{(1+\delta|\widehat{x}_2|)\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \;, \tag{3.133}$$

nous obtenons simplement :

$$\dot{\mathcal{U}}_2 \;=\; -\gamma\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\mathcal{U}_1'(\widehat{x}_2) \;+\; \left[\widehat{x}_3 + \gamma\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] \times \tag{3.134}$$

$$\times\;\left[\left(2\mu + \rho\frac{\widehat{x}_3|\widehat{x}_3| + \gamma^2\frac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}}{\widehat{x}_3 + \gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}}\right)u_2 \;+\; \gamma\tfrac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\left(\mu\tfrac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} + \rho\gamma\tfrac{|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right)\left(\widehat{x}_3 + \gamma\tfrac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right)\right]$$

Il suit que nous pouvons prendre u_2 comme

$$u_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \;=\; -\lambda\,\mathrm{sat}\left(\sigma\left[\widehat{x}_3 + \gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]\right) \tag{3.135}$$

où sat est la fonction de saturation standard et λ et σ sont des réels strictement positifs. En effet,

– quand $\left|\widehat{x}_3 + \gamma \frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right| \leq \frac{1}{\sigma}$ nous avons :

$$u_2(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \;=\; -\lambda\,\sigma \left[\widehat{x}_3 + \gamma \frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] \tag{3.136}$$

et $\dot{\mathcal{U}}_2$ est négative définie si

$$2\,\mu\,\lambda\,\sigma \;>\; \gamma\,\left(2\mu + \frac{\rho\gamma}{\delta}\right)\;. \tag{3.137}$$

– lorsque $\left|\widehat{x}_3 + \gamma \frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right| > \frac{1}{\sigma}$ nous avons :

$$u_2(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \;=\; -\lambda\,\mathrm{sign}\left(\widehat{x}_3 + \gamma \frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right)\;. \tag{3.138}$$

Alors, à partir de l'inégalité suivante :

$$\frac{a|a| + b|b|}{a+b} \;\geq\; \frac{|a|+|b|}{2} \qquad \forall (a,b)\;, \tag{3.139}$$

nous obtenons que $\dot{\mathcal{U}}_2$ est définie négative si

$$\frac{\rho}{2}\,\lambda \;>\; \gamma\,\left(2\mu + \frac{\rho\gamma}{\delta}\right)\;. \tag{3.140}$$

Nous observons que les réels ρ et μ peuvent toujours être choisis pour satisfaire (3.137) et (3.140) si, λ, γ, σ et δ sont choisis pour satisfaire :

$$\lambda \;>\; \frac{\gamma}{\sigma} \;+\; \frac{2\gamma^2}{\delta}\;. \tag{3.141}$$

Il est intéressant de remarquer pour la fonction $\mathcal{U}_2$ que nous avons obtenue, nous avons :
– avec (3.133), nous obtenons :

$$\frac{\widehat{x}_2^2}{1+\delta|\widehat{x}_2|} \;\leq\; \frac{\mathcal{U}_1(\widehat{x}_2)}{\mu\gamma^2} \;\leq\; \frac{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3)}{\mu\gamma^2} \tag{3.142}$$

– avec (3.129), nous obtenons :

$$\left|\widehat{x}_3 + \gamma \frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right| \;\leq\; \sqrt{\frac{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3)}{\mu}}\;. \tag{3.143}$$

Étape 3 : Nous considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & \widehat{x}_2 \;+\; \widehat{x}_3^2 \\ \dot{\widehat{x}}_2 & = & \widehat{x}_3 \\ \dot{\widehat{x}}_3 & = & u_3 \end{array}\right. \tag{3.144}$$

Nous recherchons un bouclage d'état u_3 qui satisfait (3.114). Nous utilisons la procédure de "Forwarding modulo LgV" introduite dans [78]. Nous cherchons donc une fonction $\mathcal{M}$ qui est C^1 et une fonction continue k qui satisfait :

$$\mathcal{M}'(\widehat{x}_2)\,\widehat{x}_3 \;=\; \widehat{x}_2 \;+\; \widehat{x}_3^2 \;+\; k(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)\left[\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] . \tag{3.145}$$

En prenant $\widehat{x}_3=-\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}$, nous obtenons que $\mathcal{M}$ doit être solution de :

$$-\gamma\,\mathcal{M}'(\widehat{x}_2)\,\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \;=\; \widehat{x}_2 \;+\; \gamma^2\frac{\widehat{x}_2^2}{1+\delta|\widehat{x}_2|} \tag{3.146}$$

i.e.

$$\mathcal{M}'(\widehat{x}_2) \;=\; -\frac{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}{\gamma} \;-\; \gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} . \tag{3.147}$$

Ce qui donne :

$$\mathcal{M}(\widehat{x}_2) \;=\; -\frac{2}{3}\left[\frac{\widehat{x}_2}{\gamma}+\frac{|\widehat{x}_2|\gamma}{\delta^2}\right]\frac{\delta^2\widehat{x}_2^2+3\delta|\widehat{x}_2|+3}{\sqrt{(1+\delta|\widehat{x}_2|)^3}+1} \;+\; \frac{\gamma}{2\delta}\frac{|\widehat{x}_2|}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}+1} . \tag{3.148}$$

Nous obtenons alors :

$$k(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \;=\; \mathcal{M}'(\widehat{x}_2) \;-\; \left[\widehat{x}_3-\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] , \tag{3.149}$$

$$=\; -\frac{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}{\gamma} \;+\; \gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \;-\; \left[\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] . \tag{3.150}$$

Nous remarquons qu'avec (3.133) et (3.129) et en utilisant le fait que :

$$\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \;+\; \frac{\delta|\widehat{x}_2|}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} , \tag{3.151}$$

nous avons :

$$|k(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)| \;\leq\; \frac{1}{\gamma} \;+\; \left[\frac{\delta}{\gamma^2}+2\right]\sqrt{\frac{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}{\mu}} . \tag{3.152}$$

Avec ces bornes, nous choisissons :

$$\mathcal{U}_3(x_1,\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \;=\; \frac{1}{\gamma}\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \;+\; \frac{2(\delta+2\gamma^2)}{3\gamma^2\sqrt{\mu}}\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)^{\frac{3}{2}} \;+\; \nu\sqrt{1+|x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)|^2} \;-\; \nu , \tag{3.153}$$

où ν est un réel strictement positif. Nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{U}}_3 \;=\; \frac{\gamma\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma]^2\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}}{\gamma^2\sqrt{\mu}}\dot{\mathcal{U}}_2 \;-\; \nu\,\frac{x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)}{\sqrt{1+|x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)|^2}}\,k(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)\left[\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right] \tag{3.154}$$

$$=\; -\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\mathcal{U}_1'(\widehat{x}_2)\frac{\gamma\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma]^2\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}}{\gamma^2\sqrt{\mu}} \tag{3.155}$$

$$+ \frac{\gamma\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma]^2\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}}{\gamma^2\sqrt{\mu}}\left[\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]\times$$

$$\times\left[\nu\frac{x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)}{\sqrt{1+|x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)|^2}}\frac{\gamma^2\sqrt{\mu}k(\hat{x}_2,\hat{x}_3)}{\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma^2]\sqrt{\mathcal{U}_2(\hat{x}_2,\hat{x}_3)}}+\left(2\mu+\rho\frac{\widehat{x}_3|\widehat{x}_3|+\gamma^2\frac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}}{\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}}\right)u_3\right.$$

$$\left.+\gamma\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\left(\mu\frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}+\rho\gamma\frac{|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right)\left(\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right)\right] .$$

Avec les résultats de l'étape 2, nous obtenons que $\dot{\mathcal{U}}_3$ est rendue définie négative en $(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)$ en choisissant le bouclage :

$$u_3(x_1,\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) = -\nu\frac{\frac{\gamma k(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}{\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma]\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}}}{\left(2\mu+\rho\frac{\widehat{x}_3|\widehat{x}_3|+\gamma^2\frac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}}{\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}}\right)}\frac{x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)}{\sqrt{1+|x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)|^2}} \tag{3.156}$$

$$-\lambda\,\mathrm{sat}\left(\sigma\left[\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]\right) .$$

Il est borné en norme par $\frac{\nu}{2\mu}+\lambda$. Ainsi la contrainte (3.114) est satisfaite.

Par ailleurs avec (3.156) et en invoquant le principe d'invariance de LaSalle pour la composante x_1, nous avons la stabilité globale asymptotique de l'origine du système.

Avec (3.156), nous avons donc un bouclage d'état stabilisant pour le système (3.123). Nous devons maintenant montrer qu'il donne la propriété de L^1-ISS.

Nous avons :

$$\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial x_1}(x_1,\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) = \nu\frac{x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)}{\sqrt{1+|x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)|^2}} , \tag{3.157}$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial\widehat{x}_2}(x_1,\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) = \frac{\gamma\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma]^2\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}}{\gamma^2\sqrt{\mu}}\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_2}(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \tag{3.158}$$

$$-\nu\frac{x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)}{\sqrt{1+|x_1-\mathcal{M}(\widehat{x}_2)|^2}}\mathcal{M}'(\widehat{x}_2) ,$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial\widehat{x}_3}(x_1,\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) = \frac{\gamma\sqrt{\mu}+[\delta+2\gamma]^2\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}}{\gamma^2\sqrt{\mu}}\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_3}(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \tag{3.159}$$

Pour obtenir des bornes pour ces dérivées, nous avons besoin de bornes sur celles de $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{M}$.

– pour $\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_2}$, nous avons :

$$\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_2}(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) = \gamma\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\left(\mu\frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}+\rho\gamma\frac{|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right)\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \tag{3.160}$$

$$+\left[\mu\gamma\frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}+\rho\gamma^2\frac{|\widehat{x}_2|(2+\delta|\widehat{x}_2|)}{(1+\delta|\widehat{x}_2|)^2}\right]\left[\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]$$

où :

$$\gamma\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\left(\mu\frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}+\rho\gamma\frac{|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right)\gamma\frac{|\widehat{x}_2|}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \le \gamma^2\left(2\mu+\frac{\rho\gamma}{\delta}\right)\sqrt{\frac{\widehat{x}_2^2}{1+\delta|\widehat{x}_2|}} \tag{3.161}$$

et :

$$\left[\mu\gamma\,\frac{1}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\,\frac{2+\delta|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}+\rho\gamma^2\,\frac{|\widehat{x}_2|(2+\delta|\widehat{x}_2|)}{(1+\delta|\widehat{x}_2|)^2}\right]\left|\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right| \;\leq\; \gamma\left(2\mu+\tfrac{\rho\gamma}{\delta}\right)\left|\widehat{x}_3+\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right| . \tag{3.162}$$

Ainsi, avec (3.133) et (3.129), nous obtenons :

$$\left|\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_2}(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)\right| \;\leq\; \frac{2\gamma\left(2\mu+\frac{\rho\gamma}{\delta}\right)}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)} . \tag{3.163}$$

– Pour $\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_3}$, nous avons :

$$\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_3}(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3) \;=\; 2\mu\left[\widehat{x}_3+\gamma\,\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right]+\rho\left[\widehat{x}_3|\widehat{x}_3|+\gamma^2\,\frac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right] \tag{3.164}$$

où, en utilisant (3.129), nous avons :

$$2\mu\left|\widehat{x}_3+\gamma\,\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right| \;\leq\; 2\sqrt{\mu}\,\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)} \tag{3.165}$$

et, en utilisant l'inégalité :

$$|a|a|+b|b|| \;\leq\; 2\,(a\,+\,b)^2\;+\;b^2 \qquad \forall(a,b)\ , \tag{3.166}$$

et (3.129), nous obtenons :

$$\rho\left|\widehat{x}_3|\widehat{x}_3|+\gamma^2\,\frac{\widehat{x}_2|\widehat{x}_2|}{1+\delta|\widehat{x}_2|}\right| \;\leq\; 3\,\rho\,\frac{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}{\mu} . \tag{3.167}$$

Donc :

$$\left|\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\widehat{x}_3}(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)\right| \;\leq\; 2\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}\;+\;3\,\rho\,\frac{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)}{\mu} . \tag{3.168}$$

– Pour $\mathcal{M}'$, nous avons :

$$\mathcal{M}'(\widehat{x}_2) \;=\; -\frac{1+\delta|\widehat{x}_2|}{\gamma\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\;-\;\gamma\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} . \tag{3.169}$$

En utilisant (3.133), nous avons directement :

$$|\mathcal{M}'(\widehat{x}_2)| \;\leq\; \frac{1}{\gamma}\;+\;\frac{\frac{\delta}{\gamma}+\gamma}{\sqrt{\mu}\gamma}\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)} . \tag{3.170}$$

Avec (3.133) et (3.129), nous avons aussi la borne :

$$|\widehat{x}_3| \;\leq\; \left|\widehat{x}_3+\gamma\,\frac{\widehat{x}_2}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}}\right|\;+\;\gamma\,\frac{|\widehat{x}_2|}{\sqrt{1+\delta|\widehat{x}_2|}} , \tag{3.171}$$

$$\leq\; \frac{2}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\mathcal{U}_2(\widehat{x}_2,\widehat{x}_3)} . \tag{3.172}$$

Finalement avec (3.157) à (3.159), (3.163), (3.168), (3.170) and (3.153), nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{U}}_3 \;\leq\; -\alpha(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \;+\; [c_1 + c_2 \mathcal{U}_3(x_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)]\, |\ell| \tag{3.173}$$

où α est une fonction définie positive, et c_1 et c_2 sont des réels positifs. En introduisant la fonction :

$$\mathcal{U}_4 \;=\; \log\left(1 + c_1 \;+\; c_2 \mathcal{U}_3\right) \tag{3.174}$$

nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{U}}_4 \;\leq\; -\frac{\alpha(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3)}{1 + c_1 \;+\; c_2 \mathcal{U}_3} \;+\; |\ell| \;, \tag{3.175}$$

ainsi c'est une loi de commande L^1-ISS stabilisante.

Nous avons ainsi montré que l'observateur était un observateur L^1. De plus la loi de commande introduite garantit une robustesse L^1 par rapport à des perturbations induites par l'erreur de dynamique. Nous sommes donc dans le contexte du Théorème 8, le bouclage de sortie dynamique ainsi défini rend l'origine du système globalement et asymptotiquement stable.

3.3 Approche Élimination

3.3.1 Principe général

Au paragraphe précédent nous cherchions à dominer l'effet de l'erreur de dynamique associée à l'observateur. Dans l'approche qui va être traitée dans ce paragraphe, nous étudions le cas où l'observateur compense exactement cet effet indépendamment de la stabilisabilité.

Sous la simple hypothèse de stabilisabilité sur $\mathbb{R}^n$ sur le système de l'observateur, nous obtenons (voir (3.39) :

$$\dot{\widehat{\mathcal{U}(\hat{x}} \leq -\mathcal{U}(\hat{x}) + \Gamma(w,x) \ , \tag{3.176}$$

avec $\hat{x} = \zeta(w,y)$ et Γ le terme induit par l'erreur de dynamique. Trivialement, si la négativité de l'observateur est de la forme :

$$\dot{\widehat{\mathcal{W}(x,w}} \leq -\Gamma(w,x) \ , \tag{3.177}$$

alors, nous compensons la perte de négativité. Un exemple de méthode suivant cette approche a été développé dans [69] et fait l'objet du prochain paragraphe.

3.3.2 Modification de l'observateur

Dans cette section, nous exposons sous une forme simplifiée les résultats de Praly dans [69], où l'observateur est modifié dans le but d'éliminer le terme de correction.

Reprenons le cas des systèmes dont la mesure y est un état du système, i.e l'état du système est $x = (x,y) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^p$. Imposons de plus une linéarité de la dynamique en x :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(y,u)x + B(y,u) \\ \dot{y} = C(y,u)x + D(y,u) \end{cases} \tag{3.178}$$

Dans ce contexte, nous imposons une hypothèse de stabilisabilité sur le système (3.178). Contrairement aux hypothèses précédentes, celle-ci ne possède aucune hypothèse de robustesse par rapport à une erreur de dynamique. Nous ne supposons donc valide que l'hypothèse 2 de la section 2.1.3. Précisément nous supposons l'existence de $\phi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ une fonction localement lipschitzienne, et $\mathcal{U} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$, un fonction définie positive, C^1, et propre dans $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^p$, telles que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x,y)\,(A(y,\phi)x + B(y,\phi)) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x,y)\,(C(y,\phi)x + D(y,\phi)) \\ \leq -\mathcal{U}(x,y) \quad , \qquad \forall\,(y,x) \ . \end{aligned} \tag{3.179}$$

Comme nous l'avons fait tout au long de ce chapitre, nous imposons de plus une hypothèse sur l'existence d'un observateur. Par contre, contrairement à l'hypothèse 13 de la section 3.1.3, nous donnons une structure à celui-ci. Nous supposons l'existence d'un observateur d'ordre réduit quadratique tel que nous les avons introduits dans la section 3.2.2 (mais avec une fonction ζ associée linéaire).

Hypothèse 16 [Observateur d'ordre réduit quadratique] :

Il existe une matrice définie positive P ainsi qu'une fonction $K \ : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n_x}$ telle que :

$$P(A(y,u) + K(y)C(y,u)) + (A(y,u) + K(y)C(y,u))^T P < 0 \quad , \qquad \forall\,(y,x,u)\ . \tag{3.180}$$

L'observateur d'ordre réduit associé est alors de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x} = w - \displaystyle\int_0^y K(s)\,ds \\ \hat{y} = y \end{cases} \tag{3.181}$$

et,

$$\dot{w} = A(y,u)\hat{x} + B(y,u) + K(y)[C(y,u)\hat{x} + D(y,u)] \tag{3.182}$$

Pour nous permettre de modifier cet observateur comme annoncé plus haut, nous introduisons une hypothèse supplémentaire spécifique :

Hypothèse 17 [Hypothèse supplémentaire] :

Pour tout x et y :

$$\lambda_{\max}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(y,x)\right) \leq 1 \quad , \qquad \left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,x)\right| \leq 1\ , \tag{3.183}$$

Dans ce contexte, Praly a obtenu le Théorème suivant dans [69] :

Théorème 9 ([69], Erreur de dynamique, Élimination) *Sous l'hypothèse (3.179) et sous les hypothèses 16 et 17, présentées ci-dessus, nous pouvons construire un bouclage de sortie dynamique tel que l'origine du système est globalement et asymptotiquement stable.*

Preuve : Nous redonnons ici les grandes lignes de la preuve de [69]. Posons $u = \phi(\hat{x})$, nous avons alors :

$$\dot{\mathcal{U}}(y,\hat{x}) \leq -\mathcal{U}(y,\hat{x}) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(y,\hat{x})C(\hat{x} - x) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})\left(\dot{\hat{x}} - A\hat{x} - B\right)}_{\text{Terme }\Gamma} \tag{3.184}$$

où $\hat{x}$ est l'état d'une dynamique de $\mathbb{R}^{n_x}$ qui sera définie par la suite, et où nous avons introduit les notations :

$$A = A(y,\phi(\hat{x})) \quad , \qquad B = B(y,\phi(\hat{x})) \quad , \qquad C = C(y,\phi(\hat{x}))\ . \tag{3.185}$$

Introduisons la fonction $\mathcal{W}$ suivante :

$$\mathcal{W}(y,x,\hat{x}) = \frac{1}{2a^2}(x - \hat{x})^T P(x - \hat{x}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})(x - \hat{x}) + U \tag{3.186}$$

où U et a sont des réels positifs.

Nous avons, si $x \neq \hat{x}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}} < & -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})\left(\dot{\hat{x}} - Ax - B\right) \\ & + \frac{1}{a^2}(x-\hat{x})^T P\left(\dot{\overbrace{a^2 P^{-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})^T - \hat{x}}} + A\hat{x} + KC(\hat{x}-x) + B\right)\end{aligned} \tag{3.187}$$

ou encore,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}} < & -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})\left(\dot{\hat{x}} - Ax - B\right) \\ & + \frac{1}{a^2}(x-\hat{x})^T P\left(\dot{\overbrace{a^2 P^{-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})^T - \hat{x} - \int_0^y K(s)\,ds}} + A\hat{x} + KC\hat{x} + B + K(y)D\right)\end{aligned}$$

Donc, si nous introduisons :

$$w = \hat{x} + \int_0^y K(s)\,ds - a^2 P^{-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x}) \tag{3.188}$$

et,

$$\dot{w} = A\hat{x} + B + K(C\hat{x} + D) + v \tag{3.189}$$

avec v que nous spécifierons par la suite, nous obtenons si $x \neq \hat{x}$:

$$\dot{\mathcal{W}} < -|x - \hat{x}|^2 - \underbrace{\frac{1}{a^2}(x-\hat{x})^T P v + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})\left(\dot{\hat{x}} - Ax - B\right)}_{\text{Terme } \Gamma} \tag{3.190}$$

Comme nous le voyons sur les équation (3.184) et (3.190), le terme Γ induit par l'erreur de dynamique disparaît lorsque l'on considère la fonction :

$$\mathcal{V}(y,x,\hat{x}) = \mathcal{U}(y,\hat{x}) + \mathcal{W}(y,x,\hat{x}) , \tag{3.191}$$

et,

$$v = -a^2 P^{-1} C^T \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(y,\hat{x})^T + a^2 P^{-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})A \tag{3.192}$$

En effet, nous obtenons si $x \neq \hat{x}$:

$$\dot{\overbrace{\mathcal{V}(y,x,\widehat{x})}} < -\mathcal{U}(y,\hat{x}) \tag{3.193}$$

Il est possible de montrer en utilisant l'hypothèse (3.183) (voir [69]) qu'il existe U dans $\mathbb{R}_+$ tel que cette fonction $\mathcal{V}$ est définie positive. Ceci nous permet de conclure que le bouclage de sortie dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= w - \int_0^y K(s)\,ds + aP^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x}) , \\ \dot{w} &= \underbrace{A\hat{x} + B + K(C\hat{x} + D)}_{\text{Observateur initial}} - \underbrace{a^2 P^{-1} C^T \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(y,\hat{x})^T + a^2 P^{-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y,\hat{x})A}_{\text{Modification}}\end{aligned} \tag{3.194}$$

rend l'origine globalement et asymptotiquement stable pour le système bouclé. □

Remarque 12 :

1. Observons que la première équation dans (3.194) ne définit $\hat{x}$ qu'implicitement. Du fait de (3.183), pour chaque paire (w, y) fixée, l'application :

$$F_{w,y} \ : x \mapsto w \ - \ \int_0^y K(s)\, ds \ + \ aP^{-1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y, \hat{x}) \tag{3.195}$$

est continue, envoie le compact $\{\hat{x} \ : |\hat{x}| \leq b\}$ dans lui-même si $b = \dfrac{a\lambda_{\max}P}{\lambda_{\min}P} + |w - \displaystyle\int_0^y K(s)ds|$. De plus nous avons :

$$\begin{aligned} |F_{w,y}(x_1) - F_{w,y}(x_2)| \ &= \ \frac{a}{\lambda_{\min}P}\left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y, x_1) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y, x_2)\right| \ , \\ &= \ \frac{a}{\lambda_{\min}P}\left|\int_0^1 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x}(y, x_2 + s(x_1 - x_2)\, ds\, (x_1 - x_2)\right| \ , \\ &\leq \ \frac{a}{\lambda_{\min}P}|x_1 - x_2| \ . \end{aligned} \tag{3.196}$$

Donc, en choisissant :

$$a \ = \ \frac{\lambda_{\min}P}{2} \ , \tag{3.197}$$

la fonction $F_{w,y}$ est une contraction sur ce compact. Elle a donc un point fixe unique dans ce compact. Il permet de définir une fonction ψ telle que $\hat{x} \ = \ \psi(y, x)$ est solution de (3.194).

2. Si on applique la démarche abordée dans la section 3.1.1 afin de décomposer la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}$ de façon à ce qu'elle s'écrive sous la forme d'une fonction de $\hat{x}$ et de y plus une fonction "distance" d'une erreur d'estimation d'état, nous obtenons :

$$\mathcal{V}(y, x, \hat{x}) \ = \ \mathcal{U}_1(y, \hat{x}) \ + \ \mathcal{W}_1(y, x, \hat{x}) \ , \tag{3.198}$$

avec,

$$\mathcal{U}_1(y, \hat{x}) \ = \ \mathcal{U}(y, \hat{x}) \ - \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y, \hat{x})\right)^2 \ + \ U \tag{3.199}$$

et,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1(y, \hat{x}, x) \ = \ \frac{1}{2a^2}&\left(x \ + \ aP^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y, \hat{x}) \ - \ \hat{x}\right)^T \\ &P\left(x \ + \ aP^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(y, \hat{x}) \ - \ \hat{x}\right) \end{aligned} \tag{3.200}$$

Il apparaît un point important $\mathcal{U}_1$ la fonction de $(y, \hat{x})$ obtenue n'est pas $\mathcal{U}$, la fonction donnée par l'hypothèse de stabilisabilité que nous aurions utilisée dans le cadre d'une démarche erreur de commande.

Chapitre 4

Cas des systèmes sous forme triangulaire

Dans ce chapitre nous nous restreignons à une dynamique pour le système (1.1) telle que, exprimée dans des coordonnées appropriées, la fonction f associée à une structure triangulaire particulière. D'une part, ceci va nous permettre d'aller plus loin dans la compréhension des restrictions liées aux diverses hypothèses de stabilisabilité et de détectabilité que nous avons rencontrées dans les chapitres 2 (Erreur de commande) et 3 (Erreur de dynamique). D'autre part, cette classe particulière de systèmes est celle pour laquelle il y a le plus, et de très loin, de résultats publiés concernant le bouclage de sortie. Cette littérature est très riche et en même temps très fouillis. Nous allons voir que les concepts généraux et les distinctions Erreur de commande / Erreur de dynamique, Domination / Élimination peuvent permettre de mieux situer ces résultats les uns par rapport aux autres, voir parfois les améliorer "à moindre frais", et même d'en proposer de nouveaux. Malheureusement cette tâche d'unification, d'interprétation et d'extension des résultats connus n'a pu être qu'ébauchée. Un travail long et en profondeur de bibliographie et d'analyse reste à parfaire pour aller au bout.

4.1 La Forme Normale

4.1.1 Définition et Motivation

Comme nous l'avons vu jusqu'à présent la conception d'un bouclage de sortie nécessite des propriétés de stabilisabilité fortes. Dans le but de faciliter cette étape nous allons nous restreindre à la classe des systèmes triangulaires pour laquelle les techniques de stabilisation sont bien maîtrisées. Nous verrons notamment que, par des procédures de backstepping standard, nous pouvons propager des propriétés de robustesse.

Nous allons ainsi considérer les systèmes mono entrée, et mono sortie qui peuvent se

mettre sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & F(z,\xi_1)\ , \\ \dot{\xi}_1 & = & \xi_2\ , \\ \dot{\xi}_2 & = & \xi_3 \\ & \vdots & \\ \dot{\xi}_{n_y} & = & f(z,\xi_1,\ldots,\xi_{n_y})\ +\ g(\xi_1)\,u\ , \\ y & = & \xi_1\ . \end{array}\right. \tag{4.1}$$

avec pour état $x = (z, \xi_1, \ldots, \ldots, \xi_{n_y})$ où z est dans $\mathbb{R}^{n_z}$ et ξ_i est dans $\mathbb{R}$, et $n = n_z + n_y$, et où la fonction F est dans C^{n_y}, les fonctions f et g sont dans C^1 et nous avons :

$$F(0,0)\ =\ 0\quad ,\qquad f(0,0,\ldots,0)\ =\ 0\quad ,\qquad g(\xi_1)\ >\ 0\quad \forall\,\xi_1\ \in\ \mathbb{R}\ . \tag{4.2}$$

Dans ce chapitre nous nous plaçons dans le contexte de la stabilisation globale. Ainsi, nous prenons $\mathcal{I}_x\ =\ \mathbb{R}^n$.

La dynamique en z est appelée *dynamique inverse*. Comme nous le verrons, le problème de bouclage de sortie pour ce type de système se heurte à des difficultés supplémentaires lorsque cette dynamique peut exhiber des instabilités.

Les systèmes dont la dynamique peut être décrite sous la forme (4.1) ont été caractérisés complètement par Byrnes et Isidori dans [14, Corollary 5.7]. Ces hypothèses sont écrites en termes géométriques pour ne pas être dépendantes des coordonnées.

Pour la suite de ce chapitre, il est utile de réécrire le système (4.1) dans d'autres coordonnées. Etant données $2(n_y - 1)$ fonctions arbitraires mais suffisamment différentiables $(a_i)_{1\le i\le n_y-1}$ à valeurs positives et $(b_i)_{1\le i\le n_y-1}$, il existe un difféomorphisme :

$$(z,\ \xi_1,\ \ldots,\xi_{n_y})^T\ \mapsto\ (z,\ y,\ \ldots,y_{n_y})^T \tag{4.3}$$

et deux autres fonctions, a_{n_y} et b_{n_y}, telles que le système (4.1) peut être réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & F(z,y)\ , \\ \dot{y} & = & a_1(z,y)\,y_2\ +\ b_1(z,y)\ , \\ \dot{y}_2 & = & a_2(z,y,y_2)\,y_3\ +\ b_2(z,y,y_2)\ , \\ & \vdots & \\ \dot{y}_{n_y-1} & = & a_{n_y-1}(z,y,y_2,\ldots,y_{n_y-1})\,y_{n_y}\ +\ b_{n_y-1}(y,y_2,\ldots,y_{n_y-1})\ , \\ \dot{y}_{n_y} & = & a_{n_y}(y)\,u\ +\ b_{n_y}(z,y,y_2,\ldots,y_{n_y})\ . \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Pour récupérer sous cette forme des propriétés caractéristiques de la forme (4.1) il est intéressant d'imposer que la fonction a_{n_y} ne dépende que de y. Cette contrainte est satisfaite si le produit $\prod_{i=1}^{n_y-1} a_i$ ne dépend que de y.

4.1.2 État de l'art du bouclage de sortie pour les systèmes triangulaires

Ce sont pour les systèmes qui peuvent s'écrire sous la forme (4.4) qu'il y a le plus aujourd'hui de résultats connus de stabilisation par bouclage de sortie. Tous ces résultats sont issus des travaux de Kanellakopoulos, Kokotovic et Morse dans [33] et ceux de Marino et Tomei parus la même année dans [57]. Ces auteurs ont introduit un contexte qui suit une approche domination d'un terme induit par une erreur de dynamique, telle que nous l'avons formalisée dans la section 3.2.1. La conception du contrôleur a été faite selon une démarche que nous pouvons réinterpréter à posteriori selon les termes du Théorème 8 : *Erreur de dynamique, Domination* L^2. Les deux hypothèses sont satisfaites comme suit :

1. Pour obtenir l'existence d'un observateur L^2 (hypothèse 14), les auteurs ont supposé que le système admet une forme dite "output-feedback". Plus précisément ils ont supposé que, pour le système écrit sous la forme (4.4), $a_i = 1$, les b_i ne dépendent que de y et enfin la dynamique en z est linéaire et asymptotiquement stable, i.e.

$$\dot{z} \;=\; F_0\, z \,+\, F_1(y) \;, \tag{4.5}$$

   où, F_0 est une matrice Hurwitz.

2. Pour parvenir à construire une loi de commande assurant une robustesse vis-à-vis de l'erreur de dynamique introduite par le terme de correction de l'observateur, les auteurs de [33] ont utilisé une procédure de backstepping robuste, ceux de [57] ont utilisé une procédure nommée "filtered transformation". Ils ont ainsi obtenu une loi de commande assurant une stabilité L^2.

Une autre méthode a été introduite dans [35] par Kanellakopoulos, Kristic et Kokotovic (voir aussi [50]). En utilisant une démarche constituée d'une partie domination et d'une partie élimination, les auteurs ont introduit une procédure de stabilisation nommée "interlacing" qui leur a permis d'obtenir une autre solution pour les mêmes systèmes admettant cette forme output feedback.

Par la suite, de nombreux résultats ont été obtenus pour parvenir à étendre les résultats de [33, 57] à une classe plus large de systèmes. Par exemple, Praly et Jiang dans [76] ont considéré des systèmes où la dynamique en z est non-linéaire, $a_i = 1$ et les b_i, dépendent maintenant de y et z. De plus l'hypothèse sur la dynamique inverse est relâchée en le fait que :

$$\dot{z} \;=\; F(z, y) \;, \tag{4.6}$$

est supposée ISS.

Les hypothèses ont permis aux auteurs de travailler à partir d'un observateur basé sur une simple chaîne d'intégrateurs et donc de considérer les termes $b_i(y, z)$ comme des perturbations. L'idée pour cela est de voir le système bouclé comme une interconnexion pour laquelle une condition de petit gain doit être satisfaite. Une méthode d'assignation de gain dans une chaîne d'intégrateur permet de résoudre ce dernier problème et donne un bouclage de sortie dynamique.

Un autre extension a été proposée par Praly et Kanellakopoulos dans [77], selon une démarche plus proche de [50, 58]. En introduisant une extension dynamique pour construire l'observateur, les auteurs ont pu traiter des cas où les fonctions b_i intervenant dans le système

(4.4) sont indépendantes de z et linéaire en $(y_2, \ldots, y_{n_y})$, i.e, se décomposent en

$$b_i \;=\; \sum_j^i b_{i,j}(y) y_j \;, \tag{4.7}$$

et où la dynamique en z est elle aussi triangulaire et linéaire en les composantes non mesurées de l'état et de sorte que la zéro dynamique est localement exponentiellement stable. Le gain de l'observateur est alors généré par une équation différentielle de Riccati.

Krishnamurthy, Khorrami et Jiang dans [49], ont aussi considéré des systèmes satisfaisant (4.7). Par contre la démarche employée n'utilise pas d'extension dynamique. L'observateur est construit sous des hypothèses supplémentaires concernant les fonctions a_i et b_i de façon à ce que le système vérifie une hypothèse dite de "CUDD" (voir la proposition 8).

Dans [71], l'équation matricielle mentionnée ci-dessus de Riccati a été remplacée par une équation scalaire. L'observateur obtenu est un observateur grand gain dont le gain est réglé par l'extension dynamique. Ceci a permis de considérer des systèmes où l'équation (4.7) est remplacée par l'inégalité :

$$b_i(y_1, y_2 + \delta_2, \ldots, y_i + \delta_i) - b_i(y_1, y_2, \ldots, y_i) \;\leq\; b_{i,m}(y) \sum_j^i |\delta_j| \;, \tag{4.8}$$

Cette approche grand gain, dynamiquement modifié, a reçu par la suite d'importantes extensions. Elle a ainsi été utilisée dans [30, 39], mais ces résultats ne rentrent pas dans le contexte de ce document car l'extension dynamique n'a aucune propriété de stabilité. En effet, celle-ci est de la forme :

$$\dot{r} \;=\; y^2 \;. \tag{4.9}$$

où r est l'extension dynamique qui nous permet de régler le gain de l'observateur. Les approches considérées dans [77, 71] en revanche introduisent des extensions dynamiques telles qu'il existe un compact qui est asymptotiquement stable le long des trajectoires du système en boucle fermée.

En utilisant une forme plus générale le l'extension dynamique introduite dans [71] et en exploitant les outils qu'ils avaient développés dans [49], Krishnamurthy et Khorrami ont obtenu des résultats dans [48] pour permettre de traiter des systèmes tels que :

$$b_i(z, y_1, \ldots, y_i) \;\leq\; b_{i,m}(y) \sum_j^i |y_j| \;, \tag{4.10}$$

A noter aussi les résultats obtenus par Qian et Lin dans [81] où les auteurs ont considéré des systèmes triangulaires mais qui sont sous une forme plus générale que la forme (4.4). La méthode repose dans ce cas sur des propriétés d'homogénéité de la chaîne d'intégrateurs.

Tous ces résultats ont pour point commun de supposer une stabilité asymptotique pour la dynamique inverse, ou au moins de supposer qu'elle a une propriété "d'Entrée bornée-État borné".

4.2 Systèmes à non minimum de phase

4.2.1 Principe général

Dernièrement, les résultats obtenus par Karagiannis, Ziang, Ortega et Astolfi dans [36], Marino et Tomei dans [59] ainsi que dans [2] ont introduit une nouvelle démarche permettant d'étendre les résultats existants de bouclage de sortie aux systèmes ayant une dynamique inverse instable. Dans ces articles il n'y a plus d'hypothèse de stabilité asymptotique pour la dynamique inverse, mais plutôt de "stabilisabilité" par une commande (fictive) $y = \phi_z(z)$. Précisément :

Hypothèse 18 [Stabilisabilité de la z dynamique] :

Il existe une 'loi de commande' :

$$y = \phi_z(z) \tag{4.11}$$

telle que l'origine du système suivant :

$$\dot{z} = F(z, \phi_z(z)) \ . \tag{4.12}$$

est globalement asymptotiquement stable.

L'existence de cette fonction ϕ_z qui stabilise asymptotiquement la dynamique en z est presque nécessaire. En effet, supposons l'existence d'un bouclage de sortie dynamique stabilisant globalement et asymptotiquement l'origine du système 4.1. En rassemblant l'état de l'extension dynamique ainsi que celui des composantes ξ_i dans un vecteur Ξ, le système en boucle fermé peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{z} &= F(z, \xi_1) \ , \\ \dot{\Xi} &= \Phi(z, \Xi) \ , \\ \xi_1 &= H(\Xi) \ . \end{cases} \tag{4.13}$$

La stabilité asymptotique et globale implique l'existence d'une fonction $\mathcal{V}$ définie positive, propre et C^1 telle que sa dérivée le long des trajectoires du système (4.13) est définie négative. Aussi, pour tout z dans $\mathbb{R}^{n_z}$, la fonction $\Xi \to \mathcal{V}(z, \Xi)$ admet un minimum atteint en certains points dans l'espace dépendant de z noté $\mathrm{Argmin}_\Xi(\mathcal{V}(z, \Xi))$. D'une façon analogue à la démonstration de la proposition 1 dans la section 2.1.1, nous pouvons démontrer que, si il existe une sélection Höldérienne $\psi_z : z \to \mathrm{Argmin}_\Xi(\mathcal{V}(z, \Xi))$ d'ordre strictement plus petit que $\frac{1}{2}$, alors la fonction $\mathcal{U}_z$ définie par :

$$\mathcal{U}_z(z) = \mathcal{V}(z, \psi_z(z)) \tag{4.14}$$

est définie positive, radialement non bornée et C^1, et la fonction ψ_z définie par :

$$\phi_z(z) = H(\psi_z(z)) \tag{4.15}$$

est continue et nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(z) F(z, \phi_z(z)) < 0 \qquad \forall z \neq 0 \ . \tag{4.16}$$

Ainsi l'existence d'une fonction ϕ_z est nécessaire à partir du moment où il existe cette sélection Höldérienne, ψ_z.

