



HAL
open science

Toward the integration of vibratory phenomena into the command generation of high-dynamics machine-tools

Richard Béarée

► **To cite this version:**

Richard Béarée. Toward the integration of vibratory phenomena into the command generation of high-dynamics machine-tools. Engineering Sciences [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2005. English. NNT : 2005ENAM0030 . pastel-00001611

HAL Id: pastel-00001611

<https://pastel.hal.science/pastel-00001611>

Submitted on 17 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Lille

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE
D'ARTS ET METIERS**

Spécialité : AUTOMATIQUE

par

Richard BEAREE

**PRISE EN COMPTE DES PHENOMENES VIBRATOIRES DANS LA GENERATION DE COMMANDE
DES MACHINES-OUTILS A DYNAMIQUE ELEVEE**

Soutenue le 1^{er} décembre 2005 devant le jury composé de

Daniel BRUN PICARD	Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers – CER d'Aix en Provence	Rapporteur
Jan SWEVERS	Professor at the Katholieke Universiteit Leuven – Belgium	Rapporteur
Didier DUMUR	Professeur à l'École Supérieure d'Electricité (Supelec)	Examinateur
Pascal RAY	Professeur à l'Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA) – Clermont-Ferrand	Examinateur
Michel AUBOURG	Ingénieur automatique au Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) – Senlis	Invité
Serge BLOCH	Ingénieur Num-Schneider - P&T - Motion and Drives – Colombes	Invité
Claude FIORONI	Responsable Recherche et Développement COMAU – Castre (Président de la Commission machine-outil et productique du CETIM)	Invité
Pierre-Jean BARRE	Maître de conférences HDR à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers – CER de Lille	Co-Directeur
Jean-Paul HAUTIER	Directeur de recherche à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers	Directeur

RESUME / ABSTRACT

PRISE EN COMPTE DES PHENOMENES VIBRATOIRES DANS LA GENERATION DE COMMANDE DES MACHINES-OUTILS A DYNAMIQUE ELEVEE

RESUME : La recherche de performances toujours plus élevées conduit les systèmes de positionnement à dynamique élevée à la limite de leurs possibilités technologiques et structurelles, invalidant de ce fait l'hypothèse classiquement retenue d'une dynamique d'ensemble assimilable à celle d'un corps rigide. Il s'ensuit que la commande du système ne peut plus sous-estimer l'influence des phénomènes vibratoires sur la qualité du suivi de profil, mais doit moduler les efforts moteurs afin de réaliser l'adéquation entre les caractéristiques intrinsèques au système et les critères de rapidité et de précision escomptés. Les travaux développés dans cette étude visent une amélioration du comportement dynamique du système par une action sur la génération de commande. La génération de commande s'articule autour de deux principales fonctions : (1) l'élaboration d'une loi de mouvement pour la ou les variables du système à contrôler servant de référence pour les asservissements (commande indirecte); (2) la définition d'une précommande transformant la loi de mouvement en un signal de référence pour l'entrée du système physique (commande directe). Ces deux fonctions, correctement gérées, permettent de découpler les problèmes de régulation et de suivi de profil. Dans un premier temps, elles sont traitées spécifiquement pour le cas du mouvement d'un système monoaxe. Ainsi, l'influence de différentes classes de lois de mouvement (harmoniques, polynomiales, polynomiales par morceaux ou bang-bang) sur les vibrations et la durée du mouvement est formalisée. Une méthodologie d'élaboration d'une précommande adaptée aux souplesses d'un axe est présentée; elle permet de mettre en exergue les contraintes de continuité que doit satisfaire la loi de mouvement. Ensuite, après avoir été validés expérimentalement sur plusieurs démonstrateurs à dynamique élevée, les résultats et méthodologies développés sont étendus aux cas du suivi de profils élémentaires par deux axes cartésiens interpolés. De façon connexe, une part de l'étude est consacrée à la compréhension pragmatique de la structure de commande classiquement utilisée dans l'industrie, ainsi qu'au rôle et influence des principaux paramètres de réglage.

MOTS-CLES : génération de commande, comportement vibratoire, vibration résiduelle, loi de mouvement, précommande, anticipation, suivi de profil, commande industrielle, Graphe Informationnel Causal.

TOWARD THE INTEGRATION OF VIBRATORY PHENOMENA IN THE COMMAND GENERATION OF HIGH-DYNAMICS MACHINE-TOOLS

ABSTRACT: The increasing demands in terms of productivity lead the high-dynamics systems to the maximum of their technological and structural capacities, invalidating the classical assumption of a rigid body dynamics. Consequently, the system control cannot neglect the influence of the vibratory phenomena on the accuracy of the contour tracking, but it has to modulate the command efforts in order to realize the adequacy between the intrinsic system characteristics and the speed and accuracy criteria. This study aims at improving the dynamic behavior of these machines by a direct action on the command generation. The command generation is divided into two main functions: (1) the elaboration of a movement law for the system states to control, which is used as reference for controls (indirect control); (2) the definition of a prefilter transforming the movement law into a reference signal for the input of the physical system (direct control). If correctly managed, these two functions make it possible to dissociate the regulation and the contour tracking problems. Initially, they are specifically studied in the case of one axis movement. Thus, the influence of various movement laws (harmonic, polynomial, piecewise polynomial or multi-switch bang-bang law) on the vibrations and on the movement time is formalized. A design methodology for the prefilter adapted to the flexibilities of an axis is presented; it puts forward the required degree of continuity, which the law of movement must satisfy. Then, after experimental validations on several high-dynamics test-setups, the results and methodologies are adapted to the contour-tracking problem for two Cartesian axes. A part of the study is devoted to the pragmatic comprehension of the control structure, which is classically used in industry.

KEYWORDS: command generation, vibratory behavior, residual vibration, movement law, prefilter, feedforward, contour tracking, industrial control, Causal Ordering Graph.

C'est que toute œuvre scientifique "achevée" n'a d'autre sens que celui de faire naître de nouvelles "questions" : elle demande donc à être dépassée et à vieillir.

[Max Weber - "Le savant et le politique"]

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein de l'Équipe de Recherche Technologique CEMODYNE (ERT Int.1024) du Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique de Puissance de Lille (L2EP) en cotutelle avec le Centre Techniques des Industries Mécaniques de Senlis (convention CIFRE – Action CETIM 953).

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Pascal Ray pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, ainsi que Monsieur le Professeur Didier Dumur pour sa participation au jury. Je remercie Messieurs les Professeurs Daniel Brun-Picard et Jan Swevers pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire. Leurs remarques ont permis une meilleure analyse du travail réalisé. J'adresse mes profonds remerciements à Messieurs Michel Aubourg, ingénieur automaticien au CETIM de Senlis (encadrant industriel), Serge Bloch, ingénieur SCHNEIDER-NUM (correspondant industriel) et Claude Fioroni (président de la commission machines-outils et productique du CETIM) pour avoir accepté de participer au jury en tant qu'invité.

Je remercie mes encadrants industriels du CETIM de Senlis, Michel Aubourg et Michel Octrue pour m'avoir permis de réaliser cette étude. Je remercie également tous les industriels du groupe de travail et de la commission "machines-outils et productique" du CETIM, dont les remarques pragmatiques m'ont permis de conserver le sens du concret.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Jean-Paul Hautier, Professeur et directeur de la recherche ENSAM, pour son appui scientifique, mais aussi moral; la bonne humeur dont il a toujours fait preuve est un élément de motivation non négligeable. Je remercie mon co-directeur de thèse, Pierre-Jean Barre, Maître de conférences HDR et directeur du centre ENSAM de Lille, pour son implication totale dans mon travail. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre sa totale disponibilité, son suivi permanent et ses critiques fondées qui m'ont permis d'avancer dans ma thèse, il a su me donner la confiance nécessaire à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier, de façon moins formelle, tous ceux qui m'ont soutenu et aidée. Tout d'abord, je remercie les doctorants de l'Équipe de Recherche Technologique CEMODYNE, Ghislain Remy, Frédéric Colas, Olivier Ruelle et le petit nouveau Julien Gomand qui forment une équipe soudée et dans laquelle il fait bon vivre. J'espère que mes frasques "d'ancien" en termes de décibels (et oui j'avais le caisson de basses) et mon humour auront participé à créer cette bonne ambiance et surtout j'espère qu'ils sauront la faire perdurer pour les nouveaux arrivants. Je remercie également Fabrice Locment et Vincent Rogez (Resp. doctorant et jeune docteur au L2EP) pour leur amitié indéfectible, ainsi que Dja Zeng pour sa sérénité et ses proverbes asiatiques sur le loisir du poisson.

Je ne peux évidemment que remercier les membres de l'ENSAM avec qui j'ai partagé ces trois années (en fait cinq en comptant le projet de fin d'étude et le DEA). Tout d'abord, Bernard Detand pour sa disponibilité et ses nombreux coups de main. Je remercie Dominique Loriol, ingénieur informaticien, pour son aide lors de l'implantation numérique des stratégies de commande et aussi pour avoir supporté mes remarques de néophyte en informatique (je n'ai toujours pas compris ce qu'était ce fameux problème de DNS qui explique tout). Je remercie Luc Bulteau et Marc Suffys pour

leur collaboration, ainsi que Rodolphe Sory, Jacqueline Dufresne et Gérard Saillot pour la bonne humeur dont ils font toujours preuve.

Je remercie également mes amis qui indirectement ont contribué à ce travail (cela doit les surprendre, mais c'est vrai).

Enfin, je remercie mes parents pour m'avoir soutenu lors de ces trois années et je leur dédie ce mémoire.

SOMMAIRE

<i>Résumé /Abstract</i>	<i>ii</i>
<i>Remerciements</i>	<i>iv</i>
<i>Sommaire</i>	<i>vi</i>
<i>Liste des figures</i>	<i>ix</i>
<i>Liste des tableaux</i>	<i>xiii</i>
<i>Principales notations</i>	<i>xiv</i>
<i>Introduction générale</i>	<i>1</i>
<i>Chapitre I Introduction à la génération de commande pour une machine-outil à dynamique élevée</i>	<i>5</i>
I.1 Problématique de la génération de commande pour un système de positionnement	5
I.2 La génération de commande : Précommande et loi de mouvement.....	7
I.2.1 Structure générique d'une commande d'axe destinée au suivi de profil.....	7
I.2.2 Commande d'un système multiaxes	9
I.3 Éléments de complication de la commande d'une machine-outil	11
I.3.1 Commentaires sur les phénomènes physiques limitant les performances	11
I.3.1.1 A propos du processus de coupe.....	11
I.3.1.2 Phénomènes caractéristiques du mouvement d'un axe.....	13
I.3.2 Dynamique élevée et vibrations	16
I.3.2.1 Modélisation des phénomènes vibratoires.....	18
I.3.2.2 Modèles génériques représentatifs d'une souplesse dominante.....	18
I.4 Principales contributions de cette thèse	20
I.4.1 Historique de la génération de commande	20
I.4.2 Notes sur la forme de la loi de mouvement.....	21
I.4.3 Contributions du sujet et hypothèses de travail.....	22
<i>Chapitre II Influence de la loi de mouvement sur la dynamique vibratoire d'un axe</i>	<i>24</i>
II.1 Introduction.....	25
II.1.1 Classification des lois de mouvement.....	25
II.1.2 Outils d'analyse de la loi de mouvement.....	26
II.1.2.1 Modèle d'erreur vibratoire	26
II.1.2.2 Graphe de vibration	28
II.2 Lois de mouvement douces.....	30
II.2.1 Fonctions trigonométriques.....	30
II.2.2 Fonctions polynomiales	33
II.2.2.1 Minimisation d'une dérivée de la loi de mouvement	33
II.2.2.2 Lois à accélération, jerk et snap minimum.....	34
II.2.2.3 Notes sur l'annulation des vibrations résiduelles.....	37
II.3 Lois de mouvement bang-bang.....	37

II.3.1 Définition d'une loi en temps optimal	38
II.3.1.1 Fondamentaux.....	38
II.3.1.2 Application à l'obtention de loi à jerk et snap limité.....	39
II.3.2 Propriétés des lois bang-bang par l'analyse du lieu des pôles et zéros	44
II.4 Étude comparative des performances des différentes lois de mouvement.....	48
II.4.1 Indices de performance théoriques.....	48
II.4.2 Vérifications expérimentales de l'influence des lois de mouvement.....	49
II.4.2.1 Réglage des lois de mouvement.....	50
II.4.2.2 Résultats expérimentaux.....	50
II.4.3 Bilan de l'investigation sur l'influence de la loi de mouvement	54
Chapitre III Étude détaillée de l'influence d'une loi de mouvement à jerk limité sur les performances d'un axe asservi	55
III.1 Étude de la loi à jerk limité associée aux principaux paramètres de commande actuels	55
III.1.1 Modèle d'erreur dynamique intégrant les paramètres dominants de l'asservissement classique.....	55
III.1.2 Formalisation de l'erreur dynamique lors des différentes phases du mouvement.....	57
III.2 Cas d'un système non anticipé : optimisation du compromis entre durée du mouvement et réduction des vibrations	60
III.3 Cas d'un système comportant plusieurs modes sensibles.....	62
III.4 Bilan pratique.....	64
Chapitre IV Méthodologie d'élaboration d'une précommande et de la loi de mouvement associée pour un axe	66
IV.1 Démarche de synthèse d'une commande adaptée au suivi de trajectoire	66
IV.1.1 Fondamentaux de l'inversion de modèle	66
IV.1.2 Élaboration de la précommande par le graphe de causalité.....	69
IV.1.3 Couplage avec l'inversion indirecte [Barre - 2005]	71
IV.2 Génération de commande pour un axe soumis à un mode souple dominant	73
IV.2.1 Élaboration de la précommande [Béarée – 2005(1)].....	73
IV.2.2 Remarque sur la forme de la précommande	75
IV.2.3 Lien entre la précommande et la loi de mouvement.....	75
IV.2.4 Sensibilité de la précommande aux variations paramétriques et apport d'une loi de mouvement adoucie	77
IV.2.5 Validations expérimentales	79
Chapitre V Généralisation au suivi de profils interpolés sur deux axes.....	83
V.1 Problématique du suivi de profil par deux axes interpolés	83
V.2 Définition des références d'axe.....	85
V.2.1 Profil linéaire.....	85
V.2.2 Profil non linéaire	87
V.2.3 Discontinuités de profil.....	89
V.3 Adaptation de la méthodologie de précommande au suivi de trajectoire sur deux axes.....	90
V.3.1 De la dynamique à la cinématique	90
V.3.2 Éléments de comparaison pour les profils élémentaires	91
V.3.3 Synthèse.....	93
Chapitre VI Influence des paramètres d'asservissement classiques en suivi de profils élémentaires.....	95
VI.1 Réalisation d'un segment linéaire	96
VI.2 Réalisation d'un profil circulaire	98
VI.3 Passage des difficultés de profil.....	103

VI.4	Bilan pratique.....	105
Chapitre VII Conclusions générales et principales perspectives.....		107
VII.1	Synthèse des travaux réalisés.....	107
VII.2	Perspectives.....	108
Glossaire		110
Références bibliographiques.....		112
Annexe 1 – Modèles d'axe souple et modèles de commande d'un axe industriel.....		117
A1.1	Modèles génériques de souplesse prépondérante.....	117
A1.2	Intégration dans la structure de commande industrielle.....	118
A1.3	Déclinaison de modèles de commande d'axe	120
A1.4	Définition de l'erreur dynamique	120
Annexe 2 – Algorithmes de définition des lois bang-bang (fonctions Matlab).....		122
A2.1	Loi à jerk limité.....	122
A2.2	Loi à snap limité.....	123
Annexe 3 – Bancs d'essais		125

LISTE DES FIGURES

Figure 0.1 – Schéma générique d'un système de commande d'axe.....	2
Figure I.1 – Schéma de principe d'une régulation par retour de mesure.....	7
Figure I.2 – Schéma de principe d'une régulation par retour de mesure et précommande.	8
Figure I.3 – Schéma de principe d'une commande découplant le suivi de trajectoire et le rejet de perturbation.....	8
Figure I.4 – Diagramme fonctionnel d'un centre d'usinage conventionnel trois axes.....	9
Figure I.5 – Structure générique de la commande d'un système multiaxes destiné au suivi de profil..	11
Figure I.6 - Exemple de lobes limites de stabilité [ENGIN - 2001].....	12
Figure I.7 - Chaîne cinématique : (a) moteur tournant, (b) moteur linéaire.	14
Figure I.8 - Relation entre la vitesse de glissement et la force de frottement pour deux surfaces métalliques lubrifiées en contact [ERKORKMAZ - 2001].....	14
Figure I.9 - Pics d'inversion sur un relevé ball-bar lors de la réalisation d'un profil circulaire [LIO - 2002].....	15
Figure I.10 – Exemples de modes vibratoires dominant la réponse d'un robot cartésien : trois premiers modes propres (1 ^{er} suivant l'axe Y, les deux suivants dans la direction x).....	16
Figure I.11 - Exemples de modes vibratoires dominant la réponse d'un prototype de machine à découpe laser.....	17
Figure I.12 - Exemples de conception par modes orthogonaux : Linear MINUMAC (FOREST-LINE) - Fraiseuse 5 axes à moteurs linéaires (avance 60 m/mm, accélération 20 m/s ²).....	18
Figure I.13. – Modèles génériques de souplesses dominantes.....	19
Figure II.1 – Forme générique d'une loi de mouvement : (a) loi douce et (b) loi bang-bang.	25
Figure II.2 – Loi de mouvement classique à accélération limitée (bang-bang d'accélération).	28
Figure II.3 – Graphe de vibration pour la loi à accélération limitée.	30
Figure II.4 – Loi de mouvement en sinus et sinus carré d'accélération.	32
Figure II.5 – Graphes de vibration des lois harmoniques comparées au bang-bang d'accélération. ..	33
Figure II.6. – Lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum.	35
Figure II.7. – Graphes de vibration maximale pour les lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum, comparé au bang-bang d'accélération.	36
Figure II.8 – Définition générique d'une loi de mouvement bang-bang.	37
Figure II.9 – Lois de mouvement en temps minimum à jerk limité : (a) sans contrainte de vitesse et d'accélération, (b) contrainte d'accélération maximale atteinte, (c) contraintes de vitesse et d'accélération maximales atteintes.	41
Figure II.10. – Profil de la loi de mouvement à snap limité en temps optimal.	42
Figure II.11. – Profil de la loi de mouvement à snap limité avec symétrie des maximums de jerk.	43
Figure II.12. – Loi de mouvement à snap limité intégrant toutes les limitations cinématiques.	43
Figure II.13. – Graphes de vibration maximale pour les lois de mouvement à accélération, jerk et snap limités en temps optimal.	44
Figure II.14 – Structure du filtre retardé équivalent au profil bang-bang.	44
Figure II.15 – Lieu des pôles et zéros : (gauche) élément retard pur et (droite) commutation entre deux éléments retardés (le retard est linéarisé par l'approximation de Padé à l'ordre 20).....	45

Figure II.16 – Performances théoriques en termes de réduction de vibration des lois de mouvement étudiées.....	48
Figure II.17 – Indice de durée de mouvement théorique des lois de mouvement étudiées.	49
Figure II.18 - Banc d'essais mono-axe. (Caractéristiques : masses embarquées 260+ (20,6+16,5)kg ; accélération = 20 m.s-2 ; vitesse = 100 m/min).....	50
Figure II.19 – Vibrations résiduelles et erreur de poursuite des lois bang-bang (mouvement de 200 mm).....	51
Figure II.20 – Vibrations résiduelles et erreur de poursuite des lois polynomiales (mouvement de 200 mm).....	51
Figure II.21 – Vibrations résiduelles et erreur de poursuite des lois harmoniques (mouvement de 200 mm).....	52
Figure II.22 – Performances mesurées en termes de réduction de vibrations.	52
Figure II.23 – Performances des lois étudiées en termes de durée de mouvement (pour atteindre 95 % de la consigne).	53
Figure II.24 – Performances des lois étudiées en termes de durée de mouvement en tenant compte d'un critère vibratoire (relaxation dans un tube d'erreur de 0,5 mm).	53
Figure III.1 - Structure de commande simplifiée d'un axe industriel.	56
Figure III.2 - Évolution des amplitudes vibratoires maximales [%] au niveau du palier d'accélération en fonction de T_j , de k_v et de k_{f_v}	58
Figure III.3 - Mesures expérimentales de l'amplitude vibratoire maximale en fin de mouvement en fonction de T_j , de k_v et de k_{f_v} , comparées à l'évolution théorique [BEAREE – 2004(1)].....	59
Figure III.4 - Allure des courbes Iso temps de cycle et Iso amplitude en fonction du gain de position et du niveau de jerk (Application au robot cartésien).....	61
Figure III.5 - Oscillations en position suivant X du robot cartésien : (a) influence combinée du jerk et du gain de position sur le temps de réponse de l'axe ; (b) influence du jerk sur les oscillations de la charge [BEAREE – 2005(3)].	61
Figure III.6 - Graphe d'influence combinée du jerk et du gain de position sur le niveau d'oscillation de la charge et sur le temps de réponse de l'axe comparé au réglage industriel originel (100%).....	62
Figure III.7 - Banc d'essais mono-axe. (Caractéristiques : masses embarquées 260+20,6+16,5kg ; accélération = 20 m.s-2 ; vitesse = 100 m/min).....	62
Figure III.8 - Réponse fréquentielle en accélération de la charge pour une excitation au niveau de l'actionneur.	63
Figure III.9 - Mesure expérimentale de l'amplitude vibratoire maximale en fin de mouvement comparée à la théorie.....	64
Figure III.10 – Évolution théorique de la durée T_j annulant les oscillations résiduelles en fonction de la participation du deuxième mode et de la distance entre les deux modes.	64
Figure IV.1. – Exemple d'un système à non minimum de phase (poutre déformable) et modèles à constantes localisées correspondant selon le degré d'influence des zéros instables.	68
Figure IV.2. – Graphe Informationnel Causal (GIC).	69
Figure IV.3. – Schéma GIC de l'évolution de la variable de sortie du processus (représentation naturelle).	70
Figure IV.4. – Schéma GIC du principe d'élaboration de la précommande.	70
Figure IV.5. – Principe de l'inversion indirecte.....	71
Figure IV.6. – Commande utilisant le couplage des deux principes d'inversion – Commande à modèle de comportement des états (CMRE).	72
Figure IV.7. – Modèle GIC du modèle de souplesse de transmission.....	73

Figure IV.8. – Précommande associée au modèle d'axe soumis à un mode souple.	74
Figure IV.9. – Exemple de loi de commande d'ordre 4 : loi de mouvement x_{c2ref} à snap limité et effort de référence associé F_{ref}	76
Figure IV.10. – Évolution de l'erreur dynamique lors du mouvement résultant d'une variation sur les paramètres du processus (Application au cas du banc mono-axe pour un déplacement de 400 mm)..	77
Figure IV.11 – Évolution de l'erreur dynamique en fonction du temps pour un biais de 20% sur les paramètres modaux : mise en évidence de la dépendance de l'erreur aux caractéristiques de la loi de mouvement.	78
Figure IV.12 – Évolution de l'erreur dynamique en fonction du temps pour un biais de 20% sur les paramètres modaux : mise en évidence de la dépendance de l'erreur à la forme de la loi de mouvement.	79
Figure IV.13 – Position de la charge et erreur dynamique en fonction de la précommande pour une loi de mouvement à snap limité (Banc linéaire ; mouvement de 400 mm).	80
Figure IV.14 – Position de la charge et erreur dynamique en fonction de la précommande pour une loi de mouvement à minimum de jerk (Banc linéaire ; mouvement de 400 mm).	81
Figure V.1 – Modèle à constantes localisées d'une machine multiaxe à modes orthogonaux [Desangle - 2002] (Linear MINUMAC- FOREST-LINE : Fraiseuse 5 axes à moteurs linéaires).	84
Figure V.2 – Paramétrage du suivi de profil dans le repère de Frenet.	85
Figure V.3 – Comparaison entre la dynamique curviligne de référence et la loi de mouvement des axes pour un profil linéaire (loi à jerk limité).	86
Figure V.4 – Comparaison entre la dynamique curviligne de référence et la loi de mouvement des axes pour un profil circulaire : limitation curviligne = minimum des capacités des axes (loi à jerk limité, durée théorique 0,5739 s).	88
Figure V.5 – Comparaison entre la dynamique curviligne de référence et la loi de mouvement des axes pour un profil circulaire : limitation curviligne adaptée à la dynamique centripète (loi à jerk limité, durée théorique 0,7529 s).	89
Figure V.6 – Discontinuités de profil en tangence et en courbure.	89
Figure V.7 – Erreurs de rayon sur un cercle : (a) précommande comparée aux asservissements classiques, (b) CMRE comparée aux asservissements classiques (Conditions : $k_v = 3$ m/min/mm, avance programmée $V_m = 30000$ mm/min, Rayon = 100 mm).	92
Figure V.8 – Passage d'un angle à vitesse constante : comparaison de l'accélération de la charge et de l'erreur de profil pour la structure classique et la CMRE (Conditions : $k_v = 3$ m/min/mm, avance programmée $V = 60000$ mm/min, $\alpha = 5^\circ$).	93
Figure VI.1 – Erreur de profil sur un segment linéaire.	96
Figure VI.2 – Inclinaison de l'ellipse résultant d'une trajectoire circulaire pour deux axes de dynamiques différentes.	99
Figure VI.3 – Erreur de rayon sur un cercle parcouru à vitesse d'avance constante.	100
Figure VI.4 – Évolution de l'erreur de rayon relative en fonction de $k_f v$ et de la pulsation dominante adimensionnée ω_n / k_v	102
Figure VI.5 – Erreurs de rayon expérimentales comparées à la théorie (Conditions : $k_v = 8$ m/min/mm, avance programmée $V = 30\ 000$ mm/min, Rayon = 150 mm).	103
Figure VI.6 – Passage d'une discontinuité en tangence à vitesse d'avance constante.	103
Figure VI.7 – Validation expérimentale du passage d'une discontinuité en tangence à vitesse d'avance constante (Conditions : $k_v = 3$ m/min/mm, avance $V = 1000$ mm/min, $\alpha = 5^\circ$).	105
Figure A1.1. – Modèles génériques de souplesses dominantes (mode structurel et mode de transmission).	117

<i>Figure A1.2. – Structure de commande générique d'un axe industriel.</i>	119
<i>Figure A3.1 - Banc d'essais monoaxe. (Caractéristiques : système 3 masses 2 ressorts embarquées 260+20,6+16,5kg).</i>	125
<i>Figure A3.2 - Aperçu des démonstrateurs : Robot cartésien 3 axes (gauche) ; Prototype de machine-outil à dynamique élevée (droite).</i>	125

LISTE DES TABLEAUX

<i>Tableau 1 – Historique de la génération de commande en machine-outil.....</i>	<i>21</i>
<i>Tableau 2 – Amplitudes de vibration pour les lois en sinus et sinus carré d'accélération ($\tau = T_f \omega_n / 2\pi$).....</i>	<i>32</i>
<i>Tableau 3 – Performances de la précommande soumise à un biais de 20 % sur la raideur modal en fonction du type de loi de mouvement associée (déplacement de 400 mm).....</i>	<i>79</i>
<i>Tableau 4 – Erreur de profil sur une droite inclinée d'un angle α dans le plan machine.....</i>	<i>97</i>
<i>Tableau 5 – Erreur de rayon sur un cercle parcouru à vitesse constante (capteur de position sur la charge).</i>	<i>101</i>
<i>Tableau 6 - Caractéristiques principales des démonstrateurs.</i>	<i>126</i>

PRINCIPALES NOTATIONS

Quantités

A, A_m	Accélération, accélération maximale [m/s ²]
V, V_m	Vitesse, vitesse maximale [m/s]
J, J_m	Jerk, jerk maximum [m/s ³]
S, S_m	Snap, snap maximum [m/s ⁴]
j	Nombre complexe ($j = \sqrt{-1}$)
k_i	Coefficient de l'action intégrale de vitesse (PI parallèle) [s ⁻²]
k_p	Gain proportionnel de vitesse [s ⁻¹]
k_v	Gain proportionnel de position [s ⁻¹]
kf_v	Gain d'anticipation en vitesse [%]
kf_a	Gain d'anticipation en accélération [%]
ε	Erreur dynamique en position [m]
ε_c	Erreur de profil [m]
ω	Vitesse angulaire [rad/s]
ω_n, T_n	Pulsation [rad/s] et période naturelle [s] d'un mode vibratoire

Abréviations et acronymes

$\max_{\Delta}(\bullet)$	Maximum de \bullet sur l'espace Δ
\dot{x}, \ddot{x}	Dérivée première et seconde par rapport au temps
CN	Commande Numérique
CMC	Commande à Modèle de Comportement
CMRE	Commande à Modèle de Référence des États
GIC	Grphe Informationnel Causal
LTI	Linéaire en Temps Invariant
PI	Proportionnel Intégral

INTRODUCTION GENERALE

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans la problématique actuelle posée par la commande des systèmes de positionnement à grande dynamique. Les nouvelles machines de production sont conçues pour allier la flexibilité et la diversité d'usinage à de grandes vitesses de déplacements d'axes. Ceci implique une architecture dédiée à la grande vitesse, capable d'assurer la précision recherchée sur des trajectoires de plus en plus complexes. Dès lors, la conception de ce type de machine vise l'augmentation des dynamiques d'axes, ce qui passe globalement par une réduction des inerties et donc une plus grande sensibilité du système aux excitations diverses. En effet, la réduction des masses a pour corollaire l'expression des flexibilités dans le comportement global du système. A l'image d'un système du type masse-ressort, les flexibilités induisent un comportement oscillatoire de la structure. Par conséquent, à travers le qualificatif de "machine à dynamique élevée", on entend les systèmes de positionnement de dernière génération, pour lesquels la demande en termes de performances dynamiques est telle que leurs souplesses structurelles deviennent un paramètre de complication sensible pour la commande.

Si les éléments mécaniques subissent des déformations durant le mouvement, il peut s'avérer difficile de suivre la trajectoire désirée ou encore d'éviter un obstacle. De plus, une fois que le système a atteint une position de repos, les vibrations résiduelles dégraderont la précision du positionnement et causeront un retard dans la réalisation de l'opération ; cette constatation peut conduire à l'effet inverse de celui escompté en termes d'efficacité globale. Il s'ensuit que dans le domaine de la machine à dynamique élevée, la commande du système ne peut plus sous-estimer l'influence des phénomènes vibratoires sur la qualité du suivi de profil [DESANGLE – 2002 ; LEE – 2003 ; MATSUBARA – 2002].

Étant donné l'importance de réduire ou d'éliminer les flexibilités, il n'est pas surprenant qu'un grand nombre de recherches et de développements se soient focalisés sur le problème. Une des pistes de solutions aux problèmes de flexibilité consiste à rigidifier la structure mécanique et/ou à augmenter l'amortissement du système par une conception mieux pensée ou par l'utilisation de matériaux composites adaptés [LEE – 2004 ; MARSH – 1996]. Il est également envisageable d'utiliser des capteurs ou des actionneurs supplémentaires tels que les cellules piézoélectriques afin de mesurer directement le phénomène et de pouvoir agir sur ce dernier [LIN – 2005 ; E-AZULAY – 2005]. Mais la piste privilégiée, parce que la moins coûteuse, consiste à élaborer une structure de commande faisant appel à des algorithmes sophistiqués, utilisant des références déterminées spécifiquement pour d'une part, convenir à la physique du système et, d'autre part, atteindre les performances escomptées

[BRAEMBUSSCHE – 1998 ; RENTON - 2000]. Toutefois, un algorithme, aussi sophistiqué soit-il, n'est une réponse efficace au problème que si l'ensemble des paramètres du système est pris en compte. Les réflexions menées à ce sujet par des chercheurs du laboratoire L2EP et des acteurs de la profession ont suscité l'idée de créer un groupe de travail spécifiquement consacré à ces aspects ; c'est ainsi qu'au cours de l'année 2001 un dossier de demande de reconnaissance d'une Équipe de Recherche Technologique (ERT) a été déposé avec comme partenaires les acteurs français de la machine-outil (utilisateurs, constructeurs, constructeurs de constituants et représentants de la profession) regroupés au sein de la commission « machine-outil et production » du Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM). Ce partenariat a naturellement conduit à des échanges avec plusieurs acteurs de la profession au sujet de problématiques diversifiées par leurs aspects de mise en œuvre, mais toujours axées sur le réglage des chaînes de commande. La reconnaissance de l'Équipe a donc été obtenue pour la période 2002-2005 ; les travaux menés dans cette thèse visent effectivement à lever les verrous technologiques posés par la nécessité de cadences élevées avec une précision maintenue de positionnement sur une échelle la plus large. Le partenariat, sous-tendu par la mise en place de cette ERT (baptisée CEMODYNE, acronyme de Commande et Entraînements des Machines Outils à DYNamique Elevée) a été particulièrement constructif, notamment en ce qui concerne l'expertise de l'existant et le retour d'expérience. C'est ainsi que nous nous sommes rapidement aperçus qu'une algorithmique de commande ne pouvait se construire sans une connaissance experte du système à contrôler. Les travaux déjà développés au laboratoire sur la modélisation causale des systèmes avaient mis en évidence ce problème. C'est par la conjonction des approches, académiques et industrielles, que nous avons pu d'une part déceler les limites de pratiques couramment répandues et, d'autre part, proposer des solutions offrant davantage de rationalité, grâce à une meilleure prise en compte de la physique intrinsèque des processus à commander.

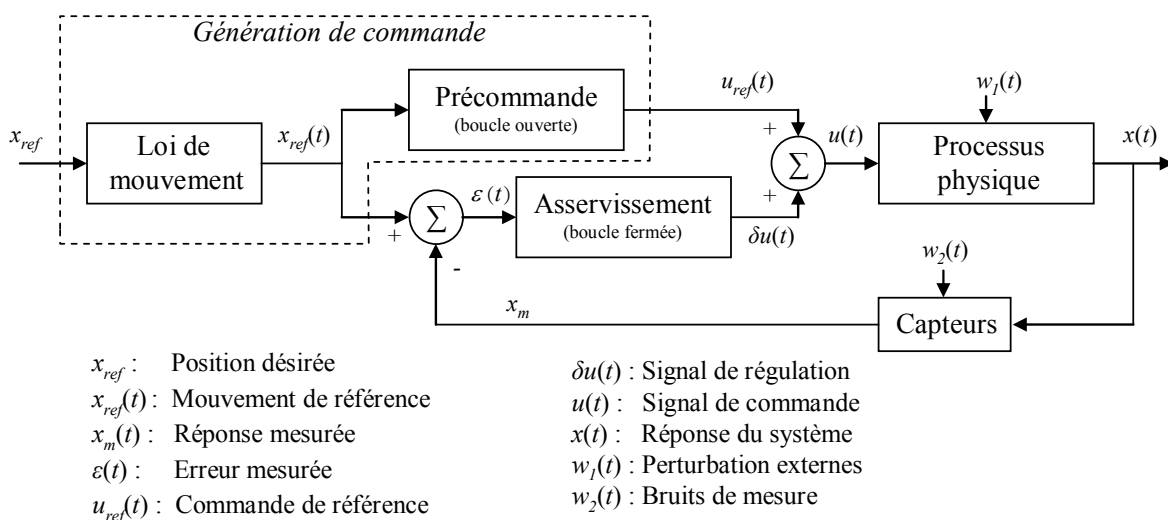


Figure 0.1 – Schéma générique d'un système de commande d'axe.

La commande d'un système à dynamique élevée doit réaliser des fonctions telles que le positionnement, le suivi de profil, la suppression des vibrations résiduelles et le rejet de perturbation. La figure 0.1 présente le schéma bloc d'un système de commande générique. La consigne de position désirée x_{ref} (position à atteindre) est introduite dans le générateur de commande. La génération de commande transforme la consigne de position en un mouvement de référence $x_{ref}(t)$ par l'utilisation d'une loi de mouvement également appelée loi horaire. Le générateur de commande élabore également la commande de référence $u_{ref}(t)$ qui est directement injectée en entrée du processus (aspect

précommande ou commande en boucle ouverte). Le mouvement de référence $x_{ref}(t)$ est comparé à l'état mesuré x_m sur le processus. Cette comparaison produit un signal d'erreur $\varepsilon(t)$ que les asservissements utilisent pour générer le signal de commande régulé $\delta u(t)$ (aspect commande en boucle fermée). Le signal d'entrée $u(t)$ du processus physique est alors constitué de la somme des deux signaux de commande. Ce signal est traité pour générer la tension d'alimentation des actionneurs du processus physique.

Les travaux développés dans cette thèse visent une contribution directe au domaine de la génération de commande destinée aux systèmes à dynamique élevée. La génération de commande s'articule autour de deux fonctions principales : **l'élaboration de la loi de mouvement pour la ou les variables du système à contrôler, la définition d'une précommande fournissant un signal de référence pour l'entrée du système physique**. Dans un premier temps, ces deux aspects sont traités spécifiquement pour le cas du mouvement d'un axe physique. Les résultats et méthodologies développées sont ensuite adaptés aux cas du suivi de profil par deux axes interpolés. On notera que dans le cadre d'une recherche appliquée menée au sein d'une ERT, il est également indispensable de comprendre, donc de formaliser les performances des systèmes de commande actuels confrontés aux phénomènes vibratoires, ne serait ce que par souci de comparaison. A ce niveau, il est clair que les échanges avec nos partenaires ont été des plus précieux et il convient de préciser que cette formalisation de l'existant revêt de plus un intérêt pratique immédiat pour l'amélioration du réglage des machines de production. Nous avons ainsi mis en évidence que des paramètres de réglage avaient plus ou moins d'importance selon le domaine d'applications. Subséquemment, deux chapitres sont spécifiquement dédiés à l'étude des performances de structures de commande classiquement utilisées dans l'industrie, mais dans l'ensemble de la présentation nous maintenons en permanence le double accrochage à l'expérience et à l'interprétation physique des phénomènes, démarche garante de la dimension à la fois scientifique et technologique de nos recherches.

Ce mémoire est alors organisé en sept chapitres :

Le premier chapitre détaille la problématique de la génération de commande pour un système à dynamique élevée et souligne la terminologie qui est utilisée tout au long de ce mémoire. Dans ce chapitre est détaillée la philosophie retenue quant à la structure "idéale" de commande (figure 0.1) permettant un découplage parfait entre les aspects de suivi de profil et de rejet de perturbation. Les principaux phénomènes physiques limitant les performances du système de commande y sont également présentés. L'accent est mis sur l'influence forte des souplesses du système dans le cadre de la dynamique élevée. Enfin, une dernière partie se propose de synthétiser les objectifs de l'étude ainsi que les hypothèses de travail.

Le chapitre II illustre l'impact de la forme de la loi de mouvement (commande en boucle ouverte) sur les performances d'un axe de machine. Ces performances sont exprimées en termes de durée de mouvement, de déformations ou de vibrations durant le mouvement et de vibrations résiduelles lors des phases d'arrêt. Afin de démontrer l'aspect général de cette étude, trois démonstrateurs dotés d'architectures et de performances différentes, sont employés comme support pour la validation expérimentale (cf. annexe A.3 : Bancs d'essais). Le chapitre III se propose d'étendre l'étude d'influence de la loi mouvement à jerk limité au cas d'un axe disposant d'une structure d'asservissement classiquement utilisée dans l'industrie (anticipations et boucles en cascade). Le choix de la loi à jerk limité est dicté par sa récente disponibilité dans la plupart des systèmes de commande modernes.

Le chapitre IV développe une méthodologie de génération de commande basée sur l'inversion du modèle du processus (aspect précommande) et utilisant le formalisme du Graphe Informationnel

Causal développé au laboratoire. Cette méthodologie impose certaines caractéristiques à la loi de mouvement qui lui est associée. La forme de cette loi de mouvement ainsi que la sensibilité de cette dernière aux variations paramétriques du système sont discutées dans ce chapitre. Cette philosophie de génération de commande est validée expérimentalement sur un banc monoaxe équipé d'un moteur linéaire synchrone.

Le chapitre V se propose d'étendre l'étude au cas des mouvements interpolés sur deux axes de machine. Après avoir présenté la problématique spécifique au suivi de profil, la méthodologie de précommande est généralisée au cas du multiaxe. Nous montrons que l'élaboration d'une précommande adaptée au système permet de légitimer la technique classique de planification du mouvement basée sur un modèle cinématique du système (capacité des axes). Dans le chapitre III l'étude de la loi de mouvement à jerk limité, présentée dans le chapitre II, est étendue au cas d'un axe asservi par une structure de commande classique. Suivant la même philosophie, nous formalisons dans le chapitre VI les performances actuelles des systèmes de commande en suivi de profils élémentaires.

Enfin, le dernier chapitre fait la synthèse des principaux résultats et détaille les perspectives concernant de futures investigations.



Chapitre I

INTRODUCTION A LA GENERATION DE COMMANDE POUR UNE MACHINE-OUTIL A DYNAMIQUE ELEVEE

Faire en sorte qu'un processus suive un profil donné avec un minimum d'erreurs est un problème typique de la commande des systèmes de positionnement. Selon le type d'opération à réaliser, les exigences sur le suivi de profil seront différentes. Dans le cas des mouvements visant à déplacer une charge d'une position de repos à une autre, appelés mouvements de type point-à-point, l'erreur de suivi de profil se doit d'être minimale essentiellement à l'arrivée. Ces mouvements concernent essentiellement les manipulateurs destinés à des opérations d'assemblage et/ou de déplacements d'éléments que l'on englobe sous le qualificatif d'opérations de type "pick-and-place". Certaines opérations d'usinage telles que celles réalisées dans le domaine automobile sont également associées à cette catégorie de mouvement. Pour les opérations de contournage telles que celles réalisées par les machines d'usinage, la qualité du suivi de profil est un critère à privilégier tout au long du mouvement. Mais quelle démarche suivre face à un processus auquel on souhaite imposer un comportement donné ?

I.1 Problématique de la génération de commande pour un système de positionnement

Le problème central de la commande d'une machine-outil consiste à planifier et à coordonner le mouvement de ses axes de façon à ce que la *trajectoire du système*¹ se superpose au *profil théorique* donné, en respectant des *critères de performances*. Classiquement, on représentera l'équation générale de la commande d'une machine-outil sous la forme d'un compromis entre les critères de productivité, précision et état de surface. On peut utiliser cette équation pour représenter les performances globales d'une machine-outil

$$Performances = f(\textit{productivité, précision, état de surface})$$

Supposons, sans perte de généralités, que le profil théorique soit parfaitement décrit par une courbe paramétrée $P(v)$, où v est classiquement un paramètre abstrait, sans lien temporel ou géométrique avec la courbe. La formulation paramétrique de la courbe offre une caractérisation dynamique qui suggère un mouvement induit par l'accroissement continu du paramètre de la courbe. Toutefois, un mouvement se caractérise par des instants dans le temps où un corps se trouve dans un

¹ Les termes italiques gras sont définis dans le glossaire.

certain état (position, vitesse, accélération, ...) et non par un ensemble continu de points géométriques. Un mouvement représente effectivement la trajectoire d'un corps qui peut se définir mathématiquement par un lieu géométrique dans l'espace de Minkowski, avec une dimension temporelle et une ou plusieurs dimensions spatiales [FAROUKI - 1999]. Le problème initial se traduit donc essentiellement par la recherche d'une fonction de temporalisation des variables spatiales du système "machine-outil" de façon à ce que la trace laissée par l'effecteur (outil) sur la pièce corresponde au profil théorique.

Considérons le cas d'un système constitué de m axes cartésiens dont la dynamique peut être décrite par l'équation explicite (linéaire ou non) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

avec x le vecteur des états et u le vecteur des entrées (consignes, ou précommandes, des m actionneurs d'axe). Une trajectoire du système peut alors se définir de la manière suivante :

Définition 1 (trajectoire du système) : On appelle trajectoire du système (1) toute fonction $t \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfait les équations (1) [KISS - 2001].

Une trajectoire du système physique est une fonction de temporalisation des états du système qui vérifie les équations de ce dernier. Nous remarquerons dans cette définition une notion très intuitive et très importante : "*un système ne pourra produire un mouvement qui enfreint les lois physiques le caractérisant*". Le problème de la commande d'une machine-outil, et plus généralement d'une machine de production, consiste alors à déterminer dans l'ensemble des trajectoires de la machine, une trajectoire conduisant à décrire le profil théorique tout en respectant les critères de performance. En notant que le profil théorique sera traité numériquement par la commande, donc discrétisé en un ensemble de points de passage théoriques, le problème précédent revient à considérer une succession de sous-problèmes du type : trouver une **précommande** $u(t)$ qui amène le système, d'un état donné à un autre, en un temps fini. C'est là toute la problématique de la génération de commande intimement liée à la notion de planification de trajectoire :

Définition 2 (planification de trajectoire) : La planification de trajectoires, consiste à trouver une trajectoire du système $t \mapsto (x(t), u(t))$ partant d'un état x_0 en $t = 0$ et arrivant en $t = T_f$ à l'état final x_f , ces deux états étant fixés par avance [KISS - 2001].

Cette formulation du problème a l'intérêt majeur d'identifier la phase de génération de commande comme étant "le principal levier" dans la problématique de la commande d'une machine-outil. Les critères de performances viennent alors s'ajouter en tant que contraintes pour le problème de planification.

Ainsi exposée, la problématique de commande est entièrement dédiée à une approche de type boucle ouverte ; il faut toutefois conserver le sens du réel. En effet, nous n'avons pas discuté de l'inévitable imperfection du modèle physique de la machine. Le modèle est approximatif car notre connaissance des phénomènes physiques n'est pas parfaite, les paramètres sont définis avec une certaine précision et, de plus, seul un modèle relativement simple nous permet de garder une vue physique sur l'influence des paramètres que nous considérons alors. Il convient donc dans tous les cas d'envisager un ajustement de l'entrée u obtenue. La démarche naturelle consiste à corriger la commande de référence par des termes du type $x - x_{ref}$ qui correspondent à un bouclage en temps réel des états du système, en d'autres termes, par une surveillance permanente avec prise de décision continue.

I.2 La génération de commande : Précommande et loi de mouvement

I.2.1 Structure générique d'une commande d'axe destinée au suivi de profil

La régulation classique présentée à la figure I.1 consiste à utiliser la mesure des états x afin de moduler la grandeur de réglage qui sera une fonction de l'écart entre la variable de référence x_{ref} et la mesure. La relation entre la sortie du système, l'entrée de consigne et les perturbations agissant en amont et en aval du processus est donnée par :

$$x(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} x_{ref}(s) + \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} P_1(s) + \frac{1}{1 + C(s)P(s)} P_2(s) \quad (2)$$

De façon évidente, si l'on a $|C(s)| \gg 1$, le suivi de trajectoire est parfait ainsi que le rejet de perturbation. Cette condition se traduit, pour les régulateurs classiquement utilisés dans l'industrie (type PID) par l'utilisation de gains de boucle importants. En pratique, ce réglage est limité pour plusieurs raisons :

- des gains trop élevés déstabilisent le système ;
- les saturations naturelles des systèmes physiques limitent le niveau des commandes mises en œuvre ;
- l'accroissement de la bande passante est limité par la technologie des capteurs utilisés (bruits).

Les performances en poursuite et en régulation se trouvent ainsi couplées et sont toutes deux dépendantes des gains des correcteurs utilisés, ce qui oblige à gérer un compromis difficile entre rapidité, précision et rejet de perturbation [HAUTIER – 1997]. Dans ce cas, la détérioration du suivi de profil résulte principalement d'une demande irréaliste au niveau de la commande de l'actionneur [RENTON - 2000]. En d'autres termes, l'évolution de la variable de commande ne correspond pas à une trajectoire du système physique et n'est donc pas parfaitement réalisable.

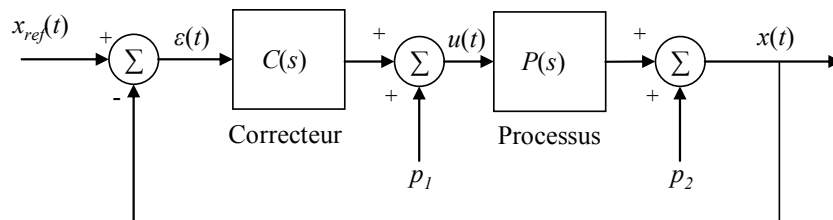


Figure I.1 – Schéma de principe d'une régulation par retour de mesure.

Une approche pour augmenter la vitesse et la précision d'un système de positionnement consiste à « mettre en forme² » l'entrée de réglage u du système afin de tenir compte de sa propre dynamique. Il s'agit idéalement de rechercher la commande conduisant le système à décrire le profil désiré. Cette démarche implique la recherche de la relation liant u à la sortie effective x du système, autrement dit la relation inverse de celle caractérisant la dynamique du système. L'extension naturelle de cette approche consiste à construire un filtre de référence, appelé précommande ou encore préfiltre, destiné à inverser la fonction de transfert du système à contrôler. Cette stratégie vise un suivi de trajectoire parfait par rapport à un profil connu à l'avance (ce qui est le cas des systèmes d'usinage). La figure I.2

² "Command shaping" dans la littérature anglaise.

présente la structure de commande intégrant la précommande notée $Pr(s)$. Cette approche du type boucle ouverte ne peut implicitement rejeter les perturbations agissant sur le processus. Pour cette raison, elle doit être couplée à une commande par retour de mesures telle que celle vue précédemment.

La structure parfois utilisée consiste à intégrer la précommande en amont de l'asservissement du processus. La précommande recherchée correspond dans ce cas à l'inverse du modèle du processus augmenté de son asservissement, c'est-à-dire l'inverse de la fonction :

$$H(s) = C(s)P(s) / (1 + C(s)P(s)) \quad (3)$$

On notera que cette structure suppose obligatoirement une inversion imparfaite, puisque les asservissements par retour de mesures nécessitent une erreur pour générer une commande u . En effet, si $Pr(s)$ inverse $H(s)$ la référence du système bouclée x_{ref}^* serait parfaitement suivie par x et en l'absence de perturbation l'écart ε serait nulle. Dans le cas de la commande multiaxe, ce type de filtrage appelé filtrage après projection ne permet pas d'assurer un suivi de trajectoire théoriquement parfait, mais il contribue à s'en approcher en filtrant la référence des axes de façon à la rendre moins agressive et donc plus "physique" pour le système.

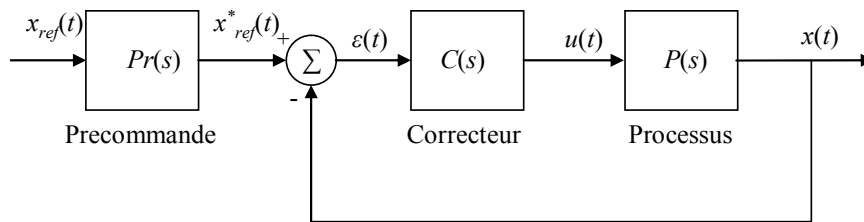


Figure I.2 – Schéma de principe d'une régulation par retour de mesure et précommande.

Une structure plus « pure » dans sa forme consiste à découpler totalement les deux aspects que sont poursuite et régulation. La précommande assure le suivi de trajectoire par une action directe sur la commande du processus pendant que les asservissements travaillent en parallèle sur le rejet de perturbations et viennent ajouter une contribution additionnelle sur la grandeur de réglage u . La figure I.3 présente la structure générique de ce type de commande.

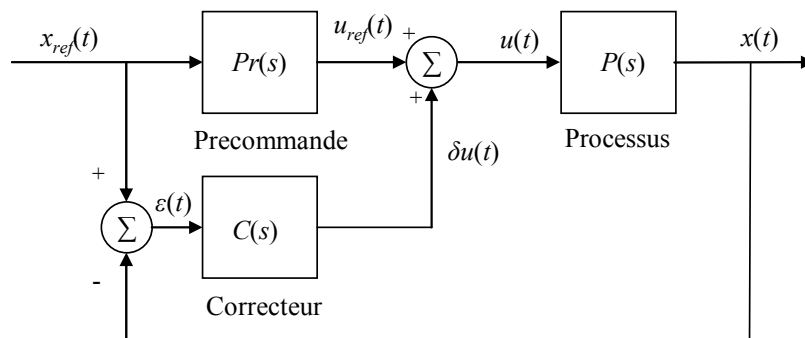


Figure I.3 – Schéma de principe d'une commande découplant le suivi de trajectoire et le rejet de perturbation.

L'intérêt du découplage entre performance en poursuite et régulation réside essentiellement dans la simplification de la démarche de synthèse des différents éléments de la commande. Il est ainsi possible de considérer indépendamment les deux problèmes. Notre étude s'appuiera sur cette dernière structure de commande, ce qui nous permettra de nous focaliser essentiellement sur les problèmes liés au suivi de profil.

I.2.2 Commande d'un système multiaxes

Avant de considérer les spécificités de la commande d'une machine-outil, il convient de rappeler brièvement l'architecture générale d'un tel système. La figure I.4 représente le diagramme d'une machine d'usinage classique équipée de trois axes cartésiens. Ce centre d'usinage est constitué d'une partie mécanique, d'une partie de gestion de l'énergie électrique et d'une unité de commande numérique. La partie mécanique inclut tous les éléments mécaniques des différents axes, l'organe usinant (axe de broche), ainsi que la structure de la machine. Les moteurs d'axes et le moteur de la broche ainsi que leurs éléments de commande rapprochée (amplificateurs, variateurs,...), constituent la partie de puissance électrique. L'unité de commande numérique intègre une centrale de traitement numérique, ainsi que les différents capteurs présents sur la machine. L'opérateur introduit un programme dans la commande. La commande numérique traite ces données et génère des valeurs de consigne pour chacun des états à contrôler. Les signaux numériques sont ensuite convertis en signaux analogiques par la commande numérique, puis envoyés à la partie de gestion de la puissance électrique qui les traite et les amplifie pour atteindre les niveaux de tension requis par les actionneurs. Pendant le mouvement des axes, les capteurs mesurent différents états qui permettent à la commande d'exécuter une correction sur les signaux de consignes afin de maintenir un mouvement en accord avec les valeurs programmées.

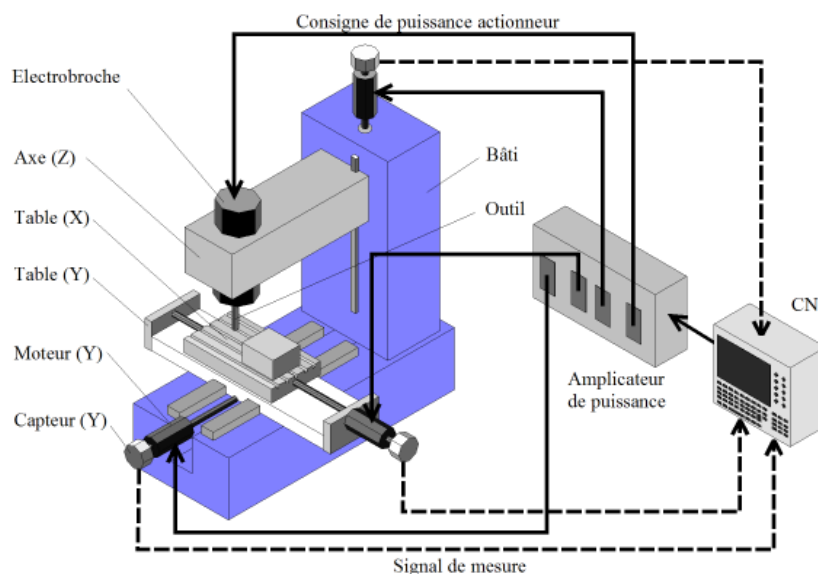


Figure I.4 – Diagramme fonctionnel d'un centre d'usinage conventionnel trois axes.

La commande d'une machine-outil est par conséquent découplée axe par axe. C'est-à-dire que la commande numérique doit traiter le profil théorique afin de générer les états de référence de chacun des axes. Supposons que le profil théorique soit décrit par une courbe paramétrée $P(v)$; le traitement du profil conduisant à la définition des signaux de consignes pour chaque axe peut se subdiviser comme suit :

- **L'interpolation du profil théorique** : cette opération consiste à définir la trajectoire $P(t)$ du point à contrôler (l'outil pour une machine-outil) sur le profil théorique $P(v)$. L'expression du mouvement nécessite l'élaboration d'une loi liant le paramètre de la courbe au temps, cette loi est appelée loi horaire ou encore **loi de mouvement**. Classiquement, on ne cherchera pas une loi horaire qui au temps associe directement $v(t)$ puisque le paramètre v n'a généralement pas de signification géométrique évidente. On préférera définir une loi horaire liant la longueur de la courbe au temps, c'est-à-dire une relation qui au temps associe l'abscisse curviligne $s(t)$ d'un

point se déplaçant sur le profil. Cette loi horaire intègre différentes contraintes à respecter (physique de la machine, critères de performance). La définition de la relation entre le paramètre v et la longueur de la courbe s permet enfin de définir complètement la trajectoire de référence pour le système, c'est-à-dire $P(t) = P(v(s(t)))$, ainsi que ses dérivées par rapport au temps³.

