



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude des systèmes ultra large bande par impulsions

Anne-Laure Deleuze

► **To cite this version:**

Anne-Laure Deleuze. Contributions à l'étude des systèmes ultra large bande par impulsions. domain\_other. Télécom ParisTech, 2006. English. NNT: . pastel-00001668

**HAL Id: pastel-00001668**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001668>**

Submitted on 30 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale  
d'Informatique,  
Télécommunications  
et Électronique de Paris

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur  
de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : **Électronique et Communications**

**Anne-Laure DELEUZE**

Contributions à l'étude des systèmes  
ultra large bande par impulsions

Soutenue le 14 février 2006 devant le jury composé de :

Alain Sibille  
Pierre Duhamel  
Raymond Knopp  
Jean-Luc Danger  
Philippe Ciblat  
Christophe Le Martret

Président  
Rapporteurs  
  
Examinateur  
Directeurs de thèse





# Sommaire

<b>Liste des sigles et acronymes</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Système de communication TH-UWB</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Modèle du signal au niveau de l'émetteur	5
1.2.1 Structure du signal TH-UWB	6
1.2.2 Notion de codes de saut temporel <i>développés</i>	7
1.2.3 Masque fréquentiel et impulsion UWB	9
1.3 Modèle du canal de propagation	11
1.3.1 Modèle stochastique	11
1.3.2 Étalement temporel moyen	13
1.3.3 Illustrations numériques	15
1.4 Description du récepteur	16
1.5 Objectifs de la thèse	20
<b>2 Étude de l'interférence multi-utilisateur</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction	23
2.2 Calcul de la variance de l'interférence multi-utilisateur	24
2.2.1 Cas de la PPM	24
2.2.2 Cas de la PAM	27
2.3 Critère de sélection des codes minimisant la MUI	27
2.3.1 Notations et quelques propriétés des codes développés	27
2.3.2 Critère de sélection des paires de codes optimales	29
2.3.3 Caractérisation des ensembles de paires optimales	30
2.4 Comparaison à l'état de l'art	31
2.4.1 Travaux de Scholtz	32
2.4.2 Travaux sur les codes de saut temporel	32
2.4.3 Minimisation de la variance de la MUI et critère du sup	35
2.5 Sur l'existence des paires de codes optimales	35
2.6 Simulations	38
2.6.1 Estimation de la probabilité d'erreur moyenne	39
2.6.2 Paramètres	40
2.6.3 Scénarios de simulations	42
2.6.4 Analyse des résultats de simulations	43
2.7 Conclusions et perspectives	46

<b>3</b>	<b>Étude de l'interférence entre symboles et entre trames</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Expression analytique de la variance de l'ISI / IFI . . . . .	50
3.2.1	Moyennage sur les amplitudes . . . . .	50
3.2.2	Moyennage sur les symboles . . . . .	52
3.2.3	Moyennage sur les retards . . . . .	54
3.3	Expression analytique de la variance du signal utile . . . . .	58
3.4	Simulations . . . . .	59
3.4.1	Analyse de la variance de l'ISI / IFI en fonction du nombre de doigts . . . . .	60
3.4.2	Analyse de la variance de l'ISI / IFI en fonction du temps de garde . . . . .	60
3.4.3	Analyse de la loi de probabilité de l'ISI / IFI . . . . .	64
3.5	Comparaison de l'ISI / IFI et de la MUI . . . . .	65
3.6	Amélioration du récepteur rake . . . . .	67
3.7	Conclusion . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Interférence multi-utilisateur pour différentes techniques d'accès multiples</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Systèmes DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB . . . . .	76
4.2.1	Modèles des signaux . . . . .	76
4.2.2	Récepteur rake . . . . .	78
4.2.3	Expression analytique de la variance de la MUI . . . . .	79
4.3	Codes à variance d'interférence multi-utilisateur minimale . . . . .	81
4.3.1	Déterminations des critères . . . . .	81
4.3.2	Étude du critère pour les signaux DS-UWB . . . . .	81
4.3.3	Étude du critère pour les signaux DS-CDMA . . . . .	83
4.3.4	Comparaison des séquences optimales par rapport aux séquences d'étalement classiques . . . . .	84
4.3.5	Comparaison des performances . . . . .	86
4.4	Comparaison des différentes techniques d'accès multiples . . . . .	86
4.5	Conclusion . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Estimation des paramètres du canal de propagation</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Modèle du signal . . . . .	94
5.3	Borne de Cramer-Rao . . . . .	95
5.3.1	Expression analytique sans chevauchement des échos . . . . .	96
5.3.2	Expression analytique avec chevauchement des échos . . . . .	97
5.3.3	Moyennage de la matrice d'information de Fisher . . . . .	100
5.4	Simulations . . . . .	102
5.5	Conclusion . . . . .	103
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Annexe relative au chapitre 1</b>	<b>107</b>
A.1	Preuve de la Propriété 1 . . . . .	107
A.2	Preuve de la Propriété 2 . . . . .	108
A.3	Expression du bruit filtré et de sa variance . . . . .	109
A.4	Preuve de la Propriété 3 . . . . .	109
A.5	Preuve de la Propriété 4 . . . . .	111

---

<b>B</b>	<b>Annexe relative au chapitre 2</b>	<b>113</b>
B.1	Borne supérieure de $\bar{\pi}$ . . . . .	113
B.2	Existence des paires optimales en PAM pour $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) > 1$ . . . . .	115
<b>C</b>	<b>Annexe relative au chapitre 3</b>	<b>119</b>
C.1	Preuve de la Propriété 11 . . . . .	119
C.2	Preuve du Théorème 2 . . . . .	121
C.3	Preuve de la Propriété 12 . . . . .	124
C.4	Expression analytique de la variance de l'ISI / IFI pour une modulation PPM . . . . .	125
C.5	Expression analytique de la variance du signal utile pour une modulation PPM . . . . .	129
<b>D</b>	<b>Annexe relative au chapitre 4</b>	<b>131</b>
D.1	Propriétés de $\kappa_{1,n}$ pour les codes à valeurs dans $\{-1, +1\}$ . . . . .	131
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>





# Liste des sigles et acronymes

Par souci de lisibilité, les sigles et acronymes seront parcimonieusement utilisés dans ce manuscrit. Toutefois, pour les termes très fréquents, leur utilisation sera privilégiée. La signification d'un sigle ou d'un acronyme ne sera rappelée qu'à sa première apparition dans le manuscrit. De plus, nous utiliserons toujours le sigle ou l'acronyme le plus couramment employé par la communauté scientifique ce qui implique que la plupart des sigles ou acronymes correspondent à des termes anglais. Dans la suite, nous donnons la signification des sigles et acronymes en langue anglaise et française.

Sigles et Acronymes	Langue anglaise	Langue française
<b>CDMA</b>	Code Division Multiple Access	Accès multiple par répartition de codes
<b>CRB</b>	Cramer-Rao Bound	Borne de Cramer-Rao
<b>DA</b>	Data Aided	Aidé par les données
<b>DFE</b>	Direct Feedback Equalizer	Égaliseur à retour de décision
<b>DS-CDMA</b>	Direct Sequence - CDMA	CDMA à séquence directe
<b>DS-UWB</b>	Direct Sequence - Ultra Wide Band	Ultra large bande par séquence directe
<b>DTHC</b>	Developed Time Hopping Code	Code de saut temporel développé
<b>EQM</b>	Mean Square Error	Erreur Quadratique Moyenne
<b>FCC</b>	Federal Communications Commission	Commission fédérale des télécommunications
<b>FRake</b>	Full Rake	Rake complet
<b>FH</b>	Frequency Hopping	Saut de fréquence
<i>i.i.d.</i>	independent and identically distributed	indépendant et identiquement distribué
<b>IR</b>	Impulse Radio	Radio par impulsions
<b>ISI / IFI</b>	Inter Symbol / Inter Frame Interference	Interférence entre symboles / entre trames
<b>MAC</b>	Medium Access Control	Contrôle d'accès au média
<b>MCRB</b>	Modified Cramer-Rao Bound	Borne de Cramer-Rao modifiée
<b>ML</b>	Maximum Likelihood	Maximum de vraisemblance
<b>MRC</b>	Maximum Ratio Combining	Combinaison de rapport maximal
<b>MSC</b>	Mean Square Cross-correlation	Intercorrélation moyenne
<b>MUI</b>	Multi-User Interference	Interférence multi-utilisateur
<b>NDA</b>	Non Data Aided	Non-aidé par les données
<b>OOC</b>	Optical Orthogonal codes	Codes optiques orthogonaux
<b>OOK</b>	On-Off Keying	Modulation marche-arrêt
<b>PAM</b>	Pulse Amplitude Modulation	Modulation d'impulsion en amplitude
<b>PEM</b>	Mean Error Probability	Probabilité d'Erreur Moyenne
<b>PPM</b>	Pulse Position Modulation	Modulation d'impulsion en position
<b>RSB</b>	Signal to Noise Ratio	Rapport signal à bruit
<b>RSI</b>	Signal to Noise Interference	Rapport signal à interférence
<b>SF</b>	Spreading Factor	Facteur d'étalement
<b>PRake</b>	Partial RAKE	Rake partiel
<b>SRake</b>	Selective RAKE	Rake sélectif

<b>TEB</b>	Bit Error Rate	Taux d'Erreur Binaire
<b>THC</b>	Time Hopping Code	Code de saut temporel
<b>TH-CDMA</b>	Time-Hopping CDMA	CDMA à saut temporel
<b>TH-UWB</b>	Time-Hopping Ultra Wide Band	Ultra large bande à saut temporel
<b>UWB</b>	Ultra Wide Band	Ultra large bande
<b>UWB-IR</b>	Ultra Wide Band-Impulse Radio	Ultra large bande par impulsion
<b>WPAN</b>	Wireless Personal Area Network	Réseau personnel sans fil

---

# Introduction générale

## Positionnement du problème

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont le fruit d'une collaboration entre le département « Communications et Électronique » (COMELEC) de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris (ENST) et le département *Signal Processing and Multimedia* (SPM) de THALES *Land and Joint Systems* dans le cadre d'une Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE).

La technique ultra large bande consiste à émettre des impulsions de très courte durée. Elle fut d'abord utilisée pour des applications radars, puis transposée aux applications de télécommunications. Le premier papier proposant un schéma de transmission analogique multi-utilisateur utilisant des impulsions remonte à l'année 1952 [1]. Des brevets furent ensuite déposés pour cette application dans les années 70 (p. ex. [2]). Le concept des transmissions numériques par impulsions fut remis mis au goût du jour par Winthinton et Fullerton en 1992 [3], puis formalisé mathématiquement par Scholtz en 1993 [4]. On parle alors d'*Impulse Radio* (IR) que l'on peut traduire en français par « radio par impulsions ». La technique d'accès multiple repose sur l'utilisation des codes de saut temporel (en anglais, *Time-Hopping Codes* (THC)).

Étant donné l'absence de réglementation permettant l'utilisation des signaux IR, la communauté scientifique s'est peu intéressée au sujet jusqu'à l'autorisation promulguée par la *Federal Communications Commission* (FCC) en 2002 [5]. Celle-ci permet l'émission de signaux dits « UWB » (*Ultra Wide Band*) dans la bande de fréquence [3,1 GHz – 10,6 GHz] pour les communications. Le niveau d'énergie très faible (−41,25 dBm/MHz) doit permettre l'utilisation conjointe de l'UWB, sans licence, avec les services existants dans cette bande. À cette occasion, la FCC a dû définir ce que recouvrait le terme UWB. Pour ce qui concerne les communications, on retiendra que les signaux doivent avoir une bande supérieure ou égale à 500 MHz. On peut noter que d'après [6], le terme UWB fut introduit par le ministère de la défense américaine à partir de 1990 pour les applications radar.

Suite à la réglementation de la FCC, la société savante *IEEE* créa deux groupes de travail pour définir de nouveaux standards utilisant l'UWB en remplacement de la couche physique des standards IEEE 802.15.3 et IEEE 802.15.4 dédiés aux réseaux personnels sans fil (en anglais, *Wireless Personal Area Network* (WPAN)). D'une part le comité IEEE 802.15.3a dont le cahier des charges impose des débits supérieurs à 100 Mbits/s pour des distances jusqu'à 10 m. D'autre part, le groupe de travail IEEE 802.15.4a visant des applications de type réseaux de capteurs avec des débits de l'ordre de la centaine de kbits/s pour des portées de quelques centaines de mètres. La possibilité de localiser les émetteurs avec une précision inférieure au mètre fait aussi partie des exigences du standard IEEE 802.15.4a. À l'heure actuelle, aucun des deux groupes de travail n'a abouti à un standard. Le comité du standard IEEE 802.15.4a a déjà choisi l'utilisation de l'IR pour sa couche physique et prévoit un standard finalisé pour le premier trimestre 2007. Pour la 802.15.3a, deux consortiums s'affrontent. D'une part l'alliance MBOA (*Multi Band OFDM Alliance*) proposant l'utilisation de signaux utilisant une modulation multi-porteuse (en anglais, *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM)) de largeur de bande 500 MHz. D'autre part un consortium proposant l'utilisation de l'IR dans une version à étalement par séquence directe dans deux bandes de part et d'autre de la bande ISM à 5 GHz. Pour l'instant le processus d'élection est bloqué car aucune des solutions finales retenues n'atteint les 75 % de votes nécessaires.

Dans cette thèse, nous nous sommes principalement concentrés sur les transmissions IR à accès multiple par répartition de code de saut temporel (en anglais, *Time-Hopping Code UWB* (TH-UWB)) modulés en position (en anglais, *Pulse Position Modulation* (PPM)) ou en amplitude (en anglais, *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)). Nous avons considéré une propagation réaliste dans un canal à trajets multiples. La motivation de ce choix vient de l'intérêt de THALES pour ce type de transmission car elle est adaptée aux applications militaires. Elle présente en effet une faible probabilité de détection (en anglais, *Low Probability of Detection* (LPD)) et une faible probabilité d'interception (en anglais, *Low Probability of Intercept* (LPI)). Nous avons étudié pour ce type de signaux les deux effets pouvant limiter les performances du système, à savoir l'interférence multi-utilisateur créée par les différents utilisateurs présents dans le milieu de transmission et l'interférence entre symboles et entre trames créée par le milieu de propagation à trajets multiples. Nous avons dans les deux cas cherché à modéliser mathématiquement les phénomènes et à proposer des solutions pour minimiser leurs contributions. Dans le cas de l'interférence multi-utilisateur nous avons travaillé sur les TH-C et pour l'interférence entre symboles et entre trames sur les paramètres de la modulation et sur ceux du récepteur. De manière connexe, nous avons établi les bornes minimales de performances d'estimation des paramètres du canal.

## Plan et contributions

Dans cette section, nous donnons le plan de la thèse et mentionnons les résultats principaux. Par ailleurs, chaque chapitre possède sa propre introduction permettant de situer son contexte et de décrire ses contributions par rapport à l'état de l'art. C'est pourquoi cette introduction générale est succincte.

Le chapitre 1 présente le modèle de signal transmis de type TH-UWB introduit par [4, 7], le modèle du canal de propagation issu des travaux du groupe de normalisation IEEE 802.15.3a [8] que l'on a généralisé ainsi que les récepteurs rake considérés qui ont été retenus du fait de leur faible coût. Cette présentation considère un environnement applicatif de type multi-utilisateur et un modèle de propagation à trajets multiples. Dans ce chapitre, quelques calculs analytiques communs à tous les autres chapitres sont effectués. Le signal émis et reçu sont notamment réécrits en fonction des codes d'étalement dits « développés » [9] qui permettront de mener à bien plus simplement le calcul des performances présent dans les chapitres suivants. Enfin, ce premier chapitre pose les jalons nécessaires à la bonne lecture des chapitres suivants.

Le chapitre 2 se concentre sur l'étude de l'interférence multi-utilisateur avec pour objectif de minimiser ses effets nuisibles sur le système global. Nous obtenons, dans un premier temps, une nouvelle expression analytique de la variance de l'interférence multi-utilisateur en sortie du récepteur rake en considérant un modèle réaliste de canal à trajets multiples. Ce calcul a été rendu possible grâce à l'utilisation des codes développés. Cette expression analytique nous permet d'identifier les codes d'étalement qui minimisent cette variance et donc d'atténuer l'effet de l'interférence multi-utilisateur. De plus nous comparons la valeur minimale de la variance avec sa valeur obtenue en appliquant des codes classiquement recommandés pour le TH-UWB. Finalement les simulations montrent que choisir les « meilleurs » codes, c.-à-d., ceux qui minimisent la variance de l'interférence multi-utilisateur, permet un gain intéressant au niveau du taux d'erreur binaire.

Le chapitre 3 aborde l'étude de l'interférence entre symboles et entre trames. Cette étude nous a conduit, d'une part, à établir une expression analytique de la variance de l'interférence entre symboles et entre trames en sortie du récepteur rake et, d'autre part, à dimensionner pertinemment le système avec l'aide de l'expression calculée précédemment. Ainsi le nombre de doigts du récepteur rake et la taille de l'intervalle de garde ont pu être choisis de manière intelligente. Enfin, nous avons étudié les effets relatifs respectifs des interférences multi-utilisateur et entre symboles.

Dans le chapitre 4, nous avons comparé le niveau de la variance de l'interférence multi-utilisateur pour différentes techniques d'accès multiples (TH-UWB, DS-UWB, DS-CDMA) afin de déterminer celle qui est la plus robuste à ce genre de nuisance. Pour cela, nous avons montré que les systèmes TH-UWB, DS-UWB et DS-CDMA s'écrivaient de manière analogue ce qui nous a permis d'obtenir sans difficulté les variances de l'interférence multi-utilisateur pour le DS-UWB et le DS-CDMA. Une fois ces expressions disponibles, nous avons classé par ordre de

robustesse les trois techniques suivant les valeurs choisies pour les paramètres de dimensionnement.

Le chapitre 5 détermine analytiquement les bornes de Cramer-Rao (en anglais, *Cramer-Rao Bound (CRB)*) des paramètres du canal de propagation. Contrairement aux travaux effectués précédemment dans la littérature [10], nous avons supposé que les échos formés par les différents trajets ne sont pas orthogonaux entre eux. Nous avons en effet remarqué que, pour certains modèles de canaux, il n'était pas réaliste de supposer les échos orthogonaux entre-eux.

## Publications

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont donné lieu aux publications suivantes :

### Article de journal

- C. J. Le Martret, A.-L. Deleuze et P. Ciblat, « Optimal time-hopping code for multi-user interference mitigation in ultra-wide bandwidth impulse radio », *accepté à IEEE Trans. on Wireless Communications*.

### Articles de congrès

- A.-L. Deleuze, P. Ciblat et C. J. Le Martret, « Inter-symbol / Inter-frame interference in time-hopping ultra wideband impulse radio system », *IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICU)*, Zurich (Suisse), sept. 2005.
- A.-L. Deleuze, C. J. Le Martret et P. Ciblat, « Time hopping code characterization for multi-user interference mitigation in ultra wide band impulse radio », *IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computer*, Pacific Grove (Californie, Etats-Unis), nov. 2004.
- A.-L. Deleuze, C. J. Le Martret, P. Ciblat et E. Serpedin, « Cramer-Rao bound for channel parameters in ultra wide band based system », *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, Lisbonne (Portugal), juil. 2004.



---

# Chapitre 1

## Systeme de communication TH-UWB

### 1.1 Introduction

Comme il a été précisé dans l'introduction générale, nous nous intéressons dans cette thèse aux systèmes de communication ultra large bande à accès multiple par répartition de codes de saut temporel (en anglais, *Time-Hopping Code UWB* (TH-UWB)).

Cette technique formalisée en premier lieu par Scholtz [4], est à l'origine de nombreux travaux académiques. L'utilisation des codes de saut temporel (en anglais, *Time-Hopping Code* (THC)) consiste à transmettre les impulsions à des instants définis par une séquence pseudo-aléatoire, chaque impulsion étant modulée soit en position (en anglais, *Pulse Position Modulation* (PPM)) soit en amplitude (en anglais, *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)). L'accès multiple est alors réalisé en attribuant différents codes aux différents utilisateurs. Dans le modèle proposé par Scholtz, un symbole peut être répété plusieurs fois ce qui permet d'ajuster l'énergie par bit transmise, tout en gardant l'énergie de l'impulsion constante (ce qui permet de garantir une densité spectrale de puissance constante et donc la conformité au masque d'émission).

L'avantage des THC est qu'il confère aux signaux transmis des bonnes propriétés pour les applications militaires, à savoir une faible probabilité de détection (en anglais, *Low Probability of Detection* (LPD)) et une faible probabilité d'interception (en anglais, *Low Probability of Intercept* (LPI)). Un autre avantage lié à l'utilisation d'impulsions est la possibilité de réaliser des mesures de distances précises compte tenu de la résolution temporelle très fine, inférieure à la largeur de l'impulsion.

À l'image des transmissions conventionnelles à accès multiple par répartition de codes à séquence directe (en anglais, *Direct Sequence Code Division Multiple Access* (DS-CDMA)), les systèmes TH-UWB peuvent s'utiliser dans un contexte synchrone ou asynchrone, p. ex. pour les liaisons descendantes (synchrone) ou pour les liaisons montantes (asynchrone) d'un système centralisé. Dans cette thèse, nous considérons le contexte asynchrone qui présente les difficultés les plus importantes.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Nous présentons tout d'abord le modèle mathématique du signal émis par chaque utilisateur. Nous introduisons ensuite le modèle probabiliste du canal de propagation. Puis nous terminons par présenter la structure des récepteurs rake considérés.

### 1.2 Modèle du signal au niveau de l'émetteur

Dans cette section, nous allons décrire le signal émis par un utilisateur quelconque, indexé par le numéro  $n$ . Nous présentons les techniques TH-UWB pour deux types de modulation des symboles : la modulation PPM et la modulation PAM. Nous présentons aussi le masque imposé par la *Federal Communications Commission* (FCC) aux États-Unis, tant pour des communications en « intérieur » qu'en « extérieur » ainsi que l'impulsion retenue au cours de notre étude.

D'un point de vue historique, le premier article formalisant les signaux TH-UWB fut celui de Scholtz [4]. D'autres papiers comme [7], [11] et [12] suivirent et firent également office de papiers de référence dans le domaine du TH-UWB. Dans ce document nous utilisons le formalisme décrit dans [4] mais avec des notations légèrement différentes.

### 1.2.1 Structure du signal TH-UWB

Sur la figure 1.1, nous avons représenté la structure du signal TH-UWB pour les modulations PPM et PAM à deux états. Dans la suite de cette thèse, nous nous focaliserons uniquement sur ces modulations composées de deux états. Une extension à des modulations PPM et PAM à plusieurs niveaux serait immédiate.

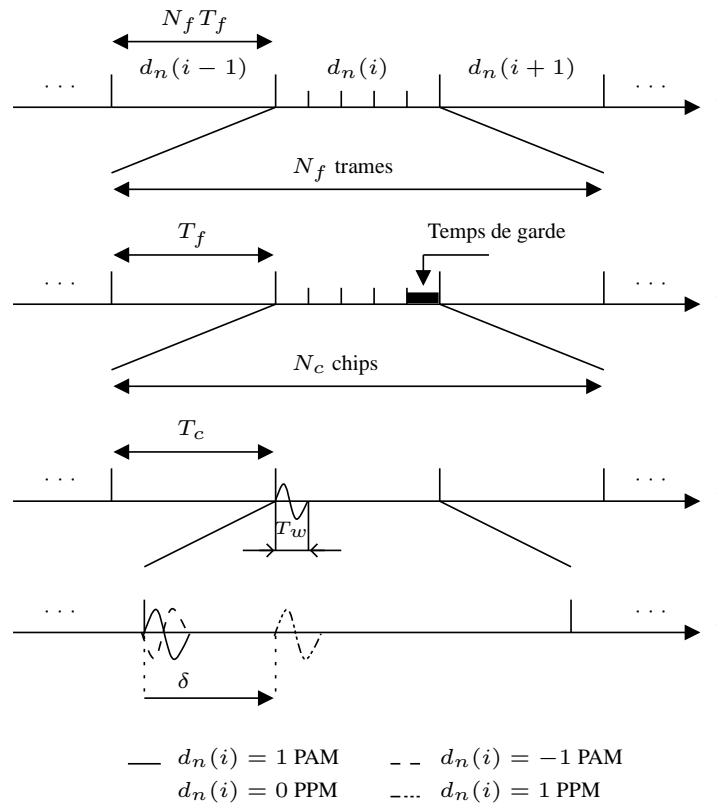


Figure 1.1 – Structure du signal TH-UWB pour les modulations PPM et PAM.

La structure du signal TH-UWB transportant un symbole d'information est assez particulière et contient intrinsèquement de la redondance. En effet l'impulsion étant bien plus courte que la durée d'un symbole  $T_s$ , ce qui induit un étalement de spectre, il est alors possible durant l'intervalle de temps de durée  $T_s$  secondes de répéter plusieurs fois cette impulsion. Ceci permet de créer un schéma de séparation des utilisateurs basé sur la technique du saut temporel. Afin que la technique de saut temporel soit assez efficace, il convient de répéter le même symbole d'information à des instants différents et déterminés par un code propre à chaque utilisateur.

C'est pourquoi, le signal TH-UWB associé à un même symbole d'information (modulé en PPM ou en PAM) est composé de  $N_f$  trames de durée  $T_f$ . Chaque trame comporte alors une et une seule impulsion associée à ce symbole d'information. Afin de déterminer la position de l'impulsion à l'intérieur de la trame, celle-ci est découpée en  $N_c$  chips de durée  $T_c$ . On peut noter que, la durée de l'impulsion étant très courte, l'impulsion n'occupera pas totalement un chip. La position de l'impulsion dans la trame (ou de manière équivalente le numéro du chip) est déterminée par un code propre à chaque utilisateur. Ces codes sont choisis de manière à limiter les interférences



entre les différents utilisateurs. Généralement, afin d'atténuer l'interférence entre symboles et entre trames due à la dispersion temporelle du canal de transmission, un temps de garde est inséré à la fin de chaque trame. Ceci peut être techniquement réalisé en condamnant systématiquement les derniers chips de chaque trame [7, 13].

Dans le cas d'une modulation 2-PPM, un décalage de  $\delta$  à l'intérieur des chips occupés permettra de différencier le bit d'information. Dans le cas d'une modulation 2-PAM, seule la polarité de l'impulsion sera inversée.

Enfin, nous supposons dès à présent que les codes des utilisateurs sont périodiques de période le nombre de trames.

Mathématiquement, cela se traduit par le signal transmis suivant  $s_n(t)$  pour un train d'information binaire associé à l'utilisateur  $n$ .

Dans le cas d'une modulation **PPM**, nous avons

$$s_n(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{N_f-1} w(t - iN_fT_f - jT_f - \tilde{c}_n(j)T_c - \delta d_n(i) - \theta_n), \quad (1.1)$$

avec

- $\alpha_n := \mathcal{P}_n T_f / E_w$  où  $\mathcal{P}_n$  est la puissance du signal associée à chaque utilisateur et  $E_w := \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)^2 dt$ ,
- $T_f$  la durée d'une trame,
- $T_c$  la durée d'un chip,
- $N_f$  le nombre de trames,
- $N_c$  le nombre de chips,
- $w(t)$  l'impulsion de durée  $T_w \ll T_c$ ,
- $d_n(i) \in \{0, 1\}$  les symboles émis supposés indépendants et identiquement distribués,
- $\{\tilde{c}_n(i)\}$  le code de saut temporel associé à l'utilisateur  $n$ , à valeurs entières dans  $\{0, N_c - 1\}$  et périodique de période  $P_c = N_f$ ,
- $\theta_n$  le défaut de synchronisation entre l'utilisateur  $n$  et une horloge absolue, modélisé par une variable aléatoire uniformément distribuée sur la durée d'un symbole  $[0, N_f T_f]$ ,
- $\delta$  le décalage de la PPM, choisi de manière à maximiser la distance entre les formes d'onde associées aux deux symboles d'information. On peut noter que ce choix conduit à des formes d'onde non-orthogonales entre elles.

Dans le cas d'une modulation **PAM**, nous avons

$$s_n(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{N_f-1} d_n(i) w(t - iN_fT_f - jT_f - \tilde{c}_n(j)T_c - \theta_n), \quad (1.2)$$

avec

- $d_n(i) \in \{-1, 1\}$  les symboles émis supposés indépendants et identiquement distribués,
- tous les autres termes composant (1.2) identiques à ceux composant (1.1).

Dans la section suivante, nous allons montrer que les équations (1.1) et (1.2) peuvent s'écrire différemment et notamment qu'en utilisant la notion de codes de saut temporel *développés* introduite dans [9], nous linéarisons la dépendance de  $s_n(t)$  en fonction de la signature / code des utilisateurs.

## 1.2.2 Notion de codes de saut temporel *développés*

En examinant les expressions des signaux PPM et PAM, on peut remarquer que la dépendance de ces signaux par rapport aux codes de saut temporel n'est pas simple car non-linéaire. Étant donné que le principal fil conducteur de la thèse est de caractériser des codes de saut temporel qui permettent une atténuation forte<sup>1</sup> des interférences multi-utilisateur et entre symboles et entre trames, il conviendrait d'avoir des expressions plus manipulables de

<sup>1</sup>Selon des critères que nous allons déterminer dans les chapitres suivants.

$s_n(t)$  en fonction des codes. Ceci est rendu possible en utilisant la notion de codes de saut temporel développés (en anglais, *Developed Time Hopping Code* (DTHC)) définis pour la première fois dans [9].

L'idée sous-jacente aux codes développés est de dire qu'il est plus simple de moduler tous les chips par un nombre binaire, qui vaut '0' si le chip est vide et '1' si le chip est occupé plutôt que de décaler l'impulsion selon les numéros des chips occupés comme cela est effectué dans les expressions (1.1) et (1.2). Cette modulation par '0' ou '1' qui est parfaitement déterminée avec les codes d'origine et qui déterminera les codes développés permet de sortir l'information des codes de l'argument de l'impulsion  $w(t)$  et de la mettre en facteur multiplicatif de cette même impulsion. Les signaux deviennent ainsi linéaires par rapport aux codes développés.

Mathématiquement cette idée se traduit de la manière suivante : soit le signal suivant  $x_n(t)$  associé à la transmission d'un unique symbole d'information<sup>2</sup> de l'utilisateur  $n$

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{N_f-1} w(t - jT_f - \tilde{c}_n(j)T_c). \quad (1.3)$$

Au lieu de modifier le positionnement de l'impulsion à la trame  $j$  selon la valeur  $\tilde{c}_n(j)$ , un train d'impulsion au rythme  $T_c$  (soit  $N_c$  impulsions pour la trame  $j$ ) est envoyé et multiplié par '0' si le chip est vide et '1' si le chip est occupé. Ainsi à chaque trame, le code développé prend une valeur (0 ou 1) sur chaque chip. Comme  $N_f$  trames sont émises, le code développé, noté  $c_n$ , est une suite de  $N_c N_f$  nombres par symbole d'information. Ainsi le code développé  $c_n$  s'écrit en fonction du code initial  $\tilde{c}_n$  de la manière suivante

$$c_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \tilde{c}_n(j) + jN_c, 0 \leq j \leq N_f - 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}, \quad k = 0, \dots, N_c N_f - 1. \quad (1.4)$$

On obtient alors l'expression équivalente suivante de (1.3) :

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j)w(t - jT_c). \quad (1.5)$$

On remarque que maintenant le signal  $x_n(t)$  dépend bien linéairement de la signature / code des utilisateurs. On peut enfin noter que les codes développés admettent une période  $P_c = N_c P_c$  plus grande que les codes initiaux ce qui justifie l'appellation de *codes développés*.

Nous présentons, sur la figure 1.2, un exemple numérique illustrant la technique de passage d'un code initial à un code développé. On considère  $N_c = 4$  et  $N_f = 3$ . Le code initial vaut  $\tilde{c}_n = \{0; 1; 3\}$  (comme mentionné sur la partie droite de la figure 1.2). Le code développé s'écrit alors  $c_n = \{1; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1\}$ .

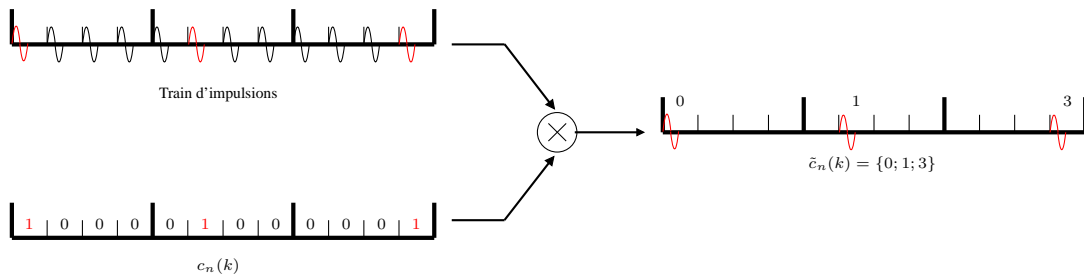


Figure 1.2 – Technique de passage d'un code au code développé correspondant.

Il est dorénavant facile d'écrire les expressions (1.1) et (1.2) en fonction des codes développés : par rapport à (1.5), il suffit juste de rajouter une somme portant sur le numéro du symbole d'information émis et l'opération de modulation de ces symboles d'information.

<sup>2</sup>En PPM, nous avons considéré un décalage nul ; en PAM, nous avons considéré une polarisation positive.

Il s'ensuit que l'équation (1.1), qui est associée à une modulation **PPM**, se transforme de la manière suivante

$$s_n(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) w(t - iN_f T_f - jT_c - \delta d_n(i) - \theta_n). \quad (1.6)$$

De manière similaire, l'équation (1.2), qui est associée à une modulation **PAM**, s'exprime comme suit

$$s_n(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) w(t - iN_f T_f - jT_c - \theta_n). \quad (1.7)$$

Ces deux dernières expressions seront à la base de tous nos développements futurs. On peut remarquer que l'utilisation des codes développés, bien que très pratique, est rare dans la littérature concernant l'ultra large bande. Outre le papier initiateur des codes développés [9], nous n'avons trouvé que le papier de [14]. Dans ce papier une esquisse maladroite d'un calcul analytique de la variance de l'interférence multi-utilisateur, effectué sous des conditions restrictives d'ailleurs, est présentée.

### 1.2.3 Masque fréquentiel et impulsion UWB

Les systèmes ultra large bande, par définition, occupent une très large plage de fréquence et chevauchent ainsi des bandes de fréquences déjà occupées par d'autres systèmes. Il convient de réguler la puissance d'émission fréquence par fréquence de ces systèmes UWB, afin de ne pas perturber les services existants. C'est pourquoi, lorsque la FCC a autorisé des essais des systèmes UWB, elle a imposé des limites de puissance d'émission drastiques à l'intérieur de la bande permise [3, 1 GHz – 10,6 GHz] (cf. figure 1.3). Dans cette bande la Puissance Isotrope Rayonnée Extrinsèque (PIRE) est limitée à 41,25 dBm/MHz, ce qui correspond à une puissance totale maximale de 0,556 mW.

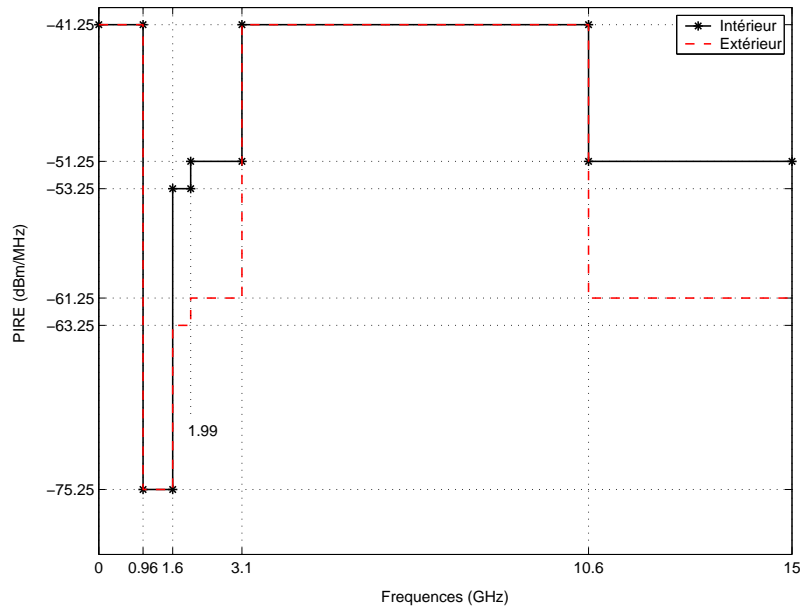


Figure 1.3 – Limites de puissance d'émission imposées par la FCC pour les signaux UWB.

Les contraintes d'émission pour les systèmes opérant en extérieur sont plus restrictives que celles associées aux systèmes agissant en intérieur. Ceci est dû au fait que beaucoup plus de systèmes sans fil fonctionnent à l'extérieur des bâtiments, notamment aux alentours de la bande des 2 GHz qui est principalement réservée à la téléphonie sans fil et aux réseaux locaux.

Il convient maintenant de déterminer une impulsion qui épouse « au mieux » le masque d'émission. Dans les systèmes dédiés à une application sans fil, et donc notamment dans les systèmes TH-UWB, le signal respectant le masque correspond à celui qui est mesuré au niveau de l'antenne d'émission et non à celui qui sort du modem. Par conséquent, afin de concevoir et dimensionner convenablement l'impulsion que le modem doit créer, il est nécessaire de connaître la transformation que l'antenne va lui faire subir. Dans la plupart des travaux, il est encore considéré que l'antenne utilisée pour émettre le signal ultra large bande n'est pas parfaitement adaptée à une si grande largeur de bande, ce qui a pour effet de différencier sensiblement l'impulsion en amont et en aval de l'antenne. La transformation modélisant le mieux cette inadéquation est l'opérateur de dérivation. C'est pourquoi,  $w'(t)$  doit épouser la forme du masque et non  $w(t)$ , avec  $w(t)$  l'impulsion générée par le modem. A la réception, l'antenne ayant le même type de comportement, c'est la dérivée seconde  $w''(t)$  qui intervient dans les traitements.

Dans cette thèse, nous allons supposer qu'il sera possible, dans un futur proche, de concevoir des antennes parfaitement adaptées à la largeur de bande [3,1 GHz – 10,6 GHz]. Ainsi, l'impulsion vue par le modem, l'antenne d'émission et l'antenne de réception sera identique et notée  $w(t)$ . En raison de son usage courant dans la littérature et de la part des industriels dû à sa facilité d'implémentation, nous avons retenu l'impulsion gaussienne. Néanmoins, c'est bien cette impulsion gaussienne qui doit vérifier le masque et non sa dérivée première. Par conséquent, l'expression de l'impulsion est donnée par :

$$w(t) = g(t) \times 2 \cdot \text{Re}(e^{2i\pi f_0 t})$$

où  $g(t)$  est une fonction gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  et où  $f_0$  est la fréquence porteuse permettant de centrer le signal autour de la fréquence centrale de la bande [3,1 GHz – 10,6 GHz]. Finalement, nous avons

$$w(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(2\pi f_0 t)}{\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (1.8)$$

avec

$$\sigma = \begin{cases} 6,441 \times 10^{-2} \text{ ns} & \text{« intérieur »,} \\ 9,107 \times 10^{-2} \text{ ns} & \text{« extérieur ».} \end{cases} \quad (1.9)$$

Sur la figure 1.4, nous avons tracé l'impulsion  $w(t)$  pour le contexte « intérieur » et pour le contexte « extérieur ».

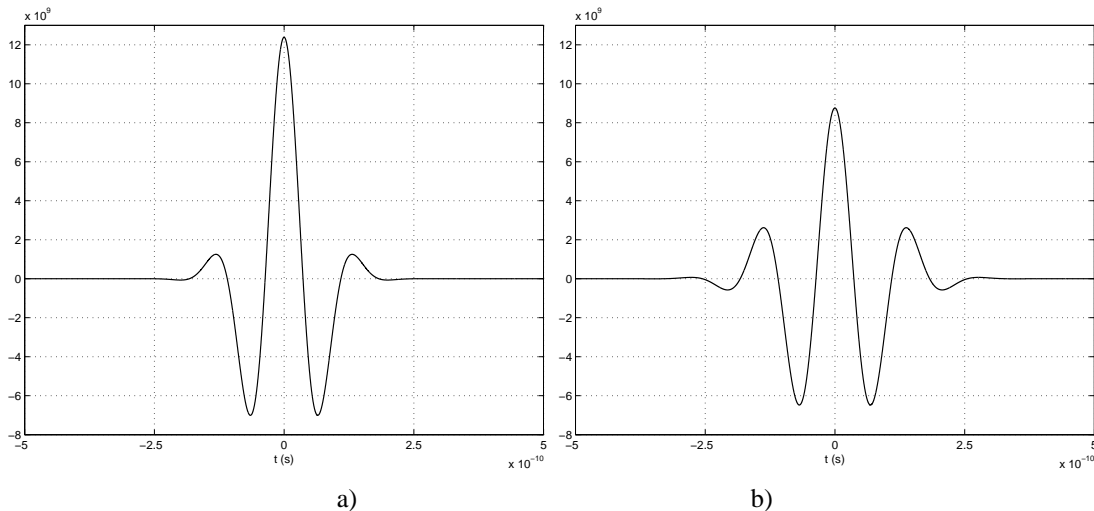


Figure 1.4 – Allure des impulsions. a) « Intérieur ». b) « Extérieur ».

Dans la suite du document, nous avons plutôt retenu, dans les simulations, l'impulsion  $w(t)$  satisfaisant la contrainte du masque « extérieur ».

### 1.3 Modèle du canal de propagation

Dans les systèmes de communication sans fil et donc dans les systèmes TH-UWB, le canal de propagation est fondamentalement à trajets multiples. En effet en raison des réflexions sur les différents murs ou bâtiments jalonnant le parcours d'un point à un autre, le signal reçu est une somme de versions atténuées et décalées du signal original. Afin de choisir convenablement les paramètres du système TH-UWB et de prédire aussi les performances, il est toujours intéressant de connaître quelques caractéristiques essentielles d'un canal (temps de dispersion, densité des trajets multiples, atténuation des trajets, etc.).

De nombreux travaux ont été effectués afin de mieux connaître les caractéristiques du canal de propagation associés aux systèmes TH-UWB opérant entre [3, 1 GHz – 10, 6 GHz]. Néanmoins la plupart des études s'est concentrée à réaliser des campagnes de mesures des canaux dans des contextes réalistes (cf. [15–17] entre autres). Quelques études ont abordé le problème de la modélisation de ces canaux. Dans [18, 19], une approche déterministe basée sur des principes d'électromagnétisme a été retenue. Étant donné la mobilité des éléments communicants constituant le système de communication TH-UWB (téléphone, ordinateurs portables, réseaux personnels, etc.), on peut supposer que le canal varie dans le temps lentement mais sûrement. Par conséquent, à chaque communication et même au cours d'une communication, la réponse impulsionnelle du canal diffère et il est intéressant d'avoir des informations, non pas sur chaque réalisation du canal, mais sur des constantes statistiques du canal. De ce fait, la modélisation du canal réside dans l'élaboration de modèles statistiques des atténuations et des temps d'arrivée des trajets [8, 20–22]. Les modèles statistiques développés sont généralement valables dans les contextes « intérieur » et « extérieur ».

Nous présentons, ci-dessous, le modèle de canal proposé par le groupe de travail de la norme IEEE 802.15.3a [21] qui, à quelques modifications mineures près, est le même que celui introduit par Saleh & Valenzuela [20].

#### 1.3.1 Modèle stochastique

On considère  $h_n(t)$  une réalisation de la réponse impulsionnelle associée à l'utilisateur  $n$ . Comme le canal est à trajets multiples, nous avons

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{N_p} A_n^k \delta(t - \tau_n^k), \quad (1.10)$$

avec  $N_p$  le nombre de trajets,  $A_n^k$  et  $\tau_n^k$  sont respectivement l'atténuation et le retard du  $k^{\text{ème}}$  trajet. Sans perte de généralité, nous supposons que les retards sont ordonnés de manière croissante. Nous avons ainsi  $\tau_n^k < \tau_n^{k+1}$  pour tout  $k$  et tout  $n$ . Par souci de simplicité, nous supposons également que tous les utilisateurs ont le même nombre de trajets  $N_p$ .

On peut remarquer que plus le retard est grand, plus le signal a parcouru de chemin, et par conséquent, plus l'atténuation sera forte. C'est pourquoi il apparaît judicieux, comme fait dans [20, 21, 23], de faire dépendre l'atténuation  $A_n^k$  du retard correspondant  $\tau_n^k$ . Ainsi nous obtenons que

$$A_n^k = a_n^k \cdot f(\tau_n^k), \quad (1.11)$$

où  $f(\cdot)$  est une fonction décroissante décrivant la dépendance des atténuations avec les retards correspondants, et où  $a_n^k$  est la partie de l'atténuation indépendante des retards modélisée par une variable aléatoire. Les variables aléatoires  $\{a_n^k\}_{k,n}$  sont supposées indépendantes, identiquement distribuées (*i.i.d.*), à moyenne nulle, de variance  $\sigma_a^2$  et de moment d'ordre quatre  $\mu_a^4$  égaux à

$$\sigma_a^2 := \mathbb{E}_a[(a_n^k)^2] \quad \text{et} \quad \mu_a^4 := \mathbb{E}_a[(a_n^k)^4].$$

Dans la suite, on aura également besoin des termes suivants :

$$I_n^k := \mathbb{E}_a[(A_n^k)^2] = \sigma_a^2 \cdot f^2(\tau_n^k) \quad \text{et} \quad J_n^k := \mathbb{E}_a[(A_n^k)^4] = \mu_a^4 \cdot f^4(\tau_n^k). \quad (1.12)$$

On peut noter que les moments d'ordre impairs de  $A_n^k$  sont nuls par construction. Enfin on suppose que les variables  $\tau_n^k$  et  $\tau_{n'}^{k'}$  sont indépendantes entre elles dès que  $n \neq n'$ , (c.-à-d., dès que les retards correspondent à deux utilisateurs). En revanche, pour un même utilisateur,  $\tau_n^k$  et  $\tau_n^{k'}$  ne sont pas indépendants.

On peut remarquer que la formulation (1.11) est très générale et permet de regrouper sous le même formalisme de nombreux modèles de canaux rencontrés dans la littérature [8, 20, 22]. Chaque modèle se différencie alors en spécifiant les lois de probabilité des variables  $a_n^k$  et  $\tau_n^k$  et la fonction  $f(\cdot)$ . Ainsi une fois ces premiers jalons d'ordre général posés, il convient maintenant d'explicitier la fonction  $f(\cdot)$ , les lois des variables  $a_n^k$  et  $\tau_n^k$ . Pour cela, nous utilisons le modèle donné par Molish *et al.* [8].

Dans [8] et [20], il est établi de manière empirique que les trajets multiples arrivent par paquets ou grappes. On note,  $T_n^\ell$ , le temps d'arrivée du premier trajet de la grappe  $\ell$ . Étant donné les mesures effectuées dans [8] et [20], il a été observé qu'il était raisonnable de modéliser les variables aléatoires  $\{T_n^\ell\}_\ell$  par un processus de Poisson de paramètre  $\Lambda$ . Chaque paquet est composé de plusieurs retards. On note par  $\tilde{\tau}_n^{k,\ell}$  le temps d'arrivée du  $k^{\text{ème}}$  trajet de la grappe  $\ell$  avec pour référence temporelle le temps d'arrivée du premier trajet de la grappe considérée. Ces variables aléatoires  $\{\tilde{\tau}_n^{k,\ell}\}_k$  sont également modélisées par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Il s'ensuit que les densités de probabilité des retards sont les suivantes :

$$\begin{aligned} p(T_n^\ell | T_n^{\ell-1}) &= \Lambda e^{-\Lambda(T_n^\ell - T_n^{\ell-1})}, & \ell > 0, \\ p(\tilde{\tau}_n^{k,\ell} | \tilde{\tau}_n^{(k-1),\ell}) &= \lambda e^{-\lambda(\tilde{\tau}_n^{k,\ell} - \tilde{\tau}_n^{(k-1),\ell})}, & k > 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Occupons-nous maintenant de la modélisation des atténuations  $A_n^k$ . Les variables aléatoires  $a_n^k$  (cf. éq. (1.11)) se décomposent de la manière suivante

$$a_n^k = p_n^k \cdot b_n^k, \quad (1.14)$$

où les variables aléatoires  $p_n^k$  sont, *i.i.d.*, équiprobables de valeur  $\pm 1$  qui représentent les inversions de phase et donc les différentes réflexions et où les variables aléatoires  $b_n^k$ , *i.i.d.*, indépendantes des  $p_n^k$ , suivent une loi log-normale. Par conséquent

$$20 \cdot \log_{10}(b_n^k) = \mathcal{N}(m, v)$$

avec  $\mathcal{N}(m, v)$  une loi normale / gaussienne à valeur réelle de moyenne  $m$  et de variance  $v$ . On note l'autocorrélation des variables aléatoires  $b_n^k$  de la manière suivante

$$\Omega_0^n = \mathbb{E}[(b_n^k)^2],$$

ce qui implique que  $m$  doit satisfaire l'équation suivante

$$m = \frac{10 \ln(\Omega_0^n)}{\ln(10)} - \frac{v \ln(10)}{20}$$

et que  $v$  doit être choisie de telle manière que les canaux simulés *collent* au mieux aux canaux mesurés. La variable  $\Omega_0^n$  s'interprète comme l'atténuation moyenne du canal prenant ainsi en compte la distance entre l'émetteur et le récepteur.

Dans la suite, nous introduisons la notion de « pseudo-retard » défini de la manière suivante :  $\hat{\tau}_n^k$  est le pseudo-retard associé au vrai retard  $\tau_n^k$  et il prend la valeur  $\gamma T_n^\ell + \Gamma \tilde{\tau}_n^{\ell',\ell}$  si le retard  $\tau_n^k$  est le  $\ell^{\text{ème}}$  temps d'arrivée de la  $\ell^{\text{ème}}$  grappe.

La fonction  $f(\cdot)$  qui vaut

$$f(\tau) = e^{-\tau/2\Gamma\gamma} \quad (1.15)$$

est à appliquer sur les pseudo-retards. Par conséquent, nous avons

$$A_n^k = p_n^k \cdot b_n^k \cdot e^{-\hat{\tau}_n^k/2\Gamma\gamma}, \quad (1.16)$$

et l'énergie des atténuations est donnée [8] par :

$$\mathbb{E}[(A_n^k)^2] = \Omega_0^n \cdot e^{-\hat{\tau}_n^k/\Gamma\gamma} = \Omega_0^n \cdot e^{-T_n^\ell/\Gamma} e^{-\tilde{\tau}_n^{\ell',\ell}/\gamma}.$$

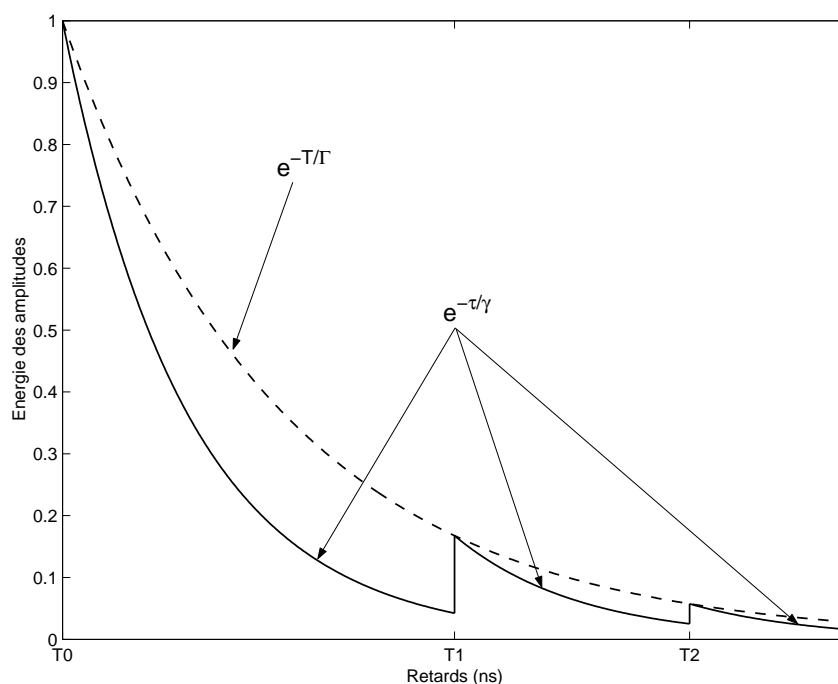


Figure 1.5 – Energie de l'atténuation en fonction du retard (courbe en trait plein).

Sur la figure 1.5, nous avons représenté l'énergie des atténuations en fonction des retards.

D'un point de vue historique, il convient aussi de remarquer que le modèle de Saleh & Valenzuela [20] sur lequel est bâti le modèle de Molish *et al.* décrit plus haut a été conçu pour des canaux à bande étroite (100 MHz). Afin de l'adapter aux canaux rencontrés par les systèmes ultra large bande, Molish *et al.* ont seulement modifié la loi de probabilité des  $a_n^k$  qui suivaient une loi gaussienne dans Saleh & Valenzuela.

Enfin, dans la suite de la thèse, nous considérerons toujours pour les simulations, que les canaux rencontrés ne présentent qu'une seule grappe, ce qui implique que seulement deux paramètres ( $\lambda$  et  $\gamma$ ) guident les lois de probabilité des temps d'arrivée des trajets. En revanche, pour les calculs analytiques, nous avons dû nous imposer cette hypothèse simplificatrice seulement au chapitre 3. En effet, dans le chapitre 3, nous aurons besoin d'expressions analytiques simples des lois de probabilité des temps d'arrivée des trajets et ceci n'est possible qu'en présence d'un modèle à une unique grappe. De plus, il a été montré par simulations (cf. [24]) que des canaux générés par le biais d'un modèle à une seule grappe peuvent épouser convenablement des canaux générés par le biais d'un modèle à plusieurs grappes. Pour cela, il suffit juste de choisir judicieusement les paramètres guidant les lois de probabilité des temps d'arrivée.

### 1.3.2 Étalement temporel moyen

Avant de présenter quelques exemples de réalisation de canaux construits suivant le modèle stochastique de la sous-section précédente, nous allons d'abord calculer le retard moyen (en anglais, *Mean Excess Delay*) et l'étalement temporel moyen autour de ce retard moyen (en anglais, *Root Mean Square Delay Spread (RMS Delay Spread)*) en fonction des paramètres déterministes ( $\lambda$  et  $\gamma$ ) du canal.

Pour calculer ce temps moyen et cet étalement temporel moyen, nous avons besoin de la connaissance de l'expression analytique de la densité de probabilité des retards  $\tau_n^\ell$ . Nous calculons, par la même occasion, la densité de probabilité de la différence entre deux retards du même utilisateur lorsque  $k > \ell$ . Ces expressions sont données à la propriété 1 dont la démonstration est disponible en annexe A.1.

**Propriété 1** Dans un modèle de canal à une seule grappe nous avons la densité de probabilité de  $\tau_n^\ell$  qui est donnée par

$$p_{\tau_n^\ell}(t) = \frac{\lambda^\ell}{(\ell - 1)!} t^{\ell-1} e^{-\lambda t} \times \mathbb{1}_{t \geq 0},$$

et la densité de probabilité de  $\tau_n^k - \tau_n^\ell$ , pour  $k > \ell$ , qui est donnée par

$$p_{\tau_n^k - \tau_n^\ell}(t) = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k - \ell - 1)!} t^{k-\ell-1} e^{-\lambda t} \times \mathbb{1}_{t \geq 0}.$$

La fonction  $\mathbb{1}_{t \geq 0}$  vaut 1 si  $t$  est positif ou nul et vaut 0 partout ailleurs.

Afin de déterminer ce temps moyen et cet étalement temporel moyen [25, 26], il faut ensuite calculer le profil temporel de puissance  $P(t)$  (en anglais, *Power Delay Profile*) qui est défini de la manière suivante

$$P(t) = \mathbb{E}[|h_n(t)|^2]. \quad (1.17)$$

Les statistiques du canal étant indépendantes de l'utilisateur  $n$ , nous avons pu omettre l'indice  $n$  de  $P(t)$ .

**Propriété 2** Étant donné le modèle de canal défini par les équations (1.13) et (1.16) et dans le cadre d'un modèle à une seule grappe, nous avons

$$P(t) = \Omega_0^n \lambda e^{-t/\gamma}.$$

La démonstration de cette propriété est reportée à l'annexe A.2.

Une fois ce profil temporel de puissance obtenu, il convient d'introduire le profil normalisé  $\tilde{P}(t)$  tel que  $\int \tilde{P}(t) dt = 1$  ce qui implique que

$$\tilde{P}(t) = \frac{1}{\gamma} e^{-t/\gamma}. \quad (1.18)$$

Ce profil normalisé peut représenter une densité de probabilité et indique en pratique la puissance moyenne présente à l'instant  $t$ . Par conséquent, il est judicieux de définir le retard moyen  $t_m$  comme

$$t_m = \mathbb{E}_{\tilde{P}(t)}[t] = \int_0^{+\infty} t \tilde{P}(t) dt.$$

La notation  $\mathbb{E}_{\tilde{P}(t)}[t]$  signifie que nous moyennons la variable  $t$  en supposant qu'elle admet la loi  $\tilde{P}(t)$ . Après quelques manipulations algébriques évidentes, nous obtenons que

$$t_m = \gamma.$$

L'étalement temporel moyen  $e_m$  autour du retard moyen peut évidemment se définir de la manière suivante

$$e_m = \sqrt{\mathbb{E}_{\tilde{P}(t)}[(t - t_m)^2]} = \sqrt{\int_0^{+\infty} (t - t_m)^2 \tilde{P}(t) dt}.$$

Finalement, nous avons

$$e_m = \gamma. \quad (1.19)$$

Ces calculs de profil de puissance, de retard moyen et d'étalement temporel moyen, quoiqu'aisés, n'étaient pas disponibles dans la littérature. Nous remarquons que le paramètre  $\gamma$  conditionne l'étalement de la réponse impulsionnelle du filtre  $h_n(t)$ . Plus  $\gamma$  est grand, et plus le filtre est long, ce qui est logique puisque moins les trajets sont atténués (cf. éq. (1.16)). Nous verrons, lors des exemples numériques qui suivent, que le paramètre  $\lambda$  conditionne la densité des trajets. Ainsi une faible valeur de  $\lambda$  indiquera une faible densité des trajets.



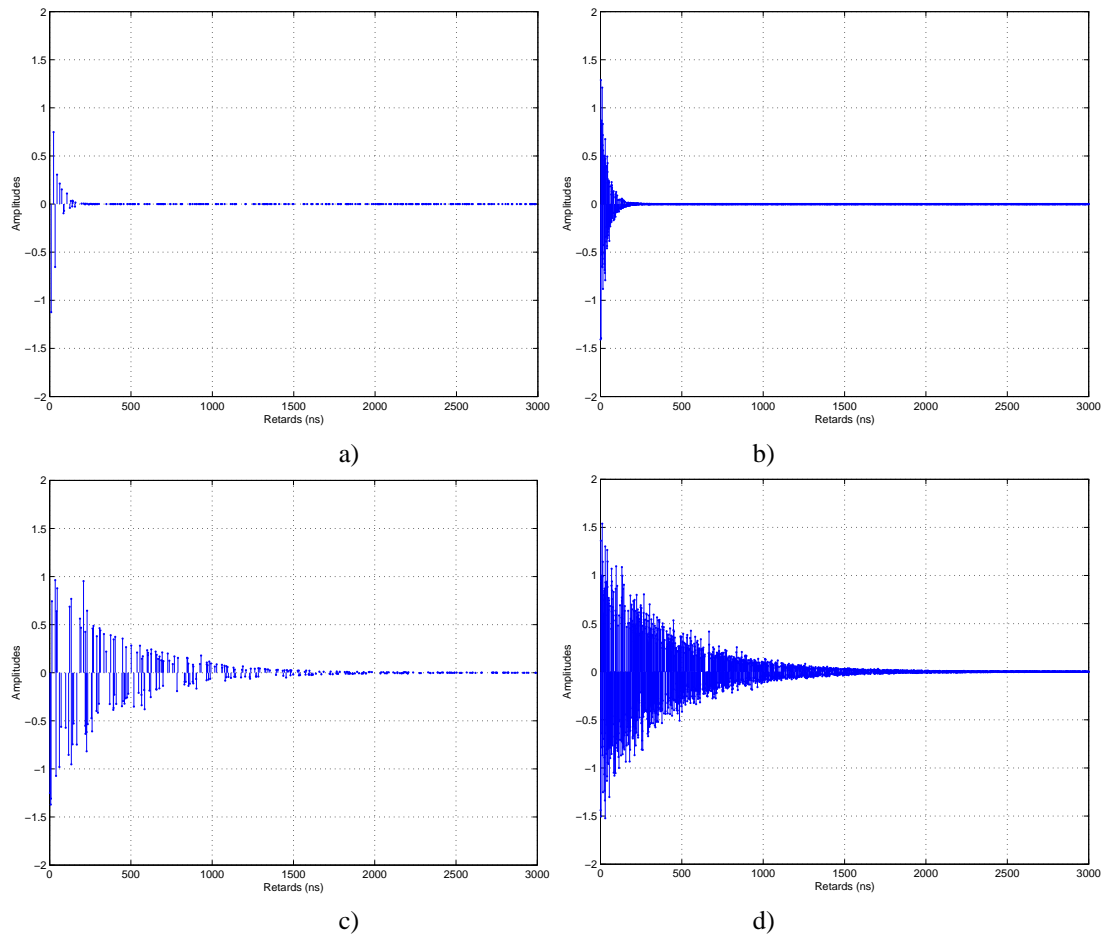


Figure 1.6 – Réalisation de la réponse impulsionnelle du canal pour différentes paires  $(\gamma, \lambda)$ . a)  $(\gamma = 20 \text{ ns}, \lambda = 0,1 \text{ ns}^{-1})$ . b)  $(\gamma = 20 \text{ ns}, \lambda = 1 \text{ ns}^{-1})$ . c)  $(\gamma = 200 \text{ ns}, \lambda = 0,1 \text{ ns}^{-1})$ . d)  $(\gamma = 200 \text{ ns}, \lambda = 1 \text{ ns}^{-1})$ .

### 1.3.3 Illustrations numériques

Nous avons tracé sur la figure 1.6, une réalisation du canal pour différentes paires  $(\gamma, \lambda)$ . Nous avons posé  $\Omega_0^n = 1$  et  $v = 5$ . Grâce à cette figure, nous confirmons que  $\gamma$  et  $\lambda$  déterminent respectivement la longueur de la réponse du canal et la densité des trajets.

Néanmoins ces quatre paires de paramètres ont été choisies pour leur qualité pédagogique et non pour leur réalisme. Dans la suite, nous donnons les valeurs des paires traditionnellement utilisées dans la littérature. Elles sont fournies par trois papiers, celui de Molish *et al.* [8], celui de Saleh & Valenzuela [20] et celui de Lee *et al.* [22]. Ces valeurs sont reportées sur le tableau 1.1. Nous avons ici posé  $\Omega_0^n = 1$  et  $v = 11, 52$ .

Il faut noter que les canaux associés aux paramètres donnés par le tableau 1.1 ne sont pas exactement ceux obtenus dans la littérature puisque nous utilisons un modèle à une seule grappe alors que ceux générés par Molish *et al.*, Saleh & Valenzuela et Lee *et al.* admettent un modèle à plusieurs grappes et sont également associés à des valeurs spécifiques de  $\Lambda$  et  $\Gamma$  qui n'ont pas été prises en compte dans la thèse puisque ne jouant aucun rôle dans un modèle à une unique grappe.

Sur la figure 1.7, nous avons tracé une réalisation pour chaque couple de paramètres  $\gamma$  et  $\lambda$  fournis dans [8] et reportés au tableau 1.1.