Avec cette hypothèse de stabilisabilité de la dynamique inverse (hypothèse 18) en commun, les publications [36] d'une part, et [59] et [2], d'autre part diffèrent par la démarche. Dans [36] la démarche employée repose sur une "erreur de commande", la démarche exposée dans [2] et dans [59] se rapproche d'une "erreur de dynamique". Dans cette section, nous allons exposer tour à tour ces deux stratégies.

4.2.2 Cas Erreur de dynamique

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la stabilisabilité de la zéro dynamique est une condition presque nécessaire à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique stabilisant globalement et asymptotiquement l'origine. Dans les précédents chapitres, la stabilisabilité requise pour la construction d'un bouclage de sortie nécessitait des propriétés de robustesse. Nous allons suivre la même démarche et imposer qu'il existe un bouclage $y = \phi_z(z)$ qui stabilise asymptotiquement l'origine de la dynamique inverse mais aussi qui assure une certaine robustesse par rapport à une erreur introduite par le fait que l'on va utiliser une approche erreur de dynamique.

Ce paragraphe reprend les résultats que nous avons obtenus dans [2] en s'inspirant des travaux de Marino et Tomei dans [59].

4.2.2.1 Construction de l'observateur

La première étape d'une approche erreur de dynamique est la conception d'un observateur. En collectant les composantes z et y_2 à y_{n_y} dans un seul vecteur d'état noté x, nous retrouvons un système de la forme (3.59), i.e. :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x,y) + B(y)\,u \\ \dot{y} &= C(x,y)\ . \end{cases} \tag{4.17}$$

Nous allons supposer l'existence d'un observateur d'ordre réduit avec une fonction ζ linéaire en w (voir paragraphe 3.2.2). Nous supposons donc avoir un observateur de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x} &= w + \displaystyle\int_0^y K(s)\,ds \\ \hat{y} &= y \end{cases} \quad , \qquad \dot{w} = A(\hat{x},y) + B(y)u + K(y)C(\hat{x},y,u) \tag{4.18}$$

où K est une fonction C^{n_y} à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_y}$.

Pour cette classe de systèmes triangulaires, il est possible d'exploiter les résultats obtenus par Krishnamurthy, Khorrami et Jiang dans [49] pour obtenir des conditions suffisantes permettant d'obtenir un observateur d'ordre réduit quadratique. Ainsi, nous supposons l'existence de coordonnées pour z et de fonctions a_i, b_i, c_i et f_i tel que le système (4.1) admet la

forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y} & = & b_1(y) \;+\; a_1(y)\, y_2 \;, \\ \dot{y}_2 & = & b_2(y, y_2) \;+\; a_2(y)\, y_3 \;, \\ & \vdots & \\ \dot{y}_{n_y-1} & = & b_{n_y-1}(y, y_2, \ldots, y_{n_y-1}) \;+\; a_{n_y-1}(y)\, y_{n_y} \;, \\ \dot{y}_{n_y} & = & b_{n_y}(y, y_2, \ldots, y_{n_y}) \;+\; c_0(y)\, z_1 \;+\; a_{n_y}(y)\, u \;, \\ \dot{z}_1 & = & f_1(y, z_1) \;+\; c_1(y)\, z_2 \;, \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n_z-1} & = & f_{n_z-1}(y, z_1, \ldots, z_{n_z-1}) \;+\; c_{n_z-1}(y)\, z_{n_z} \\ \dot{z}_{n_z} & = & f_{n_z}(y, z_1, \ldots, z_{n_z}) \end{array}\right. \tag{4.19}$$

où les a_i et les c_j prennent des valeurs positives.

Nous introduisons les fonctions $\phi_{i,j}(z, y, y_2, \ldots, y_n)$, $2 \leq j \leq i \leq n+m$ et $\psi_i(y)$ définies par :

$$\phi_{i,j}(z, y, y_2, \ldots, y_n) \;=\; \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial b_i}{\partial y_j}(y, y_2, \ldots, y_n) & 2 \leq j \leq i \leq n \\ 0 & n+1 \leq i \leq m \quad , \qquad 2 \leq j \leq n \\ \frac{\partial f_{i-n}}{\partial z_{j-n}}(z, y) & n+1 \leq j \leq i \leq n+m \end{array}\right. \tag{4.20}$$

$$\psi_i(y) \;=\; \left\{\begin{array}{ll} a_i(y) & 2 \leq i \leq n-1 \\ c_{i-n}(y) & n \leq i \leq n+m-1 \end{array}\right. \tag{4.21}$$

Proposition 8 ([49, Lemma 1]) *Si il existe un réel positif ρ, tel que nous avons, pour tout $(z, y, y_2, \ldots, y_{n_y})$ dans $\mathbb{R}^n$:*

$$\rho \;\leq\; \psi_i(y) \qquad , \; 2 \leq i \leq n+m-1 \;, \tag{4.22}$$

$$\rho\, \psi_i(y) \;\leq\; \psi_{i-1}(y) \qquad , \; 3 \leq i \leq n+m-1 \;, \tag{4.23}$$

$$\rho\, |\phi_{i,j}(z, y, y_2, \ldots, y_n)| \;\leq\; \psi_i(y) \qquad , \; 2 \leq i \leq n+m-1 \;, \tag{4.24}$$

$$\rho\, |\phi_{n+m,j}(z, y, y_2, \ldots, y_n)| \;\leq\; \psi_{n+m-1}(y) \qquad , \; 2 \leq i \leq n+m-1 \;, \tag{4.25}$$

alors il existe un vecteur $K(y)$ et une matrice P tels que

$$P\, \frac{\partial A - KC}{\partial x}(x, y) \;+\; \frac{\partial A - KC}{\partial x}(x, y)^T P \;<\; -\, I \;. \tag{4.26}$$

et nous avons un observateur d'ordre réduit quadratique.

Le système de l'observateur s'écrit :

$$\dot{\overbrace{\begin{pmatrix} \hat{x} \\ y \end{pmatrix}}} \;=\; \begin{pmatrix} A(\hat{x}, y) \\ C(\hat{x}, y) \end{pmatrix} \;+\; B(y)\, u \;+\; \underbrace{\begin{pmatrix} K(y) \\ I \end{pmatrix}}_{m(y)} \underbrace{[C(x, y) \;-\; C(\hat{x}, y)]}_{\ell(x, \hat{x}, y)} \tag{4.27}$$

où nous avons introduit les fonctions m et ℓ caractérisants la factoristion du terme de correction.

Suivant la démarche Erreur de dynamique, L^p-Domination, nous demandons à l'observateur de rendre L^p le terme $C(x,y) - C(\hat{x},y)$.

Nous allons introduire le contexte que nous qualifions de L^2 correspondant au cas où l'observateur rend L^2 ce terme. Le cas où $p = 1$ sera abordé dans un deuxième temps.

4.2.2.2 Cas L^2

Dans ce contexte, nous avons donné dans le paragraphe 3.2.2 une condition suffisante permettant d'obtenir un observateur L^2 (voir la proposition 5 et la remarque 10) qui est :

Hypothèse 19 [Observateur d'ordre réduit L^2] :

Les fonction $(a_i)_{1\leq i\leq n_y-1}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n_y-1}$ peuvent être choisies telles qu'il existe une fonction K et une matrice positive et définie P qui satisfait

$$P\,\frac{\partial A - KC}{\partial x}(x,y) \;+\; \frac{\partial A - KC}{\partial x}(x,y)^T P \;<\; -\,\frac{\partial C}{\partial x}(x,y)^T \frac{\partial C}{\partial x}(x,y)\;. \tag{4.28}$$

Remarquons que (4.28) diffère de (4.26). Ainsi par exemple si les hypothèse de la proposition 8 sont satisfaites il nous faut une propriété supplémentaire sur la fonction C. Pour obtenir (4.26), nous devons supposer que $\left|\frac{\partial C}{\partial x}(x,y)\right|$ est bornée ou plus précisément que a_1 ne dépend pas de z et que $\left|\frac{\partial b_1}{\partial z}(x,y)\right|$ est borné. Ceci est une importante restriction, mais comme nous le verrons dans les exemples le contexte L^1 nous permet de travailler avec des systèmes ne suivant pas cette restriction.

Suivant les concepts Erreur de dynamique, Domination L^p que nous avons introduits dans la section 3.2.1, nous devons maintenant construire une loi de commande garantissant une stabilisabilité L^2 pour le système de l'observateur, i.e pour le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} \;=\; A(\hat{x},y) \;+\; B(y)\,u \;+\; K(y)\,d \\ \dot{y} \;=\; C(\hat{x},y) \;+\; d \end{cases} \tag{4.29}$$

Pour construire une loi de commande robuste à des perturbations L^2, nous allons utiliser une technique de backstepping itérative. Nous introduisons pour cela une hypothèse de stabilisabilité de la dynamique inverse par rapport à une erreur de dynamique :

Hypothèse 20 [L^2-stabilisabilité de la dynamique inverse] :

Il existe une fonction $\phi_z \;:\mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}$ qui est C^{n_y} et telle que le système suivant est L^2-ISS :

$$\dot{z} \;=\; F(z,\phi_z(z)) \;+\; K_z(\phi_z(z))\,d\,. \tag{4.30}$$

où K_z est composante en z de la fonction K. Plus précisément, il existe une fonction C^{n_y+1}, définie positive, et radialement non bornée, $\mathcal{U}_z \;:\mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$ et une fonction continue définie positive $\alpha_z : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$ telles que nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(z)\,[F(z,\phi_z(z)) \;+\; K_z(\phi_z(z))\,d] \;\leq\; -\alpha_z(z) \;+\; |d|^2 \qquad \forall (z,d) \in \mathbb{R}^{n_z}\times\mathbb{R}^{n_z}\;. \tag{4.31}$$

Cette hypothèse nous permet de travailler dans le contexte du Théorème 8 du paragraphe

3.2.1 sur l'approche erreur de dynamique domination L^2. Le résultat que nous avons obtenu dans [2] est le suivant :

Théorème 10 (Erreur de dynamique, Domination L^2) *Si il existe des fonctions a_i et b_i telles que le système (4.4) admet l'existence d'un observateur d'ordre réduit L^2 (hypothèse 19) et si la dynamique inverse est L^2 stabilisable (hypothèse 20), alors il existe un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système.*

Preuve : L'hypothèse de détectabilité du Théorème 8 est directement satisfaite. En effet, nous obtenons directement pour tout $x \neq \hat{x}$ (voir la proposition 5 pour plus de détail) :

$$\overbrace{(x - \hat{x})^T P(x - \hat{x})}^{\cdot} < -|C(x,y) - C(\hat{x},y)|^2 \ . \tag{4.32}$$

Il ne nous reste qu'à montrer que l'hypothèse 15 de L^2-stabilisabilité et aussi satisfaite. Pour cela nous devons construire une loi de commande ϕ appropriée. Nous faisons cette construction en propageant la propriété de stabilisabilité de la dynamique inverse à l'ensemble des dynamiques du système (4.4)

Précisément nous considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = F(\hat{z},\hat{y}) + K_z(y)d \ , \\ \dot{\hat{y}} = a_1(\hat{z},\hat{y})\hat{y}_2 + b_1(\hat{z},\hat{y}) + d \ , \\ \vdots \\ \dot{\hat{y}}_{n_y} = a_{n_y}(\hat{y})u + b_{n_y}(\hat{z},\ldots,\hat{y}_{n_y}) + K_{n_y}(y)d \ , \end{cases} \tag{4.33}$$

où d correspond à la perturbation introduite par l'erreur de dynamique, ici :

$$d = C(x,y) - C(\hat{x},y) \ . \tag{4.34}$$

Par hypothèse nous avons une fonction de Lyapunov C^{n_y+1}, $\mathcal{U}_z$ qui satisfait :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(\hat{z})(F(\hat{z},\phi_z(\hat{z})) + K_z(\phi_z(z))\, d_z) \leq -\alpha_z(\hat{z}) + |d|^2 \ . \tag{4.35}$$

En utilisant récursivement le lemme 3 donné en Annexe A.2.3, nous obtenons une fonction $\mathcal{U}$ définie positive, C^1 et propre, ainsi qu'une fonction continue ϕ telle que

$$u = \phi(\hat{x},y) \ , \tag{4.36}$$

donne le long des trajectoires du système composé de l'observateur et du système initial :

$$\overbrace{\mathcal{U}\left(\hat{z},y,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_{n_y}\right)}^{\cdot} \leq -\alpha\left(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_{n_y}\right) + |d|^2 \ , \tag{4.37}$$

où α est définie positive. Ainsi, l'hypothèse 15 est satisfaite.

Toutes les hypothèses du Théorèmes 8 étant satisfaites, nous concluons que le système :

$$\begin{gathered} u = \phi(\hat{x},y) \quad , \qquad \hat{x} = w + \int_0^y K(s)\,ds \quad , \\ \dot{w} = A(\hat{x},y) + B(y)u + K(y)C(\hat{x},y,u) \end{gathered} \tag{4.38}$$

est un bouclage de sortie dynamique rendant l'origine globalement et asymptotiquement stable pour le système étendu. □

Remarque 13 :

1. Nous pouvons étendre ce résultat si, au lieu d'avoir $|d|^2$ dans l'hypothèse de détectabilité et dans l'hypothèse de stabilisabilité nous avons une fonction $\rho(|d|)$ telle que l'application :
$$s \to \frac{\rho(s)}{s} \tag{4.39}$$
est C^∞, de dérivée non nulle en zéro et de classe $\mathcal{K}_\infty$.
En effet dans ce cas, la propagation par backstepping fonctionne toujours (voir l'appendice A.53).
2. Comme nous l'avons déjà remarqué nous pouvons étendre le résultat précédent en exploitant une factorisation de la forme :
$$C(x,y) \,-\, C(\hat{x},y) \;=\; m(\hat{z},y)\ell(z,\hat{z},y)\;. \tag{4.40}$$
Dans ce cas, l'hypothèse de détectabilité sera alors :
$$\overbrace{(x \,-\, \hat{x})^T P(x \,-\, \hat{x})}^{\cdot} < \,-|\ell(z,\hat{z},y)|^2\;, \tag{4.41}$$
et, l'hypothèse de stabilisabilité concernera alors le système :
$$\dot{z} \;=\; F(z,\phi_z(z)) \;+\; K_z(\phi_z(z))\, m(\hat{z},\phi_z(z))\, d\,. \tag{4.42}$$

4.2.2.1 Cas L^1

En exploitant une synthèse par backstepping pour obtenir une stabilisabilité L^1-ISS (voir l'annexe A.2.3), tirant profit d'une technique introduite par Mazenc dans son mémoire de thèse [60, (2.412)], nous pouvons donner une version du Théorème 10 qui nous donne un bouclage de sortie dynamique suivant une approche Erreur de dynamique, domination, mais maintenant dans le cas L^1. L'hypothèse de détectabilité dont nous avons besoin est (voir la proposition 6) :

Hypothèse 21 [Observateur d'ordre réduit L^1] :

Les fonctions $(a_i)_{1\le i\le n_y-1}$ et $(b_i)_{1\le i\le n_y-1}$ peuvent être choisies telles qu'il existe une fonction localement Lipschitzienne $\mathcal{W}$ et une fonction K qui est C^{n_y} et satisfait :
$$\begin{aligned} D^+\mathcal{W}(e)(A(x+e,y) - A(x,y) - K(y)[C(x+e,y) - C(x,y)]) \\ < -|C(x+e,y) - C(x,y)| \end{aligned} \tag{4.43}$$
de plus, K_z la composante en z de K est bornée.

L'hypothèse de stabilisabilité associée est alors :

Hypothèse 22 [L^1-stabilisabilité de la dynamique inverse] :

Il existe une fonction $\phi_z : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}$ qui est C^{n_y} et telle que le système suivant est L^1-ISS :

$$\dot{z} = F(z, \phi_z(z)) + K_z(\phi_z(z))\, d\ , \tag{4.44}$$

où K_z est la composante en z de la fonction K. Plus précisément, il existe une fonction C^{n_y+1}, définie positive, et radialement non bornée, $\mathcal{U}_z : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$ et une fonction continue définie positive $\alpha_z : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$ telles que nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(z)\,[F(z, \phi_z(z)) + K_z(\phi_z(z))\, d] \leq -\alpha_z(z) + |d| \qquad \forall (z, d) \in \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z}\ . \tag{4.45}$$

Le Théorème est le suivant :

Théorème 11 (Erreur de dynamique, L^1-Domination) *Si il existe des fonctions a_i et b_i telles que le système (4.4) admet l'existence d'un observateur d'ordre réduit L^1 (hypothèse 21) et si la dynamique inverse est L^1 stabilisable (hypothèse 22), alors il existe un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système.*

La démonstration suit exactement la même ligne que la démonstration du Théorème 10, si ce n'est que nous faisons appelle au lemme 4 de l'annexe A.2.3 pour propager la stabilisabilité-L^1 à l'ensemble du système, nous n'écrivons donc pas la preuve.

Remarque 14 :

1. Du fait que nous utilisons le lemme 4 de l'annexe A.2.3 pour propager la propriété de L^1-ISS, qui est plus restrictif que dans le cas L^2, nous devons demander à K_z d'être bornée.
2. A l'image du cas L^2 nous pouvons étendre le résultat précédent en exploitant une factorisation de la forme :

$$C(x, y) - C(\hat{x}, y) = m(\hat{z})\ell(z, \hat{z}, y)\ . \tag{4.46}$$

Dans ce cas, l'hypothèse de détectabilité sera alors :

$$\overbrace{(x - \hat{x})^T P (x - \hat{x})}^{\cdot} < -|\ell(z, \hat{z}, y)|\ , \tag{4.47}$$

l'hypothèse de stabilisabilité concernera alors le système :

$$\dot{z} = F(z, \phi_z(z)) + K_z(\phi_z(z))\, m(z)\, d\,. \tag{4.48}$$

Notons qu'une nouvelle fois, l'utilisation du lemme 4 nous oblige à prendre la fonction m indépendant de y (contrairement au cas L^2).

4.2.3 Lien avec [59]

Le contexte pour lequel il est possible de construire un bouclage de sortie dynamique pour des systèmes à non minimum de phase que nous avons introduit dans [2] permet d'englober

celui traité par Marino et Tomei dans [59]. Dans celui-ci les auteurs se restreignent aux systèmes de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & A_1\,x_1 \;+\; B_1\,(u + C_2 x_2) \;+\; \Phi_1(y) \\ \dot{x}_2 & = & A_2\,x_2 \;+\; B_2\,u \;+\; \Phi_2(y) \\ y & = & C_1\,x_1 \end{array}\right. \tag{4.49}$$

avec x_1 dans $\mathbb{R}^{n_y}$ et x_2 dans $\mathbb{R}^{n_z}$, la paire (A_1, B_1) est supposée contrôlable, la paire (A_1, C_1) est observable, enfin la paire (A_2, C_2) est détectable. Enfin le triplet (A_1, B_1, C_1) satisfait :

$$C_1\,A_1^i B_1 \;=\; 0 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n_y - 1\} \quad , \qquad C_1\,A_1^{n_y} B_1 \;\neq\; 0 \tag{4.50}$$

Les auteurs supposent aussi l'existence de deux vecteurs lignes t_1 et t_2 tels que, la sortie fictive :

$$\mu \;=\; t_1\,x_1 \;+\; t_2\,x_2 \;, \tag{4.51}$$

un degré relatif n_y, le même que y. Nous allons montrer que cette classe de système satisfait les hypothèses du Théorème 10 :

Le système (4.49) peut se mettre sous la forme (4.1) :

En effet soit M la matrice définie par :

$$M \;=\; \Big(-B_2 \quad -(A_2 \;-\; B_2\,C_2)B_2 \quad \ldots \quad (-(A_2 \;-\; B_2 C_2))^{n_y - 1} B_2 \Big) \mathcal{C}^{-1} \tag{4.52}$$

où,

$$\mathcal{C} \;=\; \big(B_1 \quad A_1 B_1 \quad \ldots \quad A_1^{n_y} B_1 \big) \;. \tag{4.53}$$

Nous considérons le changement de coordonnée :

$$z \;=\; x_2 \;+\; M\,x_1 \;. \tag{4.54}$$

Le système (4.49) se réécrit sous la forme (4.1) soit ici :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & F(z, y) \\ \dot{x}_1 & = & [A_1 - B_1 C_2 M]\,x_1 \;+\; B_1\,(u + C_2 z) \;+\; \Phi_1(y) \end{array}\right. \tag{4.55}$$

avec,

$$\begin{array}{rcl} F(z, y) & = & [A_2 + M B_1 C_2]\,z \;+\; K\,y \;+\; [\Phi_2(y) + M \Phi_1(y)] \;, \\ y & = & C_1\,x_1 \;, \\ \mu & = & (t_1 - t_2 M) x_1 \;+\; t_2\,z \;. \end{array} \tag{4.56}$$

La dynamique inverse est L^p-stabilisable :

Le degré relatif associé à la sortie fictive μ étant le même que celui de y il existe $k \neq 0$ tel que :

$$\mu \;=\; k\,y \;+\; t_2\,z \;. \tag{4.57}$$

Nous remarquons que la dynamique inverse associée à la sortie fictive μ, est contenue dans l'ensemble suivant :

$$\mathcal{N} = \{(x_1, z) \ : \ y = -\frac{t_2}{k}z \quad , \qquad \dot{y} = -\frac{t_2}{k}\dot{z} \quad , \qquad \dots \quad y^{(n_y-1)} = -\frac{t_2}{k}z^{(n_y-1)}\} \tag{4.58}$$

Mais du fait que, par hypothèse, la paire (A_1, C_1) est observable, et en utilisant (4.50), nous obtenons l'existence d'une fonction κ telle que :

$$x_1 \ = \ \kappa\left(y, \dot{y}, \dots, y^{(n_y-1)}\right) \tag{4.59}$$

Ainsi, pour tout (x_1, z) dans $\mathcal{N}$, nous avons,

$$x_1 \ = \ \kappa\left(-\frac{t_2}{k}z, -\frac{t_2}{k}\dot{z}, \dots, -\frac{t_2}{k}z^{(n_y-1)}\right) \tag{4.60}$$

Mais, la dynamique de z restreinte à $\mathcal{N}$ s'écrit :

$$\dot{z} \ = \ F\left(z, -\frac{t_2}{k}z\right) \ . \tag{4.61}$$

Ainsi, $\dot{z}$, ne dépend que de z. Il en va de même pour toutes les dérivées successives de z. Par conséquent tout point de $\mathcal{N}$, est uniquement déterminé par la composante z. La dynamique inverse associée à la sortie fictive μ est donc entièrement déterminée par l'équation (4.61).

L'hypothèse supplémentaire introduite dans [59] est que l'origine du système (4.61) est exponentiellement stable. En fait d'après ce que nous savons la preuve est incomplète. Par contre nous sommes sûrs que le résultat est valide si nous remplaçons cette hypothèse de stabilisabilité exponentielle par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 23 [Zéro dynamique Exp Stab, avec et gradient linéairement borné] :

Il existe une fonction $\mathcal{U} \ : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$, définie positive, propre et C^1 telle que pour tout z dans $\mathbb{R}^{n_z}$:

$$\begin{aligned} c_1|z|^2 \ \leq \ \mathcal{U}(z) \ &\leq \ c_2|z|^2 \ , \\ \left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}(z)\right| \ &\leq \ c_3|z| \ , \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}(z)F\left(z, -\frac{t_2}{k}z\right) \ &\leq \ -c_4|z|^2 \ . \end{aligned} \tag{4.62}$$

En effet dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}(z)\left[F\left(z, -\frac{t_2}{k}z\right) \ + \ d\right] \ &\leq \ -c_1|z|^2 \ + \ c_3|z||d| \\ &\leq \ -\frac{c_1}{2}|z|^2 \ + \ 2\frac{c_3}{c_1}|d|^2 \ . \end{aligned} \tag{4.63}$$

Nous concluons que le système :

$$\dot{z} \ = \ F\left(z, -\frac{t_2}{k}z\right) \ + \ d \tag{4.64}$$

est L^2-ISS. Il est aussi L^1-ISS, du fait que la fonction $\ln(1+\mathcal{U})$ a un gradient borné et satisfait les hypothèse de la proposition 7 du paragraphe 3.2.3. Ainsi la z dynamique est L^1 et L^2 stabilisable avec :

$$\phi_z \;=\; -\frac{t_2}{k} z \;. \tag{4.65}$$

Il existe un observateur L^p qui satisfait les propriétés :

Le système étant sous forme output feedback il existe un observateur exponentiel. Celui-ci sera alors L^p, $p \geq 1$ (voir le paragraphe 3.2.2).

4.2.4 Cas Erreur de Commande et Domination L^p

Au lieu de procéder avec une erreur de dynamique comme dans le paragraphe 4.2.2 et notamment dans l'hypothèse 20 de stabilisabilité à une erreur de dynamique, nous procédons maintenant avec une erreur de commande.

Suivant l'approche erreur de commande domination ISS, l'objectif est de construire une loi de commande stabilisante ϕ telle que le système :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; A(x,y) \;+\; B(y)\,\phi(x+e,y) \\ \dot{y} \;=\; C(x,y) \end{cases} \tag{4.66}$$

soit stable Entrée-Etat par rapport à l'erreur de commande e (après changement de commande $u \;=\; \phi(v,y)$ voir paragraphe 2.1.2).

De la même façon que dans le cas Erreur de dynamique du chapitre précédent, nous voulons utiliser des techniques de backstepping pour propager une propriété de stabilisabilité à partir de celle de la dynamique inverse. Malheureusement une telle procédure n'existe pas. Le lecteur intéressé pourra néanmoins étudier [24], où les auteurs arrivent à propager une propriété ISS pratique.

Une issue est dans l'exploitation d'une combinaison d'erreur de commande et d'erreur de dynamique.

Nous nous inspirons dans ce paragraphe de l'hypothèse de stabilisabilité introduite par Karagiannis et. al. dans [36]. Par contre, en suivant l'approche introduite par Praly et Jiang dans [76], Karagiannis et al. dans [36], ont pu considérer des incertitudes de modèle sur le système que nous ne considérons pas ici.

L'hypothèse de stabilisabilité de dynamique inverse est la suivante :

Hypothèse 24 [Stabilisabilité de la z dynamique robuste aux erreurs de commandes] :

Il existe une fonction $\phi_z \;: \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}$ qui est C^{n_y} et telle que le système suivant :

$$\dot{z} \;=\; F(z, \phi_z(z+d_1)+d_2) \;. \tag{4.67}$$

est ISS pour les entrées d_1 et d_2. Plus précisément, il existe une fonction C^{n_y+1}, définie positive, et propre, $\mathcal{U}_z : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$ et deux fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$ δ_1 et δ_2, telles que nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(z)\,[F(z,\phi_z(z+d_1)+d_2)] \;\leq\; -\mathcal{U}(z) \;+\; \delta_2(|d_2|) \;+\; \delta_1(|d_1|) \qquad \forall (z,d) \in \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \;. \tag{4.68}$$

Remarque 15 :

1. Nous reconnaissons ici le terme d_1 qui correspond au terme e dans l'hypothèse 3 de l'approche par erreur de commande du paragraphe 2.2 (après changement de commande). Le terme d_2 par contre, n'est lié ni à l'approche erreur de commande ni à l'approche erreur de dynamique. Il est introduit pour prendre en compte le fait que la commande n'est pas directement y. Il est donc lié au fait que cette hypothèse de stabilisabilité ne porte que sur une partie du système (4.4).
2. Contrairement à l'hypothèse introduite dans [36], aucune hypothèse n'est faite sur la structure de la fonction F.

Pour propager la propriété de stabilisabilité nous allons exploiter une approche Erreur de dynamique, Domination L^2. Ainsi comme dans le paragraphe précédent, nous supposons l'hypothèse 19 qui nous garanti que l'observateur d'ordre réduit nous apporte la négativité suffisante pour rendre L^2 le terme $|C(x,y) - C(\hat{x},y)|$.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème 12 (Erreur de commande / Erreur de dynamique, Domination) *Si il existe des fonctions a_i et b_i telles que le système (4.4) admet l'existence d'un observateur d'ordre réduit L^2 (hypothèse 19) et si la dynamique inverse est ISS-Stabilisable (hypothèse 24), alors il existe un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système.*

Preuve :

Contrôleur

Loi de commande fictive pour la dynamique en z

Considérons le système étendu constitué de l'observateur et du système initial. La dynamique en z peut s'écrire :

$$\dot{z} \;=\; F(z, \phi_z(\hat{z}) \,+\, y \,-\, \phi_z(\hat{z}))\ , \tag{4.69}$$

et, du fait de l'hypothèse 24 de stabilisabilité de la dynamique inverse, l'équation (4.68) nous donne :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(z)F(z,y) \;\leq\; -\mathcal{U}(z) \,+\, \delta_1(|z-\hat{z}|) \,+\, \delta_2(|y \,-\, \phi_z(\hat{z})|)\ , \tag{4.70}$$

Noter que cette dynamique est ISS par rapport aux termes $|z-\hat{z}|$ et $|y-\phi_z(\hat{z})|$. L'observateur ayant en charge la convergence du terme $|z-\hat{z}|$, il nous reste à construire la loi de commande pour forcer $|y \,-\, \phi_z(\hat{z})|$ à être borné et à converger vers l'origine le long des solutions.

Contrôleur pour les dynamiques $y, \ldots, \hat{y}_{n_y}$

Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\mu \;=\; y \,-\, \phi_z(\hat{z})\ . \tag{4.71}$$

Le long des trajectoires du système étendu, la dynamique de $\mu, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}$ est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mu} & = & a_1(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z}))\hat{y}_2 \,+\, b_1(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})) \,+\, K_1(y)d \\ & & \qquad\qquad - \dfrac{\partial \phi_z}{\partial z}(\hat{z})\,(F(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})) \,+\, K_z(y)\,d) \\ & \vdots & \\ \dot{\hat{y}}_{n_y} & = & a_{n_y}(y)u \,+\, b_{n_y}(\hat{z}, \ldots, \hat{y}_{n_y}) \,+\, K_{n_y}(y)\,d\ , \end{array}\right. \tag{4.72}$$

où, $\hat{z}$ est un signal connu qui satisfait l'équation,

$$\dot{\hat{z}} \;=\; F(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})) \,+\, K_z(y)\,d\ , \tag{4.73}$$

et d correspond à l'erreur de dynamique associée à l'observateur, i.e.

$$d \;=\; C(x, y) \,-\, C(\hat{x}, y)\ . \tag{4.74}$$

qui est considéré ici comme une perturbation.

L'objectif de la loi de commande est de réguler μ autour de l'origine. Sa construction est itérative. Dans un premier temps, nous construisons une loi de commande "fictive" pour $\hat{y}_2$ donnant une stabilisation robuste à des perturbations L^2. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mu} & = & a_1(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z}))\hat{y}_2 \,+\, b_1(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})) \,+\, K_1(y)\,d \\ & , & \qquad\qquad - \dfrac{\partial \phi_z}{\partial z}(\hat{z})\,(F(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})) \,+\, K_z(y)\,d) \end{array} \tag{4.75}$$

Ce système peut être rendu L^2-ISS par une loi de commande "fictive", $\hat{y}_2 \,=\, \phi_1(\mu, \hat{z})$, avec :

$$\begin{array}{rl} \phi_1(\hat{z}, \mu) = & \dfrac{1}{a_1(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z}))}\Big(- \mu - \mu \left(\dfrac{\partial \phi_z}{\partial z}(\hat{z})\right)^2 \\ & \qquad - b_1(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})) + \dfrac{\partial \phi_z}{\partial z}(\hat{z})\,(F(\hat{z}, \mu + \phi_z(\hat{z})))\Big) \end{array}$$

En effet, $\mathcal{U}_1(\mu) \,=\, \frac{1}{4}\mu^2$ et $\hat{y}_2 \,=\, \phi_1(\mu, \hat{z})$ donne le long des trajectoires du système (4.75) :

$$\dot{\overline{\mathcal{U}_1(\mu)}} \;=\; -\mathcal{U}_1(\mu) \,+\, |d|^2 \tag{4.76}$$

Les dynamiques $\mu, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}$ étant triangulaires, en utilisant le lemme 3 de l'appendice A.2.3 nous pouvons propager cette propriété pour obtenir une loi de commande :

$$u \;=\; \phi_{n_y}(\hat{z}, \mu, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}) \tag{4.77}$$

et une fonction $\mathcal{U}_{n_y}$ propre en $(\mu, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$ telles que :

$$\dot{\overline{\mathcal{U}_{n_y}(\mu, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y})}} \leq\; -\alpha(\mathcal{U}_{n_y}) \,+\, |d|^2\ . \tag{4.78}$$

où, α est une fonction de définie positive.

Étude de la boucle fermée

Nous allons montrer que, du fait des propriétés de l'observateur, la loi de commande (4.77) stabilise asymptotiquement l'origine. Par hypothèse l'estimation de l'état nous est donnée par un observateur d'ordre réduit de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x} \;=\; w \;+\; \displaystyle\int_0^y K(s)\,ds \\ \hat{y} \;=\; y \end{cases} \quad , \qquad \dot{w} \;=\; A(\hat{x},y) \;+\; B(y)u \;+\; K(y)C(\hat{x},y,u) \tag{4.79}$$

qui satisfait, pour tout $x \neq \hat{x}$:

$$\dot{\overline{(x \;-\; \hat{x})^T P(x \;-\; \hat{x})}} < \; -|C(x,y) \;-\; C(\hat{x},y)|^2 \;. \tag{4.80}$$

Pour plus de clarté nous ne noterons pas les arguments des différentes fonctions, i.e, Nous notons :

$$\mathcal{U}_z \;:=\; \mathcal{U}_z(z)\;, \quad \mathcal{U}_{n_y} \;:=\; \mathcal{U}_{n_y}(\mu,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_{n_y})\;, \quad \mathcal{W} \;:=\; (x \;-\; \hat{x})^T P(x \;-\; \hat{x})\;. \tag{4.81}$$

Le long des trajectoires du système complet, nous avons d'après (4.70), (4.78), (3.42) :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{U}}_z \;\leq\; -\mathcal{U}_z \;+\; \rho_w(\mathcal{W}) \;+\; \rho_y(\mathcal{U}_{n_y})\;, \\ \dot{\mathcal{U}}_{n_y} \;\leq\; -\alpha(\mathcal{U}_{n_y}) \;+\; |d|^2\;, \\ \dot{\mathcal{W}} \;<\; -|d|^2 \quad , \qquad \forall\, x \neq \hat{x}\;, \end{cases} \tag{4.82}$$

où ρ_w et ρ_y sont les fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$ définies par :

$$\begin{aligned} \rho_w(s) \;&=\; \delta_1\left(|P^{-\frac{1}{2}|^2} s\right)\;, \\ \rho_y(s) \;&=\; \max_{(\mu,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_{n_y}):\mathcal{U}_{n_y}(\mu,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_{n_y})\leq s} \delta_2(2|\mu|)\;, \end{aligned} \tag{4.83}$$

Le long des trajectoires du système bouclé, nous avons :

$$\dot{\overline{\mathcal{W} \;+\; \mathcal{U}_{n_y}}} \;<\; 0 \quad , \qquad \forall\, x \neq \hat{x}\;, \tag{4.84}$$

Ainsi, la fonction $\mathcal{W} \;+\; \mathcal{U}$ est décroissante sur le temps d'existence des solutions. De plus nous avons :

$$\dot{\mathcal{U}}_z \;\leq\; -\mathcal{U}_z \;+\; \rho_w(\mathcal{W} \;+\; \mathcal{U}_{n_y}) \;+\; \rho_y(\mathcal{W} \;+\; \mathcal{U}_{n_y})\;, \tag{4.85}$$

Nous voyons alors que du fait que $\mathcal{W} \;+\; \mathcal{U}_{n_y}$ est bornée le long des solutions du système étendu, il en sera de même pour $\mathcal{U}_z$. La fonction $\mathcal{V} \;=\; \mathcal{W} \;+\; \mathcal{U}_{n_y} \;+\; \mathcal{U}_z$ est alors bornée sur le temps d'existence des solutions, mais du fait qu'elle est propre en l'état du système complet, nous concluons que les solutions sont complètes en temps positif et bornées. De plus, nous avons :

$$\mathcal{W}(t) \;+\; \mathcal{U}_{n_y}(t) \;\leq\; \mathcal{W}(0) \;+\; \mathcal{U}_{n_y}(0) \tag{4.86}$$

et,

$$\mathcal{U}_z(t) \;\leq\; \exp(-t)\mathcal{U}_z(0) \;+\; \rho(\mathcal{W}(0) + \mathcal{U}_{n_y}(0))(1 - \exp(-t))\;. \tag{4.87}$$

Ceci établit la stabilité globale.