- **La projection du profil interpolé** sur les axes de la machine qui, théoriquement, produit la référence des états, ainsi que la précommande (commande directe) associée à chacun des axes. On rappelle que la précommande représente le signal de consigne de l'actionneur conduisant le système à décrire la trajectoire désirée.
- **Le filtrage après projection** : ce type de filtre permet d'agir sur la référence de position de chaque axe. Il a pour effet de réduire le spectre du signal de consigne.
- Les asservissements ou commandes indirectes qui, au travers du traitement des mesures des états, comparés aux états de référence de chaque axe, calculent une correction du signal de consigne des actionneurs, afin de faire face aux perturbations et aux non-linéarités qui n'auraient pas été prises en compte dans la définition des précommandes. On notera que les asservissements intègrent également des fonctions de compensation destinées à réduire ou à supprimer des comportements non désirés, mais néanmoins prévisibles dans une certaine mesure, tels que certaines perturbations ou non-linéarités (frottements sec et visqueux, efforts de coupe, jeux dans les systèmes vis/écrou, etc.).

La figure I.5 représente le schéma fonctionnel générique de la commande d'une machine-outil. La phase de génération de commande englobe l'interpolation du profil théorique, la projection du profil interpolé sur les axes de la machine, ainsi que la génération de la commande directe par la précommande. Globalement, c'est la phase de génération de commande qui a pour objectif d'intégrer, dans "une certaine mesure", la physique du système et les critères de performance dans le suivi du profil. Idéalement, si on dispose d'un modèle de la physique du système piloté, l'opération consiste à déterminer une loi de mouvement telle que, après interpolation sur le profil théorique selon cette loi, on puisse obtenir les références des états (pour les asservissements) et la précommande (commande directe) de chaque axe vérifiant :

- Le mouvement des axes sur le profil théorique correspond à une trajectoire du système physique (les états de références et précommandes vérifient les équations physiques du système),
- Les critères de performance sont respectés (productivité, précision,...).

³ On rappelle que la longueur d'arc de la courbe théorique $P(v)$ s'exprime par l'intégrale $s(v) = \int_0^v |dP(\tau)/d\tau| d\tau$ qui n'admet pas de solution analytique (or cas trivial ou cas particulier des courbes de type Hodographe Pythagorique [FAROUKI - 2001]). La relation entre le paramètre v et la longueur de la courbe s est classiquement approchée par son développement en série de Taylor [CHENG – 2002].

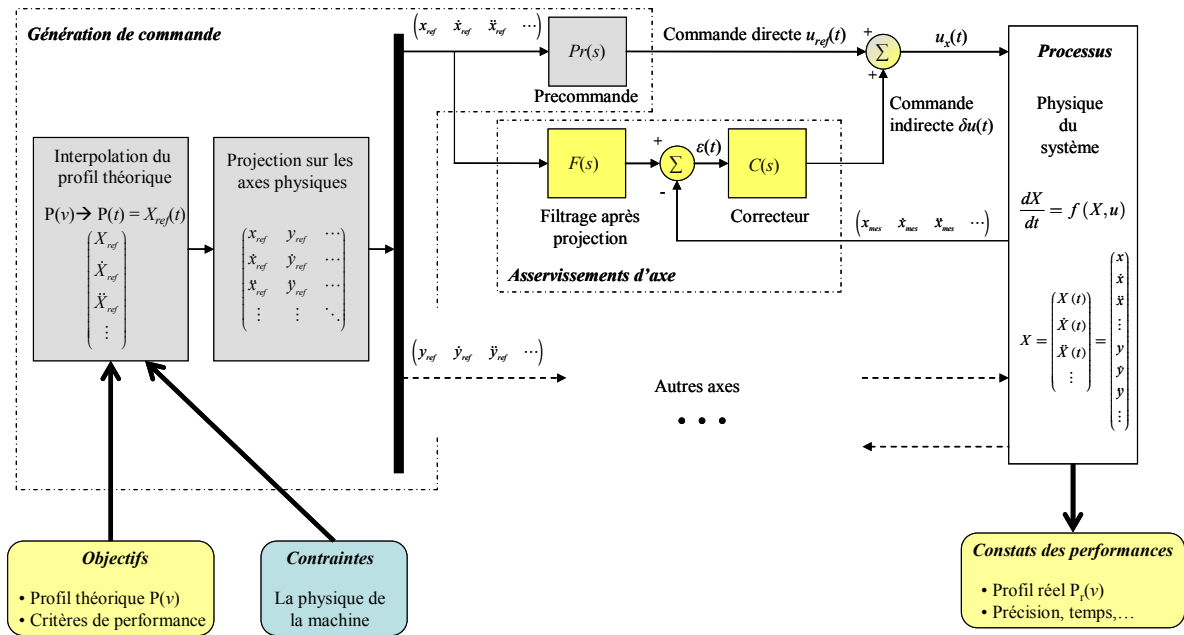


Figure I.5 – Structure générique de la commande d'un système multi-axes destiné au suivi de profil.

1.3 Éléments de complication de la commande d'une machine-outil

La commande d'un système complexe tel qu'une machine de production sera confrontée à de nombreux phénomènes physiques ayant des origines multiples [KOREN - 1983]. Dans le cas d'une machine-outil, ces limitations peuvent être liées à des erreurs géométriques dans l'assemblage de la structure, à la résolution et à la précision des systèmes de mesure, à la technologie des actionneurs, aux vibrations et déformations élastiques se propageant dans le système, aux efforts inertiels lors des phases transitoires, aux non linéarités de frottements, aux efforts de coupe, aux phénomènes thermiques, etc.

Cette partie ne se veut pas exhaustive sur le sujet, mais vise à mettre l'accent sur les phénomènes les plus influents. Dans un premier temps, nous passons en revue les phénomènes les plus classiquement rencontrés, la façon dont ils peuvent être pris en compte par la commande, ainsi que les hypothèses de travail qui seront reprises dans la suite de l'étude. Ensuite nous mettons l'accent sur les phénomènes vibratoires qui, nous le verrons, deviennent un phénomène particulièrement limitant pour les systèmes à dynamique élevée.

1.3.1 Commentaires sur les phénomènes physiques limitant les performances

1.3.1.1 A propos du processus de coupe

La machine-outil est un instrument destiné à travailler la matière par enlèvement de copeaux. Devant ce constat (certes peu novateur) il apparaît important de présenter les principaux phénomènes issus du processus de coupe, car du point de vue de l'automaticien, la coupe se résumera généralement à des perturbations agissant sur la dynamique des axes. Cette hypothèse relativement forte ne doit pas cacher les phénomènes complexes engendrés par la coupe, susceptibles dans certains cas d'exciter les modes propres de la machine. Le processus d'enlèvement de matière concerne différentes opérations de coupe, telles que le fraisage, le tournage et le perçage, suivies par des opérations plus particulières

d'alésage, de taraudage, et de surfacage. Cependant, toutes ces opérations partagent les mêmes principes mécaniques liés la coupe, seuls leurs aspects géométriques et cinématiques diffèrent. Les opérations de coupe les plus communes sont d'une géométrie complexe en trois dimensions. Le cas plus simple à deux dimensions de la coupe orthogonale en régime stationnaire (modèle de MERCHANT) est encore le plus usité pour modéliser le processus global d'enlèvement de matière [GILORMINI – 1992 ; ALTINTAS - 2000].

Dans l'industrie, on parlera d'usinage à grande vitesse lorsque les vitesses de coupe ou les fréquences de rotation seront au moins cinq fois plus élevées qu'en usinage conventionnel [BARRE - 1995]. Concrètement, même si chacun adopte la définition qui lui convient le mieux, on considèrera généralement que "l'on fait de l'Usinage Grande Vitesse", lorsque l'on atteint des fréquences de rotation de l'ordre de 25000 tr/min pour des vitesses d'avance de travail supérieur à 10 m/min.

Globalement, les principales sources d'excitation générées par la coupe sont :

- les balourds de la broche, du porte-outil, de l'outil. La fréquence d'excitation correspond alors à la fréquence de rotation du corps concerné ;
- les fluctuations d'effort de coupe, dues à l'engagement et au déengagement des dents de l'outil. Ces fluctuations peuvent être importantes (entre 10 et 100 % de l'effort de coupe moyen) et leur fréquence est égale à la fréquence de rotation de l'outil multipliée par le nombre de dents (cas d'une fraise) ;
- le broutement (chatter), qui est un phénomène vibratoire auto-entretenu, donc entraînant l'instabilité du système.

Le phénomène de broutement est le plus critique, puisque au-delà de la simple dégradation de l'état de surface, les amplitudes des vibrations qu'il provoque peuvent aller jusqu'à la détérioration du système [BRUN-PICARD - 2002]. Les origines du broutement restent encore mal connues. L'explication retenue aujourd'hui retient essentiellement l'effet de régénération des surfaces usinées ; c'est-à-dire l'action sur une dent de l'outil des ondulations de la surface laissées par les vibrations présentes lors du passage de dents précédentes. Les domaines de stabilité forment un diagramme, bien connu des usineurs, limités par des lobes de stabilité. Ces courbes, pour un outil et un matériau donnés, sont fonction de la vitesse de rotation et de la profondeur de passe. Elles sont obtenues expérimentalement, ou plus rarement analytiquement sur un modèle du processus de coupe (figure I.6).

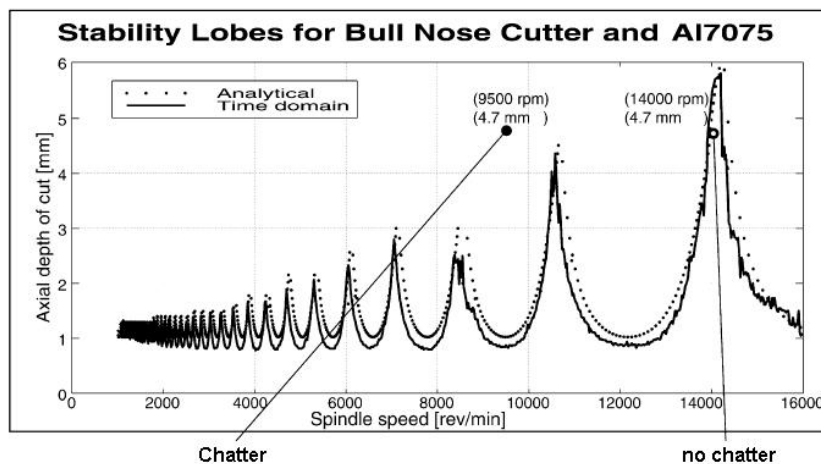


Figure I.6 - Exemple de lobes limites de stabilité [ENGIN - 2001].

On notera que la dynamique du système dans les régions instables est très peu étudiée. Ces zones écartées en usinage pourraient se révéler utiles pour certaines applications. En effet, l'utilisation des vibrations basses fréquences dans la coupe des métaux (coupe vibratoire) peut permettre d'améliorer les problèmes de formation et d'évacuation des copeaux, par une interruption périodique de la coupe qui provoque la fragmentation du copeau. La maîtrise de cette technique a été récemment étudiée par [MORARU - 2002] dans le cas du perçage, domaine très concerné par les difficultés d'évacuation de copeaux.

Concrètement, les fréquences d'excitations liées aux balourds sont très élevées (fréquence de rotation et ses harmoniques), donc généralement peu influentes sur la bande passante de commande. De même, le phénomène de broutement n'est pas sensible si l'on respecte certaines zones de travail. Du point de vue de la mécanique de la structure et de son pilotage, les effets de la coupe particulièrement ressentis seront dus aux variations de l'effort moyen de coupe.

Dans la suite de l'étude, nous ne considérons pas le processus de coupe dans la formulation de la dynamique d'ensemble du processus. Cette hypothèse forte peut se justifier dans le cas de l'usinage de matériaux tendre comme l'aluminium (essentiellement en aéronautique, mais aussi dans l'automobile), pour lequel les variations des efforts de coupe en phase de finition demeurent faibles. Sous cette hypothèse, le processus de coupe est traité au même titre que toute autre perturbation dynamique agissant sur les axes, et donc sur la commande.

1.3.1.2 Phénomènes caractéristiques du mouvement d'un axe

La chaîne cinématique classique du mouvement linéaire d'un axe comporte généralement les éléments suivants :

- un moteur du type synchrone sans balais ;
- un réducteur (poulie/courroie, engrenage,...) ;
- un système de transformation de mouvement (vis/écrou, pignon/crémaillère).

Ces transmissions équipent encore la plupart des machines grande vitesse, tours comme fraiseuses, lorsque les vitesses de déplacement restent inférieures à 20 m/min. La multiplicité des liaisons mécaniques dans ce type de transmission (figure I.7(a)) est propice à l'apparition de souplesses auxquelles s'ajoutent les déformations de torsion et de flambement de la vis, limitant alors la précision, les vitesses, notamment sur de longs parcours. Un moyen de rigidifier ce système est d'augmenter le diamètre de la vis, c'est à dire son inertie, ce qui a pour corollaire la limitation de la dynamique de l'ensemble.

Une alternative à ce type de transmission réside dans l'utilisation de moteurs linéaires. De façon générale, les principaux avantages de ces actionneurs par rapport au moteur tournant sont : (a) suppression des jeux et forte diminution des frottements grâce à la simplification sensible de la chaîne cinématique ; (b) aucune limitation mécanique sur les accélérations et vitesses atteignables, la vitesse sera limitée par les éléments de guidage, par la bande passante du capteur ou par la tension d'alimentation; (c) plus grande durée de vie amenée par la simplicité mécanique. Ainsi, le principal avantage de la transmission par moteur linéaire réside dans l'élimination de la transmission flexible (figure I.7(b)). La raideur importante du système autorise en effet une augmentation des gains de position, ainsi qu'une précision accrue (suppression des jeux et frottements). Sa faible inertie lui permet alors d'accéder à des vitesses et des accélérations importantes (jusqu'à 60 m.s^{-2} d'accélération

sur les derniers modèles, comme la série L 1500 B1/4is de Fanuc FA & Robots), tout en conservant des valeurs de fréquences de résonance élevées.

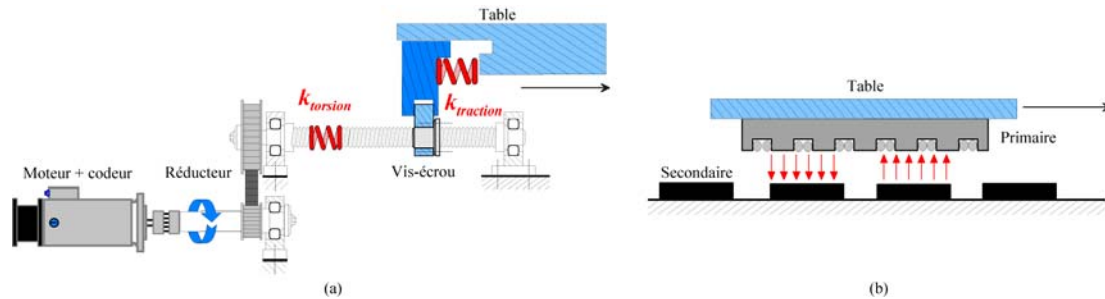


Figure I.7 - Chaîne cinématique : (a) moteur tournant, (b) moteur linéaire.

En supprimant les défauts de la transmission classique, les axes entraînés par moteur linéaire en perdent également les avantages. L'entraînement direct est ainsi beaucoup plus sensible aux variations de paramètres dont les effets étaient jusqu'alors amoindris par le rapport de réduction de la transmission. Il en est de même pour les perturbations extérieures, telles que les efforts de coupe, qui ne sont plus filtrées par la transmission mécanique, mais directement transmises au moteur. A l'inverse, les ondulations dues à des phénomènes électromagnétiques (effets d'encoches, effets de bord) sont directement transmises à la charge. Ces non-linéarités, plus importantes pour un moteur synchrone, ont ainsi un effet direct sur la précision en suivi de trajectoire [BRAEMBUSSCHE - 1996]. L'emploi du moteur linéaire est essentiellement limité par son coût encore élevé et par sa faible puissance, qui mène généralement à l'utilisation de deux moteurs montés en parallèle. Son intégration pose également des problèmes d'équilibrage. Son fonctionnement entraîne de plus de fortes contraintes thermiques pouvant agir sur la déformation de la structure mécanique et, ainsi, être néfaste en termes de précision d'usinage (une centrale de refroidissement externe est souvent conseillée).

On notera que le mouvement d'un axe est inévitablement soumis aux phénomènes de frottement, dont l'importance sera principalement fonction de la multiplicité et du type des surfaces en contact. La bonne gestion des frottements est un enjeu constant dans la conception d'une machine. En effet, bien qu'agissant sur la précision, ils participent également à l'amortissement des perturbations d'axes. Les phénomènes de frottement sont complexes et la littérature sur le sujet est très abondante. Un modèle classique, mais déjà évolué, est celui décrit à la figure I.8.

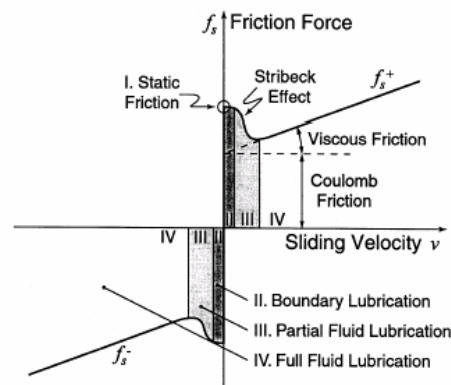


Figure I.8 - Relation entre la vitesse de glissement et la force de frottement pour deux surfaces métalliques lubrifiées en contact [ERKORKMAZ - 2001].

Les équations de ce type de modèle se définissent classiquement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Phases I à III : } f &= (f_c + f_s \exp(-f_r v^2)) \cdot \text{sign}(v) \\ \text{Phase IV: } f &= f_v \cdot v + Ctse \end{aligned} \quad (4)$$

La non-linéarité introduite par l'effet de Stribeck rend sa prise en compte difficile, notamment par la commande. Une linéarisation peut être pertinente pour des applications spécifiques, telles qu'en robotique [LIU - 2002]. Mais généralement cet effet est négligeable dans le cadre de la machine-outil, car peu influant sur la dynamique globale. Le phénomène de frottement, s'il doit être considéré, peut se réduire à ses paramètres de frottement sec et visqueux, beaucoup plus représentatifs.

En effet, dans le cadre de la machine-outil, le phénomène d'hystérésis lié au frottement sec est un élément de complication en suivi de trajectoire. Ces effets sont particulièrement visibles aux basses vitesses, ou encore sur deux axes interpolés au niveau des changements de quadrant en vitesse (figure I.9). Pour contrecarrer ces pics d'inversion, les commandes avancées disposent de fonctions de compensations (anti-pitch) agissant en tant que consigne additionnelle ponctuelle au niveau de l'asservissement en vitesse. Ces compensations sont généralement paramétrées pour une vitesse et un rayon donné, mais il existe également des méthodes de compensation par apprentissage (réseaux de neurones) toutefois peu usitées car complexes à mettre en oeuvre.

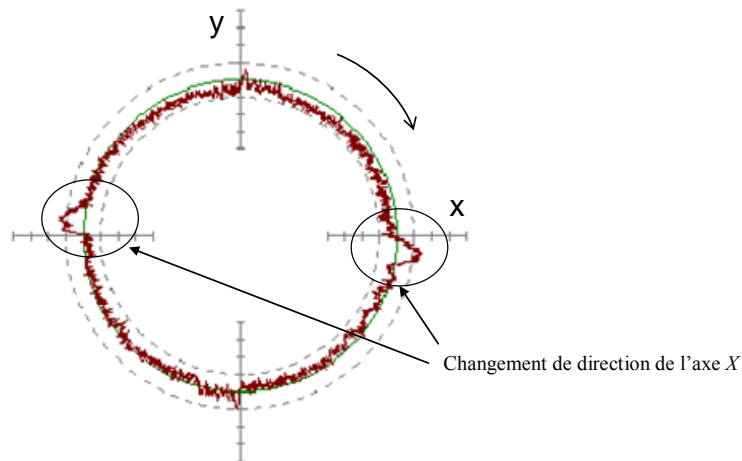


Figure I.9 - Pics d'inversion sur un relevé ball-bar lors de la réalisation d'un profil circulaire [LIO - 2002].

Bien d'autres phénomènes peuvent venir perturber les performances d'un système aussi complexe qu'une machine de production. Par exemple, les jeux dans la transmission du mouvement sont une source d'excitation potentielle (voire d'instabilité) pour le système, d'autant plus importante qu'ils sont grands. Toutefois, ils peuvent également être un élément de « filtrage » du système, en permettant un amortissement des vibrations se propageant dans la chaîne cinématique. On retiendra que de façon générale, les jeux ne sont pas caractéristiques du comportement vibratoire de la machine. On peut également citer les problèmes liés aux effets thermiques. Ils sont particulièrement sensibles sur les grandes structures de machine, pour lesquelles le gradient de température entre les différentes zones de travail n'est plus négligeable et devient un facteur limitant la précision d'usinage. Les interférences thermiques sont habituellement surmontées par une isolation des actionneurs, ou même parfois de la structure entière, et un conditionnement de l'air ambiant qui permet de créer des conditions stables de fonctionnement. Certains constructeurs utilisent des systèmes de refroidissement des différents actionneurs, asservis en continu à partir de mesures de température sur différents points de la structure.

I.3.2 Dynamique élevée et vibrations

La dynamique des systèmes réalisant des mouvements rapides est susceptible d'exciter les fréquences propres de la machine. Nous rappelons que derrière le qualificatif de "machine à dynamique élevée", on entend les systèmes de positionnement pour lesquels la demande en termes de performances dynamiques est telle, que leurs souplesses structurelles deviennent un paramètre sensible non négligeable pour le processus de contrôle. A l'image d'un système masses/ressorts, les flexibilités autorisent un comportement oscillatoire de la structure.

A titre d'exemple, la figure I.10 présente les premiers modes de déformation d'un robot cartésien trois axes obtenus par la méthode des éléments finis. Les deux premiers modes ont des fréquences propres très basses (inférieures à 10 Hz), et l'on notera que les déformées prépondérantes sont dirigées suivant les deux axes x et y , et sont toutes deux associées à la souplesse de la poutre portant la charge à déplacer (axe z). Finalement, si l'on ne considère que le premier mode suivant chaque axe, l'hypothèse qui consiste à supposer l'absence de couplage entre ces axes lors de mouvements interpolés se justifie parfaitement. Mais ce n'est évidemment pas toujours le cas.

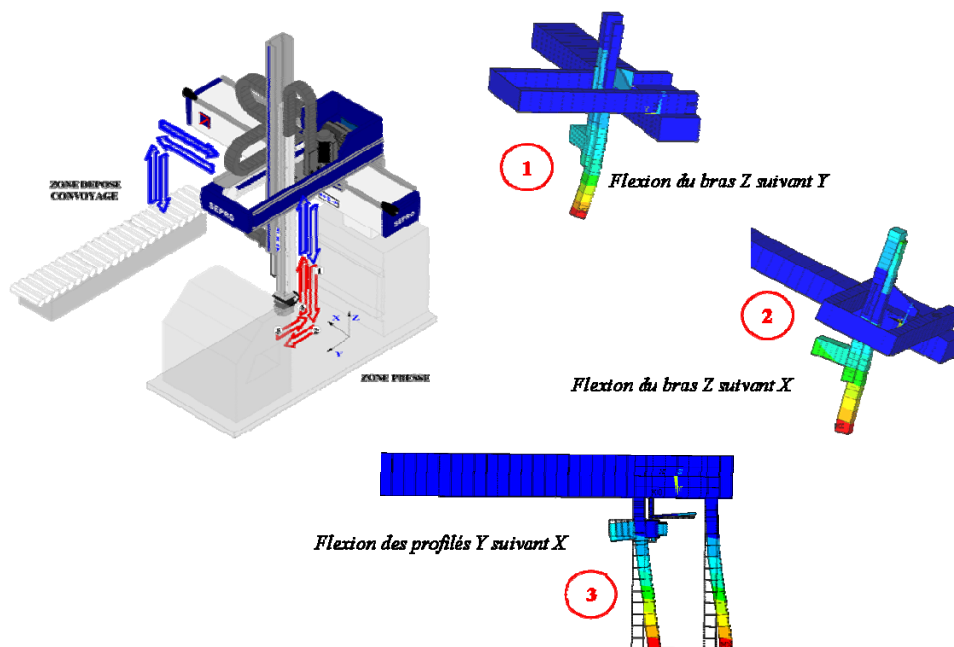


Figure I.10 – Exemples de modes vibratoires dominants la réponse d'un robot cartésien : trois premiers modes propres (1^{er} suivant l'axe Y, les deux suivants dans la direction x).

La figure I.11 présente un autre exemple de déformées structurelles obtenues sur un prototype de machine à découpe laser équipé de deux axes cartésiens. On constate cette fois que les déformées sont essentiellement associées à la structure du bâti et surtout qu'elles s'expriment dans plusieurs directions. Tout mouvement impliquant les deux axes induira un couplage vibratoire entre ces derniers. Dans ce cas de figure, une commande découplée axe par axe ne peut permettre un suivi de profil exempt de vibrations.

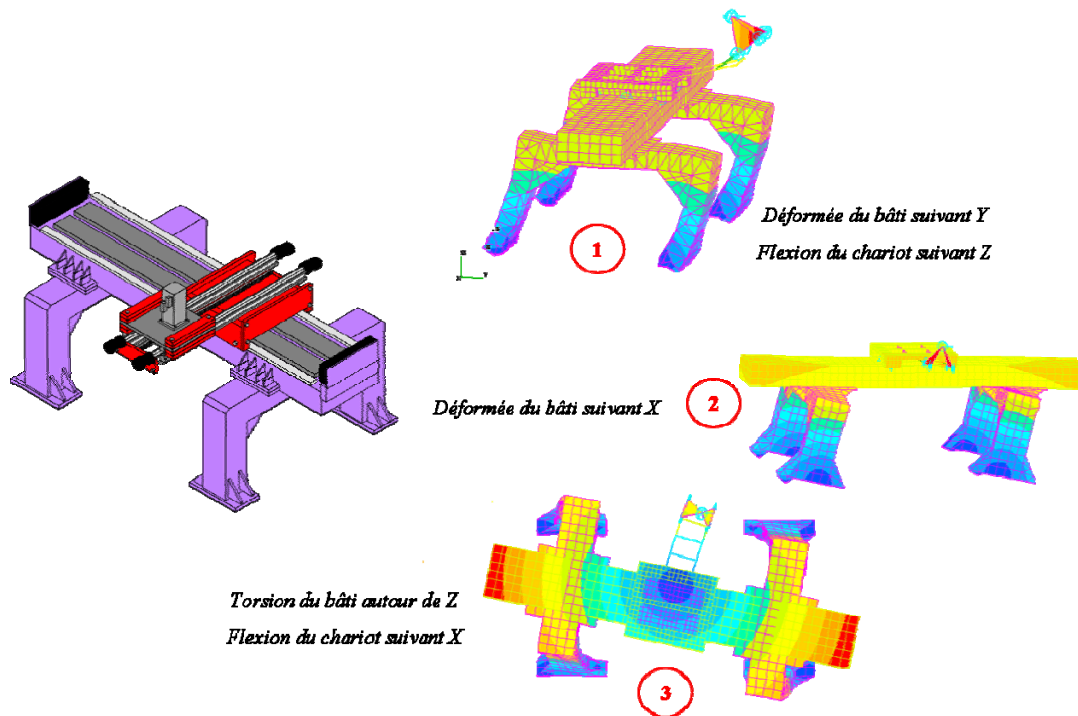


Figure I.11 - Exemples de modes vibratoires dominants la réponse d'un prototype de machine à découpe laser.

Dès la phase de conception mécanique, les phénomènes de souplesses peuvent être intégrés de façon, non pas à les éliminer (puisque cela nécessiterait soit un apport de masse qui réduirait les performances, soit l'utilisation de matériaux spéciaux très coûteux), mais à simplifier leur prise en compte par la future commande de la machine. Ce type de conception appelée "conception par modes orthogonaux" (dans le cas des machines cartésiennes) permet de diriger les déformations de la structure de façon à éviter les couplages inter-axes. Ainsi les modes excités seront dans tous les cas associés au mouvement d'un axe, donc susceptibles d'être éliminés par la commande de cet axe. Ce qui nous ramène au cas du robot cartésien (figure I.10). Cette démarche de conception, qui vise à s'étendre à de nombreuses industries, répond au besoin de pluridisciplinarité des systèmes de "mécatronique". La figure I.12 présente l'exemple d'une fraiseuse 5 axes conçue par modes orthogonaux, ainsi qu'une de ses déformées (mode dominant suivant l'axe Y).

Dans la suite, nous supposons que l'hypothèse de conception par modes orthogonaux est vérifiée, les phénomènes de couplages vibratoires entre les axes seront donc négligés.

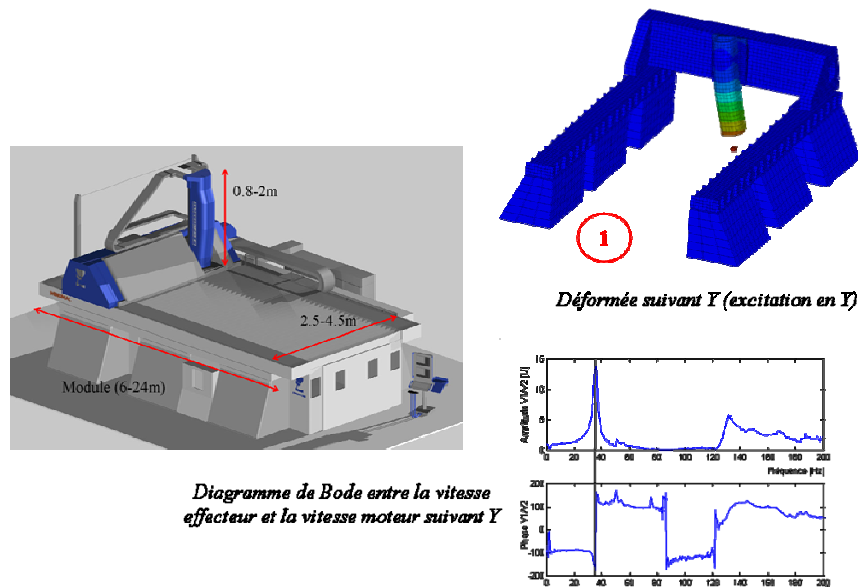


Figure I.12 - Exemples de conception par modes orthogonaux : Linear MINUMAC (FOREST-LINE) - Fraiseuse 5 axes à moteurs linéaires (avance 60 m/mm, accélération 20 m/s²).

1.3.2.1 Modélisation des phénomènes vibratoires

Les modèles de connaissance pour les structures mécaniques s'établissent directement à partir des lois de la physique et se divisent en deux grandes classes : les modèles à constantes localisées, ou modèles discrets, et les modèles à paramètres distribués, ou modèles continus.

Les systèmes discrets sont constitués de paramètres discrets tels que des masses concentrées en des points donnés, reliés entre elles par des ressorts sans masse, ces derniers représentant le nombre de degrés de liberté du système. A l'inverse, la masse et la raideur d'un système continu sont réparties en une infinité de points représentant le domaine du système. Un modèle continu sera donc supposé avoir une infinité de degrés de liberté. Toutefois, un système continu peut être représenté de façon approchée par un modèle discret. Le domaine de validité du modèle obtenu dépend alors du nombre de degrés de liberté considérés. Ce qui, pour notre thématique, peut se traduire par un modèle ne tenant compte que des modes vibratoires dominant la réponse dynamique du système.

De façon générale, les problèmes vibratoires se posent pour des structures assemblées complexes pour lesquelles la description géométrique et matérielle est forcément assez simplifiée (liaisons supposées parfaites, comportement majoritairement linéaire). Même en faisant toutes les simplifications sur les phénomènes dont les effets sont visiblement négligeables, les modèles utilisés demeurent d'ordre élevé. La puissance des calculateurs actuels permet la résolution de certains problèmes spécifiques, mais il n'est généralement pas possible, ni souhaitable, de prendre en compte ce type de modèle dans une étude de commande. Le modèle retenu doit donc réaliser un compromis difficile entre la représentativité de son comportement et la simplicité de sa forme.

Pour cette étude nous utiliserons des modèles élémentaires représentant les déformées principales rencontrées sur les machines à dynamique élevée. Ces modèles élémentaires permettront une évaluation de l'influence paramétrique de la commande sur le comportement des modes vibratoires.

1.3.2.2 Modèles génériques représentatifs d'une souplesse dominante

Les souplesses prépondérantes, c'est-à-dire les déformées associées aux résonances sensibles dans la bande passante de commande, sont classiquement issues des éléments constituant la chaîne de

transmission de mouvement. En effet, sur les machines traditionnelles, les éléments de transmission mécanique (déformée en traction/compression et torsion des systèmes vis/écrou) sont le siège des déformations les plus significatives. D'une part, ces éléments sont les plus contraints et, d'autre part, leurs multiplicités augmentent considérablement la dissipation de l'énergie vibratoire dans la structure, ce qui réduit les possibilités d'excitation pour les éléments situés hors de la chaîne de transmission. Dans ce cas, les modes de structure, ou modes de « bâti », ne contribuent que très faiblement aux vibrations ressenties au niveau de l'outil.

Dans le cadre de la dynamique élevée, l'augmentation des performances passe par la réduction des inerties et par l'augmentation des demandes dynamiques au niveau des actionneurs. La réduction des inerties a pour corollaire une augmentation globale du nombre de fréquences propres susceptibles d'être excitées dans la bande passante de commande, d'autant plus que cette bande s'accroît avec les exigences dynamiques. Alors que les vibrations d'un système vis/écrou apparaissent autour de 100 Hz, les vibrations de structure ont des fréquences plus basses, 10~50 Hz [LEE – 2003]. Ainsi, les modes structurels que l'on pouvait raisonnablement négliger auparavant deviennent parfois très sensibles.

L'influence des modes de structure devient prépondérante dans le cas de l'entraînement direct par moteurs linéaires. Les excitations vibratoires induites par les efforts moteurs et par les perturbations dynamiques (telles que les efforts de coupe) étaient jusqu'alors amoindries par le rapport de réduction de la transmission et filtrées par les éléments de la transmission mécanique. De plus, on notera que les axes supportent toujours un certain nombre de composants mécaniques susceptibles d'être excités (support de broche, axes portés).

Actuellement, il est donc possible de distinguer deux familles de souplesses prépondérantes :

- les souplesses structurelles (situées en amont de l'actionneur) ;
- les souplesses de transmission (situées en aval de l'actionneur).

L'objectif de cette partie ne consiste pas à utiliser un modèle mathématique complexe qui serait spécifique au système étudié. Il est possible d'obtenir des modèles « génériques » de souplesses d'axe, en se basant sur une représentation physique simple des phénomènes vibratoires, donnés sous la forme de modèles à constantes localisées. Ce type de modèle, représenté à la figure I.13 pour les deux familles de souplesses précédemment évoquées, suffit très souvent à décrire l'effet des modes de déformation dominant la réponse des axes [ELLIS – 2000 ; BOPEARATCHY - 1990]. Les équations décrivant la dynamique associée à ces modèles est détaillée en annexe A.1.

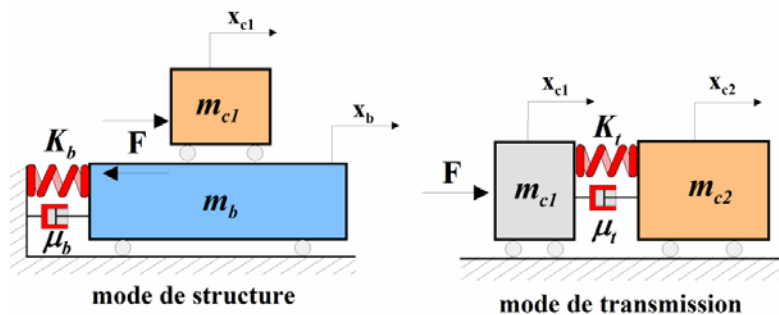


Figure I.13. – Modèles génériques de souplesses dominantes.

I.4 Principales contributions de cette thèse

I.4.1 Historique de la génération de commande

Suite aux considérations précédentes, la génération de commande est placée au centre de la problématique. Idéalement, elle permet de définir une trajectoire physique du système et donc, en l'absence de perturbations externes, un suivi de profil parfait. La gestion du rejet de perturbations est alors totalement confiée aux asservissements des axes. Cependant, les concepteurs de commandes numériques n'ont pas toujours accordé une réelle importance au fait de définir une trajectoire réalisable par le système.

Dans les anciennes générations de Commande Numérique (CN), mais aussi dans certaines CN actuelles telles que celles du marché japonais, la génération de commande se limite à sa plus simple expression mathématique. Le profil théorique est interpolé par une loi horaire imposant une vitesse d'avance constante ($ds/dt = 0$). Les états de références pour les axes se réduisent à la seule consigne de position, c'est-à-dire à la succession des projections du profil interpolé sur chacun des axes de la machine. Avec cette philosophie de planification, les références des axes n'ont que peu de chance d'être physiquement réalisables, d'où l'importance accordée au filtrage après projection dans ce cas. Ce filtrage associé à celui de l'asservissement (commande indirecte) permet de réduire le spectre d'excitation du signal de référence, ce qui en d'autres termes se traduit par un "adoucissement" des consignes. On notera que les performances obtenues peuvent être acceptables, bien que cette méthode rustique confie entièrement la notion de planification à l'expérience du régleur.

Aujourd'hui, les CN disposent d'un module de génération plus évolué. Le type de loi de mouvement utilisée pour interpoler le profil théorique peut être choisi parmi différentes lois. On retient globalement deux types : la loi classique à accélération limitée (l'accélération est constante par partie : la vitesse et l'accélération sont bornées) et la loi à jerk limité (la dérivée de l'accélération est constante par parties : la vitesse, l'accélération et le jerk sont bornés). La définition de la loi de mouvement tient ainsi compte de plusieurs limites physiques des axes. Un certain nombre de règles permettent enfin d'affiner cette loi en fonction des "difficultés" du profil (précision sur un cercle, au passage d'un angle, d'une discontinuité de courbure). Après projection, la CN utilise les valeurs de masse à déplacer sur chaque axe (modèle mécanique "rigide" des axes) afin de déterminer les positions, vitesses et accélérations de référence associées à chaque axe. Les états de référence en vitesse et en accélération peuvent ainsi être utilisés pour injecter directement une référence sur les boucles d'asservissements correspondantes. Ce type d'injection de consigne (commande directe) est classiquement appelé anticipation en vitesse et/ou en accélération. On notera que l'anticipation n'est autre qu'une précommande pour le "système augmenté", composé du processus et de la boucle d'asservissement sur laquelle l'anticipation agit.

Le tableau 1 résume l'historique de la génération de commande. La planification utilisée aujourd'hui est certes plus proche de la structure "idéale" dans sa forme, mais elle ne considère que la dynamique rigide des axes. De ce fait, il est évident que si l'on veut augmenter les performances de la planification de trajectoire, il est indispensable de tenir compte d'un modèle plus représentatif de la dynamique réelle des axes. C'est sur ce point que porte l'essentiel de la contribution de notre étude. Notre objectif vise à intégrer les phénomènes vibratoires dans la génération de commande du système.

Éléments de la commande	"Idéalement"	Avant (< 1995)	Aujourd'hui
Loi de mouvement	<i>Les consignes produisent une trajectoire du système physique</i>	<i>Les consignes ne sont pas physiquement réalisables</i>	<i>Consignes élaborées sur un modèle rigide du système + règles pour moduler la loi de mouvement selon les difficultés du profil théorique</i>
Précommande (Commande directe)	<i>L'essentiel du pilotage se fait en boucle ouverte</i>	<i>Pas de précommande, mais filtrage après projection, filtrage par les asservissements+ filtrage naturel par la machine</i>	<i>Précommande sur modèle rigide (anticipations en vitesse et accélération par filtrage différentiateur)</i>
Asservissements (commande indirecte)	<i>Les boucles fermées sont établies sur tous les états mesurés ou estimés</i>	<i>Boucles fermées sur la position, la vitesse et l'accélération (boucle de courant)</i>	<i>Boucles fermées sur la position, la vitesse et l'accélération + des fonctions particulières pour résoudre les difficultés mécaniques courantes (jeu, frottements, ...)</i>
Performances	<i>Les critères de performance sont satisfaits</i>	<i>Le résultat est " acceptable" (à l'époque, pour le type de pièce, pour les critères du moment, du client)</i>	<i>Les critères de performance sont plus ou moins respectés</i>

Tableau 1 – Historique de la génération de commande en machine-outil.

1.4.2 Notes sur la forme de la loi de mouvement

Si l'on dispose d'un « bon » modèle du processus, l'élaboration du filtre de précommande est relativement simple. En dehors de toutes considérations mathématiques, il s'agit là d'inverser les relations physiques caractérisant le modèle. Par contre, il est important de noter que cette structure de commande n'impose a priori aucune caractéristique explicite sur la loi de mouvement. Or, nous avons vu que pour que le profil soit respecté, il faut que la loi de mouvement permette de définir une trajectoire physique du système.

Dans tous les cas, la trajectoire réalisée par un système physique est infiniment continue (hors cas particulier des chocs). Par conséquent, dans l'objectif de définir une loi de mouvement adaptée au système, il faudrait élaborer une loi la plus continûment différentiable possible. En pratique, les lois de mouvement utilisées sont des fonctions polynomiales, ou des fonctions polynomiales par morceaux (que nous baptiserons lois bang-bang) ou encore des lois basées sur des fonctions trigonométriques naturellement périodiques. Mais le choix d'un type de loi plutôt qu'un autre ne s'appuie généralement que sur l'expérience ou l'intuition. Une question reste en suspend : quelle loi de mouvement choisir pour un processus et un type de mouvement donnés (point à point ou suivi de trajectoire) ?

I.4.3 Contributions du sujet et hypothèses de travail

A travers ce premier chapitre, nous avons mis en évidence l'importance d'agir sur les phénomènes vibratoires de façon à assurer une meilleure qualité du suivi de profil pour les machines à dynamique élevée. L'axe d'investigation privilégié pour cette étude consiste à étudier les actions possibles au niveau de la génération de commande.

Nous avons montré que la génération de commande s'articule autour de deux aspects : la génération ou planification de trajectoire, qui permet de définir une trajectoire de référence pour le système en associant une loi de mouvement au profil théorique, et la précommande, qui élabore à partir de la trajectoire de référence un signal de consigne conduisant le système à décrire le profil théorique. Ainsi, la génération de trajectoire fournit d'une part, un signal de commande de type boucle ouverte que l'on peut directement injecter en entrée du système et, d'autre part, un signal de référence pour les asservissements afin d'assurer le rejet de perturbation.

Les différentes étapes d'investigations présentées dans ce mémoire se subdivisent comme suit :

- **Étude d'un axe de machine.** Cette partie vise une contribution immédiate au domaine de la génération de commande. L'influence de la forme de la loi de mouvement, de la précommande, ainsi que des principaux paramètres d'asservissement classique sur les performances d'un axe de machine est ici traitée.
 - Dans le chapitre II, l'influence de la loi de mouvement sur les vibrations ainsi que sur la durée de mouvement est formalisée. Différents types de lois sont traitées et de façon connexe, cette étude permet de diriger le choix d'un type de loi de mouvement plutôt qu'une autre en fonctions des performances attendues. Le chapitre III détaille l'influence de la loi à jerk limité pour le cas d'un axe asservi par une structure de commande classique. L'objectif est d'éclaircir, voir de démystifier, certains réglages empiriques utilisés dans l'industrie. On notera que les résultats obtenus dans ces deux chapitres sont généralisables à tout système de positionnement soumis à des phénomènes vibratoires.
 - Le chapitre IV propose une méthodologie d'élaboration de la précommande basée sur l'inversion du modèle du processus décrit par le formalisme du Graphe Informationnel Causal. L'influence combinée de la forme de la loi de mouvement et de la précommande sur les performances du système est discutée et validée expérimentalement dans ce chapitre.
- **Étude de mouvements interpolés sur deux axes.** L'objectif est ici d'étendre l'étude au cas de mouvement interpolés. La problématique est entièrement dédiée à la machine-outil puisque l'on aborde le problème du suivi de trajectoire. Les trajectoires étudiées sont élémentaires (droite, cercle et raccordements divers entre ces deux éléments).
 - Dans le chapitre V, nous nous focalisons sur la généralisation de l'étude de précommande du chapitre IV aux cas des mouvements interpolés. Cette partie pose les bases pour de futures investigations sur le lien étroit, pourtant difficilement exprimable, entre géométrie et dynamique.
 - Le chapitre VI apporte une contribution pratique en formalisant l'influence des principaux paramètres de la commande industrielle actuelle (gains de boucle et gains d'anticipation) sur la qualité du suivi de profil réalisé par deux axes souples.

Les hypothèses simplificatrices retenues pour cette étude sont les suivantes :

- L'influence de la dynamique électrique des actionneurs devant celle du système mécanique est négligeable. **Par conséquent, le signal de commande du système est une commande en effort** (ou en couple).
 - Les actionneurs ainsi que les organes de puissance sont symétriques, c'est-à-dire que **les niveaux maximal et minimal des contraintes de saturation sont identiques en amplitude**.
 - **Le processus est supposé linéaire et à minimum de phase.**
 - **Le phénomène de frottement est assimilé à ses paramètres de frottement sec et de frottement visqueux supposés stationnaires.** Par souci de clarté, les frottements ne sont pas explicitement intégrés dans les équations de la loi de mouvement, mais sont bien évidemment utilisés lors des validations expérimentales. La prise en compte de ce phénomène, une fois identifié, ne pose effectivement aucune difficulté particulière.
 - **La dynamique du processus de coupe n'est pas considérée** (pour la machine-outil), ce qui revient à considérer des mouvements où l'outil ne coupe pas, ou encore à supposer que les effets de la coupe sont faibles car efficacement rejetés par les asservissements d'axe.
 - **Les couplages vibratoires entre les axes ainsi que les jeux mécaniques ne sont pas considérés** (hypothèse de conception par modes orthogonaux).
-

Chapitre II

INFLUENCE DE LA LOI DE MOUVEMENT SUR LA DYNAMIQUE VIBRATOIRE D'UN AXE

L'expérience quotidienne nous montre qu'il existe différentes manières d'imposer un mouvement à un système de façon à éviter les vibrations. Prenons l'exemple significatif du travail d'un grutier qui doit déplacer une charge d'un point à un autre tout en évitant, pour des contraintes de sécurité, de faire osciller sa charge. Le grutier "inexpérimenté" aura tendance à suivre son intuition et à déplacer très lentement la charge afin de limiter les oscillations. Le grutier "expert" réalisera quant à lui un mouvement beaucoup plus rapide, composé de plusieurs phases dictées par l'expérience, exempt de toute oscillation à l'arrivée de la charge. Derrière cet exemple se dissimulent deux familles de loi de mouvement qui, correctement gérées, permettent de limiter, voire de supprimer les vibrations lors du mouvement d'un système.

Après avoir caractérisé ces deux familles de loi de mouvement, nous explicitons leurs influences respectives sur le caractère vibratoire d'un axe de machine. Par souci de simplification, les mouvements considérés seront de type point à point (d'une position d'arrêt à une autre). Les développements réalisés sont toutefois facilement transposables au cas d'un mouvement défini par des points de passage ; il suffit alors d'imposer des contraintes non nulles sur les dérivées de la position au niveau de ces points. Afin de démontrer l'aspect général de l'étude, trois démonstrateurs dotés d'architectures et de performances différentes sont employés comme support pour la validation expérimentale (cf. annexe A.3 - Bancs d'essais).

On rappelle les hypothèses de travail considérées dans ce chapitre :

- La dynamique électrique des actionneurs est supposée négligeable devant la dynamique du système mécanique. La loi de mouvement est par conséquent définie pour réaliser une commande en effort (ou en couple). La variable de commande est dans ce cas une force imposée au système mécanique. La masse en mouvement étant considérée constante, nous assimilons la variable de commande à une accélération de référence pour le système.

- L'influence des asservissements est négligée⁴ (commande directe). La loi de mouvement est ainsi directement imposée en entrée du système mécanique.

II.1 Introduction

II.1.1 Classification des lois de mouvement

Avant toute chose, une fonction temporelle candidate au titre de loi de mouvement se doit de vérifier plusieurs propriétés :

1. Puisqu'il s'agit d'une commande en couple ou en effort, elle doit disposer au moins d'une phase d'accélération et d'une phase de décélération.
2. Elle doit être capable de s'adapter aux variations d'échelles du mouvement, c'est-à-dire être "suffisamment paramétrable" pour décrire toutes les longueurs de déplacement possibles sans dégénérescence excessive de sa forme (donc de ses propriétés).
3. Elle devrait avoir la capacité de limiter les vibrations du système.

Une loi de mouvement qui limite, voire évite les vibrations, possède un contenu énergétique faible, aux fréquences de résonance du système. Le contenu énergétique aux fréquences de résonance peut être réduit de deux manières. Soit, à l'image d'un filtre passe-bas, la loi de mouvement est définie pour que "sa fréquence de coupure" soit suffisamment faible pour qu'il ne reste que peu d'énergie susceptible d'exciter les résonances. Soit le spectre énergétique de la loi de mouvement est conçu afin de ne pas contenir d'énergie aux niveaux des fréquences propres du système. Nous distinguerons dans la suite ces deux familles de lois de mouvement que nous appellerons respectivement *lois douces* et *lois bang-bang*. La figure II.1 représente le principe de base différenciant les deux familles de loi de mouvement.

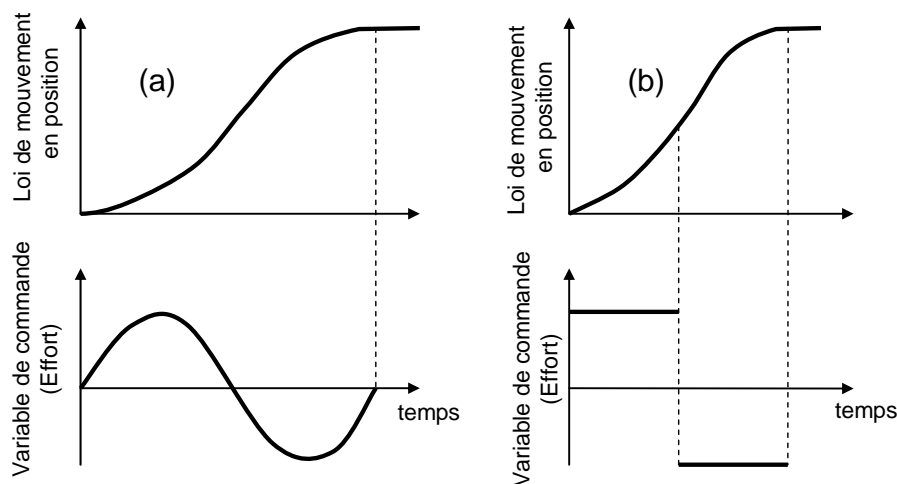


Figure II.1 – Forme générique d'une loi de mouvement : (a) loi douce et (b) loi bang-bang.

Les lois douces rassemblent toutes les fonctions temporelles dont l'expression analytique vérifie les propriétés nécessaires à l'élaboration d'une loi de mouvement. Bien que l'on puisse imaginer de

⁴ On notera que dans le cas de la structure d'asservissement classiquement utilisée dans l'industrie, cette hypothèse revient à considérer des anticipations totales en vitesse et en accélération en l'absence de perturbations externes.

nombreuses fonctions candidates, les principales fonctions concernées sont les fonctions polynomiales et les fonctions harmoniques. Dans les deux cas, elles permettent de s'adapter aux caractéristiques d'accélération et de décélération ; les premières par l'adaptabilité de leur forme (fonction du degré du polynôme) et les dernières par leur périodicité naturelle. Ce type de loi d'une continuité infinie lors du mouvement (en dehors des points extrêmes) aura de façon implicite une plus grande chance de demander un mouvement qui correspond à une trajectoire physique de la machine. Cet effet est généralement englobé sous le qualificatif d'adoucissement de la trajectoire («smoothing» dans la littérature anglaise) et résulte en une diminution des vibrations durant le mouvement ainsi qu'en une diminution du temps de relaxation⁵ du système. Nous verrons que l'inconvénient principal de ces lois est de ne pas être optimales par rapport au temps, contrairement à certaines lois bang-bang. Toutefois, cet inconvénient, i.e. l'augmentation du temps de mouvement théorique, est parfois compensé par la forte diminution du temps de relaxation.

Les lois bang-bang doivent leur appellation à leur principe d'élaboration qui consiste à saturer la variable de commande du système⁶, ou une de ses dérivées, en commutant un certain nombre de fois du niveau maximal au niveau minimal autorisé. La loi de mouvement résultante en position est donc composée d'une succession de courbes que l'on peut exprimer sous la forme d'une fonction polynomiale par morceaux (spline). La loi de mouvement bang-bang est ainsi entièrement caractérisée par le degré des polynômes utilisés (i.e. l'ordre de la dérivée de la position utilisée), par le nombre de ses polynômes (nombre de commutations moins une), ainsi que par les valeurs des instants de commutation entre chacun des polynômes. Nous verrons que le choix de ces instants de commutation, offre un degré de liberté supplémentaire permettant d'optimiser la loi de mouvement par rapport à certains critères. La plupart des études dédiées à ce type de loi ont porté sur une optimisation par rapport au temps [TUTTLE - 1997]. Mais une technique particulière d'élaboration des lois bang-bang, baptisée "input shaping" permet également de les adapter aux caractéristiques vibratoires d'un système [SINGHOSE - 1997].

Nous attirons l'attention du lecteur sur la terminologie utilisée pour nommer les dérivées successives du mouvement. En effet, si le terme de *jerk* (dérivée de l'accélération) est désormais courant et accepté par tous, les dérivées d'ordres supérieurs ne disposent pas de dénominations normées. Nous utiliserons une terminologie issue de la biotechnologie, seul domaine à utiliser couramment les dérivées de la position pour qualifier les mouvements humains. Ainsi, la dérivée du *jerk* est appelée *snap* et la dérivée troisième de l'accélération est nommée *crackle* [DINGWELL - 2004].

II.1.2 Outils d'analyse de la loi de mouvement

II.1.2.1 Modèle d'erreur vibratoire

Notre objectif dans ce chapitre consiste à formaliser l'influence de la loi de mouvement sur le mode souple dominant d'un axe. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les modes de déformations des axes peuvent globalement être scindés en deux groupes : les modes situés après l'actionneur généralement appelés modes de transmission (relatifs à une souplesse entre l'actionneur et la charge) et les modes situés avant l'actionneur appelés modes de structure. Les modèles génériques à

⁵ Le temps de relaxation représente la durée supplémentaire pour qu'à la fin du mouvement théorique le système entre dans la tolérance désirée.

⁶ On rappelle que pour une commande en effort, on assimile ici la variable de commande à une accélération de référence pour le système (c'est-à-dire l'effort de commande divisée par la masse totale à déplacer).

constantes localisées de ces deux familles de déformation sont représentés à la figure I.13. Le modèle d'axe utilisé dans ce chapitre correspondra au modèle le plus classiquement usité; celui d'un axe soumis à un mode de transmission. Afin de considérer le cas le plus défavorable, l'amortissement du mode sera supposé nul. Cependant, on notera que les résultats sont facilement transposables au cas d'un mode de déformation de structure.