On remarque que ces réalisations de canaux réalistes présentent des réponses impulsionnelles assez denses en termes de nombre de trajets. En revanche, l'étalement temporel ne dépasse jamais la centaine de nanosecondes. Étant donné qu'un symbole d'information peut durer une centaine de nanoseconde (cf. chapitre 3) le temps

	$\lambda$ (ns <sup>-1</sup> )	$\gamma$ (ns)
Molish <i>et al.</i> (CM1)	2, 5	4, 3
Molish <i>et al.</i> (CM2)	0, 5	6, 7
Molish <i>et al.</i> (CM3)	2, 1	7, 9
Molish <i>et al.</i> (CM4)	2, 1	12
Saleh & Valenzuela	0, 2	20
Lee <i>et al.</i>	2	5

Tableau 1.1 – Valeurs possibles de la paire  $(\lambda, \gamma)$ .

d'étalement du canal est inférieur au temps symbole, on peut alors par avance affirmer que ces canaux n'engendreront pas une interférence entre symboles importante.

## 1.4 Description du récepteur

En raison de contraintes technologiques associées à la trop grande largeur de bande du signal reçu, il est impossible de mettre en place des récepteurs fonctionnant à des fréquences d'horloge de l'ordre de la largeur de bande du signal. Par conséquent on ne peut considérer des récepteurs qui échantillonneraient le signal reçu aux alentours de la fréquence d'échantillonnage de Nyquist. En outre, en raison des applications envisagées, les communications sont intrinsèquement multi-utilisateur. Ainsi, on pourrait imaginer, afin d'optimiser le modem, de considérer des récepteurs de type multi-utilisateur. Néanmoins, les contraintes économiques imposant un modem peu coûteux et donc simple, il paraît plus raisonnable d'écarter d'emblée ce type de solution. Enfin, étant donné la largeur très fine de l'impulsion, les trajets seront assez facilement séparables au niveau du signal reçu. C'est pourquoi, il apparaît pertinent de mettre en œuvre un récepteur mono-utilisateur et se synchronisant sur les différents trajets. De ce fait, le récepteur rake est un bon candidat [7].

Étant donné l'équation (1.10), on obtient que le signal de l'utilisateur  $n$  au niveau du récepteur s'écrira de la manière suivante

$$r_n(t) = \sum_{k=1}^{N_p} A_n^k s_n(t - \tau_n^k). \quad (1.20)$$

Comme  $N_u$  utilisateurs sont présents dans le réseau, le signal à l'entrée du récepteur a pour expression :

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N_u} r_n(t) + n(t), \quad (1.21)$$

avec  $n(t)$  un bruit additif blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $N_0/2$ .

Dans la suite, nous allons considérer que l'utilisateur d'intérêt, c.-à-d., celui dont on souhaite retrouver l'information, est l'utilisateur 1. Nous supposons également que le récepteur rake a la connaissance du canal  $(\{A_1^k, \tau_1^k\}_{k=1}^{N_p})$  et de la désynchronisation  $(\theta_1)$  associés à l'utilisateur d'intérêt 1. Nous supposons enfin que l'étape de synchronisation est parfaitement réalisée ce qui nous permet de poser  $\theta_1 = 0$ . Sans perte de généralité, nous examinerons la démodulation associée au premier symbole émis par l'utilisateur d'intérêt  $d_1(0)$ .

Le principe général du récepteur rake est présenté à la figure 1.8. Le récepteur réalise la somme de  $L_r$  corrélations : la corrélation indexée par  $\ell_i$  (avec  $i \in \{1, \dots, L_r\}$ ) correspond à celle entre la forme du signal émis synchronisé sur le  $\ell_i^{\text{ème}}$  trajet associé au couple  $\{A_1^{\ell_i}, \tau_1^{\ell_i}\}$  et le signal reçu. Une fois cette opération de corrélation effectuée, on combine les différentes voies selon le principe de la maximisation du rapport signal à bruit (en anglais, *Maximum Ratio Combining* (MRC)) ce qui produit le signal  $z$ . Une décision dure est prise sur  $z$  pour déterminer le symbole  $d_1(0)$ .

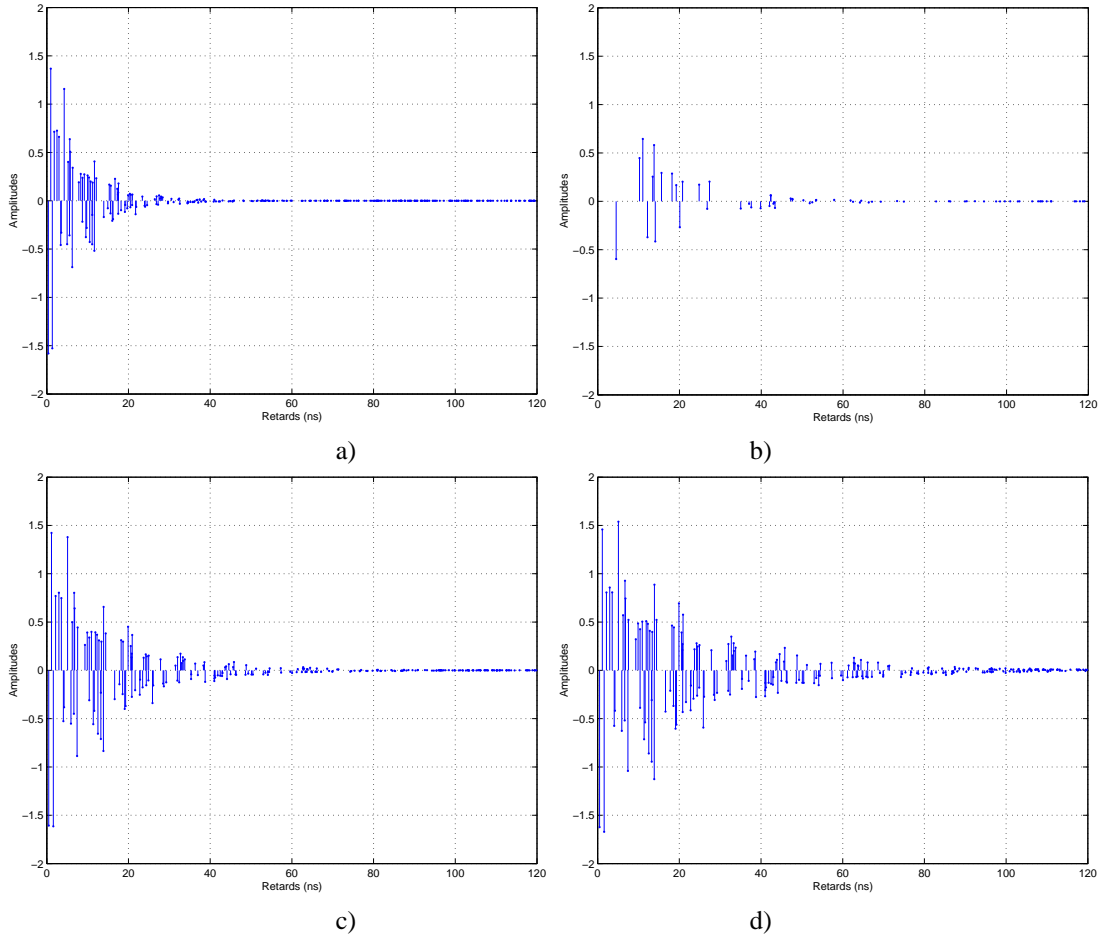


Figure 1.7 – Réalisation de la réponse impulsionnelle du canal. a) CM1. b) CM2. c) CM3. d) CM4.

Le signal  $v_1(t)$  généré au niveau du récepteur en vue d'effectuer la corrélation avec le signal reçu prend la forme suivante et s'appellera dans la suite signal de référence

$$v_1(t) := \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j) \cdot v(t - jT_c), \quad (1.22)$$

avec  $v(t) = w(t) - w(t - \delta)$  si une modulation PPM est utilisée et avec  $v(t) = w(t)$  si une modulation PAM est utilisée. La suite  $\{c_1(j)\}_{j=0}^{N_c N_f - 1}$  correspond au code développé associé à l'utilisateur d'intérêt 1.

Il convient maintenant d'aborder le problème de la sélection des trajets : dans la suite, nous noterons par  $\mathcal{L}$  l'ensemble des trajets sur lesquels le récepteur rake effectuera une corrélation. Le cardinal de cet ensemble sera évidemment noté  $L_r$ . On peut d'abord considérer le récepteur rake dit **complet** (en anglais, *Full Rake* (FRake)) pour lequel  $\mathcal{L} = \{1, \dots, N_p\}$ . Ce récepteur prend en compte tous les trajets créés par le canal de propagation. Malheureusement, étant donné les canaux rencontrés en UWB (cf. section 1.3), il apparaît que ce nombre de trajets est énorme et qu'un récepteur rake complet sera alors bien trop compliqué. C'est pourquoi, nous allons considérer maintenant des récepteurs rake n'agissant que sur un sous-ensemble de trajets [27]. Lorsque  $\mathcal{L} = \{1, \dots, L_r\}$  avec  $L_r < N_p$ , le récepteur rake sera dit **partiel** (en anglais, *Partial Rake* (PRake)). Ce récepteur rake partiel agit en fait sur les  $L_r$  premiers trajets. Ce choix n'est pas toujours judicieux si les premiers trajets ne sont pas les plus puissants. Ainsi pour résoudre ce défaut, on peut concevoir le récepteur rake dit **sélectif** (en anglais, *Selective Rake* (SRake)) qui se synchronise sur les  $L_r$  plus puissants trajets.

Le signal  $z$ , sur lequel la décision associée au symbole  $d_1(0)$  sera prise, s'écrit donc de la manière suivante,

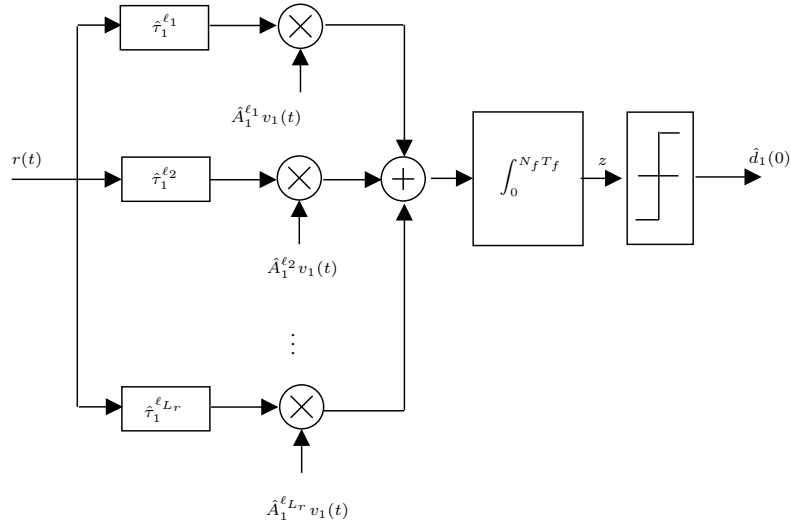


Figure 1.8 – Schéma du récepteur rake.

quelque soit le type de récepteur rake employé,

$$z = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_1^\ell \times \int_0^{N_f T_f} r(t + \tau_1^\ell) \cdot v_1(t) dt. \quad (1.23)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons obtenir de nouvelles expressions analytiques simples pour le terme  $z$  dans le contexte TH-UWB. Les simplifications seront obtenues grâce à l'utilisation de la notion de codes développés et grâce au fait que l'impulsion est ultra-courte et donc ne remplit pas le chip. Les calculs conduisant à la simplification de l'expression (1.23) de  $z$  seront menés dans le contexte d'une modulation PPM. Les expressions valables pour le contexte d'une modulation PAM seront fournies en fin de chapitre mais sans démonstration. Il faut également noter que ces simplifications vont nous servir tout au long de la thèse, aussi bien pour le calcul de la variance de l'interférence multi-utilisateur, que pour le calcul de la variance de l'interférence entre symboles, et que pour le calcul de la borne de Cramer-Rao des paramètres du canal.

### Expression analytique simplifiée de la sortie du récepteur rake : cas de la modulation PPM

En remplaçant  $v_1(t)$  par son expression (1.22),  $r(t)$  par (1.21),  $r_n(t)$  par (1.20) et  $s_n(t)$  par (1.6), on obtient que

$$z = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_1^\ell \sum_{n=1}^{N_u} \sqrt{\alpha_n} \sum_{k=1}^{N_p} A_n^k \cdot y_{k,\ell,n}(\theta_n) + \eta, \quad (1.24)$$

où

$$y_{k,\ell,n}(\theta_n) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j,j_1=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) c_1(j_1) r_{vw}(\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} + i N_f T_f + (j - j_1) T_c - \delta d_n(i)). \quad (1.25)$$

avec

$$\Delta\tau_{k,\ell,n} := \tau_n^k - \tau_1^\ell, \quad (1.26)$$

$$r_{vw}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) w(t - s) dt, \quad (1.27)$$

et où  $\eta$  est la version filtrée, c.-à-d. après passage dans le récepteur rake, du bruit  $n(t)$ . Ce terme  $\eta$  ainsi que sa variance sont calculés en annexe A.3.

La quantité  $y_{k,\ell,n}(\theta_n)$  correspond à l'intercorrélation entre le signal reçu associé au  $k^{\text{ème}}$  trajet de l'utilisateur  $n$  et le signal de référence associé au  $\ell^{\text{ème}}$  trajet de l'utilisateur d'intérêt.

Du fait de la structure du signal TH-UWB, seulement une faible partie de la durée allouée pour un symbole est occupée et ceci va nous permettre d'annuler de nombreux termes composant les sommes de l'équation (1.25). Grâce à la propriété 3 suivante dont la démonstration est donnée en annexe A.4, nous allons identifier les termes non nuls intervenant dans les sommes de (1.25).

**Propriété 3** Si une modulation **PPM** est employée et comme le support de  $s \mapsto r_{vw}(s)$  est inférieur à  $T_c$ , on a

$$y_{k,\ell,n}(\theta_n) = \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell}) r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1)) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell} + 1) r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1)) \\ + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell}) r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell})) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell} + 1) r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell})),$$

où

$$\mathcal{C}_{m,n}^-(q) = \sum_{k=0}^{q-1} c_m(k) c_n(k-q), \quad (1.28)$$

$$\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = \sum_{k=q}^{N_c N_f - 1} c_m(k) c_n(k-q). \quad (1.29)$$

et où  $\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n}$  se décompose de la manière suivante

$$\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} = Q_n^{k,\ell} N_f T_f + q_n^{k,\ell} T_c + \varepsilon_n^{k,\ell},$$

avec  $Q_n^{k,\ell} = \lfloor (\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n}) / N_f T_f \rfloor$ ,  $q_n^{k,\ell} = \lfloor (\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} - Q_n^{k,\ell} N_f T_f) / T_c \rfloor$ , et  $\varepsilon_n^{k,\ell} \in [0, T_c[$  le reste de la division euclidienne.

Les termes définis par (1.28) et par (1.29) s'interprètent comme étant les intercorrélations cycliques partielles entre le code développé de l'utilisateur  $m$  et celui de l'utilisateur  $n$ . Ces termes fournissent en fait le nombre de collisions entre les impulsions des utilisateurs  $m$  et  $n$  lorsque ces utilisateurs admettent un décalage temporel de  $q$  chips. Sur la figure 1.9, nous donnons une illustration graphique et numérique de ces termes de collisions. On considère un système TH-UWB avec  $N_c = 4$  et  $N_f = 3$  et composé de deux utilisateurs  $m$  et  $n$  admettant pour codes  $\tilde{c}_m = \{0; 1; 3\}$  et  $\tilde{c}_n = \{2; 1; 3\}$ . Les codes développés associés sont donc  $c_m = \{1; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1\}$  et  $c_n = \{0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1\}$ . On considère que les deux utilisateurs sont désynchronisés de 3 chips, d'où  $q = 3$ . Le terme  $\mathcal{C}_{m,n}^-(3)$  vaut 0 et le terme  $\mathcal{C}_{m,n}^+(3)$  vaut 1.

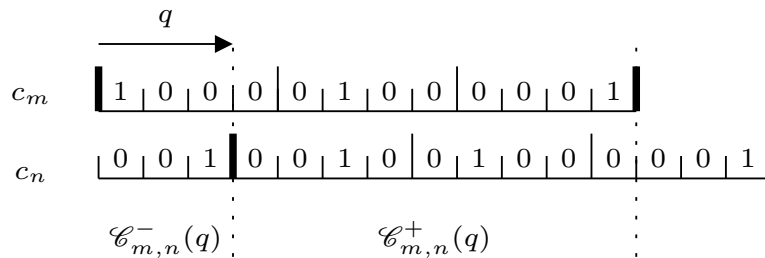


Figure 1.9 – Représentation graphique des termes de collisions.

Il faut noter que, dans la suite de la thèse, les termes  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  vont jouer un rôle primordial.

### Expression analytique simplifiée de la sortie du récepteur rake : cas de la modulation PAM

Dans ce paragraphe, nous établissons rapidement l'expression du terme  $y_{k,\ell,n}(\theta_n)$  lorsque la modulation PAM est utilisée. Dans l'expression (1.24) donnant  $z$ , le terme  $y_{k,\ell,n}(\theta_n)$  ne s'écrit plus sous la forme (1.25) mais sous la forme suivante

$$y_{k,\ell,n}(\theta_n) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j,j_1=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) c_1(j_1) d_n(i) r_{ww}(\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} + iN_f T_f + (j - j_1)T_c), \quad (1.30)$$

avec

$$r_{ww}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)w(t-s)dt. \quad (1.31)$$

Dans la propriété suivante démontrée en annexe A.5, nous écrivons l'expression (1.30) sous une forme réduite et similaire à celle présentée à la propriété 3 dans le contexte de la modulation PPM.

**Propriété 4** Si la modulation **PAM** est employée et comme le support de  $s \mapsto r_{ww}(s)$  est inférieur à  $T_c$ , on a

$$\begin{aligned} y_{k,\ell,n}(\theta_n) &= d_n(-Q_n^{k,\ell}) \left[ \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell}) r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell} + 1) r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right] \\ &+ d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1) \left[ \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell}) r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell} + 1) r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Comme le modèle mathématique des différents boîtiers composant la chaîne de transmission est décrit, nous sommes en mesure maintenant de présenter, sous une formulation mathématique, les objectifs de la thèse.

## 1.5 Objectifs de la thèse

Il convient de remarquer que le signal  $z$ , sur lequel la décision va être prise, se décompose de la manière suivante

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + \eta, \quad (1.33)$$

avec

$$z_1 = \sqrt{\alpha_1} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (A_1^\ell)^2 \cdot y_{\ell,\ell,1}(0), \quad (1.34)$$

$$z_2 = \sqrt{\alpha_1} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_1^\ell \sum_{k \neq \ell=1}^{N_p} A_1^k \cdot y_{k,\ell,1}(0), \quad (1.35)$$

$$z_3 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_1^\ell \sum_{n=2}^{N_u} \sqrt{\alpha_n} \sum_{k=1}^{N_p} A_n^k \cdot y_{k,\ell,n}(\theta_n). \quad (1.36)$$

Les termes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  s'interprètent ainsi :

- $z_1$  représente l'énergie capturée pour l'utilisateur d'intérêt et donc le signal utile ;
- $z_2$  représente **l'interférence entre-symboles et l'interférence entre-frames** (en anglais, *Inter-Symbol Interference / Inter-Frame Interference (ISI / IFI)*) de l'utilisateur d'intérêt ; ce signal perturbera la prise de décision et est donc nuisible.
- $z_3$  représente **l'interférence multi-utilisateur** (en anglais, *Multi-User Interference (MUI)*) ; ce signal perturbera également la prise de décision et est donc nuisible.

Dans la suite de la thèse, nous souhaitons évaluer de manière analytique la puissance des termes nuisibles en fonction des paramètres du système (codes et paramètres statistiques du canal). Ceci va nous permettre notamment d'établir les contraintes que doivent vérifier les codes afin de minimiser soit la puissance de l'interférence multi-utilisateur, soit la puissance de l'interférence entre symboles.

Ainsi au chapitre 2, nous obtenons une expression analytique du terme suivant qui représente la puissance de l'interférence multi-utilisateur

$$V_{\text{MUI}} = \mathbb{E}[(z_3)^2]$$

où l'espérance mathématique correspond à un moyennage sur les symboles, l'asynchronisme, les atténuations et retards du canal.

Au chapitre 3, nous exprimons analytiquement le terme associé à la puissance de l'interférence entre symboles et entre trames

$$V_{\text{ISI}} = \mathbb{E}[(z_2)^2].$$

Au chapitre 4, nous montrons que les calculs effectués au chapitre 2 peuvent être étendus à d'autres systèmes utilisant des techniques d'accès multiple par répartition de codes.

Enfin au chapitre 5, nous abordons succinctement le problème de l'estimation de paramètres du canal de l'utilisateur d'intérêt 1 notés  $\{A_1^k, \tau_1^k\}_{k=1}^{N_p}$ . Jusque-là, ces paramètres avaient été supposés parfaitement connus par le récepteur. Nous évaluons en fait analytiquement la borne de Cramer-Rao associée à ce problème d'estimation.





## Chapitre 2

# Étude de l'interférence multi-utilisateur

### 2.1 Introduction

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'une transmission TH-UWB asynchrone à accès multiple à répartition par codes de saut temporel, associée à un démodulateur rake et décrite au chapitre 1. En configuration asynchrone, on sait que l'interférence multi-utilisateur ne peut être annulée contrairement au cas synchrone utilisant des codes orthogonaux. Toutefois, il est possible de jouer sur la valeur des codes utilisateur en sélectionnant ceux qui donnent les meilleures performances. C'est ce que nous nous proposons de traiter dans ce chapitre.

La littérature sur les systèmes TH-UWB traitant de l'interférence multi-utilisateur se décompose en trois catégories.

La première comprend les travaux étudiant les performances du système en faisant l'approximation gaussienne de la MUI, plus des hypothèses et des approximations qui ont pour effet d'éliminer la contribution des codes dans l'expression de la variance de l'interférence (cf. détails à la section 2.4). Il en résulte que cette approche ne permet pas l'optimisation des codes pour minimiser la variance de la MUI. Le premier à avoir formalisé le calcul est Scholtz dans [4] en supposant un canal gaussien. Il étudie alors la capacité du système en terme de nombre maximum d'utilisateurs possibles pour une probabilité d'erreur donnée. Les résultats sont impressionnants puisqu'il prédit plusieurs dizaines de milliers d'utilisateurs (p. ex. 14000 utilisateurs pour une probabilité d'erreur de  $10^{-5}$  et un rapport signal à bruit de 26 dB). Depuis cet article, de nombreux travaux ont été publiés en utilisant la même philosophie. L'extension au cas trajets multiples est abordée de manière formelle dans [13] avec les mêmes hypothèses que dans [4], et par simulations dans [28].

La seconde concerne les travaux étudiant des THC spécifiques, déduits de schémas déjà existants pour d'autres techniques d'accès multiple et plus particulièrement du saut de fréquence (en anglais, *Frequency Hopping* (FH)). On trouve dans la thèse d'Erseghe [29] une bonne synthèse sur les différents codes. Dans [30], les codes considérés sont construits à partir de séquences de permutations (en anglais, *permutation sequences*) issues de [31]. Dans [32], les auteurs considèrent différentes classes de codes congruents (linéaires, quadratiques, cubiques). Très récemment, Chu et Colbourn ont proposé des constructions de codes originales dans [33] dédiées au TH-UWB pour des valeurs particulières de  $N_c$  et  $N_f$ . Ces constructions sont basées sur la similitude des codes optiques orthogonaux avec les THC *développés* (cf. section 1.2.2) à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Il est important de noter que ces papiers basent leurs travaux sur l'utilisation d'un critère de corrélation minimum entre les séquences de codes et ne font référence à aucun modèle de propagation ou une structure de récepteur.

La troisième catégorie traite de la validité de l'hypothèse gaussienne de la variance de la MUI. Le premier papier à soulever le problème est [34] qui montre que l'hypothèse gaussienne induit une surestimation des performances du système et en déduit qu'elle n'est pas représentative de la densité de la MUI. Cette idée fut confirmée dans [35] par simulations. Ces résultats furent ensuite étendus en cherchant à évaluer la densité de probabilité de la MUI, sous forme approchée dans [36, 37], ou par des méthodes de calcul numérique dans [38–40]. On peut noter que ces travaux utilisent les hypothèses de Scholtz [4].

L'objet de ce chapitre est de déterminer un critère permettant de choisir des THC pour lesquels la variance de la MUI est minimale. L'approche utilisée ici consiste à étendre les travaux de Scholtz précédemment cités en considérant les codes déterministes ainsi qu'un asynchronisme sur l'horizon  $[0, N_f T_f[$  (hypothèse discutée à la section 2.4) puis en calculant l'expression exacte de la variance de la MUI moyennée sur les différents paramètres aléatoires du modèle. Nous nous plaçons d'emblée dans le cas d'un canal à trajets multiples comme décrit au chapitre 1. Ce calcul est *a priori* original. Le calcul exact de la variance de la MUI est rendu possible via l'utilisation des codes développés (cf. section 1.2.2) qui fait ainsi apparaître explicitement la contribution des THC indépendamment des paramètres du signal, du canal et du récepteur rake.

Minimiser la variance de la MUI ne garantit pas que la probabilité d'erreur soit strictement minimisée compte-tenu du fait que l'hypothèse gaussienne de l'interférence n'est pas vérifiée. Toutefois, chercher à minimiser la variance ne semble pas dénué de sens et cette approche se trouve confortée par les résultats des simulations sur le gain obtenu en terme de probabilité d'erreur moyenne.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. À la section 2.2 nous calculons l'expression formelle de la variance de la MUI pour la PPM et la PAM. Dans la section 2.3 nous étudions quelques propriétés des codes et déduisons un critère permettant de déterminer les codes qui minimisent la variance de la MUI. À la section 2.5 nous abordons le problème du nombre de codes minimisant la variance de la MUI. Enfin, à la section 2.6, nous illustrons par simulations l'effet de l'optimisation des codes sur les performances en terme de probabilité d'erreur moyenne.

## 2.2 Calcul de la variance de l'interférence multi-utilisateur

Nous présentons les différentes étapes du calcul de la variance de la MUI dans le cas de la PPM puis de la PAM. Les variables aléatoires du modèle de signal étant indépendantes, l'ordre dans lequel on calcule les espérances n'a pas d'importance sur le résultat final. Toutefois, pour des raisons de calcul, il s'avère plus commode de les calculer dans l'ordre suivant :  $a_n^k, d_n, \theta_n$  et  $\tau_n^k$ .

### 2.2.1 Cas de la PPM

On se propose de calculer ici l'expression formelle de

$$V_{\text{MUI}}^{\text{PPM}} := \mathbb{E}_{a,d,\theta,\tau} [(z_3^{\text{PPM}})^2].$$

Les amplitudes du canal de propagation étant supposées indépendantes et de moyenne nulle, d'après (1.28) et (1.36), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a [(z_3^{\text{PPM}})^2] &= \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_n^k I_1^\ell \left[ \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_n^{k,\ell}) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell}}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}-1} + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell}) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell}}^{-Q_n^{k,\ell}, -Q_n^{k,\ell}} \right. \\ &+ \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}-1} + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}, -Q_n^{k,\ell}} \\ &+ 2\mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell}) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell}}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}} + 2\mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}-1} \\ &+ 2\mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}} + 2\mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}, -Q_n^{k,\ell}-1} \\ &\left. + 2\mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}, -Q_n^{k,\ell}} + 2\mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}-1} \right], \end{aligned}$$

avec  $\rho_{i_1, i_2}^{p_1, p_2} := r_{vw}(i_1 + \delta d_n(p_1)) \cdot r_{vw}(i_2 + \delta d_n(p_2))$ , et  $I_n^k$  qui est défini par (1.12). Puisque par définition le support de  $r_{vw}(\cdot)$  et  $\delta$  sont très inférieurs à  $T_c$ , on a

$$\rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{p_1, p_2} = r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(p_1)) \cdot r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(p_2)) = 0, \quad \forall p_1, p_2,$$

de sorte que (2.1) devient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_a [(z_3^{\text{PPM}})^2] &= \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_n^k I_1^\ell \left[ \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_n^{k,\ell}) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell}}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}-1} + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell}) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell}}^{-Q_n^{k,\ell}, -Q_n^{k,\ell}} \right. \\
&+ \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}-1} + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}, -Q_n^{k,\ell}} \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell}) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell}, \varepsilon_n^{k,\ell}}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}} \\
&\left. + 2\mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell} + 1) \rho_{\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c, \varepsilon_n^{k,\ell} - T_c}^{-Q_n^{k,\ell}-1, -Q_n^{k,\ell}} \right]. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Dans (2.1), les termes dépendant des symboles sont les variables  $\rho_{i,j}^{k,\ell}$ . Ainsi, le calcul de l'espérance de (2.1) sur les symboles, nécessite l'évaluation des termes suivants :

$$\mathbb{E}_d [\rho_{j,j}^{i,i}] = \mathbb{E}_d [\rho_{j,j}^{i-1,i-1}] = \frac{1}{2} [r_{vw}^2(j) + r_{vw}^2(j + \delta)],$$

et

$$\mathbb{E}_d [\rho_{j,j}^{i,i-1}] = \frac{1}{4} [r_{vw}(j) + r_{vw}(j + \delta)]^2,$$

qui conduit alors à l'expression

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,d} [(z_3^{\text{PPM}})^2] &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_n^k I_1^\ell \left[ [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_n^{k,\ell})] [r_{vw}^2(\varepsilon_n^{k,\ell}) + r_{vw}^2(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta)] \right. \\
&+ [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q_n^{k,\ell} + 1)] [r_{vw}^2(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta)] \\
&+ \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell}) [r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta)]^2 \\
&\left. + \mathcal{C}_{1,n}^{+}(q_n^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,n}^{-}(q_n^{k,\ell} + 1) [r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta - T_c)]^2 \right]. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

L'asynchronisme  $\theta_n$  étant équirépartie sur un segment de durée  $N_f T_f$ , l'espérance de (2.2) dans la loi de  $\theta_n$  s'obtient en calculant

$$\mathbb{E}_{a,d,\theta} [(z_3^{\text{PPM}})^2] = \frac{1}{N_f T_f} \int_{N_f T_f} \mathbb{E}_{a,d} [(z_3^{\text{PPM}})^2] d\theta_n. \tag{2.3}$$

On rappelle que d'après la définition (A.4), les variables  $q_n^{k,\ell}$  et  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  dépendent implicitement de  $\theta_n$ . De plus, à  $\Delta\tau_{k,\ell,n}$  fixé, elles sont périodiques en  $\theta_n$ , de période respectivement  $T_c$  et  $N_c N_f$ . Il en résulte que (2.2) est périodique en  $\theta_n$  de période  $N_f T_f$ . Cette propriété nous permet de considérer le calcul de l'intégrale (2.3) sur le domaine d'intégration particulier  $\mathcal{D} := [-\Delta\tau_{k,\ell,n}, -\Delta\tau_{k,\ell,n} + N_f T_f[$ , ce qui va faciliter le calcul. Lorsque  $\theta_n$  varie dans cet intervalle,  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  se décompose en  $N_c N_f$  segments de droites de support  $[jT_c, (j+1)T_c[$ ,  $j = 0, \dots, N_c N_f - 1$ , de pente unité et d'équation  $(\theta_n - jT_c) \times \mathbb{1}_{[jT_c, (j+1)T_c[}$ . De plus, sur chaque intervalle de durée  $T_c$ , la valeur de  $q_n^{k,\ell}$  est constante et vaut  $q_n^{k,\ell} = j$ . Ainsi, (2.3) peut s'écrire comme la somme des intégrales sur les différents segments.

Considérons par exemple le terme particulier

$$\mathcal{I} := \int_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q_n^{k,\ell}) r_{vw}^2(\varepsilon_n^{k,\ell}) d\theta_n,$$

qui d'après les remarques précédentes s'écrit alors

$$\mathcal{I} = \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(j) \int_{jT_c}^{(j+1)T_c} r_{vw}^2(\theta_n - jT_c) d\theta_n,$$

qui après un changement de variable se réduit à

$$\mathcal{I} = \int_0^{T_c} r_{vw}^2(u) du \cdot \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(j).$$

Il est intéressant de noter que le résultat ne dépend plus de  $k$  ni de  $\ell$ .

Le même raisonnement appliqué au calcul de (2.3), conduit à l'expression

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d,\theta} [(z_3^{\text{PPM}})^2] &= \frac{1}{2N_f T_f} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_n^k I_1^\ell \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \int_0^{T_c} \left[ [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)] [r_{vw}^2(u) + r_{vw}^2(u + \delta)] \right. \\ &+ [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)] [r_{vw}^2(u - T_c) + r_{vw}^2(u - T_c + \delta)] \\ &+ \mathcal{C}_{1,n}^+(q) \mathcal{C}_{1,n}^-(q) [r_{vw}(u) + r_{vw}(u + \delta)]^2 \\ &+ \left. \mathcal{C}_{1,n}^+(q+1) \mathcal{C}_{1,n}^-(q+1) [r_{vw}(u - T_c) + r_{vw}(u + \delta - T_c)]^2 \right] du. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les DTHC étant périodiques de période  $N_c N_f$ , on montre simplement que

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)] &= \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)], \\ \text{et} \quad \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,n}^+(q+1) \mathcal{C}_{1,n}^-(q+1) &= \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,n}^+(q) \mathcal{C}_{1,n}^-(q), \end{aligned}$$

de sorte que (2.4) se simplifie sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d,\theta} [(z_3^{\text{PPM}})^2] &= \frac{1}{N_f T_f} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_1^\ell \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} I_n^k \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \left[ [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)] \cdot \gamma_{vw}(0) \right. \\ &+ \left. \mathcal{C}_{1,n}^+(q) \mathcal{C}_{1,n}^-(q) \cdot [\gamma_{vw}(0) + \gamma_{vw}(\delta)] \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec

$$\gamma_{vw}(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} r_{vw}(u-s) r_{vw}(u) du. \quad (2.6)$$

Nous terminons le calcul de la variance de la MUI en prenant l'espérance de (2.5) sur les retards  $\tau_n^k$ , dont seuls  $I_n^k$  et  $I_1^\ell$  dépendent. Il vient alors

$$V_{\text{MUI}}^{\text{PPM}} = \Psi_1 \frac{\gamma_{vw}(0)}{N_f T_f} \cdot \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \cdot \phi_n \cdot [\kappa_{1,n} + \bar{\gamma} \cdot \xi_{1,n}], \quad (2.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Psi_n &:= \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{E}_\tau [I_n^\ell], \\ \phi_n &:= \sum_{k=1}^{N_p} \mathbb{E}_\tau [I_n^k], \\ \kappa_{m,n} &:= \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{m,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{m,n}^{-2}(q)], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\xi_{m,n} := \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{m,n}^+(q) \mathcal{C}_{m,n}^-(q), \quad (2.9)$$

$$\bar{\gamma} := \frac{\gamma_{vw}(0) + \gamma_{vw}(\delta)}{\gamma_{vw}(0)}.$$

## 2.2.2 Cas de la PAM

Le calcul de la variance de la MUI pour la PAM,  $V_{\text{MUI}}^{\text{PAM}} := \mathbb{E}_{a,d,\theta,\tau} [(z_3^{\text{PAM}})^2]$ , se conduit suivant le même principe que pour la PPM, avec quelques simplifications compte tenu du caractère linéaire de la modulation PAM. D'après l'expression (1.32), l'espérance sur les amplitudes et les symboles se calcule simplement sous la forme

$$\mathbb{E}_{a,d} [(z_3^{\text{PAM}})^2] = \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_n^k I_1^\ell \left[ [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)] \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_n^{k,\ell}) + [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1)] \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right].$$

En utilisant les mêmes développements que pour la PPM (cf. section 2.2.1), on obtient

$$\mathbb{E}_{a,d,\theta} [(z_3^{\text{PAM}})^2] = \frac{1}{N_f T_f} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_n^k I_1^\ell \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)] \cdot \gamma_{ww}(0),$$

avec :

$$\gamma_{ww}(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} r_{ww}(u) r_{ww}(u-s) du. \quad (2.10)$$

Finalement, l'espérance sur les retards conduit au résultat final

$$V_{\text{MUI}}^{\text{PAM}} = \Psi_1 \frac{\gamma_{ww}(0)}{N_f T_f} \cdot \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \cdot \phi_n \cdot \kappa_{1,n}. \quad (2.11)$$

## 2.3 Critère de sélection des codes minimisant la MUI

Les expressions des variances de la MUI pour la PPM (2.7) et la PAM (2.11) montrent clairement la contribution des codes ( $\kappa_{1,n}$ ,  $\xi_{1,n}$  pour la PPM et  $\kappa_{1,n}$  pour la PAM), de la forme de l'impulsion ( $\bar{\gamma}$ ,  $\gamma_{vw}(0)$ , pour la PPM et  $\gamma_{ww}(0)$  pour la PAM), de l'énergie du signal transmis  $\alpha_n$  et de la statistique du canal  $\Psi_1$  et  $\phi_n$ . Ceci laisse donc entrevoir un moyen possible de minimiser la variance de la MUI en jouant sur une sélection judicieuse des codes. L'objet de cette section est de montrer que l'on peut établir un critère (différent pour la PPM et pour la PAM) qui, lorsqu'il est vérifié par les codes  $\{c_i(k)\}_{i=1}^{N_u}$  assure une variance de la MUI minimale.

On commence par résoudre le cas de la PPM. Le problème de la PPM est plus complexe que celui de la PAM puisque le critère fait intervenir à la fois le terme  $\kappa_{1,n}$  et  $\xi_{1,n}$ . Remarquons tout d'abord que tous les termes sous la somme dans (2.7) sont positifs. Ceci est vrai pour  $\alpha_n$  par définition, pour  $\phi_n$  puisqu'il s'agit d'une variance et enfin pour  $\bar{\gamma}$  par construction étant donné que  $\gamma_{vw}(\cdot)$  est une fonction d'autocorrélation. Les éléments des codes développés étant à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , les collisions  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  sont des valeurs positives. Ceci implique, compte tenu des expressions (2.8) et (2.9),  $\kappa_{1,n} \geq 0$  et  $\xi_{1,n} \geq 0$ . Ainsi, la minimisation de (2.7) revient à minimiser conjointement l'ensemble des valeurs ( $\kappa_{1,n} + \bar{\gamma} \cdot \xi_{1,n}$ ),  $n = 2, \dots, N_u$ . Pour les mêmes raisons, le problème pour la PAM revient quant à lui à chercher l'ensemble des codes minimisant conjointement l'ensemble des valeurs  $\kappa_{1,n}$ ,  $n = 2, \dots, N_u$ .

Nous commençons par établir quelques propriétés des codes à la section 2.3.1 qui vont permettre d'aboutir aux critères à la section 2.3.2.

### 2.3.1 Notations et quelques propriétés des codes développés

Posons la définition suivante :

$$\mathcal{C}_{m,n}(q) := \mathcal{C}_{m,n}^+(q) + \mathcal{C}_{m,n}^-(q), \quad (2.12)$$

qui d'après (1.28) et (1.29) se met sous la forme

$$\mathcal{C}_{m,n}(q) = \sum_{k=0}^{N_c N_f - 1} c_m(k) c_n(k-q). \quad (2.13)$$

La quantité  $\mathcal{C}_{m,n}(q)$  s'interprète comme l'intercorrélation cyclique entre le code développé de l'utilisateur  $m$  et celui de l'utilisateur  $n$  pour un décalage  $q$  entre les deux codes. Elle s'interprète encore comme le nombre d'impulsions en collision (ou coïncidence) entre le signal  $v_n(t)$  (signal de référence généré par le récepteur) et  $s_m(t - \tau)$  (signal reçu sur l'antenne) dans l'intervalle  $[0, N_f T_f]$ , pour  $qT_c \leq \tau < (q+1)T_c$ .

Afin de calculer la quantité

$$S_{m,n} := \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{m,n}(q), \quad (2.14)$$

il convient de réexprimer (2.12) sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathcal{C}_{m,n}(q) = \mathbf{c}_m^T \mathbf{Z}_q \mathbf{c}_n,$$

où  $\mathbf{c}_i := [c_i(0), \dots, c_i(N_c N_f - 1)]^T$  est le vecteur de dimension  $(N_c N_f \times 1)$  composé des  $N_c N_f$  valeurs du code développé  $c_i(k)$ ,  $\mathbf{Z}_q$  est une matrice de permutation cyclique obtenue par  $q$  permutations vers la gauche des colonnes de la matrice identité  $\mathbf{I}$  de dimensions  $(N_c N_f \times N_c N_f)$ . La matrice  $\mathbf{Z}_q$  est une matrice de Toeplitz, de première colonne égale à  $\mathbf{e}_q$  et de première ligne égale à  $\mathbf{e}_{N_c N_f - q}$  où le vecteur  $\mathbf{e}_i$  est composé d'un 1 positionné au  $i$ -ème élément et de 0 ailleurs.

On peut alors établir la propriété suivante

**Propriété 5**  $S_{m,n} = N_f^2, \forall m, n$ .

*Preuve :* D'après (2.13) on réexprime  $S_{m,n}$  sous la forme  $S_{m,n} = \mathbf{c}_m^T \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathbf{Z}_q \mathbf{c}_n$ . En utilisant la relation  $\sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathbf{Z}_q = \mathbf{1} \mathbf{1}^T$  où  $\mathbf{1}$  est un vecteur dont tous les éléments valent 1, on a  $S_{m,n} = \mathbf{c}_m^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{c}_n$ . Puisque par construction les vecteurs  $\mathbf{c}_i$  ont  $N_f$  éléments non nuls et égaux à 1, on a  $\mathbf{c}_m^T \mathbf{1} = \mathbf{c}_n^T \mathbf{1} = N_f$ . Finalement, il vient  $S_{m,n} = N_f^2$ . ■

Il est intéressant de réexprimer la quantité  $S_{m,n}$  sous la forme d'un polynôme, par :  $S_{m,n} = \sum_{i=1}^{N_f} i \cdot \pi_i$ , où  $\pi_i \geq 0$  est le nombre de fois où  $\mathcal{C}_{m,n}(q) = i$  dans l'expression (2.14). On déduit de la propriété 5 que les variables  $\pi_i$  doivent vérifier

$$\sum_{i=1}^{N_f} i \cdot \pi_i = N_f^2. \quad (2.15)$$

Les coefficients  $\pi_i$  ainsi définis, on peut réexprimer simplement de la même manière la quantité

$$\chi_{m,n} := \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{m,n}^2(q) = \kappa_{m,n} + 2 \cdot \xi_{m,n} \quad (2.16)$$

sous la forme d'un polynôme

$$\chi_{m,n} = \sum_{i=1}^{N_f} i^2 \cdot \pi_i. \quad (2.17)$$

La relation (2.17) permet de borner la quantité  $\chi_{m,n}$ .

**Propriété 6**  $N_f^2 \leq \chi_{m,n} \leq N_f^3, \forall m, n$ .

*Preuve :* En utilisant (2.15) on déduit  $\pi_1 = N_f^2 - \sum_{i=2}^{N_f} i \cdot \pi_i$ . En remplaçant cette expression dans (2.17) on obtient  $\chi_{m,n} = N_f^2 + \sum_{i=2}^{N_f} (i^2 - i) \cdot \pi_i$ . Puisque  $(i^2 - i) > 0$  pour  $2 \leq i \leq N_f$ , on déduit que la valeur minimale de  $\chi_{m,n}$  est obtenue quand  $\{\pi_i = 0\}_{i=2}^{N_f}$  qui vaut alors  $N_f^2$  avec  $\pi_1 = N_f^2$ . Pour établir la borne supérieure, on montre que tout autre choix que  $\{\pi_i = 0\}_{i=1}^{N_f-1}$  et  $\pi_{N_f} = N_f$  pour lequel  $\chi_{m,n} = N_f^3$  donne lieu à une valeur inférieure. On pose  $\pi_{N_f} = N_f - k$ , ( $0 \leq k \leq N_f$ ) que l'on injecte dans (2.15), ce qui permet d'identifier le terme  $\pi_{N_f-1}$  sous la forme  $\pi_{N_f-1}(N_f - 1) = N_f^2 - (N_f - k)N_f - \sum_{i=1}^{N_f-2} i \cdot \pi_i$ . En remplaçant cette expression dans (2.17) on obtient alors  $\chi_{m,n} = N_f^3 - N_f k + \sum_{i=1}^{N_f-2} i(i - N_f + 1) \cdot \pi_i$ . Puisque  $\sum_{i=1}^{N_f-2} i(i - N_f + 1) \cdot \pi_i < 0$ , on déduit que  $\chi_{m,n} \leq N_f^3$ , la valeur maximale étant obtenue pour  $k = 0$ . ■

**Remarque 1** Les paires de codes vérifiant  $\chi_{m,n} = N_f^3$  sont obtenues pour une répartition des collisions particulière  $\{\pi_i = 0\}_{i=1}^{N_f-1}$  et  $\pi_{N_f} = N_f$ . Ils correspondent aux codes pour lesquels l'écart entre les impulsions est constant :  $\{\tilde{c}_n(j) = k, j = 0, \dots, N_f - 1\}$ ,  $k \in \{0, \dots, N_c - 1\}$  et sont donc au nombre de  $N_c$ . Ils constituent le pire cas d'un point de vue variance de la MUI, mais possèdent aussi de mauvaises propriétés spectrales (présence de raies). Ils sont donc à proscrire.

Nous avons établi à la propriété 6, que la valeur minimale de  $\chi_{m,n}$  est égale à  $N_f^2$ . Nous allons montrer que quand cette valeur est atteinte, les quantités  $\xi_m$  et  $\kappa_m$  atteignent leurs valeurs minimales simultanément (cf. lemme 1).

**Propriété 7**  $\chi_{m,n} = N_f^2 \Rightarrow \mathcal{C}_{m,n}^+(q)\mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 0, \forall q$ .

*Preuve* : Nous savons par la propriété 6 que les codes vérifiant  $\chi_{m,n} = N_f^2$  correspondent au cas  $\{\pi_i = 0\}_{i=2}^{N_f}$  et  $\pi_1 = N_f^2$ . On déduit que les collisions ne peuvent être égales qu'à 0 ou 1, c.-à-d.  $\mathcal{C}_{m,n}(q) \in \{0, 1\}, \forall q$ . D'après (2.12), on déduit par construction que lorsque  $\mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ ,  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  ne peuvent être égaux à 1 simultanément (quand un terme est égal à 1 l'autre vaut 0) de sorte que l'on a  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)\mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 0, \forall q$ . ■

**Propriété 8**  $\kappa_{m,n} \geq N_f^2$ .

*Preuve* : D'après la propriété 5 on a :  $\sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{m,n}^+(q) + \mathcal{C}_{m,n}^-(q)] = N_f^2$ . Puisque les collisions partielles  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  sont à valeurs entières positives ou nulles, d'après l'inégalité  $a^2 \geq a$  pour  $a \in \mathbb{N}$ , on a :  $\sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{m,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{m,n}^{-2}(q)] \geq N_f^2$ . ■

**Propriété 9**  $\min \xi_{m,n} = 0$ .

*Preuve* : Puisque les collisions partielles  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  sont à valeurs entières positives ou nulles, on a  $\xi_{m,n} \geq 0$ . La valeur minimale est obtenue, par exemple, quand  $\chi_{m,n} = N_f^2$  (cf. propriété 7). ■

**Lemme 1**  $\chi_{m,n} = N_f^2 \Leftrightarrow \xi_{m,n}$  est minimum ( $\xi_{m,n} = 0$ ) et  $\kappa_{m,n}$  est minimum ( $\kappa_{m,n} = N_f^2$ ).

*Preuve* : D'après (2.8), (2.9) et (2.16) nous pouvons réexprimer  $\chi_{m,n}$  sous la forme  $\chi_{m,n} = \kappa_{m,n} + 2 \cdot \xi_{m,n}$ .  $\chi_{m,n} = N_f^2$  implique  $\xi_{m,n} = 0$  d'après la propriété 7, et donc  $\kappa_{m,n} = N_f^2$ . D'après les propriétés 8 et 9, ces valeurs constituent respectivement les valeurs minimales de  $\xi_{m,n}$  et  $\kappa_{m,n}$ . La réciproque est triviale. ■

### 2.3.2 Critère de sélection des paires de codes optimales

Les propriétés et le lemme établis dans la section précédente nous permettent maintenant d'énoncer un théorème qui caractérise les codes de saut temporel optimaux qui minimisent la variance de la MUI, dans le cas de la PPM (2.7) et dans le cas de la PAM (2.11).

**Théorème 1** Soit un système de communication TH-UWB asynchrone constitué de  $N_u$  utilisateurs (numérotés de 1 à  $N_u$ ), utilisant chacun un THC différent. On suppose que ce système opère dans un environnement à trajets multiples (décrit au chapitre 1) et que l'on démodule l'utilisateur 1 par un récepteur rake de type MRC, appliqué à une restriction du nombre total de trajets. Alors la variance de la MUI à la sortie du récepteur, causée par les utilisateurs 2, 3,  $\dots$ ,  $N_u$  est minimale si et seulement si l'ensemble des paires de codes  $\{(c_1, c_n), n = 2, \dots, N_u\}$  vérifient la condition

$$\text{pour la PPM} \quad \chi_{1,n} := \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,n}^2(q) = N_f^2, \quad (2.18)$$

$$\text{pour la PAM} \quad \kappa_{1,n} := \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)] = N_f^2, \quad (2.19)$$

où  $\{\mathcal{C}_{1,n}^-(q)\}_{q=0}^{N_c N_f - 1}$ ,  $\{\mathcal{C}_{1,n}^+(q)\}_{q=0}^{N_c N_f - 1}$  et  $\{\mathcal{C}_{1,n}(q)\}_{q=0}^{N_c N_f - 1}$  sont des ensembles d'intercorrélation cycliques entre le DTHC de l'utilisateur 1 et de l'utilisateur  $n$ , définis respectivement par (1.28), (1.29) et (2.12). Les paires de codes vérifiant l'un ou l'autre des critères sont appelées « paires optimales ».

*Preuve :* Pour la PPM, d'après (2.7), on doit établir un critère permettant d'assurer que les codes minimisent l'ensemble  $\{\kappa_{1,n} + \bar{\gamma} \cdot \xi_{1,n}\}$ , pour  $n = 2, \dots, N_u$ . Grâce à la relation d'équivalence établie au lemme 1, les paires de codes minimisent  $\kappa_{1,n} + \bar{\gamma} \cdot \xi_{1,n}$  si et seulement si  $\chi_{m,n}$  est minimum, c.-à-d.  $\chi_{m,n} = N_f^2$ . Compte tenu de la définition (2.16), on aboutit alors au critère recherché (2.18). Pour la PAM, on doit établir un critère permettant d'assurer que les codes minimisent l'ensemble  $\{\kappa_{1,n}\}$ , pour  $n = 2, \dots, N_u$ , d'où l'on déduit directement le critère (2.19). ■

Il est intéressant de remarquer que la minimisation des codes en PPM est indépendante de  $\bar{\gamma}$  et donc de la forme de l'impulsion utilisée. De même, les paires de codes optimales sont indépendantes des paramètres du canal et de la puissance d'émission des émetteurs.

Lorsque les codes sont optimaux, les variances de la MUI valent respectivement pour la PPM et la PAM

$$V_{\text{MUI}}^{\text{PPM}} = \Psi_1 \frac{\gamma_{vw}(0)}{T_f} N_f \Phi_1, \quad (2.20)$$

$$V_{\text{MUI}}^{\text{PAM}} = \Psi_1 \frac{\gamma_{ww}(0)}{T_f} N_f \Phi_1, \quad (2.21)$$

avec

$$\Phi_m := \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N_u} \alpha_n \cdot \phi_n, \quad (2.22)$$

d'où l'on en déduit que les valeurs des variances minimales ont la même expression à un facteur près, dépendant de la forme d'onde.

### 2.3.3 Caractérisation des ensembles de paires optimales

On étudie dans cette section la structure des ensembles de paires de codes vérifiant les critères d'optimalité (2.18) et (2.19). On peut déjà affirmer, d'après le lemme 1, que l'ensemble des paires optimales pour la PAM est potentiellement plus grand que celui de la PPM. En effet, l'ensemble des paires optimales de la PAM correspond à  $\kappa_{1,n} = N_f^2$  alors que celui de la PPM correspond aux paires vérifiant à la fois  $\kappa_{1,n} = N_f^2$  et  $\xi_{1,n} = 0$ . Ainsi, l'ensemble des paires optimales pour la PAM peut aussi contenir des paires vérifiant  $\xi_{1,n} > 0$  d'où l'on déduit que l'ensemble des paires optimales de la PPM est inclus dans celui de la PAM.

En caractérisant les ensembles plus finement, nous montrons que l'ensemble des paires optimales pour la PPM est strictement inclus dans celui de la PAM. Une des caractérisations retenue pour décrire ces ensembles est  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q)$  ce qui va permettre de nous comparer avec l'état de l'art des travaux sur la construction des THC à la sous-section 2.4.3. Toutefois nous montrons que cette caractérisation n'est pas suffisante et qu'il est nécessaire de prendre aussi en considération  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^-(q)$ .

Nous commençons par démontrer la propriété suivante

**Propriété 10**  $\chi_{m,n} = N_f^2 \Leftrightarrow \sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ .

*Preuve :* La preuve de l'implication se déduit de celle de la propriété 7, en effet,  $\chi_{m,n} = N_f^2 \Rightarrow \pi_1 \neq 0$  et  $\{\pi_i = 0\} \Leftrightarrow \sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ . Pour la réciproque, on utilise  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1 \Leftrightarrow \pi_1 \neq 0$  et  $\{\pi_i = 0\}_{i=2}^{N_f}$ , de sorte que d'après la contrainte (2.15) on en déduit  $\pi_1 = N_f^2$ . En reportant cette valeur dans (2.17), on en déduit alors le résultat recherché,  $\chi_{m,n} = N_f^2$ . ■

Cette propriété montre que le critère de minimisation de la variance de la MUI pour la PPM,  $\chi_{m,n} = N_f^2$ , est équivalent à la condition  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ . On en déduit aussi d'après le lemme 1, que les paires optimales pour la PPM le sont aussi pour la PAM.



De plus, on montre (cf. annexe B.2) qu'il existe potentiellement dans le cas de la PAM des paires optimales pour lesquelles  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$  et que ces paires doivent vérifier  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1$  et  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$ .

On peut résumer les différents résultats démontrés (cf. figure 2.1) par :

1. L'ensemble des paires optimales pour la PPM est caractérisé de manière équivalente par la relation  $\chi_{m,n} = N_f^2$  ou  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ .
2. L'ensemble des paires optimales pour la PAM est constitué de l'union de l'ensemble des paires optimales pour la PPM et de l'ensemble caractérisé par  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$  avec  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1$  et  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$ .

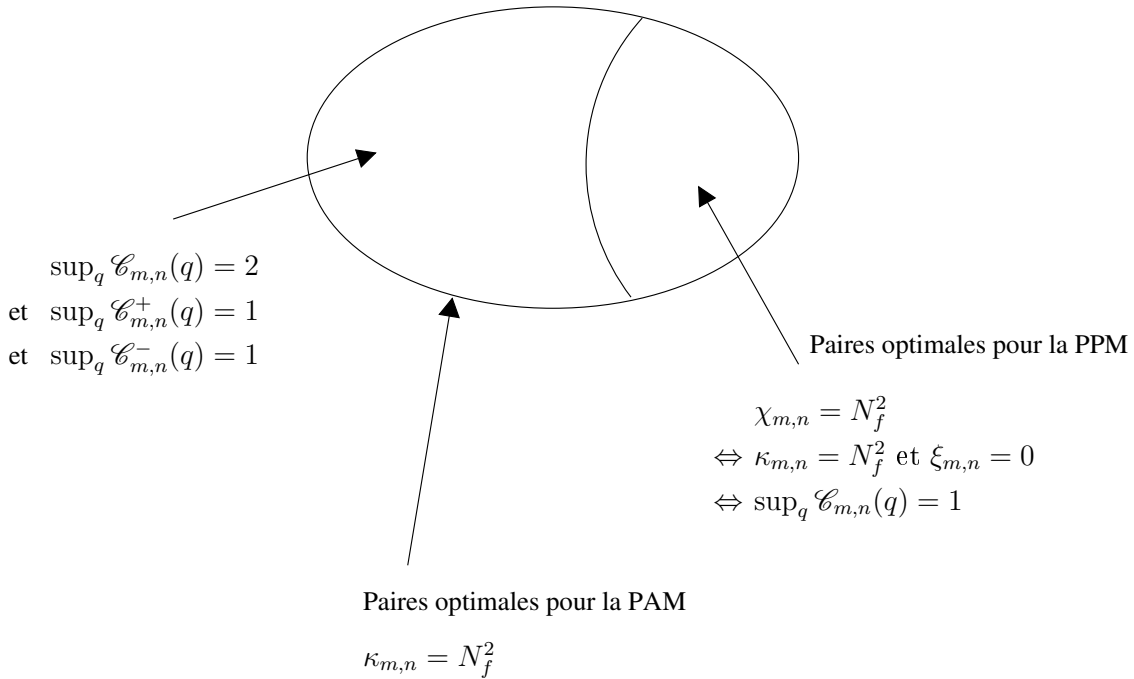


Figure 2.1 – Caractérisation des ensembles de paires optimales pour la PAM et la PPM.

Enfin, on peut remarquer que la propriété  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1$  et  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$  entraîne que  $|\mathcal{C}_{m,n}^+(q) - \mathcal{C}_{m,n}^-(q)| \leq 1$ . La différence des intercorrélations partielles a été identifiée (originellement dans [41], puis repris dans [42]) comme jouant un rôle dans la probabilité d'erreur au même titre que la somme. On retrouve simplement ce résultat pour la PAM dans l'expression (1.32) pour laquelle, suivant le signe des deux symboles successifs,  $d(-Q_n^{k,\ell} - 1)$  et  $d(-Q_n^{k,\ell})$ , on retrouve la somme ou la différence des intercorrélations partielles. Ceci implique que les codes optimaux pour la PAM contribuent aussi à l'optimisation des performances en terme de critère *minimax* (cf. *worst case* dans [42]).

## 2.4 Comparaison à l'état de l'art

Dans cette section, nous comparons les résultats trouvés à la section précédente avec les travaux antérieurs sur les THC. Nous commençons par les travaux de Scholtz qui constituent une référence à la fois en terme d'antériorité et de réutilisation dans les autres travaux. Puis nous consacrons une section à la comparaison des performances réciproques des codes issus de nos résultats avec ceux proposés dans la littérature.

### 2.4.1 Travaux de Scholtz

Comme indiqué dans l'introduction du chapitre, Scholtz (et ses co-auteurs) fait, dans ses papiers dédiés aux performances du TH-UWB dans un contexte multi-utilisateur, des hypothèses et des approximations qui font que le résultat final du calcul de la variance de la MUI ne dépend pas de la valeur des codes. Nous analysons ici plus finement ce calcul.

Scholtz fait tout d'abord l'hypothèse que le temps de garde entre les trames est d'une durée supérieure ou égale à la moitié de la durée de la trame, diminuée de deux fois la largeur de l'impulsion, c.-à-d.,  $N_c T_c < T_f/2 - 2T_w$ . Cette hypothèse est faite selon les auteurs "for analytical convenience" (cf. [7]). De plus, pour moyenniser la variance sur l'asynchronisme, les auteurs le décomposent sous la forme  $kT_f + \alpha$ , avec  $-T_f/2 < \alpha \leq T_f/2$ . Puis ils moyennent sur la variable aléatoire  $\alpha$ , considérée comme équirépartie sur  $[0, T_f[$ . Cette manœuvre est discutable car l'asynchronisme étant inconnu, la variable aléatoire rendant compte du phénomène doit être considérée sur l'horizon  $]-\infty, +\infty[$ . Compte tenu de la périodicité des codes de période  $N_f$  (induisant une cycloperiodicité du signal de période  $N_f T_f$ ), il suffit de prendre sa restriction sur une durée  $N_f T_f$ .

Malgré ces hypothèses, le calcul montre que la variance dépend toujours de la valeur des codes. Scholtz fait alors une approximation qui permet de s'affranchir de la valeur des codes en négligeant les termes croisés de l'éq. (78) dans [7], ce terme ayant été estimé par simulation et trouvé « négligeable » pour les paramètres opérationnels de l'Impulse Radio.

Si l'on réécrit l'expression de la variance de Scholtz avec nos notations, et qu'on la compare avec la notre (2.7), calculée pour un trajet et  $\alpha_n = 1$  on obtient

$$V_{\text{MUI}}^{\text{PPM}} = \begin{cases} \frac{N_f \gamma_{vw}(0)}{T_f} \cdot \sum_{n=2}^{N_u} (A_n^1)^2 & \text{pour Scholtz,} \\ \frac{\gamma_{vw}(0)}{N_f T_f} \cdot \sum_{n=2}^{N_u} (A_n^1)^2 [\kappa_{1,n} + \bar{\gamma} \cdot \xi_{1,n}] & \text{pour nous.} \end{cases}$$

Il est intéressant de constater que lorsque l'on considère un ensemble de paires optimales  $\{c_1, c_n\}_{n=2}^{N_u}$  pour lesquelles  $\kappa_{1,n} + \bar{\gamma} \cdot \xi_{1,n} = N_f^2$ , les deux valeurs sont identiques. On en déduit que les performances, calculées en minimisant la variance de la MUI suivant les hypothèses et approximations de Scholtz, correspondent aux performances que l'on obtient avec nos hypothèses pour un ensemble de paires de codes optimales et constitue donc la borne supérieure des performances atteignables. Les deux expressions (et calculs) sont strictement équivalentes dans le cas  $N_f = 1$ , cas pour lequel toutes les paires de codes sont optimales par construction. Toutefois, c'est une situation dégénérée dans le cas des codes « courts » car elle donne lieu à des codes de période 1.

### 2.4.2 Travaux sur les codes de saut temporel

Un certain nombre de travaux ont regardé le problème du choix de « bons THC » pour les systèmes TH-UWB. L'ensemble de ces travaux ont consisté à appliquer ou adapter des schémas déjà existants pour d'autres techniques d'accès multiples, particulièrement le saut de fréquence et plus récemment les codes optiques. Le critère permettant de quantifier la qualité des codes proposés est toujours le sup des intercorrélations cycliques, comme il est d'usage de faire dans la communauté du CDMA (cf. section 2.4.3).

La plupart des solutions utilisent des constructions de codes déduites de congruences (linéaires, quadratiques, cubiques, hyperboliques). On trouve dans la thèse d'Erseghe [29] une bonne synthèse sur les différents travaux réalisés jusqu'en 2001 ainsi que [32] plus récemment. Transposée du FH à l'UWB, la construction de ces codes impose d'avoir des longueurs de codes  $N = N_c = N_f$ , avec  $N$  un nombre premier. On peut étendre la construction des codes à des valeurs de  $N_c$  et  $N_f$  différentes en tronquant les codes générés à  $N_f < N$ .

Afin d'apprécier par simulation le caractère optimal des paires de codes issues des codes congruents, nous avons calculé les histogrammes du critère,  $\chi_{1,n}$  pour la PPM et  $\kappa_{1,n}$  pour la PAM pour deux valeurs de  $N_c$  avec  $N_f = 7$ . La valeur du critère pour les paires optimales vaut ici 49. Les figures 2.2 et 2.3 représentent les histogrammes des codes congruents linéaires et quadratiques pour les critères PAM et PPM avec  $N = 7$ , générant ainsi 6 codes, c.-à-d. 15 paires de codes. On constate que pour la PAM, deux paires sont optimales dans le cas de la congruence

linéaire. Pour la congruence quadratique, les valeurs de  $\kappa_{m,n}$  sont très éloignées de la valeur optimale. Pour la PPM, il n'existe aucune paire optimale et les valeurs de  $\chi_{m,n}$  sont éloignées de la valeur optimale.