Les fonction $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W} + \mathcal{U}_{n_y}$ vérifiant (4.82), nous obtenons en invoquant le principe d'invariance de LaSalle, que les solutions du système bouclé convergent vers le plus grand invariant tel que :

$$\mathcal{W} = W_\infty \quad , \qquad \dot{\widehat{\mathcal{W}}} = 0 \ . \tag{4.88}$$

et,

$$\mathcal{W} + \mathcal{U}_{n_y} = W_\infty + U_\infty \quad , \qquad \dot{\widehat{\mathcal{W} + \mathcal{U}_{n_y}}} = 0 \ . \tag{4.89}$$

Mais en utilisant une nouvelle fois (4.82), nous obtenons que :

$$W_\infty = 0 \quad , \qquad U_\infty = 0 \ . \tag{4.90}$$

Ainsi pour chaque solution :

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{W}(t) + \mathcal{U}_{n_y}(t) = 0 \ . \tag{4.91}$$

Il en est de même pour $\mathcal{U}_z(t)$ d'après (4.85). □

Remarque 16 :

1. De la même façon que dans le cas d'une Erreur de dynamique-L^2, nous pouvons étendre ce résultat si, au lieu d'avoir $|d|^2$ dans l'hypothèse de détectabilité nous avons une fonction $\rho(|d|)$ telle que l'application :

$$s \to \frac{\rho(s)}{s} \tag{4.92}$$

   est C^∞, de dérivée non nulle en zéro et de classe $\mathcal{K}_\infty$.

   En effet dans ce cas, la propagation par backstepping fonctionne toujours (voir l'appendice A.53).

2. Comme nous l'avons déjà remarqué nous pouvons étendre le résultat précédent en exploitant une factorisation de la forme :

$$C(x,y) - C(\hat{x},y) = m(\hat{z},y)\ell(z,\hat{z},y) \ . \tag{4.93}$$

   Dans ce cas, l'hypothèse de détectabilité sera alors :

$$\dot{\widehat{(x-\hat{x})^T P (x-\hat{x})}} < -|\ell(z,\hat{z},y)|^2 \ , \tag{4.94}$$

   Dans ce cas l'hypothèse de stabilisabilité ne changera pas, par contre nous devrons utiliser la fonction m dans la technique de backstepping.

3. Nous pouvons aussi introduire un formalisme L^1 suivant la même démarche que dans le paragraphe précédent.

4.2.5 Exemples

Exemple 1 :

Considérons le système suivant sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{z} \;=\; -z \,+\, y^2 z^2 \;, \\ \dot{y} \;=\; u \,-\, z^2 \;, \end{cases} \tag{4.95}$$

Nous allons montrer, pour ce système, que contrairement à une approche par erreur de commande, une approche erreur de dynamique peut-être appliquée.

1. **La dynamique en z ne peut satisfaire l'hypothèse 24 de stabilisabilité Erreur de Commande**

   En effet, nous avons pour toute fonction ϕ_z, pour tout $z > 2$, pour tout $d_2 \geq 1$ et pour tout d_1 :

   $$\begin{aligned} \dot{z} \;&=\; -z \,+\, (\phi_z(z+d_1))^2\, z^2 \,+\, d_2\, z^2 \;, \\ &\geq\; \frac{1}{2}\, z^2 \;, \end{aligned} \tag{4.96}$$

   ainsi le système explose en temps fini, et ne peut être ISS. L'approche Erreur de commande ne peut donc être appliquée.

2. **L'hypothèse 19 d'existence d'un observateur L^2 est satisfaite**

   Pour établir cette assertion, nous considérons l'observateur suivant :

   $$\begin{cases} \hat{z} \;=\; w \,-\, \dfrac{y^3}{3} \\ \hat{y} \;=\; y \end{cases} \;, \qquad \dot{w} \;=\; -w \,+\, \frac{y^3}{3} \,+\, y^2 u \;. \tag{4.97}$$

   Pour trouver la fonction $\mathcal{W}$ à associer à cet observateur considérons tout d'abord la fonction $\mathcal{W}_0$ suivante :

   $$\mathcal{W}_0(y,z,w) \;=\; \left(w \,-\, z \,-\, \frac{y^3}{3}\right)^2 \;, \tag{4.98}$$

   Cette fonction satisfait :

   $$\mathcal{W}_0(y,z,w) \;=\; (\hat{z} \,-\, z)^2 \;, \tag{4.99}$$

   et,

   $$\dot{\overline{\mathcal{W}_0(y,z,w)}} \;=\; -2\,\mathcal{W}_0(y,z,w) \;, \tag{4.100}$$

   Ainsi l'hypothèse 13 est satisfaite et nous avons un observateur d'état uniformément en la commande tels qu'ils ont été introduits dans la section 3.1.3.

   Mais si nous souhaitons appliquer l'approche erreur de dynamique, nous devons montrer que l'erreur de dynamique associée à cet observateur est absolument intégrable. Nous allons en fait utiliser l'idée de factorisation de $C(x,y) - C(\hat{x},y)$.

Le long des trajectoires du système étendu, $\hat{z}$ satisfait :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= -\hat{z} + y^2\hat{z}^2 + \underbrace{y^2}_{K_z(y)}\underbrace{(z^2 - \hat{z}^2)}_{C(x,y)-C(\hat{x},y)} , \\ &= -\hat{z} + \hat{y}^2\hat{z}^2 + \underbrace{\hat{y}^2\begin{pmatrix}1 & 2\hat{z}\end{pmatrix}}_{m_z(\hat{z},\hat{y})}\underbrace{\begin{pmatrix}(z-\hat{z})^2 \\ z-\hat{z}\end{pmatrix}}_{\ell_z(z,\hat{z})}\end{aligned} \tag{4.101}$$

et, nous avons donc :

$$\dot{\hat{y}} = u - \hat{z}^2 + \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\hat{z}\end{pmatrix}}_{m_1(\hat{z},\hat{y})}\underbrace{\begin{pmatrix}(z-\hat{z})^2 \\ z-\hat{z}\end{pmatrix}}_{\ell_1(z,\hat{z})} . \tag{4.102}$$

Nous observons que nous avons :

$$|\ell(z,\hat{z})|^2 \leq |z - \hat{z}|^4 + |z - \hat{z}|^2 . \tag{4.103}$$

Ceci nous conduit à prendre pour fonction $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}(z,w) = \frac{1}{4}\mathcal{W}_0(z,x)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{W}_0(z,x) , \tag{4.104}$$

Elle satisfait :

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\mathcal{W}(z,w)}} &= -\mathcal{W}_0(z,x)^2 - \mathcal{W}_0(z,x) , \\ &\leq -|\ell(z,\hat{z})|^2 ,\end{aligned} \tag{4.105}$$

L'observateur est un observateur L^2 et l'hypothèse 19 est satisfaite. sous la forme de son extension (4.41).

3. **La dynamique en $\hat{z}$ est L^2-ISS Stabilisable**

Pour pouvoir conclure nous devons maintenant montrer que le système satisfait l'extension par factorisation de l'hypothèse 20 de L^2-Stabilisabilité (donnée par l'équation (4.42)). En prenant $y = \phi_z(\hat{z}) = 0$, et $\mathcal{U}_z(\hat{z}) = \frac{1}{2}\hat{z}^2$, nous obtenons directement :

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}(\hat{z})\left(-\hat{z} + y^2\hat{z}^2 + y^2 d\right) = -2\mathcal{U}_z(\hat{z}) , \tag{4.106}$$

et ainsi le système est L^2-ISS Stabilisable.
Le Théorème 10 nous permet de conclure que la loi de commande suivante :

$$u = -y + \hat{z}^2 - y\hat{z}^2 - (y + y^5)(1 + 4\hat{z}^2) , \tag{4.107}$$

avec,

$$\hat{z} = w - \frac{y^3}{3} \quad , \qquad \dot{w} = -w + \frac{y^3}{3} + y^2 u . \tag{4.108}$$

est un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système étendu.

Exemple 2

Cet exemple est inspiré de [9, Example 2]. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= 3z + 2z^3 + y \ , \\ \dot{y} &= z + z^3 + u \ . \end{cases} \tag{4.109}$$

1. **Observateur L^1 :**

   Nous introduisons l'observateur d'ordre réduit suivant :

$$\begin{cases} \hat{z} &= w + 4\,y \\ \hat{y} &= y \end{cases} \quad , \qquad \dot{w} = -\hat{z} - 2\hat{z}^3 - 4u + y \tag{4.110}$$

   La dynamique de l'observateur restreinte à la dynamique de $\hat{z}$ est :

$$\dot{\hat{z}} = 3\hat{z} + 2\hat{z}^3 + \hat{y} + 4\underbrace{(z - \hat{z} + z^3 - \hat{z}^3)}_{k(z,\hat{z})} \tag{4.111}$$

   et,

$$\dot{\hat{y}} = \hat{z} + \hat{z}^3 + u + \underbrace{(z - \hat{z} + z^3 - \hat{z}^3)}_{k(z,\hat{z})} \tag{4.112}$$

   Nous pouvons introduire la fonction de Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y,z,w) &= 4|w - z + 4\,y| \ , \\ &= 4|\hat{z} - z| \ . \end{aligned} \tag{4.113}$$

   Elle satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{\mathcal{W}(y,z,w)}} &= 4(-\hat{z} - 2\hat{z}^3 + z + 2z^3))\,\mathrm{signe}(\hat{z} - z) \\ &= -4|\hat{z} - z| - 8\,|\hat{z}^3 - 2z^3| \\ &\leq -|k(z,\hat{z})| \end{aligned} \tag{4.114}$$

   Ainsi l'observateur satisfait l'hypothèse 14 dans le cas L^1.

2. **L^1-Stabilisabilité :**

   Considérons :

$$\phi_z(\hat{z}) = -4\,\hat{z} - 3\,\hat{z}^3 \ , \tag{4.115}$$

   et :

$$\mathcal{U}_z(\hat{z}) = \sqrt{1 + \hat{z}^2} - 1 \tag{4.116}$$

   Nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}(\hat{z})\left[3\hat{z} + 2\hat{z}^3 + y\right] \leq -\hat{z}^2\sqrt{1 + \hat{z}^2} \quad , \qquad \left|\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}(\hat{z})\right| \leq 1 \tag{4.117}$$

   En utilisant la proposition 7, nous obtenons que le bouclage est L^1-ISS stabilisable et satisfait l'hypothèse 20 dans le cas L^1.

Nous pouvons maintenant utiliser le Théorème 11 pour conclure que la loi de commande suivante :

$$\begin{aligned} u \;=\; \left(1 \,+\, \frac{1}{2}(y+4\hat{z}+3\hat{z}^3)^2\right)\left(-4\hat{z}-3\hat{z}^3-y-\left(9+4|\hat{z}|+9|\hat{z}|^3\right)\frac{\hat{z}}{\sqrt{1+2\hat{z}}}\right) \\ +\;\hat{z}+\hat{z}^3+\left(4+9\hat{z}^2\right)\left(3\hat{z}+2\hat{z}^3+y\right)\;, \end{aligned} \tag{4.118}$$

avec,

$$\hat{z} \;=\; w \,-\, \frac{y^3}{3} \quad , \qquad \dot{w} \;=\; -w \,+\, \frac{y^3}{3} \,+\, y^2 u \;. \tag{4.119}$$

est un bouclage de sortie dynamique qui stabilise globalement et asymptotiquement l'origine du système étendu.

Exemple 3

Considérons le système suivant qui a déjà été étudié dans [74] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \,+\, u \;, \\ \dot{x}_2 & = & f(x_1) \,+\, x_3 \,-\, u \;, \\ \dot{x}_3 & = & -f(x_1) \;, \\ y & = & x_1 \;, \end{array}\right. \tag{4.120}$$

où f est une fonction C^2 telle que $f'(0) \neq 0$. Cet exemple va nous permettre de montrer que les travaux de [2] permettent de considérer des systèmes qui ne rentraient pas dans le contexte d'hypothèse de Marino et Tomei dans [59] (voir le paragraphe 4.2.3).

1. **La technique proposée par Marino et Tomei dans [59] ne s'applique pas :**

   Tout d'abord, nous remarquons que le système est dans la forme introduite dans (4.49). Considérons la sortie fictive μ définie par :

   $$\mu \;=\; t_1\, x_1 \,+\, t_2\, x_2 \,+\, t_3\, x_3 \;, \tag{4.121}$$

   Pour que le degré relatif de μ soit le même que celui de y, à savoir 1, nous devons avoir $t_1 \neq t_2$.
   La dynamique inverse correspondante est :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \dfrac{t_1 x_1 + (t_3 - t_2)(x_3 + f(x_1))}{t_1 - t_2} \;, \\ \dot{x}_3 & = & -f(x_1) \;. \end{array}\right. \tag{4.122}$$

   Dans le cas où f s'annule en un autre point que 0, que nous notons x_1^*, le point de $\mathbb{R}^2$:

   $$x_1 \;=\; x_1^* \quad , \qquad x_3 \;=\; \frac{t_1\, x_1^* \,+\, (t_3 - t_2)\, f(x_1^*)}{t_2 \,-\, t_3} \;, \tag{4.123}$$

   est un point d'équilibre du système (4.122) différent de l'origine. L'origine ne peut donc pas être globalement et asymptotiquement stabilisée.

2. **Forme normale :**

ce système admet la forme normale (4.1) puisque nous pouvons le réécrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_1 - y \,, \\ \dot{z}_2 & = & -f(y) \,, \\ \dot{y} & = & z_1 - z_2 - y + u \;. \end{array}\right. \tag{4.124}$$

3. **Observateur L^1 :**

Un observateur d'ordre réduit approprié est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{z}_1 & = & w_1 + 6\,y \\ \hat{z}_2 & = & w_2 + 2\,y \\ \hat{y} & = & y \end{array}\right. \quad , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{w}_1 & = & -5\,\hat{z}_1 + 6\,\hat{z}_2 + 5\,y - 6\,u \\ \dot{w}_2 & = & -2\,\hat{z}_1 + 2\,\hat{z}_2 - f(y) + 2\,y + 2\,u \end{array}\right. \tag{4.125}$$

La dynamique des $\hat{z}_i$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{z}}_1 & = & \hat{z}_1 - y + 6k \\ \dot{\hat{z}}_2 & = & -f(y) - y + 2k \end{array}\right. \tag{4.126}$$

où, k le terme d'erreur de dynamique est :

$$k = z_1 - \hat{z}_1 - (z_2 - \hat{z}_2) \;. \tag{4.127}$$

Il satisfait :

$$|k| = 2|2(\hat{z}_1 - z_1) - 3(\hat{z}_2 - z_2)| + 5|\hat{z}_1 - z_1 - 2(\hat{z}_2 - z_2)| \;, \tag{4.128}$$

Nous pouvons associer à l'observateur la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{W}(x,w) = |2(\hat{z}_1 - z_1) - 3(\hat{z}_2 - z_2)| + |\hat{z}_1 - z_1 - 2(\hat{z}_2 - z_2)| \;. \tag{4.129}$$

Elle satisfait :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\overline{\mathcal{W}(x,w)}} & = & -|2(\hat{z}_1 - z_1) - 3(\hat{z}_2 - z_2)| - 2\,|\hat{z}_1 - z_1 - 2(\hat{z}_2 - z_2)| \\ & \leq & -\dfrac{1}{3}|k| \end{array} \tag{4.130}$$

4. **L^1-Stabilisabilité :**

Pour montrer que le système est L^1 stabilisable, nous introduisons le bouclage ϕ_z qui assure une propriété L^1-ISS pour le sous-système associé à la dynamique de (z_1, z_2). Soit σ la fonction C^0 croissante qui satisfait :

$$\sigma(z_1) \geq \max\left\{\frac{f(2z_1)}{z_1}\,,\, \frac{1}{2}\max_{|s|\leq 1}|f''(2z_1+s)|\right\} \;. \tag{4.131}$$

Nous introduisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{U}_z(z_1, z_2) = \ell\left(M(z_1) \,+\, 2\sqrt{1 + \frac{a}{2}\zeta_2^2}\right) \;, \tag{4.132}$$

où :

$$\zeta_2 \;=\; \left(z_2 - \int_0^{z_1} \frac{f(2s)}{s} ds\right) \tag{4.133}$$

et

$$a < \frac{1}{2\left(\max_{|z_1|<1} \sigma(z_1)\right)^2} \;,\; M(z_1) = 2\sqrt{a} \int_0^{z_1} s\sigma(s)\, ds \tag{4.134}$$

et ℓ est une fonction positive définie radialement non bornée, et C^1 dont la dérivée est une fonction décroissante qui satisfait :

$$\ell'(M(z_1)) \;\leq\; \frac{1}{M'(z_1)} \;. \tag{4.135}$$

Nous pouvons remarquer que $\mathcal{U}_z$ a un gradient borné. Aussi, en introduisant le bouclage :

$$\phi_z(z_1, z_2) = 2z_1 + \frac{2}{\pi}\arctan\left(M'(z_1) - \frac{a\zeta_2}{\sqrt{1 + \frac{a}{2}\zeta_2^2}}\left(-f'(2z_1) + \frac{f(2z_1)}{z_1}\right)\right) \tag{4.136}$$

et en utilisant l'inégalité suivante, pour tout z_1 et s : $|s| \leq 1$

$$|f(2z_1) + f'(2z_1)s - f(2z_1 + s)| \;\leq\; \sigma(z_1)\, s^2 \;, \tag{4.137}$$

nous pouvons obtenir, lorsque $y = \phi_z(z_1, z_2)$,

$$\dot{\overline{\mathcal{U}_z(z_1, z_2)}} < 0 \qquad \forall (z_1, z_2) \neq 0 \;. \tag{4.138}$$

Ainsi en utilisant la proposition 7, nous obtenons la propriété de L^1-Stabilisabilité. Nous pouvons alors construire un bouclage de sortie dynamique stabilisant l'origine du système.

Exemple 4

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} &=& z^2 \,+\, y \;, \\ \dot{y} &=& y_2 \,+\, z^3 \;, \\ \dot{y}_2 &=& u \,+\, 2z^3 \,+\, z^2 \,+\, 2z \;. \end{array}\right. \tag{4.139}$$

Cet exemple va nous permettre de montrer l'intérêt d'une approche L^1 par rapport à une approche L^2 plus classique.

1. **Nous ne pouvons pas trouver un observateur d'ordre réduit quadratique L^2**

   En effet, supposons qu'il existe un observateur d'ordre réduit L^2. Alors il existe 3 réels (p, q, r) et 2 fonctions $K_z(y)$ et $K_2(y)$ tels que, pour tout e_z, e_2, z et y, nous avons :

$$\begin{pmatrix} e_z & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z + 3K_z(y)z^2 & K_z(y) \\ 6z^2 + 2z + 2 + 3K_2(y)z^2 & K_2(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{4.140}$$
$$\leq - \left(\begin{pmatrix} 3z^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_2 \end{pmatrix} \right)^2 .$$

   En se restreignant au cas où $e_2 = 0$, nous obtenons :

$$p\,(2z + 9z^4 + 3K_z(y)z^2) + q\,(6z^2 + 2z + 2 + 3K_2(y)z^2) \leq 0 \quad , \quad \forall \quad (z\ ,\ y) \tag{4.141}$$

   et pour y fixé, lorsque z tend vers l'infini la partie gauche de l'équation précédente tend vers $+\infty$. Ainsi, cette équation ne peut être satisfaite.

2. **Il existe un observateur d'ordre réduit L^1**

   Prenons $K_z = -2$ et $K_2 = -4$, et considérons l'observateur d'ordre réduit :

$$\begin{cases} \dot{w}_z &= \hat{z}^2 + y - 2(\hat{y}_2 + \hat{z}^3)\ , \\ \dot{w}_2 &= u + 2\hat{z}^3 + \hat{z}^2 + 2\hat{z} - 4(\hat{y}_2 + \hat{z}^3)\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{z} &= w_z + 2\,y\ , \\ \hat{y}_2 &= w_2 + 4\,y\ . \end{cases} \tag{4.142}$$

   Le long des trajectoires du système étendu, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= \hat{z}^2 + y + -2k(z, y_2, \hat{z}, \hat{y}_2)\ , \\ \dot{y} &= \hat{y}_2 + \hat{z}^3 + k(z, y_2, \hat{z}, \hat{y}_2)\ , \\ \dot{\hat{y}}_2 &= u + 2\hat{z}^3 + \hat{z}^2 - 4\hat{z} + 4k(z, y_2, \hat{z}, \hat{y}_2)\ . \end{cases} \tag{4.143}$$

   où, l'erreur de dynamique k est :

$$k(z, y_2, \hat{z}, \hat{y}_2) = \hat{y}_2 - y_2 + \hat{z}^3 - z^3\ . \tag{4.144}$$

   Nous introduisons la fonction localement Lipschitzienne $\mathcal{W}$ définie comme :

$$\mathcal{W}(\hat{z}, z, \hat{y}_2, y_2) = |z - \hat{z}| + |(y_2 - \hat{y}_2) - (z - \hat{z})| \tag{4.145}$$

   Elle satisfait au sens des dérivée de Dini :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{W(\hat{z}, z, \hat{y}_2, y_2)}} \leq -|\hat{y}_2 - y_2 + \hat{z}^3 - z^3| \tag{4.146}$$

   Ainsi, nous obtenons un observateur L^1.

3. **L^1-Stabilisabilité**

En prenant, $\mathcal{U}_z = \sqrt{1+z^2} - 1$, et $\phi_z(z) = -z^2 - z$, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial z}(z)(z^2 + y) = -\frac{-z^2}{\sqrt{1+z^2}} , \tag{4.147}$$

Ainsi, la dynamique inverse est L^1-Stabilisable par rapport à une erreur de dynamique et satisfait l'hypothèse 20.

Nous pouvons alors appliquer le Théorème 11 pour conclure à l'existence d'un bouclage de sortie dynamique.

4.3 Extension à la poursuite

4.3.1 Problématique de la poursuite

Une autre problématique importante en automatique est celle du suivi de trajectoire. Ce problème peut se résumer ainsi :

Objectif 3 *Étant donnée une fonction Y_r bornée et connue du temps et $\mathcal{I}_x$ un fermé de $\mathbb{R}^n$, trouver un entier q, des fonctions localement Lipschitziennes $\varpi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, et $\nu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ telles qu'il existe une fermé $\mathcal{I}_w$ de $\mathbb{R}^q$ tel que :*

$$t \mapsto (X(x,w,t), W(x,w,t)) \text{ existe et est borné sur } [0,+\infty) \quad , \qquad \forall\,(x,w) \in \mathcal{A} \tag{4.148}$$

et,

$$\lim_{t\to+\infty} h(X(x,w,t)) \;=\; Y_r(t) \quad , \qquad \forall\,(x,w) \in \mathcal{A} \tag{4.149}$$

où $\mathcal{A}$ est un ouvert contenant $\mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_w$ et $(X(x,w,t), W(x,w,t))$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x, \varpi(y,w,t)) \;, \\ \dot{w} \;=\; \nu(y,w,t) \;. \end{cases} \tag{4.150}$$

4.3.2 Contexte Considéré

En exploitant les approches proposées dans ce chapitre nous pouvons aborder le problème de poursuite dans le cas où le système est sous forme triangulaire et n'est pas à minimum de phase. Comme précédemment, nous nous plaçons dans le cas où $\mathcal{I}_x$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier. Nous supposons de plus que le signal Y_r et toutes ses dérivées est connus.

Nous allons suivre une démarche erreur de dynamique de la même façon que dans le paragraphe 4.2.2 en supposant connaître un observateur L^2 (voir l'hypothèse 19). Nous introduisons ainsi les notation $x = (z,\, y_2,\, \ldots, y_{n_y})^T$ et nous supposons connaitre une fonction $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_z+n_y-1}$ telle que avec la représentation (4.4) le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{x} \;=\; w \;+\; \displaystyle\int_0^y K(s)\,ds \\ \hat{y} \;=\; y \end{cases} \quad , \qquad \dot{w} \;=\; A(\hat{x},y) \;+\; B(y)u \;+\; K(y)C(\hat{x},y,u) \tag{4.151}$$

définit un observateur d'ordre réduit L^2. Plus précisément nous supposons qu'il existe une matrice P définie positive telle que pour tout $x \neq \hat{x}$:

$$\dot{\overline{(x \;-\; \hat{x})^T P (x \;-\; \hat{x})}} < \; -\left|C(x,y) \;-\; C(\hat{x},y)\right|^2 \;. \tag{4.152}$$

Dans le cas de la stabilisation stationnaire, nous avons introduit une hypothèse de stabilisabilité de la dynamique inverse du système. Celle-ci portait sur l'existence d'une fonction ϕ_z telle que $y = \phi_z(z)$ rende l'origine du système restreint à la dynamique inverse asymptotiquement stable. Dans le cas de la poursuite, nous n'allons plus chercher à stabiliser asymptotiquement l'origine de la dynamique inverse mais à la faire tendre vers une certaine fonction Z_r dépendante de la fonction Y_r.

L'hypothèse nous assurant l'existence de cette fonction Z_r, est la suivante :

Hypothèse 25 [Complétude de la dynamique inverse commandé par Y_r] :

Etant donné $Y_r \ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, il existe une valeur initiale z_{r0} dans $\mathbb{R}^{n_z}$ telle que la solution de :

$$\dot{z} \ = \ F(z, Y_r(t)) \quad , \qquad Z(z_{r0}, 0) \ = \ z_{r0} \ . \tag{4.153}$$

existe pour tout t positif et est bornée.

Cette solution nous permet de définir une fonction $Z_r \ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n_z}$ comme :

$$Z_r(t) \ = \ Z(z_{r0}, t) \ . \tag{4.154}$$

L'hypothèse de stabilisabilité

Hypothèse 26 [L^2-Stabilisabilité de Z_r] :

Étant données les fonction Y_r et Z_r définies ci-dessus, il existe $\phi_z \ : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^{n_y} satisfaisant :

$$\phi_z(0, t) \ = \ Y_r(t) \quad , \qquad \forall \, t \ . \tag{4.155}$$

qui rend le système suivant :

$$\dot{\xi}_z \ = \ F(Z_r(t) + \xi_z, \phi_z(\xi_z)) \ - \ F(Z_r(t), Y_r(t)) \ + \ K_z(\phi_z(\xi_z)) \, d \, . \tag{4.156}$$

L^p-ISS uniformément en temps par rapport a d. Plus précisément, il existe $\mathcal{U}_z : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^{n_y+1}, définie positive, , $\alpha_z \ : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue définie positive. et ρ_1 et ρ_2 deux fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$, telles que nous avons :

$$\rho_1(|\xi_z|) \ \leq \ \mathcal{U}_z(\xi_z, t) \ \leq \ \rho_2(|\xi_z|) \ , \tag{4.157}$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial \xi_z}(\xi_z, t) \Big[F(Z_r + \xi_z, \phi_z) \ + \ K_z(\phi) \, d \ - \ F(Z_r, Y_r) \Big] \ + \ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(\xi_z, t) \\ \leq \ -\alpha_z(\xi_z) \ + \ |d|^2 \quad \forall (\xi_z, d, t) \in \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}_+ \ . \end{aligned} \tag{4.158}$$

Nous avons alors le Théorème suivant :

Théorème 13 (Erreur de dynamique, Domination L^2, Poursuite) *Si la fonction Y_r est n_y fois différentiables avec ses n_y dérivées bornées sur $\mathbb{R}_+$, si il existe z_{r0} tel que Z_r, solution du système (4.153), est complète en temps positif et bornée (hypothèse 25), si il existe un observateur-L^p (hypothèse 14) et sa composante z est L^p-Stabilisable autour de Z_r (hypothèse 26), alors il existe un bouclage de sortie dynamique qui résout globalement le problème du tracking.*

Preuve : Suivant la démarche Erreur de dynamique, Domination L^2 nous allons construire une loi de commande pour le système de l'observateur assurant une robustesse à des perturbations L^2.

Conception du contrôleur :

Introduisons η_z et $\hat{\eta}_z$ dans $\mathbb{R}^{n_z}$ définit par :

$$\hat{\eta}_z \;=\; \hat{z} \,-\, Z_r \quad , \qquad \eta_z \;=\; z \,-\, Z_r \;. \tag{4.159}$$

Le long des solutions du système composé de l'observateur et du système initial les dynamiques $(\hat{\eta}_z, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y})$ satisfont :

$$\left\{\begin{array}{rl} \dot{\hat{\eta}}_z & = F(Z_r + \hat{\eta}_z, y) \,-\, F(Z_r, Y_r) \,+\, K_z(y)\, d \;, \\ \dot{y} & = \; a_1(Z_r + \hat{\eta}_z, y) y_2 \,+\, b_1(Z_r + \xi_z, y) \,+\, d \;, \\ \vdots & \\ \dot{\hat{y}}_{n_y} & = \; a_{n_y}(y) u \,+\, b_{n_y}(Z_r + \hat{\eta}_z, \ldots, \hat{y}_{n_y}) \,+\, K_{n_y}(y) d \;, \end{array}\right. \tag{4.160}$$

où d correspond à la perturbation associée à l'erreur de dynamique :

$$d \;=\; C(x, y) - C(\hat{x}, y) \;. \tag{4.161}$$

Par hypothèse nous avons une fonction de Lyapunov C^{n_y+1}, $\mathcal{U}_z$ qui satisfait :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial \hat{\eta}_z}(\hat{\eta}_z, t)\Big[F(Z_r + \hat{\eta}_z, \phi_z) \,+\, d \,-\, F(Z_r, Y_r)\Big] \,+\, \frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial t}(\hat{\eta}_z, t) \;\leq\; -\alpha_z(\hat{\eta}_z) \,+\, |d|^2 \tag{4.162}$$

Le lemme de propagation d'une propriété L^2 utilisé récursivement nous donne finalement une fonction $\mathcal{U} \;: \mathbb{R}^{n_y+n_z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui est C^1 et qui satisfait :

$$\rho_2(|\hat{\eta}_z| + |y - \phi_z(\hat{\eta}_z, t)|) \;\leq\; \mathcal{U}(\hat{\eta}_z, y, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t) \quad , \qquad \forall\, t \;. \tag{4.163}$$

et,

$$\begin{array}{l} \rho_3(|\hat{\eta}_z| + |y| + \cdots + |\hat{y}_{n_y}|) \,-\, M \\ \qquad \leq \mathcal{U}(\hat{\eta}_z, y, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t) \;\leq\; \rho_4(|\hat{\eta}_z| + |y| + \cdots + |\hat{y}_{n_y}|) \,+\, M \;, \forall\, t \;. \end{array} \tag{4.164}$$

où M est une constante dépendant des bornes des fonctions du temps $Z_r, Y_r, \ldots, Y_r^{(n_y)}$ et ρ_3 et ρ_4 sont des fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Nous obtenons aussi une fonction continue ϕ telle que la commande

$$u = \phi(\hat{\eta}_z, y, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t) \;, \tag{4.165}$$

donne le long des solutions du système (4.160) :

$$\dot{\overline{\mathcal{U}\left(\hat{\eta}_z, y, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t\right)}} \leq \;-\alpha\left(\mathcal{U}\right) \,+\, |d|^2 \;, \tag{4.166}$$

où α est une fonction définie positive.

Étude de la boucle fermée :

Nous introduisons maintenant les notations :

$$x_\eta \;=\; (\eta_z, y_2, \ldots, y_{n_y}) \quad , \qquad \hat{x}_\eta \;=\; (\hat{\eta}_z, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}) \;. \tag{4.167}$$

En suivant la même démarche que celle exposée dans la section 3.2.1 Théorème 8, nous introduisons la fonction suivante :

$$\mathcal{V} \;=\; \mathcal{U}\left(\hat{\eta}_z, \hat{y}, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t\right) \;+\; (x_\eta \;-\; \hat{x}_\eta)^T P (x_\eta \;-\; \hat{x}_\eta) \tag{4.168}$$

En utilisant (4.161), la fonction $\mathcal{V}$ satisfait le long des trajectoires du système bouclé pour tout $x \neq \hat{x}$:

$$\dot{\mathcal{V}} \;<\; -\alpha\left(\mathcal{U}\left(\eta_z, \hat{y}, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t\right)\right) \;-\; \beta(x_\eta, \hat{x}_\eta, y) \;, \tag{4.169}$$

où,

$$\beta(x_\eta, \hat{x}_\eta, y) \;=\; -\left|C(x,y) \;-\; C(\hat{x},y)\right|^2 \;-\; \overbrace{(x \;-\; \hat{x})^T P (x \;-\; \hat{x})}^{\cdot}. \tag{4.170}$$

D'aprés (4.152), la fonction β est positive La fonction $\mathcal{V}$ est décroissante le long des trajectoires du système bouclé. Ainsi, en utilisant (4.164), les solutions du système bouclé sont donc complètes et bornées.

Si l'on note $\mathcal{U}_{y,\hat{x}_\eta}(s)$, $\mathcal{V}_{x_\eta,y,\hat{x}_\eta}(s)$ et $\beta_{y,\hat{x}_\eta,x_\eta}(t)$ les valeurs des fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et β évaluées le long des trajectoires du système issues de $(x_\eta, y, \hat{x}_\eta)$ à l'instant s, nous avons :

$$\int_0^t \alpha(\mathcal{U}_{y,\hat{x}_\eta}(s))\, ds \;\leq\; \mathcal{V}_{x_\eta,y,\hat{x}_\eta}(0) \quad , \qquad \forall\, t \;\geq\; 0 \;, \tag{4.171}$$

L'intégrale converge donc lorsque t tend vers l'infini. Comme α est continue et $t \mapsto \mathcal{U}_{y,\hat{x}_n}(t)$ reste dans un compact, nous pouvons alors utiliser le Lemme de Barbalat [68, p. 211] pour conclure que :

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(\mathcal{U}_{y,\hat{x}_\eta}(t)) \;=\; 0 \;, \tag{4.172}$$

La fonction $t \mapsto \mathcal{U}_{y,\hat{x}_\eta}(t)$ étant bornée, et la fonction α ètant définie positive, nous concluons que :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{U}_{y,\hat{x}_\eta}(t) \;=\; 0 \;, \tag{4.173}$$

De la même façon nous avons :

$$\lim_{t\to+\infty} \beta_{y,\hat{x}_\eta,x_\eta}(t) \;=\; 0 \;, \tag{4.174}$$

Ainsi les trajectoires du système convergent vers l'ensemble $\mathcal{M}(t)$ définit par :

$$\mathcal{M}(t) \;=\; \{(y, x_\eta, \hat{x}_\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_y+n_z-1} \times \mathbb{R}^{n_y+n_z-1} : \hat{x}_\eta \;=\; x_\eta,\; \mathcal{U}(\hat{\eta}_z, \hat{y}, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{n_y}, t) \;=\; 0\} \;.$$

En utilisant (4.163) et (4.155), nous obtenons que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t) \;&\subseteq\; \{(y, x_\eta, \hat{x}_\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_y+n_z-1} \times \mathbb{R}^{n_y+n_z-1} : \hat{x}_\eta \;=\; x_\eta,\; \eta_z \;=\; 0,\; y \;=\; \phi_z(0,t)\} \;, \\ &\subseteq\; \{(y, x_\eta, \hat{x}_\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_y+n_z-1} \times \mathbb{R}^{n_y+n_z-1} : \hat{x}_\eta \;=\; x_\eta,\; \eta_z \;=\; 0,\; y \;=\; Y_r(t)\} \;.\end{aligned}$$

□

4.3.3 Discussion sur l'hypothèses 25

Pour construire un bouclage de sortie répondant au problème de poursuite, nous devons supposer l'existence d'une d'une solution complète et bornée au système (4.153). Sous certaines conditions concernant la fonction Y_r cette hypothèse peut nous être assurée.

Pour illustrer ce fait, nous nous plaçons dans un contexte où la fonction Y_r est engendrée par un système stationnaire et montrons qu'alors nécessairement il existe z_r.

Supposons que Y_r est engendré par un système stationnaire i.e. nous pouvons trouver des fonction s et h_v et v_0 telles que :

$$Y_r(t) \;=\; h_v(V(t, v_0)) \;, \tag{4.175}$$

où $V(t, v_0)$ est solution de

$$\dot{v} \;=\; s(v) \;. \tag{4.176}$$

Nous supposons que ce système admet $\mathcal{M}_v$ un compact invariant asymptotiquement stable. Supposons qu'il existe un triplet (q, ϖ, ν) tel que les trajectoires du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x, \varpi(y, w, v)) \;, \\ \dot{w} \;=\; \nu(y, w, v) \;, \end{cases} \tag{4.177}$$

sont complètes en temps positif, bornées et nous avons :

$$\lim_{t \to +\infty} h(X(x, t, w, v_0)) \;-\; h_v(V(v, t)) \;=\; 0 \tag{4.178}$$

Du fait que les trajectoires du système étendu sont bornées et complètes, nous pouvons utiliser [15, Lemma 2.1] pour introduire l'ensemble ω-limite qui est compact invariant et attractif. Sur cet ensemble ω-limite, nous avons, $h(x) \;=\; h_v(v)$. Ainsi toute solution, initialisée dans l'ensemble ω-limite satisfera cette propriété pour tous les temps positifs. Il existera alors un z_r.

Deuxième partie

Observateurs de Kazantzis-Kravaris/ Luenberger

Chapitre 5

Introduction

5.1 Problématique

Nous considérons à présent un système non-commandé de la forme :

$$\dot{x} \;=\; f(x) \quad , \qquad y \;=\; h(x) \;, \tag{5.1}$$

avec x dans $\mathbb{R}^n$ et les fonctions f et h localement Lipschitziennes. L'origine n'est plus nécessairement un point d'équilibre du système.

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout x dans $\mathcal{O}$, nous pouvons introduire $(\sigma^-_{\mathcal{O}}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}}(x))$, le plus grand intervalle de temps sur lequel la solution $X(x,t)$ est définie en prennant des valeurs dans $\mathcal{O}$.