En adoptant les notations de la figure I.13, les fonctions de transfert canoniques représentant la dynamique d'un système soumis à l'influence dominante d'un mode de transmission entre les vitesses V_{c1} et V_{c2} des deux masses et l'effort de commande F , s'expriment dans le domaine continu sous la forme :

$$\frac{V_{c1}(s)}{F(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta'_n}{\omega'_n} s + \frac{1}{\omega_n'^2} s^2}{m_{tot} s \left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \right)}; \quad \frac{V_{c2}(s)}{V_{c1}(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta'_n}{\omega'_n} s}{\left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \right)}$$

$$m_{tot} = m_{c1} + m_{c2}; \quad r = m_{c2} / m_{c1}; \quad \omega'_n = \sqrt{\frac{K_t}{m_{c2}}}; \quad \zeta'_n = \frac{\mu_t}{2\sqrt{K_t \cdot m_{c2}}};$$

$$\omega_n = \omega'_n \sqrt{(1+r)}; \quad \zeta_n = \zeta'_n \sqrt{(1+r)}$$
(5)

Dès que la loi de mouvement s'écarte d'une des trajectoires physiques du système, les modes souples sont susceptibles d'être excités et, par conséquent, la précision dynamique est dégradée. Le déplacement effectif de la charge noté x_{c2} diffère alors du mouvement idéal. On définit l'erreur dynamique du mouvement :

$$\varepsilon(t) = x_{ref}(t) - x_{c2}(t). \quad (6)$$

D'après les expressions (5) et (6), en notant que l'accélération de référence est de la forme $\ddot{x}_{ref}(s) = F(s) / m_{tot}$, la fonction de transfert régissant l'évolution de l'erreur dynamique dans le cas d'une souplesse dominante de transmission sera donnée par :

$$\frac{\varepsilon(s)}{x_{ref}(s)} = \frac{\frac{1}{\omega_n^2} s^2}{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2} \quad (7)$$

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux vibrations induites par la loi de mouvement lors du déplacement, mais également lors de la phase d'arrêt. Ce dernier type de vibration (appelée vibration résiduelle) est un critère dans certains cas prépondérant (exemple du positionnement rapide en robotique, des changements d'outil et phases hors usinage en machine-outil⁷). Pour un système du second ordre non amorti, tel que celui représenté par l'erreur dynamique (7), il existe une relation analytique simple permettant de déterminer l'amplitude maximale de l'erreur vibratoire résiduelle en fonction de l'erreur dynamique et de sa dérivée à l'instant final T_f [MECKL - 1994]. En effet, la résolution de l'équation différentielle donnée par la relation (7) en régime libre ($t \geq T_f \Rightarrow \ddot{x}_{ref}(t) = 0$) conduit à l'expression :

⁷ On notera que ces phases où l'outil ne coupe pas peuvent représenter plus de la moitié du temps d'obtention d'une pièce (Industrie automobile essentiellement).

$$\varepsilon(t) = e^{-\zeta_n \omega_n (t-T_f)} \left[C_1 \cos(\omega_n (t-T_f)) + C_2 \sin(\omega_n (t-T_f)) \right]; \quad t \geq T_f$$

avec $C_1 = \varepsilon(T_f)$ et $C_2 = \dot{\varepsilon}(T_f) / \omega_n - \varepsilon(T_f) \zeta_n \omega_n$

D'où l'on déduit l'amplitude maximale des vibrations résiduelles :

$$\max_{t \geq T_f} (\varepsilon(t)) = \sqrt{\left(\varepsilon(T_f) \right)^2 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}(T_f)}{\omega_n} \right)^2 + \zeta_n^2 \left(\varepsilon(T_f) \right)^2 - \frac{2\zeta_n \dot{\varepsilon}(T_f) \varepsilon(T_f)}{\omega_n}} \quad (8)$$

Classiquement, l'estimation de l'influence d'une modification de la commande sur le caractère vibratoire d'un système se traduit par une représentation temporelle des oscillations et/ou par un spectre fréquentiel (spectre de Fourier). Mais la représentation temporelle ne permet que de constater le résultat et non d'estimer facilement l'influence paramétrique de la modification. Quant au spectre de Fourier, il montre effectivement dans quelle mesure un mode sera plus ou moins excité, mais il ne permet toutefois pas de quantifier facilement l'amplitude des oscillations. C'est pourquoi nous avons voulu utiliser une représentation complémentaire, plus significative et informative, permettant une interprétation directe de l'influence de la loi de mouvement sur les vibrations. La représentation utilisée sera baptisée graphe de vibration. Ce graphe est un diagramme adimensionné représentant l'amplitude maximale des vibrations (lors du mouvement et/ou résiduelles) rapportées à la distance parcourue en fonction d'un temps adimensionné. La variable de temps adimensionné représente le rapport entre une caractéristique temporelle de la loi (généralement la durée du mouvement et dans certain cas la durée d'une phase) et la période naturelle du mode propre considéré. Ce graphe est une extension d'une représentation utilisée dans [DISSANAYAKE - 1989] destinée à retranscrire les vibrations résiduelles.

II.1.2.2 Graphe de vibration

La loi à accélération limitée (figure II.2) utilisée classiquement par toutes les commandes numériques est une loi en temps minimum satisfaisant les contraintes imposées sur la vitesse et l'accélération maximale. De par son caractère générique et sa capacité à définir le profil de commande en temps minimum (compte tenu des limitations de vitesse et d'accélération), la loi en bang-bang d'accélération nous servira de référence absolue afin de quantifier l'apport des différentes lois étudiées.

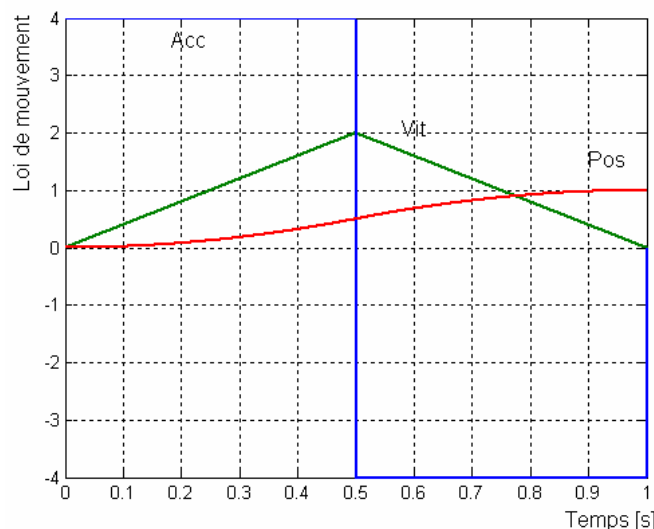


Figure II.2 – Loi de mouvement classique à accélération limitée (bang-bang d'accélération).

Le graphe de vibration sera établi pour chaque loi et comparé à celui de la loi à accélération limitée. Le terme d'amortissement associé aux vibrations mécaniques des machines de production est généralement faible (de l'ordre de 5 à 10 %), par conséquent la valeur de l'amplitude vibratoire maximale n'est que faiblement affectée par ce terme. Pour l'élaboration des graphes de vibration **l'amortissement sera donc négligé**. On notera que toutes les lois étudiées peuvent être scindées afin d'inclure des phases à accélération nulle (lorsque la vitesse maximale est atteinte). Mais dans l'optique de conserver un outil de comparaison simple pour toutes les lois de mouvement, ces phases ne seront pas prises en compte dans le graphe de vibration. Ainsi, le profil d'accélération de référence correspondant à la loi à accélération limitée (avec A_m la valeur de l'accélération maximale) s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq T_a & \quad \ddot{x}_{ref} = A_m \\ T_a \leq t \leq T_f (= 2T_a) & \quad \ddot{x}_{ref} = -A_m \\ T_f \leq t & \quad \ddot{x}_{ref} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Tout échelon imposé à un système du second ordre non amorti crée un dépassement d'amplitude égale à 100 % de l'échelon considéré. Lors du mouvement sur le profil en bang-bang d'accélération, le système est soumis à deux échelons (deux commutations), le premier d'amplitude A_m et le second d'amplitude $2A_m$. Par conséquent, l'amplitude de l'erreur vibratoire maximale (en position) lors du mouvement sera bornée par :

$$\max_{t < T_f} (\varepsilon(t)) = \frac{3A_m}{\omega_n^2} \quad (10)$$

Et le calcul de l'erreur vibratoire résiduelle correspondante (cf. équation (8)) conduit à l'expression :

$$\max_{t \geq T_f} (\varepsilon(t)) = \frac{4A_m}{\omega_n^2} \left(\sin \left(\frac{T_a \omega_n}{2} \right) \right)^2 \quad (11)$$

En notant que la distance parcourue est donnée par $x_{ref} = x_{ref}(T_f) = A_m T_a^2$ avec $T_f = 2T_a$ il est possible de reformuler l'amplitude des vibrations sous la forme adimensionné :

$$\begin{aligned} \frac{\max_{t < T_f} (\varepsilon(t))}{x_{ref}} &= \frac{3}{(\pi \tau)^2} \\ \frac{\max_{t \geq T_f} (\varepsilon(t))}{x_{ref}} &= \left(\text{sinc} \left(\frac{\pi \tau}{2} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Avec $\tau = T_f \omega_n / 2\pi$ le temps adimensionné et en adoptant la notation $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Le graphe de vibration de la loi à accélération limitée pour le modèle d'axe considéré est représenté à la figure II.3. Les spécificités de cette courbe, notamment la présence de zones de vibration résiduelle nulle sera justifiée analytiquement dans le paragraphe II.3.

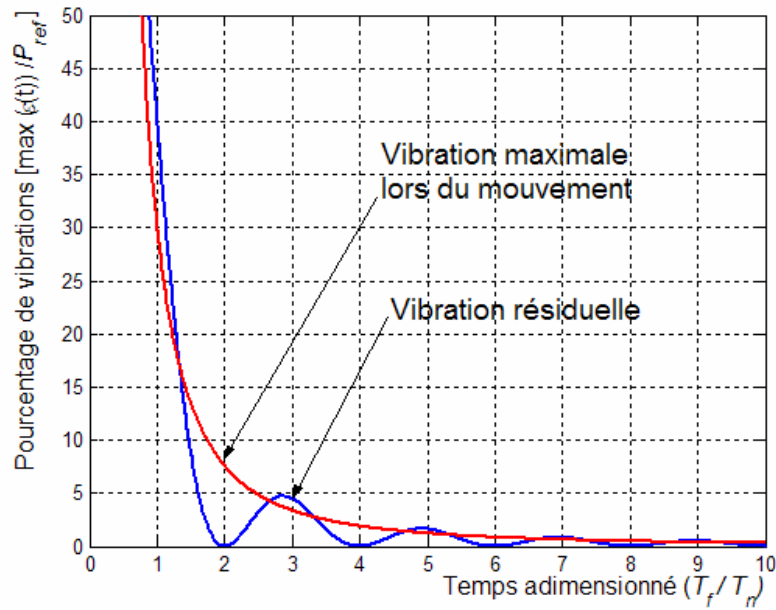


Figure II.3 – Graphe de vibration pour la loi à accélération limitée.

II.2 Lois de mouvement douces

II.2.1 Fonctions trigonométriques

Comme nous l'avons déjà précisé, le déplacement d'un axe d'un point à un autre implique, pour une loi de mouvement, l'existence d'une phase d'accélération et d'une phase de décélération. Ce basculement entre des phases où l'accélération sera positive puis négative, laisse tout naturellement penser à la forme périodique des fonctions trigonométriques. A priori, la fonction sinus vérifie les contraintes d'une loi de mouvement. Considérons la loi de mouvement en accélération définie par le paramètre d'accélération maximale A_m et la durée du mouvement T_f :

$$0 \leq t \leq T_f \quad \ddot{x}_{ref}(t) = A_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_f}\right) \quad (13)$$

Pour un mouvement point à point, les évolutions de la vitesse et de la position théoriques s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ref}(t) &= \frac{A_m T_f}{2\pi} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T_f}\right)\right) \\ x_{ref}(t) &= \frac{A_m T_f^2}{(2\pi)^2} \left(2\pi \cdot \frac{t}{T_f} - \sin\left(2\pi \frac{t}{T_f}\right)\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Soit x_{ref} la longueur du déplacement désiré, les amplitudes maximales atteintes par la position, l'accélération et la vitesse lors du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned}
 x_{ref} &= x_{ref}(T_f) = \frac{A_m T_f^2}{2\pi} \\
 \max_{t \leq T_f} (\dot{x}_{ref}(t)) &= \frac{A_m T_f}{\pi} = \frac{2}{T_f} x_{ref} \\
 \max_{t \leq T_f} (\ddot{x}_{ref}(t)) &= A_m
 \end{aligned} \tag{15}$$

Et il est ensuite nécessaire d'intégrer la contrainte sur la vitesse :

$$\max_{t \leq T_f} (\dot{x}_{ref}(t)) \leq V_m \tag{16}$$

Les équations (15) nous montrent que, pour un déplacement x_{ref} donné, il est impossible de choisir indépendamment les variables déterminant la vitesse et l'accélération soumises aux contraintes (16). De plus, les maxima de vitesse et d'accélération atteints lors du mouvement ne le sont que ponctuellement. Il est bien évidemment possible de discrétiser la loi de mouvement afin d'insérer au minimum une phase de vitesse constante (lorsque la distance à parcourir le permet) de façon à conserver le plus possible une dynamique élevée. Même dans ce cas, la valeur moyenne de l'accélération et de la vitesse reste bien en deçà des limitations physiques imposées. Ce résultat est généralisable à toutes les lois de mouvement douces. Elles ne peuvent permettre une pleine utilisation de la puissance disponible. Et comme corollaire, elles ne peuvent définir un profil en temps minimum. Mais l'intérêt de leur analyse réside dans leur dérivabilité infinie (entre les deux points extrêmes ou entre deux points de passage), qui réduit le spectre d'excitation de la consigne du système.

On peut imaginer de nombreuses lois de mouvement à base de fonctions trigonométriques ; par exemple la loi en sinus carré d'accélération, disponible dans certaine commande numérique, pour laquelle la pente aux points extrêmes est nulle [BEAREE – 2005(2)]. On notera que l'utilisation de ce type de loi rend implicite la discrétisation du profil; chaque phase du mouvement est définie soit par un sinus carré, soit par une accélération nulle (vitesse constante). Sans considérer la phase de vitesse constante, le profil d'accélération pour la loi en sinus carré s'écrit :

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq \frac{T_f}{2} \quad \ddot{x}_{ref}(t) &= A_m \sin^2 \left(2\pi \frac{t}{T_f} \right) \\
 \frac{T_f}{2} \leq t \leq T_f \quad \ddot{x}_{ref}(t) &= -A_m \sin^2 \left(2\pi \frac{t}{T_f} \right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

La figure II.4 illustre la forme des profils d'accélération correspondant aux lois de mouvement en sinus et sinus carré comparée à la loi à accélération limitée.

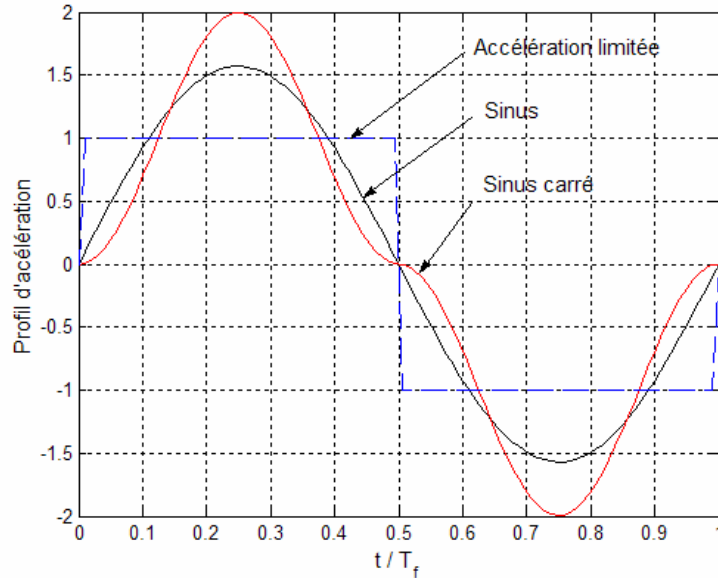


Figure II.4 – Loi de mouvement en sinus et sinus carré d'accélération.

Le calcul des vibrations maximales (durant le mouvement et résiduelles) pour ces deux lois conduit aux expressions données dans le tableau 2.

	Vibrations maximales durant le mouvement	Vibrations résiduelles
Sinus	$\frac{\max_{t < T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} = \frac{1}{2\pi(\tau^2 - 1)}$	$\frac{\max_{t \geq T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\pi\tau(\tau^2 - 1)}$
Sinus carré	$\frac{\max_{t < T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} = \frac{4}{(\pi\tau)^2(\tau^2 - 1)}$	$\frac{\max_{t \geq T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} = \frac{16 \sin^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{(\pi\tau)^2(\tau^2 - 4)}$

Tableau 2 – Amplitudes de vibration pour les lois en sinus et sinus carré d'accélération ($\tau = T_f \omega_n / 2\pi$).

La figure II.5 représente le graphe de vibration pour la loi de mouvement en sinus et pour la loi en sinus carré. La réduction du spectre d'excitation lors du mouvement par l'utilisation d'une loi de type harmonique est nettement visible. Quant à la réduction des vibrations résiduelles, elle n'est réellement significative que pour des mouvements d'une durée supérieure à 3 ou 4 fois la période propre du mode prépondérant.

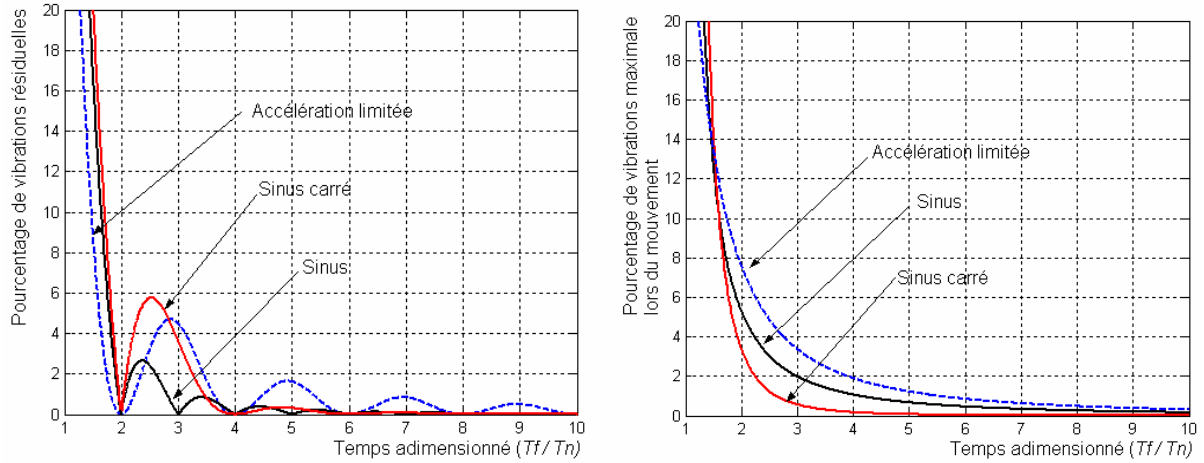


Figure II.5 – Graphes de vibration des lois harmoniques comparées au bang-bang d'accélération.

II.2.2 Fonctions polynomiales

II.2.2.1 Minimisation d'une dérivée de la loi de mouvement

Il existe a priori une infinité de polynômes permettant de décrire une loi de mouvement entre deux points. Puisque notre objectif vise à formaliser l'influence de la loi de mouvement sur la dynamique vibratoire, il apparaît judicieux de rationaliser la démarche en choisissant un polynôme qui impose certaines contraintes sur la dynamique. Par exemple, afin de privilégier la douceur du mouvement, il semble cohérent de vouloir minimiser les amplitudes des dérivées de la position tout au long du mouvement [BRUN-PICARD 2005].

Soit $x_{ref}(t)$ une loi de mouvement pour laquelle nous voulons minimiser la dérivée $n^{ième}$. Le problème d'optimisation sans contrainte ainsi défini peut se formuler sous la forme classique⁸ : déterminer $x_{ref}(t)$ minimisant la fonctionnelle J :

$$J[x_{ref}(t)] = \int_0^{T_f} \left(\frac{d^n x_{ref}(t)}{dt^n} \right)^2 dt \quad (18)$$

Au voisinage du minimum du critère, la variation de celui-ci doit être nulle au premier ordre et positive au second (principe d'une variation autour d'un minimum local ou global). La positivité est assurée par la forme quadratique du critère. Au voisinage du minimum on a donc :

$$\partial J = 2 \int_0^{T_f} \frac{d^n x_{ref}}{dt^n} \partial \left(\frac{d^n x_{ref}}{dt^n} \right) dt = 0 \quad (19)$$

Et en intégrant n fois par partie :

$$\partial J = 2 \left[\beta \left(\frac{d^i x_{ref}}{dt^i} \partial \left(\frac{d^k x_{ref}}{dt^k} \right) \right) \right]_0^{T_f} - 2 \int_0^{T_f} \left(\frac{d^{2n} x_{ref}}{dt^{2n}} \partial x_{ref} \right) dt = 0 \quad (20)$$

Avec β une fonction des produits des dérivées de la position et de leurs différentielles, i un entier compris entre 1 et $2n$ et k un entier compris entre 1 et $n-1$. Les dérivées de la position aux instants

⁸ Le critère est mis sous forme quadratique afin de simplifier volontairement les calculs (la positivité du critère est ainsi explicite).

extrêmes (conditions initiales et finales) étant fixées jusqu'à l'ordre $n-1$, tous les $\partial(d^k x_{ref}/dt^k)_{(0)}$ et $\partial(d^k x_{ref}/dt^k)_{(T)}$ sont nuls, donc le premier terme de la variationnelle ∂J s'annule. Et si l'on veut que le terme intégral soit nul pour tout ∂x_{ref} , il faut et il suffit que :

$$\frac{d^{2n} x_{ref}(t)}{dt^{2n}} = 0 \quad \forall t \quad (21)$$

Finalement, il se trouve que la loi de mouvement optimale est un polynôme d'ordre $2n-1$, dont les coefficients seront fonction des conditions aux points extrêmes.

Afin de comparer l'influence de la dérivée minimisée, nous allons étudier trois lois de mouvement : la première minimisant l'accélération, la seconde minimisant le jerk et enfin une loi minimisant la dérivée du jerk (snap). Il est intéressant de noter que la loi à jerk minimum est utilisée depuis longtemps en robotique pour sa similitude avec les mouvements des articulations humaines [HARRIS - 2004].

II.2.2.2 Lois à accélération, jerk et snap minimum

En notant x_{ref} la position à atteindre, T_f la durée du mouvement et en appliquant le résultat (21) à la minimisation de l'accélération lors d'un mouvement point à point (i.e. pour $n = 2$), on détermine le polynôme de degré 3 suivant :

$$[x(t)]_{\min A} = \frac{t^2 x_{ref}}{T_f^3} (-2t + 3T_f) \quad (22)$$

De même pour la minimisation du jerk lors d'un mouvement point à point (i.e. pour $n = 3$), on détermine le polynôme de degré 5 suivant :

$$[x(t)]_{\min J} = \frac{30t^3 x_{ref}}{T_f^5} \left(\frac{t^2}{5} - \frac{T_f t}{2} + \frac{T_f^2}{3} \right) \quad (23)$$

Et pour le polynôme minimisant le snap, on obtient :

$$[x(t)]_{\min S} = \frac{t^4 x_{ref}}{T_f^7} (-20t^3 + 70t^2 T_f - 84t T_f^2 + 35T_f^3) \quad (24)$$

Ainsi, les polynômes donnés par les équations (22), (23) et (24) représentent respectivement les lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum. La figure II.6 en donne les représentations ainsi que leurs dérivées successives pour un déplacement de 1 mètre réalisé en 1 seconde.

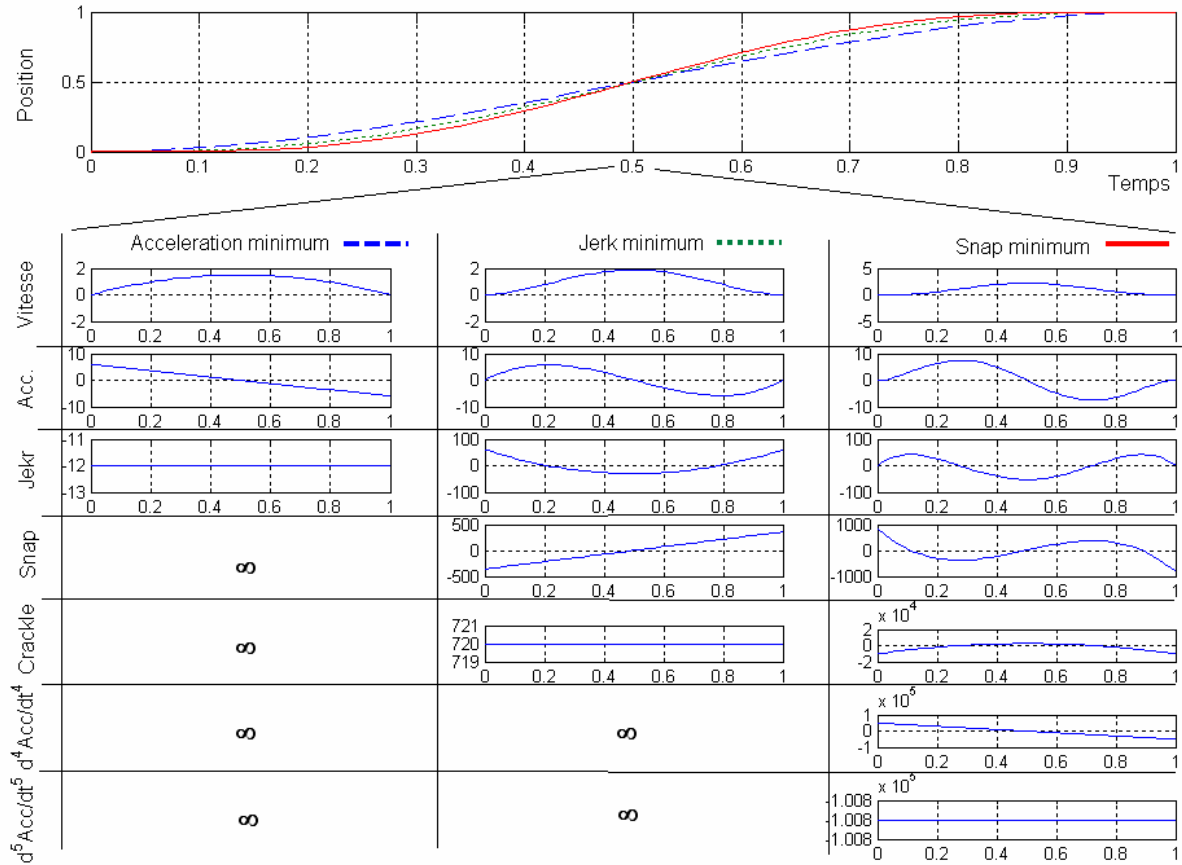


Figure II.6. – Lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum.

En imposant ces lois au modèle d'erreur dynamique donné par l'équation (7), on détermine les erreurs vibratoires maximales lors du mouvement (pour $t < T_f$) :

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\max_{t < T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} \right]_{\min A} &= \frac{3}{2\pi^3 \tau^3} \sqrt{\pi^2 \tau^2 + 1} \\
 \left[\frac{\max_{t < T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} \right]_{\min J} &= \frac{15}{2\pi^5 \tau^5} \sqrt{\pi^4 \tau^4 + 3\pi^2 \tau^2 + 9} \\
 \left[\frac{\max_{t < T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} \right]_{\min S} &= \frac{105}{2\pi^7 \tau^7} \sqrt{\pi^6 \tau^6 + 6\pi^4 \tau^4 + 45\pi^2 \tau^2 + 225}
 \end{aligned} \tag{25}$$

avec $\tau = T_f \omega_n / 2\pi$.

De même l'amplitude maximale des vibrations résiduelles pour chacune des trois lois déduite de l'équation (8) s'exprime de la façon suivante :

$$\left[\frac{\max_{t \geq T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} \right]_{\min A} = \frac{3}{\pi^3 \tau^3} [-\pi\tau \cos(\pi\tau) + \sin(\pi\tau)]$$

$$\left[\frac{\max_{t \geq T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} \right]_{\min J} = \frac{15}{\pi^5 \tau^5} [3\pi\tau \cos(\pi\tau) + (-3 + \pi^2 \tau^2) \sin(\pi\tau)] \quad (26)$$

$$\left[\frac{\max_{t \geq T_f}(\varepsilon(t))}{x_{ref}} \right]_{\min S} = \frac{105}{\pi^7 \tau^7} [\pi\tau(-15 + \pi^2 \tau^2) \cos(\pi\tau) + 3(5 - 2\pi^2 \tau^2) \sin(\pi\tau)]$$

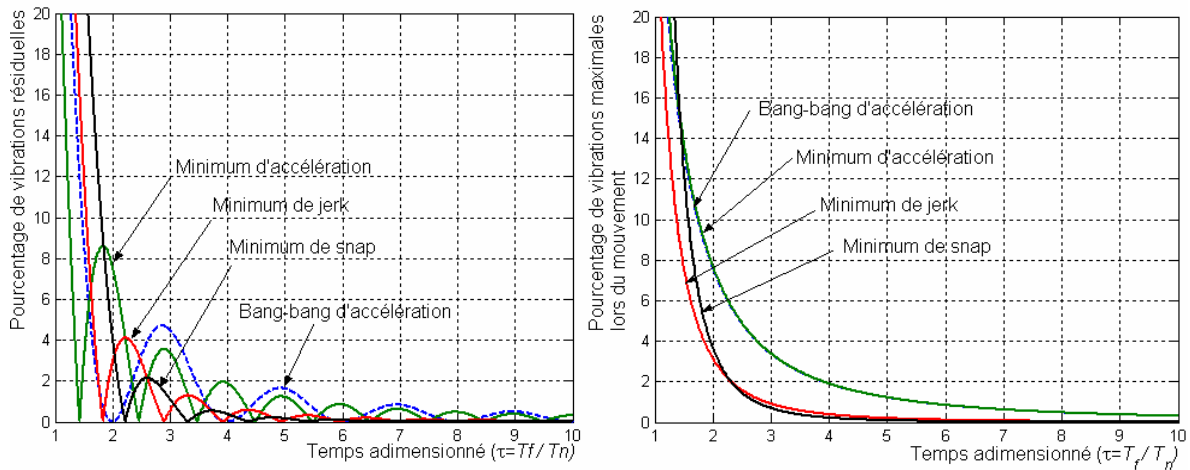


Figure II.7. – Graphes de vibration maximale pour les lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum, comparé au bang-bang d'accélération.

La figure II.7 représente le graphe de vibration pour les trois lois polynomiales étudiées, comparées à celui de la loi en bang-bang d'accélération. On rappelle que le pourcentage de dépassement est ici donné par rapport à la longueur du déplacement. La loi à accélération minimum correspond à un échelon unique sur le jerk de commande. Les vibrations induites par cette loi lors du mouvement, et à la fin de celui-ci, sont comparables à celle de la loi étalon en bang-bang d'accélération. Par contre, l'utilisation de polynômes d'ordre supérieur apporte une nette réduction du niveau vibratoire pour des déplacements d'une durée supérieure à deux fois la période propre du mode dominant. On notera que pour des déplacements plus courts (inférieurs à deux fois la pulsation du mode propre) il y a déformation élastique durant le mouvement, mais la vibration n'a pas le temps de s'établir avant la phase d'arrêt. Comme on pouvait l'imaginer intuitivement, on vérifie que plus le polynôme est d'un degré élevé, donc plus la loi de mouvement est d'une classe de continuité élevée, et moins les vibrations résiduelles sont importantes. La réduction des vibrations lors du mouvement est quant à elle comparable pour les lois à jerk et snap minimum.

Il faut cependant garder à l'esprit que plus la loi sera douce et plus le mouvement sera long. Les accélérations et vitesses maximales pour chacune des lois polynomiale sont données par :

$$\begin{aligned}
 [\max A]_{\min A} &= \frac{6x_{ref}}{T_f^2}; & [\max V]_{\min A} &= \frac{3x_{ref}}{2T_f} \\
 [\max A]_{\min J} &= \frac{10x_{ref}}{\sqrt{3}T_f^2}; & [\max V]_{\min J} &= \frac{15x_{ref}}{8T_f} \\
 [\max A]_{\min S} &= \frac{84x_{ref}}{5\sqrt{5}T_f^2}; & [\max V]_{\min S} &= \frac{35x_{ref}}{16T_f}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

On remarque que lors de petits et moyens déplacements (seule l'accélération maximale est atteinte) la durée du mouvement sera quasiment équivalente pour les lois à accélération et jerk minimum. Ces deux lois conduisent à une durée de mouvement 20% plus longue par rapport à la loi de référence en bang-bang d'accélération. Quant à la loi à snap minimum, elle allonge de plus de 37 % la durée du mouvement. Pour des déplacements plus longs (vitesse maximale atteinte), on aura une augmentation de plus de 20 % de la durée du mouvement entre une loi à accélération minimum et une loi à jerk minimum, de même entre une loi à jerk minimum et une loi à snap minimum.

D'après ce constat théorique, la loi à jerk minimum semble déjà fournir un compromis raisonnable entre la réduction des amplitudes de vibration et la durée du mouvement.

II.2.2.3 Notes sur l'annulation des vibrations résiduelles

Pour tous les graphes de vibration présentés, on note l'existence de zones de vibration résiduelle nulle. Contrairement à ce que nous verrons pour les lois bang-bang, ces zones ne sont pas exploitables dans le cas des lois continues. En effet, la durée du mouvement, et donc la variable adimensionnée $\tau = T_f / T_n$, est ici fixée par la distance à parcourir et par la limitation de l'accélération. Les zones exemptes de vibration ne sont atteintes que pour certaines longueurs de déplacement. Seule la discrétisation du mouvement des lois continues par partie offre le paramétrage nécessaire à l'utilisation de ces zones.

II.3 Lois de mouvement bang-bang

Nous rappelons qu'une loi bang-bang consiste à saturer la variable de commande du système (dans notre cas l'accélération de référence), ou une de ses dérivées, en commutant un certain nombre de fois d'un niveau maximal à un niveau minimal autorisé. La figure II.8 illustre le principe général du paramétrage des commutations. Ce type de profil peut être réalisé par sommation d'échelons de différentes amplitudes et retardés dans le temps.

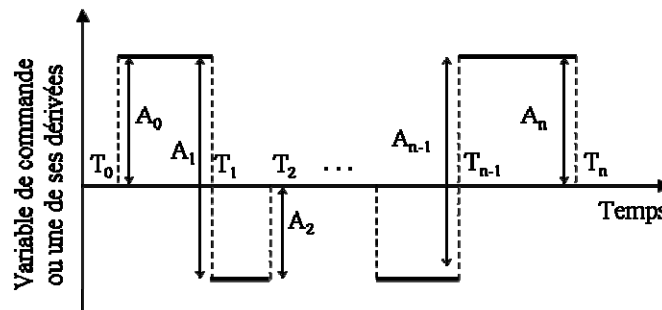


Figure II.8 – Définition générique d'une loi de mouvement bang-bang.

On notera qu'une loi bang-bang imposée à la dérivée $n^{ième}$ de la position peut se mettre sous la forme :

$$x_{ref}^{(n)}(t) = \left| x_{ref}^{(n)} \right|_{\max} \cdot \left(\sum_{i=1}^n A_i \cdot H(t - T_i) \right) \quad (28)$$

avec $\left| x_{ref}^{(n)} \right|_{\max}$ la limite fixée pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la position, H la fonction de Heavyside, T_i les instants de commutation des échelons d'amplitude A_i . L'instant initial T_0 sera pris égal à 0 et l'instant final sera noté $T_n = T_f$. Les limitations étant supposées symétriques, les amplitudes A_i vérifient $A_i \in \{-2, -1, 1, 2\} \forall i$.

II.3.1 Définition d'une loi en temps optimal

II.3.1.1 Fondamentaux

Le problème général de la commande en temps optimal consiste à déterminer la variable de commande u du système physique, de façon à réaliser un mouvement d'un état à un autre le plus rapidement possible, tout en étant soumis aux contraintes de l'actionneur : $|u| \leq u_{\max}$. Toute loi de mouvement vérifiant ce problème, définit une référence qui caractérise la rapidité avec laquelle le système peut être déplacé d'un état à un autre. L'importance des fondements de ce problème en a fait le sujet de nombreuses investigations depuis plus de 40 ans [PONTRYAGIN - 1962]. Nous ne discuterons pas ici des nombreuses "écoles" concernant la résolution de ce type de problème, ainsi que de leurs champs d'application. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur le sujet peut se reporter aux travaux présentés dans [TUTTLE - 1997]. Pour le cas présent, celui des systèmes linéaires, il existera toujours une commande en temps optimal et elle sera unique.

La commande en temps optimal repose sur le principe du bang-bang. Ce principe formulé par Hermes [HERMES - 1969] consiste à dire que si l'on désire déplacer un système d'un état à un autre en temps minimum, alors il est nécessaire d'utiliser à tout instant le maximum de puissance disponible donc d'utiliser une loi bang-bang.

Pour une commande en effort et un système supposé rigide (un système intégrateur), la commande en temps optimal prend la forme de la loi classique à accélération limitée (bang-bang d'accélération) disponible dans tous les systèmes de commande du marché et décrite à la figure II.2. L'expérience nous montre toutefois que la loi de mouvement à accélération limitée présente des discontinuités que les systèmes mécaniques ne peuvent suivre, quelles que soient les performances de leurs actionneurs. Ces discontinuités contraignent la structure lors des phases transitoires et sont responsables, pour une grande part, de la dégradation du comportement vibratoire et de la détérioration par fatigue des composants mécaniques. Une solution pour diminuer le spectre de la loi à accélération limitée consiste, non seulement à considérer les limites d'accélération de l'actionneur (limitation de courant), mais également à imposer des contraintes sur la façon dont cette accélération varie dans le temps; autrement dit d'imposer des limites sur les dérivées de l'accélération.

Si l'on souhaite réaliser un mouvement en temps minimum, tout en imposant une limitation sur la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la position (avec $n \geq 2$), la théorie de la commande optimale nous dit que la trajectoire en temps minimum vérifie [BONNANS - 2003] :

- la commande optimale est toujours de type bang-bang. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de la position prend les valeurs $+\left| x_{ref}^{(n)} \right|_{\max}$ ou $-\left| x_{ref}^{(n)} \right|_{\max}$;
- il y a au plus $n-1$ instant de commutation entre les instants initiaux et finaux ;

- Les instants de commutation sont déterminés par les conditions aux limites (sur la position et ses $n-1$ dérivées).

II.3.1.2 Application à l'obtention de loi à jerk et snap limité

La majorité des commandes numériques destinée à la machine-outil gère aujourd'hui une loi de mouvement à jerk limité ($n = 3$), c'est-à-dire à taux de variation de l'accélération limité. En appliquant le résultat précédent au cas d'un mouvement à jerk limité, en notant T_1 et T_2 les deux instants de commutation du jerk entre $T_0 (= 0)$ et T_f , J_m représentant l'amplitude maximale des échelons de jerk (i.e. $|\ddot{x}_{ref}|_{\max} = J_m$), nous obtenons la loi suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T_1 \quad \ddot{x}_{ref} = J_m \quad \Rightarrow \quad x_{ref}(t) = \frac{J_m t^3}{6} \\ T_1 \leq t \leq T_2 \quad \ddot{x}_{ref} = -J_m \quad \Rightarrow \quad x_{ref}(t) = x_{ref}(T_1) + \dot{x}_{ref}(T_1)(t - T_1) + \ddot{x}_{ref}(T_1) \frac{(t - T_1)^2}{2} - \frac{J_m (t - T_1)^3}{6} \\ T_2 \leq t \leq T_f \quad \ddot{x}_{ref} = J_m \quad \Rightarrow \quad x_{ref}(t) = x_{ref}(T_2) + \dot{x}_{ref}(T_2)(t - T_2) + \ddot{x}_{ref}(T_2) \frac{(t - T_2)^2}{2} - \frac{J_m (t - T_2)^3}{6} \end{array} \right. \quad (29)$$

En imposant les conditions aux limites sur la vitesse et l'accélération (dans notre cas un mouvement de type point à point, donc la vitesse et l'accélération sont nulles aux instants initiaux et finaux), nous aboutissons au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(T_2 - T_1) = T_f \\ \frac{T_1^2}{2} + T_1(T_2 - T_1) - \frac{(T_2 - T_1)^2}{2} + (2T_2 - T_1)(T_f - T_2) + \frac{(T_f - T_2)^2}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (30)$$

D'où l'on déduit les valeurs des instants de commutations optimaux liés à la durée du mouvement :

$$T_1 = T_f / 2; \quad T_2 = 3T_f / 4 \quad (31)$$

$$T_f = \left(\frac{32x_{ref}}{J_m} \right)^{1/3} \quad (32)$$

Ainsi, la trajectoire définie par les équations (29) représente le mouvement à jerk limité en temps optimal. La durée du mouvement se déduit naturellement de la longueur du déplacement désirée (cf. équation (32)).

Cette loi en temps optimal doit être modifiée si l'on ajoute des contraintes sur les autres dérivées de la position, c'est-à-dire sur la vitesse et l'accélération. Si l'on considère à présent les contraintes suivantes :

$$|\dot{x}_{ref}| \leq V_m; \quad |\ddot{x}_{ref}| \leq A_m; \quad |\ddot{x}_{ref}| \leq J_m \quad (33)$$

il faut dès lors tenir compte des déplacements pour lesquels la limite d'accélération et/ou de vitesse est violée. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter des phases d'accélération et/ou de vitesse constante pour lesquelles le jerk sera nul. La trajectoire optimale est donc toujours définie par les équations du mouvement (29) sauf dans les cas suivants :

- Si l'accélération lors de la première commutation vérifie $\ddot{x}_{ref}(T_1) > A$, alors la trajectoire optimale est augmentée de 2 commutations supplémentaires et devient :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq T_1 & \ddot{x}_{ref} = J_m \\ T_1 \leq t \leq T_2 & \ddot{x}_{ref} = 0 \\ T_2 \leq t \leq T_3 & \ddot{x}_{ref} = -J_m \\ T_3 \leq t \leq T_4 & \ddot{x}_{ref} = 0 \\ T_4 \leq t \leq T_f & \ddot{x}_{ref} = J_m \end{cases} \quad (34)$$

En notant T_j et T_a les durées des phases respectivement à jerk et à accélération constante non nulle, les instants de commutations optimaux s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_1 = T_j = \frac{A_m}{J_m}; T_2 = T_j + T_a = \frac{T_f}{2} - T_j; \\ T_3 = 3T_j + T_a = \frac{T_f}{2} + T_j; T_4 = T_f - T_j \end{aligned} \quad (35)$$

Et la durée du mouvement exprimée en fonction de la longueur du déplacement désiré :

$$T_f = \sqrt{\left(1 + \frac{4x_{ref}}{A_m}\right) + \frac{A_m}{J_m}} \quad (36)$$

- Si maintenant la vitesse maximale vérifie $\dot{x}_{ref}(T_f/2) > V_m$, alors la trajectoire optimale est à nouveau augmentée de 2 commutations supplémentaires et prend la forme :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq T_1 & \ddot{x}_{ref} = J_m \\ T_1 \leq t \leq T_2 & \ddot{x}_{ref} = 0 \\ T_2 \leq t \leq T_3 & \ddot{x}_{ref} = -J_m \\ T_3 \leq t \leq T_4 & \ddot{x}_{ref} = 0 \\ T_4 \leq t \leq T_5 & \ddot{x}_{ref} = -J_m \\ T_5 \leq t \leq T_6 & \ddot{x}_{ref} = 0 \\ T_6 \leq t \leq T_f & \ddot{x}_{ref} = J_m \end{cases} \quad (37)$$

En notant T_v la durée de la phase à vitesse maximale, les instants de commutations sont définis par :

$$\begin{aligned} T_1 = T_j = \frac{A_m}{J_m}; T_2 = T_j + T_a = \frac{V_m}{A_m}; T_3 = 2T_j + T_a = \frac{V_m}{A_m} + \frac{A_m}{J_m}; \\ T_4 = 2T_j + T_a + T_v = \frac{P_{ref}}{V_m}; T_5 = 3T_j + T_a + T_v = \frac{P_{ref}}{V_m} + \frac{A_m}{J_m}; \\ T_6 = 3T_j + 2T_a + T_v = \frac{P_{ref}}{V_m} + \frac{V_m}{A_m} \end{aligned} \quad (38)$$

Et la durée du mouvement devient :

$$T_f = \frac{x_{ref}}{V_m} + \frac{V_m}{A_m} + \frac{A_m}{J_m} \quad (39)$$

Selon que les limites d'accélération et/ou de vitesse maximales sont atteintes, la loi de mouvement en temps optimal à jerk limité sera définie par une des trois lois représentées à la figure II.9 (cf. équations (29), (34) et (37)). Concrètement, ces trois lois correspondent aux différents types de déplacement que l'on peut rencontrer lors d'un cycle de fonctionnement, c'est-à-dire les « petits déplacements » pour lesquels l'accélération maximale n'est pas atteinte, les « moyens déplacements » pour lesquels l'accélération maximale est atteinte mais pas la vitesse maximale et les « grands déplacements » pour lesquels l'accélération et la vitesse maximale sont atteintes.

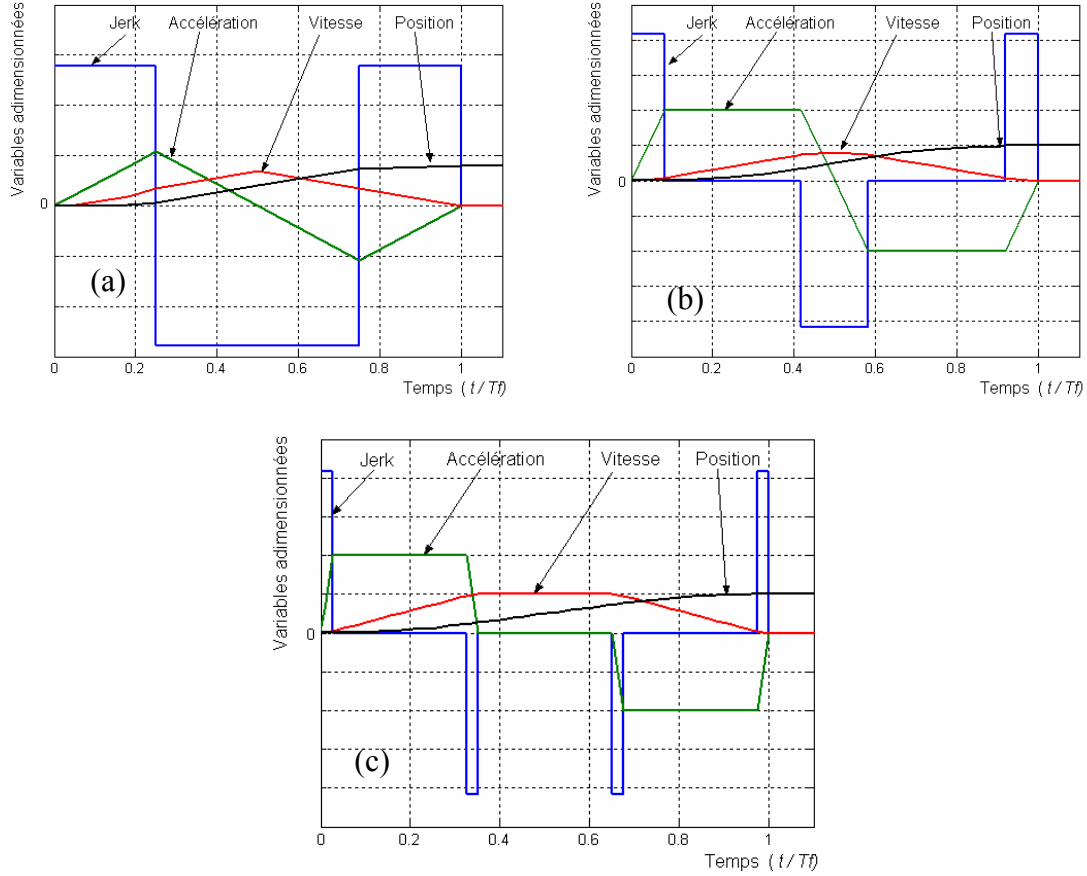


Figure II.9 – Lois de mouvement en temps minimum à jerk limité : (a) sans contrainte de vitesse et d'accélération, (b) contrainte d'accélération maximale atteinte, (c) contraintes de vitesse et d'accélération maximales atteintes.

De la même façon, on peut imaginer une loi en bang-bang limitant la variation du jerk, donc une loi à snap limité telle que proposée dans [CHANG - 2003] ou [LAMBRECHTS - 2005]. En notant T_1 , T_2 et T_3 les trois instants de commutation du snap entre $T_0 (= 0)$ et T_f , S_m étant la valeur maximale du snap (i.e. $|\ddot{\ddot{x}}_{ref}|_{max} = S_m$), nous obtenons la loi en temps minimum suivante :

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq T_1 & \quad \ddot{\ddot{x}}_{ref} = S_m \\
 T_1 \leq t \leq T_2 & \quad \ddot{\ddot{x}}_{ref} = -S_m \\
 T_2 \leq t \leq T_3 & \quad \ddot{\ddot{x}}_{ref} = S_m \\
 T_3 \leq t \leq T_f & \quad \ddot{\ddot{x}}_{ref} = -S_m
 \end{aligned} \tag{40}$$

Les conditions aux limites sur la position, la vitesse, l'accélération et le jerk conduisent à la définition des commutations suivantes :

$$T_1 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})T_f; \quad T_2 = T_f/2; \quad T_3 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})T_f \tag{41}$$

Et la durée du mouvement s'écrit en fonction de la distance parcourue et de la limite de snap :

$$T_f = \sqrt[4]{\frac{384x_{ref}}{S_m}} \tag{42}$$

La figure II.10 représente le profil générique de la loi à snap limité en temps optimal. On note que la variable de jerk évolue de façon non symétrique (la valeur maximale du jerk est atteinte au début de

la phase de décélération). Si l'on veut intégrer les autres limitations dynamiques, et donc la limitation du jerk, il est nécessaire de définir une loi pour laquelle le profil de jerk sera symétrique par rapport à l'axe horizontal. Pour cela, il faut ajouter deux nouvelles commutations et définir la loi présentée à la figure II.11. Les 5 commutations sont alors données par :

$$T_1 = \frac{T_f}{8}; \quad T_2 = 3\frac{T_f}{8}; \quad T_3 = \frac{T_f}{2}; \quad T_4 = \frac{5T_f}{8}; \quad T_5 = \frac{7T_f}{8} \quad (43)$$

La durée du mouvement augmente alors inévitablement de 7 % par rapport au profil initial :

$$T_f = \sqrt[3]{\frac{512x_{ref}}{S_m}} \quad (44)$$

Cette dernière loi évolue en fonction des contraintes imposées sur le jerk, l'accélération et la vitesse. La figure II.12 représente la forme générique d'une loi de mouvement en snap intégrant toutes les limitations dynamiques :

$$|\dot{x}_{ref}| \leq V_m; \quad |\ddot{x}_{ref}| \leq A_m; \quad |\dddot{x}_{ref}| \leq J_m; \quad |\ddddot{x}_{ref}| \leq S_m \quad (45)$$

Les algorithmes permettant de définir les instants de commutation pour la loi à jerk limité ainsi que pour la loi à snap limité sont donnés en annexe A.2 sous la forme de fonctions utilisables sous le logiciel Matlab® (The MathWorks Inc.).

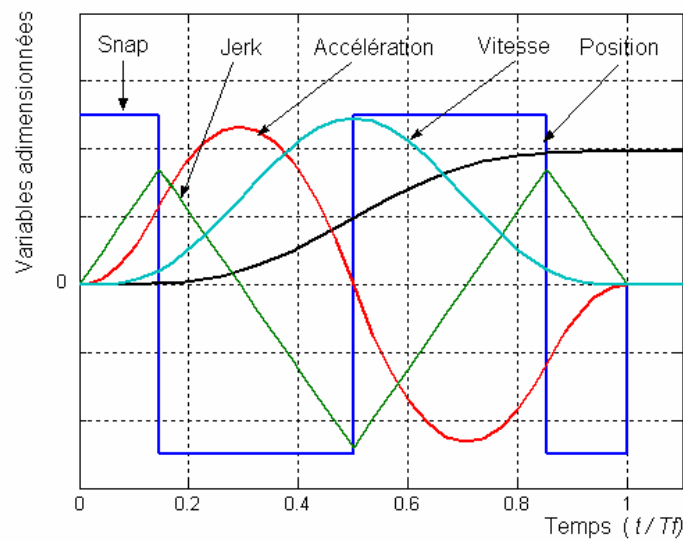


Figure II.10. – Profil de la loi de mouvement à snap limité en temps optimal.

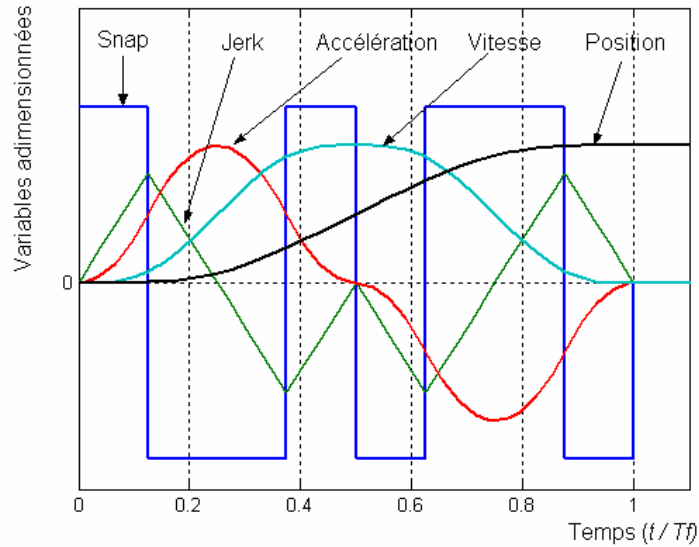


Figure II.11. – Profil de la loi de mouvement à snap limité avec symétrie des maximums de jerk.

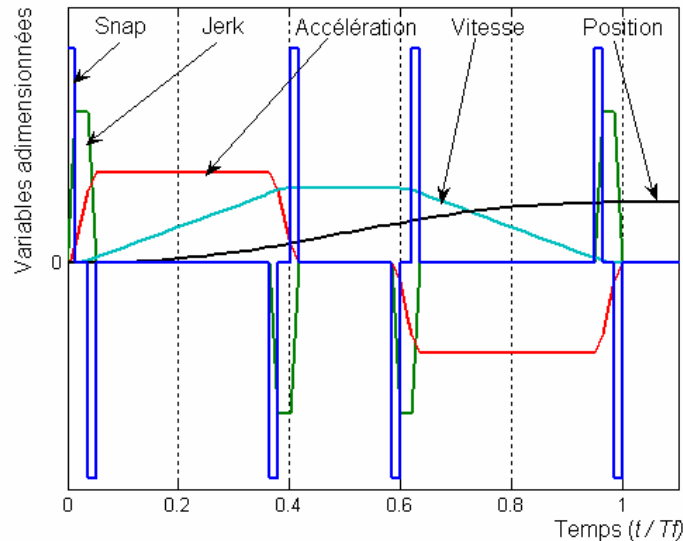


Figure II.12. – Loi de mouvement à snap limité intégrant toutes les limitations cinématiques.

Les lois étudiées à jerk et à snap limités permettent de définir un mouvement qui, pour des limitations données sur les maxima des dérivées de la position, minimisent le temps d'exécution. Naturellement, ces lois en bang-bang sur une dérivée de l'accélération auront un spectre d'excitation moins important que la loi à accélération limitée. Les graphes de vibrations de la figure II.13 illustrent ces effets pour des durées de mouvement supérieures à 3 fois la période propre considérée. On notera que les graphes présentés correspondent aux lois en temps optimal, c'est-à-dire à la loi à jerk limité donnée à la figure II.9 (a) et à la loi à snap limité présentée à la figure II.11. Pour ces lois optimales, tout comme pour les lois continues vues précédemment, la durée du mouvement et la valeur du jerk ou du snap maximal sont naturellement fixées par la distance à parcourir et par la limite d'accélération commune. Mais dès que l'on considère une loi à jerk ou à snap limité intégrant toutes les limitations possibles (cf. figure II.9 (c) et figure II.12), les valeurs limites de ces dérivées et les différentes durées des phases à accélération ou vitesse constantes deviennent autant de paramètres pour lesquels il existe une infinité de combinaisons conduisant à décrire la même distance (la durée de mouvement est bien évidemment modifiée dans ce cas).

Dès lors, un problème se pose : Quelles valeurs maximales donner au paramètre de jerk et de snap ? En effet, si la limitation de la vitesse et de l'accélération est facilement justifiable en considérant la technologie du système et de ses actionneurs (limites de tension, courant, fatigue des constituants mécaniques), la détermination d'une limitation pour le jerk ou le snap semble bien plus intuitive. Dans la partie suivante, l'étude de certaines caractéristiques des lois bang-bang va nous permettre de proposer un réglage de ces valeurs maximales.