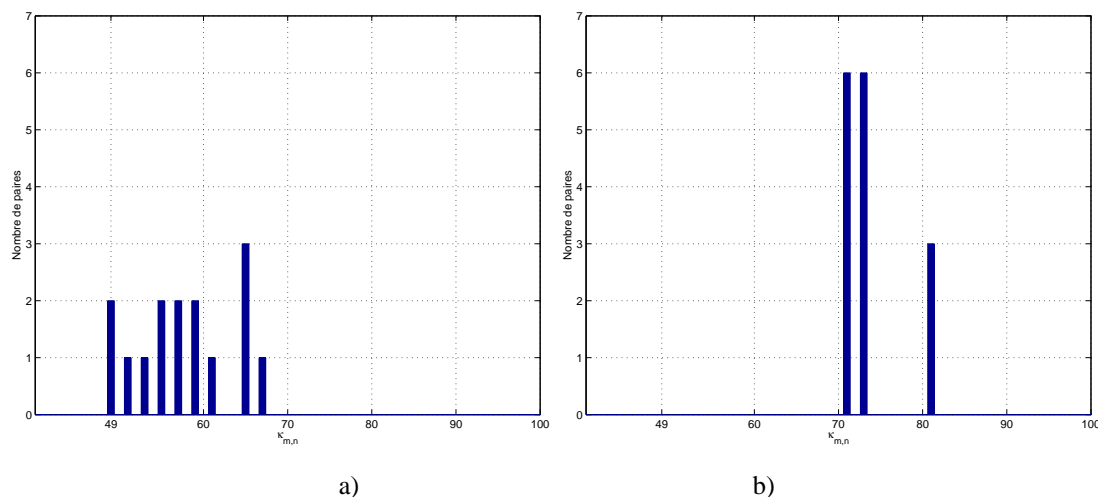


Figure 2.2 – Histogramme de  $\kappa_{m,n}$  pour l'ensemble des paires obtenues pour des codes congruents de longueur  $N = 7$  ( $N_f = 7$ ,  $N_c = 7$ ). a) Congruence linéaire. b) Congruence quadratique.

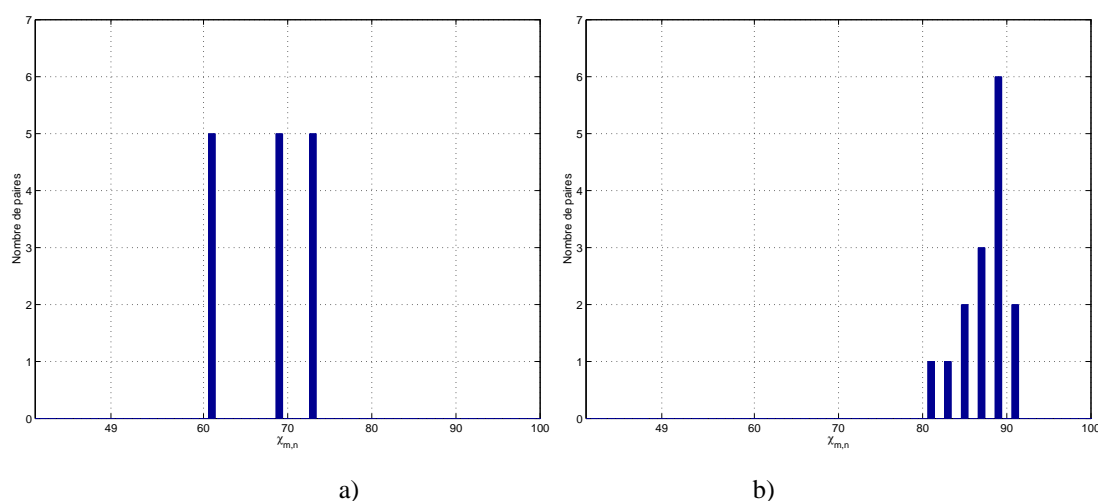


Figure 2.3 – Histogramme de  $\chi_{m,n}$  pour l'ensemble des paires obtenues pour des codes congruents de longueur  $N = 7$  ( $N_f = 7$ ,  $N_c = 7$ ). a) Congruence linéaire. b) Congruence quadratique.

Les figures 2.4 et 2.5 représentent les histogrammes des codes congruents linéaires et quadratiques pour les critères PAM et PPM avec  $N = 11$  tronqué à la longueur 7, générant ainsi 10 codes, c.-à-d. 45 paires. On constate que pour la PAM, on trouve 18 paires optimales dans le cas de la congruence linéaire. Pour la congruence quadratique, il n'y a pas de paires optimales. Pour la PPM, on trouve 2 paires optimales pour la congruence linéaire. Pour la congruence quadratique, il n'existe aucune paire optimale et les valeurs de  $\chi_{m,n}$  sont éloignées de la valeur optimale.

Très récemment, Chu et Colbourn ont proposé des constructions de codes originales dans [33] dédiées au TH-UWB pour des valeurs particulières de  $N_c$  et  $N_f$ . Ces constructions sont basées sur la similitude des codes optiques orthogonaux (en anglais, *Optical Orthogonal Codes (OOC)*) à valeurs dans  $\{0, 1\}$  avec les THC développés (cf.

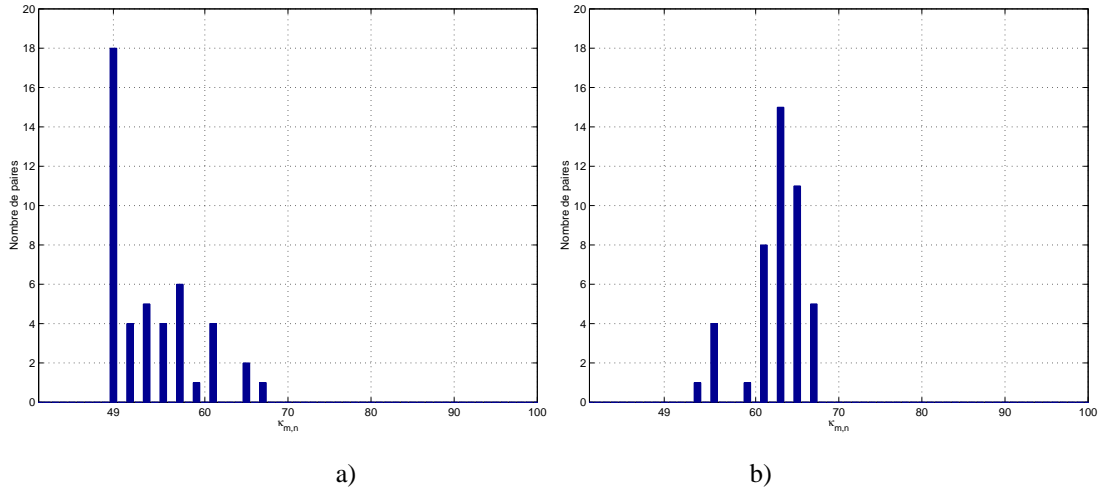


Figure 2.4 – Histogramme de  $\kappa_{m,n}$  pour l'ensemble des paires obtenues pour des codes congruents de longueur  $N = 11$ , tronqués à 7 ( $N_f = 7$ ,  $N_c = 11$ ). a) Congruence linéaire. b) Congruence quadratique.

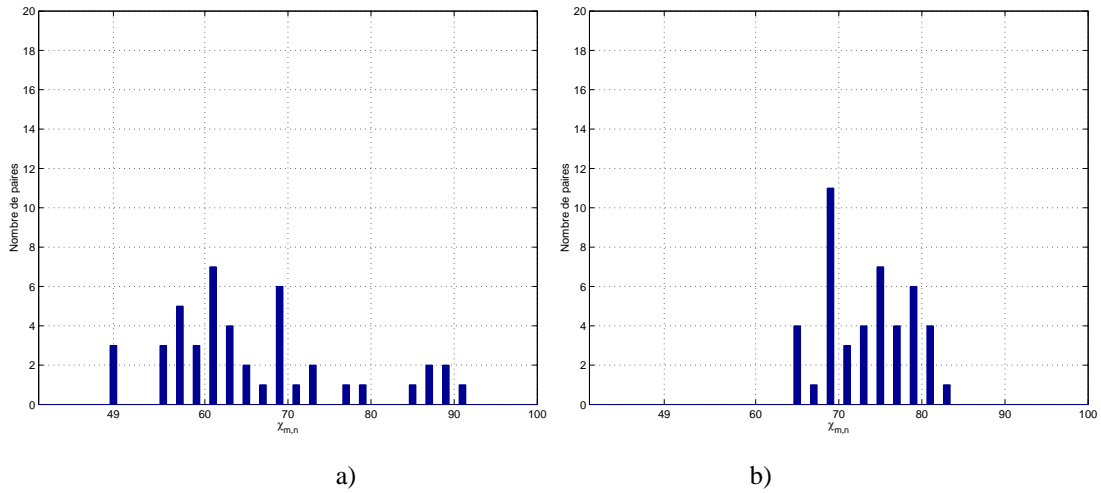


Figure 2.5 – Histogramme de  $\chi_{m,n}$  pour l'ensemble des paires obtenues pour des codes congruents de longueur  $N = 11$ , tronqués à 7. a) Congruence linéaire. b) Congruence quadratique.

section 1.2.2). Les auteurs montrent que les codes développés de l'IR sont inclus dans l'ensemble des codes OOC qui n'ont pas la contrainte d'un seul '1' par trame. Puis ils dérivent les méthodes de constructions adaptées à cette contrainte garantissant  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ , qui d'après la propriété 10, se trouvent être le critère équivalent décrivant les paires optimales que nous cherchons à identifier. L'intérêt de ces méthodes, en plus d'être constructives, est qu'elles génèrent un ensemble de codes dont toutes les paires sont optimales entre-elles deux à deux.

En conclusion, les méthodes basées sur les congruences n'apportent pas des solutions constructives de paires optimales. On constate par simulation que les codes congruents linéaires tronqués semble comporter une part importante de paires optimales pour la PAM, en revanche, ce n'est pas le cas pour la PPM. Enfin,  $N_c$  doit être premier. Les constructions déduites des codes optiques sont très intéressantes en proposant des méthodes constructives d'ensemble de paires optimales, mais toutefois contraintes à des valeurs particulières de  $N_c$  et  $N_f$ .

### 2.4.3 Minimisation de la variance de la MUI et critère du sup

Nous avons pu constater que l'ensemble des travaux dédiés à la recherche de codes UWB performants (cf. section 2.4.2) étaient basés ou analysés sur le critère de minimisation du sup du module de l'intercorrélacion. Cette approche est calquée sur celle généralement considérée pour les systèmes CDMA classiques à étalement par séquence directe [41, 43, 44].

Une approche différente a été initiée par Pursley, dans [42, 45], qui considère le critère de la variance minimale de la MUI. C'est cette approche que nous utilisons dans ce chapitre. Pursley calcule la variance de la MUI dans [42] en supposant un canal gaussien et une impulsion de mise en forme rectangulaire. La contribution des codes dans l'expression de la MUI fait apparaître des intercorrélacions au carré (en anglais, *Mean Square Cross-correlation* (MSC)). Puis il borne la MSC dans [45]. Toutefois, bien qu'abordée dans cet article, la relation entre la MSC et les bornes du sup (borne de Welch), n'est pas claire. Quelques auteurs [46, 47] ont fait des comparaisons entre le critère du sup et la MSC sur des séquences classiques (*m*-sequence, Gold, Kasami). Encore une fois, les résultats ne sont pas très convaincants et l'on a du mal à se faire une idée sur la pertinence de l'un ou l'autre des critères. Dans aucun des travaux précités, les auteurs ne regardent l'effet du critère de sélection sur les performances en terme de probabilité d'erreur.

S'agissant de l'UWB, notre contribution va plus loin que les travaux réalisés en DS-CDMA puisque nous avons pu établir le lien entre le critère de minimisation de la variance de la MUI et la caractérisation des paires de codes en terme de sup sur l'intercorrélacion (cf. section 2.3.3). Nous avons ainsi montré qu'il pouvait exister des paires optimales dont le sup de l'intercorrélacion pouvait être égale à 2, alors que le « bon sens » conduit à ne retenir que celles dont le sup vaut 1. De plus, nous avons quantifié par simulations les gains obtenus en sélectionnant les codes optimaux sur la probabilité d'erreur (cf. section 2.6).

## 2.5 Sur l'existence des paires de codes optimales

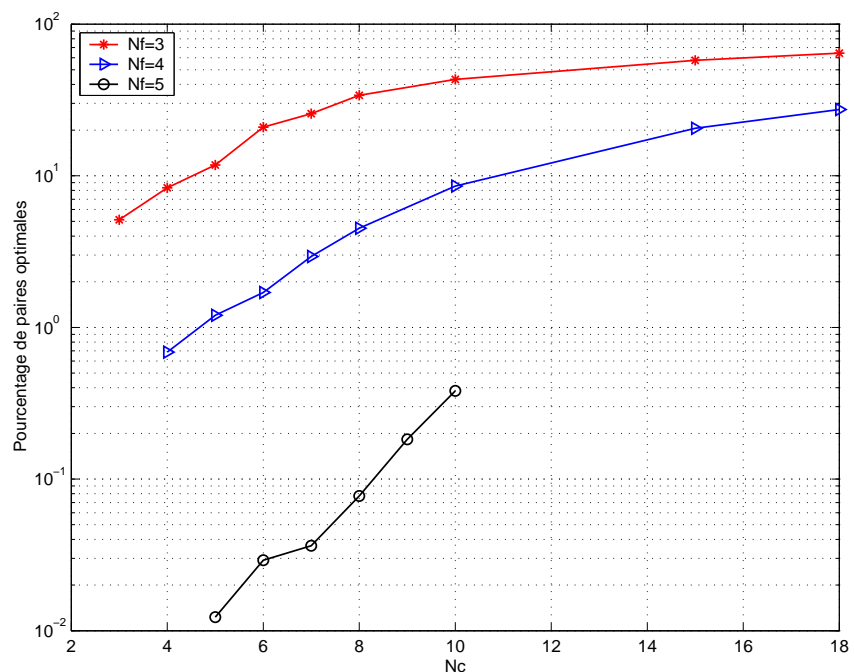
Le théorème 1 donne un moyen de vérifier si une paire est optimale au sens de la minimisation de la variance de la MUI, mais n'indique pas de méthode systématique pour construire l'ensemble des paires optimales. Il est cependant possible de la déterminer pour un utilisateur donné, par une recherche exhaustive sur l'ensemble de toutes les paires de codes possibles. Toutefois, la complexité de la recherche croît de manière exponentielle en fonction de  $N_c$  et  $N_f$ .

L'existence des paires optimales est fournie par les méthodes constructives (Chu et Colbourn [33] pour des valeurs particulières de  $N_c$  et  $N_f$ ). Nous pouvons aisément imaginer que ce résultat s'étend à des valeurs quelconques de  $N_c$  et  $N_f$ , et l'on vérifie sur quelques exemples que de telle paires existent par une recherche exhaustive. Par exemple, la figure 2.6 représente le nombre et le pourcentage de paires optimales pour la PPM en fonction de  $N_c$  pour  $N_f = \{3, 4, 5\}$ .

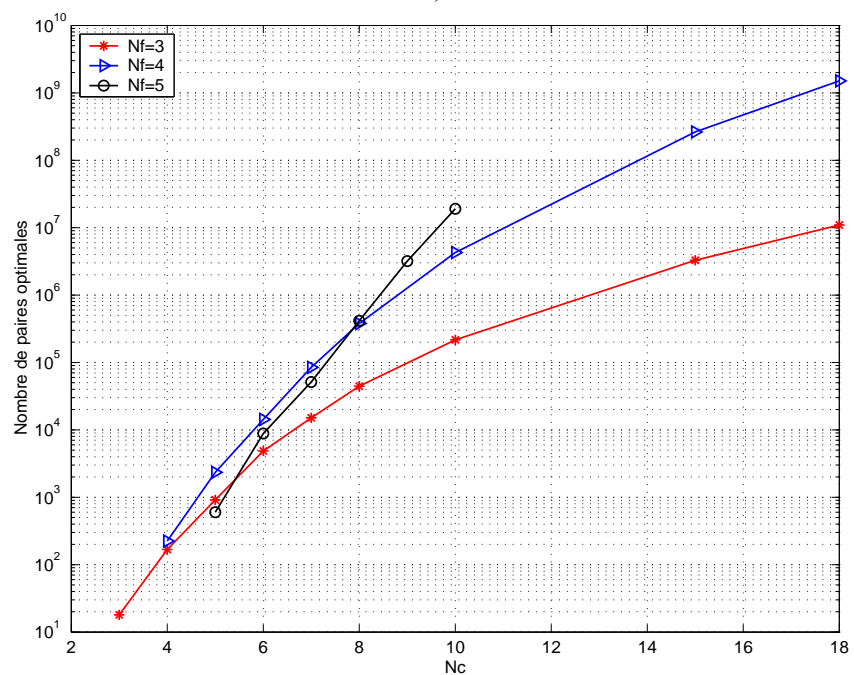
Les simulations mettent en évidence le fait que lorsque l'on augmente  $N_c$  à  $N_f$  fixé, le pourcentage et le nombre de paires optimales augmente. Si  $\mathcal{P}_{N_c, N_f}$  représente le pourcentage de paires optimales pour le couple  $(N_c, N_f)$ , on constate que l'on a la relation d'ordre  $\mathcal{P}_{N_c, N_f} > \mathcal{P}_{N_c, N'_f}$  pour  $N_f < N'_f$ . Si l'on s'intéresse maintenant au nombre de paires optimales, que l'on note  $\mathcal{N}_{N_c, N_f}$ , on constate que l'on a la relation d'ordre  $\mathcal{N}_{N_c, N_f} < \mathcal{N}_{N_c, N'_f}$  pour  $N_f < N'_f$ . Ainsi, à  $N_c$  fixé, bien que le pourcentage de paires optimales décroît lorsque  $N_f$  croît, le nombre de paires optimales croît avec  $N_f$ . Cela peut se démontrer en utilisant l'expression (2.24) qui montre que le pourcentage de paires optimales décroît de manière polynomiale alors que le nombre total de paires croît de manière exponentielle.

On constate de plus que le pourcentage de paires optimales semble tendre vers 100 % quand  $N_c$  devient grand devant  $N_f$ . Ce qui se traduit par le fait que la distribution de  $\chi_{m,n}$  (pour la PPM) tend vers un Dirac à sa valeur minimum,  $N_f^2$ , quand  $N_c$  tend vers l'infini. Ceci est illustré à la figure 2.7 où l'on a représenté pour  $N_f = 3$  la distribution de  $\chi_{m,n}$  pour différentes valeurs croissantes de  $N_c$ .

La propriété de convergence vers une distribution de Dirac peut se démontrer dans un cadre probabiliste en considérant les codes comme aléatoires et en calculant la probabilité d'obtenir une paire optimale lorsque l'on tire



a)



b)

Figure 2.6 – Estimation par recherche exhaustive du pourcentage a) et du nombre b) de paires optimales pour la PPM en fonction de  $N_c$  pour  $N_f = 3$  et  $N_f = 4$ .

deux codes au hasard. Ainsi, si l'on définit la probabilité de tirer une paire optimale par

$$\pi = \Pr\{\chi_{m,n} = N_f^2\}, \quad (2.23)$$

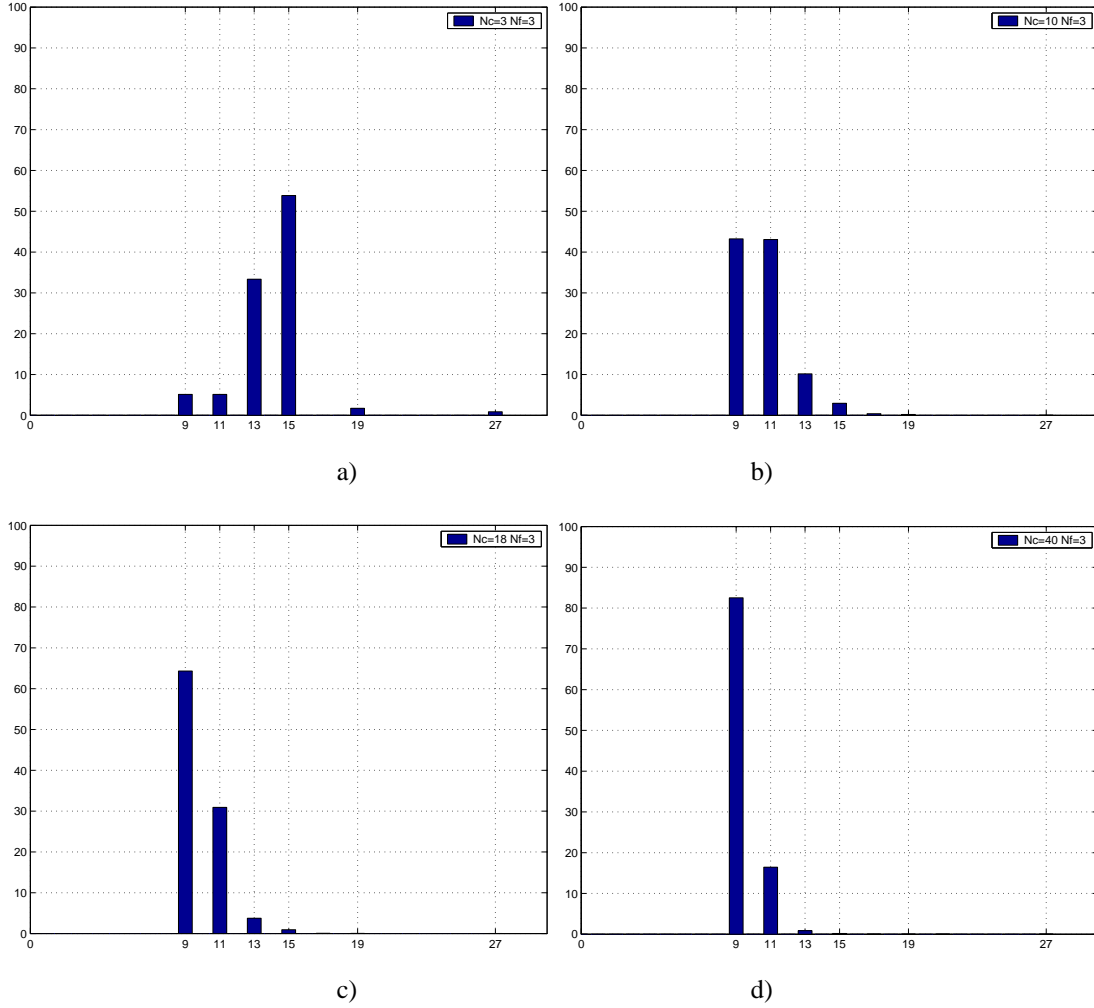


Figure 2.7 – Distributions de  $\chi_{m,n}$  pour différentes valeurs de  $N_c$  pour  $N_f = 3$ . a)  $N_c = 3$ . b)  $N_c = 10$ . c)  $N_c = 18$ . d)  $N_c = 40$ .

on démontre en annexe B.1 que l'événement contraire  $\bar{\pi} := 1 - \pi$  est borné par

$$\bar{\pi} \leq (N_f - 1) \frac{N_f^2}{3N_c} \left[ N_f \left( 5 + \frac{1}{N_c^2} - \frac{3}{N_c} \right) + \frac{6}{N_c} - \frac{1}{N_c^2} - 8 \right]. \quad (2.24)$$

On en déduit que lorsque  $N_c$  tend vers l'infini,  $\bar{\pi}$  tend vers 0 de sorte que l'on a démontré

$$\lim_{N_c \rightarrow +\infty} \pi = 1. \quad (2.25)$$

Ainsi, à  $N_f$  fixé, la probabilité que deux codes tirés au hasard forment une paire optimale tend vers 1 lorsque  $N_c$  tend vers l'infini. Ce résultat s'étend immédiatement au cas de la PAM puisque l'ensemble des paires optimales de la PPM est inclus dans celui de la PAM (cf. section 2.3.3).

Au delà du résultat asymptotique, nous allons maintenant montrer l'intérêt pratique de ce résultat pour la recherche de paires optimales et l'estimation du nombre de paires optimales pour des valeurs finies de  $N_c$ . Si la recherche exhaustive permet d'obtenir les paires optimales, cette méthode reste néanmoins rétrograde en temps de calcul pour des grandes valeurs de  $N_c$  ou  $N_f$ . Par exemple, le calcul exhaustif de l'histogramme pour  $N_c = 40$ ,  $N_f = 3$  nécessite l'évaluation de 2.047.968.000 paires, le temps de calcul correspondant étant de l'ordre de 2

semaines sur un PC. Le calcul de tels histogrammes devient rapidement impossible pour des grandes valeurs de  $N_c$ . Ceci est d'autant plus vrai que  $N_f$  est grand.

Or on a vu précédemment que même si le pourcentage de paires optimales est relativement faible, le nombre de paires peut être élevé. En effet, si  $N_o$  désigne le nombre de paires optimales pour un couple  $(N_f, N_c)$  donné, on a

$$N_o = \frac{\mathcal{P}_{N_c, N_f}}{100} * \mathcal{N}_P,$$

avec

$$\mathcal{N}_P := (N_c^{2N_f} - N_c^{N_f})/2$$

le nombre de paires distinctes, où les paires  $(c_m, c_n)$  et  $(c_n, c_m)$  sont comptées une seule fois et où les paires  $(c_m, c_m)$  sont exclues.

Cela suggère que pour trouver des paires optimales il suffit de réaliser des tirages aléatoires des codes dès lors que l'on ne recherche pas l'exhaustivité. Nous illustrons cette remarque par des simulations. Le tableau 2.1 donne le nombre de paires optimales et la probabilité  $\pi$  (cf. éq. (2.23)) correspondante obtenue par recherche exhaustive en fonction de  $N_c$  pour  $N_f = 3$ .

$N_c$	10	20	30	40
$N_o$	431784	43.126.416	562.945.824	3.379.828.944
$\pi$	0,431784	0,673850	0,772216	0,825153

Tableau 2.1 – Nombre de paires optimales et probabilité correspondante en fonction de  $N_c$  pour  $N_f = 3$  en utilisant la recherche exhaustive.

Le tableau 2.2 donne le nombre de paires optimales trouvées  $\tilde{N}_o$  en faisant un tirage aléatoire des paires de codes testées pour différentes valeurs de  $N_c$  pour  $N_f = 3$  (a) et  $N_f = 6$  (b). A partir de  $\tilde{N}_o$ , on en déduit  $\tilde{\pi}$ , une estimation de  $\pi$ . On remarque tout d'abord dans tableau 2.2.a que pour les valeurs de  $N_c$  correspondantes à celles du tableau 2.1, les probabilités sont bien estimées pour une complexité beaucoup plus faible. La méthode par tirage aléatoire permet ensuite d'explorer des valeurs de  $(N_c, N_f)$  impossibles avec la recherche exhaustive. On peut ainsi trouver un nombre conséquent de paires optimales et estimer  $\pi$  pour des grandes valeurs de  $N_c$  (p. ex.  $N_c = 1000$ ) tout en gardant une complexité raisonnable.

$N_c$	20	30	40	100	1000
$\tilde{N}_o$	67579	77329	82311	92802	99256
$\tilde{\pi}$	0,67579	0,77329	0,82311	0,92802	0,99256

a)  $N_f = 3$  ( $10^6$  tirages).

$N_c$	200	600	800	1000	2000
$\tilde{N}_o$	326417	434097	450140	459936	479223
$\tilde{\pi}$	0,652834	0,868194	0,910008	0,919872	0,958446

b)  $N_f = 6$  ( $5 \times 10^6$  tirages).

Tableau 2.2 – Nombre de paires optimales  $\tilde{N}_o$  trouvées par une recherche aléatoire et valeur de la probabilité estimée correspondante  $\tilde{\pi}$  en fonction de  $N_c$ . a)  $N_f = 3$ . b)  $N_f = 6$ .

## 2.6 Simulations

Dans cette section, nous illustrons par simulations les résultats précédemment énoncés. Le critère retenu pour évaluer les performances est la probabilité d'erreur moyenne, estimée comme la moyenne empirique des probabili-



tés d'erreurs calculées conditionnellement au bruit obtenues pour différentes réalisations des paramètres aléatoires du modèle. Ceci nous permet de calculer — au prix d'une complexité accrue — des performances réalistes en s'affranchissant du défaut de surestimation de l'approximation gaussienne [34]. Ces simulations permettent de valider que les raisonnements faits à partir de la variance de la MUI se traduisent en termes de performances. Nous vérifions ainsi que les codes optimaux conduisent bien à de meilleures performances et que le gain obtenu est significatif.

Nous présentons tout d'abord le calcul de la Probabilité d'Erreur Moyenne (PEM) et son estimateur. Nous donnons ensuite les paramètres du signal TH-UWB considéré, puis définissons les différents scénarios de simulation.

### 2.6.1 Estimation de la probabilité d'erreur moyenne

Afin d'évaluer les performances de notre système de transmission, nous utilisons la probabilité d'erreur moyenne introduite dans [39] pour un canal gaussien. L'idée est de calculer de manière formelle la probabilité d'erreur conditionnée par rapport aux paramètres aléatoires du modèle, excepté la composante du bruit thermique supposée gaussienne. La PEM est alors obtenue en moyennant cette probabilité conditionnelle sur l'ensemble des paramètres aléatoires. En pratique, cette moyenne est estimée de manière empirique par tirages des paramètres aléatoires (symboles, amplitudes et retards des canaux, asynchronismes). Cette technique permet d'éliminer un paramètre aléatoire à tirer (le bruit), réduisant ainsi le nombre de tirages nécessaires et donne des courbes de probabilité d'erreur « lissées ».

Dans le cas de la PAM (la PPM se traite de manière similaire), si l'on considère le symbole démodulé  $d_1(0)$ , la probabilité d'erreur conditionnelle s'écrit

$$P_e = \Pr\{d_1(0) = 1\} \times \Pr\{z < 0 | a, \tau, d^*, d_1(0) = 1, \theta^*\} + \Pr\{d_1(0) = -1\} \times \Pr\{z > 0 | a, \tau, d^*, d_1(0) = -1, \theta^*\}, \quad (2.26)$$

où  $d^* = \{d_n(k)\} - d_1(0)$  et  $\theta^* = \{\theta_n\} - \theta_1$ . Compte tenu de l'équiprobabilité des symboles et du fait qu'ainsi conditionné,  $z$  est une variable aléatoire gaussienne, (2.26) se ramène à d'après (1.33) à

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z_1 + z_2 + z_3}{\sqrt{2} \sigma_\eta} \right) \quad (2.27)$$

où  $\sigma_\eta^2$  est la variance du bruit filtré dont l'expression est donnée à l'annexe A.5. La probabilité d'erreur moyenne est alors définie par

$$\bar{P}_e = \mathbb{E}_{a, \tau, d^*, \theta^*} \{P_e\}, \quad (2.28)$$

que l'on estime de manière empirique.

Afin de garantir que le nombre de tirages est suffisant pour avoir une bonne estimation de  $\bar{P}_e$ , on arrête les tirages lorsque l'on a atteint 100 erreurs en contrôlant le signe de sortie du rake non bruité (c.-à-d.  $z_1 + z_2 + z_3$ ). Ceci garantit un écart type d'estimation relatif de la probabilité d'erreur de 1/10. Pour illustrer cela nous avons appliqué ce protocole à la simulation des performances (pour la PAM et la PPM) d'un récepteur SRake à  $L_r = 2$  doigts, avec  $N_f = 3$ ,  $N_c = 10$  et  $N_u = 3$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la sous-section 2.6.2. La figure 2.8 représente la superposition des courbes de probabilité d'erreur moyenne calculée de manière classique (via le Taux d'Erreur Binaire (TEB)) en tirant tous les paramètres aléatoires (bruit compris) et celle calculée par moyenne empirique de  $\bar{P}_e$ . Pour les deux courbes, le nombre de tirages est contrôlé pour avoir 100 erreurs (pour le TEB, la variable de contrôle est  $z$ ). On constate que les courbes des différentes approches sont très proches.

**Remarque 2** *Le contrôle du nombre d'erreurs pour l'estimation de la probabilité d'erreur est important d'une manière générale et plus particulièrement dans notre cas lorsque l'on cherche à comparer les performances. L'estimation d'un taux d'erreur avec un nombre de tirage fixé peut être dangereux quant à l'interprétation des résultats. Nous avons pu ainsi constater que deux systèmes simulés avec un nombre de tirages fixe présentaient des performances différentes importantes, alors que la simulation contrôlée indiquait des performances identiques*

(résultat attendu). Le contrôle du nombre d'erreur permet ainsi de minimiser le nombre de tirages en évitant de surdimensionner le nombre de tirages fixe.

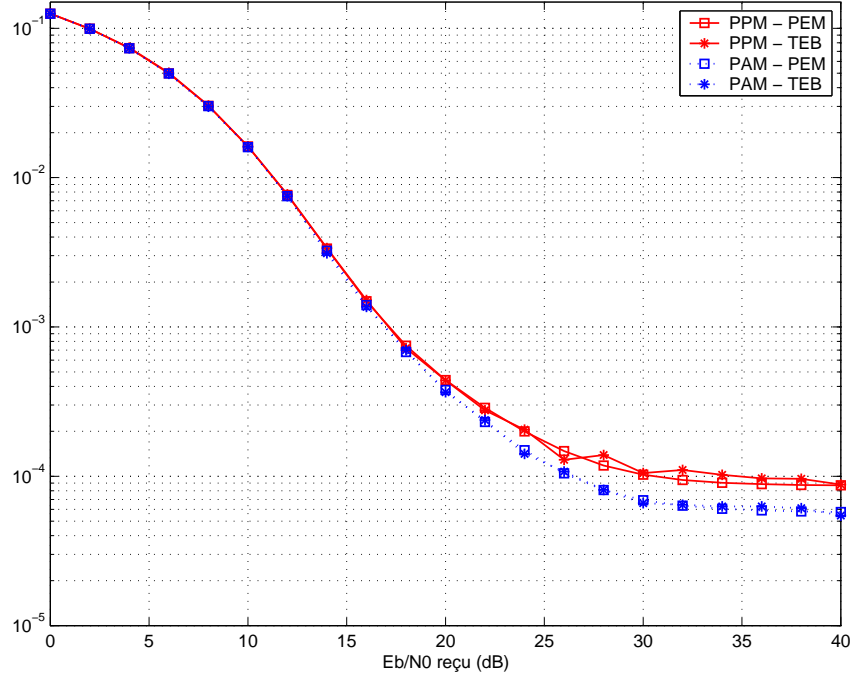


Figure 2.8 – Comparaison des courbes de PEM et de TEB estimés pour la PPM et la PAM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB), pour  $N_u = 3$ ,  $N_c = 10$ ,  $N_f = 3$ ,  $L_r = 2$ .

## 2.6.2 Paramètres

Nous présentons dans cette section les paramètres du signal TH-UWB choisi pour les différentes simulations.

L'impulsion retenue répond aux exigences de la FCC [5] dans la bande [3,1 GHz–10,6 GHz]. Elle correspond à celle présentée à la section 1.2.3. Sa durée est fixée à  $T_w = 1$  ns.

Dans le cas de la PPM à deux états, la valeur du décalage  $\delta$  est fixée de manière à maximiser la distance entre les deux symboles

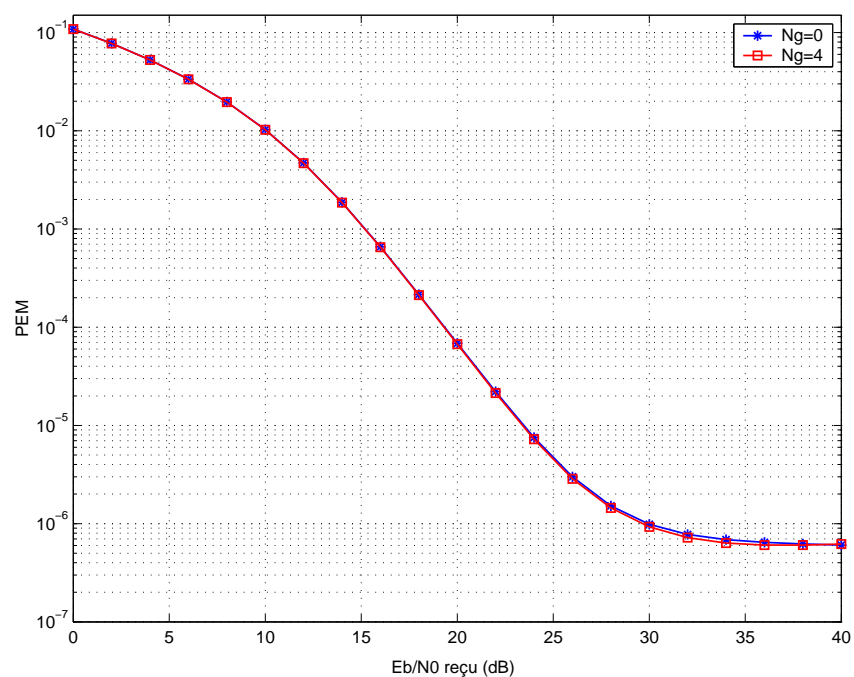
$$\delta = \arg \min_{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)w(t - \delta)dt.$$

Pour notre impulsion, le résultat donne  $\delta = 0,0707$  ns. Le nombre de trame est fixé à  $N_f = 3$ , et le nombre de chips est fixé à  $N_c = 18$ . La durée de la trame est fixée à  $T_f = 60$  ns et la durée d'un chip est donnée par  $T_c = T_f/(N_c + N_g)$ , avec  $N_g$  le nombre de chips dédiés au temps de garde. Ainsi le débit est égal à  $(N_f T_f)^{-1}$  et est constant quelle que soit la durée du temps de garde.

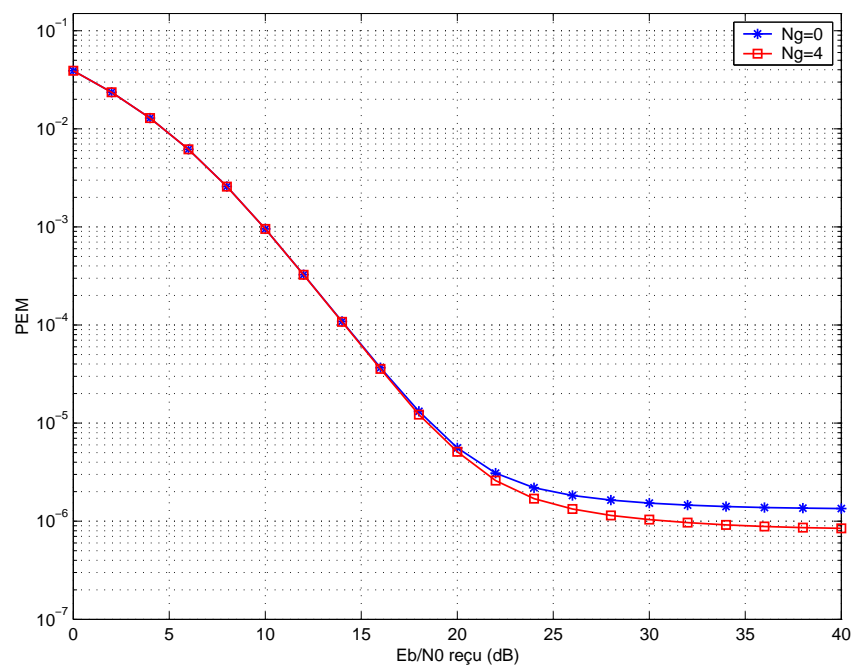
Le modèle de canal considéré est celui présenté à la section 1.3. Ses paramètres sont ceux retenus par le groupe 3a du comité IEEE 802.15 [8]. Nous avons choisi le modèle CM2 en considérant une seule grappe. Les paramètres du canal sont  $\lambda = 0,5$  ns $^{-1}$  et  $\gamma = 6,7$  ns.

On peut remarquer que l'étalement temporel moyen du canal est égal à  $\gamma = 6,7$  ns qui est inférieur à la durée d'un symbole c.-à-d. 180 ns. Ainsi ce canal produira peu d'interférences entre symboles et entre trames compte tenu des paramètres. Ceci est important afin que les résultats des performances que nous allons présenter sont dominés par la MUI et non l'ISI / IFI. Nous pouvons quantifier d'emblée l'effet de l'ISI / IFI en traçant les courbes de PEM pour la PAM et la PPM pour un seul utilisateur (cf. figure 2.9). Nous vérifierons par la suite que pour les simulations en contexte multi-utilisateur, les valeurs de seuil atteintes par la PEM sont nettement

supérieures à celles obtenues à la figure 2.9. On vérifie aussi que l'augmentation du temps de garde n'améliore pas les performances (très légèrement pour la PPM), ce que indique bien que l'effet du canal crée peu d'ISI / IFI. Toutefois l'effet de seuil est créé par l'interférence résiduelle (cf. chapitre 3).



a)



b)

Figure 2.9 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB), avec  $N_u = 1$ ,  $L_r = 3$ . a) PAM, b) PPM.

Les courbes de performances sont représentées sous la forme PEM en fonction du rapport signal à bruit moyen

reçu à l'entrée du récepteur, noté  $\bar{E}_b/N_0$ , et défini par

$$\bar{E}_b = \mathbb{E}_{a,\tau,d,\theta} \left[ \int_0^{N_f T_f} r_1^2(t) dt \right].$$

Pour le modèle de canal considéré avec une seule grappe, en utilisant (1.20), on obtient

$$\bar{E}_b = N_f r_{vw}(0) \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \mathbb{E}_\tau [(A_1^k)^2].$$

Pour la PAM  $r_{vw}(\cdot)$  doit être remplacée par  $r_{ww}(\cdot)$ . Le nombre de trajets  $N_p$  est théoriquement infini. Pour pouvoir simuler de manière pratique le canal, nous avons généré un nombre fini de trajets, le tirage du canal étant tronqué lorsque l'énergie du trajet descendait en dessous d'un millièème de la valeur du premier trajet.

### 2.6.3 Scénarios de simulations

Nous présentons ici les scénarios permettant d'illustrer par simulations les résultats établis précédemment sur l'optimisation des codes. Le nombre d'utilisateurs étant fixé à  $N_u = 7$ , le nombre de paires à optimiser est par conséquent égal à 6 (l'utilisateur d'intérêt est l'utilisateur 1).

Nous présentons trois scénarios : A, B et C. Les deux premiers illustrent l'effet de l'optimisation des codes sur les performances. Le dernier illustre le fait que pour la PAM les paires optimales vérifiant  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$  donnent des performances similaires que celles vérifiant  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 1$ .

Pour les scénarios A et B, les notations 0/6, 3/6 et 6/6 correspondent respectivement à zéro, trois et six paires optimales par rapport au THC de l'utilisateur 1. Les codes optimaux sont choisis de telle sorte à ce que les paires soient optimales à la fois pour la PPM et pour la PAM ; ils vérifient donc  $\chi_{1,n} = \kappa_{1,n} = N_f^2$ . Pour les scénarios A et B, nous avons également calculé les performances avec un temps de garde,  $N_g = 4$ . Nous avons alors recalculé les nouvelles paires optimales, qui se trouvent être ici les mêmes que le cas sans temps de garde. Nous rappelons que ceci n'est qu'une coïncidence et qu'il faut toujours recalculer les paires optimales lorsque l'on modifie la valeur de  $N_g$ .

Scénario A				Scénario B			
$\tilde{c}_n$	0/6	3/6	6/6	$\tilde{c}_n$	0/6	3/6	6/6
$\tilde{c}_1$	{0, 0, 0}	{0, 0, 0}	{0, 0, 0}	$\tilde{c}_1$	{0, 0, 2}	{0, 0, 2}	{0, 0, 2}
$\tilde{c}_2$	{2, 2, 2}	{2, 2, 2}	{0, 1, 2}	$\tilde{c}_2$	{1, 1, 3}	{1, 1, 3}	{0, 1, 4}
$\tilde{c}_3$	{3, 3, 3}	{3, 3, 3}	{0, 2, 1}	$\tilde{c}_3$	{6, 6, 8}	{6, 6, 8}	{0, 4, 1}
$\tilde{c}_4$	{4, 4, 4}	{4, 4, 4}	{0, 3, 6}	$\tilde{c}_4$	{7, 9, 9}	{7, 9, 9}	{0, 5, 10}
$\tilde{c}_5$	{5, 5, 5}	{0, 4, 8}	{0, 4, 8}	$\tilde{c}_5$	{8, 10, 10}	{0, 6, 12}	{0, 6, 12}
$\tilde{c}_6$	{6, 6, 6}	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}	$\tilde{c}_6$	{10, 10, 12}	{0, 7, 14}	{0, 7, 14}
$\tilde{c}_7$	{7, 7, 7}	{0, 6, 3}	{0, 6, 3}	$\tilde{c}_7$	{2, 2, 4}	{0, 8, 16}	{0, 8, 16}

Tableau 2.3 – Codes sélectionnés pour les scénarios A et B.

**Scénario A.** Nous cherchons à illustrer ici que les performances s'améliorent lorsque la proportion de paires optimales augmente parmi les différents utilisateurs. Dans ce scénario, le code de l'utilisateur d'intérêt  $c_1$ , est choisi de telle sorte que les paires non optimales donnent une variance de la MUI maximale (pire cas). Ce scénario doit ainsi montrer qu'on obtient le gain maximal en performances. D'après la propriété 6, les codes vérifient alors  $\chi_{1,n} = N_f^3 = 27$ . Un calcul simple montre que dans ce cas  $\kappa_{1,n}$  est maximal et vaut  $\kappa_{1,n} = (2N_f^3 + N_f)/3 = 19$ . Les différentes paires de codes produisent donc des valeurs de la MUI maximales pour la PPM et la PAM. Les codes conduisant à ces valeurs sont obtenus par exemple pour  $\tilde{c}_1 = \{0, 0, 0\}$  et  $\tilde{c}_n = \{n-1, n-1, n-1\}$  pour

$n = 2, \dots, N_c - 1$ . Les codes sélectionnés sont donnés au tableau 2.3.

**Scénario B.** Nous montrons ici le même phénomène que le scénario A lorsque les paires non-optimales ne créent pas le pire cas. On atteint un gain en performance en fonction du nombre de paires optimales significatif, mais inférieur à celui du scénario A. Nous avons choisi le code de l'utilisateur 1 de manière arbitraire égal à  $\tilde{c}_1 = \{0, 0, 2\}$ . Nous avons fixé de la même manière les valeurs du critère pour les paires non-optimales de telle sorte qu'elles vérifient  $\chi_{1,n} = \kappa_{1,n} = 15$ . Cette valeur correspond approximativement à la valeur moyenne du critère qui est compris entre  $N_f^2$  et  $N_f^3$ . Les paires non-optimales ont ainsi la même valeur de critère pour la PPM et la PAM. Les codes sélectionnés sont donnés au tableau 2.3.

**Scénario C.** Nous vérifions ici que les codes optimaux pour la PAM ( $\kappa_{1,n} = N_f^2$ ) satisfaisant différentes configurations de collisions (cf. section 2.3.3) ont les mêmes performances. Plus particulièrement, on cherche à vérifier que les codes vérifiant  $\sup_q \mathcal{C}_{1,n}(q) = 1$  se comportent de manière similaire à ceux vérifiant  $\sup_q \mathcal{C}_{1,n}(q) = 2$ . Nous avons vu dans l'annexe B.2 que les codes vérifiant  $\sup_q \mathcal{C}_{1,n}(q) = 2$  doivent aussi vérifier  $\sup_q \{\mathcal{C}_{m,n}^+(q)\} = 1$  et  $\sup_q \{\mathcal{C}_{m,n}^-(q)\} = 1$  pour être optimaux. Cette dernière condition implique  $\sup\{\mathcal{C}_{m,n}^-(q) \cdot \mathcal{C}_{m,n}^-(q)\} = 1$ , le nombre d'occurrences pour lesquelles  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q) \cdot \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$  ayant été défini par  $\pi_2^1$ . Nous avons sélectionné deux configurations différentes (afin d'éviter les cas « pathologiques ») de codes optimaux, ayant pour valeurs  $\pi_2^1 = \{0, 1, 2, 3\}$  correspondant respectivement à  $\xi_{1,n} = \{0, 1, 2, 3\}$ . Le cas  $\xi_{1,n} = 0$  correspondant au cas  $\sup_q \mathcal{C}_{1,n}(q) = 1$  et  $\xi_{1,n} > 0$  au cas  $\sup_q \mathcal{C}_{1,n}(q) = 2$ . Les codes sélectionnés sont donnés au tableau 2.4.

$\tilde{c}_n$	$\xi_{1,n} = 0$		$\xi_{1,n} = 1$		$\xi_{1,n} = 2$		$\xi_{1,n} = 3$
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	
$\tilde{c}_1$	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}	{0, 5, 10}
$\tilde{c}_2$	{7, 6, 15}	{6, 14, 7}	{0, 12, 2}	{9, 11, 1}	{0, 13, 16}	{10, 6, 5}	{0, 13, 3}
$\tilde{c}_3$	{8, 5, 9}	{7, 1, 10}	{0, 17, 7}	{1, 16, 6}	{1, 14, 16}	{2, 4, 17}	{3, 16, 6}
$\tilde{c}_4$	{9, 0, 15}	{9, 7, 17}	{8, 10, 0}	{2, 11, 1}	{2, 15, 9}	{3, 1, 14}	{10, 0, 13}
$\tilde{c}_5$	{10, 2, 8}	{10, 3, 15}	{11, 1, 5}	{3, 12, 2}	{4, 17, 8}	{6, 2, 15}	{12, 2, 15}
$\tilde{c}_6$	{11, 3, 5}	{11, 7, 15}	{14, 12, 2}	{4, 16, 6}	{5, 7, 0}	{7, 11, 2}	{13, 3, 16}
$\tilde{c}_7$	{7, 2, 1}	{12, 6, 14}	{16, 6, 12}	{5, 13, 3}	{9, 8, 4}	{8, 5, 3}	{14, 4, 17}

Tableau 2.4 – Codes sélectionnés pour le scénario C.

## 2.6.4 Analyse des résultats de simulations

**Scénario A.** Les résultats sont donnés aux figures 2.10 et 2.11 pour la PPM et la PAM respectivement. Ils sont conformes aux résultats attendus et montrent un gain important entre le pire cas et le cas optimal. Les résultats pour la PAM et la PPM sont similaires. Les courbes avec temps de garde montrent une légère amélioration des performances, ce qui s'explique par le peu d'ISI / IFI du canal.

**Scénario B.** Les résultats sont donnés aux figures 2.12 et 2.13 pour la PPM et la PAM respectivement. Ils sont conformes aux résultats attendus et montrent un gain significatif mais toutefois moins important que dans le cas du scénario A. Les courbes avec temps de garde montrent une légère amélioration des performances, ce qui s'explique par le peu d'ISI / IFI du canal.

**Scénario C.** Les résultats sont donnés à la figure 2.14. On remarque que pour toutes les valeurs de  $\xi_{1,n}$ , les courbes de performances conduisent à des valeurs de seuil sensiblement identiques, ce qui rejoint la théorie puisque la variance de la MUI ne dépend que de la valeur de  $\kappa_{m,n}$ , quelle que soit la valeur  $\xi_{1,n}$ . On remarque aussi que

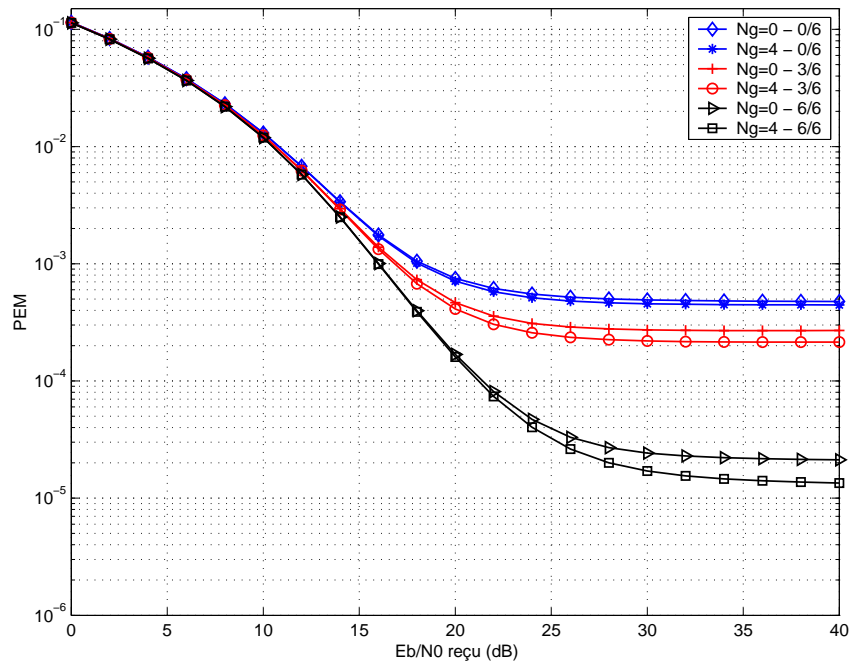


Figure 2.10 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) pour le scénario A en PPM. Récepteur SRake avec  $L_r = 3$  doigts,  $N_u = 7$ ,  $N_f = 3$  et  $N_c = 18$ . Avec et sans temps de garde, resp.  $N_g = 4$  et  $N_g = 0$ .

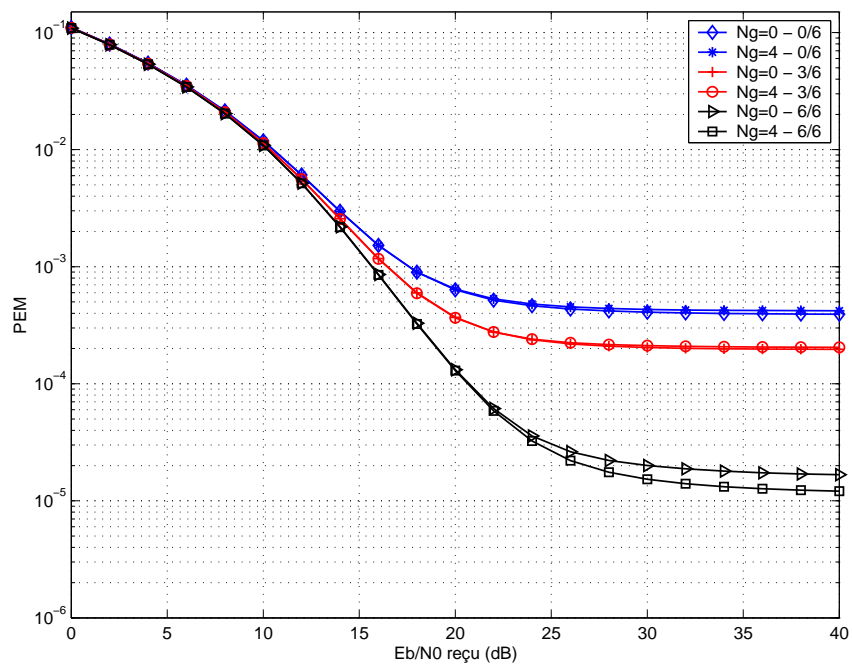


Figure 2.11 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) pour le scénario A en PAM. Récepteur SRake avec  $L_r = 3$  doigts,  $N_u = 7$ ,  $N_f = 3$  et  $N_c = 18$ . Avec et sans temps de garde, resp.  $N_g = 4$  et  $N_g = 0$ .

pour une valeur de  $\xi_{1,n}$  donnée, les performances ne dépendent pas du choix des codes. On constate toutefois une légère dégradation à mesure que  $\xi_{1,n}$  augmente en contradiction avec la théorie. Ce comportement, que l'on peut comprendre de manière intuitive puisque le nombre de collisions à 2 augmente, montre les limites de l'approche

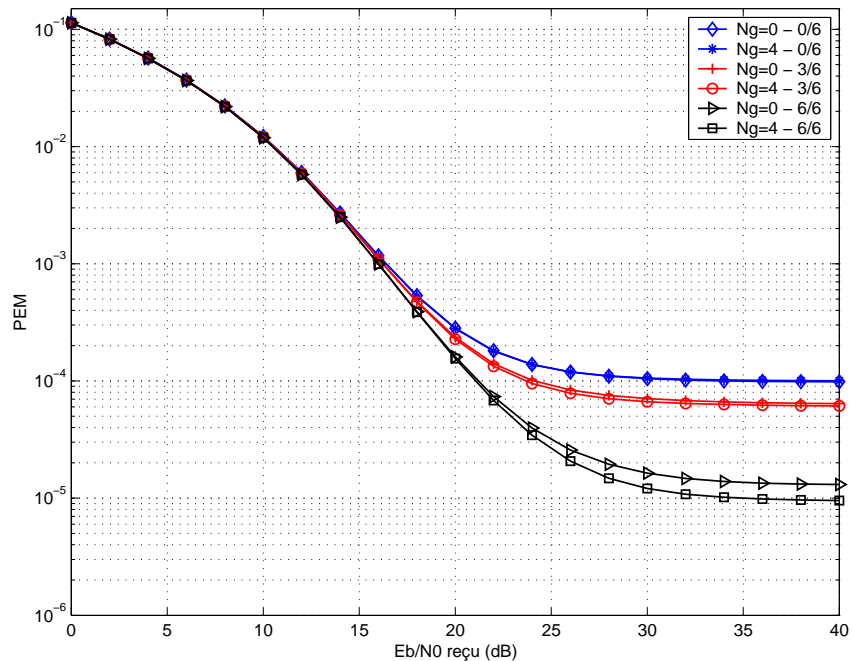


Figure 2.12 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) pour le scénario B en PPM. Récepteur SRake avec  $L_r = 3$  doigts,  $N_u = 7$ ,  $N_f = 3$  et  $N_c = 18$ . Avec et sans temps de garde, resp.  $N_g = 4$  et  $N_g = 0$ .

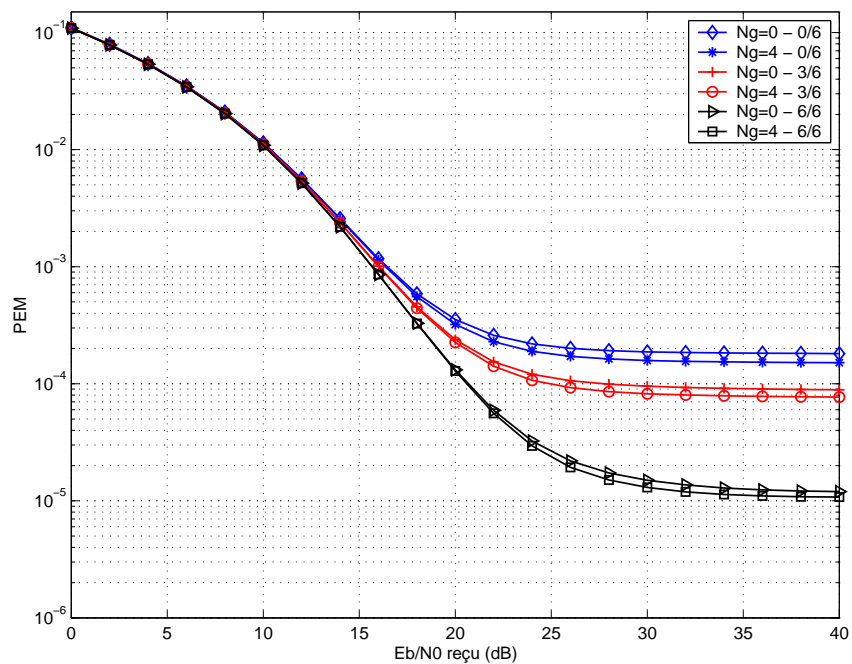


Figure 2.13 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) pour le scénario A en PAM. Récepteur SRake avec  $L_r = 3$  doigts,  $N_u = 7$ ,  $N_f = 3$  et  $N_c = 18$ . Avec et sans temps de garde, resp.  $N_g = 4$  et  $N_g = 0$ .

d'optimisation basée sur la minimisation de la MUI. Toutefois, les variations de performances sont faibles. Ceci suggère, dans les cas pratiques de recherche de paires de codes optimaux, de sélectionner progressivement les codes par valeurs croissantes de  $\xi_{1,n}$ .

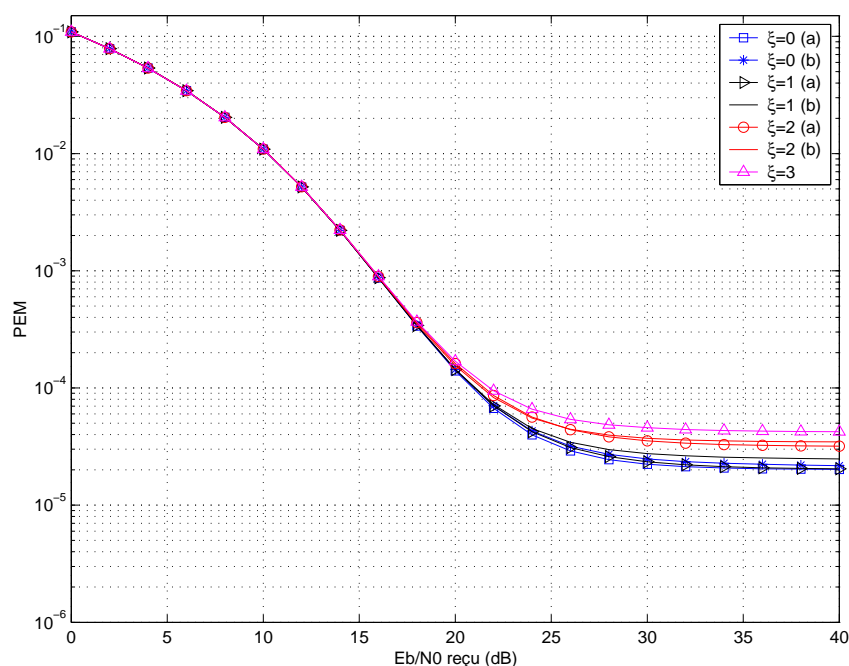


Figure 2.14 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) pour le scénario C en PAM. Récepteur SRake avec  $L_r = 3$  doigts,  $N_u = 7$ ,  $N_f = 3$  et  $N_c = 18$ .

## 2.7 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'interférence multi-utilisateur par le biais du calcul de la variance de la MUI sous des hypothèses très générales pour le canal de propagation et le récepteur. L'expression de la variance de la MUI, moyennée sur les paramètres aléatoires du modèle, montre que la contribution des codes apparaît en facteur de celle-ci, et ne dépend donc pas des autres paramètres du système de transmission.

Nous en avons déduit un critère qui permet de sélectionner l'ensemble des codes qui minimisent la variance de la MUI. Nous avons de plus établi une relation entre le critère de minimisation de la variance et le sup des intercorrélations entre les codes. Nous avons enfin vérifié par simulations que la minimisation de la MUI se traduit par une amélioration substantielle des performances en terme de probabilité d'erreur.

Nous avons regardé le problème de l'existence des paires optimales et démontré que la probabilité d'avoir une paire optimale lorsque l'on tire les deux codes de manière aléatoire tend vers 1 lorsque  $N_c$  tend vers l'infini, à  $N_f$  fixé. Ce résultat donne une stratégie pour augmenter le nombre de paires optimales et montre que lorsque  $N_c$  est suffisamment grand, un tirage aléatoire permet de trouver des paires optimales avec une complexité raisonnable. Il suggère aussi l'existence asymptotique des paires optimales pour  $N_c$  grand, quel que soit  $N_f$ . Cette existence, constatée par tirage exhaustif pour des valeurs quelconques de  $N_c$  et  $N_f$  ( $N_c \geq N_f$ ) reste à démontrer de manière formelle pour les cas non traités par [33].