Un problème fondamental en automatique est celui de la construction d'un estimé de l'état complet du système à partir de la connaissance de la mesure y. Cette démarche nommée estimation d'état peut se résumer ainsi :

Objectif 4 *A partir de la seule connaissance de la mesure au cours du temps de y, trouver un estimé de l'état $\hat{x}$ de façon à ce que celui-ci converge vers la valeur réelle de l'état tant que celle-ci appartient à $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, i.e :*

$$Si \quad \sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \;=\; \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \quad alors \quad \lim_{t \to \sigma^+_{\mathcal{O}}(x)} |X(x,t) - \hat{X}(x,t)| \;=\; 0 \;. \tag{5.2}$$

5.2 Les observateurs de Luenberger

Dans la première partie de ce document, nous avons abordé le problème de reconstruction d'état dans le cadre du bouclage de sortie. Nous avons alors utilisé la notion d'*Observateurs d'état uniforme en la commande* (voir la section 3.1.3). Ces observateurs, caractérisés par un triplet (q, ω, ζ), définissent un système dynamique de la forme :

$$\dot{w} \;=\; \omega(y,u,w) \quad , \qquad \hat{x} \;=\; \zeta(y,w) \;, \tag{5.3}$$

Du fait de l'existence d'une certaine contraction des trajectoires sur elles-mêmes caractérisée par la fonction $\mathcal{W}$ associée à cet observateur (voir la section 3.1.3) et sous l'hypothèse que les trajectoires du système sont complètes et bornées, nous pouvions conclure que la convergence de l'estimé au sens de (5.2) était obtenue.

L'objectif de cette partie est d'étudier une classe particulière d'observateurs, *les observateurs de Luenberger*. Ceux-ci ont été introduits dans [55] pour les systèmes linéaires. L'extension des travaux initiaux de Luenberger aux systèmes non linéaires a fait l'objet d'une recherche active durant les vingts dernières années (voir : [43, 44, 54, 37]).

Dans ce document, nous allons étudier l'extension aux systèmes non-linéaires en suivant l'approche introduite par Kazantzis et Kravaris [37]. Suivant leur suggestion, nous considérons des observateurs de la forme :

$$\dot{w} \;=\; A\,w \;+\; B(y) \quad , \qquad \hat{x} \;=\; T^*(w)\;, \tag{5.4}$$

avec w une matrice complexe dans $\mathbb{C}^{q\times p}$ où p est la dimension de y et q est une dimension à définir, A une matrice complexe dans $\mathbb{C}^{q\times q}$ et B et T^* des fonctions à préciser.

Le problème est maintenant de trouver des conditions que doivent satisfaire f et h de façon à ce que l'on puisse trouver (A, B, q) pour lesquels il existe un T^* qui nous garantisse la convergence de $\hat{x}$ vers x.

5.3 Conditions suffisantes d'existence d'un observateur de Luenberger

5.3.1 Le contexte

Les résultats présentés par Kazantzis et Kravaris, dans [37], sont limités au cas où la dimension de w est égale à celle de x (i.e. $q = n$). Les auteurs proposent aussi de choisir T^* comme l'application inverse d'une fonction T solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x)f(x) \;=\; A\,T(x) \;+\; B(h(x))\;. \tag{5.5}$$

Dans ce contexte il ne reste plus qu'à choisir la matrice A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et la fonction B.

La motivation pour ce choix est que, si nous trouvons une fonction T solution de (5.5) qui est un difféomorphisme (comme cela est supposé dans [37], [45] et dans [46]), alors le changement de coordonnées :

$$\mathcal{x} \;=\; T(x) \tag{5.6}$$

nous permet d'écrire le système (5.1) de la forme :

$$\dot{\mathcal{x}} \;=\; A\,\mathcal{x} \;+\; B(h(T^{-1}(\mathcal{x}))) \quad , \qquad y \;=\; h(T^{-1}(\mathcal{x}))\;. \tag{5.7}$$

Nous avons alors :

$$\dot{\widehat{w \;-\; \mathcal{x}}} \;=\; A\,(w \;-\; \mathcal{x})\;. \tag{5.8}$$

En prenant la matrice A Hurwitz, w converge exponentiellement vers $\mathcal{x}$. L'observateur nous permet donc de reconstruire $\mathcal{x} \;=\; T(x)$.

De plus, si la fonction $T^* \;=\; T^{-1}$ est uniformément continue, alors $\hat{x} \;=\; T^*(w)$ nous fournit un estimé qui converge asymptotiquement vers :

$$x \;=\; T^*(\mathcal{x}) \;=\; T^*(T(x))\;. \tag{5.9}$$

Cette égalité nous indique que T doit être inversible à gauche, et donc injective, ce qui explique pourquoi en général, q doit au moins être égal à n.

Cette approche permettant de construire T^* a motivé de nombreux travaux sur la recherche de solution analytique et inversible à gauche de l'équation (5.5) (voir [37], [45] et [46]). Tous ces travaux traitent de la recherche d'une solution de (5.5) autour d'un point d'équilibre du système (5.1). Ils mettent en évidence des liens entre le caractère analytique de la solution T et des hypothèses de non résonnance entre les valeurs propres de A et la fonction f.

En fait, il est suffisant d'obtenir une solution faible de l'équation (5.5) qui est seulement continue et uniformément injective pour pouvoir construire un observateur de la forme (5.4). Cette remarque fera l'objet du prochain paragraphe où un théorème formalise cette extension des observateurs de Luenberger aux systèmes non-linéaires en généralisant l'approche de Kazantzis et Kravaris ([37]).

5.3.2 Théorème général d'existence

Dans [3], nous avons exposé un théorème général d'existence d'un observateur de Luenberger qui décrit quelles propriétés doit satisfaire la fonction T. Pour présenter ce résultat nous devons introduire au préalable une définition :

Définition 4 (Complétude à l'infini en temps positif sur un ouvert) *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le système (5.1) est dit complet à l'infini en temps positif sur $\mathcal{O}$, si nous avons l'implication suivante pour tout x dans $\mathcal{O}$,*

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \ < \ +\infty \quad \Rightarrow \quad \sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \ < \ \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \ . \tag{5.10}$$

En d'autres termes, la *complétude à l'infini en temps positif* sur $\mathcal{O}$ signifie que toute solution $X(x,t)$ issue de $\mathcal{O}$ et qui sort de $\mathcal{O}$ en temps fini, traverse sa frontière à une distance finie. Si $\mathcal{O}$ est un invariant ou si la croissance des trajectoires dans $\mathcal{O}$ est linéairement bornée le long des solutions du système (5.1) alors cette hypothèse (5.10) est vérifiée.

Nous pouvons de la même façon définir la propriété de *complétude à l'infini en temps négatif* qui nous sera utile dans les prochains chapitres :

Définition 5 (Complétude à l'infini en temps négatif sur un ouvert) *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le système (5.1) est dit complet à l'infini en temps négatif sur $\mathcal{O}$, si nous avons l'implication suivante, pour tout x dans $\mathcal{O}$,*

$$\sigma^-_{\mathcal{O}}(x) \ > \ -\infty \quad \Rightarrow \quad \sigma^-_{\mathcal{O}}(x) \ > \ \sigma^-_{\mathbb{R}^n}(x) \ . \tag{5.11}$$

Introduisons à présent le Théorème définissant les observateurs de Luenberger non-linéaires.

Théorème 14 ([3], Observateur de KKL) *Supposons que le système (5.1) est complet à l'infini en temps positif sur $\mathcal{O}$ et qu'il existe un entier q, une matrice Hurwitz A dans $\mathbb{C}^{q\times q}$ et des fonctions continues $T \ : \ cl(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$ et $B \ : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^{q\times p}$, et ρ une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ qui satisfont :*

$$L_f T(x) \ = \ A\,T(x) \ + \ B(h(x)) \quad , \qquad \forall x \ \in \ \mathcal{O} \ , \tag{5.12}$$

$$|x_1 - x_2| \leq \rho(|T(x_1) - T(x_2)|) \quad , \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathtt{cl}(\mathcal{O})^2 \ . \tag{5.13}$$

Sous ces conditions, il existe une fonction continue $T^* : \mathbb{C}^{q\times p} \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$ *telle que, pour tout* x *dans* $\mathcal{O}$ *et* w *dans* $\mathbb{C}^{q\times p}$*, la solution* $(X(x,t), W(x,w,t))$ *de :*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \qquad \dot{w} = A\,w + B(h(x)) \ , \tag{5.14}$$

est définie en temps positif sur $[0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x))$*. De plus, nous avons l'implication :*

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) = \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \Rightarrow \lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x)} |T^*(W(x,w,t)) - X(x,t)| = 0 \ . \tag{5.15}$$

Remarque 17 :

1. Du fait de l'hypothèse de complétude à l'infini en temps positif des trajectoires dans $\mathcal{O}$ (voir (5.10)), la partie gauche de (5.15) implique que la solution $X(x,t)$ ne quitte jamais $\mathcal{O}$ et ainsi :
$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) = \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) = +\infty \ . \tag{5.16}$$
2. Le Théorème 14 peut facilement s'étendre au cas où les trois conditions suivantes sont satisfaites :
   (a) y est un scalaire,
   (b) l'état x peut se décomposer en $x = (\xi_1, \xi_2)$ et satisfait
   $$\dot{\xi}_1 = f_1(\xi_1, u) + h(\xi_2) \quad , \qquad \dot{\xi}_2 = f_2(\xi_2) \quad , \qquad y = \xi_1$$
   (c) la fonction B peut être choisie linéaire.

   Dans ce cas, l'observateur est implémenté sous la forme d'un observateur d'ordre réduit
   $$\dot{\widehat{z - By}} = Az + Bf_1(y,u) \quad , \qquad \widehat{\xi}_2 = T^*(z) \ .$$
3. Pour obtenir une fonction T^* satisfaisant (5.12), il suffit d'en trouver une satisfaisant :
$$|T^*(w) - x| \leq \rho^*(|w - T(x)|) \ , \tag{5.17}$$
   pour une certaine fonction ρ^* de classe $\mathcal{K}_\infty$. Comme cela est montré par Kreisselemeir et Engel dans [42], une telle fonction existe toujours si T est uniformément injective, ce qui est caractérisée par l'hypothèse (5.13).
4. Nous pouvons relâcher l'hypothèse d'injectivité uniforme dans le cas où nous trouvons une fonction $\bar{T}$ telle que :
$$\bar{T}(x, h(x)) = T(x) \quad , \qquad \forall\, x \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}(x)) \ , \tag{5.18}$$
   où T satisfait (5.12). Dans ce cas, l'hypothèse (5.13) devient :
$$|x_1 - x_2| \leq \rho(|\bar{T}(x_1, y) - T(x_2, y)|) \quad , \qquad \forall (x_1, x_2, y) \in \mathtt{cl}(\mathcal{O})^2 \times h(\mathtt{cl}(\mathcal{O})) \ . \tag{5.19}$$
   Nous obtenons alors l'existence d'une fonction $\bar{T}^* : \mathbb{C}^{q\times p} \times h(\mathtt{cl}(\mathcal{O})) \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$ telle que, pour tout y dans $h(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$, la fonction
$$w \in \mathbb{C}^{q\times p} \to \bar{T}^*(w, y) \ , \tag{5.20}$$

est continue et nous permet d'implémenter l'observateur, i.e, pour tout (x, w) dans $\mathcal{O} \times \mathbb{C}^{q\times p}$:

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \;=\; \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x)} \left|\bar{T}^*(W(x,w,t), h(X(x,t)) \;-\; X(x,t)\right| \;=\; 0\;. \qquad (5.21)$$

La démonstration du Théorème 14, fortement inspirée de [42], est dans [3]. Dans cette démonstration, nous obtenons une fonction continue T^* qui satisfait l'équation (5.17) avec $\rho^*(\cdot) = \rho(4\cdot)$. Ainsi, si ρ dans (5.13) est une fonction linéaire, il en sera de même pour ρ^* dans (5.17). Sous cette hypothèse supplémentaire, nous obtiendrons une convergence exponentielle de l'observateur.

En conclusion, un observateur de Kazantzis-Kravaris / Luenberger existe si nous trouvons une fonction continue T solution de l'équation (5.12) et uniformément injective dans le sens de (5.13).

A ce stade de notre étude trois questions se posent :

1. Existe-il des fonctions T continues et solutions de l'équation aux dérivées partielles (5.12) ? Quelle est leur forme ?
2. Qu'en est-il de leur injectivité ? Comment construire l'observateur ?
3. Peut-on utiliser une solution approximative à l'équation aux dérivées partielles ? Peut-on étendre la méthode ?

La première question fera l'objet du prochain chapitre où nous illustrerons ces résultats par des exemples académiques. L'injectivité et la construction de T^* seront abordées dans le chapitre 7. La possibilité d'utiliser une approximation fera enfin l'objet du chapitre 8, où seront présentées des extensions de cette approche en particulier dans le cas de l'étude d'un moteur asynchrone.

Chapitre 6

Existence et Expression de T

6.1 Existence d'une solution

Comme nous l'avons vu la construction d'un observateur de Luenberger non-linéaire est basée sur la recherche d'une solution à l'équation (5.12).

Dans [37], Kazantzis et Kravaris ont utilisé un Théorème de Lyapunov auxiliaire (voir [56]) pour trouver une solution analytique à ce problème. Ils en ont alors établi l'existence sous des contraintes de non résonance des valeurs propres de A et f.

Dans cette section nous montrons que, si nous recherchons une solution seulement continue, alors la contraction des trajectoires en w nous assure l'existence d'une solution globale sous la seule hypothèse de complétude à l'infini des trajectoires en temps négatif. Nous reprenons les résultats de [3] où nous avons établi que, sous une hypothèse de complétude des trajectoires du système initial, nous pouvons trouver une solution pour toute matrice A Hurwitz.

6.1.1 Solution continue

Pour introduire une solution de l'équation aux dérivées partielles (5.12) nous abandonnons l'interprétation de changement de coordonnées introduite par Kazantzis et Kravaris et nous revenons à l'idée originale de Luenberger dans [55] (voir aussi [42] et [12]) qui était celle d'une extension dynamique.

En effet, considérons le système étendu (5.14). Du fait que la matrice A est Hurwitz, nous pouvons supposer que ce système admet au moins localement une variété invariante exponentiellement stable dans les coordonnées (w, x) qui peut être décrite par le graphe d'une fonction de la forme :

$$\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{q\times p} : T(x) = w\} . \tag{6.1}$$

Nous avons alors pour un petit intervalle de temps :

$$T(X(x,t)) = W(x, T(x), t) . \tag{6.2}$$

et ainsi, en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(X(x,t))\, f(X(x,t)) = A\, T(X(x,t)) + B(h(X(x,t))) . \tag{6.3}$$

T alors une solution locale de l'équation aux dérivées partielles (5.12).

La recherche d'une solution globale s'avère plus difficile mais peut être obtenue en exploitant la contraction des trajectoires dans la dynamique des w. Le résultat que nous avons établi dans [3] est :

Théorème 15 ([3], Solution continue)) *Supposons qu'il existe un nombre positif δ_u tel que le système (5.1) est complet à l'infini en temps négatif sur $\mathcal{O} + \delta_u$. Alors, pour toute matrice A complexe Hurwitz, nous pouvons trouver une fonction C^1 $B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^{q\times p}$ telle qu'il existe une fonction continue $T : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$, qui satisfait (5.12).*

Ce théorème établit ainsi, que si le système est complet à l'infini en temps négatif, alors nous pouvons choisir librement une matrice Hurwitz A nous garantissant l'existence d'une solution T. Celle-ci sera continue, mais nous n'avons aucune information sur sa régularité. Dans le prochain paragraphe, un résultat similaire est obtenu mais pour une classe plus grande d'équations aux dérivées partielles. Par contre celui-ci requiert que les trajectoires du système (5.1) soient bornées en temps négatif et positif.

6.1.2 Autre résultat d'existence d'une solution continue

Pavlov et al. dans [65] ont obtenu un autre résultat répondant à la recherche d'une solution continue pour une classe d'équations qui englobe celles considérées en (5.12). En effet, dans [65] les auteurs considèrent des dynamiques de w qui ne sont plus nécessairement linéaires. Celles-ci sont décrites par une dynamique de la forme :

$$\dot{w} \;=\; \omega(w, y) \tag{6.4}$$

avec w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$ et y dans $\mathbb{R}^p$, et $\omega \;: \mathbb{C}^{q\times p} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^{q\times p}$ une fonction localement Lipschitzienne.

L'équation considérée dans [65] est :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) f(x) \;=\; \omega(T(x), h(x)) \quad , \qquad x \in \mathbb{R}^n \;. \tag{6.5}$$

Dans le cas où :

$$\omega(w, x) \;=\; A\, w \;+\; B(h(x)) \;, \tag{6.6}$$

l'équation (6.5) nous donne l'équation (5.12).

Pavlov et al. ont établi que, sous l'existence d'une contraction linéaire des trajectoires et sous une hypothèse de bornitude des trajectoires en x alors il existe une solution continue à l'équation (6.5).

Le théorème est le suivant :

Théorème 16 ([65]) *Si*

1. *Les solutions du système (5.1) sont complètes (i.e. $\sigma^-_{\mathbb{R}^n}(x) \;=\; -\infty$ et $\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \;=\; +\infty$ pour tout x).*
2. *Pour tout $\delta > 0$ il existe ϵ tel que :*

$$|x| \;<\; \delta \;\Rightarrow\; |X(x,t)| < \epsilon \quad , \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{6.7}$$

3. Il existe une matrice Hermitienne P tel que nous avons :

$$\overline{\frac{\partial \omega}{\partial w}}(w,y)^T P + P\frac{\partial \omega}{\partial w}(w,y) \leq -I \quad , \qquad \forall\,(w,y) \in \mathbb{C}^{q\times p} \times \mathbb{R}^p \ . \tag{6.8}$$

Sous ces conditions, il existe une fonction $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{q\times p}$ continue solution de l'équation (6.5).

Ce résultat nous permet d'obtenir une variété invariante de la forme $w = T(x)$ le long des trajectoires du système étendu qui est maintenant de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \ , \\ \dot{w} = \omega(w, h(x)) \ , \end{cases} \tag{6.9}$$

Dans ce théorème la structure de la fonction ω n'est pas prise en compte, seule importe la contraction induite par l'existence de la matrice P. Nous pouvons ainsi considérer des extensions des observateurs de Luenberger dans le cas où la contraction n'est pas linéaire, comme par exemple :

$$\dot{w} = -w^3 - w + B(h(x)) \quad , \qquad w \in \mathbb{C} \tag{6.10}$$

mais sous des hypothèses de bornitude des trajectoires du système (5.1). Cette remarque introduit une extension probable des observateurs de Luenberger mais qui n'est pas traitée dans ce document.

6.2 Expression de T

Les Théorèmes précédents établissent l'existence d'une solution continue à l'équation (5.12). Cette équation peut dans certains cas être donnée de façon explicite comme nous allons le voir dans certains exemples.

6.2.1 Forme Intégrale

La fonction T devant satisfaire l'égalité (6.2) pour tout t tel que $X(x,t)$ reste dans $\mathcal{O}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} T(X(x,t)) = \exp(At)T(x) + \int_0^t \exp(As)B(h(X(x,s)))\,ds \ , \\ \forall\, x \in \mathcal{O} \quad , \qquad \forall\, t \in (\sigma^-_{\mathcal{O}}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}}(x)) \ . \end{aligned} \tag{6.11}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} T(x) = \exp(-At)\,T(\breve{X}(x,t)) - \int_0^t \exp(-As)B(h(\breve{X}(x,s)))ds \ , \\ \forall\, x \in \mathcal{O} \quad , \qquad \forall\, t \in (\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_u}(x), 0) \ . \end{aligned} \tag{6.12}$$

où $\breve{X}$ est solution du système modifié :

$$\dot{x} = \breve{f}(x) = \chi(x)\,f(x) \tag{6.13}$$

où $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque C^1 qui satisfait :

$$\begin{cases} \chi(x) &= 1 \quad \text{if} \quad x \in \mathcal{O} \ , \\ &= 0 \quad \text{if} \quad x \notin \mathcal{O} + \delta_u \ , \end{cases} \tag{6.14}$$

pour un certain nombre réel δ_u.

Donc si $\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_u}(x) = -\infty$, en faisant tendre t vers $-\infty$, ce qui constitue une approche standard pour l'étude sur les variétés invariantes (voir [16, (2.3.4)] par exemple), nous obtenons comme expression possible pour la fonction T (à comparer avec [42] et [47]) :

$$T(x) = \int_{-\infty}^{0} \exp(-As)B(h(\breve{X}(x,s)))ds \ . \tag{6.15}$$

Cette même expression est obtenue par Kreisselmeier et Engel dans [42] en utilisant une démarche différente (mais avec X à la place de $\breve{X}$ et B la fonction identité). Ils ont interprété chacune des q composantes ligne de $T(x)$ comme un coefficient de la décomposition de l'historique des trajectoires $t \mapsto h(X(x,t))$ (en temps négatif) sur une base de fonctions du temps. En d'autres termes, (6.15) projette l'ensemble des mesures passées sur q vecteurs complexes de dimension p. Un autre lien entre les résultats de Kazantzis et Kravaris ([37]) et ceux de Kreisselmeier et Engel ([42]) a été établi par Krener et Xiao dans [47].

6.2.2 Expression de T pour des systèmes particuliers

Dans ce paragraphe, nous introduisons trois systèmes particuliers pour lesquels il est possible d'exhiber des fonctions T solutions de l'équation aux dérivées partielles (5.12).

Un oscillateur harmonique

Pour illustrer les problèmes d'estimation, nous introduisons un problème courant en automatique qui est celui d'estimer phase et amplitude d'un oscillateur harmonique dont la pulsation n'est pas connue. Ce système dans $\mathbb{R}^3$ est modélisé par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= x_3 x_1 \ , \\ \dot{x}_3 &= 0 \ , \end{cases} \quad , \qquad y = x_1 \tag{6.16}$$

Un oscillateur harmonique peut, par exemple, être un modèle de générateur de perturbations qui affectent l'évolution d'un système. L'objectif est alors de reconstituer l'état de ce système pour pouvoir en déduire une prédiction de la perturbation.

Nous introduisons A dans $\mathbb{C}^{q\times q}$ une matrice diagonale et B un vecteur unitaire :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_q \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{6.17}$$

La matrice A étant diagonale, nous pouvons décomposer l'équation (5.12) en q équations correspondant à chacune des valeurs propres de A.

Pour chaque i nous recherchons $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ solution de l'équation :

$$-\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)x_2 + \frac{\partial T_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)x_1x_3 = \lambda_i T_i(x_1, x_2, x_3) + x_1 . \tag{6.18}$$

Du fait de la linéarité du système en x_1 et x_2, nous pouvons supposer T_i linéaire en ces variables. Ainsi, nous recherchons T_i solution de (6.18) et de la forme :

$$T_i(x_1, x_2, x_3) = \alpha_i(x_3)x_1 + \beta_i(x_3)x_2 . \tag{6.19}$$

Les fonctions auxiliaires α_i et β_i doivent alors satisfaire :

$$-\alpha_i(x_3)x_2 + \beta_i(x_3)x_1x_3 = \lambda_i[\alpha_i(x_3)x_1 + \beta_i(x_3)x_2] + x_1 , \tag{6.20}$$

où de façon équivalente :

$$\begin{cases} x_3\beta_i(x_3) = \lambda_i\alpha_i(x_3) + 1 , \\ \alpha_i(x_3) = -\lambda_i\beta_i(x_3) . \end{cases} \tag{6.21}$$

Les fonctions α_i et β_i sont donc :

$$\begin{cases} \alpha_i(x_3) = \dfrac{-\lambda_i}{\lambda_i^2 + x_3} , \\ \beta_i(x_3) = \dfrac{1}{\lambda_i^2 + x_3} , \end{cases} \tag{6.22}$$

i.e. la fonction T est :

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_q \end{pmatrix} , \qquad T_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2 - \lambda_i x_1}{\lambda_i^2 + x_3} . \tag{6.23}$$

Un bioréacteur

Nous considérons à présent le modèle d'un bioréacteur. Ce système modélise une réaction biologique entre une biomasse de concentration x_1 et un substrat de concentration x_2 à l'intérieur d'une cuve de volume constant. Suivant Rapaport et Maloum dans [82], une modélisation de ce système sur $\mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu(x_2)\, x_1 \\ \dot{x}_2 = -k\mu(x_2)\, x_1 \end{cases} , \qquad y = x_1 . \tag{6.24}$$

où k est une constante positive et μ est une fonction définie positive telle que $\mu(0) = 0$. La fonction μ est une fonction, croissante pour x_2 petit puis décroissante pour x_2 grand.

En effectuant le changement de coordonnées $\mathscr{x}_2 = x_2 + k\, x_1$, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu(\mathscr{x}_2 - k\, x_1)\, x_1 , \\ \dot{\mathscr{x}}_2 = 0 , \end{cases} \tag{6.25}$$

Nous cherchons alors à résoudre :

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(x_1, \mathscr{x}_2)\mu(\mathscr{x}_2 - k\, x_1)\, x_1 = \lambda_i T_i(x_1, x_2) + b(x_1) \tag{6.26}$$

En choisissant $\mathcal{O}$ de la forme :

$$\mathcal{O} \;=\; \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2 \;>\; k\,x_1\,,\; x_1 \;>\; \epsilon\} \tag{6.27}$$

où ϵ est un réel positif, les solutions générales de l'équation sur $\mathcal{O}$ peuvent être explicitées par :

$$T_i(x_1, x_2) \;=\; \left(\int_{\epsilon}^{x_1} \frac{b(s)}{M_i(s, x_2)\,\mu(x_2 - k\,s)\,s}\,ds \;+ K_i\right) M_i(x_1, x_2) \tag{6.28}$$

avec K_i un réel et,

$$M_i(x_1, x_2) \;=\; \exp\left(\int_{\epsilon}^{x_1} \frac{\lambda_i}{\mu(x_2 - k\,s)\,s}\,ds\right) \tag{6.29}$$

La restriction de l'analyse du système à l'ensemble $\mathcal{O}$ qui est ici strictement inclus dans $\mathbb{R}^2_+$ se justifie par le fait qu'il y a toujours de la biomasse et du substrat dans le bioréacteur.

Un pendule

En normalisant temps et vitesse angulaire, la dynamique d'un pendule simple est décrite par les équations suivantes sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \;=\; x_2 \\ \dot{x}_2 \;=\; \sin(x_1) \end{cases} \quad , \qquad y \;=\; x_1\;. \tag{6.30}$$

Montrons que nous pouvons choisir la fonction b, telle que en omettant la périodicité en x_1, l'expression suivante de T_i est solution de (5.12) :

$$T_i(x_1, x_2) \;=\; x_2 \;+\; \lambda_i x_1 \tag{6.31}$$

Puisque nous avons :

$$\dot{\overbrace{T_i(x_1, x_2)}} \;=\; \sin(x_1) \;+\; \lambda_i x_2\;, \tag{6.32}$$

(5.12) est satisfaite si nous prenons :

$$b_i(x_1) \;=\; \sin(x_1) \;-\; \lambda_i^2 x_1\;. \tag{6.33}$$

Pour chacun de ces exemples nous avons été en mesure de donner une expression d'une solution de l'équation aux dérivées partielles (5.12). Mais qu'en est-il de l'injectivité ? Cette question fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 7

Injectivité de T et construction de l'observateur

7.1 Injectivité

Nous supposons disposer d'une solution continue T de (5.12). Dans le but d'appliquer le Théorème 14, nous devons nous assurer que celle-ci est *uniformément injective* (voir (5.13)) ou au moins injective.

C'est l'observabilité du système qui va nous permettre d'obtenir l'injectivité de cette fonction T comme déjà observé par Luenberger dans le cas linéaire. Nous allons présenter les différents résultats obtenus ces dernières années traitant de ce sujet et mettre en évidence les hypothèses d'observabilité associées.

7.1.1 Cas local

En exploitant une démarche inspirée des travaux initiaux de Luenberger [55], des résultats ont été obtenus dans [37, 45, 46] en supposant observable l'approximation linéaire du système autour d'un point d'équilibre. Donc dans ce paragraphe, nous imposerons $f(0) = 0$ et p la dimension de y égal à 1. Notons alors :

$$F \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(0) \qquad , \quad H \;=\; \frac{\partial h}{\partial x}(0) \;. \tag{7.1}$$

Si nous avons une fonction $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est C^2 et solution de (5.12), en dérivant par rapport à x de part et d'autre de l'équation (5.12) et en nous plaçant au point d'équilibre $x = 0$, T est solution de :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0)F \;=\; A\frac{\partial T}{\partial x}(0) \;+\; \frac{\partial B}{\partial y}(h(0))H \;, \tag{7.2}$$

D'après les résultats de Luenberger dans [55] nous obtenons que, si le couple (H, F) est observable et si le couple $\left(A, \dfrac{\partial B}{\partial y}(h(0))\right)$ est contrôlable, alors $\dfrac{\partial T}{\partial x}(0)$ est non singulière. Ainsi, T définit un difféomorphisme local autour de zéro et est donc injective.

Kazantzis et Kravaris ont démontré ce résultat dans [37] toujours dans le cas mono-sortie (i.e. $p = 1$) :

Théorème 17 ([37]) *Si :*

1. *l'origine est un point d'équilibre du système (5.1),*
2. *si la paire (F, H) est observable et $(A, \frac{\partial B}{\partial y}(h(0))$ est contrôlable,*
3. *la fermeture de l'enveloppe convexe des valeurs propres de F dans $\mathbb{C}$ ne contient pas 0,*
4. *les valeurs propres de A et F ne satisfont aucune relation de résonnance.*

alors, il existe ϵ, un réel positif et une fonction analytique $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui définit un difféomorphisme local autour de l'origine et est solution de :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x)f(x) \;=\; AT(x) \;+\; B(h(x)) \;, \tag{7.3}$$

pour tout x dans $\mathcal{B}_\epsilon(0)$.

Remarque 18 :

1. Dans ce contexte, la solution obtenue T est un difféomorphisme. Ainsi, l'observateur peut être implémenté de la forme :

$$\dot{\hat{x}} \;=\; f(\hat{x}) \;+\; \left[\frac{\partial T}{\partial x}(\hat{x})\right]^{-1} (B\,(h(x)) \;-\; B(h(\hat{x}))) \;. \tag{7.4}$$

   Toutefois, il s'agit d'un résultat local. En d'autres termes l'estimé ne convergera vers la valeur réelle que si celle-ci reste suffisamment proche de l'origine.
2. Dans [46], Krener et Xiao ont donné une version de ce théorème dans le cas où le complexe 0 est dans la fermeture convexe des valeurs propres de F en rajoutant des hypothèses.

7.1.2 Résultat global de Kreisselmeier et Engel

Kreisselmeier et Engel dans [42], ont introduit un contexte d'hypothèses donnant l'injectivité uniforme de la fonction T définie en (6.12) dans le cas où $\check{X}$ est remplacé par X. Le résultat est le suivant :

Théorème 18 ([42]) *Si :*

1. *Pour tout x dans $\mathcal{O}$, nous avons $\sigma^-_{\mathcal{O}}(x) \;=\; -\infty$,*
2. *Il existe ℓ, un réel positif tel que, pour tout x dans $\mathcal{O}$, la fonction définie par $t \mapsto \exp(-2\ell t)h(X(x,t))$ est dans $L^1(-\infty, 0]$.*
3. *Il existe une fonction ρ de classe $\mathcal{K}_\infty$ et un réel positif $\lambda \geq \ell$ tel que :*

$$\rho\left(\int_{-\infty}^{0} \exp(-2\lambda s)|h(X(x_1,s) \;-\; h(X(x_2,s)|^2 ds\right) \;\geq\; |x_1 \;-\; x_2|\;\forall x_1, x_2 \;\in \mathcal{O} \tag{7.5}$$

4. *Le système ((5.1) est à complexité finie, i.e. il existe un nombre fini M de fonctions continues ϕ_i dans $L_2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^p)$ et un réel strictement positif δ tel que nous ayons :*

$$\sum_{i=1}^{M}\left[\int_{-\infty}^{0} \exp(-\lambda s)\phi_i(s)^T[h(X(x_1,s)) - h(X(x_2,s))]ds\right]^2$$

$$\geq \delta \int_{-\infty}^{0} \exp(-2\lambda s)|h(X(x_1,s)) - h(X(x_2,s))|^2 ds \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{O} \ .$$

alors il existe q, un entier positif, tel que :

$$T(x) \ = \ \int_{-\infty}^{0} \exp(-\ell s) B h(X(x,s))\, ds \tag{7.6}$$

est uniformément injective, où B dans $\mathbb{R}^q$ est le vecteur unitaire :

$$B \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{7.7}$$

Remarque 19 : Ce résultat nous montre que, pour obtenir l'injectivité de T, il est intéressant de choisir q la dimension de w grande. Par contre, Kreisselmeier et Engel supposent des hypothèses fortes d'observabilité et ne nous donnent aucune indication sur la valeur de q.

7.1.3 Injectivité générique

Dans [3], nous avons établi que, sous une simple hypothèse de distinguabilité de l'historique des mesures, il est suffisant de choisir génériquement $q = n+1$ valeurs complexes pour les valeurs propres de A pour obtenir l'injectivité de la fonction T. L'observabilité requise pour donner le résultat que nous avons obtenu dans [3] est la suivante :

Définition 6 ($\mathcal{O}$-Distinguabilité en temps négatif) *Nous disons que le système (5.1) est $\mathcal{O}$-distinguable si il existe deux réels strictement positifs $\delta_\Upsilon < \delta_d$ tels que, pour toutes paires de points distincts x_1, et x_2 dans $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon$, il existe un temps t dans $\left(\max\left\{\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1), \sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_2)\right\}, 0\right]$ tel que nous ayons :*

$$h(X(x_1,t)) \ \neq \ h(X(x_2,t)) \ . \tag{7.8}$$

Cette hypothèse de distinguabilité exprime que l'état actuel x peut être distingué de tout autre état dans $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon$ en regardant l'historique des mesures restreintes à l'intervalle de temps pendant lequel la solution $X(x,t)$ est dans $\mathcal{O} + \delta_d$.

L'injectivité générique est alors établie par le Théorème suivant :

Théorème 19 ([3], Injectivité générique) *Supposons les hypothèses suivantes :*

1. *Le système (5.1) est complet à l'infini en temps négatif sur $\mathcal{O} + \delta_u$.*
2. *Le système (5.1) est $\mathcal{O}$-distinguable en temps négatif avec le réel associé δ_d dans $(0, \delta_u)$.*
3. *Il existe une fonction $b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^p$ qui est $\mathbb{C}^1$, une fonction continue $M : \mathcal{O} + \delta_\Upsilon \to \mathbb{R}_+$, et un réel négatif ℓ tel que, pour tout x dans $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon$, les deux fonctions $t \mapsto \exp(-\ell t) b(h(\breve{X}(x,t)))$ et $t \mapsto \exp(-\ell t) \frac{\partial b \circ h \circ \breve{X}}{\partial x}(x,t)$ satisfont pour tout t dans $(\breve{\sigma}^-_{\mathbb{R}^n}(x), 0]$:*

$$|\exp(-\ell t) b(h(\breve{X}(x,t)))| \ + \ |\exp(-\ell t) \frac{\partial b \circ h \circ \breve{X}}{\partial x}(x,t)| \ \leq \ M(x) \ , \tag{7.9}$$

où de nouveau la fonction $\breve{X}$ est une solution de (6.13), mais dans ce cas avec la fonction χ qui satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \chi(x) & = & 1 \quad \text{if} \quad x \in \mathcal{O} + \delta_d \ , \\ & = & 0 \quad \text{if} \quad x \notin \mathcal{O} + \delta_u \ . \end{array} \right. \tag{7.10}$$

Sous ces hypothèses, il existe S un sous-ensemble de $\mathbb{C}^{n+1}$ de mesure de Lebesgue nulle tel que la fonction $T : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{(n+1)\times p}$ définie par :

$$T(x) \ = \ \int_{-\infty}^{0} \exp(-As) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b(h(\breve{X}(x,s)))\, ds \ , \tag{7.11}$$

est solution de (5.12) et injective si A est une matrice diagonale :

$$A \ = \ \mathtt{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$$

où les $n+1$ nombres complexes λ_i sont choisis arbitrairement dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$ et avec une partie réelle strictement plus petite que ℓ.

Remarque 20 :

1. Ce théorème établit que, si nous choisissons $n+1$ valeurs propres complexes de façon générique pour la matrice A, alors la fonction T donnée par (7.11) est injective. Ceci implique dans le cas où $p = 1$ que la dimension de z est $m = 2n+2$ ($n+1$ parties imaginaires et $n+1$ parties réelles). Ceci rejoint un fait bien connu dans la littérature concernant la théorie de l'observation. En effet, il est génériquement suffisant d'extraire $m = 2n+1$ informations de l'historique des mesures (avec h génériquement choisi) pour observer un état de dimension n (voir par exemple [1, 90, 26, 17, 88]). Ceci peut être déduit du principe suivant :

   L'équation $T(x_1) = T(x_2)$ entre deux états x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^n$, i.e. à $2n$ inconnues, admet génériquement l'unique solution triviale $x_1 = x_2$ si nous disposons de strictement plus que $2n$ équations, i.e. $T(x)$ a strictement plus que $2n$ composantes.

2. Pour démontrer le Théorème précédent nous avons besoin de l'hypothèse (7.9) dans le but de garantir que la fonction T est C^1. Un cas trivial où cette hypothèse est satisfaite est dans le cas où f, h, et b ont des dérivées bornées sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ (voir [47] par exemple).