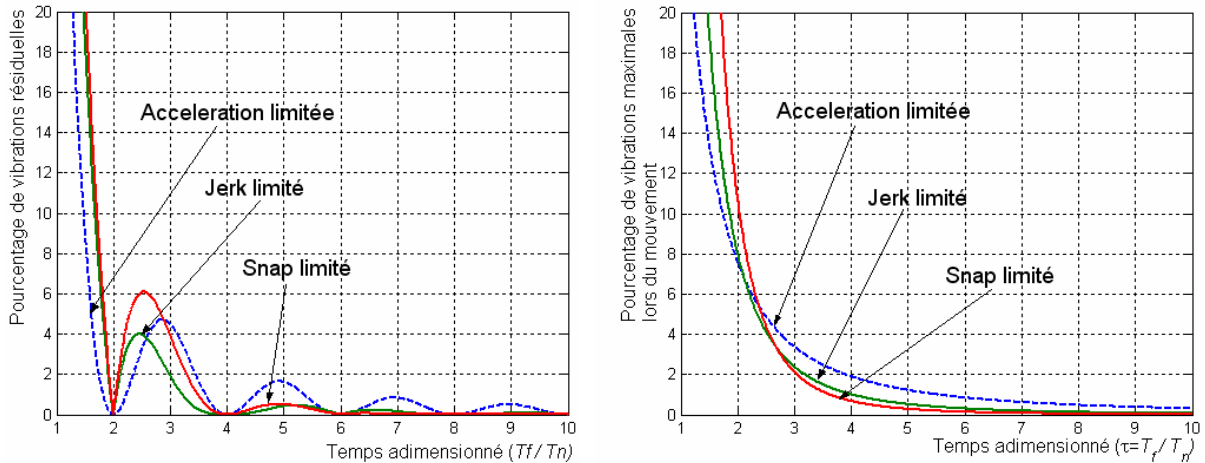


Figure II.13. – Graphes de vibration maximale pour les lois de mouvement à accélération, jerk et snap limités en temps optimal.

II.3.2 Propriétés des lois bang-bang par l'analyse du lieu des pôles et zéros

L'expression d'une loi bang-bang dans le domaine de Laplace prendra la forme d'un filtre retardé représenté à la figure II.14. L'entrée du filtre est un échelon unitaire imposés à la dérivée $n^{ième}$ de la position, il est par conséquent nécessaire d'intégrer $n-2$ fois le profil de cette dérivée afin d'obtenir la loi de mouvement en accélération. La mise sous la forme d'une fonction de transfert de la loi de mouvement va nous permettre de mettre en évidence les caractéristiques particulières des lois bang-bang.

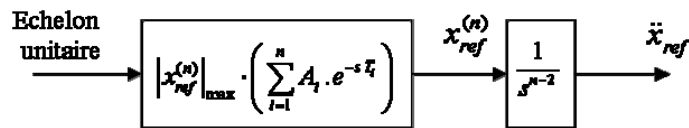


Figure II.14 – Structure du filtre retardé équivalent au profil bang-bang.

On rappelle que si l'on veut qu'un système réalise exactement sa consigne, il faut que le mouvement demandé appartienne aux trajectoires physiques du système (en l'absence de perturbations); Autrement dit, il faut que le modèle du processus soit inversé dans la définition même de la loi de mouvement. La fonction de transfert en poursuite d'un système linéaire peut se mettre sous la forme pôles et zéros :

$$P(s) = k \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_m)} \quad (46)$$

Avec p_i et z_i respectivement les pôles et zéros du processus, tous à partie réelle négative⁹ et tels que $m \geq n$ (respect de la causalité). Par exemple, pour le modèle d'axe tenant compte d'un mode de transmission, la fonction de transfert entre la position de la charge et l'effort de commande intègre un pôle rigide (relation position/vitesse), un pôle réel négatif ou rigide selon que l'on considère ou non les frottements au niveau des masses (mode dominant ou mode de corps rigide) et une paire de pôles complexes conjugués (mode oscillant stable). Le principe général de l'inversion du modèle s'interprète alors par le placement de zéros sur les pôles du système, ce que l'on appelle compensation des pôles (de même le placement de pôles sur les zéros du processus).

La fonction de transfert de la loi bang-bang générique représentée à la figure II.8 peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{x}_{ref}(s) = \frac{|x_{ref}^{(n)}|_{\max}}{s} \cdot F(s) \cdot \frac{1}{s^{n-2}}; \quad (47)$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{-sT_i}$$

Où $F(s)$ représente un filtre retardé. La fonction retard pur peut être linéarisée par une méthode d'approximation telle que celle développée par Padé. La représentation continue d'un retard pur dans le lieu des racines prend alors la forme d'une infinité de zéros instables et de pôles stables disposés en cercle autour de l'origine, comme décrit à la figure II.15. Si maintenant, nous représentons la somme de plusieurs éléments retardés, le lieu des racines est totalement différent. Dans le cas présenté à la figure II.15, les pôles sont tous stables et les zéros sont disposés de part et d'autre de l'axe imaginaire. De plus, ces zéros peuvent être réels purs, imaginaires purs ou complexes. Cet exemple de commutation entre deux éléments de retard nous montre qu'il est possible, en jouant sur les paramètres des commutations (i.e. A_i et T_i), de venir placer des zéros dans le lieu des racines et par conséquent qu'il est possible d'utiliser la définition même d'une loi bang-bang pour compenser les pôles du système.

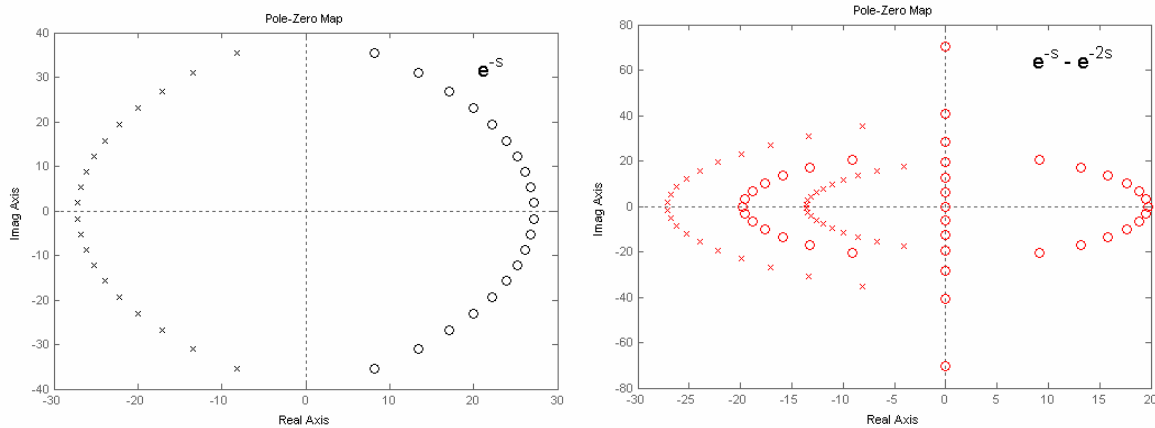


Figure II.15 – Lieu des pôles et zéros : (gauche) élément retard pur et (droite) commutation entre deux éléments retardés (le retard est linéarisé par l'approximation de Padé à l'ordre 20).

La compensation des pôles du système par la loi bang-bang peut se traduire par le fait de définir un filtre $F(s)$ de telle sorte que sa réponse impulsionnelle présente des zéros exactement à l'endroit des

⁹ Dans notre cadre d'application, nous ne considérons pas le cas particulier des zéros instables (> 0). Les modèles linéaires utilisés dans cette étude sont tous à minimum de phase.

pôles du système. En notant p_k les pôles du modèle du processus considéré, la compensation des pôles du système par la loi bang-bang s'écrira :

$$\begin{aligned} p_k \text{ est un pôle réel (ou rigide)} \\ \rightarrow F(s) \Big|_{s=p_k} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} p_k \text{ est un pôle réel (ou rigide) de multiplicité } m \\ \rightarrow \frac{d^i F(s)}{ds^i} \Big|_{s=p_k} = 0 \quad \forall i = 0 \dots m-1 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} p_k \text{ est un pôle complexe conjugué, i.e } p_k = -\zeta_k \omega_k \pm j \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} \\ \text{avec } \omega_k \text{ et } \zeta_k \text{ la pulsation propre et l'amortissement du mode} \\ \rightarrow F(s) \Big|_{s=-\zeta_k \omega_k \pm j \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Il est important de noter que la loi de mouvement en accélération précédemment définie résulte de $n-2$ intégrations du profil en échelon, par conséquent il est nécessaire d'ajouter ces intégrations au modèle du processus pour appliquer les règles de compensation. Le modèle ainsi augmenté contiendra alors entre un et deux pôles rigides ($p_k = 0$) issus du processus auxquels il faut ajouter les $n-2$ pôles rigides précédents. Nous ne détaillerons pas ici le cas de la compensation des pôles réels, mais cette compensation est naturellement vérifiée si l'on considère les propriétés de symétrie du profil bang-bang [MUENCHOF - 2001].

Dans ce qui suit nous allons nous focaliser sur la compensation de pôles complexes du processus, puisqu'il s'agit là d'agir directement sur le caractère vibratoire du système. La compensation d'un pôle complexe p_k par le filtre retardé $F(s)$ s'écrira :

$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{-sT_i} \Big|_{s=-\zeta_k \omega_k \pm j \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}} = 0 \quad (51)$$

La formule (51) implique que la partie réelle et la partie imaginaire du filtre soient toutes deux nulles pour $s = p_k$. Ceci implique que les relations suivantes soient indépendamment vérifiées :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{\zeta_k \omega_k T_i} \cos\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} T_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{\zeta_k \omega_k T_i} \sin\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} T_i\right) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Il existe a priori 3 familles de paramètres sur lesquels nous pouvons agir : le nombre de commutation n , les amplitudes des échelons A_i et les instants de commutation T_i . Ce type de méthodologie de définition d'un filtre annulant les vibrations est propre à une technique appelée "input shaping" développée essentiellement par Singer et Singhose [SINGHOSE – 1997 ; SINGHOSE - 2000]. Les premiers travaux concernant cette technique reposent sur la commande Cast ou Posicast (positive-cast) introduite par Smith dans les années 50 [TALLMAN - 1958]. Son travail prend son origine dans l'observation des phénomènes vibratoires s'annulant naturellement lorsqu'ils sont de même amplitude mais opposés en phase; notre exemple d'introduction concernant le grutier déplaçant sa charge et arrivant à la position désirée sans aucune vibration en est l'image parfaite.

Il convient à présent d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que les vibrations sont effectivement annulées, mais uniquement en quelques points du mouvement. La compensation, ou l'inversion, est en

effet ici liée au temps. Les vibrations résiduelles sont, dans tous les cas, annulées et il peut exister également d'autres instants exempts de vibrations (liés à la symétrie des lois de mouvement). Ainsi la compensation exposée précédemment n'est en fait qu'une compensation "ponctuelle dans le temps". Finalement, l'utilisation de loi bang-bang permet d'inverser le modèle du processus en un nombre finis d'instants lors du mouvement.

Il est possible d'adapter cette propriété aux lois à jerk et snap limités vues précédemment. Si l'on décide d'utiliser ces lois sans aucune modification du nombre de commutations et de l'amplitude des échelons (n et A_i fixée), il est alors possible de jouer sur les instants de commutation des échelons T_i . Pour le cas considéré d'un mode dominant non amorti, une solution triviale du système d'équation (52) consiste à définir ces commutations T_i de façon à correspondre à un multiple de la période propre du système :

$$\text{Soit } T_i = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (k \in \mathbb{N}^*) \text{ et puisque } \sum_{i=1}^n A_i = 1 \text{ pour les lois étudiées}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_n T_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_n T_i) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Remarque : On notera que pour les systèmes dont l'amortissement n'est plus négligeable, il est nécessaire de jouer sur les instants de commutation T_i , ainsi que sur les amplitudes des échelons A_i , afin de vérifier le système d'équations (52). Il est également possible de maintenir des amplitudes fixes, mais il est alors nécessaire d'ajouter des instants de commutations (disposé symétriquement par rapport à la demi-durée de mouvement). La loi de mouvement originale basée sur le transfert énergétique d'un mode rigide doit alors être modifiée.

Le réglage donné à l'équation (53) explique le fait que pour une durée de mouvement égale à un multiple de la période propre du système (supérieur ou égal à 2 afin que l'oscillation puisse s'exprimer), les oscillations résiduelles soient nulles pour les lois à accélération, jerk et snap limités (cf. figure II.13). En effet, dans ce cas la durée séparant deux échelons de la dérivée limitée est un multiple de la période du mode dominant.

Ainsi, si l'on impose que la durée entre deux échelons de la dérivée limitée soit égale à la période du mode considéré, les vibrations résiduelles seront annulées. Les vibrations seront également annulées lors du mouvement en plusieurs points selon le type de loi utilisée. Pour la loi à jerk limité, il existera entre deux et trois instants de vibration nulle, et pour la loi à snap limité, entre cinq et sept, ceci en fonction du nombre de commutations, donc du nombre de limitations atteintes (cf. figure II.9 et figures II.11 et II.12). On notera que ce réglage impose la valeur maximale de la dérivée contrôlée. Elle sera directement liée à la période du mode et à la limite imposée sur la dérivée d'ordre juste supérieur. Par exemple, pour la loi à jerk limité, le réglage permettant d'annuler les oscillations résiduelles consiste à choisir la limite de jerk, fonction de la limite d'accélération et de la période du mode propre, vérifiant :

$$J_m = A_m \cdot T_j \quad \text{avec } T_j = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_n} \quad k = 1, 2, \dots \quad (54)$$

Cette analyse des lois bang-bang, nous a permis de mettre en évidence la possibilité d'annuler les vibrations résiduelles du système. Le réglage proposé a l'avantage supplémentaire de fournir une valeur maximale de la dérivée contrôlée qui n'avait a priori qu'un sens physique abstrait.

II.4 Étude comparative des performances des différentes lois de mouvement

II.4.1 Indices de performance théoriques

Afin de quantifier les performances des différentes lois de mouvement étudiées, deux indices de performances sont déduits du graphe de vibration ; un indice de vibration lors du mouvement I_{vib} et un indice de vibration résiduelle I_{vibres} définis comme suit :

$$I_{vib} = \frac{\text{Aire sous le graphe de vibration}}{\text{Aire sous le graphe de vibration pour la loi en bang-bang d'accélération}}$$

$$I_{vibres} = \frac{\text{Aire sous le graphe de vibration résiduelle}}{\text{Aire sous le graphe de vibration résiduelle pour la loi en bang-bang d'accélération}}$$

On définit également un indice de durée de mouvement théorique :

$$I_{Durée} = \frac{\text{Durée du mouvement théorique}}{\text{Durée du mouvement théorique pour la loi en bang-bang d'accélération}}$$

En utilisant les indices de performances précédents, les différentes lois étudiées peuvent être comparées. On notera que les indices de performances vibratoires sont calculés pour des mouvements d'une durée supérieure à 2 fois la période propre du mode souple. Pour des durées plus courtes, aucune loi ne se démarque. On notera qu'en deçà de cette durée, on parlera de déformations durant le mouvement et non plus de vibrations (puisque l'oscillation n'aura pas le temps de s'établir). La figure II.16 présente l'évolution des deux critères vibratoires en fonction du type de loi utilisé. La figure II.17 montre l'évolution de l'indice sur la durée théorique du mouvement. On rappelle que tous ces indices sont définis comparativement à la loi à accélération limitée (ici en pourcentage).

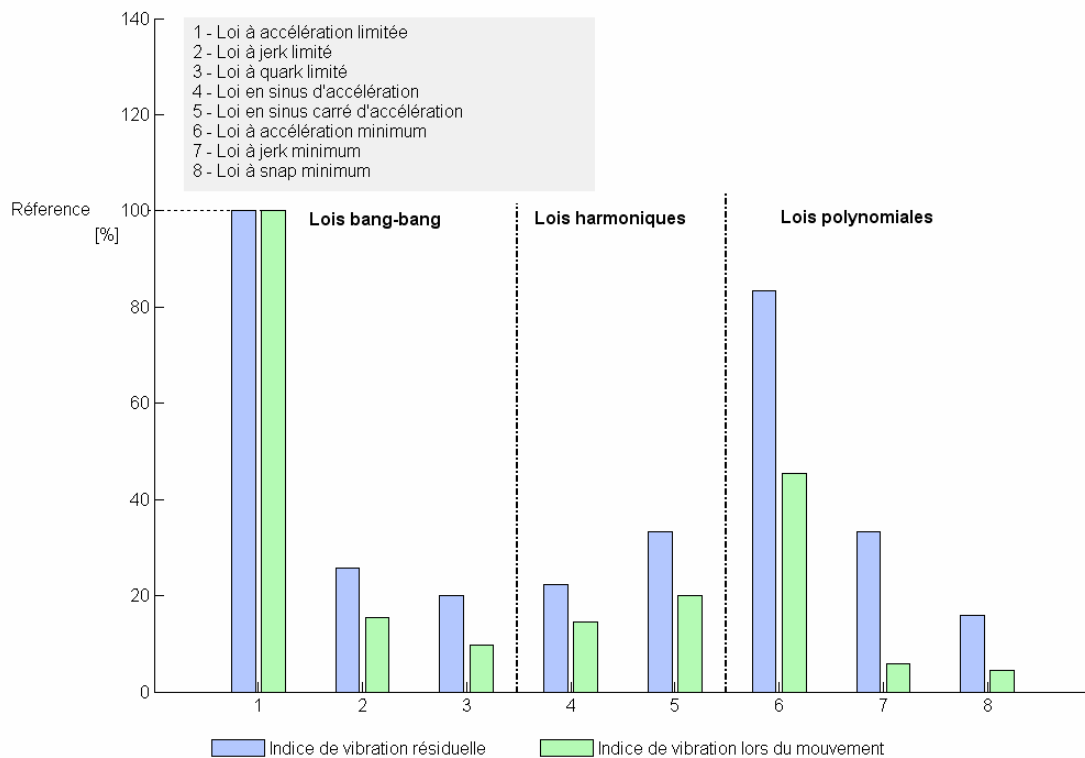


Figure II.16 – Performances théoriques en termes de réduction de vibration des lois de mouvement étudiées.

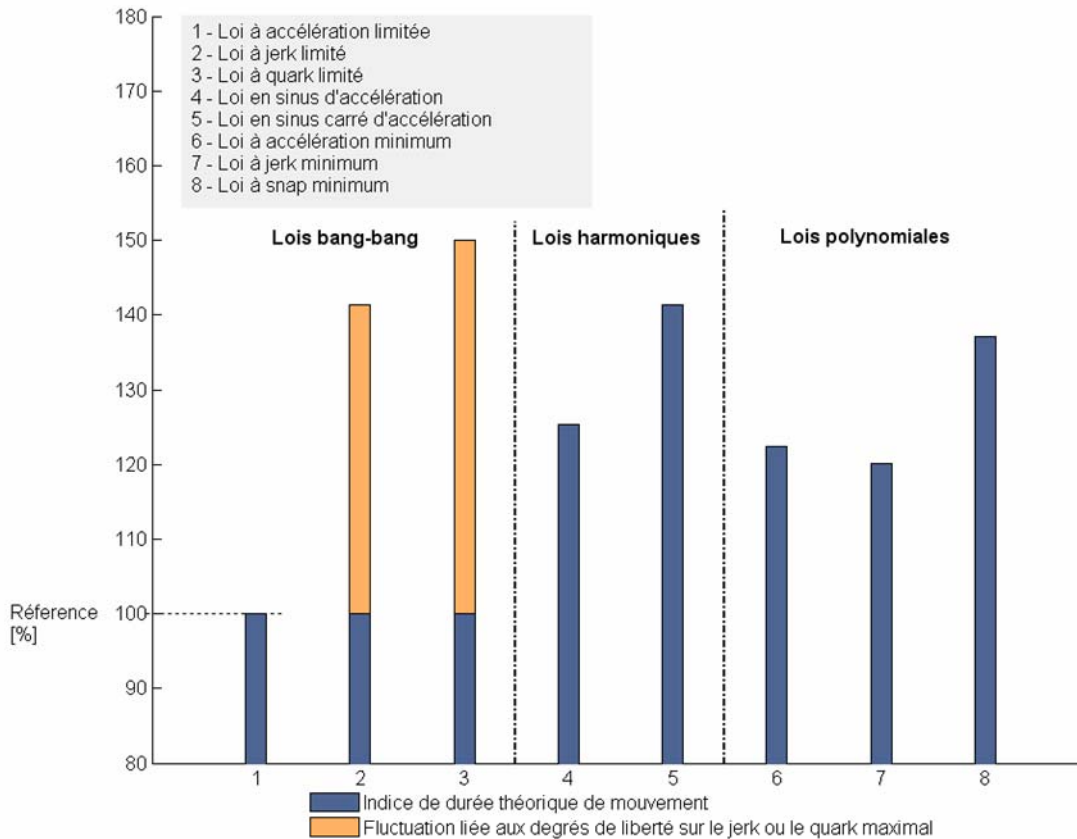


Figure II.17 – Indice de durée de mouvement théorique des lois de mouvement étudiées.

On remarque en comparant les différents indices de performances que les lois en bang-bang de jerk ou de snap peuvent permettre de réaliser un meilleur compromis vis-à-vis de la réduction des oscillations résiduelles et de l'inévitable allongement de la durée de mouvement théorique (par rapport au bang-bang d'accélération). Les lois polynomiales à jerk ou à snap minimum réduisent de façon bien plus significative les vibrations lors du mouvement, mais ceci au détriment du temps de cycle. Quant aux lois harmoniques étudiées, elles n'améliorent pas un critère spécifique et ne permettent pas plus de réaliser un compromis satisfaisant entre les trois critères.

De cette analyse peut découler le choix d'un certain type de loi en fonction du contexte d'utilisation du système. Pour les machines réalisant des opérations du type pick-and-place (mouvement point-à-point) ou pour les usinages où le temps est le critère privilégié (usinage pour l'automobile), la famille des lois bang-bang offre la meilleure solution. Pour des opérations où la précision du suivi de trajectoire est seule privilégiée, il est préférable d'utiliser la douceur "polynomiale".

Les performances des différentes lois de mouvement déduites de l'analyse sont confrontées à la validation expérimentale dans la partie suivante.

II.4.2 Vérifications expérimentales de l'influence des lois de mouvement

Dans cette partie, nous nous proposons d'illustrer l'influence de ces lois de mouvement fondamentales par quelques exemples expérimentaux. Pour ce faire nous employons le premier démonstrateur. Il s'agit d'un banc mono-axe équipé d'un moteur linéaire synchrone *Indramat LSP120C*. Ce type de machine est utilisé pour déplacer rapidement un système d'usinage (tête de perçage). Afin de reproduire le comportement dynamique du système embarqué utilisé en production,

deux ensembles masses/ressorts peuvent être ajoutés en série sur la table en translation. Les caractéristiques de ce démonstrateur sont détaillées en annexe A.3. Un des ensembles masse-ressort est ici bloqué mécaniquement afin de ne tenir compte que d'un mode de déformation unique dominant la réponse vibratoire du système. Le système correspond ainsi **exactement aux hypothèses de travail considérées** dans ce chapitre. Les relevés expérimentaux présentés sont par conséquent une illustration directe de l'influence des lois de mouvement.

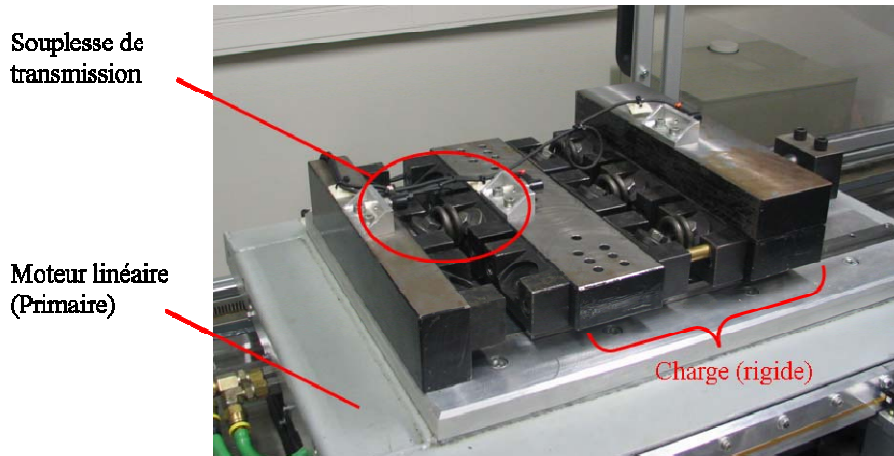


Figure II.18 - Banc d'essais mono-axe. (Caractéristiques : masses embarquées 260+ (20,6+16,5)kg ; accélération = 20 m.s⁻² ; vitesse = 100 m/min).

II.4.2.1 Réglage des lois de mouvement

Les différentes lois étudiées sont calculées pour respecter l'accélération et la vitesse maximale sur l'axe concerné. Ces données associées à la distance à parcourir suffisent pour élaborer la loi de référence à accélération limitée, ainsi que les lois polynomiales et trigonométriques.

En ce qui concerne les lois à jerk ou snap limité, nous utilisons la méthode de réglage décrite dans le paragraphe II.3.2 visant à supprimer les vibrations résiduelles. Ainsi, pour la loi à jerk limité, la valeur maximale de jerk est fixée par l'accélération maximale et par la période propre du système (équation 54). Pour la loi à snap limité, la valeur de snap maximale est fixée par le jerk maximal et par la période propre du système. Par contre, il n'existe pas de limite théorique à la valeur du jerk dans ce cas de figure. Nous avons par conséquent décliné deux cas de réglage : un premier cas où nous utilisons la même valeur de jerk maximal que pour la loi à jerk limité, un deuxième où la valeur de jerk est le double de la précédente.

II.4.2.2 Résultats expérimentaux

Les figures II.19 à II.21 présentent les résultats obtenus sur le démonstrateur mono-axe (banc linéaire Indramat) pour lequel un seul système masse/ressort est utilisé (un seul mode vibratoire). La fréquence propre associée à ce mode est de 12,1 Hz (76 rad/s). Les essais ont été réalisés pour plusieurs longueurs de déplacement. Par souci de clarté, les courbes présentées correspondent à un déplacement de faible amplitude (200 mm) permettant une mise en évidence plus nette des performances en termes de réduction de vibration (l'amortissement du mode n'a que peu d'influence dans ce cas puisque les vibrations induites par les différentes phases du mouvement n'ont pas le temps de s'atténuer).

La figure II.19 permet de vérifier que la procédure de réglage utilisée pour les lois à jerk et snap limités permet effectivement de réduire considérablement les vibrations résiduelles. On notera que dans le cas de la loi à snap limité, la valeur du jerk maximal influe sur l'erreur résiduelle. Pour un jerk

double de celui réglé pour la loi à jerk limité, les vibrations résiduelles augmentent légèrement et la durée de mouvement reste évidemment toujours supérieure à celle obtenue pour la loi à jerk limité. Pour un jerk maximum équivalent sur les deux lois, la loi à snap limité ne provoque pas d'oscillations résiduelles perceptibles. La figure II.20 présente les essais concernant les lois polynomiales. L'augmentation du degré du polynôme accroît naturellement sa "douceur" et l'on vérifie sur les courbes expérimentales que les vibrations diminuent significativement avec cette augmentation. Les résultats obtenus avec les lois en sinus et sinus carré d'accélération montrent également une nette réduction des vibrations comparativement à la loi de référence (figure II.21).

La figure II.22 apporte une quantification des performances des différentes lois en termes de réduction de vibrations. Ces performances sont définies en pourcentage comparativement à la loi à accélération limitée et sont calculées par moyennage sur trois longueurs de déplacement (200, 400 et 600 mm). Les vibrations lors du mouvement sont déduites des courbes d'erreur en poursuite par suppression de la composante associée au mode rigide. On constate que les performances obtenues expérimentalement sont très proches de celles calculées précédemment grâce aux indices vibratoires (cf. figure II.16). La formulation analytique du problème est donc satisfaisante pour décrire l'évolution des amplitudes maximales de vibration en fonction du type de loi de mouvement utilisé.

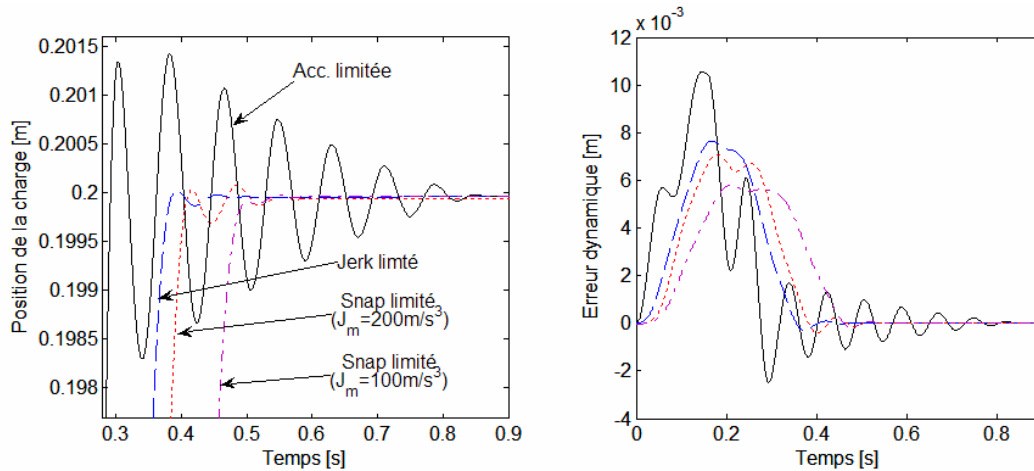


Figure II.19 – Vibrations résiduelles et erreur de poursuite des lois bang-bang (mouvement de 200 mm).

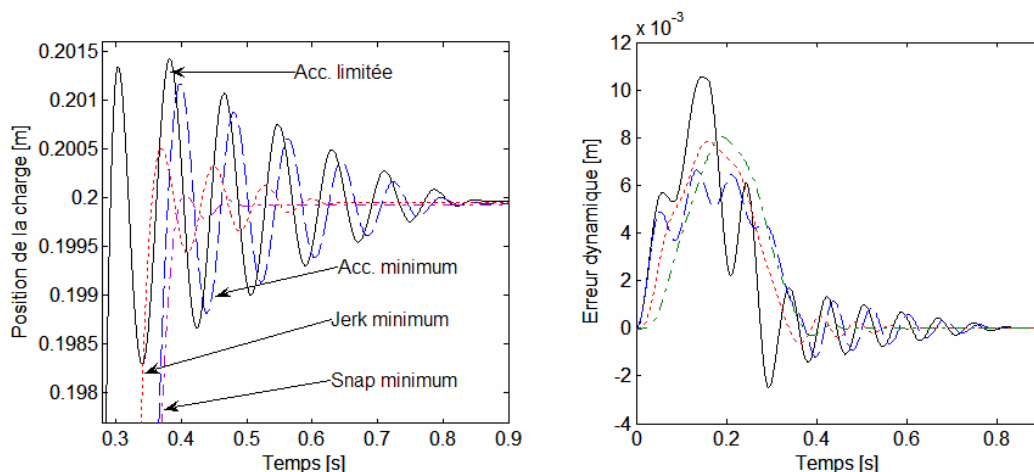


Figure II.20 – Vibrations résiduelles et erreur de poursuite des lois polynomiales (mouvement de 200 mm).

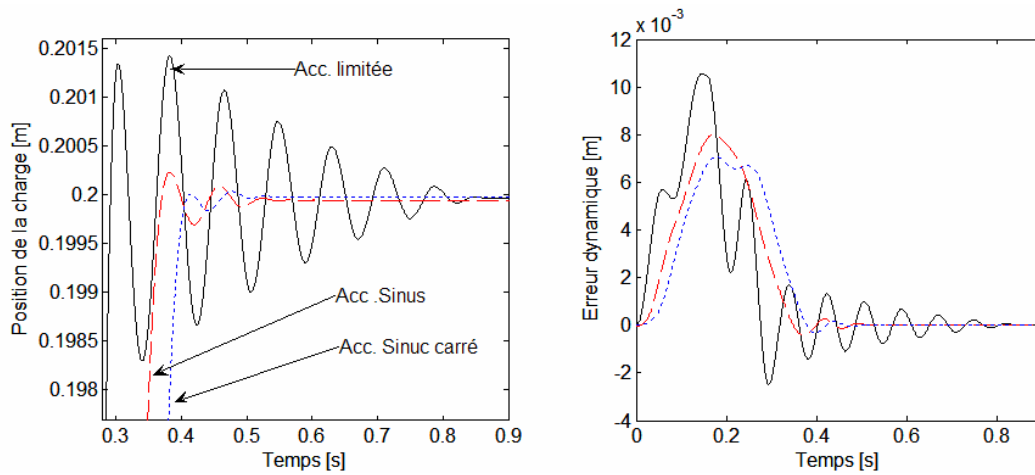


Figure II.21 – Vibrations résiduelles et erreur de poursuite des lois harmoniques (mouvement de 200 mm).

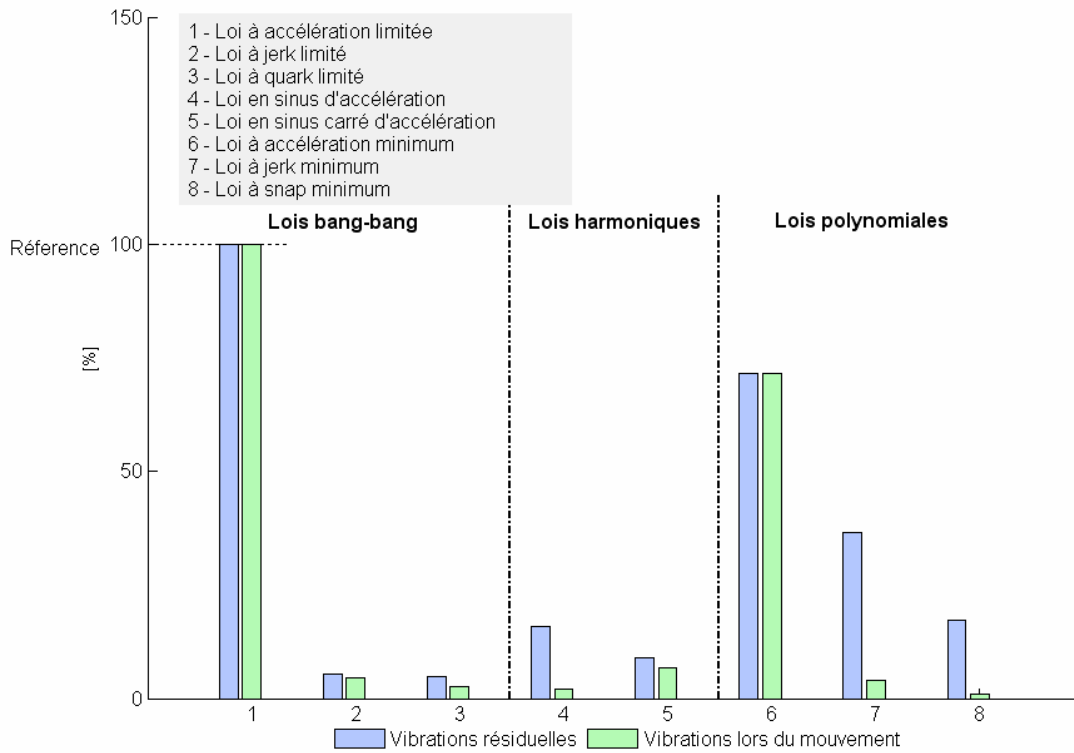


Figure II.22 – Performances mesurées en termes de réduction de vibrations.

La figure II.23 présente les performances en termes de durée du mouvement. La durée du mouvement est ici calculée pour correspondre au temps d'arrivée à 95 % de la position finale. Ces résultats sont également très proches de ceux calculés théoriquement à la figure II.17.

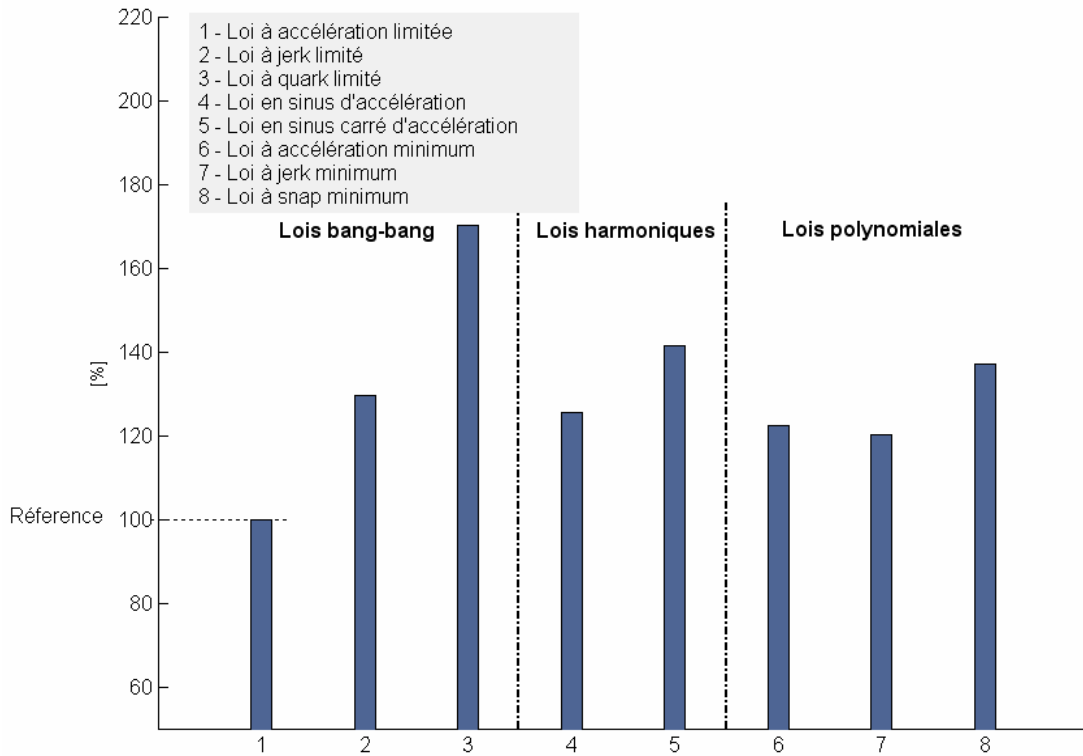


Figure II.23 – Performances des lois étudiées en termes de durée de mouvement (pour atteindre 95 % de la consigne).

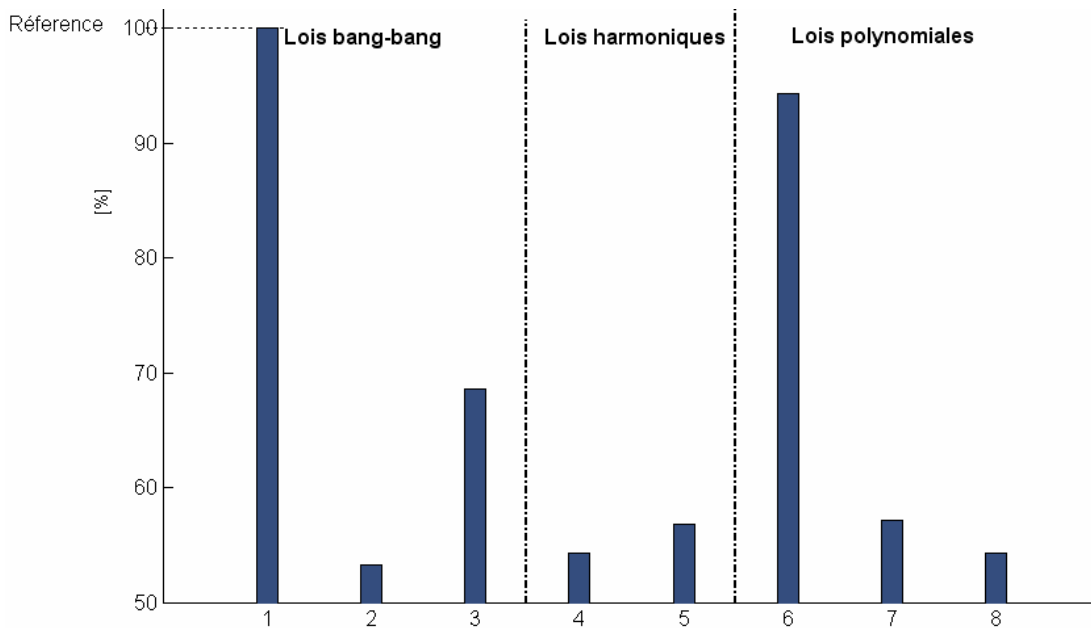


Figure II.24 – Performances des lois étudiées en termes de durée de mouvement en tenant compte d'un critère vibratoire (relaxation dans un tube d'erreur de 0,5 mm).

Les performances, en termes de durée de mouvement, données à la figure II.23 sont toutefois à relativiser. En effet, un critère plus réaliste consiste à calculer la durée du mouvement par rapport à l'établissement de la position de la charge dans un tube d'erreur autour de la consigne. Le temps mis pour entrer dans ce tube sans en sortir est appelé temps de relaxation. Ainsi, le critère temporel tiendra compte également de la qualité de la loi en termes de réduction de vibration. La figure II.24 décrit les

performances obtenues sur la durée du mouvement en tenant compte d'un critère de relaxation de 0,5 mm.

Pour le critère de relaxation choisi, la loi à jerk limité offre le meilleur compromis. On rappelle toutefois que ces performances sont liées à la méthode de réglage du jerk destinée à annuler les vibrations résiduelles du système. Par conséquent, si la fréquence du système évolue, les performances s'en trouveront dégradées. Dans ce cas, la loi en sinus d'accélération et la loi à minimum de jerk deviennent très intéressantes. Ces dernières réduisent notablement les oscillations (sans toutefois les annuler) et réduisent également la durée du mouvement effectif si l'on tient compte d'un critère de relaxation, tout en ne nécessitant aucune connaissance du spectre du système.

II.4.3 Bilan de l'investigation sur l'influence de la loi de mouvement

Pour les systèmes soumis à l'influence de modes vibratoires, tels que les machines à dynamique élevée, la forme de la loi de mouvement détermine de façon significative la durée effective du mouvement ainsi que le niveau de vibrations et/ou de déformations élastiques atteint. Les résultats obtenus, confirmés par l'expérimentation, témoignent de la validité du modèle d'erreur dynamique formalisé dans ce chapitre. L'apport d'une modification de la forme de la loi de mouvement peut ainsi être estimé a priori, sans recourir aux techniques classiques d'essais et erreurs.

La possibilité de supprimer les vibrations résiduelles grâce aux lois de type bang-bang est mise en évidence par l'étude des propriétés d'un filtre équivalent dans le plan complexe. On notera que contrairement à l'utilisation d'un filtre de type bicarré (classiquement un filtre Notch : coupe bande sélectif non récursif), généralement employé pour compenser une fréquence propre, la mise en forme d'une loi de mouvement n'influe pas sur la phase du système et s'avère être plus efficace pour éliminer les vibrations résiduelles [SINGHOSE - 1997].

Le graphe de vibration et les différents critères déduits de ce même graphe sont des outils particulièrement adaptés à l'estimation de l'influence de la forme de la loi de mouvement sur les vibrations et sur la durée effective du mouvement. Ces outils peuvent permettre d'étendre l'étude à d'autres types de lois.

Les lois présentées dans ce mémoire sont soit, déjà disponibles dans les systèmes de commande du marché, soit envisageables à très court terme. D'autres lois, sans doute moins facilement implantables sur un système temps réel, mériteraient d'être investiguées. Les fonctions polynomiales offrent notamment une famille de lois très diverses. Par exemple la loi de mouvement polynomiale peut résulter d'une optimisation sur un critère tel que l'énergie consommée ou encore un compromis entre un critère vibratoire et un critère énergétique [BRUN-PICARD - 2005; HINDLE - 2000]. Parmi les lois harmoniques, il existe une famille particulièrement intéressante que sont les lois basées sur la décomposition harmoniques d'un bang-bang d'accélération. Ces lois, investiguées dans [MECKL – 1994; MECKL - 1988], sont composées d'harmoniques sinusoïdales ou encore de rampes en sinusoïde permettant de s'approcher de l'optimalité temporel du bang-bang d'accélération, tout en étant continues donc "douces" pour la mécanique.

Chapitre III

ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'INFLUENCE D'UNE LOI DE MOUVEMENT À JERK LIMITÉ SUR LES PERFORMANCES D'UN AXE ASSERVI

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre l'étude de la loi de mouvement à jerk limité au cas d'un axe asservi. En effet, la loi à jerk limité est disponible dans les commandes numériques du marché, mais même si la réduction des vibrations apportée par la gestion du jerk est quotidiennement confirmée par l'expérience, il n'existe pas, à notre connaissance, de formalisation de l'effet de ce paramètre associé aux principaux paramètres de commande [MACFARLANE - 2001]. Le pragmatisme de cette partie vise une contribution immédiate en termes d'aide au réglage du jerk.

III.1 Étude de la loi à jerk limité associée aux principaux paramètres de commande actuels

III.1.1 Modèle d'erreur dynamique intégrant les paramètres dominants de l'asservissement classique

Nous considérons toujours le cas d'un axe soumis à un mode vibratoire, mais nous ajoutons cette fois la contribution des principaux paramètres de la structure de commande classiquement utilisée dans l'industrie.

Dans la structure de commande industrielle, les asservissements en courant, vitesse et position sont réalisés selon le schéma des boucles en cascade, détaillé notamment dans [PAPIERNIK - 1996], [GROß - 2001]. La boucle de position contient un simple gain proportionnel ; les boucles de vitesse et courant sont régulées par des correcteurs à action proportionnelle/intégrale (cf. figure III.1). Dans certains cas, des anticipations en vitesse et en accélération agissent en tant que consigne additionnelle respectivement sur la boucle de vitesse et sur la boucle de courant. Suivant que l'on module ou non ces anticipations, on parlera d'anticipation totale ou partielle. L'objectif de l'anticipation est de compenser le retard inhérent à la structure d'asservissement par retour de mesure. On notera que si l'axe est parfaitement anticipé, la loi de mouvement en accélération sera directement appliquée à la

boucle de courant (en l'absence de perturbations extérieures); On se retrouve ainsi dans le cas de la commande directe (approche boucle ouverte) étudiée dans le chapitre précédent.

Dans ce qui suit, nous considérons des asservissements « parfaits » en courant (ce qui se justifie d'autant plus dans le cas d'un axe totalement anticipé en accélération) ainsi qu'en vitesse (ce qui suppose des gains forts). Cette hypothèse revient à négliger la dynamique des boucles de courant et de vitesse devant la boucle de position, et donc à supposer qu'à chaque instant la vitesse du moteur vue par l'asservissement est égale à la vitesse de référence.

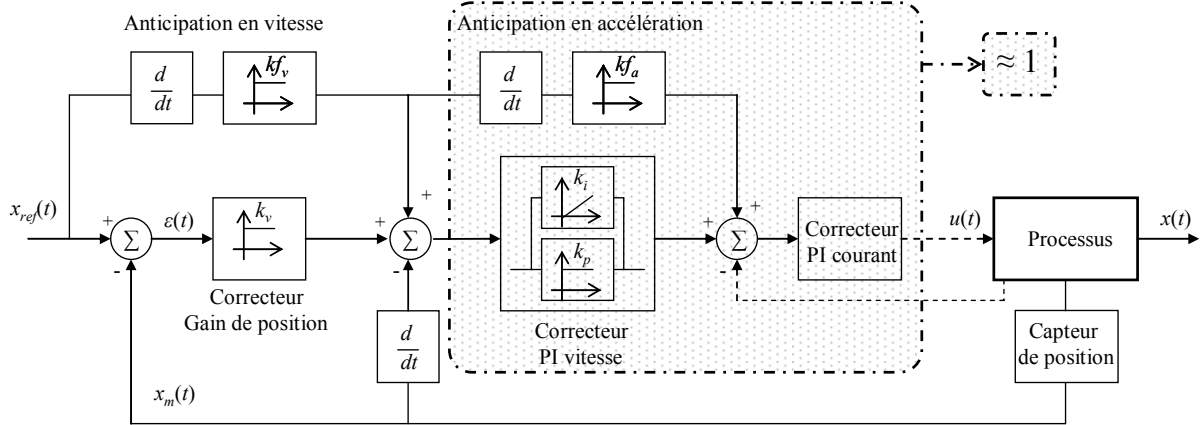


Figure III.1 - Structure de commande simplifiée d'un axe industriel.

Appelons x_{ref} la loi de mouvement théorique souhaitée. Dans le cas d'un axe dominé par un mode de transmission et suite aux hypothèses précédentes, la fonction de transfert en position entre la charge et la référence de l'axe commandé se résumera à (cf. développements en annexe A1.3) :

$$\frac{x_{c2}(s)}{x_{ref}(s)} = \frac{1 + \frac{kf_v}{k_v} s}{1 + \frac{s}{k_v}} \frac{1 + \frac{2\zeta_n s}{\omega_n}}{\left(1 + \frac{2\zeta_n s}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2} s^2\right)}, \quad (55)$$

avec k_v [s^{-1}] le gain proportionnel de position et kf_v le pourcentage d'anticipation en vitesse.

Comme décrit dans le chapitre précédent, une loi de mouvement à jerk limité est une succession d'échelon de jerk. En considérant le cas général décrit par la figure II.9(c) et en notant $J = [J_m \ -J_m \ -J_m \ J_m \ -J_m \ J_m \ J_m \ -J_m]$ le vecteur des amplitudes de chaque échelon et $T = [0 \ T_j \ T_a \ T_j \ T_v \ T_j \ T_a \ T_j]$ le vecteur des durées séparant chacun de ces échelons, la transformée de Laplace de l'erreur dynamique $\varepsilon(t) = x_{ref}(t) - x_{c2}(t)$ dans le cas d'un axe asservi soumis à une souplesse dominante non amortie s'exprimera sous la forme :

$$\varepsilon(s) = \left(\frac{\frac{s}{k_v}(1 - kf_v) + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{1}{k_v \omega_n^2} s^3}{\left(1 + \frac{s}{k_v}\right)\left(1 + \frac{1}{\omega_n^2} s^2\right)} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{J_i}{s^4} e^{-\sum_{k=1}^i T_k \cdot s} \right) \quad (56)$$

où n représente l'échelon de jerk considéré ($n \leq 8$) et J_i et T_i représente respectivement la $i^{\text{ème}}$ composante des vecteurs J et T .

On peut dans ce cas dissocier deux types d'erreurs distinctes constituant l'erreur dynamique :

- Des termes apériodiques représentant les écarts liés aux performances en poursuite du système de commande, que l'on notera $\varepsilon_{ap}(t)$.
- Des termes oscillants périodiques liés au comportement vibratoire du système, que l'on notera $\varepsilon_{vib}(t)$.

III.1.2 Formalisation de l'erreur dynamique lors des différentes phases du mouvement

La succession des échelons de jerk conduit à des phases d'accélération linéaire puis constante. Ces deux types de phase d'accélération auront une influence différente sur la dynamique vibratoire du système [SPINLER - 1997]. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la valeur de l'erreur vibratoire maximale liée à ces différentes phases de mouvement.

Dans la première phase de mouvement (rampe d'accélération), la transformée inverse de la fonction (56) pour $n = 1$ donne l'erreur dynamique suivante :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{ap}(t) + \varepsilon_{vib}(t),$$

avec

$$\varepsilon_{ap}(t) = J_m \left((1 - kf_v) \left[\frac{t^2}{2k_v} + \frac{1 - \omega_n^2/k_v^2 - \omega_n^2/k_v \cdot t}{k_v \omega_n^2} - e^{-tk_v} \frac{\omega_n^3/k_v^5}{1 + \omega_n^2/k_v^2} \right] + \frac{t}{\omega_n^2} \right) \quad (57)$$

et

$$\varepsilon_{vib}(t) = \frac{J_m}{\omega_n^3 (1 + \omega_n^2/k_v^2)} \left[(1 - kf_v) \frac{\omega_n}{k_v} \cos(t\omega_n) - \left(1 + kf_v \left(\frac{\omega_n}{k_v} \right)^2 \right) \sin(t\omega_n) \right] \quad (58)$$

D'après l'équation (57), on constate que l'anticipation en vitesse permet de réduire considérablement l'erreur apériodique. Cette remarque est généralisable pour toutes les phases de mouvement. En effet, l'erreur apériodique résiduelle pour des axes totalement anticipés est proportionnelle au jerk et inversement proportionnelle au carré de la pulsation propre dominante du système [BEAREE – 2004(2)]. Dans le cadre de cette étude, seul nous intéresse le comportement vibratoire du système, donc le terme oscillant. L'amplitude maximale de l'erreur vibratoire $\varepsilon_{vib}(t)$ dans la rampe d'accélération s'écrit :

$$\max_{t \leq T_j} |\varepsilon_{vib}(J_m)| = \frac{J_m}{\omega_n^3} \sqrt{\frac{1 + kf_v^2 \omega_n^2/k_v^2}{1 + \omega_n^2/k_v^2}}.$$

Si, à présent, on calcule l'erreur vibratoire dans le palier d'accélération, c'est-à-dire la transformée inverse du transfert (56) pour $n = 2$, on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{vib}(\bar{t}) = & \frac{J_m}{(\omega_n^3 + \omega_n^5/k_v^2)} \left[\left((1 - kf_v) \frac{\omega_n}{k_v} (\cos(T_j \omega_n) - 1) \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(1 + kf_v \left(\frac{\omega_n}{k_v} \right)^2 \right) \sin(T_j \omega_n) \right) \cos(\bar{t} \omega_n) \right. \\ & \left. - \left((1 - kf_v) \frac{\omega_n}{k_v} \sin(T_j \omega_n) + \left(1 + kf_v \left(\frac{\omega_n}{k_v} \right)^2 \right) (\cos(T_j \omega_n) - 1) \right) \sin(\bar{t} \omega_n) \right] \end{aligned}$$

avec $\bar{t} = t - T_j$. En remarquant que l'accélération maximale atteinte est liée au jerk par la relation $A_m = J_m \cdot T_j$ et en adoptant la notation $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$, l'amplitude maximale de l'erreur vibratoire résiduelle dans le palier d'accélération peut s'écrire :

$$\max_{T_j \leq t < T_j + T_a} |\varepsilon_{\text{vib}}(T_j)| = \frac{A_m}{\omega_n^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + kf_v^2 \omega_n^2 / k_v^2}{1 + \omega_n^2 / k_v^2}} \cdot \left| \text{sinc}\left(\frac{T_j \omega_n}{2}\right) \right| \quad (59)$$

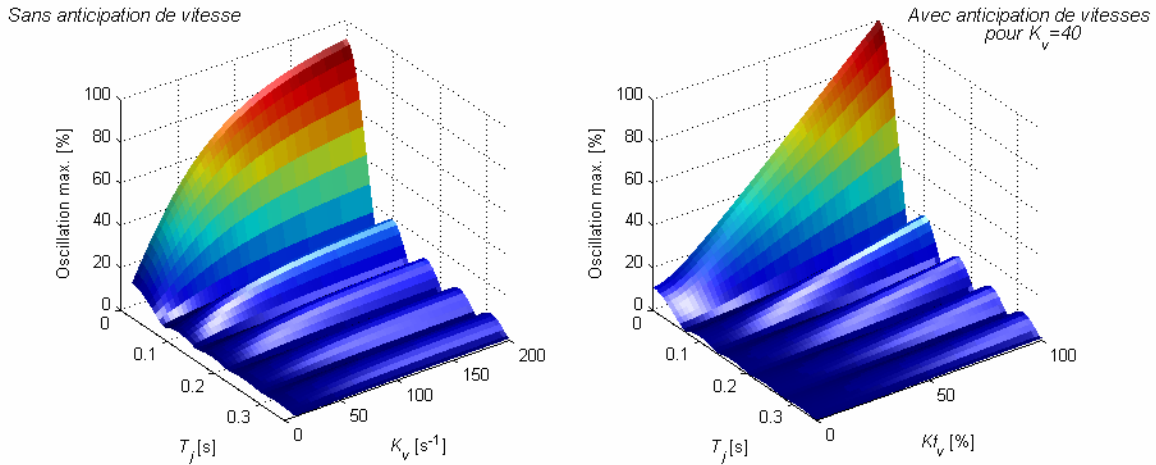


Figure III.2 - Évolution des amplitudes vibratoires maximales [%] au niveau du palier d'accélération en fonction de T_j , de k_v et de k_f .

L'amplitude de l'erreur vibratoire maximale dans le palier est une fonction sinus cardinal de la durée T_j des phases à jerk constant. La figure III.2 présente l'évolution de cette erreur (en pourcentage) en fonction de la durée des phases à jerk constant, de la valeur du gain de position et du pourcentage d'anticipation en vitesse. Ainsi, dans le cas particulier où T_j est un multiple entier k de la période propre $T_j = 2k\pi/\omega_n$, on retrouve la caractéristique des lois bang-bang qui permet d'annuler les vibrations résiduelles. En dehors de ces points particuliers, on retrouve, de façon triviale, que plus le gain de position est élevé plus l'erreur vibratoire est importante et que l'erreur maximale pour un jerk donné est obtenue dans le cas d'un axe totalement anticipé. On notera également que l'on obtient l'erreur vibratoire maximale en faisant tendre T_j vers 0, ce qui revient à considérer le cas de la loi d'accélération limitée.