Pour la construction des codes pour les systèmes DS-CDMA, il est d'usage de chercher aussi à minimiser l'autocorrélation des séquences (pour les retards différents de zéro) en plus des intercorrélations. Ceci permet de garantir des bonnes propriétés de synchronisation en minimisant les probabilités de fausse synchronisation sur des pics secondaires de l'autocorrélation. Nous n'avons pas considéré cette problématique dans ce chapitre, mais elle se traite simplement en sélectionnant *a posteriori* les paires optimales vérifiant les bonnes propriétés d'autocorrélation. Nous avons pu ainsi vérifier lors des différentes simulations de la section 2.6, qu'un certain nombre de codes vérifiaient  $\sup_{k \neq 0} \mathcal{C}_{n,n}(k) = 1$ .

Lorsque l'on cherche à construire un réseau de télécommunication utilisant des transmissions asynchrones, p. ex. le cas des liaisons montantes d'un réseau cellulaire, il convient que chaque utilisateur soit « protégé » au



mieux de l'interférence des autres utilisateurs. Autrement dit, on doit trouver un ensemble de codes tel que tout couple de codes forme une paire optimale. La construction d'un tel ensemble constitue une étape supplémentaire par rapport à l'identification des paires optimales. C'est un problème dont la solution exhaustive paraît rédhibitoire en terme de complexité qu'il serait intéressant d'étudier d'une manière approfondie. On peut noter que les constructions de [33] résolvent ce problème tout en garantissant aussi  $\sup_{k \neq 0} \mathcal{E}_{n,n}(k) = 1$ .

Les travaux présentés dans ce chapitre ont donné lieu à un article de journal [48] et à un article de congrès [49].



## Chapitre 3

# Étude de l'interférence entre symboles et entre trames

### 3.1 Introduction

Parce que les techniques ultra large bande seront utilisées pour des applications radio-mobile et parce que la propagation dans un canal radio-mobiles induit intrinèquement des trajets multiples, il est clair que le signal TH-UWB reçu subit de l'interférence entre symboles. Pour des raisons technologiques, il n'est envisagé dans les systèmes TH-UWB que des récepteurs simples de type « récepteur rake ». Il serait ainsi intéressant d'évaluer les performances de ce type de récepteur pour les transmissions TH-UWB dans un environnement à trajets multiples afin de dimensionner adéquatement ce dit-récepteur.

Le principal paramètre qui guide les performances et la complexité du récepteur rake est le nombre de doigts  $L_r$  considéré. Bien évidemment, plus le nombre de doigts est important et plus d'énergie du signal utile (cf. éq. (1.34)) est récoltée [50]. Néanmoins, il convient de remarquer que l'ISI / IFI croit également en fonction du nombre de doigts [27]. De nombreuses études portant sur l'influence du nombre de doigts dans les performances d'un système TH-UWB ont été conduites [27,51–55]. Toutefois la totalité de ces études se contente de procéder à des simulations de système, et aucune de leurs conclusions ou remarques ne sont étayées par des évaluations théoriques du niveau de l'interférence entre symboles et entre trames. Leur principale conclusion est que l'effet de l'ISI / IFI diminue lorsque le nombre de doigts augmente.

Une alternative à l'augmentation du nombre de doigts du récepteur rake pour atténuer l'effet de l'ISI / IFI est de rajouter, à l'émetteur, un temps de garde à la fin de chaque trame. Ceci permet de diminuer fortement la complexité du récepteur rake puisqu'alors peu de doigts sont nécessaires. Bien évidemment cette procédure pénalise l'efficacité spectrale. Par exemple, dans [7] et [13], un temps de garde correspondant à plus de cinquante pour cent de la durée de la trame est alloué. Dans la littérature, aucune étude, tant théorique que numérique, n'examine l'influence du temps de garde sur les performances du système TH-UWB, et ne propose de solution pour dimensionner le temps de garde de manière non-empirique.

C'est pourquoi l'objectif de ce chapitre est de calculer analytiquement la variance (l'énergie) de l'ISI / IFI en sortie du récepteur rake définie par le terme (1.35). Ceci nous permettra de quantifier sérieusement l'influence du nombre de doigts et de la taille du temps de garde sur les performances du système TH-UWB et de dimensionner correctement ces paramètres.

Ce chapitre est organisé comme suit : à la section 3.2, nous calculons analytiquement, tant pour la modulation PAM que pour la modulation PPM, la variance (l'énergie) de l'ISI / IFI. Comme dans le chapitre 2, les codes de saut temporel seront supposés déterministes. Afin d'étudier l'effet du nombre de doigts du récepteur rake et du temps de garde sur les performances du récepteur, nous comparons la variance de l'ISI / IFI à celle de l'énergie capturée qui est évaluée analytiquement à la section 3.3. A la section 3.4, nous illustrons numériquement l'analyse conduite dans les sections précédentes. Enfin à la section 3.5, nous comparons les effets respectifs de l'ISI / IFI et

de la MUI étudiée au chapitre 2.

## 3.2 Expression analytique de la variance de l'ISI / IFI

L'objectif de cette section est de trouver une expression analytique du terme suivant

$$V_{\text{ISI}} = \mathbb{E}_{a,d,\tau}[(z_2)^2],$$

pour lequel le moyennage s'effectue sur les symboles émis, les amplitudes et les retards du canal de propagation et où le terme  $z_2$  correspond à l'ISI / IFI à la sortie du récepteur rake. D'après l'équation (1.35), ce terme  $z_2$  s'écrit de la manière suivante

$$z_2 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_1^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} A_1^k \cdot y_{k,\ell,1}(0),$$

avec  $y_{k,\ell,n}(0)$  vérifiant soit l'équation (1.32) dans le contexte d'une modulation PAM, soit l'équation (1.28) dans le contexte de la modulation PPM. Comme nous nous focalisons sur un seul utilisateur d'intérêt (l'utilisateur 1), nous posons  $\alpha_1 = 1$  pour simplifier.

Dans les sous-sections 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, nous présenterons avec précision les calculs correspondant respectivement aux moyennages du carré de la sortie du récepteur rake  $(z_2)^2$  sur les amplitudes du canal de propagation, sur les symboles émis et sur les retards du canal de propagation dans le contexte de la modulation PAM. En revanche, les calculs dans le contexte de la modulation PPM sont relégués en annexe C.4.

### 3.2.1 Moyennage sur les amplitudes

Nous rappelons que les amplitudes du canal se décomposent de la manière suivante (cf. éq. (1.11))

$$A_n^k = a_n^k \cdot f(\tau_n^k),$$

où les variables  $a_n^k$  sont indépendantes des retards  $\tau_n^k$  et bien évidemment des symboles émis. Le moyennage sur les amplitudes s'effectue conditionnellement aux autres variables aléatoires que sont les symboles et les retards. C'est pourquoi, dans cette sous-section, nous allons uniquement calculer la moyenne de  $(z_2)^2$  par rapport aux variables aléatoires  $a_n^k$ , c.-à-d.,  $\mathbb{E}_a[(z_2)^2]$ .

A partir de (1.35), nous obtenons sans difficulté que

$$\mathbb{E}_a[(z_2)^2] = \sum_{\ell_1 \in \mathcal{L}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}}^{N_p} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq \ell_2}}^{N_p} \mathbb{E}_a[A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2} A_1^{k_1} A_1^{k_2}] \times y_{k_1,\ell_1,1}(0) \cdot y_{k_2,\ell_2,1}(0). \quad (3.1)$$

Afin de simplifier l'équation (3.1), nous avons besoin d'utiliser la relation entre les moments d'ordre 4 et les moments d'ordre 2 de variables aléatoires centrées [56]. Soient  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  des variables aléatoires centrées. Le moment d'ordre 4  $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$  se décompose de la manière suivante :

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \cdot \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \cdot \mathbb{E}[X_2 X_3] + \text{cum}(X_1, X_2, X_3, X_4), \quad (3.2)$$

avec  $\text{cum}(X_1, X_2, X_3, X_4)$  le cumulatif d'ordre 4 du vecteur  $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$ .

Étant donné (3.2), (3.1) s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbb{E}_a[(z_2)^2] = \sum_{\ell_1 \in \mathcal{L}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}}^{N_p} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq \ell_2}}^{N_p} [E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) + E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) + E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) + E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)], \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned}
 E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \mathbb{E}_a[A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2}] \cdot \mathbb{E}_a[A_1^{k_1} A_1^{k_2}] \times y_{k_1, \ell_1, 1}(0) \cdot y_{k_2, \ell_2, 1}(0), \\
 E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \mathbb{E}_a[A_1^{\ell_1} A_1^{k_1}] \cdot \mathbb{E}_a[A_1^{\ell_2} A_1^{k_2}] \times y_{k_1, \ell_1, 1}(0) \cdot y_{k_2, \ell_2, 1}(0), \\
 E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \mathbb{E}_a[A_1^{\ell_2} A_1^{k_1}] \cdot \mathbb{E}_a[A_1^{\ell_1} A_1^{k_2}] \times y_{k_1, \ell_1, 1}(0) \cdot y_{k_2, \ell_2, 1}(0), \\
 E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) &= \text{cum}(A_1^{\ell_1}, A_1^{\ell_2}, A_1^{k_1}, A_1^{k_2}) \times y_{k_1, \ell_1, 1}(0) \cdot y_{k_2, \ell_2, 1}(0).
 \end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires  $\{a_1^k\}_k$  sont indépendantes, nous pouvons simplifier grandement l'expression (3.3) en remarquant que

- le terme  $E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  et  $k_1 = k_2 = k$ . Ainsi il advient que

$$\sum_{\ell_1 \in \mathcal{L}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{N_p \\ k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}} \sum_{\substack{N_p \\ k_2=1 \\ k_2 \neq \ell_2}} E_1(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{N_p \\ k=1 \\ k \neq \ell}} E_1(\ell, \ell, k, k), \quad (3.4)$$

avec  $E_1(\ell, \ell, k, k) = I_1^k \times y_{k, \ell, 1}^2(0)$ ,

- le terme  $E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $k_1 = \ell_1$  et  $k_2 = \ell_2$ . Or, les sommes faisant intervenir  $E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  contraignent à satisfaire  $k_1 \neq \ell_1$  et  $k_2 \neq \ell_2$ , ce qui implique que

$$\sum_{\ell_1 \in \mathcal{L}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{N_p \\ k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}} \sum_{\substack{N_p \\ k_2=1 \\ k_2 \neq \ell_2}} E_2(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = 0, \quad (3.5)$$

- le terme  $E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $k_1 = \ell_2$  et  $k_2 = \ell_1$ . En posant  $k_1 = \ell_2 = k$  et  $k_2 = \ell_1 = \ell$ , nous obtenons

$$\sum_{\ell_1 \in \mathcal{L}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{N_p \\ k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}} \sum_{\substack{N_p \\ k_2=1 \\ k_2 \neq \ell_2}} E_3(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = \sum_{\substack{N_p \\ k=1 \\ k \neq \ell, k \in \mathcal{L}}} \sum_{\substack{N_p \\ \ell=1 \\ \ell \neq k, \ell \in \mathcal{L}}} E_3(\ell, k, k, \ell),$$

avec  $E_3(\ell, k, k, \ell) = I_1^\ell \cdot I_1^k \times y_{k, \ell, 1}(0) \cdot y_{\ell, k, 1}(0)$ . Comme l'ensemble  $\mathcal{L}$  est inclus dans l'ensemble  $\{1, \dots, N_p\}$ , nous avons

$$\sum_{\substack{N_p \\ k=1 \\ k \neq \ell, k \in \mathcal{L}}} \sum_{\substack{N_p \\ \ell=1 \\ \ell \neq k, \ell \in \mathcal{L}}} E_3(\ell, k, k, \ell) = \sum_{\substack{N_p \\ \ell=1 \\ \ell \neq k, \ell \in \mathcal{L}}} \sum_{\substack{N_p \\ k=1 \\ k \neq \ell, k \in \mathcal{L}}} E_3(\ell, k, k, \ell) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{N_p \\ k=1 \\ k \neq \ell}} \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} E_3(\ell, k, k, \ell), \quad (3.6)$$

avec

$$\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

- le terme  $E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  est non nul si et seulement si  $\ell_1 = \ell_2 = k_1 = k_2$ . Or, les sommes faisant intervenir  $E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2)$  contraignent à satisfaire  $k_1 \neq \ell_1$  et  $k_2 \neq \ell_2$ , ce qui implique que

$$\sum_{\ell_1 \in \mathcal{L}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{N_p \\ k_1=1 \\ k_1 \neq \ell_1}} \sum_{\substack{N_p \\ k_2=1 \\ k_2 \neq \ell_2}} E_4(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) = 0. \quad (3.7)$$

En réunissant les expressions (3.4), (3.6) et (3.7), nous réexprisons finalement le terme  $\mathbb{E}_a[(z_2)^2]$  de la manière suivante :

$$\mathbb{E}_a[(z_2)^2] = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_1^\ell \sum_{\substack{N_p \\ k=1 \\ k \neq \ell}} I_1^k \times [\rho_{k, \ell, 1} + \mu_{k, \ell, 1} \times \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \quad (3.8)$$

avec

$$\rho_{k, \ell, 1} = y_{k, \ell, 1}^2(0), \quad \text{et} \quad \mu_{k, \ell, 1} = y_{k, \ell, 1}(0) \cdot y_{\ell, k, 1}(0). \quad (3.9)$$

L'expression précédente (3.8) est valable tant pour les modulations PAM que PPM.

A partir de maintenant, les expressions vont différer suivant la modulation utilisée. Nous rappelons que, dans le corps de ce chapitre, nous nous focalisons uniquement sur la modulation PAM. L'expression obtenue pour la modulation PPM, ainsi que les calculs associés, sont reportés en annexe C.4.

### 3.2.2 Moyennage sur les symboles

Comme les symboles  $\{d_1(k)\}_k$  sont indépendants des amplitudes  $\{a_1^k\}_k$ , nous avons

$$\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] = \mathbb{E}_d[\mathbb{E}_a[(z_2)^2]] = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_1^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} I_1^k \left[ \mathbb{E}_d[\rho_{k,\ell,1}] + \mathbb{E}_d[\mu_{k,\ell,1}] \times \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}} \right].$$

En utilisant l'expression (1.32) des termes  $y_{k,\ell,1}(0)$ , de longues et fastidieuses manipulations algébriques, présentées en annexe C.1, conduisent à la propriété suivante sur les quantités  $\rho_{k,\ell,1}$  et  $\mu_{k,\ell,1}$ .

**Propriété 11** *Nous avons*

$$\begin{aligned} \rho_{k,\ell,1} &= d_1(-Q_1^{k,\ell})^2 [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)^2 [\mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + 2d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1) [\mathcal{C}_{1,1}^{+}(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^{-}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+}(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{-}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu_{k,\ell,1} &= d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(Q_1^{k,\ell} + 1) [\mathcal{C}_{1,1}^{+}(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^{-}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+}(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{-}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)d_1(Q_1^{k,\ell}) [\mathcal{C}_{1,1}^{-}(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^{+}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-}(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{+}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(Q_1^{k,\ell}) [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)d_1(Q_1^{k,\ell} + 1) [\mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)]. \end{aligned}$$

Comme les symboles sont supposés indépendants, identiquement distribués, centrés et de variance unité, nous avons

$$\mathbb{E}_d[d_1^2(i)] = 1, \quad \forall i \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_d[d_1(i)d_1(j)] = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Ceci implique que

$$\mathbb{E}_d[\rho_{k,\ell,1}] = [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})] \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)] \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c), \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d[\mu_{k,\ell,1}] &= \delta_{Q_1^{k,\ell},0} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &\quad + \delta_{Q_1^{k,\ell}+1,0} [\mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)], \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec

$$\delta_{k,0} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Finalement le carré de  $z_2$  moyenné sur les amplitudes et sur les symboles s'écrit

$$\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_1^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} I_1^k [a_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + b_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)], \quad (3.12)$$

avec

$$a_{k,\ell} := [\delta_{Q^{k,\ell},0} \times \mathbf{1}_{k \in \mathcal{L}} + 1] \cdot \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q^{k,\ell}) + [\delta_{Q^{k,\ell+1},0} \times \mathbf{1}_{k \in \mathcal{L}} + 1] \cdot \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q^{k,\ell}), \quad (3.13)$$

$$b_{k,\ell} := [\delta_{Q^{k,\ell},0} \times \mathbf{1}_{k \in \mathcal{L}} + 1] \cdot \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q^{k,\ell} + 1) + [\delta_{Q^{k,\ell+1},0} \times \mathbf{1}_{k \in \mathcal{L}} + 1] \cdot \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q^{k,\ell} + 1). \quad (3.14)$$

Lors du moyennage du carré de  $z_2$  sur les retards du canal, nous allons devoir nous limiter au récepteur rake partiel. Sans cette hypothèse, les densités de probabilité des retards sélectionnés ne peuvent pas être écrites analytiquement. Dans la suite, nous allons simplifier l'expression (3.12) lorsqu'un récepteur rake partiel est mis en place, c.-à-d., lorsque  $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, L_r\}$ , avec  $L_r \leq N_p$  le nombre total de trajets considérés.

Dans le contexte d'un PRake, (3.12) s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] &= \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} g(k, \ell) \\ &= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=1}^{\ell-1} g(k, \ell)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(k, \ell)}_{S_2} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} g(k, \ell)}_{S_3}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec

$$g(k, \ell) := I_1^k I_1^\ell [a_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + b_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)]. \quad (3.16)$$

Il faut d'abord remarquer que les termes  $S_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  dépendent des retards du canal par le biais du reste de la division euclidienne de la différence de retards. Contrairement à  $S_2$  et  $S_3$ , le terme  $S_1$  dépend de différences de retard négatives puisque ce sont les différences  $\Delta\tau_{k,\ell,1} = \tau_1^k - \tau_1^\ell$  qui interviennent avec  $k < \ell$ . Malheureusement, la propriété 1 du chapitre 1 ne fournit une expression analytique de la loi de probabilité de la différence de retard  $\Delta\tau_{k,\ell,1} = \tau_1^k - \tau_1^\ell$  que lorsque cette différence est positive, c.-à-d., lorsque  $k > \ell$ . Dans la suite, nous allons en fait montrer que le terme  $S_1$  peut se réécrire pour ne dépendre que de différences de retard positives.

En permutant les deux sommes dans  $S_1$ , nous obtenons que

$$S_1 = \sum_{k=1}^{L_r} \sum_{\ell=k+1}^{L_r} g(k, \ell).$$

En appliquant le changement de variables muettes  $k \rightarrow \ell$  et  $\ell \rightarrow k$ , nous avons

$$S_1 = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(\ell, k).$$

Il nous faut maintenant exprimer  $g(\ell, k)$  en fonction de  $g(k, \ell)$ . Pour cela, nous devons trouver le lien entre les composantes de la division euclidienne de  $\Delta\tau_{\ell,k,1}$  et  $\Delta\tau_{k,\ell,1}$ . Étant donné la définition des composantes de la division euclidienne<sup>1</sup> de  $\Delta\tau_{k,\ell,1}$  fournie par la propriété 3, nous avons trivialement

$$Q_1^{\ell,k} = -Q_1^{k,\ell} - 1, \quad (3.17)$$

$$q_1^{\ell,k} = N_c N_f - 1 - q_1^{k,\ell}, \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_1^{\ell,k} = T_c - \varepsilon_1^{k,\ell}. \quad (3.19)$$

Les relations précédentes et des propriétés sur les termes de collisions (cf. annexe C.1) conduisent à

$$a_{\ell,k} = b_{k,\ell} \quad \text{et} \quad b_{\ell,k} = a_{k,\ell}.$$

<sup>1</sup>L'utilisateur d'intérêt 1 étant synchronisé avec lui-même,  $\theta_1 = 0$ .

Comme la fonction  $s \mapsto r_{ww}(s)$  est paire, nous en déduisons que  $g(\ell, k) = g(k, \ell)$  et donc que  $S_1 = S_2$ . Par conséquent, nous avons la forme compacte suivante

$$\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] = 2 \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(k, \ell) + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} g(k, \ell).$$

Cette dernière expression ne fait bien intervenir que des valeurs positives de différences de retard. En remplaçant  $g(k, \ell)$  par son expression (3.16), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] &= 2 \sum_{\ell=1}^{L_r} I_1^\ell \sum_{k=\ell+1}^{L_r} I_1^k [a_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + b_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L_r} I_1^\ell \sum_{k=L_r+1}^{N_p} I_1^k [a_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + b_{k,\ell} \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dans la première somme de la partie droite de l'expression (3.20), comme  $k > \ell$ , on a  $Q_1^{k,\ell} \geq 0$  et comme  $k \leq L_r$ , on a  $k \in \mathcal{L}$  toujours satisfait ce qui implique une simplification de l'expression de (3.13) et de (3.14) puisque les termes  $\delta_{Q_1^{k,\ell}+1}$  sont nuls et que  $\mathbf{1}_{k \in \mathcal{L}} = 1$ . Dans la deuxième somme de la partie droite de l'expression (3.20), puisque  $k > L_r$ , nous avons  $k \notin \mathcal{L}$  et donc  $\mathbf{1}_{k \in \mathcal{L}} = 0$ . Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] &= 2 \sum_{\ell=1}^{L_r} I_1^\ell \sum_{k=\ell+1}^{L_r} I_1^k [([\delta_{Q_1^{k,\ell},0} + 1] \cdot \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\ &+ ([\delta_{Q_1^{k,\ell},0} + 1] \cdot \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L_r} I_1^\ell \sum_{k=L_r+1}^{N_p} I_1^k [(\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\ &+ (\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dans la sous-section suivante, nous allons moyenner l'expression (3.21) sur les retards du canal. Nous pouvons remarquer que l'expression précédente a été obtenue quelque soit la fonction  $f(\cdot)$  déterminant le profil de décroissance des amplitudes en fonction des retards dans le modèle de canal présenté au chapitre 1.

### 3.2.3 Moyennage sur les retards

A la sous-section précédente, nous avons établi l'expression de la variance de l'ISI / IFI moyennée sur les amplitudes et les symboles (3.21).

Pour moyenner l'expression (3.21) sur les retards, nous sommes obligés de considérer une fonction  $f(\cdot)$  particulière. Bien évidemment, nous choisissons la fonction  $f(\cdot)$  qui vérifie l'équation (1.15) et nous considérons un modèle à une seule grappe. Ainsi, nous avons

$$f(\tau) = e^{-2\tau/\gamma}.$$

Le moyennage sur les retards du canal pour calculer la variance de l'ISI / IFI est une tâche plus ardue que dans le contexte du calcul de la variance de la MUI car les retards  $\{\tau_1^k\}_k$  sont corrélés puisqu'ils sont associés au même utilisateur.

Le résultat est présenté au théorème 2 et est démontré en annexe C.2.

**Théorème 2** *Dans le cadre d'un modèle de canal à une seule grappe et si une modulation PAM est employée, alors la variance de l'interférence entre symboles et entre trames moyennée sur les symboles et les amplitudes et les retards du canal admet l'expression analytique suivante*



$$\begin{aligned}
 V_{ISI} &= \sigma_a^4 \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \left[ 2[(\delta_{Q,0} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q)]\Phi_{L_r, L_r}(Q, q) \right. \\
 &+ 2[(\delta_{Q,0} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1)]\Psi_{L_r, L_r}(Q, q) \\
 &+ \left. [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q)]\Phi_{N_p, L_r}(Q, q) + [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1)]\Psi_{N_p, L_r}(Q, q) \right], \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Phi_{N,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{(\lambda+2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^N \frac{\lambda^k}{(k-\ell-1)!} \\
 &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Psi_{N,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{(\lambda+2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^N \frac{\lambda^k}{(k-\ell-1)!} \\
 &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon.
 \end{aligned}$$

La propriété 12, dont la preuve est fournie à l'annexe C.3, montre que les termes  $\Phi_{N,L}(Q, q)$  et  $\Psi_{N,L}(Q, q)$  peuvent encore être simplifier.

**Propriété 12** Les termes  $\Phi_{N,L}(Q, q)$  et  $\Psi_{N,L}(Q, q)$  définis au théorème 2 se simplifient de la manière suivante

– pour  $N > L$ ,

$$\Phi_{N,L}(Q, q) = \lambda e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} \frac{\Gamma(N-\ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(N-\ell)} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\Psi_{N,L}(Q, q) = \lambda e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} \frac{\Gamma(N-\ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(N-\ell)} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon,$$

– pour  $N = L$ ,

$$\Phi_{L,L}(Q, q) = \lambda e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^{L-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} \frac{\Gamma(L-\ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(L-\ell)} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\Psi_{L,L}(Q, q) = \lambda e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^{L-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} \frac{\Gamma(L-\ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(L-\ell)} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon,$$

avec les fonctions gamma complète et gamma incomplète définies respectivement par

$$\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(a, x) := \int_x^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \text{pour } a > 0. \quad (3.23)$$

Étant donné le modèle de canal utilisé, nous savons que le nombre de trajets  $N_p$  créés par le canal de propagation est très grand. Par conséquent, il est raisonnable d'examiner le comportement asymptotique des termes introduits précédemment, c.-à-d., lorsque  $N_p \rightarrow \infty$ . Ceci nous permettra d'obtenir des expressions encore plus compactes. Bien évidemment, le nombre de doigts du récepteur rake  $L_r$ , quant à lui, reste fixé et assez petit afin de conserver une complexité acceptable.

Nous posons ainsi

$$\Phi_{\infty, L_r}(Q, q) := \lim_{N_p \rightarrow \infty} \Phi_{N_p, L_r}(Q, q) \quad \text{et} \quad \Psi_{\infty, L_r}(Q, q) := \lim_{N_p \rightarrow \infty} \Psi_{N_p, L_r}(Q, q).$$

En utilisant le fait qu'à  $X$  quelconque fixé, nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(N, X)}{\Gamma(N)} = 1,$$

et en utilisant le propriété 12, nous obtenons que

$$\Phi_{\infty, L_r}(Q, q) = e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + 2/\lambda\gamma} \right)^{L_r} \right] \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3.24)$$

$$\Psi_{\infty, L_r}(Q, q) = e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + 2/\lambda\gamma} \right)^{L_r} \right] \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon. \quad (3.25)$$

Nous posons également

$$V_{\text{ISI}|\infty} := \lim_{N_p \rightarrow +\infty} V_{\text{ISI}}.$$

Ce dernier terme  $V_{\text{ISI}|\infty}$  se déduit directement de l'expression (3.22) en remplaçant  $\Phi_{N_p, L_r}(Q, q)$  et  $\Psi_{N_p, L_r}(Q, q)$  par  $\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et  $\Psi_{\infty, L_r}(Q, q)$  respectivement. En revanche les termes  $\Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  et  $\Psi_{L_r, L_r}(Q, q)$  sont laissés identiques.

L'expression de  $V_{\text{ISI}|\infty}$ , bien que peu simple et assez difficilement interprétable, nous fournit quelques indications sur le comportement de la variance de l'ISI / IFI en fonction des codes de saut temporel et des paramètres du canal ( $\lambda$  et  $\gamma$ ).

### Analyse en fonction des codes de saut temporel

- Nous remarquons que les termes  $\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$ ,  $\Psi_{\infty, L_r}(Q, q)$ ,  $\Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  et  $\Psi_{L_r, L_r}(Q, q)$  décroissent de manière exponentielle en fonction de  $Q$  et  $q$  ce que confirme la figure 3.1 sur laquelle nous avons affiché, pour plusieurs valeurs (faibles) de  $L_r$ , les termes  $\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et  $\Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  en fonction de  $QN_f T_f + qT_c$ .

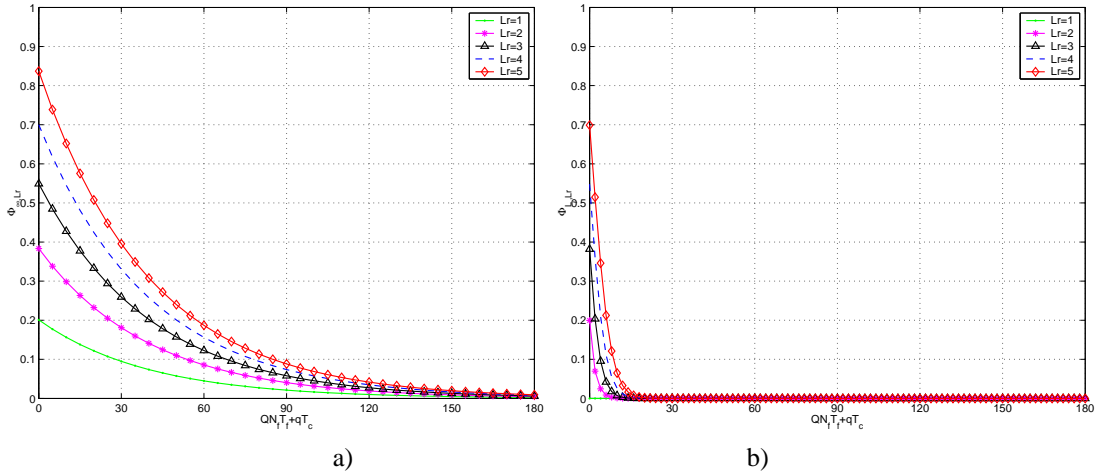


Figure 3.1 – a)  $\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et b)  $\Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  en fonction de  $QN_f T_f + qT_c$ .

Ainsi, il apparaît clair que les codes de saut temporel qui minimiseront la variance de l'ISI / IFI présenteront peu de collisions pour des faibles valeurs de décalage  $q$ . Cette remarque est confirmée par la figure 3.2 sur laquelle nous avons affiché les termes  $\mathcal{C}_{1,1}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,1}^-(q)$  en fonction de  $q$  pour les codes (dit « meilleurs ») qui minimisent le terme  $V_{\text{ISI}|\infty}$  et les codes (dit « pires ») qui maximisent le terme  $V_{\text{ISI}|\infty}$ .

Noter que les simulations de cette sous-section ont été réalisées avec les paramètres suivants :  $N_f = 3$ ,  $N_c = 10$ ,  $T_c = 5$  ns et  $T_f = 50$  ns ce qui induit un temps symbole de 150 ns. Les canaux utilisés admettent les paramètres  $\lambda = 0,1$  ns<sup>-1</sup> et  $\gamma = 200$  ns (cf. figure 1.6) ce qui induit un étalement temporel moyen de 200 ns. Ainsi il y a bien de l'interférence entre symboles au niveau du récepteur rake puisque le temps symbole est inférieur à l'étalement temporel moyen du canal.

- Nous remarquons à la figure 3.1 que les termes  $\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et  $\Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  ont des valeurs proches lorsque  $QN_f T_f + qT_c$  est faible. En revanche le terme  $\Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  décroît beaucoup plus rapidement que le terme

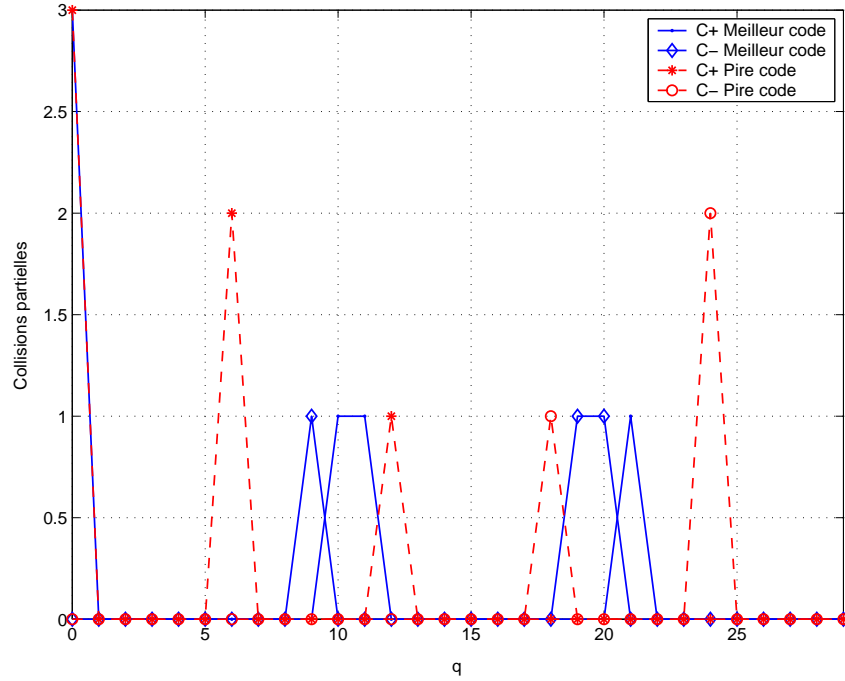


Figure 3.2 –  $\mathcal{C}_{1,1}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,1}^-(q)$  en fonction de  $q$ , pour le meilleur code et le pire code.

$\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$ . Ainsi il parait clair que la quantité  $\sum_{Q,q} \Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  est fortement inférieure à la quantité  $\sum_{Q,q} \Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$ . À la figure 3.3 nous avons tracé  $\sum_{Q,q} \Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et  $\sum_{Q,q} \Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  en fonction de  $L_r$ . Le terme  $\sum_{Q,q} \Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  est bien négligeable par rapport à  $\sum_{Q,q} \Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  pour des valeurs de  $L_r$  que nous utiliserons en pratique ( $L_r < 10$ ).

Ainsi en négligeant numériquement les termes associés à  $\Phi_{L_r, L_r}(\cdot)$  et  $\Psi_{L_r, L_r}(\cdot)$ , l'expression finale (3.22) de la variance de l'ISI / IFI devient

$$V_{\text{ISI}|\infty, \text{num.}} \approx \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q)] \Phi_{\infty, L_r}(Q, q) + [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1)] \Psi_{\infty, L_r}(Q, q).$$

Étant donné les expressions (3.24) et (3.25) de  $\Psi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et  $\Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$ , nous remarquons que le seul terme dépendant de  $L_r$  vaut  $(1 - 1/(1 + 2/\lambda\gamma))^{L_r}$  et peut être mis en facteur. De ce fait les sommes de collisions au carré sont indépendantes de  $L_r$ . Par conséquent la valeur des codes minimisant la variance de l'ISI / IFI ne dépend que très légèrement de la valeur de  $L_r$  pour peu que  $L_r$  ne soit pas trop grand. Cette conjecture est confirmée par simulation à la sous-section 3.4.1.

### Analyse en fonction de $\gamma$ et $\lambda$

Nous remarquons également que les expressions  $\Phi_{\infty, L_r}$ ,  $\Psi_{\infty, L_r}$ ,  $\Phi_{L_r, L_r}$  et  $\Psi_{L_r, L_r}$  semblent indiquer une décroissance exponentielle en fonction de l'inverse de  $\gamma$ . Ainsi si  $\gamma$  est petit, alors la variance de l'ISI / IFI sera faible. Ceci corrobore le sens commun puisque, lorsque  $\gamma$  est petit, la réponse impulsionnelle du canal est courte et donc induit peu d'ISI / IFI.

De plus nous remarquons que la variance de l'ISI / IFI est quasiment proportionnelle à  $\lambda$ . Ainsi, si  $\lambda$  est petit, alors la variance de l'ISI / IFI sera faible. Ceci est normal puisque plus le paramètre  $\lambda$  est faible et moins les trajets sont denses. Ainsi à un nombre de doigts  $L_r$  fixé, le récepteur rake capturera moins d'énergie d'interférence car moins de trajets sont présents.

Malheureusement les formules analytiques obtenues pour la variance de l'ISI / IFI ne nous donnent aucun

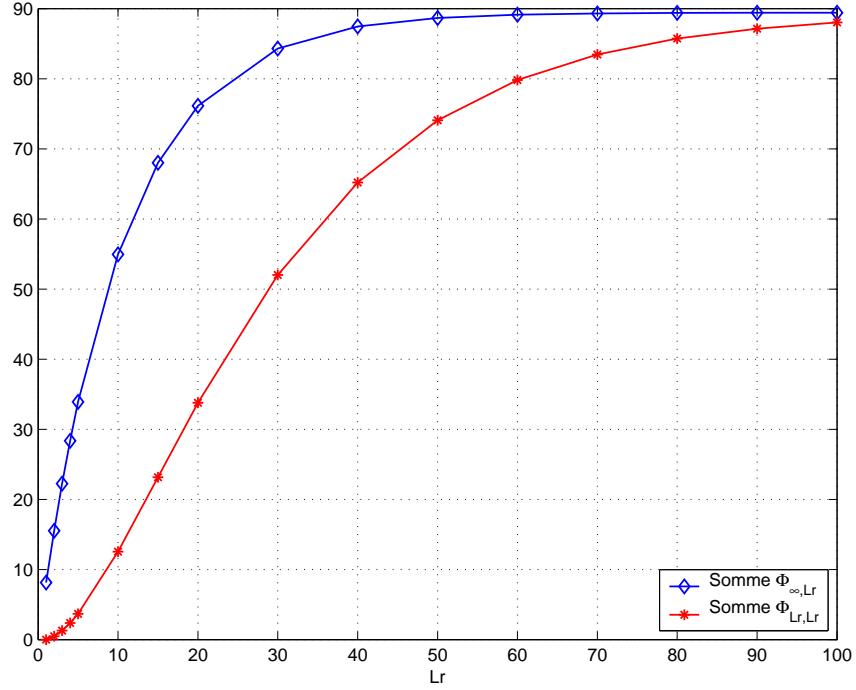


Figure 3.3 –  $\sum_{Q,q} \Phi_{\infty, L_r}(Q, q)$  et  $\sum_{Q,q} \Phi_{L_r, L_r}(Q, q)$  en fonction de  $L_r$ .

renseignement sur l'influence du nombre de doigts  $L_r$  et sur l'influence de la taille du temps de garde, noté  $T_g$ . Par conséquent, nous allons avoir recours aux simulations pour mesurer ces influences. Les simulations sont reportées à la section 3.4.

Des expressions analytiques similaires ont été obtenues pour la modulation PPM (cf. annexe C.4) et conduisent à une analyse identique.

Pour étudier totalement l'influence du nombre de doigts du récepteur rake sur les performance du système, nous devons également évaluer le niveau de l'énergie du signal utile en fonction du nombre de doigts. C'est pourquoi la section suivante est consacrée au calcul analytique de la variance du signal utile  $z_1$  donné par (1.34) dans le contexte d'une modulation PAM et d'un récepteur rake partiel.

### 3.3 Expression analytique de la variance du signal utile

Nous définissons la variance du signal utile de la manière suivante

$$U := \mathbb{E}_{a,d,\tau} [(z_1)^2].$$

Grâce à l'expression (1.34) et à la propriété 4, nous avons

$$z_1 = \sum_{\ell=1}^{L_r} (A_1^\ell)^2 d_1(0) \mathcal{C}_{1,1}^+(0) r_{ww}(0).$$

Comme  $\mathcal{C}_{1,1}^+(0) = N_f$ , nous obtenons

$$z_1 = N_f r_{ww}(0) d_1(0) \sum_{\ell=1}^{L_r} (A_1^\ell)^2.$$

Puisque les amplitudes sont supposées indépendantes et à moyenne nulle, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_a[(z_1)^2] &= N_f^2 r_{ww}^2(0) d_1(0)^2 \times \sum_{\ell, \ell'=1}^{L_r} \mathbb{E}_a[A_1^\ell A_1^{\ell'} A_1^{\ell''} A_1^{\ell'''}] \\ &= N_f^2 r_{ww}^2(0) d_1(0)^2 \times \left[ \sum_{\ell=1}^{L_r} J_1^\ell + \sum_{\ell_1=1}^{L_r} I_1^{\ell_1} \sum_{\substack{\ell_2=1 \\ \ell_2 \neq \ell_1}}^{L_r} I_1^{\ell_2} \right],\end{aligned}\quad (3.26)$$

avec  $I_1^\ell$  et  $J_1^\ell$  définis par (1.12).

Le moyennage sur les symboles (que nous supposons de variance unité) conduit à

$$\mathbb{E}_{a,d}[(z_1)^2] = N_f^2 r_{ww}^2(0) \times \left[ \sum_{\ell=1}^{L_r} J_1^\ell + \sum_{\ell_1=1}^{L_r} I_1^{\ell_1} \sum_{\substack{\ell_2=1 \\ \ell_2 \neq \ell_1}}^{L_r} I_1^{\ell_2} \right].$$

En remplaçant les termes  $J_1^\ell$  et  $I_1^\ell$  par leurs expressions dans le cadre d'un canal à une seule grappe admettant un profil de décroissance des amplitudes exponentiel en fonction des retards et en moyennant alors sur les retards, nous avons

$$U = N_f^2 r_{ww}^2(0) \left[ \mu_a^4 \sum_{\ell=1}^{L_r} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^\ell + 2 \sum_{\ell_1=1}^{L_r} \sum_{\ell_2=\ell_1+1}^{L_r} \left( \frac{\lambda^{\ell_2} (\lambda + 2/\gamma)^{\ell_1 - \ell_2}}{(\lambda + 1/\gamma)^{\ell_1}} \right) \right].$$

Le calcul des sommes géométriques impliquées dans l'équation précédente conduit à l'expression finale suivante

$$U = N_f^2 r_{ww}^2(0) \lambda \gamma \left[ \frac{\mu_a^4}{2} + \lambda \gamma + \left( \frac{1}{1 + 2/\lambda \gamma} \right)^{L_r} \left( 2 - \frac{\mu_a^4}{2} + \lambda \gamma \right) - 2 \left( \frac{1}{1 + 1/\lambda \gamma} \right)^{L_r} (1 + \lambda \gamma) \right]. \quad (3.27)$$

Nous remarquons que la variance du signal utile ne dépend pas du code de l'utilisateur d'intérêt. De plus la variance ne dépend des paramètres statistiques du canal que par le biais du produit  $\lambda \gamma$ . Enfin la variance croit en fonction de  $L_r$  mais admet une asymptote à l'infini (cf. figure 3.4)

La valeur de l'asymptote de la figure 3.4 vaut

$$\lim_{L_r \rightarrow \infty} U = N_f^2 r_{ww}^2(0) \lambda \gamma \left[ \frac{\mu_a^4}{2} + \lambda \gamma \right].$$

En dernier lieu, le calcul du terme  $U$  pour la modulation PPM a également été effectué et est reporté en annexe C.5.

### 3.4 Simulations

Par défaut, nous allons considérer les paramètres suivant pour le système TH-UWB :  $N_f = 3$ ,  $N_c = 10$ ,  $T_c = 5$  ns et  $T_f = 50$  ns. Ainsi le temps symbole est de 150 ns.

Le modèle de canal retenu est bien évidemment celui présenté à la section 1.3. En revanche, nous n'allons pas considérer les valeurs de  $\lambda$  et  $\gamma$  fournies dans [8]. En effet, dans [8], l'étalement temporel moyen du canal est de l'ordre de la dizaine de nanosecondes ce qui implique que le niveau de l'interférence entre symboles et entre trames est très faible, comme déjà remarqué dans [27]. Afin de quantifier au mieux l'influence de l'ISI / IFI, nous préférons choisir des canaux présentant des étalements temporels moyens plus élevés, d'où,  $\lambda = 0$ ,  $1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200$  ns.

L'impulsion  $w(t)$  choisie est celle présentée au paragraphe 1.2.3 et toutes les simulations sont effectuées avec une modulation PAM.

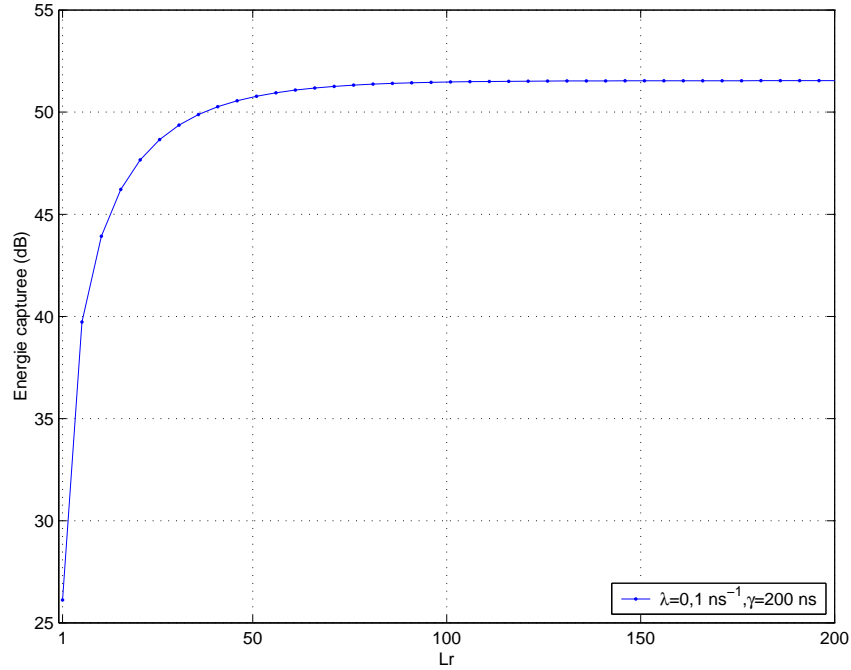


Figure 3.4 –  $U$  (dB) en fonction de  $L_r$  avec les paramètres canal  $\lambda = 0,1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200 \text{ ns}$  et les paramètres système  $N_f = 3$ ,  $N_c = 10$ ,  $T_c = 5 \text{ ns}$  et  $T_f = 50 \text{ ns}$ .

### 3.4.1 Analyse de la variance de l'ISI / IFI en fonction du nombre de doigts

Sur la figure 3.5, nous avons tracé le rapport  $U/V_{\text{ISI}|\infty}$  pour le code minimisant  $V_{\text{ISI}|\infty}$ , pour le code maximisant  $V_{\text{ISI}|\infty}$  et aussi sa valeur moyenne calculé sur les  $N_c^{N_f} = 1000$  codes possibles en fonction de  $L_r$ . Nous remarquons que le meilleur code pour  $L_r = 1$  reste un excellent code même pour d'autres valeurs de  $L_r$ . Ainsi le meilleur code pour  $L_r = 1$  peut être constamment utilisé sans grande perte quelque soit le récepteur rake mis en œuvre. Ceci confirme l'analyse effectuée à la sous-section 3.2.3 qui affirmait que la valeur de  $L_r$  influencerait que très légèrement le choix des meilleurs codes.

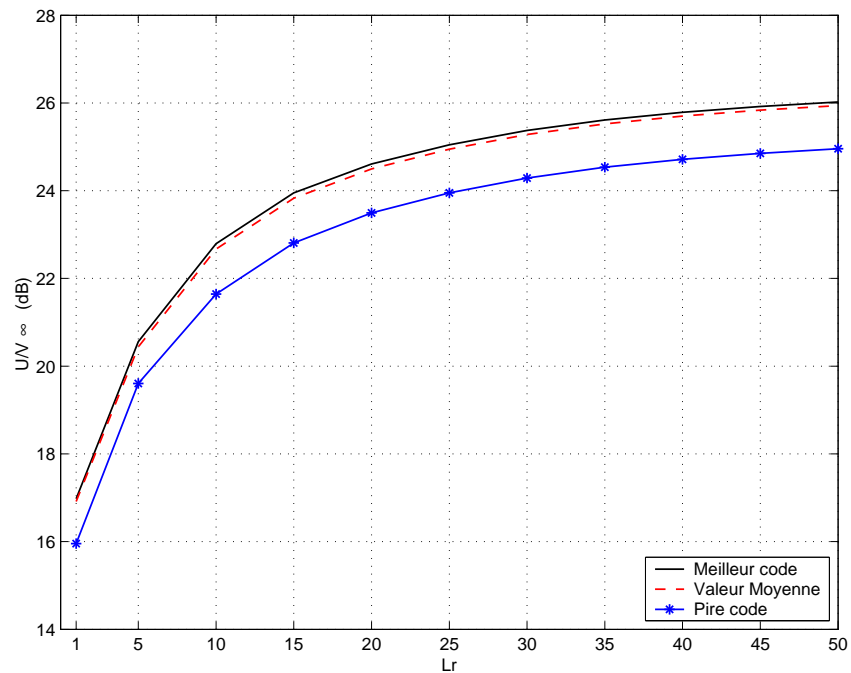
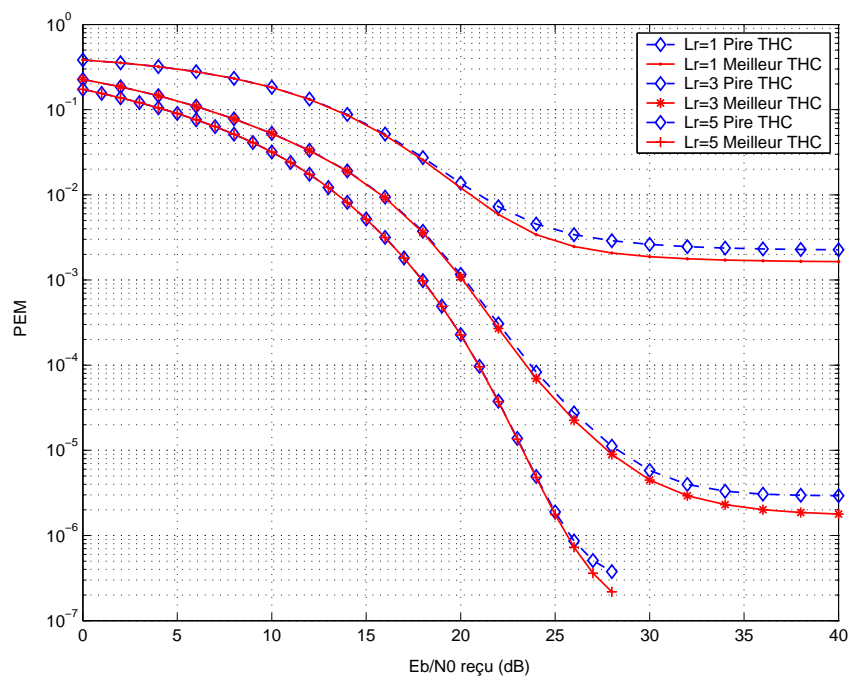
Sur la figure 3.6 nous avons tracé la probabilité d'erreur moyenne en fonction de  $E_b/N_0$  moyen pour différentes valeurs de  $L_r$ . A chaque valeur de  $L_r$ , nous avons considéré le code minimisant  $V_{\text{ISI}|\infty}$  et pour le code maximisant  $V_{\text{ISI}|\infty}$ . La définition de la probabilité d'erreur moyenne est donnée au chapitre 2.

Nous remarquons que les codes influencent peu les performances ce que nous avons déjà entrevu à la figure 3.5. En revanche augmenter le nombre de doigts permet d'améliorer de manière significative les performances et est donc un bon moyen de lutter contre l'ISI / IFI. Comme sans codage, de bonnes performances (telles  $\text{PEM} = 10^{-5}$ ) sont atteintes avec un faible nombre de doigts, il n'est pas nécessaire de surdimensionner le récepteur rake. Il n'est notamment pas nécessaire de sélectionner les valeurs de  $L_r$  qui permettent de saturer le rapport signal sur interférence  $U/V_{\text{ISI}|\infty}$ .

### 3.4.2 Analyse de la variance de l'ISI / IFI en fonction du temps de garde

Pour lutter contre l'ISI / IFI, il est usuel de rajouter un temps de garde à la fin de chaque trame comme indiqué à la figure 3.7. A chaque trame, nous rajoutons  $N_g$  chips vides. De ce fait la durée du temps de garde est  $T_g := N_g T_c$ . Le temps symbole augmente et vaut alors  $(N_c + N_g)N_f T_c$  ce qui a pour effet de diminuer le débit utile.

Sur la figure 3.8, nous avons tracé le rapport  $U/V_{\text{ISI}|\infty}$  en fonction du temps de garde  $T_g$  pour plusieurs valeurs du nombre de doigts  $L_r$ . A chaque valeur de  $L_r$ , nous avons considéré le code minimisant  $V_{\text{ISI}|\infty}$  et le code

Figure 3.5 –  $U/V_{ISI|\infty}$  (dB) en fonction de  $L_r$ .Figure 3.6 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) pour le meilleur et le pire code pour différentes valeurs de  $L_r$ .

maximisant  $V_{ISI|\infty}$ .

Nous remarquons de nouveau, en dépit de la présence d'un temps de garde, que les codes influencent peu les performances. Nous observons surtout que le rapport  $U/V_{ISI|\infty}$  ne tend pas vers l'infini lorsque le temps de garde

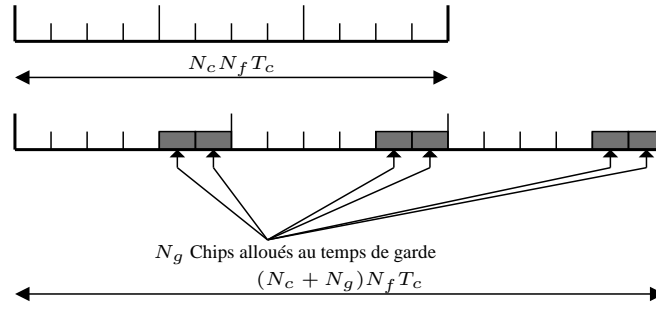


Figure 3.7 – Illustration portant sur le temps de garde (avec  $N_c = 4$ ,  $N_f = 3$  et  $N_g = 2$ ).

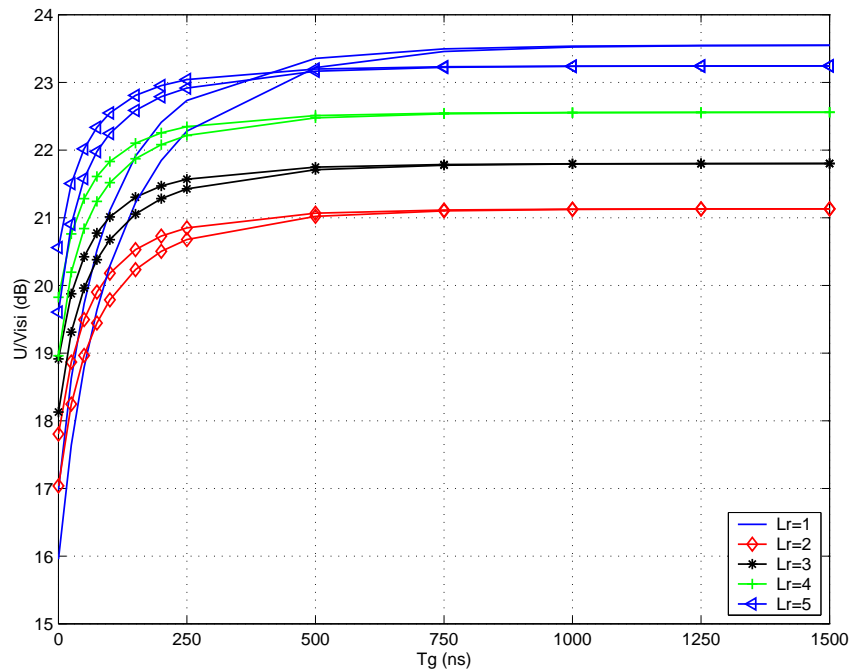


Figure 3.8 –  $U/V_{ISI\infty}$  (dB) en fonction de  $T_g$  (ns), pour  $L_r = 1, \dots, 5$  avec les pires et les meilleurs codes.

$T_g$  augmente indéfiniment. Ceci est dû au fait que le terme  $V_{ISI\infty}$  ne tend pas vers zéro et qu'il subsiste donc une interférence résiduelle. Cette interférence est générée par la corrélation entre le signal de référence et le signal associé à un retard appartenant à l'intervalle  $[-T_w, T_w]$ . Cette interférence ne peut être ôtée par la présence d'un temps de garde et se déduit de (3.22) en ne retenant que les termes associés à  $Q = 0$  et  $q = 0$  qui sont relatifs à la corrélation au sein d'un même chip. Par conséquent nous avons

$$V_{ISI\infty, T_g \rightarrow \infty} = \sigma_a^4 \cdot N_f^2 \cdot [4 \Phi_{L_r, L_r}(0, 0) + \Phi_{\infty, L_r}(0, 0)]. \quad (3.28)$$

Cette interférence résiduelle est indépendante des codes de l'utilisateur. Ainsi pour de grand temps de garde, tout code conduit exactement aux mêmes performances. De plus, nous pouvons imaginer raisonnablement de dimensionner le temps de garde de telle manière à ne avoir plus que de l'interférence résiduelle. Ainsi, dans notre exemple, nous aurions  $T_g \approx 500$  ns alors que l'étalement temporel moyen vaut  $\gamma = 200$  ns.

Sur la figure 3.9, nous avons tracé le rapport  $U/V_{ISI\infty}$  en fonction du temps de garde  $T_g$ , pour différents paramètres statistiques des canaux (avec  $L_r = 2$ ).



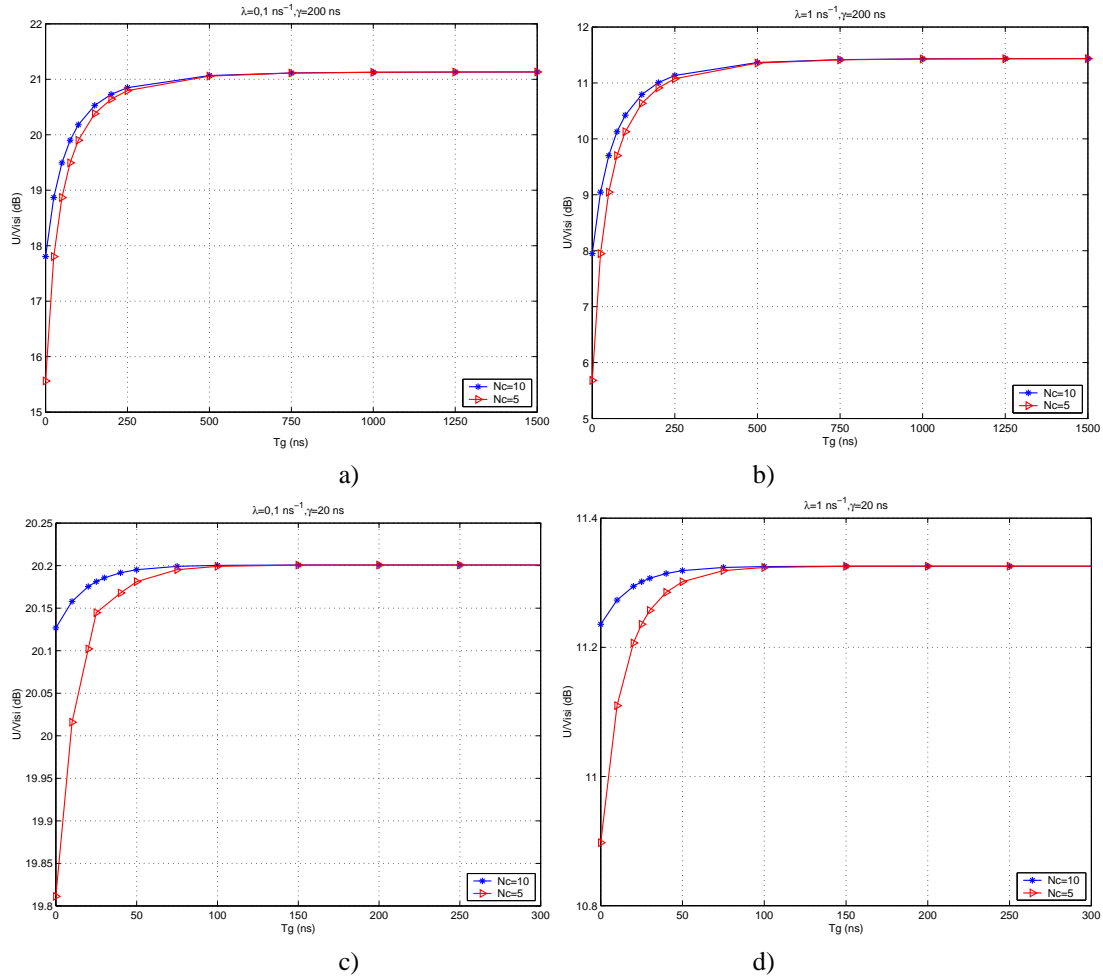


Figure 3.9 –  $U/V_{ISI|\infty}$  (dB) en fonction de  $T_g$  (ns) pour différents paramètres statistiques des canaux ( $L_r = 2$ ). a)  $\lambda = 0,1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200 \text{ ns}$ . b)  $\lambda = 1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200 \text{ ns}$ . c)  $\lambda = 0,1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 20 \text{ ns}$ . d)  $\lambda = 1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 20 \text{ ns}$ .

Nous remarquons que la valeur de  $T_g$  pour laquelle il ne reste que de l'interférence résiduelle dépend directement de  $\gamma$  et est totalement indépendante de  $\lambda$  et du nombre de chips. Ceci est normal puisque  $\gamma$  conditionne l'étalement temporel des trajets. Nous observons que le paramètre  $\lambda$  qui indique la densité des trajets influence fortement la valeur de l'interférence résiduelle. Ceci est logique plus  $\lambda$  est grand et plus il y aura de trajets dans l'intervalle  $[-T_w, T_w]$  et donc plus il y aura d'interférence résiduelle. Enfin le nombre de chips  $N_c$  n'influence ni le niveau de l'interférence résiduelle, ni le dimensionnement du temps de garde.

Sur la figure 3.10, nous avons tracé la probabilité d'erreur moyenne en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  pour différentes valeurs du temps de garde  $T_g$ . Le nombre de doigts du récepteur rake est fixé à  $L_r = 1$ . Le code retenu minimise la variance de l'ISI/IFI,  $V_{ISI}$  lorsque le temps de garde est nul.

La valeur plancher de la probabilité d'erreur décroît rapidement avec la durée du temps de garde. Afin de mieux visualiser ce qui se passe à fort  $\bar{E}_b/N_0$ , nous avons tracé, sur la figure 3.11.a, la valeur plancher en fonction de  $T_g$  pour  $L_r = 1$  et  $L_r = 2$  avec le code qui minimise la variance de l'ISI/IFI,  $V_{ISI}$ . Nous remarquons que la probabilité d'erreur cesse de s'améliorer bien avant la valeur de  $T_g$  indiquée par la figure 3.8. Étant donné la figure 3.11.a, nous préconisons de choisir un temps de garde de l'ordre de 200 ns, c.-à-d., de l'ordre de l'étalement temporel moyen du canal. Ainsi le choix effectué à partir du rapport signal à interférence s'est avéré pessimiste et donc peut

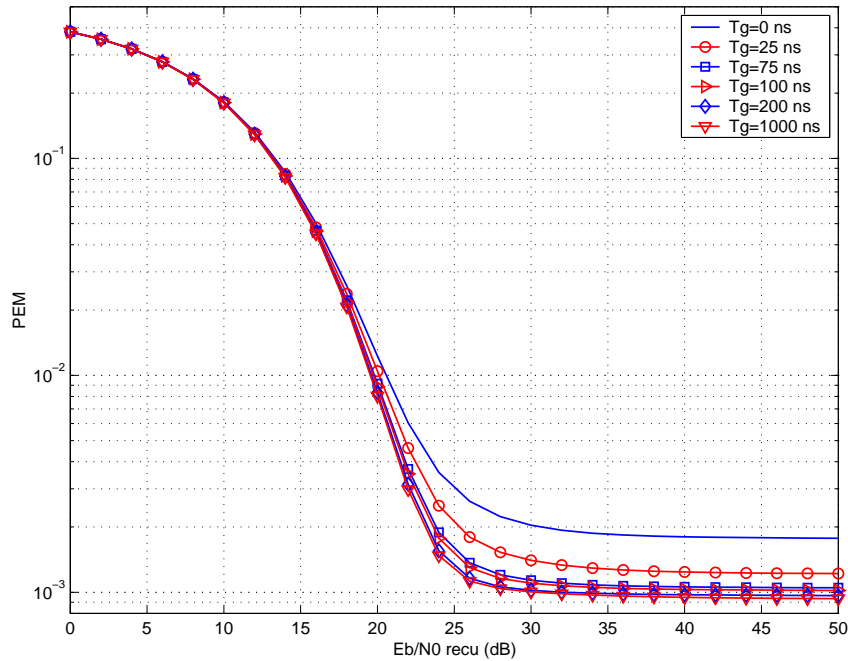


Figure 3.10 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB) (avec  $L_r = 1$ ).

conduire à surdimensionner le système au détriment du débit. Le choix suggéré  $T_g = \gamma$  est indépendant de  $L_r$  et a été confirmé par d'autres simulations pour n'importe quel autre code de l'utilisateur d'intérêt et n'importe quelles valeurs de  $\gamma$  et  $\lambda$  (cf. figure 3.11.b).