A l'aide de ce théorème nous avons montré l'injectivité de la fonction T mais non l'injectivité uniforme. Cependant, si $\mathcal{O}$ est borné alors l'injectivité de T est uniforme. Ceci est donné de façon plus précise par la proposition suivante :

Proposition 9 *Si $\mathcal{O}$ est borné et $T \ : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$ est continue et injective alors T est uniformément injective au sens de l'équation (5.13).*

Preuve :

La fonction T étant continue, nous pouvons introduire la fonction $\delta\ : \mathbb{R}_+ \times \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\delta(r,a) \ = \min_{|x-a|\,\geq\, r, x\,\in\,\mathtt{cl}(\mathcal{O})} |T(a) - T(x)| \ , \tag{7.12}$$

La fonction T étant injective, δ ne s'annule que pour $r = 0$. De plus, nous avons pour tout (x, a, r) dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathbb{R}_+$:

$$|T(x) \ - \ T(a)| \ < \ \delta(r,a) \ \Rightarrow \ |x \ - \ a| \ < \ r \ . \tag{7.13}$$

Soit $\epsilon > 0$, nous avons $\{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\,\epsilon, a\right)}(T(a))\,,\ a \ \in \ \mathtt{cl}(\mathcal{O})\}$ qui constitue une couverture par des ensembles ouverts du compact $T(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$. Ainsi, nous pouvons extraire une couverture finie $\{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\,\epsilon, a_i\right)}(T(a_i))\,,\ a_i \ \in \ \mathtt{cl}(\mathcal{O})\,,\ i \ < \ N\}$ avec N un entier positif. Notons alors :

$$\delta_{\min} \ = \min_{i\,<\,N} \ \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{2}\,\epsilon, T(a_i)\right) \ . \tag{7.14}$$

Du fait que $\epsilon > 0$, $\delta_{\min} > 0$. Considérons maintenant (x_1, x_2) dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O})$ tel que $|T(x_1) - T(x_2)| \ < \ \delta_{\min}$. Il existe $1 \leq i \leq N$ tel que $T(x_1) \ \in \ \mathcal{B}_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\,\epsilon, a_i\right)}(T(a_i))$, nous avons de plus :

$$\begin{aligned} |T(x_2) - T(a_i)| \ &\leq \ |T(x_2) - T(x_1)| \ + \ |T(x_1) - T(a_i)| \ , \\ &< \ \delta_{\min} \ + \ \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{2}\,\epsilon, a_i\right) \ , \\ &< \ \delta\left(\frac{1}{2}\epsilon, a_i\right) \ . \end{aligned} \tag{7.15}$$

Donc $T(x_2)$ est aussi dans $\mathcal{B}_{\delta\left(\frac{1}{2}\epsilon, a_i\right)}(T(a_i))$. En utilisant (7.13), nous avons :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| \ &\leq \ |x_1 - a_i| \ + \ |a_i - x_2| \ , \\ &< \ \epsilon \ . \end{aligned} \tag{7.16}$$

En conclusion, pour tout ϵ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta_{\min} > 0$ tel que :

$$|T(x_1) - T(x_2)| \ < \ \delta_{\min} \ \Rightarrow \ |x_1 - x_2| \ < \ \epsilon \ . \tag{7.17}$$

La fonction T est ainsi uniformément injective. □

Ainsi, lorsque $\mathcal{O}$ est borné, nous devons trouver une fonction T seulement injective pour construire un observateur de Luenberger.

7.1.4 Injectivité dans le cas de l'observabilité complète

Un autre contexte dans lequel l'injectivité uniforme peut être obtenue est celui où nous avons l'observabilité complète uniforme.

Définition 7 (Observabilité Complète Uniforme) *Il existe un entier q et une fonction $b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que la fonction $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{q\times p}$ définie par :*

$$\mathcal{H}(x) \;=\; \begin{pmatrix} b_1(h(x)) & \dots & b_p(h(x)) \\ L_f b_1(h(x)) & \dots & L_f b_p(h(x)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_f^{q-1} b_1(h(x)) & \dots & L_f^{q-1} b_p(h(x)) \end{pmatrix} , \tag{7.18}$$

est uniformément injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$; i.e. il existe ρ une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ telle que nous avons :

$$\rho(|\mathcal{H}(x_1) - \mathcal{H}(x_2)|) \;\geq\; |x_1 - x_2| \qquad \forall x_1,\, x_2 \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \;. \tag{7.19}$$

Ici $L_f^i h$ dénote la dérivée de Lie d'ordre i, $L_f^{i+1} h = L_f(L_f^i h)$. Bien sûr, pour que cette fonction ait un sens , il est nécessaire que les fonctions b, f et h soient suffisamment différentiables. Ce contexte a été étudié en détails par Gauthier et ses collaborateurs (voir par exemple [28] et les références qui s'y rattachent, voir aussi [82]). A noter que, dans [26], lorsque $p = 1$, il est montré que, pour tout choix générique de fonctions (f, h) il est suffisant de prendre $q = 2n + 1$ pour que le système ainsi défini soit complètement observable.

En écrivant le développement de Taylor de la fonction $t \mapsto b(h(X(x,t)))$, à $t = 0$, nous voyons que l'injectivité de $\mathcal{H}$ implique que l'application qui associe à x cette fonction restreinte à un petit intervalle de temps est injective. Cette propriété est exploitée par les observateurs à dynamique rapide tels que les *observateurs à grand-gain* (voir [27]).

L'idée pour nous est donc d'exploiter une approche "grandes valeurs propres" pour obtenir l'injectivité de T. Par contre, comme dans le cas des observateurs grand-gain, nous avons besoin de supposer une condition de Lipschitz sur le système. Le résultat est le suivant :

Théorème 20 ([3], Injectivité dans le cas de l'observabilité complète) *Supposons qu'il existe une fonction suffisamment différentiable b et un entier positif q tels que le système soit complètement uniformément observable. Supposons de plus qu'il existe un réel positif L tel que nous ayons :*

$$|L_f^q b(h(x_1) - L_f^q b(h(x_2))| \leq L|\mathcal{H}(x_1) - \mathcal{H}(x_2)| \qquad \forall x_1,\, x_2 \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \;. \tag{7.20}$$

Alors, pour toute matrice Hurwitz A dans $\mathbb{C}^{q\times q}$, il existe un nombre réel k^* tel que, pour tout k strictement plus grand que k^*, il existe une fonction $T : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{m\times p}$ qui est continue, uniformément injective et satisfait :

$$L_f T(x) \;=\; kAT(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b(h(x)) \qquad \forall x \in \mathcal{O} \;. \tag{7.21}$$

7.1.5 Injectivité de T dans le cas des exemples du paragraphe 6.2.2

Dans ce paragraphe, nous reprenons les fonctions T introduites dans le cas du pendule inversé et de l'oscillateur harmonique du paragraphe 6.2.2, et étudions leur injectivité.

7.1.5.1 L'oscillateur harmonique

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique dont l'évolution est décrite par les équations (6.16). Dans (6.23), nous avons explicité une fonction $T\ :(T_1,\ldots,T_q)^T$, solution de l'équation aux dérivées partielles (6.18). Nous allons à présent analyser son injectivité. Considérons $x^a=(x_1^a,x_2^a,x_3^a)^T$ et $x^b=(x_1^b,x_2^b,x_3^b)^T$ deux points de $\mathbb{R}^3$. Nous avons :

$$T_i(x^a)-T_i(x^b) \;=\; \frac{[\lambda_i^2+x_3^b]\,[x_2^a-\lambda_i x_1^a]-[\lambda_i^2+x_3^a]\,[x_2^b-\lambda_i x_1^b]}{[\lambda_i^2+x_3^b][\lambda_i^2+x_3^a]}\ , \tag{7.22}$$

$$\;=\; \frac{\mathfrak{V}\begin{pmatrix} x_1^a-x_1^b\\ x_2^a-x_2^b\\ x_3^bx_1^a-x_3^ax_1^b\\ x_3^bx_2^a-x_3^ax_2^b\end{pmatrix}}{[\lambda_i^2+x_3^b][\lambda_i^2+x_3^a]}\ . \tag{7.23}$$

où $\mathfrak{V}$ dénote la matrice de Vandermonde associée aux valeurs propres $-\lambda_i$:

$$\mathfrak{V}\;=\;\begin{pmatrix} -\lambda_1^3 & \lambda_1^2 & -\lambda_1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -\lambda_q^3 & \lambda_q^2 & -\lambda_q & 1\end{pmatrix} \tag{7.24}$$

Si les valeurs propres λ_i sont toutes différentes, la matrice est inversible à gauche pour $q\geq 4$. Dans ce cas, nous avons :

$$\left|(\mathfrak{V}^T\mathfrak{V})^{-1}\mathfrak{V}^T[T_i(x^a)-T_i(x^b)]\right|\;\leq\;\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathfrak{V}^T\mathfrak{V})^{-1}}}\left|T_i(x^a)-T_i(x^b)\right|\ . \tag{7.25}$$

D'un autre coté, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$|x_3^bx_1^a-x_3^ax_1^b|\;+\;\frac{|x_3^a|+|x_3^b|}{2}\,|x_1^a-x_1^b|\;\geq\;\frac{|x_1^a|+|x_1^b|}{2}\,|x_3^b-x_3^a|\ . \tag{7.26}$$

Ainsi, pour $q\geq 4$ et des λ_i tous distincts, nous obtenons :

$$|x_1^a-x_1^b|\;+\;|x_2^a-x_2^b|\;+\;\tfrac{|x_1^a|+|x_2^a|+|x_1^b|+|x_2^b|}{2}\,|x_3^b-x_3^a| \tag{7.27}$$

$$\leq\;\frac{\left[\max_i|\lambda_i|^2+\frac{|x_3^a|+|x_3^b|}{2}\right]^2\left[1+\frac{|x_3^a|+|x_3^b|}{2}\right]}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathfrak{V}^T\mathfrak{V})^{-1}}}\left|T_i(x^a)-T_i(x^b)\right|\ .$$

Donc, la fonction $x\mapsto T=(T_1,\ldots,T_4)$ est uniformément injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné tel que :

$$\mathcal{O}\;\subset\;\left\{x\in\mathbb{R}^3:\,x_1^2+x_2^2\neq 0\,,\;x_3\geq 0\right\}\ . \tag{7.28}$$

Par contre si $\mathcal{O}$ n'est pas borné, cette fonction n'est pas uniformément injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$. En effet si nous posons :

$$x^a\;=\;(1,1,c)\quad,\qquad x^b\;=\;(1,1,c+1) \tag{7.29}$$

où, c est une réel positif. Alors,

$$|x^a - x^b| \;=\; 1 \;, \tag{7.30}$$

et,

$$|T(x^a) - T(x^b)| \;=\; \frac{\mathfrak{V}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{[\lambda_i^2 + c + 1][\lambda_i^2 + c]} \;. \tag{7.31}$$

Donc, lorsque c tend vers l'infini, $|T(x^a) - T(x^b)|$ tend vers 0. Nous concluons qu'il ne peut exister de fonction ρ telle que T soit uniformément injective au sens de (5.13).

7.1.5.2 Le pendule inversé

Intéressons nous maintenant à l'injectivité de la fonction T obtenue dans le cas du pendule inversé (voir 6.30). Considérons x^a et x^b deux vecteur de $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$T_i(x^a) - T_i(x^b) \;=\; x_2^a - x_2^b \;+\; \lambda_i(x_1^a - x_1^b) \;, \tag{7.32}$$

ainsi,

$$T(x^a) - T(x^b) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix} (x^a - x^b) \;. \tag{7.33}$$

En prenant deux valeurs propres distinctes nous obtenons alors l'injectivité uniforme de la fonction T sur $\mathbb{R}^n$ entier.

7.2 Construction de l'observateur

7.2.1 Expression de T^*

Nous devons à présent construire une fonction T^*, inverse à gauche de T, de façon à construire l'observateur. Nous disposons d'une fonction T uniformément injective au sens de l'équation (5.13), et nous savons par le Théorème 14 (voir aussi dans [42]) qu'il existe T^*, une fonction continue qui satisfait l'équation (5.17) et nous permet ainsi de construire l'observateur.

Dans [3] cette fonction T^* est définie à partir de $T_p^* \ : \mathbb{C}^{q\times p} \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$, où $T_p^*(w)$ est une sélection dans la projection de w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$ sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$, i.e, pour tout w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$

$$T_p^*(w) \ \in \ \mathrm{ArgMin}_{x\in \mathtt{cl}(\mathcal{O})}|T(x) \ - \ w| \ , \tag{7.34}$$

le minimum étant atteint en au moins un point car $T(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$ est un fermé.

Dans [3], nous modifions alors cette fonction T_p^* pour la rendre continue en dehors de $T(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$ et ainsi introduire T^*. Cette procédure permettant d'obtenir une fonction T^* n'est pas constructive et est basée sur des théorèmes d'existence de couverture dénombrable sur des ouverts.

Kreisselemeir et Engel ont donné dans [42, Lemma IV], une formule qui semble plus explicite d'une fonction T^* continue en considérant une fonction T^* de la forme :

$$T^*(w) \ = \ \frac{\int_{s\in \mathtt{cl}(\mathcal{O})} \frac{s}{|w-T(s)|^{n+2}}\, ds}{\int_{s\in \mathtt{cl}(\mathcal{O})} \frac{1}{|w-T(s)|^{n+2}}\, ds} \ . \tag{7.35}$$

En fait, nous pouvons utiliser directement la fonction T_p^* pour construire l'observateur. En effet du fait de l'injectivité uniforme de la fonction T, nous déduisons de (7.34) que la fonction T_p^* vérifie :

$$|x \ - \ T_p^*(w)| \ \leq \ \rho(|T(x) \ - \ w| + |w - T(T_p^*(w))|) \ \leq \ \rho(2|T(x) - w|) \ . \tag{7.36}$$

Ainsi, en utilisant des arguments semblables à ceux de la démonstration du Théorème 14, le système :

$$\dot{w} \ = \ A\, w \ + \ B(h(x)) \quad , \qquad \hat{x} \ = \ T_p^*(w) \ , \tag{7.37}$$

définit un observateur pour notre système initial sur $\mathcal{O}$. Dans les exemples pratiques qui suivront, l'inverse à gauche de T sera donné par T_p^* bien que celui-ci ne soit pas continu.

7.2.2 Cas d'une extension Lipschitzienne

L'objectif de ce paragraphe est d'ennoncer un contexte d'hypothèses nous permettant d'exploiter les résultats de Rapaport et Maloum dans [82], où les auteurs ont proposé des procédures constructives pour d'obtenir des extensions Lipschitziennes. Nous souhaitons appliquer ces méthodes à la construction de T^*.

L'inverse à gauche de T peut être Lipschitzienne relativement à $T(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$

Pour mettre en évidence l'utilité des outils développés dans [82], nous allons dans un premier temps montrer que, sous certaines hypothèses, la fonction $T^{-1} \ : T(\mathtt{cl}(\mathcal{O})) \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$ (l'inverse à gauche de T), peut être Lipschitzienne relativement à $T(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$.

Dns le cas où la fonction ρ dans (5.13) est une fonction linéaire, i.e. qu'il existe K tel que :

$$|x_1 - x_2| \leq K\,|T(x_1) - T(x_2)| \quad , \qquad \forall\,(x_1, x_2) \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}) \times \mathrm{cl}(\mathcal{O}) \ . \tag{7.38}$$

alors, T^{-1} satisfait :

$$|T^{-1}(w_1) - T^{-1}(w_2)| \leq K\,|w_1 - w_2| \quad , \qquad \forall (w_1, w_2) \in T(\mathrm{cl}(\mathcal{O}))^2 \ . \tag{7.39}$$

T^{-1} est donc une fonction globalement Lipschitzienne relativement à $T(\mathrm{cl}(\mathcal{O}))$. Nous pouvons alors exploiter les résultats de [82], pour construire une extension Lipschitzienne de T^{-1} relativement à $\mathbb{C}^{q\times p}$ de façon à obtenir T^* telle que :

$$|T^*(w_1) - T^*(w_2)| \leq K\,|w_1 - w_2| \quad , \qquad \forall (w_1, w_2) \in (\mathbb{C}^{q\times p})^2 \ . \tag{7.40}$$

Le problème est maintenant d'obtenir une fonction T telle que (7.38) soit satisfaite. Dans cet objectif, nous allons exploiter des propriétés sur le gradient de la fonction T et pour faciliter les notations nous supposons $p = 1$ (cas mono-sortie) dans la suite de ce paragraphe.

Un contexte d'hypothèses nous assurant que T satisfait (7.38) nous est donné par la proposition suivante :

Proposition 10 *Si,*

1. *L'ouvert $\mathcal{O}$ est borné dans $\mathbb{R}^n$,*
2. *La fonction $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{q\times 1}$ est injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ et C^1 sur un voisinage de $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$,*
3. *Pour tout x dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$, la matrice $\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}(x)^T \dfrac{\partial T}{\partial x}(x)\right)$ est définie positive.*

alors, il existe un réel K tel que la fonction T satisfait (7.38) sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ et T^{-1} l'inverse de T est Lipschitzienne relativement à $T(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$.

Preuve : Introduisons la fonction $\Delta\ : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times 1}$ définie par :

$$\Delta(x_1, x_2) \ = \ T(x_1) - T(x_2) - \frac{\partial T}{\partial x}(x_2)(x_1 - x_2) \ , \tag{7.41}$$

Puisque T est C^1, nous avons pour tout x_2 dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$:

$$\lim_{x_1 \to x_2} \frac{\Delta(x_1, x_2)}{|x_1 - x_2|} \ = \ 0 \ . \tag{7.42}$$

D'autre part, la fonction $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ est continue et par hypothèse, pour tout x dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ elle est de rang plein. Ainsi, la fonction $M\ : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times 1}$ donnée par :

$$M(x) \ = \ \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x)^T \frac{\partial T}{\partial x}(x)\right)^{-1} \frac{\partial T}{\partial x}(x)^T \ , \tag{7.43}$$

est continue et satisfait :

$$M(x)\,\frac{\partial T}{\partial x}(x) \ = \ I_n \ , \tag{7.44}$$

où I_n est la matrice identité sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons alors pour tout (x_1, x_2) dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq |M(x_2)| \left(|T(x_1) - T(x_2)| + |\Delta(x_1, x_2)|\right) , \\ &\leq M_{\max} \left(|T(x_1) - T(x_2)| + |\Delta(x_1, x_2)|\right) , \end{aligned} \tag{7.45}$$

où,

$$M_{\max} = \max_{x \in \mathtt{cl}(\mathcal{O})} M(x) , \tag{7.46}$$

ou encore, pour toute paire (x_1, x_2) dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O})$:

$$|x_1 - x_2| \left(1 - M_{\max} \frac{|\Delta(x_1, x_2)|}{|x_1 - x_2|}\right) \leq M_{\max} |T(x_1) - T(x_2)| , \tag{7.47}$$

Aussi, d'après (7.42), pour tout a dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$, il existe $\delta(a) > 0$, tel que, pour tout x_1 dans $\mathcal{B}_{\delta(a)}(a) \cap \mathtt{cl}(\mathcal{O})$, nous avons :

$$|\Delta(x_1, a)| \leq \frac{1}{4M_{\max}} |x_1 - a| . \tag{7.48}$$

Mais Δ étant une fonction continue en son deuxième argument, pour tout a dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$, il existe un réel positif $\epsilon(a)$ tel que, pour tout (x_1, x_2) dans $\mathcal{B}_{\epsilon(a)}(a)^2 \cap \mathtt{cl}(\mathcal{O})^2$, nous avons :

$$|\Delta(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{2M_{\max}} |x_1 - x_2| . \tag{7.49}$$

Avec (7.45) nous en déduisons pour tout a dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$,

$$|x_1 - x_2| \leq 2\, M_{\max} |T(x_1) - T(x_2)| \quad , \qquad \forall\, (x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{\epsilon(a)}(a)^2 \cap \mathtt{cl}(\mathcal{O})^2 . \tag{7.50}$$

De plus, $\{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}\epsilon(a)}(a)\,,\ a \in \mathtt{cl}(\mathcal{O})\}$ constitue une couverture par des ensembles ouverts du compact $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$. Ainsi, nous pouvons extraire une couverture finie $\{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}\epsilon(a_i)}(a_i)\,,\ a_i \in \mathtt{cl}(\mathcal{O})\,,\ i < N\}$ avec N un entier positif. Notons alors :

$$\epsilon_{\min} = \min_{i < N} \frac{1}{2} \epsilon(a_i) . \tag{7.51}$$

Nous remarquons que du fait que la fonction T est injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$, nous pouvons définir le réel positif :

$$N_{\max} = \max_{(x_1, x_2) \in \Omega} \frac{|x_1 - x_2|}{T(x_1) - T(x_2)} \tag{7.52}$$

où Ω est le compact défini par :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O}) : |x_1 - x_2| \geq \epsilon_{\min}\} . \tag{7.53}$$

Considérons maintenant (x_1, x_2) dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O}) \times \mathtt{cl}(\mathcal{O})$, nous avons deux cas :

1. $|x_1 - x_2| \leq \epsilon_{\min}$: puisqu'il existe $i < N$ tel que $x_2 \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}\epsilon(a_i)}(a_i)$, nous avons,

$$\begin{aligned} |x_1 - a_i| &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - a_i| \\ &\leq \epsilon_{\min} + \frac{1}{2}\epsilon(a_i) \\ &\leq \epsilon(a_i) . \end{aligned} \tag{7.54}$$

Ainsi, $x_1 \in \mathcal{B}_{\epsilon(a_i)}(a_i)$, et par conséquent :

$$|x_1 - x_2| \leq 2\, M_{\max} |T(x_1) - T(x_2)| . \tag{7.55}$$

2. $|x_1 - x_2| \ \geq \ \epsilon_{\min}$: Par hypothèse (x_1, x_2) est dans Ω et donc :

$$|x_1 - x_2| \ \leq \ N_{\max} \, |T(x_1) - T(x_2)| \ . \tag{7.56}$$

De tout ceci, nous concluons que pour tout (x_1, x_2) dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$:

$$|x_1 - x_2| \ \leq \ K \, |T(x_1) - T(x_2)| \ , \tag{7.57}$$

avec, $K \ = \ \max\{N_{\max}, 2\, M_{\max}\}$. □

Remarque 21 :

1. Dans tout ce paragraphe nous avons supposé $p = 1$. Cette restriction nous a permis de faciliter les notations. Mais si nous introduisons :

$$T_e(x) \ = \ \left(T_1^T(x), \ldots, T_p^T(x)\right)^T \ , \tag{7.58}$$

où les T_i correspondent à chacune des colonnes de la fonction T, alors tout ce qui précède s'applique directement. Ceci nous permet d'obtenir une fonction T_e qui n'est plus une matrice mais un vecteur.

7.2.3 $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ est génériquement de rang plein

Pour obtenir une fonction T^{-1} Lipschitzienne nous avons dû supposer que le gradient de T est de rang plein. Comme nous allons le montrer en utilisant les outils développés dans [3], cette hypothèse est génériquement satisfaite, si nous introduisons une hypothèse d'observabilité supplémentaire. De la même façon que dans le paragraphe précédent, nous allons supposer le système mono-sortie, mais une fois encore, tous les résultats s'étendent aux cas multi-sortie.

L'hypothèse d'observabilité à ajouter est :

Définition 8 (Gradient de mesure linéairement indépendant sur $\mathcal{O}$) *Nous disons que le système (5.1) a un gradient de mesure linéairement indépendant sur $\mathcal{O}$ si il existe une fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et deux réels strictement positifs $\delta_\Upsilon < \delta_\ell$ tels que pour tout v dans $\mathbb{R}^n/\{0\}$ et pour tout x dans $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon$, il existe un temps t dans $\left(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_\ell}(x), 0\right]$ tel que nous ayons :*

$$\frac{\partial b(h(X(x,t)))}{\partial x} \, v \ \neq \ 0 \ . \tag{7.59}$$

Cette propriété est satisfaite dans le cas où le système satisfait la condition du rang d'observabilité. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 11 *Si il existe une fonction b suffisamment différentiable telle que pour tout x dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ et v dans $\mathbb{R}^n/\{0\}$ nous ayons :*

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x) \, v \ \neq \ 0 \ , \tag{7.60}$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction associée à b introduite dans (7.18), alors le système vérifie que le gradient de mesure est linéairement indépendant.

Preuve : Soient v dans $\mathbb{R}^n/\{0\}$ et x dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ tels que, pour tout temps t dans $\left(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_\ell}(x), 0\right]$ nous ayons :

$$\frac{\partial b(h(X(x,t)))}{\partial x}\, v \;=\; 0 \;, \tag{7.61}$$

où b est la fonction telle que la fonction $\mathcal{H}$, associée par la notation (7.18), satisfait l'hypothèse (7.59). Nous avons alors, pour tout temps t dans $\left(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_\ell}(x), 0\right]$:

$$\dot{\overline{\frac{\partial b(h(X(x,t)))}{\partial x}}}\, v \;=\; \frac{\partial}{\partial x} L_f b(h(X(x,t)))\, v \;=\; 0 \;. \tag{7.62}$$

En dérivant itérativement par rapport au temps, nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(X(x,t))}{\partial x}\, v \;\neq\; 0 \;, \tag{7.63}$$

et du fait de l'hypothèse du rang d'observabilité, nous avons $v = 0$. □

Nous pouvons alors démontrer le Théorème suivant (noter qu'il est très similaire au Théorème 19) :

Théorème 21 (Gradient de T génériquement de rang plein) *Plaçons nous dans le cadre d'hypothèses suivantes :*

1. *Le système (5.1) est complet à l'infini en temps négatif sur $\mathcal{O} + \delta_u$.*
2. *Le système (5.1) a la propriété de gradient de mesure linéairement indépendant sur $\mathcal{O}$ avec une fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}^2$ et un réel δ_ℓ dans $(0, \delta_u)$.*
3. *Il existe une fonction continue $M : \mathcal{O} + \delta_\Upsilon \to \mathbb{R}_+$, et un réel négatif ℓ tels que pour tout x dans $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon$,nous avons pour tout t dans $(\breve{\sigma}^-_{\mathbb{R}^n}(x), 0]$:*

$$\begin{aligned} |\exp(-\ell t) b(h(\breve{X}(x,t)))| \;+\; |\exp(-\ell t) \frac{\partial b \circ h \circ \breve{X}}{\partial x}(x,t)| \;+ \\ |\exp(-\ell t) \frac{\partial^2 b \circ h \circ \breve{X}}{\partial x^2}(x,t)| \;\leq\; M(x) \;, \end{aligned} \tag{7.64}$$

où de nouveau la fonction $\breve{X}$ est une solution de (6.13), avec la fonction χ qui satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \chi(x) & = & 1 \quad \text{if} \quad x \in \mathcal{O} + \delta_d \;, \\ & = & 0 \quad \text{if} \quad x \notin \mathcal{O} + \delta_u \;. \end{array} \right. \tag{7.65}$$

Sous ces hypothèses, il existe S un sous-ensemble de $\mathbb{C}^{n+1}$ de mesure de Lebesgue nulle tel que la fonction $T : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{(n+1)}$ définie par :

$$T(x) \;=\; \int_{-\infty}^{0} \exp(-As) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b(h(\breve{X}(x,s)))\, ds \;, \tag{7.66}$$

est C^2 et telle que $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x)$ est de rang plein pour tout x dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ avec A une matrice diagonale :

$$A \;=\; \mathtt{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$$

où les $n+1$ nombres complexes λ_i sont choisis arbitrairement dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$ et avec une partie réelle strictement plus petite que ℓ.

La démonstration de ce Théorème qui est écrite dans la section A.2.5 est très proche de celle que nous avons utilisée pour démontrer [3, Théorème III].

En combinant les Théorèmes 19 et 21 et en supposant $\mathcal{O}$ borné, nous obtenons par la proposition 10 une fonction T^{-1} qui est Lipschitzienne. En utilisant alors les travaux de Rapaport et Maloum dans [82], nous pouvons construire un observateur à partir d'une fonction T^* globalement Lipschitzienne.

Remarque 22 :

1. Une utilité potentielle de ce résultat est éventuellement de nous permettre de ne pas avoir à construire T^* à chaque pas de temps. En effet, dans le cas où l'on pose :

$$\hat{x} \;=\; T^*(w) \;=\; T^{-1}(T_p(w)) \;, \tag{7.67}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} \;=\; \dot{\widehat{T^*(w)}} \;&=\; \frac{\partial T^{-1}}{\partial w}(T_p(w))\,\dot{\widehat{T_p(w)}} \;, \\ &=\; \frac{\partial T^{-1}}{\partial w}(T(\hat{x}))\,\dot{\widehat{T_p(w)}} \;, \end{aligned} \tag{7.68}$$

et si $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ est de rang plein, alors localement, nous avons :

$$\dot{\hat{x}} \;=\; \left(\left(\frac{\partial T}{\partial w}(\hat{x})\right)^T \left(\frac{\partial T}{\partial w}(\hat{x})\right)\right)^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial w}(\hat{x})\right)^T \dot{\widehat{T_p(w)}} \;, \tag{7.69}$$

La principale difficulté sera alors de donner un sens au terme $\dot{\widehat{T_p(w)}}$.

Chapitre 8

Extension

8.1 Approximation

8.1.1 Modification de l'observateur

Comme nous l'avons vu, l'implémentation d'un observateur de Luenberger pour les systèmes non-linéaires repose sur la possibilité d'expliciter une solution d'une équation aux dérivées partielles. Bien que nous ayons obtenu des résultats d'existence de cette solution et que nous ayons réussi à l'expliciter dans certains cas académiques, déterminer une expression de celle-ci peut être d'une grande difficulté en pratique. C'est pourquoi il est important d'étendre la méthode de façon à ce que celle-ci autorise l'utilisation d'une approximation de la solution. En fait nous pouvons utiliser une approximation, si, en contre partie, nous modifions la dynamique de l'observateur et si cette approximation est suffisamment "proche" de la véritable solution. Le théorème que nous avons présenté dans [3] est le suivant :

Théorème 22 ([3], Approximation) *Supposons que le système (5.1) est complet à l'infini en temps positif sur $\mathcal{O}$ et qu'il existe q un entier , A une matrice Hurwitz dans $\mathbb{C}^{q\times q}$, et des fonctions T_a : $\mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$, continue, B : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^{q\times p}$, continue et ρ de classe $\mathcal{K}_\infty$, telles que :*

1. *nous avons :*

$$|x_1 - x_2| \;\leq\; \rho(|T_a(x_1) - T_a(x_2)|) \qquad \forall x_1,\, x_2 \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \;. \tag{8.1}$$

2. *la fonction $L_f T_a$ est bien définie sur $\mathcal{O}$ et la fonction $\mathfrak{E} : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$ définie comme :*

$$\mathfrak{E}(x) = L_f T_a(x) - [A T_a(x) + B(h(x))] \qquad \forall x \in \mathcal{O} \tag{8.2}$$

satisfait :

$$|\mathfrak{E}(x_1) - \mathfrak{E}(x_2)| \;\leq\; N\,|T_a(x_1) - T_a(x_2)| \qquad \forall x_1,\, x_2 \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \;, \tag{8.3}$$

où N est un nombre positif qui satisfait :

$$2N\,\lambda_{\max}(P) \;<\; 1 \;, \tag{8.4}$$

avec $\lambda_{\max}(P)$ la valeur propre maximale de la matrice Hermitienne P solution de :

$$\overline{A}^\top P + PA = -I \;. \tag{8.5}$$

Sous ces conditions, il existe une fonction $T_a^* : \mathbb{C}^{m\times p} \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$ *et une fonction localement Lipschitzienne* $\mathfrak{F} : \mathbb{C}^{q\times p} \to \mathbb{C}^{q\times p}$ *telle que, pour tout* x *dans* $\mathcal{O}$ *et* z *dans* $\mathbb{C}^{q\times p}$ *chaque solution* $(X(x,t), W(x,w,t))$ *de :*

$$\dot{x} \;=\; f(x) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; Aw + \mathfrak{F}(w) + B(h(x)) \tag{8.6}$$

est maximalement définie sur $[0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x))$ *en temps positif. De plus, si nous avons :*

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \;=\; \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \ ,$$

alors nous obtenons :

$$\lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x)} |T_a^*(W(x,w,t)) - X(x,t)| \;=\; 0 \ . \tag{8.7}$$

Remarque 23 :

1. Dans (8.2), $\mathfrak{E}$ représente l'erreur dans l'équation (5.12) donnée par l'approximation T_a de T. Cette erreur ne doit pas être trop large dans un sens incrémental tel que cela est spécifié par les équations (8.3) et (8.4). Une méthode permettant d'approximer la fonction T pourrait être de chercher T_a dans un ensemble de fonctions données en minimisant la norme L^∞ sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ du gradient de l'erreur associée $\mathfrak{E}$. En particulier dans le cas où $\mathcal{O}$ est borné, en utilisant le Théorème d'approximation de Weierstrass, il est toujours possible de choisir une matrice A Hurwitz et une fonction linéaire B telle que la contrainte (8.4) soit satisfaite si nous nous restreignons aux fonctions T_a polynomiales en x.
2. En fait la fonction $\mathfrak{F}$ dans l'observateur (8.6) peut être choisie comme n'importe quelle extension Lipschitzienne de $\mathfrak{E}(T_a^*)$ en dehors de $T_a(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$. Ceci est très similaire à ce qui a été fait par Rapaport et Maloum dans [82] où une procédure de construction d'une extension Lipschitzienne est proposée. Cependant cette extension n'est pas nécessaire dans le cas où la fonction $\mathfrak{E}$ satisfait :

   $$|\mathfrak{E}(x_1) - \mathfrak{E}(x_2)| \le \frac{N}{4}\,\rho^{-1}(|x_1 - x_2|) \quad \forall\,(x_1,x_2) \in \mathtt{cl}(\mathcal{O})^2 \ ,$$

   où ρ est une fonction qui vérifie (8.1). Dans ce cas nous prenons simplement :

   $$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{E}(T_a^*(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}^{m\times p}.$$

3. Le Théorème 22 peut être étendu dans le cas de la remarque 17. La fonction T_a ne dépendra alors que de ξ_2, et la fonction $\mathfrak{E}$ est définie par :

   $$\mathfrak{E}(\xi_2) \;=\; L_{f_2}T_a(\xi_2) - [AT_a(\xi_2) + Bh(\xi_2)] \ .$$

   L'observateur d'ordre réduit prend la forme :

   $$\dot{\overline{z - B\int_0^y \gamma(s)ds}} \;=\; Az + Bf_1(y,u) + \mathfrak{F}(z) \quad , \qquad \widehat{\xi}_2 \;=\; T_a^*(z) \ ,$$

8.1.2 Les observateurs grand-gain

La combinaison du théorème 22 et du théorème 20 nous donne une nouvelle interprétation des observateurs grand-gain classiques d'ordre q tels qu'ils ont été étudiés par Gauthier Hammouri et Kupka dans [26] ou par Rapaport et Maloum dans [82]. Ainsi, nous avons :

Proposition 12 ([2], High gain Observer) *Supposons :*

1. *Le système (5.1) est complet en temps positif sur $\mathcal{O}$.*
2. *Il existe une fonction suffisamment différentiable $b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^p$, une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ notée ρ et un nombre positif L tel que (7.20) and (7.19) sont satisfait avec la fonction $\mathcal{H}$ et q donnés par (7.18).*

Sous ces hypothèses, pour toutes matrices complexes dans $\mathbb{C}^{q\times q}$ il existe un nombre positif k^* tel que, pour tout nombre réel k strictement plus grand que k^*, il existe une fonction $T_a^* : \mathbb{C}^{q\times p} \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$, inverse à droite sur $T_a(\mathtt{cl}(\mathcal{O}))$ de la fonction $T_a : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$ définie par :

$$T_a(x) \;=\; -\sum_{i=1}^{q}(kA)^{-i}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} L_f^{i-1}b(h(x)) \;, \tag{8.8}$$

et une fonction $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{q\times p} \to \mathbb{R}^{q\times p}$ telles que, pour tout x dans $\mathcal{O}$ et w dans $\mathbb{R}^{q\times p}$, chaque solution $(X(x,t), W(x,w,t))$ de :

$$\dot{x} \;=\; f(x) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; kAz + \mathfrak{F}(z) + \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} b(h(x)) \tag{8.9}$$

est définie sur $[0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x))$. De plus, si nous avons :

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \;=\; \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \;,$$

alors nous obtenons

$$\lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x)} |T_a^*(W(x,w,t)) - X(x,t)| \;=\; 0 \;. \tag{8.10}$$

Remarque 24 : Dans le cas où $\mathcal{O}$ est borné et $\mathcal{H}$ est injective, l'injectivité uniforme et la complétude à l'infini découlent directement. Ainsi, nous retrouvons les résultats de Rapaport et Maloum dans [82, Lemma 1].

8.2 Systèmes non complets

Tous les résultats présentés précédemment supposaient la complétude à l'infini du système. Cette hypothèse est une restriction qui peut être relâchée. Dans ce paragraphe, nous allons considérer des systèmes pouvant avoir des solutions qui explosent en temps fini. La convergence de l'observateur devra alors se faire sur le temps d'existence des solutions.

Il est montré dans [12] qu'une condition nécessaire à l'existence d'un observateur qui entraîne la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation sur le temps d'existence des solutions est la propriété d'*Observabilité de la non bornitude*. Cette propriété peut se caractériser ainsi :

Définition 9 (Observabilité de la non bornitude sur $\mathcal{O}$) *Le système (2.4.3) a la propriété d'observabilité de la non bornitude en temps positif (resp. en temps négatif) sur $\mathcal{O}$ si il existe une fonction propre et C^1, $\mathcal{V}_{\mathfrak{f}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ (resp. , $\mathcal{V}_{\mathfrak{b}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et une fonction continue $\gamma_{\mathfrak{f}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$) telles que :*

$$\begin{array}{rcl} L_f\mathcal{V}_{\mathfrak{f}}(x) & \leq & \mathcal{V}_{\mathfrak{f}}(x) + \gamma_{\mathfrak{f}}(h(x)) \quad , \qquad \forall\, x \in \mathcal{O} \ , \\ (\textit{resp. } L_f\mathcal{V}_{\mathfrak{b}}(x) & \geq & -\mathcal{V}_{\mathfrak{b}}(x) - \gamma_{\mathfrak{b}}(h(x)) \quad , \qquad \forall\, x \in \mathcal{O} \ ). \end{array} \tag{8.11}$$

Il s'avère que cette propriété est aussi suffisante pour satisfaire notre objectif. En effet, tous les résultats précédents sont toujours valides si l'on remplace complétude à l'infini en temps positif (resp. en temps négatif) par l'hypothèse d'observabilité de la non bornitude en temps positif (resp. en temps négatif).