Le calcul précédent ne reflète que le niveau d'oscillation maximal lors du premier palier d'accélération. En calculant l'erreur vibratoire totale en fin de mouvement (c'est-à-dire pour $n = 8$), on trouve :

$$\max_{t \geq T_j} |\varepsilon_{\text{vib}}(T_j)| = \frac{4A_m}{\omega_n^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + kf_v^2 \omega_n^2 / k_v^2}{1 + \omega_n^2 / k_v^2}} \cdot \left| \text{sinc}\left(\frac{T_j \omega_n}{2}\right) \right| \Psi(T_j, T_a, T_v) \quad (60)$$

Avec $T_j = 4T_j + 2T_a + T_v$ et $\Psi(T_j, T_a, T_v) = \left| \sin\left((T_a + T_j)\omega_n/2\right) \sin\left((T_a + 2T_j + T_v)\omega_n/2\right) \right|$.

Lors de la phase d'arrêt, l'erreur vibratoire suit toujours l'évolution décrite précédemment ; seule l'amplitude de l'erreur diffère. Selon la durée des différentes phases, l'erreur obtenue à l'équation (59) peut être multipliée par 4. Ce résultat est prévisible puisque la loi de mouvement est constituée de 4 paliers d'accélération et que, dans le cas le plus défavorable, les oscillations vont toutes s'ajouter en phase de façon constructive. Toutefois, l'hypothèse retenue sur l'absence d'amortissement est très forte. En effet, l'amortissement interne du système réduira considérablement l'amplitude de l'erreur en fin de mouvement. Ainsi, si le mouvement est suffisamment long pour que les oscillations à chaque

palier s’amortissent, l’amplitude d’oscillation maximale lors de la phase d’arrêt est donnée par l’équation (59). Dans les autres cas, même si les courbes de la figure III.2 permettent de prévoir l’évolution paramétrique de l’erreur vibratoire maximale, seule une mesure directe sur le système permet de recalibrer l’amplitude vibratoire estimée. On notera également que la prise en compte de l’amortissement du mode modifierait légèrement la position des minimums de vibrations résiduelles.

La figure III.3 présente les résultats expérimentaux obtenus sur **deux démonstrateurs** : un robot cartésien 3 axes et un prototype de machine-outil T1T2 présentés tout deux en annexe A.3. ces résultats sont comparés à l’évolution théorique. Pour le robot cartésien, le mouvement consiste en un déplacement de 1000 mm suivant l’axe X . L’accélération maximale sur cet axe est fixée à $4,5 \text{ m/s}^2$ et le gain de position originel (sans gestion du jerk) est de 39 s^{-1} . Des mesures par accéléromètres ont permis d’identifier la fréquence prépondérante associée à la poutre Z portant la charge dans la direction X . Dans la configuration des essais, le premier mode de flexion de la poutre Z dans la direction X est situé à $\omega_n/2\pi = 11 \text{ Hz}$. Ainsi, d’après l’équation (59), la durée des phases à jerk constant qui théoriquement annule les oscillations de la charge est donnée par $T_j = 2\pi/\omega_n \approx 0,083 \text{ s}$, ce qui, pour l’accélération fixée, correspond à un jerk J_m de l’ordre de 50 m/s^3 . Le second démonstrateur est utilisé pour valider l’effet de l’anticipation sur l’amplitude des oscillations. Le mouvement étudié est toujours un déplacement de 1000 mm suivant l’axe X . Le premier mode sensible est à 50 Hz . Finalement, les mesures expérimentales démontrent que l’équation (59) donne une estimation convenable de l’évolution paramétrique de l’amplitude vibratoire maximale. On vérifie notamment qu’autour de la valeur théorique du jerk optimal les amplitudes d’oscillations lors de la phase d’arrêt sont quasiment nulles.

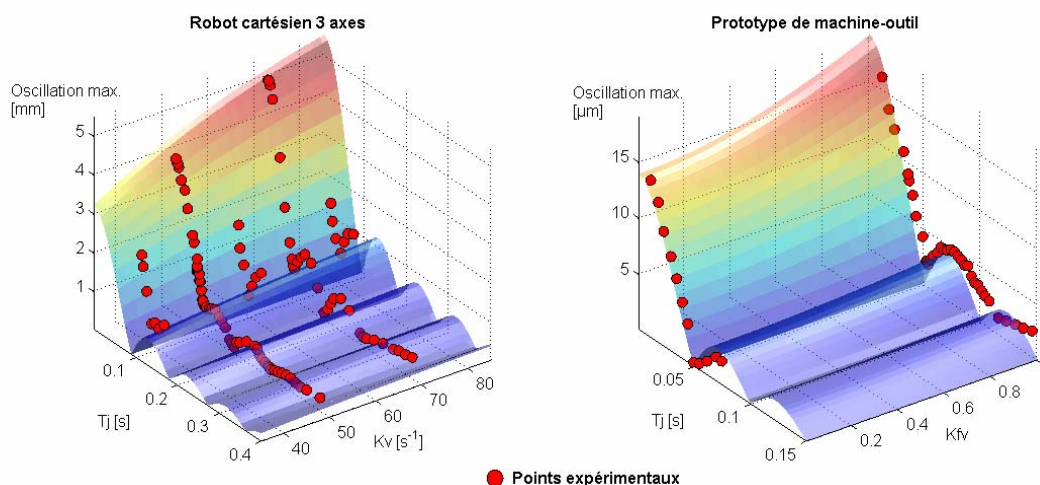


Figure III.3 - Mesures expérimentales de l’amplitude vibratoire maximale en fin de mouvement en fonction de T_j , de k_v et de $k_f v$, comparées à l’évolution théorique [BEAREE – 2004(1)].

Industriellement, la valeur maximum du jerk est réglée sur chaque axe de façon itérative afin d’obtenir un comportement dynamique acceptable lors d’un mouvement point à point. L’équation (59) montre qu’il est possible de quantifier a priori la valeur maximum de la durée des phases de jerk annulant les vibrations résiduelles. Cependant, il est nécessaire de garder à l’esprit que, dans les applications précédentes, les fréquences associées aux modes de déformations considérés étaient constantes. Dans de nombreux cas, les fréquences modales évolueront en fonction des différentes configurations spatiales des axes, ce qui dégradera le réglage du jerk. Face à ce phénomène, il peut être préférable de choisir une valeur de jerk pour laquelle le niveau vibratoire est respecté en dépit des variations paramétriques. Cela revient à utiliser les zones correspondant aux multiples de la période de la fonction sinus cardinal (cf. figure III.2), afin de rester en dessous d’un seuil d’oscillation. Dans

[LEE - 2003], l'auteur obtient empiriquement un réglage correct en utilisant le double de la fréquence propre dominante comme critère de réglage. Cette procédure augmente inévitablement le temps de cycle du système, ce qui ne fait que confirmer le difficile compromis à réaliser entre le niveau d'oscillation résiduelle et la durée effective du mouvement.

III.2 Cas d'un système non anticipé : optimisation du compromis entre durée du mouvement et réduction des vibrations

La durée théorique d'un mouvement à jerk limité s'exprime simplement sous la forme :

$$T_f = 4T_j + 2T_a + T_v = \frac{x_{ref}}{V_m} + \frac{V_m}{A_m} + \frac{A_m}{J_m}$$

Dans le cas d'un axe rigide totalement anticipé, cette durée théorique correspond à la durée effective du mouvement. En effet, si l'on pose $k_{fv} = 1$ et $\omega_n \rightarrow +\infty$ dans l'équation (55), la fonction de transfert en boucle fermée devient unitaire, ce qui correspond à une poursuite parfaite. De ce fait, pour un axe anticipé, la maîtrise du comportement vibratoire par le jerk impliquerait inévitablement une augmentation du temps de cycle d'une durée égale à T_j par rapport au profil d'accélération rectangulaire.

Dans le cas d'un axe rigide non anticipé en vitesse, le temps de cycle théorique est pondéré par le temps de réponse du système, intimement lié à la valeur de son gain de position. Ici, le temps de cycle théorique n'est pas respecté, et la durée effective du mouvement peut s'écrire :

$$T_{ef} = \frac{x_{ref}}{V_m} + \frac{V_m}{A_m} + \frac{A_m}{J_m} + \delta t_r \quad (61)$$

En posant δx [m] le critère de précision de positionnement à atteindre, la durée supplémentaire du mouvement δt_r pour le système rigide (système du 1^{er} ordre) s'exprime sous la forme :

$$\delta t_r = \frac{1}{k_v} \log \left[\frac{J_m e^{-k_v T_f}}{\delta x k_v^3} \left(e^{k_v \frac{x_{ref}}{V_m}} - 1 \right) \left(e^{k_v \frac{V_m}{A_m}} - 1 \right) \left(e^{k_v \frac{A_m}{J_m}} - 1 \right) \right] \quad (62)$$

Il est ainsi possible d'estimer le temps de cycle théorique obtenu suite à la modification du gain de position et/ou du niveau de jerk.

D'après les expressions (61) et (62), pour une précision de mouvement et des caractéristiques dynamiques données, il existe un ensemble de couples (k_v, J_m) tel que la durée effective de mouvement soit constante. Numériquement, il est possible de définir des courbes « Iso temps de cycle » en fonction du gain de position et du niveau de jerk appliqués. Ces courbes Iso temps de cycle révèlent leur intérêt dès que l'on cherche à optimiser le compromis entre durée effective du mouvement et réduction des amplitudes vibratoires. En effet, dans le paragraphe précédent, nous avons montré l'influence conjointe du niveau de jerk et du gain de position sur l'amplitude vibratoire maximale en fin de mouvement. Sur la figure III.2, on note la présence de nombreux niveaux de même amplitude vibratoire. Au niveau de ces zones, il est possible d'obtenir le même comportement vibratoire pour tout gain de position, uniquement en jouant sur le jerk. La figure III.4 représente l'allure des courbes Iso temps de cycle, superposées aux courbes d'Iso amplitude de vibration en fin de mouvement, calculées pour un déplacement de 1000 mm de l'axe X du robot cartésien. Il ressort de ces courbes que dans le cas particulier d'un axe non anticipé, il est possible d'obtenir un bon compromis entre la maîtrise des oscillations et l'augmentation du temps de cycle, en jouant conjointement sur le gain de

position et sur la valeur du jerk. On notera cependant que lorsque le gain de position augmente, il faut s'assurer que la fréquence propre du système est convenablement estimée car la sensibilité du niveau vibratoire à l'écart entre T_j et la période naturelle du mode propre croît avec le gain de position (cf. figure III.2).

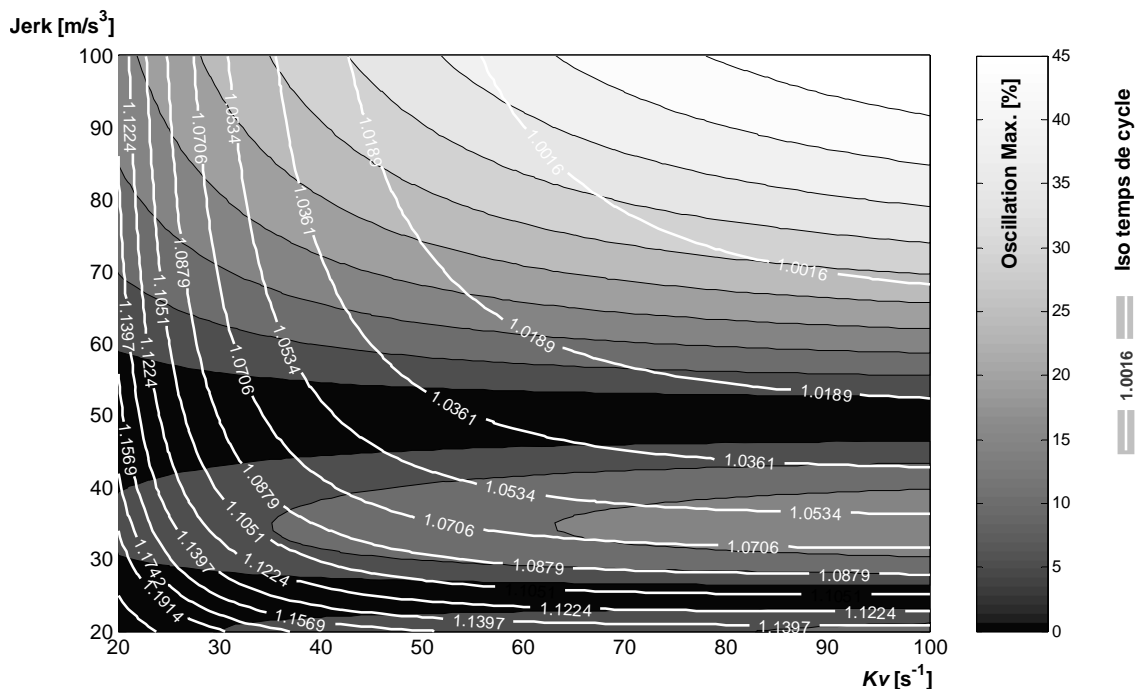


Figure III.4 - Allure des courbes Iso temps de cycle et Iso amplitude en fonction du gain de position et du niveau de jerk (Application au robot cartésien).

La commande originelle du robot cartésien 3 axes n'intègre pas la gestion du jerk. Le gain de position de l'axe X est initialement limité à 39 s^{-1} par le niveau vibratoire atteint au niveau de la charge. Les figures III.5 et III.6 démontrent que pour une valeur de jerk choisie (dans notre cas celle minimisant les oscillations, c'est à dire 50 m/s^3), il est possible d'augmenter la valeur du gain de position sans dégrader le comportement dynamique. On vérifie qu'il est effectivement possible par ce biais de conserver le temps de cycle originel, voir même de le réduire. On notera que la recherche de ce type de compromis se retrouve dans de nombreuses applications industrielles.

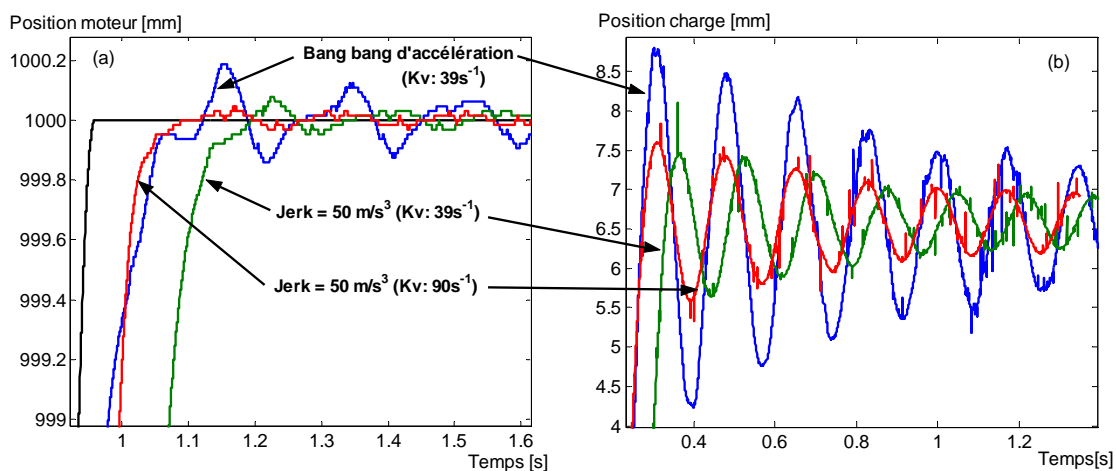


Figure III.5 - Oscillations en position suivant X du robot cartésien : (a) influence combinée du jerk et du gain de position sur le temps de réponse de l'axe ; (b) influence du jerk sur les oscillations de la charge [BEAREE – 2005(3)].

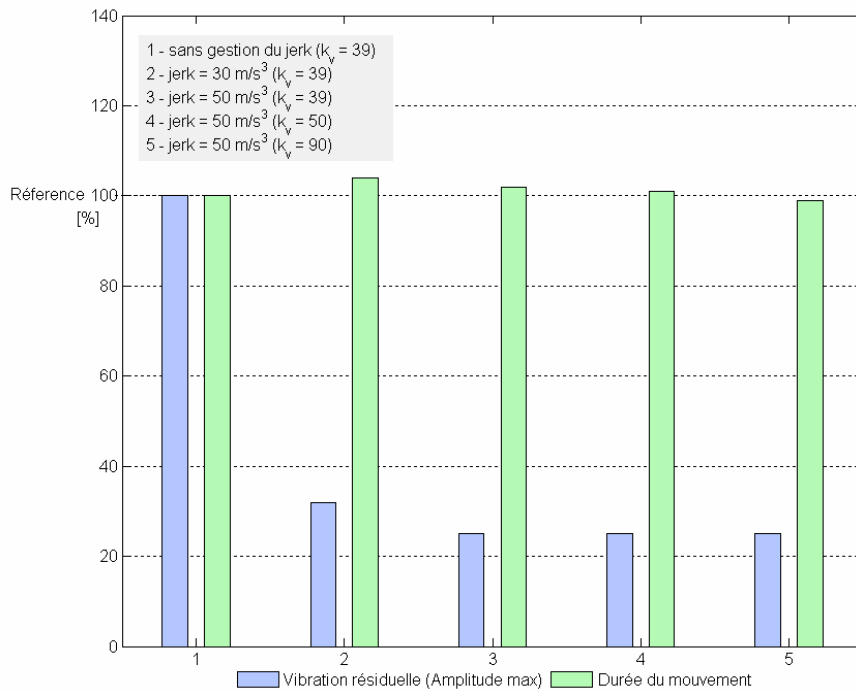


Figure III.6 - Graphe d'influence combinée du jerk et du gain de position sur le niveau d'oscillation de la charge et sur le temps de réponse de l'axe comparé au réglage industriel original (100%).

III.3 Cas d'un système comportant plusieurs modes sensibles

Jusqu'à présent, nous avons traité de l'influence de la loi de mouvement pour le cas spécifique d'une souplesse mécanique unique. Il est évident que dans certaines applications plusieurs modes de déformation contribuent conjointement au caractère vibratoire du positionnement. Dans cette partie, nous allons nous intéresser au caractère multimodes d'un système. Pour ce faire, le banc d'essai monoaxe équipé d'un moteur linéaire INDRAMAT LSP120C est utilisé (figure III.7). Afin de reproduire le comportement dynamique d'un axe d'une machine de production, deux ensembles masses/ressorts en série ont été ajoutés sur la table. Les caractéristiques de ce banc sont détaillées en annexe A.3.

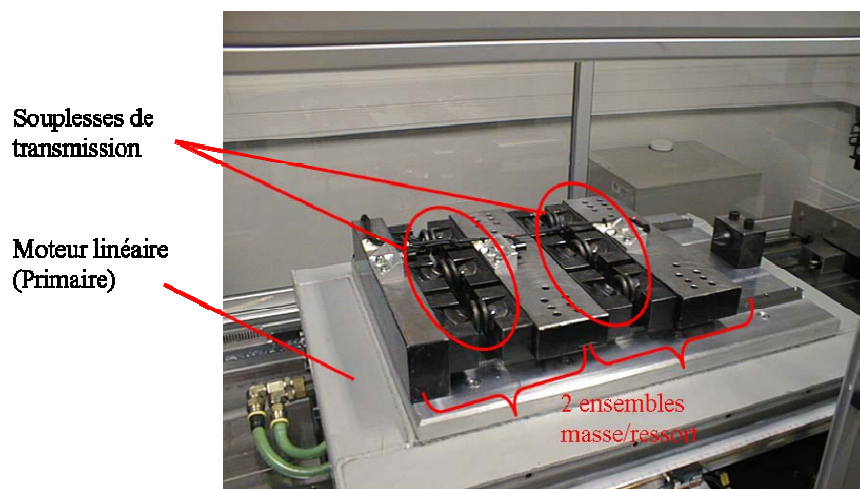


Figure III.7 - Banc d'essais mono-axe. (Caractéristiques : masses embarquées 260+20,6+16,5kg ; accélération = 20 m.s⁻² ; vitesse = 100 m/min).

La figure III.8 montre la réponse fréquentielle en accélération de la dernière masse (charge) pour une excitation au niveau de l'actionneur dans la direction du mouvement. On vérifie la présence des deux modes de déformation longitudinaux du système. Le premier mode est associé à une pulsation de $\omega_1 = 138$ rad/s (22 Hz), le deuxième à $\omega_2 = 370$ rad/s (59 Hz). Les amplitudes des pics fréquentiels (ici en accélération), notés φ_1 et φ_2 respectivement pour le premier et le deuxième mode, permettent d'estimer la contribution de chacun des modes en terme de niveau vibratoire atteint. La contribution de chacun des modes sur les oscillations en position est :

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_1}{\omega_1^2} / \left(\frac{\varphi_1}{\omega_1^2} + \frac{\varphi_2}{\omega_2^2} \right) = 75 \%$$

$$\Phi_2 = \frac{\varphi_2}{\omega_2^2} / \left(\frac{\varphi_1}{\omega_1^2} + \frac{\varphi_2}{\omega_2^2} \right) = 25 \%$$

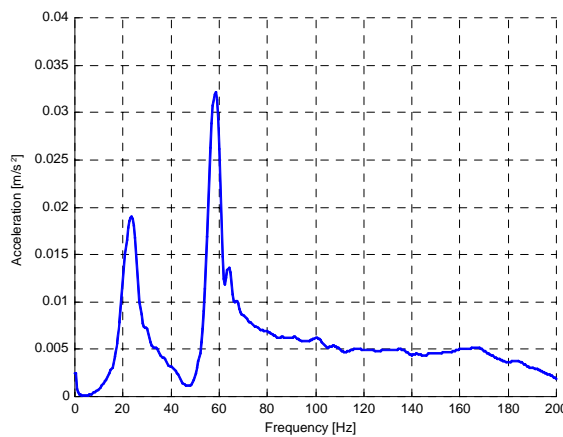


Figure III.8 - Réponse fréquentielle en accélération de la charge pour une excitation au niveau de l'actionneur.

D'après la théorie de l'analyse modale, chacun de ces modes a un comportement assimilable à celui d'un oscillateur harmonique (système du second ordre). Nous supposons donc que les vibrations du système résultent de la combinaison des vibrations induites par deux oscillateurs, pondérées par la participation respective de chacun des modes. Ainsi, il est possible d'étendre la formulation de l'amplitude maximale des vibrations résiduelles, donnée à l'équation (59), au cas d'une contribution de deux modes. Sous cette hypothèse, l'évolution paramétrique de l'amplitude vibratoire maximale s'écrit :

$$|\mathcal{E}_{vib}|_{\max} = \frac{A_m}{\omega_n^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + k f_v^2 \omega_n^2 / k_v^2}{1 + \omega_n^2 / k_v^2}} \cdot \left| \Phi_1 \cdot \text{sinc}\left(\frac{T_j \omega_1}{2}\right) + \Phi_2 \cdot \text{sinc}\left(\frac{T_j \omega_2}{2}\right) \right| \quad (63)$$

La figure III.9 présente l'évolution expérimentale des amplitudes vibratoires maximales en fonction de la durée des phases de jerk, relevées au niveau de la dernière masse du démonstrateur, pour un déplacement de 1000 mm. Ces données sont comparées à l'évolution théorique dans deux cas : en tenant compte uniquement du premier mode (équation (59)) et en tenant compte de la participation des deux modes (équation (63)). On vérifie que les durées T_j annulant les oscillations correspondent à celle de la courbe théorique tenant compte des deux modes. On remarque, en effet, une légère augmentation de ces valeurs particulières par rapport au cas n'incluant que le premier mode. Toutefois, on notera que la courbe ne tenant compte que du premier mode dominant fournit déjà une bonne représentation de l'évolution de l'amplitude vibratoire maximale, notamment pour des durées de mise en jerk inférieures à une période propre du premier mode.

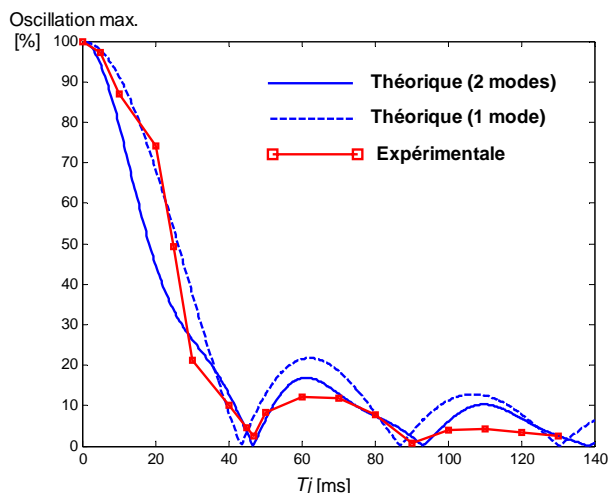


Figure III.9 - Mesure expérimentale de l'amplitude vibratoire maximale en fin de mouvement comparée à la théorie.

Selon la proximité et le degré de participation des deux modes, il peut être nécessaire de tenir compte de leurs effets conjoints afin de déterminer la durée de jerk annulant les vibrations résiduelles. La figure III.10 illustre ce phénomène. La courbe associée à un écart de 250% entre les deux fréquences propres correspond à notre application expérimentale. On vérifie que pour une participation du deuxième mode inférieure à 30 %, la durée T_j annulant les vibrations est dans ce cas très proche de celle ne tenant compte que du mode dominant (erreur inférieure à 4 %). Mais dès que la distance entre les fréquences propres diminue, les effets des deux modes deviennent sensibles et il est alors nécessaire d'utiliser l'équation (63).

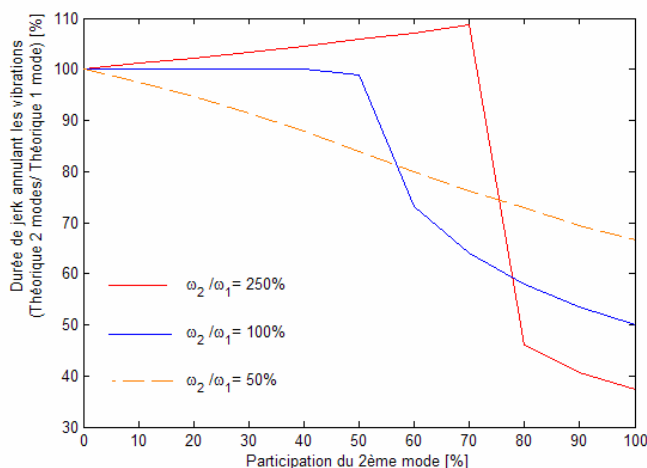


Figure III.10 – Évolution théorique de la durée T_j annulant les oscillations résiduelles en fonction de la participation du deuxième mode et de la distance entre les deux modes.

III.4 Bilan pratique

Nous avons vu précédemment que la loi à jerk limité disponible dans la plupart des commandes numériques modernes est une loi en temps optimal pour des limitations données sur les trois premières dérivées de la position. Nous avons montré dans ce chapitre que le choix de la valeur maximale du jerk n'est pas anodin car, selon les cas, on peut observer des différences importantes d'amplitude de vibration. Les résultats obtenus revêtent un intérêt pratique immédiat :

(1) Le choix de la valeur maximum du jerk par axe, qui conduit à un niveau d'oscillation désiré, dépend principalement de la position fréquentielle de la souplesse prépondérante et de l'accélération maximale de l'axe ainsi que de son gain de position et de son pourcentage d'anticipation. Les essais expérimentaux sur démonstrateur ont permis de montrer que l'influence du jerk pouvait être correctement estimée "a priori" par la formulation théorique développée dans cette étude. Cette démarche pourrait alors éviter le recours classique aux techniques "essais & erreurs".

(2) Même dans le cas d'un axe soumis à l'influence de plusieurs modes de déformations, nous confirmons que l'évolution du niveau maximal de vibration en fonction de la valeur de jerk peut toujours être correctement estimée.

(3) Dans le cas d'un axe non anticipé en vitesse (cas du robot cartésien), nous montrons que la gestion du jerk couplée à la modulation du gain de position permet d'obtenir un compromis raisonnable entre niveau des vibrations résiduelles et durée du mouvement. Des essais sur un robot cartésien démontrent qu'il est même possible de conserver le temps de cycle originel (sans gestion du jerk) tout en minimisant les vibrations de la charge.

En conséquence, si la valeur de jerk maximal réglée correspond au niveau vibratoire attendu, la loi à jerk limité réalise un bon compromis entre temps de mouvement et vibrations résiduelles. Toutefois, l'optimalité de la loi à jerk limité implique une stationnarité du mode dominant. Si la fréquence dominante évolue, ce type de loi ne peut permettre d'assurer l'annulation des vibrations résiduelles. Il peut alors être intéressant d'utiliser une loi de mouvement plus douce (d'une classe de continuité plus élevée), ce qui augmentera inévitablement la durée du mouvement. De même, si l'on s'intéresse à la minimisation des vibrations lors du mouvement, nous avons vu dans le chapitre précédent que la loi à jerk limité n'était pas la mieux adaptée, mais qu'il est préférable dans ce cas d'utiliser une loi de mouvement plus douce (snap limité ou polynomiale).



Chapitre IV

METHODOLOGIE D'ELABORATION D'UNE PRECOMMANDE ET DE LA LOI DE MOUVEMENT ASSOCIEE POUR UN AXE

Dans ce chapitre nous présentons une démarche de conception d'une structure de commande destinée au suivi de profil (aspect précommande et loi de mouvement). A cette commande basée sur le principe d'inversion « directe », nous verrons qu'il est possible d'ajouter différentes structures destinées au rejet de perturbation et basées sur le principe d'inversion « indirecte » (utilisation des mesures disponibles). La structure de commande globale rejoint ainsi l'objectif de la commande « idéale » découplant le suivi de profil et le rejet de perturbation (cf. figure I.3). La démarche proposée est ensuite appliquée au modèle d'axe tenant compte d'un mode vibratoire.

IV.1 Démarche de synthèse d'une commande adaptée au suivi de trajectoire

IV.1.1 Fondamentaux de l'inversion de modèle

La précommande théoriquement parfaite est celle qui correspond à l'inverse du modèle du processus. Dans le cadre non-linéaire, une solution consiste soit à linéariser le modèle, soit à exploiter certaines propriétés naturelles de celui-ci. Une des classes de modèles non-linéaires pour lesquels l'inversion de modèle est particulièrement aisée est celle des systèmes désignés comme (différentiellement) plats. De manière explicite, un système est différentiellement plat si on peut trouver un ensemble de sorties (égale en nombre au nombre d'entrées) tel que tous les états et toutes les entrées du système peuvent être déterminés à partir de cet ensemble de sorties sans aucune intégration. On dit que le système défini par :

$$\dot{x} = f(x, u); \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (64)$$

est "plat" s'il existe des applications h, ϕ, ψ telles que l'on puisse écrire :

$$\begin{cases} y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) & h : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{r+1} \mapsto \mathbb{R}^m \\ x = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}) & \phi : (\mathbb{R}^m)^r \mapsto \mathbb{R}^n \\ u = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, y^{(r)}) & \psi : (\mathbb{R}^m)^{r+1} \mapsto \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (65)$$

Les systèmes différentiellement plats sont d'un grand intérêt dans les situations où la génération d'une trajectoire explicite est requise [FLIESS - 1995]. Dès lors que les sorties plates sont identifiées, il est possible de planifier l'évolution de ces dernières et d'en déduire directement, par les relations (65) les états x et précommandes u conduisant à décrire le profil désiré. Cette étude de commande s'appuyant sur une hypothèse de linéarité du modèle du processus, nous ne développerons pas plus en détail les spécificités de la génération de commande pour un système non-linéaire.

Dans le cadre linéaire, il s'agit d'inverser explicitement la fonction de transfert du processus. Les performances de la précommande sont bien évidemment fortement dépendantes de la représentativité du modèle utilisé. La réalisation pratique de l'inversion peut être limitée par deux principaux effets :

- le modèle inverse peut être instable, ou fortement oscillant. C'est-à-dire que le modèle du processus contient des zéros à partie réelle positive qui, une fois inversés, deviendront des pôles instables ;
- les paramètres du modèle peuvent dépendre du temps ou encore être mal connus.

Généralement, l'influence des zéros à partie réelle positive rencontrés dans le cadre de la machine-outil est négligeable (figure IV.1) ; elle peut être significative pour des applications extrêmement souples (manipulateurs spatiaux par exemple). La présence de zéros instables dans le domaine continu peut également intervenir pour les modèles d'ordre élevés, obtenus par identification expérimentale, tels que ceux basés sur les techniques d'identification modale. Il convient dans ce cas de s'interroger sur la pertinence de ces zéros si l'on ne veut pas travailler sur une inversion inutilement complexifiée. On notera que l'implantation numérique de la précommande peut introduire des zéros non-inversibles, surtout dans des systèmes de commande à fréquence d'échantillonnage très élevée [BAI – 2000]. Afin de surmonter le problème d'instabilité du modèle inverse, de nombreuses méthodes d'inversion ont été proposées [TORFS – 1998], [KO – 2000]. Elles sont pour la plupart issues d'une technique commune proposée par Tomizuka [TOMIZUKA - 1987] appelé le « Zero Phase Error Tracking Controller ». Cette méthode s'appuie sur le modèle discrétisé du processus, la précommande contient l'exact inverse de la "partie inversible" du processus (tous les pôles et les zéros à partie réelle négative) et elle est associée à un filtre destinée à compenser les zéros non pris en compte. Comme son nom l'indique le ZPETC permet de compenser la phase des zéros à partie réelle positive. Une erreur sur le gain est alors inévitable. Cette technique repose sur l'arrangement suivant de la fonction de transfert du processus :

$$P(z) = \frac{N^+(z) N^-(z)}{D(z)} \quad (66)$$

Où N^+ et N^- désignent respectivement la partie non-inversible et inversible du numérateur (zéros à partie réelle positive et négative) et z désigne l'opérateur associé à la transformée discrète du modèle ($z^{-1} = e^{-T_e s}$; T_e la période d'échantillonnage). La précommande s'obtient alors comme suit :

$$Pr(z) = \frac{N^+(z^{-1}) D(z)}{(N^+(1))^2 N^-(z)} \quad (67)$$

Ce qui assure un suivi de trajectoire sans aucune erreur de phase. Les autres techniques basées sur le ZPETC améliorent ou modifient ce dernier, soit en compensant l'erreur sur le gain (au détriment de la phase), soit en cherchant un compromis entre les deux types d'erreurs. De façon générale, la compensation des zéros à partie réelle positive demeure le sujet de nombreuses investigations (pendule inverse, manipulateurs spatiaux). Dans notre cadre d'application les modèles de connaissance à

constantes localisées (masses et ressorts en série) ne contiennent pas de zéros dans le demi-plan complexe instable.

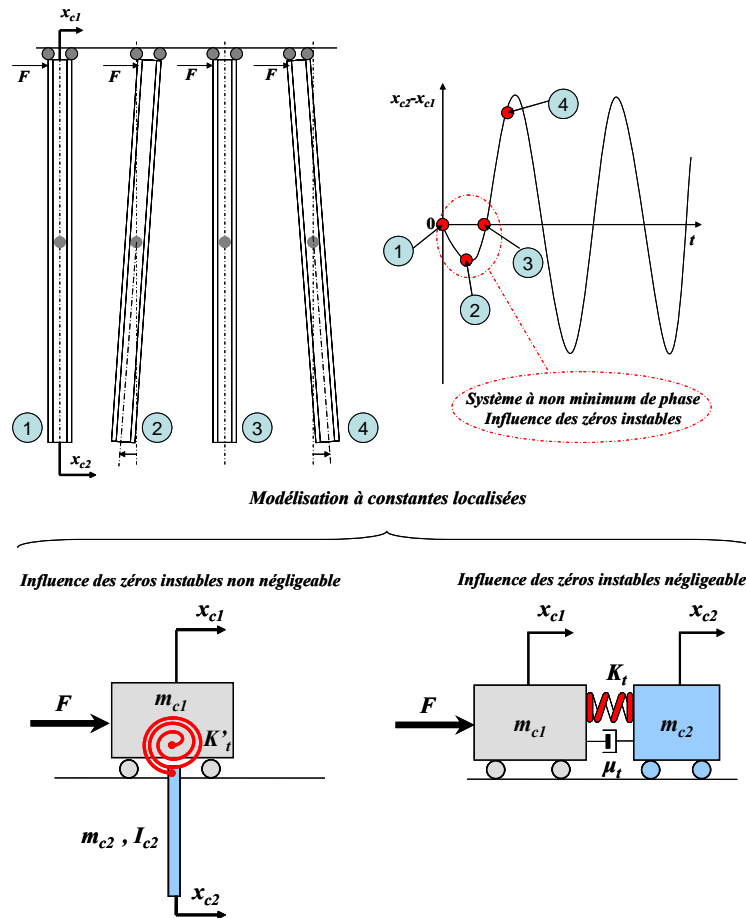


Figure IV.1. – Exemple d'un système à non minimum de phase (poutre déformable) et modèles à constantes localisées correspondant selon le degré d'influence des zéros instables.

En ce qui concerne la variation des paramètres du modèle, deux types d'approches peuvent être envisagés selon l'ampleur de ces variations : soit on se place dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire dans la configuration pour laquelle les performances seraient les plus dégradées. Par exemple, pour une machine-outil, il peut s'agir de la configuration des axes conduisant au maximum de vibrations ressenties par la pointe de l'outil. Les paramètres du modèle sont ainsi fixés et l'inversion ne sera parfaite qu'au point de fonctionnement considéré. Cette méthode évite la prise en compte de la non stationnarité du processus, mais elle n'est pas optimale et s'applique donc pour des variations de faible amplitude où pour des applications où seuls quelques points de fonctionnement sont à optimiser. Soit, pour les processus dont les paramètres évoluent de façon significative dans le temps (et dans l'espace), il convient de prendre en compte l'évolution paramétrique du modèle de façon à reconfigurer en temps réel la précommande, pour correspondre à tout instant à l'inverse du modèle. Outre les techniques adaptatives issues de la commande robuste telles que celle décrite dans [SMITH - 1995], il existe de nombreuses autres techniques adaptatives proposées dans la littérature. Nous citerons pour exemple celles basées sur l'utilisation de réseaux de neurones entraînés (calibrés) adaptées aux tâches répétitives [ABOULSHAMAT - 2001] ou encore celles basées sur la logique floue [JEE - 2004].

Dans la suite, nous reprenons les hypothèses suivantes sur le modèle du processus :

- le processus est modélisable par un système linéaire et stationnaire (LTI) ;

- le modèle est à minimum de phase.

IV.1.2 Élaboration de la précommande par le graphe de causalité

Commander un processus, c'est contrôler les énergies accumulées par celui-ci. Cela revient aussi à imposer la trajectoire de l'une des composantes de la puissance transmise en utilisant l'autre composante pour le réglage. Par exemple, la maîtrise de la vitesse d'un mobile s'obtient par des actions modulées de l'effort qui lui est appliqué. Ce concept se généralise : « *Puisque l'on connaît l'effet de la cause, il suffit de créer la bonne cause pour avoir le bon effet* » : cet aphorisme exprime l'inversion causale.

Ainsi, l'axe d'une machine se déplace d'une origine à un point donné parce que son actionneur est alimenté en tension. Cette première observation induit l'orientation de la transformation énergétique et il apparaît que la grandeur de commande u de l'actionneur, caractérisée, par exemple, en amplitude et en durée, est porteuse d'une information à l'égard de la position du chariot. Ce discours illustre l'analyse ainsi établie qui peut être représentée par le Graphe Informationnel Causal de la figure IV.2 ; ce dernier exprime que la position x est la grandeur de sortie influencée par la grandeur d'entrée influente u .



Figure IV.2. – Graphe Informationnel Causal (GIC).

A ce niveau, il n'apparaît aucune quantification sur le transfert entre entrées et sorties. La considération est donc purement qualitative, mais les lois de la physique, alors acquises, constituent une base de connaissances qui permet d'affiner la représentation. En effet, le chariot peut atteindre la position finale parce que sa vitesse n'est pas nulle et cela, grâce à l'effort auquel il est soumis. Cette assertion permet d'enrichir la représentation en faisant clairement apparaître le détail du transfert d'informations depuis la grandeur u jusqu'à la position x . Une démarche similaire peut être appliquée à tous les constituants de la chaîne d'actionnement dès lors que sa technologie est connue. Si les composants appartiennent à une classe de systèmes pour laquelle il est possible de localiser des objets représentatifs des transformations énergétiques internes, on détermine une modélisation structurelle basée sur la connaissance des phénomènes physiques. L'un des intérêts majeurs de la démarche est l'interprétation de comportement puisque, par principe, l'énergie se transfère, s'accumule ou se dissipe. Le formalisme du GIC est notamment détaillé dans [HAUTIER - 2004].

La démarche de conception de la commande présentée dans cette partie est basée sur une représentation « naturelle » du processus. Ainsi, la dynamique des systèmes linéaires considérés (LTI à minimum de phase) sera naturellement caractérisée par une équation différentielle liant la sortie à contrôlée y à l'entrée de commande u que l'on peut mettre sous la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \quad (68)$$

avec a_i et b_i des coefficients constants. On note que dans tous les cas $m \leq n$, ce qui assure le respect de la causalité naturelle. Cette relation exprimée dans le domaine de Laplace prend la forme de la fonction de transfert suivante :

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}; m \leq n \quad (69)$$

Déterminer la précommande $Pr(s)$ du système décrit par l'équation (68) revient à déterminer la fonction de transfert inverse :

$$Pr(s) = \frac{U_{ref}(s)}{Y_{ref}(s)} = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1s + \dots + b_m s^m}; m \leq n \quad (70)$$

La forme acausale de la fonction de précommande définie à l'équation (70) impose que y_{ref} **soit préalablement connue et continûment différentiable jusqu'à l'ordre n** telle que l'équation différentielle sur la commande de référence puisse être résolue :

$$\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u_{ref}(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_{ref}(t)}{dt^i} \quad (71)$$

En posant :

$$y^{(i+1)} = \frac{d^{i+1}y(t)}{dt^{i+1}} \Rightarrow \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \left(\frac{d^i y(t)}{dt^i} \right)_{t=0} + \int_0^t y^{(i+1)} dt \quad ; i = 0, \dots, (n-1) \quad (72)$$

$$u^{(k+1)} = \frac{d^{k+1}u(t)}{dt^{k+1}} \Rightarrow \frac{d^k u(t)}{dt^k} = \left(\frac{d^k u(t)}{dt^k} \right)_{t=0} + \int_0^t u^{(k+1)} dt \quad ; k = 0, \dots, (m-1)$$

L'équation différentielle caractérisant l'évolution de la variable de sortie du processus (cf. équation (68)) se met sous la forme du graphe informationnel causal donné à la figure IV.3. On notera que sur ce graphe, on met en évidence que la variable d'entrée ne peut être que la dérivée d'ordre m de u ; ceci signifie que la grandeur u doit être continûment dérivable jusqu'à l'ordre m , sous peine de se heurter à un contresens physique qui, en pratique se traduit par des contraintes inacceptables pour le processus.

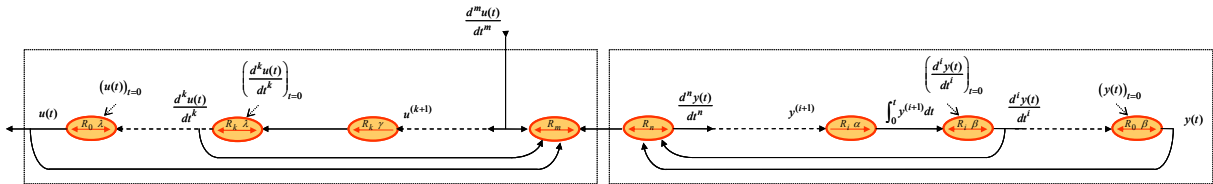


Figure IV.3. – Schéma GIC de l'évolution de la variable de sortie du processus (représentation naturelle).

De même on pose :

$$y_{ref}^{(i+1)} = \frac{d^{i+1}y_{ref}(t)}{dt^{i+1}} \Rightarrow \frac{d^i y_{ref}(t)}{dt^i} = \left(\frac{d^i y_{ref}(t)}{dt^i} \right)_{t=0} + \int_0^t y_{ref}^{(i+1)} dt \quad (73)$$

$$u_{ref}^{(i+1)} = \frac{d^{i+1}u_{ref}(t)}{dt^{i+1}} \Rightarrow \frac{d^i u_{ref}(t)}{dt^i} = \left(\frac{d^i u_{ref}(t)}{dt^i} \right)_{t=0} + \int_0^t u_{ref}^{(i+1)} dt$$

Le schéma GIC de la précommande définie par l'équation (71) reprend le graphe précédent avec pour variable d'entrée la dérivée n ème de y_{ref} .

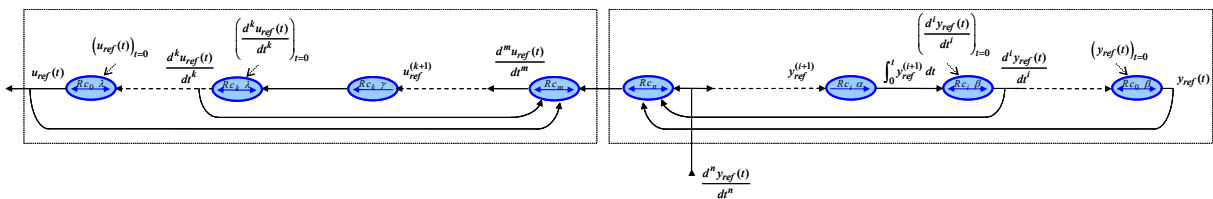


Figure IV.4. – Schéma GIC du principe d'élaboration de la précommande.

Le graphe de la précommande met en évidence plusieurs exigences :

- la trajectoire y_{ref} doit être prédéfinie telle que la dérivée nième puisse exister ;
- les conditions initiales doivent être connues.

Si y représente la grandeur à maîtriser, il faut disposer à tout instant de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n . **Cela nécessite donc une étude de la trajectoire afin de respecter les conditions de dérivation exigées.** L'intérêt de cette démarche est de pouvoir maîtriser tous les états du système et donc de ne réaliser que des trajectoires de y énergétiquement réalisables. Cette formulation et ces propriétés, obtenues naturellement, se retrouvent dans le formalisme des systèmes plats (non linéaires) permettant la mise en relation directe de l'état du système avec les grandeurs à maîtriser et ses dérivées.

Se posent alors les questions concernant :

- l'écart entre le modèle et son processus, et donc par inversion entre ceux de la commande et ceux du processus réel ;
- l'élaboration de la référence correspondant à la dérivée nième (ordre du modèle retenu) de la grandeur à maîtriser.

Pratiquement, ce type de commande n'est quasiment jamais explicitement utilisé.

IV.1.3 Couplage avec l'inversion indirecte [Barre - 2005]

Évidemment, s'il s'avérait que, dans un univers idéal, le modèle soit exactement la recopie du comportement du processus, les états de l'un et l'autre seraient donc égaux à chaque instant et les asservissements n'auraient pas lieu d'être. Cela étant, si maintenant nous prenons en compte les perturbations exogènes, notamment celles que nous ne contrôlons pas, ou pire celles qui ne sont pas directement observables, les asservissements des états reprennent tout leur sens.

Nous utilisons pour ce faire le principe de l'inversion indirecte qui découle du concept même d'asservir, d'imposer un comportement. La figure IV.5 illustre ce concept visant à minimiser l'écart $x_{ref} - x$ sur les états du processus. La relation de commande est maintenant exprimée comme suit :

$$Rc \rightarrow u_{ref} = g(c(x_{ref} - x), t) \quad (74)$$

$c \in \mathbb{C}$ représente la fonction de correction. Elle est déterminée de façon à assurer la stabilité du processus commandé et à minimiser l'écart. On peut écrire :

$$\text{Si } |c| \rightarrow \infty \text{ et } u = u_{reg} \text{ alors } y(t) \rightarrow y_{ref}(t) \quad (75)$$

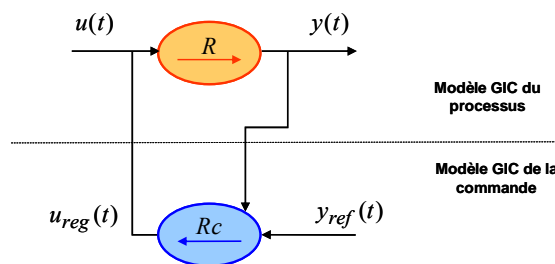


Figure IV.5. – Principe de l'inversion indirecte.

On peut généraliser le principe d'inversion indirecte du modèle d'un processus en mesurant les n états du système. L'intérêt de la démarche est que tous les états sont contrôlés. On aboutit alors à une

structure en cascade (encore nommée structure à boucles imbriquées) où la relation Rc_i élabore la référence de la boucle « immédiatement intérieure » :

$$Rc_i \rightarrow \frac{d^{i+1}x_{ref}(t)}{dt^{i+1}} = c_i(t) \left[\frac{d^i x_{ref}(t)}{dt^i} - \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right] \text{ avec } i \text{ variant de } 0 \text{ à } n - 1 \quad (76)$$

$$Rc_n \rightarrow u_{ref}(t) = \sum_{i=0}^n c_i(t) \frac{d^i x_{ref}(t)}{dt^i}$$

Cette architecture de commande se rapproche de celle retenue industriellement pour le pilotage des axes de machines (les correcteurs utilisés sont classiquement du type Proportionnel/Intégral apportant le gain infini en régime stationnaire et conservant la stabilité grâce à une limitation de l'amplification avec la fréquence). Les qualités en termes de rejet de perturbation et la facilité d'implantation de ce type de structure sont connues depuis longtemps. On montre alors tout l'intérêt d'associer cette commande indirecte à la commande directe précédemment élaborée.

Il existe différentes possibilités de couplage entre ce type de commande par retour de mesure et la commande directe. Pour exemple, il est possible d'associer directement les deux principes donnés respectivement à la figure IV.4 et IV.5. Nous pouvons décider que le modèle tiré de l'identification du processus est celui qui est souhaité pour son comportement ou qu'il satisfasse l'utilisateur. Ainsi, nous introduisons le concept de « commande à modèle de référence des états » (CMRE). Dans ces conditions, le modèle est choisi en regard de l'application ; partant de la dérivée n ème (n étant l'ordre du modèle), il détermine bien les états successifs jusqu'à la référence de la grandeur à contrôler. Pour que les états du processus convergent vers ceux du modèle, ils sont asservis de telle sorte que le réglage global soit la somme des réglages élémentaires (Figure IV.6).

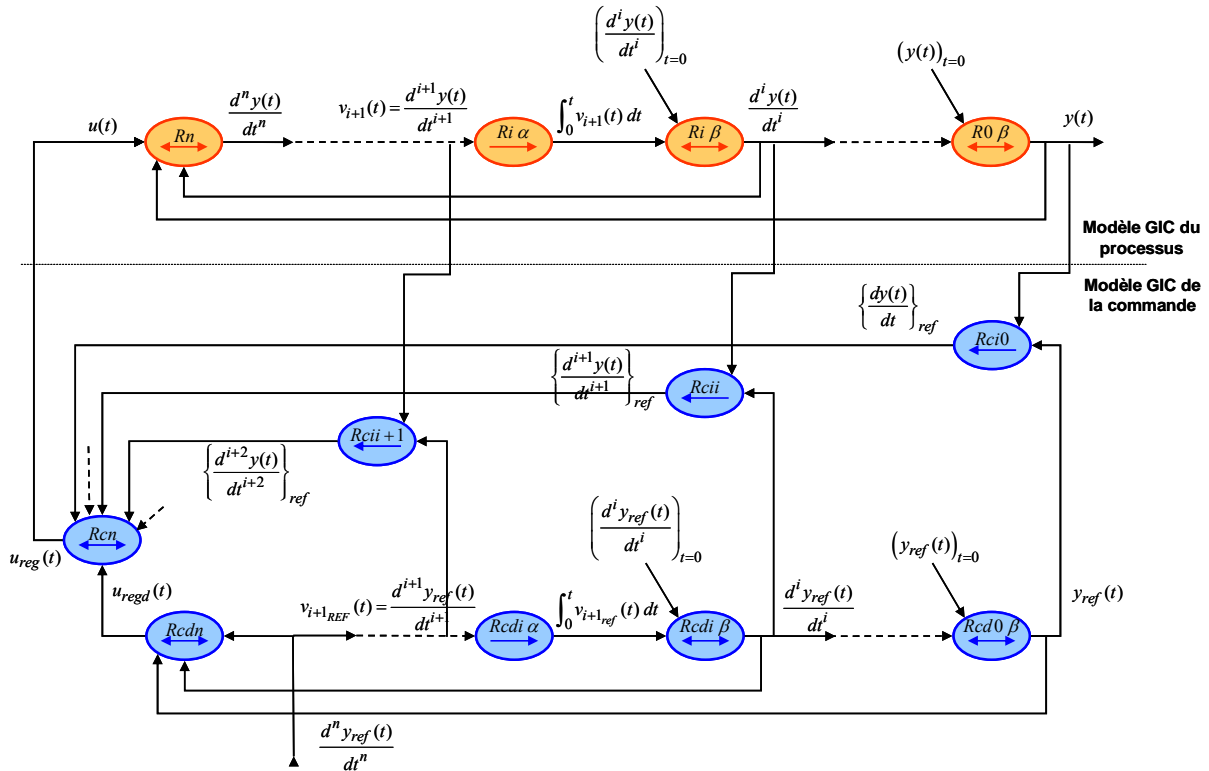


Figure IV.6. – Commande utilisant le couplage des deux principes d'inversion – Commande à modèle de comportement des états (CMRE).

Il est évident que nous n'avons généralement pas accès à toutes les mesures. La commande indirecte utilisera les mesures disponibles afin d'assurer le rejet de perturbations. Il existe ainsi d'autres possibilités de couplage entre les deux approches telles que la commande à modèle de référence global (CMRG) ou la commande à modèle de comportement (CMC). [Barre - 2005] présente les différentes structures de commande résultant de cette méthodologie, ainsi que leurs performances validées expérimentalement.

IV.2 Génération de commande pour un axe soumis à un mode souple dominant

IV.2.1 Élaboration de la précommande [Béarée – 2005(1)]

Nous reprenons le cas d'un axe soumis à un mode de déformation prépondérant du type mode de transmission (cf. figure I.13). Le Graphe de causalité correspondant à ce modèle est donné à la figure IV.7. La dynamique du modèle est régie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_{c1}\ddot{x}_{c1} = F - K_t(x_{c1} - x_{c2}) - \mu_t(\dot{x}_{c1} - \dot{x}_{c2}) - f_{c1}\dot{x}_{c1} \\ m_{c2}\ddot{x}_{c2} = -K_t(x_{c2} - x_{c1}) - \mu_t(\dot{x}_{c2} - \dot{x}_{c1}) - f_{c2}\dot{x}_{c2} \end{cases} \quad (77)$$

où m_{c1} , m_{c2} , f_{c1} et f_{c2} représentent respectivement la masse et le frottement visqueux au niveau de chacune des deux masses. K_t et μ_t désignent la raideur et l'amortissement interne du mode de déformation considéré.

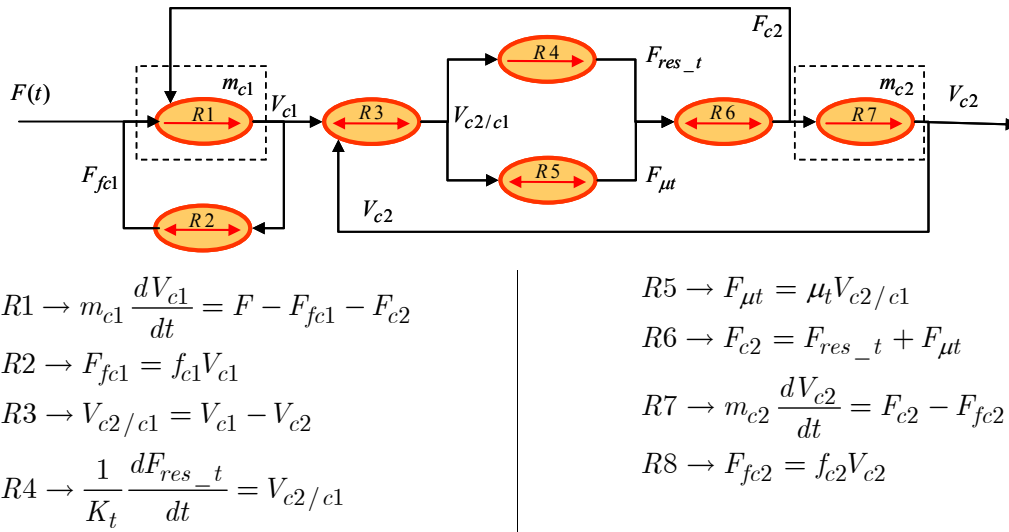


Figure IV.7. – Modèle GIC du modèle de souplesse de transmission.