### 3.4.3 Analyse de la loi de probabilité de l'ISI / IFI

D'après la figure 3.8, nous remarquons que le rapport  $U/V_{ISI|\infty}$  est plus élevé avec  $L_r = 1$  qu'avec les autres valeurs du nombre de doigts. La figure 3.11.a montre que ce phénomène ne se traduit pas au niveau de la PEM. Ceci indique qu'il faut manier les indications apportées par le rapport signal à interférence avec beaucoup de précaution. Ce n'est donc pas une mesure absolue et parfaite des performances d'un système. Néanmoins il a le mérite de sa « simplicité ». Ainsi il n'y a pas de lien direct et trivial entre la PEM et le rapport  $U/V_{ISI}$ . Ceci est dû au fait que l'ISI / IFI n'admet pas une distribution gaussienne. La figure 3.12 qui présente la densité de probabilité estimée de l'ISI / IFI pour deux récepteurs rake partiel ( $L_r = 1$  et  $L_r = 3$ ) ainsi que la densité de probabilité des lois gaussiennes de même variance confirme la non-gaussienneté de l'ISI / IFI.

Nous avons de plus calculé le kurtosis de la variable aléatoire correspondant à l'ISI / IFI. Le kurtosis, noté  $\kappa(X)$ , est le cumulants normalisés d'ordre 4 d'une variable aléatoire  $X$  et admet l'expression suivante [56] :

$$\kappa(X) = \frac{\mathbb{E}[X^4]}{\mathbb{E}[X^2]^2} - 3.$$

Le kurtosis est nul pour une variable gaussienne et de ce fait sert à mesurer une certaine « distance » entre la distribution de la variable étudiée et la distribution gaussienne. Pour la variable  $z_2$ , nous avons trouvé des kurtosis égaux à 13,75 et 13,86 pour  $L_r = 1$  et  $L_r = 3$  respectivement. Ceci confirme que l'ISI / IFI ne suit pas une loi gaussienne.

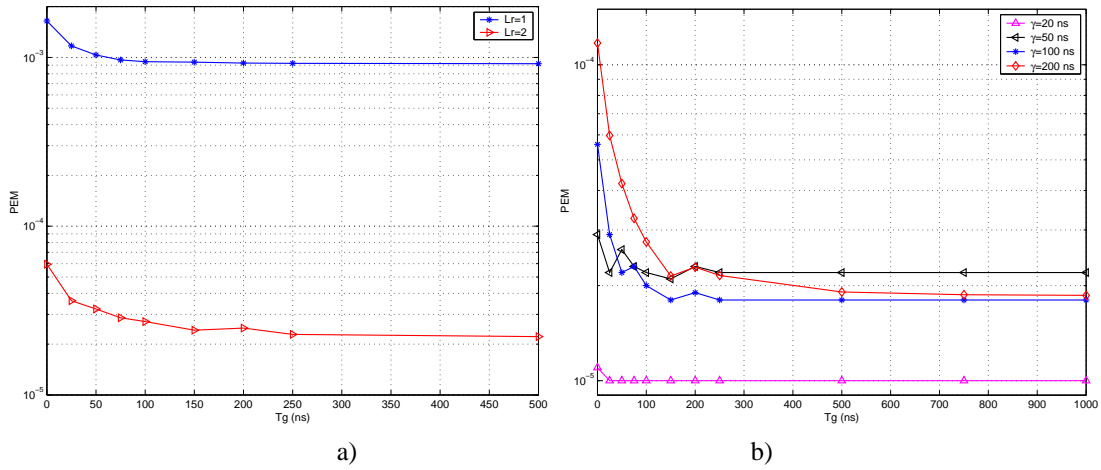


Figure 3.11 – PEM placher en fonction de  $T_g$  (ns). a) Pour différentes valeurs de  $L_r$ . b) Pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

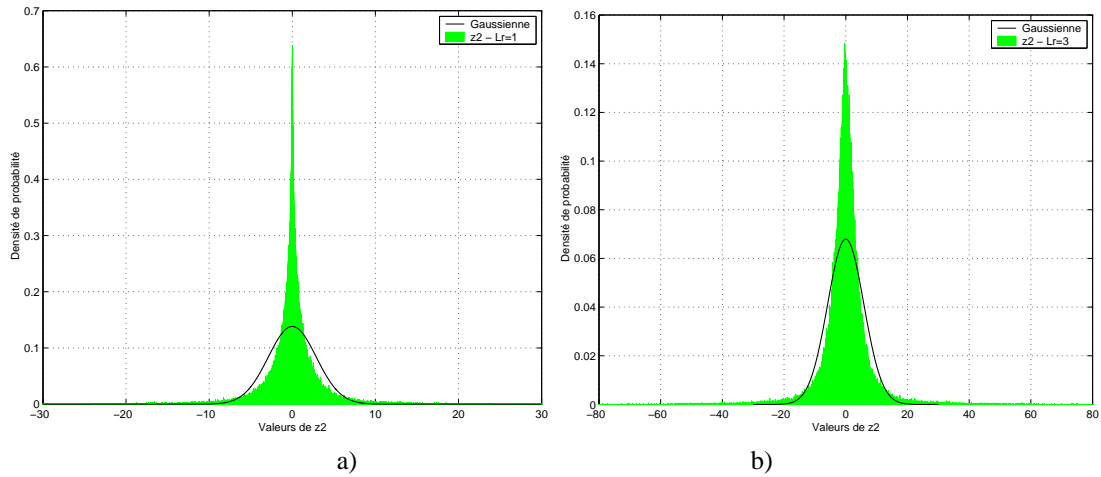


Figure 3.12 – Densité de probabilité estimée de  $z_2$ . a)  $L_r = 1$ . b)  $L_r = 3$ .

### 3.5 Comparaison de l'ISI / IFI et de la MUI

Dans le chapitre 2, nous avons montré qu'un système UWB est sujet à de la MUI qui dégrade nettement les performances du dit système. Cette interférence pouvait néanmoins être atténuée en choisissant judicieusement les codes de saut temporel. Nous rappelons que, si un récepteur rake partiel est mis en place, la variance de la MUI admet l'expression suivante en régime asymptotique ( $N_p \rightarrow +\infty$ )

$$V_{\text{MUI}|\infty} = \frac{\sigma_a^4}{N_f T_f} r_{ww}(0) (\lambda\gamma)^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + 1/\lambda\gamma} \right)^{L_r} \right] \cdot \sum_{n=2}^{N_u} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{E}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{E}_{1,n}^{-2}(q)]. \quad (3.29)$$

Cette dernière équation se déduit trivialement de l'équation (2.20) présentant la variance de la MUI en mode non-asymptotique lorsque l'utilisateur d'intérêt est l'utilisateur 1.

Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés à évaluer l'interférence entre symboles et entre trames. Il conviendrait évidemment de savoir quelle est l'interférence perturbant le plus le système, c.-à-d., quelle est l'interférence dominante. L'objectif de cette section est de fournir des éléments de réponses à cette question en comparant

numériquement les valeurs du terme  $V_{\text{MUI}|\infty}$  et du terme  $V_{\text{ISI}|\infty}$ .

Dans la suite de ce paragraphe nous avons choisi deux configurations de codes :

- tous les utilisateurs admettent des codes « optimaux » qui minimisent la variance de l'interférence multi-utilisateur c.-à-d. que les codes de chaque couple d'utilisateur  $m$  et  $n$  vérifient

$$\sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{m,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{m,n}^{-2}(q)] = N_f^2,$$

- tous les utilisateurs ont les « pires » codes, c.-à-d., ceux qui entraînent une variance de l'interférence multi-utilisateur maximale et qui vérifient par paire

$$\sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} [\mathcal{C}_{m,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{m,n}^{-2}(q)] = N_f^3.$$

Nous avons remarqué, par le biais de simulations, que si on imposait en plus aux codes d'avoir les derniers chips de chaque trame vide afin de créer un intervalle de garde de longueur  $T_g$ , alors il était toujours possible de trouver un nombre de codes optimaux (ou pires) suffisants pour en attribuer un à chaque utilisateur du système.

Les paramètres du système ( $N_c$ ,  $N_f$ ,  $T_c$ ,  $T_w$  et  $w(t)$ ) prennent les mêmes valeurs qu'à la section 3.4.

À la figure 3.13 nous avons tracé le rapport  $V_{\text{MUI}|\infty}/V_{\text{ISI}|\infty}$  en fonction du temps de garde  $T_g$  pour des meilleurs et pires codes avec deux valeurs différentes de  $L_r$ . Le nombre d'utilisateurs a été fixé à  $N_u = 6$ . Nous remarquons que le rapport  $V_{\text{MUI}|\infty}/V_{\text{ISI}|\infty}$  diminue quand le temps de garde augmente. Par conséquent, à partir d'une certaine valeur du temps de garde minimale, la variance de l'interférence multi-utilisateur devient négligeable par rapport à celle de l'interférence entre symboles et entre trames. Ce résultat est *a priori* étonnant puisque le temps de garde a été mis en place pour diminuer l'interférence entre symboles et entre trames, et il s'avère qu'il est plus efficace à atténuer l'interférence multi-utilisateur que l'interférence pour laquelle il a été conçu. L'explication est la suivante : l'expression analytique de la variance de l'interférence multi-utilisateur (cf. éq. (3.29)) indique que celle-ci est proportionnelle au débit égal à  $(N_f T_f)^{-1} \text{ s}^{-1}$ . La présence de ce terme est dû au moyennage sur l'asynchronisme entre les utilisateurs supposé uniformément distribué sur  $[0, N_f T_f[$ . Lorsque le temps de garde augmente, le débit diminue et donc la variance de l'interférence multi-utilisateur aussi. En revanche nous avons vu, dans ce chapitre, que quelque soit la valeur du temps de garde, la variance de l'interférence entre symboles et entre trames stagne vers une constante en raison de l'interférence que nous avons nommée « résiduelle ». Par conséquent, il est clair qu'il existe une valeur limite de temps de garde à partir de laquelle la variance de l'interférence multi-utilisateur est inférieure à celle de l'interférence entre symboles et entre trames. Nous remarquons également que les allures des courbes ne dépendent ni de la nature des codes ni du nombre de doigts considérés pour concevoir le récepteur rake. En revanche la nature des codes et le nombre de doigts influencent fortement la valeur du temps de garde à partir duquel  $V_{\text{ISI}|\infty}$  est supérieur à  $V_{\text{MUI}|\infty}$ .

À la figure 3.14, nous avons tracé le rapport  $V_{\text{MUI}|\infty}/V_{\text{ISI}|\infty}$  en fonction de  $T_g$  pour différentes valeurs du nombre d'utilisateurs  $N_u$  utilisant à chaque fois les meilleurs codes. Le nombre de doigts est fixé à  $L_r = 2$ . Bien évidemment, le seuil à partir duquel la variance de la MUI est inférieure à celle de l'ISI / IFI croît avec le nombre d'utilisateurs  $N_u$ .

À la figure 3.15 nous avons tracé la PEM en fonction du temps de garde  $T_g$  pour plusieurs valeurs du nombre d'utilisateurs utilisant soit les meilleurs codes soit les pires codes. Nous avons fixé  $\bar{E}_b/N_0 = 50 \text{ dB}$ . Evidemment les performances se dégradent si le nombre d'utilisateurs présents augmente. Nous remarquons également un net écart de performances selon que des codes optimaux aient été utilisés ou pas. Néanmoins cet écart tend à diminuer quand la taille du temps de garde augmente. En effet, quand le temps de garde est bien supérieur à l'étalement temporel moyen du canal, la variance de l'interférence entre symboles et entre trames qui alors se résume à de l'interférence résiduelle est prépondérante sur l'interférence multi-utilisateur. De ce fait améliorer la variance de l'interférence multi-utilisateur par le biais d'un choix judicieux des codes ne conduit qu'à des gains mineurs en performances. Ainsi quand  $T_g$  est très grand par rapport à  $\gamma$ , les performances sont directement reliées au niveau d'interférence entre symboles résiduelle. Cette interférence résiduelle, qui n'est jamais nulle quelque soit la valeur de  $T_g$ , produit donc l'effet plancher observable sur la courbe.

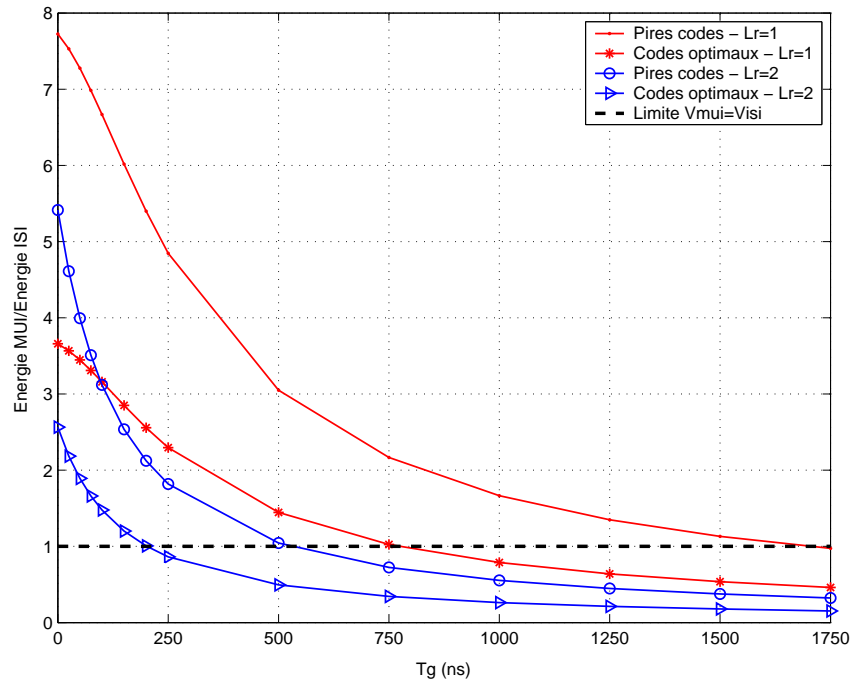


Figure 3.13 –  $V_{MUI|\infty}/V_{ISI|\infty}$  en fonction de  $T_g$  (ns) pour les pires et meilleurs codes et différentes valeurs de  $L_r$ .

En conclusion, la minimisation conjointe de la variance de la MUI (en choisissant les codes optimaux) et de la variance de l'ISI / IFI (en dimensionnant correctement le temps de garde) entraîne une amélioration significative des performances. Néanmoins le niveau relatif des deux interférences dépend fortement de  $\gamma$  et donc des statistiques des canaux rencontrés.

### 3.6 Amélioration du récepteur rake

Dans la section précédente, nous avons remarqué que la variance de la MUI diminue fortement quand le temps de garde augmente tandis que la variance de l'ISI / IFI stagne en raison de la présence de l'interférence résiduelle mentionnée à l'équation (3.28). Il est clair qu'il serait intéressant de concevoir un récepteur, simple comme le récepteur rake, mais qui ne présente pas d'interférence résiduelle. Dans la suite, nous allons montrer qu'en modifiant légèrement le récepteur rake, nous sommes en mesure d'éliminer toute l'interférence résiduelle et donc d'améliorer grandement les performances du système.

Nous allons d'abord examiner le problème dans un cas simple afin de comprendre les mécanismes qui permettent de modifier le récepteur rake afin qu'il ne subisse plus l'interférence résiduelle. Soit  $x(t)$  le signal émis correspondant à l'émission d'un symbole  $d$  par le biais d'une modulation linéaire 2-PAM. Alors

$$x(t) = dg(t) \quad (3.30)$$

avec  $d$  un symbole valant  $\pm 1$  et  $g(t)$  un filtre de mise en forme quelconque de norme unité. Comme un seul symbole a été émis, il n'y a évidemment pas d'interférence entre symboles et donc la seule interférence visible est l'interférence résiduelle. On considère que le canal de propagation reliant l'émetteur et le récepteur est composé de deux trajets d'atténuations ( $A_1, A_2$ ) et de retards respectifs ( $0, \tau$ ). Le signal reçu  $y(t)$  s'écrit alors

$$y(t) = A_1x(t) + A_2x(t - \tau) + b(t), \quad (3.31)$$

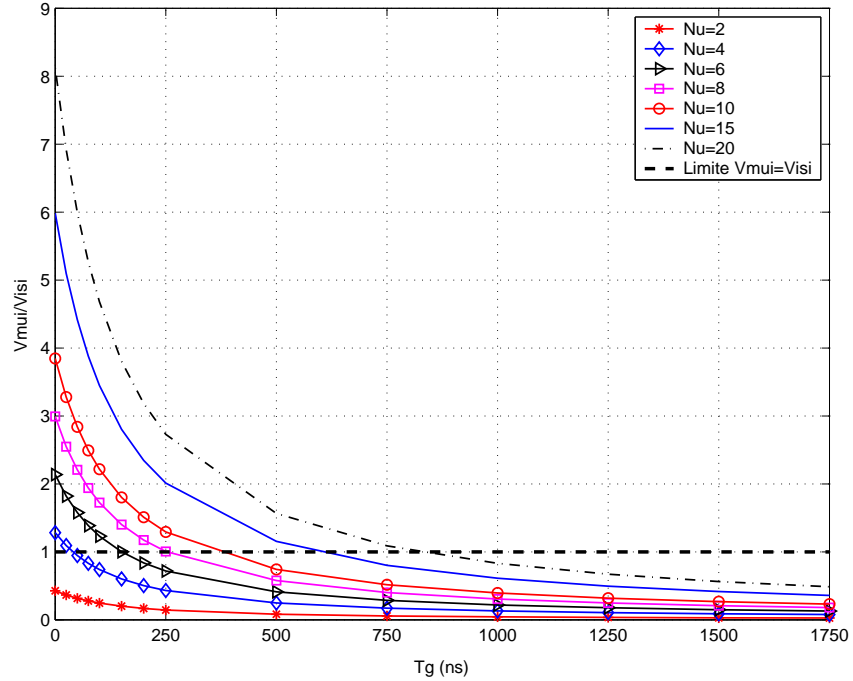


Figure 3.14 –  $V_{MUI|\infty}/V_{ISI|\infty}$  en fonction de  $T_g$  (ns) pour différents nombres d'utilisateurs actifs.

avec  $b(t)$  un bruit blanc gaussien. Nous avons alors

$$y(t) = df(t) + b(t) \quad \text{avec} \quad f(t) = A_1g(t) + A_2g(t - \tau).$$

Comme un unique symbole a été transmis au cours de la communication, il est bien connu que le récepteur optimal se compose d'un filtre adapté à  $f(t)$ , d'un échantillonneur à l'instant '0' et d'un détecteur à seuil. Le boîtier composé du filtre adapté et de l'échantillonneur correspond en fait à une projection du signal reçu  $y(t)$  sur une base de l'espace-signal. L'espace-signal étant ici engendré par  $f(t)$ , nous avons, en amont du détecteur à seuil, le signal  $z = \langle y(t)|f(t) \rangle$ , avec  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire de  $L^2$ . Le terme  $z$ , que nous noterons dans la suite  $z_{\text{complet}}$ , s'écrit de la manière suivante

$$z_{\text{complet}} = A_1 \langle y(t)|g(t) \rangle + A_2 \langle y(t)|g(t - \tau) \rangle \quad (3.32)$$

$$= d(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\rho) + b_{\text{complet}}, \quad (3.33)$$

avec  $\rho = \langle g(t)|g(t - \tau) \rangle$  et  $b_{\text{complet}} = \langle b(t)|f(t) \rangle$ . Grâce à l'équation (3.32), nous remarquons que ce récepteur est un récepteur rake complet. De plus le terme  $(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\rho)$  est égal à la norme au carré de  $f(t)$ , notée  $\|f(t)\|^2 = \langle f(t)|f(t) \rangle$  et est donc positif par construction. Ceci peut également se remarquer en montrant, par le biais de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que le terme  $\rho$  est compris entre  $-1$  et  $1$ . Ainsi en l'absence de bruit le signe de  $z_{\text{complet}}$  est identique à celui de  $d$  et donc aucune erreur n'est commise au cours de la transmission. Par conséquent la probabilité d'erreur tend vers 0 quand le Rapport Signal à Bruit (RSB) augmente. C'est pourquoi aucun effet plancher ne sera visible.

Étant donné l'équation (1.33), nous savons que le signal  $z_{\text{complet}}$  peut être séparé en deux signaux : le signal utile  $z_{1,\text{complet}}$  et le signal interférent  $z_{2,\text{complet}}$  dû à l'interférence entre les échos. Étant donné les définitions respectives de  $z_{1,\text{complet}}$  et de  $z_{2,\text{complet}}$  (cf. éqs. (1.34) et (1.35)), nous avons, dans le contexte particulier du signal (3.30)

$$z_{1,\text{complet}} = d(A_1^2 + A_2^2) \quad \text{et} \quad z_{2,\text{complet}} = d(2A_1A_2\rho).$$

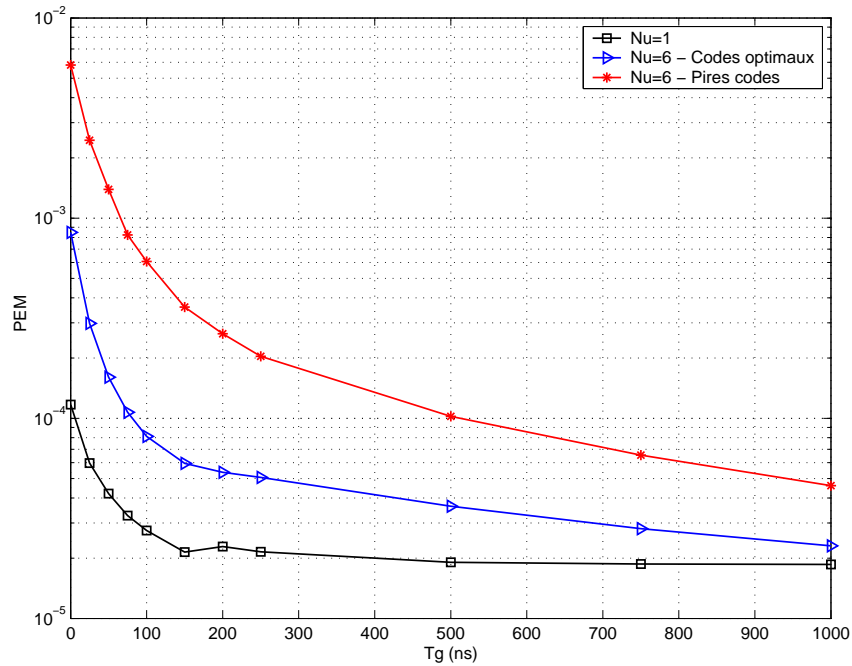


Figure 3.15 – Probabilité d'erreur moyenne en fonction de  $T_g$  (ns).

Nous remarquons que le signal  $z_{2,\text{complet}}$  est bien un signal perturbateur car suivant les canaux aléatoires rencontrés,  $2A_1A_2\rho$  peut être positif ou négatif ce qui a pour effet que sa présence peut éloigner ou rapprocher le point  $z_{\text{complet}}$  de la frontière de décision. Néanmoins les termes  $z_{1,\text{complet}}$  et  $z_{2,\text{complet}}$  ne sont pas indépendants entre eux et surtout le terme  $z_{2,\text{complet}}$  n'induit pas, en l'absence de bruit, une localisation de  $z_{\text{complet}}$  dans la mauvaise région de décision.

**Remarque 3** Supposons que  $A_1$  et  $A_2$  soient des variables aléatoires i.i.d. de loi gaussienne centrée et de variance unité et que  $\tau$  soit une variable déterministe. Il est facile de montrer que la variable aléatoire  $z_{2,\text{complet}}$  est centrée et de variance  $4\rho^2$ . Par conséquent la variance du terme interférent n'est pas nulle et provoque l'existence d'une interférence résiduelle. Néanmoins l'existence de cette interférence résiduelle n'induit pas d'effet plancher pour le récepteur rake complet. Cette apparente contradiction peut être levée en remarquant que le signal utile  $z_{1,\text{complet}}$  et le terme interférent  $z_{2,\text{complet}}$  ne sont pas indépendants entre eux. Ainsi la seule donnée de la variance du terme interférent n'est pas suffisante pour en déduire le comportement du récepteur rake. En effet afin de décrire parfaitement les statistiques du signal reçu, il faudrait au minimum connaître l'intercorrélacion entre les signaux utile et interférent (et aussi les statistiques d'ordre supérieur puisque ces termes ne sont pas gaussiens (cf. sous-section 3.4.3)). D'ailleurs, la non-gaussiannité des signaux et leur dépendance implique que le lien entre la probabilité d'erreur moyenne et la variance du signal interférent n'est pas direct et fait intervenir certainement d'autres statistiques du signal.

Maintenant, au lieu d'appliquer le récepteur optimal, c.-à-d. le récepteur rake complet (en l'occurrence à deux doigts), on applique seulement un récepteur rake partiel à un doigt, ce qui correspond à la projection du signal reçu  $y(t)$  sur l'espace engendré par le premier trajet, c.-à-d., par  $A_1g(t)$ . Ainsi le signal, sur lequel la décision sera prise, se note  $z_{\text{partiel}}$  et s'écrit

$$z_{\text{partiel}} = A_1 \langle y(t)|g(t) \rangle \quad (3.34)$$

$$= d(A_1^2 + A_1A_2\rho) + b_{\text{partiel}} \quad (3.35)$$

avec  $b_{\text{partiel}} = A_1 \langle b(t)|g(t) \rangle$ .

Malheureusement cette fois-ci, rien n'assure que le terme  $(A_1^2 + A_1 A_2 \rho)$  soit positif. Par exemple, considérons  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -3$  et  $\rho = 0.5$ . Alors, nous avons  $z_{\text{partiel}} = -d/2 + b_{\text{partiel}}$ . Ainsi le signal  $z_{\text{partiel}}$ , même en l'absence de bruit et pour cette réalisation particulière du canal, se situe dans la mauvaise région de décision ce qui induit une erreur. Ceci justifie la présence d'un effet plancher sur la courbe de probabilité d'erreur moyennée sur tous les canaux.

**Remarque 4** Dans le cas d'un unique écho et si  $A_1 > A_2$ , le récepteur rake partiel synchronisé sur le trajet le plus puissant (c.-à-d.  $A_1$ ) ne présente pas d'effet plancher car le terme  $(A_1^2 + A_1 A_2 \rho)$  est positif puisque  $\rho$  est compris entre  $-1$  et  $1$ . En revanche l'exemple numérique présenté ci-dessus montre que le récepteur rake partiel synchronisé sur le premier trajet (qui n'était pas le plus puissant de deux trajets) admet un plancher dans les performances. Ainsi lorsque deux trajets sont présents, le récepteur rake sélectionnant le trajet le plus puissant (ce qui correspond au récepteur rake sélectif) est vierge d'effet plancher. Est-ce encore vrai quand le canal de propagation a plus de deux trajets ? La réponse est négative car de nombreux contre exemples existent comme le suivant : soit  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -0,9$ ,  $A_3 = -0,8$  et  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T/4$ ,  $\tau_3 = T/2$  avec  $T$  la période symbole et  $g(t)$  la fonction porte normalisée. Avant le détecteur à seuil, le signal  $z$  s'écrit  $dA_1(A_1 + A_2\rho_2 + A_3\rho_3)$  avec  $\rho_2 = \langle g(t)|g(t - \tau_2) \rangle$  et  $\rho_3 = \langle g(t)|g(t - \tau_3) \rangle$ . Étant donné les choix de la fonction  $g(t)$  et des retards, nous avons numériquement que  $\rho_2 = 3/4$  et  $\rho_3 = 1/2$ . Ainsi le terme  $(A_1 + A_2\rho_2 + A_3\rho_3)$  admet la valeur négative  $-0,075$  ce qui conduira à l'existence d'un effet plancher pour la probabilité d'erreur moyenne. Par conséquent, considérer un récepteur rake sélectif à la place d'un récepteur rake partiel ne permet d'éliminer le seuil dû à l'interférence résiduelle sauf à de rares exceptions près.

Encore une fois, le signal  $z_{\text{partiel}}$  peut être décomposé en partie utile et en partie interférente de la manière suivante

$$z_{1,\text{partiel}} = d(A_1^2) \quad \text{et} \quad z_{2,\text{partiel}} = d(A_1 A_2 \rho).$$

De nouveau le détecteur à seuil assimile le terme  $z_{2,\text{partiel}}$  à du bruit puisque ce terme peut déplacer le signal  $z_{\text{partiel}}$  dans la mauvaise région de décision. Néanmoins le terme  $z_{2,\text{partiel}}$  contient de l'information sur  $d$  et il est ainsi clair que prendre la décision directement sur le signal  $z_{\text{partiel}}$  n'est pas nécessairement pertinent. La question est maintenant de savoir comment modifier le récepteur de façon à tirer profit de l'information utile présente dans le terme  $z_{2,\text{partiel}}$  tout en n'augmentant pas la complexité du récepteur.

Si le récepteur a la connaissance du canal, c.-à-d., des atténuations  $A_1$  et  $A_2$  et du retard  $\tau$ , il est alors capable de calculer le terme  $\rho$  et finalement le facteur multiplicatif  $(A_1^2 + A_1 A_2 \rho)$  présent devant le symbole  $d$  dans l'équation (3.35). C'est pourquoi en multipliant le terme  $z_{\text{partiel}}$  par  $(A_1^2 + A_1 A_2 \rho)$ , nous obtenons le terme  $z_{\text{amélioré}}$  suivant

$$\begin{aligned} z_{\text{amélioré}} &= (A_1^2 + A_1 A_2 \rho) z_{\text{partiel}} \\ &= d(A_1^2 + A_1 A_2 \rho)^2 + b_{\text{amélioré}}, \end{aligned}$$

avec  $b_{\text{amélioré}} = (A_1^2 + A_1 A_2 \rho) b_{\text{partiel}}$ .

En l'absence de bruit, le terme  $z_{\text{amélioré}}$  est par construction dans la région de décision du symbole émis quelque soit le canal de propagation rencontré. Par conséquent, aucun plancher n'apparaîtra sur la courbe de la probabilité d'erreur moyenne en fonction du RSB. Ce nouveau type de récepteur sera appelé, dans la suite, récepteur rake **amélioré**. Le récepteur rake amélioré, quoique nécessitant exactement le même nombre de corrélateurs que le récepteur rake conventionnel associé, est légèrement plus complexe puisqu'il nécessitera l'estimation des atténuations et des retards de tous les échos du canal (au nombre de  $N_p$ ) alors qu'un récepteur rake conventionnel à  $L_r$  doigts se contentera de l'estimation des  $L_r$  échos sur lesquels il se synchronisera.

Sur la figure 3.16, nous avons représenté la probabilité d'erreur moyenne en fonction du RSB pour les modèles (3.30) et (3.31) du signal émis et du signal reçu. La fonction  $g(t)$  est une fonction porte de norme unité. Le retard  $\tau$  a été choisi de telle sorte que  $\rho = 0,5$ . Les variables aléatoires  $A_1$  et  $A_2$  sont indépendantes et identiquement distribuées de loi gaussienne réelle de moyenne nulle et de variance unité. Enfin la moyenne sur la probabilité d'erreur a été obtenue sur 10.000 réalisations du canal. Nous remarquons bien que les récepteurs rake complet et amélioré ne présentent pas d'effet plancher tandis que le récepteur rake partiel conventionnel à un doigt admet une



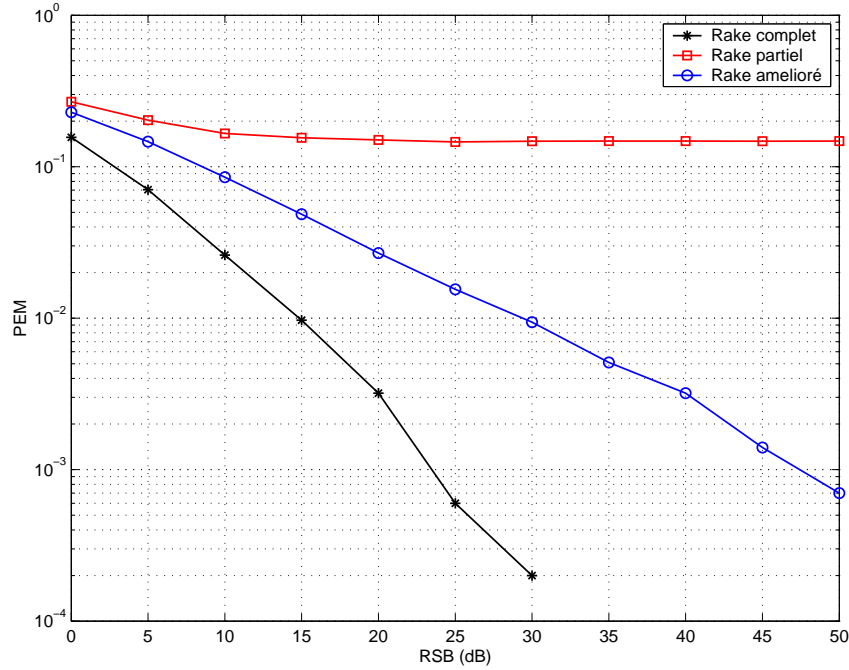


Figure 3.16 – PEM en fonction du RSB (dB) pour le rake complet  $L_r = 2$ , partiel  $L_r = 1$  et amélioré.

asymptote dans les performances. Il convient maintenant d'appliquer ce principe d'amélioration du récepteur rake partiel au signal émis TH-UWB vérifiant l'équation (1.7) et subissant le canal de propagation (1.10).

### Application au signal de type TH-UWB

Dans un contexte de signal émis TH-UWB<sup>2</sup>, le signal  $z$  en entrée du détecteur à seuil peut s'écrire de la manière suivante (cf. éqs. (1.32), (1.34) et (1.35))

$$z = z_1 + z_2 + \eta,$$

avec

$$\begin{aligned} z_1 &= d(0)N_f r_{ww}(0) \sum_{\ell=1}^{L_r} (A^\ell)^2, \\ z_2 &= \sum_{\ell=1}^{L_r} A^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} A^k \left[ d(-Q^{k,\ell}) [\mathcal{C}^+(q^{k,\ell}) r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^+(q^{k,\ell} + 1) r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \right. \\ &\quad \left. + d(-Q^{k,\ell} - 1) [\mathcal{C}^-(q^{k,\ell}) r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^-(q^{k,\ell} + 1) r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \right], \end{aligned}$$

sous l'hypothèse que la modulation employée est une PAM. Dans la suite, nous nous limiterons au cas d'une modulation PAM à deux états.

Nous avons vu, dans l'exemple simple présenté au début de cette section, que le récepteur rake pouvait être amélioré si on multipliait le symbole d'intérêt (ici  $d(0)$ ) par le facteur multiplicatif qui perturbe la détection et dont on peut avoir la connaissance. C'est pourquoi, il convient maintenant d'écrire  $z$  en fonction d'un terme portant le

<sup>2</sup>On considère un unique utilisateur dans le système par souci de simplification. Par conséquent, l'indice de l'utilisateur sera omis dans la suite de ce paragraphe.

symbole d'intérêt (noté  $\tilde{z}_1$ ) et d'un terme ne contenant que des contributions des autres symboles (noté  $\tilde{z}_2$ ). Pour cela, nous allons décomposer  $z_2$  de la manière suivante

$$z_2 = d(0)H'_1 + \tilde{z}_2,$$

où

$$\begin{aligned} H'_1 &= \sum_{\ell=1}^{L_r} A^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} A^k \left[ [\mathcal{C}^+(q^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^+(q^{k,\ell} + 1)r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \times \mathbb{1}_{Q^{k,\ell}=0} \right. \\ &\quad \left. + [\mathcal{C}^-(q^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^-(q^{k,\ell} + 1)r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \times \mathbb{1}_{Q^{k,\ell}=-1} \right], \\ \tilde{z}_2 &= \sum_{\ell=1}^{L_r} A^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} A^k \left[ d(-Q^{k,\ell}) [\mathcal{C}^+(q^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^+(q^{k,\ell} + 1)r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \times \mathbb{1}_{Q^{k,\ell} \neq 0} \right. \\ &\quad \left. + d(-Q^{k,\ell} - 1) [\mathcal{C}^-(q^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^-(q^{k,\ell} + 1)r_{ww}(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \times \mathbb{1}_{Q^{k,\ell} \neq -1} \right]. \end{aligned}$$

Remarquer que le terme  $\tilde{z}_2$  ne contient à présent que la contribution de l'interférence entre symboles.

Le terme  $z$  admet alors l'écriture suivante

$$z = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2,$$

avec

$$\tilde{z}_1 = d(0)(H_1 + H'_1)$$

et

$$H_1 = N_f r_{ww}(0) \sum_{\ell=1}^{L_r} (A^\ell)^2. \quad (3.36)$$

Afin d'éliminer l'interférence résiduelle qui correspond au terme  $d(0)H'_1$ , il convient de multiplier le signal  $z$  par le terme  $(H_1 + H'_1)$ . Ainsi la décision sera prise sur le signal  $z'$  construit de la manière suivante

$$\begin{aligned} z' &= (H_1 + H'_1).z \\ &= (H_1 + H'_1)^2.d(0) + (H_1 + H'_1)\tilde{z}_2 + (H_1 + H'_1)\eta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le schéma 3.17 représente le récepteur rake amélioré basé sur l'opération décrite ci-dessus.

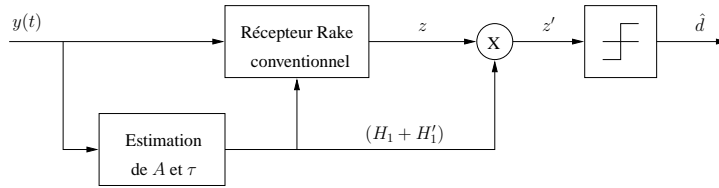


Figure 3.17 – Principe de fonctionnement du récepteur rake « amélioré ».

Dans les simulations, les paramètres déterministes du canal sont fixés aux valeurs suivantes  $\lambda = 0,1 \text{ ns}^{-1}$  et  $\gamma = 200 \text{ ns}$ . Les paramètres du signal TH-UWB sont identiques à ceux utilisés au paragraphe 3.4. Le nombre de doigts du récepteur rake conventionnel vaut  $L_r = 1$ .

À la figure 3.18 nous avons tracé la PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  pour le récepteur rake conventionnel et pour le récepteur rake amélioré en absence et en présence d'interférence entre symboles. En absence d'interférence entre symboles (c.-à-d., lorsque  $T_g$  est très grand), la PEM obtenue avec un récepteur rake conventionnel présente un seuil dû aux effets de l'interférence résiduelle, alors que la PEM obtenue avec le récepteur rake amélioré ne présente plus de seuil et décroît bien en fonction du RSB. Ainsi tous les résultats prissent grâce à l'exemple

simple exposé au début de cette section se transposent parfaitement au contexte d'un signal TH-UWB. En présence d'interférence entre symboles, la PEM associée au récepteur rake conventionnel présente un seuil engendré par les effets conjoints de l'interférence entre symboles et de l'interférence résiduelle tandis que la PEM associée au récepteur rake amélioré admet un seuil uniquement induit par l'interférence entre symboles. Ceci explique le fait que le seuil du récepteur rake amélioré est plus faible que celui du récepteur rake conventionnel.

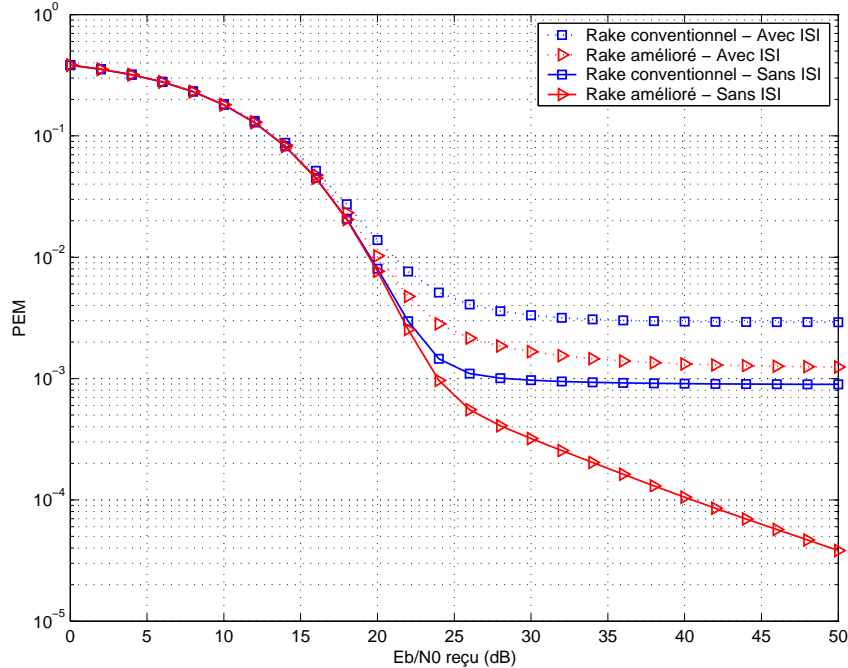


Figure 3.18 – PEM en fonction de  $\bar{E}_b/N_0$  (dB),  $L_r = 1$ .

À la figure 3.19 nous avons tracé la PEM en fonction du temps de garde pour  $\bar{E}_b/N_0 = 50$  dB. Nous remarquons que l'utilisation du récepteur rake amélioré permet d'obtenir de meilleures performances quel que soit la valeur du temps de garde. Le seuil qui apparaît pour le récepteur amélioré n'est dû qu'au bruit additif alors que le seuil associé au récepteur conventionnel est dû au bruit additif et à l'interférence résiduelle.

Il faut néanmoins noter que plusieurs travaux concomitants aux nôtres ([57] et [58]) ont introduit des traitements au niveau de la variable de décision  $z$  en vue d'améliorer la décision. Dans les deux papiers mentionnés, ces traitements avaient pour but de diminuer l'effet de l'interférence entre symboles (et non de l'interférence résiduelle) en utilisant des techniques classiques d'égalisation (Wiener ou égaliseur à retour de décision (en anglais, *Direct Feedback Equalizer* (DFE)), entre autres). Dans [57], les auteurs étudient un système DS-UWB (en anglais, *Direct Sequence UWB*) (cf. chapitre 4) et implémentent un récepteur rake procédant à la combinaison des voies de manière numérique (et non analogique) et fonctionnant à la cadence des chips (et non des symboles). Dans [58], les auteurs utilisent une modulation non-cohérente de type Marche-Arrêt (en anglais, *On-Off Keying* (OOK)) et un détecteur d'énergie et n'évoquent pas le problème de l'interférence résiduelle. Enfin cette notion d'interférence résiduelle n'est mentionnée que dans [59] et seulement dans le contexte de la modulation PPM.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons obtenu une expression analytique de la variance de l'ISI / IFI. Nous avons analysé l'influence du nombre de doigts du récepteur rake et de la longueur du temps de garde sur la variance de l'ISI / IFI et sur la probabilité d'erreur du système. Nous avons de plus montré qu'il était nécessaire d'optimiser le système en prenant en compte conjointement la MUI et l'ISI / IFI.

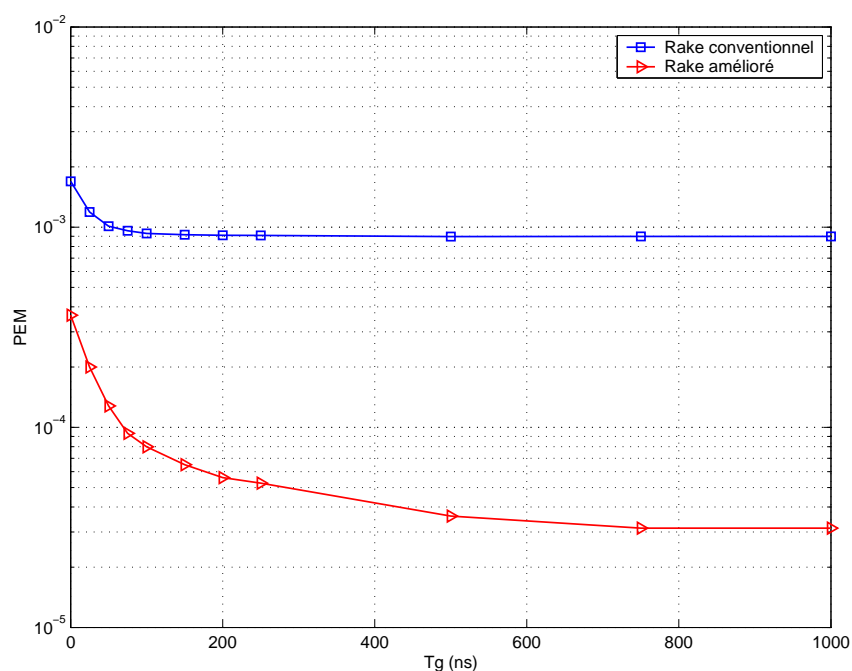


Figure 3.19 – PEM en fonction de  $T_g$  (ns) ( $\bar{E}_b/N_0 = 50$  dB).

Nous avons montré qu'une probabilité d'erreur acceptable pour un système de communication est atteinte avec un faible nombre de doigts du récepteur rake. De même il apparaît raisonnable de considérer un intervalle de garde de longueur égale à l'étalement moyen du canal. Nous avons également mis en évidence l'existence d'une interférence résiduelle qui a pour effet de rendre la probabilité d'erreur non nulle même en l'absence de bruit additif et d'interférence entre symboles et entre trames. Nous avons cependant développé une parade à l'existence de cette interférence résiduelle en modifiant légèrement le récepteur rake.

Les calculs présentés dans ce chapitre ont été effectués en employant une modulation PAM. Néanmoins des calculs similaires sont réalisables avec une modulation PPM et ont été relégués en annexe.

Les travaux concernant le calcul de la variance de l'ISI / IFI et la mise en évidence de l'interférence résiduelle ont donné lieu à un article de congrès [60].

Il conviendrait cependant d'étudier plus profondément le récepteur rake amélioré, notamment, en analysant la robustesse de ce nouveau récepteur à une estimation imparfaite et partielle du canal de propagation.

---

## Chapitre 4

# Interférence multi-utilisateur pour différentes techniques d'accès multiples

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons évalué analytiquement la variance de la MUI pour une communication de type ultra large bande à impulsions employant une technique d'accès multiple par répartition de codes de saut temporel. Nous avons notamment fait ressortir la dépendance de la variance de la MUI vis-à-vis des codes de saut temporel utilisés. Ceci a été rendu possible en introduisant la notion de codes développés qui nous ont permis d'exprimer le signal de telle manière que la forme d'onde transportant l'information soit multipliée par la séquence de codes. Ainsi ce dernier formalisme nous a permis de nous rapprocher très fortement des modèles analytiques des signaux de type DS-CDMA et présentés clairement dans [42]. Par conséquent, la notion de codes développés permet de réunir simplement la technique TH-UWB et la technique DS-CDMA sous un même et unique cadre. C'est pourquoi les calculs conduits au chapitre 2 peuvent être retranscrits presque de manière identique aux signaux DS-CDMA et DS-UWB.

Dans la littérature, le calcul analytique de la variance de la MUI d'un système DS-CDMA asynchrone a déjà été mené par [42]. Néanmoins seule la propagation en espace libre, c.-à-d. sans trajets multiples, avait été considérée. En ce qui concerne le calcul de la variance de la MUI d'un système TH-UWB et le lien avec celui d'un système DS-CDMA, seul [14] l'évoque implicitement. De plus dans ce dernier article, la caractéristique particulière de la forme d'onde utilisée en TH-UWB permettant de simplifier la variance obtenue n'est pas exploitée avec pertinence.

Dans ce chapitre, nous montrons d'abord que les signaux à étalement de spectre de type DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB peuvent s'exprimer sous une forme analogue, dans le sens, où la forme d'onde transportant l'information utile est modulée en amplitude par une séquence de codes dédiée à un utilisateur. C'est pourquoi la démarche permettant d'obtenir une expression analytique de la variance de la MUI peut être reproduite pour chacun de ces trois systèmes à accès multiple par répartition de codes. Ainsi nous avons obtenu des expressions analytiques de la variance de la MUI pour les trois systèmes suivants : DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB lorsque les canaux de propagation sont à trajets multiples. Les différences entre les différentes expressions sont justes dues au fait que les formes d'ondes ont des supports temporels différents.

Au paragraphe 4.2 nous présentons d'une part les modèles analytiques des systèmes DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB et les correspondances qui permettent de passer simplement d'un modèle à l'autre et, d'autre part, le calcul de la variance de la MUI pour chacun de trois systèmes. Au paragraphe 4.3, nous étudions les codes qui minimisent chacune des trois variances de la MUI. Enfin, au paragraphe 4.4, nous comparons les valeurs des différentes variances de la MUI ainsi que les valeurs des probabilités d'erreur moyenne en présence de MUI afin de savoir lequel des trois systèmes résiste le mieux à la présence d'utilisateurs perturbateurs.

## 4.2 Systèmes DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB

### 4.2.1 Modèles des signaux

Dans le cas d'un système DS-CDMA multi-utilisateur, le signal transmis par l'utilisateur  $n$  a pour expression

$$s_n^{\text{DS-CDMA}}(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N_c^{\text{DS-CDMA}}-1} c_n(j) p(t - jT_c^{\text{DS-CDMA}} - iT_s - \theta_n), \quad (4.1)$$

avec

- $p(t)$  le filtre de mise en forme, supposé être une fonction *porte* de durée  $T_p = T_c^{\text{DS-CDMA}}$ , d'amplitude unité et d'énergie  $E_p$ ,
- $\{c_n(j)\}_{j=0}^{N_c^{\text{DS-CDMA}}-1}$  la séquence d'étalement à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  allouée à l'utilisateur  $n$ ,
- $N_c^{\text{DS-CDMA}}$  le facteur d'étalement ou le nombre de chips par symbole ou le nombre d'impulsions par symbole,
- $T_c^{\text{DS-CDMA}}$  la durée d'un chip,
- $T_s = N_c^{\text{DS-CDMA}} T_c^{\text{DS-CDMA}}$  la durée d'un symbole,
- $\alpha_n := \mathcal{P}_n T_c^{\text{DS-CDMA}} / E_p$  la normalisation afin que les signaux soient de puissance  $\mathcal{P}_n$ ,
- $\{d_n(i)\}$  la suite des symboles d'information appartenant à une constellation quelconque fixée (PAM, PSK, QAM) émis par l'utilisateur  $n$ ,
- $\theta_n$ , l'asynchronisme de l'utilisateur  $n$ , uniformément distribuée sur la durée d'un symbole d'information, c.-à-d., sur  $[0, T_s[$ .

Contrairement à [42], nous avons présenté le signal en bande de base et non sur fréquence porteuse.

Dans le cas d'un système DS-UWB multi-utilisateur, le signal transmis par l'utilisateur  $n$  a pour expression

$$s_n^{\text{DS-UWB}}(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N_c^{\text{DS-UWB}}-1} c_n(j) w(t - jT_c^{\text{DS-UWB}} - iT_s - \theta_n), \quad (4.2)$$

avec

- tous les termes composant (4.2) identiques à ceux constituant (4.1) hormis  $N_c^{\text{DS-UWB}}$ ,  $T_c^{\text{DS-UWB}}$ , le filtre de mise en forme  $w(t)$  et  $\alpha_n$ ,
- $N_c^{\text{DS-UWB}}$  le nombre de chips par symbole ou le nombre d'impulsions par symbole,
- $T_c^{\text{DS-UWB}}$  la durée d'un chip,
- $w(t)$  un filtre de mise en forme quelconque mais de durée  $T_w$  très courte vérifiant  $T_w \ll T_c$ , ce qui explique la dénomination UWB,
- $\alpha_n = \mathcal{P}_n T_c^{\text{DS-UWB}} / E_w$  avec  $E_w = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)^2 dt$ .

En accord avec le chapitre 1, nous savons que le signal de type TH-UWB (utilisant une modulation PAM et non une modulation PPM) peut s'écrire de la manière suivante grâce à l'utilisation des codes développés

$$s_n^{\text{TH-UWB}}(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N_c^{\text{TH-UWB}} N_f - 1} c_n(j) w(t - jT_c^{\text{TH-UWB}} - iN_f T_f - \theta_n). \quad (4.3)$$

avec

- $T_c^{\text{TH-UWB}}$  la durée d'un chip,
- $N_f$  le facteur de répétition ou le nombre de trames ou encore le nombre d'impulsions par symbole,
- $N_c^{\text{TH-UWB}}$  le nombre de chips par trame,
- $T_f = N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}$  la durée d'une trame,
- $\{c_n(j)\}_{j=0}^{N_c N_f - 1}$  la séquence de code développé à valeurs dans  $\{0, +1\}$  allouée à l'utilisateur  $n$  et ne possédant pas plus d'un '1' tous les  $N_c$  chips,
- $w(t)$  est un filtre de mise en forme quelconque mais de durée  $T_w$  très courte vérifiant  $T_w \ll T_c$ ,

$$- \alpha_n = \mathcal{P}_n T_f / E_w \text{ avec } E_w = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)^2 dt.$$

Les autres termes intervenant dans l'équation (4.3) sont déjà définis au chapitre 2.

En comparant les équations (4.1), (4.2) et (4.3) nous constatons que ces expressions s'écrivent sous la forme générique suivante

$$s_n(t) = \sqrt{\alpha_n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N-1} c_n(j) p(t - jT_c - iT_s - \theta_n), \quad (4.4)$$

avec

- $p(t)$  le filtre de mise en forme de durée  $T_p$ ,
- $\{d_n(i)\}_i$  la suite des symboles d'information, supposés être indépendant et identiquement distribués,
- $T_c$  la durée d'un chip,
- $N$  le nombre de chips par symbole,
- $T_s$  la durée d'un symbole,
- $\alpha_n = \mathcal{P}_n T_s / (N_i E_p)$  avec  $E_p$  l'énergie de l'impulsion constituante,
- $N_i$  le nombre d'impulsions par symbole,
- $\{c_n(j)\}_{j=0}^{N-1}$ , la séquence d'étalement ou signature spécifique à chaque utilisateur,
- $\theta_n$  représentant l'asynchronisme de l'utilisateur  $n$  et est modélisé par une variable uniformément distribuée sur la durée d'un symbole d'information, d'où, sur  $[0, T_s[$ .

Suivant la valeur donnée aux différents paramètres du système, l'équation générique (4.4) représente le DS-CDMA, le DS-UWB ou bien le TH-UWB. Le lien entre les paramètres introduits à l'équation (4.4) et ceux des équations (4.1), (4.2) et (4.3) est récapitulé au tableau 4.1.

Paramètres		TH-UWB	DS-CDMA	DS-UWB
Temps chip	$T_c$	$T_c^{\text{TH-UWB}}$	$T_c^{\text{DS-CDMA}}$	$T_c^{\text{DS-UWB}}$
Nb. d'impulsions par symb.	$N_i$	$N_f$	$N_c^{\text{DS-CDMA}}$	$N_c^{\text{DS-UWB}}$
Nb. de chips par symb.	$N$	$N_c^{\text{TH-UWB}} N_f$	$N_c^{\text{DS-CDMA}}$	$N_c^{\text{DS-UWB}}$
Largeur d'impulsion	$T_p$	$T_w \ll T_c^{\text{TH-UWB}}$	$T_c^{\text{DS-CDMA}}$	$T_w \ll T_c^{\text{DS-UWB}}$
Temps symbole	$T_s$	$N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}$	$N_c^{\text{DS-CDMA}} T_c^{\text{DS-CDMA}}$	$N_c^{\text{DS-UWB}} T_c^{\text{DS-UWB}}$

Tableau 4.1 – Correspondance entre les paramètres des différents systèmes.

Concernant les codes d'accès multiple, dans les cas DS-CDMA et DS-UWB, les codes prennent des valeurs dans l'ensemble  $\{-1, 1\}$  alors que dans le cas TH-UWB, les codes prennent des valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1\}$  et admettent une structure particulière car seulement un chip par trame est occupé.

Dans la suite, nous comparons l'expression du facteur d'étalement (en anglais, *Spreading Factor* (SF)), du débit d'information et de l'énergie émise pour chacun des trois systèmes.

Il est clair que les débits des différents systèmes s'écrivent de la manière suivante

$$D^{\text{DS-CDMA}} = \frac{1}{N_c^{\text{DS-CDMA}} T_c^{\text{DS-CDMA}}}, \quad D^{\text{DS-UWB}} = \frac{1}{N_c^{\text{DS-UWB}} T_c^{\text{DS-UWB}}} \text{ et } D^{\text{TH-UWB}} = \frac{1}{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}}. \quad (4.5)$$

Le facteur d'étalement est défini par

$$\text{SF} = \frac{\text{Bande du signal}}{\text{Bande minimale pour transmettre l'information}}$$

et admet les expressions suivantes

$$\text{SF}^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-CDMA}}, \quad \text{SF}^{\text{DS-UWB}} = N_c^{\text{DS-UWB}} \frac{T_c^{\text{DS-UWB}}}{T_w} \text{ et } \text{SF}^{\text{TH-UWB}} = N_f N_c^{\text{TH-UWB}} \frac{T_c^{\text{TH-UWB}}}{T_w}.$$

Quant à l'énergie émise pour transmettre un bit d'information, elle est égale à  $N_i E_p$  ce qui se décline de la manière suivante pour chaque système

$$\mathcal{E}^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-CDMA}} E_p, \quad \mathcal{E}^{\text{DS-UWB}} = N_c^{\text{DS-UWB}} E_w \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{\text{TH-UWB}} = N_f E_w.$$

En conclusion, moyennant le tableau 4.1 de correspondance, chacun des trois systèmes émet un signal pour l'utilisateur  $n$  vérifiant l'expression générique (4.4). Par conséquent, un unique calcul permettra de trouver la variance de la MUI pour les systèmes DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB. La formule commune obtenue pourra néanmoins se particulariser *in fine* en utilisant notamment le fait que la largeur de l'impulsion pour les systèmes DS-UWB et TH-UWB est très inférieure au temps chip. Noter que, ce calcul va nous permettre d'étendre les résultats de [42] concernant le DS-CDMA au contexte d'une propagation à trajets multiples.

## 4.2.2 Récepteur rake

Afin d'exprimer le signal en sortie du récepteur rake mais avant prise de décision associé à l'utilisateur d'intérêt 1, nous considérons le signal transmis  $s_n(t)$  générique donné par (4.4), le récepteur rake présenté au paragraphe 1.4 et le modèle de canal présenté au paragraphe 1.3. Par conséquent la variable  $z$ , à partir de laquelle une décision sera prise, est obtenue rigoureusement de la même manière qu'au chapitre 2 et a pour expression

$$z = \sum_{n=1}^{N_u} \sqrt{\alpha_n} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_1^\ell A_n^k \times y_{k,\ell,n}(\theta_n),$$

avec

$$y_{k,\ell,n}(\theta_n) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_n(i) \sum_{j=0}^{N-1} c_n(j) \sum_{j_1=0}^{N-1} c_1(j_1) r_{pp}(\Delta\tau_{k,\ell,n} + \theta_n + (j - j_1)T_c + iT_s), \quad (4.6)$$

$$\Delta\tau_{k,\ell,n} := \tau_n^k - \tau_1^\ell,$$

et

$$r_{pp}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t-u)dt.$$

Nous allons à présent simplifier la partie droite de (4.6) en montrant qu'un certain nombre de termes intervenant dans les sommes sont en fait nuls. Pour cela, nous utilisons la même démarche que celle utilisée pour obtenir la propriété 4 au chapitre 2. Cette démarche est encore valide car le support de la fonction de mise en forme est inclus dans  $T_c$  quelque soit le système considéré. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} y_{k,\ell,n}(\theta_n) &= d_n(-Q_n^{k,\ell}) \left[ \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell}) \cdot r_{pp}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell} + 1) \cdot r_{pp}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right] \\ &+ d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1) \left[ \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell}) \cdot r_{pp}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell} + 1) \cdot r_{pp}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec les termes  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  introduits au chapitre 2 et

$$Q_n^{k,\ell} = \lfloor (\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n})/T_s \rfloor, \quad Q_n^{k,\ell} \in \{-\infty, +\infty\},$$

$$q_n^{k,\ell} = \lfloor (\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} - Q_n^{k,\ell} T_s)/T_c \rfloor, \quad q_n^{k,\ell} \in \{0, \dots, N-1\},$$

et  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  le reste de la division euclidienne ce qui implique que  $\varepsilon_n^{k,\ell} \in [0, T_c[$ . Dans le but d'alléger les notations, la dépendance des variables  $Q_n^{k,\ell}$ ,  $q_n^{k,\ell}$  et  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  vis-à-vis de  $\theta_n$  et  $\Delta\tau_{n,k,\ell}$ , n'est pas explicitement précisée.



### 4.2.3 Expression analytique de la variance de la MUI

L'objet de cette section est d'établir les expressions analytiques de la variance de la MUI pour les systèmes DS-CDMA et DS-UWB afin de les comparer à celle obtenue dans le cas du TH-UWB. La MUI, notée  $z_{\text{MUI}}$  a pour expression :

$$z_{\text{MUI}} = \sum_{n=2}^{N_u} \sqrt{\alpha_n} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N_p} A_1^\ell A_n^k \times y_{k,\ell,n}(\theta_n), \quad (4.8)$$

avec  $y_{k,\ell,n}(\theta_n)$  vérifiant l'équation (4.7). Ce terme de MUI s'écrit donc de manière identique pour le DS-CDMA, le DS-UWB et le TH-UWB. Cette équivalence résulte tout simplement du fait que le support du filtre de mise en forme  $p(t)$  (pour tous les systèmes) est inclus dans  $[0, T_c[$ .

Comme le signal représentant la MUI (cf. expressions (4.8) et (4.7)) s'écrit rigoureusement de la même manière qu'au chapitre 2, une démarche identique à celle retenue dans le chapitre 2 peut être retenue pour trouver l'expression analytique de la variance de la MUI moyennée sur les symboles, l'asynchronisme, les amplitudes des trajets et les temps d'arrivée des trajets. Ainsi la variance de la MUI est notée  $V_{\text{MUI}} = \mathbb{E}_{a,d,\theta,\tau}[z_{\text{MUI}}^2]$  et admet l'expression suivante :

$$\begin{aligned} V_{\text{MUI}} &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n \sum_{q=0}^{N-1} \left[ [\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)] \int_0^{T_c} r_{pp}^2(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ &+ [\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1)] \int_0^{T_c} r_{pp}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon \\ &\left. + 2[\mathcal{C}_{1,n}^-(q)\mathcal{C}_{1,n}^-(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q)\mathcal{C}_{1,n}^+(q+1)] \int_0^{T_c} r_{pp}(\varepsilon)r_{pp}(\varepsilon - T_c) d\varepsilon \right], \end{aligned}$$

avec

$$\psi_n = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{E}_\tau[I_1^\ell] \sum_{k=1}^{N_p} \mathbb{E}_\tau[I_n^k],$$

une constante dépendant des statistiques des canaux.

Par construction, la fonction  $u \mapsto r_{pp}(u)$  est une fonction paire ce qui implique que

$$\int_0^{T_c} r_{pp}^2(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{T_c} r_{pp}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon.$$

Dans la suite on posera

$$\gamma(s) = \int_0^{T_c} r_{pp}(t)r_{pp}(t-s) dt.$$

De plus en exploitant la périodicité des codes d'étalement, nous avons

$$\sum_{q=0}^{N-1} [\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)] = \sum_{q=0}^{N-1} [\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q+1)].$$

Par conséquent, nous obtenons

$$V_{\text{MUI}} = \frac{2}{T_s} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n \sum_{q=0}^{N-1} \left[ [\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)] \cdot \gamma(0) + [\mathcal{C}_{1,n}^-(q)\mathcal{C}_{1,n}^-(q+1) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q)\mathcal{C}_{1,n}^+(q+1)] \cdot \gamma(T_c) \right]. \quad (4.9)$$

L'expression précédente est valable pour les systèmes DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB. Cependant, on peut remarquer que des simplifications (liées au calcul de la fonction  $s \mapsto \gamma(s)$ ) sont encore possibles mais elles dépendront dorénavant du système considéré.