La procédure permettant de retrouver les résultats précédents repose sur un changement de temps du système. En effet, sous l'hypothèse d'Observabilité de la non bornitude en temps positif (resp. négatif) sur $\mathcal{O}$, pour tout x dans $\mathcal{O}$ nous pouvons définir une fonction $\tau_x \ : (\sigma^-_{\mathbb{R}^n}(x), \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x)) \to \mathbb{R}$ par :

$$\tau_x(t) \ = \ \int_0^t \gamma(h(X(x,s)))\, ds \tag{8.12}$$

où $\gamma : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1 telle que :

$$\begin{array}{rcl} \gamma(h(x)) & \geq & 1 + \gamma_{\mathfrak{f}}(h(x)) \quad , \qquad \forall\, x \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \ , \\ (\ \text{resp. } \gamma(h(x)) & \leq & 1 + \gamma_{\mathfrak{b}}(h(x)) \quad , \qquad \forall\, x \in \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \ ). \end{array} \tag{8.13}$$

Cette fonction τ_x définit un nouveau temps dans lequel les trajectoires du système sont désormais complètes à l'infini en temps positif (resp. négatif). En effet, dans ce nouveau temps le système (5.1) s'écrit :

$$\frac{d}{d\tau_x}x \ = \ f_\gamma(x) \quad \text{avec} \quad f_\gamma(x) \ = \ \frac{f(x)}{\gamma(h(x))} \ , \tag{8.14}$$

et l'équation (8.11) devient :

$$\begin{array}{rcl} L_{f_\gamma}\mathcal{V}_{\mathfrak{f}}(x) & \leq & \mathcal{V}_{\mathfrak{f}}(x) + 1 \quad , \qquad \forall\, x \in \mathcal{O} \ , \\ (\ \text{resp. } L_{f_\gamma}\mathcal{V}_{\mathfrak{b}}(x) & \geq & -\mathcal{V}_{\mathfrak{b}}(x) - 1 \quad , \qquad \forall\, x \in \mathcal{O} \ ), \end{array} \tag{8.15}$$

Ainsi le système est complet à l'infini en temps positif (resp. négatif) dans le nouveau temps τ_x. Tous les résultats précédents peuvent alors s'appliquer (voir [4]). Les hypothèses

de chacun des théorèmes devant être vérifiées pour le système (8.14) (i.e en remplaçant f par f_γ).

L'observateur est maintenant de la forme :

$$\dot{w} \;=\; \gamma(y)[Aw \,+\, B(y)] \quad , \qquad \hat{x} \;=\; T^*(w) \;, \tag{8.16}$$

Ainsi en particulier, les hypothèses d'observabilité requises pour les différents résultats doivent être valides pour le système modifié (8.14). Mais du fait que la fonction γ ne dépend que de y, nous pouvons montrer que certaines propriétés d'observabilité du système (5.1) restent valides pour le système (8.14). En effet, nous avons le résultat suivant :

Lemme 1 *Si le système (5.1) est distinguable en temps négatif sur $\mathcal{O}$ avec les réels associés δ_d et δ_Υ et si $\gamma(h(x)) \;\geq\; 1$ pour tout x dans $\mathcal{O} + \delta_d$ alors, le système (8.14) est aussi distinguable en temps négatif sur $\mathcal{O}$ avec les mêmes δ_d et δ_Υ.*

La preuve de ce lemme est donnée en annexe A.2.4.

Malheureusement dans le cas de l'observabilité complète un tel résultat ne semble pas valide. En effet, l'injectivité uniforme de la fonction $\mathcal{H}$ associée au système (5.1), n'implique pas nécessairement l'injectivité uniforme de la fonction $\mathcal{H}_\gamma$ associée au système (8.14). Par contre, en ce qui concerne la simple injectivité nous disposons du lemme suivant :

Lemme 2 *Si la fonction $\mathcal{H}$ associée au système (5.1) définie en (7.18) pour une certaine fonction b est injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ et si $\gamma(h(x)) \;\geq\; 1$ pour tout x dans $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ alors la fonction $\mathcal{H}_\gamma$ définie par*

$$\mathcal{H}_\gamma(x) \;=\; \begin{pmatrix} b_1(h(x)) & \dots & b_p(h(x)) \\ L_{f_\gamma} b_1(h(x)) & \dots & L_{f_\gamma} b_p(h(x)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{f_\gamma}^{q-1} b_1(h(x)) & \dots & L_{f_\gamma}^{q-1} b_p(h(x)) \end{pmatrix} \;, \tag{8.17}$$

est elle aussi injective sur $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$.

8.3 Système commandé

Toute l'étude présentée dans cette partie concerne les systèmes autonomes. Pourtant, nous pouvons nous demander de savoir si cette technique est transposable dans le cas d'un système commandé.

Considérons donc maintenant un système de la forme :

$$\dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)u \;, \tag{8.18}$$

où u est la commande dans $\mathbb{R}^m$.

Comme nous allons le voir, tous les résultats sont aisément transposables pour des systèmes commandés si nous imposons des hypothèses supplémentaires sur la fonction T.

Se donnant une fonction $u \;:\; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, et x dans l'ouvert $\mathcal{O}$, nous pouvons définir $[0, \sigma^+_{\mathcal{O}}(x,u))$, le plus grand intervalle de temps positif durant lequel $X(x,t,u)$, l'unique solution issue de x du système (8.18), est définie.

Supposons que nous connaissons une fonction T, une matrice A et une fonction B telles que T est solution de (5.12) sur $\mathcal{O}$. Nous avons alors le long des solutions du système (8.18) pour tout x dans $\mathcal{O}$:

$$\dot{\widehat{T(x)}} \;=\; AT(x) \;+\; B(h(x)) \;+\; \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}(x)g(x)u}_{\text{Nouveau terme introduit par la commande}} \;. \tag{8.19}$$

Suivant que nous imposons ou non des contraintes sur la loi de commande, nous pouvons introduire deux contextes d'hypothèses :

1. **Cas d'un observateur uniforme en la commande**

   Sans aucune hypothèse sur la loi de commande u, il est possible d'étendre la théorie développée au cas des systèmes commandés. En effet, si il existe une fonction $C \;:\; \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^{q\times p\times m}$ telle que :

   $$C(h(x)) \;=\; \frac{\partial T}{\partial x}(x)g(x) \quad , \qquad \forall\, x \,\in\, \mathcal{O} \;, \tag{8.20}$$

   alors pour toute fonction $u \;:\; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, il existe une fonction $T^* \;:\; \mathbb{C}^{q\times p} \to \mathtt{cl}(\mathcal{O})$ telle que pour tout x dans $\mathcal{O}$ et w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$, si :

   $$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x,u) \;=\; \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x,u) \;, \tag{8.21}$$

   alors l'unique solution $(X(x,t,u), W(x,w,t,u))$ de :

   $$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)u \;, \\ \dot{w} \;=\; Aw \;+\; B(h(x)) \;+\; C(h(x))u \end{cases} \tag{8.22}$$

   satisfait :

   $$\lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x,u)} |T^*(W(x,w,t,u)) - X(x,t,u)| \;=\; 0 \;. \tag{8.23}$$

   Cette démarche est une extension directe de l'approche de Luenberger pour les systèmes linéaires commandés. L'observateur obtenu est maintenant de la forme :

   $$\hat{x} \;=\; T^*(w) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; A\,w \;+\; B(y) \;+\; C(y)\,u \;. \tag{8.24}$$

2. **Cas des commandes petites**

Reprenons ici l'idée qui a conduit à ce que nous avons fait dans le cas d'une approximation de la fonction T dans la section 8.1. Se donnant une fonction C, nous pouvons introduire $\mathfrak{E} : \mathtt{cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times m}$ la fonction définie par :

$$\mathfrak{E}(x) \;=\; \frac{\partial T}{\partial x}(x)g(x) \;-\; C(h(x)) \;. \tag{8.25}$$

A l'image de ce que nous avions fait dans la section 8.1, nous supposons que $\mathfrak{E}$ est Lipschitzienne relativement à $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$, i.e. il existe $\bar{N}$ tel que :

$$|\mathfrak{E}(x_1) - \mathfrak{E}(x_2)| \;\leq\; \bar{N}\,|T(x_1) - T(x_2)| \qquad \forall\,(x_1, x_2) \;\in\; (\mathtt{cl}(\mathcal{O}))^2 \;.$$

Nous nous restreignons alors à des fonctions u à valeurs dans U défini par :

$$U \;=\; \left\{ u \;\in\; \mathbb{R}^m \;:\; |u| \;\leq\; \frac{\bar{N}}{N} \right\} \;, \tag{8.26}$$

avec N défini par (8.3) et (8.4) (commande petite). Nous pouvons réutiliser les arguments du Théorème 22 de la section 8.1. Nous trouvons alors une fonction $\mathfrak{F} : \mathbb{C}^{q\times p} \to \mathbb{C}^{q\times p}$ telle que pour tout x dans $\mathcal{O}$ et w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$, si :

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x, u) \;=\; \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x, u) \;, \tag{8.27}$$

alors l'unique solution $(X(x, t, u), W(x, w, t, u))$ de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)u \;, \\ \dot{w} \;=\; Aw \;+\; B(h(x)) \;+\; C(h(x))u \;+\; \mathfrak{F}(w)u \;, \end{array} \right. \tag{8.28}$$

satisfait si $u \;\in\; U$:

$$\lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x,u)} |T^*(W(x, w, t, u)) - X(x, t, u)| \;=\; 0 \;. \tag{8.29}$$

L'observateur obtenu est maintenant de la forme :

$$\hat{x} \;=\; T^*(w) \quad , \qquad \dot{w} \;=\; A\,w \;+\; B(y) \;+\; C(y)\,u \;+\; \mathfrak{F}(w)u \;. \tag{8.30}$$

Remarque 25 : Tout ce paragraphe peut s'étendre au cas où n'avons pas une solution exacte mais une solution T_a approchée au sens de la section 8.1.

8.4 Extension dynamique

8.4.1 Contexte

Pour construire un observateur de Luenberger, nous devons trouver une solution d'une équation aux dérivées partielles. Comme nous l'avons vu, nous pouvons simplifier cette procédure en utilisant une approximation. Une autre approche facilitant cette résolution consiste à modifier l'équation aux dérivée partielle en introduisant une extension dynamique.

En effet, considérons ϑ dans $\mathbb{R}^r$, et introduisons une dynamique de la forme :

$$\dot{\vartheta} \;=\; j(\vartheta, y) \tag{8.31}$$

où y est dans $\mathbb{R}^p$ et $j \;: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$.

Nous connaissons ϑ du fait que cette dynamique est implémentable (elle est commandée par la mesure y). Nous pouvons alors autoriser T et B à dépendre de cette variable. Considérons pour cela le système étendu de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; f(x)\;, \\ \dot{\vartheta} \;=\; j(\vartheta, y)\;, \\ \dot{w} \;=\; A\,w \;+\; B(y, \vartheta)\;. \end{cases} \tag{8.32}$$

Si T est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,\vartheta) f(x) \;+\; \frac{\partial T}{\partial \vartheta}(x,\vartheta) j(\vartheta, h(x)) \;=\; A\,T(x,\vartheta) \;+\; B(h(x) \tag{8.33}$$

alors,

$$w \;=\; T(x, \vartheta) \tag{8.34}$$

est une variété invariante du système et nous avons :

$$\dot{\overbrace{w - T(x,\vartheta)}} \;=\; A\,(w - T(x,\vartheta) \tag{8.35}$$

et, sous l'hypothèse supplémentaire que les trajectoires du système sont complètes, la composante w de l'état du système étendu converge exponentiellement vers $T(x, \vartheta)$.

L'utilité de l'extension dynamique est alors de rajouter un terme dans l'équation aux dérivées partielles (5.12) et ainsi de nous donner un degré de liberté supplémentaire.

Comme précédemment pour construire un observateur nous aurons alors besoin d'hypothèse d'injectivité de la fonction T. Dans ce cas, il faudra que l'injectivité soit uniforme par rapport ϑ.

Tout ceci est résumé plus précisément par la proposition suivante :

Proposition 13 *Supposons que le système (5.1) est complet à l'infini en temps positif sur $\mathcal{O}$ et qu'il existe un entier q et un entier r, une matrice Hurwitz A dans $\mathbb{C}^{q\times q}$ et des fonctions continues $T \;:\; cl(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^{q\times p}$ et $B \;: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}^{q\times p}$, une fonction $j \;:\; \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ et une fonction ρ de classe $\mathcal{K}_\infty$ qui satisfont :*

$$L_{(f,j)} T(x,\vartheta) \;=\; A\,T(x,\vartheta) \;+\; B(h(x),\vartheta) \quad , \qquad \forall (x,\vartheta) \;\in\; \mathcal{O} \times \mathbb{R}^r\;, \tag{8.36}$$

$$|x_1 \;-\; x_2| \;\leq\; \rho(|T(x_1,\vartheta) \;-\; T(x_2,\vartheta)|) \quad , \qquad \forall (x_1, x_2, \vartheta) \;\in\; cl(\mathcal{O})^2 \times \mathbb{R}^r\;. \tag{8.37}$$

et tel que, pour tout x dans $\mathcal{O}$, w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$ et ϑ dans $\mathbb{R}^r$, la solution

$$(X(x,t), W(x,w,\vartheta,t), V(x,\vartheta,t))$$

du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \ , \\ \dot{w} &= A\,w \ + \ B(h(x),\vartheta) \ , \\ \dot{\vartheta} &= j(\vartheta, h(x)) \ . \end{cases} \tag{8.38}$$

est définie en temps positif sur $[0, \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x))$. Sous ces conditions, il existe une fonction T^* : $\mathbb{C}^{q\times p} \times \mathbb{R}^r \to cl(\mathcal{O})$ telle que, pour tout ϑ dans $\mathbb{R}^r$, l'application :

$$w \in \mathbb{C}^{q\times p} \to T^*(w,\vartheta) \tag{8.39}$$

est continue et pour tout x dans $\mathcal{O}$, w dans $\mathbb{C}^{q\times p}$ et ϑ dans $\mathbb{R}^r$, nous avons l'implication :

$$\sigma^+_{\mathcal{O}}(x) \ = \ \sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x) \ \Rightarrow \ \lim_{t\to\sigma^+_{\mathbb{R}^n}(x)} |T^*(W(x,w,\vartheta,t), V(x,\vartheta,t)) \ - \ X(x,t)| \ = \ 0 \ . \tag{8.40}$$

Preuve : La démonstration de ce résultat suit exactement celle du Théorème 14 (voir dans [3] ou en annexe), à la différence près qu'il faut fixer un ϑ dans $\mathbb{R}^r$. □

8.4.2 Extension dynamique dans le cas du pendule inversé

Construction de T

Reprenons le problème du pendule inversé dont la modélisation est présentée en (6.30). Lors de la construction d'une fonction T solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme (5.12), nous avions considéré une fonction $B = (b_1, \ldots, b_q)^T$ de la forme :

$$b_i(x_1) \ = \ \sin(x_1) \ - \ \lambda_i x_1 \ . \tag{8.41}$$

Bien que le système soit périodique en x_1, l'observateur obtenu ne l'est pas.

En utilisant des outils de calcul symbolique (Maple), il est possible de trouver des solutions de l'équation aux dérivées partielles (5.12) qui nous donne un observateur périodique. Mais les fonctions T et B s'avèrent être très complexes. Dans ce cas, l'utilisation d'une extension dynamique va nous permettre de construire un observateur périodique à partir d'une fonction T relativement simple.

Considérons maintenant le système étendu de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1) \\ \dot{\vartheta} &= j(\vartheta, x_1) \end{cases} \quad , \qquad y \ = \ x_1 \ . \tag{8.42}$$

où nous choisissons ϑ dans $\mathbb{R}^q$. La fonction $j = (j_1, \ldots, j_q)$ est maintenant un degré de liberté supplémentaire.

Suivant la procédure décrite précédemment, nous cherchons un entier q, une fonction injective T, une matrice A, une fonction B et une fonction j tels que T est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x_1}(x_1,x_2,\vartheta)x_2 \,+\, \frac{\partial T}{\partial x_2}(x_1,x_2,\vartheta)\sin(x_1) + \frac{\partial T}{\partial \vartheta}(x_1,x_2,\vartheta)j(\vartheta,x_1) \\ = \, AT(x_1,x_2,\vartheta) \,+\, B(x_1,\vartheta)\ ,\end{aligned} \tag{8.43}$$

où B et j sont des fonctions périodiques de x_1.

Le système étant linéaire en x_2, nous nous restreignons aux fonctions $T = (T_i,\ldots,T_q)$ de la forme :

$$T_i(x_1,x_2,\vartheta_i) \,=\, M_i(\vartheta_i)x_2 \,+\, D_i(\vartheta_i,x_1)\ . \tag{8.44}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\dot{\overline{T_i(x_1,x_2,\vartheta_i)}} \,=\, M_i'(\vartheta_i)j_i(\vartheta_i,x_1)x_2 \,+\, M_i(\vartheta_i)\sin(x_1) \,+\, \frac{\partial D_i}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_i,x_1)j_i(\vartheta,x_1) \\ +\, \frac{\partial D_i}{\partial x_1}(\vartheta_i,x_1)x_2\ .\end{aligned} \tag{8.45}$$

Si nous prenons la matrice A diagonale de valeurs propres, $(\lambda_i)_{i\leq q}$ et les fonctions M_i et D_i satisfaisant :

$$\begin{aligned}M_i'(\vartheta_i)j_i(\vartheta_i,x_1) \,+\, \frac{\partial D_i}{\partial x_1}(\vartheta_i,x_1) \,=\, \lambda_i M_i(\vartheta_i)\ , \\ M_i(\vartheta_i)\sin(x_1) \,+\, \frac{\partial D_i}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_i,x_1)j_i(\vartheta,x_1) \,=\, \lambda_i\, D_i(\vartheta_i,x_1) \,+\, B_i,(\vartheta_i,x_1)\end{aligned} \tag{8.46}$$

alors nous avons :

$$\dot{\overline{T_i(x_1,x_2,\vartheta_i)}} \,=\, \lambda_i T_i(x_1,x_2,\vartheta_i) \,+\, b_i(\vartheta_i,x_1)\ , \tag{8.47}$$

avec,

$$b_i(\vartheta_i,x_1) \,=\, M_i(\vartheta_i)\sin(x_1) \,+\, \frac{\partial D_i}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_i,x_1)j_i(\vartheta_i,x_1) \,-\, \lambda_i D_i(\vartheta_i,x_1) \tag{8.48}$$

Pour obtenir un observateur périodique, j_i et b_i doivent être périodiques en x_1. En prenant,

$$j_i(\vartheta_i,x_1) \,=\, \frac{1}{2}\lambda_i\vartheta_i \,+\, \sin(x_1) \quad , \qquad M_i(\vartheta_i) \,=\, \frac{1}{2}\vartheta_i^2 \quad , \qquad D_i(\vartheta_i,x_1) \,=\, \cos(x_1)\vartheta_i\ , \tag{8.49}$$

nous obtenons un observateur périodique avec T_i de la forme :

$$T_i(x_1,x_2,\vartheta_i) \,=\, \frac{1}{2}\vartheta_i^2 x_2 \,+\, \cos(x_1)\vartheta_i\ , \tag{8.50}$$

Injectivité de T et construction de l'observateur

Comme x_1 est mesuré nous cherchons à inverser $T = (T_1,\ldots,T_q)^T$ seulement en x_2 (nous sommes dans le contexte de la remarque 17.4 du Théorème 14). Pour cela, nous nous plaçons dans le cas où l'ouvert $\mathcal{O}$ est borné :

$$\mathcal{O} \,=\, \left\{(x_1,x_2)\ :\ \epsilon < x_1^2 \,+\, x_2^2 \,<\, \frac{1}{\epsilon}\right\}\ . \tag{8.51}$$

Du fait que $\mathcal{O}$ est borné, la simple injectivité de la fonction qui, à x_1 et ϑ fixés, est définie par :

$$x_1 \;\rightarrow\; T(x_1, x_2, \vartheta_i) \;, \tag{8.52}$$

nous suffit pour construire l'observateur. Cette fonction sera injective en x_2 si il existe un ϑ_i différent de zéro. Il nous faut alors choisir un nombre de valeurs propres suffisamment grand pour nous assurer que les ϑ_i ne seront jamais nulles simultanément.

En utilisant les outils développés pour garantir l'injectivité générique dans [3], nous pouvons montrer que si l'on prend génériquement 3 valeurs propres alors cette dernière condition est vérifiée après un certain temps.

En effet, ϑ_i est solution de l'équation suivante :

$$\dot{\vartheta}_i \;=\; \lambda_i \vartheta_i \;+\; \sin(x_1) \;. \tag{8.53}$$

La valeur propre λ_i étant à valeur réelle strictement négative, et le système du pendule étant complet, nous pouvons définir une fonction $V_{i\infty}$ par :

$$V_{i\infty}(x_1, x_2) \;=\; \int_{-\infty}^{0} \exp(-\lambda_i\, s) \sin(X_1(x_1, x_2, s))\, ds \;, \tag{8.54}$$

elle satisfait :

$$\dot{\overline{V_{i\infty}(X_1(x_1, x_2, t), X_2(x_1, x_2, t))}} \;=\; \lambda_i V_{i\infty}(X_1(x_1, x_2, t), X_2(x_1, x_2, t)) \;+\; \sin(X_1(x_1, x_2, t)) \tag{8.55}$$

et est donc une solution de l'équation (8.53). Du fait que la paire (x_1, x_2) est dans $\mathcal{O}$, $X_1(x_1, x_2, s)$ ne peut être nulle sur un intervalle de temps ouvert. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème 19 (Voir [3, Théorème III]), avec la fonction $\mathcal{D}T \;=\; (V_{1_i nfty}, \ldots, V_{q_i nfty})^T$ nous pouvons alors montrer que si l'on choisit génériquement 3 valeurs propres complexes, la fonction V_∞ sera différente de 0 pour tout (x_1, x_2). De plus, les trajectoires du système du pendule étant périodiques, celles-ci restent dans un compact noté $\mathcal{M}$, nous pouvons alors introduire le réel M défini par :

$$M \;=\; \inf_{(x_1,x_2)\,\in\,\mathcal{M}} |V_\infty(x_1, x_2)| \;, \tag{8.56}$$

qui est donc strictement positif.

Maintenant une solution $V(t, \vartheta, x_1)$ de (8.53) vérifie

$$V(t, \vartheta, x_1) - V_\infty(x_1(t), x_2(t)) \;=\; \exp(A\, t)[\vartheta - V_\infty(x_1(0), x_2(0))] \tag{8.57}$$

avec $A \;=\; \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} |V(t, \vartheta, x_1)| \;&\geq\; |V_\infty(x_1(t), x_2(t))| \;-\; \exp(A\, t)\, |\vartheta - V_\infty(x_1(0), x_2(0))| \;, \\ &\geq\; M \;-\; \exp(A\, t)\, |\vartheta - V_\infty(x_1(0), x_2(0))| \;, \end{aligned} \tag{8.58}$$

et, pour t suffisamment grand, $|V|$ sera différent de zéro.

De ceci, nous concluons que, quelque soient les ϑ_i où nous initialisons l'extension dynamique, la fonction T est injective en x_2 au bout d'un temps fini. Nous disposons donc de l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{w}_i \;=\; \lambda_i\, w_i \;+\; \dfrac{1}{2}\vartheta_i^2 \sin(x_1) \;+\; \cos(x_1) \sin(x_1) \\ \dot{\vartheta}_i \;=\; \lambda_i\, \vartheta_i \;+\; \sin(x_1) \end{cases} \;, \hat{x}_2 \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{3} (w_i - cos(x_1)\vartheta_i)\vartheta_i^2}{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\vartheta_i^4} \;. \tag{8.59}$$

8.5 Exemple du moteur asynchrone

Dans cette section, nous montrons que l'utilisation d'une extension dynamique nous permet de trouver une fonction T pour une classe de système particulière qui englobe certaines modélisations du moteur asynchrone. L'illustration numérique de cette méthode d'observation est rapportée par la suite dans l'annexe B.2.

Nous allons tout d'abord présenter le système considéré. Puis, dans le but de construire un observateur pour ce système nous exposerons la démarche qui nous a permis d'élaborer une fonction T solution de l'équation aux dérivées partielles.

8.5.1 Modélisation du moteur asynchrone

La structure du modèle du moteur asynchrone dont les équations sont données en (B.4) dans l'annexe B.2 nous incite à considérer des systèmes décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; F\,x \,+\, G\mathcal{Y}(x) \,+\, H \\ \dot{y} \;=\; I \,+\, \mathcal{Y}(x) \end{cases} , \tag{8.60}$$

avec :

$$\mathcal{Y}(x) \;=\; \alpha\, x^{\top} J x \,+\, K x \;, \tag{8.61}$$

et où y est la mesure dans $\mathbb{R}$. L'état non mesuré x est dans $\mathbb{R}^n$, les matrice F, G, H et J sont respectivement dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbb{R}^{n\times n}$ et enfin I est un réel. Le terme α dans ces équations est un paramètre dans $\mathbb{R}$ inconnu mais constant.

Nous allons construire une fonction T, solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme (5.12) en procédant par étapes, et en considérant tout d'abord un cas simple pour le système (8.60).

8.5.2 Construction de T dans le cas G nul et α connu

Dans un premier temps, nous supposons G nul et le terme α connu. Comme dans tous les exemples précédents nous prenons la matrice A diagonale de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ et notons T_i les composantes de T. Nous cherchons ainsi T_i et b_i telles que :

$$\frac{\partial T_i}{\partial x}(x,y)[F\,x + H] \,+\, \frac{\partial T_i}{\partial y}(x,y)[I \,+\, \mathcal{Y}(x)] \;=\; \lambda_i\, T_i \,+\, b_i(y) \;, \tag{8.62}$$

Nous remarquons que, si nous trouvons une fonction S_i telle que :

$$\frac{\partial S_i}{\partial x}(x)[F\,x + H] \;=\; \lambda_i\, S_i(x) \,+\, \mathcal{Y}(x) \;, \tag{8.63}$$

alors la fonction,

$$T_i(x,y) \;=\; S_i(x) \,-\, y \;, \tag{8.64}$$

vérifie, le long des solutions du système (8.60) dans le cas où G est nul,

$$\begin{aligned} \dot{\overline{T_i(x,y)}} \;&=\; \lambda_i\, S_i(x) \,-\, I \;, \\ &=\; \lambda_i\, T_i(x,y) \,+\, \lambda_i\, y \,-\, I \;, \end{aligned} \tag{8.65}$$

Ainsi, si nous trouvons une fonction S_i qui satisfait l'équation (8.63), la fonction T_i donnée par (8.64) satisfait l'équation (8.62) avec :

$$b_i(y) = \lambda_i\, y - I \ . \tag{8.66}$$

L'objectif est donc maintenant de trouver S_i solution de (8.63). Du fait que, d'après (8.61), $\mathcal{Y}$ est une fonction quadratique de l'état et que la dynamique en x du système (8.60) est linéaire dans le cas où G est nul, nous introduisons une fonction S_i quadratique en x, i.e. :

$$S_i(x) = x^T P_i x + Q_i x + R_i \ , \tag{8.67}$$

où P_i est une matrice symétrique dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, Q_i est dans $\mathbb{R}^n$, et R_i est un réel. L'équation (8.63), dans ce cas, donne les contraintes suivantes sur P_i, Q_i et R_i :

$$\begin{aligned} F^T P_i + P_i F &= \lambda_i P_i + \alpha\, J \ , \\ Q_i F + 2\, H^T P_i &= \lambda_i Q_i + K \\ Q_i H &= \lambda_i R_i \ , \end{aligned} \tag{8.68}$$

Supposons pour le moment que le paramètre α est connu, ces équations admettent une solution si λ_i et $\dfrac{\lambda_i}{2}$ ne sont pas des valeurs propres de F. Ainsi, en prenant génériquement des λ_i nous pouvons alors trouver des matrice P_i, Q_i et R_i solutions de (8.68). La fonction S_i associée est alors solution de l'équation (8.63). Il existe donc une fonction T solution de l'équation (8.62) qui est de la forme :

$$T_i(x) = x^T P_i x + Q_i x + R_i - y \ . \tag{8.69}$$

Notons le choix de la fonction b_i pour obtenir une expression plus simple de T_i.

Nous allons maintenant essayer d'étendre ces résultats au cas où G est non nul.

8.5.3 Construction de T dans le cas G non nul et α connu

Contrairement au cas précédent lorsque G est non nul, le système en x n'est plus linéaire. Nous recherchons maintenant une fonction T_i solution de l'équation :

$$\frac{\partial T_i}{\partial x}(x,y)[F\,x + G\mathcal{Y}(x) + H] + \frac{\partial T_i}{\partial y}(x,y)[I + \mathcal{Y}(x)] = \lambda_i\, T_i + b_i(y) \ , \tag{8.70}$$

L'utilisation de l'extension dynamique introduite dans la section 8.4.1 va nous permettre de modifier T_i trouvé en (8.69) afin qu'elle devienne solution de l'équation (8.70). Précisément, l'idée consiste à ne plus prendre Q_i et R_i comme des constantes mais comme l'état de cette extension dynamique. Suivant cette démarche et au vu de (8.68), posons :

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \lambda_i Q_i + K - Q_i F - 2\, H^T P_i + q_i \\ \dot{R}_i = \lambda_i R_i - Q_i H + r_i \end{cases} \tag{8.71}$$

où q_i et r_i seront définies par la suite.

En prenant P_i qui satisfait la première équation de (8.68), et Q_i et R_i solutions du système (8.71), la fonction T_i définie en (8.69) satisfait le long du système (8.60) :

$$\dot{\overline{T_i(x, Q_i, R_i)}} = \lambda_i T_i + (q_i + 2\,\mathcal{Y}(x) G^T P_i)\, x + Q_i G \mathcal{Y}(x) + r_i - I + \lambda_i y \ . \tag{8.72}$$

En prenant,

$$q_i \;=\; -2\,\mathcal{Y}G^T P_i \quad , \qquad r_i \;=\; -Q_i G\mathcal{Y} \;, \tag{8.73}$$

l'équation (8.72) devient :

$$\dot{\overbrace{T_i(x, Q_i, R_i)}} \;=\; \lambda_i T_i \,+\, b_i \;, \tag{8.74}$$

toujours avec :

$$b_i \;=\; -\,I \,+\, \lambda_i y \;. \tag{8.75}$$

L'extension dynamique (8.71) est donc décrite par les équations :

$$\begin{cases} \dot{Q}_i \;=\; \lambda_i Q_i \,+\, K \,-\, Q_i F \,-\, 2\,(H^T + G^T\mathcal{Y})P_i \;, \\ \dot{R}_i \;=\; \lambda_i R_i \,-\, Q_i(H \,+\, G\mathcal{Y}) \;, \end{cases} \tag{8.76}$$

Cette extension dynamique dépend de l'état non mesuré x (par le biais de $\mathcal{Y}$) et n'est pas implémentable. Néanmoins par une procédure similaire à celle exploitée dans les équations (8.63) et (8.64), nous pouvons réaliser ces équations en posant :

$$\dot{Q}_i^* \;=\; \lambda_i Q_i \,+\, K \,-\, Q_i F \,+\, 2\,(G^T I - H^T)P_i \quad , \qquad Q_i \;=\; Q_i^* \,-\, 2\,y G^T P_i \;, \tag{8.77}$$

et,

$$\dot{R}_i^* \;=\; \lambda_i R_i \,+\, Q_i(GI - H) \,+\, \dot{Q}_i^* G y \;, \tag{8.78}$$

avec,

$$R_i \;=\; R_i^* \,-\, Q_i^* G y \,+\, y^2 G^T P_i G \;. \tag{8.79}$$

Ainsi nous avons démontré que la fonction $T_i(x, y, Q_i, R_i)$ définie par l'équation (8.69), où P_i satisfait la première équation (8.68) est telle que :

$$w_i \;=\; T_i(x, y, Q_i, R_i) \;, \tag{8.80}$$

est une variété invariante du système étendu :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x} \;=\; F\,x \,+\, G\mathcal{Y}(x) \,+\, H \\ \dot{y} \;=\; I \,+\, \mathcal{Y}(x) \\ \mathcal{Y}(x) \;=\; \alpha\, x^\top J x \,+\, K x \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{w}_i \;=\; \lambda_i w_i \,-\, I \,+\, \lambda_i y \\ \dot{Q}_i^* \;=\; \lambda_i Q_i \,+\, K \,-\, Q_i F \,+\, 2\,(G^T I - H^T)P_i \\ \dot{R}_i^* \;=\; \lambda_i R_i \,+\, Q_i(GI - H) \,+\, \dot{Q}_i^* G y \;, \\ Q_i \;=\; Q_i^* \,-\, 2\,y G^T P_i \;, \\ R_i \;=\; R_i^* \,-\, Q_i^* G y \,+\, y^2 G^T P_i G \;. \end{cases} \end{cases} \tag{8.81}$$

Dans le cas où α est connu, nous pouvons implémenter un observateur (si nous pouvons trouver une extension T^* de l'inverse à gauche de T).

8.5.4 Construction de T dans le cas G non nul et α inconnue

Posons nous maintenant le problème de savoir si nous sommes toujours capables de construire un observateur dans le cas où α est maintenant inconnu. Nous considérons maintenant α comme un nouvel état du système, le système (8.60) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} &= F\,x + G\mathcal{Y}(x) + H \\ \dot{y} &= I + \mathcal{Y}(x) \\ \dot{\alpha} &= 0 \end{cases} \quad , \quad \mathcal{Y}(x) = \alpha\, x^\top Jx + Kx\,. \tag{8.82}$$

Dans ce qui précède le seul endroit où α intervient explicitement dans l'observateur est dans l'expression de P_i dans l'équation (8.68). Mais il est remarquable que la matrice P_i est proportionnelle à α. Précisément en posant :

$$P_i = P_{i1}\alpha\ , \tag{8.83}$$

nous avons P_{i1} solution de l'équation :

$$F^T P_{i1} + P_{i1}F = \lambda_i P_{i1} + J\ . \tag{8.84}$$

P_{i1} peut donc être obtenu sans connaître α. Ainsi, T_i s'écrit :

$$T_i = x^T P_{i1}\,\alpha\, x + Q_i x + R_i - y \tag{8.85}$$

En approfondissant l'analyse, nous voyons que P_i et donc α interviennent dans les expressions de Q_i^* et de R_i*. Mais tirant profit de la linéarité de Q_i et R_i en ces expressions, nous introduisons :

$$\dot{Q}_{i1}^* = \lambda_i Q_{i1} - Q_{i1}F + 2\,(GI - H^T)P_{i1}\ , \tag{8.86}$$

avec,

$$Q_{i1} = Q_{i1}^* - 2\ yGP_{i1} \tag{8.87}$$

Nous avons alors :

$$Q_i = Q_{i0} + \alpha\, Q_{i1} \quad , \qquad Q_i^* = Q_{i0} + \alpha\, Q_{i1}^*\ , \tag{8.88}$$

où Q_{i0} est solution de l'équation matricielle :

$$\lambda_i Q_{i0} + K - Q_{i0}F = 0\ . \tag{8.89}$$

De même, en prenant :

$$\begin{aligned} \dot{R}_{i0}^* &= \lambda_i R_{i0} - Q_{i0}(GI - H)\ , \\ \dot{R}_{i1}^* &= \lambda_i R_{i1} + Q_{i1}(GI - H) + \dot{Q}_{i1}^* Gy\ , \end{aligned} \tag{8.90}$$

avec,

$$\begin{aligned} R_{i0} &= R_{i0}^* - Q_{i0}^* Gy\ , \\ R_{i1} &= R_{i1}^* - Q_{i1}^* Gy\ . \end{aligned} \tag{8.91}$$

nous obtenons :

$$R_i = R_{i0} + \alpha\, R_{i1} \quad , \qquad R_i^* = R_{i0}^* + \alpha\, R_{i1}^*\ . \tag{8.92}$$

Ainsi, en résumé de tout ce qui précède, la fonction T est de la forme :

$$T_i(x, y, \alpha, Q_{i1}, R_{i0}, R_{i1}) \;=\; \alpha\, x^T P_{i1}\, x \,+\, (Q_{i0} \,+\, \alpha\, Q_{i1})x \,+\, (R_{i0} \,+\, \alpha\, R_{i1}) \,-\, y \tag{8.93}$$

où P_{i1} est solution de l'équation (8.84), et $w_i \;=\; T_i(x, y, \alpha, Q_{i1}, R_{i0}, R_{i1})$ est une variété invariante le long du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{x} & = & F\,x \,+\, G\mathcal{Y}(x) \,+\, H \\
\dot{y} & = & I \,+\, \mathcal{Y}(x) \\
\dot{\alpha} & = & 0 \\
\mathcal{Y}(x) & = & \alpha\, x^\top J x \,+\, K x
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{w}_i & = & \lambda_i w_i \,-\, I \,+\, \lambda_i y \\
\dot{Q}^*_{i1} & = & \lambda_i Q_{i1} \,-\, Q_{i1} F \,+\, 2\,(GI - H^T)P_{i1}\ , \\
\dot{R}^*_{i0} & = & \lambda_i R_{i0} \,-\, Q_{i0}(GI - H)\ , \\
\dot{R}^*_{i1} & = & \lambda_i R_{i1} \,+\, Q_{i1}(GI - H) \,+\, \dot{Q}^*_{i1} G y\ , \\
Q_{i1} & = & Q^*_{i1} \,-\, 2\ y G P_{i1} \\
R_{i0} & = & R^*_{i0} \,-\, Q^*_{i0} G y \\
R_{i1} & = & R^*_{i1} \,-\, Q^*_{i1} G y
\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{8.94}$$

avec Q_{i0} solution de l'équation (8.89).

8.5.5 Inversion de T

Nous venons de montrer comment construire un observateur et sa fonction T associée en exploitant les techniques d'extension dynamique.