L'élimination de la variable x_{c1} dans le système (77) permet d'écrire la relation liant la position de la charge x_{c2} à l'effort F sous la forme générale de l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^4 a_i \frac{d^i x_{c2}(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^1 b_i \frac{d^i F(t)}{dt^i} \quad (78)$$

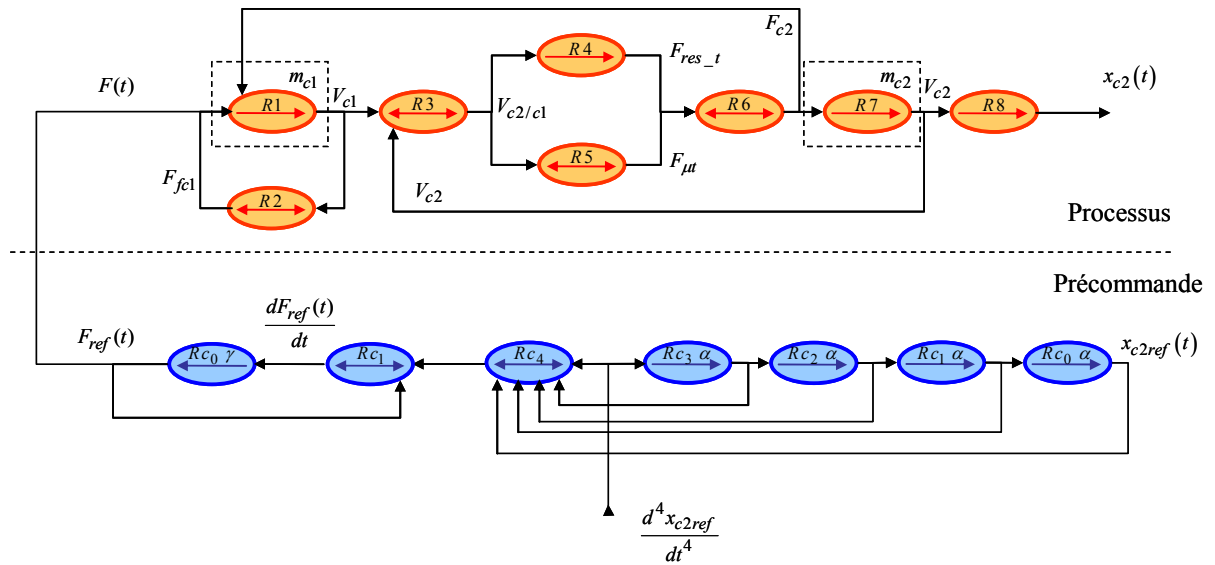
avec la définition des coefficients suivants :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = K_t (f_{c1} + f_{c2}) \\ a_2 = \mu_t (f_{c1} + f_{c2}) + K_t (m_{c1} + m_{c2}) + f_{c2}f_{c1} \\ a_3 = \mu_t (m_{c1} + m_{c2}) + f_{c2}m_{c1} + f_{c1}m_{c2} \\ a_4 = m_{c1}m_{c2} \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = K_t \\ b_1 = \mu_t \end{cases} \quad (79)$$

Afin de réaliser la précommande du système décrit par l'équation (77) la transformée de Laplace de l'effort de commande F_{ref} doit vérifier :

$$F_{ref}(s) = \frac{1}{b_0 + b_1 s} (a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4) x_{c2ref}(s) \quad (80)$$

La figure IV.8 représente la précommande définie par la relation précédente sous le formalisme du graphe de causalité. Cette structure fait apparaître une condition sur la loi de mouvement associée à la précommande. La relation (80) suppose que le profil de référence de x_{c2} soit d'un ordre de continuité par morceaux au moins égal à 4. Autrement dit, commander directement (par une action en boucle ouverte) un système soumis à un mode souple implique la définition d'un profil de référence gérant au minimum les quatre premières dérivées de la position, c'est-à-dire défini jusqu'au snap.



$$R1 \rightarrow m_{c1} \frac{dV_{c1}}{dt} = F - F_{fc1} - F_{c2}$$

$$R2 \rightarrow F_{fc1} = f_{c1} V_{c1}$$

$$R3 \rightarrow V_{c2/c1} = V_{c1} - V_{c2}$$

$$R4 \rightarrow \frac{1}{K_t} \frac{dF_{res_t}}{dt} = V_{c2/c1}$$

$$R5 \rightarrow F_{\mu t} = \mu_t V_{c2/c1}$$

$$R6 \rightarrow F_{c2} = F_{res_t} + F_{\mu t}$$

$$R7 \rightarrow m_{c2} \frac{dV_{c2}}{dt} = F_{c2}$$

$$R8 \rightarrow \frac{dx_{c2}}{dt} = V_{c2}$$

$$Rc_i \alpha \rightarrow \frac{d^i x_{c2ref}}{dt^i} = \int_0^t \frac{d^{i+1} x_{c2ref}}{dt^{i+1}} dt; \quad i = 0, \dots, 3$$

$$Rc_0 \gamma \rightarrow F_{ref}(t) = \int_0^t \frac{dF_{ref}(t)}{dt} dt$$

$$Rc_4 \rightarrow \sum_{i=0}^4 a_i \frac{d^i x_{c2ref}}{dt^i}$$

$$Rc_1 \rightarrow \sum_{i=0}^1 b_i \frac{d^i F_{ref}(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^4 a_i \frac{d^i x_{c2ref}}{dt^i}$$

Figure IV.8. – Précommande associée au modèle d'axe soumis à un mode souple.

Des différentes lois de mouvement étudiées dans le chapitre II, celles susceptibles d'être utilisées pour définir le profil de référence de la charge $\{x_{c2}\}_{ref}$ sont celles pour lesquelles le snap est défini (cf. équation (80)). A priori, si la précommande inverse la dynamique du système souple, toute loi de mouvement définie jusqu'au snap sera parfaitement suivie. Par conséquent, il semble intéressant de choisir parmi ces lois celle qui minimise la durée de mouvement, c'est-à-dire la loi à snap limité.

IV.2.2 Remarque sur la forme de la précommande

On notera que dans le cas d'un système rigide exempt de frottement, la précommande définie par l'équation (80) devient :

$$F_{ref}(s) = ((m_{c1} + m_{c2})s^2)x_{c2ref}(s)$$

Cette formulation est équivalente à l'anticipation d'accélération utilisée dans les commandes numériques avancées (cf. figure III.1). La dynamique de la boucle de courant étant négligée, l'anticipation d'accélération s'avère être la précommande idéale d'un système rigide.

Si à présent on considère l'effet du mode souple sur le système, toujours en supposant l'absence de frottement (et d'amortissement), on obtient la précommande suivante :

$$F_{ref}(s) = \left((m_{c1} + m_{c2})s^2 + \frac{m_{e1}m_{c2}}{K_t}s^4 \right) x_{c2ref}(s)$$

Ainsi, si l'amortissement du mode souple est faible, la précommande adaptée correspond à l'anticipation d'accélération classique (« rigide ») à laquelle on ajoute un terme proportionnel au snap. Cette formulation permet de justifier le résultat obtenu dans [BOERLAGE - 2004], où l'auteur propose un format d'anticipation destiné à améliorer le suivi de profil des systèmes de positionnement.

IV.2.3 Lien entre la précommande et la loi de mouvement

Nous avons vu dans la partie II.3.2 que les lois bang-bang, donc notamment la loi à snap limité, pouvaient être mises en forme afin de supprimer les vibrations résiduelles. Nous avons démontré que cette propriété induite par la succession des échelons de la loi bang-bang se traduisait dans le plan complexe par une compensation des pôles complexes conjugués associés au mode oscillant. La gestion des instants de commutation de la loi bang-bang permet donc de réaliser une "inversion" du processus en un certain nombre d'instants dont l'instant final. L'utilisation de cette propriété permet de donner une limitation physique au paramètre de snap ou de jerk maximal.

Si à présent on considère la loi à snap limité appliquée à la précommande donnée par l'équation (80), la dynamique du modèle souple sera parfaitement compensée à tout instant du mouvement. En d'autres termes *la loi de commande optimale en temps et en précision* adaptée à notre modèle souple correspond à la loi à snap limité filtrée par la précommande définie précédemment. La détermination de la loi de commande optimale consiste ainsi à résoudre l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre sur F_{ref} (cf. équation (80)) :

$$b_1 \frac{dF_{ref}}{dt} + b_0 F_{ref} = f(t) \tag{81}$$

avec $f(t) = \sum_{i=0}^4 a_i \frac{d^i x_{c2ref}(t)}{dt^i}$

$$F_{ref}(t) = e^{-\frac{b_0 t}{b_1}} \left(\int e^{\frac{b_0 t}{b_1}} f(t) dt + Cste \right) \quad (82)$$

$x_{c2ref}(t)$ étant définie par un profil à snap limité. La figure IV.9 présente un exemple de loi de commande F_{ref} résultant de la résolution de l'équation (82). Les limitations physiques utilisées sont celles du banc d'essais mono-axe à moteur linéaire ($V_{max} = 1,2$ m/s, $A_{max} = 6$ m/s², $J_{max} = 150$ m/s³, $S_{max} = 20000$ m/s⁴) pour un déplacement de 400 mm.

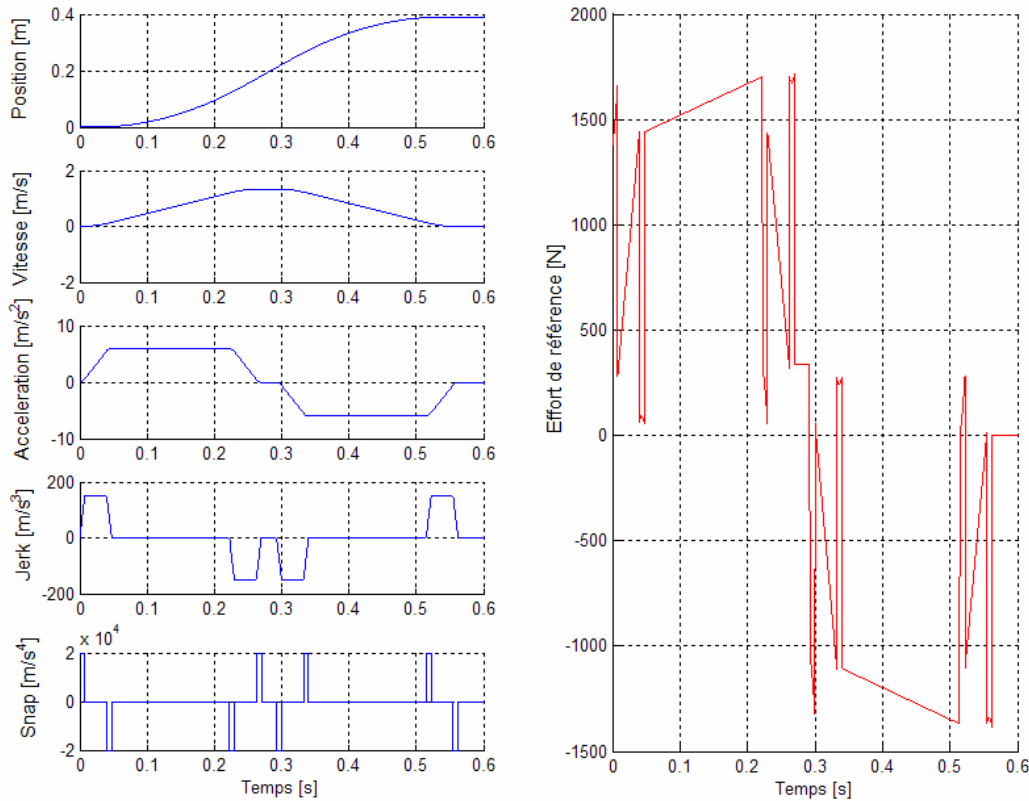


Figure IV.9. – Exemple de loi de commande d'ordre 4 : loi de mouvement x_{c2ref} à snap limité et effort de référence associé F_{ref} .

Ce constat d'optimalité est toutefois à pondérer. En effet, lors de l'étude des lois de mouvement seules (chapitre II), la valeur des limitations en jerk et en snap avaient un sens physique par rapport à l'amplitude des vibrations résiduelles. Si on considère à présent la mise en place d'une précommande adaptée aux souplesses du système, il n'y aura théoriquement plus de vibration. Les limitations en amplitude du jerk et du snap peuvent a priori être choisies infiniment grandes (la durée des échelons étant à l'inverse infiniment petite). Comment dans ce cas assurer l'optimalité du réglage ?

Plusieurs considérations pragmatiques permettent de comprendre d'où pourront venir les limitations naturelles sur le jerk et le snap.

La première vient tout simplement des limites imposées par l'implantation numérique de la loi de mouvement. Par exemple, si l'on suppose des limites de snap et de jerk très élevées, le respect des limitations physiques sur les autres dérivées imposera une durée des phases à snap non nul très courtes. Et la durée de ces phases ne peut être inférieure à une période d'échantillonnage du système sous peine d'être irréalisable. De la même façon, pour conserver les propriétés de dérivabilité de la loi à snap limité, il faut nécessairement que la durée des phases de snap soit au moins égale à deux

périodes d'échantillonnages. Dans les autres cas le profil discrétisé sera équivalent à une loi en bang-bang de jerk.

La seconde source de limitations, sans doute la plus significative, provient de l'inévitable imperfection du modèle. Les paramètres du modèle sont connus avec une certaine précision. De plus, l'hypothèse de stationnarité des paramètres associés au mode de déformation est très forte. La fréquence associée au mode souple dominant évoluera généralement en fonction des différentes configurations du système. A l'imprécision sur les paramètres du modèle vient également s'ajouter la dynamique résiduelle du processus réel, c'est-à-dire la dynamique non prise en compte par le modèle.

IV.2.4 Sensibilité de la précommande aux variations paramétriques et apport d'une loi de mouvement adoucie

Dans cette partie, nous ne considérons que l'aspect précommande du système afin de mettre en évidence la sensibilité de cette approche face aux variations paramétriques. Ainsi, aucune robustesse n'est apportée par la structure d'asservissement qui lui est normalement associée.

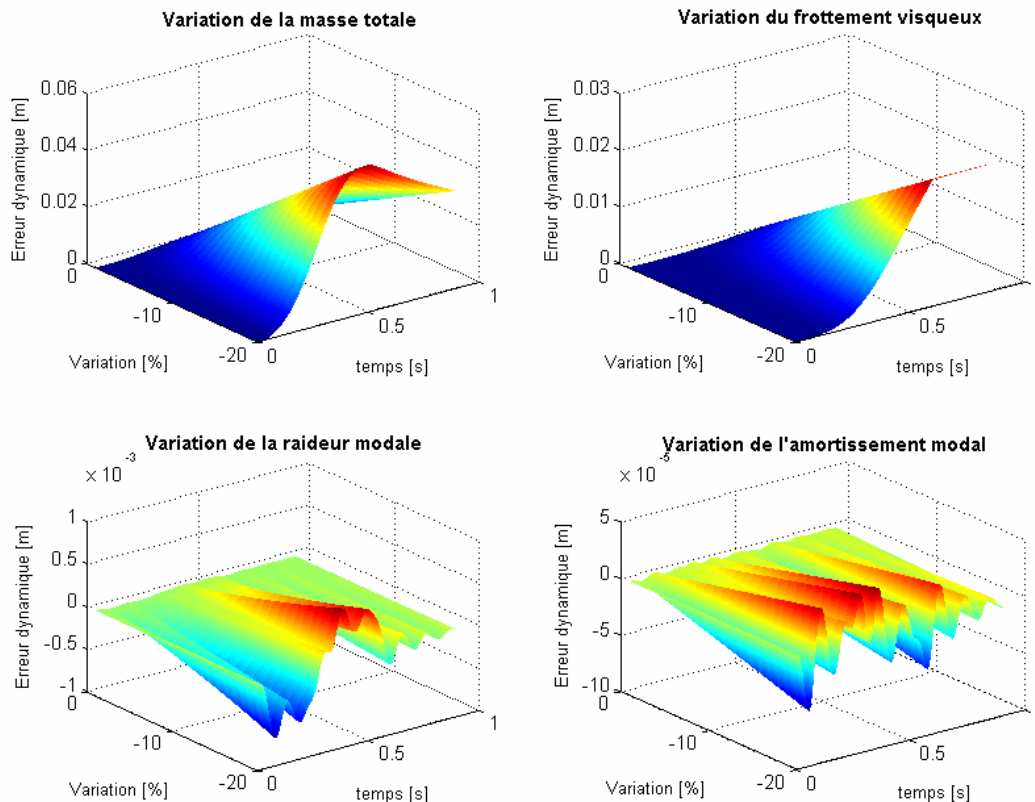


Figure IV.10. – Évolution de l'erreur dynamique lors du mouvement résultant d'une variation sur les paramètres du processus (Application au cas du banc mono-axe pour un déplacement de 400 mm).

La figure IV.10 représente les résultats simulés concernant l'évolution de l'erreur dynamique d'un système souple auquel on impose la loi de commande donnée à la figure IV.9. Le mouvement théorique a une durée de 0,56 secondes. Différentes variations paramétriques sont considérées. On constate que, puisque l'on se trouve en boucle ouverte, toute erreur sur le mode rigide du système (masse et frottement) conduit à un mouvement qui n'atteint pas la consigne (une erreur statique demeure). Ce type d'erreur serait naturellement compensée si l'on ajoutait une structure

d'asservissement. Les erreurs qui nous intéressent plus particulièrement ici sont celles associées aux paramètres modaux que sont la raideur et l'amortissement estimés du mode de déformation.

On vérifie qu'une erreur sur la raideur ou l'amortissement modal conduit à l'apparition de vibrations visibles sur l'erreur dynamique. La figure IV.11 montre cette erreur pour un biais de 20% sur les paramètres modaux. Le paramètre de raideur a naturellement une influence supérieure à celui d'amortissement sur l'erreur dynamique. Sur cette figure, nous avons superposé l'image des profils d'accélération et de jerk afin de mettre en évidence la proportionnalité de ces erreurs aux limitations physiques imposées au système. Si les paramètres modaux évoluent en fonction des différentes configurations du système, le seul moyen de limiter l'erreur vibratoire consiste à diminuer les caractéristiques de la loi de mouvement pour rester dans une tolérance fixée à l'avance.

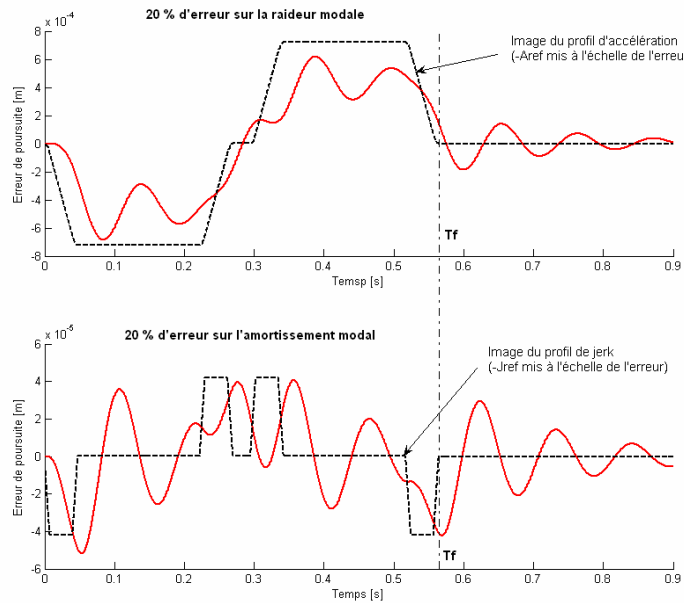


Figure IV.11 – Évolution de l'erreur dynamique en fonction du temps pour un biais de 20% sur les paramètres modaux : mise en évidence de la dépendance de l'erreur aux caractéristiques de la loi de mouvement.

La méthodologie de précommande présentée précédemment souffre, comme toute approche du type boucle ouverte, d'une absence de robustesse. Par contre, selon la forme de la loi de mouvement utilisée la sensibilité de cette approche peut varier.

Nous avons précédemment utilisé une loi à snap limité pour définir la précommande. Mais face aux variations paramétriques, nous avons vu dans le chapitre II que les lois polynomiales étaient moins sensibles, ceci au détriment de la durée de mouvement. La figure IV.12 compare l'erreur dynamique obtenue pour une loi à snap limité à celle obtenue pour une loi polynomiale à jerk minimum. Pour une erreur de 20% sur les paramètres modaux, la loi à jerk minimum associée à la précommande réduit les vibrations. Les performances de ces deux lois sont quantifiées dans le tableau 3. On constate que si l'on se trouve en présence d'un mode vibratoire mal identifié, mal connu ou non stationnaire, la loi polynomiale à jerk minimum donne de meilleurs résultats.

Loi de mouvement associée à la précommande	Erreur dynamique maximale	Vibration résiduelle maximale	Durée du mouvement
Snap limité	0,65 mm	0,38 mm	0,56 s
Jerk minimum	0,42 mm (-35%)	0,1 mm (-73,7%)	0,62 s (+10,7%)

Tableau 3 – Performances de la précommande soumise à un biais de 20 % sur la raideur modale en fonction du type de loi de mouvement associée (déplacement de 400 mm).

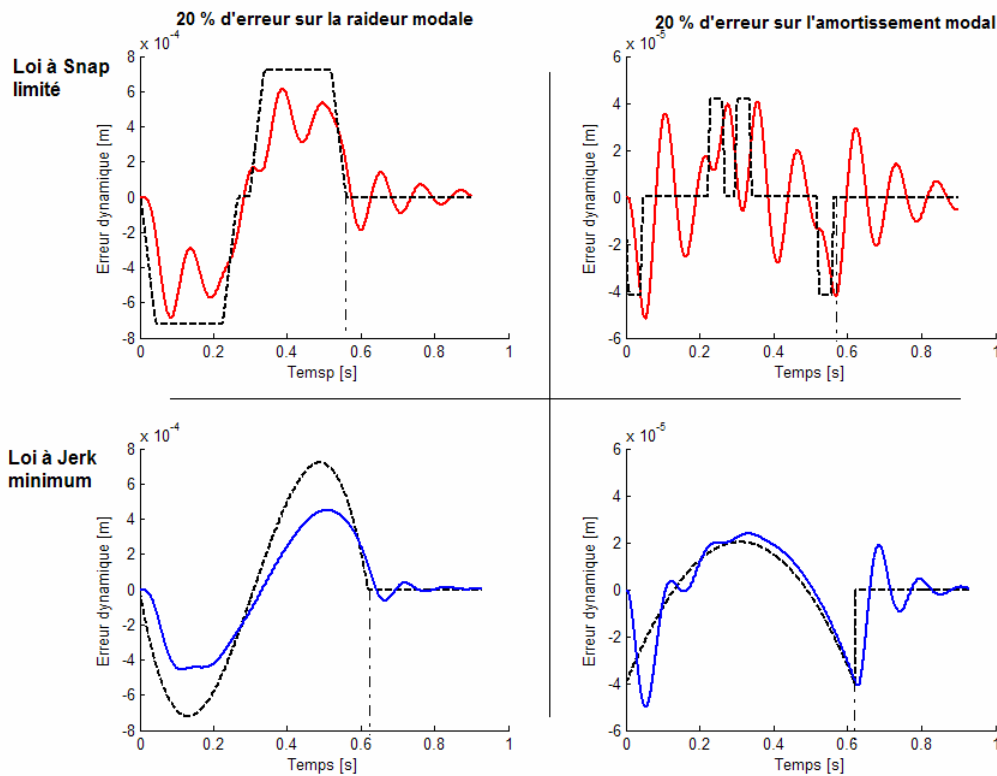


Figure IV.12 – Évolution de l'erreur dynamique en fonction du temps pour un biais de 20% sur les paramètres modaux : mise en évidence de la dépendance de l'erreur à la forme de la loi de mouvement.

IV.2.5 Validations expérimentales

La méthodologie de précommande est appliquée au banc linéaire monoaxe. Les paramètres du modèle identifié sont les suivants :

$$m_1 = 209 \text{ Kg}; m_2 = 37 \text{ Kg}$$

$$f_1 = 251 \text{ N/m/s}$$

$$K_t = 3,1 \cdot 10^5 \text{ N/m}; \mu_t = 54 \text{ N/m/s}$$

La figure IV.13 présente les résultats obtenus dans le cas d'une loi de mouvement à snap limité pour différentes configurations de la précommande. La précommande dite nominale correspond aux cas traités précédemment incluant l'effet de la souplesse et utilisant les paramètres identifiés. Un autre essai correspond à une surestimation de 50 % sur la fréquence propre estimée du système. Enfin, un

dernier essai comparatif considère uniquement le mode rigide du système dans la précommande, autrement dit une structure équivalente à l'anticipation d'accélération utilisée industriellement (précommande rigide incluant la masse totale et les frottements visqueux). On notera que, dans tous les cas traités, la commande directe fournie par la précommande est couplée à une commande indirecte CMRE (cf. figure IV.6) afin de rejeter les inévitables imperfections du modèle. On vérifie que la précommande nominale permet effectivement de limiter sensiblement les vibrations et que le suivi de trajectoire représenté par les courbes d'erreur dynamique est largement amélioré. La faible erreur dynamique témoigne en premier lieu de la qualité de l'identification du modèle. Ainsi, la précommande nominale réduit de plus de 85 % l'erreur dynamique par rapport à la précommande rigide. On constate également que même dans le cas d'une erreur de 50 % sur la fréquence propre estimée, l'erreur dynamique est 58 % plus faible que dans le cas rigide.

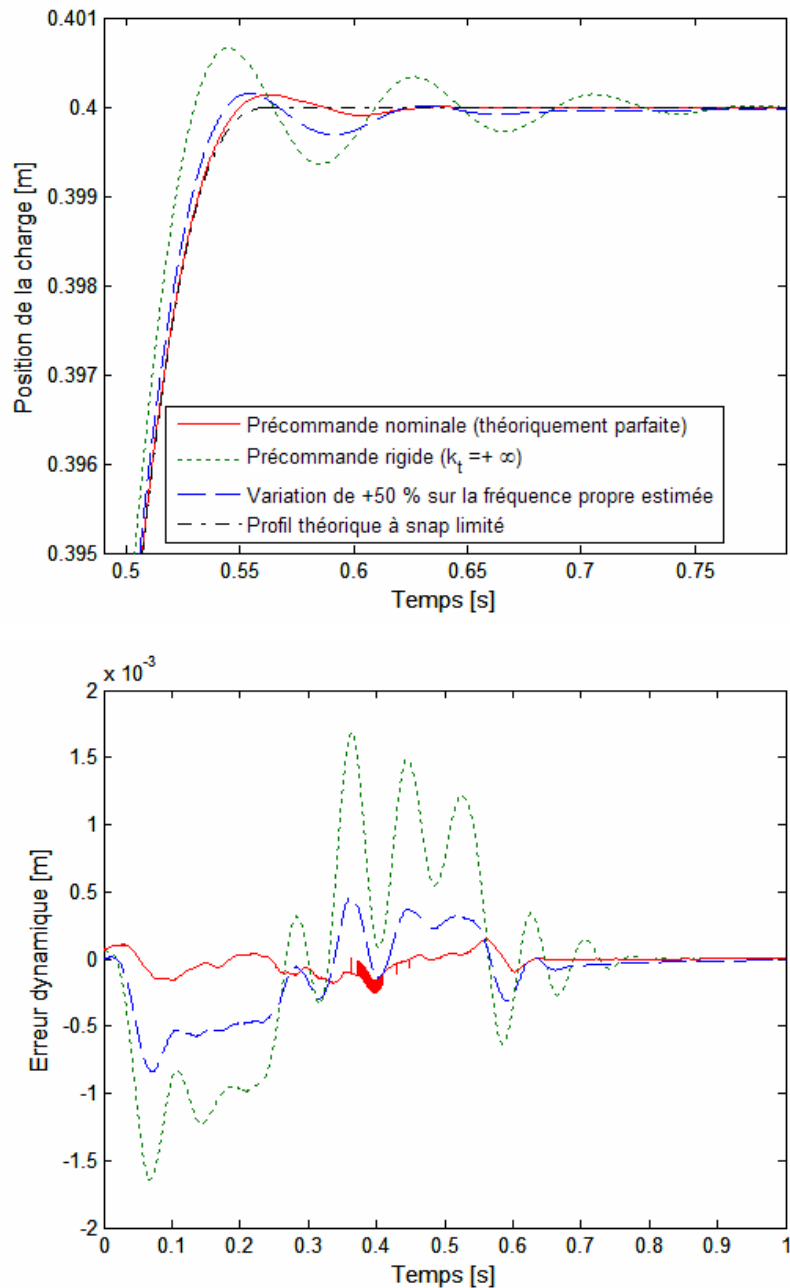


Figure IV.13 – Position de la charge et erreur dynamique en fonction de la précommande pour une loi de mouvement à snap limité (Banc linéaire ; mouvement de 400 mm).

La figure IV.14 montre les courbes obtenues pour une loi de mouvement douce à jerk minimum. La durée du mouvement est naturellement augmentée (+10,7 %). La précommande nominale provoque une erreur de profil inférieure de moitié à celle obtenue pour une précommande rigide. Les oscillations visibles sont très faibles, mais le niveau d'erreur atteint reste toutefois supérieur au cas précédent.

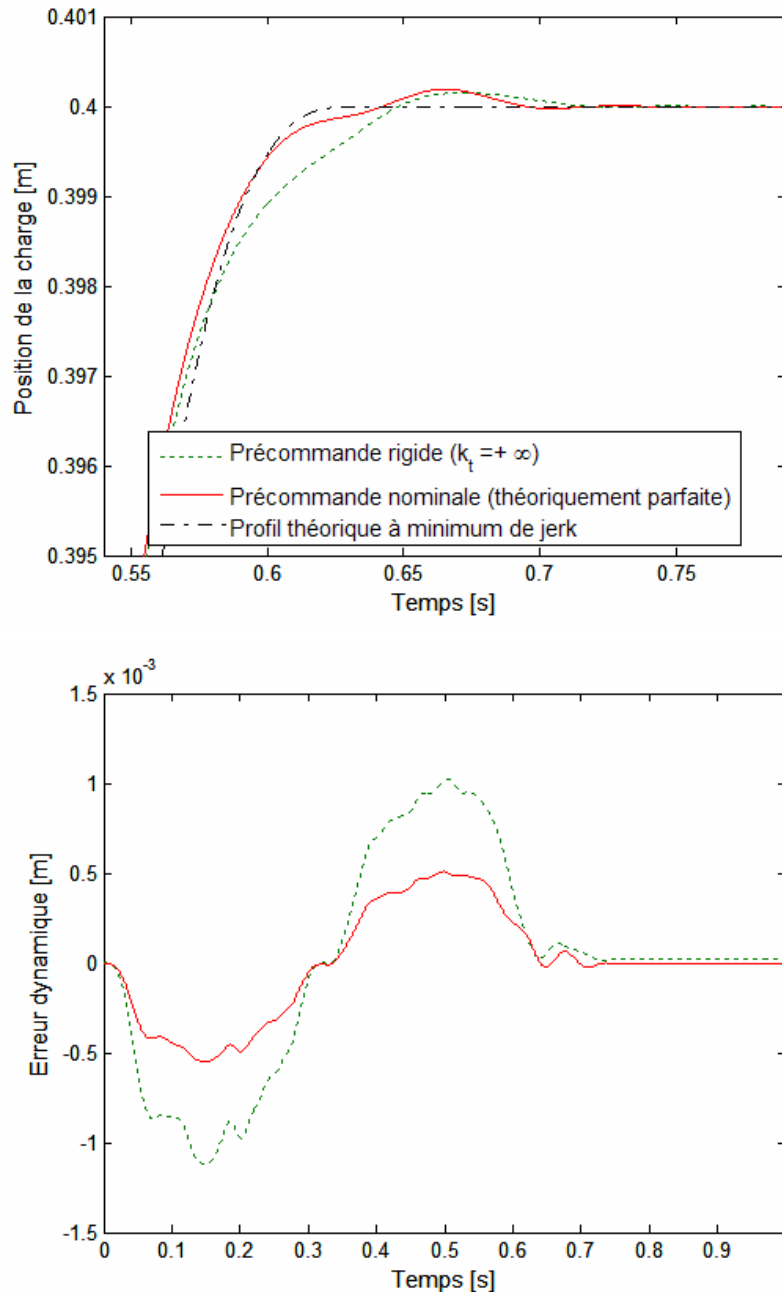


Figure IV.14 – Position de la charge et erreur dynamique en fonction de la précommande pour une loi de mouvement à minimum de jerk (Banc linéaire ; mouvement de 400 mm).

L'intérêt de la mise en place d'une précommande adaptée aux souplesses du système est ici clairement mis en évidence dans le cas d'une loi de mouvement à snap limité (loi en temps minimum compte tenu du degré de continuité nécessaire). Ces résultats laissent entrevoir une adaptation prometteuse au domaine du suivi de profil.

Concernant la loi polynomiale à jerk minimum, il n'a pas été possible d'atteindre un suivi de profil aussi fin que celui obtenu pour la loi de mouvement à snap limité (contrairement à ce que l'on aurait

pu attendre). De futures investigations devraient permettre de comprendre l'origine de la dégradation du suivi de profil dans ce cas. Mais un intérêt majeur de la loi polynomiale reste largement apparent. En effet, même dans le cas d'une précommande rigide, la douceur de la loi suffit à ne pas provoquer d'oscillations notables, ceci sans aucune connaissance des paramètres modaux. Cette absence de vibration se paye toutefois sur la durée du mouvement.

Chapitre V

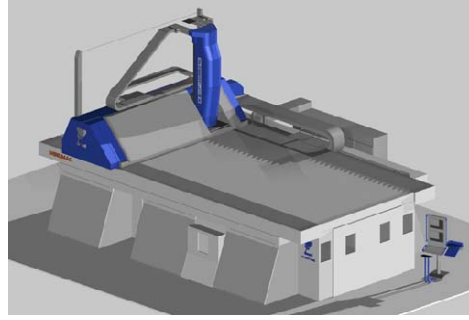
GENERALISATION AU SUIVI DE PROFILS INTERPOLES SUR DEUX AXES

Jusqu'à présent, notre propos concernait les mouvements réalisés par un seul axe de machine. Pour ce type de déplacement, les critères de performances étudiés étaient la durée du mouvement et la qualité du suivi de profil uniquement altérées par l'influence des modes vibratoires. L'erreur de poursuite de l'axe concerné n'a alors aucune influence sur la précision du mouvement. Par conséquent, les résultats des chapitres précédents sont immédiatement transposables aux cas des machines réalisant des opérations paraxiales¹⁰, c'est-à-dire pour les systèmes dont les mouvements d'axe sont découplés et s'exécutent indépendamment. Pour les machines-outils, le suivi d'un profil théorique nécessite la réalisation de mouvements coordonnés entre plusieurs axes. Dans ce cas de figure, toute erreur de poursuite sur un axe sera à l'origine d'une erreur de profil, donc d'une dégradation de la qualité du suivi de profil. L'objectif de ce chapitre consiste à étendre la méthodologie de précommande au cas de mouvements interpolés.

V.1 Problématique du suivi de profil par deux axes interpolés

Dans les chapitres précédents, la souplesse dominante de l'axe était prise en compte par un modèle à constantes localisées. La même démarche s'applique maintenant aux mouvements impliquant plusieurs axes. La figure V.1 montre une machine-outil 5 axes (Linear Minumac de la société FOREST-LINE) qui, nous le rappelons, vérifie l'hypothèse de conception par modes orthogonaux (les modes de déformations principaux ne sont pas couplés entre les axes). La modélisation dynamique du comportement vibratoire de cette machine conduit à un modèle à constantes localisées qu'il est possible de projeter suivant chaque axe physique de la machine. Le modèle donné à la figure V.1 représente la modélisation des axes Y et Z obtenue par [DESANGLE - 2002]. On rappelle que la commande d'une machine-outil est découplée axe par axe. Ainsi, si l'on considère uniquement l'influence du mode prépondérant sur chacun des axes, on se ramène au modèle d'axe utilisé précédemment (2 masses/1 ressort).

¹⁰ C'est le cas pour les manipulateurs cartésiens ou encore pour de nombreuses machines spéciales dans le domaine automobile.



Linear Minumac FOREST-LINE

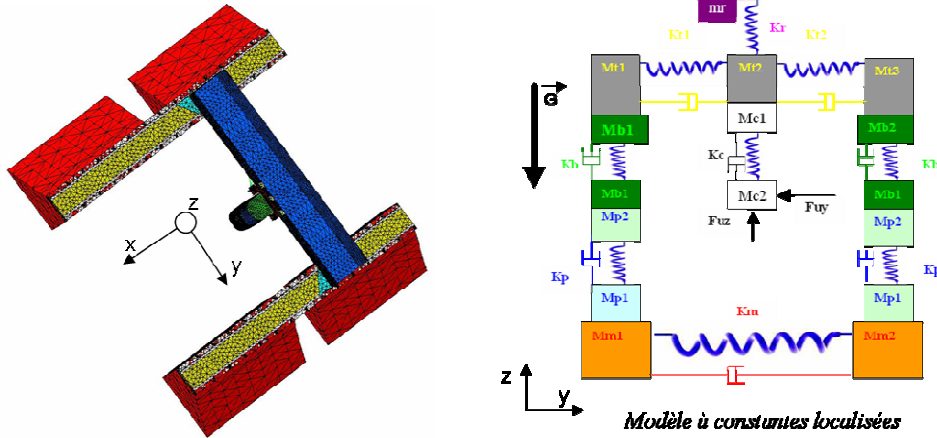


Figure V.1 – Modèle à constantes localisées d'une machine multiaxe à modes orthogonaux [Desangle - 2002] (Linear MINUMAC- FOREST-LINE : Fraiseuse 5 axes à moteurs linéaires).

Les mouvements multiaxes se distinguent fondamentalement des mouvements monoaxes par le fait que la dynamique du point à contrôler (la charge ou l'outil) n'est plus directement celle d'un axe physique, mais résulte de l'interpolation de la dynamique de chacun des axes en mouvement. Le paramétrage du point à contrôler est généralement défini par son abscisse curviligne s dans le repère de Frenet associé au mouvement. La figure V.2 représente le paramétrage du point à contrôler, noté M , pour les mouvements réalisés dans le plan machine XY.

L'abscisse curviligne du point M est liée à la dynamique des axes notée $x(t)$ et $y(t)$ par la relation :

$$(ds(t))^2 = (dx(t))^2 + (dy(t))^2 \quad (83)$$

La dynamique curviligne de ce point dans le repère de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) est caractérisée par les relations suivantes (on se limitera au terme de jerk curviligne par souci de clarté) :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{ds(t)}{dt} \cdot \vec{T} = v(t) \cdot \vec{T} \\ \vec{A} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{T} + v(t) \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = a_t \cdot \vec{T} + a_n \cdot \vec{N} \\ \text{avec } a_t &= \frac{dv(t)}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2(t)}{R}, \quad R : \text{ le rayon de courbure} \\ \vec{J} &= \frac{d\vec{A}}{dt} = j_t \cdot \vec{T} + j_n \cdot \vec{N} \\ \text{avec } j_t &= \frac{d^2v(t)}{dt^2}, \quad j_n = 2 \frac{v(t)}{R} \cdot \frac{dv(t)}{dt} - \frac{v^2(t)}{R^2} \frac{dR}{dt} \end{aligned} \quad (84)$$

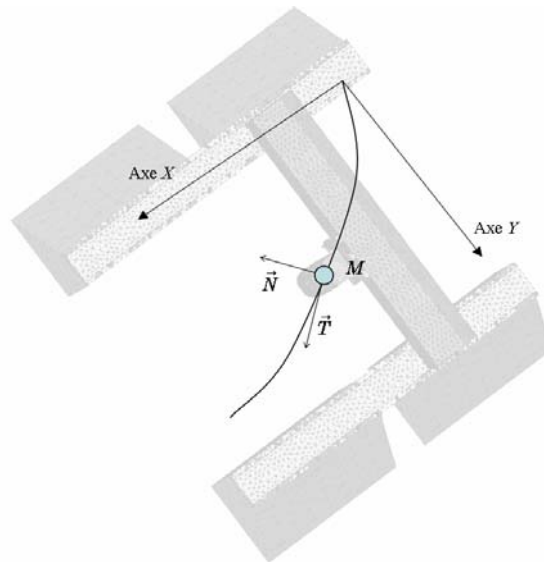


Figure V.2 – Paramétrage du suivi de profil dans le repère de Frenet.

En suivi de profil, la géométrie du profil théorique est imposée. Le générateur de commande élabore une loi de mouvement de l'effecteur sur ce profil, autrement dit une loi de mouvement curviligne $s_{ref}(t)$. Classiquement, il s'agit d'une loi à jerk limité mais, dans ce cas, on note qu'il s'agit du jerk curviligne. Mise à part la vitesse d'avance de l'outil (vitesse curviligne) qui est fournie dans le programme pièce (vitesse "conseillée" pour un couple outil/matière donné), les autres dynamiques curvilignes ne sont généralement pas (du moins pas encore) fixées par la physique de la coupe. La loi de mouvement curviligne doit, tant que faire se peut, permettre d'atteindre et de maintenir la vitesse d'avance conseillée sur le profil théorique. Et les autres limitations sur la dynamique curviligne proviennent uniquement des axes physiques réalisant le mouvement. Finalement, lors du suivi d'un trajet d'usinage, le travail principal du générateur de commande consiste à contrôler le mouvement de l'outil tout au long du trajet, afin de ne pas excéder les capacités des axes de déplacement. Dans les commandes numériques actuelles, cette opération est réalisée par la fonction de "Look-ahead". De façon simplifiée, il s'agit d'un curseur qui lit le programme pièce à l'avance (avec un certain nombre de blocs d'avance sur le mouvement temps réel), ce qui permet de reconnaître le profil théorique et d'en déduire les éventuelles difficultés géométriques qui nécessitent une réduction de la dynamique de référence des axes [BLOCH - 2000].

V.2 Définition des références d'axe

Dans cette partie, nous allons considérer le cas de mouvements plans de type linéaires ou circulaires, ainsi que les divers raccordements entre ces deux classes de mouvements. Ces profils élémentaires sont encore largement utilisés pour définir les trajets d'usinage.

V.2.1 Profil linéaire

Prenons comme exemple le cas du suivi d'une droite inclinée d'un angle α par rapport à l'axe X dans le plan machine. Dans ce cas de figure, il n'y a aucune dynamique normale à la trajectoire (cf. équation (84)).

La loi de mouvement (loi horaire $s_{ré}(t)$) choisie pour cet exemple est la loi à jerk limité. La figure V.3 représente la dynamique curviligne de la pointe outil et les dynamiques de référence des deux axes (projection) pour un angle α de 25° .

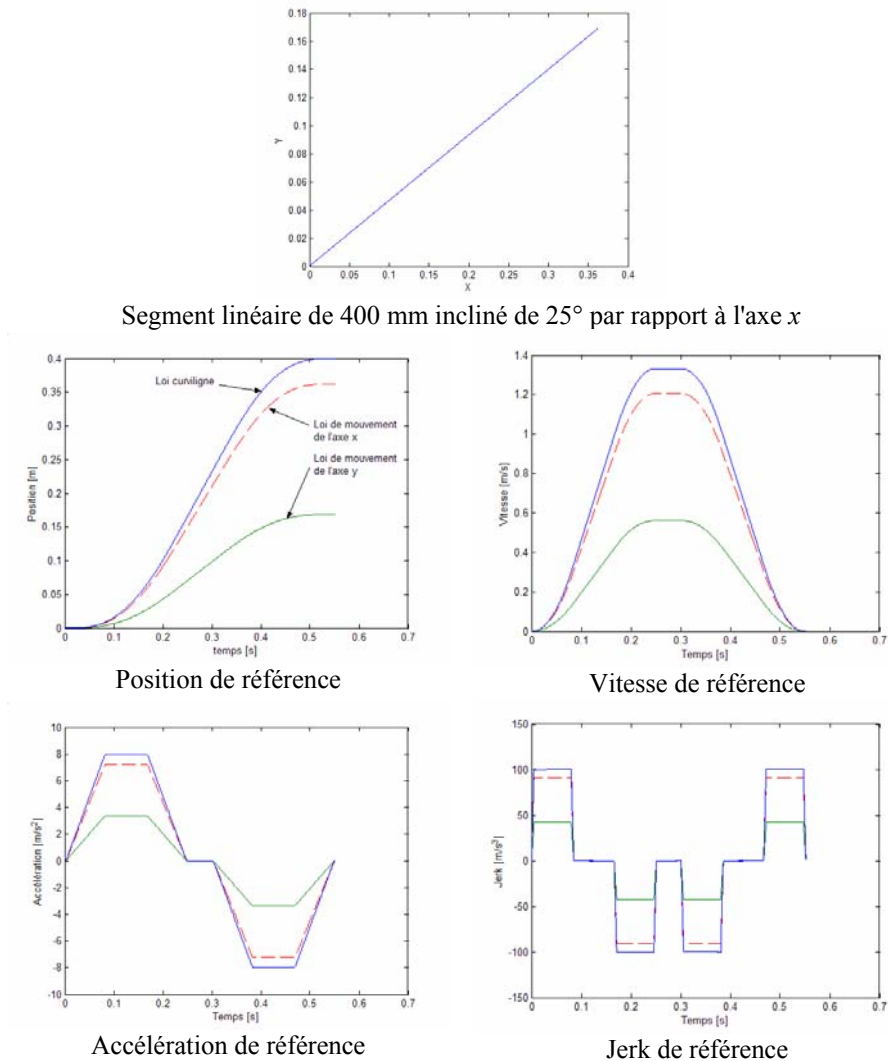


Figure V.3 – Comparaison entre la dynamique curviligne de référence et la loi de mouvement des axes pour un profil linéaire (loi à jerk limité).

Ainsi, la loi de mouvement de chacun des axes est une transposition de la loi de mouvement imposée à l'effecteur, modulée par les cosinus directeur de la droite. Pour ne pas dépasser les caractéristiques maximales du système, il suffit que la loi de mouvement curviligne, une fois projetée dans la base des axes de la machine, respecte les contraintes maximales de chacun des axes. La solution classiquement retenue dans ce cas consiste à imposer des contraintes maximales sur la dynamique curviligne inférieure au minimum des contraintes maximales des deux axes (cas de la figure V.3) :

$$V_{\max} \leq \min(V_{\max}^x, V_{\max}^y); A_{\max} \leq \min(A_{\max}^x, A_{\max}^y); J_{\max} \leq \min(J_{\max}^x, J_{\max}^y) \quad (85)$$

On note que cette solution simple permet de respecter les limitations du système pour toute inclinaison du segment linéaire dans le plan machine, mais elle est sous-optimale si l'on cherche à maximiser la dynamique curviligne. La solution optimale consiste à utiliser un des axes au maximum de ses capacités, soit à définir les limitations suivantes :

$$V_{\max} \leq \min \left(\frac{V_{\max}^x}{\cos(\alpha)}, \frac{V_{\max}^y}{\sin(\alpha)} \right); A_{\max} \leq \min \left(\frac{A_{\max}^x}{\cos(\alpha)}, \frac{A_{\max}^y}{\sin(\alpha)} \right); J_{\max} \leq \min \left(\frac{J_{\max}^x}{\cos(\alpha)}, \frac{J_{\max}^y}{\sin(\alpha)} \right) \quad (86)$$

V.2.2 Profil non linéaire

Dans le cas d'un profil théorique non linéaire, les équations (84) montrent que les composantes normales (centripètes) des dérivées du mouvement d'ordre supérieur ou égal à 2 (accélération, jerk, snap, ...) sont non nulles. Les capacités dynamiques curvilignes se décomposent alors suivant les deux composantes tangentielle et normales au profil. Considérons l'exemple du suivi d'un profil circulaire (rayon de courbure constant). Les équations de la loi de mouvement curviligne s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{réf} &= \frac{ds_{réf}(t)}{dt} \cdot \vec{T} = v_{réf}(t) \cdot \vec{T} \\ \vec{A}_{réf} &= \frac{dv_{réf}(t)}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v_{réf}^2(t)}{R} \cdot \vec{N} \\ \vec{J}_{réf} &= \frac{d^2v_{réf}(t)}{dt^2} \cdot \vec{T} + 2 \frac{v_{réf}(t)}{R} \cdot \frac{dv_{réf}(t)}{dt} \cdot \vec{N} \end{aligned} \quad (87)$$

avec $R = Cste$

Les lois de mouvement de référence des deux axes se déduisent par projection :

$$\begin{aligned} x_{réf}(t) &= R \cos \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); & y_{réf}(t) &= R \sin \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); \\ v_{réf}^x(t) &= -v_{réf}(t) \sin \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); & v_{réf}^y(t) &= v_{réf}(t) \cos \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); \\ a_{réf}^x(t) &= -a_{t,réf}(t) \sin \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right) - a_{n,réf}(t) \cos \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); \\ a_{réf}^y(t) &= a_{t,réf}(t) \cos \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right) - a_{n,réf}(t) \sin \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); \\ j_{réf}^x(t) &= -\frac{3}{2} j_{n,réf}(t) \cos \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right) + \left(\frac{v_{réf}^3(t)}{R^2} - j_{t,réf}(t) \right) \sin \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); \\ j_{réf}^y(t) &= \left(j_{t,réf}(t) - \frac{v_{réf}^3(t)}{R^2} \right) \cos \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right) - \frac{3}{2} j_{n,réf}(t) \sin \left(\frac{s_{réf}(t)}{R} \right); \end{aligned} \quad (88)$$

La figure V.4 représente la dynamique curviligne de la pointe outil et les dynamiques de référence des deux axes sur un profil circulaire. On rappelle que la loi de mouvement utilisée (loi horaire $s_{réf}(t)$) est une loi à jerk limité. Dans un premier temps, les limitations des dynamiques curvilignes sont les mêmes que pour l'exemple précédent (équation (85)); ces limites ne tiennent donc compte que de la dynamique tangentielle sur le profil. Cet exemple démontre l'importance d'intégrer la dynamique centripète dans les limitations dynamiques sous peine de dépasser les limitations des axes physiques (cf. accélération et jerk maximal atteint lors du mouvement sur la figure V.4).

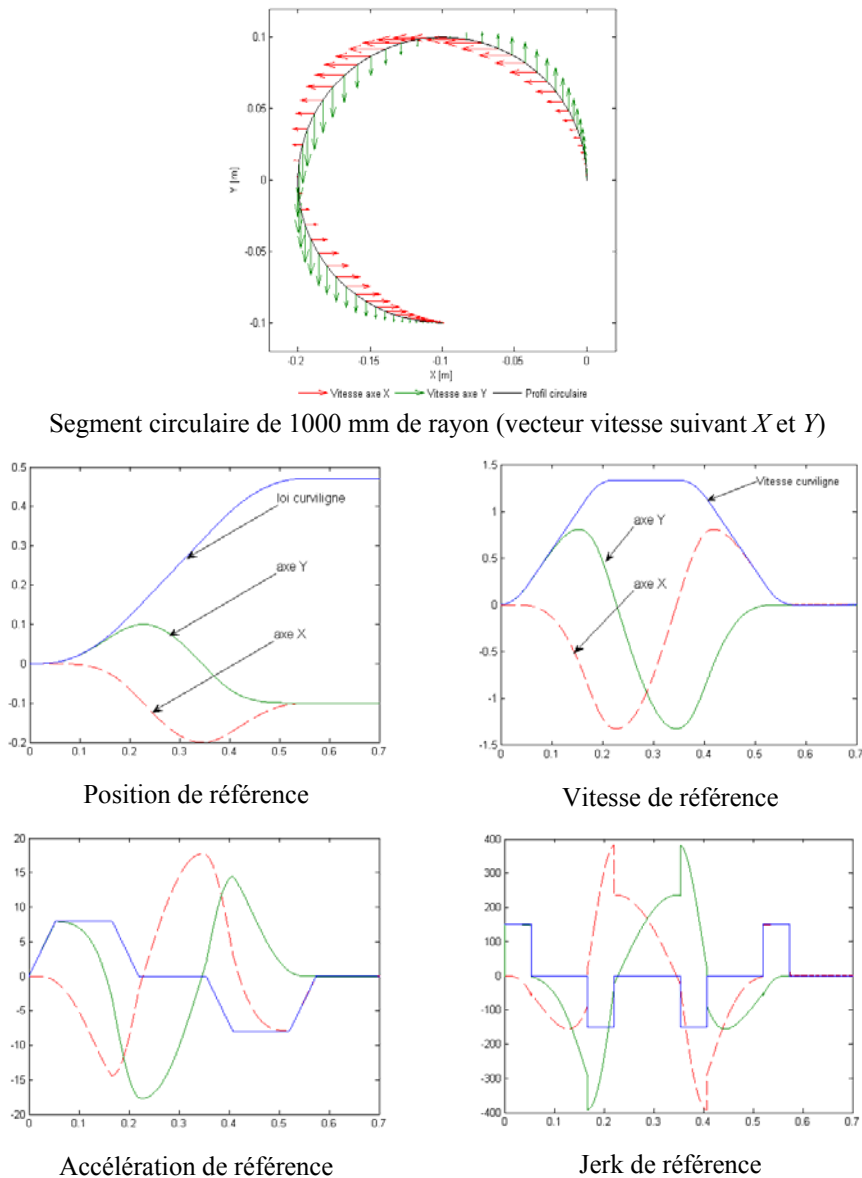


Figure V.4 – Comparaison entre la dynamique curviligne de référence et la loi de mouvement des axes pour un profil circulaire : limitation curviligne = minimum des capacités des axes (loi à jerk limité, durée théorique 0,5739 s).

La détermination des limites curvilignes maximales n'excédant pas les capacités des axes est un problème complexe dès que des limitations sont imposées aux dérivées supérieures à l'accélération (ici le jerk maximal). Classiquement, on a recours à une solution sous-optimale qui consiste à réduire la vitesse d'avance (vitesse curviligne) de façon à respecter les capacités des axes. Il est également possible, afin de limiter la diminution de la vitesse d'avance, de tolérer un dépassement local des limites imposées. Une solution optimisée consiste à déterminer par itérations successives les limites curvilignes qui conduisent à respecter les capacités des axes, tout en minimisant la durée du mouvement. La figure V.5 présente un exemple d'optimisation pour le profil considéré. Le critère à minimiser est la durée du mouvement. Les contraintes sont les limitations de chacun des axes et les paramètres d'optimisation sont les valeurs maximales des dynamiques curvilignes. Le respect des limites imposées sur les axes conduit ici à une réduction du jerk et de la vitesse curviligne. Le mouvement théorique est d'une durée de 0,7529 s, soit 30 % de plus que précédemment.

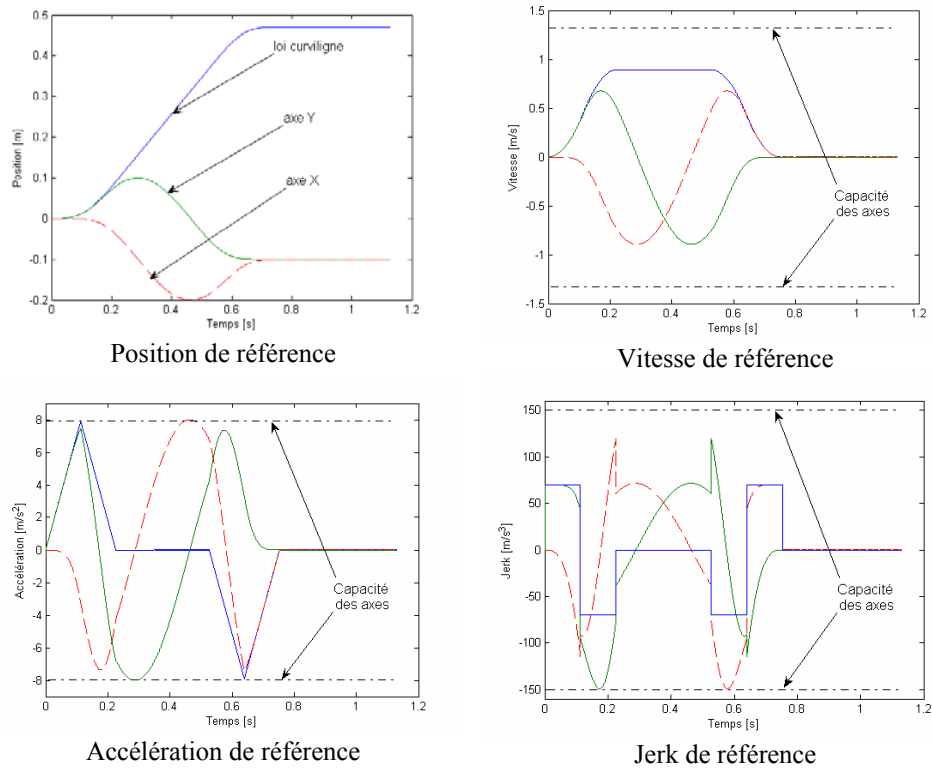


Figure V.5 – Comparaison entre la dynamique curviligne de référence et la loi de mouvement des axes pour un profil circulaire : limitation curviligne adaptée à la dynamique centripète (loi à jerk limité, durée théorique 0,7529 s).