Nous allons donc clore le calcul de la variance de la MUI en considérant dorénavant les différents systèmes séparément.

### DS-CDMA

Puisque le signal de mise en forme  $p(t)$  est supposé être une fonction d'amplitude unité et de support temporel  $[0, T_c^{\text{DS-CDMA}}[$ , on peut facilement montrer que

$$\gamma(0) = \frac{1}{3}(T_c^{\text{DS-CDMA}})^3, \quad \text{et} \quad \gamma(T_c) = \frac{1}{6}(T_c^{\text{DS-CDMA}})^3.$$

On obtient finalement que :

$$V_{\text{MUI}}^{\text{DS-CDMA}} = \frac{2(T_c^{\text{DS-CDMA}})^2}{3N_c^{\text{DS-CDMA}}} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n \left[ \kappa_{1,n} + \frac{1}{2}\omega_{1,n} \right], \quad (4.10)$$

avec

$$\kappa_{m,n} := \sum_{q=0}^{N-1} [\mathcal{C}_{m,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{m,n}^{-2}(q)], \quad (4.11)$$

$$\omega_{m,n} := \sum_{q=0}^{N-1} [\mathcal{C}_{m,n}^+(q)\mathcal{C}_{m,n}^+(q+1) + \mathcal{C}_{m,n}^-(q)\mathcal{C}_{m,n}^-(q+1)]. \quad (4.12)$$

Nous pouvons remarquer que nous retrouvons, à la présence du terme  $\psi_n$  près, la formule fournie dans [42] qui n'était valide que dans contexte de canal sans trajets multiples.

Nous pouvons également noter que la seule différence entre la variance du système DS-CDMA et celle du système TH-UWB donnée au chapitre 2 réside dans la présence dans l'équation (4.11) des termes  $\omega_{1,n}$ . En effet ces termes  $\omega_{1,n}$  n'apparaissent pas dans le contexte TH-UWB car le terme  $\gamma(T_c)$  était alors égal à 0 puisque le support de l'impulsion est très inférieur à  $T_c$ .

### DS-UWB

Étant donné que le support de la fonction  $u \mapsto r_{pp}(u)$ , donné par  $[-T_w, T_w]$  est fortement inclus dans l'intervalle  $[-T_c, T_c]$ , on a facilement que  $\gamma(T_c) = 0$ . Par conséquent, on obtient que

$$V_{\text{MUI}}^{\text{DS-UWB}} = \frac{2\gamma(0)}{T_s} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n \kappa_{1,n}.$$

Afin de rendre le calcul de  $\gamma(0)$  simple, nous supposons que le système DS-UWB utilise la même forme d'impulsion que le système DS-CDMA. Par conséquent, l'impulsion est une fonction porte de support  $[0, T_w[$  et d'amplitude unité et nous avons  $\gamma(0) = T_w^3/3$ . Finalement, nous avons

$$V_{\text{MUI}}^{\text{DS-UWB}} = \frac{2T_w^3}{3N_c^{\text{DS-UWB}}T_c^{\text{DS-UWB}}} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n \kappa_{1,n}. \quad (4.13)$$

### TH-UWB

Conformément aux calculs menés dans le chapitre 2 et si l'impulsion est une fonction porte de support  $[0, T_w[$  et d'amplitude unité, nous avons

$$V_{\text{MUI}}^{\text{TH-UWB}} = \frac{2T_w^3}{3N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}} \sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n \kappa_{1,n}. \quad (4.14)$$

### 4.3 Codes à variance d'interférence multi-utilisateur minimale

Comme pour le TH-UWB, les variances de la MUI calculées à la section précédente pour le DS-UWB et le DS-CDMA font apparaître de manière explicite les séquences de codes. On peut donc conduire le même raisonnement qu'au chapitre 2 et chercher à caractériser les codes qui minimisent la variance. Nous commençons par déduire les critères qui permettent de définir l'optimalité des codes pour les différents types de signaux et calculons les valeurs minimales des critères. Nous comparons ensuite les valeurs optimales du critère par rapport à celles obtenues pour les séquences de codes d'étalement classiques de type Gold ou Kasami. Puis nous illustrons par simulation le gain apporté par le choix de codes optimaux par rapport aux séquences classiques en terme de probabilité d'erreur.

#### 4.3.1 Déterminations des critères

Pour un type de signal donné, on définit le *critère* comme la fonction des codes (noté  $\mathcal{C}$ ) qui intervient dans l'expression de la valeur de la MUI et dont la valeur minimale implique une variance minimale. Les expressions des variances (4.10), (4.13) et (4.14) montrent que la contribution des codes se met sous la forme  $\sum_{n=2}^{N_u} \alpha_n \psi_n f_{1,n}$  où  $f_{1,n}$  dépend du type de signal. Les valeurs de  $\alpha_n$  et  $\psi_n$  étant positives par construction, minimiser la variance revient alors à choisir les couples de codes  $(c_1, c_n)$  tels que chacun des termes  $f_{1,n}$  soit minimum. Le critère s'identifie donc à  $f_{1,n}$ .

Ainsi, on en déduit :

critère TH-UWB	$\mathcal{C}_{1,n}^{\text{TH-UWB}}$	$:= \kappa_{1,n},$
critère DS-UWB	$\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}}$	$:= \kappa_{1,n},$
critère DS-CDMA	$\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}}$	$:= \kappa_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot \omega_{1,n}.$

On constate que  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{TH-UWB}} = \mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}}$ . Toutefois il est important de rappeler que les codes pour le TH-UWB et le DS-UWB ne prennent pas leurs valeurs dans le même alphabet et n'ont donc *a priori* pas la même distribution.

Nous allons maintenant étudier les propriétés des critères DS-CDMA et DS-UWB en cherchant tout d'abord à déterminer leur valeur minimum puis les valeurs des critères atteintes pour les séquences d'étalement classiques. On rappelle que l'étude du critère TH-UWB a été faite au chapitre 2.

#### 4.3.2 Étude du critère pour les signaux DS-UWB

Comme indiqué précédemment, bien qu'ayant la même expression, les valeurs du critère DS-UWB sont différentes de celles du critère TH-UWB compte tenu du fait que les alphabets des éléments des codes sont différents.

L'étude de ce critère dans le cas du DS-UWB (cf. démonstrations en annexe D.1) nous permet d'énoncer les propriétés suivante :

**Propriété 13** *Pour les signaux DS-UWB, la valeur minimale du critère vaut*

$$\min \mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}} = \min \kappa_{1,n} = N_c^{\text{DS-UWB}}.$$

**Propriété 14** *Pour les signaux DS-UWB, on a :*

- pour  $N_c^{\text{DS-UWB}}$  pair :

$$\min \mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}} = N_c^{\text{DS-UWB}} \Rightarrow \begin{cases} |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = |\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 0 & \text{pour } q \text{ pair} \\ |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = |\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 1 & \text{pour } q \text{ impair,} \end{cases}$$

- pour  $N_c^{\text{DS-UWB}}$  impair :

$$\min C_{1,n}^{\text{DS-UWB}} = N_c^{\text{DS-UWB}} \Rightarrow \begin{cases} |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = 1 \text{ et } |\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 0 \text{ pour } q \text{ pair} \\ |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = 0 \text{ et } |\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 1 \text{ pour } q \text{ impair.} \end{cases}$$

D'après la propriété 14, on en déduit que lorsque le critère atteint sa valeur minimale pour une valeur  $N = N_c^{\text{DS-UWB}}$  impaire, alors  $|\mathcal{C}_{1,n}(q)| = 1, \forall q$ , mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, rechercher des séquences qui minimise le sup de la norme des collisions ne conduit pas aux séquences de codes optimales.

Nous avons vérifié par tirages exhaustifs ces résultats. Pour plusieurs valeurs du facteur d'étalement  $N$  nous avons généré de manière exhaustive toutes les séquences  $\{c_n(i)\}_{i=0}^{N-1}$  à valeurs dans  $\{-1, +1\}$ . Pour une valeur de facteur d'étalement donnée, il y a  $2^N$  séquences possibles, soit  $2^N(2^N - 1)/2$  paires possibles à tester. Étant donné la complexité exponentielle du nombre de paires à tester, nous nous sommes limité à des valeurs de  $N$  inférieure ou égale à 32. Les résultats de ces simulations sont reportées dans le tableau 4.2 aux lignes « exhaustif ». On constate que la valeur minimale du critère vaut bien  $N$ . Nous vérifions aussi le fait que pour des valeurs impaires du facteur d'étalement, le sup du module des collisions est égal à 1.

Il est intéressant de noter que lorsque le critère atteint sa valeur minimale pour  $N$  pair, le sup des corrélations vaut 0, ce qui traduit que les paires de codes sont orthogonales. Cela ne pouvait être démontré en annexe D.1 car à partir de l'information  $|\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = 1$  et  $|\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 1$ , on ne peut déduire que  $|\mathcal{C}_{1,n}(q)| \leq 2$ . En regardant en fait les collisions des séquences optimales, on s'aperçoit, sur les simulations réalisées, que pour  $q$  impair, les valeurs des collisions  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$ , sont systématiquement de signes opposés. Nous ne pouvons pas le démontrer de manière analytique, mais nous pouvons conjecturer que ce résultat est vrai quelque soit  $N$  pair. Par contre la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, comme pour le cas  $N$  impair, rechercher des séquences qui minimisent le sup de la norme des collisions ne conduit pas aux séquences de codes optimales. Afin d'illustrer ce phénomène, nous avons tracé à la figure 4.1 la distribution des valeurs de critère des paires de séquences orthogonales (vérifiant  $\sup_q |\mathcal{C}_{m,n}(q)| = 0$ ), qui montre bien la dispersion des valeurs du critère.

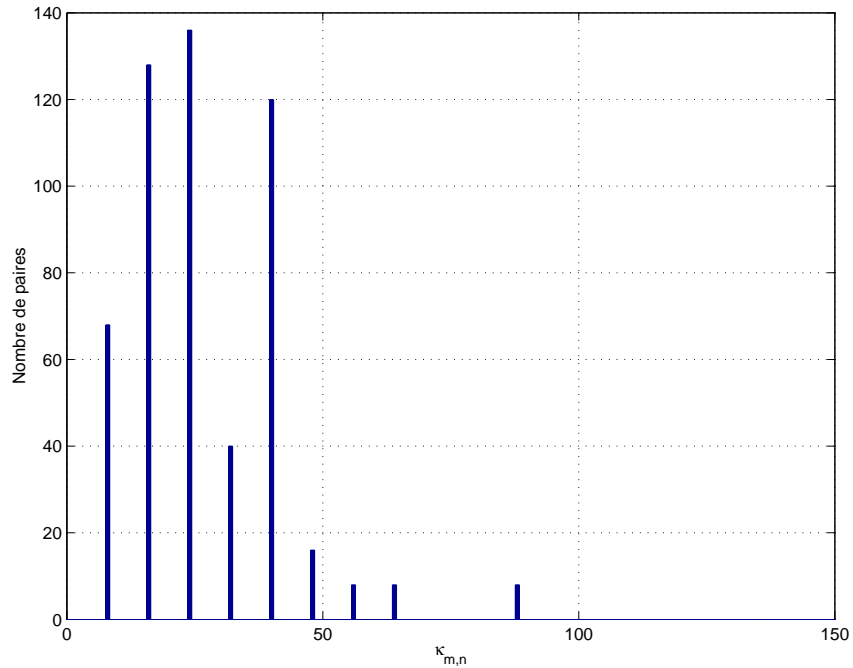


Figure 4.1 – Distribution de  $C_{1,n}^{\text{DS-UWB}}$  pour les paires de séquences vérifiant  $\sup_q |\mathcal{C}_{m,n}(q)| = 0, N = 8$ .

### 4.3.3 Étude du critère pour les signaux DS-CDMA

Dans [61], les auteurs ont calculé la variance de la MUI dans le cas d'un canal gaussien et aboutissent au même critère  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}}$ . Ils l'ont ensuite étudié dans [45] en calculant des bornes, à la manière de la borne de Welch, mais ne précisent pas la valeur minimale du critère. Dans [47], l'auteur cherche à évaluer les valeurs du critère par simulation en tirant les codes de manière aléatoire et en se comparant aux séquences « classiques » du DS-CDMA de type Gold ou Kasami. Malheureusement les codes étant tirés de manière aléatoire, l'information issue de [47] est partielle et ne donne pas la valeur minimale du critère.

On peut montrer que les codes DS-UWB pour lesquels le critère atteint la valeur minimale, donnent  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}} = N$ . Remarquons que dans l'expression de  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}}$  on retrouve  $\kappa_{1,n}$  commun à  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}}$ . Or les valeurs des collisions partielles vérifient (cf. tableaux dans annexe D.1) :  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}_{1,n}^+(q+1) = 0$  (idem pour  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$ ). Ceci implique alors que la variable  $\omega_{1,n}$  définie en (4.12) est nulle, d'où l'on en déduit que le critère pour le DS-CDMA vaut  $N$  d'après les résultats précédemment démontrés sur les signaux DS-UWB. On vérifie par simulation exhaustive que c'est en fait la valeur minimale du critère, qui est atteinte systématiquement pour  $\kappa_{1,n} = N$  et  $\omega_{1,n} = 0$ . Nous n'avons pas pu démontrer ce résultat de manière formelle, mais pensons que ce résultat se généralise pour n'importe quelle valeur de  $N$  et nous proposons la conjecture suivante :

**Conjecture 1** Pour les signaux DS-CDMA, la valeur minimale du critère vaut  $\mathcal{C}_{m,n}^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-CDMA}}$  avec l'équivalence ( $m \neq n$ ) :

$$\mathcal{C}_{m,n}^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-CDMA}} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa_{m,n} = N_c^{\text{DS-CDMA}} \\ \omega_{m,n} = 0 \end{cases} .$$

Les mêmes résultats que la propriété 14 s'appliquent aux signaux DS-CDMA ainsi que les propriétés sur le sup du module des corrélations. Afin d'illustrer ce phénomène, nous avons tracé à la figure 4.2 la distribution des valeurs de critère des paires de séquences orthogonales (vérifiant  $\sup_q |\mathcal{C}_{m,n}(q)| = 0$ ) qui montre bien la dispersion des valeurs du critère.

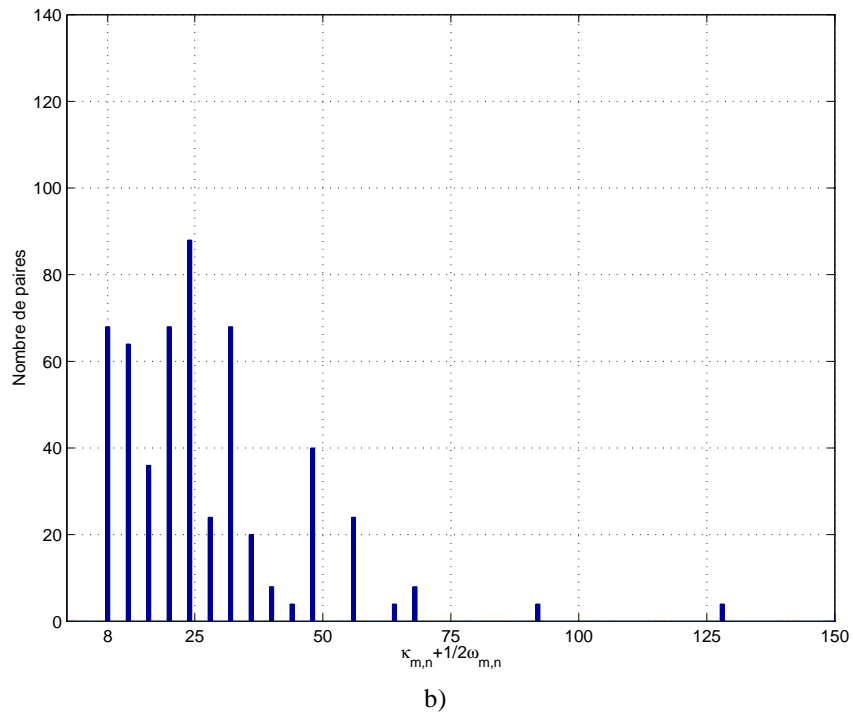


Figure 4.2 – Distribution de  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}}$  pour les paires de séquences vérifiant  $\sup_q |\mathcal{C}_{m,n}(q)| = 0$ ,  $N = 8$ .

#### 4.3.4 Comparaison des séquences optimales par rapport aux séquences d'étalement classiques

Connaissant les valeurs minimales des critères DS-UWB et DS-CDMA, il est intéressant de les comparer à celles prises pour les séquences classiquement utilisées en DS-CDMA (voir p. ex. [62]).

Type	$N$	$\mathcal{C}_{m,n}^{\text{DS-CDMA}}$	$\mathcal{C}_{m,n}^{\text{DS-UWB}}$	$\sup_q  \mathcal{C}_{m,n}(q) $
Exhaustif	5	5	5	1
Gold	7	19	23	3
Exhaustif	7	7	7	1
Gold Étendue	8	8	8	0
Exhaustif	8	8	8	0
Exhaustif	10	10	10	0
Kasami-S	15	117	115	5
Exhaustif	15	15	15	1
Gold	31	525	535	9
Gold Étendue	32	528	616	8
Exhaustif	32	32	32	0
Gold	63	2277	2299	17
Kasami-S	63	2721	3031	9
Kasami-L	63	2005	2003	9

Tableau 4.2 – Valeurs minimales des critères  $\mathcal{C}_{m,n}^{\text{DS-CDMA}}$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^{\text{DS-UWB}}$  pour différents types de séquences ( $m \neq n$ ), en fonction du facteur d'étalement  $N$ .

Nous avons considéré ici les séquences de Gold, les séquences de Gold étendues et les séquences de Kasami. Ces séquences sont utilisées dans les systèmes DS-CDMA car elles présentent de bonnes propriétés d'intercorrélation, et sont simples à générer. Les séquences de Gold et de Kasami sont générées à partir de séquences pseudo-aléatoires (ou  $m$ -séquences) définies par un polynôme primitif. Pour les séquences de Kasami on identifie deux ensembles : le « petit ensemble » (Kasami-S, *Small set of Kasami*) et le « grand ensemble » (Kasami-L, *Large set of Kasami*). Les séquences de Gold et de Kasami sont caractérisées par leur longueur  $N_c^{\text{DS-CDMA}} = 2^p - 1$  où  $p$  est le degré du polynôme générateur de la  $m$ -séquences. Les séquences de Gold étendues sont obtenues en modifiant la  $m$ -séquence d'origine, en insérant un bit à zéro à la séquence de  $p - 1$  zéros. Ceci crée artificiellement une séquence de  $p$  zéros qui n'existe jamais dans le cas des  $m$ -séquences (ceci correspondrait à un état où tous les registres sont à 0, produisant alors une séquence identiquement nulle). Cette technique permet de générer des séquences de longueur paire  $2^p$  et d'équilibrer la séquence (autant de 0 que de 1). Ce principe est appliqué par exemple dans le standard IS-95 [63].

Le tableau 4.2 résume, pour plusieurs valeurs de facteur d'étalement  $N$  et différents types de séquences (Gold, Gold étendues, Kasami-S, Kasami-L, exhaustif), les valeurs minimales des critères  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}}$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}}$ . Pour les séquences de Gold et Kasami de longueurs 7, 15, 31 et 63, les polynômes primitifs utilisés sont respectivement :  $x^3 + x + 1$ ,  $x^4 + x + 1$ ,  $x^5 + x^2 + 1$  et  $x^6 + x + 1$ . Nous constatons que les valeurs des critères pour les séquences classiques sont supérieures à la valeur minimale obtenue par les séquences exhaustives. On peut aussi noter que la différence relative croît avec le facteur d'étalement. L'effet de cet écart est illustré en terme de probabilité d'erreur à la section 4.3.5.

Nous avons évalué le nombre de paires optimales en fonction du facteur d'étalement. La figure 4.3 représente le pourcentage et le nombre de paires optimales. Le nombre de paires optimales semble très peu augmenter en fonction de  $N$  pour les valeurs impaires alors qu'il augmente de manière exponentielle pour les valeurs paires. Le résultat le plus important s'observe sur le pourcentage de paires optimales qui, contrairement aux codes de saut temporel (cf. chapitre 2), diminue en fonction de  $N$  quelle que soit sa parité. Ceci indique que les paires optimales

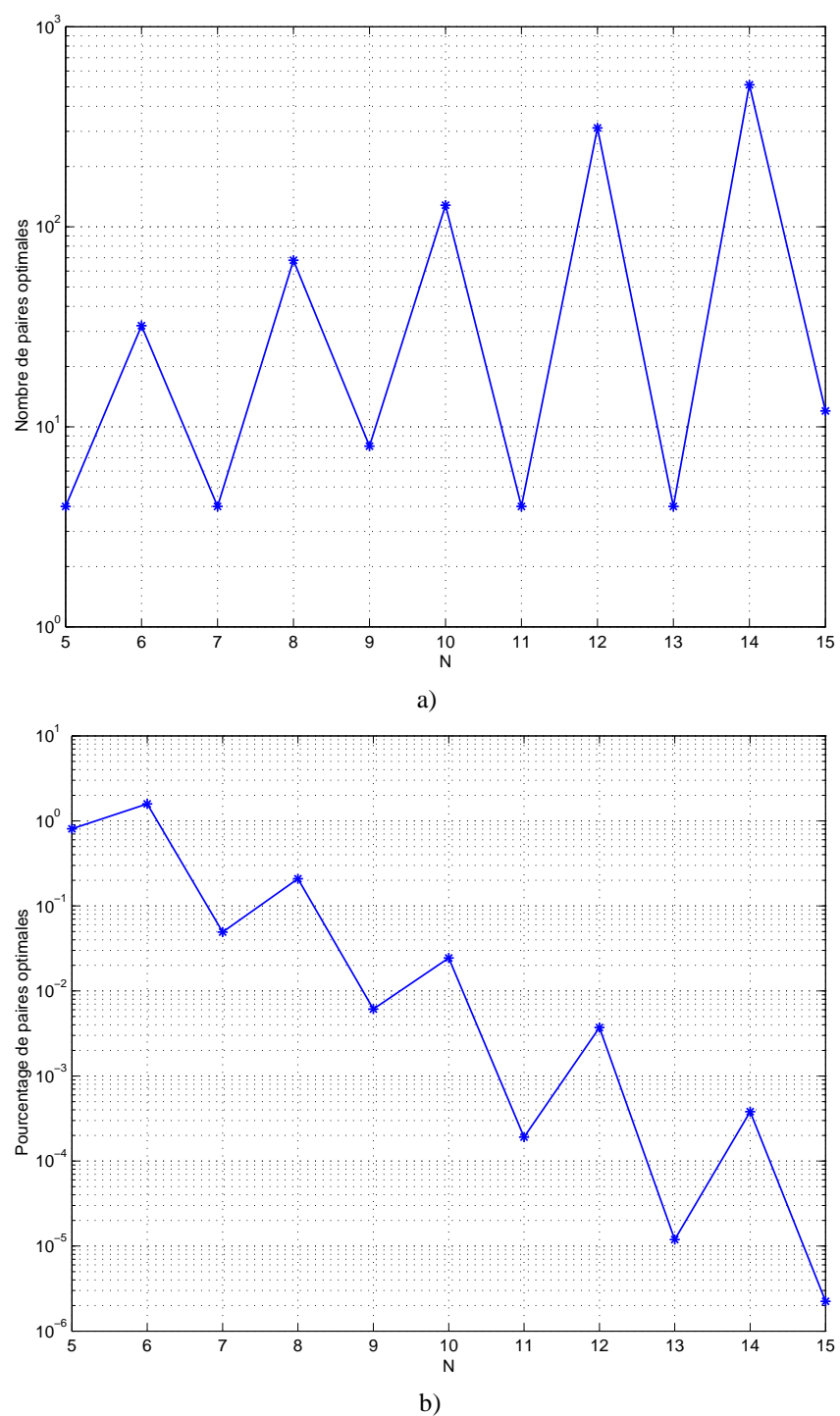


Figure 4.3 – Calcul du nombre a) et du pourcentage b) de paires optimales en fonction de  $N_c^{\text{DS-CDMA}}$  dans le cas exhaustif.

pour les signaux DS-CDMA sont de plus en plus « rares » à mesure que le facteur d'étalement augmente. Une conséquence immédiate est que l'approche de recherche aléatoire des codes ne peut pas s'appliquer dans le cas du DS-CDMA.

### 4.3.5 Comparaison des performances

Nous illustrons dans cette section le gain en performance apporté par la sélection de séquences optimales par rapport aux séquences classiques. Les performances sont évaluées en terme de probabilité d'erreur moyenne (comme au chapitre 2) en fonction du rapport  $E_b/N_0$  émis.

La figure 4.4 représente les performances simulées pour les signaux DS-CDMA et DS-UWB pour  $N_u = 5$ ,  $T_c = 5$  ns. Le canal est gaussien, sans trajet multiple (rake à 1 doigt). Nous avons considéré plusieurs séquences : les séquences de Gold avec  $N = 7$ , les séquences de Gold étendues et les séquences exhaustives pour  $N = 8$ .

On constate que pour les deux systèmes, le gain en performance entre les séquences optimales et les séquences classiques est très important. Les courbes pour les séquences classiques exhibent des effets de seuil en PEM compris entre 0,1 et 0,001 alors que les seuils pour les séquences optimales sont inférieurs à  $10^{-4}$  (limite de l'échelle). Les écarts sont les plus importants pour les signaux DS-CDMA.

Nous avons aussi illustré sur ces courbes le fait que  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}(q)| = 0$  n'est pas équivalent à l'optimalité au sens de la variance minimale pour  $N$  pair. Nous avons simulé les performances d'un ensemble de séquences vérifiant  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}(q)| = 0$  et ayant comme valeurs de critères  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}} = 68$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}} = 48$  (la valeur minimale du critère valant 8). Les courbes montrent que pour les deux types de signaux ces séquences ont des performances bien plus mauvaises que les séquences optimales, même si elles partagent la même propriété  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}(q)| = 0$ .

On peut donc conclure que l'utilisation du critère de la variance de la MUI minimale amène un gain en performance significatif par rapport aux séquences classiques. L'étude du nombre de paires optimales montre qu'il est conseillé de choisir un facteur d'étalement pair pour avoir le maximum de séquences possibles. On a montré enfin que le critère sur le sup des collisions ne garantissait en rien une optimisation des performances.

## 4.4 Comparaison des différentes techniques d'accès multiples

Dans cette section, nous allons comparer la valeur des différentes variances de la MUI selon le mode d'accès multiple employé. Pour simplifier, nous supposons, d'une part, que tous les utilisateurs ont une puissance identique (ce qui donne  $\alpha_n = \alpha = 1$ ,  $\forall n$ ) et, d'autre part, que les statistiques du canal sont indépendantes de l'utilisateur (ce qui donne  $\psi_n = \psi$ ,  $\forall n$ ).

Nous considérons de plus que chaque mode d'accès multiple utilise ses meilleurs codes, c.-à-d., que les codes sélectionnés minimisent la variance de la MUI. Étant donné la section précédente, nous en déduisons que

$$V_{\text{MUI}}^{\text{DS-CDMA}} = \frac{2(N_u - 1)\psi(T_c^{\text{DS-CDMA}})^2}{3},$$

$$V_{\text{MUI}}^{\text{DS-UWB}} = \frac{2(N_u - 1)\psi T_w^3}{3T_c^{\text{DS-UWB}}},$$

$$V_{\text{MUI}}^{\text{TH-UWB}} = \frac{2(N_u - 1)\psi N_f T_w^3}{3N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}}.$$

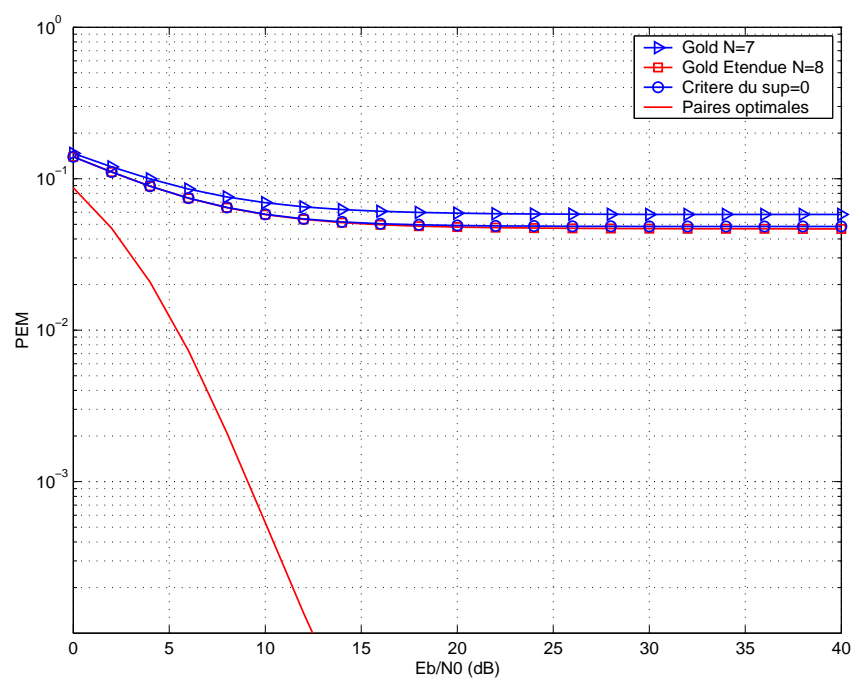
Pour effectuer une comparaison honnête, il convient aussi d'examiner la valeur de l'énergie capturée par chacun de trois systèmes. On note  $U^{\text{DS-CDMA}}$  l'énergie capturée pour le DS-CDMA,  $U^{\text{DS-UWB}}$  l'énergie capturée pour le DS-UWB et  $U^{\text{TH-UWB}}$  l'énergie capturée pour le TH-UWB. En effectuant un calcul comparable à celui réalisé au paragraphe 3.3 du chapitre 3, nous en déduisons que

$$U^{\text{DS-CDMA}} = (N_c^{\text{DS-CDMA}})^2 E_p^2 \varphi, \quad U^{\text{DS-UWB}} = (N_c^{\text{DS-UWB}})^2 E_w^2 \varphi \quad \text{et} \quad U^{\text{TH-UWB}} = N_f^2 E_w^2 \varphi$$

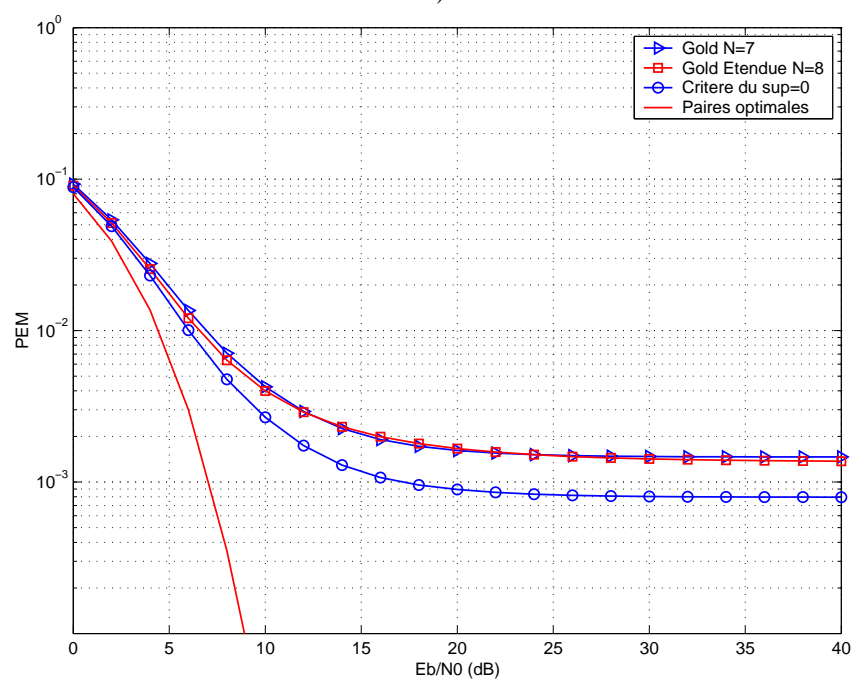
avec  $\varphi = \sum_{\ell, \ell' \in \mathcal{L}} \mathbb{E}_a [A_1^\ell A_1^\ell A_1^{\ell'} A_1^{\ell'}]$ . Comme une fonction porte d'amplitude unité est utilisée pour chacun des trois systèmes, nous en déduisons que  $E_p = T_c^{\text{DS-CDMA}}$  pour le DS-CDMA et  $E_w = T_w$  pour le DS-UWB et le TH-UWB. Par conséquent

$$U^{\text{DS-CDMA}} = (N_c^{\text{DS-CDMA}})^2 (T_c^{\text{DS-CDMA}})^2 \varphi, \quad U^{\text{DS-UWB}} = (N_c^{\text{DS-UWB}})^2 T_w^2 \varphi \quad \text{et} \quad U^{\text{TH-UWB}} = N_f^2 T_w^2 \varphi.$$





a)



b)

Figure 4.4 – Comparaison des performances en fonction des séquences d'étalement : Gold ( $N = 7$ ), Gold étendue et exhaustif ( $N = 8$ ). Pour les séquences exhaustives on considère les paires optimales  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}} = \mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}} = 8$  et les séquences vérifiant  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}(q)| = 0$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-CDMA}} = 68$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^{\text{DS-UWB}} = 48$ . a) DS-CDMA. b) DS-UWB.

Dans la suite, nous comparons, non pas la variance, mais plutôt le Rapport Signal à Interférence (RSI) qui corres-

pond à  $U/V$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \text{RSI}^{\text{DS-CDMA}} &= c(N_c^{\text{DS-CDMA}})^2 \\ \text{RSI}^{\text{DS-UWB}} &= c \frac{(N_c^{\text{DS-UWB}})^2 T_c^{\text{DS-UWB}}}{T_w} \\ \text{RSI}^{\text{TH-UWB}} &= c \frac{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}}{T_w} \end{aligned}$$

avec  $c = 3\varphi/(2(N_u - 1)\psi)$ .

Nous nous plaçons à débit d'information identique pour les trois techniques d'accès DS-CDMA, DS-UWB et TH-UWB. Par conséquent les équations (4.5) nous imposent la contrainte suivante

$$N_c^{\text{DS-CDMA}} T_c^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-UWB}} T_c^{\text{DS-UWB}} = N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}. \quad (4.15)$$

On appellera  $\beta$  le rapport entre la bande utilisée par un système ultra large bande (de type TH-UWB ou DS-UWB) et la bande utilisée par un système DS-CDMA. On a évidemment

$$\beta = \frac{T_c^{\text{DS-CDMA}}}{T_w}.$$

En pratique le paramètre  $\beta$  sera très supérieur à 1 car la bande utilisée par un système ultra large bande est de l'ordre de quelques gigahertz alors que la bande utilisée par un système DS-CDMA ne dépasse pas la centaine de mégahertz.

### Comparaison entre le TH-UWB et le DS-CDMA

Dans ce paragraphe nous allons comparer les systèmes TH-UWB et DS-CDMA à l'aide des RSIs calculés précédemment.

Tout d'abord la contrainte de débit (éq. 4.15) fournit la relation suivante entre les paramètres des deux systèmes

$$N_c^{\text{DS-CDMA}} = \frac{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}}{\beta T_w}.$$

Comme

$$\frac{\text{RSI}^{\text{DS-CDMA}}}{\text{RSI}^{\text{TH-UWB}}} = \frac{(N_c^{\text{DS-CDMA}})^2 T_w}{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}},$$

nous avons

$$\text{RSI}^{\text{DS-CDMA}} = \frac{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}}{\beta^2 T_w} \text{RSI}^{\text{TH-UWB}}.$$

Nous remarquons que plus le rapport de bande  $\beta$  augmente, c.-à-d., plus l'ultra large bande admet une bande importante par rapport à celle du DS-CDMA, plus le RSI associé au DS-CDMA sera petit par rapport au RSI du système ultra large bande. En revanche, plus l'écart de bande entre les systèmes est petit et plus le système DS-CDMA est intéressant par rapport au système ultra large bande. Ainsi si  $\beta = 1$  (même bande occupée), le DS-CDMA est toujours meilleur que le TH-UWB. Néanmoins la technologie actuelle nous empêche d'utiliser le DS-CDMA sur des largeurs de bande de l'ordre du GigaHertz (car il faudrait pourvoir échantillonner à une telle cadence). La question suivante alors se pose : à partir de quelle largeur de bande minimale le DS-CDMA devient intéressant ? Pour cela, il faut trouver la valeur de  $\beta$  maximale tel que  $\text{RSI}^{\text{DS-CDMA}} = \text{RSI}^{\text{TH-UWB}}$ . Il advient que

$$\beta_{\text{max.}} = \sqrt{\frac{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}}{T_w}}.$$

Considérons, à titre d'exemple, l'application numérique suivante : le TH-UWB occupe une bande de 1 GigaHertz ( $T_w = 1 \text{ ns}$ ),  $N_c^{\text{TH-UWB}} = 4$ ,  $N_f = 4$  et  $T_c^{\text{TH-UWB}} = 5 \text{ ns}$ . Alors  $\beta_{\text{max.}} \approx 8,95$ , ce qui implique une bande minimale pour le DS-CDMA donnée par

$$B_{\text{min.}}^{\text{DS-CDMA}} = 112 \text{ MHz}$$

ce qui est encore une bande trop large pour envisager un échantillonneur bas-coût fonctionnant à cette cadence.

### Comparaison entre le TH-UWB et le DS-UWB

Dans ce paragraphe nous allons comparer les systèmes TH-UWB et DS-UWB. La même approche qu'au paragraphe précédent va être appliquée.

En utilisant la contrainte de débit identique (éqs. 4.15), nous avons

$$N_c^{\text{DS-UWB}} T_c^{\text{DS-UWB}} = N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}.$$

Comme

$$\frac{\text{RSI}^{\text{DS-UWB}}}{\text{RSI}^{\text{TH-UWB}}} = \frac{(N_c^{\text{DS-UWB}})^2 T_c^{\text{DS-UWB}}}{N_f N_c^{\text{TH-UWB}} T_c^{\text{TH-UWB}}},$$

ce qui donne

$$\text{RSI}^{\text{DS-UWB}} = N_c^{\text{DS-UWB}} \text{RSI}^{\text{TH-UWB}}.$$

D'après cette dernière équation, il apparaît que la variance du DS-UWB est toujours inférieure à la variance du TH-UWB. Malgré cet inconvénient, le TH-UWB possède quelques autres avantages. En effet, nous pouvons remarquer qu'il est plus facile de trouver des codes optimaux pour le TH-UWB que pour le DS-UWB puisque le nombre de codes disponibles est de  $(N_c^{\text{TH-UWB}})^{N_f}$  pour le TH-UWB et de seulement  $2^{N_c^{\text{DS-UWB}}}$  pour le DS-UWB. Plus précisément, si nous supposons pour simplifier que le nombre d'impulsions émises par symbole est identique pour les deux systèmes, nous avons  $N_c^{\text{DS-UWB}} = N_f$  ce qui implique que le nombre de codes disponibles est de  $(N_c^{\text{TH-UWB}})^{N_f}$  pour le TH-UWB et de seulement  $2^{N_f}$  pour le DS-UWB. Dans la section précédente, nous avons remarqué que le nombre de paires optimales est assez faible pour le DS-UWB. En revanche, au chapitre 2, nous avons montré que pour peu que  $N_c^{\text{TH-UWB}}$  (qui est égal à  $T_c^{\text{DS-UWB}}/T_c^{\text{TH-UWB}}$  en raison de la contrainte de débit) soit assez grand, le nombre de paires optimales croissait énormément. Ainsi en TH-UWB, trouver des codes optimaux est une tâche plus aisée qu'en DS-UWB. En conclusion, nous avons montré qu'à nombre d'utilisateurs optimaux fixés, le DS-UWB admet une variance plus faible que le TH-UWB. Mais nous pouvons également affirmer qu'en TH-UWB, il est plus facile de trouver des utilisateurs optimaux qu'en DS-UWB.

### Comparaison entre le DS-UWB et le DS-CDMA

Dans ce paragraphe nous allons comparer les systèmes DS-UWB et DS-CDMA. La même approche qu'aux paragraphes précédents va être appliquée.

En utilisant la contrainte de débit identique (éqs. 4.15), nous avons

$$N_c^{\text{DS-CDMA}} T_c^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-UWB}} T_c^{\text{DS-UWB}},$$

nous en déduisons que

$$\text{RSI}^{\text{DS-CDMA}} = \frac{N_c^{\text{DS-CDMA}}}{\beta N_c^{\text{DS-UWB}}} \text{RSI}^{\text{DS-UWB}}.$$

Des commentaires identiques à ceux reportés lors de la comparaison du DS-CDMA et du TH-UWB peuvent être faits.

Noter que la comparaison se simplifie si on suppose que le nombre d'impulsions émises par symbole est identique, alors  $N_c^{\text{DS-CDMA}} = N_c^{\text{DS-UWB}}$  et

$$\text{RSI}^{\text{DS-CDMA}} = \frac{1}{\beta} \text{RSI}^{\text{DS-UWB}}.$$

Il faut remarquer que cette dernière expression n'est valable que si  $\beta$  est grand car le calcul de la variance de la MUI effectué pour le DS-UWB n'est valide que si  $T_w \ll T_c^{\text{DS-UWB}} = T_c^{\text{DS-CDMA}}$ .

Nous allons à présent confirmer ou infirmer les commentaires réalisés grâce à la comparaison des variances de la MUI en examinant les performances relatives de chacun des systèmes en terme de PEM.

Afin de simplifier la comparaison, nous nous plaçons dans le contexte d'une communication admettant un unique trajet d'amplitude unité et de retard nul. Ainsi le récepteur rake considéré ne possède qu'un doigt ( $L_r = 1$ ) et est en fait le filtre adapté. Pour les trois systèmes, la PEM est calculée comme dans le chapitre 2.

Dans le tableau 4.3, nous avons récapitulé les paramètres utilisés pour dimensionner les différentes techniques d'accès multiples. Ces paramètres vérifient la contrainte de débit identique.

Paramètres		TH-UWB	DS-CDMA ( $\beta = 10$ )	DS-CDMA ( $\beta = 8$ )	DS-UWB
Temps chip	$T_c$	5 ns	10 ns	8 ns	20 ns
Nb. d'impulsions par symb.	$N_i$	4	8	10	4
Nb. de chips par symb.	$N$	16	8	10	4
Largeur d'impulsion	$T_p$	1 ns	10 ns	8 ns	1 ns
Temps symbole	$T_s$	80 ns	80 ns	80 ns	80 ns

Tableau 4.3 – Paramètres de simulation des différents systèmes.

De plus l'impulsion choisie pour tous les systèmes est identique. C'est une fonction porte de largeur  $T_p$ . En revanche, l'amplitude varie d'un système à l'autre afin de vérifier une contrainte d'énergie émise identique. Cette dernière contrainte n'était pas nécessaire lors de la comparaison des RSIs car le RSI n'était pas fonction de cette énergie émise. En revanche cette contrainte est nécessaire lors de la comparaison des probabilités d'erreur moyenne qui celles-ci ne dépendent pas directement du RSI en raison de la non-gaussianité des interférences multi-utilisateur.

Enfin, de nouveau, les codes retenus pour un système donné minimisent la variance de la MUI de ce système.

Sur la figure 4.5 nous avons tracé la PEM en fonction de  $E_b/N_0$  pour le TH-UWB, le DS-UWB et les DS-CDMA (avec  $\beta = 10$  et  $\beta = 8$ ) lorsque  $N_u = 5$  utilisateurs sont présents dans le réseau. Chaque utilisateur interfère pour chacune des techniques d'accès employée possède un code minimisant la variance de la MUI.

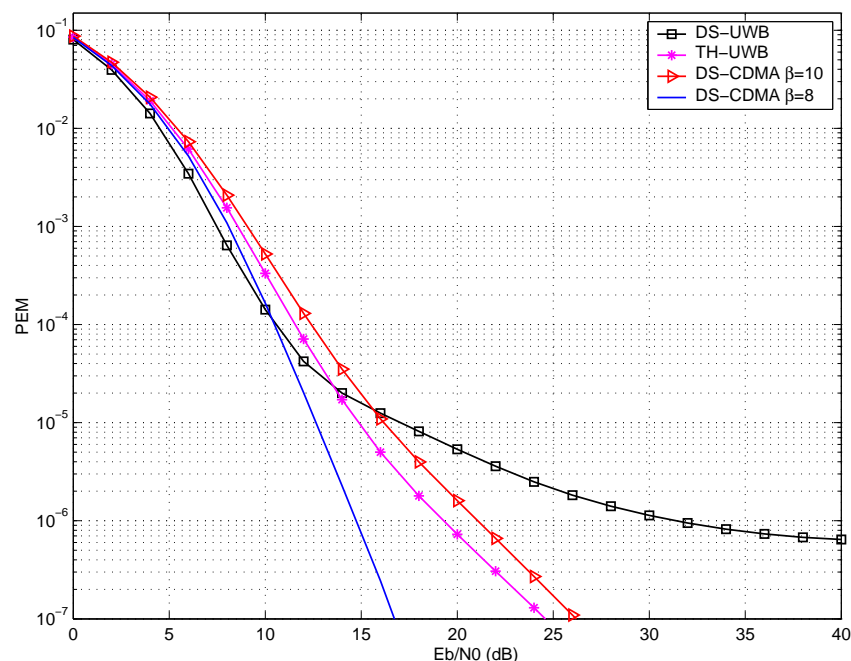


Figure 4.5 – PEM en fonction de  $E_b/N_0$  (dB) pour le TH-UWB, le DS-UWB et le DS-CDMA (avec  $\beta = 10$  et  $\beta = 8$ ).

Nous remarquons que la prévision faite à l'aide des variances s'avère pertinente pour le DS-CDMA et le TH-UWB. En revanche, le DS-UWB était censé être meilleur que le TH-UWB et nous observons un ordre de robustesse à l'interférence multi-utilisateur différent de celui prévu. Ceci signifie que le RSI n'est pas nécessairement un

bon indicateur pour comparer les systèmes entre-eux. Pour trouver une explication, il convient d'examiner les distributions de l'interférence multi-utilisateur pour les trois techniques d'accès avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour obtenir la figure 4.5. Ainsi sur la figure 4.6, nous avons tracé les histogrammes de la variable  $z_3$  pour les trois techniques d'accès DS-CDMA (avec  $\beta = 8$ ), TH-UWB et DS-UWB (où les ordonnées sont limitées à 0, 16).

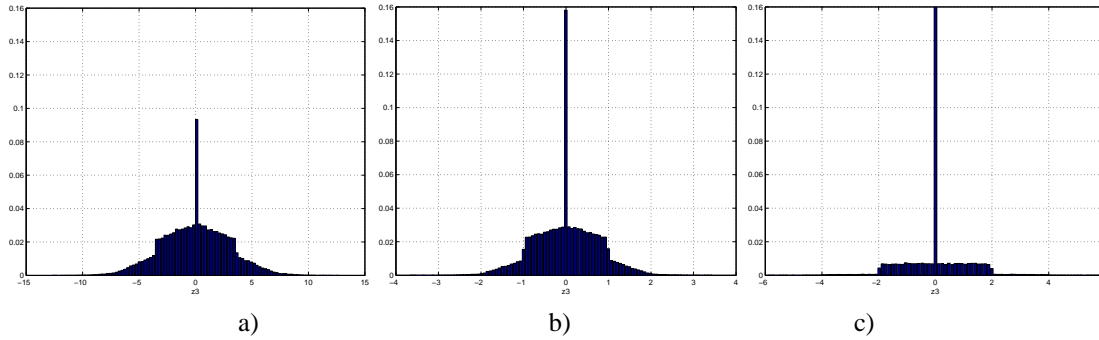


Figure 4.6 – Histogramme de la MUI. a) Pour le DS-CDMA. b) Pour le TH-UWB. c) Pour le DS-UWB.

Nous observons que la forme de la distribution de l'interférence  $z_3$  pour le DS-UWB est très différente de celle obtenue pour le DS-CDMA et le TH-UWB. Néanmoins nous avons bien vérifié que la variance empirique calculée à l'aide de l'histogramme et associée au TH-UWB est quatre fois (car  $N_c^{\text{DS-UWB}} = 4$ ) supérieure à celle du DS-UWB comme prévu. Par contre en examinant méticuleusement les différences entre les distributions, nous remarquons que la distribution associée au DS-UWB semble admettre des « queues plus lourdes ». Ainsi bien que la variance soit plus petite, la probabilité d'occurrence d'interférence grande est accrue. Ceci explique le fait que la probabilité d'erreur moyenne est plus grande pour le DS-UWB que pour le TH-UWB.

Sur la figure 4.7, nous comparons les systèmes TH-UWB et DS-UWB en terme de PEM avec  $N_u = 16$  utilisateurs. Étant donné les paramètres choisis (c.-à-d., ceux du tableau 4.3), le DS-UWB n'admet que 16 codes possibles alors que le TH-UWB a 16 codes à sélectionner dans un ensemble de 256 codes. Nous avons noté qu'il était possible d'affecter un code optimal à chaque utilisateur interférent en TH-UWB, alors, qu'en DS-UWB, seulement quatre utilisateurs interférents peuvent avoir un code optimal et les autres utilisent tous les codes restants. Dans ce contexte, nous avons calculé les variances de la MUI et observé qu'elles étaient proches l'une de l'autre. Au niveau de la PEM, le TH-UWB admet encore de meilleures performances que le DS-UWB.

Il convient de noter que d'autres travaux se sont penchés sur la comparaison des deux techniques d'accès TH-UWB et DS-UWB ([24, 64]). Dans [24], les auteurs se contentent de comparer la résistance à l'interférence entre-symboles des deux techniques d'accès lorsqu'un unique utilisateur est présent dans le système ! Cette comparaison est faite par le biais de simulations de taux d'erreur binaire. Ils observent que le TH-UWB et le DS-UWB offrent des performances identiques. Dans [64], les auteurs comparent les deux techniques d'accès en terme de PEM dans un contexte multi-utilisateur synchrone. Les codes des différents utilisateurs sont choisis aléatoirement et les performances sont moyennées sur les codes. Ils en concluent que le DS-UWB est légèrement meilleur que le TH-UWB. Comme nous nous plaçons dans un contexte différent puisque le système est asynchrone et que chaque utilisateur est optimisé au niveau de son code, une comparaison de nos travaux avec les leurs s'avèrent impossible.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que les systèmes TH-UWB, DS-CDMA et DS-UWB pouvaient s'exprimer analytiquement de la même manière grâce à l'utilisation des codes développés. Nous avons déterminé ainsi la variance de la MUI pour le DS-CDMA et le DS-UWB dans un contexte de communications asynchrones dans un canal à trajets multiples.

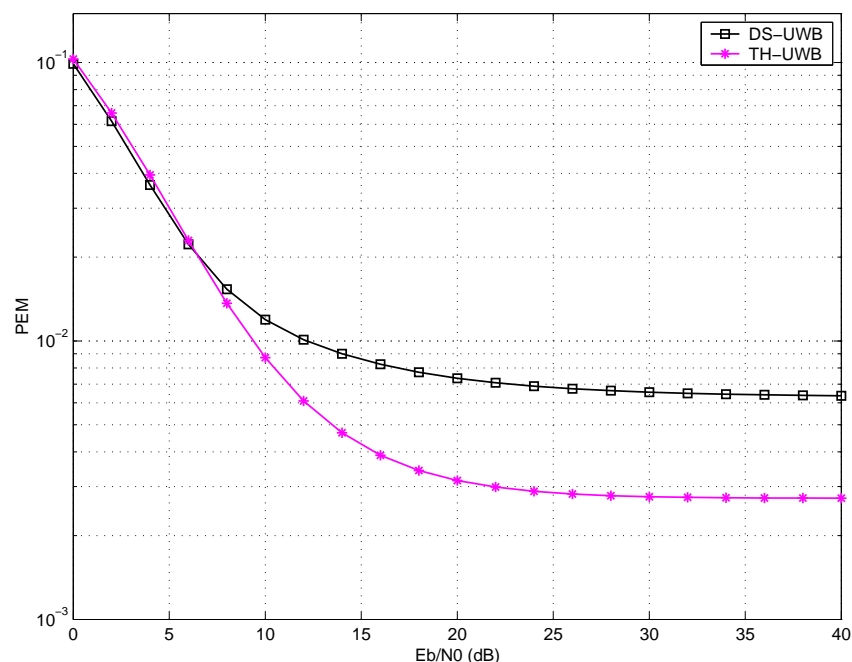


Figure 4.7 – PEM en fonction de  $E_b/N_0$  (dB) pour le TH-UWB et le DS-UWB avec  $N_u = 16$ .

Les expressions des variances obtenues pour chacun des systèmes nous ont permis d'identifier un critère dont la minimisation entraîne la sélection de codes qui minimisent la variance de la MUI. Nous avons étudié la valeur de ce critère pour des séquences de Gold et de Kasami qui sont classiquement utilisées dans les systèmes à étalement par séquence directe (DS-UWB et DS-CDMA). Nous avons mis en évidence que ces séquences n'étaient pas optimales au sens de la variance de la MUI minimale. Nous avons montré que les séquences optimales déduites du critère étaient orthogonales et apportaient une amélioration significative des performances en terme de probabilité d'erreur. Nous avons aussi montré que l'orthogonalité entre les paires optimales était une condition nécessaire mais pas suffisante. Le choix de paires orthogonales ne vérifiant pas le critère d'optimalité sur la variance de la MUI peut conduire à des dégradations importantes des performances. Notons tout de même que nous n'avons pas abordé le problème de la recherche de réseaux de codes optimaux, ensemble de codes pour lequel toutes les paires sont optimales entre-elles. Cette étape devra être traitée dans des travaux futurs afin de construire des réseaux de communications.

Nous nous sommes intéressés à la comparaison des variances optimales des différents systèmes. Par variance optimale, nous entendons, les variances calculées lorsque des codes optimaux sont employés. Nous avons montré, notamment, que la variance du DS-UWB était toujours inférieure à celle du TH-UWB. En revanche l'ordre est inversé au niveau de la probabilité d'erreur moyenne. Ceci est dû au fait que la distribution de l'interférence multi-utilisateur est très différente entre les deux systèmes et que malheureusement le critère de variance perd de sa pertinence. Dans le cadre d'un travail futur, il conviendrait d'analyser plus profondément et notamment de manière analytique les distributions de l'interférence multi-utilisateur et la probabilité d'erreur moyenne de systèmes DS-UWB et TH-UWB dans un contexte simple de canaux à trajet unique.

## Chapitre 5

# Estimation des paramètres du canal de propagation

### 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, comme dans la plupart des articles consacrés aux systèmes ultra large bande par impulsions, nous avons supposé que les paramètres du canal (amplitudes et retards associés à chaque trajet), étaient parfaitement connus du récepteur. Bien évidemment, en pratique, une étape d'estimation de ces dits paramètres est nécessaire au niveau du récepteur. À cause de la présence du bruit et du nombre limité d'échantillons reçus, il existe toujours une erreur d'estimation. Néanmoins l'erreur quadratique d'estimation associée à tout estimateur sans biais admet une borne minimale qui porte le nom de « borne de Cramer-Rao ». L'objectif de ce chapitre est de déterminer les expressions analytiques de ces bornes dans le contexte des systèmes de communication TH-UWB.

Dans la littérature concernant les systèmes TH-UWB, quelques articles s'intéressent au problème, d'une part, de la conception d'estimateurs des paramètres du canal dans [10, 50, 65, 66] et, d'autre part, du calcul analytique des bornes de Cramer-Rao de ces paramètres dans [67–70].

Dans [50], l'estimateur de type maximum de vraisemblance (en anglais, *Maximum Likelihood (ML)*) est mis en place lorsqu'une séquence d'apprentissage est disponible. Néanmoins ce papier se limite au cas où une unique impulsion est émise. Dans [10], l'estimateur ML est introduit pour le contexte d'une modulation d'impulsion en position. Cet estimateur est présenté et évalué numériquement tant dans un contexte supervisé (avec séquence d'apprentissage) que dans un contexte autodidacte (sans séquence d'apprentissage). Néanmoins, dans ce papier, une hypothèse de non-chevauchement des échos est faite, c.-à-d., les auteurs considèrent que deux échos (aussi proches soient-ils) sont des signaux orthogonaux entre-eux.

Les autres papiers ([65, 66]) présentent des estimateurs « ad hoc ». Dans [65], le signal reçu est d'abord filtré par un filtre passe-bas, ce qui permet ensuite d'échantillonner le signal filtré à la cadence de Nyquist. Une analyse dans le domaine des fréquences permet de construire un estimateur simple des paramètres du canal. Le principal défaut de cette méthode réside dans le sous-échantillonnage du signal UWB en réception. Dans [66], les auteurs proposent d'estimer le canal à partir de la moyenne du signal reçue. Pour cela, ils suggèrent, en phase d'estimation, de modifier la modulation PAM dans le but de la décentrer.

Concomitamment à nos travaux, quatre papiers concernant le calcul de la borne de Cramer-Rao sont parus [67–70]. Dans [67], un canal à un seul trajet est considéré. Dans [68, 70], l'hypothèse de non-chevauchement des différents échos est faite. Dans [69], les auteurs sont conscients que l'hypothèse de non-chevauchement n'est pas satisfaisante. Ils montrent d'ailleurs que la CRB définie sans l'hypothèse de non-chevauchement est toujours supérieure à la CRB calculée avec l'hypothèse de non-chevauchement. Ceci se montre en utilisant des propriétés triviales concernant la décomposition de Schur des matrices définies par bloc. Néanmoins, malgré cette remarque, ce dernier papier ne fournit aucun calcul analytique de la CRB lorsque le chevauchement entre les échos est considéré.

Dans ce chapitre, nous présentons le calcul analytique de la borne de Cramer-Rao (en anglais, *Cramer-Rao Bound* (CRB)) dans le contexte supervisé et de la borne de Cramer-Rao *modifiée* (en anglais, *Modified CRB* (MCRB)) dans le contexte autodidacte, associée aux amplitudes et aux retards des différents échos du canal. Contrairement à ce qui a été fait jusqu'à maintenant dans la littérature, le calcul conduit est valable même si les échos se chevauchent.

## 5.2 Modèle du signal

Dans ce chapitre, nous ne nous préoccupons que de l'estimation des paramètres du canal associé à l'utilisateur d'intérêt, c.-à-d., celui dont on souhaite démoduler les symboles. Ainsi, cette étude considérera qu'un seul utilisateur est actif dans le système de communication.

**Modulation PPM :** conformément au chapitre 1, on rappelle que le signal transmis par l'utilisateur d'intérêt dans le cas d'une modulation PPM est donné par

$$s(t) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c(j) w(t - i N_f T_f - j T_c - \delta d(i)), \quad (5.1)$$

avec

- $T_f$  la durée d'une trame,
- $T_c$  la durée d'un chip,
- $N_f$  le nombre de trames,
- $N_c$  le nombre de chips,
- $w(t)$  l'impulsion de durée  $T_w \ll T_c$ ,
- $M$  le nombre de symboles émis  $\mathbf{d} = [d(0), \dots, d(M-1)]$ ,
- $\{d(i)\}_{i=0}^{M-1}$  les symboles à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ,
- $\{c_n(i)\}$  le code de saut temporel développé associé à l'utilisateur  $n$ , à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et périodique de période  $P = N_c N_f$ ,
- $\delta \ll T_w$  le décalage de la PPM, choisi de manière à maximiser la distance entre les formes d'onde associées aux deux symboles d'information.

**Modulation PAM :** conformément au chapitre 1, on rappelle que le signal transmis par l'utilisateur d'intérêt dans le cas d'une modulation PAM est donné par

$$s_n(t) = \sum_{i=0}^{M-1} d(i) \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c(j) w(t - i N_f T_f - j T_c), \quad (5.2)$$

avec les symboles  $\mathbf{d} = [d(0), \dots, d(M-1)]$  à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  et tous les autres termes composant (5.2) identiques à ceux constituant (5.1).

**Canal :** Après passage dans un canal spéculaire de réponse impulsionnelle

$$h(t) = \sum_{\ell=1}^{N_p} A^\ell \delta(t - \tau^\ell),$$

où  $A^\ell$  et  $\tau^\ell$  sont respectivement l'amplitude et le retard associé au  $\ell^{\text{ème}}$  trajet, le signal reçu a pour expression

$$r(t) = \sum_{\ell=1}^{N_p} A^\ell s(t - \tau^\ell) + n(t), \quad (5.3)$$



où  $n(t)$  est un bruit additif blanc gaussien de densité spectrale de puissance  $N_0/2$ .

Les amplitudes  $\mathbf{A} = [A^1, \dots, A^{N_p}]$  et les retards  $\boldsymbol{\tau} = [\tau^1, \dots, \tau^{N_p}]$  sont les paramètres à estimer.

Dans le contexte de l'estimation supervisée (en anglais, *Data Aided* (DA)), la séquence de symboles  $\mathbf{d}$  est connue du récepteur. Dans le contexte de l'estimation autodidacte (en anglais, *Non Data Aided* (NDA)), la séquence de symbole  $\mathbf{d}$  est inconnue du récepteur et est supposée être composée de symboles indépendants et identiquement distribués. Pour la PPM,  $d$  prend les valeurs 0 ou 1 de manière équiprobable. Pour la PAM,  $d$  prend les valeurs  $-1$  ou 1 de manière équiprobable.

### 5.3 Borne de Cramer-Rao

Dans cette section, nous allons traiter les estimations supervisée et autodidacte avec le même formalisme. Pour cela, le terme  $\mathbb{E}_{\mathbf{a}}[f(\mathbf{a})]$  (avec  $f(\cdot)$  une certaine fonction) admet la valeur  $f(\mathbf{a})$  si  $\mathbf{a}$  est un vecteur connu déterministe (comme une séquence d'apprentissage) ou est la moyenne statistique classique si  $\mathbf{a}$  est un vecteur aléatoire inconnu.

On note par  $\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = p(r(t)|\boldsymbol{\theta})$  la fonction de vraisemblance du vecteur des paramètres à estimer  $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau})$ . Étant donné la forme de  $r(t)$ , la fonction de log-vraisemblance associée au paramètre  $\boldsymbol{\theta}$  prend la forme suivante [71]

$$\ln[\Lambda(\boldsymbol{\theta})] \propto -\frac{1}{N_0} \int_{\mathcal{I}} \left[ r(t) - \sum_{\ell=1}^{N_p} A^\ell s(t - \tau^\ell) \right]^2 dt, \quad (5.4)$$

avec  $\mathcal{I} = [0, MN_f T_f]$  la durée de l'observation, multiple de la durée symbole  $N_f T_f$ .

Il est bien connu que la borne de Cramer-Rao associée au paramètre  $\boldsymbol{\theta}$ , notée  $\text{CRB}(\boldsymbol{\theta})$ , vaut

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

avec  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$  la matrice d'information de Fisher associée au paramètre  $\boldsymbol{\theta}$ . L'élément de la  $\ell^{\text{ème}}$  ligne et  $k^{\text{ème}}$  colonne de cette matrice admet l'expression suivante

$$J(\theta^\ell, \theta^k) := -\mathbb{E}_{r,d} \left[ \frac{\partial^2 \ln \Lambda(\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d})}{\partial \theta^\ell \partial \theta^k} \right]. \quad (5.5)$$

Remarquons que l'expression précédente représente soit la *vraie* information de Fisher des paramètres dans le contexte de l'estimation supervisée, soit l'information de Fisher *modifiée* dans le contexte de l'estimation autodidacte [72].

L'objectif est maintenant de déterminer l'expression analytique de chaque entrée de la matrice de Fisher  $\mathbf{J}$ .