Il faut maintenant trouver une extension de l'inverse à gauche de T. Sous l'hypothèse de distinguabilité du système initial, nous savons que T est injective en (x, α, y) si nous prenons q le nombre de valeurs propres complexes λ_i égal à $n+3$ et que nous choisissons les $n+3$ complexes λ_i en dehors d'un ensemble de mesure nulle et à parties réelles suffisamment négatives. Nous savons alors que $T = (T_i)_i$ admet une inverse à gauche. Pour en trouver une extension nous utilisons la technique de minimisation quadratique, i.e, nous choisissons T^* de la forme :

$$T^*(w, Q_0, Q_1, R_0, R_1, y) \;=\; \mathrm{ArgMin}_{\alpha,x}|T(x, y, \alpha, Q_1, R_0, R_1)) - w|^2 \tag{8.95}$$

où la fonction T est une fonction polynomiale en (x, y, α).

Annexe A

Annexes Techniques

A.1 Terminologie et Définitions

A.1.1 Terminologie

1. Un réel c est dit positif si celui-ci satisfait :

$$c \geq 0 \ , \tag{A.1}$$

Il est strictement positif si :

$$c > 0 \ , \tag{A.2}$$

2. Étant donné un système de la forme (1.1), et une fonction C^1, $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, avec r un réel strictement positif, nous notons $L_{f(x,u)}M(x)$ la fonction de x et u à valeur dans $\mathbb{R}^r$ définie par $\frac{\partial M}{\partial x}(x)f(x,u)$.

3. Étant donné un système de la forme (1.1), et une fonction C^0, $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, avec r un réel strictement positif, nous notons $(x,u) \to D^+M(x)f(x,u)$ la dérivée à gauche de Dini (Voir [62, Section 2.8]), i.e. :

$$D^+M(x)f(x,u) = \limsup_{t \searrow 0} \frac{M(x+tf(x,u)) - M(x)}{t} \ . \tag{A.3}$$

4. Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ nous notons $\mathcal{B}_\delta(x)$ l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathcal{B}_\delta(x) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : |x_1 - x| < \delta\} \ . \tag{A.4}$$

5. Étant donné un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, nous notons $\mathtt{cl}(\mathcal{O})$ sa fermeture et par $\mathcal{O} + \delta$ l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathcal{O} + \delta = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists x_2 \in \mathcal{O} : |x_1 - x_2| < \delta\} = \cup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{B}_\delta(x) \ . \tag{A.5}$$

6. Etant donné un compact de $\mathbb{R}^n$, la distance à $\mathcal{M}$ est donnée par :

$$|x|_{\mathcal{M}} = \inf_{z \in \mathcal{M}} |x - z| \ . \tag{A.6}$$

A.1.2 Définition

Définition 10 (Fonction définie positive) *Une fonction* $\mathcal{V} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, *où* $\mathcal{A}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *contenant l'origine est dite définie positive si :*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \quad , \qquad \mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{A} / \{0\} \; . \tag{A.7}$$

Définition 11 (Fonction définie négative) *Une fonction* $\mathcal{V} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_-$, *où* $\mathcal{A}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *contenant l'origine est dite définie négative si :*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \quad , \qquad \mathcal{V}(x) < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{A} / \{0\} \; . \tag{A.8}$$

Définition 12 (Fonction de classe $\mathcal{K}$) *Une fonction* $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est dite de classe* $\mathcal{K}$ *si elle est continue, strictement croissante et nulle en* 0.

Définition 13 (Fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$) *Une fonction* $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est dite de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *si elle est de classe* $\mathcal{K}$ *et est non bornée, i.e. satisfait :*

$$\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) = +\infty \; . \tag{A.9}$$

Définition 14 (Fonction de classe $\mathcal{KL}$) *Une fonction* $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est dite de classe* $\mathcal{KL}$ *si, pour chaque réel* s *non négatif, la fonction* $r \mapsto \beta(r, s)$ *est de classe* $\mathcal{K}$ *et, pour chaque réel* r *strictement positif, la fonction* $s \mapsto \beta(r, s)$ *est strictement décroissante et satisfait :*

$$\lim_{s \to +\infty} \beta(r, s) = 0 \; . \tag{A.10}$$

Définition 15 (Fonctions propres sur $\mathbb{R}_+$) *Soit* $\mathcal{A}_x$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Une fonction* $\mathcal{V} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$ *est dite propre sur* $\mathcal{A}_x$ *si l'image réciproque de tout intervalle compact de* $\mathbb{R}_+$ *est un compact dans* $\mathcal{A}_x$, *i.e. pour chaque paire* (a, b) *de réels positif, l'ensemble :*

$$\{x \in \mathcal{A}_x : a \leq \mathcal{V}(x) \leq b\} \tag{A.11}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathcal{A}_x$.

Définition 16 (Fonctions de Lyapunov strictement assignables) *Soit* $\mathcal{A}_x$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *contenant l'origine,* $\mathcal{U} : \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}_+$, *une fonction* C^1, *définie positive et propre est dite fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système (1.1) si :*

$$\forall x \in \mathcal{A}_x / \{0\} \, \exists\, u \in \mathbb{R}^m : L_{f(x,u)} \mathcal{U}(x) < 0 \; . \tag{A.12}$$

La stabilité

La notion de stabilité, qui nous intéresse dans la première partie de la thèse est celle d'un ensemble invariant et fermé. Nous reprenons les définitions introduites dans [93]. Le système sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme :

$$\dot{x} = f(x) \quad , \qquad x \in \mathbb{R}^n \; , \tag{A.13}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction localement Lipschitzienne. Soit $\mathcal{M}$, un fermé de $\mathbb{R}^n$ qui est invariant pour le système (A.13) ; i.e. telle que, pour tout x dans $\mathcal{M}$, il existe une unique solution $X(x, t)$ qui est définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$X(x, 0) = x \quad , \qquad X(x, t) \in \mathcal{M} \quad , \qquad \forall\, t \geq 0 \; . \tag{A.14}$$

Définition 17 (Ensemble Asymptotiquement Stable) *$\mathcal{M}$, un ensemble fermé et invariant, est asymptotiquement stable pour le système (A.13) si :*

- ***Stabilité :*** *Il existe une fonction $\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{K}$ telle que, pour tout $\epsilon \geq 0$,*

$$|x|_{\mathcal{M}} \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow \begin{cases} X(x,t) \text{ est définie pour tout } t \text{ positif}, \\ |X(x,t)|_{\mathcal{M}} \leq \epsilon \quad \forall\, t \geq 0 . \end{cases} \tag{A.15}$$

- ***Attractivité Uniforme :*** *Il existe une constante δ_0 et une fonction $T : (0,\delta_0)\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout r dans $(0,\delta_0)$, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et pour tout $\epsilon \geq 0$,*

$$|x|_{\mathcal{M}} \leq r \Rightarrow \begin{cases} X(x,t) \text{ est définie pour tout } t \text{ positif}, \\ |X(x,t)|_{\mathcal{M}} \leq \epsilon \quad , \qquad \forall\, t \geq T(r,\epsilon) . \end{cases} \tag{A.16}$$

Si $\mathcal{M}$ est un ensemble asymptotiquement stable, nous pouvons définir le domaine d'attraction $\mathcal{A}$ comme étant le plus grand ensemble inclus dans $\mathbb{R}^n$ tel que toutes les trajectoires issues de $\mathcal{A}$ convergent vers $\mathcal{M}$. $\mathcal{A}$ est alors nécessairement ouvert et invariant (voir [94, Chap.I, Theorem 4]).

A.2 Démonstrations de résultats

A.2.1 Loi de commande ISS pour le système (2.40)

En utilisant les outils développés par Freeman et Kokotovic dans [24], nous donnons dans ce paragraphe une loi de commande nous donnant la Stabilisabilité-ISS de l'hypothèse 3. Ceci nous donne la première étape de l'approche Erreur de commande, Domination-ISS introduite dans le paragraphe 2.2. Par le changement de coordonnée :

$$(y, x_2) \quad \rightarrow \quad (y, \chi) = (y,\, x_2 \exp(-y)) \tag{A.17}$$

le système (2.40) devient :

$$\begin{cases} \dot{y} &= \chi \exp(y) \\ \dot{\chi} &= u \exp(-y) \end{cases} \tag{A.18}$$

nous allons construire une loi de commande $\varphi_2(\chi, y)$, de façon à ce que le système bouclé devienne ISS par rapport à une erreur additive sur χ. Tout d'abord, considérons le sous-système perturbé suivant :

$$\dot{y} \;=\; (u + d) \exp(y) \;. \tag{A.19}$$

Introduisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{U}_1(y) \;=\; \frac{1}{2}\, y^2 \;, \tag{A.20}$$

ainsi que la loi de commande fictive suivante :

$$\phi_1 \;=\; -y^3 \exp(2y^2 - y) - \frac{1}{2}\, y \exp(y) \;. \tag{A.21}$$

Nous obtenons le long des trajectoires du système perturbé (A.19) :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\mathcal{U}_1(y)}} \;&=\; -y^4 \exp(2y^2) - \frac{1}{2}\, y^2 \exp(2y) \;+\; d\, y \exp(y) \;, \\ &\leq\; -y^4 \exp(2y^2) \;+\; \frac{1}{2}\, d^2 \;, \end{aligned} \tag{A.22}$$

Ainsi, le sous-système est ISS par rapport à une erreur sur la commande fictive ϕ_1. Plus précisément, nous avons :

$$|d| \;\leq\; \gamma(y) \quad \Rightarrow \quad \dot{\widehat{\mathcal{U}_1(y)}} \;\leq\; -\frac{1}{2}\, \gamma(y)^2 \;. \tag{A.23}$$

où, γ est une fonction propre, définie positive et donnée par :

$$\gamma(y) \;=\; y^2 \exp(y^2) \;. \tag{A.24}$$

Suivant Freeman et Kokotovic dans [24], nous introduisons l'ensemble suivant :

$$G \;=\; \{(\chi, y) \;:\; |\chi - \phi_1(y)| \;\leq\; \gamma(y)\} \;. \tag{A.25}$$

D'après (A.23), G est tel que :

$$(\chi, y) \;\in\; G \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial y}(y)\, \chi \exp(y) \;\leq\; -\frac{1}{2}\, \gamma(y)^2 \;. \tag{A.26}$$

Considérons maintenant la fonction suivante :

$$\mathcal{U}_2(\chi, y) \;=\; \mathcal{U}_1(y) \;+\; \frac{1}{2}\begin{cases} (\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))^2 & \text{si } \gamma(y) \;\leq\; \chi - \phi_1(y) \\ 0 & \text{si } (\chi, y) \;\in\; G \\ (\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))^2 & \text{si } \chi - \phi_1(y) \;\leq\; -\gamma(y) \end{cases} \tag{A.27}$$

Cette fonction est C^1, propre, et définie positive. De plus, le long des trajectoires du système (A.18), cette fonction satisfait :

$$\dot{\widehat{\mathcal{U}_2(\chi, y)}} \;\leq\; -\frac{1}{2}\gamma(y)^2 \;+\; \begin{cases} (\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))\,(y\exp(y) + u\exp(-y) + \delta_1(y)\chi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \gamma(y) \;\leq\; \chi - \phi_1(y) \\ 0 \qquad \text{si } (\chi, y) \;\in\; G \\ (\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))\,(y\exp(y) + u\exp(-y) + \delta_2(y)\chi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \chi - \phi_1(y) \;\leq\; -\gamma(y) \end{cases} \tag{A.28}$$

où,

$$\delta_1(y) \;=\; (-\phi_1'(y) - \gamma'(y))\exp(y)\;, \tag{A.29}$$

et,

$$\delta_2(y) \;=\; (-\phi_1'(y) + \gamma'(y))\exp(y)\;. \tag{A.30}$$

La loi de commande :

$$\varphi_2(\chi, y) \;=\; \exp(y)\left(-y\exp(y) + \begin{cases} u^+ & \text{si } \frac{1}{3}\gamma(y) \;\leq\; \chi - \phi_1(y) \\ u^* & \\ u_- & \text{si } \chi - \phi_1(y) \;\leq\; -\frac{1}{3}\gamma(y) \end{cases}\right) \tag{A.31}$$

avec,

$$u^+(\chi, y) \;= (\chi - \phi_1(y) - \gamma(y)) - \delta_1(y)\chi - (|y| + |\chi|)|1 + \delta_1(y)| \tag{A.32}$$

et,

$$u^-(\chi, y) \;= (\chi - \phi_1(y) + \gamma(y)) - \delta_2(y)\chi + (|y| + |\chi|)|1 + \delta_1(y)| \tag{A.33}$$

et u^* est une fonction telle que φ_2 est continue, est une loi de commande qui stabilise l'origine du système globalement et asymptotiquement.

Nous allons à présent, montrer que le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} \;=\; \chi\exp(y) \\ \dot{\chi} \;=\; \varphi_2(\chi + e, y)\exp(-y) \end{cases} \tag{A.34}$$

est ISS, avec e pour entrée. Pour cela, nous allons montrer qu'il existe deux fonctions propres et définies positives, Γ et α telles que

$$|e| < \Gamma(\chi, y) \quad \Rightarrow \quad \dot{\widehat{\mathcal{U}_2(\chi, y)}} \;\leq\; -\alpha(\chi, y)\;. \tag{A.35}$$

Tout d'abord suivant toujours la démarche de Freeman et Kokotovic dans [24], nous remarquons que pour tout e tel que :

$$|e| \;\leq\; \Gamma_1(\chi, y) \tag{A.36}$$

où,

$$\Gamma_1(\chi, e) \;=\; \max\left\{\frac{1}{2}\,\min\left\{\left|\chi - \phi_1(y) - \frac{1}{3}\gamma(y)\right|,\, \left|\chi - \phi_1(y) + \frac{1}{3}\gamma(y)\right|\right\},\, \frac{1}{3}\gamma(y)\right\} \tag{A.37}$$

e vérifie :

$$\chi - \phi_1(y) - \frac{2}{3}\gamma(y) \;\geq\; 0 \;\Rightarrow\; e + \chi - \phi_1(y) - \frac{1}{3}\gamma(y) \;\geq\; 0 \tag{A.38}$$

et,

$$\chi - \phi_1(y) + \frac{2}{3}\gamma(y) \;\leq\; 0 \;\Rightarrow\; e + \chi - \phi_1(y) + \frac{1}{3}\gamma(y) \;\leq\; 0 \tag{A.39}$$

De ce fait, si $e \;\leq\; \Gamma_1(\chi, y)$, alors,

$$\dot{\overline{\mathcal{U}_2(\chi, y)}} \;\leq\; -\frac{1}{2}\gamma(y)^2 \;+\; \begin{cases} (\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))\,(u^+(\chi + e, y) + \delta_1(y)\chi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \gamma(y) \;\leq\; \chi - \phi_1(y) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } (\chi, y) \;\in\; G \\ (\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))\,(u^-(\chi + e, y) + \delta_2(y)\chi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \chi - \phi_1(y) \;\leq\; -\gamma(y) \end{cases} \tag{A.40}$$

Nous avons alors trois cas :

1. Si $\chi - \phi_1(y) - \gamma(y) \geq 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} &(\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))(u^+(\chi + e, y) + \delta_1(y)\chi) \\ &\qquad \leq\; -(\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))^2 + \\ &\qquad\qquad (|e| - |y| - |\chi + e|)|1 + \delta_1(y)|(\chi - \phi_1(y) - \gamma(y)) \\ &\qquad \leq\; -(\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))^2 \quad \text{si } 2|e| \leq |\chi| + |y| \end{aligned}$$

2. Si $\chi - \phi_1(y) + \gamma(y) \leq 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} &(\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))(u^-(\chi + e, y) + \delta_+(y)\chi) \\ &\qquad \leq\; -(\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))^2 + (|y| + \\ &\qquad\qquad |\chi + e| - |e|)|1 + \delta_1(y)|(\chi - \phi_1(y) + \gamma(y)) \\ &\qquad \leq\; -(\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))^2 \quad \text{si } 2|e| \leq |y| + |\chi| \end{aligned}$$

3. Si $\chi - \phi_1(y) \;\leq\; \gamma(y)$ alors,

$$\dot{\overline{\mathcal{U}_2(\chi, y)}} \;\leq\; -\frac{1}{2}\gamma(y)\;. \tag{A.41}$$

Finalement, nous avons :

$$|e| \;\leq\; \Gamma(\chi, y) \quad \Rightarrow \quad \dot{\overline{\mathcal{U}_2(\chi, y)}} \;\leq\; -\alpha(\chi, y)\;. \tag{A.42}$$

avec,

$$\Gamma(\chi, y) \;=\; \min\left\{\Gamma_1(\chi, y),\, \frac{|y| + |\chi|}{2}\right\} \tag{A.43}$$

et,

$$\alpha(\chi, y) \;=\; -\frac{1}{2}\gamma(y)^2 \;+\; \begin{cases} -\,(\chi - \phi_1(y) - \gamma(y))^2 & \text{si } \gamma(y) \;\leq\; \chi - \phi_1(y) \\ 0 & \\ -\,(\chi - \phi_1(y) + \gamma(y))^2 & \text{si } \chi - \phi_1(y) \;\leq\; \gamma(y) \end{cases} \tag{A.44}$$

A.2.2 ISS n'implique pas iISS

Comme nous l'avons vu, l'approche par domination nécessite des propriétés de robustesse d'une loi de commande par rapport à des erreurs (de commande dans le chapitre 2 et de dynamique dans le chapitre 3). Dans certains cas nous supposons cette robustesse ISS (voir l'hypothèse 3 du paragraphe 2.2.1), dans d'autre cas nous supposons cette robustesse iISS (voir l'hypothèse 5 dans le paragraphe 2.2.4 ainsi que l'hypothèse 15 paragraphe 3.2.1).

Le cas ISS donne la bornitude des solutions pour des erreurs bornées, le cas iISS donne la bornitude des solutions pour des erreurs intégrables.

Ces deux propriétés sont très proches. Dans [8] (ou [87]), il a été démontré qu'un système ISS implique nécessairement qu'il est L^p-ISS, tant que l'entrée est bornée.

Dans ce paragraphe, nous explicitons le fait que la bornitude de l'entrée est une hypothèse essentielle ici. En effet considérons le système suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\dot{x} \;=\; -x \,+\, u^2 \tag{A.45}$$

Il est ISS. En effet, la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x) \;=\; |x|$ donne :

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}(x)}} \;\leq\; -\mathcal{V}(x) \,+\, u^2 \tag{A.46}$$

De cette inégalité, nous déduisons aussi que le système est directement L^2-ISS. Pourtant ce système n'est pas L^1-ISS. En effet considérons le signal :

$$u(t) \;=\; (1 \,-\, t)^{-\frac{3}{4}} \;, \tag{A.47}$$

pour t dans $[0,1)$. Cette fonction est dans $L^1([0,1))$ mais pas dans $L^2([0,1))$. Les solutions du systèmes (A.45) sont de la forme :

$$X(x,t) \;=\; \exp(-t)\left[\int_0^t \exp(s)(1-s)^{-\frac{3}{2}}\,ds \,+\, x\right] \qquad , \quad \forall t\,[0,1)\;. \tag{A.48}$$

Pour $x \geq 0$, elles satisfont donc :

$$\begin{aligned} |X(x,t)| \;&\geq\; \frac{1}{e}\left[\int_0^t (1-s)^{-\frac{3}{2}}\,ds \,+\, x\right] \;, \\ &\geq\; \frac{1}{e}\left[\frac{3}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \,+\, x\right] \qquad , \quad \forall t\,[0,1)\;. \end{aligned} \tag{A.49}$$

Il s'en suit,

$$\lim_{t\to 1} |X(x,t)| \;=\; +\infty \;, \tag{A.50}$$

Ce système n'est donc pas L^1-ISS.

A.2.3 Propagation d'une propriété iISS

Dans cet appendice, nous montrons comment propager les propriétés de ρ-ISS stabilisabilité à travers une chaîne d'intégrateurs.

Le cas où ρ est la fonction $|\cdot|^2$ est bien connu, il a été introduit dans [34], puis étendu dans [76, 32]. Nous pouvons l'étendre en suivant exactement la même démarche au cas d'une fonction ρ qui satisfait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 27 [Fonction ρ admissible] :

La fonction ρ est telle que l'application :

$$s \to \frac{\rho(s)}{s} \tag{A.51}$$

est C^∞, de dérivée non nulle en zéro et de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Par contre le cas L^1 (i.e. $\rho(\cdot) = |\cdot|$) semble n'avoir jamais été exposé. L'idée développée ici exploite des outils introduits par Frédéric Mazenc dans son mémoire de thèse [60, (2.412)] dans le but de contrôler la dérivée temporelle d'une fonction de Lyapunov pour un système combiné.

Nous considérons des systèmes de la forme :

$$\dot{x_1} \;=\; f(x_1,x_2) + K_1(x_1,x_2)\, d_1 \quad , \qquad \dot{x}_2 \;=\; a(x_1,x_2)\, u + b(x_1,x_2) + K_2(x_1,x_2)\, d_2 \tag{A.52}$$

où x_1 est dans $\mathbb{R}^{n_1}$, x_2 est dans $\mathbb{R}$, u est dans $\mathbb{R}$, d_1 est dans $\mathbb{R}^{n_1}$, d_2 dans $\mathbb{R}$, $a(x_1,x_2)$ est strictement positif.

Cas ρ-ISS, avec ρ de la forme (A.51)

Lemme 3 (Propagation de ρ-ISS) *Supposons qu'il existe une fonction C^{q+1} définie positive et radialement non-bornée $\mathcal{V}_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}_+$, une fonction C^q $\phi_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et définie positive $\alpha_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}_+$, et une fonction ρ de classe $\mathcal{K}_\infty$ qui satisfait l'hypothèse 27 telles que, lorsque $x_2 = \phi_1(x_1)$, nous avons :*

$$\dot{\overline{\mathcal{V}_1(x_1)}} \;\leq\; -\alpha_1(x_1) \,+\, \rho(|d_1|)\;, \tag{A.53}$$

Supposons de plus que, K_1 est une fonction C^q et K_2 est C^{q-1}. Alors, il existe une fonction C^q définie positive et radialement non-bornée $\mathcal{V}_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}_+$, une fonction C^{q-1} $\phi_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}$, et une fonction continue définie positive $\alpha_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}_+$ telles que en prenant la loi de commande : $u = \phi_2(x_1,x_2)$, nous obtenons pour le système (A.52) :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}_2(x_1,x_2)}} \;\leq\; -\alpha_2(x_1,x_2) \,+\, \rho(|d_1|) \,+\, \rho(|d_2|)\,. \tag{A.54}$$

Preuve :

Soit $\mathcal{V}_2 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction C^q définie positive et radialement non-bornée définie par :

$$\mathcal{V}_2(x_1,x_2) \;=\; \mathcal{V}_1(x_1) \,+\, \frac{1}{2}(x_2 \,-\, \phi_1(x_1))^2\,. \tag{A.55}$$

En utilisant (A.53), la dérivée temporelle de $\mathcal{V}_2$ le long des trajectoires du systèmes (A.52), satisfait :

$$\dot{\overline{\mathcal{V}_2(x_1,x_2)}} \leq -\alpha_1(x_1) + \rho(|d_1|) + \big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)\left[p(x_1,x_2)\,d_1 + K_2(x_1,x_2)d_2 + t(x_1,x_2) + a(x_1,x_2)u\right] \tag{A.56}$$

où $t : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}$ est une fonction C^{q-1} définie par :

$$t(x_1,x_2) = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1}(x_1)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}\big(x_1, \phi_1(x_1) + s\big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)\big)\,ds + b(x_1,x_2) - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_1)f(x_1,x_2)\ , \tag{A.57}$$

et p est la fonction :

$$p(x_1,x_2) = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1}\int_0^1 \frac{\partial K_1}{\partial x_2}(x_1, \phi_1(x_1) + s(x_2 - \phi_1(x_1))\,ds - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_1)K_1(x_1,x_2)\ . \tag{A.58}$$

Pour toutes fonctions γ_1 et γ_2 de classe $\mathcal{K}_\infty$, nous avons :

$$|(x_2 - \phi_1(x_1))p(x_1,x_2)|\,|d_1| \leq \gamma_1\left(|(x_2 - \phi_1(x_1))p(x_1,x_2)|\right)|(x_2 - \phi_1(x_1))p(x_1,x_2)| + \gamma_1^{-1}(|d_1|)|d_1|\ , \tag{A.59}$$

et,

$$|(x_2 - \phi_1(x_1))K_2(x_1,x_2)|\,|d_2| \leq \gamma_2\left(|(x_2 - \phi_1(x_1))K_2(x_1,x_2)|\right)|(x_2 - \phi_1(x_1))K_2(x_1,x_2)| + \gamma_2^{-1}(|d_2|)|d_2|\ . \tag{A.60}$$

Ainsi,

$$\dot{\overline{\mathcal{V}_2(x_1,x_2)}} \leq -\alpha_1(x_1) + \rho(|d_1|) + \gamma_1^{-1}(|d_1|)|d_1| + \gamma_2^{-1}(|d_2|)|d_2| + \big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)\left[t(x_1,x_2) + a(x_1,x_2)u + h_1(x_1,x_2) + h_2(x_1,x_2)\right] \tag{A.61}$$

où,

$$h_1(x_1,x_2) = \bar{\gamma}_1\left((x_2 - \phi_1(x_1))p(x_1,x_2)\right)p(x_1,x_2)\ .$$

et,

$$h_2(x_1,x_2) = \bar{\gamma}_2\left((x_2 - \phi_1(x_1))K_2(x_1,x_2)\right)K_2(x_1,x_2)\ .$$

où,

$$\bar{\gamma}_1(s) = \text{signe}(s)\gamma_1(|s|) \quad , \quad \bar{\gamma}_2(s) = \text{signe}(s)\gamma_2(|s|)\ . \tag{A.62}$$

Du fait de l'hypothèse 27, nous pouvons prendre les fonctions γ_1 et γ_2 comme étant des fonctions C^∞ telles que

$$\gamma_i^{-1}(s) \leq \frac{\rho(s)}{s}\ , \tag{A.63}$$

pour $i = 1, 2$. Alors en choisissant la fonction ϕ_2 de classe C^{q-1} comme :

$$\phi_2(x_1,x_2) = \frac{1}{a(x_1,x_2)}\Big(\phi_1(x_1) - x_2 - h_1(x_1,x_2) - h_2(x_1,x_2) - t(x_1,x_2)\Big) \tag{A.64}$$

où $a(x_1, x_2) \neq 0$ par hypothèse, nous obtenons avec $u = \phi_2(x_1, x_2)$:

$$\overbrace{\frac{1}{2}\mathcal{V}_2(x_1, x_2)}^{\cdot} \leq -\frac{1}{2}\left(\alpha_1(x_1) + (x_2 - \phi_1(x_1))^2\right) + \rho(|d_1|) + \rho(|d_2|) \ , \tag{A.65}$$

Ainsi, (A.54) est vérifié en prenant :

$$\alpha_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\alpha_1(x_1) + (x_2 - \phi_1(x_1))^2\right) \ . \tag{A.66}$$

□

Cas L^1

Lemme 4 ($L1$-ISS propagation) *Supposons qu'il existe une fonction continue $M : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}_+$, une fonction définie positive et radialement non bornée de classe C^{q+1} $\mathcal{V}_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}_+$, une fonction de classe C^q $\phi_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$, et une fonction continue et définie positive $\alpha_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}_+$ telles que :*

$$\begin{aligned} |K_1(x_1, x_2)| &\leq M(x_1) \ . \\ |K_2(x_1, x_2)| &\leq M(x_1)\,(1 + |x_2|) \ . \end{aligned} \tag{A.67}$$

et, le long des trajectoires du système (A.52) lorsque $x_2 = \phi_1(x_1)$:

$$\overbrace{\mathcal{V}_1(x_1)}^{\cdot} \leq -\alpha_1(x_1) + |d_1| \ . \tag{A.68}$$

Alors il existe une fonction C^q définie positive et radialement non-bornée $\mathcal{V}_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}_+$, une fonction C^{q-1} $\phi_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}$, et une fonction continue définie positive $\alpha_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}_+$ telle que en posant $u = \phi_2(x_1, x_2)$, nous obtenons le long des trajectoires du système (A.52) :

$$\overbrace{\mathcal{V}_2(x_1, x_2)}^{\cdot} \leq -\alpha_2(x_1, x_2) + |d_1| + |d_2| \, . \tag{A.69}$$

Preuve : Du fait que $\mathcal{V}_1$ est une fonction radialement non bornée, nous pouvons trouver $k' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^q croissante satisfaisant :

$$k'(\mathcal{V}(x_1)) \geq \max\left\{ 1, \left|\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_1)\right| |K_1(x_1)|, \frac{1}{2}M(x_1)\,(3 + \phi_1(x_1)), 2\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1}(x_1)M(x_1)\right\} \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \ . \tag{A.70}$$

Soit alors $\mathcal{W} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie positive, radialement non bornée et C^q définie par :

$$\mathcal{W}(x_1, x_2) = k\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big) + \log\left(1 + \frac{1}{2}(x_2 - \phi(x_1))^2\right) \ , \tag{A.71}$$

où k est la fonction radialement non bornée C^{q+1} définie par :

$$k(s) = \int_0^s k'(u)\, du \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}_+ \ . \tag{A.72}$$

En dérivant $\mathcal{W}$ le long des trajectoires du système (A.52), nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\mathcal{W}(x_1,x_2)}} \leq -k'(\mathcal{V}_1(x_1))\,\alpha_1(x_1) + m_1(x_1,x_2)\,|d_1| + m_2(x_1,x_2)\,|d_2| + \big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)\Big[p(x_1,x_2) + q(x_1,x_2)\,u\Big] \tag{A.73}$$

où $m_1 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}$ et $m_2 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}$ sont des fonction C^0, et $p : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}$ est une fonction C^{q-1} définie par :

$$\begin{aligned}
m_1(x_1,x_2) &= k'\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big) + \frac{|x_2-\phi_1(x_1)|\,\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_1)\right|\,|K_1(x_1)|}{1+\frac{1}{2}(x_2-\phi_1(x_1))^2} + k'\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big)\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1}(x_1)\,(K_1(x_1,x_2) - K_1(x_1,\phi_1(x_2))) \\
m_2(x_1,x_2) &= \frac{|x_2-\phi_1(x_1)|\,|K_2(x_1,x_2)|}{1+\frac{1}{2}(x_2-\phi_1(x_1))^2} \\
p(x_1,x_2) &= k'\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big)\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1}(x_1)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(x_1,\phi_1(x_1) + s\big(x_2-\phi_1(x_1)\big)\big)\,ds + \frac{b(x_1,x_2) - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_1)f(x_1,x_2)}{1+\frac{1}{2}(x_2-\phi_1(x_1))^2}\,, \\
q(x_1,x_2) &= \frac{a(x_1,x_2)}{1+\frac{1}{2}(x_2-\phi_1(x_1))^2}\,,
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant ϕ_2 comme la fonction C^{q-1} :

$$\phi_2(x_1,x_2) = \frac{1}{q(x_1,x_2)}\,(\,\phi_1(x_1) - x_2 - p(x_1,x_2)\,) \tag{A.74}$$

où $a(x_1,x_2) \neq 0$ par hypothèse, et en choisissant $u = \phi_2(x_1,x_2)$, nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\mathcal{W}(x_1,x_2)}} \leq -k'\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big)\,\alpha_1(x_1) + m_1(x_1,x_2)\,|d_1| + m_2(x_1,x_2)\,|d_2| - \big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)^2\,. \tag{A.75}$$

De plus, de (A.70) et du fait que k' est une fonction croissante, nous obtenons :

$$m_1(x_1,x_2) \leq 3k'\big(\mathcal{W}(x_1,x_2)\big)\,, \tag{A.76}$$

$$m_2(x_1,x_2) \leq M(x_1)\,(3 + |\phi_1(x_1)|) \leq 3k'(\mathcal{W}(x_1,x_2))\,. \tag{A.77}$$

Ainsi, nous avons

$$\dot{\widehat{\mathcal{W}(x_1,x_2)}} \leq -k'\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big)\,\alpha_1(x_1) - \big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)^2 + 2k'(\mathcal{W}(x_1,x_2))\,(|d_1| + |d_2|)\,. \tag{A.78}$$

En prenant, $\mathcal{V}_2(x_1,x_2) = \ell(\mathcal{W}(x_1,x_2))$ où ℓ est une fonction radialement non bornée C^q définie par :

$$\ell(s) = \frac{1}{3}k^{-1}(s)\,, \tag{A.79}$$

nous obtenons enfin :

$$\dot{\widehat{\mathcal{V}_2(x_1,x_2)}} \leq -\ell'(\mathcal{W}(x_1,x_2))\,\Big[k'\big(\mathcal{V}_1(x_1)\big)\,\alpha_1(x_1) + \big(x_2 - \phi_1(x_1)\big)^2\Big] + |d_1| + |d_2|\,. \tag{A.80}$$

□

A.2.4 Démonstration du Lemme 1

Notons $\breve{X}$ les trajectoires du système (8.14), et pour tout x introduisons $(\breve{\sigma}^-_{\mathcal{O}}(x), \breve{\sigma}^+_{\mathcal{O}}(x))$ le plus grand intervalle de temps pendant lequel la solution $\breve{X}(x,t)$ issue de x reste dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Pour tout point x dans $\mathcal{O}+\delta_d$ nous associons la fonction $\tau_x : (\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x)) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tau_x(t) \;=\; \int_0^t \gamma(h(X(x,s)))ds \;.$$

Elle satisfait :

$$\frac{d\tau_x}{dt}(t) \;=\; \gamma(h(X(x,t))) \;\geq\; 1+\gamma_b(h(X(x,t))) \;\geq\; 1 \;, \tag{A.81}$$

pour tout t dans $(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x))$. Ainsi τ_x est une fonction strictement croissante et C^1. Ceci implique qu'une application inverse $\tau_x^{-1} : \tau_x(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x)) \to (\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x))$ existe et la fonction $t \in \tau_x(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x)) \;\mapsto\; X(x,\tau_x^{-1}(t)) \in \mathcal{O}+\delta_d$ est bien définie. Aussi nous avons :

$$\tau_x^{-1}(0) \;=\; 0 \quad , \qquad \frac{d\tau_x^{-1}}{dt}(t) \;=\; \frac{1}{\gamma(h(X(x,\tau_x^{-1}(t))))} \tag{A.82}$$

ou de façon équivalente :

$$\tau_x^{-1}(t) \;=\; \int_0^t \frac{1}{\gamma(h(X(x,\tau_x^{-1}(s))))}\,ds \qquad \forall t \in \tau_x(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x))$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(x,\tau_x^{-1}(t))}{\partial t} \;&=\; f(X(x,\tau_x^{-1}(t)))\,\frac{1}{\gamma(h(X(x,\tau_x^{-1}(t))))} \;,\\ &=\; f_\gamma(X(x,\tau_x^{-1}(t))) \qquad \forall t \in \tau_x(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x)) \;.\end{aligned}$$

Alors l'unicité des solutions du système (8.14), nous donne :

$$X(x,\tau_x^{-1}(t)) \;=\; \breve{X}(x,t) \qquad \forall x \in \mathcal{O}+\delta_d \;,\; \forall t \in \tau_x(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), \sigma^+_{\mathcal{O}+\delta_d}(x)) \;. \tag{A.83}$$

En particulier ceci implique que $\tau_x\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), 0]\right)$ est un intervalle et :

$$\tau_x\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), 0]\right) \;\subset\; (\breve{\sigma}^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x), 0] \qquad \forall x \in \mathcal{O}+\delta_d \;. \tag{A.84}$$

Maintenant pour montrer que la distinguabilité en temps négatif par rapport à $\mathcal{O}$ est aussi valide pour le système (8.14), nous supposons qu'il existe x_1 et x_2 dans $\mathcal{O}+\delta_\Upsilon$ tel que :

$$h(\breve{X}(x_1,t)) \;=\; h(\breve{X}(x_2,t)) \qquad \forall t \;\in\; (\breve{\sigma}^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1), 0] \cap (\breve{\sigma}^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_2), 0] \;. \tag{A.85}$$

De (A.84), nous déduisons :

$$h(\breve{X}(x_1,t)) \;=\; h(\breve{X}(x_2,t)) \qquad \forall t \;\in\; \tau_{x_1}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1), 0]\right) \bigcap \tau_{x_2}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_2), 0]\right) \;. \tag{A.86}$$

Ensuite nous observons que (A.82), (A.83) et (A.85) impliquent, pour tout t dans l'intervalle

$\tau_{x_1}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0]\right) \bigcap \tau_{x_2}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_2),0]\right)$:

$$\begin{aligned}
\tau_{x_2}^{-1}(t) &= \int_0^t \frac{1}{\gamma(h(X(x_2,\tau_{x_2}^{-1}(s))))}\,ds\ , \\
&= \int_0^t \frac{1}{\gamma(h(\breve{X}(x_2,s)))}\,ds\ , \\
&= \int_0^t \frac{1}{\gamma(h(\breve{X}(x_1,s)))}\,ds\ , \\
&= \int_0^t \frac{1}{\gamma(h(X(x_1,\tau_{x_1}^{-1}(s))))}\,ds\ , \\
&= \tau_{x_1}^{-1}(t)\ . \qquad \text{(A.87)}
\end{aligned}$$

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que :

$$\tau_{x_1}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0]\right) \subset \tau_{x_2}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_2),0]\right)\ .$$

Dans ce cas, nous déduisons de (A.87) :

$$\begin{aligned}
(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0] &= \tau_{x_1}^{-1}\left(\tau_{x_1}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0]\right)\right)\ , \\
&= \tau_{x_2}^{-1}\left(\tau_{x_1}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0]\right)\right)\ , \\
&\subset \tau_{x_2}^{-1}\left(\tau_{x_2}\left((\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0]\right)\right) = (\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_2),0]\ .
\end{aligned}$$

En conséquence, de (A.87) et (A.86), nous obtenons pour s dans $(\sigma^-_{\mathcal{O}+\delta_d}(x_1),0]$:

$$\begin{aligned}
h(X(x_1,s)) &= h(X(x_1,\tau_{x_1}^{-1}(\tau_{x_1}(s)))) = h(\breve{X}(x_1,\tau_{x_1}(s)))\ , && \text{(A.88)}\\
&= h(\breve{X}(x_2,\tau_{x_1}(s))) = h(X(x_2,\tau_{x_2}^{-1}(\tau_{x_1}(s))))\ , && \text{(A.89)}\\
&= h(X(x_2,\tau_{x_1}^{-1}(\tau_{x_1}(s)))) = h(X(x_2,s))\ . && \text{(A.90)}
\end{aligned}$$

Du fait de la distinguabilité en temps négatif sur $\mathcal{O}$ du système (5.1), nous concluons que $x_1 = x_2$. □

A.2.5 Démonstration du Théorème 21

Preuve : De la même façon que pour établir l'injectivité de la fonction T, nous allons utiliser le lemme de Coron de [17] (voir aussi [3]). Nous devons donc trouver une fonction g appropriée. Soit Ω et Υ les ouverts de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^{2n}$ définis par :

$$\Omega \;=\; \{\lambda \in : \mathtt{Re}(\lambda) < \ell\} \quad , \qquad \Upsilon \;=\; \{x = (x_1, x_2) \in (\mathcal{O} + \delta_\Upsilon) \times \mathbb{R}^n \;:\; x_2 \neq 0\} \;. \tag{A.91}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 19 (voir [2], ou la reproduction donnée en l'annexe), la complétude en temps négatif nous permet de conclure :

$$\breve{\sigma}^{-}_{\mathbb{R}^n}(x) \;=\; -\infty \quad , \qquad \forall\, x \in \mathcal{O} + \delta_\Upsilon \;. \tag{A.92}$$

Ainsi, en utilisant (7.65), nous obtenons pour tout (x, λ, t) dans $(\mathcal{O} + \delta_\Upsilon) \times \Omega \times (-\infty, 0]$,

$$\begin{aligned} |\exp(-\lambda t) b(h(\breve{X}(x,t)))| \;&\leq\; \exp([\ell - \mathtt{Re}(\lambda)]t) |\exp(-\ell t) b(h(\breve{X}(x,t)))| \;, \\ &\leq\; \exp([\ell - \mathtt{Re}(\lambda)]t)\, M(x) \;. \end{aligned} \tag{A.93}$$

Alors le Théorème de convergence dominé de Lebesgue implique que, pour tout x dans Ω, l'expression :

$$T_\lambda(x) \;=\; \int_{-\infty}^{0} \exp(-\lambda s) b(h(\breve{X}(x,s)))\, ds \;, \tag{A.94}$$

définit une fonction continue $T_\lambda \;:\; \mathcal{O} + \delta_\Upsilon \to \mathbb{C}^p$. Avec des arguments similaires voir par exemple [20, Théorème (3.150)]) et en utilisant une nouvelle fois (7.65) nous pouvons établir que cette fonction est C^2.