V.2.3 Discontinuités de profil

Pour les profils élémentaires considérés (segment de droite et arc de cercle), il est possible de rencontrer deux types de discontinuité : une discontinuité en tangence au niveau du raccordement entre deux segments et une discontinuité en courbure pour un raccordement droite/cercle ou cercle/cercle.

Comme illustré sur la figure V.6, le franchissement de ces discontinuités à vitesse d'avance non nulle impliquerait la réalisation d'un échelon de vitesse (accélération infinie) pour une discontinuité en tangence, ou d'un échelon d'accélération (jerk infini) pour une discontinuité en courbure. Dans les deux cas, l'exécution pratique de ces échelons n'est pas physiquement réalisable par le système. La seule manière d'assurer la continuité désirée pour le mouvement consiste à respecter la physique, donc à s'arrêter au niveau de chaque discontinuité. Pour tout autre cas de figure, le profil théorique ne peut être réalisé.

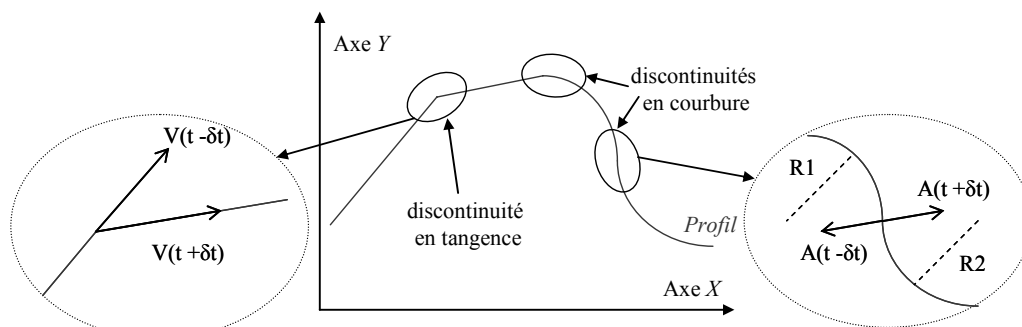


Figure V.6 – Discontinuités de profil en tangence et en courbure.

Certains processus d'usinage, comme par exemple l'usinage du bois, ne tolère pas d'arrêt de l'avance de l'outil lors de la coupe. De manière générale, il est préférable pour la qualité de l'état de surface d'éviter les arrêts. Ces derniers sont à l'origine de marques sur la pièce et provoquent une usure prématurée de l'outil. Deux solutions s'offrent alors afin de franchir ces discontinuités à vitesse non nulle :

1. Soit on fixe de nouvelles limites dynamiques (échelons de vitesse et d'accélération maximales par axe) qui vont permettre de moduler la vitesse d'avance au niveau des discontinuités de profil.
2. Soit on modifie le profil théorique afin de supprimer la discontinuité ; puisque qu'il y aura de toute façon une erreur de profil, autant qu'elle soit maîtrisée et imposée à l'avance.

La première solution est la plus classiquement utilisée. Les limites imposées, bien qu'irréalisables par la machine, sont fixées par des modèles d'erreur déduits de l'expérience de façon à obtenir une erreur de profil respectant la précision attendue. Avec l'évolution des formats d'interpolation et des capacités de traitement numérique des commandes, cette solution empirique tend à être remplacée par la seconde. Cette dernière solution entre dans le cadre des préoccupations qui nous ont conduites à élaborer une loi de mouvement adaptée au système. Ici, il s'agit d'adapter la géométrie du profil théorique aux trajectoires du système physique ne passant pas par une phase de vitesse nulle. Il est envisageable d'interpoler une discontinuité géométrique par un polynôme de degré suffisamment élevé pour assurer la continuité désirée le long du profil théorique, tout en respectant une tolérance donnée par rapport au profil initial.

Dans cette partie, nous avons montré comment adapter la loi de mouvement curviligne aux capacités maximales des axes physiques pour des trajectoires élémentaires. Il s'agit là d'un problème purement cinématique. Toutefois, si l'on tient compte de la dynamique des axes, le mouvement effectif de l'outil est donné par la relation (83) et rien ne permet d'assurer que la loi de mouvement calculée ne conduit pas à un dépassement des capacités des axes.

V.3 Adaptation de la méthodologie de précommande au suivi de trajectoire sur deux axes

V.3.1 De la dynamique à la cinématique

La méthodologie de précommande développée dans le chapitre IV permet de "compenser la dynamique" d'un axe par l'utilisation d'un modèle inverse non-causal. Cette méthodologie est directement applicable à la commande multiaxe d'une machine-outil puisque la loi de mouvement curviligne et par conséquent la loi de mouvement de chaque axe peut être déterminée a priori sur le profil théorique entièrement connu (traitement hors ligne). Ainsi, si chacun des axes dispose d'une précommande adaptée (du même ordre puisque l'on se limite au premier mode suivant chaque axe), les références d'axe seront théoriquement parfaitement suivies. Autrement dit, nous aurons les relations suivantes :

$$x(t) = x_{réf}(t); \quad y(t) = y_{réf}(t) \quad (89)$$

Et puisque le mouvement effectif de l'outil résulte de l'interpolation du mouvement de chacun des axes physiques (équation (83)), on obtient finalement :

$$s(t) = s_{ref}(t) \quad (90)$$

L'utilisation d'une précommande adaptée pour chacun des axes permet ainsi de réduire le problème de génération de commande multiaxe, initialement dynamique, à un problème de cinématique. Il s'agit, comme décrit dans la partie précédente, de déterminer une loi de mouvement curviligne qui, une fois projetée sur les axes physiques, respecte les capacités de ces derniers.

Ce raisonnement, bien qu'en apparence trivial, permet de faire le lien entre deux domaines aujourd'hui encore déconnectés : la génération de commande (CN) et la génération de profil (FAO).

Le domaine de la génération de profil est concerné par l'optimisation des trajets d'usinage afin de réduire principalement la durée des mouvements. Et l'on sait que pour assurer un suivi de profil de bonne qualité, il faut une géométrie « la plus douce possible ». Ce qui se traduit par l'utilisation de courbes géométriques avec un degré de continuité élevée. La majorité des travaux, concernant l'amélioration des trajets d'usinage, s'appuie sur l'utilisation de courbes polynomiales de type Bspline. Elles sont en effet dotées d'une algorithmique particulièrement adaptée à l'optimisation [DYLLONG - 2003]. Dans [PATELOUP - 2005], l'auteur propose une optimisation des trajets d'évidement de poche par des Bsplines de degré trois (trajectoire C2), en maximisant le rayon de courbure du profil de façon à minimiser le temps de parcours. Actuellement, les commandes numériques sont capables d'interpréter ce type de Bsplines qui évitent les discontinuités en tangence et en courbure. D'autres auteurs proposent l'utilisation de trajets d'une classe de continuité encore plus élevée. Par exemple, [LEE - 1998] propose un raccordement de surfaces géométriques permettant la définition d'un jerk continu (trajectoire C3). Mais la dynamique du système n'est généralement pas prise en compte dans ce type d'étude [HASCOET - 2000], [LARTIGUE - 1999]. Et la principale question qui reste en suspend est : Quel degré de continuité géométrique est réellement nécessaire pour définir un profil théorique adapté à la physique du système ?

Notre étude permet de répondre en partie à cette question. L'application de la méthodologie de précommande développée dans le chapitre IV conduit, pour un système soumis à un mode vibratoire sensible, à la nécessité d'élaborer une loi de mouvement définie jusqu'à la dérivée du jerk (snap). Autrement dit, si l'on veut pouvoir définir une trajectoire physiquement réalisable par ce système et minimisant la durée du mouvement (sans passage par une vitesse d'avance nulle), il est nécessaire de disposer d'une géométrie exempte de discontinuité jusqu'à l'ordre 3 (continuité de la dérivée de la courbure).

V.3.2 Éléments de comparaison pour les profils élémentaires

Nous avons vu que l'utilisation d'une précommande adaptée à un système soumis à un mode vibratoire sensible suppose la définition d'une loi de mouvement définie jusqu'au snap. Pour un trajet d'usinage constitué des profils élémentaires vus précédemment, la principale difficulté dans l'élaboration de la loi de mouvement consiste à assurer le respect des contraintes physiques après projection sur les axes. Si aucune erreur n'est tolérée, l'avance de l'outil doit s'annuler localement au niveau des discontinuités géométriques en tangence ou en courbure afin d'assurer un suivi de profil théoriquement parfait.

Dans la suite, nous tolérons une erreur de profil afin de comparer les performances de la structure dotée d'une précommande avec la structure d'asservissement classique.

Remarque : La comparaison entre la structure avec précommande et la structure d'asservissement classique soulève l'éternel remarque sur la comparaison de ce qui est comparable. Les réglages

d’asservissement utilisés pour la simulation sont ceux employés actuellement sur le prototype de machine-outil (rien ne dit que ce réglage est optimal). On note toutefois que les deux structures sont soumises aux mêmes limitations cinématiques, ce qui nous assure une base de comparaison fiable.

Considérons le cas du suivi d’un profil circulaire. La figure V.7 (a) présente l’erreur de rayon résultant du suivi d’une trajectoire circulaire de rayon 100 mm. La méthodologie de précommande est ici comparée aux performances de l’asservissement classique avec anticipations (vitesse et accélération). On constate une erreur non nulle en régime permanent de vitesse dans le cas d’une précommande parfaitement identifiée. Cette erreur est en partie due à un retard introduit par la discrétisation du filtre de précommande. Ce type d’erreur peut toutefois être compensé par une meilleure gestion de la loi de mouvement discrétisée [MARCELO - 1993]. Dans le cas d’une fréquence propre mal connue ou variable, on constate immédiatement une augmentation de l’erreur de rayon. Un biais de 50 % sur la fréquence propre crée une erreur moyenne comparable à celle de l’asservissement classique.

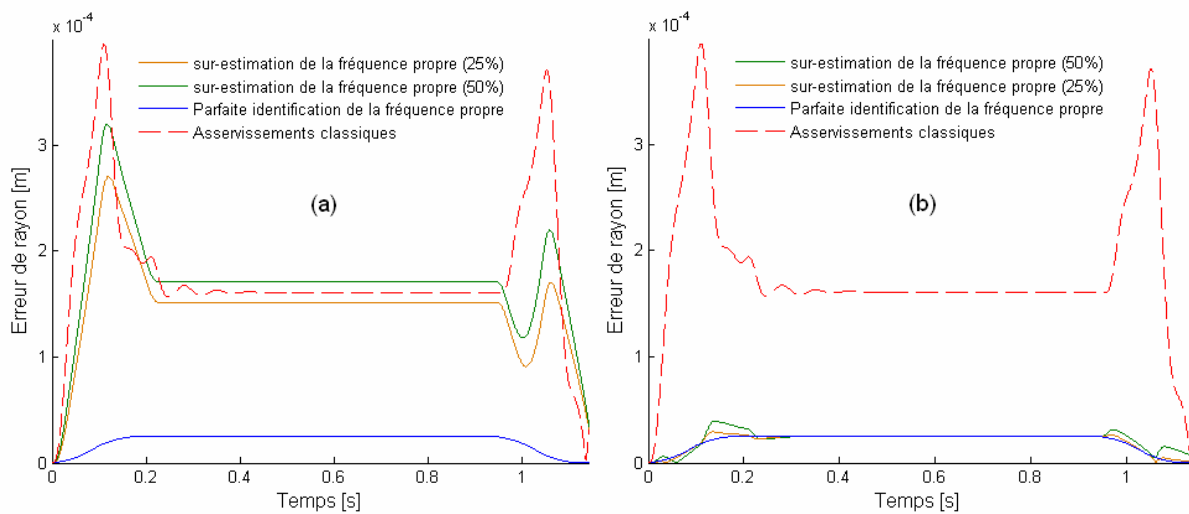


Figure V.7 – Erreurs de rayon sur un cercle : (a) précommande comparée aux asservissements classiques, (b) CMRE comparée aux asservissements classiques (Conditions : $k_v = 3$ m/min/mm, avance programmée $V_m = 30000$ mm/min, Rayon = 100 mm).

Sur la figure V.7 (b), la précommande est associée à une structure d’asservissement obtenue par inversion indirecte du type CMRE (cf. figure VI.5). On note la présence de vibrations et de déformations élastiques lors des phases transitoires dès que la fréquence estimée est erronée. Mais cette fois, l’erreur de rayon en régime permanent de vitesse n’évolue plus en fonction de l’erreur sur la fréquence propre. L’erreur de rayon obtenue est alors six fois moins importante que celle liée à l’asservissement classique.

A présent, nous considérons le cas du passage d’un angle à vitesse non nulle. L’échelon de vitesse provoqué par cette discontinuité ne permet plus d’élaborer une loi de mouvement adaptée à la précommande. Mais dans ce cas, seuls les asservissements permettent de corriger l’erreur de profil. La figure V.8 compare les résultats obtenus entre la structure classique et la structure avec précommande (CMRE). L’erreur de profil maximale est du même ordre pour les deux structures. En effet, les performances des asservissements sont comparables puisqu’ils sont soumis aux mêmes limitations (cf. courbes d’accélération sur la figure V.8). On note toutefois une différence dans la forme de l’erreur de profil. Dans le cas de la structure avec précommande, les asservissements ne font que réguler l’erreur au niveau de l’angle. Une fois cette erreur annulée, la précommande reprend la majeure partie

de la contribution en termes d'effort de commande et la trajectoire suivie oscille moins autour du profil théorique.

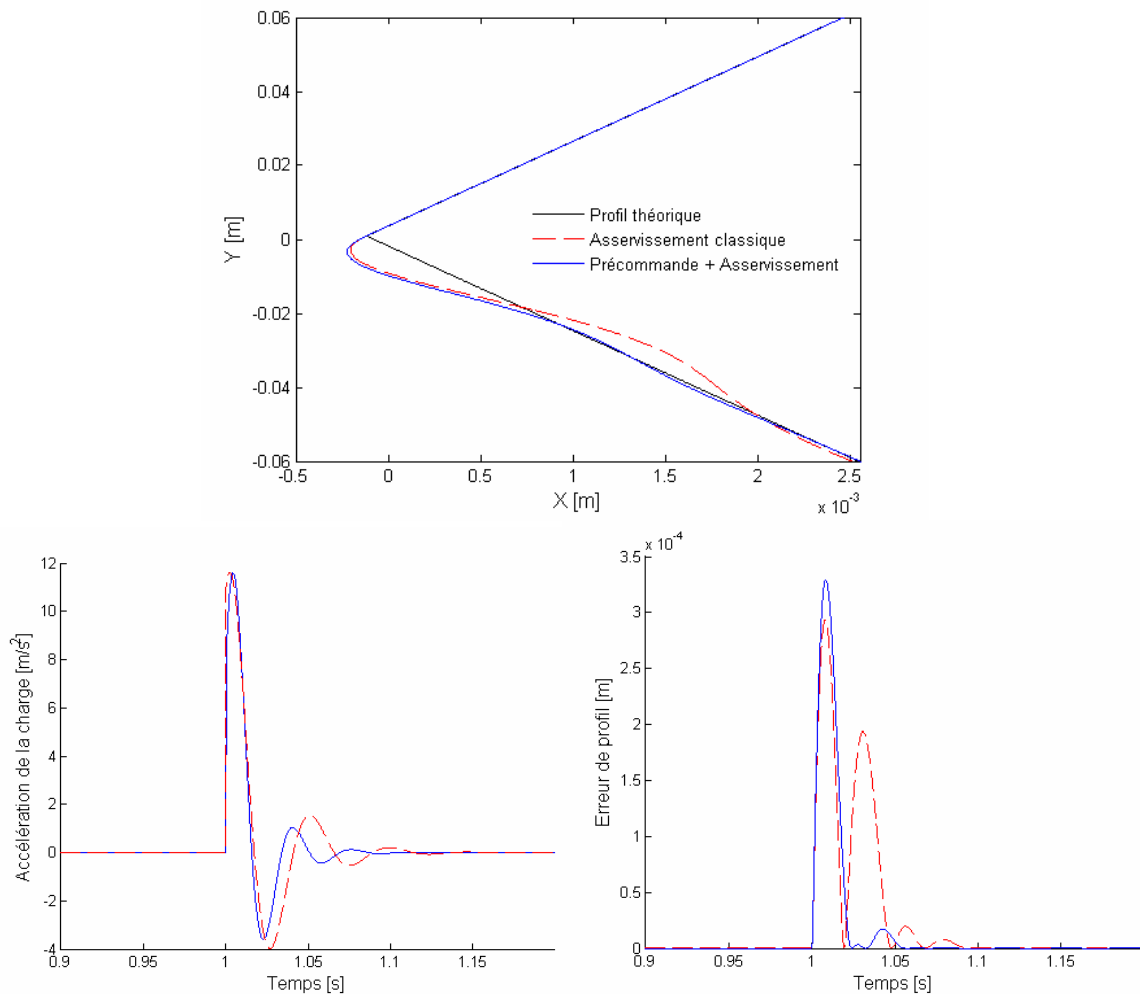


Figure V.8 – Passage d'un angle à vitesse constante : comparaison de l'accélération de la charge et de l'erreur de profil pour la structure classique et la CMRE (Conditions : $k_v = 3$ m/min/mm, avance programmée $V = 60000$ mm/min, $\alpha = 5^\circ$).

Les résultats obtenus laissent présumer d'une amélioration significative des performances obtenues en suivi de profil grâce à l'utilisation d'une précommande adaptée au système. On notera que si la loi de mouvement ne vérifie pas les contraintes de dérivabilité imposée par la précommande (discontinuité en tangence et en courbure), les performances restent alors comparables à celles d'un asservissement classique.

V.3.3 Synthèse

L'utilisation d'une précommande adaptée sur chacun des axes permet de réduire le problème de génération de commande multiaxe à un problème de cinématique. La loi de mouvement curviligne doit ainsi être définie afin de respecter les capacités des axes. Nous avons vu que l'élaboration de cette loi se complexifie dans le cas des trajectoires non linéaires, mais une solution facilement implantable consiste à exprimer le problème sous la forme d'une optimisation sous contraintes dont le critère à minimiser est la durée du mouvement.

Cette méthodologie suppose toutefois de marquer un arrêt du mouvement pour toute discontinuité géométrique du profil théorique en tangence, en courbure ou en dérivée de la courbure (dérivée troisième de l'abscisse curviligne).

Une solution pour augmenter la productivité consiste à ne pas s'arrêter, mais à réduire la vitesse d'avance au niveau de la discontinuité (ce qui est fait actuellement). La vitesse de franchissement de la difficulté est calculée de façon à ce que l'erreur de profil provoquée reste inférieure à une tolérance spécifiée. On note que dans ce cas, seul les asservissements par retour de mesure permettent de filtrer et de réguler une demande irréaliste au niveau des actionneurs.

Il est indéniable que tolérer une erreur de profil permet d'aller plus vite. Mais puisque dans tous les cas le système réalise une trajectoire vérifiant les équations physiques, il semble plus cohérent d'adapter le profil théorique de façon à intégrer cette erreur et à ne définir que des profils théoriques ayant la continuité souhaitée. Ces deux démarches ne sont pas identiques. La seconde pose le problème de façon plus naturelle ; en effet, si le degré de continuité géométrique du profil théorique est adapté à l'ordre de la précommande, alors il est possible d'élaborer une procédure d'optimisation globale du mouvement sur ce profil (étude cinématique). Et l'on peut donc s'attendre à une meilleure gestion des capacités des axes, donc à être plus productif, ceci pour une même tolérance sur l'erreur de profil.

Cette problématique reste aujourd'hui ouverte. Est-ce à la FAO de définir un profil adapté à la machine ou au système de commande de modifier la trajectoire de référence. A priori, le système de FAO ne possède pas la connaissance de la dynamique du système. Mais aucune machine ne passera une discontinuité de courbure à vitesse non nulle sans causer une erreur de profil. Fournir un profil théorique continu C2 permettrait déjà de réaliser une bonne adéquation entre géométrie et dynamique. Il est ensuite envisageable de demander au système de commande, qui lui peut disposer des données sur la dynamique machine, de modifier ce profil si nécessaire, c'est-à-dire selon le degré d'influence des souplesses du système et selon l'importance accordée à la précision du suivi de profil.

L'investigation de ce problème géométrique dépasse le cadre de cette étude qui considère le profil théorique comme intangible. On note qu'il s'agit d'un domaine d'investigations particulièrement prometteur qui est incontournable en termes de perspectives pour les travaux présentés.



Chapitre VI

INFLUENCE DES PARAMETRES D'ASSERVISSEMENT CLASSIQUES EN SUIVI DE PROFILS ELEMENTAIRES

Dans ce chapitre nous formalisons l'influence des principaux paramètres de la commande industrielle actuelle (gains de boucle et gains d'anticipation) sur la qualité du suivi de profil réalisé par deux axes souples. La précommande se limite ici aux termes d'anticipation en vitesse et en accélération (précommande rigide). Par conséquent, pour un axe soumis à un mode souple, la relation (90) qui suppose un suivi de profil parfait n'est pas vérifiée et la seule prise en compte des limites cinématiques des axes ne permet plus d'éviter une erreur de profil.

Les différents paramètres de l'asservissement ont des interactions fortes parfois antagonistes, généralement mal connues, sur la forme de l'erreur de profil. Dès lors, la recherche d'une bonne combinaison des paramètres de commande devient difficile et ces derniers sont parfois réglés de façon empirique [BEAREE – 2004(2)]. D'où l'intérêt de formaliser clairement leurs influences sur la réponse de la machine en suivi de profil.

Les asservissements d'axe reprennent la structure classique des asservissements utilisés industriellement. La fonction de transfert H_p entre la position de consigne d'un axe et la position de la charge (cf. développements en Annexe A.1) s'exprime comme suit :

$$H_p = \frac{1 + a_n.s + b_n.s^2 + c_n.s^3 + d_n.s^4}{1 + a_d.s + b_d.s^2 + c_d.s^3 + d_d.s^4 + e_d.s^5} \quad (91)$$

avec

$$a_n = \frac{k_p}{k_i} + \frac{k_{fv}}{k_v} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}; \quad b_n = \frac{k_{fv}.k_p}{k_i.k_v} + \frac{2k_p.\zeta_n}{k_i.\omega_n} + \frac{2k_{fv}.\zeta_n}{k_v.\omega_n}$$
$$c_n = \frac{k_{fa}}{k_i.k_v} + \frac{2k_{fv}.k_p.\zeta_n}{k_i.k_v.\omega_n}; \quad d_n = \frac{2.k_{fa}.\zeta_n}{k_i.k_v.\omega_n}$$

et selon la position du capteur de position (la vitesse étant mesurée au niveau du moteur) :

Capteur de position sur la charge

$$\begin{aligned} a_d &= \frac{k_p}{k_i} + \frac{1}{k_v} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \\ b_d &= \frac{k_p}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot \omega_n} + \frac{2\zeta_n}{k_v \cdot \omega_n} \\ c_d &= \frac{1}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{1}{k_v \cdot \omega_n^2} \\ d_d &= \frac{2\zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{k_p}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2} \\ e_d &= \frac{1}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2 (1+r)} \end{aligned}$$

Capteur de position sur le moteur

$$\begin{aligned} a_d &= \frac{k_p}{k_i} + \frac{1}{k_v} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \\ b_d &= \frac{k_p}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot \omega_n} + \frac{2\zeta_n}{k_v \cdot \omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2} \\ c_d &= \frac{1}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{1}{k_v \cdot \omega_n^2} + \frac{k_p}{k_i \cdot \omega_n^2} \\ d_d &= \frac{2\zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{k_p}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2} \\ e_d &= \frac{1}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2 (1+r)} \end{aligned}$$

Les notations adoptées sont : k_v gain proportionnel de position, k_p gain proportionnel de vitesse, k_i gain intégral en vitesse et kf_v (resp. kf_a) le pourcentage d’anticipation en vitesse (resp. en accélération). Enfin r représente le ratio des masses en mouvement (m_{c2} / m_{c1}).

On rappelle que la loi de mouvement à jerk limité étant disponible dans la majorité des systèmes de commande numérique, nous considérons que tous les mouvements étudiés sont réalisés suivant cette loi.

VI.1 Réalisation d’un segment linéaire

Pour réaliser une droite dans un plan, les deux axes sollicités doivent être coordonnés en mouvement afin d’éviter toute erreur de profil. L’erreur de profil en régime permanent résulte, dans ce cas, d’une différence de poursuite entre les axes, comme indiqué sur la figure VI.1. L’erreur de profil, que l’on notera ε_c , s’obtient par projection des écarts de poursuite de chaque axe (ε^x et ε^y) sur la normale à la trajectoire. Elle s’exprime en fonction du cosinus directeur de la droite α sous la forme :

$$\vec{\varepsilon}_c = (-\sin(\alpha) \cdot \varepsilon^x + \cos(\alpha) \cdot \varepsilon^y) \vec{n} \quad (92)$$

L’erreur de profil s’annule de façon évidente pour des mouvements par-axiaux ($\alpha = 0$ ou 90°) pour lesquels le point de référence et le point effectif sont alignés horizontalement ou verticalement ; l’expression (92) montre que, pour un mouvement d’angle $\alpha = 45^\circ$, l’erreur de profil est également nulle, si les erreurs de poursuite sont identiques sur chaque axe.

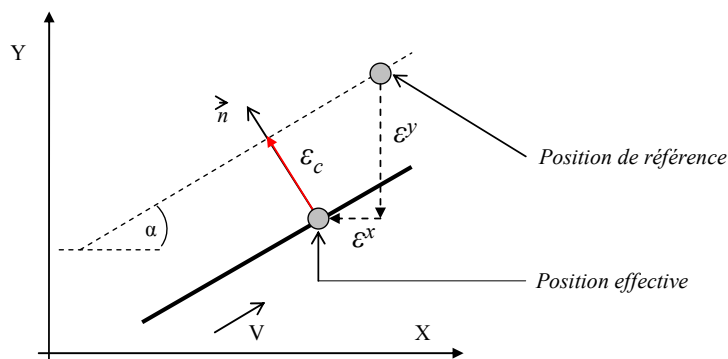


Figure VI.1 – Erreur de profil sur un segment linéaire.

Nous allons nous intéresser ici à l’erreur de profil produite par les erreurs de poursuite de chaque axe, après achèvement des régimes transitoires (c’est à dire aux erreurs stationnaires à vitesse, accélération ou jerk constant). En reprenant les notations du transfert en position, donné par l’équation

(91), l’erreur permanente de poursuite à vitesse constante, notée ε_V , est proportionnelle au terme $a_d - a_n$, c’est à dire à :

$$\varepsilon_V^i = \frac{1 - k_{f_v}^i}{k_v^i}; \quad i = x, y \quad (93)$$

De même, les erreurs de poursuite à accélération et jerk constant, notée ε_A et ε_J , sont définies par :

Capteur de position sur la charge

$$\varepsilon_A^i = (1 - k_{f_v}^i) \cdot \left(\frac{k_p^i}{k_v^i \cdot k_v^i} + \frac{2 \cdot \zeta_n^i}{k_v^i \cdot \omega_n^i} \right);$$

$$\varepsilon_J^i = \frac{1 - k_{f_a}^i}{k_i^i \cdot k_v^i} + \frac{2k_p^i \cdot \zeta_n^i (1 - k_{f_v}^i)}{k_i^i \cdot k_v^i \cdot \omega_n^i} + \frac{1}{k_v^i \cdot (\omega_n^i)^2}; \quad i = x, y$$

Capteur de position sur le moteur

$$\varepsilon_A^i = (1 - k_{f_v}^i) \cdot \left(\frac{k_p^i}{k_i^i \cdot k_v^i} + \frac{2 \cdot \zeta_n^i}{k_v^i \cdot \omega_n^i} \right) + \frac{1}{(\omega_n^i)^2};$$

$$\varepsilon_J^i = \frac{1 - k_{f_a}^i}{k_i^i \cdot k_v^i} + \frac{2k_p^i \cdot \zeta_n^i (1 - k_{f_v}^i)}{k_i^i \cdot k_v^i \cdot \omega_n^i} + \frac{1}{k_v^i \cdot (\omega_n^i)^2} + \frac{k_p}{k_i \cdot (\omega_n)^2}; \quad i = x, y \quad (94)$$

Les erreurs de profils correspondant à ces différentes phases sont calculées à partir de l’équation (92). Le tableau 4 se propose de synthétiser les erreurs de profil obtenues en fonction du mode d’anticipation retenu, V_m , A_m et J_m représentant respectivement la vitesse d’avance maximale, l’accélération maximale et le jerk maximal sur trajectoire. Les dynamiques maximales sur trajectoire (dynamique curviligne) dans le cas d’une droite correspondent simplement au minimum des caractéristiques des deux axes comme nous l’avons vu au chapitre V.

Cas 1 : sans anticipation

$$\varepsilon_c = V_m \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{k_v^x - k_v^y}{k_v^x \cdot k_v^y} \quad (95)$$

Cas 2 : anticipation totale en vitesse ($k_{f_v} = 1$)

Capteur de position sur la charge

$$\varepsilon_c = J_m \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\left(\frac{1 - k_{f_v}^y}{k_i^y \cdot k_v^y} + \frac{1}{k_v^y \cdot (\omega_n^y)^2} \right) - \left(\frac{1 - k_{f_v}^x}{k_i^x \cdot k_v^x} + \frac{1}{k_v^x \cdot (\omega_n^x)^2} \right) \right]$$

Capteur de position sur le moteur

$$\varepsilon_c = A_m \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{(\omega_n^y)^2} - \frac{1}{(\omega_n^x)^2} \right] \quad (96)$$

Cas 3 : anticipation totale en vitesse et en accélération ($k_{f_v} = k_{f_a} = 1$)

Capteur de position sur la charge *Capteur de position sur le moteur*

$$\varepsilon_c = J_m \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{k_v^x (\omega_n^x)^2 - k_v^y (\omega_n^y)^2}{k_v^x (\omega_n^x)^2 \cdot k_v^y (\omega_n^y)^2} \quad \varepsilon_c = A_m \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{(\omega_n^y)^2} - \frac{1}{(\omega_n^x)^2} \right] \quad (97)$$

Tableau 4 – Erreur de profil sur une droite inclinée d’un angle α dans le plan machine.

On remarquera, tout d’abord, que dans tous les cas traités dans le tableau 4, les erreurs de profil s’annuleront si les caractéristiques dynamiques des axes sont identiques. Une démarche logique de

minimisation de l’erreur de profil consisterait donc à rendre les axes « les plus identiques possibles ». D’après l’équation (95), si les axes ne sont pas anticipés, l’erreur de profil sera alors proportionnelle à la vitesse d’avance. Cette expression justifie une politique de réglage classique : *Pour annuler l’erreur de profil à vitesse constante sur une droite, les gains de position des différents axes doivent être égaux*. Toutefois, sur les machines classiques l’axe porteur sera moins dynamique que l’axe porté, les caractéristiques propres de chaque axe, en termes de mode dominant et de gains d’asservissement, seront différentes. La technique précédente se limite donc généralement à l’alignement des gains de position. Si l’on veut agir à nouveau sur l’erreur de profil, il faut pouvoir réduire les erreurs de poursuite de chaque axe, ce que seules permettent les anticipations.

Considérons le cas d’une mesure de position au niveau de la charge. Les équations (93) et (94) démontrent qu’une anticipation totale en vitesse sur chaque axe permet une compensation parfaite des erreurs de poursuite, donc supprime l’erreur de profil, à vitesse et à accélération constantes. L’erreur de profil pour un axe anticipé en vitesse, se reportera alors sur les phases à jerk constant, ce qui correspond au 2ème cas du tableau 4. L’erreur de poursuite lors des phases à jerk constant ne peut être que partiellement compensée en anticipant totalement en accélération. Les erreurs de poursuite de chaque axe seront alors inversement proportionnelles au carré de leur pulsation propre prépondérante. Cette erreur de profil, décrite à l’équation (97), s’annule uniquement dans le cas où les $k_v^j \cdot \omega_m^{j^2}$ sont égaux sur chaque axe. Ce réglage est possible si l’on ne considère toutefois que les propriétés de poursuite du système, mais on notera que cela revient à diminuer le gain de position de l’axe naturellement le plus dynamique (1^{ère} fréquence propre la plus élevée). Ce qui équivaut à perdre en qualité de rejet dynamique de perturbation pour cet axe. Ainsi, l’on préférera généralement réduire cette erreur en limitant le niveau du jerk maximal sur trajectoire.

Considérons à présent le cas d’une mesure de la position au niveau du moteur. Les souplesses d’axe n’étant pas directement vues par l’asservissement, leurs influences lors des phases à accélération constante ne peuvent être compensées par les anticipations (équations (93) et (94)). Seule une modulation de l’accélération sur trajectoire peut être envisagée pour réduire l’erreur de profil.

VI.2 Réalisation d’un profil circulaire

La réalisation d’une interpolation circulaire à vitesse constante par deux axes linéaires passe par l’injection d’un signal sinusoïdal sur chacun des axes. Les références d’axe correspondent alors à des excitations harmoniques, à fréquence constante ω , en quadrature de phase (déphasées de $\pi/2$). Ainsi, si V représente la vitesse d’avance sur le cercle de rayon R , on aura les positions de références suivantes :

$$\begin{aligned} \omega &= V / R \\ x_{ref} &= R \cos(\omega t) \\ y_{ref} &= R \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = R \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (98)$$

Après achèvement des transitoires, les équations du mouvement des axes s’écrivent en fonction des fonctions de transfert de chaque axe (cf. équation (91)) :

$$\begin{aligned} x &= R \|H_p^x(j\omega)\| \cos(\omega t + \varphi_p^x) \\ y &= R \|H_p^y(j\omega)\| \sin(\omega t + \varphi_p^y) \end{aligned} \quad (99)$$

avec φ_p^x la phase de la fonction de transfert en position de l’axe x. Si les caractéristiques des axes sont différentes, la trajectoire décrite s’identifiera à une ellipse. Cette ellipse sera inclinée de ϕ_0 par rapport à l’axe x :

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \cdot \arg \left[\frac{\|H_p^x(j\omega)\| \cdot e^{-j\varphi_p^x} - \|H_p^y(j\omega)\| \cdot e^{-j\varphi_p^y}}{\|H_p^x(j\omega)\| \cdot e^{j\varphi_p^x} + \|H_p^y(j\omega)\| \cdot e^{j\varphi_p^y}} \right] \quad (100)$$

Le rayon moyen de l’ellipse R_m sera donné par :

$$R_m = \frac{R}{2} \left| \|H_p^x(j\omega)\| \cdot e^{j\varphi_p^x} + \|H_p^y(j\omega)\| \cdot e^{j\varphi_p^y} \right| \quad (101)$$

et l’écart maximum ΔR_m par rapport à ce rayon moyen sera fonction de la différence de dynamique entre les axes :

$$\Delta R_m = \frac{R}{2} \left| \|H_p^x(j\omega)\| \cdot e^{j\varphi_p^x} - \|H_p^y(j\omega)\| \cdot e^{j\varphi_p^y} \right| \quad (102)$$

L’angle d’inclinaison de l’ellipse dans le plan machine obéit à des règles remarquables représentées à la figure VI.2. Si l’on considère un déphasage quasi-nul sur les deux axes, d’après l’équation (96) l’angle d’inclinaison sera fonction de la différence de réponse en amplitude des axes :

$$\{\phi_0\}_{Amplitude} = \frac{1}{2} \cdot \arg \left[\frac{\|H_p^x(j\omega)\| - \|H_p^y(j\omega)\|}{\|H_p^x(j\omega)\| + \|H_p^y(j\omega)\|} \right] \quad (103)$$

Si l’axe x possède la réponse en amplitude la plus élevée, l’ellipse sera dirigée selon cet axe, dans le cas contraire l’ellipse sera inclinée de 90° par rapport à x, donc dirigée selon l’axe y. Si l’on considère maintenant uniquement le déphasage entre les axes, c’est à dire si $\|H_p^x(j\omega)\| = \|H_p^y(j\omega)\|$, alors un développement en série au premier ordre par rapport à φ_p^x et φ_p^y de l’expression (100) donne la règle d’inclinaison de l’ellipse :

$$\{\phi_0\}_{Phase} = -\frac{1}{2} \cdot \arg [j\Delta\varphi] = \pm 45^\circ \quad (104)$$

en notant $\Delta\varphi = \varphi_p^x - \varphi_p^y$ le déphasage entre les axes.

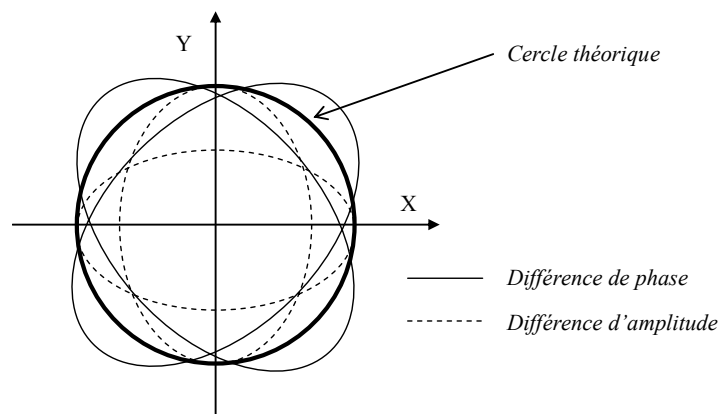


Figure VI.2 – Inclinaison de l’ellipse résultant d’une trajectoire circulaire pour deux axes de dynamiques différentes.

Plus concrètement, il n’est pas possible d’avoir une différence d’amplitude ou de déphasage seule. L’angle d’inclinaison et le rayon moyen de l’ellipse obtenue sont une combinaison de ces deux effets, et donc implicitement du niveau d’anticipation des axes. Si l’on considère des axes anticipés

totalemment en vitesse et en accélération, le traînage à jerk constant déterminé précédemment (cf. équation (94)) engendre un angle d'environ 45° par rapport à l'axe x :

$$\phi_0 \approx \frac{1}{2} \cdot \arg \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{jw^3}{k_v^x (\omega_n^x)^2} - \frac{jw^3}{k_v^y (\omega_n^y)^2} \right) \right] = \pm 45^\circ \quad (105)$$

l'orientation de cet angle est explicitement fonction d'une part, du sens de rotation, et d'autre part, de la direction de l'axe le plus dynamique. De façon évidente, on retrouve que si les axes sont identiques la trajectoire décrite est un cercle. Le point sur le cercle est alors déphasé de la phase de la fonction de transfert par rapport au point de référence et le rayon effectif obtenu en régime permanent s'exprime sous la forme simple :

$$R_{ef} = R \|H_p\| \quad (106)$$

Dans la suite, nous allons considérer le cas de deux axes identiques. L'intérêt de cette hypothèse, certes idéaliste, est de permettre une formalisation simplifiée des effets des anticipations sur l'erreur de rayon décrite à la figure VI.3. On définit pour cela l'erreur de rayon :

$$\Delta R = R - R_{ef} = R [1 - \|H_p\|] \quad (107)$$

ΔR sera par définition positive si le rayon final est inférieur au rayon programmé. Par développements en série entière à l'ordre 2 de l'expression (107) en considérant $1 - \|H_p\| \ll 1$, c'est à dire en considérant :

$$\Delta R \approx \frac{R}{2} (1 - \|H_p\|^2) + \frac{R}{8} (1 - 2\|H_p\|^2 + \|H_p\|^4) \quad (108)$$

On détermine alors l'expression de l'erreur de rayon à vitesse constante V_m dans le cas d'une mesure directe de la position sur la charge :

$$\begin{aligned} \Delta R = & \frac{V^2}{R} \left(\frac{1 - kf_v^2}{2k_v^2} \right) \\ & + \frac{V^4}{R^3} \left(\frac{kf_v^4 + 2kf_v^2 - 3}{8k_v^4} + \frac{kf_a k_i (kf_v - 1) + k_p k_v (kf_a - 1)}{k_i^2 k_v^2} - \frac{2\zeta_n k_v + \omega_n}{k_v^2 \omega_n^3} \right) \end{aligned} \quad (109)$$

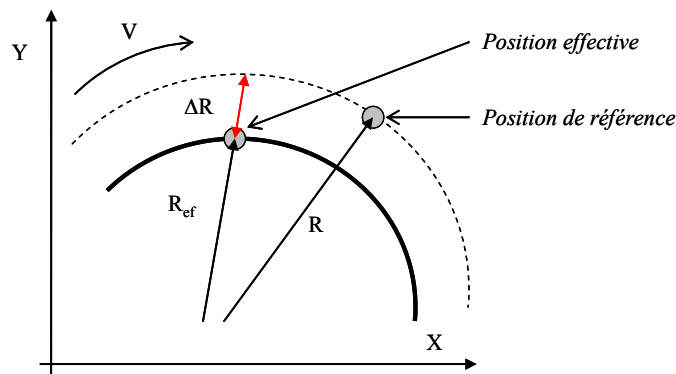


Figure VI.3 – Erreur de rayon sur un cercle parcouru à vitesse d'avance constante.

Ainsi, dans le cas d'axes non anticipés, le rayon obtenu sera inférieur au rayon désiré, et l'erreur de rayon sera proportionnelle au carré de la vitesse d'avance et inversement proportionnelle au rayon programmé, ce qui correspond aux formules d'erreurs rencontrées en usinage conventionnel [OMARI - 2000] :

$$\Delta R \approx \frac{V^2}{2k_v^2 R} \quad (110)$$

Le tableau 5 résume les erreurs de rayon obtenues en fonction du mode d'anticipation retenu. Si les axes sont anticipés totalement en vitesse, l'erreur de rayon évolue alors proportionnellement à V^4 / R^3 . Dans le cas d'axes pouvant être considérés comme rigides, le cercle obtenu peut être plus grand que celui programmé (équation 111). L'anticipation en accélération permet de réduire cette erreur, elle permet donc une réduction du rayon obtenu, l'erreur de rayon pour des axes rigides totalement anticipés est quasiment nulle (équation 108). Si on tient compte de la souplesse de transmission, le cercle réalisé subira une expansion due à l'effet centrifuge sur la charge souple (équation 109).

Cas 1 : axe rigide, anticipation totale en vitesse ($\omega_n \rightarrow \infty, kf_v = 1$)

$$\Delta R = -\frac{V^4}{R^3} \frac{k_p}{k_i^2 k_v} \quad (111)$$

Cas 2 : axe rigide, anticipation totale en vitesse et accélération ($\omega_n \rightarrow \infty, kf_v = 1, kf_a = 1$)

$$\Delta R \approx 0 \quad (112)$$

Cas 3 : axe souple, anticipation totale en vitesse et accélération ($kf_v = 1, kf_a = 1$)

$$\Delta R = -\frac{V^4}{R^3} \left(\frac{2\zeta_n k_v + \omega_n}{k_v^2 \omega_n^3} \right) \quad (113)$$

Tableau 5 – Erreur de rayon sur un cercle parcouru à vitesse constante (capteur de position sur la charge).

Finalement, on constate que les anticipations de vitesse et d'accélération ont des effets complémentaires sur l'erreur de rayon, pour un cercle parcouru à vitesse constante. L'anticipation en vitesse réduit l'erreur de façon importante, mais le rayon du cercle obtenu peut alors être supérieur au rayon programmé. L'anticipation en accélération permet de compenser ce phénomène. Toutefois, les effets de la souplesse de transmission tendent à augmenter naturellement le rayon obtenu. D'où découle un possible réglage optimal du pourcentage d'anticipation par rapport à la pulsation et à l'amortissement du premier mode souple de transmission. On aura effectivement $\Delta R \approx 0$ pour une anticipation totale en vitesse et un pourcentage d'anticipation en accélération réglé comme suit :

$$kf_a = 1 + \frac{k_i^2 (2\zeta_n k_v + \omega_n)}{k_p k_v^3 \omega_n^3} \quad (114)$$

On notera que ce réglage correspond à une sur-anticipation en accélération ($kf_a > 1$).

Si l'on considère à présent le cas où la souplesse n'est pas directement vue par le capteur de position, l'effet centrifuge sur la charge n'est pas atténué et on a une expansion supplémentaire du rayon d'un ordre plus élevé :

$$\Delta R_{centrifuge} = -\frac{V^2}{R \omega_n^2} \quad (115)$$

D'après les équations (110) et (115), le compromis possible entre l'effet centrifuge et la réduction du rayon programmé consiste à régler le pourcentage d'anticipation en vitesse pour annuler les deux effets. Le kf_v optimal s'exprime dans ce cas :

$$kf_v = \sqrt{1 - \frac{2k_v^2}{\omega_n^2}} \quad (116)$$

en considérant toutefois une pulsation assez grande pour vérifier $\omega_n^2 \geq 2k_v^2$. La figure VI.4 montre l'évolution de l'erreur relative de rayon $|\Delta R|$ adimensionnée en fonction de kf_v et du ratio ω_n / k_v . On remarque que pour des fréquences basses, la valeur d'anticipation en vitesse optimale diminue rapidement et devient d'autant plus faible que le gain de position est élevé. Cette propriété permet notamment d'expliquer la valeur optimale de l'anticipation en vitesse obtenue par essais et erreurs dans [MATSUBARA 2002].

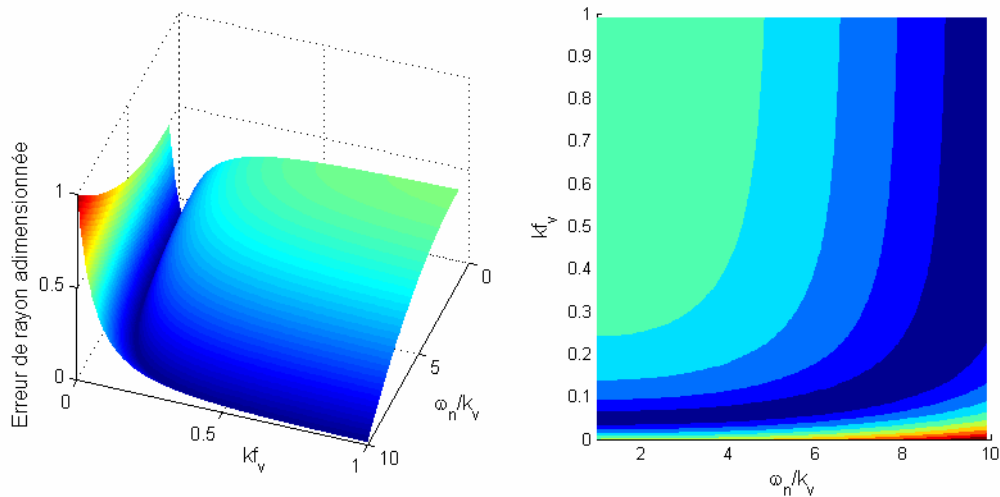


Figure VI.4 – Évolution de l'erreur de rayon relative en fonction de kf_v et de la pulsation dominante adimensionnée ω_n / k_v .

Sur la figure VI.5 nous présentons les résultats obtenus sur un prototype de machine-outil équipé de deux axes à moteurs linéaires. Nous comparons les erreurs de rayon relevées par les capteurs de la CN (mesure sur les moteurs) et par un ball-bar Renishaw externe (mesure de la pointe outil) aux erreurs théoriques établies par les équations (110) et (115). Pour des axes non anticipés, la vitesse programmée de 30 000 mm/min ne peut être atteinte et est limitée à 6 000 mm/min, ce qui conduit à une erreur prédite de 5 μm pour des axes rigides. La position des capteurs utilisés par la commande ne permet effectivement pas de mesurer la déformation au niveau du point à contrôler. En conséquence, on vérifie qu'une anticipation totale en vitesse et en accélération conduit à une erreur de profil très faible "du point de vue de la commande numérique". En utilisant un ball-bar externe, les déformations du système sont notables et induisent une expansion du rayon de 17 μm . On notera que dans ce cas l'erreur de contour prédite est sur estimée. Finalement, les erreurs prédites donne une estimation correcte de l'erreur de rayon effective.

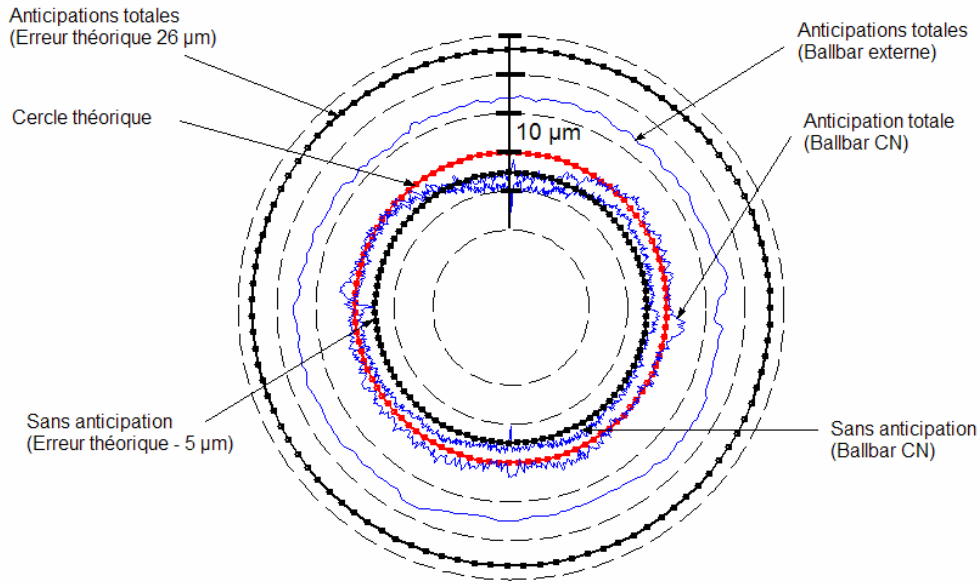


Figure VI.5 – Erreurs de rayon expérimentales comparées à la théorie (Conditions : $kv = 8$ m/min/mm, avance programmée $V = 30\,000$ mm/min, Rayon = 150 mm).

VI.3 Passage des difficultés de profil

Nous avons vu précédemment dans quelle mesure les paramètres de commande permettaient de suivre une trajectoire simple, en limitant, voire annulant, les erreurs de forme liées d'une part au comportement dynamique des axes et d'autre part aux retards de phase qu'introduit la structure des boucles imbriquées. On s'intéresse, dans cette partie, à la gestion de l'erreur de forme émanant du passage à vitesse non nulle d'une difficulté de profil. Ces difficultés sont les discontinuités en tangence et en courbure du profil géométrique. L'erreur de forme tolérée permet de passer une difficulté à vitesse non nulle, en tolérant une discontinuité du signal de référence en vitesse ou d'accélération. Nous allons considérer uniquement le cas le plus défavorable pour le système, autrement dit le passage d'un angle à vitesse constante (discontinuité en tangence).

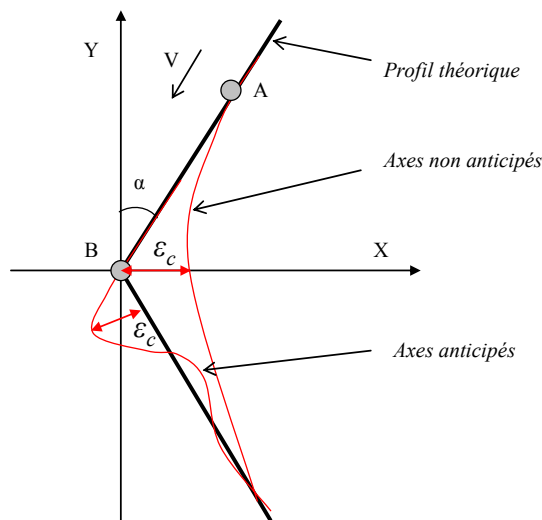


Figure VI.6 – Passage d'une discontinuité en tangence à vitesse d'avance constante.

Le passage d'angle est décrit à vitesse d'avance V constante et d'après les conventions de représentation utilisées à la figure VI.6, l'axe X sera soumis à un échelon de vitesse d'amplitude

$2V\sin(\alpha)$, alors que l'axe Y est entraîné à vitesse constante $V\cos(\alpha)$. On pose $t = 0$ pour l'instant d'application de l'échelon sur l'axe X (point A pour des axes non anticipés; point B pour des axes anticipés). Les équations du mouvement des axes pour $t \geq 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} x(t) = V \sin(\alpha) \left(2L^{-1} [H_p(s)] - \left(t - \frac{1-kf_v}{k_v} \right) \right) \\ y(t) = V \cos(\alpha) \left(t - \frac{1-kf_v}{k_v} \right) \end{cases} \quad (117)$$

en notant L^{-1} la transformation inverse de Laplace et $\frac{1-kf_v}{k_v}$ le retard de l'axe lié à l'équation (93).

La détermination de la fonction originale de $H_p(s)$ est difficilement exprimable sous sa forme générale. Dans le cas d'une discontinuité aussi "dure" pour la mécanique qu'un échelon de vitesse, l'erreur est majoritairement induite par le mode rigide du système. Nous considérons par conséquent un modèle d'axe simplifié correspondant à une mécanique rigide et à un ratio constant entre la dynamique des différentes boucles (cf. annexe A1.3 équation (A5)). En utilisant ce modèle dérivé, on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = V \sin(\alpha) \left(t - \frac{1-kf_v}{k_v} + e^{-3k_v t} \left[\frac{2(1-kf_v)}{k_v} + (4-6kf_v)t + (3+9kf_a-9kf_v)k_v t^2 \right] \right) \\ y(t) = V \cos(\alpha) \left(t - \frac{1-kf_v}{k_v} \right) \end{cases} \quad (118)$$

Ces équations permettent de déterminer l'allure de la trajectoire suivie lors du passage de l'angle, en fonction du gain de position des axes et surtout en fonction du degré d'anticipation (figure VI.6).

On notera ε_c l'erreur de profil due au passage d'angle. L'erreur de profil sera sensible sur le deuxième segment de droite et sera définie selon une direction orthogonale à cette droite dans le cas où les axes sont anticipés totalement en vitesse, comme décrit sur la figure VI.6. Si les axes sont partiellement, ou non anticipés en vitesse, l'erreur suivant l'axe X est dans ce cas représentative de l'erreur lors du passage de l'angle. Pour des axes totalement anticipés en vitesse et en accélération, l'erreur de profil maximale est donnée par :

$$\max_{t \geq 0} |\varepsilon_c| \approx 0,076 \times \frac{V \sin(2\alpha)}{k_v} \quad (119)$$

Pour des axes partiellement anticipés, l'erreur devient :

$$\max_{t \geq 0} |\varepsilon_c| \approx \frac{V \sin(\alpha)}{k_v} \left[9(1-kf_v)^2 (1+kf_a - kf_v) \right] e^{-3(1-kf_v)} \quad (120)$$

D'où, pour des axes non anticipés :

$$\max_{t \geq 0} |\varepsilon_c| \approx 0,45 \times \frac{V \sin(\alpha)}{k_v} \quad (121)$$

Il apparaît que pour des axes rigides totalement anticipés (équation (119)) l'erreur de profil au niveau du passage d'angle est réduite de plus de 3 fois par rapport au cas non-anticipé (équation (121)), ceci pour la même vitesse d'avance. Ainsi, pour une erreur donnée, les anticipations permettent de franchir plus rapidement une discontinuité géométrique, en supposant toutefois les axes comme étant rigides.

La figure VI.7 montre les résultats expérimentaux obtenus sur le prototype de machine-outil (Annexe 3) pour le passage d’un angle à vitesse constante. Trois cas d’anticipations sont ici comparés aux trajectoires théoriques. On notera que les gains de position des axes ont été réduits et que l’angle est faible afin d’éviter la saturation de l’actionneur lors de la discontinuité ; la saturation aurait violé l’hypothèse faite sur la linéarité du comportement du système. La vitesse des axes est également limitée afin de s’approcher d’un comportement totalement rigide avant la discontinuité. On vérifie que les hypothèses faites précédemment conduisent à une bonne adéquation entre la théorie et l’expérimentation.

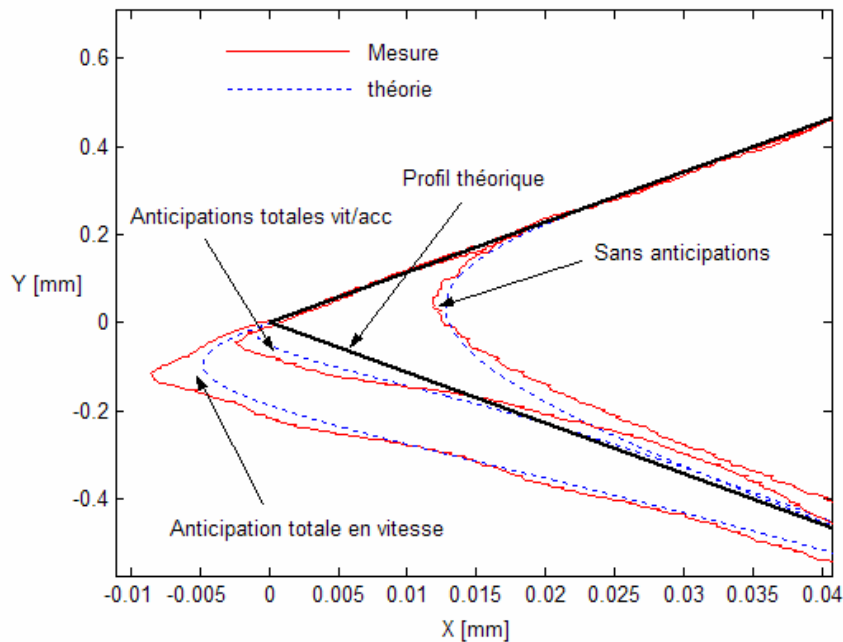


Figure VI.7 – Validation expérimentale du passage d'une discontinuité en tangence à vitesse d'avance constante (Conditions : $k_v = 3$ m/min/mm, avance $V = 1000$ mm/min, $\alpha = 5^\circ$).