En utilisant (5.4), nous obtenons

$$\frac{\partial \ln \Lambda(\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d})}{\partial A^\ell} = -\frac{2}{N_0} \int_{\mathcal{I}} s(t - \tau^\ell) \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} A^k s(t - \tau^k) + A^\ell s(t - \tau^\ell) + r(t) \right] dt$$

et

$$\frac{\partial \ln \Lambda(\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d})}{\partial \tau^\ell} = \frac{2}{N_0} \int_{\mathcal{I}} s'(t - \tau^\ell) \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} A^k A^\ell s(t - \tau^k) + (A^\ell)^2 s(t - \tau^\ell) - A^\ell r(t) \right] dt,$$

avec  $s'(t) = ds(t)/dt$ .

Après quelques autres manipulations algébriques de dérivation, nous avons

$$\begin{aligned} J(A^\ell, A^k) &= \frac{2}{N_0} f_1^{(k,\ell)}, \\ J(A^\ell, \tau^k) &= -\frac{2A^k}{N_0} f_2^{(k,\ell)}, \\ J(\tau^\ell, \tau^k) &= \frac{2A^k A^\ell}{N_0} f_3^{(k,\ell)}, \end{aligned}$$

où les fonctions  $f_1^{(k,\ell)}$ ,  $f_2^{(k,\ell)}$  et  $f_3^{(k,\ell)}$  sont données par

$$f_1^{(k,\ell)} = \mathbb{E}_d \left[ \int_{\mathcal{I}} s(t - \tau_1^k) s(t - \tau_1^\ell) dt \right], \quad (5.6)$$

$$f_2^{(k,\ell)} = \mathbb{E}_d \left[ \int_{\mathcal{I}} s(t - \tau_1^k) s'(t - \tau_1^\ell) dt \right], \quad (5.7)$$

$$f_3^{(k,\ell)} = \mathbb{E}_d \left[ \int_{\mathcal{I}} s'(t - \tau_1^k) s'(t - \tau_1^\ell) dt \right], \quad (5.8)$$

Pour obtenir les équations précédentes (5.6), (5.7) et (5.8), aucune hypothèse sur la structure des signaux émis  $s(t)$  n'a été faite. Il convient maintenant de remplacer  $s(t)$  par sa structure spécifique due à l'emploi de systèmes TH-UWB.

Comme déjà mentionné en introduction, [10, 67, 68] ont considéré que les échos ne se chevauchent pas. Cela se traduit par le fait que les termes  $f_m^{k,\ell}$  sont nuls pour  $k \neq \ell$ . Cette hypothèse simplificatrice ne paraît pas très réaliste car, comme vu dans le chapitre 1, les canaux de propagation rencontrés par les signaux TH-UWB admettent des échos très proches les uns des autres. Nous rappelons que cette densité des échos dépend du paramètre  $\lambda$ .

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : au paragraphe 5.3.1, nous calculons la CRB sous l'hypothèse de non-chevauchement des trajets. Dans ce cas nous ne calculons que les termes  $f_m^{(k,\ell)}$  pour  $k = \ell$  et la CRB est obtenue en inversant la matrice de Fisher qui admet alors une forme diagonale. Dans ce paragraphe, nous retrouvons les résultats de [67]. Les calculs que nous avons effectués ont été publiés en même temps que ceux de [67]. Au paragraphe 5.3.2, nous présentons la principale contribution de ce chapitre qui est le calcul de la CRB sous l'hypothèse de chevauchement possible des trajets. Nous calculons ainsi les termes  $f_m^{(k,\ell)}$  pour tout  $k$  et  $\ell$ . À la section 5.4, nous comparons numériquement les résultats donnés sous les deux hypothèses afin de discuter de la pertinence ou non de l'hypothèse de non-chevauchement et de l'influence du chevauchement des trajets (s'il y en a) sur les performances. D'après la structure de la matrice d'information de Fisher, nous pouvons d'ores-et-déjà affirmer (comme dans [69]) que la CRB en présence de chevauchement sera supérieure à la CRB sous l'hypothèse d'absence de chevauchement. Par contre des simulations numériques seront toutefois nécessaires pour évaluer l'écart réel entre les deux bornes calculées.

### 5.3.1 Expression analytique sans chevauchement des échos

Dans le cas sans chevauchement le résultat est trivial et ne dépend pas de la nature de la modulation (PPM ou PAM). Par hypothèse, les termes  $f_m^{k,\ell}$  sont nuls pour  $k \neq \ell$ . Pour  $k = \ell$ , nous avons simplement

$$f_m^{(\ell,\ell)} = MN_f E_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (5.9)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \int w(t)w(t)dt, \\ E_2 &= \int w(t)w'(t)dt, \\ E_3 &= \int w'(t)w'(t)dt. \end{aligned}$$

Le résultat (5.9) est valable aussi bien dans le contexte d'une estimation supervisée que autodidacte. De plus nous pouvons remarquer que les performances ne dépendent pas de la séquence d'apprentissage dans le contexte DA.

Après inversion de la matrice de Fisher (ce qui est une étape simple puisque cette matrice est ici diagonale), nous avons

$$\text{CRB}_{\text{DA}}(A_1^\ell) = \text{MCRB}_{\text{NDA}}(A_1^\ell) = \frac{N_0}{MN_f} \frac{E_3}{2(E_1 E_3 - E_2^2)}, \quad (5.10)$$

$$\text{CRB}_{\text{DA}}(\tau_1^\ell) = \text{MCRB}_{\text{NDA}}(\tau_1^\ell) = \frac{N_0}{MN_f} \frac{E_1}{2(A_1^\ell)^2 (E_1 E_3 - E_2^2)}. \quad (5.11)$$

Si nous avons considéré la présence d'un seul et unique trajet ( $N_p = 1$ ), nous aurions également obtenus les expressions (5.10) et (5.11). Ainsi considérer les échos orthogonaux entre eux permet de les traiter indépendamment les uns les autres.

### 5.3.2 Expression analytique avec chevauchement des échos

Le calcul des éléments non diagonaux de la matrice de Fisher ne est pas trivial. Dans cette sous-section, nous présentons le calcul et le résultat pour la modulation PPM suivi du résultat pour la modulation PAM.

#### Modulation PPM :

En utilisant l'expression (1.6) de  $s(t)$ , nous avons

$$f_m^{(k,\ell)} = \sum_{i_1, i_2=0}^{M-1} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c(j_1) c(j_2) \times \mathbb{E}_d \left[ r_m \left( (i_1 - i_2) N_f T_f + (j_1 - j_2) T_c + \delta(d(i_1) - d(i_2)) + \Delta\tau_{k,\ell} \right) \right], \quad (5.12)$$

avec

$$\begin{aligned} r_1(u) &= \int w(t-u) w(t) dt, \\ r_2(u) &= \int w(t-u) w'(t) dt, \\ r_3(u) &= \int w'(t-u) w'(t) dt, \end{aligned}$$

et

$$\Delta\tau_{k,\ell} = \tau^k - \tau^\ell.$$

Nous décomposons la différence entre deux trajets de la manière suivante,

$$\Delta\tau_{k,\ell} = Q^{k,\ell} N_f T_f + q^{k,\ell} T_c + \varepsilon^{k,\ell}, \quad (5.13)$$

où

$$\begin{aligned} Q^{k,\ell} &= \lfloor \Delta\tau_{k,\ell} / N_f T_f \rfloor, \quad Q^{k,\ell} \in \{-M, M-1\}, \\ q^{k,\ell} &= \lfloor (\Delta\tau_{k,\ell} - Q^{k,\ell} N_f T_f) / T_c \rfloor, \quad q^{k,\ell} \in \{0, \dots, N_c N_f - 1\}, \\ \varepsilon^{k,\ell} &= \text{le reste de la division euclidienne, } \varepsilon^{k,\ell} \in [0, T_c[. \end{aligned}$$

Les termes  $Q^{k,\ell}$ ,  $q^{k,\ell}$  et  $\varepsilon^{k,\ell}$  dépendent donc de  $\Delta\tau_{k,\ell}$ , même si cette dépendance n'est pas explicitement précisée dans la suite.

En remplaçant (5.13) dans (5.12), nous obtenons que

$$f_m^{(k,\ell)} = \sum_{i_1, i_2=0}^{M-1} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c(j_1) c(j_2) \times \mathbb{E}_d \left[ r_m \left( (i_1 - i_2 + Q^{k,\ell}) N_f T_f + (j_1 - j_2 + q^{k,\ell}) T_c + \delta(d(i_1) - d(i_2)) + \varepsilon^{k,\ell} \right) \right]. \quad (5.14)$$

Soit  $T_r$  le support de la fonction d'intercorrélacion  $r_m(\cdot)$ . Les termes non nuls de la partie droite de (5.14) sont obtenus pour :

$$-T_r \leq (i_1 - i_2 + Q^{k,\ell}) N_f T_f + (j_1 - j_2 + q^{k,\ell}) T_c + \delta(d(i_1) - d(i_2)) + \varepsilon^{k,\ell} \leq T_r. \quad (5.15)$$

Nous avons

$$-\delta \leq \delta(d(i_1) - d(i_2)) \leq \delta, \quad -N_c N_f + 1 \leq j_1 - j_2 + q^{k,\ell} \leq 2N_c N_f - 1, \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon^{k,\ell} < T_c.$$

En remplaçant  $\delta(d(i_1) - d(i_2))$ ,  $j_1 - j_2 + q^{k,\ell}$  et  $\varepsilon^{k,\ell}$  par leurs valeurs limites dans (5.15), nous obtenons que

$$-T_r - \delta - 2N_f T_f + T_c < (i_1 - i_2 + Q^{k,\ell})N_f T_f \leq N_f T_f - T_c + \delta + T_r,$$

c.-à-d. que

$$-2 + (T_c - \delta - T_r)/N_f T_f < i_1 - i_2 + Q^{k,\ell} \leq 1 - (T_c - \delta - T_r)/N_f T_f.$$

Sachant que le support  $T_r$  de la fonction d'autocorrélation  $r_m(\cdot)$  est très inférieur à  $T_c$  et que le décalage PPM est lui aussi très inférieur à  $T_c$ , nous avons la contrainte suivante sur les indices de sommation  $i_1$  et  $i_2$  :

$$-2 < i_1 - i_2 + Q^{k,\ell} < 1.$$

ce qui implique que

$$i_1 - i_2 = -Q^{k,\ell} - 1 \quad \text{ou} \quad i_1 - i_2 = -Q^{k,\ell}.$$

Par conséquent le terme (5.14) se décompose de la manière suivante

$$f_m^{(k,\ell)} = \bar{f}_m^{(k,\ell)} + \tilde{f}_m^{(k,\ell)},$$

où le premier terme de la partie droite  $\bar{f}_m^{(k,\ell)}$  vaut

$$\bar{f}_m^{(k,\ell)} = \sum_{i_2=0}^{M-1} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c(j_1)c(j_2) \mathbb{E}_d \left[ r_m \left( -N_f T_f + (j_1 - j_2 + q^{k,\ell})T_c + \delta(d(i_2 - Q^{k,\ell} - 1) - d(i_2)) + \varepsilon^{k,\ell} \right) \right]$$

et correspond à la sommation  $i_1$  et  $i_2$  avec la contrainte  $i_1 - i_2 = -Q^{k,\ell} - 1$  et où le second terme de la partie droite  $\tilde{f}_m^{(k,\ell)}$  vaut

$$\tilde{f}_m^{(k,\ell)} = \sum_{i_2=0}^{M-1} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c(j_1)c(j_2) \mathbb{E}_d \left[ r_m \left( (j_1 - j_2 + q^{k,\ell})T_c + \delta(d(i_2 - Q^{k,\ell}) - d(i_2)) + \varepsilon^{k,\ell} \right) \right]$$

et correspond à la sommation sur  $i_1$  et  $i_2$  avec la contrainte  $i_1 - i_2 = -Q^{k,\ell}$ .

Considérons d'abord le calcul du terme  $\bar{f}_m^{(k,\ell)}$  : comme  $i_1 - i_2 = -Q^{k,\ell} - 1$ , la contrainte (5.15) se simplifie de la manière suivante

$$-T_r \leq (j_1 - j_2 + q^{k,\ell} - N_c N_f)T_c + \delta(d(i_2 - Q^{k,\ell} - 1) - d(i_2)) + \varepsilon^{k,\ell} \leq T_r.$$

De nouveau, comme  $T_r$  et  $\delta$  sont très inférieurs à  $T_c$ , nous avons

$$-2 < j_1 - j_2 + q^{k,\ell} - N_c N_f < 1,$$

ce qui implique que

$$\bar{f}_m^{(k,\ell)} = g_m^{(k,\ell)} + h_m^{(k,\ell)}$$

avec  $g_m^{(k,\ell)}$  le terme associé à la sommation sur  $j_1$  et  $j_2$  vérifiant la contrainte  $j_1 - j_2 + q^{k,\ell} - N_c N_f = 0$  et avec  $h_m^{(k,\ell)}$  le terme associé à la sommation sur  $j_1$  et  $j_2$  vérifiant la contrainte  $j_1 - j_2 + q^{k,\ell} - N_c N_f = -1$ .

Nous avons donc

$$g_m^{(k,\ell)} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j_1=N_c N_f - q^{k,\ell}}^{N_c N_f - 1} c(j_1)c(j_1 + q^{k,\ell} - N_c N_f) \mathbb{E}_d \left[ r_m \left( \delta(d(i - Q^{k,\ell} - 1) - d(i)) + \varepsilon^{k,\ell} \right) \right].$$

En posant  $j = j_1 + q^{k,\ell} - N_c N_f$ , nous obtenons

$$g_m^{(k,\ell)} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{q^{k,\ell}-1} c(j + N_c N_f - q^{k,\ell}) c(j) \mathbb{E}_d \left[ r_m (\delta(d(i - Q^{k,\ell} - 1) - d(i)) + \varepsilon^{k,\ell}) \right].$$

Grâce à la périodicité des codes, nous pouvons écrire le résultat suivant

$$g_m^{(k,\ell)} = \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{C}^-(q^{k,\ell}) \mathbb{E}_d \left[ r_m (\delta(d(i - Q^{k,\ell} - 1) - d(i)) + \varepsilon^{k,\ell}) \right] \quad (5.16)$$

avec

$$\mathcal{C}^-(q) = \sum_{k=0}^{q-1} c(k) c(k - q). \quad (5.17)$$

En procédant de manière analogue, nous pouvons montrer que

$$h_m^{(k,\ell)} = \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{C}^-(q^{k,\ell} + 1) \mathbb{E}_d \left[ r_m (\delta(d(i - Q^{k,\ell} - 1) - d(i)) - T_c + \varepsilon^{k,\ell}) \right]. \quad (5.18)$$

Le calcul du terme  $\tilde{f}_m^{(k,\ell)}$  se conduit de manière similaire et nous pouvons ainsi obtenir que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_m^{(k,\ell)} &= \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{C}^+(q^{k,\ell}) \cdot \mathbb{E}_d \left[ r_m (\delta(d(-Q^{k,\ell} + i) - d(i)) + \varepsilon^{k,\ell}) \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{C}^+(q^{k,\ell} + 1) \cdot \mathbb{E}_d \left[ r_m (\delta(d(-Q^{k,\ell} + i) - d(i)) - T_c + \varepsilon^{k,\ell}) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

avec

$$\mathcal{C}^+(q) = \sum_{k=q}^{N_c N_f - 1} c(k) c(k - q). \quad (5.20)$$

En réunissant les équations (5.16), (5.18) et (5.19), nous sommes en mesure d'écrire la propriété suivante qui détermine la matrice d'information de Fisher tant dans le contexte d'une estimation supervisée que dans le contexte d'une estimation autodidacte.

**Propriété 15** *Si une modulation PPM est employée et comme le support de  $s \rightarrow r_m(s)$  est très inférieur à  $T_c$ , nous avons*

$$\begin{aligned} f_m^{(k,\ell)} &= M \left[ \mathcal{C}^-(q^{k,\ell}) \cdot \mathcal{A}_m(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^-(q^{k,\ell} + 1) \cdot \mathcal{A}_m(\varepsilon^{k,\ell} - T_c) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{C}^+(q^{k,\ell}) \cdot \mathcal{B}_m(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^+(q^{k,\ell} + 1) \cdot \mathcal{B}_m(\varepsilon^{k,\ell} - T_c) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(\varepsilon^{k,\ell}) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}_d \left[ r_m (\varepsilon^{k,\ell} + \delta d(-Q^{k,\ell} + i - 1) - \delta d(i)) \right], \\ \mathcal{B}_m(\varepsilon^{k,\ell}) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}_d \left[ r_m (\varepsilon^{k,\ell} + \delta d(-Q^{k,\ell} + i) - \delta d(i)) \right], \end{aligned}$$

et avec  $\mathcal{C}^-(q)$  et  $\mathcal{C}^+(q)$  définis par les équations (5.17) et (5.20) respectivement.

De plus l'écart entre deux échos  $\Delta\tau_{k,\ell}$  se décompose de la manière suivante

$$\Delta\tau_{k,\ell} = Q^{k,\ell} N_f T_f + q^{k,\ell} T_c + \varepsilon^{k,\ell},$$

avec  $Q^{k,\ell} = \lfloor \Delta\tau_{k,\ell} / N_f T_f \rfloor$ ,  $q^{k,\ell} = \lfloor (\Delta\tau_{k,\ell} - Q^{k,\ell} N_f T_f) / T_c \rfloor$ , et  $\varepsilon^{k,\ell} \in [0, T_c[$  le reste de la division euclidienne.

L'expression fournie par la propriété 15 montre que les termes d'autocorrélation cycliques partiels,  $\mathcal{C}^+(q)$  et  $\mathcal{C}^-(q)$  ont une influence notable sur la matrice de Fisher. Ces termes d'autocorrélation représentent le nombre de collisions entre les chips occupés par l'utilisateur et une version décalée de  $q$  chips du signal de ce même utilisateur. Évidemment plus il y a de collisions, plus le terme correspondant à la matrice de Fisher est élevé ce qui signifie que moins les deux échos considérés  $\tau_k$  et  $\tau_\ell$  sont orthogonaux. Il faut cependant remarquer que l'information de Fisher  $f^{(k,\ell)}$  dépend aussi fortement des termes  $\mathcal{A}_m(\varepsilon^{k,\ell})$  et  $\mathcal{B}_m(\varepsilon^{k,\ell})$  qui indiquent si les chips qui rentrent en collision sont remplis au même endroit. Par exemple, deux chips pleins peuvent rentrer en collision, si l'impulsion du premier chip est au début et celle du dernier chip à la fin, alors les deux signaux seront quand même orthogonaux car l'impulsion ultra large bande n'occupe qu'une partie infime du chip. Par conséquent moins les signaux sont orthogonaux (c.-à-d. plus ils rentrent en collision) et plus l'information de Fisher associée aux éléments non-diagonaux de la matrice est élevée. Ceci n'induit pas que la CRB diminue mais bien le contraire comme vont le montrer les simulations.

À partir de l'expression de la propriété 15, il est possible de caractériser les échos  $k$  et  $\ell$  qui produisent une information de Fisher  $f^{(k,\ell)}$  non nulle. Soient les trois intervalles définis ci après

$$\mathcal{I}_1 := [T_w, \delta - T_w], \quad \mathcal{I}_2 := [T_w + \delta, T_c - T_w - \delta], \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_3 := [T_c + T_w - \delta, T_c - T_w].$$

Si  $\delta > T_w$ , alors ces trois intervalles ont bien un sens. On peut montrer que si  $\varepsilon^{k,\ell} \in \mathcal{I}_1$  ou si  $\varepsilon^{k,\ell} \in \mathcal{I}_2$  ou si  $\varepsilon^{k,\ell} \in \mathcal{I}_3$ , aucune collision n'aura lieu et le terme  $f^{(k,\ell)}$  sera nul. Si  $\delta < T_w$ , les intervalles  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_3$  sont par construction vides. Alors si  $\varepsilon^{k,\ell} \in \mathcal{I}_2$ , de nouveau aucune collision n'a lieu ce qui implique que  $f_m^{(k,\ell)} = 0$ .

Par ailleurs si on compare un écho avec lui-même ( $k = \ell$ ), on a  $\varepsilon^{k,\ell} = 0$ ,  $q^{k,\ell} = 0$  et  $Q^{k,\ell} = 0$  et la formule présentée à la propriété 15 se simplifie et prend la forme (5.9).

### Modulation PAM :

Le calcul de la matrice de Fisher pour la modulation PAM se mène de manière analogue au cas de la modulation PPM. Dans la propriété 16, nous récapitulons l'expression analytique des termes  $f^{(k,\ell)}$  pour la modulation PAM.

**Propriété 16** *Si une modulation PAM est employée et comme le support de  $s \rightarrow r_m(s)$  est très inférieur à  $T_c$ , on a*

$$\begin{aligned} f_m^{(k,\ell)} &= M[\mathcal{C}^-(q^{k,\ell})\tilde{\mathcal{A}}_m(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^-(q^{k,\ell} + 1)\tilde{\mathcal{A}}_m(\varepsilon^{k,\ell} - T_c) \\ &+ \mathcal{C}^+(q^{k,\ell})\tilde{\mathcal{B}}_m(\varepsilon^{k,\ell}) + \mathcal{C}^+(q^{k,\ell} + 1)\tilde{\mathcal{B}}_m(\varepsilon^{k,\ell} - T_c)] \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{A}}_m(\varepsilon^{k,\ell}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}_d[d(-Q^{k,\ell} - 1 + i)d(i)]r_m(\varepsilon^{k,\ell})$$

et

$$\tilde{\mathcal{B}}_m(\varepsilon^{k,\ell}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}_d[d(-Q^{k,\ell} + i)d(i)]r_m(\varepsilon^{k,\ell}).$$

Les autres termes sont identiques à ceux de la propriété 15.

Les commentaires sont semblables à ceux énoncés pour la modulation PPM.

On peut de plus assurer que deux échos  $k$  et  $\ell$  ne produisent pas de collision et donc que le terme de Fisher associé  $f_m^{(k,\ell)}$  est nul si  $\varepsilon^{k,\ell} \in \mathcal{I}_4 = [T_w, T_c - T_w]$ .

### 5.3.3 Moyennage de la matrice d'information de Fisher

Dans de nombreuses situations, la borne de Cramer-Rao dépend d'un paramètre  $\mathbf{x}$ . Dans notre cas précis, dans le contexte DA, la borne de Cramer-Rao dépend de la séquence d'apprentissage, et dans les contextes NDA et DA, elle dépend du code de l'utilisateur d'intérêt.

Afin de « gommer » l'influence de ces paramètres déterministes sur la borne de Cramer-Rao, on souhaite moyenniser cette borne sur ces paramètres qui seront alors vu comme une réalisation d'une variable aléatoire avec une loi de probabilité *a priori*.

En conséquence, nous nous intéressons au terme  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\text{CRB}(\mathbf{x})]$ , c.-à-d., à l'inverse de la matrice d'information de Fisher  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  moyennée sur la variable aléatoire  $\mathbf{x}$ . Néanmoins un tel calcul s'avère souvent compliqué car nous n'avons pas nécessairement à notre disposition une expression analytique de l'inverse de la matrice de Fisher surtout si celle-ci est de grande taille. C'est pourquoi nous aimerions plutôt d'abord moyenniser la matrice d'information de Fisher et ensuite procéder à son inversion [72]. Cependant une telle « permutation » des opérateurs a-t-elle un sens, c.-à-d., le résultat obtenu est-il encore une borne. D'après, l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\text{CRB}(\mathbf{x})] = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[J(\mathbf{x})^{-1}] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[J(\mathbf{x})]^{-1}.$$

Ainsi l'inverse de la moyenne de la matrice de Fisher est bien une borne minimale (mais qui ne sera pas aussi précise que la vraie borne de Cramer-Rao moyennée). Cette nouvelle borne minimale est en fait une borne de Cramer-Rao de type modifiée. Dans la suite de cette sous-section, nous ne porterons notre attention que sur cette borne de type modifiée.

### Moyennage sur les symboles

Le moyennage sur les symboles est utile aussi bien pour le cas DA que pour le cas NDA. En effet, pour le cas NDA la suite de symboles est aléatoire par définition et d'ailleurs ce moyennage intervient dans les termes définis aux propriétés 15 et 16. Pour le cas DA il convient de considérer que la séquence d'apprentissage (séquence de symboles) est une suite de symboles *i.i.d.*  $\{d(i)\}_{i=0}^{M-1} \in \{0, 1\}$  pour la modulation PPM et  $\{d(i)\}_{i=0}^{M-1} \in \{-1, +1\}$  pour la modulation PAM. Ainsi afin d'obtenir les performances indépendamment de la séquence d'apprentissage sélectionnée il convient de moyenniser la CRB sur le modèle statistique de séquence d'apprentissage [73]. Nous allons donner ci-après la CRB de type modifiée et non pas la CRB exacte et cette borne sera valable tant pour le contexte DA que NDA.

Dans le contexte d'une modulation PPM, nous obtenons trivialement que

$$\mathcal{A}_m(\varepsilon^{k,\ell}) = \begin{cases} r_m(\varepsilon^{k,\ell}), & \text{si } Q^{k,\ell} = -1, \\ \frac{1}{2}r_m(\varepsilon^{k,\ell}) + \frac{1}{4}r_m(\varepsilon^{k,\ell} - \delta) + \frac{1}{4}r_m(\varepsilon^{k,\ell} + \delta), & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{B}_m(\varepsilon^{k,\ell}) = \begin{cases} r_m(\varepsilon^{k,\ell}), & \text{si } Q^{k,\ell} = 0 \\ \frac{1}{2}r_m(\varepsilon^{k,\ell}) + \frac{1}{4}r_m(\varepsilon^{k,\ell} - \delta) + \frac{1}{4}r_m(\varepsilon^{k,\ell} + \delta), & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Dans le contexte d'une modulation PAM, nous obtenons trivialement que

$$\tilde{\mathcal{A}}_m(\varepsilon^{k,\ell}) = \begin{cases} r_m(\varepsilon^{k,\ell}), & \text{si } Q^{k,\ell} = -1, \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$\tilde{\mathcal{B}}_m(\varepsilon^{k,\ell}) = \begin{cases} r_m(\varepsilon^{k,\ell}), & \text{si } Q^{k,\ell} = 0 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

### Moyennage sur les codes

De la même manière que pour le moyennage sur les symboles effectué au paragraphe précédent on suppose que chaque code  $\{c(i)\}_{i=0}^{N_c N_f - 1}$  est une réalisation d'un vecteur qui est composé de variables aléatoires *i.i.d.*. Chaque élément de ce vecteur a une probabilité  $(N_c - 1)/N_c$  de valoir 0 et une probabilité  $1/N_c$  de valoir 1.

Ainsi d'après ces probabilités on sait que les termes  $\mathcal{C}^+(q)$  et  $\mathcal{C}^-(q)$  suivent une loi binomiale [74] de moyenne

$$\begin{cases} \mathbb{E}_c[\mathcal{C}^+(q)] = \frac{N_c N_f - q}{N_c^2}, & \text{si } q \neq 0, \\ \mathbb{E}_c[\mathcal{C}^+(0)] = N_f, & \text{si } q = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{E}_c[\mathcal{C}^-(q)] = \frac{q}{N_c^2}, & \text{si } q \neq N_c N_f \\ \mathbb{E}_c[\mathcal{C}^-(N_c N_f)] = N_f, & \text{si } q = N_c N_f. \end{cases}$$

## 5.4 Simulations

Dans ce paragraphe nous allons simuler numériquement la CRB de type modifiée afin de quantifier l'écart entre la CRB calculée en faisant l'hypothèse de non-chevauchement entre les échos et la CRB prenant en compte ces chevauchements éventuels.

Nous nous placerons dans le contexte NDA : de ce fait, la CRB affichée sera la MCRB moyennée sur les codes comme expliqué à la sous-section 5.3.3.

Afin de prendre en compte tous les trajets nous calculons la CRB de la manière suivante

$$\text{MCRB}(\mathbf{A}) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \text{MCRB}(A^\ell) \quad \text{et} \quad \text{MCRB}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \text{MCRB}(\tau^\ell).$$

Les paramètres du signal TH-UWB sont tels que :  $T_c = 3$  ns,  $T_w = 1$  ns,  $N_c = 8$  et  $N_f = 4$ . L'impulsion est celle présentée au paragraphe 1.2.3. Le décalage  $\delta$  de la PPM est fixé de manière à maximiser la distance entre les symboles binaires et vaut  $\delta = 0,0707$  ns.

Avant de passer aux simulations relatives à la CRB avec de « vrais » canaux, nous considérons un contexte purement académique : soient deux trajets d'amplitudes  $A^1 = 1$  et  $A^2 = 0,5$  et de retards respectifs associés  $\tau^1 = 0$  et  $\tau^2 = d\tau$  avec  $d\tau < T_c$ . Le RSB est fixé à 20 dB et le nombre de symboles émis est  $M = 100$ . À la figure 5.1, nous avons tracé la  $\text{MCRB}(\mathbf{A})$  et la  $\text{MCRB}(\boldsymbol{\tau})$  en fonction de  $d\tau$ .

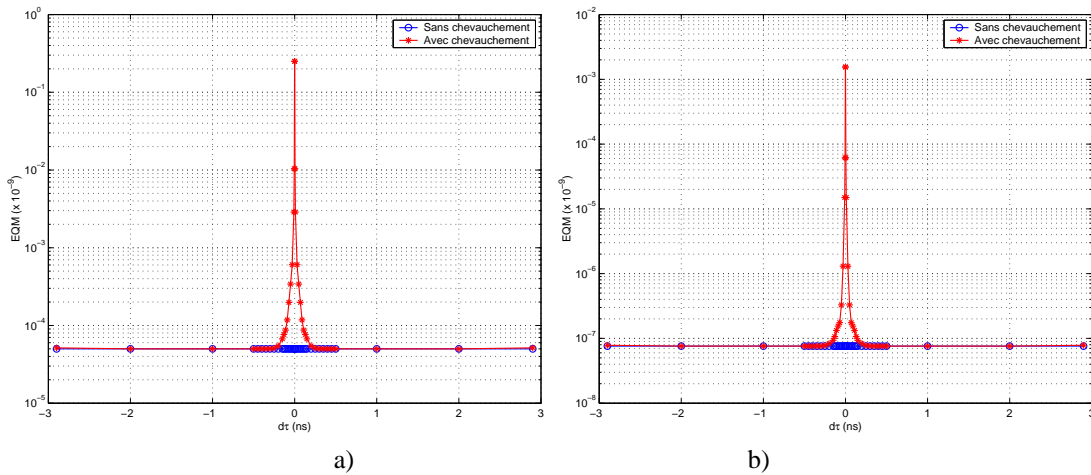


Figure 5.1 – MCRB en fonction de  $d\tau$ ,  $M = 100$ , RSB= 20 dB. a) Amplitudes  $A$ . b) Retards  $\tau$ .

Comme  $\delta < T_w$  nous savons qu'il y a des collisions si  $d\tau$  appartient à l'intervalle  $[-T_c, -(T_c - T_w - \delta)] \cup [-(T_w + \delta), T_w + \delta] \cup [T_c - T_w - \delta, T_c]$  (cf. fin du paragraphe 5.3.2), c.-à-d., si  $d\tau$  est soit proche de zéro soit proche des bords du chip. On remarque que la présence de chevauchement des trajets dégrade significativement les performances si la différence de retards est inférieure à  $T_w$ .

À présent nous souhaitons savoir si le chevauchement entre les échos est un phénomène qui intervient souvent ou pas avec des modèles de canaux réalistes présentés au paragraphe 1.3. Nous avons remarqué aux figures précédentes que le chevauchement dégradait fortement les performances d'estimation lorsque l'écart entre les deux échos était très faible, c.-à-d., de l'ordre de la largeur de l'impulsion émise.



Nous considérons deux jeux de paramètres pour le modèle de canal :  $\lambda = 0, 2 \text{ ns}^{-1}$ ,  $\gamma = 20 \text{ ns}$  issus de l'article de Saleh & Valenzuela [20] et  $\lambda = 2 \text{ ns}^{-1}$ ,  $\gamma = 5 \text{ ns}$  issus de l'article de Lee *et al.* [22]. Le nombre de trajets est fixé à  $N_p = 10$ . Les différentes courbes sont obtenues pour 120 tirages de canal, et nous avons supprimé les trajets admettant un écart temporel avec un autre trajet trop petit (de l'ordre de  $10^{-3} \text{ ns}$ ) et admettant une amplitude trop petite (de l'ordre de  $10^{-3}$ ).

À la figure 5.2 nous avons tracé l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en fonction du RSB pour les amplitudes et les retards du canal. Le nombre de symboles émis est fixé à  $M = 100$ . On remarque que pour le canal avec les paramètres de Saleh & Valenzuela (SV sur les figures) les performances sont très peu modifiées selon que la CRB est calculée sous l'hypothèse de chevauchement ou pas, contrairement au canal avec les paramètres de Lee *et al.*. En effet les paramètres de Saleh & Valenzuela génèrent des canaux avec une faible densité de trajets ( $\lambda$  faible), c.-à-d., des canaux présentant un écart entre deux trajets consécutifs relativement important. Au contraire les paramètres de Lee *et al.* génèrent des canaux avec une forte densité de trajets ( $\lambda$  fort) et donc un écart entre deux trajets consécutifs relativement faible.

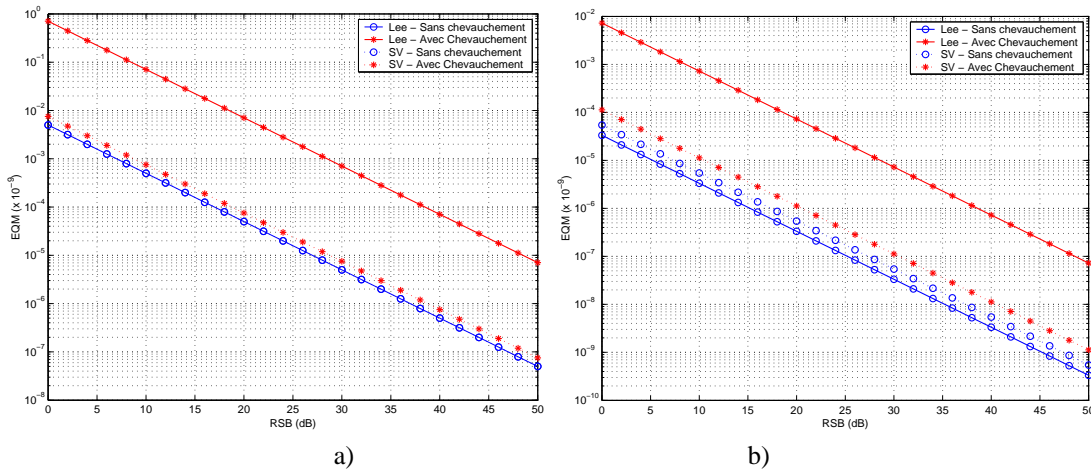


Figure 5.2 – MCRB en fonction du RSB,  $M = 100$ . a) Amplitudes  $A$  b) Retards  $\tau$ .

À la figure 5.3.a nous avons tracé l'EQM en fonction du nombre de symboles émis  $M$  pour les amplitudes et pour les retards du canal. Les canaux ont été construits en suivant soit le modèle de Saleh & Valenzuela, soit le modèle de Lee *et al.*. De nouveau pour le modèle de canaux de Lee *et al.*, un écart subsiste entre la CRB obtenue sous l'hypothèse fautive d'absence de chevauchement et la CRB calculée en prenant en compte ces chevauchements.

Ainsi l'hypothèse de non-chevauchement des trajets est à manipuler avec précaution : en effet, certains modèles de canaux UWB montrent que le chevauchement est courant et donc ne doit pas être négligé dans les calculs de bornes. De plus la CRB correctement calculée peut être bien plus élevée que la CRB obtenue en négligeant ces collisions entre échos. Ainsi la CRB classiquement obtenue dans la littérature ([67–69]) peut s'avérer bien optimiste et de ce fait absolument sans intérêt.

Des courbes similaires peuvent être obtenues dans le contexte de la modulation PAM.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi analytiquement les bornes de Cramer-Rao associées au problème d'estimation des paramètres d'amplitudes et de retards des différents échos du canal rencontré par l'utilisateur d'intérêt. Nous avons calculé ces bornes en supposant que les échos peuvent rentrer en collision ou pas. Les résultats ont montré que si le canal s'avère dense en trajet (ce qui est possible), des différences significatives sur les performances d'estimation apparaissent suivant l'hypothèse considérée.

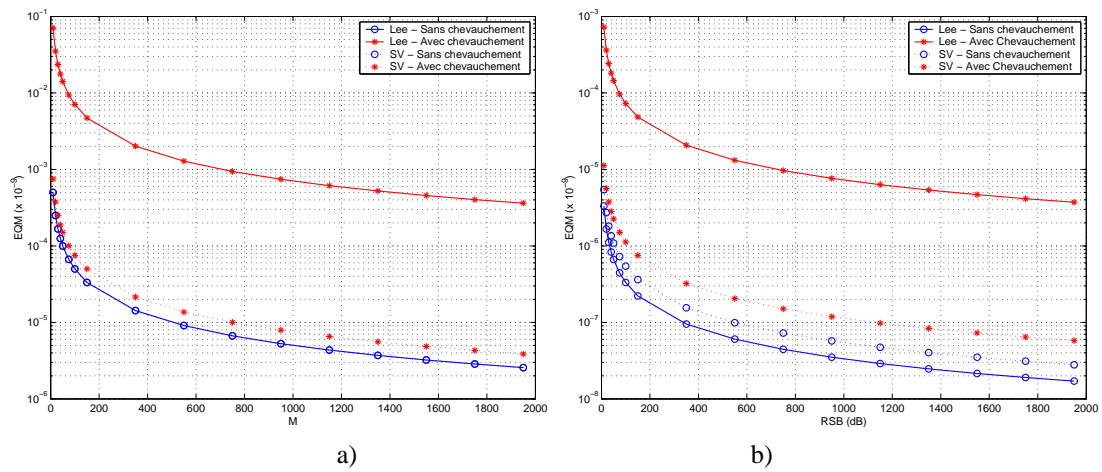


Figure 5.3 – MCRB en fonction de  $M$ , RSB= 20 dB. a) Amplitudes  $A$ . b) Retards  $\tau$ .

Les travaux présentés dans ce chapitre ont donné lieu à un article de conférence [75].

---

## Conclusion générale et perspectives

Le travail réalisé dans cette thèse concerne l'étude des systèmes de transmissions ultra large bande à accès multiple par répartition de codes de saut temporel dans un contexte asynchrone. Nous avons considéré un milieu de propagation à trajets multiples et un récepteur analogique linéaire de type rake. Nous avons étudié indépendamment : l'interférence multi-utilisateur, l'interférence entre symboles et entre trames et les bornes de Cramer-Rao des estimateurs des paramètres du canal de propagation.

Nous avons étudié l'interférence multi-utilisateur avec l'objectif de pouvoir trouver un moyen de la minimiser en jouant sur les THC. Nous avons tout d'abord calculé de manière analytique la variance de la MUI moyennée sur les paramètres aléatoires du modèle, en considérant les codes déterministes. L'expression de cette variance montre que la contribution des codes apparaît en facteur de celle-ci, et ne dépend donc pas des autres paramètres du système de transmission.

Nous avons alors déduit un critère sur les codes permettant de sélectionner ceux qui minimisent la variance de la MUI créée par un ensemble d'utilisateurs lors de la démodulation de l'utilisateur d'intérêt. Le critère est calculé sur l'ensemble des paires de codes formées entre le code de l'utilisateur d'intérêt et le code des autres utilisateurs. Nous avons établi une relation entre le critère de minimisation de la variance et le sup des intercorrélations entre les codes qui sont généralement considérés pour les systèmes à accès multiple conventionnels. Nous avons étudié le problème de l'existence des paires optimales et démontré qu'en faisant tendre le nombre de chips vers l'infini, la probabilité de tirer aléatoirement une paire optimale tendait vers 1. On en a alors déduit une stratégie de faible complexité pour rechercher les paires optimales. Les simulations ont montré que l'utilisation des codes minimisant la variance de la MUI se traduit par une amélioration significative des performances en terme de probabilité d'erreur par rapport aux séquences précédemment proposées.

Afin de comparer le système TH-UWB aux autres systèmes à étalement de spectre, nous avons étendu le calcul de la variance de la MUI aux signaux UWB utilisant l'étalement par séquence directe (DS-UWB) et aux signaux DS-CDMA. Comme pour les signaux TH-UWB, nous avons identifié un critère dont la minimisation entraîne la sélection de codes qui minimisent la variance de la MUI.

Nous avons étudié la valeur de ce critère pour des séquences de Gold et de Kasami qui sont classiquement utilisées dans les systèmes à étalement par séquence directe. Nous avons mis en évidence que ces séquences n'étaient pas optimales au sens de la variance de la MUI minimale. Nous avons montré que les séquences optimales déduites du critère étaient orthogonales et apportaient une amélioration significative des performances en terme de probabilité d'erreur. Nous avons aussi montré que l'orthogonalité entre les paires optimales était une condition nécessaire mais pas suffisante. Le choix de paires orthogonales ne vérifiant pas le critère d'optimalité sur la variance de la MUI peut conduire à des dégradations importantes des performances.

Nous nous sommes intéressés à la comparaison des variances des différents systèmes lorsque les paires optimales sont utilisées. Nous avons établi des relations d'ordre entre les systèmes qui dépendent du choix des différents paramètres. Nous avons vérifié ces résultats par simulations sur la probabilité d'erreur moyenne. On constate que dans certains cas, la relation d'ordre n'est pas conservée montrant les limites de l'approche basée sur le critère de la variance.

Nous avons étudié l'interférence entre symboles et entre trames (ISI / IFI) dans l'objectif d'analyser l'influence

sur les performances des différents paramètres du récepteur rake par rapport aux caractéristiques du canal de propagation. Nous avons de plus étudié l'influence conjointe de la MUI et de l'ISI / IFI.

On a tout d'abord analysé l'influence du nombre de doigts du récepteur rake et de la longueur du temps de garde sur la variance de l'ISI / IFI et sur la probabilité d'erreur du système. Nous avons montré qu'une probabilité d'erreur acceptable pour un système de communication est atteinte avec un faible nombre de doigts du récepteur rake. De même il apparaît raisonnable de considérer un intervalle de garde de longueur égale à l'étalement moyen du canal.

Nous avons également mis en évidence l'existence d'une interférence résiduelle qui a pour effet de rendre la probabilité d'erreur non nulle même en l'absence de bruit additif et d'interférence entre symboles et entre trames. Nous avons cependant développé une parade à l'existence de cette interférence résiduelle en modifiant légèrement le récepteur rake.

Nous avons établi analytiquement les bornes de Cramer-Rao associées au problème d'estimation des paramètres d'amplitudes et de retards des différents échos du canal rencontré par l'utilisateur d'intérêt. Nous avons calculé ces bornes en supposant que les échos peuvent rentrer en collision ou pas. Les résultats ont montré que si le canal s'avère dense en trajets (p. ex. en environnement « intérieur »), des différences significatives sur les performances d'estimation apparaissent suivant l'hypothèse considérée.

Les travaux réalisés dans la thèse ont soulevé un certain nombre de problèmes ou ouvert des pistes qui mériteraient d'être traitées par la suite. Nous les présentons ici.

- Concernant les paires de codes optimaux qui minimisent la variance de la MUI, les résultats que nous avons présentés nous permettent d'identifier un ensemble de codes optimaux par rapport à un utilisateur. Or, lorsque l'on cherche à construire un réseau de télécommunication utilisant des transmissions asynchrones, p. ex. le cas des liaisons montantes d'un réseau cellulaire, il convient que chaque utilisateur soit « protégé » au mieux de l'interférence des autres utilisateurs. Autrement dit, on doit trouver un ensemble de codes tel que tout couple de codes forme une paire optimale. La construction d'un tel ensemble constitue une étape supplémentaire par rapport à l'identification des paires optimales. C'est un problème dont la solution exhaustive paraît rébarbative en terme de complexité qu'il serait intéressant d'étudier d'une manière approfondie. Pour les signaux TH-UWB, les constructions de [33] résolvent ce problème pour des valeurs particulières de  $N_c$  et  $N_f$ . Une extension à des valeurs quelconques constitue un problème ouvert. Pour les signaux à étalement par séquence directe, les séquences classiques (Gold, Kasami) résolvent le problème du réseau, mais avec des performances qui sont éloignées de celles obtenues pour des paires optimales. Il serait intéressant de pouvoir trouver des réseaux dont les performances se rapprochent des performances optimales.

- Concernant la comparaison des différents systèmes à étalement par séquence directe, il conviendrait d'analyser plus profondément et notamment de manière analytique les distributions de l'interférence multi-utilisateur et la probabilité d'erreur moyenne des systèmes DS-UWB et TH-UWB dans un contexte simple de canaux à trajet unique.

- Concernant l'effet de l'interférence résiduelle du canal de propagation sur le récepteur rake, il conviendrait d'étudier plus profondément le récepteur rake amélioré. Notamment, en analysant la robustesse de ce nouveau récepteur à une estimation imparfaite et partielle du canal de propagation.

## Annexe A

# Annexe relative au chapitre 1

### A.1 Preuve de la Propriété 1

Comme les densités de probabilité des retards et des différences de retards consécutifs du même utilisateur sont indépendantes de l'utilisateur, nous omettons dans la suite l'indice  $n$ . Conformément à la sous-section 1.3.1 et au fait que nous adoptons un modèle de canal à une seule grappe, la différence entre deux retards consécutifs  $\tau^{i-1}$  et  $\tau^i$ , notée  $t_i$ , est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Par conséquent les retards  $\tau^\ell$  peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\tau^\ell = \sum_{i=1}^{\ell} t_i$$

et sont donc égaux à une somme de variables aléatoires indépendantes  $t_i$ .

Comme la loi de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égal au produit de convolution des lois de probabilité des variables aléatoires composant cette somme, nous avons

$$p_{\tau^\ell}(t) = \underbrace{p_{t_1}(t) \otimes p_{t_2}(t) \otimes \cdots \otimes p_{t_\ell}(t)}_{\ell \text{ termes}},$$

où  $\otimes$  désigne le produit de convolution.

Pour  $\ell = 1$ , on a trivialement

$$p_{\tau^1}(t) = p_{t_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \times \mathbb{1}_{t \geq 0}.$$

Pour  $\ell = 2$ , on a

$$p_{\tau^2}(t) = p_{t_1}(t) \otimes p_{t_2}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \times \mathbb{1}_{t \geq 0}$$

et pour un  $\ell$  fixé quelconque, on obtient, par récurrence,

$$p_{\tau^\ell}(t) = \frac{\lambda^\ell}{(\ell - 1)!} t^{\ell-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t \geq 0}. \quad (\text{A.1})$$

Le terme  $(\tau^k - \tau^\ell)$  s'écrit de la manière suivante

$$\tau^k - \tau^\ell = \sum_{i=\ell+1}^k t_i$$

dès que  $k > \ell$ . Ainsi en appliquant la démarche qui a conduit à l'expression (A.1), on obtient facilement que

$$p_{\tau^k - \tau^\ell}(t) = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k - \ell - 1)!} t^{k-\ell-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t \geq 0}. \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Preuve de la Propriété 2

Dans cette annexe, comme le calcul est indépendant de l'utilisateur considéré, nous omettons l'indice  $n$ . On rappelle que la réponse impulsionnelle du canal s'écrit

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N_p} A^k \delta(t - \tau^k).$$

Par conséquent, sa variance vaut

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \sum_{k,k'=1}^{N_p} \mathbb{E}[A^k A^{k'} \delta(t - \tau^k) \delta(t - \tau^{k'})].$$

Comme nous considérons un modèle de canal à une seule grappe, les pseudo-retards et les retards sont identiques au facteur  $\Gamma$  près. Il s'en suit que

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \sum_{k,k'=1}^{N_p} \mathbb{E}[a^k a^{k'} f(\Gamma \tau^k) f(\Gamma \tau^{k'}) \delta(t - \tau^k) \delta(t - \tau^{k'})].$$

Étant donné que les retards  $\tau^k$  sont indépendants des variables  $a^k$ , nous obtenons la simplification suivante

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \sum_{k,k'=1}^{N_p} \mathbb{E}[a^k a^{k'}] \mathbb{E}[f(\Gamma \tau^k) f(\Gamma \tau^{k'}) \delta(t - \tau^k) \delta(t - \tau^{k'})].$$

Les variables aléatoires  $a^k$  étant indépendantes et identiquement distribuées de variance égale à celle des variables  $b^k$  (c.-à-d.,  $\Omega_0$ ), nous pouvons écrire

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \sum_{k=1}^{N_p} \Omega_0 \mathbb{E}[f(\Gamma \tau^k)^2 \delta(t - \tau^k)].$$

En remplaçant  $f(\cdot)$  par son expression et en notant  $p_k(\cdot)$  la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\tau^k$ , nous avons

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \Omega_0 \sum_{k=1}^{N_p} \int e^{-\tau^k/\gamma} \delta(t - \tau^k) p_k(\tau^k) d\tau^k.$$

En appliquant une propriété bien connue de la distribution de Dirac, on obtient

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \Omega_0 \sum_{k=1}^{N_p} e^{-t/\gamma} p_k(t).$$

En remplaçant  $p_k(t)$  par sa valeur (cf. Propriété 1), nous avons

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \Omega_0 \sum_{k=1}^{N_p} e^{-t/\gamma} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t},$$

d'où

$$\mathbb{E}[|h(t)|^2] = \Omega_0 \lambda e^{-(1/\gamma + \lambda)t} \sum_{k=0}^{N_p-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

En faisant tendre  $N_p$  le nombre de trajets vers l'infini, nous obtenons le résultat final. Étant donné la figure 1.7 montrant des réponses impulsionnelles réalistes, il apparaît raisonnable de considérer  $N_p$  grand.

### A.3 Expression du bruit filtré et de sa variance

Nous donnons, dans cette annexe, une expression analytique simple du bruit filtré  $\eta$  en sortie du récepteur rake ainsi que de sa variance.

Le bruit  $n(t)$  est supposé blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $N_0/2$ . En sortie du récepteur rake, le terme de bruit  $\eta$  s'exprime par

$$\eta = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_1^\ell \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j) \int_0^{N_f T_f} v(t - jT_c) \cdot n(t) dt.$$

Le carré de  $\eta$  s'écrit de la manière suivante

$$\eta^2 = \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j_1) c_1(j_2) \int_0^{N_f T_f} \int_0^{N_f T_f} v(t_1 - j_1 T_c) v(t_2 - j_2 T_c) n(t_1) n(t_2) dt_1 dt_2.$$

Par conséquent, la variance de  $\eta$  admet l'expression suivante

$$\mathbb{E}[\eta^2] = \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j_1) c_1(j_2) \int_0^{N_f T_f} \int_0^{N_f T_f} v(t_1 - j_1 T_c) v(t_2 - j_2 T_c) \mathbb{E}[n(t_1) n(t_2)] dt_1 dt_2.$$

Le bruit additif  $n(t)$  étant blanc, nous avons  $\mathbb{E}[n(t_1) n(t_2)] = \frac{N_0}{2} \times \delta(t_1 - t_2)$ . Ceci implique que

$$\mathbb{E}_n[\eta^2] = \frac{N_0}{2} \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2} \sum_{j_1, j_2=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j_1) c_1(j_2) \int_0^{N_f T_f} v(t - j_1 T_c) v(t - j_2 T_c) dt. \quad (\text{A.3})$$

Le support de  $t \mapsto v(t)$  étant inférieur à  $T_c$ , seuls les termes qui composent les sommes de (A.3) et qui correspondent à  $j_1 = j_2$  sont non nuls. Il advient que

$$\mathbb{E}[\eta^2] = \frac{N_0}{2} \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2} \sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j)^2 \int_0^{N_f T_f} v^2(t - j T_c) dt.$$

On définit la fonction d'autocorrélation de  $t \mapsto v(t)$  de la manière suivante

$$r_{vv}(s) := \int_0^{N_f T_f} v(t - s) v(t) dt.$$

De plus, il est facile de vérifier que

$$\sum_{j=0}^{N_c N_f - 1} c_1(j)^2 = N_f.$$

Ainsi la variance du bruit en sortie du récepteur rake est donnée par

$$\mathbb{E}[\eta^2] = \frac{N_0}{2} N_f r_{vv}(0) \times \sum_{\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}} A_1^{\ell_1} A_1^{\ell_2}.$$

On remarquera que cette expression ne dépend de la modulation PPM ou PAM qu'au travers de la forme de  $v(t)$  qui s'écrit  $v(t) = w(t) - w(t - \delta)$  pour la PPM et  $v(t) = w(t)$  pour la PAM.

### A.4 Preuve de la Propriété 3

On présente dans cette annexe le calcul de  $y_{k,\ell,n}(\theta_n)$  défini par (1.25) pour la PPM.

On pose :

$$\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} := Q_n^{k,\ell} N_f T_f + q_n^{k,\ell} T_c + \varepsilon_n^{k,\ell}, \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$Q_n^{k,\ell} = \lfloor (\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n}) / N_f T_f \rfloor, \quad Q_n^{k,\ell} \in \{-\infty, +\infty\},$$

$$q_n^{k,\ell} = \lfloor (\theta_n + \Delta\tau_{k,\ell,n} - Q_n^{k,\ell} N_f T_f) / T_c \rfloor, \quad q_n^{k,\ell} \in \{0, \dots, N_c N_f - 1\},$$

et  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  le reste tel que  $0 \leq \varepsilon_n^{k,\ell} < T_c$ . Les variables  $Q_n^{k,\ell}$ ,  $q_n^{k,\ell}$  et  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  sont des fonctions de  $\theta_n$  et  $\Delta\tau_{n,k,\ell}$ , cette dépendance n'est pas précisée explicitement, dans le but d'alléger les notations.

L'expression (1.25) devient alors

$$y_{k,\ell,n}^{\text{PPM}}(\theta_n) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j,j_1=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j) c_1(j_1) r_{vw}((Q_n^{k,\ell} + i) N_f T_f + (q_n^{k,\ell} + j - j_1) T_c + \varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(i)). \quad (\text{A.5})$$

En notant  $T_{r_{vw}}$  le support de la fonction d'intercorrélation  $r_{vw}$ , les termes non nuls de la partie droite de (A.5) sont obtenus pour

$$-T_{r_{vw}} \leq (Q_n^{k,\ell} + i) N_f T_f + (q_n^{k,\ell} + j - j_1) T_c + \varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(i) \leq T_{r_{vw}},$$

en remplaçant  $\varepsilon_n^{k,\ell}$  par ses valeurs limites, on obtient

$$-T_{r_{vw}} - T_c < (Q_n^{k,\ell} + i) N_f T_f + (q_n^{k,\ell} + j - j_1) T_c + \delta d_n(i) \leq T_{r_{vw}}.$$

De plus on a  $0 \leq \delta d_n(i) \leq \delta$  et en utilisant le fait que

$$-N_c N_f + 1 \leq q_n^{k,\ell} + j - j_1 \leq 2N_c N_f - 2,$$

on obtient

$$-T_{r_{vw}} - 2N_f T_f + T_c - \delta < (Q_n^{k,\ell} + i) N_f T_f \leq T_{r_{vw}} + N_f T_f - T_c.$$

En utilisant le fait que le support  $T_{r_{vw}} + \delta \ll T_c$  on obtient

$$-2 < Q_n^{k,\ell} + i < 1.$$

On identifie alors deux valeurs possibles pour  $i$  :

$$i = -Q_n^{k,\ell} \quad \text{et} \quad i = -Q_n^{k,\ell} - 1.$$

On pose  $y_{k,\ell,n}^{\text{PPM}}(\theta_n) := y_{k,\ell,n}^-(\theta_n) + y_{k,\ell,n}^+(\theta_n)$ , le terme  $y_{k,\ell,n}^-(\theta_n)$  est associé à  $i = -Q_n^{k,\ell} - 1$  et le terme  $y_{k,\ell,n}^+(\theta_n)$  est associé à  $i = -Q_n^{k,\ell}$ . Considérons le cas  $i = -Q_n^{k,\ell} - 1$ . On a

$$-T_{r_{vw}} - T_c - \delta < (j - j_1 + q_n^{k,\ell} - N_c N_f) T_c \leq T_{r_{vw}}, \quad (\text{A.6})$$

ainsi il vient  $(j - j_1 + q_n^{k,\ell} - N_c N_f) = 0$  ou  $(j - j_1 + q_n^{k,\ell} - N_c N_f) = -1$  comme valeurs possibles qui vérifient (A.6). Soit

$$y_{k,\ell,n}^-(\theta_n) = \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell}) r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1)) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell} + 1) r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1)), \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\mathcal{C}_{m,n}^-(q) := \sum_{k=0}^{q-1} c_m(k) c_n(k - q). \quad (\text{A.8})$$

Considérons le cas  $i = -Q_n^{k,\ell}$ . On a

$$-T_{r_{vw}} - T_c - \delta < (j - j_1 + q_n^{k,\ell}) T_c \leq T_{r_{vw}}, \quad (\text{A.9})$$



ainsi il vient  $(j - j_1 + q_n^{k,\ell}) = 0$  ou  $(j - j_1 + q_n^{k,\ell}) = -1$  comme valeurs possibles qui vérifient (A.9). Soit

$$y_{k,\ell,n}^+(\theta_n) = \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell})) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell})),$$

avec

$$\mathcal{C}_{m,n}^+(q) := \sum_{k=q}^{N_c N_f - 1} c_m(k)c_n(k - q). \quad (\text{A.10})$$

Il vient finalement

$$\begin{aligned} y_{k,\ell,n}^{\text{PPM}}(\theta_n) &= \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1)) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1)) \\ &+ \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell})) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c + \delta d_n(-Q_n^{k,\ell})). \end{aligned}$$

## A.5 Preuve de la Propriété 4

On présente dans cette annexe le calcul de  $y_{k,\ell,n}(\theta_n)$  défini par (1.30) pour la PAM.

En utilisant (A.4), (1.30) devient :

$$y_{k,\ell,n}^{\text{PAM}}(\theta_n) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j,j_1=0}^{N_c N_f - 1} c_n(j)c_1(j_1)d_n(i)r_{ww}((Q_n^{k,\ell} + i)N_f T_f + (q_n^{k,\ell} + j - j_1)T_c + \varepsilon_n^{k,\ell}). \quad (\text{A.11})$$

En notant  $T_{r_{ww}}$  le support de la fonction d'intercorrélacion  $r_{ww}$ , les termes non nuls de la partie droite de (A.11) sont obtenus pour

$$-T_{r_{ww}} \leq (Q_n^{k,\ell} + i)N_f T_f + (q_n^{k,\ell} + j - j_1)T_c + \varepsilon_n^{k,\ell} \leq T_{r_{ww}}.$$

En utilisant un raisonnement identique au cas de la PPM, on obtient

$$\begin{aligned} y_{k,\ell,n}^{\text{PAM}}(\theta_n) &= d_n(-Q_n^{k,\ell}) \left[ \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^+(q_n^{k,\ell} + 1)r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right] \\ &+ d_n(-Q_n^{k,\ell} - 1) \left[ \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,n}^-(q_n^{k,\ell} + 1)r_{ww}(\varepsilon_n^{k,\ell} - T_c) \right]. \end{aligned}$$



## Annexe B

# Annexe relative au chapitre 2

### B.1 Borne supérieure de $\bar{\pi}$

D'après la propriété 10, une paire  $(c_m, c_n)$  est optimale pour la PPM, si elle vérifie  $\sup_k \mathcal{C}_{m,n}(k) = 1$ . Si l'on probabilise les codes, on peut alors réexprimer (2.23) sous la forme

$$\pi := \Pr\{\exists k \in [0, N_c - 1] / \mathcal{C}_{m,n}(k) \leq 1\}, \quad (\text{B.1})$$

de sorte que la probabilité complémentaire s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \Pr\{\exists k \in [0, N_c - 1] / \mathcal{C}_{m,n}(k) \geq 2\} \\ &= \Pr\left\{\bigcup_{i=2}^{N_f} \mathcal{C}_{m,n}(k) = i, \forall k\right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les événements de (B.2) n'étant pas indépendants, nous pouvons en donner une borne supérieure grâce à la borne de l'union :

$$\bar{\pi} \leq \sum_{i=2}^{N_f} \pi_i, \quad \text{avec} \quad \pi_i := \Pr\{E_i\}. \quad (\text{B.3})$$

où l'évènement  $E_i$  est défini par

$$E_i := \{\text{il existe au moins une valeur de } k \in [0, \dots, N_c - 1] \text{ pour laquelle } \mathcal{C}_{m,n}(k) = i\}.$$

Afin de décrire les événements  $E_i$  pour poursuivre le calcul, nous introduisons une caractérisation des codes à partir des distances (en nombre de chips) entre les différents '1' du code développé. La définition de distance suivante

$$d_m(p, q) := \tilde{c}_m(q) - \tilde{c}_m(p) + (q - p)N_c, \quad (\text{B.4})$$

donne le nombre de chips entre le '1' de la trame  $q$  et le '1' de la trame  $p$  du code développé  $c_m$  où les indices  $q$  et  $p$  sont pris modulo  $N_f$  dans l'argument des THC. Compte tenu de la structure des codes développés, l'ensemble des distances à considérer pour le code  $c_m$  est donné par

$$\mathcal{D}_m := \{d_m(p, q), \quad 0 \leq p \leq N_f - 1, \quad p + 1 \leq q \leq p + N_f - 1\}. \quad (\text{B.5})$$

On peut alors décrire la réalisation de l'évènement  $E_2$  en terme de distance. Il se réalise dès qu'une distance de  $\mathcal{D}_m$  est égale à une distance de  $\mathcal{D}_n$ , soit encore  $E_2 = \{\exists (p_1, q_1), (p_2, q_2) / d_m(p_1, q_1) = d_n(p_2, q_2)\}$ . D'une manière plus générale, l'évènement  $E_i$  se réalise lorsque le code  $c_m$  possède au moins  $i(i-1)/2$  distances égales au code  $c_n$ . L'évènement  $E_3$  est équivalent à l'intersection de trois sous-événements  $E_3 = \{E_3^1 \cap E_3^2 \cap E_3^3\}$  avec

$$\begin{aligned} E_3^1 &:= \{\exists (p_1, q_1), (p_2, q_2) / d_m(p_1, q_1) = d_n(p_2, q_2)\}, \\ E_3^2 &:= \{\exists (p_1, r_1), (p_2, r_2) / d_m(p_1, r_1) = d_n(p_2, r_2)\}, \\ E_3^3 &:= \{\exists (q_1, r_1), (q_2, r_2) / d_m(q_1, r_1) = d_n(q_2, r_2)\}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de  $E_3$ , on a

$$\forall i, \quad \Pr\{E_3\} \leq \Pr\{E_3^i\}.$$

De plus, on remarque que  $E_2$  et  $E_3^i$  sont équivalents, puisqu'ils représentent les mêmes événements, ce qui entraîne

$$\pi_2 \geq \pi_3.$$

De la même manière, on en déduit

$$\pi_2 \geq \pi_i \quad i = 3, \dots, N_f.$$

En appliquant ces inégalités dans (B.3), on obtient

$$\bar{\pi} \leq (N_f - 1)\pi_2.$$

Nous réexprimons  $\pi_2$  à l'aide des distances

$$\pi_2 = \Pr\left\{ \bigcup_{\substack{p_1, q_1 \\ p_2, q_2}} d_m(p_1, q_1) = d_n(p_2, q_2) \right\},$$

expression que nous majorons par la borne de l'union :

$$\pi_2 \leq S := \sum_{\substack{p_1, q_1 \\ p_2, q_2}} \Pr\{d_m(p_1, q_1) = d_n(p_2, q_2)\}.$$

Pour calculer  $S$ , nous supposons maintenant les codes  $\tilde{c}(k)$  aléatoires, *i.i.d.*, à valeurs dans  $\{0, N_c - 1\}$ , c.-à-d. :

$$\forall i \in \{0, N_c - 1\}, \quad \Pr\{\tilde{c}(k) = i\} = \frac{1}{N_c}.$$

D'après la statistique des codes et en utilisant (B.4) on peut réexprimer  $S$  de la manière suivante

$$S = \sum_{\substack{p_1, q_1 \\ p_2, q_2}} \Pr\{\Delta_m - \Delta_n = ((q_2 - p_2) - (q_1 - p_1))N_c\}, \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\Delta_m := \tilde{c}_m(q_1) - \tilde{c}_m(p_1) \quad \text{et} \quad \Delta_n := \tilde{c}_n(q_2) - \tilde{c}_n(p_2).$$

Si l'on identifie dans (B.6) le nombre de termes pour lesquels  $(q_2 - p_2) - (q_1 - p_1)$  est constant,  $S$  prend la forme

$$S = \sum_{\ell=-N_f+2}^{N_f-1} \Pr\{\Delta_m - \Delta_n = \ell N_c\} \cdot N_f [N_f(N_f - 1) - |\ell|N_f]. \quad (\text{B.7})$$

Puisque  $\tilde{c}_m(k) \in [0, N_c - 1]$  on a  $(\Delta_m - \Delta_n) \in [-2N_c + 2, 2N_c - 2]$ , ce qui implique que les termes pour  $|\ell| \geq 2$  dans la somme (B.7) sont nuls. Ainsi (B.7) devient

$$S = N_f^2 [\alpha(N_f - 1) + 2\beta(N_f - 2)], \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\alpha := \Pr\{\Delta_m - \Delta_n = 0\} \quad \text{et} \quad \beta := \Pr\{\Delta_m - \Delta_n = N_c\}.$$

À présent nous allons calculer les quantités  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les événements  $\Delta_m = k$  et  $\Delta_n = k$  étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr\left\{ \bigcup_{k=-N_c+1}^{N_c-1} (\Delta_m = k) \cap (\Delta_n = k) \right\} \\ &= \sum_{k=-N_c+1}^{N_c-1} \Pr\{\Delta_m = k\} \Pr\{\Delta_n = k\}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

D'après la distribution de  $\tilde{c}_m(k)$ ,

$$\Pr\{\Delta_m = i\} = \frac{N_c - |i|}{N_c^2},$$

de sorte que reporté dans (B.9), on obtient

$$\alpha = \frac{1}{N_c^2} + 2 \sum_{k=1}^{N_c-1} \frac{(N_c - k)^2}{N_c^4} = \frac{2}{3N_c} + \frac{1}{3N_c^3}. \quad (\text{B.10})$$

De la même manière, on obtient pour  $\beta$

$$\begin{aligned} \beta &= \Pr\left\{ \bigcup_{k=1}^{N_c-1} (\Delta_m = k) \cap (\Delta_n = k + N_c) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{N_c} \Pr\{\Delta_m = k\} \Pr\{\Delta_n = k + N_c\} \\ &= \frac{1}{N_c^4} \sum_{k=1}^{N_c-1} N_c(N_c - k) \\ &= \frac{1}{2N_c} - \frac{1}{2N_c^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

En utilisant (B.8), (B.10) et (B.11) on obtient finalement

$$S = \frac{N_f^2}{3N_c} \left[ N_f \left( 5 + \frac{1}{N_c^2} - \frac{3}{N_c} \right) + \frac{6}{N_c} - \frac{1}{N_c^2} - 8 \right]. \quad (\text{B.12})$$

Ainsi la borne supérieure de  $\bar{\pi}$  est donnée par :

$$\bar{\pi} \leq (N_f - 1) \frac{N_f^2}{3N_c} \left[ N_f \left( 5 + \frac{1}{N_c^2} - \frac{3}{N_c} \right) + \frac{6}{N_c} - \frac{1}{N_c^2} - 8 \right].$$

## B.2 Existence des paires optimales en PAM pour $\sup_q \mathcal{E}_{m,n}(q) > 1$

Nous démontrons ici que l'ensemble des paires optimales pour la PAM admet des paires vérifiant  $\sup_q \mathcal{E}_{m,n}(q) = 2$  et qu'il n'existe pas de paires optimales vérifiant  $\sup_q \mathcal{E}_{m,n}(q) > 2$ .