Maintenant, introduisons la fonction $\mathcal{G}T \;:(\mathcal{O} + \delta_\Upsilon) \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{C}^p$ définie par :

$$\mathcal{G}T(x, \lambda) \;=\; \int_{-\infty}^{0} \exp(-\lambda s) \frac{\partial b(h(\breve{X}(x_1, s)))}{\partial x_1}\, x_2\, ds \;=\; \frac{\partial T}{\partial x}(x_1)\, x_2 \;, \tag{A.95}$$

avec $x = (x_1, x_2)$. Cette fonction est C^1 en x dans $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon \times \mathbb{R}^n$ pour tout λ appartenant à Ω. Aussi, il est montré dans [83, chap 19, p. 367] avec l'aide des Théorèmes de Morera et de Fubini, que cette fonction est holomorphe en λ dans Ω, pour tout x dans x in $\mathcal{O} + \delta_\Upsilon \times \mathbb{R}^n$. De plus, du fait que nous avons :

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(-2as) \left| \frac{\partial b(h(\breve{X}(x_1, s)))}{\partial x_1}\, x_2 \right|^2 ds \;\leq\; \frac{M(x_1)^2 + x_2^2}{2(\ell - a)} \;<\; +\infty \quad \forall a < \ell \;,$$

nous pouvons utiliser le Théorème de Plancherel pour obtenir :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}T(x, a + is)|^2\, ds \;=\; \int_{-\infty}^{0} \exp(-2as) \left| \frac{\partial b(h(\breve{X}(x_1, s)))}{\partial x_1}\, x_2 \right|^2 ds \tag{A.96}$$

$$\forall a < \ell \;, \quad \forall x \in (\mathcal{O} + \delta_d)^2 \;.$$

Maintenant, pour tout x dans Υ, en utilisant l'observabilité locale, ainsi que la continuité par rapport au temps nous obtenons l'existence d'un ouvert (t_0, t_1) tel que :

$$\left| \frac{\partial b(h(\breve{X}(x_1, s)))}{\partial x_1} x_2 \right| \;>\; 0 \qquad \forall s \in (t_0, t_1) \;.$$

En utilisant (A.96) nous obtenons alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}T(x, a+is)|^2 \, ds \ > \ 0 \ .$$

Ceci signifie que, pour tout x dans Υ, la fonction $\lambda \mapsto \mathcal{G}T(x,\lambda)$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}_\ell$. Du fait que cette fonction est holomorphe, nous pouvons conclure que, pour tout (x,λ) in $\Upsilon \times \mathbb{C}_\ell$, il existe, pour au moins une des p composantes $\mathcal{G}T_j$ de $\mathcal{D}T$, un entier k qui satisfait :

$$\begin{cases} \frac{\partial^i \mathcal{G}T_j}{\partial \lambda^i}(x,\lambda) \ = \ 0 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, k-1\} \ . \\ \frac{\partial^k \mathcal{G}T_j}{\partial \lambda^k}(x,\lambda) \ \neq \ 0 \ , \end{cases}$$

Ainsi nous pouvons utiliser le Lemme de Coron [3] avec $\mathcal{G}$ comme fonction g. Et, en utilisant (A.95), il nous permet de conclure que l'ensemble S définie par :

$$S \ = \ \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \Omega^{n+1} : \exists \, (x_1, x_2) \in \Upsilon \ : \ \frac{\partial T_{\lambda_i}}{\partial x_1}(x_1) x_2 = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n+1\} \right\}$$

a une mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{C}^{n+1}$. □

A.2.6 Démonstration que pour le système (1.11) il n'y a pas de bouclage de sortie stationnaire

Supposons qu'il existe (q, ϖ, ν) et $\mathcal{M}_w$ dans $\mathbb{R}^q$ tel que $(0, \mathcal{M}_w)$ est un ensemble globalement asymptotiquement stable pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \varpi(x^2, w) \ , \\ \dot{w} &= \nu(x^2, w) \ . \end{cases} \tag{A.97}$$

Sous cette hypothèse, du fait du Théorème [41, Theorème 52.1], nous concluons qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que la rotation du champ de vecteurs définis par (A.97) sur la frontière de la courbe définie par :

$$\Omega_1 \ = \ \{(x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \ : \ |x|^2 + |w|^2 < \epsilon_1\} \ , \tag{A.98}$$

est égale à 1. Les rotations étant constantes si l'on considère un voisinage du domaine Ω_1, (voir [41, Chap. 4.2]), nous avons l'existence d'un réèl ϵ_2 strictement positif tel que la rotation est encore égale à 1 sur la frontière de l'ensemble :

$$\begin{aligned} \Omega_2 \ = \ &\{(x, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q \ : \ |x|^2 + |w|^2 < \epsilon_1\} \\ &\cup \{(x, w) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^q \ : \ (1 + \epsilon_2)|x|^2 + |w|^2 < \epsilon_1\} \ . \end{aligned} \tag{A.99}$$

Notons,

$$F(x, w) \ = \ \begin{pmatrix} \varpi(x^2, w) \\ \nu(x^2, w) \end{pmatrix} \tag{A.100}$$

Nous avons, $F(x, w) = F(-x, w)$. Considérons maintenant le domaine :

$$\Omega_3 \ = \ \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q \ : \ \left\{ \begin{array}{r} |x|^2 + |w|^2 < \epsilon_1 \\ (1 + \epsilon_2)|x|^2 + |w|^2 > \epsilon_1 \end{array} \right\} \right. \ . \tag{A.101}$$

La rotation de F sur sa frontière est égale à celle de Ω_2 (égalité de F sur leur frontière). Ainsi, la rotation sur la frontière de ce domaine est égale à 1. En utilisant le Théorème [41, Theorème 4.2], nous concluons qu'il existe un autre point d'équilibre dans Ω_3. Ainsi l'origine ne peut être un point globalement et asymptotiquement stable. Cette propriété ne peut d'ailleurs pas être vérifiée localement du fait que ϵ_1 peut être choisi aussi petit que l'on souhaite.

Annexe B

Simulation et Exemples

B.1 Cas de l'interception

La robustesse et les performances de la loi de commande introduite dans la section 2.4.3 ont été testées par une simulation sous Matlab. Nous avons ici essayé d'être, le plus proche possible de la réalité afin de valider cette démarche.

L'exemple suivant illustre une possible utilisation de la loi de commande.

B.1.1 État initial

Les données initiales pour la simulation sont les suivantes :

1. La valeur initiale de la position et de la vitesse relative sont :

$$X \ : \ \begin{cases} X_x = 5000 & \text{m} \\ X_y = -410 & \text{m} \\ X_z = -400 & \text{m} \end{cases}, \quad V \ : \ \begin{cases} V_x = -300 & \text{m/s}^{-1} \\ V_y = 5 & \text{m/s}^{-1} \\ V_z = -5 & \text{m/s}^{-1} \end{cases}. \tag{B.1}$$

2. La valeur initiale du vecteur de vitesse de rotation est :

$$\Omega = \begin{cases} p = 0.01 & \text{rad/s}^{-1} \\ q = -0.01 & \text{rad/s}^{-1} \\ r = 0.01 & \text{rad/s}^{-1} \end{cases}. \tag{B.2}$$

Avec ces données initiales, si la trajectoire de l'intercepteur n'est pas modifiée, la distance de passage sera de 400 mètres. Nous allons exploiter l'approche présentée dans la section 2.4.3 de façon à réduire cette distance de passage et assurer l'interception.

Bien que la loi de commande a été calculée pour un système parfait, nous considérons différentes perturbations dans le modèle de simulation :

1. La consommation de carburant fait décroître la masse de l'intercepteur. Ainsi, les équations physiques qui régissent sa dynamique évoluent au cour du temps. La valeur de la masse est actualisée par une procédure de filtrage.
2. Les commandes U_g n'agissent pas exactement au centre de gravité de l'intercepteur qui évolue au fur et à mesure que les réservoirs de carburant se vide. Les excentrements sont des états inclus dans le modèle considéré et estimés par l'intermédiaire d'un filtre de Kalman.

3. Les commandes implémentées sont soumises à des contraintes en norme, en vitesse ainsi qu'en temps de retard d'allumage.
4. Les mesures sont corrompues du fait de la présence de bruit additifs (blanc et gaussien). Aussi, la mesure de positions est discrète, et correspond à la position du barycentre d'une tâche sur une grille qui constitue l'écran du capteur.
5. La cible est soumise à des accélérations parasites dues aux frottement sur la faible quantité d'air présente en altitude.

B.1.2 Résultats obtenus

En utilisant la loi de commande, la distance de passage obtenue en présence de toutes les imperfections et saturations considérées est autour de 20 cm.

Comme nous pouvons le voir sur le graphique B.1.2, le critère d'interception pratiquement nul en à peu près 7 secondes. Après ce laps de temps, la cible est exactement devant l'intercepteur et l'interception est garantie.

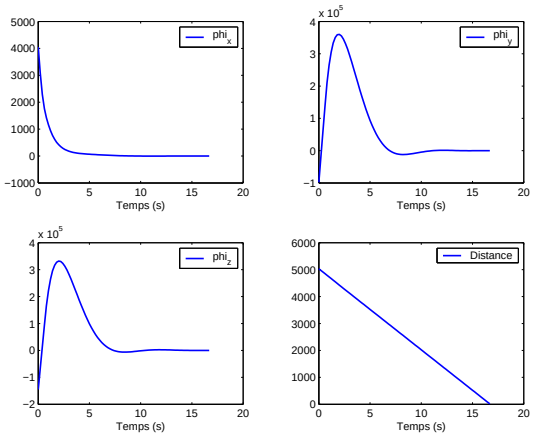

FIG. B.1 – Évolution de $X \wedge V$

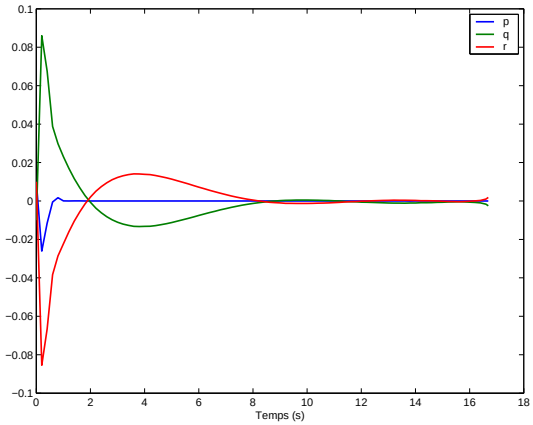

FIG. B.2 – Évolution de p, q, r

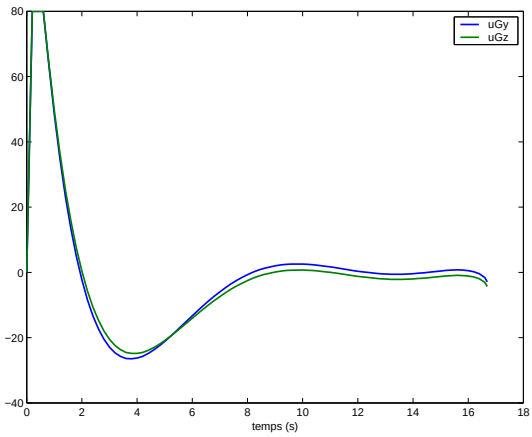

FIG. B.3 – Loi de commande en U_g

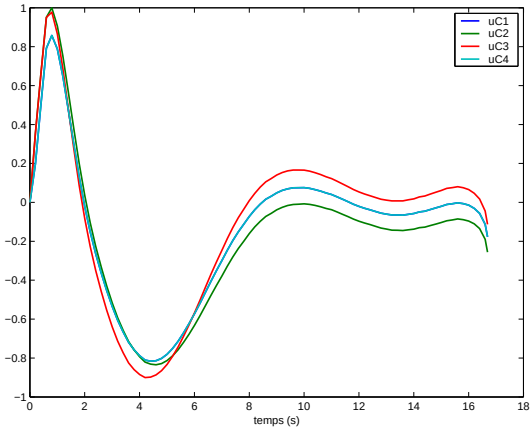

FIG. B.4 – Loi de commande en U_c

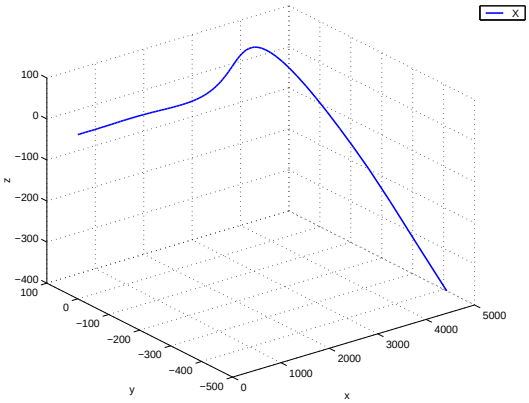

FIG. B.5 – Position relative de la cible dans $\mathcal{R}_M$

B.2 Le moteur asynchrone

B.2.1 Le système

L'état d'un modèle de moteur asynchrone peut être pris de dimension 5 et est caractérisé par le vecteur :

$$(w_r, \psi_r, i_s)^T \ , \tag{B.3}$$

où w_r est la vitesse du rotor dans $\mathbb{R}$, $\psi_r = \psi_{dr} + j\psi_{qr}$ correspond aux flux du rotor dans $\mathbb{C}$, et $i_s = i_{ds} + ji_{qs}$ correspond à l'intensité du stator. Son évolution est décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_r &= -jw_s\psi_r - (\frac{1}{\tau_r} - jw_r)\psi_r + \frac{R_r^e}{L_f} i_s \ , \\ \dot{i}_s &= -(\frac{R_s^e}{L_f} + jw_s)i_s + (\frac{1}{\tau_r} - jw_r)\psi_r + u \ , \\ J\dot{w}_r &= \frac{3}{2}\frac{n_p^2}{L_f}\mathtt{Im}(i_s\bar{\psi}_r) + \tau_l \ , \end{cases} \tag{B.4}$$

où, u est le voltage (il s'agit ici d'une commande), τ_l représente le couple de charge, qui est une perturbation inconnue de notre système. Les moments d'inertie du rotor sont caractérisés par le réel J. Aussi, R_r^e et R_s^e dénotent les résistances de la bobine, L_r et L_s l'inductance. Nous mesurons i_s. Les paramètres u , R_r^e, R_s^e, L_r, L_s et w_s sont connus.

L'objectif de l'estimation est de reconstruire w_r et ψ_r. Nous la présentons dans ce qui suit selon deux scénarios.

B.2.2 Scénario 1 : w_r est polynomial en t

Dans un premier temps, plutôt que la dynamique "vrai" de w_r donnée par (B.4), nous supposons que w_r peut être approximé par une fonction polynomiale du temps. En d'autres termes on suppose qu'il existe un entier n_r tel que :

$$w_r^{(n_r+1)} = 0 \, . \tag{B.5}$$

Sous cette hypothèse le système initial peut se mettre sous la forme de la classe de systèmes (8.60). En effet, en notant :

$$x = \begin{pmatrix} \mathtt{Re}(\psi_r) & \mathtt{Im}(\psi_r) & w_r & \dots & w_r^{(p)} \end{pmatrix}^\top \ , \tag{B.6}$$

et,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -w_s & 0 & \dots & 0 \\ w_s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{R_r^e}{L_f}\mathtt{Re}(i_s) \\ \frac{R_r^e}{L_f}\mathtt{Im}(i_s) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

$$I = \begin{pmatrix} \mathtt{Re}(-(\frac{R_s^e}{L_f} + jw_s)i_s + u) \\ \mathtt{Im}(-(\frac{R_s^e}{L_f} + jw_s)i_s + u) \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

et,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_r}\mathtt{Re}(\psi_r) + w_r\mathtt{Im}(\psi_r) \\ \frac{1}{\tau_r}\mathtt{Im}(\psi_r) - w_r\mathtt{Re}(\psi_r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^\top J_d(t)x \\ x^\top J_q(t)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_d(t)x \\ K_q(t)x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.9}$$

avec,

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad J_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

et,

$$K_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad K_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \tag{B.11}$$

Le système du moteur s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = F\,x + G\mathcal{Y}(x) + H \\ \dot{i}_s = I + \mathcal{Y}(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{Y}(x) = x^\top Jx + Kx \\ y = i_s \end{cases}. \tag{B.12}$$

Nous retrouvons alors la forme du modèle (8.60), avec les deux modifications :

1. Les matrices F, H, I ne sont plus constantes.
2. les termes y et $\mathcal{Y}$ sont de dimension 2.

Ces deux modifications n'ont qu'une conséquence mineure sur la technique présentée dans la section 8.5. Nous pouvons alors appliquer la méthode étudiée précédemment. De plus, nous remarquons que α présent dans l'équation (8.60) n'est pas présent, nous sommes ainsi dans le cas de l'hypothèse du paragraphe 8.5.3 (i.e. $\alpha = 1$ connu). Nous pouvons alors construire un observateur de la forme (8.81).

B.2.3 Scénario 2 : τ_l est polynomial en t

Nous considérons maintenant la dynamique de w_r telle qu'elle apparaît dans le système (B.4) mais nous approximons de façon polynomiale en temps l'évolution de τ_l. Nous supposons :

$$\tau_l^{(n_\tau+1)} = 0\,. \tag{B.13}$$

Nous choisissons alors :

$$x = \begin{pmatrix} \mathtt{Re}(\psi_r) & \mathtt{Im}(\psi_r) & Jw_r & \tau_l & \dots & \tau_l^{(p)} \end{pmatrix}^\top. \tag{B.14}$$

et nous retrouvons la structure du système (B.4) si nous posons :

$$\alpha = \frac{1}{J}\,. \tag{B.15}$$

et,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -w_s & 0 & \dots & \dots & 0 \\ w_s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{3}{2}\frac{n_p^2}{L_f}\mathtt{Im}(i_s) & -\frac{3}{2}\frac{n_p^2}{L_f}\mathtt{Re}(i_s) & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{B.16}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{R_r^e}{L_f}\mathtt{Re}(i_s) \\ \frac{R_r^e}{L_f}\mathtt{Im}(i_s) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

$$I = \begin{pmatrix} \mathtt{Re}(-(\frac{R_s^e}{L_f} + jw_s)i_s + u) \\ \mathtt{Im}(-(\frac{R_s^e}{L_f} + jw_s)i_s + u) \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

et,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_r}\mathtt{Re}(\psi_r) \\ \frac{1}{\tau_r}\mathtt{Im}(\psi_r) \end{pmatrix} + \frac{1}{J}\begin{pmatrix} Jw_r\mathtt{Im}(\psi_r) \\ -Jw_r\mathtt{Re}(\psi_r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_d(t)x \\ H_q(t)x \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} x^\top G_d(t)x \\ x^\top G_q(t)x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.19}$$

avec,

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad J_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

et,

$$K_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad K_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

Nous pouvons maintenant écrire le système du moteur sous l'hypothèse simplificatrice (B.13) de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + G\mathcal{Y}(x) + H \\ \dot{i}_s = I + \mathcal{Y}(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{Y}(x) = \alpha x^\top Jx + Kx \\ y = i_s \end{cases}. \tag{B.22}$$

Cette fois-ci le terme α qui est inconnu apparaît. Nous sommes maintenant dans le cas de la section 8.5.4.

B.2.4 Simulation de la deuxième simplification

Cette méthode a été testée numériquement, et donne des résultats intéressants. La convergence des estimés vers les valeurs réelles est obtenue. Mais les temps de calculs sont longs. Cette procédure demanderait une étude plus approfondie notamment au niveau de la construction de T^*, de façon à raccourcir les temps de calcul.

Dans les tests numériques effectués, nous avons pris $p = 3$. Le système est alors de dimension 7.

Les graphiques suivants présentent quelques résultats numériques :

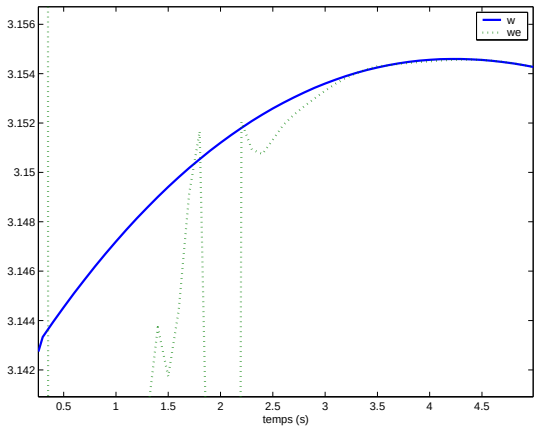

FIG. B.6 – Vitesse du rotor

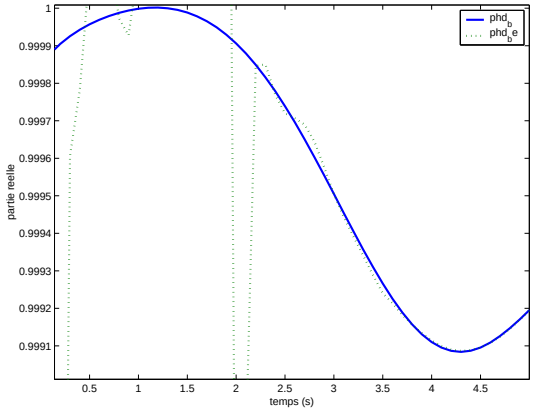

FIG. B.7 – Flux du Rotor

Annexe C

On the existence of Kazantzis-Kravaris / Luenberger Observers

Cette annexe est une reproduction de l'article [3].

Bibliographie

[1] D. Aeyels,
Generic observability of differentiable systems,
SIAM J. Control and Optimization. Vol. **19**, No. 5, September (1981).

[2] V. Andrieu, L. Praly,
Global asymptotic stabilization by output feedback for some non minimum phase non linear systems,
Proc. of the 44th IEEE CDC-ECC, Seville, Spain, (2005).

[3] V. Andrieu, L. Praly,
On the existence of Kazantzis-Kravaris/ Luenberger Observers,
SIAM J. Control and Optimization, To appear.

[4] V. Andrieu, L. Praly,
Remarks on the existence of Kazantzis-Kravaris/ Luenberger Observers,
Proc. of the 43th IEEE CDC, Nassau, Bahamas, (2004).

[5] V. Andrieu, H. Piet-Lahanier,
Exoatmospheric interception problem solved using output feedback law,
System & Controls Letters, To appear.

[6] V. Andrieu, H. Piet-Lahanier,
Synthesis of flight control and guidance law by output feedback design applied to the interception problem,
Proc. of the 6th ONERA-DLR Aerospace Symposium, Berlin, juin (2004).

[7] D. Angeli, E. Sontag,
Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations,
Sysemts & Control Letters, **38**, 209-217, (1999)

[8] M. Arcak, D. Angeli, E. Sontag,
A Unifying Integral ISS Framework for Stability of Nonlinear Cascades
SIAM journal on Optimization and Control, **40**, 1888-1904, (2002).

[9] M. Arcak,
Certainty-Equivalence Output-Feedback Design with Circle-Criterion Observers,
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **50**, No. 6, June (2005).

[10] M. Arcak, P. Kokotovic
Nonlinear observer : A circle criterion design and robustness analysis,
Automatica, Vol. **37**, 1923-1930, (2001).

[11] M. Arcak, P. Kokotovic
Observer-Based Control of Systems with Slope-Restricted Nonlinearities,
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **46**, No. 7, July (2001).

[12] A. Astolfi and L. Praly,
Global complete observability and output-to-state stability imply the existence of a globally convergent observer
Proc. of the 43th IEEE CDC, Nassau, Bahamas, (2004).

[13] H. Brezis,
Opérateurs maximaux monotones et semi-groupe de contractions dans les espaces de Hilbert.
Mathematics Studies. North-Holland (1973).

[14] C. Byrnes, A. Isidori,
Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems,
IEEE Transactions on Automatic Control, **36**, No. 10, October (1991).

[15] C. Byrnes, A. Isidori,
Limit Sets, Zero Dynamics, and Internal Models in the Problem of Nonlinear Output Regulation,
IEEE Transactions on Automatic Control, **48**, No. 10, October (2003).

[16] J. Carr,
Applications of centre manifold theory.
Springer Verlag, Applied mathematical sciences, **35**, (1981).

[17] J.-M. Coron,
On the stabilization of controllable and observable systems by output feedback law,
Mathematics of Control, Signals and Systems **7**, 187-216, (1994).

[18] J.-M. Coron,
Communcication personnelle.

[19] J.-C. Culioli,
Introduction à l'Opimisation,
ellipses, (1994).

[20] P. Deheuvels,
L'intégrale.
Presses Universitaires de France, Paris, (1980).

[21] E. Delaleau, W. Respondek,
Lowering the Orders of Derivatives of Controls in Generalized State Space Systems,
Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control **8**, 427-453, (1998).

[22] B. P. Demidovich,
Lectures on Stability Theory,
Nauka, Moscow, (1967).

[23] M. I. Freedman, J.C. Willems,
Smooth Representation of Systems with differentiated Inputs,
IEEE Transaction on Automatic Control **23**, No. 1, 16-21, (1978).

[24] R.A. Freeman, P.V. Kokotovic
Robust Nonlinear Control Design : State-Space and Lyapunov Techniques,
Springer-Verlag, (1996).

[25] R.A. Freeman, P.V. Kokotovic
Global robustness of nonlinear systems to state measurement disturbances,
Proceeding of the 32nd IEEE CDC. p. 1507-1512 December (1993).

[26] J.P. Gauthier, H. Hammouri, I. Kukpa,
Observer for nonlinear systems,
Proc. of the 30th IEEE CDC, Vol 2, pp 1483-1489, (1991).

[27] J.-P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman,
A simple observer for nonlinear systems, application to bioreactors,
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **37**, No. 6, June (1992).

[28] J.P. Gauthier, I. Kupka,
Deterministic observation theory and applications.
Cambridge university Press, (2001).

[29] J. K. Hale,
Ordinary Differential Equations, Third Edition,
Krieger Pub. Comp., (1980).

[30] A. Ilchman and E.P. Ryan,
On gain adaptation in adaptative control,
IEEE Transaction on Automatic Control **48**, No. 5, 895-899, (2003).

[31] A. Isidori,
Nonlinear Control System II,
Springer Verlag, (1989).

[32] Z.-P. Jiang,, A. Teel, L. Praly,
Small-gain theorem for ISS systems and applications,
Mathematics of Control, Signals and Systems **7**, 95-120, (1994).

[33] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse.
Adaptive Output-Feedback Control of a class of Nonlinear Systems.
Proc. of the 30th IEEE CDC, December (1991).

[34] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse.
A toolkit for nonlinear feedback design.
Systems & Control Letters **18** 83-92, (1992).

[35] I. Kanellakopoulos, P.T. Krein, and P. V. Kokotovic
Interlaced controller-observer design for adaptative nonlinear control.
Proc. of the ACC, Chicago, pp. 1337-1342, June (1992).

[36] D.Karagiannis, Z-P. Ziang, R. Ortega, A. Astolfi
Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems.
Automatica (To appear).

[37] N. Kazantzis, C. Kravaris,
Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems and Control Letters*, **34**, 241-247, (1998).

[38] H.K. Khalil, F. Esfandiari
Semi-global stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback
Proc. of the 31th IEEE CDC, December (1992).

[39] H.K. Khalil, A. Saberi
Adaptative stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback
IEEE Transactions on Automatic Control,Vol textbf32, November (1987).

[40] P.V. Kokotović,
The joy of feedback : nonlinear and adaptive,
IEEE Control Systems Magazine,pp. 7-17, Vol. **12**, No. 3, June (1992)

[41] M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabeiko
Geometrical Methods of Nonlinear Analysis
Springer Verlag, (1984).

[42] G. Kreisselmeier, R. Engel,
Nonlinear observers for autonomous Lipschitz continuous systems.
IEEE Transactions on Automatic Control, **48**, No. 3, March (2003).

[43] A.J. Krener, A. Isidori,
Linearization by output injection and nonlinear observers.
Systems and Control Letters, **3**, pp. 47-52, (1983).

[44] A.J. Krener, W. Respondek,
Nonlinear Observer with Linearizable Error Dynamics.
SIAM J. Control and Optimization, **23**, pp. 197-216, (1985).

[45] A. Krener, M. Xiao,
Observers for linearly unobservable nonlinear systems.
Systems & Control Letters, **46**, 281-288, (2002).

[46] A. Krener, M. Xiao,
Nonlinear observer design in the Siegel domain,
SIAM J. Control Optim., **41**, No. 3, pp. 932-953, (2002).

[47] A. Krener, M. Xiao,
Nonlinear Observer Design for Smooth Systems,
Chaos in Automatic Control, to appear.

[48] P. Krishnamurthy and F. Khorrami,
Dynamic High-Gain Scaling : State and Output Feedback With Application to Systems With ISS Appended Dynamics Driven by All States.
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **49**, No. 12, December (2004).

[49] P. Krishnamurthy, F. Khorrami, Z.P. Jiang
Global output feedback tracking for nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form.
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **47**, No. 5, pp 814-819, May (2002).

[50] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. Kokotović,
Nonlinear and adaptive control design.
John Wiley & Sons, New York, (1995).

[51] J. Kurzweil,
On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion,
Ann. Math. Soc. Trans. Ser. 2. ,**24**, 19-77, (1956).

[52] J. Lévine, R. Marino,
Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters.
Systems and Control Letters, **7**, pp. 133-142, (1986).

[53] Y. Lin, E. Sontag, Y. Wang,
A smooth converse Lyapunov Theorem for Robust Stability,
SIAM J. Control and Optimization, **34**, 124-160, (1996).

[54] V. Lopez-M., F. Plestan, A. Glumineau,
Linearization by Completely Generalized Input Ouput Injection,
Kybernetika, vol.35, **6**, pp. 793-802, (1999)

[55] D. Luenberger,
Observing the state of a linear system,
IEEE Trans. Military Electronics, **8**, pp.74-80, (1964).

[56] A.M. Lyapunov,
The general problem of the stability of motion, Lyapunov Centenary Issue,
Int. J. Control (English Translation), **55**, 521, (1992).

[57] R. Marino, P. Tomei,
Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems.
Proc. of the 30th IEEE CDC, December, (1991).

[58] R. Marino, P. Tomei,
Nonlinear control design. Geometric, adaptive, robust,
Prentice Hall, (1995).

[59] R. Marino, P. Tomei,
A class of globally output feedback stabilizable nonlinear nonminimum phase systems,
Proc. of the 43rd CDC, (2004).

[60] F. Mazenc,
Stabilisation de trajectoires, ajout d'intégration, commandes saturées.
Mémoire de thèse de l'école des mines de Paris, (1996).

[61] F. Mazenc, L. Praly, and W. P. Dayawansa,
Global stabilization by output feedback : Examples and Counter-Examples,
Systems & Control Letters, **23**, 119-125, (1994).

[62] R.K. Miller, A.N. Michel,
Ordinary differential equations,
Academic Press, (1988).

[63] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson and H. Sira–Ramirez,
Passivity–based control of Euler–Lagrange systems,
Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, Berlin, Sept. (1998).

[64] A. Pavlov, A. Pogromsky,N. van de Wouw, H. Nijmeijer,
Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich,
Systems & Control Letters, **52**, 257-261, (2004).

[65] A. Pavlov, N. van de Wouw, H. Nijmeijer,
The uniform global output regulation problem,
Proc. of the 43th IEEE CDC, Nassau, Bahamas, (2004).

[66] J.-B. Pomet
Sur la commande adaptative des systèmes non linéaires,
Mémoire de thèse de l'école des mines de Paris, (1989).

[67] J.-B. Pomet, R. M. Hirshorn, W. A. Cebuhar,
Dynamic output feedback regulation for a class of nonlinear systems,
Math. of Contr., Signals & Systems, vol. **6**, p. 106-124, (1993).

[68] V.M. Popov,
Hyperstability of control systems,
Springer-Verlag, New York, (1973).

[69] L. Praly,
Lyapunov design of a dynamic output feedback for systems linear in there unmeasured state conponents
Proc. of the IFAC Nonlinear Control Systems Design, Bordeaux, france, (1992).

[70] L. Praly,
Observabilité de la non bornitude en plus de l'observabilité
Rapport interne, CAS, (1996).

[71] L. Praly,
Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependant incremental rate.
IEEE, Transactions on Automatic Control, **48**, N. 6, June (2003).

[72] L. Praly,
Output feedback for the forwarding benchmark example,
Personnal communication, (2004).

[73] L. Praly,
Fonctions de Lyapunov et Stabilisation de points d'équilibre
Document de cours de l'école des mines de paris, (2005).

[74] L. Praly, M. Arcak,
A relaxed condition for stability of nonlinear observer-based controllers.
Systems & Control Letters **53**, 311-320, (2004).

[75] L. Praly, A. Astolfi,
Global asymptotic stabilization by output feedback under a state norm detectability assumption,
Proc. of the 44rd CDC, (2005).

[76] L. Praly, Z.-P. Jiang,
Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics,
Systems & Control Letters,**21**, 19-33, (1993).

[77] L. Praly, I. Kanellakopoulos,
Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems linear in the unmeasured state components,
Proc. of the 39th IEEE CDC, December (2000).

[78] L. Praly, R. Ortega, G. Kaliora,
Stabilization of nonlinear systems via forwarding modulo LgV,
IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. **46**, N. 9, September (2001).

[79] C. Prieur, J. de Halleux,
Stabilization of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shalow water equations.
Systems & Control Letters **52**, **(3-4)** (2004) 167-178.

[80] C. Prieur, L. Praly,
A tentative direct Lyapunov design of output feedbacks,
Proc. of the NOLCOS, (2004).

[81] C.Qian, W. Lin
Recursive observer design and non-smooth output feedback stabilization of inherently non-linear systems. *Proc. of 43rd IEEE CDC*, Dec. (2004).

[82] A. Rapaport, A. Maloum,
Design of exponential observers for nonlinear systems by embedding,
Int. j. Robust Nonlinear Control, (2004), **14**, 273-288.

[83] Rudin,
Real and Complex Analysis,
McGraw-Hill, Inc., (1966).

[84] A. J. van der Schaft,
On Realization of Nonlinear Systems Described by Higher-Order Differential Equations,
Mathematical Systems Theory, **19**, 239-275, (1987).

[85] E. Sontag,
Smooth stabilization implies coprime factorization,
IEEE Trans. Automatic Control, **34**, 435-443, (1989).

[86] E. Sontag,
Further facts about input to state stabilization,
IEEE Trans. Automatic Control, **35**, 473-476, (1990).

[87] E. Sontag,
Comments on integral variant of ISS,
Systems & Control Letters, **34**, 93-100, (1998).

[88] E.D. Sontag,
For differential equations with r parameters, $2r+1$ experiments are enough for identification.
J. Nonlinear Sci, **12**, pp. 553-583, (2002).

[89] H. Sussman,
Single-input observability of continuous time-systems,
Math. Systems Theory, **12**, 371-393, (1979).

[90] F. Takens,
Detecting Strange Attractors in Turbulence,
Proc. of the Symposium on Dynamical Systems and Turbulence, University of Warwick, 1979-1980, edited by D.A. Rand and L.S. Young, Springer, Berlin, (1981).

[91] A. Teel, L. Praly,
Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback,
Systems & Control Letters, **22**, 313-325, (1994).

[92] A. Tornambé,
Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems,
Systems & Control Letters, **19**, 193-204, (1992).

[93] F. Wesley Wilson, JR,
Smoothing Derivatives of Functions and Applications,
Trans. AMS **139**, 413-428, (1969).

[94] V. I. Zubov,
Methods of A.M. Lyapunov and their application,
Noordhoff, (1964).