VI.4 Bilan pratique

Dans cette partie nous avons formalisé l'erreur de profil pour un système asservi par une structure de commande classique. Le modèle d'axe considéré tient compte des principaux paramètres de la commande et de la souplesse dominante des axes. L'analyse des trajectoires linéaires et circulaires nous a permis de démontrer le rôle significatif joué par les anticipations sur l'erreur de profil. Les résultats principaux sont confirmés par l'expérimentation sur un prototype de machine-outil à dynamique élevée.

Cette étude de l'existant nous a permis de :

- réaliser une synthèse sur l'erreur de profil lors de déplacements élémentaires ;
- vérifier les performances des asservissements classiques sur ces profils ;
- dégager des règles simples de réglage basées sur la physique du système.

Un point important dégagé par cette étude réside dans la mise en évidence des limites de la structure d'asservissement actuelle. En effet, même si un « bon réglage » permet de limiter, voire d'annuler l'erreur de profil, nous avons montré que ce réglage était spécifique au type de profil désiré ainsi qu'à la dynamique imposée (vitesse d'avance). L'adaptation de la génération de commande aux

caractères « vibratoires » du système devrait permettre de simplifier le problème. Les asservissements n’auraient plus à compenser localement les effets des souplesses mécaniques et la politique de réglage des correcteurs serait alors spécifiquement dédiée au critère de rejet de perturbations. On notera que pour être vérifiée, cette assertion sous-entend également un travail préalable sur la géométrie du profil à réaliser (cf. chapitre V).

Chapitre VII

CONCLUSIONS GENERALES ET PRINCIPALES PERSPECTIVES

VII.1 Synthèse des travaux réalisés

Ce document examine le problème de génération de commande pour les systèmes de positionnement à dynamique élevée. Nous montrons qu'une structure "idéale" de commande destinée au suivi de profil se doit de générer un mouvement appartenant aux trajectoires du système physiques. En d'autres termes, la commande de référence se doit d'intégrer la relation inverse caractérisant la dynamique du système. La mise en place d'une précommande adaptée à la dynamique des axes permet de réaliser cette inversion en filtrant la loi de mouvement de ces derniers. Toutefois, étant donné les inévitables imperfections du modèle et la difficulté d'intégrer en commande les perturbations exogènes agissant sur le point à contrôler, la commande directe générée par la précommande doit être couplée à une structure de commande indirecte par retour de mesures. L'aspect suivi de profil et l'aspect rejet de perturbation se trouvant alors totalement découplés, la loi de mouvement imposée au système devient le principal levier pour le problème de génération de commande.

Dans le chapitre II, l'aspect suivi de profil et donc précommande n'étant pas considéré, la loi de mouvement est supposée directement injectée en entrée du système. Les lois de mouvement étudiées sont les lois trigonométriques en sinus ou sinus carré d'accélération, les lois polynomiales minimisant l'accélération, le jerk ou le snap et enfin les lois bang-bang (polynomiales par morceaux) à accélération, jerk ou snap limité. L'influence de la forme de ces lois de mouvement sur les performances d'un axe exprimées en termes d'amplitude de vibration et de durée de mouvement est démontrée et validée expérimentalement sur différents démonstrateurs représentatifs des machines de production à dynamique élevée. De façon connexe, nous montrons que le graphe de vibration et les critères de performances associés sont des outils simples et efficaces permettant la comparaison théorique des performances de différentes lois de mouvement. Les principales conclusions de cette partie sont :

- La classe des lois de mouvement de type bang-bang est particulièrement adaptée au mouvement rapide nécessitant un positionnement précis exempt de vibration. Ainsi, dans le cas d'un axe soumis à un mode souple stationnaire, la loi à jerk limité est une loi optimale minimisant la durée du mouvement et les vibrations résiduelles.
- Les lois de mouvement polynomiales sont adaptées aux systèmes dont les paramètres évoluent dans le temps et sont mieux appropriées au problème du suivi de trajectoire (si, toutefois, le système ne dispose pas d'une précommande compensant l'effet des souplesses). La loi de mouvement à minimum de jerk connue pour son aptitude à décrire le mouvement des articulations humaines permet effectivement de générer un mouvement

doux, provoquant peu d'oscillations et ne nécessitant aucune connaissance à priori du spectre du système.

Dans le quatrième chapitre, une méthodologie d'élaboration d'une précommande d'axe permettant la génération d'une commande directe adaptée aux souplesses du système est présentée. L'outil GIC utilisé pour représenter la précommande permet une mise en évidence systématique du degré de continuité "idéal" que doit satisfaire la loi de mouvement. Ainsi, l'application de cette méthodologie au cas d'un axe soumis à un mode souple dominant implique l'élaboration d'une loi de mouvement d'un ordre de continuité supérieur ou égal à quatre. Les performances de la précommande sont validées et nous montrons qu'elles sont entièrement dépendantes de l'hypothèse de stationnarité des paramètres du modèle d'axe utilisé. Le choix d'une loi de mouvement douce, par exemple à minimum de jerk, permet de diminuer cette sensibilité face aux variations paramétriques.

Dans le cinquième chapitre, l'adaptation de la méthodologie de précommande au cas des systèmes multiaxes destinés au suivi de profil est investigué. Nous démontrons que la mise en œuvre d'une précommande adaptée à chacun des axes permet de réduire le problème de génération de commande multiaxe à un problème d'optimisation purement cinématique; il s'agit d'adapter les degrés de liberté de la loi de mouvement aux contraintes que sont les capacités maximales des axes physiques. Dans le même temps, afin d'augmenter la productivité, le profil théorique doit, tant que faire se peut, être d'une continuité géométrique suffisante (au minimum continu en courbure) afin de permettre l'élaboration d'une loi de mouvement maximisant l'utilisation des capacités énergétiques des axes.

Additionnement, en considérant les effets de la structure de commande classiquement utilisée dans l'industrie, deux chapitres proposent une extension pragmatique, validée et immédiatement applicable de la thématique des chapitres II et V. Ainsi, dans le chapitre III, les influences combinées de la limite de jerk (pour la loi de mouvement à jerk limité) et des principaux paramètres de commande d'axe sur les vibrations et la durée de mouvement ont été détaillées. Les effets de ces paramètres sur l'erreur de profil dans le cas du suivi de profil élémentaires par deux axes cartésiens sont présentés dans le chapitre VI. Ce dernier chapitre démontre les limites de la structure de commande actuelle basée sur un modèle « rigide » du processus. Le réglage optimal pour des critères de performance et un profil donnés perdra généralement de son optimalité pour un autre type de profil. Ce constat met en évidence l'intérêt d'une meilleure gestion de la génération de commande de façon à ne synthétiser les correcteurs de l'asservissement que par rapport à des critères de rejet de perturbation.

VII.2 Perspectives

Les investigations exposées dans ce document soulèvent de nombreuses pistes pour de futures recherches.

L'étude des lois de mouvement peut notamment être étendue à d'autres fonctions. Pour les systèmes dédiés au suivi de profil, l'optimisation numérique permettrait d'élaborer une loi polynomiale par morceaux (du type Bspline) réalisant un compromis entre un critère vibratoire et un critère énergétique ou temporel. Le critère vibratoire pourrait être directement déduit du graphe de vibration qui a démontré son efficacité. Pour les systèmes réalisant des mouvements point-à-point, une modification des lois harmoniques élémentaires étudiées dans ce document pourrait s'avérer intéressante. En effet, l'identification modale des souplesses du système conduit à une expression de la dynamique sous la forme d'une somme de fonctions trigonométriques; ce type de fonction semble donc particulièrement adapté pour contrecarrer l'effet des souplesses. Les travaux de Meckl et Seering

[MECKL – 1985; MECKL - 1994], visant l'élimination des vibrations résiduelles, repose sur ce type de considération. Ils considèrent des lois de type rampe sinusoïdale ou sinus carré auxquelles ils ajoutent des harmoniques. Si toutes les harmoniques sont incluses, la loi de mouvement est la loi en temps optimal en bang-bang d'accélération. Les harmoniques qui possèdent une énergie spectrale importante aux fréquences naturelles du système sont éliminées. La loi de mouvement résultante est proche de la loi en temps minimum, mais elle n'excite pas les résonances.

Face à la sensibilité de la démarche de précommande, différentes solutions sont envisageables. Pour les systèmes dont les paramètres évoluent de façon significative dans l'espace de travail, une solution consisterait à adapter les paramètres du modèle de précommande lors du traitement hors-ligne de la loi de mouvement. Les variations des paramètres seraient quantifiées par des mesures en différents points de fonctionnement, ce qui conduirait à une formulation non-linéaire du problème. L'utilisation de la notion de "platitude" des systèmes non-linéaires pourrait alors permettre de préserver la simplicité de la méthodologie de précommande proposée. De même, si l'ordre du modèle évolue pour les différentes configurations spatiales des axes, une approche du type multi modèles pourrait être envisagée.

La perspective principale de ces travaux réside dans l'extension de notre étude de génération de commande au domaine de la génération de trajet d'usinage (FAO). Le lien étroit entre géométrie et cinématique pour les mouvements interpolés a effectivement été mis en exergue et il serait intéressant de pousser plus loin la formalisation du lien entre ces deux aspects. Il est envisageable de définir des règles géométriques basées sur "ce que peut faire la machine" ; règles qui pourraient être utilisées pour modifier localement le profil théorique donné. Contrairement à notre étude qui considérait le profil théorique comme intangible, ici un critère de précision est implicitement requis et encore une fois l'optimisation numérique semble être une solution prometteuse afin d'intégrer les différentes contraintes imposées par les critères de performances. Cette démarche viserait à augmenter significativement la productivité en garantissant une meilleure gestion de l'énergie disponible. Des travaux sont actuellement en cours sur le sujet et une investigation plus poussée est envisagée dans le cadre d'une thèse.

Deux points importants demeurent. Les différentes solutions précédemment évoquées ont pour objectif d'assurer un suivi de profil parfait du point à contrôler. Pour le domaine de la machine-outil, il est alors indispensable à courts termes d'intégrer un modèle représentatif du processus de coupe (efforts de coupe, vibrations et déformations de l'outil) afin d'adapter ces méthodologies de commande. La prise en compte des couplages vibratoires entre les axes est également un point important, puisque toutes les machines cartésiennes ne vérifient pas l'hypothèse de conception par modes orthogonaux. De plus, l'adaptation de la commande aux couplages inter-axes ouvre de nouvelles perspectives concernant les machines à axes non cartésiens (type robotique parallèles ou sérielles).

Bien que cette étude mette l'accent sur les phénomènes vibratoires, on notera que la même démarche peut être envisagée sur d'autres phénomènes dont on peut déduire des modèles de connaissance représentatifs du comportement dynamique tels que les phénomènes thermiques, les non-linéarités introduites par les frottements ou encore les efforts de coupe.

GLOSSAIRE

Asservissement

Dispositif destiné à assujettir une fonction d'un processus par rapport à un état de référence.

Commande directe

Consigne de référence injectée directement en entrée du processus, également appelée commande en boucle ouverte.

Commande indirecte

Signal de commande résultant d'une comparaison entre une valeur de référence et une valeur mesurée (ou estimée), également appelée commande en boucle fermée.

Filtrage après projection

Filtre sur la référence de position d'un axe. A pour effet le réduire de spectre du signal de consigne et donc de rendre le signal davantage réalisable par le système (A pour conséquence de déformer le profil obtenu dans le cas de mouvements interpolés).

Génération de commande

Fonction du système de commande ayant pour objectif de déterminer la ou les variables d'entrée du système physique de façon à réaliser le mouvement désiré soumis à certains critères de performance. Ces critères peuvent être de nature variée, par exemple : durée du mouvement, erreur de profil, état de surface, etc. La génération de commande inclut la phase de planification de trajectoire.

Interpolation du profil théorique

Opération consistant à produire une série de points en fonction du temps sur le profil théorique. Cette succession de points à atteindre constitue la loi de mouvement sur le profil théorique.

Loi de mouvement

Fonction temporelle décrivant le mouvement d'un point.

Planification de trajectoire

Opération qui consiste à déterminer une trajectoire dans l'ensemble des trajectoires du système physique, telle que celle-ci vérifie certains critères.

Précommande

Calcul des signaux de consignes pour les actionneurs de façon à obtenir la trajectoire désirée (aspect commande directe), également appelé anticipation dans les commandes actuelles. Le terme d'anticipation (action à l'avance) n'a de sens que comparativement à la dynamique d'une boucle fermée.

Profil théorique

Courbe géométrique définissant le parcours souhaité. On peut admettre qu'il s'agit d'une courbe paramétrée. Le paramètre peut être abstrait ou être la longueur de la courbe (abscisse curviligne).

Projection du profil interpolé

Opération qui consiste à calculer l'évolution temporelle des coordonnées du profil interpolé dans le repère des axes de la machine. Cette opération fournit ainsi la loi de mouvement de chacun des axes impliqués dans le mouvement.

Trajectoire d'un système physique

Soit un système dont l'évolution temporelle est régie par l'équation générale $dx/dt = f(x, u)$. Une trajectoire du système physique est un élément de l'ensemble $\Omega = \{x(t), \dot{x}(t), u(t)\}$ tel que pour tout t , les équations physiques du système sont vérifiées :

$$\Omega = \{x(t), \dot{x}(t), u(t)\} \text{ tel que } \forall t \dot{x}(t) = f(x, u)$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ABOULSHAMAT – 2001] O. Aboulshamat, P. Sicard : *Position control of a flexible joint with friction using neural network feedforward inverse models*. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, vol. 1, pp. 283 – 288, 2001.
- [ALTINTAS – 2000] Y. Altintas : *Manufacturing Automation: Principles of metal cutting and machine tool automation*. Cambridge University Press, 2000, ISBN 0-521-65029-1.
- [BAI – 2000] E.W. Bai, Z. Ding : *Zeros of sampled data systems represented by FIR models*. Automatica, vol. 36, pp. 121-123, 2000.
- [BARRE – 2005] P-J. Barre, J-P. Hautier, R. Béarée : *Design of axis drive control using the concept of inverse model with Causal Ordering Graph*. Soumis au journal IEEE Transactions on Control Systems Technology.
- [BARRE – 1995] P-J. Barre : *Stratégies de commande pour un axe numérique de machine-outil à usinage très grande vitesse*. Thèse de doctorat ENSAM, soutenue le 5 décembre 1995.
- [BEAREE – 2005(1)] R. Béarée, J. Gomand, P.J. Barre, J.P. Hautier : *On the causality integration in the design of axis drive control*. WSEAS international conference on Dynamical Systems and Control, Venice, 2-4 novembre 2005.
- [BEAREE – 2005(2)] R. Béarée, P.J. Barre, J.P. Hautier : *Vibration reduction abilities of some jerk-controlled movement laws for industrial machines*. Proceeding de 16th IFAC World Congress, Pragues (Praha), Juillet 2005.
- [BEAREE – 2005(3)] R. Béarée, P-J. Barre, E. Dumetz, F. Ghestem, H. David : *Jerk time influence on residual vibration and movement time of a 3-axis Cartesian robot*. Mécanique & Industries, vol. 6, pp 439-445, 2005.
- [BEAREE – 2004(1)] R. Béarée, P.-J. Barre, P. Borne, J.-P. Hautier : *Analyse d'une loi de mouvement en jerk sur le comportement vibratoire d'une structure mécanique*. Journal européen des systèmes automatisés, RS série JESA Lavoisier, vol. 38, n°5, pp 475-496, 2004.
- [BEAREE – 2004(2)] R. Béarée, P-J. Barre, S. Bloch : *Influence of high-speed machine tool control parameters on the contouring accuracy : Application to linear and circular interpolation*. Journal of Intelligent and robotic systems, vol. 40, pp. 321-342, 2004.
- [BLOCH – 2000] S. Bloch : *Gestion des vitesses par la commande numérique en usinage grande vitesse*. Assises Machines et Usinage à Grande Vitesse, Senlis, France, pp. 61-72, mars 2000.
- [BOERLAGE – 2004] M. Boerlage, R. Tousain, M. Steinbuch : *Jerk derivative feedforward control for motion systems*. Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, pp. 4843-4848, 2004.
- [BONNANS – 2003] J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, C.A. Sagastizabal : *Numerical optimization: Theoretical and practical aspects*. Springer-verlag Berlin Heidelberg New York, 2003, ISBN 3-540-00191-3.

- [BOPERARATCHY – 1990] D.L.P. Boparatchy, G.C. Hatanwala : *State space control of a multi link robot manipulator by a translational modelling technique*. Proc. of 5th IEEE Internat. Symposium on intelligent control, Philadelphia, USA, pp. 285-290, 1990.
- [BRAEMBUSSCHE – 1998] P. Van Den Braembussche, P. De Fonseca, H. Van Brussel, P. Sas : *Active control of machine tool flexibility*. MOVIC'98, The fourth international conference on Motion and vibration control, ETH Zurich, Suisse, 25-28 août 1998.
- [BRAEMBUSSCHE – 1996] P. Van Den Braembussche, J. Swevers, H. Van Brussel, P. Vanherck : *accurate tracking control of linear synchronous motor machine tool axes*. Mechatronics, vol. 6, pp. 507-521, 1996.
- [BRUN-PICARD – 2005] D. Brun-Picard : *Influence des lois de mouvement sur les déformations et les vibrations des machines à grande vitesse*, revue Mécanique & Industries, vol.6, pp. 417-424, 2005.
- [BRUN-PICARD – 2002] D. Brun-Picard, F. Malburet : *Contrôle actif des vibrations : ce qui marche et ce qui ne marche pas*. 2^{ème} Assises Machines et Usinage à Grande Vitesse, pp. 61-72, Lille, France, 2002.
- [CHANG – 2003] B.H. Chang, Y. Hori : *Trajectory design considering derivative of jerk for head-positioning of disk drive system with mechanical vibration*. Proc. of the American control Conference, Denver, Colorado, 2003.
- [CHENG – 2002] Ch.W. Cheng, M.Ch. Tsai, et M.Y. Cheng : *Real-time variable feedrate parametric interpolator for CNC machining*. Proceeding du 15^{ème} congrès mondial IFAC 02, Barcelone, Espagne, 2002.
- [DESANGLE – 2002] Y. Dessangles, F. Lhuillier : *Simulation du comportement d'une machine à moteurs linéaires de grandes dimensions*. 2^{ème} assises machines et usinage à grande vitesse, pp. 173-188, mars 2002.
- [DINGWELL – 2004] J. B. Dingwell, Ch. D. Mah, F. A. Mussa-Ivaldi : *Experimentally Confirmed Mathematical Model for Human Control of a Non-Rigid Object*. Journal of Neurophysiology, ol. 91, pp.1158-1170, 2004.
- [DISSANAYAKE – 89] M.W.M.G. Dissanayake, A.N. Poo : *Robot trajectory planning for minimising residual vibrations*. IEEE International Symposium on Intelligent Control, 24-26 Août 1988, pp. 471 – 474, 1989.
- [DYLLONG – 2003] E. Dyllong, A. Visioli : *Planning and real-time modifications of a trajectory using spline techniques*. Robotica, vol. 21, pp. 475-482, 2003.
- [E-AZULAY – 2005] L. Edery-Azulay , H. Abramovich : *Active damping of piezo-composite beams*. Composite Structures, à paraître en 2005
- [ENGIN – 2001] S. Engin, Y. Altintas : *Mechanics and dynamics of general milling cutters. Part I: helical end mills*. International Journal of Machine Tools & Manufacture, vol. 41, p 2195-2212, 2001.
- [ERKORKMAZ – 2001] K. Erkorkmaz, Y. Altintas : *High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation*. International Journal of Machine Tool & Manufacture, vol. 41, p 1323-1345, 2001

- [ELLIS – 2000] G. Ellis : Control System Design Guide (2nd Ed.). *Academic Press*, Boston, 2000.
- [FAROUKI – 1999] R.T. Farouki : *Curves from motion, motion from curves*. Curve and surface design: Saint-Malo 1999, Vanderbilt university press, Nashville, pp. 63-90.
- [FAROUKI – 2001] R.T. Farouki, Y.F. Tsai : *Exact taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolator*. Computer Aided design, vol. 33, pp. 155-165, 2001.
- [FLIESS – 1995] M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, P. Rouchon : *Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*. Int. J. of Control, vol. 61, pp. 1327-1361, 1995.
- [GILORMINI – 1992] P. Gilormini : *Modélisation de la coupe des métaux*. Techniques de l'ingénieur, traité génie mécanique, B 7 041, novembre 1992.
- [GROß – 2001] H. Groß, J. Harmann, G. Wiegärtner : Electrical Feed Drives in Automation. *MCD Corporate Publishing*, Siemens, 2001.
- [HARRIS – 2004] C.M. Harris : *Exploring smoothness and discontinuities in human motor behaviour with fourier analysis*?. Mathematical biosciences, vol. 188, pp. 99-116, 2004.
- [HASCOET – 2000] JY. Hascoët, A. Dugas, JJ. Lee : *High speed milling simulation considering machine and controller's Limits*. 2nd International Seminar on Improving Machine Tool Performance, La Baule (France), juillet 2000.
- [HAUTIER – 1997] J-P. Hautier, J-P. Caron : Systèmes automatiques – Commande des processus. *Ellipses*, ISBN 2-7298-9720-8, 1997.
- [HAUTIER – 2004] J-P. Hautier, P-J. Barre : *The causal ordering graph – A tool for system modelling and control law synthesis*. Journal of studies in informatics and control, Vol. 13 (4), pp. 265-283, 2004.
- [HERMES – 1969] H. Hermes, J.P. Lasalle : Functional analysis and time optimal control. *New York Academic press*, 1969.
- [HINDLE – 2000] T.A. Hindle, T. Singh : *Desensitized minimum power/jerk control profiles for rest-to-rest maneuvers*. Proceeding of the American control Conference, Chigago, Illinois, Juin 2000.
- [JEE – 2004] S. Jee, Y. Koren : *Adaptive fuzzy logic controller for feed drives of a CNC machine tool*. Mechatronics, vol. 14, pp. 299–326, 2004.
- [KISS – 2001] B. Kiss : *Planification de trajectoires et commande d'une classe de systèmes mécaniques plats et Liouvilliens*. Thèse de l'école nationale supérieure des mines de paris, soutenue en 2001.
- [KO – 2000] R. C. Ko, S. K. Halgamuge, M. C. Good : *An improved feedforward extension and disturbance observer design in high-speed and high-precision tracking control*. Proceedings of the Fourth International Conference on Motion and Vibration Control, pp. 745-750, vol. 2, Zurich, Switzerland, 1998.
- [KOREN – 1983] Y. Koren : Computer Control of Manufacturing Systems. *McGraw-Hil New York*, 1983.

- [LAMBRECHTS – 2005] P. Lambrechts, M. Boerlage, M. Steinbuch : *Trajectory planning and feedforward design for electromechanical motion systems*. Control Engineering Practice, vol. 13, pp. 145-157, 2005.
- [LARTIGUE – 1999] C. Lartigue, E. Duc, C. Tournier : *Machining of free form surfaces and geometrical specifications*. IMechE 1999, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 213 (B), pp. 21-27.
- [LEE (D.G.) – 2004] D. G. Lee, J. D. Suh, H. S. Kim, J. M. Kim : *Design and manufacture of composite high speed machine tool structures*. Composites Science and Technology, vol. 64, pp. 1523–1530, 2004.
- [LEE (K.) – 2003] K. Lee, S. Ibaraki, A. Matsubara, Y. Kakino, Y. Susuki, S. Arai, J. Braasch : *A Servo Parameter Tuning Method for High-speed NC Machine Tools based on Contouring Error Measurement*. Proceeding LAMDAMAP 03, Huddersfield, UK, July 2003.
- [LEE (T.S.) – 1998] T. S. Lee, Y. J. Lin : *An improved sculptured part surface design with jerk continuity for a smooth machining*. Proceeding IEEE international conference on robotics & automation, Leuven (Louvain), Belgique, May 1998.
- [LIN – 2005] J-C. Lin, M. H. Nien : *Adaptive control of a composite cantilever beam with piezoelectric damping-modal actuators/sensors*. Composite Structures, vol. 70, pp. 170–176, 2005.
- [LIO – 2002] J-P. Lio, P-J. Barre, C. Fioroni : *Signature des machines agiles équipées de moteurs linéaires*. 2^{ème} Assises Machines et Usinage à Grande Vitesse, pp. 161-171, Lille, France, 2002
- [LIU – 2002] G. LIU : *Decomposition-based friction compensation of mechanical systems*. Mechatronics, vol. 12, p 755-769, 2002
- [MACFARLANE – 2001] E. Macfarlane, E. A. Croft : *Design of jerk bounded trajectories for on-line industrial robot applications*. Proceeding IEEE Robotics Automation Conference, Seoul, S. Korea, pp. 979-984, 2001.
- [MARCELO – 1993] H. A. Marcello, A. N. Poo, C. L. Teo, Q. Li : *Compensation of Trajectory Tracking Errors Introduced by Sampling in Computer-Control Implementations of model-Based Robot Control*. Proceedings IECON '93., International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, vol. 3, pp. 1651 – 1653, 15-19 Nov. 1993
- [MARSH – 1996] E. R. Marsh, A. H. Slocum : *An integrated approach to structural damping*. Precision Engineering, vol. 18, pp. 103-109, 1996.
- [MATSUBARA – 2002] A. Matsubara, S. Ibaraki, Y. Kakino, K. Lee : *A practical servo parameter tuning method for high speed feed drives of NC machine tools*. Japan-USA Symposium on flexible automation, Hiroshima, Japan, July 14-19, 2002
- [MECKL – 1994] P. H. Meckl, R. Kinceler : *Robust motion control of flexible systems using feedforward forcing functions*. IEEE Trans. On control systems Technology, vol. 2 (3), pp. 245-254, 1994.
- [MECKL – 1988] P. H. Meckl, W. P. Seering : *Minimizing residual vibration for point-to-point motion*. Proceeding de IEEE International conference on robotics and automation, Philadelphie, Pennsylvanie, 1994.

- [MECKL – 1985] P. H. Meckl, W. P. Seering : *Controlling velocity-limited systems to reduce residual vibration*. ASME journal of vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107 (4), pp. 378-382, 1985.
- [MORARU – 2002] G.F. Moraru : *Etude du comportement du système pièce-outil-machine en régime de coupe vibratoire*. Thèse de doctorat de l'ENSAM, soutenue le 24 octobre 2002
- [MUENCHOF – 2001] M. Muenschof, T. Singh : *Jerk limited time optimal control of flexible structures*. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New York, NY, Novembre 11-16, 2001.
- [OMARI – 2000] M. Omari, D. Ajao : *Evaluation of machine tool contouring accuracy at high feed rates*. Proceeding ASPE 15th annual meeting, Scottsdale, Az, 22 - 27 October, 2000.
- [PAPIERNIK – 1996] W. Papiernik : *Architecture and design of modern CNC/drive systems*. Intelligent Motion, 271–280, mai 1996.
- [PATELOUP – 2005] V. Pateloup : *Amélioration du comportement cinématique des machines outils UGV. Application au calcul de trajets d'évidement de poches*. Thèse de l'Université Blaise-Pascal Clermont II, Clermont-Ferrand, France, soutenue en juillet 2005.
- [PONTRYAGIN – 1962] L. S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko. The mathematical theory of optimal processes. *New York: John Wiley and Sons*, 1962.
- [RENTON – 2000] D. Renton, M. A. Elbestawi : *High speed servo control of multi-axis machine tools*. International Journal of Machine Tool & Manufacture, vol. 40, pp. 539-559, 2000
- [SINGHOSE – 2000] W. Singhose, L. Porter, M. Kenison, E. Kriikku : *Effects of hoisting on the input shaping control of gantry cranes*. Control Engineering Practice, vol. 8, pp. 1159-1165, 2000.
- [SINGHOSE – 1997] W. Singhose : *Command generation for flexible systems*. Thèse du département d'ingénierie mécanique du Massachusetts Institute of Technology, soutenue en mai 1997.
- [SPINNLER – 1997] G. Spinnler : *Conception de machines – Principes et applications (vol. 3)*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Switzerland, 1997.
- [SMITH – 1995] M. H. Smith, A. M. Annaswamy, A. H. Slocum : *Adaptive control strategies for a precision machine tool axis*. Precision Engineering, vol. 17, pp. 192-206, 1995.
- [TALLMAN - 1958] G. Tallman, O. Smith : *Analog study of dead-beat posicast control*. IEEE trans. on Automatic Control, vol. 4, pp. 14-21, mars 1958.
- [TOMIZUKA – 1987] M. Tomizuka : *Zero phase error tracking algorithm for digital control*. ASME Transactions on dynamic system measurement and control, vol. 109, pp. 65-68, 1987
- [TORFS – 1998] D. E. Torfs, R. Vaerincx, J. Swevers, J. Schoukens : *Comparison of two feedforward design methods aiming at accurate trajectory tracking of the end point of a flexible robot arm*. IEEE trans. on control systems technology, vol. 6 (1), janvier 1998.
- [TUTTLE – 1997] T. D. Tuttle : *Creating time-optimal commands for linear systems*. Thèse du département d'ingénierie mécanique du Massachusetts Institute of Technology, soutenue le 2 mai 1997.

ANNEXE 1 – MODELES D'AXE SOUPLE ET MODELES DE COMMANDE D'UN AXE INDUSTRIEL

A1.1 Modèles génériques de souplesse prépondérante

L'objectif de cette partie ne consiste pas à élaborer un modèle mathématique complexe qui serait spécifique au système étudié. Il est possible d'obtenir des modèles « génériques » de souplesses d'axe, en se basant sur une représentation physique simple des phénomènes vibratoires, sous la forme de modèles à constantes localisés [Ellis, 2000 ; Boparatchy *et al.*, 1990]. Ce type de modèle, représenté à la figure 3 pour les deux familles de souplesses rencontrées, suffit très souvent à décrire l'effet des modes de déformation dominant la réponse de l'axe.

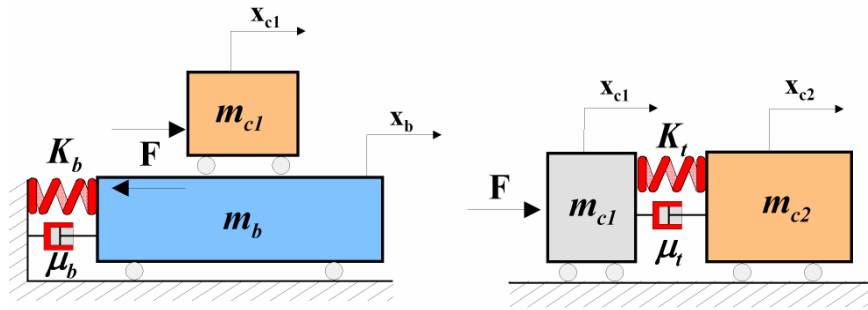


Figure A1.1. – Modèles génériques de souplesses dominantes (mode structurel et mode de transmission).

Ainsi, la dynamique d'un système soumis à l'influence dominante d'un mode propre de transmission peut se représenter par un couplage souple de deux masses ponctuelles. En adoptant les notations de la figure A1.1, les fonctions de transfert canoniques, déduites des lois de la mécanique entre les vitesses V_{c1} et V_{c2} des deux masses et l'effort moteur F , s'expriment dans le domaine continu sous la forme :

$$\frac{V_{c1}(s)}{F(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}{m_{tot}s \left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2(1+r)}s^2 \right)}; \quad \frac{V_{c2}(s)}{V_{c1}(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s}{\left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \right)} \quad (A1)$$

$$\text{avec } m_{tot} = m_{c1} + m_{c2}; \quad r = m_{c2}/m_{c1}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{m_{c2}}}; \quad \zeta_n = \frac{\mu_t}{2\sqrt{K_t \cdot m_{c2}}}.$$

Remarques : Les notations utilisées dans le chapitre II pour qualifier les pulsations des différents transferts sont différentes de celles définies ici. En effet, dans le chapitre II ω_n est prise égale à $\sqrt{K_t/m_{c2}} \cdot \sqrt{1+r}$, il s'agit de la pulsation libre du système qui est effectivement celle ressentie par la charge. Par contre, dans le cas d'un axe asservi en vitesse, la charge vibrera entre la pulsation libre et la pulsation encastree (= $\sqrt{K_t/m_{c2}}$). Cette pulsation dépend du rapport des masses et du gain de vitesse. Si, à présent, on suppose des gains forts en vitesse, la charge vibrera à la pulsation encastree. Par souci de clarté, nous avons voulu conserver la notation ω_n pour représenter la pulsation des vibrations ressenties au niveau de la charge. On notera donc que, seul dans le chapitre II, ω_n représente la pulsation libre. Dans tous les autres chapitres, il s'agit de la pulsation encastree définie précédemment.

De la même façon, les fonctions de transfert entre la vitesse absolue de la charge, la vitesse effective de la charge (mesure relative) et l'effort moteur dans le cas d'un mode longitudinal de structure s'écrivent :

$$\frac{V_{c_1/b}(s)}{F(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{m_l s \left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2(1+r)} \right)}, \quad \frac{V_{c_1}(s)}{V_{c_1/b}(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2(1+r)}}{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (\text{A2})$$

$$\text{avec } r = m_l / m_b; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_b}{m_l + m_b}}; \quad \zeta_n = \frac{1}{2} \frac{\mu_b}{\sqrt{K_b(m_l + m_b)}}.$$

A1.2 Intégration dans la structure de commande industrielle

L'architecture générique de la commande d'un axe de machine-outil est constituée d'un générateur de consigne, qui calcule la référence de position de chaque axe par projection de la géométrie du profil à réaliser, et d'un asservissement qui est linéaire et découplé axe par axe [PAPIERNIK - 1996].

La structure des asservissements en courant, vitesse et position est réalisée selon le schéma bien connu des boucles en cascades détaillé notamment dans [GROß - 2001]. La boucle de position contient un simple gain proportionnel, les boucles de vitesse et courant sont régulées par des correcteurs proportionnel-intégral. La dynamique des boucles est réglée de façon décroissante vers la boucle de position. La structure en cascade est utilisée depuis l'origine de la commande numérique pour ces nombreux avantages. Elle est très simple à implanter et facilement réglable. Les non-linéarités, les perturbations et les dynamiques rapides sont compensées dans les boucles internes, permettant ainsi à l'asservissement en position de travailler sur un système plus linéaire et plus propre. Toutefois, cette structure impose une dynamique d'ensemble moins rapide, mais qui est désormais compensable par les anticipations. En effet, dans les systèmes modernes une anticipation en vitesse et/ou en accélération agit respectivement en tant que consigne additionnelle sur la boucle de vitesse et sur la boucle de courant. Suivant que l'on module ou non ces anticipations, on parlera d'anticipation totale ou partielle. L'objectif de l'anticipation est de compenser le retard inhérent à la structure d'asservissement par retour de mesure. Les différents paramètres d'asservissement sont détaillés sur la figure A1.2.

Remarque : Dans la suite, nous considérons des asservissements « parfaits » en courant, c'est-à-dire que nous considérons que la boucle de courant est assimilable à une fonction de transfert unitaire. Cette hypothèse se justifie par le fait que la dynamique de courant est généralement négligeable devant celle de position (Pour un système à dynamique élevée on observe moins de 50 Hz de bande passante en position pour 1000 Hz en courant).

On notera que le capteur de position peut être placé en deux endroits. Le schéma de mesure idéal suppose une prise de mesure vitesse sur le moteur et une mesure de position sur la charge (au plus près du point à contrôler), mais généralement on se ramène au schéma de mesure indirecte pour lequel la souplesse n'est pas vue par l'asservissement. Si l'on considère le cas de la machine-outil, il n'est fonctionnellement pas possible de venir mesurer directement la position de l'outil.

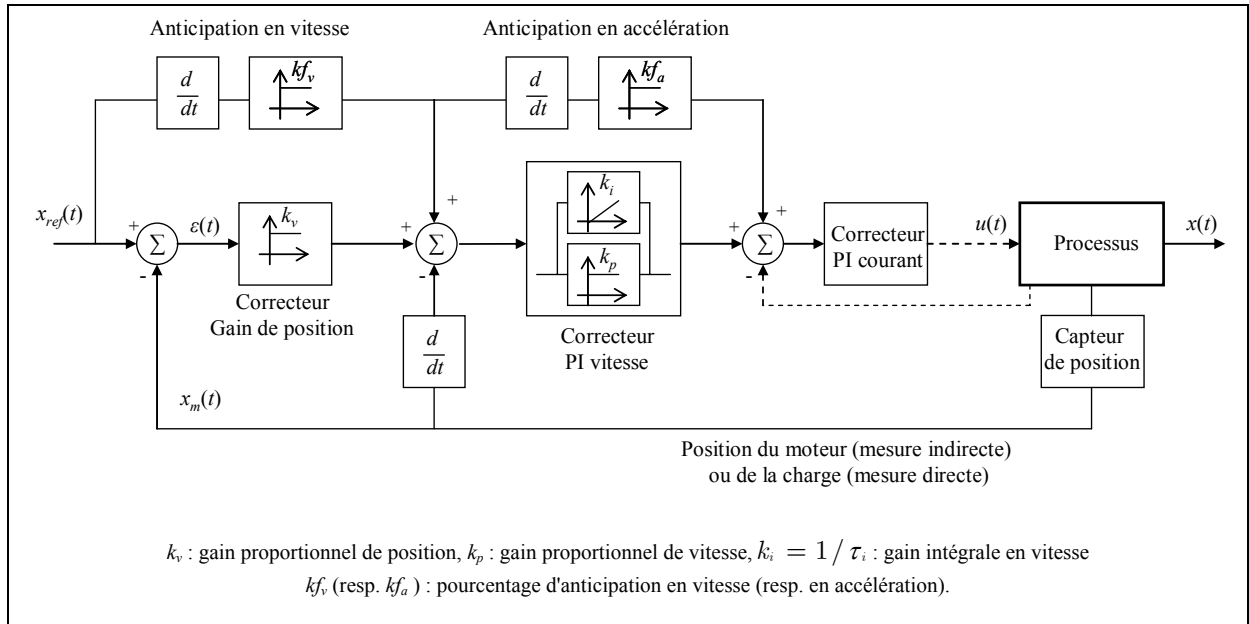


Figure A1.2. – Structure de commande générique d'un axe industriel.

Le modèle de commande d'axe utilisé tient compte d'une partie mécanique souple soumis à un mode de transmission décrit à la figure A1.1, ainsi que des différents paramètres de commande donnés à la figure A1.2. En utilisant le formalisme de Laplace, la fonction de transfert d'un axe entre la position mesurée et la référence s'exprime sous la forme :

$$\frac{x_{mes}}{x_{ref}} = \frac{1 + a_n \cdot s + b_n \cdot s^2 + c_n \cdot s^3 + d_n \cdot s^4}{1 + a_d \cdot s + b_d \cdot s^2 + c_d \cdot s^3 + d_d \cdot s^4 + e_d \cdot s^5} \quad (A3)$$

avec

$$a_n = \frac{k_p}{k_i} + \frac{k_f v}{k_v} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}; \quad b_n = \frac{k_f v \cdot k_p}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \cdot \zeta_n}{k_i \cdot \omega_n} + \frac{2k_f v \cdot \zeta_n}{k_v \cdot \omega_n}$$

$$c_n = \frac{k_f a}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_f v \cdot k_p \cdot \zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n}; \quad d_n = \frac{2 \cdot k_f a \cdot \zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n}$$

et selon la position du capteur :

Capteur de position sur la charge

$$a_d = \frac{k_p}{k_i} + \frac{1}{k_v} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}$$

$$b_d = \frac{k_p}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot \omega_n} + \frac{2\zeta_n}{k_v \cdot \omega_n}$$

$$c_d = \frac{1}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{1}{k_v \cdot \omega_n^2}$$

$$d_d = \frac{2\zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{k_p}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2}$$

$$e_d = \frac{1}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2 (1+r)}$$

Capteur de position sur le moteur

$$a_d = \frac{k_p}{k_i} + \frac{1}{k_v} + \frac{2\zeta_n}{\omega_n}$$

$$b_d = \frac{k_p}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot \omega_n} + \frac{2\zeta_n}{k_v \cdot \omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$c_d = \frac{1}{k_i \cdot k_v} + \frac{2k_p \zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{1}{k_v \cdot \omega_n^2} + \frac{k_p}{k_i \cdot \omega_n^2}$$

$$d_d = \frac{2\zeta_n}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n} + \frac{k_p}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2}$$

$$e_d = \frac{1}{k_i \cdot k_v \cdot \omega_n^2 (1+r)}$$

Sous certaines hypothèses, cette fonction de transfert peut prendre une forme beaucoup plus simple. Le paragraphe suivant présente les principaux modèles dérivés, résultant, d'une part, de la

prise en compte du niveau d'influence du mode propre de transmission sur la dynamique du système, et d'autre part, d'une possible relation de proportionnalité entre les dynamiques des différentes boucles.

A1.3 Déclinaison de modèles de commande d'axe

Hypothèses 1 : Système rigide

La fonction de transfert générale décrite à l'équation (A3) suppose un degré d'influence non négligeable du premier mode de transmission sur la dynamique du système. Si l'on suppose maintenant que ce mode est négligeable, c'est à dire que sa période propre est très petite devant la constante de temps de l'asservissement, alors on considèrera le système comme étant "rigide". La fonction de transfert en position devient dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{c2} \\ x_{ref} \end{array} \right\}_{rigide} = \frac{1 + \left(\frac{k_p}{k_i} + \frac{k_{fv}}{k_v} \right) s + \left(\frac{k_{fv} \cdot k_p}{k_i \cdot k_v} \right) s^2 + \frac{k_{fa}}{k_i \cdot k_v} s^3}{1 + \left(\frac{k_p}{k_i} + \frac{1}{k_v} \right) s + \left(\frac{k_p}{k_i \cdot k_v} \right) s^2 + \frac{1}{k_i \cdot k_v} s^3 + \frac{\tau_c}{k_i \cdot k_v} s^4} \quad (A4)$$

Hypothèses 2 : Système rigide et ratio constant entre les dynamiques de chaque boucle

La dynamique de chaque boucle est réglée de façon décroissante vers la boucle de position. Une hypothèse simplificatrice consisterait alors à imposer un coefficient de proportionnalité entre les différentes boucles de régulation. En posant ce coefficient égal à 3 [BLOCH - 2001] (ce qui correspond à un ratio réaliste entre les différentes bandes passantes) et en négligeant l'influence de l'action intégrale de la boucle vitesse, soit en posant $k_v = k_p / 3$ et $k_i = 0$, la fonction (A3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{c2} \\ x_{ref} \end{array} \right\}_{rigide}^{ratio/3} = \frac{1 + \frac{k_{fv}}{k_v} s + \frac{k_{fa}}{3k_v^2} s^2}{1 + \frac{1}{k_v} s + \frac{1}{3k_v^2} s^2 + \frac{1}{27k_v^3} s^3} \quad (A5)$$

Hypothèses 3 : Système souple et dynamique de vitesse négligeable

Si l'on considère à présent le cas inverse, c'est à dire une pulsation mécanique basse largement prépondérante sur le temps de réponse du système, alors la dynamique de la boucle vitesse (mesure sur le moteur) peut être négligée devant la relation mécanique $V_{c2}(s)/V_{c1}(s)$. Dans ce cas, on aboutit au transfert de position :

$$\frac{x_{c2}}{x_{ref}} = \frac{1 + \frac{k_{fv}}{k_v} s}{1 + \frac{s}{k_v}} \frac{1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s}{\left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \right)} \quad (A6)$$

A1.4 Définition de l'erreur dynamique

Dans ce qui suit, nous allons considérer des asservissements « parfaits » en courant et en vitesse cela revient à négliger la dynamique des boucles de courant et de vitesse devant la boucle de position, et donc à supposer qu'à chaque instant la vitesse du moteur vue par l'asservissement est égale à la vitesse de référence. Le modèle de commande d'axe correspondant est donné à l'équation (A6).

La présence de discontinuités dans la génération de mouvement aura tendance à exciter les modes souples du système et, par conséquent, dégradera la précision dynamique. Le mouvement effectif de la charge x_{ci} (x_{c1} pour un mode structurel et x_{c2} pour un mode de transmission) diffère alors du mouvement idéal. On définit l'erreur dynamique du mouvement :

$$\varepsilon(t) = x_{ref}(t) - x_{ci}(t). \quad (A7)$$

On peut dissocier deux types d'erreurs distinctes constituant l'erreur dynamique :

- Des termes apériodiques représentant les écarts liés aux performances en poursuite du système de commande, que l'on notera $\varepsilon_{ap}(t)$.
- Des termes oscillants périodiques liés au comportement vibratoire du système, que l'on notera $\varepsilon_{vib}(t)$.

D'après les expressions (A6) et (A7), la fonction de transfert régissant l'évolution de l'erreur dynamique dans le cas d'une souplesse dominante de transmission est donnée par :

$$\frac{\varepsilon(s)}{x_{ref}(s)} = \frac{\frac{1}{k_v}(1 - kf_v) \left(s + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s^2 \right) + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{1}{k_v \omega_n^2} s^3}{\left(1 + \frac{s}{k_v} \right) \left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \right)} \quad (A8)$$

Si l'on considérait le cas du mode de structure (équation (A2)) la fonction de transfert prendrait la forme :

$$\frac{\varepsilon(s)}{x_{ref}(s)} = \frac{\frac{1}{k_v}(1 - kf_v) \left(s + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s^2 + \frac{1}{\omega_n^2} s^3 \right) + \frac{r}{1+r} \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{1}{k_v \omega_n^2} s^3 \right)}{\left(1 + \frac{s}{k_v} \right) \left(1 + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \right)} \quad (A9)$$

On notera qu'en négligeant l'influence des paramètres de commande, l'erreur dynamique suit la même évolution dans les deux cas de déformation. L'erreur dynamique dans le cas d'un mode structurel sera simplement pondérée par le rapport des inerties (classiquement une valeur faible pour un mode structurel). Dans cette étude, nous ne traiterons que le cas du mode de transmission, mais la démarche, ainsi que les principaux résultats obtenus, sont en tout point généralisables au cas d'un mode dominant de structure.

ANNEXE 2 – ALGORITHMES DE DEFINITION DES LOIS BANG-BANG (FONCTIONS MATLAB)

A2.1 Loi à jerk limité

```

function [T] = Jerklim(Jm,Am,Vm,Xref)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%       Définition des commutations pour une loi de           %
%       mouvement point-à-point à jerk limité.                %
%                                                                 %
% Jm, Am et Vm représentent respectivement la limite de jerk, %
% accélération et vitesse. Xref est la longueur du           %
% mouvement désiré. T représente le vecteur de sortie des    %
% instants de commutation.                                    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

TJ=0;i=0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul de Tj %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Tj=(Xref/(2*Jm))^(1/3);
% Vérification des limites imposées
if Vm < Jm*Tj^2
    Tjv=sqrt(Vm/Jm);
else
    Tjv=Tj;
end

if Am < Jm*Tj
    Tja=Am/Jm;
else
    Tja=Tj;
end

if (Tjv==Tj) & (Tja==Tj) % Dans ce cas, la trajectoire est complètement définie par Tj
    i=1;
    Ta=0;Tv=0;Tf=4*Tj;
else
    TJ=[Tjv;Tja];
    Tj=min(TJ);
end

if i==0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul de Ta %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=1;b=3*Tj;c=2*Tj^2-Xref/(Jm*Tj);
Delta=b^2-4*a*c;
Ta=(-b+sqrt(Delta))/(2*a);
% Vérification des limites imposées
if Vm < Jm*Tj*(Ta+Tj)
    Tav=Vm/(Jm*Tj)-Tj;
else
    Tav=Ta;
end
if Tav==Ta % Dans ce cas, la trajectoire est complètement définie par Tj et Ta
    i=1;
    Tv=0;Tf=4*Tj+2*Ta;
else
    Ta=Tav;
end
end
end

```

```

if i==0
#####
% Calcul de Tv %
#####
x=Jm*Tj*(Ta^2+3*Tj*Ta+2*Tj^2);
Tv=(Xref-x)/Vm;
Tf=4*Tj+2*Ta+Tv;
End

#####
% Instants de commutations %
#####
t0=0;t1=Tj;t2=Tj+Ta;t3=2*Tj+Ta;t4=2*Tj+Ta+Tv;t5=3*Tj+Ta+Tv;t6=3*Tj+2*Ta+Tv;
t7=Tf;
% variables de sortie
T=[t0 t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7]';

```

A2.2 Loi à snap limité

```

function [T] = Snaplim(Sm,Jm,Am,Vm,Xref)
#####
% Définition des commutations pour une loi de %
% mouvement point à point à snap limité. %
% %
% Sm, Jm, Am et Vm représentent respectivement la limite de %
% snap, jerk, accélération et vitesse. Xref est la longueur %
% du mouvement désiré. T représente le vecteur de sortie des %
% instants de commutation. %
#####

TQ=0;TJ=0;i=0;

#####
% Calcul de Tq %
#####

Tq=(Xref/(8*S))^(1/4);

% Vérification des limites imposées
if Vm < 2*Sm*Tq^3
    Tqv=(Vm/(2*Sm))^(1/3);
else
    Tqv=Tq;
end

if Am < Sm*Tq^2
    Tqa=sqrt(Am/Sm);
else
    Tqa=Tq;
end

if Jm < Sm*Tq
    Tqj=Jm/Sm;
else
    Tqj=Tq;
end

if (Tqv==Tq) & (Tqa==Tq) & (Tqj==Tq)
    i=1;
    Tj=0;Ta=0;Tv=0;Tf=8*Tq; % Dans ce cas, la trajectoire est complètement
                             définie par Tq
else
    TQ=[Tqv;Tqa;Tqj];
    Tq=min(TQ);
end

if i==0
#####
% Calcul de Tj %
#####
%Formule de Cardan
a=5*Tq; b=8*Tq^2;c=4*Tq^3-Xref/(2*Sm*Tq);

```

```

p=b-a^2/3;q=c+2*a^3/27-a*b/3;D=(p/3)^3+(q/2)^2;
Tj=-a/3+(-q/2+sqrt(D))^(1/3)+(-q/2-sqrt(D))^(1/3);
% Vérification des limites imposées
if Vm < (2*Sm*Tq^3+3*Sm*Tq^2*Tj+Sm*Tq*Tj^2)
    Tjv=-1/2*Tq+sqrt(Tq^2/4+Vm/(Sm*Tq));
else
    Tjv=Tj;
end

if Am < (Sm*Tq^2+Sm*Tq*Tj)
    Tja=Am/(Sm*Tq)-Tq;
else
    Tja=Tj;
end
if (Tjv==Tj) & (Tja==Tj) % Dans ce cas, la trajectoire est complètement définie
    par Tq et Tj
    i=1;
    Ta=0;Tv=0;Tf=8*Tq+4*Tj;
else
    TJ=[Tjv;Tja];
    Tj=min(TJ);
end
end

if i==0
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Calcul de Ta %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    a=(Sm*Tq^2+Sm*Tq*Tj);b=Sm*(6*Tq^3+9*Tq^2*Tj+3*Tq*Tj^2);c=Sm*(8*Tq^4+16*Tq^3*Tj+10*Tq^2
    *Tj^2+2*Tq*Tj^3)-Xref;
    Delta=b^2-4*a*c;
    Ta=(-b+sqrt(Delta))/(2*a);

% Vérification des limites imposées
if Vm < (2*Sm*Tq^3+3*Sm*Tq^2*Tj+Sm*Tq*Tj^2+Sm*Tq^2*Ta+Sm*Tq*Tj*Ta)
    Tav=(Vm-2*Sm*Tq^3-3*Sm*Tq^2*Tj-Sm*Tq*Tj^2)/(Sm*Tq^2+Sm*Tq*Tj);
else
    Tav=Ta;
end
if Tav==Ta % Dans ce cas, la trajectoire est complètement définie par Tq,Tj et
    Ta
    i=1;
    Tv=0;Tf=8*Tq+4*Tj+2*Ta;
else
    Ta=Tav;
end
end

if i==0
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Calcul de Tv %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    x=Sm*(8*Tq^4+16*Tq^3*Tj+10*Tq^2*Tj^2+2*Tq*Tj^3+Tq^2*Ta^2+Tq*Tj*Ta^2+6*Tq^3*Ta+9*Tq^2*T
    j*Ta+3*Tq*Tj^2*Ta);
    Tv=(Xref-x)/Vm;
    Tf=8*Tq+4*Tj+2*Ta+Tv;
End
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Instants de commutations %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    t0=0;t1=Tq;t2=Tq+Tj;t3=2*Tq+Tj;t4=2*Tq+Tj+Ta;t5=3*Tq+Tj+Ta;t6=3*Tq+2*Tj+Ta;
    t7=4*Tq+2*Tj+Ta;t8=4*Tq+2*Tj+Ta+Tv;t9=5*Tq+2*Tj+Ta+Tv;t10=5*Tq+3*Tj+Ta+Tv;t11=6*Tq+3*T
    j+Ta+Tv; t12=6*Tq+3*Tj+2*Ta+Tv;t13=7*Tq+3*Tj+2*Ta+Tv;t14=7*Tq+4*Tj+2*Ta+Tv;t15=Tf;

% variables de sortie
T=[t0 t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7 t8 t9 t10 t11 t12 t13 t14 t15];

```

ANNEXE 3 – BANCS D'ESSAIS

Le premier banc d'essai présenté à la figure A3.1 est un démonstrateur monoaxe équipé d'un moteur linéaire INDRAMAT LSP120C. Afin de reproduire le comportement dynamique d'un axe d'une machine de production, deux ensembles masses/ressorts en série ont été ajoutés sur la table. Il est ainsi possible d'étudier l'influence de deux modes de déformations longitudinaux ou d'un seul (blocage d'un ensemble de ressorts) selon les besoins.

Le deuxième démonstrateur (figure A3.2 à gauche) est un robot cartésien trois axes utilisés pour le déchargement rapide des presses à injecter le plastique. Ce robot est caractéristique des manipulateurs cartésiens à grande dynamique.

Le dernier démonstrateur (figure A3.2 à droite) est un prototype de machine-outil équipé de deux axes linéaires. Chacun des axes est entraîné en translation par deux moteurs linéaires synchrones montés en parallèle. Ce prototype est issu du grand projet innovant pour la machine-outil (GIPMO).

Les principales caractéristiques des démonstrateurs sont synthétisées dans le tableau 6.



Figure A3.1 - Banc d'essai monoaxe. (Caractéristiques : système 3 masses 2 ressorts embarquées 260+20,6+16,5kg).



Figure A3.2 - Aperçu des démonstrateurs : Robot cartésien 3 axes (gauche) ; Prototype de machine-outil à dynamique élevée (droite).

Les deux premiers démonstrateurs sont équipés d'un système de contrôle/commande temps réel dSpace à base PC. Cette ouverture de la commande est indispensable afin de pouvoir tester l'influence des nouvelles stratégies. Les commandes numériques du marché n'offrent effectivement pas l'ouverture suffisante. Le dernier démonstrateur n'est pas (encore) totalement ouvert du point de vue de la commande. Son système de commande est basé sur une CN NUM 1050 (Schneider - NUM SA) du commerce.

Caractéristiques principales	Robot 3 axes	Banc linéaire mono-axe	Prototype à dynamique élevée
Course [mm]	X-1000 Y-400 Z-800	X-400	X-1000 Y-600
Vitesse max. [m/min]	120	100	100
Accélération max. [m/s ²]	4,5	20	20
Anticipations en vitesse	Non	Oui	Oui
Système de commande	SEPRO / dSpace	NUM 1060/ dSpace	NUM 1060

Tableau 6 - Caractéristiques principales des démonstrateurs.

Les résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire sont issus de différents systèmes de mesure :

- Capteurs d'axe pour les mesures au niveau du moteur;
- règles linéaires externes (Renishaw type RGH 22) disposées au plus près du point à contrôler (Prototype de machine-outil et banc linéaire Indramat);
- capteur laser mesurant directement le comportement en position de la charge;
- accéléromètres (ICP IMI sensors) placés sur la charge.