La démarche utilisée est la suivante. On considère tout d'abord l'expression (2.16) dans laquelle on remplace  $\kappa_{m,n}$  par sa valeur optimale  $N_f^2$ . Puis on l'identifie à sa forme polynomiale (2.17), ce qui donne l'équation :  $\sum_{i=1}^{N_f} i^2 \cdot \pi_i = N_f^2 + 2 \cdot \xi_{m,n}$ . On considère ensuite la contrainte (2.15) qui nous amène une deuxième équation :  $\sum_{i=1}^{N_f} i \cdot \pi_i = N_f^2$ . On conclue enfin en vérifiant si le système d'équations admet des solutions compatibles avec les hypothèses.

### a) Cas $\sup_q \mathcal{E}_{m,n}(q) = 2$

Lorsqu'une paire de code  $(c_m, c_n)$  vérifie  $\sup_q \mathcal{E}_{m,n}(q) = 2$ , ce qui est équivalent à  $\pi_2 \neq 0$  et  $\{\pi_i = 0\}_{i=3}^{N_f}$ , les intercorrélations partielles  $\mathcal{E}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{E}_{m,n}^-(q)$  peuvent prendre l'ensemble des valeurs suivantes :

$\mathcal{E}_{m,n}^+(q)$	$\mathcal{E}_{m,n}^-(q)$	$\mathcal{E}_{m,n}(q)$	$\mathcal{E}_{m,n}^+(q)\mathcal{E}_{m,n}^-(q)$
2	0	2	0
1	1	2	1
0	2	2	0
1	0	1	0
0	1	1	0

Introduisons  $\pi_2^0$  et  $\pi_2^1$  qui représentent le nombre de fois où  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$  est atteint respectivement pour les couples  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 0, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 2$  (ou  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 2, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 0$ ) et  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$ . Ces variables vérifient  $\pi_2 = \pi_2^0 + \pi_2^1$ . D'après (2.9) et les valeurs du tableau précédent, on a  $\xi_{m,n} = \pi_2^1$  puisque la seule contribution non-nulle à  $\xi_{m,n}$  correspond au cas  $\mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$  avec un poids '1'. Ainsi, le système à résoudre est

$$\begin{cases} \pi_1 + 4\pi_2 = N_f^2 + 2\pi_2^1 \\ \pi_1 + 2\pi_2 = N_f^2 \end{cases}.$$

Le système est sous déterminé et l'on en déduit tout d'abord que  $\pi_2^0 = 0$ , puis que la solution est donnée par l'équation  $\pi_1 + 2\pi_2 = N_f^2$  avec  $\pi_2 = \pi_2^1$ . Ainsi, nous venons de démontrer qu'il peut exister des paires optimales pour lesquelles  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$ . De plus, le sup est atteint si et seulement si  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$ . En d'autres termes, s'il existe des paires optimales pour la PAM vérifiant  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$ , elles vérifient en plus  $\sup_q \{\mathcal{C}_{m,n}^+(q)\} = 1$  et  $\sup_q \{\mathcal{C}_{m,n}^-(q)\} = 1$ .

### b) Cas $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 3$

Lorsqu'une paire de code  $(c_m, c_n)$  vérifie  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 3$ , ce qui est équivalent à  $\pi_3 \neq 0$  et  $\{\pi_i = 0\}_{i=4}^{N_f}$ , les intercorrélations partielles  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$  peuvent prendre, en complément du tableau précédent, l'ensemble des valeurs suivantes :

$\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$	$\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$	$\mathcal{C}_{m,n}(q)$	$\mathcal{C}_{m,n}^+(q)\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$
3	0	3	0
2	1	3	2
1	2	3	2
0	3	3	0

Pour les mêmes raisons que la cas précédent, on a  $\xi_{m,n} = 2 \cdot \pi_3^1 + \pi_3^0$  avec  $\pi_3 = \pi_3^0 + \pi_3^1$  puisque les contributions non-nulles à  $\xi_{m,n}$  correspondent au cas  $\mathcal{C}_{m,n}(q) = 2$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$  avec un poids '1' et  $\mathcal{C}_{m,n}(q) = 3$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 2, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 1$  (ou  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = 1, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = 2$ ) avec un poids '2'. Le système à résoudre est alors :

$$\begin{cases} \pi_1 + 4\pi_2 + 9\pi_3 = N_f^2 + 2\pi_2^1 + 4\pi_3^1 \\ \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = N_f^2 \end{cases}.$$

En combinant les deux équations, on se ramène à l'équation solution  $2\pi_2^0 + 6\pi_3^0 + 2\pi_3^1 = 0$ . Les coefficients de cette équation étant tous positifs, cette équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}^*$ . On en déduit donc qu'il n'existe pas de paires optimales pour lesquelles  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = 3$ .

### c) Cas $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) \geq 4$

Considérons le cas général  $\sup_q \mathcal{C}_{m,n}(q) = j$  pour  $j \geq 4$ . On va montrer que l'équation solution du système revient à annuler un polynôme en  $\pi_i$  dont tous les coefficients sont positifs et donc qui n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}^*$ . On passe du cas  $j$  au cas  $j + 1$  en ajoutant à l'équation solution un terme en  $\pi_{j+1}$ , de sorte que si on démontre que le coefficient du terme  $\pi_j$  est positif, on en déduira le résultat final par récurrence à partir du cas  $j = 3$ .

On va supposer  $j$  pair pour la démonstration mais elle se généralise sans peine à  $j$  impair. Si l'on décrit le

tableau des combinaisons possibles de  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$  et  $\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$ , en omettant les symétries on obtient :

$\mathcal{C}_{m,n}^+(q)$	$\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$	$\mathcal{C}_{m,n}(q)$	$\mathcal{C}_{m,n}^+(q)\mathcal{C}_{m,n}^-(q)$
$j$	0	$j$	0
$j-1$	1	$j$	$j-1$
$j-2$	2	$j$	$2(j-2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j/2$	$j/2$	$j$	$j^2/4$

On en déduit alors que :

$$\xi_{m,n} = \sum_{k=1}^{j/2} k(j-k) \cdot \pi_j^k$$

où  $\pi_j^k$  désigne le nombre de collisions  $\mathcal{C}_{m,n}(q) = j$  créées par un couple  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = k, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = j-k$  ou  $\mathcal{C}_{m,n}^+(q) = j-k, \mathcal{C}_{m,n}^-(q) = k$ . Ces variables vérifient bien sûr  $\sum_{k=1}^{j/2} \pi_j^k = \pi_j$ . Le terme de l'équation solution correspondant à la variable  $\pi_j$  peut se développer en termes  $\{\pi_j^k\}_{k=1}^{j/2}$  dont les coefficients s'écrivent alors

$$j^2 - j(2k+1)j + 2k^2.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que ces coefficients sont tous positifs. Le discriminant de l'équation précédente vaut  $-2k(k-1) + 1/2$ . Pour  $k > 1$ , le discriminant est négatif d'où l'on en déduit que les coefficients sont positifs. Pour  $k = 1$ , il suffit de vérifier que la racine la plus grande est inférieure à  $j = 4$ , ce qui est vrai puisqu'elle vaut  $(6 + \sqrt{2})/4$ .





## Annexe C

# Annexe relative au chapitre 3

### C.1 Preuve de la Propriété 11

En remplaçant  $y_{k,\ell,1}(0)$  par son expression (1.32) dans la définition de  $\rho_{k,\ell,1}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\rho_{k,\ell,1} &= d_1(-Q_1^{k,\ell})^2 [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + (\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1))^2 \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \\
&+ d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)^2 [\mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \\
&+ 2d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1) [\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \cdot r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})],
\end{aligned}$$

où les termes  $Q_1^{k,\ell}$ ,  $q_1^{k,\ell}$  et  $\varepsilon_1^{k,\ell}$  sont définis à la propriété 3.

L'impulsion  $w(t)$  n'occupe qu'une toute petite partie du chip de durée  $T_c$  puisque  $T_w \ll T_c$ . Ainsi les deux termes  $r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})$  et  $r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)$  ne peuvent être non nuls simultanément ce qui implique que le produit  $r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)$  est toujours nul. Il advient que

$$\begin{aligned}
\rho_{k,\ell,1} &= d_1(-Q_1^{k,\ell})^2 [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
&+ d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)^2 [\mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
&+ 2d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1) [\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)]
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule reportée dans la propriété.

En procédant de la même manière pour  $\mu_{k,\ell,1}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\mu_{k,\ell,1} = & d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(-Q_1^{\ell,k})[\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k})] \\
& + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)[\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k})] \\
& + d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)[\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k})] \\
& + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)d_1(-Q_1^{\ell,k})[\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{ww}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c)].
\end{aligned}$$

Les composantes de  $\mu_{k,\ell,1}$  dépendant de la différence de retard  $\Delta\tau_{k,\ell,1} = \tau_1^k - \tau_1^\ell$  et de son opposé. Il est facile de montrer que les termes résultant dans la division euclidienne (cf propriété 3 du chapitre 1) des deux différences opposées sont reliés de la manière suivante :

$$Q_1^{\ell,k} = -Q_1^{k,\ell} - 1, \quad (\text{C.1})$$

$$q_1^{\ell,k} = N_c N_f - 1 - q_1^{k,\ell}, \quad (\text{C.2})$$

$$\varepsilon_1^{\ell,k} = T_c - \varepsilon_1^{k,\ell}. \quad (\text{C.3})$$

En utilisant (C.1), (C.2) et (C.3), et en tenant compte de la parité de la fonction  $s \mapsto r_{ww}(s)$  et du fait que le terme produit  $r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{ww}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)$  est nul, nous avons

$$\begin{aligned}
\mu_{k,\ell,1} = & d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(Q_1^{k,\ell} + 1)[\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(N_c N_f - q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(N_c N_f - q_1^{k,\ell} - 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
& + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)d_1(Q_1^{k,\ell})[\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(N_c N_f - q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(N_c N_f - q_1^{k,\ell} - 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
& + d_1(-Q_1^{k,\ell})d_1(Q_1^{k,\ell})[\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(N_c N_f - q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(N_c N_f - q_1^{k,\ell} - 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\
& + d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)d_1(Q_1^{k,\ell} + 1)[\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(N_c N_f - q_1^{k,\ell})r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\
& + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(N_c N_f - q_1^{k,\ell} - 1)r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)].
\end{aligned}$$

Le terme  $\mu_{k,\ell,1}$  peut encore être simplifié en utilisant les propriétés suivantes satisfaites par les termes de collisions. Ainsi

$$\mathcal{C}_{1,n}^+(N_c N_f - q) = \sum_{m=N_c N_f - q}^{N_c N_f - 1} c_1(m)c_n(m - N_c N_f + q),$$

et en posant  $m' = m - N_c N_f + q$ , nous obtenons

$$\mathcal{C}_{1,n}^+(N_c N_f - q) = \sum_{m'=0}^{q-1} c_1(m' + N_c N_f - q)c_n(m'),$$

Les codes développés étant périodiques de période  $N_c N_f$ , il advient que

$$\mathcal{C}_{1,n}^+(N_c N_f - q) = \sum_{m'=0}^{q-1} c_1(m' - q) c_n(m') = \mathcal{C}_{n,1}^-(q).$$

En procédant de la même manière, nous pouvons montrer que

$$\mathcal{C}_{1,n}^-(N_c N_f - q) = \mathcal{C}_{n,1}^+(q).$$

En posant  $n = 1$  dans les deux précédentes égalités, nous avons

$$\mathcal{C}_{1,1}^+(N_c N_f - q) = \mathcal{C}_{1,1}^-(q), \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{1,1}^-(N_c N_f - q) = \mathcal{C}_{1,1}^+(q). \quad (\text{C.4})$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mu_{k,\ell,1} &= d_1(-Q_1^{k,\ell}) d_1(Q_1^{k,\ell} + 1) \cdot [\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\ &+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &+ d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1) d_1(Q_1^{k,\ell}) \cdot [\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \\ &+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &+ d_1(-Q_1^{k,\ell}) d_1(Q_1^{k,\ell}) \cdot [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)] \\ &+ d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1) d_1(Q_1^{k,\ell} + 1) \cdot [\mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)]. \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule reportée dans la propriété.

## C.2 Preuve du Théorème 2

D'après le modèle de canal à une seule grappe présenté à la section 1.3, nous savons (cf. éq. (1.12)) que

$$I_1^k = \sigma_a^2 \cdot f^2(\tau_1^k) = \sigma_a^2 \cdot e^{-\tau_1^k/\gamma}.$$

A partir de l'équation (3.21), si nous remplaçons  $I_1^k$  par la formule précédente et que nous moyennons sur les retards, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,d,\tau}[(z_2)^2] &= \sigma_a^4 \left[ 2 \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} [Y_1^{k,\ell} + \bar{Y}_2^{k,\ell} + Y_3^{k,\ell} + \bar{Y}_4^{k,\ell}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} [\bar{Y}_1^{k,\ell} + \bar{Y}_2^{k,\ell} + \bar{Y}_3^{k,\ell} + \bar{Y}_4^{k,\ell}] \right]. \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

avec

$$Y_1^{k,\ell} := \mathbb{E}_\tau \left[ [\delta_{Q_1^{k,\ell}} + 1] \cdot e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \right], \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{Y}_1^{k,\ell} := \mathbb{E}_\tau \left[ e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \right], \quad (\text{C.7})$$

$$\bar{Y}_2^{k,\ell} := \mathbb{E}_\tau \left[ e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) \right], \quad (\text{C.8})$$

$$Y_3^{k,\ell} := \mathbb{E}_\tau \left[ [\delta_{Q_1^{k,\ell}} + 1] \cdot e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \right], \quad (\text{C.9})$$

$$\bar{Y}_3^{k,\ell} := \mathbb{E}_\tau \left[ e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \right], \quad (\text{C.10})$$

$$\bar{Y}_4^{k,\ell} := \mathbb{E}_\tau \left[ e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) \cdot r_{ww}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) \right]. \quad (\text{C.11})$$

Dans la suite, nous présentons le calcul de  $Y_1^{k,\ell}$  (avec  $k > \ell$ ). Les autres termes  $\bar{Y}_1^{k,\ell}$ ,  $\bar{Y}_2^{k,\ell}$ ,  $Y_3^{k,\ell}$ ,  $\bar{Y}_3^{k,\ell}$ , et  $\bar{Y}_4^{k,\ell}$  s'obtiennent grâce à des techniques similaires.

Étant donné la définition de  $\varepsilon_1^{k,\ell}$  fournie à la propriété 3,  $Y_1^{k,\ell}$  peut s'écrire en fonction de  $\tau_1^k$ ,  $\tau_1^\ell$ ,  $Q_1^{k,\ell}$  et  $q_1^{k,\ell}$  de la manière suivante

$$Y_1^{k,\ell} = \mathbb{E}_\tau \left[ [\delta_{Q_1^{k,\ell}} + 1] e^{-(\tau_1^\ell + \tau_1^k)/\gamma} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) \cdot r_{ww}(\tau_1^k - \tau_1^\ell - Q_1^{k,\ell} N_f T_f - q_1^{k,\ell} T_c) \right].$$

Comme les retards  $\tau_1^k$  et  $\tau_1^\ell$  sont associés au même utilisateur, ils sont corrélés entre-eux. Néanmoins il est possible de réécrire  $Y_1^{k,\ell}$  en fonction d'un retard et d'une différence de retard qui seront indépendants entre eux. En effet, nous avons

$$\tau_1^k + \tau_1^\ell = 2\tau_1^\ell + \tau_1^k - \tau_1^\ell = 2\tau_1^\ell + \Delta\tau_{k,\ell,1}$$

avec  $\tau_1^\ell$  et  $\Delta\tau_{k,\ell,1}$  deux variables aléatoires indépendantes (car  $k > \ell$ ) dont les lois de probabilité sont données par la propriété 1. Ainsi  $Y_1^{k,\ell}$  se met sous la forme d'un produit

$$Y_1^{k,\ell} = X_1^{k,\ell} \cdot \tilde{X}_1^{k,\ell}$$

avec

$$X_1^{k,\ell} = \mathbb{E}_{\tau_1^\ell} [e^{-2\tau_1^\ell/\gamma}] \text{ et } \tilde{X}_1^{k,\ell} = \mathbb{E}_{\Delta\tau_{k,\ell,1}} [[\delta_{Q_1^{k,\ell}} + 1] \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) e^{-\Delta\tau_{k,\ell,1}/\gamma} r_{ww}^2(\Delta\tau_{k,\ell,1} - Q_1^{k,\ell} N_f T_f - q_1^{k,\ell} T_c)].$$

En utilisant la propriété 1, nous obtenons que

$$X_1^{k,\ell} = \frac{\lambda^\ell}{(\ell-1)!} \int_0^{+\infty} t^{\ell-1} e^{-(\lambda+2/\gamma)t} dt = \left( \frac{\lambda}{\lambda+2/\gamma} \right)^\ell. \quad (\text{C.12})$$

Le calcul de  $\tilde{X}_1^{k,\ell}$  est bien plus complexe. Commençons par poser  $t := \Delta\tau_{k,\ell}$  et donc  $Q_t = Q^{k,\ell}$ ,  $q_t = q_1^{k,\ell}$  et  $\varepsilon_t = \varepsilon_1^{k,\ell}$ . De nouveau en utilisant la propriété 1, nous obtenons que

$$\tilde{X}_1^{k,\ell} = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \int_0^{+\infty} [\delta_{Q_t} + 1] t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_t) \cdot r_{ww}^2(t - Q_t N_f T_f - q_t T_c) dt.$$

Découpons d'abord l'intervalle d'intégration  $[0, +\infty)$  en une infinité d'intervalles de longueur  $N_f T_f$ . Nous avons donc

$$\tilde{X}_1^{k,\ell} = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nN_f T_f}^{(n+1)N_f T_f} [\delta_{Q_t} + 1] t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_t) \cdot r_{ww}^2(t - Q_t N_f T_f - q_t T_c) dt.$$

Or sur l'intervalle  $[nN_f T_f, (n+1)N_f T_f[$ , nous pouvons montrer que  $Q_t = Q_{nN_f T_f} = n$  ce qui implique que

$$\tilde{X}_1^{k,\ell} = \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nN_f T_f}^{(n+1)N_f T_f} [\delta_n + 1] t^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)t} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_t) \cdot r_{ww}^2(t - nN_f T_f - q_t T_c) dt.$$

À l'intégrale opérant sur l'intervalle  $[nN_f T_f, (n+1)N_f T_f[$ , appliquons le changement de variable suivant  $t \mapsto t - nN_f T_f$ , il s'en suit que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \\ &\times \int_0^{N_f T_f} [\delta_n + 1] (t + nN_f T_f)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_f T_f)} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_{t+nN_f T_f}) \cdot r_{ww}^2(t - q_{t+nN_f T_f} T_c) dt. \end{aligned}$$

En découpant l'intervalle  $[0, N_f T_f[$  en  $N_c N_f$  intervalles de longueur  $T_c$ , nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{N_c N_f - 1} \\ &\times \int_{n' T_c}^{(n'+1) T_c} [\delta_n + 1] (t + nN_f T_f)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_f T_f)} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_{t+nN_f T_f}) \cdot r_{ww}^2(t - q_{t+nN_f T_f} T_c) dt. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle  $[n'T_c, (n' + 1)T_c[$ , nous remarquons que le terme  $q_{t+nN_fT_f} = q_{n'T_c} = n'$  quelque soit l'entier  $n$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{N_c N_f - 1} \\ &\times \int_{n'T_c}^{(n'+1)T_c} [\delta_n + 1] (t + nN_f T_f)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_f T_f)} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(n') \cdot r_{ww}^2(t - n'T_c) dt. \end{aligned}$$

Enfin, à l'intégrale opérant sur l'intervalle  $[n'T_c, (n' + 1)T_c[$ , appliquons le changement de variable suivant  $t \mapsto t - n'T_c$ , il s'en suit que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{N_c N_f - 1} \\ &\times \int_0^{T_c} [\delta_n + 1] (t + nN_f T_f + n'T_c)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)(t+nN_f T_f+n'T_c)} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(n') \cdot r_{ww}^2(t) dt. \end{aligned}$$

En remplaçant les variables muettes  $t$  par  $\varepsilon$ ,  $n$  par  $Q$  et  $n'$  par  $q$  et en sortant des intégrales tout ce qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ , nous obtenons la formule finale suivante

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{k,\ell} &= \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell-1)!} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) \sum_{Q=0}^{+\infty} [\delta_Q + 1] e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

En réunissant (C.12) et (C.13), on obtient

$$\begin{aligned} Y_1^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k, \ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} (\mathcal{C}_{1,1}^+(q))^2 \sum_{Q=0}^{+\infty} [\delta_Q + 1] e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned}$$

en posant

$$\mathcal{C}(k, \ell) := \frac{\lambda^k}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell (k - \ell - 1)!}.$$

Les termes  $\bar{Y}_1^{k,\ell}$ ,  $\bar{Y}_2^{k,\ell}$ ,  $Y_3^{k,\ell}$ ,  $\bar{Y}_3^{k,\ell}$ , et  $\bar{Y}_4^{k,\ell}$  ont les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k, \ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) \sum_{Q=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k, \ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q) \sum_{Q=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k, \ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) \sum_{Q=0}^{+\infty} [\delta_Q + 1] e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_3^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k,\ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) \sum_{Q=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\
&\quad \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon, \\
\bar{Y}_4^{k,\ell} &= \mathcal{C}(k,\ell) \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1) \sum_{Q=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \\
&\quad \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon.
\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions précédentes dans (C.5) et après quelques manipulations algébriques aisées, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,d,\tau}[(z_2)^2] &= \sigma_a^4 \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \left[ 2[(\delta_Q + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q)] \cdot \Phi_{L_r, L_r}(Q, q) \right. \\
&\quad + 2[(\delta_Q + 1)\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1)] \cdot \Psi_{L_r, L_r}(Q, q) \\
&\quad \left. + [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q)] \cdot \Phi_{N_p, L_r}(Q, q) + [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1)] \cdot \Psi_{N_p, L_r}(Q, q) \right],
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_{N,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^N \frac{\lambda^k}{(k - \ell - 1)!} \\
&\quad \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon, \\
\Psi_{N,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^N \frac{\lambda^k}{(k - \ell - 1)!} \\
&\quad \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon - T_c) d\varepsilon.
\end{aligned}$$

### C.3 Preuve de la Propriété 12

Nous rappelons, ci-dessous, la définition de  $\Phi_{N,L}(Q, q)$  (cf. Théorème 2)

$$\begin{aligned}
\Phi_{N,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^N \frac{\lambda^k}{(k - \ell - 1)!} \\
&\quad \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon.
\end{aligned}$$

En posant  $m = k - \ell - 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Phi_{N,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \sum_{m=0}^{N-\ell-1} \frac{\lambda^{m+\ell+1}}{m!} \\
&\quad \times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^m e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité suivante [76]

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x \frac{\Gamma(n+1, x)}{\Gamma(n+1)}, \quad n \geq 0, \tag{C.15}$$

nous avons, pour  $N \geq \ell + 1$ ,

$$\sum_{m=0}^{N-\ell-1} \frac{\lambda^m}{m!} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^m = e^{\lambda(QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)} \frac{\Gamma(N - \ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(N - \ell)}.$$

Remplacer cette dernière égalité dans l'expression (C.14) de  $\Phi_{N,L}(Q, q)$  n'est possible que si la condition  $N \geq \ell + 1$  est vérifiée quelque soit  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , c.-à-d., si  $N > L$ . Il advient que

$$\Phi_{N,L}(Q, q) = e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^L \frac{\lambda^{\ell+1}}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \int_0^{T_c} \frac{\Gamma(N - \ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(N - \ell)} e^{-\varepsilon/\gamma} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon.$$

L'expression de  $\Psi_{N,L}(Q, q)$ , pour  $N > L$ , s'obtient de manière analogue.

Le cas  $N = L$  doit être traité séparément. En examinant attentivement (C.14), nous remarquons que le terme associé à  $\ell = L$  est nul puisque la seconde somme admet comme borne inférieure  $k = L + 1$  et comme borne supérieure  $L$ . Ainsi la première somme de (C.14), lorsque  $N = L$ , n'est compris qu'entre  $\ell = 1$  et  $\ell = L - 1$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \Phi_{L,L}(Q, q) &= e^{-(\lambda+1/\gamma)(QN_f T_f + qT_c)} \sum_{\ell=1}^{L-1} \frac{1}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \sum_{k=\ell+1}^L \frac{\lambda^k}{(k - \ell - 1)!} \\ &\times \int_0^{T_c} (QN_f T_f + qT_c + \varepsilon)^{k-\ell-1} e^{-(\lambda+1/\gamma)\varepsilon} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (C.15), nous obtenons la simplification suivante.

$$\Phi_{L,L}(Q, q) = e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^{L-1} \frac{\lambda^{\ell+1}}{(\lambda + 2/\gamma)^\ell} \int_0^{T_c} \frac{\Gamma(L - \ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(L - \ell)} e^{-\varepsilon/\gamma} r_{ww}^2(\varepsilon) d\varepsilon.$$

L'expression de  $\Psi_{L,L}(Q, q)$  s'obtient de manière analogue.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que les termes  $\Phi_{1,1}(Q, q)$  et  $\Psi_{1,1}(Q, q)$  sont nuls.

## C.4 Expression analytique de la variance de l'ISI / IFI pour une modulation PPM

La démarche pour obtenir l'expression analytique de la variance de l'ISI / IFI est en tout point identique à celle menée dans le contexte de la modulation PAM. Néanmoins, les calculs s'avèrent plus fastidieux, notamment en raison du fait que les symboles d'une modulation PPM ne sont pas à moyenne nulle. Par conséquent, de nombreux termes qui disparaissaient dans le contexte de la PAM sont conservés au niveau de l'expression de la variance de l'ISI / IFI quand une modulation PPM est employée.

Nous remarquons que l'équation (3.8) est valable tant pour la modulation PAM que la modulation PPM puisque aucune structure particulière du terme  $y_{k,\ell,1}(0)$  n'a été utilisée pour établir cette équation.

La différenciation entre la modulation PAM et la modulation PPM débute maintenant car nous souhaitons exprimer  $\rho_{k,\ell,1}$  et  $\mu_{k,\ell,1}$  en fonction des symboles.

En utilisant la définition (3.9) de  $\rho_{k,\ell,1}$  et l'expression de  $y_{k,\ell,1}(0)$  donnée à la propriété 3, nous pouvons

développer le terme  $\rho_{k,\ell,1}$  de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\rho_{k,\ell,1} &= \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell})r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})),
\end{aligned}$$

où la fonction  $s \mapsto r_{vw}(s)$  est définie par (1.27).

En procédant de manière similaire, nous obtenons l'expression suivante pour  $\mu_{k,\ell,1}$

$$\begin{aligned}
\mu_{k,\ell,1} &= \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k})) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{\ell,k} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{\ell,k} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{\ell,k} - 1)).
\end{aligned}$$

Comme le support temporel de l'impulsion  $w(t)$  et comme le décalage temporel de la PPM  $\delta$  sont très petits devant la durée d'un chip  $T_c$ , nous avons  $r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(i_1)) \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(i_2)) = 0, \forall i_1, i_2$ , car les deux fonctions composant ce produit ne peuvent être non nulles simultanément. Ceci implique que  $\rho_{k,\ell,1}$  peut se simplifier de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\rho_{k,\ell,1} &= \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1)) \\
&+ \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell})r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})) \\
&+ 2\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell})).
\end{aligned}$$

De la même manière et aussi grâce à l'utilisation supplémentaire des égalités (C.1), (C.2) et (C.3), nous simplifions



$\mu_{k,\ell,1}$  comme suit

$$\begin{aligned}
 \mu_{k,\ell,1} = & \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(-\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell} + 1)) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(-\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell})) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(-\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell} + 1)) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(-\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell})) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(T_c - \varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell} + 1)) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(T_c - \varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell})) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell}))r_{vw}(T_c - \varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell} + 1)) \\
 & + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta d_1(-Q_1^{k,\ell} - 1))r_{vw}(T_c - \varepsilon_1^{k,\ell} + \delta d_1(Q_1^{k,\ell})).
 \end{aligned}$$

Il convient maintenant de moyenniser les deux termes  $\rho_{k,\ell,1}$  et  $\mu_{k,\ell,1}$  sur les symboles PPM.

Dans le cadre d'une 2-PPM, nous montrons facilement que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_d[r_{vw}^2(u + \delta d_1(i))] &= \frac{1}{2}[r_{vw}^2(u) + r_{vw}^2(u + \delta)], \\
 \mathbb{E}_d[r_{vw}(u_1 + \delta d_1(i_1))r_{vw}(u_2 + \delta d_1(i_2))] &= \frac{1}{4}[r_{vw}(u_1) + r_{vw}(u_1 + \delta)][r_{vw}(u_2) + r_{vw}(u_2 + \delta)], \quad i_1 \neq i_2,
 \end{aligned}$$

puisque les symboles  $\{d_n(i)\}_i$  sont *i.i.d.* et prennent de manière équiprobable la valeur 0 ou  $\delta$ .

On obtient alors que le terme  $\rho_{k,\ell,1}$  moyenné sur les symboles s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_d[\rho_{k,\ell,1}] &= \frac{1}{2} \left[ [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})] [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)] \right. \\
 &+ [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)] [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)] \\
 &+ \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell}) [r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)]^2 \\
 &+ \left. \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1) [r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)]^2 \right].
 \end{aligned}$$

Le moyennage de  $\mu_{k,\ell,1}$  sur les symboles est plus fastidieux que celui de  $\rho_{k,\ell,1}$ . En utilisant (1.31) et le fait que  $v(t) = w(t) - w(t - \delta)$ , nous montrons facilement que  $r_{vw}(u) = r_{vw}(u) - r_{vw}(u - \delta)$  ce qui implique

$$r_{vw}(-u) = -r_{vw}(u + \delta). \quad (\text{C.16})$$

Par conséquent on obtient que  $\mu_{k,\ell,1}$  moyenné sur les symboles admet l'expression suivante

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_d[\mu_{k,\ell,1}] &= -\frac{1}{4} \left[ [\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})]^2 [r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)]^2 \right. \\
 &+ \left. [\mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)]^2 [r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)]^2 \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi la variance de l'ISI / IFI moyennée sur les amplitudes et les symboles dans le cas d'une 2-PPM s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] &= \sum_{\ell \in \mathcal{L}} I_1^\ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} I_1^k \left[ a_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)] + b_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell})r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta) \right. \\
 &+ \left. c_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)] + d_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c)r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta) \right],
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
a_{k,\ell} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}}{2} \right] [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})] + \frac{1}{2} [1 - \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \mathcal{C}_{1,1}^{+1}(q_1^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,1}^{-1}(q_1^{k,\ell}), \\
b_{k,\ell} &= [1 - \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \mathcal{C}_{1,1}^{+1}(q_1^{k,\ell}) \mathcal{C}_{1,1}^{-1}(q_1^{k,\ell}) - \frac{\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}}{2} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})], \\
c_{k,\ell} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}}{2} \right] [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)] + \frac{1}{2} [1 - \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \mathcal{C}_{1,1}^{+1}(q_1^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,1}^{-1}(q_1^{k,\ell} + 1), \\
d_{k,\ell} &= [1 - \mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}] \mathcal{C}_{1,1}^{+1}(q_1^{k,\ell} + 1) \mathcal{C}_{1,1}^{-1}(q_1^{k,\ell} + 1) - \frac{\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}}{2} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)].
\end{aligned}$$

Comme dans le contexte de la PAM, avant de moyennner le terme  $\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2]$  sur les retards, il faut ré-écrire ce terme en ne faisant intervenir que des différences de retards positives. De plus le calcul ne sera conduit que dans le cadre d'un récepteur rake partiel, c.-à-d., lorsque  $\mathcal{L} = \{1, \dots, L_r\}$  avec  $L_r \leq N_p$ . Nous avons alors

$$\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} g(k, \ell) = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=1}^{\ell-1} g(k, \ell) + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(k, \ell) + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} g(k, \ell), \quad (\text{C.17})$$

avec

$$\begin{aligned}
g(k, \ell) &= I_1^k I_1^\ell \left[ a_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)] + b_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell}) r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta) \right. \\
&\quad \left. + c_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)] + d_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta) \right].
\end{aligned}$$

Après un changement variable dans le premier terme de la partie droite de l'équation (C.17), nous avons

$$\mathbb{E}_{a,d}[z_2^2] = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(\ell, k) + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(k, \ell) + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} g(k, \ell).$$

En utilisant la relation (C.16) ainsi que (C.1), (C.2) et (C.3), il est aisé de voir que  $g(\ell, k) = g(k, \ell)$ . Par conséquent, nous obtenons que

$$\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] = \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{N_p} g(k, \ell) = 2 \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=\ell+1}^{L_r} g(k, \ell) + \sum_{\ell=1}^{L_r} \sum_{k=L_r+1}^{N_p} g(k, \ell).$$

Finalement la variance de l'ISI / IFI moyennée sur les amplitudes et les symboles s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,d}[(z_2)^2] &= 2 \sum_{\ell=1}^{L_r} I_1^\ell \sum_{k=\ell+1}^{L_r} I_1^k \left[ \tilde{a}_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)] + \tilde{b}_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell}) r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{c}_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)] + \tilde{d}_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta) \right] \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{L_r} I_1^\ell \sum_{k=L_r+1}^{N_p} I_1^k \left[ \hat{a}_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell}) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta)] + \hat{b}_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell}) r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} + \delta) \right. \\
&\quad \left. + \hat{c}_{k,\ell} \cdot [r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta)] + \hat{d}_{k,\ell} \cdot r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c) r_{vw}(\varepsilon_1^{k,\ell} - T_c + \delta) \right],
\end{aligned}$$

où  $\tilde{a}_{k,\ell}$ ,  $\tilde{b}_{k,\ell}$ ,  $\tilde{c}_{k,\ell}$  et  $\tilde{d}_{k,\ell}$  se déduisent de  $a_{k,\ell}$ ,  $b_{k,\ell}$ ,  $c_{k,\ell}$  et  $d_{k,\ell}$  en remplaçant  $\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}$  par 1 puisque les sommes agissant sur  $\tilde{a}_{k,\ell}$ ,  $\tilde{b}_{k,\ell}$ ,  $\tilde{c}_{k,\ell}$  et  $\tilde{d}_{k,\ell}$  ne font intervenir que des indices  $k$  appartenant à  $\mathcal{L}$ . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{k,\ell} &= \frac{1}{4} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})], \\
\tilde{b}_{k,\ell} &= -\frac{1}{2} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell})], \\
\tilde{c}_{k,\ell} &= \frac{1}{4} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)], \\
\tilde{d}_{k,\ell} &= -\frac{1}{2} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1)].
\end{aligned}$$

et où  $\hat{a}_{k,\ell}$ ,  $\hat{b}_{k,\ell}$ ,  $\hat{c}_{k,\ell}$  et  $\hat{d}_{k,\ell}$  se déduisent de  $a_{k,\ell}$ ,  $b_{k,\ell}$ ,  $c_{k,\ell}$  et  $d_{k,\ell}$  en remplaçant  $\mathbb{1}_{k \in \mathcal{L}}$  par 0 puisque les sommes agissant sur  $\hat{a}_{k,\ell}$ ,  $\hat{b}_{k,\ell}$ ,  $\hat{c}_{k,\ell}$  et  $\hat{d}_{k,\ell}$  ne font intervenir que des indices  $k$  n'appartenant pas à  $\mathcal{L}$ . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\hat{a}_{k,\ell} &= \frac{1}{2} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell}) + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell})], \\ \hat{b}_{k,\ell} &= \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell})\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell}), \\ \hat{c}_{k,\ell} &= \frac{1}{2} [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q_1^{k,\ell} + 1) + \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1)], \\ \hat{d}_{k,\ell} &= \mathcal{C}_{1,1}^+(q_1^{k,\ell} + 1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q_1^{k,\ell} + 1).\end{aligned}$$

Le moyennage sur les retards s'effectue de la même manière que dans le cas de la PAM. Par conséquent, nous ne montrons que les résultats finaux en régime asymptotique, c.-à-d. pour  $N_p \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}V_{\text{ISI}\infty} &= \frac{\sigma_a^4}{2} \sum_{Q=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{N_c N_f - 1} \left[ [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q)] [\mathcal{E}^{(1)}(Q, q) + \mathcal{F}^{(1)}(Q, q)] + \mathcal{C}_{1,1}^+(q)\mathcal{C}_{1,1}^-(q)\mathcal{G}^{(1)}(Q, q) \right. \\ &\quad \left. + [\mathcal{C}_{1,1}^{+2}(q+1) + \mathcal{C}_{1,1}^{-2}(q+1)] [\mathcal{E}^{(2)}(Q, q) + \mathcal{F}^{(2)}(Q, q)] + \mathcal{C}_{1,1}^+(q+1)\mathcal{C}_{1,1}^-(q+1)\mathcal{G}^{(2)}(Q, q) \right]\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(1)}(Q, q) &:= \lambda e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^{L-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^\ell \\ &\quad \times \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} \frac{\Gamma(L-\ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(L-\ell)} (r_{vw}(\varepsilon) - r_{vw}(\varepsilon + \delta))^2 d\varepsilon, \\ \mathcal{E}^{(2)}(Q, q) &:= \lambda e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \sum_{\ell=1}^{L-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^\ell \\ &\quad \times \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} \frac{\Gamma(L-\ell, \lambda[QN_f T_f + qT_c + \varepsilon])}{\Gamma(L-\ell)} (r_{vw}(\varepsilon - T_c) - r_{vw}(\varepsilon - T_c + \delta))^2 d\varepsilon, \\ \mathcal{F}^{(1)}(Q, q) &:= e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^{L_r} \right] \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} (r_{vw}^2(\varepsilon) + r_{vw}^2(\varepsilon + \delta)) d\varepsilon, \\ \mathcal{F}^{(2)}(Q, q) &:= e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^{L_r} \right] \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} (r_{vw}^2(\varepsilon - T_c) + r_{vw}^2(\varepsilon - T_c + \delta)) d\varepsilon, \\ \mathcal{G}^{(1)}(Q, q) &:= e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^{L_r} \right] \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} (r_{vw}(\varepsilon) + r_{vw}(\varepsilon + \delta))^2 d\varepsilon, \\ \mathcal{G}^{(2)}(Q, q) &:= e^{-(QN_f T_f + qT_c)/\gamma} \frac{\lambda^2 \gamma}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2/\gamma} \right)^{L_r} \right] \int_0^{T_c} e^{-\varepsilon/\gamma} (r_{vw}(\varepsilon - T_c) + r_{vw}(\varepsilon - T_c + \delta))^2 d\varepsilon.\end{aligned}$$

## C.5 Expression analytique de la variance du signal utile pour une modulation PPM

Pour calculer la variance du signal utile, une démarche identique à celle appliquée pour la PAM peut être employée. Puisque les amplitudes sont supposées indépendantes et à moyenne nulle, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_a [(z_1)^2] &= N_f^2 r_{vw}^2(\delta d_1(0)) \times \sum_{\ell, \ell'=1}^{L_r} \mathbb{E}_a [A_1^\ell A_1^{\ell'} A_1^{\ell'} A_1^\ell] \\ &= N_f^2 r_{vw}^2(\delta d_1(0)) \times \left[ \sum_{\ell=1}^{L_r} J_1^\ell + \sum_{\ell_1=1}^{L_r} I_1^{\ell_1} \sum_{\substack{\ell_2=1 \\ \ell_2 \neq \ell_1}}^{L_r} I_1^{\ell_2} \right],\end{aligned}\tag{C.18}$$

Soit

$$U := \mathbb{E}_{a,d,\tau}[(z_1)^2]$$

la variance du signal utile. D'après (C.18), nous obtenons facilement que  $U$  s'exprime de la manière suivante dans le contexte d'une modulation 2-PPM.

$$U = \frac{N_f^2}{2} [r_{vw}^2(0) + r_{vw}^2(\delta)] \lambda \gamma \left[ \frac{\mu_a^4}{2} + \lambda \gamma + \left( \frac{1}{1 + 2/\lambda \gamma} \right)^{L_r} \left( 2 - \frac{\mu_a^4}{2} + \lambda \gamma \right) - 2 \left( \frac{1}{1 + 1/\lambda \gamma} \right)^{L_r} (1 + \lambda \gamma) \right].$$

## Annexe D

# Annexe relative au chapitre 4

### D.1 Propriétés de $\kappa_{1,n}$ pour les codes à valeurs dans $\{-1, +1\}$

On cherche à démontrer que pour des codes à valeurs dans  $\{-1, +1\}$ , la valeur minimale de

$$\kappa_{1,n} = \sum_{q=0}^{N-1} \mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q) + \mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)$$

vaut  $N$ , où  $N = N_c^{\text{DS-CDMA}}$  dans le cas du signal DS-CDMA et  $N = N_c^{\text{DS-UWB}}$  pour les signaux DS-UWB. De cette démonstration découle d'autres propriétés sur les valeurs des  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$ ,  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,n}(q)$ .

La démonstration consiste à établir que les valeurs minimum de  $\mathcal{C}_{1,n}^{+2}(q)$  et  $\mathcal{C}_{1,n}^{-2}(q)$  sont alternativement 0 ou 1 en fonction de la parité de  $q$ . Cette propriété est simplement due au fait que suivant la parité de  $q$ , la somme définissant  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$  (ou  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$ ) contient un nombre pair ou impair de termes. Ces termes (produit de deux valeurs de codes) appartiennent à  $\{-1, +1\}$ , de sorte que la plus petite valeur en module que l'on peut obtenir est 0 lorsque le nombre de termes est pair et 1 lorsqu'il est impair. D'une manière plus précise, d'après les définitions (A.8) et (A.10), le nombre de termes de la somme de  $\mathcal{C}_{1,n}^+(q)$  est égal à  $N - q$  et celui de  $\mathcal{C}_{1,n}^-(q)$  est égal à  $q$ . Nous distinguons alors les cas  $N$  pair et impair.

#### Cas $N$ pair

Si nous construisons le tableau suivant qui donne la plus petite valeur que l'on peut obtenir pour  $|\mathcal{C}_{1,n}^+(q)|$  et  $|\mathcal{C}_{1,n}^-(q)|$  en fonction de  $q$ . En remarquant que  $N$  est pair,  $N - q$  à la même parité que  $q$ , nous obtenons :

$q$	0	1	2	3	...	$N - 2$	$N - 1$
$ \mathcal{C}_{m,n}^+(q) $	0	1	0	1		0	1
$ \mathcal{C}_{m,n}^-(q) $	0	1	0	1		0	1

Si on pose  $N = 2n$ , on en déduit que la première ligne est constituée de  $n$  valeurs à 1 de même que la deuxième ligne. On en déduit donc la relation recherchée :  $\min \kappa_{1,n} = 2n = N$ . On en déduit aussi que lorsque le min est atteint alors  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = 1$ ,  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 1$  et  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 1$ .

#### Cas $N$ impair

Construisons le même tableau que précédemment pour  $N$  impair, en remarquant que dans ce cas, la parité de  $N - q$  est l'opposée de celle de  $q$ . Nous obtenons alors :

$q$	0	1	2	3	...	$N - 2$	$N - 1$
$ \mathcal{C}_{m,n}^+(q) $	1	0	1	0		0	1
$ \mathcal{C}_{m,n}^-(q) $	0	1	0	1		1	0
$ \mathcal{C}_{m,n}(q) $	1	1	1	1		1	1

Si on pose  $N = 2n + 1$ , on en déduit que la première ligne est constituée de  $n + 1$  valeurs à 1 alors que la deuxième ligne en possède  $n$ . On en déduit donc la relation recherchée :  $\min \kappa_{1,n} = 2n + 1 = N$ . On en déduit aussi que lorsque le min est atteint alors  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)| = 1$ ,  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 1$  et  $\sup_q |\mathcal{C}_{1,n}^+(q)\mathcal{C}_{1,n}^-(q)| = 0$ . Nous avons aussi déduit la valeur de  $|\mathcal{C}_{m,n}(q)|$  dans le tableau qui vaut toujours 1 quelque soit la valeur de  $q$ .

# Bibliographie

- [1] J. R. PIERCE et A. L. HOPPER, « Nonsynchronous time division with holding and with random sampling », *Proc. of the Institute of Radio Engineer*, vol. 40, p. 1079–1088, sept. 1952.
- [2] G. F. ROSS, « Transmission and reception system for generating and receiving base-band duration pulse signals for short base-band duration pulse without distortion for short base-band pulse communication system ». U. S. Patent 3728632, avril 1973.
- [3] P. II. WITHINGTON et L. W. FULLERTON, « An impulse radio communications system », in *Proc. of the Int. Conf. on Ultra-Wide Band, Short-Pulse Electromagnetics*, p. 113–120, Brooklyn, NY, USA, oct. 1992.
- [4] R. A. SCHOLTZ, « Multiple access with time-hopping impulse radio », in *Proc. of the Milcom Conf.* (Boston, MA, USA), p. 447–450, oct. 1993.
- [5] FEDERAL COMMUNICATIONS COMMISSION, « Revision of part 15 of the commission's rules regarding ultra-wideband transmission systems, first report and order ». FCC, fév. 2002.
- [6] R. J. FONTANA, « Recent system applications of short-pulse ultra-wideband (UWB) technology », *IEEE Trans. on Microwave and Techniques*, vol. 52, sept. 2004.
- [7] M. WIN et R. A. SCHOLTZ, « Ultra-wide bandwidth time-hopping spread-spectrum impulse radio for wireless multiple-access communications », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 48, p. 679–691, avril 2000.
- [8] A. F. MOLISH, J. R. FOERSTER et M. PENDERGRASS, « Channel models for ultrawideband personal area networks », *IEEE Wireless Communications*, vol. 10, p. 14–21, déc. 2003.
- [9] C. J. Le MARTRET et G. B. GIANNAKIS, « All-digital impulse radio for wireless cellular system », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 50, p. 1440–1450, sept. 2002.
- [10] V. LOTTICI, A. N. D'ANDREA et U. MENGALI, « Channel estimation for ultra-wideband communications », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 20, p. 1638–1645, déc. 2002.
- [11] M. WIN, R. A. SCHOLTZ et L. W. FULLERTON, « Time-hopping SSMA techniques for impulse radio with an analog modulated data subcarrier », in *IEEE 4th International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications Proceedings*, vol. 1, (Mainz, Germany), p. 359–364, sept. 1996.
- [12] M. Z. WIN et R. A. SCHOLTZ, « Impulse radio : how it works », *IEEE Communications Letters*, vol. 2, p. 36–38, fév. 1998.
- [13] F. RAMÍREZ-MIRELES, « Error probability of ultra wideband ssma in a dense multipath environment », in *Proc. of the Milcom Conference*, vol. 2, (Anaheim, CA, USA), p. 1081–1084, oct. 2002.
- [14] L. G. Z. ZHANG, F. Zeng, « Multiple-access interference in relation to time-hopping correlation properties in multiple-access uwb system », in *IEEE Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies*, (Reston, Virginia, USA), p. 453–457, nov. 2003.
- [15] M. Z. WIN, F. RAMÍREZ-MIRELES, R. A. SCHOLTZ et M. A. BARNES, « Ultra-wide band (UWB) signal propagation for outdoor wireless communications », in *Proc. of the IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 1, p. 251–255, mai 1997.
- [16] M. Z. WIN, R. A. SCHOLTZ et M. A. BARNES, « Ultra-wide bandwidth signal propagation for indoor wireless communications », in *Proc. of the IEEE International Conference on Communications Vehicular Technology Conference*, vol. 1, p. 56–60, juin 1997.

- [17] C.-C. CHONG, Y. KIM et S.-S. LEE, « UWB indoor propagation channel measurements and data analysis in various types of high-rise apartments », in *Proc. of the IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 1, (Los Angeles, CA, USA), p. 150–154, sept. 2004.
- [18] R. C. QIU, « A study of the ultra-wideband wireless propagation channel and optimum UWB receiver design », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 20, p. 1628–1637, déc. 2002.
- [19] B. UGUEN, E. PLOUHINEC, Y. LOSTANLEN et G. CHASSAY, « A deterministic ultra wideband channel modeling », in *Proc. of the IEEE Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies*, (Baltimore, USA), p. 1–5, mai 2002.
- [20] A. A. M. SALEH et R. A. VALENZUELA, « A statistical model for indoor multipath propagation », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-5, p. 128–137, fév. 1987.
- [21] « IEEE 802.15.3a WPAN high rate alternative phy task group 3a (tg3a) ». <http://www.ieee802.org/15/pub/TG3a.html>.
- [22] H. LEE, B. HAN, Y. SHIN et S. IM, « Multipath characteristics of impulse radio channels », in *Proc. of IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 3, (Tokyo Japan), p. 2487–2491, mai 2000.
- [23] H. HASHEMI, « The indoor radio propagation channel », *Proc. of the IEEE*, vol. 81, p. 943–968, juil. 1993.
- [24] R. et R. A. SCHOLTZ, « Comparison of CDMA and modulation schemes for uwb radio in a multipath environment », in *Proc. of the IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom)*, vol. 2, (San Francisco, CA, USA), p. 754–758, déc. 2003.
- [25] A. F. MOLISCH, « Statistical properties of the RMS delay spread of mobile radio channels with independent rayleigh-fading paths », *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 45, p. 201–204, fév. 1996.
- [26] M. SÁNCHEZ VARELA et M. Garcíá SÁNCHEZ, « RMS delay and coherence bandwidth measurements in indoor radio channels in the UHF band », *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 50, p. 515–525, mars 2001.
- [27] A. RAJESWARAN, V. Srinivasa SOMAYAZULU et J. R. FOERSTER, « Rake performance for a pulse based UWB system in a realistic UWB indoor channel », in *Proc. of the IEEE International Conference on Communications*, (Anchorage, USA), p. 2879–2883, mai 2003.
- [28] R. TESI, J. IINATTI, I. OPPERMAN et V. HOVINEN, « On the multi-user interference study for ultra wide-band communication systems in AWGN and modified Saleh-Valenzuela channel », in *Proc. of International Workshop of Ultra Wide Band Systems joint with Conference on Ultra Wide Band Systems and Technologies*, (Kyoto, Japan), mai 2004.
- [29] T. ERSEGHE, *Ultra wide band pulse communications*. Thèse de doctorat, Università degli Studi di Padova, déc. 2001.
- [30] C. Corrada BRAVO, R. A. SCHOLTZ et P. V. KUMAR, « Generating TH-SSMA sequences with good correlation and approximately flat PSD level », in *UWB Conference for Radio and Radar Technology*, (Washington DC, USA), sept. 1999.
- [31] O. MORENO et S. V. MARIĆ, « A new family of frequency hop codes », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 48, p. 1241–1244, août 2000.
- [32] I. GÜVENÇ et H. ARSLAN, « Design and performance analysis of th-sequences for UWB-IR systems », in *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, (Atlanta, Georgia, USA), p. 914–919, mars 2004.
- [33] W. CHU et C. J. COLBOURN, « Sequence designs for ultra-wideband impulse radio with optimal correlation properties », *IEEE Trans. on information theory*, vol. 50, oct. 2004.
- [34] A. R. FOROUZAN, M. NASIRI-KENARI et J. A. SALEHI, « Performance analysis of ultrawideband time-hopping code division multiple access systems : uncoded and coded schemes », in *Proc. of the IEEE International Conference on Communications*, p. 3017–3021, juin 2001.



- [35] G. DURISI et G. ROMANO, « On the validity of gaussian approximation to characterize the multiuser capacity of UWB TH-PPM », in *Proc. of the IEEE Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies 2002, Digest of Papers*, (Baltimore, USA), p. 157–162, mai 2002.
- [36] A. R. FOROUZAN, M. NASIRI-KENARI et J. A. SALEHI, « Performance of ultrawideband time-hopping code division multiple access systems : uncoded and coded schemes », *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 1, p. 671–681, oct. 2002.
- [37] K. A. HAMDY et X. GU, « Bit error rate analysis for TH-CDMA/PPM impulse radio networks », in *Proc. of the IEEE Wireless Communications and Networking*, vol. 1, (New-Orleans, LA, USA), p. 167–172, mars 2003.
- [38] B. HU et N. C. BEAULIEU, « Exact bit error rate analysis of TH-PPM UWB systems in the presence of multiple-access interference », *IEEE Communications Letters*, vol. 7, p. 572–574, déc. 2003.
- [39] G. DURISI et S. BENEDETTO, « Performance evaluation of TH-PPM UWB systems in the presence of multiuser interference », *IEEE Communications Letters*, vol. 7, p. 224–226, mai 2003.
- [40] B. HU et N. C. BEAULIEU, « Accurate performance evaluation of time-hopping and direct-sequence UWB systems in multi-user interference », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 53, p. 1053–1062, juin 2005.
- [41] J. L. MASSEY et J. J. UHRAN, « Sub-baud coding », in *Proc. of the 13th Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, (Monticello, IL, USA), p. 539–547, oct. 1975.
- [42] M. B. PURSLEY, « Performance evaluation for phase-coded spread-spectrum multiple access communication - part I : system analysis », *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-25, p. 795–799, août 1977.
- [43] R. GOLD, « Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. IT-13, p. 619–621, oct. 1965.
- [44] L. R. WELCH, « Lower bounds on the maximum cross correlation of signals », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. IT-20, p. 397–399, mai 1974.
- [45] M. B. PURSLEY et D. V. SARWATE, « Performance evaluation for phase-coded spread-spectrum multiple access communication - part II : code sequence analysis », *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-25, p. 800–803, août 1977.
- [46] A. G. BURR, « Codes for spread spectrum multiple access systems », in *Proc. of IEEE First International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, (London, UK), p. 109–115, sept. 2003.
- [47] K. H. A. KÄRKKÄINEN, « Mean-square cross-correlation as a performance measure for spreading codes families », in *Proc. of IEEE Second International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications (ISSA'92)*, (Yokohama, Japan), p. 147–150, déc. 1992.
- [48] C. J. LE MARTRET, A.-L. DELEUZE et P. CIBLAT, « Optimal time-hopping code for multi-user interference mitigation in ultra-wide bandwidth impulse radio », *Accepted to IEEE Trans. On Wireless Communications*, mars 2005.
- [49] A.-L. DELEUZE, C. J. LE MARTRET et P. CIBLAT, « Time hopping code characterization for multi-user interference mitigation in ultra wide band impulse radio », in *Proc. of IEEE Asilomar Conference on Signals Systems and Computer*, vol. 1, (Pacific Grove, CA, USA), nov. 2004.
- [50] M. Z. WIN et R. A. SCHOLTZ, « On the energy capture of ultrawide bandwidth signals in dense multipath environments », *IEEE Communications Letters*, vol. 2, p. 245–247, sept. 1998.
- [51] M. Z. WIN et Z. A. KOSTIC, « Virtual path analysis of selective receiver in dense multipath channels », *IEEE Communications Letters*, vol. 3, p. 308–310, nov. 1999.
- [52] J. FOERSTER, « The effects of multipath interference on the performance of UWB systems in an indoor wireless channel », in *Proc. IEEE Vehicular Technologies Conference*, (Rhodes, Greece), p. 1176–1180, mai 2001.

- [53] D. CASSIOLI, M. WIN, F. VATALARO et A. MOLISH, « Performance of low-complexity rake reception in a realistic UWB channel », in *Proc. of the IEEE International Conference on Communications (ICC)*, (New York, USA), p. 763–767, mai 2002.
- [54] J. D. CHOI et W. E. STARK, « Performance of ultra-wideband communications with suboptimal receivers in multipath channels », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 20, p. 1754–1766, déc. 2002.
- [55] Y. ISHIYAMA et T. OHTSUKI, « Performance comparison of UWB-IR using rake receiver in UWB channel models », in *Proc. of International Workshop of Ultra Wide Band Systems joint with Conference on Ultra Wide Band Systems and Technologies*, (Kyoto, Japan), p. 226–230, mai 2004.
- [56] T. CHONAVEL, *Statistical Signal Processing*. London : Springer-Verlag, 2002. Chapitre 14 pp. 185-201.
- [57] A. PARIHAR, L. LAMPE, R. SCHOBBER et C. LEUNG, « Analysis of equalization for DS-UWB systems », in *Accepted to IEEE International Conference on Ultra-Wideband*, (Zurich, Swi.), sept. 2005.
- [58] M. SAHIN et H. ARSLAN, « Inter symbol interference in high data rate UWB communications using energy detector receivers », in *IEEE International Conference on Ultra-Wideband*, (Zurich, Swi.), sept. 2005.
- [59] H. CELEBI et H. ARSLAN, « Cross-modulation interference for pulse position modulated UWB signals », in *IEEE International Conference on Military Communications (MILCOM)*, (Atlantic City, USA), oct. 2005.
- [60] A.-L. DELEUZE, P. CIBLAT et C. J. LE MARTRET, « Inter-symbol / inter-frame interference in time-hopping ultra wideband impulse radio system », in *Accepted to IEEE International Conference on Ultra-Wideband*, (Zurich, Swi.), sept. 2005.
- [61] M. B. PURSLEY et D. V. SARWATE, « Evaluation of correlation parameters for periodic sequences », *IEEE Trans. on Information Theory*, p. 508–513, juil. 1977.
- [62] E. H. DINAN et B. JABBARI, « Spreading codes for direct sequence CDMA and wideband CDMA cellular networks », *IEEE Communications Magazine*, vol. 36, p. 48–54, sept. 1998.
- [63] TIA / EIA / IS-95, « Mobile station-base station compatibility standard for dual-mode wideband spread spectrum cellular system, telecommunication industry association », juil. 1993.
- [64] B. HU et N. BEAULIEU, « Comparison of modulation schemes and rake receivers structures for UWB systems on an IEEE 802.15.3 indoor channel », in *IEEE International Conference on Communications (GLOBECOM)*, déc. 2005.
- [65] I. MARAVIC, M. VETTERLI et K. RAMCHANDRAN, « High resolution acquisition methods for wideband communication systems », in *Proc. of ICASSP*, p. 133–136, avril 2003.
- [66] X. LUO et G. GIANNAKIS, « Blind timing and channel estimation for UWB multi-user ad hoc access », in *Proc. of Asilomar COonference*, p. 642–646, nov. 2004.
- [67] N. LAURENTI, T. ERSEGHE et T. CELLINI, « On the performance of TH-PPM and TH-PAM as transmission formats for UWB communications », in *Proc. of the IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 2, (Los Angeles, CA, USA), p. 947–951, sept. 2004.
- [68] L. HUANG et C. CHUNG KO, « Performance of maximum-likelihood channel estimator for UWB communications », *IEEE Communications Letters*, vol. 8, juin 2004.
- [69] J. ZHANG, R. KENNEDY et T. ABHAYAPALA, « Cramer-rao lower bounds for the time-delay estimation of UWB signals », in *Proc. of ICC*, juin 2004.
- [70] S. GEZICI et et. AL., « Localization via Ultra Wideband radios », *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 22, p. 70–84, juil. 2005.
- [71] S. M. KAY, *Fundamentals of statistical signal processing : estimation theory*. Englewoods Cliffs : Prentice Hall, 1993.
- [72] A. N. D' ANDREA, U. MENGALI et R. REGGIANNINI, « The modified cramer rao bound and its application to synchronisation problem », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 42, p. 1391–1399, fév. 1994.

- 
- [73] O. BESSON et P. STOICA, « Training sequenc selection for frequency offset estimation in frequency selective channels », *Digital Signal Processing*, vol. 13, p. 106–127, 2003.
- [74] J. G. PROAKIS, *Digital Communications*. New York : Mc Graw-Hil, third éd., 1995.
- [75] A.-L. DELEUZE, C. LE MARTRET, P. CIBLAT et E. SERPEDIN, « Cramer rao bound for channel parameters in ultra wide band based system », in *Proc. of IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, (Lisbon, Portugal), juil. 2004.
- [76] « Exponential sum function ». From Mathworld A Wolfram Web Resource [http ://math-world.wolfram.com/ExponentialSumFunction.html](http://math-world.wolfram.com/ExponentialSumFunction.html).